



Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Programa de Pós graduação em Engenharia Mecânica

Dinâmica e Projeto de Controle Linear Ótimo aplicado
no movimento de pregas vocais com rigidez assimétrica

por

Sunamita Souza Silva de Alarcão

Ilha Solteira, 2018

SUNAMITA SOUZA SILVA

**Dinâmica e Projeto de Controle Linear Ótimo aplicado no
movimento de pregas vocais com rigidez assimétrica**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação
em Engenharia Mecânica como requisito à obten-
ção do título de

**Doutora em Engenharia
Mecânica**

Orientador: Prof. Dr. Fábio Roberto Chavarette

Ilha Solteira, SP

2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A321d Alarcão, Sunamita Souza Silva de.
Dinâmica e projeto de controle linear ótimo aplicado no movimento de
pregas vocais com rigidez assimétrica / Sunamita Souza Silva de Alarcão. -- Ilha
Solteira: [s.n.], 2018
122 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2018

Orientador: Fábio Roberto Chavarette
Inclui bibliografia

1. Controlador. 2. LQR. 3. Pregas vocais. 4. Assimetria.


João Josué Barbosa
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Dinâmica e Projeto de Controle Linear Ótimo Aplicado no Movimento de Pregas Vocais com Rigidez Assimétrica

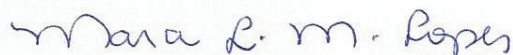
AUTORA: SUNAMITA SOUZA SILVA DE ALARCÃO

ORIENTADOR: FABIO ROBERTO CHAVARETTE

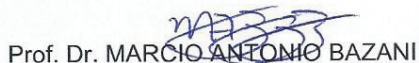
Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:



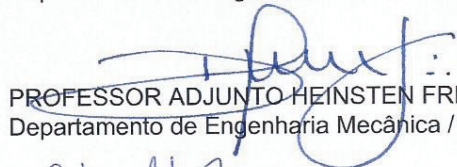
Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Profa. Dra. MARA LUCIA MARTINS LOPES
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



PROFESSOR ADJUNTO HEINSTEN FREDERICH LEAL DOS SANTOS
Departamento de Engenharia Mecânica / UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO



Prof. Dr. EDIVALDO ROMANINI
Curso de Matemática - Câmpus de Três Lagoas / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 22 de outubro de 2018

*A você minha princesa, Isabella Sophia,
minha inspiração, minha força
e minha maior alegria...*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, autor da minha vida, meu guia, socorro presente na hora da angústia, que iluminou meu caminho durante esta caminhada.

Os meus sinceros agradecimentos ao meu orientador professor Dr. Fábio Roberto Chavarette. Obrigada pela atenção, paciência, dedicação e confiança depositada em mim. Muito obrigada por acreditar em mim quando eu mesma não acreditava. Obrigada por ter sido paciente durante alguns momentos difíceis que passei durante o doutorado. Sua postura como profissional me servirão de exemplo por toda minha vida.

Aos meus pais pelo amor e apoio incondicional. À vocês o meu amor e agradecimento eterno. À minha filha que mesmo tão pequena tem me proporcionado tantas alegrias. Aos meus irmãos que sempre torceram pelo meu sucesso.

Ao professor Dr. Márcio Antônio Bazani e professora Dra. Mara Lúcia M. Lopes pelo acompanhamento durante o doutorado. Aos professores que participaram da banca e que enriqueceram este trabalho com suas correções e sugestões.

Ao Programa de pós graduação em Engenharia Mecânica juntamente com todo seu corpo docente e as pessoas com quem convivi ao longo desses anos. Foi a maior e melhor experiência da minha vida acadêmica. À secretária Elaine, obrigada pela amizade e pelo carinho.

Enfim, obrigada a todos aqueles que participaram e torceram para a concretização de mais um dos meus sonhos.

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes"

Isaac Newton

RESUMO

A voz é a principal ferramenta de comunicação da espécie humana e a maioria das pessoas dependem dela direta ou indiretamente em sua profissão. Sua produção deve-se ao funcionamento harmônico de sistemas fisiológicos distintos, resumidamente é o resultado da interação do fluxo de ar vindo dos pulmões, dos tecidos deformáveis das pregas vocais e da onda de pressão acústica.

Este trabalho inicialmente mostrará o estudo do comportamento assimétrico das pregas vocais causado por uma diferença entre a rigidez das pregas direita e esquerda. Para isso será utilizado uma modelagem que caracterizou-se como sistema de Van der Pol fortemente acoplado.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a dinâmica do movimento de pregas vocais com rigidez assimétrica e sincronizar este movimento através do método de controle linear ótimo, mostrando o seu funcionamento com valores distintos da rigidez para cada caso. Assim, o projeto de controle se mostra eficiente produzindo um bom funcionamento das pregas vocais, possibilitando a produção do som mesmo em pregas vocais doentes (assimétricas).

Palavras-chave: Controlador, LQR, pregas vocais, assimetria.

ABSTRACT

The Voice is the main means of communication of human beings, and most people depend directly or indirectly on it in their professions. Its emission is due to the harmonious operation of different physiological systems; in sum, it results from the interaction of air coming from the lungs, the deformable tissues of the vocal folds, and an acoustic pressure wave. Initially, this work shall present the asymmetric behavior of the vocal folds caused by a difference between the stiffness value of the right and left folds. To do so, a mathematical model characterized as a strongly coupled Van der Pol system was used. The main objective of this work is to study the dynamics of the movement of vocal folds with asymmetric stiffness and synchronize this movement through the optimal linear control method, showing their operation with different values of stiffness for each case. Therefore, the control design has proven to be efficient, generating a good operation for the vocal folds and rendering possible the emission of sound even in diseased (asymmetric) vocal folds.

Palavras-chave: Controller, LQR, vocal folds, asymmetry.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquema de camadas da prega vocal; Rosen, Simpson et al [28].	6
1.2	Anatomia das Pregas vocais em dois movimentos; imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.	7
1.3	Micronódulo das pregas vocais, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.	9
1.4	Pólipo em uma prega vocal, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.	9
1.5	Úlcera de contato na prega vocal, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.	10
1.6	Tumor na prega vocal, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.	10
1.7	Paralisia na prega vocal esquerda, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Marcia Sayuri Murao.	11
2.1	Retrato de fase do sistema não-linear (2.3), fonte: autor.	20
2.2	Retrato de fase do sistema linear (2.4), fonte: autor.	21
2.3	Variedade estável S e instável U, [64].	24
2.4	Variedade V,[64].	25
2.5	Homeomorfismo,[64].	34
2.6	Homeomorfismo, [64].	44

2.7	Expoentes de Lyapunov, [67].	45
2.8	Evolução de um elemento de volume esférico de raio δ_0 em torno de um ponto inicial, x_0 , [67]	46
2.9	Algoritmo de Wolf, [69]	48
2.10	Aranjo de Routh, [61].	49
3.1	Modelo mecânico para o movimento da prega vocal, fonte:autor	51
3.2	Representação esquemática das pregas vocais, [39].	52
3.3	Vista geométrica da laringe simplificada no sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) e variáveis aerodinâmicas do canal do fluxo, [54].	52
3.4	Seção frontal das pregas vocais, adaptado de [55].	54
3.5	Propagação da onda de mucosa, esquema de um ciclo oscilatório, adaptado de Hirano [27], [28].	56
3.6	Diagrama de estabilidade para o primeiro e segundo par de raízes	62
3.7	Bifurcação para $\mu = 0.3$, fonte: autor.	69
3.8	Distribuição das configurações para $\mu = 0.3$, fonte: autor.	70
3.9	Configuração 1, fonte: autor.	71
3.10	Configuração 2, fonte: autor.	72
3.11	Configuração 3, fonte: autor.	73
3.12	Configuração 4, fonte: autor.	74
3.13	Configuração 1(a), fonte: autor.	76
3.14	Configuração 1(b), fonte: autor.	76
3.15	Configuração 1(c), fonte: autor.	76
3.16	Configuração 1(d), fonte: autor.	76
3.17	Configuração 2(a), fonte: autor.	76
3.18	Configuração 2(b), fonte: autor.	76
3.19	Configuração 2(c), fonte: autor.	76
3.20	Configuração 2(d), fonte: autor.	76

3.21	Configuração 3(a), fonte: autor.	77
3.22	Configuração 3(b), fonte: autor.	77
3.23	Configuração 3(c), fonte: autor.	77
3.24	Configuração 3(d), fonte: autor.	77
3.25	Configuração 4(a), fonte: autor.	77
3.26	Configuração 4(b), fonte: autor.	77
3.27	Configuração 4(c), fonte: autor.	77
3.28	Configuração 4(d), fonte: autor.	77
4.1	Esquematização de Sistema de Controle em malha aberta, fonte: autor. . .	83
4.2	Esquematização de Sistema de Controle em malha fechada, [30].	83
4.3	Aplicação de um método de controle, [30].	84
4.4	Fluxograma de síntese do Controle Linear Ótimo, Chavarette [9]	86
4.5	Histórico no tempo para a configuração 1(a), fonte: autor	89
4.6	Histórico no tempo para a configuração 1(b), fonte: autor	90
4.7	Histórico no tempo para a configuração 1(c), fonte: autor	91
4.8	Histórico no tempo para a configuração 1(d), fonte: autor	92
4.9	Histórico no tempo para a configuração 2(a), fonte: autor	94
4.10	Histórico no tempo para a configuração 2(b), fonte: autor	95
4.11	Histórico no tempo para a configuração 2(c), fonte: autor	96
4.12	Histórico no tempo para a configuração 2(d), fonte: autor	97
4.13	Histórico no tempo para a configuração 3(a), fonte: autor	99
4.14	Histórico no tempo para a configuração 3(b), fonte: autor	100
4.15	Histórico no tempo para a configuração 3(c, fonte: autor)	101
4.16	Histórico no tempo para a configuração 3(d), fonte: autor	102
4.17	Histórico no tempo para a configuração 4(a), fonte: autor	104
4.18	Histórico no tempo para a configuração 4(b), fonte: autor	105
4.19	Histórico no tempo para a configuração 4(c), fonte: autor	106

4.20	Histórico no tempo para a configuração 4(d), fonte: autor	107
------	---	-----

SUMÁRIO

Sumário	3
1 Introdução	5
2 Noções preliminares	15
2.1 Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias	15
2.2 O Teorema da Variedade Estável	22
2.2.1 Interpretação de uma variedade.	22
2.2.2 Demonstração do Teorema da Variedade Estável.	25
2.3 O Teorema de Grobman-Hartman.	33
2.4 Expoentes de Lyapunov	45
2.4.1 Cálculo dos expoentes de Lyapunov	45
2.5 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	48
3 Modelagem matemática e análise para o caso assimétrico	50
3.1 A equação do movimento	50
3.2 Redução para um sistema de Van der Pol fortemente acoplado	57
3.3 Análise de estabilidade numérica e analítica	60
3.3.1 Estabilidade numérica	61
3.3.2 Estabilidade analítica	61

SUMÁRIO	4
3.3.3 Soluções sincronizadas	64
3.4 Cenários adotados	70
3.5 Cálculo do Expoente de Lyapunov	75
4 Controle Linear Ótimo	78
4.1 Motivação	78
4.2 Breve histórico	79
4.3 Estado da Arte	80
4.4 Descrição por Variáveis de Estado	81
4.5 Controlabilidade e Observabilidade	82
4.6 Sistemas de Controle em Malha Aberta e em Malha Fechada	82
4.7 Controle Ótimo via Regulador Quadrático Linear(LQR)	83
4.7.1 Formulação do controle linear	84
4.7.2 Controle Linear Ótimo aplicado ao Modelo	86
4.7.3 Resultados para Configuração 1	88
4.7.4 Resultados para Configuração 2	93
4.7.5 Resultados para Configuração 3	98
4.7.6 Resultados para Configuração 4	103
Referências Bibliográficas	110

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A fonação

A fala humana é um fenômeno complexo originado pela vibração das pregas vocais. Este fenômeno é causado pela passagem do fluxo de ar vindo pelos pulmões nas camadas da mucosa das pregas que vibram modulando o fluxo, resultando em uma onda de pressão acústica [40].

O processo de fonação deve-se a interação entre sistemas fisiológicos distintos cujos mecanismos atuam harmonicamente entre si produzindo o fenômeno de emissão vocal. De maneira resumida, o processo inicia-se com a corrente de ar proveniente dos pulmões que, ao trafegar através da laringe, excita as pregas vocais gerando um movimento de vibração coordenado. Esses movimentos produzem um sinal chamado pulso glotal, que determinará a frequência fundamental da voz, além de características primárias como a riqueza de harmônicos, sendo por isso considerado de grande importância no processo de elaboração da fala e nos estudos a seu respeito. Após a produção do pulso nas pregas vocais, o sinal é direcionado ao trato vocal e sucessivamente para a boca e cavidades nasais, onde sofrerá novas alterações espectrais resultando, por fim, no que chamamos de voz. Desse modo, é possível observar que o funcionamento das pregas vocais está diretamente ligado à qualidade vocal, de tal forma que, uma vez alterando o padrão de vibração, altera-se também a frequência fundamental, bem como os harmônicos e consequentemente todo processo fonatório. Assim, a compreensão das características e do funcionamento das pregas vocais tornou-se essencial para os campos da medicina e fonoaudiologia [3].

Fisiologia

O aparelho fonador é constituído pelos pulmões, laringe, faringe, boca e cavidade nasal. A laringe possui uma altura média de 5 à 6 cm em adultos. Sua anatomia está dividida em [27]:

- Região subglotal-porção mais inferior da laringe, estende-se da borda inferior das pregas vocais até o início da laringe;
- Região glotal ou glote- espaço vazio entre as pregas vocais;
- Região supraglotal-região do bordo superior das pregas vocais até o fim da laringe.

As pregas vocais possuem comprimento de 5 à 17 mm. É possível destacar o papel das pregas no processo da fonação como uma estrutura essencial. Elas possuem uma anatomia que permite as camadas da mucosa vibrar livremente sobre uma estrutura mais rígida das camadas inferiores. Conforme a Figura 1.1, a prega vocal pode ser dividida em três níveis: Mucosa, ligamento e músculo vocal. A mucosa tem como principal função no processo fonatório: a vibração, e pode ser subdividida em epitélio escamoso e lâmina própria superior, com textura gelatinosa, estas movem-se livremente sobre as estruturas inferiores. Abaixo da lâmina própria superior tem-se outras duas camadas de lâminas que formam o ligamento vocal. As três camadas de lâminas são distintas no sentido de que à medida que se aproximam do músculo vocal (camada mais rígida das pregas vocais) vão se tornando mais rígidas [27].

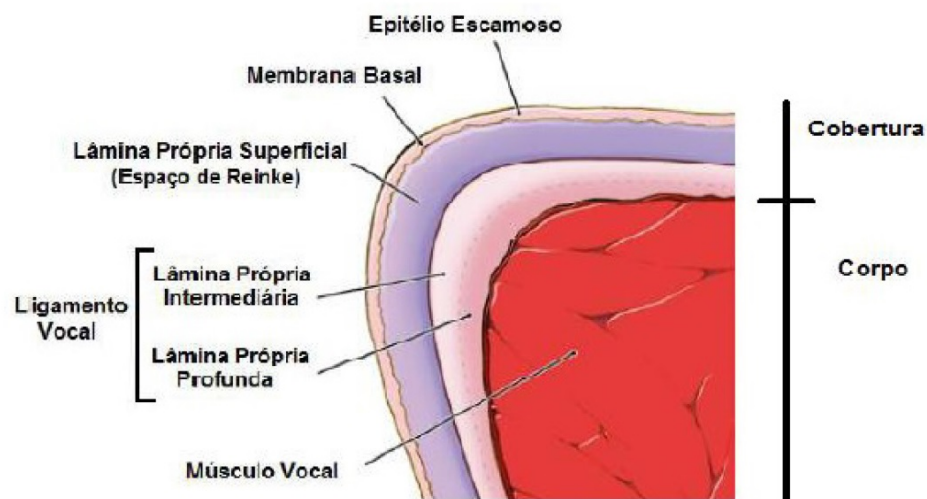


Figura 1.1: Esquema de camadas da prega vocal; Rosen, Simpson et al [28].

Existem dois movimentos para o posicionamento das pregas vocais: abdução e adução (veja figura 1.2). Em geral, para a passagem do ar, as pregas vocais estão em abdução, ou seja, abertas, afastadas da linha média. Para que haja produção da voz, é preciso que as pregas vocais estejam em adução, ou seja, fechadas, na linha média. Quando inspira-se as pregas vocais estão abertas (abdução). Quando expira-se sem fonar, as pregas vocais estão abertas (abdução). Quando faz-se força, as pregas vocais tendem a se fechar (adução), [3].



Figura 1.2: Anatomia das Pregas vocais em dois movimentos; imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.

Quando as pregas vocais vibram apresentam um padrão de abertura e fechamento extremamente rápido, não visível a olho nu. Esta configuração pode ser vista na Figura 1.2.

A frequência da voz é determinada fisiologicamente pelo número de ciclos glóticos que as pregas vocais fazem em um segundo, ou seja, pela velocidade de vibração das pregas vocais. Pode ser classificada em: grave (grosso), médio ou agudo (fino). A mais baixa frequência que pode dar a audibilidade a um ser humano é mais ou menos a de 20 hertz (vibrações por segundo), enquanto a mais alta se encontra entre 10.000 e 20.000 hertz, o que depende da idade do ouvinte (quanto mais idoso menores as frequências máximas ouvidas). A frequência comum de um piano é de 40 a 4.000 hertz e a da voz humana se encontra entre 50 e 3.400 hertz. A frequência varia por toda a vida, de acordo com o sexo e faixa etária. Inicialmente bastante aguda nos bebês recém-nascidos, em torno de 440Hz, lentamente vai decrescendo, e aos três anos situa-se ao redor de 320Hz, até a pré-adolescência quando os valores médios variam em torno de 290Hz. Na adolescência a frequência fundamental sofre uma queda abrupta, particularmente no sexo masculino [2].

A faixa de voz masculina costuma variar entre 80 Hz e 150 Hz (hertz é a unidade de

medição da frequência e da vibração das ondas, incluindo as sonoras, como a voz). A média da voz dos homens adultos brasileiros é de 113 Hz quanto mais baixa a frequência, mais grave a voz. A faixa feminina varia entre 150 Hz e 250 Hz. Mulheres adultas têm frequência ao redor de 205 Hz. Esses valores podem se reduzir na menopausa período em que há alterações hormonais importantes no organismo feminino e girar em torno de 190 Hz, principalmente em mulheres mais magras e altas. As mais baixas e gordas tendem a manter a voz mais aguda, mesmo na menopausa Behlau1 .

Deve-se destacar que a frequência tem relação direta com o comprimento, tensão, rigidez e massa das pregas vocais, portanto, uma pessoa que possui uma prega vocal curta, espessa e flácida irá vibrar em uma velocidade mais lenta (tom mais grave) do que uma prega vocal longa, fina e tensa que produzirá um tom mais agudo. O aumento de altura relaciona-se diretamente com o alongamento das pregas vocais, com uma diminuição correspondente de massa e um aumento de elasticidade de tecido da prega. Diminuir a frequência relaciona-se diretamente ao encurtamento das pregas[6].

Algumas doenças nas pregas vocais e alguns tratamentos

Uma das condições essenciais para a produção confortável da voz é a grande mobilidade da mucosa da prega vocal. A fina camada superficial da mucosa é de importância crucial na vibração da prega vocal. Os seus aspectos, principalmente a rigidez, são bastante afetados pelo grau de lubrificação da superfície. Pregas vocais excessivamente tensas (rígidas), como na emissão em falsete, vibram somente sob condições limitadas, restringindo a extensão da produção vocal. Inversamente, pregas vocais muito flácidas são muito facilmente afastadas pela pressão subglótica, provocando a paragem da sua vibração. A possibilidade de vibração aperiódica nestas pregas é grande quando a flacidez na prega está associada a um desequilíbrio da massa da prega vocal, causando uma vibração complexa e menos periódica das pregas o que, por sua vez, produz uma voz rouca, [7].

As doenças mais comuns das pregas vocais incluem [2]:

Nódulos das pregas vocais. Estes são pequenos inchaços duros provocados pelo abuso vocal (ver Figura 1.3). Ocorrem em pares, com um nódulo em cada prega vocal no local de maior irritação. Algumas vezes denominam-se de nódulos de cantor, gritador ou de professor.



Figura 1.3: Micronódulo das pregas vocais, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.

Pólipos das pregas vocais. Os pólipos são pequenas projeções moles que, em regra, aparecem isoladamente numa prega vocal (Figura 1.4). São provocados mais vezes por abuso vocal ou exposição prolongada a irritantes, tais como fumos químicos ou tabagismo.



Figura 1.4: Pólipo em uma prega vocal, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.

Úlceras de contato Esta perturbação é menos frequente. As úlceras de contato são erosões e feridas nas pregas vocais (Figura 1.5). Tendem a ocorrer em pessoas que usam, de forma consistente, grande força ao começar a falar em vez de aumentarem, gradualmente a força e a sonoridade. Por exemplo, as úlceras de contato podem afetar as pessoas que trabalham como oradores públicos.



Figura 1.5: Úlcera de contato na prega vocal, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.

Tumores da prega vocal. Os tumores podem ser cancerosos ou não cancerosos (benignos)(Figura 1.6). Os tumores não cancerosos podem ser provocados por um vírus ou acumulações de tecidos pouco vulgares que provocam problemas de voz. Há mais probabilidades de ocorrerem tumores cancerosos (malignos) em fumantes e pessoas que bebem demasiadamente álcool. Os tumores cancerosos são potencialmente fatais se não forem detectados e tratados de início.

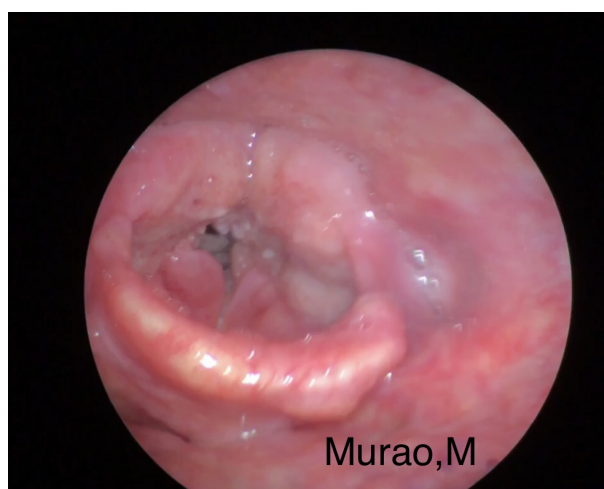


Figura 1.6: Tumor na prega vocal, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Márcia Sayuri Murao.

Paralisia da prega vocal. A paralisia da prega vocal ocorre quando uma ou ambas as cordas vocais não se abrem(m) e fecha(m) adequadamente, alterando a qualidade da voz, ou

a ausência dele, podendo a paralisia ser total ou parcial (Figura 1.7). Se ambas as pregas vocais ficarem paralisadas e permanecerem na posição fechada, pode haver dificuldades na respiração. De acordo com a Dr. Marcia Murao no caso das pregas da paciente conforme Figura 1.7 a paralisia deixou a prega vocal esquerda até arqueada, flácida. No movimento apenas a contra-lateral medializa.

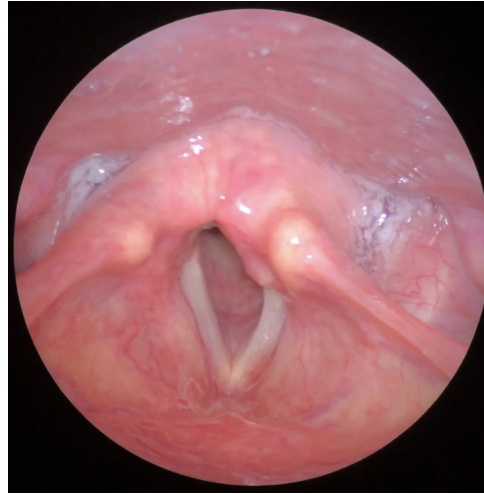


Figura 1.7: Paralisia na prega vocal esquerda, imagens feitas e cedidas pela Otorrinolaringologista Dra. Marcia Sayuri Murao.

De acordo com a Revista Brasileira de Otorrinolaringologista, em 2005, a paralisia de pregas vocais representava 10% das anomalias congênitas da laringe. Quando a lesão é unilateral há maior acometimento da prega vocal esquerda [10].

O tratamento para paralisia unilateral de prega vocal pode ocorrer de várias formas: tratamento fonoterápico ou tratamento cirúrgico (injeção de teflon ou colágeno), o qual é indicado em análise conjunta do fonaudiólogo e otorrinolaringologista.

Revisão bibliográfica

Desde o trabalho pioneiro de Van den Berg et al [12] que estabelece a base glótica aerodinâmica para as pregas vocais, vários modelos matemáticos foram propostos para caracterizar a dinâmica do movimento das pregas vocais. Tais modelos variaram em complexidade a partir dos simples modelos populares de uma massa [16] e duas massas [23], em que cada prega vocal é representada por um ou dois sistemas acoplados de massa-mola-amortecedor, respectivamente, até modelos de continuidade usando técnicas de elementos finitos [1]. Nos mais sofisticados são necessários modelos específicos para capturar detalhes sutis do movimento da prega vocal e da aerodinâmica da laringe [1],[68]. Modelos simples de baixa dimensão ainda são úteis para analisar a dinâmica da oscilação. E, de fato,

modelos simples mostraram uma rica variedade de fenômenos não-lineares interessantes, incluindo a existência de múltiplos equilíbrios, posições e ciclos limitados [54], [26], vários tipos de bifurcações [54], [26] e [42] comportamentos caóticos [26], [29].

Grande parte dos trabalhos relacionados ao movimento das pregas vocais admitem um comportamento simétrico para o movimento oscilatório de cada prega. Este comportamento simétrico produz um movimento sincronizado caracterizado pela geometria considerada no trato vocal e pela igualdade nos parâmetros mecânicos (massa, rigidez e amortecimento) da pregas vocais [36],[37], [38].

Para o problema assimétrico das pregas vocais, onde considera-se alguma diferença nos parâmetros mecânicos, Ishizaka e Flanagan [23] tornaram-se conhecidos na modelagem das pregas vocais ao tentarem simplificar sua fisiologia com base na teoria de elasticidade, utilizando estruturas massa-mola-amortecedor. Eles focaram em um tratamento mais analítico ao problema baseando-se na física de pequenas amplitudes. Neste trabalho foi abordado principalmente o impacto da aerodinâmica nas condições de abertura e fechamento da glote, na produção da voz e no desenvolvimento de patologias das pregas vocais e na garganta.

Apesar da análise de Ishizaka e Flanagan [23] ser um marco em quantificar as vibrações das pregas vocais assimétricas, sua aplicação na fala tem sido limitada. Titze [39] relata alguns problemas encontrados:

- os parâmetros principais, massa e rigidez individual dos osciladores acoplados por eles adotados não relacionam facilmente com a estrutura anatômica das pregas vocais;
- as condições de oscilações por eles apresentadas em termos matemáticos foram complexos, porque as equações características são de quarta ordem;
- alguns resultados, tal como a dependência da frequência fundamental na pressão subglótica não estão de acordo com a observação experimental feita por Baer [5] com laringes excisadas.

Vários autores têm estudado o movimento de pregas vocais assimétricas. Steinecke e Herzel [41] estudaram vários tipos de bifurcações que ocorrem devido a assimetria na rigidez das pregas. Neste trabalho mostrou-se que um desequilíbrio de tensão devido à diferença de rigidez suficientemente grande da prega vocal esquerda e direita induz bifurcações a regimes subarmônicos, oscilações toroidais e caos. A relevância dessas simulações para distúrbios da voz, como a paralisia laríngea, foi também discutida.

Lous [44] estudou um tipo diferente de assimetria nas pregas vocais. Foi assumido uma simetria geométrica e mecânica (massa, amortecimento e rigidez), entretanto não assumiu-se que a força aerodinâmica era igualmente distribuída em cada prega, logo, a assimetria estava na força aerodinâmica. Entretanto percebeu-se que para este caso deveria ser considerado o modelo tridimensional e não o bidimensional para resultados mais satisfatórios.

Estudos recentes mostraram que o oscilador da prega vocal durante a fonação pode ser modelado como oscilador van der Pol [17]. Já que sua introdução foi há quase um século [65], este bem conhecido modelo matemático foi aplicado para analisar oscilações não-lineares em uma ampla variedade de sistemas. No caso da fisiologia humana, o modelo tem sido usado para estudar a partir do batimento cardíaco [66] ao tremor parkinsoniano [8] e dinâmica do Eletroencefalografia (EEG) [18]. Também aplicou-se com sucesso para estudar a vocalização de aves canoras [25], que compartilha princípios semelhantes aos da vocalização humana.

Entretanto, para todos os casos acima citados nenhum método de controle foi proposto a fim de sincronizar o movimento característico e muitas vezes caótico devido a assimetria das pregas vocais. Aqui destaca-se a importância deste trabalho, diferenciando-o dos demais ora apresentados e tantos outros da vasta literatura que possuem como objeto de estudo o movimento das pregas vocais.

Objetivos

- Descrever o sistema de equações que modela o movimento das pregas vocais para um caso assimétrico;
- Estudar estabilidade e bifurcações no ponto de equilíbrio;
- Verificar a existência de caos para alguns parâmetros;
- Aplicar um método que sincronize e garanta o bom funcionamento das pregas vocais.

Em resumo, o interesse deste trabalho é estudar o comportamento do movimento de pregas vocais assimétricas, que será considerado com uma paralisia unilateral da prega vocal esquerda (flácida), bem como a aplicação de um método de controle para que apesar da assimetria, um movimento sincronizado seja alcançado e mantido, produzindo assim o som sem qualquer disfonia. Assim, quem sabe possivelmente no futuro ajudar a desenvolver um novo método menos invasivo no tratamento de paralisia unilateral de prega vocal.

Organização da tese

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentado, foi feito uma rápida explicação do objeto de estudo, bem como os principais objetivos.

No capítulo 2 será apresentado a teoria básica e alguns resultados necessários a fim de uma melhor compreensão do desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 3 será apresentado e demonstrado as equações do modelo a ser adotado, assim como a sua simplificação e transformação para em um sistema mais conhecido. Em seguida faz-se o estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio, bifurcações e existência de caos. Além disso compara-se algumas soluções numéricas com algumas soluções analíticas aproximadas.

No capítulo 4 um método de controle será apresentado e aplicado para sincronização das pregas vocais em vários casos.

Após será feita uma conclusão de todo trabalho apresentado os resultados alcançados, bem como a sua relevância para o estudo do movimento assimétrico das pregas vocais.

Por fim segue as referências bibliográficas de toda literatura utilizada para a construção de toda teoria que enriqueceu este trabalho.

CAPÍTULO 2

NOÇÕES PRELIMINARES

2.1 Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, será estabelecido algumas definições e resultados para um sistema autônomo não-linear de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

sendo (por hipótese) $f \in C^1(E)$, onde E é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e o ponto indica a derivada temporal.

Definição 2.1.1. *Seja $f \in C(E)$, onde E é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Então, $x(t)$ é uma solução da equação diferencial (2.1) num intervalo I se $x(t)$ é diferenciável em I e $\forall t \in I, x(t) \in E$ e*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Dado $x_0 \in E$, $x(t)$ é a solução do P.V.I (Problema de Valor Inicial).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

no intervalo I , se $t_0 \in I, x(t_0) = x_0$ e $x(t)$ é uma solução da equação diferencial (2.1) no intervalo I , [64].

Definição 2.1.2. *Sejam E um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(E)$, e seja $\phi_t : E \rightarrow E$ o fluxo da equação diferencial (2.1) definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Então o conjunto $S \subset E$ é dito invariante em relação ao fluxo ϕ_t , se $\phi_t(S) \subset S, \forall t \in \mathbb{R}$, e S é dito positivamente (ou negativamente) invariante em relação ao fluxo ϕ_t , se $\phi_t(S) \subset S, \forall t \geq 0$ (ou $t \leq 0$), [64].*

Ao analisar um sistema não-linear (2.1) é conveniente primeiramente determinar os seus pontos de equilíbrio e descrever o comportamento do sistema próximo a esses pontos.

Nesta seção, será estabelecido o processo de linearização de equações diferenciais de um sistema não-linear (2.1), obtendo assim um sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad (2.2)$$

com $A = Df(x_0)$. A função linear $Ax = Df(x_0)x$, que substitui a função não-linear $f(x)$ em (2.1), é chamada *parte linear* de f em x_0 .

Definição 2.1.3. *Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto de equilíbrio ou ponto crítico de (2.1) se $f(x_0) = 0$. Um ponto de equilíbrio x_0 é chamado ponto de equilíbrio hiperbólico, se nenhum dos autovalores da matriz $A = Df(x_0)$ possuem parte real nula. O sistema linear (2.2) com $A = Df(x_0)$ é chamado linearização de (2.1) em x_0 [64].*

Note que, se x_0 é um ponto de equilíbrio de (2.1) e $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo da equação diferencial (2.1), então

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0) = x_0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. Pois, como $f(x_0) = 0$, não há uma trajetória e consequentemente não há deslocamento, logo o ponto x_0 permanece na mesma posição conforme t evolui.

Nesse caso, x_0 é chamado de *ponto fixo do fluxo* ϕ_t , ou também chamado de um zero, um ponto crítico ou um ponto singular do campo de vetores $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Na sequência é dada uma classificação dos pontos de equilíbrio de (2.1), de acordo com os sinais da parte real dos autovalores de $Df(x_0)$.

Definição 2.1.4. *Um ponto de equilíbrio x_0 de (2.1) é dito poço, se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tiverem parte real negativa. É dito fonte, se todos os autovalores de $Df(x_0)$ tiverem parte real positiva. É dito sela, se x_0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico e se a matriz $Df(x_0)$ tiver pelo menos um autovalor com parte real positiva e um com parte real negativa [64].*

Exemplo 2.1.1. *Classifique todos os pontos de equilíbrio do sistema não-linear (2.1) com*

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2. \end{aligned}$$

Claramente, $f(x) = 0$ em $x = (1, 0)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x = (-1, 0)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. E esses são os únicos pontos de equilíbrio de (2.1). Como

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

temos que

$$Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Df(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o ponto $(1,0)$ é uma fonte e $(-1,0)$ é uma sela [64].

Exemplo 2.1.2. Considere a aplicação contínua $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Tome $y = H(x)$. Logo, não é difícil verificar que a inversa é dada por

$$x = H^{-1}(y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{y_1^2}{3} \end{bmatrix}$$

onde H^{-1} também é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Agora, seja o sistema não-linear

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo, $x_0 = (0,0)$ é o único ponto de equilíbrio de (2.3). Calculando a derivada de f em x tem-se

$$Df(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, aplicando em $x_0 = (0,0)$ obtem-se

$$A = Df(x_0) = Df(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(note que x_0 é um ponto de sela). Como foi tomado $y = H(x)$, então

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 + \frac{2}{3}x_1\dot{x}_1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ dados pela equação (2.3) tem-se

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 + \frac{2}{3}x_1(-x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y \implies \dot{y} = Ay. \quad (2.4)$$

Portanto, a aplicação H transforma o sistema não-linear (2.3) em um sistema linear (2.4) [64].

Para um melhor entendimento do processo de linearização de um sistema não-linear de equações diferenciáveis, será analisado o exemplo 2.1.2 com uma visão geométrica, por meio dos retrato de fase do sistema não-linear (2.3) e do sistema linear (2.4).

Primeiramente, será feito o esboço do retrato de fase de sistema não-linear (2.3) com a condição inicial $x(0) = c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Precisa-se encontrar a solução das duas equações diferenciais do sistema, e por ser linear, a solução da primeira é dada por $x_1(t) = e^{-t}c_1$, onde $x_1(0) = c_1$ é a condição inicial de $x_1(t)$. Logo, substituindo na segunda equação tem-se

$$\dot{x}_2 = x_2 + (e^{-t}c_1)^2 \implies \dot{x}_2 = x_2 + e^{-2t}c_1^2 \implies \dot{x}_2 - x_2 = e^{-2t}c_1^2$$

multiplicando por e^{-t}

$$\dot{x}_2 e^{-t} - x_2 e^{-t} = e^{-3t}c_1^2 \implies \frac{d}{dt}[x_2 e^{-t}] = e^{-3t}c_1^2$$

integrando obtém-se

$$\int \frac{d}{dt}[x_2 e^{-t}] dt = \int e^{-3t}c_1^2 dt$$

ou seja,

$$x_2 e^{-t} = c_1^2 \int e^{-3t} dt \implies x_2 e^{-t} = -\frac{e^{-3t}}{3} c_1^2 + k. \quad (k \text{ constante})$$

Agora, multiplicando por e^t resulta que

$$x_2 = -\frac{e^{-2t}}{3} c_1^2 + k e^t. \quad (2.5)$$

Porém, a solução $x_2(t)$ deve satisfazer a condição inicial $x_2(0) = c_2$, logo obtem-se o valor de k

$$x_2(0) = k - \frac{c_1^2}{3} = c_2 \implies k = c_2 + \frac{c_1^2}{3}$$

ou seja,

$$x_2(t) = \left[c_2 + \frac{c_1^2}{3} \right] e^t - \frac{e^{-2t} c_1^2}{3}.$$

Agora, com as duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, é possível obter o fluxo definido por (2.3) em relação à condição inicial $c = (c_1, c_2)^T$. Tal fluxo é dado por

$$\phi_t(c) = \phi_t(c_1, c_2) = \left(e^{-t} c_1, \left[c_2 + \frac{c_1^2}{3} \right] e^t - \frac{e^{-2t} c_1^2}{3} \right)$$

Logo, pelo exemplo 2.1.2, segue que a função $H(x)$ transforma (2.3) em (2.4), ou seja, lineariza o sistema não-linear. Assim, para obter o retrato de fase de (2.3), basta tomar a sua inversa $H^{-1}(y)$.

Primeiramente, aplica-se a função $H^{-1}(y)$ nos pontos da forma $(y_1, 0)$, logo

$$H^{-1}(y_1, 0) = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1^2/3 \end{bmatrix}$$

isto é, ao aplicar H^{-1} ao conjunto dos pontos $\{y = (y_1, y_2) \mid y_2 = 0\}$ obtém-se o conjunto $S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = -x_1^2/3\}$ que representa uma parábola.

Suponha que a condição inicial $c = (c_1, c_2) \in S$, ou seja, $c_2 = -c_1^2/3$, precisa-se saber se o conjunto S é invariante com respeito ao fluxo ϕ_t , isto é, se a condição inicial permanece sobre a trajetória da parábola conforme o tempo t evolui.

Logo,

$$\begin{aligned} \phi_t(c) &= \left(e^{-t} c_1, \left[-\frac{c_1^2}{3} + \frac{c_1^2}{3} \right] e^t - \frac{e^{-2t} c_1^2}{3} \right) \\ &= \left(e^{-t} c_1, -\frac{e^{-2t} c_1^2}{3} \right) \\ &= \left(e^{-t} c_1, -\frac{(e^{-t} c_1)^2}{3} \right) \in S. \end{aligned}$$

Portanto, pela definição 2.1.2, S é invariante.

Do mesmo modo, aplicando H^{-1} ao conjunto dos pontos $\{y = (y_1, y_2) \mid y_1 = 0\}$ obtém-se o conjunto $T = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$, que representa o eixo vertical, e que também é invariante mediante ϕ_t , caso a condição inicial $c = (c_1, c_2) \in T$, devido

$$\phi_t(c) = \phi_t(0, c_2) = (0, e^t c_2) \in T.$$

Finalmente, basta atribuir valores as condições iniciais c_1 e c_2 e analisar a orientação de $\phi_t(c_1, c_2)$, de acordo com a evolução do tempo t ($t \rightarrow \infty$). Assim, se a condição inicial $c = (c_1, c_2) \in S$, então c se aproxima da origem pela parábola S , pois conforme $t \rightarrow \infty$,

$\phi_t(c) \rightarrow (0, 0)$, ou seja, as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tendem a zero. Se $c \in T$, então c se afasta da origem pelo eixo vertical, ($t \rightarrow \infty \implies \phi_t(c) \rightarrow (0, \pm\infty)$), e caso c esteja abaixo (resp. acima) da parábola S , a trajetória de c se aproxima da origem por $x_1(t)$, e tende a $-\infty$ (resp. $+\infty$) por $x_2(t)$, pois $t \rightarrow \infty \implies \phi_t(c) \rightarrow (0, -\infty)$, (resp. $\phi_t(c) \implies (0, +\infty)$).

Portanto, o retrato de fase do sistema (2.3) é dado pela figura 2.1.

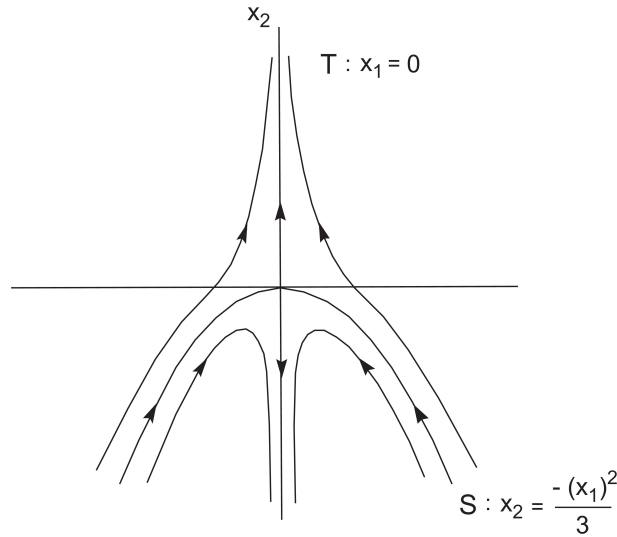


Figura 2.1: Retrato de fase do sistema não-linear (2.3), fonte: autor.

Agora, será obtido o retrato de fase da linearização de (2.3), dada pelo sistema linear (2.4) com condição inicial $y(0) = k = (k_1, k_2)$. Como (2.4) é um sistema linear, as soluções das duas equações são dadas por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-t}k_1 \\ y_2(t) &= e^tk_2. \end{aligned}$$

Logo, o fluxo definido por (2.4) em relação à condição inicial k é

$$\phi_t(k) = \phi_t(k_1, k_2) = (e^{-t}k_1, e^tk_2).$$

Suponha que a condição k esteja sobre o eixo horizontal, logo k será da forma $(k_1, 0)$ e $\phi_t(k_1, 0) = (e^{-t}k_1, 0)$, ou seja, o eixo horizontal é invariante. Assim, conforme o tempo t evolui, a condição inicial k se aproxima da origem pelo eixo. Analogamente, o eixo vertical é invariante, pois $\phi_t(0, k_2) = (0, e^tk_2)$, e conforme o tempo evolui k se afasta da origem pelo eixo.

Atribuindo valores a k_1 e k_2 , tem-se que se a condição inicial $k = (k_1, K_2)$ estiver acima do eixo horizontal, a trajetória de k se aproxima da origem por $y_1(t)$ e tende a

$+\infty$, conforme o tempo evolui (Ex: $k = (-1, 1)$, $t \rightarrow +\infty \implies \phi_t(-1, 1) = (e^{-t}, e^t) \rightarrow (0, +\infty)$). Caso contrário, a trajetória se aproxima da origem e tende a $-\infty$. Logo, o retrato de fase do sistema (2.4) é dado pela figura 2.2.

Note que, em ambos os retrato de fase, a origem representa um ponto de sela, e que a parábola S e o conjunto T do retrato de fase de (2.3) são obtidos pela aplicação da função inversa H^{-1} nos eixos horizontal e vertical, respectivamente.

Portanto, geometricamente a função H lineariza o retrato de fase de (2.3), ou seja, ela exerce o trabalho de "desentortar" as trajetórias, obtendo um novo retrato de fase qualitativo ao primeiro, [64].

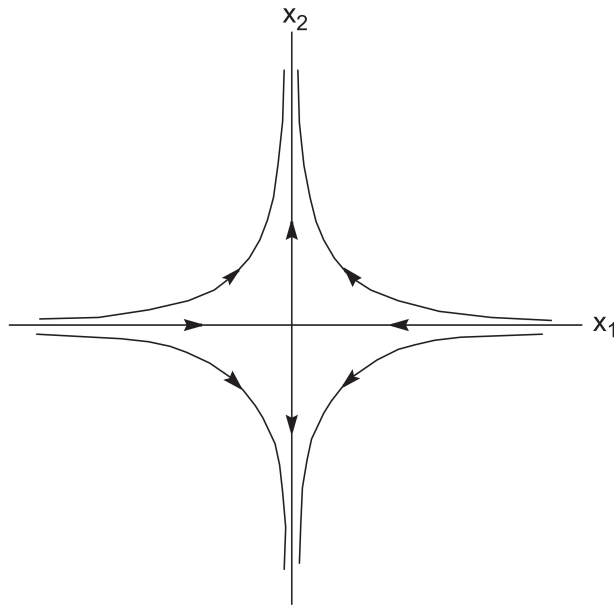


Figura 2.2: Retrato de fase do sistema linear (2.4), fonte: autor.

2.2 O Teorema da Variedade Estável

O Teorema da Variedade Estável é um dos resultados mais importantes na teoria qualitativa local de equações diferenciais ordinárias. O teorema nos mostra que próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico, o sistema não-linear dado pela equação (2.1) que é lembrada abaixo

$$\dot{x} = f(x)$$

possui variedades estáveis e instáveis, S e U respectivamente, que são tangentes, no ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , aos subespaços estáveis e instáveis, E^S e E^U respectivamente, do sistema linearizado dado pela equação (2.2) lembrada abaixo:

$$\dot{x} = A(x)$$

onde $A = Df(x_0)$. Além disso, S e U tem as mesmas dimensões que E^S e E^U , e se ϕ_t é fluxo do sistema não-linear (2.1), então S e U são positivamente e negativamente invariantes sobre ϕ_t e satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0, \forall c \in S \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0, \forall c \in U.$$

Definição 2.2.1. *Seja a matriz $n \times n$ A do sistema (2.2) e $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j=1, \dots, n$, seus respectivos autovalores. Suponha que A tenha k autovalores com parte real negativa ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$) e $n-k$ autovalores com parte real positiva ($\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$), e que esses autovalores são distintos. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ o conjunto dos autovetores correspondentes. Então, os subespaços estável e instável do sistema linear (2.2), E^S e E^U , são os subespaços lineares gerados por $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$, isto é*

$$E^S = \text{gerado}\{v_1, \dots, v_k\}$$

$$E^U = \text{gerado}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

Se a matriz A tem autovalores imaginário puro, então temos um subespaço central E^C , citeperko.

2.2.1 Interpretação de uma variedade.

Primeiramente, segue um exemplo para deixar essas idéias acima mais claras e então depois será feita com maior precisão a demonstração do teorema da variedade

estável. Ao longo desta seção, será assumido sem perda de generalidade que o ponto de equilíbrio x_0 está localizado na origem.

Exemplo 2.2.1. *Considere o sistema não-linear*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2\end{aligned}$$

O único ponto de equilíbrio desse sistema é a origem. Assim, tem-se que

$$A = Df(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os subespaços estáveis e instáveis, E^S e E^U , de (2.2) são o plano x_1x_2 e o eixo x_3 respectivamente, pois $E^S = \text{gerado}\{e_1, e_2\}$ e $E^U = \text{gerado}\{e_3\}$. Depois, resolvendo a primeira equação diferencial $\dot{x}_1 = -x_1$, o sistema não-linear se reduz a duas equações lineares de primeira ordem de fácil solução. Sendo $c = (c_1, c_2, c_3)$ a condição inicial, a solução é dada por

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{-t} + c_1^2 (e^{-t} - e^{-2t}) \\ x_3(t) &= c_3 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t})\end{aligned}$$

Claramente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = 0 \iff c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0$$

Assim,

$$S = \{c \in \mathbb{R}^3 \mid c_3 = -c_1^2/3\}$$

Similarmente, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = 0 \iff c_1 = c_2 = 0$$

e portanto

$$U = \{c \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = c_2 = 0\}.$$

As variedades estáveis e instáveis para esse sistema são mostradas na Figura 2.3 à seguir. Note que a superfície S é tangente a E^S , ou seja, é tangente ao plano x_1x_2 na origem, e que $U = E^U$. A grosso modo, pode-se interpretar o conceito de variedade como o gráfico

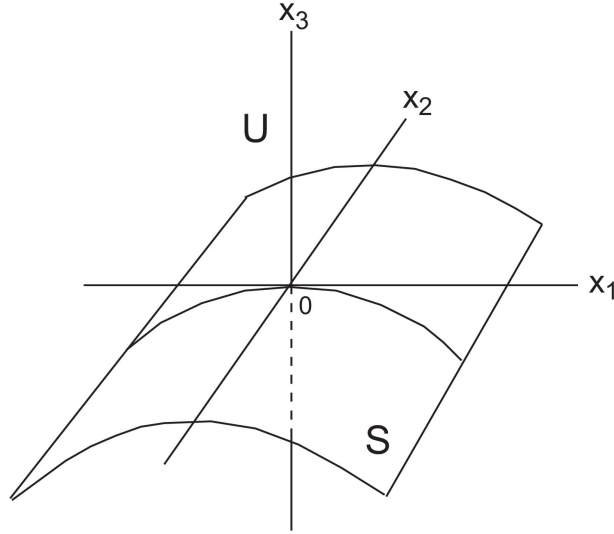


Figura 2.3: Variedade estável S e instável U, [64].

de uma função. Seja $V = \text{gráf}(\Psi)$, onde $\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tem-se que $\text{gráf}(\Psi) \subset U \times \mathbb{R}^m$ e que $(x, y) \in \text{gráf}(\Psi)$ se $y = \Psi(x)$, mas como

$$y \in \mathbb{R}^m \implies y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

e

$$\Psi \in \mathbb{R}^m \implies \Psi(x) = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)\}$$

tem-se que

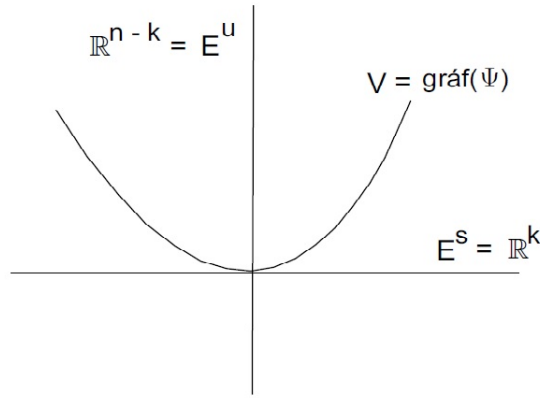
$$y = \Psi(x) \iff \begin{cases} y_1 = \psi_1(x) = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = \psi_2(x) = \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = \psi_m(x) = \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Desse modo, as equações acima definem $V = \text{gráf}(\Psi)$ como uma variedade [64]. Para um melhor entendimento, observe o caso a seguir.

Exemplo 2.2.2. Considere a função $\Psi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ e a variedade $V = \text{gráf}(\Psi)$

Seja $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n$. Como $V = \text{gráf}(\Psi) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n$, tome $(0, 0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \in V \subset \mathbb{R}^n$, logo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \psi_{k+1}(x_1, \dots, x_k) \\ x_{k+2} &= \psi_{k+2}(x_1, \dots, x_k) \\ &\vdots \\ x_n &= \psi_n(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Figura 2.4: Variedade V , [64].

2.2.2 O Teorema da Variedade Estável.

Antes da demonstração do teorema, segue algumas observações.

Se $f \in C^1(E)$ e $f(0) = 0$, então o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\dot{x} = Ax + F(x) \quad (2.6)$$

onde $A = Df(0)$, $F(x) = f(x) - Ax$, $F \in C^1(E)$, $F(0) = 0$ e $DF(0) = 0$.

Proposição 2.2.1. (Desigualdade do valor médio) *Se $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for diferenciável tal que $[x, y] = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$ então*

$$|F(x) - F(y)| \leq \tilde{K}|x - y|$$

onde

$$\tilde{K} = \sup\{\|DF(z)\| : z \in [x, y]\}, [64].$$

Tem-se que $F(x) = f(x) - Ax \in C^1(E)$, pois $f(x) \in C^1(E)$ e Ax é linear, e $DF(0) = 0$. Logo, $DF(0) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N_\delta(0)$ tal que $\forall w \in N_\delta(0)$

$$\|DF(w)\| \leq \varepsilon.$$

Portanto, pela proposição acima

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \|DF(w)\| |x - y| \\ |F(x) - F(y)| &\leq \varepsilon |x - y|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan (blocos de Jordan), existe uma matriz $n \times n$ invertível C tal que

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

onde os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ da matriz $k \times k$ P tem parte real negativa, e os autovalores $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ da matriz $(n-k) \times (n-k)$ Q tem parte real positiva. Logo, pode-se escolher um $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que para $j = 1, \dots, k$,

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0. \quad (2.8)$$

Seja $y = C^{-1}x$, logo $x = Cy$ e

$$\begin{aligned} \dot{y} = C^{-1}\dot{x} &\implies \dot{y} = C^{-1}(Ax + F(x)) \\ &= C^{-1}Ax + C^{-1}F(x) \\ &= C^{-1}ACy + C^{-1}F(Cy). \end{aligned}$$

Portanto, faz-se $y = C^{-1}x$ no sistema obtido em (2.6) e tem-se a seguinte forma

$$\dot{y} = By + G(y) \quad (2.9)$$

onde $G(y) = C^{-1}F(Cy) \in C^1(\tilde{E})$ (ou faz-se substituições, $G(y) = C^{-1}f(Cy) - By$) com $\tilde{E} = C^{-1}(E)$ e G satisfazendo a condição do tipo Lipschitziana (2.7).

Na demonstração do próximo teorema, quer-se mostrar que $\psi_j(y_1, \dots, y_k)$ são funções diferenciáveis, tal que as equações

$$y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k), \quad j = k+1, \dots, n.$$

definem uma variedade estável diferenciável de dimensão k , $\bar{S}$, no espaço- y . A variedade diferenciável S no espaço- x é então obtida por $\bar{S}$ sobre a transformação linear de coordenadas $x = Cy$.

Teorema 2.2.1. (Teorema da Variedade Estável) *Sejam E um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, $f \in C^1(E)$ e ϕ_t o fluxo do sistema não-linear (2.1). Suponha que $f(0) = 0$ e que $Df(0)$ tem k autovalores com parte real negativa e $n-k$ autovalores com parte real positiva. Então existe uma variedade diferenciável de dimensão k , S , tangente ao subespaço estável E^S do sistema linear (2.2) em 0, tal que $\forall t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ e $\forall x_0 \in S$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

E existe uma variedade diferenciável de dimensão $n-k$, U , tangente ao subespaço instável E^U de (2.2) em 0, tal que $\forall t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ e $\forall x_0 \in U$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Demonstração: Considere o sistema (2.9), onde $G(y) = C^{-1}F(Cy)$, e sejam

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} (e^{Pt})' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pe^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BU.$$

Analogamente, $\dot{V} = BV$ e também

$$Bt = \begin{bmatrix} Pt & 0 \\ 0 & Qt \end{bmatrix} \implies e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$e^{Bt} = U(t) + V(t).$$

Considere as seguintes estimativas

$$\|U(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t}, \quad \forall t \geq 0$$

$$\|V(t)\| \leq Ke^{-\sigma t}, \quad \forall t \leq 0$$

sendo $\alpha > 0$ e $\sigma > 0$.

Na sequência, considere a equação integral

$$u(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, a))ds. \quad (2.10)$$

Note que, se $u(t, a)$ é uma solução contínua dessa equação integral, então também é uma solução da equação diferenciável (2.9), basta derivar.

Agora, será feita a resolução dessa equação integral pelo método das aproximações sucessivas. Seja

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

e

$$u^{(j+1)}(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u^{(j)}(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u^{(j)}(s, a))ds. \quad (2.11)$$

Afirmção 2.2.1. Para $j = 1, \dots, m$ e $t \geq 0$

$$|u^{(j)}(t, a) - u^{(j-1)}(t, a)| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{j-1}}. \quad (2.12)$$

Demonstração da Afirmção: Tem-se que para $j = 1$ é claramente válida, desde que $t \geq 0$, pois

$$|u^{(1)}(t, a) - u^{(0)}(t, a)| = |u^{(1)}(t, a) - 0| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^0}$$

ou seja,

$$|u^{(1)}(t, a)| \leq K|a| e^{-\alpha t}.$$

Observe que pelo método das aproximações sucessivas, tem-se

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, a) &= U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u^{(0)}(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u^{(0)}(s, a))ds \\ &= U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(0)ds - \int_t^\infty V(t-s)G(0)ds. \end{aligned}$$

Como por (2.6) e (2.9), $G(0) = C^{-1}F(C.0) = C^{-1}F(0) = 0$, resulta

$$u^{(1)}(t, a) = U(t)a$$

logo,

$$|u^{(1)}(t, a)| = \|U(t)\| |a| \leq K|a| e^{-\alpha t}.$$

Portanto, a afirmação é válida para $j = 1$. Então, usando a condição Lipschitziana (2.7), que é satisfeita por G , e as estimativas $\|U(t)\|$ e $\|V(t)\|$ acima, segue-se que para $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |u^{(m+1)}(t, a)| &= \|U(t)\| |a| + \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u^{(m)}(s, a))|ds \\ &\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u^{(m)}(s, a))|ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |u^{(m)}(t, a)| &= \|U(t)\| |a| + \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u^{(m-1)}(s, a))|ds \\ &\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u^{(m-1)}(s, a))|ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u^{(m+1)}(t, a) - u^{(m)}(t, a)| &= \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u^{(m)}(s, a)) - G(u^{(m-1)}(s, a))|ds + \\ &\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u^{(m)}(s, a)) - G(u^{(m-1)}(s, a))|ds \\ &\leq \int_0^t \|U(t-s)\| \varepsilon |u^{(m)}(s, a) - u^{(m-1)}(s, a)|ds + \\ &\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \varepsilon |u^{(m)}(s, a) - u^{(m-1)}(s, a)|ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^t K e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds + \varepsilon \int_t^\infty K e^{\sigma(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds \\ &\leq \frac{\varepsilon K^2 |a| e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} e^{-\sigma t} \int_0^t e^{\sigma s} ds + \frac{\varepsilon K^2 |a| e^{\sigma t}}{2^{m-1}} e^{-\alpha t} \int_t^\infty e^{-\sigma s} ds \\ &\leq \frac{\varepsilon K^2 |a| e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{m-1}} + \frac{\varepsilon K^2 |a| e^{-\alpha t}}{\sigma 2^{m-1}} \\ &< \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} = \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^m} \end{aligned} \tag{2.13}$$

desde que $\varepsilon K/\sigma < 1/4$, ou seja, desde que se escolha $\varepsilon < \sigma/4K$. Para que a condição (2.7) seja válida para a função G , basta escolher $K|a| < \delta/2$, ou seja, escolher $|a| < \delta/2K$.

Segue-se então, por indução, que a afirmação é válida para todo $j = 1, 2, 3, \dots$ e $t \geq 0$. Assim, para $n > m > N$ e $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 |u^{(n)}(t, a) - u^{(m)}(t, a)| &= |u^{(n)}(t, a) - u^{(n-1)}(t, a) + u^{(n-1)}(t, a) + \dots + \\
 &\quad + u^{(m+1)}(t, a) - u^{(m)}(t, a)| \\
 &\leq |u^{(n)}(t, a) - u^{(n-1)}(t, a)| + \dots + |u^{(m+1)}(t, a) - u^{(m)}(t, a)| \\
 &= \sum_{j=m}^{n-1} |u^{(j+1)}(t, a) - u^{(j)}(t, a)| \\
 &\leq \sum_{j=N}^{\infty} |u^{(j+1)}(t, a) - u^{(j)}(t, a)| \\
 &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{K|a|}{2^j} = K|a| \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{K|a|}{2^{N-1}}
 \end{aligned}$$

Essa última igualdade estabelecida se aproxima de zero quando $N \rightarrow \infty$ e portanto $\{u^{(j)}(t, a)\}$ é uma sequência de Cauchy de funções contínuas. Logo, $\{u^{(j)}(t, a)\}$ é convergente e assim como na demonstração do Teorema Fundamental de Existência e Unicidade, $\{u^{(j)}(t, a)\}$ obtida pelas aproximações sucessivas, converge uniformemente para uma função contínua $u(t, a)$, ou seja

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u^{(j)}(t, a) = u(t, a)$$

$\forall t \geq 0$ e $|a| < \delta/2K$. A função contínua $u(t, a)$ é a solução da equação integral (2.10) (basta aplicar o limite a ambos os lados de (2.11)) e consequentemente é solução de (2.9). Logo, por indução e pelo fato que $G \in C^{-1}(E)$, segue-se que $u^{(j)}(t, a)$ é uma função diferenciável de a , para $t \geq 0$ e $|a| < \delta/2K$. Assim, tem-se pela convergência uniforme que $u(t, a)$ é uma função diferenciável de a , para $t \geq 0$ e $|a| < \delta/2K$.

A estimativa (2.13) implica que

$$|u(t, a)| \leq 2K|a|e^{-\alpha t} \quad (2.14)$$

para $t \geq 0$ e $|a| < \delta/2K$. De fato,

$$\begin{aligned}
 |u(t, a)| &= \|U(t)\| |a| + \int_0^t \|U(t-s)\| |G(u(s, a))| ds + \int_t^\infty \|V(t-s)\| |G(u(s, a))| ds \\
 &\leq ke^{-(\alpha+\sigma)t} |a| + \int_0^t ke^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} \varepsilon |u(s, a)| ds + \int_t^\infty ke^{\sigma(t-s)} \varepsilon |u(s, a)| ds \\
 &= ke^{-(\alpha+\sigma)t} |a| + \frac{k\varepsilon |u(t, a)|}{\alpha + \sigma} [1 - e^{-(\alpha+\sigma)t}] + \frac{k\varepsilon |u(t, a)|}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$2|u(t, a)| \leq 2ke^{-(\alpha+\sigma)t}|a| + \frac{2k\varepsilon|u(t, a)|}{\alpha + \sigma}[1 - e^{-(\alpha+\sigma)t}] + \frac{2k\varepsilon|u(t, a)|}{\sigma}$$

o que resulta

$$|u(t, a)| \left[\frac{2k\varepsilon}{\alpha + \sigma}(e^{-(\alpha+\sigma)t} - 1) - \frac{2k\varepsilon}{\sigma} + 2 \right] \leq 2k|a|e^{-(\alpha+\sigma)t} \leq 2k|a|e^{-\alpha t}.$$

Assim, basta mostrar que

$$D = \left[\frac{2k\varepsilon}{\alpha + \sigma}(e^{-(\alpha+\sigma)t} - 1) - \frac{2k\varepsilon}{\sigma} + 2 \right] \geq 1.$$

Supondo $D < 1$ chega-se a uma contradição com o fato de que $\varepsilon < \sigma/4k$. Assim, obtém-se o resultado.

Tem-se pela equação integral (2.10) que os $n - k$ últimos componentes do vetor $a \in \mathbb{R}^n$ não foram calculados e portanto foram associados como 0. Assim, os componentes $u_j(t, a)$ da solução $u(t, a)$ de (2.9) satisfazem as condições iniciais, ou seja

$$u(0, a) = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1} = 0, \dots, a_n = 0) \implies u_j(0, a) = a_j \text{ para } j = 1, \dots, k$$

e

$$u_j(0, a) = - \int_0^\infty V(-s)G(u(s, a_1, \dots, a_k, 0))ds$$

para $j = k + 1, \dots, n$. Logo, para $j = k + 1, \dots, n$ define a função

$$\psi_j(a_1, \dots, a_k) = u_j(0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0). \quad (2.15)$$

Então, os valores iniciais restantes do vetor a são dados por

$$y_j = u_j(0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$$

que satisfazem,

$$y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k) \text{ para } j = k + 1, \dots, n.$$

Essa equação define uma variedade diferenciável S para $|a| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_k^2} < \delta$. Portanto, se $y(t)$ é uma solução da equação diferenciável (2.9) com $y(0) \in S$, isto é, com $y(0) = u(0, a)$, então

$$y(t) = u(t, a)$$

Segue-se que, se $y(t)$ é uma solução de (2.9) com $y(0) \in S$ então $y(t) \in S$ para $t \geq 0$, e segue pela estimativa (2.14) que $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, mostra-se que

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(0) = 0$$

para $i = 1, \dots, k$ e $j = k + 1, \dots, n$. De fato, como $\psi_j(a_1, \dots, a_k) = u_j(0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$ e $y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k)$ para $j = k + 1, \dots, n$, tem-se que

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_j(0, \dots, h, 0, \dots, 0) - \psi_j(0, \dots, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

pois $1 \leq i \leq k$ e $k + 1 \leq j \leq n$. Ou seja, a variedade diferenciável S é tangente ao subespaço estável $E^S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 = \dots = y_k = 0\}$ do sistema linear $\dot{y} = By$ em 0.

Analogamente, a existência da variedade instável U de (2.9) é estabelecida exatamente pelo mesmo caminho, considerando o sistema (2.9) com $t \rightarrow -t$, isto é

$$\dot{y} = -By - G(y).$$

sendo necessário substituir o vetor y pelo vetor $(y_{k+1}, \dots, y_n, y_1, \dots, y_k)$ e determinar a variedade U de dimensão $(n - k)$ conforme o processo realizado anteriormente.

Para ilustração a construção das aproximações sucessivas $u^{(j)}(t, a)$ feita na demonstração do teorema, segue o seguinte exemplo

Exemplo 2.2.3. *Considere o sistema não-linear*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2.\end{aligned}$$

Segue as três primeiras aproximações sucessivas $u^{(1)}(t, a)$, $u^{(2)}(t, a)$ e $u^{(3)}(t, a)$ definidas pela equação integral (2.11), e usar $u^{(3)}(t, a)$ para aproximar a função ψ_2 , que descreve a variedade estável

$$S : x_2 = \psi_2(x_1), [64]$$

O sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + G(x_1, x_2)$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad G(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

E ainda,

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \quad e \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned}u(t, a) &= U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, a))ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_2^2(s, a) \\ u_1^2(s, a) \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_2^2(s, a) \\ u_1^2(s, a) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}u_2^2(s, a) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}u_1^2(s, a) \end{bmatrix} ds\end{aligned}$$

Assim, as aproximações sucessivas são dadas por

$$u^{(j+1)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}(u_2^{(j)})^2(s, a) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}(u_1^{(j)})^2(s, a) \end{bmatrix} ds.$$

Como $u^{(0)}(t, a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)}(t, a) \\ u_2^{(0)}(t, a) \end{bmatrix}$ tem-se que

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, a) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}(u_2^{(0)})^2(s, a) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}(u_1^{(0)})^2(s, a) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}.0 \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}.0 \end{bmatrix} ds. \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t, a) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}(u_2^{(1)})^2(s, a) \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}(u_1^{(1)})^2(s, a) \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}.0 \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}.(e^{-s}a_1)^2 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}.e^{-2s}a_1^2 \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

Além disso, como

$$\int_t^\infty e^{t-s}e^{-2s}a_1^2 ds = a_1^2 \int_t^\infty e^{t-3s} ds = (e^{-2t}a_1^2)/3$$

tem-se

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ (e^{-2t}a_1^2)/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ -(e^{-2t}a_1^2)/3 \end{bmatrix}$$

e da mesma forma,

$$\begin{aligned} u^{(3)}(t, a) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -e^{-(t-s)}((-e^{-2s}a_1^2)/3)^2 \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}(e^{-s}a_1)^2 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} (-e^{-(t-s)}e^{-4s}a_1^4)/9 \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-s}e^{-2s}a_1^2 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-t-3s}a_1^4 \\ 0 \end{bmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t-3s}a_1^2 \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

como

$$\int_0^t e^{-t-3s}a_1^4 ds = a_1^4 \int_0^t e^{-t-3s} ds = a_1^4 \left(\frac{-e^{-4t} + e^{-t}}{3} \right)$$

e

$$\int_t^\infty e^{t-3s}a_1^2 ds = a_1^2 \int_t^\infty e^{t-3s} ds = a_1^2 \left(\frac{e^{-2t}}{3} \right)$$

segue-se que

$$\begin{aligned} u^{(3)}(t, a) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e^{-4t} - e^{-t})a_1^4/27 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ (e^{-2t}a_1^2)/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 + (e^{-4t} - e^{-t})a_1^4/27 \\ -(e^{-2t}a_1^2)/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na sequência, pode-se mostrar que $u^{(4)}(t, a) - u^{(3)}(t, a) = 0(a_1^5)$. Portanto, usando $u^{(3)}(t, a)$, a função $\psi_2(a_1) = u(0, a) = u(0, a_1, 0)$ é aproximada por

$$\psi_2(a_1) = -\frac{1}{3}a_1^2 + 0(a_1^5)$$

quando $a_1 \rightarrow 0$. Então, como $x_2 = \psi(x_1)$, a variedade estável S é aproximada por

$$S : x_2 = -\frac{x_1^2}{3} + 0(x_1^5)$$

quando $x_1 \rightarrow 0$.

2.3 O Teorema de Grobman-Hartman.

Assim como o Teorema da Variedade Estável, o Teorema de Grobman-Hartman é também um dos resultados mais importantes na teoria qualitativa local de equações diferenciais ordinárias. O teorema diz que próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , o sistema não-linear

$$\dot{x} = f(x)$$

tem a mesma estrutura qualitativa que o sistema linear

$$\dot{x} = Ax$$

com $A = Df(x)$. Isto é, o comportamento local de (2.1) é qualitativamente determinado por (2.2). Por toda seção, assumi-se a origem como o ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 .

Definição 2.3.1. *Seja X um espaço métrico e sejam A e B subconjuntos de X . Um homeomorfismo de A em B é uma bijeção contínua de A em B , $H : A \rightarrow B$, tal que, $H^{-1} : B \rightarrow A$ é contínua, [64].*

Definição 2.3.2. *Dois sistemas autônomos de equações diferenciais tal como (2.1) e (2.2) são ditos topologicamente equivalentes em uma vizinhança da origem, ou que, ambos têm a mesma estrutura qualitativa próximo a origem, se nessa região há um homeomorfismo H de U em V , $H : U \rightarrow V$, sendo U e V subconjunto abertos do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, tal que H "leva" as trajetórias de (2.1) em U nas trajetórias de (2.2) em V , preservando a orientação das mesmas.*

Se o homeomorfismo H preserva a parametrização com o tempo, então os sistemas são ditos topologicamente conjugados em uma vizinhança da origem [64].

Na sequência segue um exemplo simples de dois sistemas topologicamente conjugados.

Exemplo 2.3.1. Considere os sistemas lineares $\dot{x} = A(x)$ e $\dot{y} = B(y)$ com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Seja $H(x) = Rx$, onde a matriz

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $B = RAR^{-1}$ e fazendo $y = H(x) = Rx$ ou $x = R^{-1}y$ tem-se

$$\dot{y} = RAR^{-1}y = By.$$

Assim, se $x(t) = e^{At}x_0$ é a solução do primeiro sistema por x_0 , então $y(t) = H(x(t)) = Rx(t) = Re^{At}x_0 = Re^{At}(R^{-1}R)x_0 = e^{Bt}Rx_0$ é a solução do segundo sistema para Rx_0 , isto é, H leva as trajetórias do primeiro sistema nas trajetórias do segundo, preservando a parametrização, pois

$$He^{At} = e^{Bt}H.$$

A aplicação $H(x) = Rx$ é simplesmente uma rotação de 45° e é claramente um homeomorfismo. Os retratos de fase desses dois sistemas são mostrados na figura 2.5.

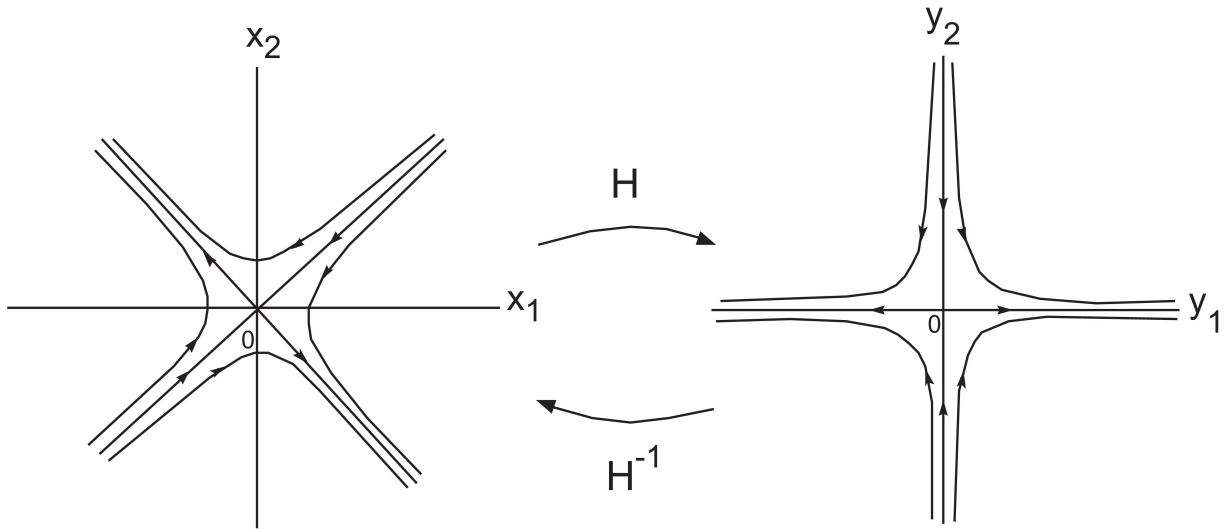


Figura 2.5: Homeomorfismo, [64].

Teorema 2.3.1. (Teorema de Grobman-Hartman) Seja E um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem e sejam $f \in C^1(E)$ e ϕ_t o fluxo do sistema não-linear (2.1). Suponha que $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não possui autovalores com parte real

nula. Então, existe um homeomorfismo H , de um conjunto aberto U contendo a origem em um conjunto aberto V contendo a origem, tal que para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, há um intervalo $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo o zero tal que, $\forall \mathbf{x}_0 \in U$ e $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At} H(\mathbf{x}_0)$$

isto é, a aplicação H transforma as trajetórias de (33) próximo à origem, nas trajetórias de (2.2) próximo à origem, preservando a parametrização [64].

Demonstração: Considere o sistema não-linear (2.1) com $f \in C^1(E)$, $f(0) = 0$ e $A = Df(0)$. Faremos a demonstração por etapas.

1. Suponha que a matriz A é escrita na forma

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

sendo P uma matriz $k \times k$ com autovalores de parte real negativa e Q uma matriz $(n - k) \times (n - k)$ com autovalores de parte real positiva.

2. Seja ϕ_t o fluxo do sistema não-linear (2.1) e escreva a solução

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \phi_t(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} y(t, \mathbf{x}_0) \\ z(t, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t, y_0, z_0) \\ z(t, y_0, z_0) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$y_0 \in E^S$ (subespaço estável de A) e $z_0 \in E^U$ (subespaço instável de A).

3. Defina as funções

$$\tilde{Y}(y_0, z_0) = y(1, y_0, z_0) - e^P y_0$$

e

$$\tilde{Z}(y_0, z_0) = z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0$$

Então, $\tilde{Y}(0, 0) = y(1, 0, 0) - e^P \cdot 0 = 0$ e $\tilde{Z}(0, 0) = z(1, 0, 0) - e^Q \cdot 0 = 0$. E ainda, $D\tilde{Y}(0, 0) = D\tilde{Z}(0, 0) = 0$.

De fato, note que

$$D\tilde{Y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y_0} y(1, y_0, z_0) - \frac{\partial}{\partial y_0} e^P y_0 = \frac{\partial}{\partial y_0} y(1, y_0, z_0) - e^P y_0$$

e

$$D\tilde{Z}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial z_0} z(1, y_0, z_0) - \frac{\partial}{\partial z_0} e^Q z_0 = \frac{\partial}{\partial z_0} z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0.$$

Então, basta mostrar que $\partial/\partial y_0(y(1, y_0, z_0)) = e^P y_0$ e $\partial/\partial z_0(z(1, y_0, z_0)) = e^Q z_0$. Como ϕ_t é o fluxo do sistema (2.1) e o satisfaz com valor inicial $\phi_0(x_0) = x_0$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x_0) = f(\phi_t(x_0))$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x_0) \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} f(\phi_t(x_0)) \frac{\partial}{\partial x_0} \phi_t(x_0)$$

Para $x_0 = 0$ tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial x_0} f(\phi_t(x_0)) = \frac{\partial}{\partial x_0} f(\phi_t(0)) = \frac{\partial}{\partial x_0} f(0) = A$$

e assim

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \phi_t(x_0) \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x_0) \right) = A \frac{\partial}{\partial x_0} \phi_t(x_0)$$

é uma equação diferencial cuja solução é dada por $\partial/\partial x_0(\phi_t(x_0)) = e^{At} x_0$, considerando a condição inicial $\phi_0(x_0) = x_0$. Nota-se que, para $t = 1$ tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \phi_1(x_0) = e^A x_0$$

e por (2.16) segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \phi_1(x_0) = \begin{bmatrix} \partial/\partial y_0(y(1, y_0, z_0)) \\ \partial/\partial z_0(z(1, y_0, z_0)) \end{bmatrix}$$

E como

$$e^A x_0 = \begin{bmatrix} e^P & 0 \\ 0 & e^Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^P y_0 \\ e^Q z_0 \end{bmatrix},$$

tem-se portanto que

$$\frac{\partial}{\partial y_0} y(1, y_0, z_0) = e^P y_0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z_0} z(1, y_0, z_0) = e^Q z_0.$$

Ou seja, $D\tilde{Y}(0, 0) = D\tilde{Z}(0, 0) = 0$.

Na sequência, como $f \in C^1(E)$ os fluxos associados a $\tilde{Y}$ e $\tilde{Z}$ são funções continuamente diferenciáveis. Logo, $\tilde{Y}(y_0, z_0)$ e $\tilde{Z}(y_0, z_0)$ também são funções continuamente diferenciáveis. Assim, admite-se que

$$\|D\tilde{Y}(y_0, z_0)\| \leq a \quad \text{e} \quad \|D\tilde{Z}(y_0, z_0)\| \leq a$$

para (y_0, z_0) no conjunto compacto $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq s_0^2$. A constante a pode ser tomada tão pequena quanto a escolha de s_0 suficiente pequeno, desde que satisfaça as desigualdades.

Considere as funções $Y(y_0, z_0)$ e $Z(y_0, z_0)$ dadas por

$$Y(y_0, z_0) = \begin{cases} \tilde{Y}(y_0, z_0), & \text{se } |y_0|^2 + |z_0|^2 \leq (s_0/2)^2 \\ 0, & \text{se } |y_0|^2 + |z_0|^2 \geq s_0^2 \end{cases}$$

e

$$Z(y_0, z_0) = \begin{cases} \tilde{Z}(y_0, z_0), & \text{se } |y_0|^2 + |z_0|^2 \leq (s_0/2)^2 \\ 0, & \text{se } |y_0|^2 + |z_0|^2 \geq s_0^2 \end{cases}.$$

Então, pela Desigualdade do Valor Médio segue que

$$|Y(y_0, z_0) - Y(0, 0)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \|DY((0, 0) + t(y_0, z_0))\| \} |(y_0, z_0) - (0, 0)|.$$

Como para $0 \leq t \leq 1$, $(0, 0) + t(y_0, z_0)$ é um ponto satisfazendo $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq s_0^2$, tem-se que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \|DY((0, 0) + t(y_0, z_0))\| \} \leq a.$$

Portanto, sendo $Y(0, 0) = 0$ e $|(y_0, z_0)| = \sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq (|y_0| + |z_0|)$ segue que

$$|Y(y_0, z_0)| \leq a(|y_0| + |z_0|).$$

Analogamente,

$$|Z(y_0, z_0)| \leq a(|y_0| + |z_0|)$$

para todo $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n$. Agora, seja $B = e^P$ e $C = e^Q$, então considerando a norma em B e C tem-se que

$$b = \|B\| < 1 \quad e \quad c = \|C^{-1}\| < 1.$$

Além disso, define-se $d = \|C\|$.

4. Para $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, defina as transformações

$$L(x) = L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix} \quad e \quad T(x) = T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix}.$$

Nota-se que, $L(x) = e^A x$ e

$$T(x) = \begin{bmatrix} By + y(1, y, z) - e^P y \\ Cz + y(1, y, z) - e^Q z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} By + y(1, y, z) - By \\ Cz + y(1, y, z) - Cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1, y, z) \\ y(1, y, z) \end{bmatrix} = \phi_1(x).$$

Ou seja, $L(x)$ é o fluxo do sistema linear (2.2) em $t = 1$, e $T(x)$ é o fluxo localmente do sistema não-linear (2.1) em $t = 1$.

Lema 2.3.1. *Existe um homeomorfismo H_0 de um conjunto aberto U contendo a origem em um conjunto aberto V contendo a origem tal que*

$$H_0 \circ T = L \circ H_0, [64].$$

Demonstração do Lema: Para $x \in \mathbb{R}^n$, seja

$$H_0(x) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Então, $H_0 \circ T = L \circ H_0$ é equivalente ao par de equações

$$\begin{aligned} B\Phi(y, z) &= \Phi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ C\psi(y, z) &= \psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Primeiramente, segue as definições das aproximações sucessivas para a segunda equação

$$\Psi_0(y, z) = z \tag{2.18}$$

$$\Psi_{k+1}(y, z) = C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)).$$

Então, segue-se por indução que para $k = 0, 1, 2, \dots$, $\Psi_k(y, z)$ são contínuas e satisfazem $\Psi_k(y, z) = z$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$.

De fato, para $k = 0$ tem-se que $\Psi_0(y, z) = z$ que é contínua. Assume-se, como hipótese de indução que $\Psi_k(y, z) = z$ e é contínua, tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1}(y, z) &= C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ &= C^{-1}(Cz + Z(y, z)) \\ &= z + C^{-1}Z(y, z) = z \end{aligned}$$

pois $Z(y, z) = 0$, para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Além disso, $\Psi_{k+1}(y, z)$ é contínua, pois C^{-1} e $\Psi_k(y, z)$ são contínuas.

Na sequência, prova-se também por indução que para $j = 1, 2, \dots$

$$|\Psi_j(y, z) - \Psi_{j-1}(y, z)| \leq Mr^j(|y| + |z|)^\delta. \tag{2.19}$$

Onde $r = c[3\max(a, b, d)]^\delta$, com $\delta \in (0, 1)$ escolhido suficientemente pequeno para que $r < 1$ (o que é possível desde que $c < 1$), e $M = ac(2s_0)^{1-\delta}/r$.

Assim, para $j = 1$

$$\begin{aligned} |\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_0(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - z| \\ &= |C^{-1}(Cz + Z(y, z)) - z| \\ &= |C^{-1}Z(y, z)| \\ &\leq \|C^{-1}\| |Z(y, z)| \leq Mr(|y| + |z|)^\delta. \end{aligned}$$

De fato, para $|y|^2 + |z|^2 \geq s_0^2$, tem-se que $Z(y, z) = 0$ e assim

$$|Z(y, z)| = 0 \implies \|C^{-1}\| |Z(y, z)| = 0.$$

Para $|y|^2 + |z|^2 \leq s_0^2$, note que $|y| + |z| \leq 2s_0$, logo

$$\begin{aligned} \|C^{-1}\| |Z(y, z)| &\leq ca(|y| + |z|) \\ &= \frac{ca(|y| + |z|)^{1-\delta+\delta}}{r} r \\ &= \frac{ca(|y| + |z|)^{1-\delta}}{r} r(|y| + |z|)^\delta \\ &\leq \frac{ca(2s_0)^{1-\delta}}{r} r(|y| + |z|)^\delta = Mr(|y| + |z|)^\delta. \end{aligned}$$

Portanto, para $j = 1$ a desigualdade é satisfeita.

Agora, assuma que a hipótese de indução é válida para $j = 1, \dots, k$, tem-se

$$\begin{aligned} |\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - \\ &\quad - C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\ &\leq \|C^{-1}\| |\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - \\ &\quad - \Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\ &\leq cMr^k[|By + Y(y, z)| + |Cz + Z(y, z)|]^\delta \\ &\leq cMr^k[b|y| + |Y(y, z)| + d|z| + |Z(y, z)|]^\delta \\ &\leq cMr^k[b|y| + 2a(|y| + |z|) + d|z|]^\delta. \end{aligned}$$

Seja $m = \max(a, b, d)$, então

$$\begin{aligned} |\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| &\leq cMr^k[m|y| + 2m(|y| + |z|) + m|z|]^\delta \\ &= cMr^k[m(|y| + |z|) + 2m(|y| + |z|)]^\delta \\ &= cMr^k[3m(|y| + |z|)]^\delta \\ &= Mr^k c[3\max(a, b, d)]^\delta (|y| + |z|)^\delta \\ &= Mr^{k+1}(|y| + |z|)^\delta. \end{aligned}$$

Com isso, segue que $\Psi_k(y, z)$ é uma sequência de Cauchy de funções contínuas que convergem uniformemente para a função contínua $\Psi(y, z)$, quando $k \rightarrow \infty$. E também, $\Psi(y, z) = z$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Além disso, $\Psi(y, z)$ é a solução da segunda equação em (2.17), pois

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_{k+1}(y, z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} [C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))] \\ &= C^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\Psi(y, z) &= C^{-1}\Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ C\Psi(y, z) &= \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)).\end{aligned}$$

Agora, será analisada a primeira equação em (2.17), que pode ser escrita como

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z)) \quad (2.20)$$

onde as funções Y_1 e Z_1 são definidas pela inversa de T , como segue

$$T^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{bmatrix}.$$

Então, assim como para segunda equação, define-se as aproximações sucessivas

$$\Phi_0(y, z) = y \quad (2.21)$$

$$\Phi_{k+1}(y, z) = B\Psi_k(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z))$$

desde que $b = \|B\| < 1$. Analogamente, mostra-se que $\Phi_k(y, z)$ é uma sequência de Cauchy de funções contínuas, a qual converge uniformemente para a função contínua $\Phi(y, z)$, quando $k \rightarrow \infty$, onde $\Phi(y, z)$ é a solução da equação (2.20).

Portanto, obtém-se a aplicação contínua

$$H_0(x) = H_0(y, z) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix}$$

sendo H_0 um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, com $\Phi(y, z)$ e $\Psi(y, z)$ satisfazendo $H_0 \circ T = L \circ H_0$. O que prova o Lema.

5. Seja H_0 o homeomorfismo definido anteriormente e sejam L^t e T^t famílias de transformações definidas por

$$L^t(x_0) = e^{At}x_0 \quad \text{e} \quad T^t(x_0) = \phi_t(x_0).$$

Define-se

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds.$$

Então, segue-se usando o Lema 2.3.1 que há uma vizinhança da origem para o qual,

$$\begin{aligned}
 L^t H &= \int_0^1 L^{t-s} H_0 T^{s-t} ds \, T^t \\
 &= \int_{-t}^{1-t} L^{-s} H_0 T^s ds \, T^t \\
 &= \left[\int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds + \int_0^{1-t} L^{-s} H_0 T^s ds \right] T^t \\
 &= \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds \, T^t = HT^t
 \end{aligned}$$

Desde que, $H_0 = L^{-1}(LH_0) = L^{-1}H_0T$, o que implica que

$$\int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds = \int_{-t}^0 L^{-s-1} H_0 T^{s+1} ds = \int_{1-t}^1 L^{-s} H_0 T^s ds$$

Assim, $HT^t = L^t H$ ou equivalentemente

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

Consequentemente, como H_0 é um homeomorfismo, seja H_0^{-1} a inversa de H_0 . Logo, a inversa de H , denotada por H^{-1} e definida por

$$H^{-1} = \int_0^1 T^{-s} H_0^{-1} L^s ds$$

também é um homeomorfismo, visto que por H^{-1} ser uma integral de funções contínuas H^{-1} é contínua. Com isso completa-se a demonstração. ■

Agora, será mostrado como as aproximações sucessivas definidas em (2.18) podem ser usadas para obter o homeomorfismo $H(x) = [\Phi(y, z), \Psi(y, z)]^T$. No exemplo a seguir, as aproximações sucessivas realmente convergem para um homeomorfismo global, o qual leva as soluções de (2.1) nas soluções de (2.2), $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3.2. Considere o sistema, [64]:

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= -y \\
 \dot{z} &= z + y^2.
 \end{aligned}$$

A solução com $y(0) = y_0$ e $z(0) = z_0$ é dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_0 e^{-t} \\
 z(t) &= z_0 e^t + \frac{y_0^2}{3} (e^t - e^{-2t}).
 \end{aligned}$$

Assim, no contexto da demonstração acima, $B = e^P = e^{-1}$, $C = e^Q = e$,

$$\begin{aligned} Y(y_0, z_0) &= y(1, y_0, z_0) - e^P y_0 \\ &= y(1, y_0, z_0) - e^{-1} y_0 \\ &= y_0 e^{-1} - e^{-1} y_0 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z(y_0, z_0) &= z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0 \\ &= z_0 e + \frac{y_0^2}{3}(e - e^{-2}) - e z_0 \\ &= y_0^2 \left(\frac{e^3 - 1}{3e^2} \right) \\ &= y_0^2 k \end{aligned}$$

Portanto, resolver

$$C\Psi(y, z) = \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))$$

é equivalente a resolver

$$e\Psi(y, z) = \Psi(e^{-1}y, ez + ky^2). \quad (2.22)$$

As aproximações sucessivas definidas por (2.18) são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_0(y, z) &= z \\ \Psi_1(y, z) &= z + ke^{-1}y^2 \\ \Psi_2(y, z) &= z + ke^{-1}(1 + e^{-3})y^2 \\ \Psi_3(y, z) &= z + ke^{-1}(1 + e^{-3} + e^{-6})y^2 \\ &\vdots \\ \Psi_m(y, z) &= z + ke^{-1}[1 + e^{-3} + \dots + (e^{-3})^{m-1}]y^2 \end{aligned}$$

Como

$$[1 + e^{-3} + \dots + (e^{-3})^{m-1}] = \sum_{n=0}^{m-1} (e^{-3})^n = \frac{1}{1 - e^{-3}}$$

quando $m \rightarrow \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_m(y, z) \longrightarrow \Psi(y, z) &= z + \left(\frac{e^3 - 1}{3e^2} \right) e^{-1} \left(\frac{1}{1 - e^{-3}} \right) y^2 \\ &= z + \frac{1}{3} \left[(e^3 - 1)e^{-3} \left(\frac{1}{1 - e^{-3}} \right) \right] y^2 \\ &= z + \frac{1}{3} \left[(1 - e^{-3}) \left(\frac{1}{1 - e^{-3}} \right) \right] y^2 \\ &= z + \frac{1}{3} y^2 \end{aligned}$$

uniformemente para $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. A função $\Psi(y, z)$ satisfaz a equação (2.22). Analogamente, a função $\Phi(y, z)$ é obtida ao resolver

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z))$$

que é equivalente á

$$e^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(ey + Y_1(y, z), e^{-1}z + Z_1(y, z))$$

onde $Y_1(y, z) = 0$ e $Z_1(y, z) = 0$.

De fato, como

$$T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1}y \\ ez + ky^2 \end{bmatrix} = \phi_1(y, z)$$

e

$$T^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{bmatrix} = \phi_{-1}(y, z)$$

tem-se

$$Y_1(y, z) = ye - B^{-1}y = ye - ey = 0$$

e

$$\begin{aligned} Z_1(y, z) &= \left[ze^{-1} + \frac{y_0^2}{3} (e^{-1} - e^2) \right] - C^{-1}z \\ &= ze^{-1} + \frac{y_0^2}{3} (e^{-1} - e^2) - e^{-1}z \\ &= \frac{y_0^2}{3} (e^{-1} - e^2) \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi(y, z) = y, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$. Assim, o homeomorfismo H_0 é dado por

$$H_0(y, z) = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{1}{3} y^2 \end{bmatrix}$$

e

$$H_0^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} y \\ z - \frac{1}{3} y^2 \end{bmatrix}.$$

Para $L(y, z) = e^A(y, z)^T = (e^{-1}y, ez)^T$ e $T(y, z) = \phi_1(y, z) = (e^{-1}y, ez + ky^2)^T$, segue-se que $H_0 \circ T = L \circ H_0$, como no Lema 2.3.1. Então, o homeomorfismo H é dado por

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds$$

O próximo passo é mostrar agora que $H(y, z) = H_0(y, z)$. Tem-se que $L^{-s} = (e^s y, e^{-s} z)^T$. Logo,

$$H_0 T^s = H_0 \begin{bmatrix} e^{-s} y \\ e^s z + \frac{y^2}{3} (e^s - e^{-2s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-s} y \\ e^s z + \frac{y^2}{3} (e^s - e^{-2s}) + \frac{1}{3} e^{-2s} y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-s} \\ e^s z + \frac{y^2}{3} e^s \end{bmatrix}$$

Assim,

$$L^{-s}H_0T^s = L^{-s} \begin{bmatrix} e^{-s}y \\ e^s z + \frac{y^2}{3}e^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$H(y, z) = \int_0^1 \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{bmatrix} \int_0^1 ds = \begin{bmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{bmatrix} = H_0(y, z)$$

e

$$L^t \circ H(y, z) = \begin{bmatrix} e^{-t}y \\ e^t z + e^t \frac{y^2}{3} \end{bmatrix} = H \circ T(y, z)$$

Ou seja,

$$e^{At}.H(y, z) = H(\phi_t(y, z))$$

O retrato de fase para o sistema não-linear (2.1) e o sistema linear (2.2) desse exemplo são mostrados na Figura 2.6. Pelo homeomorfismo H^{-1} , o subespaço estável $E^S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | z = 0\}$ torna-se a variedade estável $W^S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | z = -y^2/3\}$, e o subespaço instável $E^U = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ torna-se a variedade instável $W^U = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$. As trajetórias $z = 1/y$ do sistema linear tornam-se as trajetórias $z = 1/y - y^2/3$. Além disso, H preserva a parametrização.

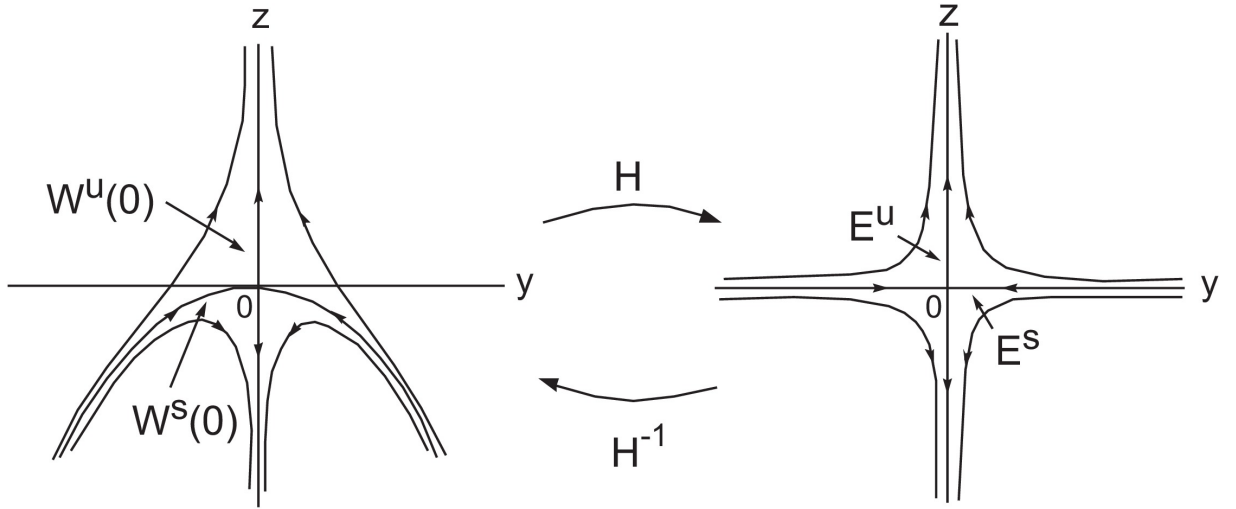


Figura 2.6: Homeomorfismo, [64].

2.4 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov definem a média da razão exponencial com que trajetórias vizinhas divergem uma da outra. Grosso modo, cada expoente avalia como uma pequena perturbação na condição inicial cresce com o tempo, distanciando-se da trajetória de referência. Considere o fluxo de um sistema dinâmico $\phi(x, t)$. Deseja-se comparar como duas trajetórias, por exemplo $\phi(x_1, t)$ e $\phi(x_2, t)$, com x_1 e x_2 vetores de estados iniciais suficientemente próximos, divergem à medida que o sistema evolui.

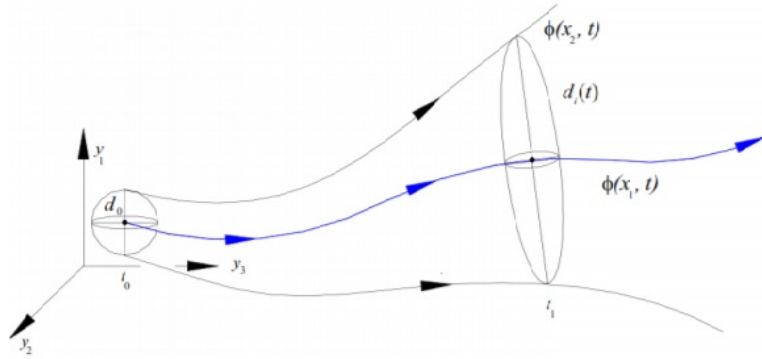


Figura 2.7: Expoentes de Lyapunov, [67].

Seja d_0 , tal que $|x_1 - x_2| < d_0$, o diâmetro de uma esfera com uma vizinhança suficientemente pequena de estados iniciais do sistema dinâmico. Então, pode-se expressar a sua variação por:

$$d(t) \approx d_0 \exp(\lambda t).$$

Segue que

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d_0}.$$

Dessa forma, o sinal λ define o comportamento das trajetórias vizinhas. Se λ for negativo ou nulo, elas não divergem; caso contrário, elas divergem exponencialmente uma da outra. Assim sendo, o expoente de Lyapunov avalia a dependência sensível às condições iniciais de um sistema, ou a grosso modo o quanto ele é caótico [67].

2.4.1 Cálculo dos expoentes de Lyapunov

Considere a evolução temporal de um sistema não-autônomo n dimensional. Seja uma esfera de raio inicial $\delta_0 = \|\delta(0)\|$ de estados vizinhos em torno de $x_0 = x(0)$. Com o passar

do tempo ela evolui para um elipsóide com eixos principais $\delta_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Então, defini-se os expoentes de Lyapunov por, [67]:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta_i(t)}{\delta_0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

Em geral, os λ_i dependem de x_0 , embora em muitos casos eles sejam constantes em uma significativa região do espaço de fases [11]. Consequentemente,

$$\delta_i(t) \approx \delta_0(x_0) \exp \lambda_i t \quad (2.24)$$

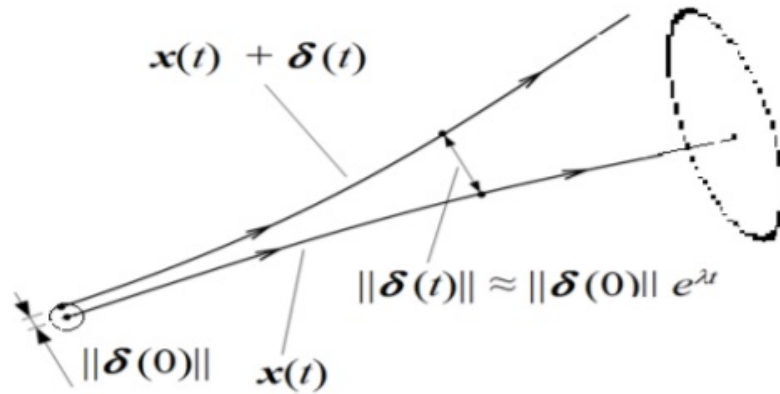


Figura 2.8: Evolução de um elemento de volume esférico de raio δ_0 em torno de um ponto inicial, x_0 , [67]

Num instante t o elemento de volume no espaço de fase é descrito por:

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^n \delta_i(t) \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) em (2.25) vem

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\right) \quad (2.26)$$

Por conseguinte, identifica-se duas situações para as quais o volume no espaço de fases não diverge, a saber:

- (a) quando $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, então $\delta V(t) = \delta V(0)$ e o sistema é conservativo, ou;
- (b) quando $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$, então $\delta V(t) < \delta V(0)$ e o sistema é dissipativo.

Uma primeira tentativa para a obtenção do espectro de expoentes de Lyapunov pode ser intuitivamente construída procedendo ao cálculo numérico das equações de movimento. Dadas duas condições iniciais suficientemente próximas, medir-se-ia como as soluções divergiriam com o tempo. Porém, dois problemas se opõem a este procedimento: o primeiro

ocorre porque trajetórias em um atrator caótico apresentam não somente expansões (ou contrações) mas também dobras, de modo que a dinâmica permanece confinada em uma região finita do espaço de fases, o que implica uma convergência muito lenta por demasiados períodos orbitais; depois, mesmo com a possibilidade de "filtrar" de alguma forma somente expansões em alguma direção, o cômputo da diferença entre as soluções tenderia naturalmente a crescer infinitamente com o tempo caso o sistema seja caótico.

O primeiro problema foi abordado independentemente por Benettin et al. e Shimada & Nagashima [11], com a proposta do tratamento simultâneo da evolução da dinâmica no espaço de fases e no espaço tangente (espaço das equações linearizadas). As equações de movimento linearizadas fornecem a evolução dos eixos principais de uma esfera (Figura 2.7) definida por uma base ortonormal centrada em uma trajetória de referência que, por sua vez, é obtida aplicando-se as equações não-lineares de movimento a uma dada condição inicial. Na prática, integram-se numericamente as equações de movimento com uma dada condição inicial x_0 e, simultaneamente integram-se as equações linearizadas para n diferentes condições iniciais que definem uma base ortonormal $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$.

Procedendo dessa maneira, no entanto, manifesta-se o segundo problema, que deve ser evitado: uma vez que a divergência de uma trajetória caótica é localmente exponencial o módulo dos vetores η_i cresce muito rapidamente. Além disso, os vetores η_i tendem a alinhar-se muito rapidamente ao longo da direção com maior taxa de expansão local, o que causa o colapso angular dos vetores da base. Por isso, um processo de re-ortonormalização, como o de Gram-Schmidt [67], após um número finito de passos de integração, deve estar disponível a fim de contornar tais problemas. Se o interesse for exclusivamente o cálculo do maior dos expoentes de Lyapunov, pode-se dispensá-lo a favor tão somente de uma normalização de um único vetor η nessa direção.

Apresenta-se a seguir um fluxograma (Figura 2.10) baseado no algoritmo clássico proposto por Wolf et al. [69] que permite a estimativa do espectro de expoentes de Lyapunov associado a fluxos e mapas multidimensionais. Primeiro, calcula-se o maior expoente de Lyapunov positivo (λ_1), depois o segundo maior (λ_2) e assim sucessivamente. Com respeito à escolha da base logarítmica igual a 2, esta refere-se à taxa com que a dinâmica do sistema cria ou destrói informação em bits. Ou seja, os expoentes são expressos em bits/s (ou bits/órbita) para um sistema contínuo e em bits/iteração, para um discreto [69].

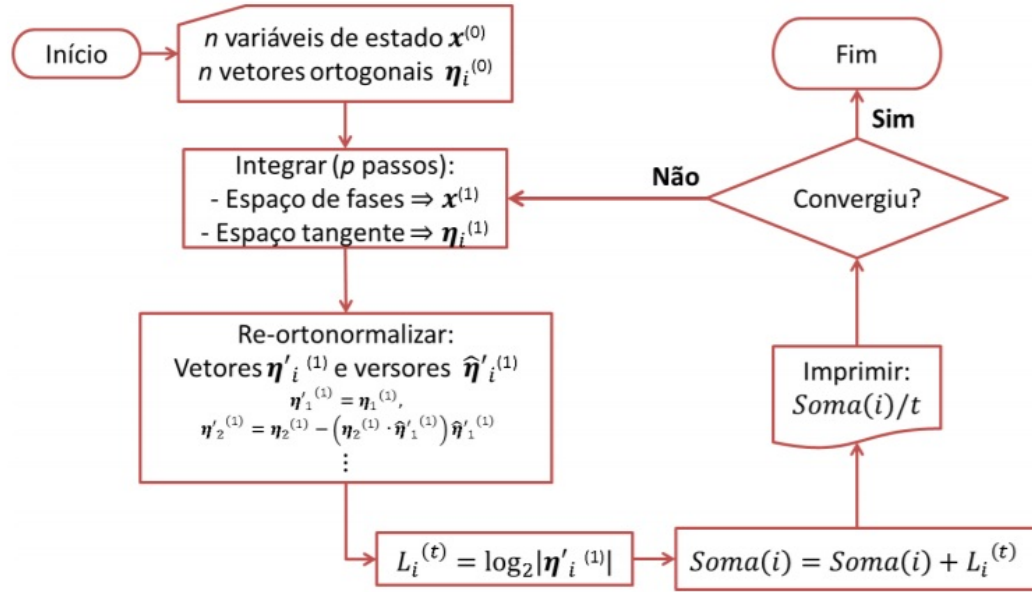


Figura 2.9: Algoritmo de Wolf, [69]

2.5 Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Na teoria dos sistemas de controle, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz é um teste matemático que é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema de controle linear e invariante no tempo (LTI). O teste de Routh é um algoritmo recursivo eficiente que o matemático inglês Edward John Routh propôs em 1876 para determinar se todas as raízes do polinômio característico de um sistema linear apresentam partes reais negativas. O matemático alemão Adolf Hurwitz propôs de forma independente, em 1895, organizar os coeficientes do polinômio em uma matriz quadrada, chamada de matriz de Hurwitz, e mostrou que o polinômio é estável se, e somente se, a sequência dos determinantes de suas submatrizes principais é positiva. Os dois procedimentos são equivalentes, com o teste de Routh fornecendo uma maneira mais eficiente de calcular os determinantes de Hurwitz do que informá-los diretamente. Um polinômio que satisfaz o critério de Routh-Hurwitz é chamado de polinômio de Hurwitz [61].

O processo pode ser descrito:

1. Escreve-se a equação característica da seguinte forma:

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Veja se todos os coeficientes da equação característica são positivos.

2. Caso a condição anterior seja satisfeita, arranje os coeficientes do polinômio de acordo com o seguinte padrão (Arranjo de Routh): O processo de formação das

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\
b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} \\
b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix} \\
c_1 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Figura 2.10: Aranjo de Routh, [61].

linhas continuará até que se esgotem todos os elementos, ou seja, até que a n -ésima linha seja completada.

3. Critério de Routh-Hurwitz: o número de raízes com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinais dos elementos da primeira coluna do arranjo.

Para utilização do critério de Routh-Hurwitz, deve-se considerar alguns casos:

- **Caso 1:** Caso já discutido, onde não há elementos nulos na primeira coluna do arranjo.
- **Caso 2:** Há um valor nulo na primeira coluna, porém alguns elementos dessa linha são não nulos. Neste caso o zero é substituído por um parâmetro, $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.
- **Caso 3:** Linha com todos os elementos nulos. Essa condição ocorre quando a equação característica possui fatores do tipo $(s + \sigma)(s - \sigma)$ ou $(s + j\omega)(s - j\omega)$ ou duas/quatro raízes reais de igual valor e sinais opostos. O arranjo é continuado formando-se um polinômio auxiliar, $P(s)$, com os coeficientes da última linha não nula e utilizando os coeficientes da derivada de $P(s)$ na próxima linha. A ordem do polinômio auxiliar é sempre par e indica o número de raízes simétricas.
- **Caso 4:** Raízes duplas, triplas, etc. no eixo imaginário. É um caso patológico e o critério de Routh-Hurwitz não revela este tipo de instabilidade.

Aqui finaliza-se alguns dos principais resultados e conceitos que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE PARA O CASO ASSIMÉTRICO

Neste capítulo será modelado o movimento bidimensional das pregas vocais com o objetivo de entender um pouco sobre a dinâmica deste movimento. É claro que serão aproximadas as condições fisiológicas das pregas vocais de forma que facilite a análise, sem no entanto que haja perda qualitativa. Será trabalhado o modelo biomecânico que age como uma fonte de som na fonação [36, 37, 38, 39, 40].

3.1 A equação do movimento

A modelagem da vibração das pregas vocais considerando todas as suas peculiaridades, seria muito problemática, visto que a glote é tridimensional, a parede glotal é deformável de modo assimétrico, o par de pregas vocais não é constituído por pregas idênticas, pois pode existir diversas assimetrias, como por exemplo, diferença de altura, largura, rigidez, etc, ou seja, o trato vocal é realmente complexo. A geometria a se considerar é realmente difícil e tornaria o modelo confuso e com um número muito grande de parâmetros.

Logo, assume-se que o movimento de cada prega vocal (direita /esquerda) pode ser definido como o movimento de propagação de uma onda na direção do fluxo de ar. Além disso, será definida uma estrutura mais simples, de forma que as não linearidades do sistema (geometria, viscosidade, colisão abrupta das pregas vocais) não apresentem perdas

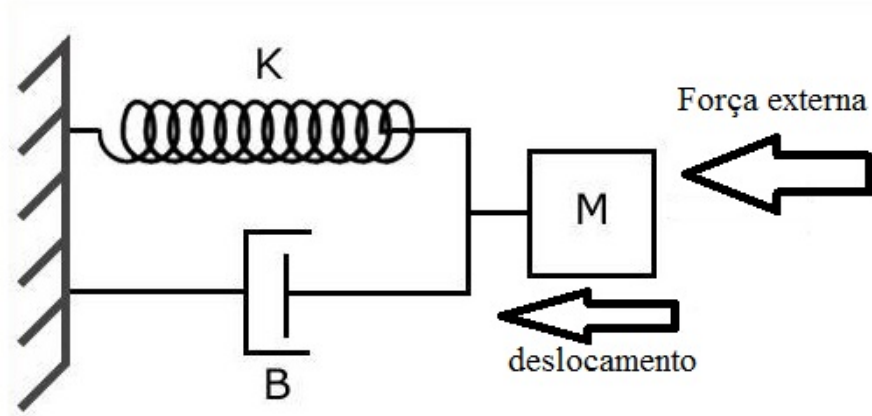


Figura 3.1: Modelo mecânico para o movimento da prega vocal, fonte:autor

significativas nesta análise [57, 39]. Será admitido que todas as propriedades do tecido esteja concentrada no ponto médio das pregas vocais, ou seja, o modelo considerado é agrupado. Através de um balanço de forças na direção do movimento [39] as equações do movimento das pregas direita e esquerda podem ser escritas da seguinte forma [39], respectivamente (figura 3.1):

$$M_r \ddot{\xi}_r + \beta_r(1 + \eta_r \xi_r^2) \dot{\xi}_r + K_r \xi_r = F_g \quad (3.1)$$

$$M_l \ddot{\xi}_l + \beta_l(1 + \eta_l \xi_l^2) \dot{\xi}_l + K_l \xi_l = F_g \quad (3.2)$$

onde $\xi_{r,l}$ são o deslocamento do ponto médio do tecido da glote, $M_{r,l}$, $\beta_{r,l}$ e $K_{r,l}$ são a massa, amortecimento linear e rigidez, direita e esquerda, respectivamente, por unidade média de área da superfície, $\eta_{r,l}$ são o coeficiente não linear de amortecimento e F_g é a força externa que age na glote e será a pressão média da glote [24] que será indicado por P_g por ser um termo mais apropriado.

Conforme Figura 3.2 a representação esquemática das pregas vocais, onde L é a largura da glote, x_0 é a semiabertura inicial da glote, e T é o comprimento da glote.

Aqui faz-se toda demonstração para a prega direita, tendo em vista que as mesmas forças que agem sobre esta prega também agem sobre a prega esquerda. Então considera-se a equação:

$$M_r \ddot{\xi}_r + B_r(1 + \eta_r \xi_r^2) \dot{\xi}_r + K_r \xi_r = P_g. \quad (3.3)$$

Fazendo-se o uso da teoria de Bernoulli para escoamento de fluidos P_g será determinada através de relações entre a velocidade do ar e a pressão de escoamento em vários pontos da glote.

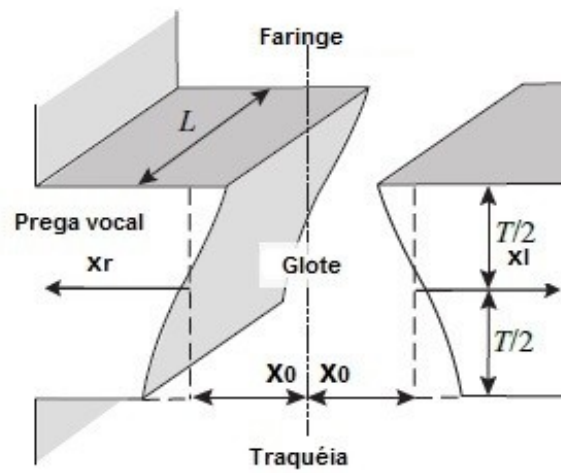


Figura 3.2: Representação esquemática das pregas vocais, [39].

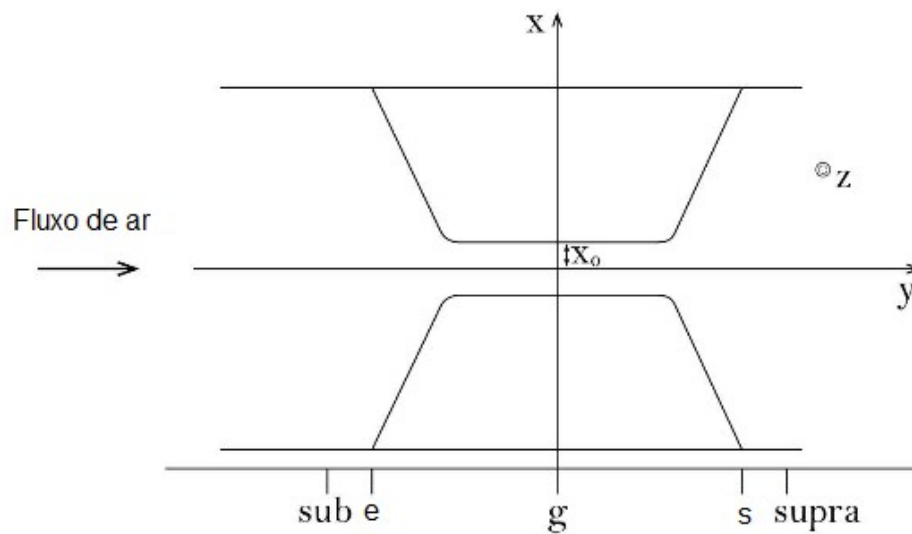


Figura 3.3: Vista geométrica da laringe simplificada no sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e variáveis aerodinâmicas do canal do fluxo, [54].

Toma-se os pontos e e s como os pontos na glote (Figura 3.3), respectivamente. Tem-se então pela equação de Bernoulli que:

$$P_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 - P_p \quad (3.4)$$

onde: P_e , P_s são a pressão nos pontos e e s , respectivamente, e v_e , v_s são a velocidade em e e s , respectivamente. Como considera-se que o fluido é incompressível, tem-se que o valor ρ da massa específica do fluido será constante. Considera-se aqui que não há perda de pressão (não há atrito com a parede das pregas), ou seja, $P_p = 0$. Logo tem-se:

$$P_e - P_s = -\frac{1}{2}\rho(v_e^2 - v_s^2). \quad (3.5)$$

Para as áreas das seções A_e e A_s na entrada e saída da glote (Figura 3.4), respectivamente, tem-se

$$v_e = \frac{\psi}{A_e}, \quad v_s = \frac{\psi}{A_s}, \quad (3.6)$$

para ψ a vazão do fluxo glotal. Logo:

$$P_e - P_s = -\frac{1}{2}\rho\psi^2 \left(\frac{1}{A_e^2} - \frac{1}{A_s^2} \right). \quad (3.7)$$

Agora para as diferenças das pressões nas regiões subglotal e supraglotal o qual será chamada de P_{sub} e P_{supra} , respectivamente, tem-se primeiramente para P_{sub} e P_s

$$P_{sub} + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_{sub}^2} \right) = P_s + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right) - P_{ps} \quad (3.8)$$

onde: P_{ps} é a perda de pressão cinética na saída da glote. Como pode-se considerar a glote como parte de um tubo, sabe-se que essa perda de pressão é proporcional à energia cinética na saída da glote, portanto

$$P_{ps} = k_1 \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right). \quad (3.9)$$

Segue das equações (3.8) e (3.9) que:

$$P_{sub} + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_{sub}^2} \right) = P_s + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right) - k_1 \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right). \quad (3.10)$$

Como A_{sub} é suficientemente grande comparado com A_s tem-se da equação (3.10) que

$$P_{sub} - P_s = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right) (1 - k_1). \quad (3.11)$$

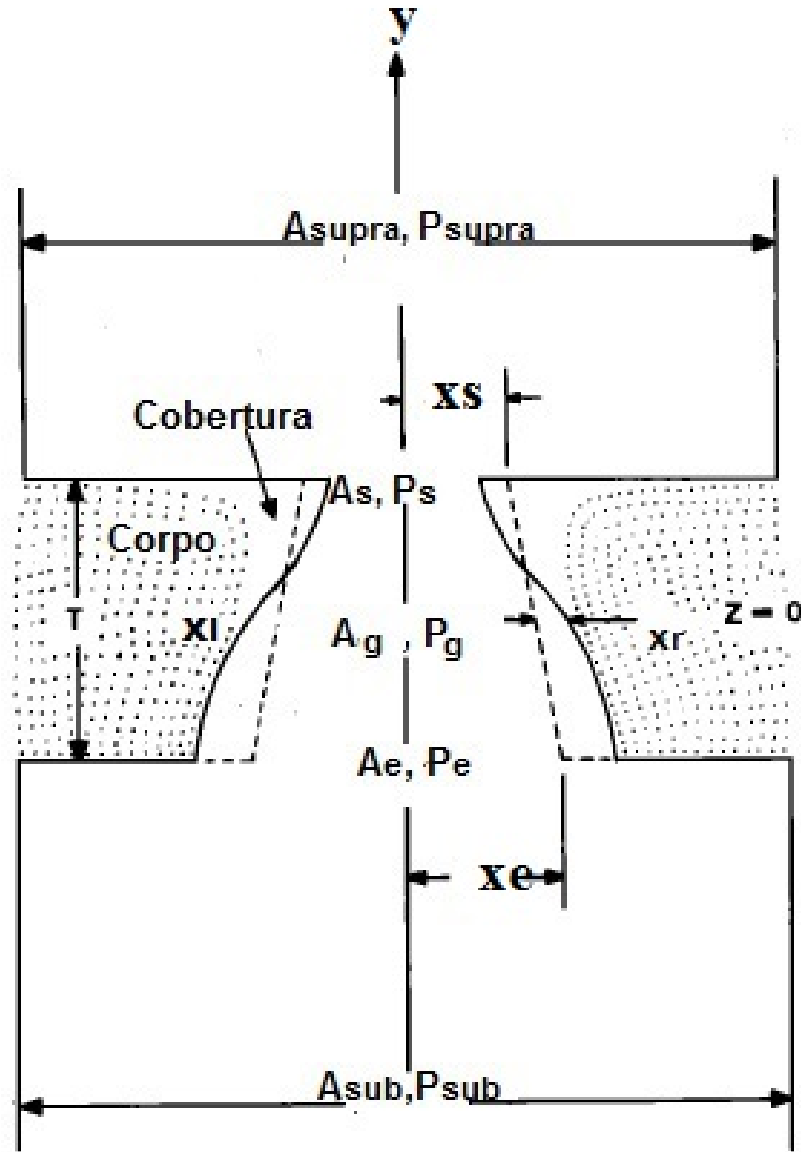


Figura 3.4: Seção frontal das pregas vocais, adaptado de [55].

Renomeando-se $1 - k_1 = k_c$, onde k_c é o coeficiente de perda de pressão cinética na entrada da glote e

$$P_{ks} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right) \quad (3.12)$$

é a pressão dinâmica na saída glotal. Segue das equações (3.11) e (3.13) que:

$$P_{sub} - P_s = k_c P_{ks}. \quad (3.13)$$

De maneira análoga, tem-se para P_s e P_{supra}

$$P_{supra} - P_s = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\psi^2}{A_s^2} \right) (1 - k_2). \quad (3.14)$$

Agora, renomeia-se $1 - k_2 = k_e$ como o coeficiente de recuperação da pressão na saída da glote e então:

$$P_{supra} - P_s = k_e P_{ks}. \quad (3.15)$$

Subtraindo-se as equações (3.13) e (3.15) obtem-se:

$$P_{sub} - P_{supra} = (k_c - k_e) P_{ks} = k_t P_{ks} \quad (3.16)$$

seja $k_t = k_c - k_e$ o coeficiente de pressão transglotal. Agora para um ponto y na glote se considera-se que a área da seção transversal da glote é retangular têm-se que a pressão $P(y)$ e P_s deverão satisfazer a equação de Bernoulli, ou seja:

$$P(y) + \frac{1}{2} \frac{\rho \psi^2}{A(y)^2} = P_s + \frac{1}{2} \frac{\rho \psi^2}{A_s^2} \quad (3.17)$$

logo de (3.15) obtem-se

$$P_s = P_{supra} - k_e P_{ks} \quad (3.18)$$

segue de (3.17) que:

$$P(y) = P_{supra} - k_e P_{ks} + \frac{1}{2} \frac{\rho \psi^2}{A(y)^2} \left(1 - \frac{A^2(y)}{A_s^2} \right) \quad (3.19)$$

reorganizados

$$P(y) = P_{supra} + P_{ks} \left(1 - \frac{A^2(y)}{A_s^2} - k_e \right). \quad (3.20)$$

Substituindo-se P_{ks} dada pela equação (3.16) na equação anterior tem-se:

$$P(y) = P_{supra} + \frac{(P_{sub} - P_{supra})}{k_t} \left(1 - \frac{A^2(y)}{A_s^2} - k_e \right). \quad (3.21)$$

Agora encontra-se a expressão geral para $A(y)$ através de uma interpolação linear. Antes observe a figura 3.4. Como considera-se que a seção transversal da glote é retangular tem-se que o ponto y encontra-se entre a entrada e a saída da glote, ou seja, entre e e s logo temos para o comprimento da glote T .

$$A(y) - A_e = \frac{A_s - A_e}{T} \left[y - \left(-\frac{T}{2} \right) \right] \quad (3.22)$$

ou seja,

$$A(y) = \frac{A_s - A_e}{T} y + \frac{A_s + A_e}{2} \quad (3.23)$$

A pressão média P_g agindo na superfície do ponto médio é dada por:

$$P_g = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P(y) dy \quad (3.24)$$

que substituindo os valores de $P(y)$ e $A(y)$ dados pela equações (3.21) e (3.23) na equação (3.24) tem-se:

$$P_g = P_{supra} + \frac{(P_{sub} - P_{supra})}{k_t} \left(1 - \frac{A_s}{A_e} - k_e \right). \quad (3.25)$$

Agora determina-se A_e e A_s . A Figura 3.5 a seguir mostra um ciclo idealizado da vibração das pregas vocais no plano coronal. Quando a glote abre-se (abdução), ela tem forma convergente [39], veja configuração 1 a 4 da Figura 3.5a seguir. Quando a glote fecha (adução), as pregas vocais tem forma divergente, configuração de 5 a 8 da Figura 3.5. Esse é o movimento ondulatório da superfície da mucosa que se deforma propagando na direção do fluxo de ar [28]. O movimento de abdução e adução caracteriza-se por uma

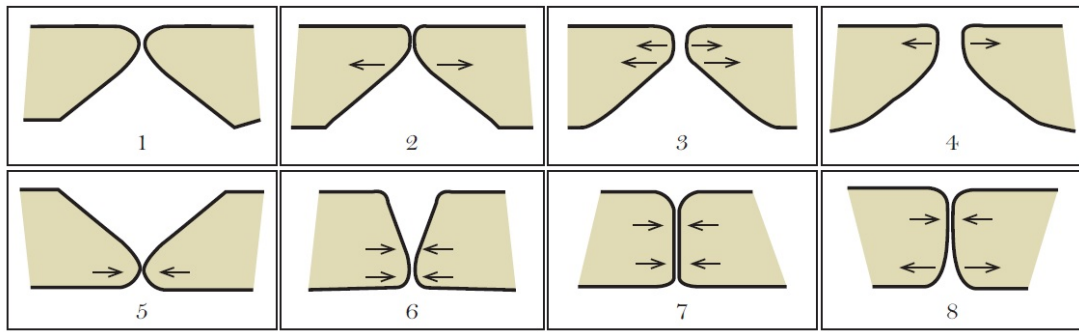


Figura 3.5: Propagação da onda de mucosa, esquema de um ciclo oscilatório, adaptado de Hirano [27], [28].

equação de onda unidimensional, com velocidade c^2 :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (3.26)$$

onde considera-se que a onda se propaga na direção do fluxo de ar. Pelo método de d'Alembert [70] sabe-se que a solução pode ser simplificada por:

$$x(z, t) = x\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (3.27)$$

Por admitir uma estrutura simples da geometria das pregas vocais, fica mais fácil determinar as áreas ao longo do eixo y na glote à medida que a onda se propaga pela mucosa. Lembre-se que L é a largura da prega, então uma constante x_0 é acrescentada ao deslocamento $x(z, t)$, logo para um ponto y na glote (veja figura 3.2 e figura 3.3) tem-se:

$$A(z, t) = L(x_0(t) + x_r((z, t)) + L(x_0(t) + x_l((z, t))). \quad (3.28)$$

Para o comprimento T da prega segue que quando $z = -T/2$ encontra-se em e que possui área A_e e quando $z = T/2$ encontra-se em s possui área A_s . Para o tempo de

atraso τ que a onda leva para viajar a metade da prega vocal segue que :

$$\begin{cases} x_e(t) = x_r(t + \tau) + x_l(t + \tau) \\ x_s(t) = x_r(t - \tau) + x_l(t - \tau) \\ \tau = \frac{T}{2c}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Então:

$$\begin{aligned} A_e(t) &= A(-T/2, t) \\ &= L[x_0 + x_r(-T/2, t)] + L[x_0 + x_l(-T/2, t)] \\ &= L[x_0 + x_r(t + \tau)] + L[x_0 + x_l(t + \tau)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De maneira análoga:

$$\begin{aligned} A_s(t) &= A(T/2, t) \\ &= L[x_0 + x_r(T/2, t)] + L[x_0 + x_l(T/2, t)] \\ &= L[x_0 + x_r(t - \tau)] + L[x_0 + x_l(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Logo, tem-se finalmente as expressões para calcular P_g .

3.2 Redução para um sistema de Van der Pol fortemente acoplado

Dos cálculos feitos na seção anterior desconsidera-se o efeito do carregamento do trato vocal, ou seja $P_{supra} \approx 0$, o que coincide com a pressão atmosférica. Além disso também será desconsiderado o termo k_e , pois geralmente $k_e < 0.2$ [39]. Logo temos a pressão média na glote P_g dado pela equação 3.25 é reescrita como:

$$P_g = \frac{P_{sub}}{k_t} \left(1 - \frac{A_s}{A_e} \right). \quad (3.32)$$

Para um tempo de atraso τ suficientemente pequeno, através a série de Taylor em torno da origem segue que áreas dadas anteriormente pelas expressões (3.30) e (3.31) são representadas agora por:

$$A_e(t) = L[2x_0 + x_r(t) + \tau \dot{x}_r(t) + x_l(t) + \tau \dot{x}_l(t)] \quad (3.33)$$

$$A_s(t) = L[2x_0 + x_r(t) - \tau \dot{x}_r(t) + x_l(t) - \tau \dot{x}_l(t)] \quad (3.34)$$

que substituídas na equação (3.32) fornece a seguinte expressão para a pressão média na glote:

$$P_g = \frac{P_{sub}}{k_t} \frac{2\tau(\dot{x}_r(t) + \dot{x}_l(t))}{2x_0 + x_r(t) + \tau \dot{x}_r(t) + x_l(t) + \tau \dot{x}_l(t)}. \quad (3.35)$$

Para uma readaptação de [4] e [25] a expressão acima ainda pode ser aproximada por uma relação linear

$$P_g \approx P_{sub} v_{char} (\dot{x}_r + \dot{x}_l), \text{ onde } v_{char} = \frac{2\tau}{k_t x_0} \quad (3.36)$$

v_{char} é chamado de coeficiente de velocidade característica.

Agora será considerada as variáveis de movimento iniciais $\xi_{r,l}$. Das considerações dada por (3.36) segue das equações (3.1), (3.2) e (3.35) e para uma assimetria apenas na rigidez, segue que:

$$M\ddot{\xi}_r + \beta(1 + \eta\xi_r^2)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = \frac{P_s\tau}{k_t\xi_0}(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_l) \quad (3.37)$$

$$M\ddot{\xi}_l + \beta(1 + \eta\xi_l^2)\dot{\xi}_l + K_l\xi_l = \frac{P_s\tau}{k_t\xi_0}(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_l). \quad (3.38)$$

são equivalentes à:

$$M\ddot{\xi}_r + \beta(1 + \eta\xi_r^2)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = C(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_l) \quad (3.39)$$

$$M\ddot{\xi}_l + \beta(1 + \eta\xi_l^2)\dot{\xi}_l + K_l\xi_l = C(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_l). \quad (3.40)$$

Soma-se $-2C\dot{\xi}_r$ nos dois membros de (3.39) e $-2C\dot{\xi}_l$ nos dois membros de (3.40) obtém-se reagrupando os termos , respectivamente:

$$M\ddot{\xi}_r + (\beta - 2C + \beta\eta\xi_r^2)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = C(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_l - 2\dot{\xi}_r) \quad (3.41)$$

$$M\ddot{\xi}_l + (\beta - 2C + \beta\eta\xi_l^2)\dot{\xi}_l + K_l\xi_l = C(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_l + 2\dot{\xi}_l) \quad (3.42)$$

que simplificados tornam-se:

$$M\ddot{\xi}_r + (\beta - 2C + \beta\eta\xi_r^2)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = C(\dot{\xi}_l - \dot{\xi}_r) \quad (3.43)$$

$$M\ddot{\xi}_l + (\beta - 2C + \beta\eta\xi_l^2)\dot{\xi}_l + K_l\xi_l = C(\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_l). \quad (3.44)$$

Para $B = -\beta + 2C$, segue que:

$$M\ddot{\xi}_r - (B - \beta\eta\xi_r^2)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = C(\dot{\xi}_l - \dot{\xi}_r) \quad (3.45)$$

$$M\ddot{\xi}_l - (B - \beta\eta\xi_l^2)\dot{\xi}_l + K_l\xi_l = C(\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_l). \quad (3.46)$$

Considera-se aqui $B \neq 0$, então:

$$M\ddot{\xi}_r - B\left(1 - \frac{\beta\eta}{B}\xi_r^2\right)\dot{\xi}_r + K_r\xi_r = C(\dot{\xi}_l - \dot{\xi}_r) \quad (3.47)$$

$$M\ddot{\xi}_l - B\left(1 - \frac{\beta\eta}{B}\xi_l^2\right)\dot{\xi}_l + K_l\xi_l = C(\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_l). \quad (3.48)$$

Dividi-se as duas últimas equações acima por $K_r M$ e usa-se que $K_r M = \sqrt{K_r M} \sqrt{K_r M}$ tem-se:

$$\frac{\ddot{\xi}_r}{K_r} - \frac{B}{\sqrt{K_r M}} \frac{1}{\sqrt{K_r M}} \left(1 - \frac{\beta\eta}{B} \xi_r^2\right) \dot{\xi}_r + \frac{\xi_r}{M} = \frac{C}{K_r M} (\dot{\xi}_l - \dot{\xi}_r) \quad (3.49)$$

$$\frac{\ddot{\xi}_l}{M} - \frac{B}{\sqrt{K_r M}} \frac{1}{\sqrt{K_r M}} \left(1 - \frac{\beta\eta}{B} \xi_l^2\right) \dot{\xi}_l + \frac{K_l}{K_r M} \xi_l = \frac{C}{K_r M} (\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_l). \quad (3.50)$$

Agora, seja $\mu = \frac{B}{\sqrt{K_r M}}$, $\alpha = \frac{C}{\sqrt{K_r M}}$ e $Q = \frac{K_l}{K_r} \geq 0$. Segue dessas observações e das equações (3.49) e (3.50) que

$$\frac{\ddot{\xi}_r}{K_r} - \mu \frac{1}{\sqrt{K_r M}} \left(1 - \frac{\beta\eta}{B} \xi_r^2\right) \dot{\xi}_r + \frac{\xi_r}{M} = \alpha \frac{1}{\sqrt{K_r M}} (\dot{\xi}_l - \dot{\xi}_r) \quad (3.51)$$

$$\frac{\ddot{\xi}_l}{K_r} - \mu \frac{1}{\sqrt{K_r M}} \left(1 - \frac{\beta\eta}{B} \xi_l^2\right) \dot{\xi}_l + \frac{Q}{M} \xi_l = \alpha \frac{1}{\sqrt{K_r M}} (\dot{\xi}_r - \dot{\xi}_l). \quad (3.52)$$

A fim de simplificar as equações acima segue que a mudança de variáveis $x_{r,l} = \sqrt{\frac{\beta\eta}{B}} \xi_{r,l}$ e o reescalonamento no tempo $t' = \sqrt{\frac{M}{K_r}} t$, implica pela regra da cadeia que:

$$\dot{x}_{r,l}(t') = \frac{\beta\eta}{B} \sqrt{\frac{M}{K_r}} \dot{\xi}_{r,l}(t) \quad (3.53)$$

$$\ddot{x}_{r,l}(t') = \frac{\beta\eta}{B} \frac{M}{K_r} \ddot{\xi}_{r,l}(t). \quad (3.54)$$

Substitui-se agora as equações (3.53) e (3.54) em (3.51) e (3.52) e obtém-se:

$$\ddot{x}_r - \mu(1 - x_r^2) \dot{x}_r + x_r = \alpha(\dot{x}_l - \dot{x}_r) \quad (3.55)$$

$$\ddot{x}_l - \mu(1 - x_l^2) \dot{x}_l + Qx_l = \alpha(\dot{x}_r - \dot{x}_l). \quad (3.56)$$

As (3.55) e (3.56) constituem um sistema acoplado com acoplamento α e Q é um parâmetro de assimetria. Observa-se que para $Q = 1$ as equações (3.55) e (3.56) são praticamente idênticas. Para que $\mu = 0$ temos que $B = 0$, ou seja $P_s = \frac{k_t x_0 \beta}{2\tau}$ que é a pressão limiar de oscilação. Note que a condição $\mu \geq 0$ implica que $\alpha \geq \frac{\mu}{2}$.

Pode-se reescrever o sistema dado pelas equações (3.55) e (3.56) acima como um sistema de van der Pol fortemente acoplado, ou seja na seguinte forma matricial:

$$\ddot{X} - \mu(I - \chi^2) \dot{X} + X = (1 - Q)AX + \alpha B\dot{X} \quad (3.57)$$

onde:

$$X = \begin{pmatrix} x_r \\ x_l \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \chi = \begin{bmatrix} x_r & 0 \\ 0 & x_l \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Tabela 3.1: Valores dos parâmetros para a configuração de um homem adulto,[39]

Pârametro	Valor
M	0,476 g/cm ²
β	50 dyn/cm ³
K_r	200000 dyn/cm ³
τ	1 ms
k_t	1,1
x_0	0,1 cm
P_s	800 Pa
η	5000 cm ⁻²

A análise do sistema dado pela equação (3.57) será feita para o parâmetro de assimetria que satisfaz $0 \leq Q \leq 1$. Caso $Q > 1$ tem-se $K_l > K_r$, então faz-se uma mudança de variáveis e reescalonamento no tempo e reescreve-se o sistema com um parâmetro de assimetria equivalente trocando-se a prega direita pela esquerda. De acordo com o trabalho de Lucero [45] o parâmetro α também pode ser variado (equivale a situações reais) no intervalo $[0 \ 1]$. Aqui considera-se os valores médios para um homem adulto de acordo com [39] e estão explicitados na tabela 3.1. Este valores que produzem $\mu = 0.3$ e $\alpha = 0.23$.

3.3 Análise de estabilidade numérica e analítica

Para estudar a estabilidade do sistema dado pelas equações (3.55) e (3.56) reescreve-as como um sistema quadridimensional de ordem 1. Observe as equações abaixo:

$$\dot{x}_r = x_1 \quad (3.59)$$

$$\dot{x}_1 = \ddot{x}_r = \mu(1 - x_r^2)\dot{x}_r - x_r + \alpha(\dot{x}_l - \dot{x}_r) \quad (3.60)$$

$$\dot{x}_l = x_2 \quad (3.61)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_l = \mu(1 - x_l^2)\dot{x}_l - Qx_l + \alpha(\dot{x}_r - \dot{x}_l). \quad (3.62)$$

As soluções constantes do sistema são determinadas pelo sistema homogêneo:

$$\dot{x}_r = 0 \quad (3.63)$$

$$\dot{x}_1 = \mu(1 - x_r^2)x_1 - x_r + \alpha(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.64)$$

$$\dot{x}_l = 0 \quad (3.65)$$

$$\dot{x}_2 = \mu(1 - x_l^2)x_2 - Qx_l + \alpha(x_1 - x_2) = 0. \quad (3.66)$$

Essas soluções são chamadas como solução de equilíbrio. Logo a única solução do sistema acima é dada por $E_q = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. O sistema acima é reescrito de forma mais compacta como segue abaixo.

$$\dot{X} = AX + G(X) \quad (3.67)$$

onde:

$$X = \begin{pmatrix} x_r \\ x_1 \\ x_l \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \mu - \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & -Q & \mu - \alpha \end{bmatrix}, G(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu x_r^2 x_1 \\ 0 \\ -\mu x_l^2 x_2 \end{pmatrix}.$$

A variável " $\dot{X}$ " aqui indica derivada de X em relação a t .

Observe que $G(X) = o(|x|)$, isto é, $G(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow 0$. Além disso, $G(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T = E_q$. Logo pela teoria de estabilidade para sistemas lineares perturbados pode-se estudar o comportamento qualitativo do sistema (3.67) na vizinhança do ponto E_q basta estudar apenas o comportamento do sistema linear [21], conforme os consta no capítulo de resultados preliminares. Para determinar a estabilidade do sistema linear $\dot{X} = AX$ deve-se encontrar o polinômio característico associado a matriz A . Para o caso estudado o polinômio característico é dado por:

$$\det(A - sI) = s^4 + 2(\alpha - \mu)s^3 + [1 + Q + \mu(\mu - 2\alpha)]s^2 + (\alpha - \mu)(1 + Q)s + Q. \quad (3.68)$$

3.3.1 Estabilidade numérica

Variando-se os parâmetros de acoplamento (α) e assimetria (Q) encontra-se o diagrama de estabilidade para o único ponto de equilíbrio do sistema que é a origem $E_q = (0, 0, 0, 0)$. Aqui considera-se o parâmetro Q fixado no intervalo $0 \leq Q \leq 1$ com uma variação de 0,05 variando-se α no mesmo intervalo e com as mesmas variações. Para essas considerações gera-se o seguinte diagrama de estabilidade utilizando o software *MATLAB^R*, mostrado na figura 3.6, onde cada gráfico é a instabilidade para cada par de raízes:

Neste diagrama os círculos indicam parte real dos pares negativa (estabilidade) e as estrelas indicam pelo menos uma raiz com parte real positiva (instabilidade) da solução de equilíbrio.

3.3.2 Estabilidade analítica

Relembre-se que a equação característica associada as equações de movimento das pregas vocais dado pela equação (3.68) é:

$$s^4 + 2(\alpha - \mu)s^3 + [1 + Q + \mu(\mu - 2\alpha)]s^2 + (\alpha - \mu)(1 + Q)s + Q$$

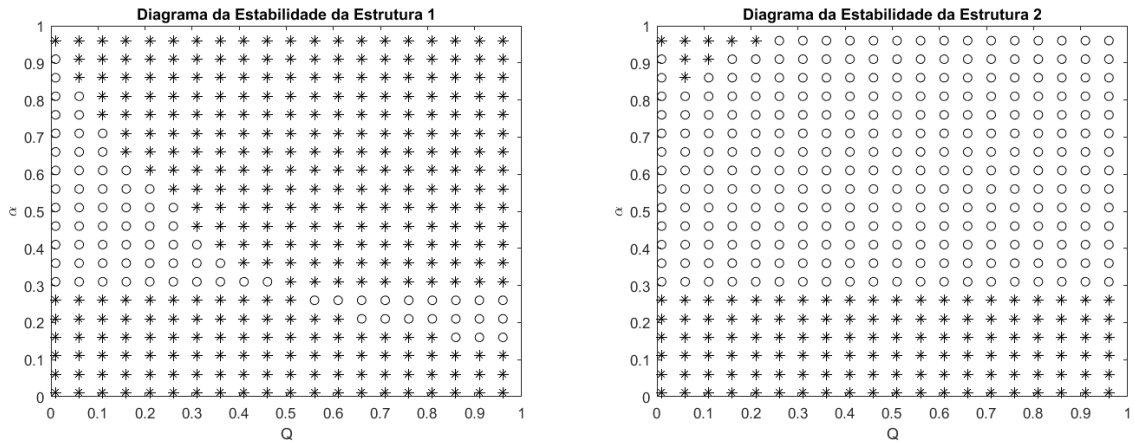


Figura 3.6: Diagrama de estabilidade para o primeiro e segundo par de raízes

O que interessa saber do polinômio acima é quais as condições para que ele seja instável, ou seja, quais as condições os seus coeficientes devem satisfazer para que todas as suas raízes tenham parte real negativa. Caso isto aconteça tem-se que o ponto de equilíbrio do sistema é assintoticamente estável. O critério de Routh-Hurwitz [63] fornece condições necessárias e suficientes para que um polinômio da forma

$$p_4(s) = a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4$$

possua todas as raízes com parte real negativa. Uma condição necessária é que todos os coeficientes não mudem de sinal. Então, como $a_0 > 0$, devemos ter $a_n > 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$. Uma condição suficiente para a estabilidade também é dada pela tabela de Routh-Hurwitz, onde a primeira coluna não deve mudar de sinal.

Tabela 3.2: Tabela de Routh-Hurwitz

s_4	$a_0 = 1$	$a_2 = [1 + Q + \mu(\mu - 2\alpha)]$	$a_4 = Q$
s_3	$a_1 = 2(\alpha - \mu)$	$a_3 = (\alpha - \mu)(1 + Q)$	0
s_2	$b_1 = \frac{-a_0a_3 + a_1a_2}{a_1}$	$b_2 = -a_0 * 0 - \frac{a_1a_4}{a_1}$	$b_3 = 0$
s_1	$c_1 = \frac{-a_1b_2 + a_1a_3}{b_1}$	0	0
s_0	$d_1 = \frac{-b_1 * 0 + c_1b_2}{c_1}$	0	0

Das equações da tabela 3.2 segue:

$$b_1 = \frac{-(\alpha - \mu)(1 + Q) + 2(\alpha - \mu)[1 + Q + \mu(\mu - 2\alpha)]}{2(\alpha - \mu)} \quad (3.69)$$

$$c_1 = \frac{2(\alpha - \mu)Q + (\mu - 2\alpha)(1 + Q)}{b_1} \quad (3.70)$$

$$d_1 = b_2 = Q. \quad (3.71)$$

Das condições necessárias e suficiente para a estabilidade do polinômio é suficiente que

$$a_1 > 0; a_3 > 0; a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0; a_4 > 0 \quad (3.72)$$

que calculadas para o polinômio característico obtém-se:

$$a_1 > 0 \Rightarrow \alpha - \mu > 0 \Rightarrow a_3 > 0 \quad (3.73)$$

$$a_4 > 0 \Rightarrow Q > 0 \quad (3.74)$$

$$a_2 = 1 + Q + \mu(\mu - 2\alpha) > 0 \quad (3.75)$$

Para $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0$ seguem os cálculos

$$\begin{aligned} & (\alpha - \mu)(1 + Q)/2(\alpha - \mu)[1 + Q + \mu(\mu - 2\alpha) - (\alpha - \mu)(1 + Q)] - 4Q(\alpha - \mu)^2 \\ = & (\alpha - \mu)^2[2(1 + Q)(1 + Q) + 2\mu(\mu - 2\alpha)(1 + Q) - (1 + Q)^2 - 4Q] \\ = & 2(1 + Q)^2 + 2\mu(\mu - 2\alpha)(1 + Q) - (1 + Q)^2 - 4Q \\ = & (1 + Q)^2 + 2\mu(\mu - 2\alpha)(1 + Q) - 4Q \\ = & (1 - Q)^2 + 2\mu(\mu - 2\alpha)(1 + Q) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Dividi-se (3.76) por $2(1 + Q)$ e soma-se α^2 em ambos lados da inequação:

$$\frac{(1 - Q)^2}{2(1 + Q)} + \mu(\mu - 2\alpha) + \alpha^2 > \alpha^2 \quad (3.77)$$

Que reescrita se torna:

$$\frac{(1 - Q)^2}{2(1 + Q)} + (\mu - \alpha)^2 > \alpha^2 \quad (3.78)$$

que dividida por α^2

$$\frac{(1 - Q)^2}{2(1 + Q)\alpha^2} + \left(\frac{\mu - \alpha}{\alpha}\right)^2 > 1. \quad (3.79)$$

Logo a inequação (3.79) também deve ser satisfeita para que o polinômio característico seja estável. Caso alguma das condições descritas em aqui não sejam satisfeitas perde-se a estabilidade do polinômio característico. Para que isso ocorra duas situações limite distintas podem ocorrer:

- **Caso 1**

$$\alpha = \mu \text{ curva c} \quad (3.80)$$

Então na tabela de Routh-Hurwitz tem-se $a_1 = a_3 = 0$. Para $a_1 = \epsilon$ e substituindo-se em b_1 e para $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow b_1 \rightarrow 0$ Da mesma forma, faz-se $b_1 = 0$ e substitui-se se em c_1 e para $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow c_1 \rightarrow 0$. Com essas observações encontra-se 2 linhas da tabela de Routh-Hurwitz nulas. Isto implica que dois pares raízes cruzam o eixo imaginário.

- **Caso 2**

$$\frac{(1-Q)^2}{2(1+Q)\alpha^2} + \left(\frac{\mu-\alpha}{\alpha}\right)^2 = 1 \text{ curva b} \quad (3.81)$$

Para este caso tem-se que $c_1 = 0$ logo novamente tem-se uma linha nula na tabela de Routh-Hurwitz, portanto um par de raízes cruzando o eixo imaginário.

3.3.3 Soluções sincronizadas

Aqui será estudado o movimento oscilatório sincronizado das pregas vocais (phase-locked) direita e esquerda, ou seja sob quais condições irão oscilar com a mesma frequência e com diferença de fase constante (a melhor das hipóteses é quando a diferença de fase é zero, ou seja as soluções estão sincronizada em fase). Para este estudo será aplicado um método de perturbação conhecido como método do balanço harmônico [58]. A idéia deste método é expressar a solução do sistema de equações na forma de uma combinação linear de funções periódicas [59], [60]. Este método também é conhecido como método da linearização harmônica [62] e tem a característica de poder tratar não somente não-linearidades analíticas suaves mas também não-linearidades analíticas abruptas encontradas em muitos problemas físicos, sendo possível obter soluções aproximadas através do seu uso.

Será assumida a solução de primeira ordem:

$$x_r(t) = R_r \cos(\omega t - \theta_r) \quad (3.82)$$

$$x_l(t) = R_l \cos(\omega t - \theta_l). \quad (3.83)$$

Logo:

$$\dot{x}_r(t) = -R_r \omega \sin(\omega t - \theta_r) \quad (3.84)$$

$$\ddot{x}_r(t) = -R_r \omega^2 \cos(\omega t - \theta_r) \quad (3.85)$$

$$\dot{x}_l(t) = -R_l \omega \sin(\omega t - \theta_l) \quad (3.86)$$

$$\ddot{x}_l(t) = -R_l \omega^2 \cos(\omega t - \theta_l). \quad (3.87)$$

Substituídas as expressões de x_r , x_l e as suas derivadas de primeira e segunda ordem na equações (3.55), obtém-se:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 R_r \cos(\omega t - \theta_r) - \mu[1 - R_r^2 \cos^2(\omega t - \theta_r)][-\omega R_r \sin(\omega t - \theta_r)] + R_r \cos(\omega t - \theta_r) \\ & = \alpha \omega [R_l \sin(\omega t - \theta_l) - R_r \sin(\omega t - \theta_r)] \end{aligned} \quad (3.88)$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 R_r + R_r) \cos(\omega t - \theta_r) + R_r \sin(\omega t - \theta_r) [\mu \omega - \mu \omega R_r^2 \cos^2(\omega t - \theta_r)] \\ & = \alpha \omega [R_l \sin(\omega t - \theta_l) - R_r \sin(\omega t - \theta_r)]. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Da seguinte igualdade:

$$\sin[(\omega t - \theta_r)] \cos^2(\omega t - \theta_r) = \frac{\sin[3(\omega t - \theta_r)] + \sin(\omega t - \theta_r)}{4} \quad (3.90)$$

desprezada o harmônico maior, ou seja, omite-se $\sin[3(\omega t - \theta_r)]$ e substitui-se equação (3.90) em (3.89)

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 R_r + R_r) \cos(\omega t - \theta_r) + R_r \sin(\omega t - \theta_r) \left[\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} \right] \\ &= \alpha\omega [R_l \sin(\omega t - \theta_l) - R_r \sin(\omega t - \theta_r)]. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Expandem-se $\cos(\omega t - \theta_r)$, $\sin(\omega t - \theta_r)$ e $\sin(\omega t - \theta_l)$ e obtem-se de (3.91):

$$\begin{aligned} & \cos \omega t \left[R_r \cos \theta_r (-\omega^2 + 1) - R_r \sin \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_l \alpha\omega \sin \theta_l \right] \\ &= \alpha\omega [R_r (\sin \omega t \cos \theta_r - \sin \theta_r \cos \omega t) - R_l (\sin \omega t \cos \theta_l - \sin \theta_l \cos \omega t)]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Agora, reescreve-se a expressão (3.92) como uma combinação linear de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ e tem-se:

$$\begin{aligned} & \cos \omega t \left[R_r \cos \theta_r (-\omega^2 + 1) - R_r \sin \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_l \alpha\omega \sin \theta_l \right] \\ &+ \sin \omega t \left[R_r \sin \theta_r (-\omega^2 + 1) + R_r \cos \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) + R_l \alpha\omega \cos \theta_l \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Da independência linear das funções "sin" e "cos" segue da última equação que

$$R_r \cos \theta_r (-\omega^2 + 1) - R_r \sin \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_l \alpha\omega \sin \theta_l \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} &= R_r \sin \theta_r (-\omega^2 + 1) + R_r \cos \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) + R_l \alpha\omega \cos \theta_l \quad (3.95) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo os mesmos cálculos para a equação da prega esquerda dada pela equação (3.56) encontra-se:

$$R_l \cos \theta_l (-\omega^2 + Q) - R_l \sin \theta_l \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_l \alpha\omega \sin \theta_r \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} &= R_l \sin \theta_l (-\omega^2 + Q) + R_l \cos \theta_l \left(\mu\omega - \frac{R_l^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_r \alpha\omega \cos \theta_r \quad (3.97) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Multiplica-se (3.94) por $R_l \cos \theta_l$ e (3.95) por $R_l \sin \theta_l$ e obtem-se, respectivamente:

$$R_r R_l \cos \theta_r \cos \theta_l (-\omega^2 + 1) - R_r R_l \sin \theta_r \cos \theta_l \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_l R_l \alpha\omega \sin \theta_l \cos \theta_l = 0 \quad (3.98)$$

$$R_r R_l \sin \theta_r \sin \theta_l (-\omega^2 + 1) + R_r \cos \theta_r \sin \theta_l \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) + R_l \alpha\omega \cos \theta_l \sin \theta_l = 0. \quad (3.99)$$

Soma-se as equações (3.98) e (3.99) e obtem-se:

$$\begin{aligned} & R_r R_l (-\omega^2 + 1) \cos \theta_l \cos \theta_r + \\ & - \sin \theta_r \sin \theta_l + R_r R_l (\sin \theta_r \cos \theta_l - \cos \theta_r \sin \theta_l) \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

que é reescrita da seguinte forma:

$$R_r R_l \cos(\theta_r - \theta_l) (-\omega^2 + 1) - R_r R_l \sin(\theta_r - \theta_l) \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) = 0. \quad (3.101)$$

Ainda faz-se as seguintes multiplicações (3.96) por $R_r \cos \theta_r$ e (3.97) por $R_r \sin \theta_r$ e obtém-se:

$$R_r R_l \cos \theta_r \cos \theta_l (-\omega^2 + Q) - R_r R_l \cos \theta_r \sin \theta_l \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_r R_l \alpha\omega \cos \theta_r \sin \theta_r = 0 \quad (3.102)$$

$$R_r R_l \sin \theta_r \sin \theta_l (-\omega^2 + Q) + R_r R_l \sin \theta_r \cos \theta_l \left(\mu\omega - \frac{R_l^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R_r R_l \alpha\omega \cos \theta_r \sin \theta_r = 0. \quad (3.103)$$

Somadas as equações (3.102) e (3.103) conclui-se que:

$$\begin{aligned} & R_r R_l (-\omega^2 + Q) \cos \theta_l \cos \theta_r + \\ & + \sin \theta_r \sin \theta_l + R_r R_l (\sin \theta_r \cos \theta_l - \cos \theta_r \sin \theta_l) \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

A expressão acima é simplificada e se torna:

$$R_r R_l \cos(\theta_r - \theta_l) (-\omega^2 + Q) + R_r R_l \sin(\theta_r - \theta_l) \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) = 0. \quad (3.105)$$

Das equações (3.101) e (3.105) segue:

$$\omega^2 + Q = -(1 - \omega^2) \Rightarrow \omega^2 = \frac{1 + Q}{2} \quad (3.106)$$

$$\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega = \mu\omega - \frac{R_l^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \Rightarrow R_r = R_l. \quad (3.107)$$

Seja $\phi = \theta_r - \theta_l$ o ângulo de fase entre as pregas direita e esquerda e $R_l = R_r = R$.

De (3.94) multiplicada por $\sin \theta_r$ e (3.95) multiplicada por $\cos \theta_r$ obtem-se respectivamente:

$$R \cos \theta_r \sin \theta_r (-\omega^2 + 1) - R \sin \theta_r \sin \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R\alpha\omega \sin \theta_l \sin \theta_r = 0 \quad (3.108)$$

$$R \sin \theta_r \cos \theta_r (-\omega^2 + 1) + R \cos \theta_r \cos \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R\alpha\omega \cos \theta_l \cos \theta_r = 0 \quad (3.109)$$

Subtrai-se as duas últimas equações e após uma simplificação tem-se o seguinte resultado:

$$R \left[\left(\mu\omega - \frac{R^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) + \alpha\omega \cos \phi \right] = 0. \quad (3.110)$$

A expressão acima é válida para todo R , em particular para $R \neq 0$ (A solução nula interessa). Logo deve-se ter

$$\left[\left(\mu\omega - \frac{R^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) + \alpha\omega \cos \phi \right] = 0 \quad (3.111)$$

ou equivalentemente

$$\mu\omega \left(1 - \frac{R^2}{4} \right) = \alpha\omega(1 - \cos \phi). \quad (3.112)$$

Sem perda de generalidade, supõe-se que $\omega \neq 0$, ou seja

$$\mu \left(1 - \frac{R^2}{4} \right) = \alpha(1 - \cos \phi). \quad (3.113)$$

Multiplica-se (3.94) por $\cos \theta_r$ e (3.95) por $\sin \theta_r$ então tem-se, respectivamente:

$$R \cos^2 \theta_r (-\omega^2 + 1) - \sin \theta_r \cos \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) - R\alpha\omega \sin \theta_r \cos \theta_r = 0 \quad (3.114)$$

$$R \sin^2 \theta_r (-\omega^2 + 1) + R_r \cos \theta_r \sin \theta_r \left(\mu\omega - \frac{R_r^2 \mu\omega}{4} - \alpha\omega \right) + R_l \alpha\omega \cos \theta_l \sin \theta_r = 0 \quad (3.115)$$

Somadas e simplificas as duas últimas equações

$$R(-\omega^2 + 1 + \sin \phi)\alpha\omega = 0. \quad (3.116)$$

Da equação (3.116) e de (3.106)

$$\frac{1-Q}{2} + \alpha\omega \sin \phi = 0 \quad (3.117)$$

logo

$$\sin \phi = -\frac{1-Q}{2\omega\alpha}. \quad (3.118)$$

Desta análise tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{1+Q}{2} \\ \mu \left(1 - \frac{R^2}{4}\right) = \alpha(1 - \cos \phi) \\ \sin \phi = -\frac{1-Q}{2\omega\alpha}. \end{cases} \quad (3.119)$$

Do sistema acima observe que a frequência da oscilação decresce à medida que o parâmetro de assimetria Q cresce, assumindo seu máximo quando $\omega = 1$. Da terceira equação de (3.119) tem-se que $\sin \phi \leq 0$ (pois, $0 \leq Q \leq 1$), então temos que o ângulo de fase $\phi \in [-\pi, 0]$, ou seja o lado direito (saudável) sempre precede o lado esquerdo (flácido). Isto concorda com os resultados encontrados por Steinecke e Herzel [13]. Observe que dados valores de ϕ e Q o sistema acima pode ter nenhuma, uma ou duas soluções. Mudanças no número de soluções ocorre para:

- $\phi = -\frac{\pi}{2}$, uma solução aplica-se (3.118) e obtém-se:

$$1 = -\frac{1-Q}{2\omega\alpha} \Rightarrow 1-Q = 2\omega\alpha \quad (3.120)$$

$$(1-Q)^2 = (2\omega\alpha)^2 \quad (3.121)$$

$$\frac{(1-Q)^2}{2} = \frac{\alpha^2}{1+Q} \text{ veja o sistema (3.119) para } \omega \quad (3.122)$$

Note que a expressão acima só é válida desde que $\alpha \leq \mu$, além disso, a equação acima descreve o traço da curva **a** representada na figura 3.7

- $\phi \neq -\frac{\pi}{2}$, duas soluções.

- $R = 0$, nenhuma solução. Neste caso (3.118) é equivalente à:

$$\cos \phi = \frac{\alpha - \mu}{\alpha} \quad (3.123)$$

Elevando a equação (3.118) ao quadrado e somando com o quadrado da equação (3.123) segue:

$$\frac{(1-Q)^2}{2\alpha^2(1+Q)} + \left(\frac{\alpha - \mu}{\alpha}\right)^2 = 1. \quad (3.124)$$

Então de acordo com a análise anterior tem-se o seguinte diagrama de bifurcação dado pela Figura 3.7 a seguir. Sobre a curva *b* não existe nenhuma solução sincronizada. Para pontos na região acima da curva *b* tem-se uma solução. Sobre a curva *a* existe uma solução. Entre as curvas *a* e *b* tem-se duas soluções. Abaixo da curvas *a* as soluções não são sincronizadas. De acordo com a mudança de variável que caracterizou o modelo,

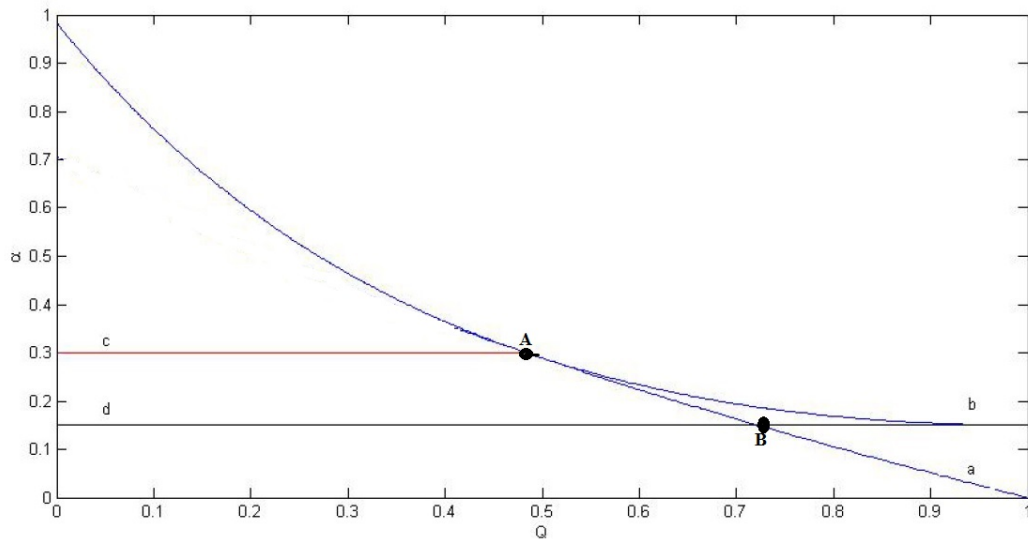


Figura 3.7: Bifurcação para $\mu = 0.3$, fonte: autor.

segue que abaixo da curva d , dada por $\alpha = \frac{\mu}{2}$ a validade do modelo não é considerada. Segue das observações da seção anterior que para o diagrama de bifurcação (veja figura 3.7) abaixo da curva b e acima da curva c as soluções são estáveis. Em todas as outras regiões as soluções são instáveis.

3.4 Cenários adotados

Nesta seção serão feitas algumas simulações que exemplificam várias situações distintas que acontecem com o movimento das pregas vocais quando os parâmetros Q e α são variados. Todas as simulações são feitas para as mesmas condições iniciais $(x_r \ \dot{x}_r \ x_l \ \dot{x}_l) = (0.1 \ 0 \ -0.1 \ 0)$ que podem ser encontrados de acordo com os dados de um homem adulto [39].

Para cada configuração escolhe-se os valores dos parâmetros pertencentes a uma mesma região dada pela sua caracterização de bifurcação discutida anteriormente. A Figura 3.8 a seguir ilustra essa afirmação.

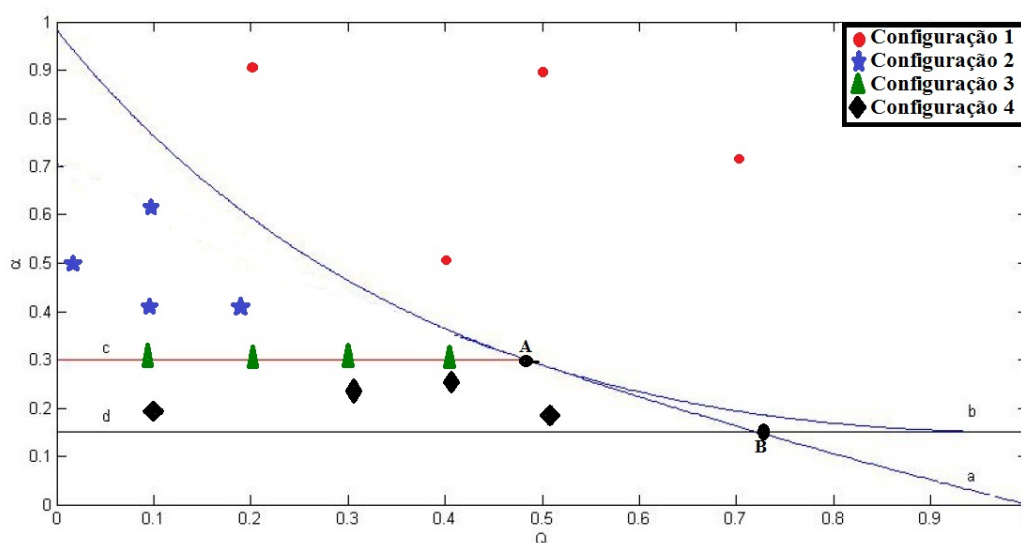


Figura 3.8: Distribuição das configurações para $\mu = 0.3$, fonte: autor.

A seguir apresenta-se as diversas situações distintas encontradas:

Configuração 1- Conforme ilustra a Figura 3.9 a seguir que possui os valores de parâmetros na mesma região do diagrama de bifurcação dado pela Figura 3.8, estes parâmetros encontram-se todos acima da curva **b** o comportamento do movimento das pregas direita e esquerda são similares nesta região para todos valores testados, sendo assim tem-se que a amplitude do movimento as pregas vocais vai aumentando até permanecer constante (instabilidade do único ponto de equilíbrio, veja diagrama de instabilidade na Figura 3.6 permanece constante após um certo período. Nota-se que as pregas vocais direita e esquerda estão praticamente em fase.

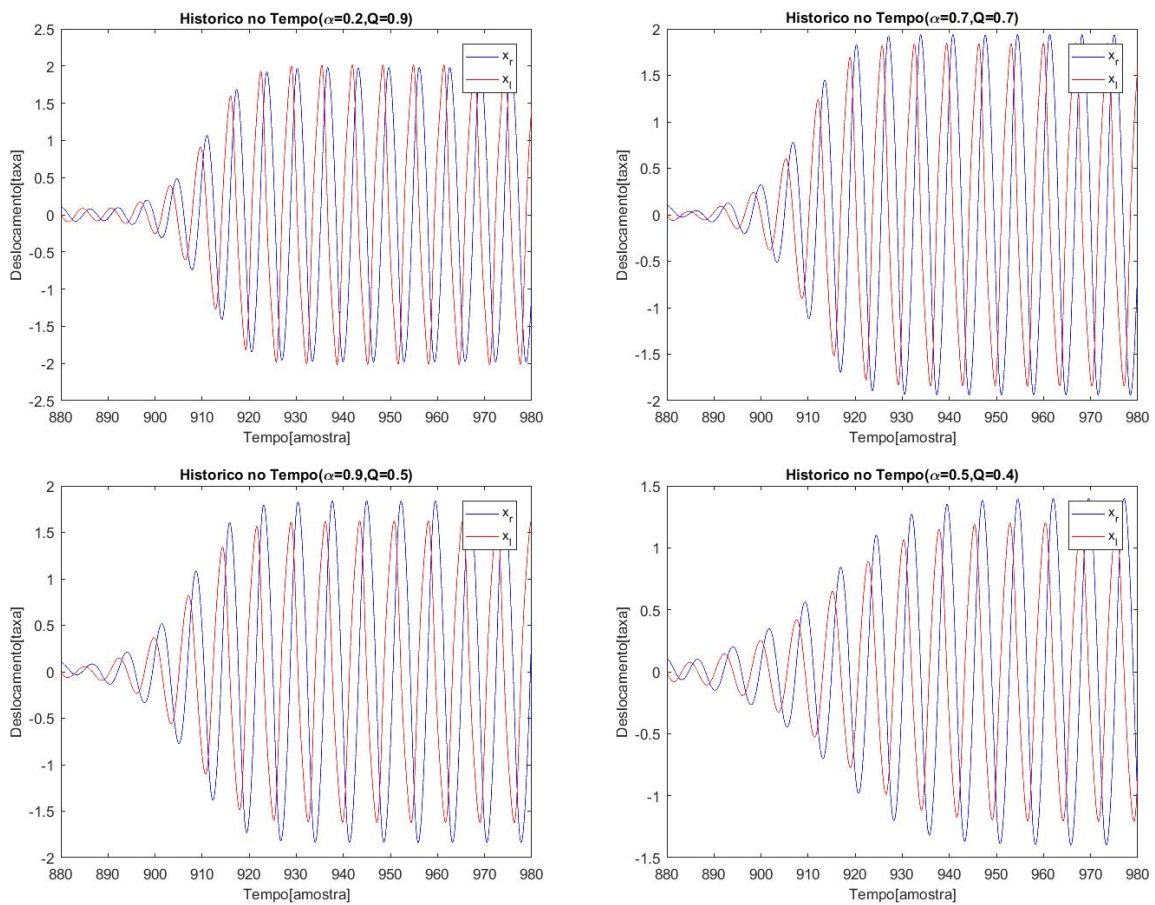


Figura 3.9: Configuração 1, fonte: autor.

Configuração 2- Nesta segunda situação, ilustrada na figura 3.10 o movimento oscilatório vai diminuindo em amplitude até que o movimento finalmente cessa. Para estes parâmetros no diagrama de estabilidade (Figura 3.6), que a origem é estável. Observa-se que estes parâmetros encontram-se na região compreendida entre as curvas **c** e **b**, à esquerda do ponto **A** conforme Figura 3.8.

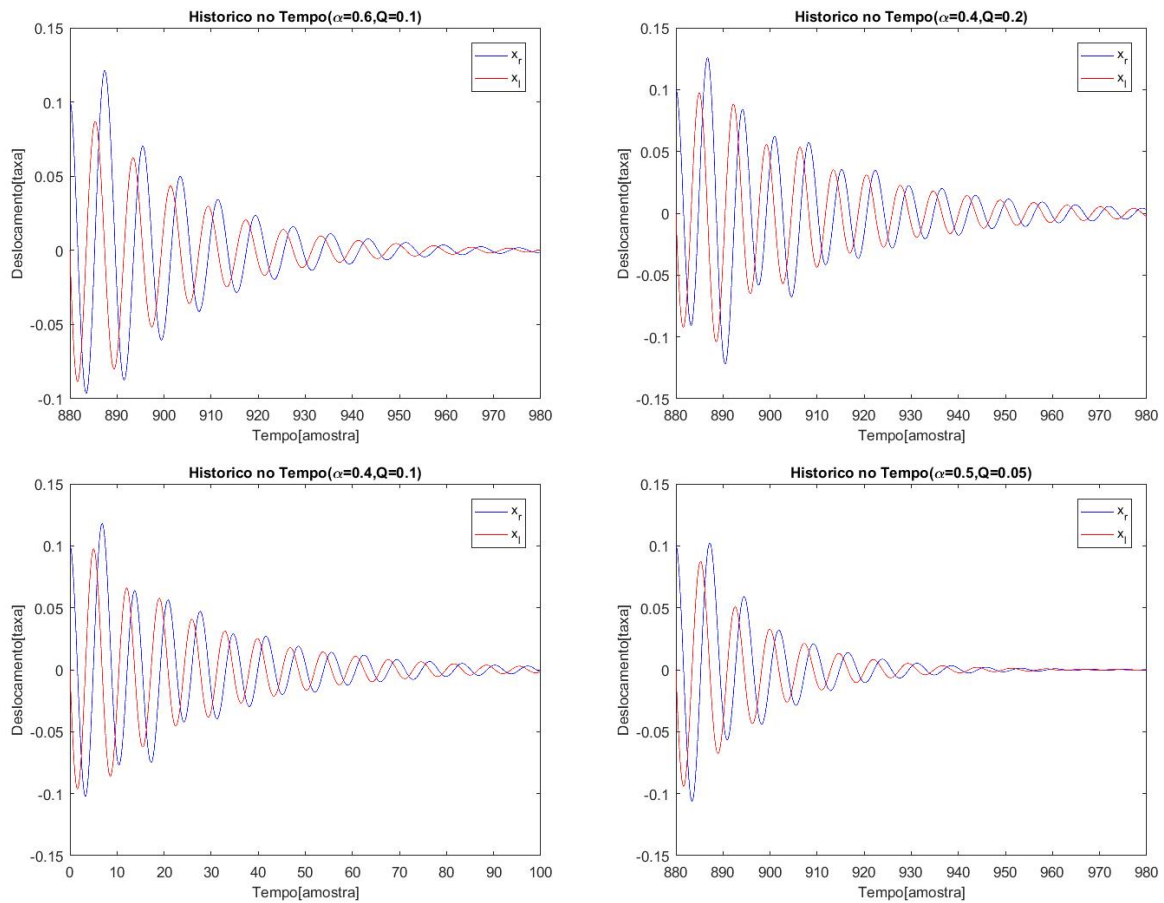


Figura 3.10: Configuração 2, fonte: autor.

Configuração 3- Na terceira configuração, como ilustra a Figura 3.11 a seguir, pode-se notar que nenhuma relação de fase se evidencia entre as pregas direita e esquerda, ou seja o movimento não é sincronizado. Após um intervalo grande de tempo as amplitudes de cada prega começam a decrescer, confirma-se assim pelo diagrama de estabilidade, que para os parâmetros escolhidos existe uma estabilidade (figura 3.6). Aqui fez-se o uso também de um intervalo de tempo menor para que fosse analisado com mais precisão os movimentos das pregas vocais direita e esquerda. Note que os parâmetros escolhidos neste cenário encontram-se entre as curvas **c** e **d** e à esquerda do ponto **B** conforme Figura 3.8.

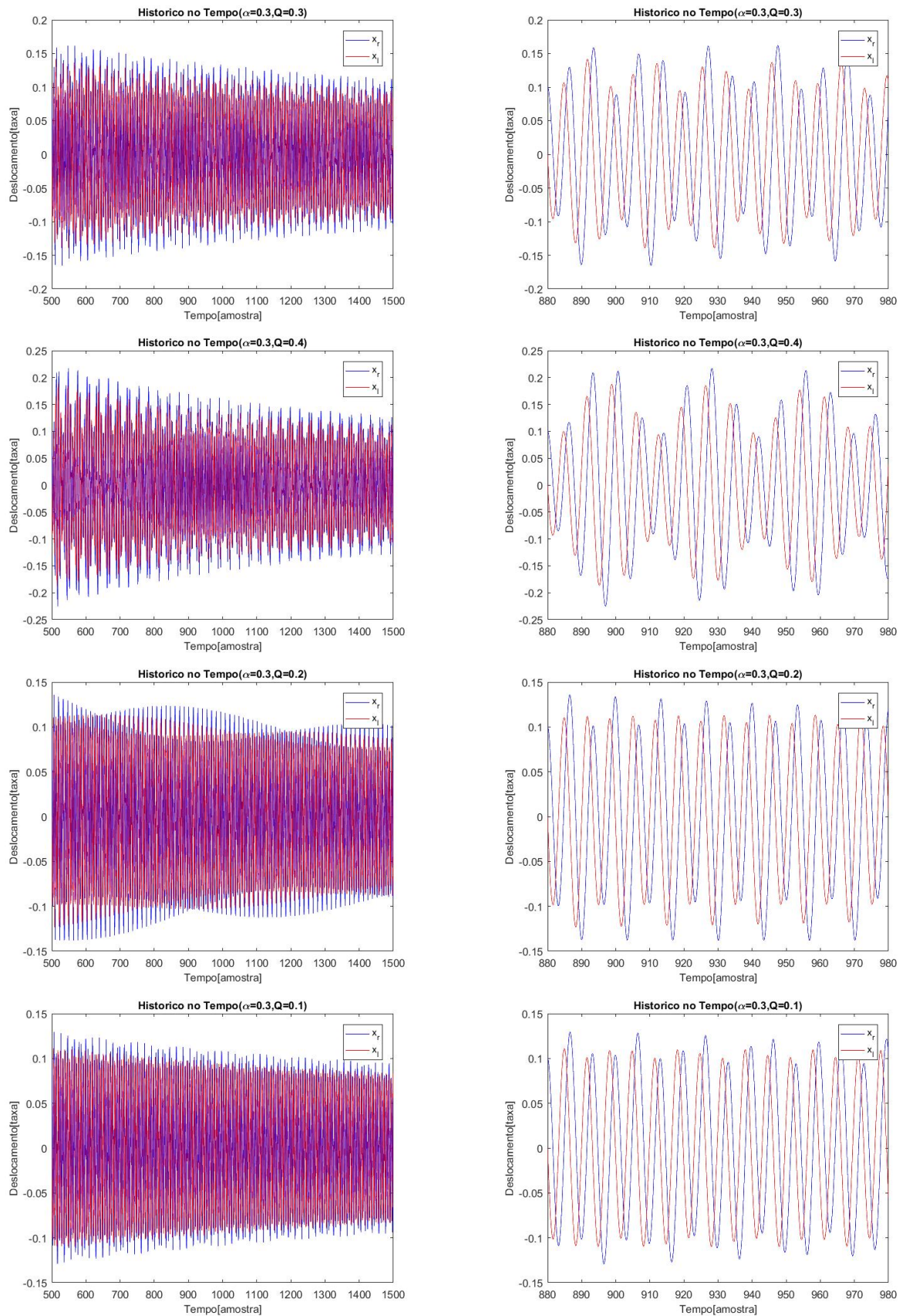


Figura 3.11: Configuração 3, fonte: autor.

Configuração 4-Na quarta configuração toma-se os valores de α e Q entre as curvas **c** e **d** e abaixo da curva **a** conforme ilustrado na Figura 3.8. Note que para esta configuração de acordo com as simulações e a análise de estabilidade (Figura 3.12) as soluções são instáveis.

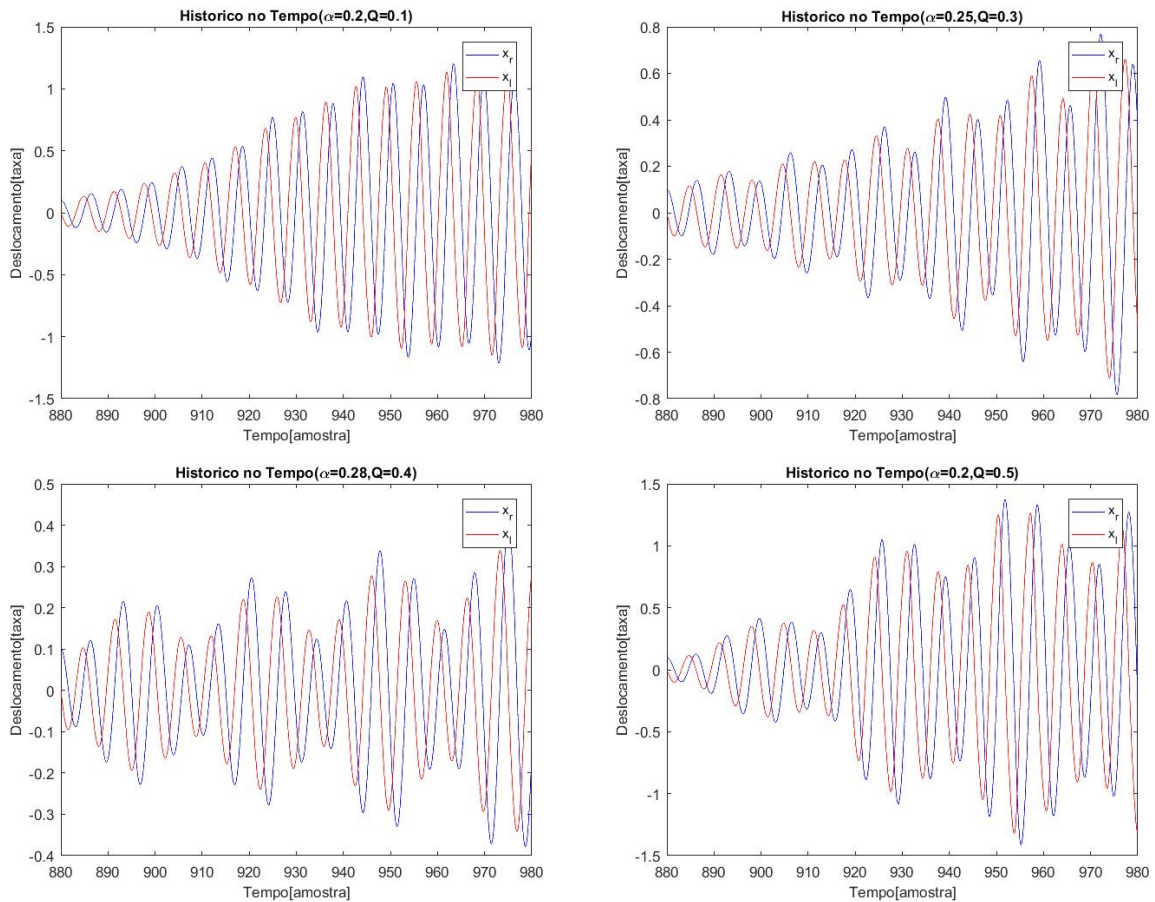


Figura 3.12: Configuração 4, fonte: autor.

Observe que para todos os casos acima, as pregas vocais não se movimentam de forma simétrica, o que pode causar uma disfonia na voz ou na pior das hipóteses uma afonia (ausência total do som). Veremos no próximo capítulo que para todos esses casos é possível aplicar um método de controle no intuito de sincronizar este movimento evitando assim qualquer tipo de anomalia na voz.

3.5 Cálculo do Expoente de Lyapunov

Os valores negativos do expoente de Lyapunov λ caracterizam um comportamento convergente, periódico ou de ponto fixo, em que as trajetórias da evolução temporal do sistema que se iniciaram em estados próximos tendem a se aproximar. Pontos com valores iguais a zero, indicam mudanças qualitativas de comportamento que são chamados pontos de bifurcação. Por outro lado, valores positivos para o expoente de Lyapunov indicam a ocorrência de caos, descrevendo a taxa de afastamento que ocorre com as trajetórias da evolução temporal desse sistema que se iniciaram de estados próximos.

Quanto mais negativo é o expoente de Lyapunov, mais rápido a série converge para os valores finais. Logo o expoente de Lyapunov é um indicador de caos e também mede a velocidade com que duas órbitas arbitrariamente próximas se afastam ou se aproximam à medida em que o tempo passa [69].

Neste trabalho, foi utilizado o método de Wolf[69]. Neste método os expoentes de Lyapunov são obtidos através da comparação entre a trajetória obtida através da solução da equação diferencial não linear e a trajetória obtida através da solução linearizada da equação original. Desta forma são feitas aproximações sucessivas e após um tempo de evolução da solução do sistema, é feito um processo de ortonormalização das soluções linearizadas.

Aplicou-se o método de Wolf para os mesmos valores de parâmetros simulados na seção 3.4 através de rotinas elaboradas no software MATLAB.

Na primeira configuração tem-se para $1(a)$, $1(c)$ e $1(d)$ 3 expoentes positivos e 1 expoente negativo apenas, o que caracteriza que o sistema é altamente caótico(bastaria apenas um positivo para o caos). Para a configuração $1(b)$ tem-se 2 expoentes positivos e 2 expoentes negativos, o que também caracteriza caos.

Na segunda configuração o sistema não é caótico, pois para as configurações $2(a)$, $2(b)$, $2(c)$ e $2(d)$ todos os expoentes são negativos, o que significa que existe uma estabilidade no ponto de equilíbrio.

Na terceira configuração tem-se para $3(a)$, $3(b)$, $3(c)$ e $3(d)$ 4 expoentes positivos , o que caracteriza que o sistema é altamente caótico.

Na quarta configuração também verifica-se o comportamento altamente caótico para as configurações $4(a)$, $4(b)$, $4(c)$ e $4(d)$, visto que todos os expoentes de Lyapunov são positivos.

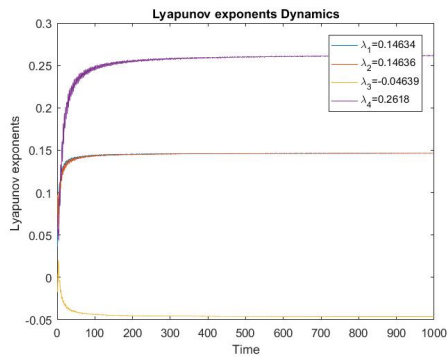


Figura 3.13: Configuração 1(a),
fonte: autor.

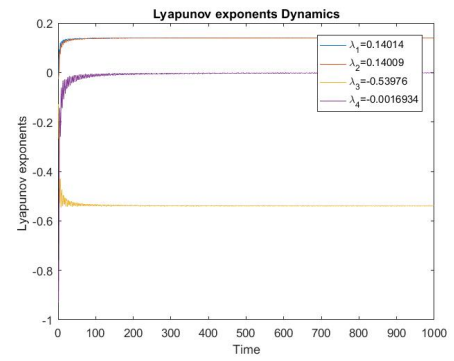


Figura 3.14: Configuração 1(b),
fonte: autor.

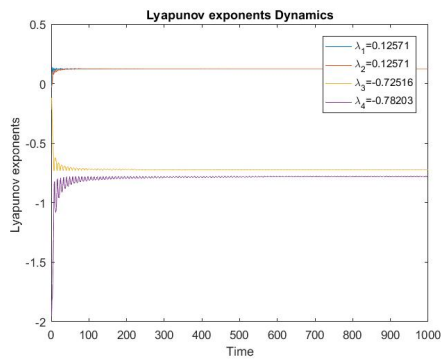


Figura 3.15: Configuração 1(c),
fonte: autor.

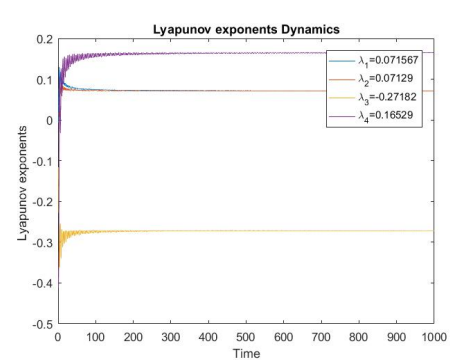


Figura 3.16: Configuração 1(d),
fonte: autor.

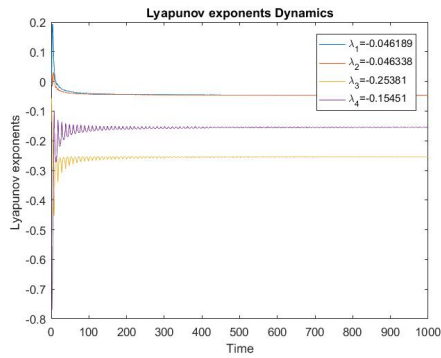


Figura 3.17: Configuração 2(a),
fonte: autor.

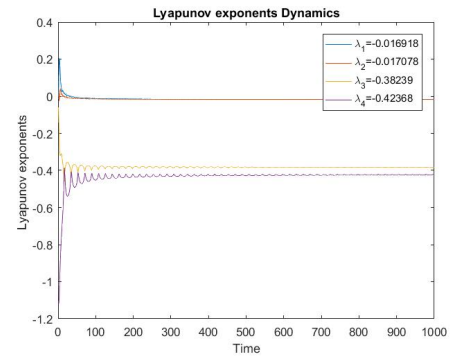


Figura 3.18: Configuração 2(b),
fonte: autor.

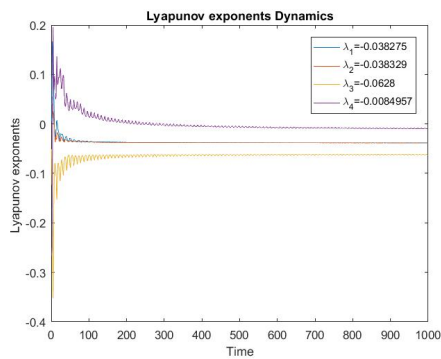


Figura 3.19: Configuração 2(c),
fonte: autor.

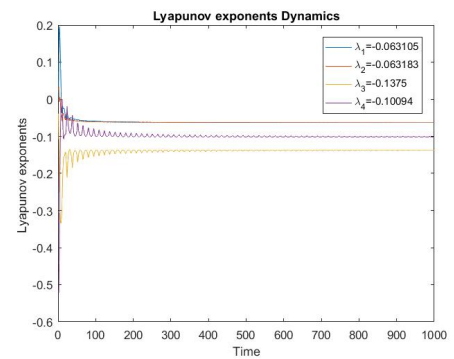


Figura 3.20: Configuração 2(d),
fonte: autor.

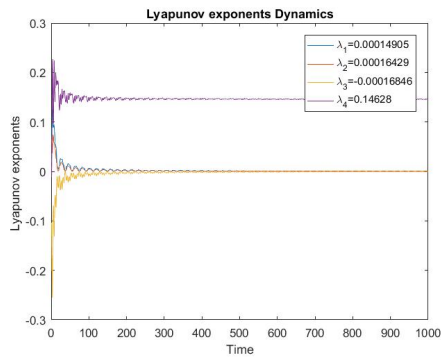


Figura 3.21: Configuração 3(a),
fonte: autor.

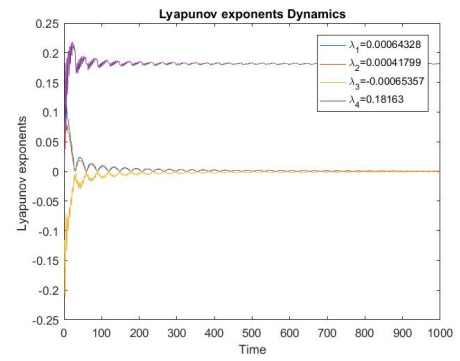


Figura 3.22: Configuração 3(b),
fonte: autor.

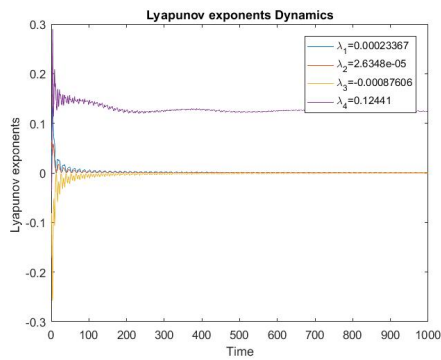


Figura 3.23: Configuração 3(c),
fonte: autor.

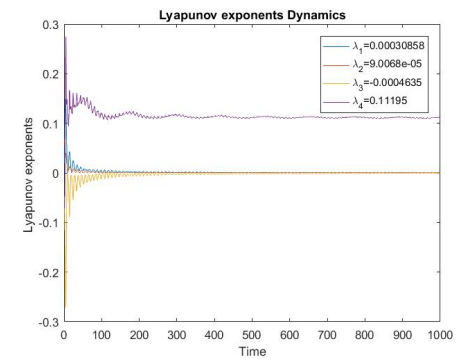


Figura 3.24: Configuração 3(d),
fonte: autor.

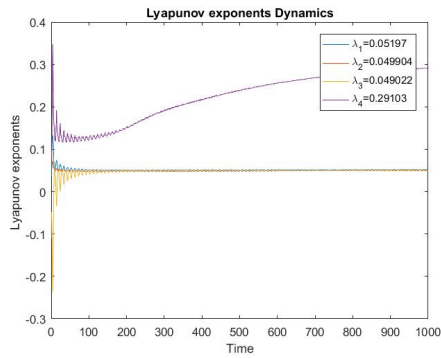


Figura 3.25: Configuração 4(a),
fonte: autor.

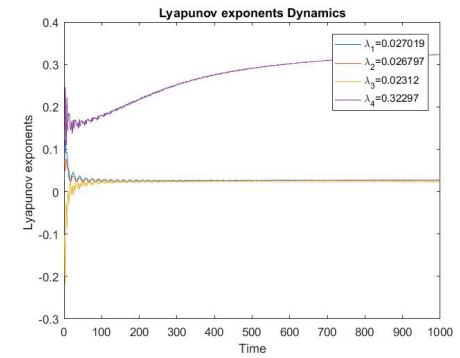


Figura 3.26: Configuração 4(b),
fonte: autor.

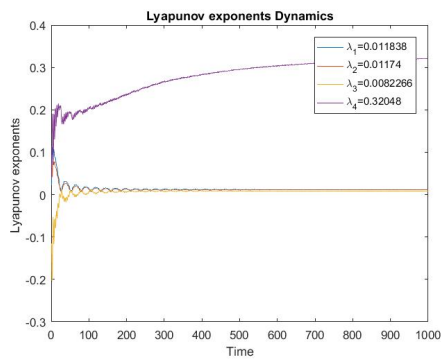


Figura 3.27: Configuração 4(c),
fonte: autor.

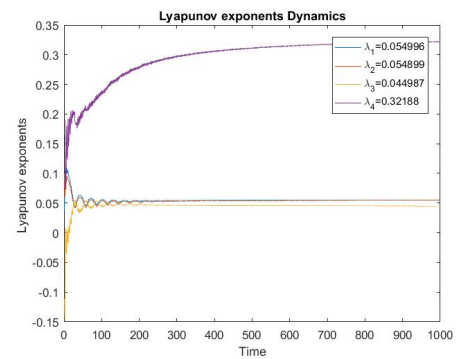


Figura 3.28: Configuração 4(d),
fonte: autor.

CAPÍTULO 4

CONTROLE LINEAR ÓTIMO

4.1 Motivação

Para alguns sistemas proveniente de uma formulação física um comportamento em particular é o mais desejado, em grande parte o que se deseja é uma sincronização. A sincronização é o processo através do qual os elementos de um sistema dinâmico passam a exibir um comportamento coletivo. Sistemas naturais como vagalumes piscando, marcapassos cardíacos e neurônios disparando apresentam uma predisposição para atuar em sincronia [48].

O fenômeno de sincronização foi descoberto no século 17 pelo cientista Christiaan Huygens [50] quando estudava o movimento de dois pêndulos oscilando, os quais estavam pendurados sobre um mesmo suporte de madeira. Huygens, inventor do relógio de pêndulo, estava observando dois relógios, que ele tinha recentemente construído, o qual estavam suspensos lado a lado. Ele notou que os dois pêndulos estavam oscilando em sincronia, onde suas oscilações coincidiam e os pêndulos sempre moviam-se em direções opostas, suspeitando assim, que os relógios deviam de alguma forma serem influenciados uns pelos outros.

Inicialmente, estudava-se a sincronização em sistemas dinâmicos periódicos, os quais apresentam um atrator do tipo ciclo limite. Entretanto, nas últimas décadas, esse conceito tem sido ampliado a fim de permitir a compreensão de outros processos do ajuste de ritmos em sistemas dinâmicos caóticos, processo este que seguiu-se à melhor compreensão do próprio conceito sobre o que seria o ritmo no contexto de um sistema dinâmico ([15], [22],[31], [33] e [34]).

Nem sempre sistemas dinâmicos apresentam um comportamento sincronizado. Mas alguns mesmo não sincronizando naturalmente podem apresentar movimento sincronizado quando aplicado algumas técnicas que forçam tal sincronização. Em diversos problemas de engenharia, ecologia, entre outras áreas, o objetivo é escolher uma lei de controle que mova um sistema de regime não controlado ou caótico para um ponto fixo de equilíbrio ou uma órbita periódica ou não periódica(caótica) desejada. Neste sentido, este trabalho visa a sincronização do movimento das pregas vocais através do controle linear ótimo(LQR), o qual apresentou resultados satisfatórios em diversos casos analisados([14][13],[19],[20]).

A teoria de Controle Clássico é capaz de lidar com sistemas lineares. Já para resolver sistemas não lineares faz uso de processos de linearização [30]. Porém existem algumas limitações, pois na teoria de controle clássico, os controladores apresentam características operacionais fixas e sistemas reais necessitam de certa capacidade de adaptação em face às variações dos processos envolvidos.

A maioria dos sistemas reais apresentam características não lineares, com variações de parâmetros, atrasos de transporte e perturbações diversas. Quando se utiliza métodos de controle clássicos, percebe-se o desempenho diferente para diversos pontos de operação.

Um sistema de controle é uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistemas que produzirá uma resposta desejada do sistema. A base para análise de um sistema é formada pelos fundamentos fornecidos pela teoria dos sistemas lineares, que supõe uma relação de causa e efeito para os componentes de um sistema. Controle de um sistema significa como agir sobre um sistema de modo a obter um resultado arbitrariamente especificado.

4.2 Breve histórico

Sobre o surgimento da teoria matemática de controle:

G.B.Airy (1840): O primeiro a discutir instabilidade em um sistema de controle com realimentação e analisar tais sistemas através de equações diferenciais.

J.C.Maxwell (1868): O primeiro estudo sistemático da estabilidade de um sistema de controle com realimentação.

E.J.Routh (1877): Definiu critérios de estabilidade para sistema lineares.

A.M.Lyapunov (1892): Definiu critérios de estabilidade para equações diferenciais lineares e não-lineares. Os resultados só foram introduzidos na teoria de controle em

1958.

Sobre o surgimento dos métodos clássicos de controle:

H.Nyquist (1932): Desenvolveu um procedimento simples para determinar estabilidade a partir de uma representação gráfica da resposta em frequência.

H.W.Bode (1945): Método de Resposta em Frequência.

W.R.Evans (1948): Método do Local das Raízes.

Sobre o desenvolvimento dos métodos modernos de controle:

1950s: Projeto de sistemas ótimos em algum sentido.

1960s: Computadores digitais ajudaram na análise no domínio do tempo de sistemas complexos, a teoria de controle moderno se desenvolveu para refletir o aumento da complexidade dos novos sistemas.

1960s 1980s: Controle ótimo para sistemas determinísticos e estocásticos; controle adaptativo e inteligente.

1980s hoje: Controle robusto, controle H_∞ (Hardy Infinity).

1997: Sojourner (primeiro veículo autônomo da história-missão Mars Pathfinder).

4.3 Estado da Arte

Para a aplicação de métodos de controle de movimentos nos fenômenos de transferência de energia em um ideal não-linear e sistemas de vibração essenciais não essenciais, acoplados a um (MR) amortecedor magneto-reológico Tusset, Balthazar e Chavarette aplicaram o projeto de controle linear ótimo (LQR) e obtiveram uma solução periódica assintoticamente estável para um sistema não-ideal [51].

Chavarette [52] utilizou um modelo matemático baseado na equação de Duffing para modelar uma estrutura de suporte para uma máquina rotativa não equilibrada com potência limitada (motor não ideal). As simulações numéricas foram realizadas para um parâmetro de controle definido (dependendo da tensão do motor, isto é, na característica estática e dinâmica do motor). A interação da excitação não ideal com a estrutura pode levar à ocorrência de fenômenos interessantes durante a passagem direta através dos vários estados de ressonância do sistema. O comportamento caótico foi obtido para os valores dos parâmetros. Então Chavarette propôs uma estratégia de controle que foi aplicada para regular o comportamento caótico a fim de obter uma órbita periódica e diminuir sua

amplitude. O método utilizado por Chavarette foi o controle linear ótimo(LQR). Este método tem sido bastante utilizado na teoria de controle por apresentar resultados bastante satisfatórios e ser de fácil aplicação e não exigir um custo computacional alto. O objetivo deste trabalho foi dar sugestões e recomendações aos designers e engenheiros sobre como gerir esse tipo de sistema através da ressonância.

Chavarette [53] estudou o comportamento de uma estrutura vulnerável a vibrações excessivas causadas por uma fonte de energia não ideal. A dinâmica não-linear e não ideal no sistema foi demonstrada com um comportamento caótico. Foi utilizado uma técnica de Controle de Equação Riccati Dependente do Estado (SDRE) para regular o comportamento caótico, a fim de obter uma órbita periódica pequena e diminuir sua amplitude. Os resultados da simulação mostraram que a identificação pelo controle da equação Riccati dependente do estado foi muito eficaz.

4.4 Descrição por Variáveis de Estado

É aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo e com condições iniciais não-nulas. O estado de um sistema no instante t_0 é a quantidade de informação em t_0 que, junto com a entrada $u(t)$ em $t \geq t_0$, determina univocamente o comportamento do sistema para todo $t \geq t_0$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde $X(t)$ é o vetor de estado e $x_i, i = 1, \dots, n$ é a variável de estado.

$$U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde $U(t)$ é o vetor de entrada e $u_i, i = 1, \dots, p$ é a i ésima entrada.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde $Y(t)$ é o vetor de saídas e $y_i, i = 1, \dots, q$ é a i ésima saída.

Para matrizes $A_{n \times n}$, $B_{n \times p}$, $C_{q \times n}$ e $D_{q \times p}$ tem-se na representação por variáveis de estado:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \text{ Equação de Estado (dinâmica do sistema)} \quad (4.4)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t), \text{ Equação de Saída (observação do sistema)} \quad (4.5)$$

4.5 Controlabilidade e Observabilidade

Definição 1: O sistema definido da forma de estados é controlável se, quaisquer que sejam $x(0)$ e $x(T)$, existe $u(t)$ $0 \leq t \leq T$ que transfere o estado $x(0)$ para o estado $x(T)$ em um tempo finito, [30].

Teorema: O sistema definido na forma de estados é controlável se, e somente se o posto da matriz de controlabilidade $U_{n \times np}$ associada é igual a n . Onde $U = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$, [30].

OBS: Uma matriz R é dita possuir posto (rank), $\rho(R)$, igual a m , se existir uma submatriz $M_{m \times m}$ de modo que o determinante de M é não nulo e o determinante de todas as submatrizes $r \times r$ (onde $r > m$) de R é zero, [30].

Definição: O sistema definido da forma de estados é observável se para todo $x(0)$, o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ em um tempo finito é suficiente para determinar $x(0)$, [30].

Teorema O sistema definido da forma de estados é observável se, e somente se o posto da matriz de observabilidade $V_{nq \times n}$ associada é igual a n . Onde $V = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]$, [30].

4.6 Sistemas de Controle em Malha Aberta e em Malha Fechada

Definição: Um Sistema de Controle em Malha Aberta (SCMA) utiliza um controlador conectado em série com o processo a ser controlado, de modo que a entrada do processo deve ser tal que sua saída se comportará como desejado (conforme figura a seguir). A característica importante é que a ação de controle independe da saída, [30].

Observe-se que um sistema de controle deste tipo fornecerá a saída desejada se não

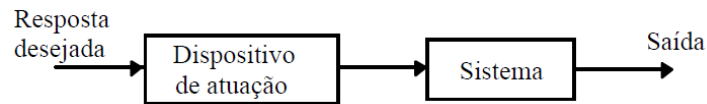


Figura 4.1: Esquemática de Sistema de Controle em malha aberta, fonte: autor.

ocorrerem perturbações externas que alterem o valor da saída ou alterações paramétricas internas do sistema. Se alguma destas ocorrer, a saída muda, mas a ação de controle continua exatamente a mesma.

Definição: Um Sistema de Controle em Malha Fechada (SCMF) utiliza uma medida adicional da saída (resposta) real a fim de compará-la com a resposta desejada do sistema, [30] (Veja figura 4.2). O interesse maior desse trabalho é no SCMF. Em engenharia

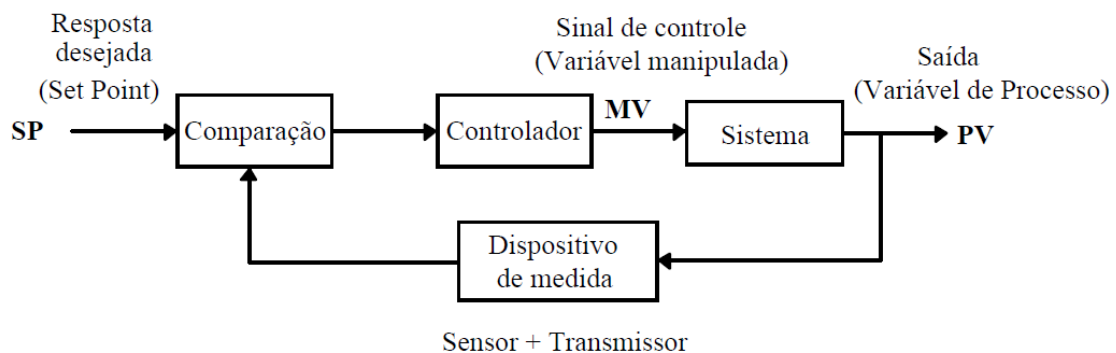


Figura 4.2: Esquemática de Sistema de Controle em malha fechada, [30].

esquemática-se um sistema de controle da seguinte forma (conforme figura 4.3).

Dentre os diversos métodos de controle existentes neste trabalho será aplicado o método de controle ótimo (LQR) por ser um método que apresentou resultados satisfatórios no modelo de estudo desta tese e por ser de mais fácil implementação que outros métodos de controle.

4.7 Controle Ótimo via Regulador Quadrático Linear(LQR)

O projeto de um controlador geralmente consiste em determinar uma lei de controle que faça o sistema atender certas especificações de desempenho. No caso dos sistemas de controle ótimo, a lei de controle é encontrada através da minimização de um funcional

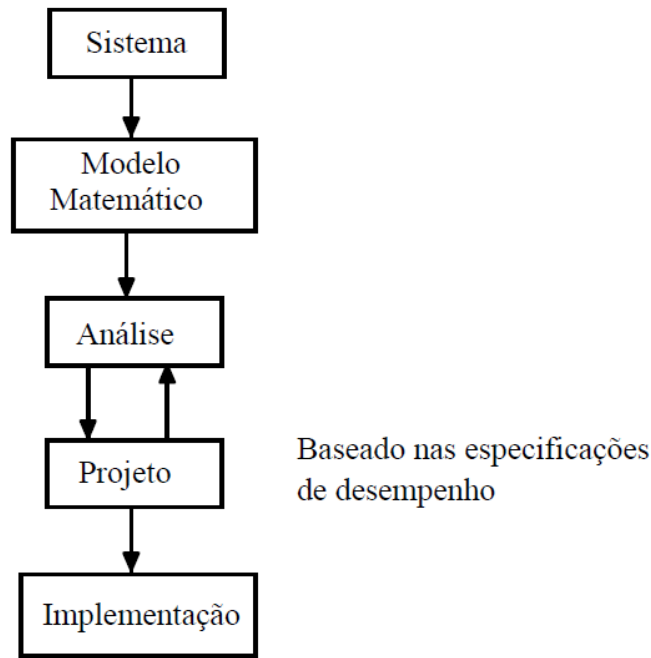


Figura 4.3: Aplicação de um método de controle, [30].

de custo (ou índice de desempenho) $J = F(\vec{x}, \vec{u}, t)$. A lei de controle deve ser tal que garanta a estabilidade do sistema e, minimize os esforços dos sistemas responsáveis por manter esta estabilidade. Em atendimento a estes dois requisitos pode ser utilizado o Regulador Quadrático Linear (LQR), [30].

Em diversos problemas da engenharia, física, economia, ecologia, etc., o objetivo é escolher a lei U de controle que mova o sistema do regime perturbado a um ponto fixo de equilíbrio ou uma órbita periódica ou não periódica desejada. Para as pregas vocais é interessante observar que em todas as situações simuladas, mesmo para o caso onde o caos existe pode-se encontrar um controle de forma que o sistema exiba soluções sincronizadas, acarretando assim no bom funcionamento das pregas vocais produzindo assim uma vibração síncrona acarretando na produção do som.

4.7.1 Formulação do controle linear

Considere o sistema controlado não linear da seguinte forma ([49])

$$\dot{x} = A(\tau)x + g(x) + U, \quad (4.6)$$

onde $U \in \mathbf{R}^n$ é o vetor de controle. Seja o vetor $\tilde{x}$ definido como o caminho desejado, e U composto por duas partes

$$U = \tilde{u} + u, \quad (4.7)$$

Onde $\tilde{u}$ é o controle de retroalimentação dado por

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - A(\tau)\tilde{x} - g(\tilde{x}), \quad (4.8)$$

e u é a resposta linear que pode ser reescrita como

$$u = Bx \quad (4.9)$$

onde $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante.

Define-se:

$$y = x - \tilde{x} \quad (4.10)$$

Considerando o caminho desejado, e as equações (4.8) e (4.9) obtém-se através de uma derivação:

$$\dot{y} = A(\tau)y + g(x) - g(\tilde{x}). \quad (4.11)$$

Considerando

$$g(x) - g(\tilde{x}) = G(x, \tilde{x})(x - \tilde{x}), \quad (4.12)$$

o sistema (4.11) pode ser escrito como

$$\dot{y} = A(\tau)y + G(x, \tilde{x})y + Bu, \quad (4.13)$$

De acordo com Bryson [71] existe uma matriz $Q(\tau)$ simétrica, positiva definida e $R(\tau)$ positiva definida, tal que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q(\tau)y - G^T(x, \tilde{x})P(\tau) - P(\tau)G(x, \tilde{x}), \quad (4.14)$$

é positiva definida. Então o controle linear com retroalimentação

$$u = -R^{-1}(\tau)B^T P(\tau)y = -K(\tau)y, \quad (4.15)$$

é ótimo e transfere o sistema (4.13) do estado inicial para o estado final:

$$y(\tau_f) = 0, \quad (4.16)$$

minimizando o funcional

$$\tilde{J} = \int_0^\infty (y^T \tilde{Q} + u^T R u) dt, \quad (4.17)$$

onde a matriz real simétrica $P(\tau)$ é calculada resolvendo a equação de Ricatti

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (4.18)$$

que satisfaz a condição final

$$\dot{P}(\tau_f) = 0. \quad (4.19)$$

O caso em que $\tau_f \rightarrow \infty$ e as matrizes A, B, Q e R são matrizes com componentes constantes, a matrix P é obtida da solução da equação de Ricatti

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (4.20)$$

A seguir a Figura 4.4 representa o fluxograma de execução do método LQR.

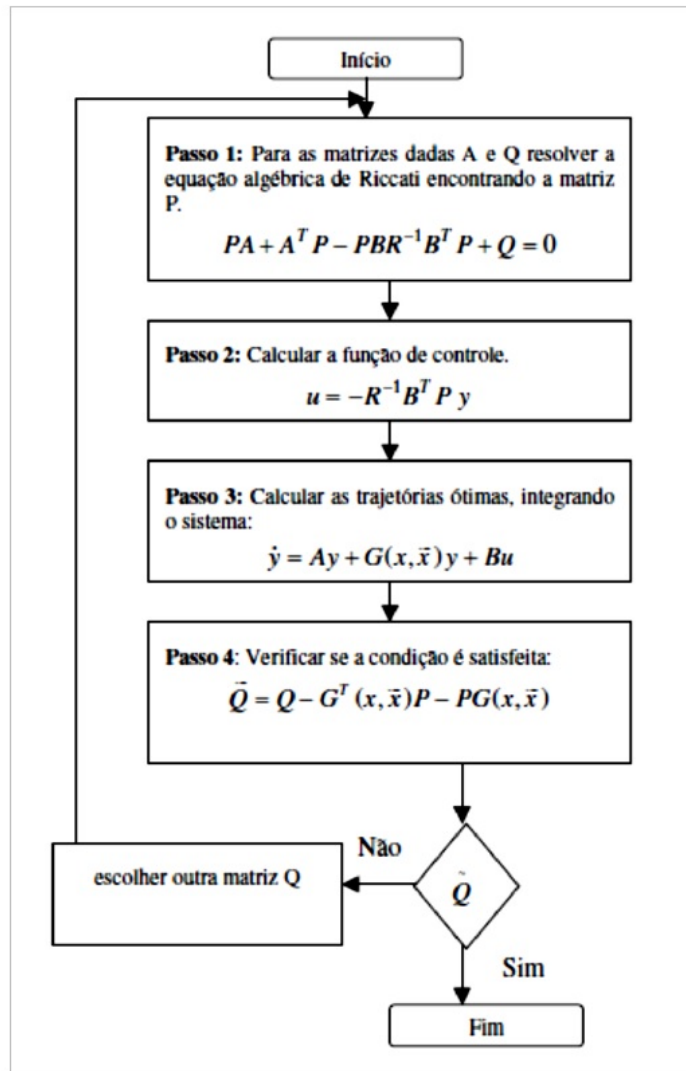


Figura 4.4: Fluxograma de síntese do Controle Linear Ótimo, Chavarette [9] .

4.7.2 Controle Linear Ótimo aplicado ao Modelo

Diante dos resultados apresentados, ou seja, para as configurações 1, 3 e 4, onde existe o caos, a vibração não se faz de maneira sincronizada, acarretando na produção de um som com muito ruído ou na pior das hipóteses a sua ausência total, faz-se então necessário, a implementação de algum método para corrigir esse comportamento, ou anomalia, para tanto propõe-se o projeto de controle linear ótimo que será abordado na próxima seção.

Para o caso em que não existe o caos (mesmo sem sincronização), na segunda configuração, também aplica-se o método, a fim de explorar o fato de que pode-se fazer com que as pregas vocais vibrem em uma frequência desejada, melhorando assim a qualidade do som emitido: tem-se para alta frequência os sons agudos e para baixa frequência os

sons graves. Neste caso também é importante o controle das vibrações, portanto aplica-se o método de controle.

Nesta seção, aplica-se o controle linear ótimo com o objetivo de se obter uma solução periódica estável para o sistema, onde o movimento sincronizado representa um bom funcionamento das pregas vocais, sendo que esse movimento tem início e após algum tempo pequeno sincroniza-se a fim de aproveitar o máximo possível a força proveniente da pressão devido à saída de ar dos pulmões.

De acordo com a equação (3.67) tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \mu - \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & -Q & \mu - \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Para que as pregas vocais se movimentem de forma oscilatória, simétrica, harmônica, ou seja, de forma síncrona, pode-se escolher a seguinte trajetória:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ 2 \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ 2 \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ 2 \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde B é uma matriz positiva definida fixada escolhida arbitrariamente,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4,$$

onde Q é uma matriz definida semi-positiva.

$$R = [1].$$

A matriz Q e o fator escalar R ponderam os efeitos da minimização sobre os estados e a entrada, respectivamente.

4.7.3 Resultados para Configuração 1

Aqui será aplicado o método LQR para a configuração 1. Observa-se que o comportamento dos gráficos para esses valores de parâmetros é similar pois encontram-se na mesma região do diagrama de bifurcação.

Aplicando-se o método de controle para os parâmetros de **1a** que são dados por $\alpha = 0.2$ e $Q = 0.9$ encontra-se que a controlabilidade é 0.2527, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.3816 \ 0.7290 \ 0.8235 \ 1.0209]$.

Para os parâmetros da configuração **1b** dados por $\alpha = 0.7$ e $Q = 0.7$ tem-se que a controlabilidade é 2.0407, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.7436 \ 0.7295 \ 1.0100 \ 0.7754]$.

Para os parâmetros da configuração **1c** dados por $\alpha = 0.9$ e $Q = 0.5$ tem-se que a controlabilidade é 2.6423, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.6811 \ 0.7376 \ 1.0107 \ 0.8023]$.

Para os parâmetros da configuração **1d** dados por $\alpha = 0.5$ e $Q = 0.4$ tem-se que a controlabilidade é 1.3160, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.7709 \ 0.7714 \ 0.9476 \ 0.8742]$.

Através das figuras 4.5 à 4.8 nota-se que rapidamente as pregas vocais alcançam a sincronização. Logo o movimento que antes mostrava-se quase sincronizado, torna-se sincronizado em fase. Observa-se que o movimento e o tempo de sincronização é praticamente o mesmo para os valores de parâmetros que pertencem a esta configuração e que estão na mesma região do diagrama de bifurcação.

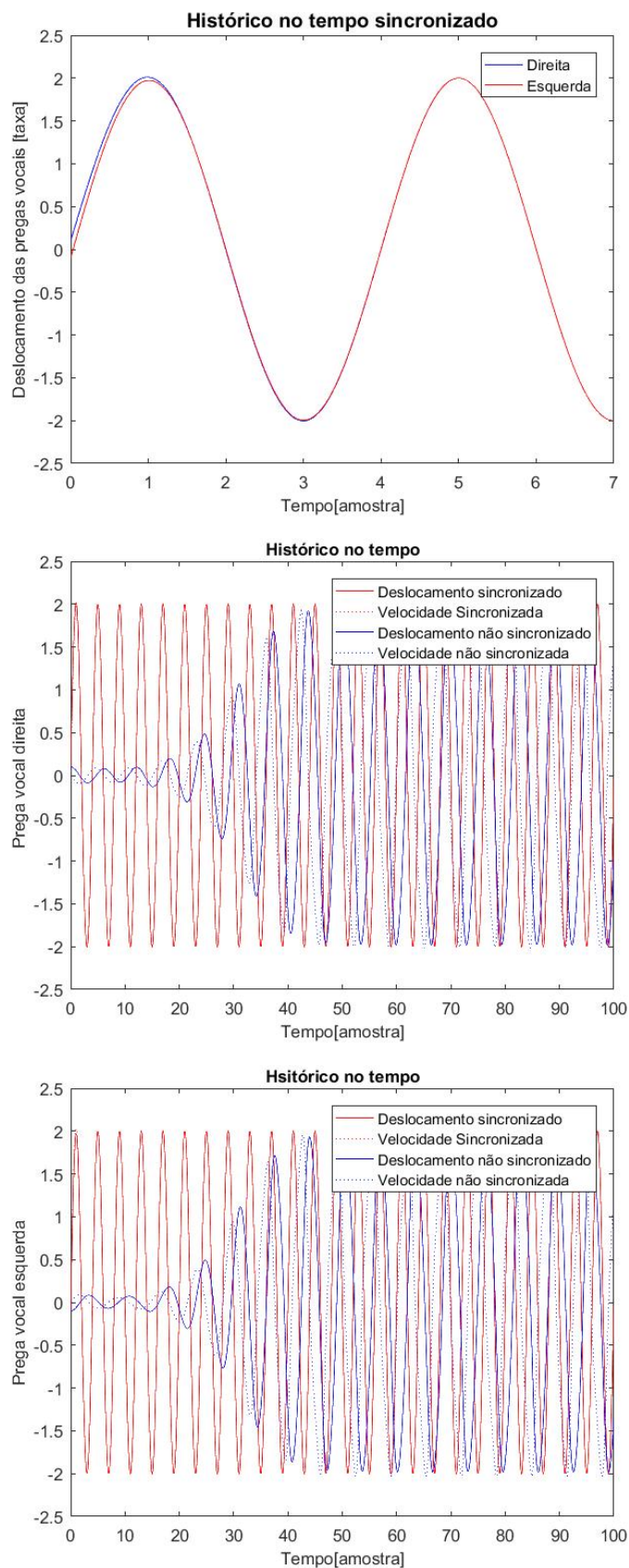


Figura 4.5: Histórico no tempo para a configuração 1(a), fonte: autor

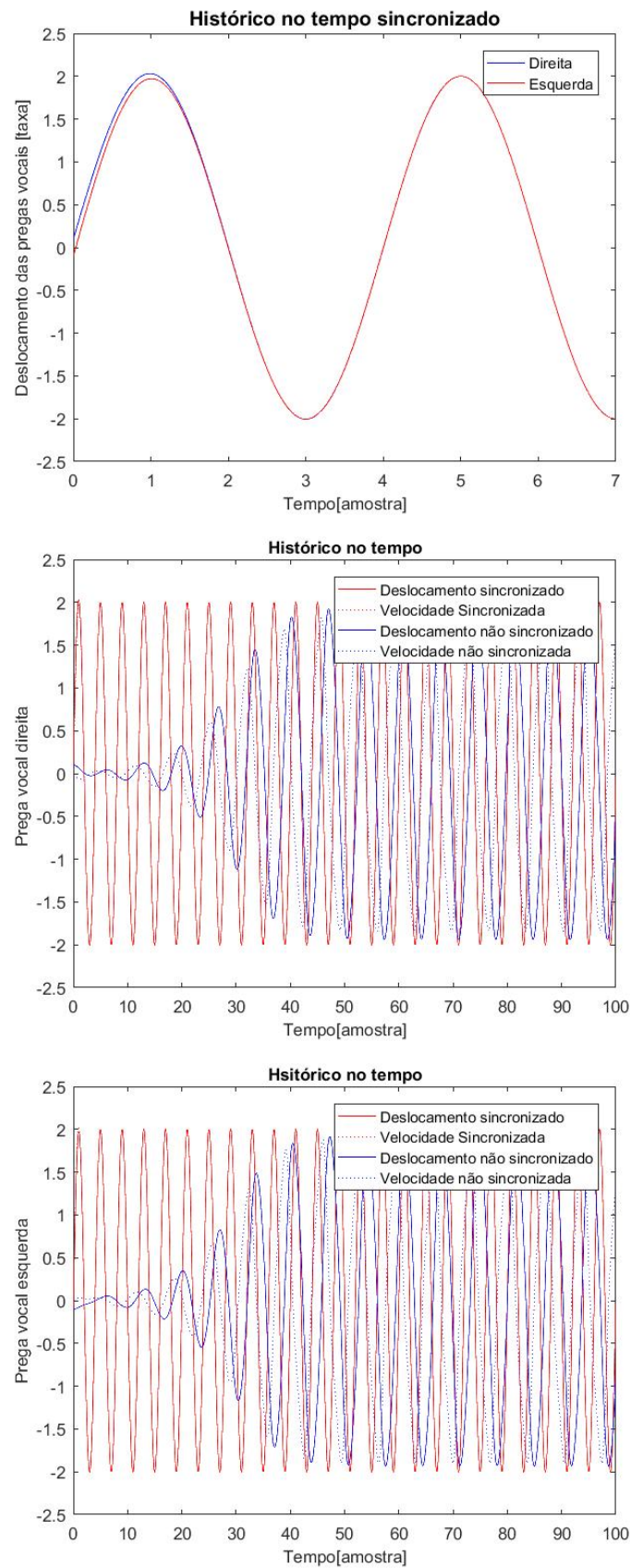


Figura 4.6: Histórico no tempo para a configuração 1(b), fonte: autor

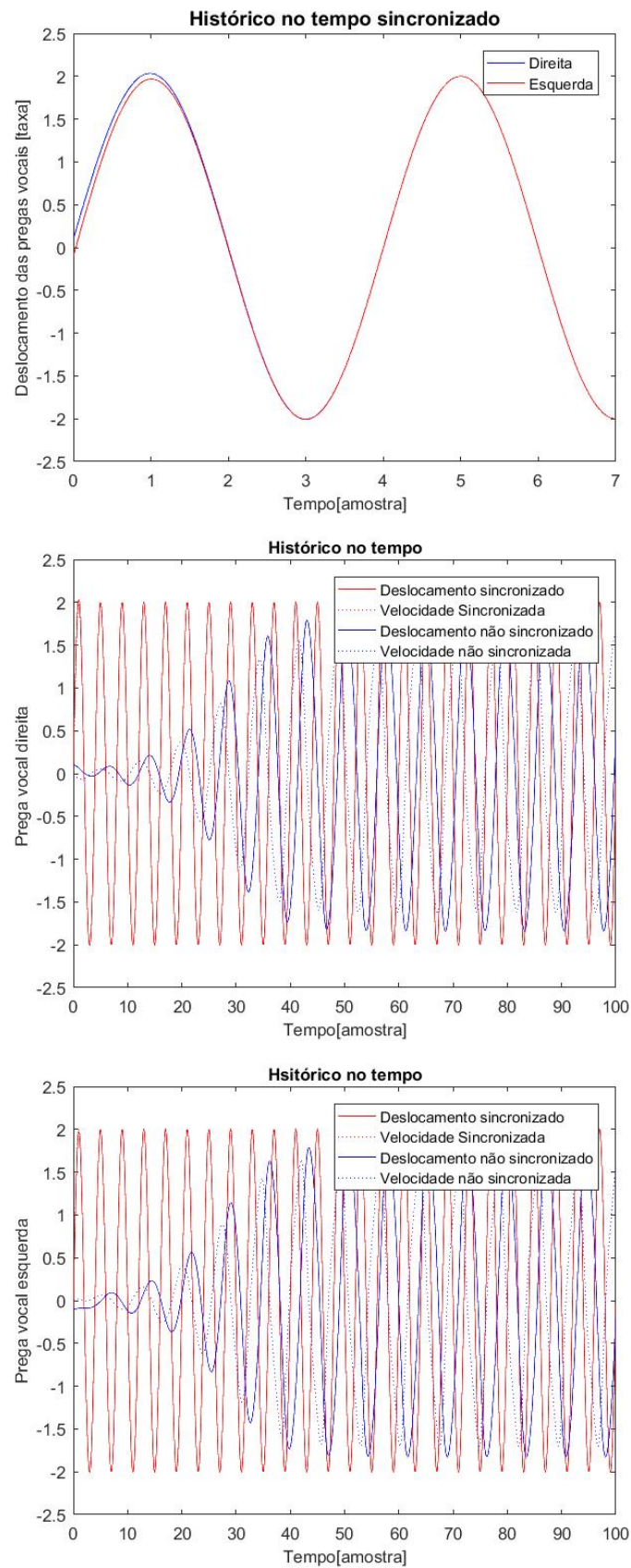


Figura 4.7: Histórico no tempo para a configuração 1(c), fonte: autor

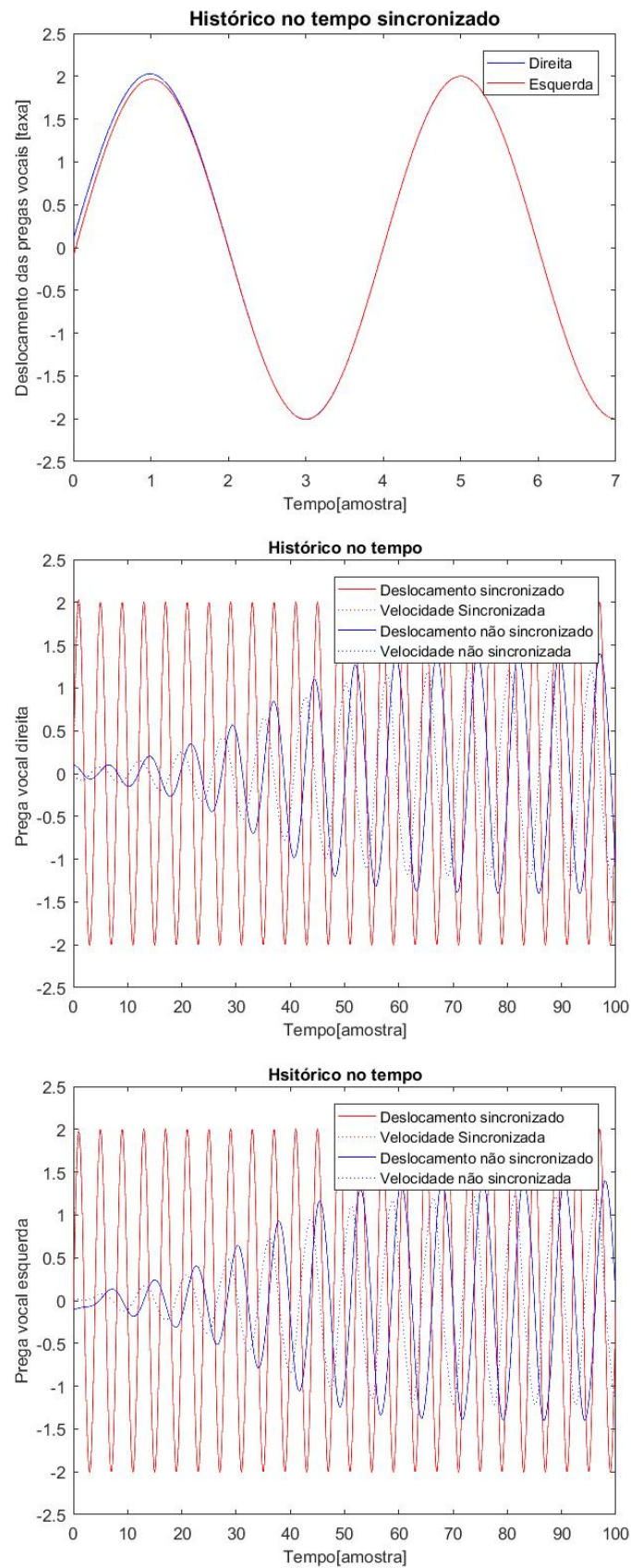


Figura 4.8: Histórico no tempo para a configuração 1(d), fonte: autor

4.7.4 Resultados para Configuração 2

Aqui aplica-se o método LQR para os parâmetros da configuração 2.

Aplicando-se o método de controle para os parâmetros de **2a** que são dados por $\alpha = 0.6$ e $Q = 0.1$ encontra-se que a controlabilidade é 1.3896, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.6835 \ 0.7644 \ 0.9800 \ 0.9310]$.

Para os parâmetros da configuração **2b** dados por $\alpha = 0.4$ e $Q = 0.2$ tem-se que a controlabilidade é 1.1302, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.8532 \ 0.7477 \ 0.9450 \ 0.9989]$.

Para os parâmetros da configuração **2c** dados por $\alpha = 0.4$ e $Q = 0.1$ tem-se que a controlabilidade é 1.1252, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.8559 \ 0.7288 \ 0.9669 \ 1.0429]$.

Para os parâmetros da configuração **2d** dados por $\alpha = 0.5$ e $Q = 0.5$ tem-se que a controlabilidade é 1.3062, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [0.7803 \ 0.7691 \ 0.9523 \ 0.8454]$.

Observa-se que para esta configuração que antes era estável, ou seja, cessava seu movimento rapidamente, o que poderia interferir na qualidade do som, agora as pregas vocais direita e esquerda rapidamente movimentam em sincronia, e permanecem assim por quanto tempo for necessário, acarretando assim um movimento perfeito entre as pregas vocais.

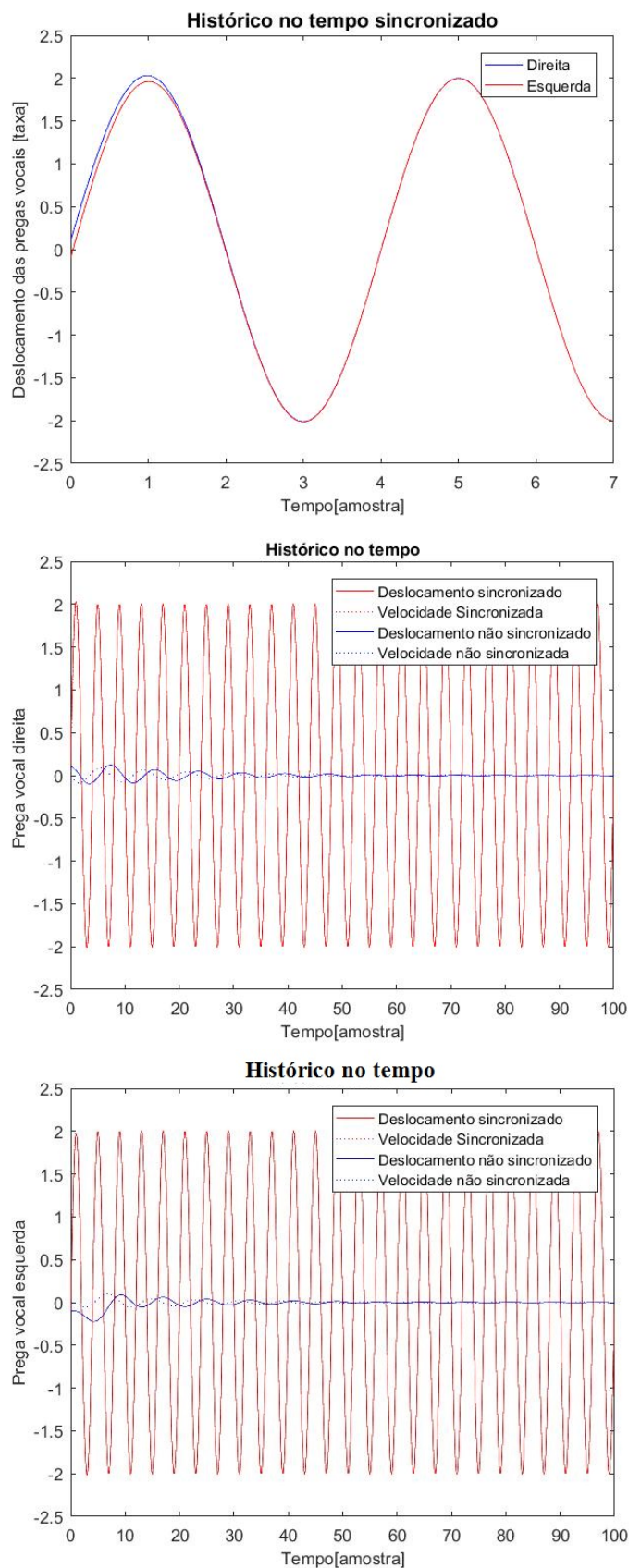


Figura 4.9: Histórico no tempo para a configuração 2(a), fonte: autor

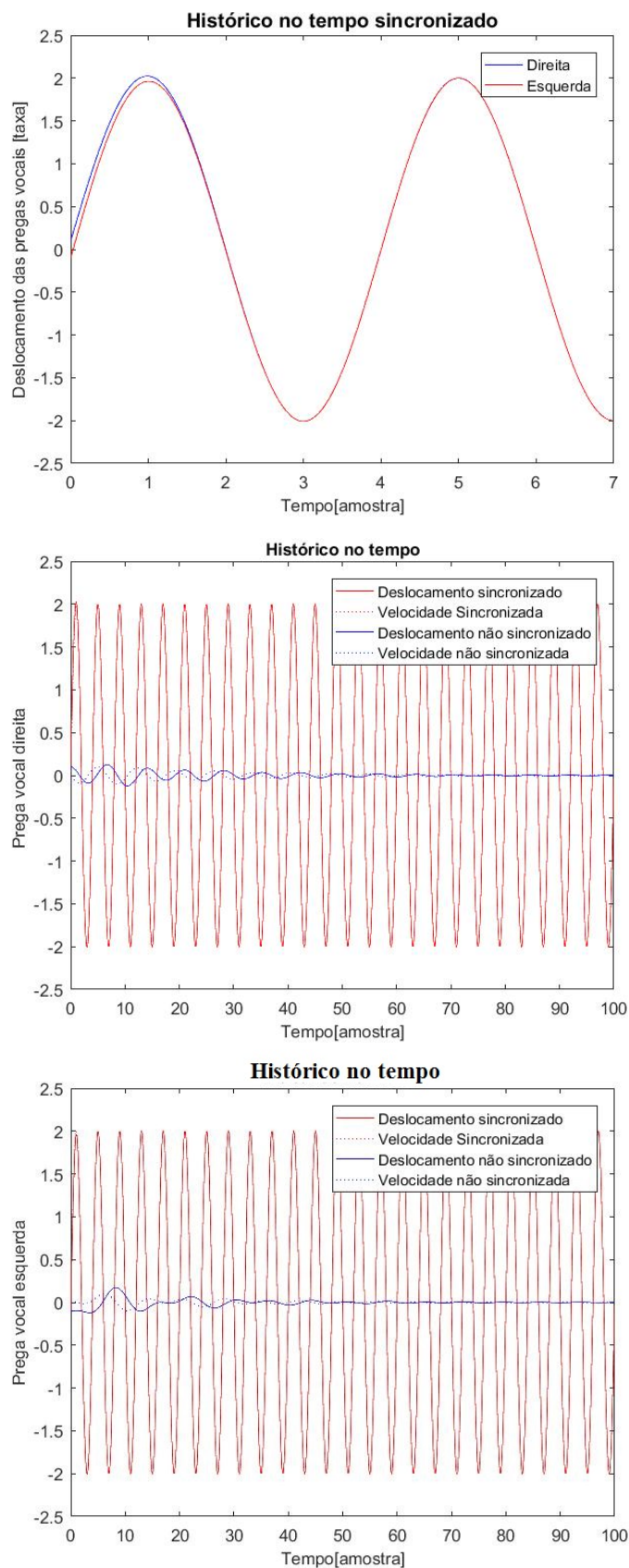


Figura 4.10: Histórico no tempo para a configuração 2(b), fonte: autor

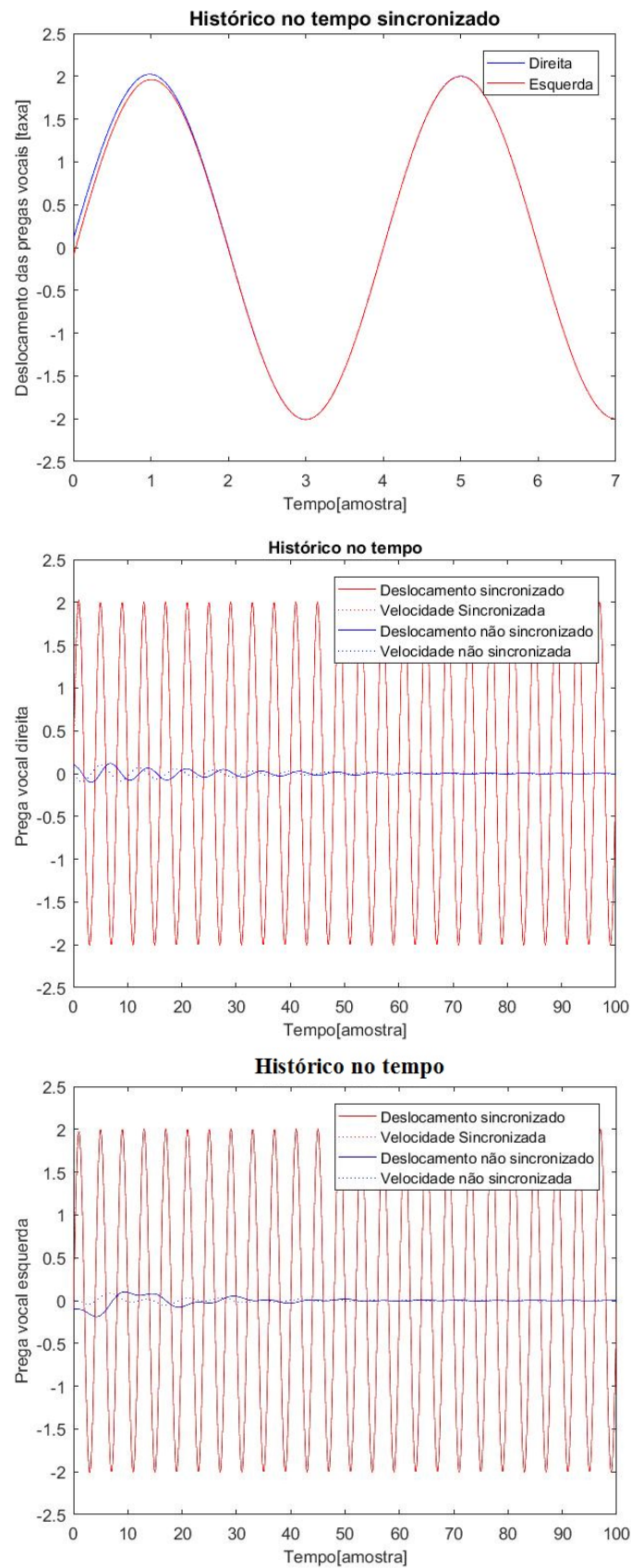


Figura 4.11: Histórico no tempo para a configuração 2(c), fonte: autor

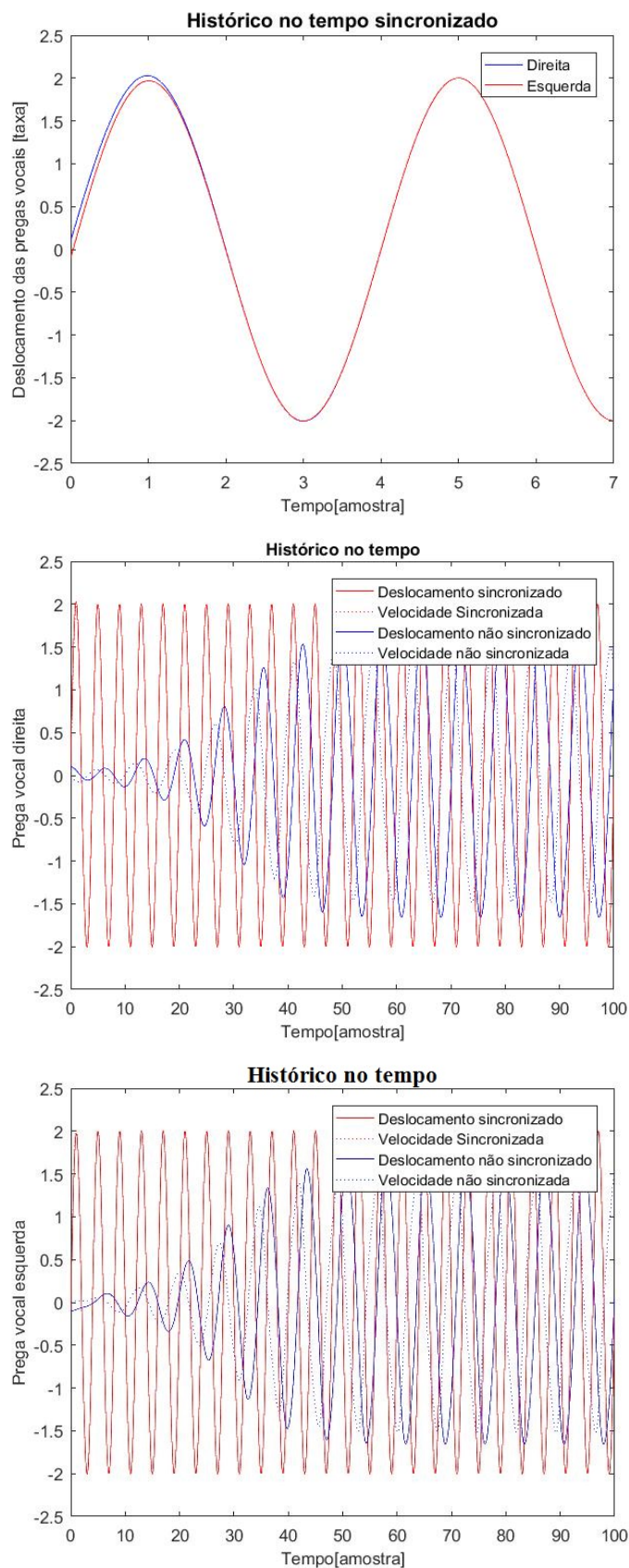


Figura 4.12: Histórico no tempo para a configuração 2(d), fonte: autor

4.7.5 Resultados para Configuração 3

- Tem-se, a seguir, o controle LQR aplicado à terceira configuração.

Aplica-se o método de controle para os parâmetros de **3a** que são dados por $\alpha = 0.3$ e $Q = 0.3$ encontra-se que a controlabilidade é 0.9379, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.0176 \ 0.7270 \ 0.9114 \ 1.0624]$.

Para os parâmetros da configuração **3b** dados por $\alpha = 0.3$ e $Q = 0.4$ tem-se que a controlabilidade é 0.8827, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.0118 \ 0.7416 \ 0.9047 \ 1.0136]$.

Para os parâmetros da configuração **3c** dados por $\alpha = 0.3$ e $Q = 0.2$ tem-se que a controlabilidade é 0.9778, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.0256 \ 0.7053 \ 0.9280 \ 1.1150]$.

Para os parâmetros da configuração **3d** dados por $\alpha = 0.3$ e $Q = 0.1$ tem-se que a controlabilidade é 0.9995, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.0363 \ 0.6753 \ 0.9570 \ 1.1714]$.

Para esta configuração também consegue-se a sincronização. Para este sistema que antes era caótico, oscilava em pequena amplitude, onde a prega esquerda movia-se desordenadamente, agora tem-se um movimento sincronizado, entre as pregas.

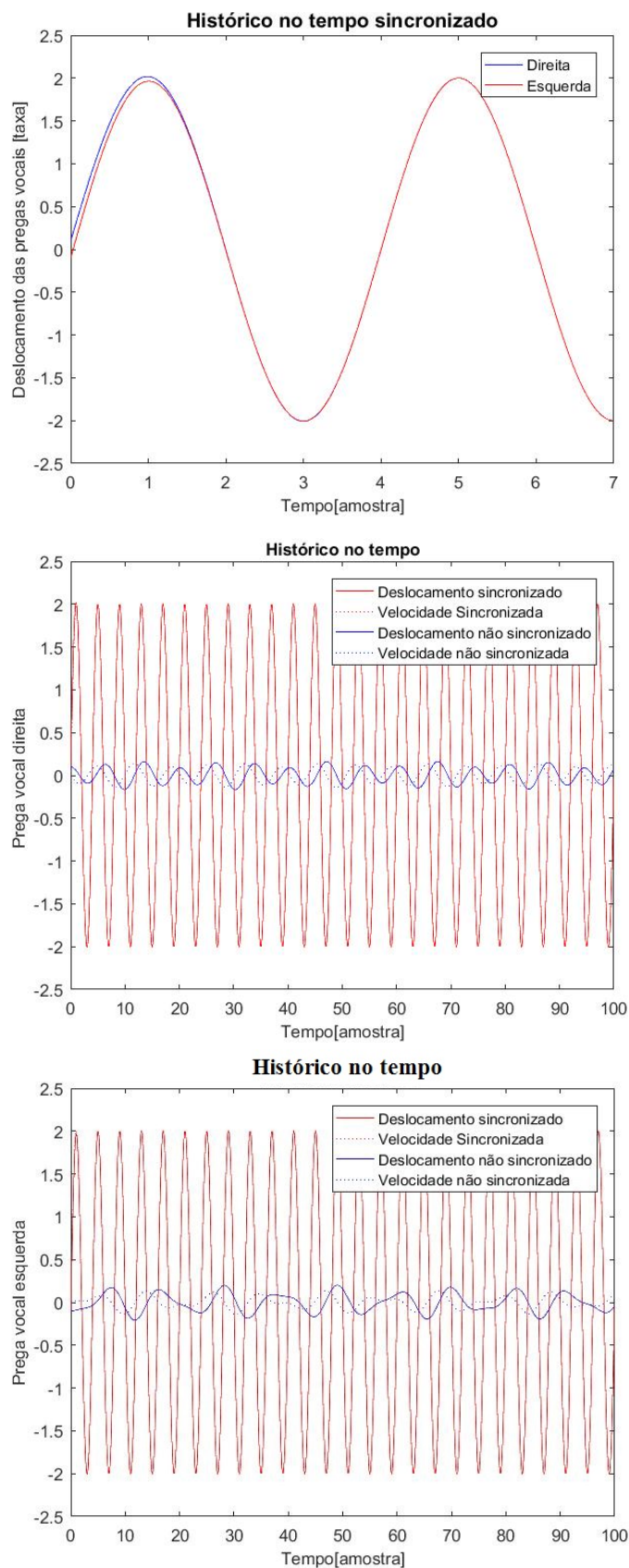


Figura 4.13: Histórico no tempo para a configuração 3(a), fonte: autor

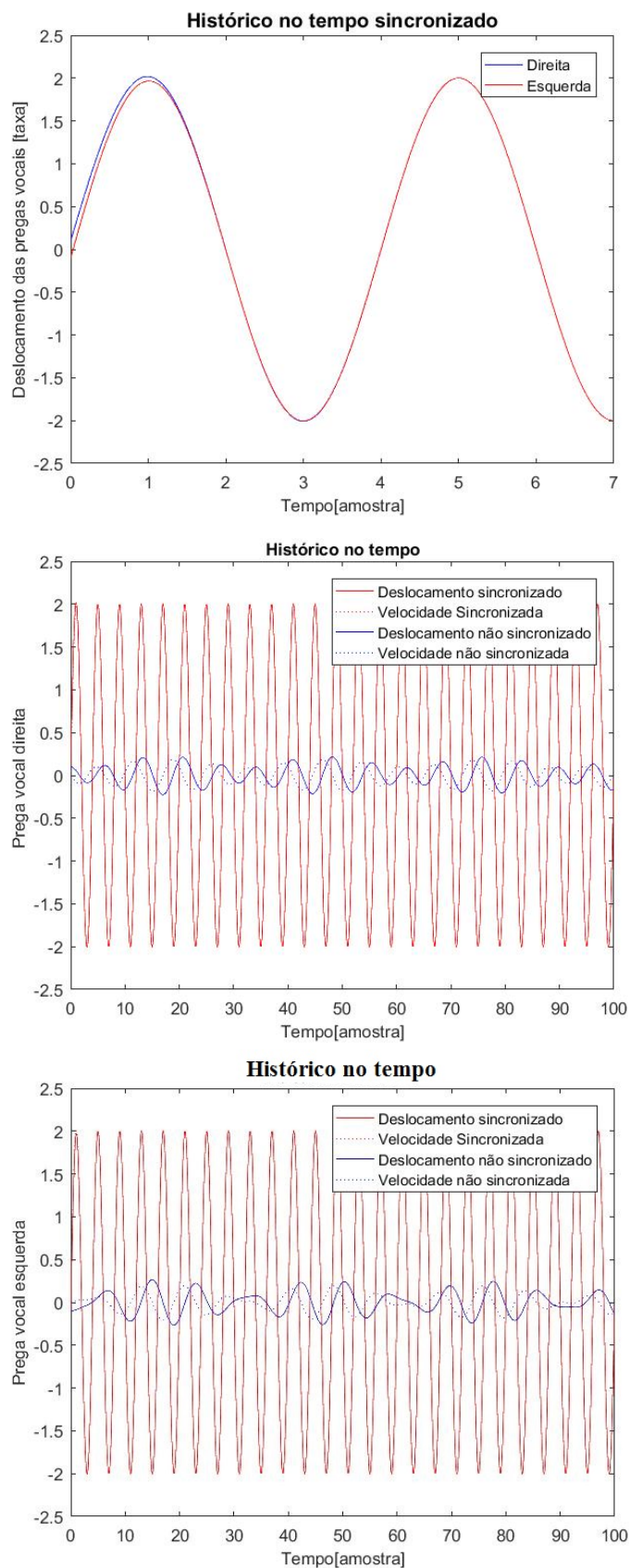


Figura 4.14: Histórico no tempo para a configuração 3(b), fonte: autor

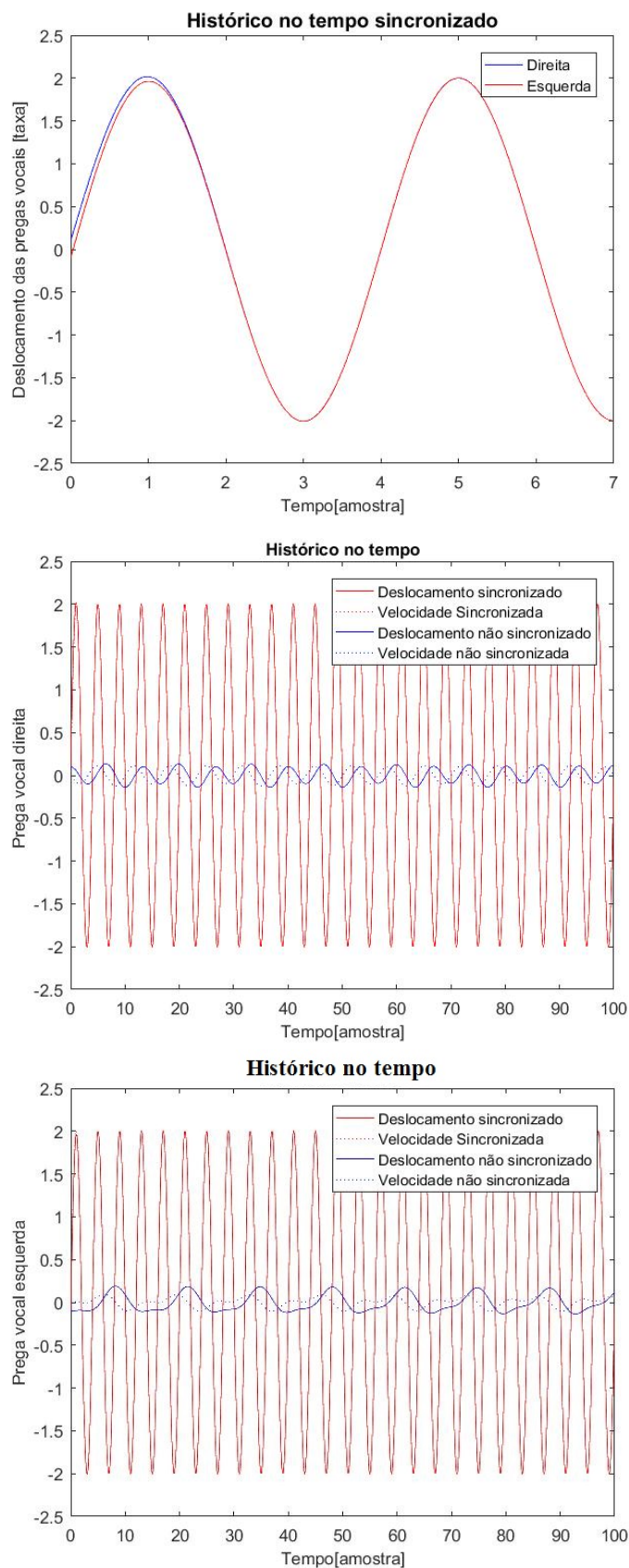


Figura 4.15: Histórico no tempo para a configuração 3(c, fonte: autor)

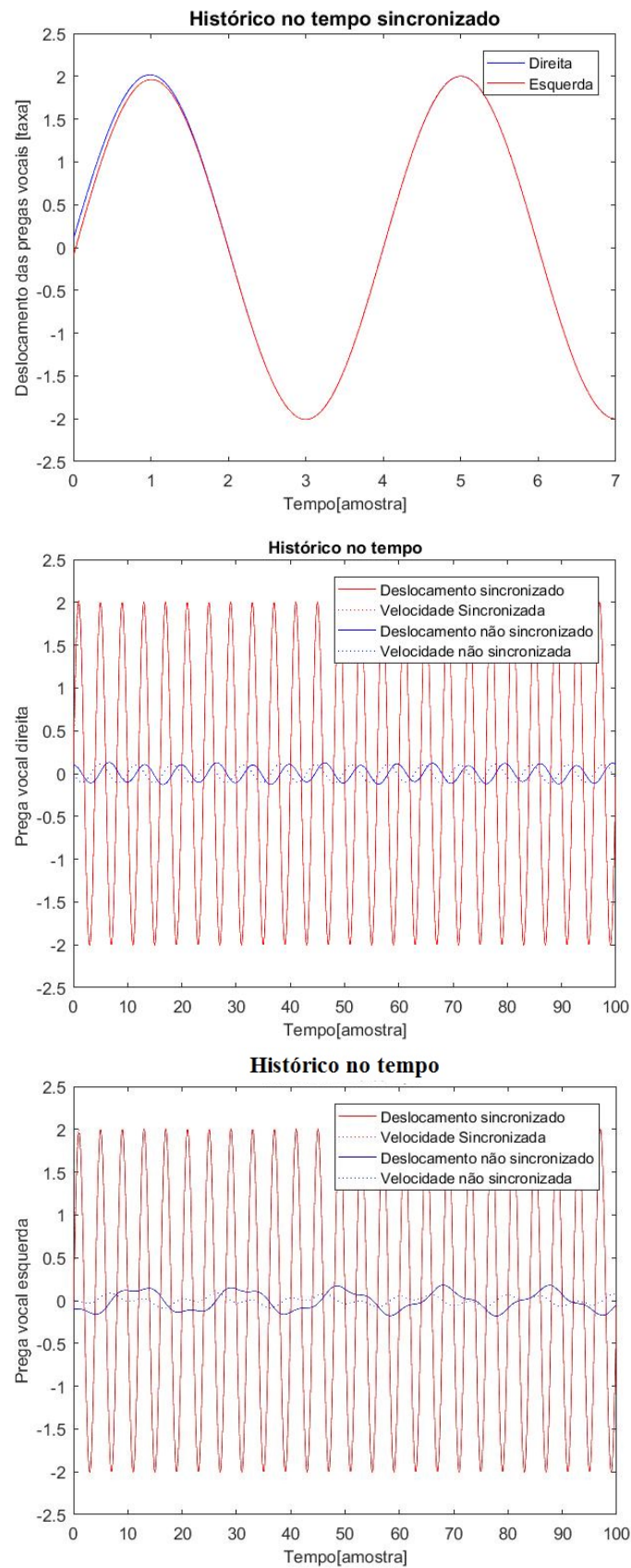


Figura 4.16: Histórico no tempo para a configuração 3(d), fonte: autor

4.7.6 Resultados para Configuração 4

Agora a seguir tem-se o controle LQR aplicado à quarta e última configuração.

Aplica-se o método de controle para os parâmetros de **4a** que são dados por $\alpha = 0.2$ e $Q = 0.1$ encontra-se que a controlabilidade é 0.8780, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.3405 \ 0.5539 \ 0.9429 \ 1.4126]$.

Para os parâmetros da configuração **4b** dados por $\alpha = 0.25$ e $Q = 0.3$ tem-se que a controlabilidade é 0.8538, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.1490 \ 0.6898 \ 0.8967 \ 1.1531]$.

Para os parâmetros da configuração **4c** dados por $\alpha = 0.28$ e $Q = 0.4$ tem-se que a controlabilidade é 0.8442, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.0588 \ 0.7307 \ 0.8982 \ 1.0438]$.

Para os parâmetros da configuração **4d** dados por $\alpha = 0.2$ e $Q = 0.5$ tem-se que a controlabilidade é 0.6140, mostrando que o sistema é controlável. Para a matriz de ganhos tem-se $K = [1.3395 \ 0.6611 \ 0.8558 \ 1.1872]$.

Para esta configuração também consegue-se a sincronização. Para este sistema que antes era caótico, agora tem-se um movimento sincronizado. As pregas que antes não apresentavam comportamento padronizado, rapidamente entram em sincronia, movimentando-se harmonicamente.

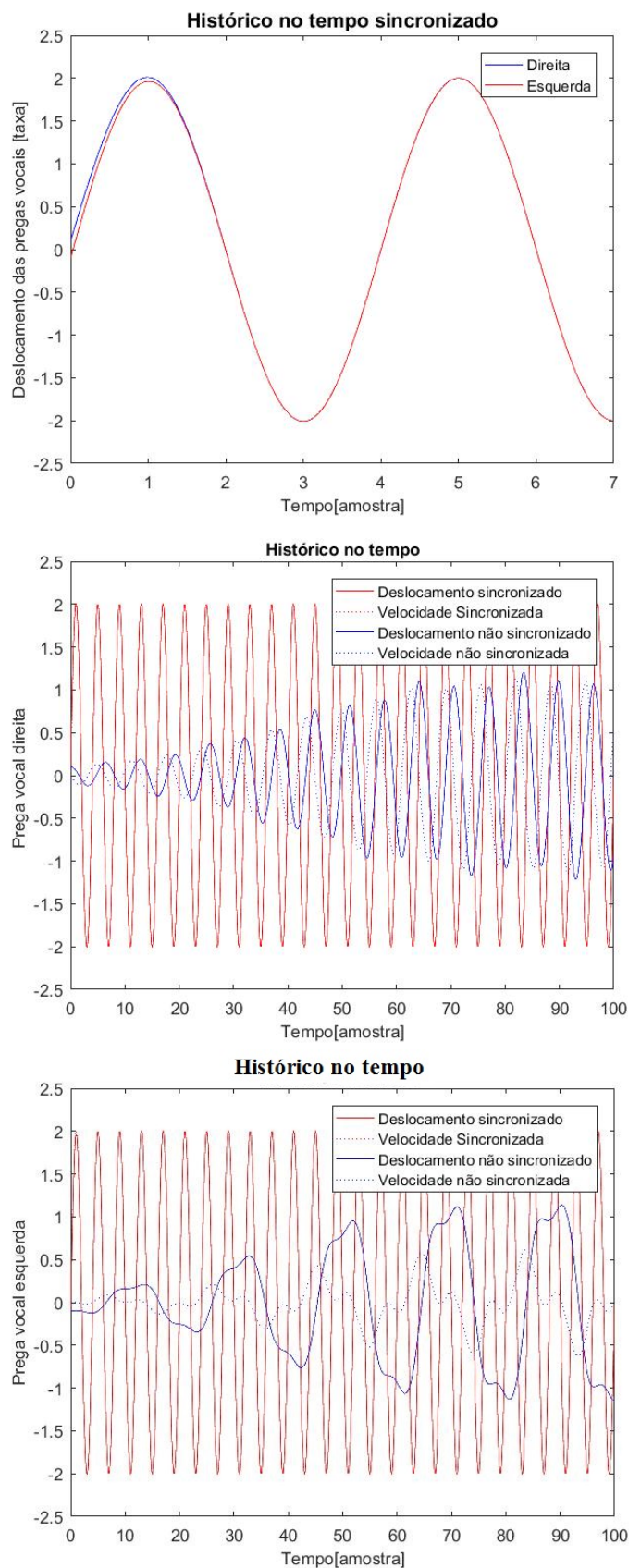


Figura 4.17: Histórico no tempo para a configuração 4(a), fonte: autor

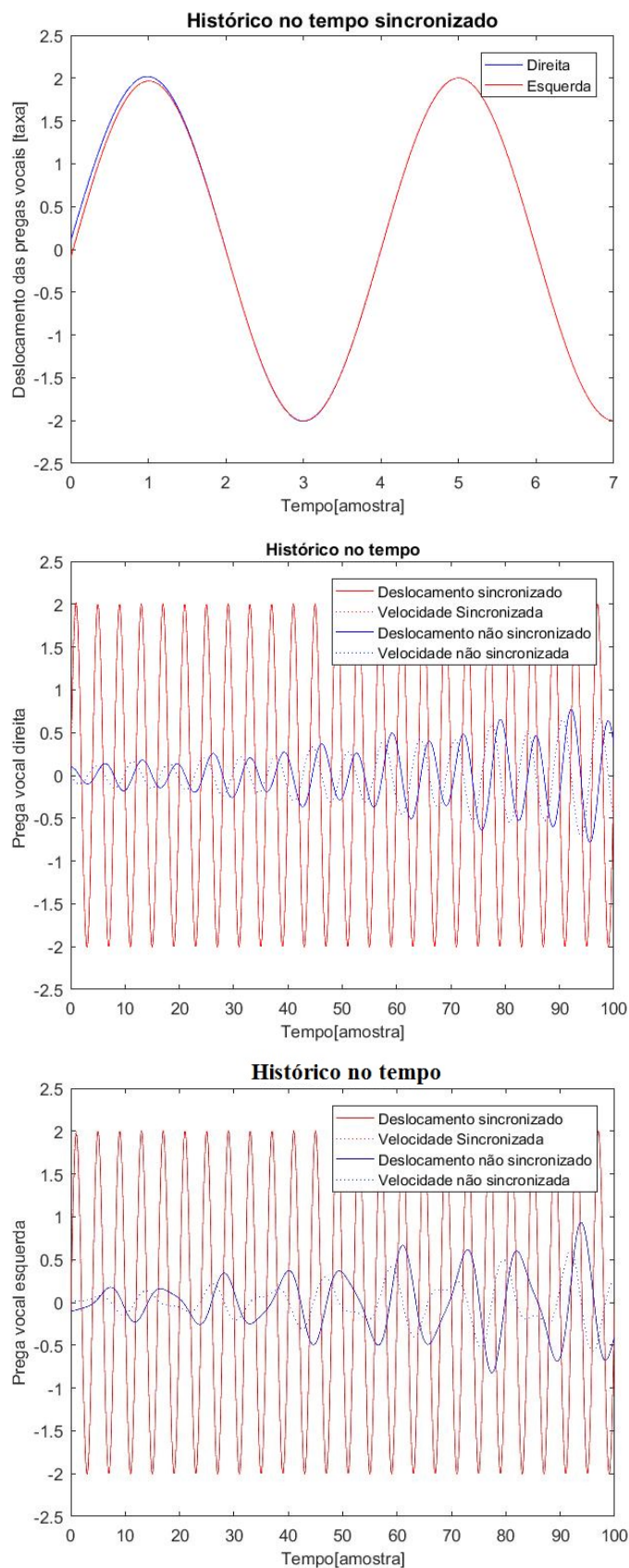


Figura 4.18: Histórico no tempo para a configuração 4(b), fonte: autor

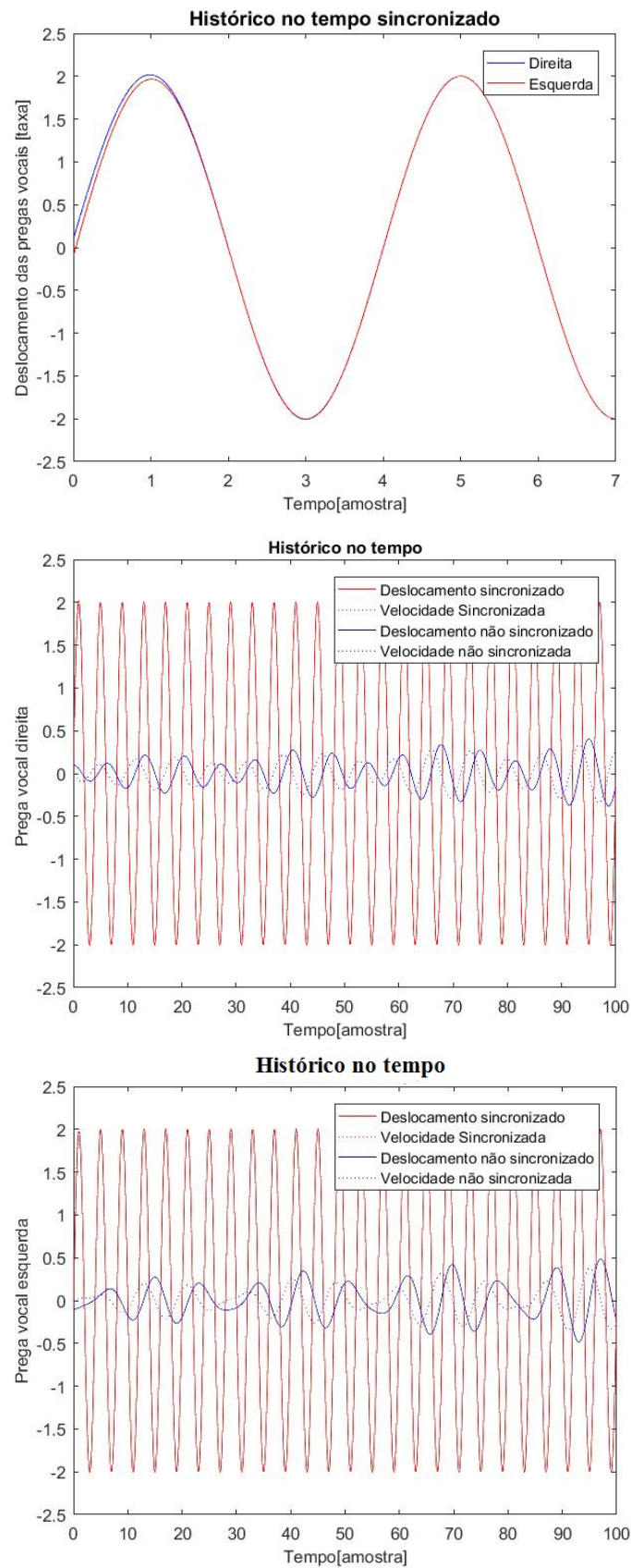


Figura 4.19: Histórico no tempo para a configuração 4(c), fonte: autor

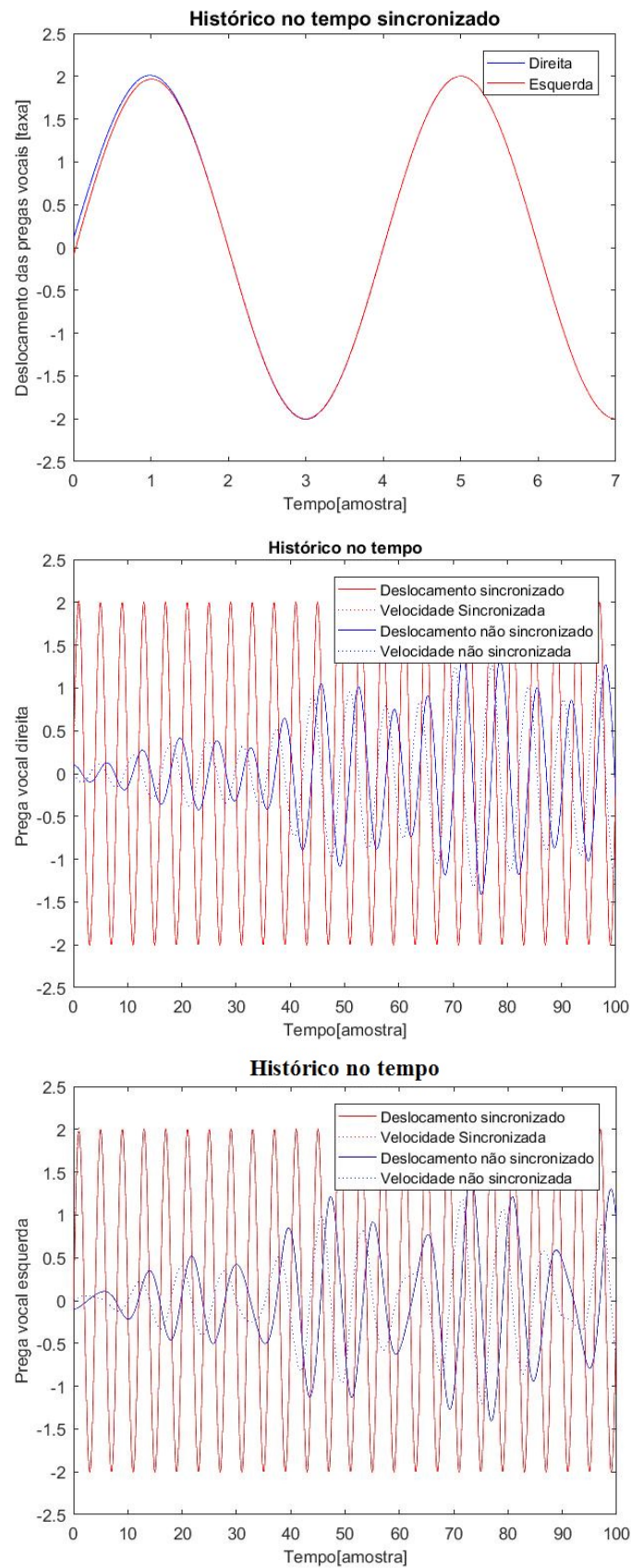


Figura 4.20: Histórico no tempo para a configuração 4(d), fonte: autor

CONCLUSÃO

Através das simulações mostradas no capítulo anterior tem-se que para todas as configurações apresentadas o método de controle linear ótimo foi eficaz, o que implica que para todos os valores de parâmetros testados foi alcançado o bom funcionamento do sistema que representa o movimento das pregas vocais, tornando possível a produção de voz.

Neste trabalho foi proposto de forma inédita a utilização do projeto de controle linear ótimo como forma de sincronizar o movimento das pregas vocais assimétricas.

As simulações mostraram que o sistema com o projeto do controle linear ótimo foi robusto e eficiente no controle do movimento das pregas vocais que possuem uma diferença em sua rigidez. Sendo assim, um movimento periódico em fase foi produzido com o objetivo de alcançar o bom funcionamento das pregas vocais, possibilitando assim a produção do som mesmo em pregas doentes (Uma rígida-saudável e outra flácida-doente) como no caso da disfonia flácida.

É importante salientar que pode-se controlar o efeito de vozes com disfonia através do caminho escolhido, lembrando que escolhendo-se o caminho com baixas frequências chega-se nos tons mais graves e para frequências maiores encontram-se os tons mais agudos. Logo pode-se assim também além da produção do som garantir uma melhor qualidade vocal do mesmo, o que poderia evitar outros métodos de correções da voz mais agressivos como injeção de colágeno ou redução das pregas vocais.

Além disso com o método de controle aqui usado também pode-se resolver o problema de afonia (incapacidade de produção do som) causado pelo mal funcionamento devido à

assimetria da rigidez para todos os valores simulados.

Em todas as regiões consideradas, vários outros valores foram simulados e apresentaram resultados satisfatórios. Entretanto não foi exposto neste trabalho para não tornar a leitura cansativa, pois os resultados encontrados são análogos aos que já foram analisados.

Como trabalho futuro pode-se propor outros métodos de controle no intuito de sincronizar de maneira mais rápida com o propósito de ganhar ainda mais tempo afim de se conseguir por mais tempo o movimento sincronizado visto que a vibração das pregas vocais depende do ar proveniente dos pulmões que rapidamente cessa. Tem-se em vista o método das Equações de Riccati Dependentes do Estado (SDRE) que frequentemente apresenta resultados que convergem mais rapidamente que o método LQR em vários exemplos testados na literatura. Nesse sentido será o próximo passo desta pesquisa que ainda pode-se muito ser melhorada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alipour, F. ;Berry , D.; Titze, I. R. , A finite-element model of vocal fold vibration, J. Acoust. Soc. Am., 108, p. 3003-3012, 2000.
- [2] Aronson, A. E. Clinical voice disorders. 3.ed. New York: Thime, 1990. p. 3-11.
- [3] Andrade,F.R.H, Análise do fluxo glotal em modelo da laringe baseado em tomografia computadorizada,Dissertação de mestrado, USP, 2013.
- [4] Arneodo, E. M., and Mindlin, G. B. Source-tract coupling in birdsong production, Phys. Rev. E 79, 061921, 2009.
- [5] Baer,T. Investigation of Phonation Using Excised Larynxes, Ph. D. disserta- tion, MIT, Cambridge, MA, 1975.
- [6] Behlau, M.; Azevedo, R; Pontes, P. Conceitos de voz e classificação das disfonias. In: Behlau, M. Voz: o livro do especialista. Rio de Janeiro. Revinter, 2001. p. 53-76.
- [7] Behlau, M; Pontes, P. Avaliação e tratamento das disfonias. São Paulo: Lovise, 1995.
- [8] Beuter, A.; Edwards, R.; Titcombe, M. Data analysis and mathematical modeling of human tremor, in Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, edited by A. Beuter, L. Glass, M. C. Mackey, and M. S. Titcombe (Springer),2003 .
- [9] Chavarette, F. R. Dinâmica e controle não lineares de um sistema neuronal ideal e não ideal. 2005. 178 f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- [10] Daya H; Hosni A; Bejar-Solar I; Evans J.N.G; Bailey M. Pediatric vocal fold paralysis. Arch Otolaryngol Head Neck Surg 2000; 126: 21-5.

- [11] Fielder, F. N.; PRADO, C. P. C. *Caos: uma introdução*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Blücher, 1994. 402 p.
- [12] Van den Berg, J. W. ;Zantema J. T. ; Doornenbal P. , On the air resistance and the Bernoulli effect of the human larynx, *J. Acoust. Soc. Am.*, 29, 626-631, 1957.
- [13] Berry, D. A.; Herzel, H.; Titze, I. R.; Krischer, K. Interpretation of biomechanical simulations of normal and chaotic vocal fold oscillations with empirical eigenfunctions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95: 3595-3604, 1994.
- [14] Berry, D. A.; Herzel, H.; Titze, I. R.; Story, B. H. Bifurcations in excised larynx experiments. *J. Voice*, 10: 129-138, 1996.
- [15] Boccaletti, S.; Kurths, J.; Osipov, G.; Valladares, D.; Zhou, C. The synchronization of chaotic systems. *Physics Report*, v. 366, n. 1-2, p. 1-101, 2002.
- [16] Flanagan, J. L.; Landgraf L. L. . Self-oscillating source for vocal-tract synthesis, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, AU-16, 57-64, 1968.
- [17] Garrel, R., Scherer, R., Nicollas, R., Giovanni, A., and Ouaknine, M. Using there-laxation oscillations principle for simple phonation modeling, *J. Voice* 22, 385-398, 2008.
- [18] Kirschfeld, K. The physical basis of alpha waves in the electroencephalogram and the origin of the Berger effect, *Biol. Cybern.* 92, 177-185, 2005.
- [19] Giovanni, A.; Ouaknine, M.; Guelfucci, B.; Triglia, J. M. - Nonlinear behavior of vocal fold vibration: the role of coupling between the vocal folds. *J. Voice*, 13: 465-476, 1999.
- [20] Giovanni, A.; Ouaknine, M.; Triglia, J. M. - Determination of largest Lyapunov exponents of vocal signal: application to unilateral laryngeal paralysis. *J. Voice*, 13: 341-354, 1999.
- [21] Hale, J.K, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 2009.
- [22] Heagy, J.; Carroll, T.; Pecora, L. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Physical Review E*, v. 50, n. 3, p. 1874-1885, 1994.
- [23] Ishizaka K. ;Flanagan J.L *Syntesis of voiced sounds from a 2-mass model of vocal cords*, *Bell System Technical Journal*, v. 51, n.6, 1972.
- [24] Laje, R., Gardner, T., and Mindlin, G. B. Continuous model for vocal fold oscillations to study the effect of feedback, *Phys. Rev. E* 64, 2001.

- [25] Laje, R., and Mindlin, G. B. Modeling source-source and source-filter acoustic interaction in birdsong, *Phys. Rev. E* 72, 036218, 2005
- [26] Herzel, H.; Knudsen, C. Bifurcation in a vocal fold model, *Nonlinear Dyn.*, 7, 53-64, 1995.
- [27] Hirano, M. Morphological structure of vocal cord as a vibrator and its variations, *Folia Phoniatrica*, v.26, n.2, pp 89-94, 1974.
- [28] Hirano, M.; Kurita S.; Nakashima T. The structure of the vocal folds. In K.N. Stevens and M. Hirano (eds), *Vocal fold physiology*. Tokyo: University of Tokyo, Press 33-41, 1981.
- [29] Jiang, J. J.; Zhang, Y.; Stern, J. Modeling of chaotic vibrations in symmetric vocal folds, *J. Acoust. Soc. Am.*, 110, 2120-2128, 2001.
- [30] Ogata, K. *Engenharia de controle moderno*. 1. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1982.
- [31] Pecora, L. M.; Carrol, T. L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 8, p. 821-824. 1, 24, 29, 1990.
- [32] Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [33] Rosenblum, M.; Pikovsky, A.; Kurths, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, v. 76, n. 11, p. 1804-1807. 1, 2, 29, 171, 1996.
- [34] Rosenblum, M. G.; Pikovsky, A. S.; Kurths, J.; Schafer, C.; Tass, P. A. Chapter 9 phase synchronization: From theory to data analysis. *Handbook of Biological Physics*, v. 4, n. C, p. 279-321. 1, 24, 2001.
- [35] Savi, M. A. *Dinâmica Não-linear e Caos*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: E-papers. 304 p, 2006
- [36] Titze, I. R. , On the mechanics of vocal fold vibration, *J. Acoustic Soc. Am.* 60, pp. 1366-1380-271, 1976.
- [37] Titze, I. R. Comments on the Myoelastic-Aerodynamic Theory of Phonation, *J. Speech Hear. Res.* 23(3), pp 45-510, 1980.
- [38] Titze, I. R. Titze, Mechanisms of Sustained Oscillation of the Vocal Folds, *Vocal Fold Physiology: Biomechanics, Acoustic, and Phonatory control*, pp 349-357, 1985.

- [39] Titze, I. R. Titze The physics of small amplitude oscillation of the vocal folds, J. Acoust. Soc. Am. 83, pp 1536-1552, 1988.
- [40] Titze, I. R. , Principles of Voice Production, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 252-271, 1994.
- [41] Steinecke, I; Herzel, H. Bifurcations in an asymmetric vocal-fold model", J. Acoust. Soc. Am. 97, 1874-1884, 1995.
- [42] Trevisan, M. A. ; Eguia, M. C.; Mindlin, G. B. Nonlinear aspects of analysis and synthesis of speech time series data, Phys. Rev. E, 63, 026216, 2001.
- [43] Lous, N.J.C., Hofmans, G.C.J., Veldhuis, R.N.J., Hirschberg, A. A symmetrical two mass vocal-fold model coupled to vocal tract and trachea with application to prosthesis design. Acta Acustica, 84: 1135-1150, 1998.
- [44] Lous, N.J.C., Hofmans, G.C.J., Veldhuis, R.N.J., Hirschberg, A. A symmetrical two mass vocal-fold model coupled to vocal tract and trachea with application to prosthesis design. Acta Acustica, 84: 1135-1150, 1998.
- [45] Lucero, J. C., Schoentgen, J., and Behlau, M. Physics-based synthesis of disordered voices, in Interspeech 2013, Lyon, France, pp. 587-591, 2013.
- [46] Zhang, H.; Liu, D.; Wang, Z. Controlling Chaos: suppression, synchronization and chaotification. 344 pages. Springer-Verlag, London, 2009.
- [47] Chavarette, F. R.; Balthazar, J.M. ; Rafikov, M. ; Hermi, H. A. On non-linear dynamics and an optimal control synthesis of the action potential of membranes (ideal and non-ideal cases) of the Hodgkin Huxley (HH) mathematical model. Chaos, Solitons and Fractals, v. 39, p. 1651-1666, 2009. DOI: 10.1016/j.chaos, 2007.
- [48] Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J., Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, 411 pages. Cambridge Nonlinear Science Series, New York, 2003.
- [49] Rafikov, M., Balthazar, J.M., Tuset, A. M.: An optimal linear control design for nonlinear systems. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 30(4), 279-284, 2008.
- [50] Huygens, C. Horologium Oscillatorium.- p. (Paris, France: Apud F. Muguet) [English translation: 1986, The Pendulum Clock (Ames: Iowa State University Press)]. 1, 21, 1673.

- [51] Tusset, A. M.; Baltthazar, J. M.; Chavarette, F. R.; Felix, J. L.P. On Energy transfer phenomena, in a nonlinear ideal and non-ideal essential vibrating systems, coupled to a (MR) Magneto-rheological damper. *Nonlinear Dynamics*, v. 69, p. 1859 - 1880, 2012.
- [52] Chavarette, F. R. On an Optimal Linear Control of a Chaotic Non-Ideal Duffing System. *Advances in Mechanical Engineering*, v. 2, p. 1 - 7, 2012
- [53] Chavarette, F. C. Control design applied to a non-ideal structural system with behavior chaotic. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 86, p. 487 - 500, 2013.
- [54] Lucero, J. C. A theoretical study of the hysteresis phenomenon at vocal fold oscillation onset-offset, *J. Acoust. Soc. Am.*, 105, 423-431, 1999.
- [55] Silva, F; Artana,G; Sciamarella, D. Modeling voice production with time-delay systems: the larynx tube. 10th International Conference on Voice Physiology and Biomechanics , 2016.
- [56] Lucero, J. C., Koenig, L. L., Lourenço, K. G., Rutty, N., and Pelorson, X. . A lumped mucosal wave model of the vocal folds revisited: recent extensions and oscillation hysteresis, *J. Acoust. Soc. Am.* 129, 1568-1579, 2011.
- [57] Lucero, J. C. The minimum lung pressure to sustain vocal fold oscillation, *J. Acoust. Soc. Am.* 98, 779-784, 1995.
- [58] Nakhla,M. S.; Vlach, J, A Piecewise Harmonic Balance Technique for Determination of Periodic Response of Nonlinear Systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol.23,pp.85-91, 1976 .
- [59] Hagedorn, P.: *Oscilações Não-Lineares*, São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda.pp. 320, 1984,
- [60] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T.: *Nonlinear Oscillations*, New York, John Wiley and Sons, pp. 704, 1979.
- [61] Holtz,H.Hermite-bierhler,routh-hurwitz, and total positivity, *Linear Algebra its Applications* 372, p. 105-110, 2003.
- [62] Huntley, I. D. and Johnson, R. M.: *Linear and Nonlinear Differential Equations*,Chichester, Ellis Horwood Limited, pp. 190,1983.
- [63] Hurwitz, A. *Math. Ann.*, Vol. 46, p. 273-284, 1895.

- [64] Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [65] van der Pol, B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations", Radio Review 1, 701-710, 1920.
- [66] van der Pol, B. ;van der Mark, J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart", Phil. Mag. 6, 763-775, 1928.
- [67] Savi, M. A. Dinâmica Não-linear e Caos. 1^a. ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2006. 304 p.
- [68] Vilain, C. E. ; Pelorson, X.; Fraysse C.; Deverge, M.; Hirschberg, A.; Willems, J. Experimental validation of a quasi-steady theory for the flow through the glottis, J. Sound Vibration, 276, 475-490, 2004.
- [69] Wolf, A.; Swift, J.B.; Swinney, H.L. and Vastano, J.A. Determining lyapunov exponents from a time series. Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 16, No. 3, pp. 285-317, 1985.
- [70] Zill, Dennis G; Cullen, Michael R; Equações Diferenciais - volume 2, São Paulo: Editora MAKRON Books, 2001.
- [71] Bryson, A. E; Ho Y. Applied optimal control. Washington, DC: Hemisphere Publ. Corp; 1975.