

***DANILO CARLOS PEREIRA***

**ANÁLISE DINÂMICA POR  
WAVELETS EM UM SISTEMA  
COM FRICÇÃO SECA E  
AMORTECIMENTO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Rio Claro, para a obtenção do título de Mestre em Física (Área de Concentração: Física Aplicada).

Orientador: *Prof. Dr. José Roberto Campanha.*

Rio Claro

2002

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ANÁLISE DINÂMICA POR  
WAVELETS EM UM SISTEMA  
COM FRICÇÃO SECA E  
AMORTECIMENTO**

Autor: Danilo Carlos Pereira.

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Rio Claro, para a obtenção do título de Mestre em Física (Área de Concentração: Física Aplicada).

Rio Claro, outubro de 2002.

SP – Brasil

517.355 Pereira, Danilo Carlos.  
P436a       Análise dinâmica por Wavelets em um sistema com  
              fricção seca e amortecimento / Danilo Carlos Pereira.—Rio  
              Claro : [s.n.], 2002  
              v, 72 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual  
Paulista – Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: José Roberto Campanha

1. Fourier, transformações de. 2. Série de Fourier.  
3. FFT. 4. Convolução. I. Título

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da UNESP - Câmpus de Rio Claro

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ANÁLISE DINÂMICA POR WAVELETS EM  
UM SISTEMA COM FRICÇÃO SECA E  
AMORTECIMENTO**

Autor: Danilo Carlos Pereira.

Orientador: José Roberto Campanha.

---

Prof. Dr. José Roberto Campanha.

---

Prof. Dr. José M. Balthazar.

---

Prof. Dr. Reyolando M. L. F. L. Brasil.

Rio Claro, outubro de 2002.

SP – Brasil

Aos meus pais, Antonio Carlos e Neusa,  
minhas irmãs, minha sobrinha e à minha  
namorada Érika.

## Agradecimentos

Ao meu mestre e orientador Professor Doutor José Roberto Campanha pela orientação, amizade e incentivo, que foram fundamentais para a elaboração deste trabalho.

Ao Professor Doutor Jorge Roberto Pimentel pela ajuda sempre presente e de grande importância.

Aos Professores Doutores Reyolando M. L. F. L. Brasil e José M. Balthazar pelas sugestões e avaliação deste trabalho.

Ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), ao Departamento de Física da UNESP de Rio Claro, aos funcionários da seção de Pós-Graduação e aos funcionários da Biblioteca pelo apoio e facilidades concedidas.

Aos amigos da Academia da Força Aérea de Pirassununga.

A todos os amigos do mestrado, em particular à **Edna, Érika, Gislaine, Fábio, Luiz e Gilson** pelo apoio e auxílio em todos os momentos.

À minha namorada **Érika**, por estar sempre ao meu lado.

À minha mãe, sempre me incentivando nos estudos (Obrigado Mãe!).

À **CAPES** (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela ajuda financeira sem a qual seria muito difícil a realização deste trabalho.

Aos amigos que compreenderam a minha ausência em muitos momentos e a todos que me incentivaram, auxiliaram e, direta ou indiretamente, colaboraram para elaboração deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos

Danilo Carlos Pereira

*...porque a Deus nenhuma coisa é impossível.*  
(Lucas 1,37)

PEREIRA, Danilo Carlos; **Análise Dinâmica por Wavelets em um Sistema com Fricção Seca e Amortecimento**. Rio Claro, 2002. 70 p. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) – IGCE (Instituto de Geociências e Ciências Exatas), Campus de Rio Claro, UNESP (Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”).

## RESUMO

Neste trabalho analisamos um oscilador não linear com fricção seca e amortecimento por meio das wavelets. Inicialmente fizemos uma breve revisão sobre as wavelets, comparando-as com a transformada de Fourier, destacando os principais tipos de wavelets e a expansão de uma função utilizando como base as wavelets. A seguir, variando a frequência de excitação externa do sistema, reproduzimos os dados obtidos por S. Narayanan e K. Jayaraman [1991] integrando as equações pelo método de Runge Kutta e obtendo as séries temporais, os planos de fase, os mapas de Poincaré e as transformadas Rápida de Fourier para cada frequência externa. A seguir, analisamos o sistema por meio da análise de wavelet obtendo seu espectro de wavelet, ou “escalograma”, e observamos que quando o sistema passa de periódico a caótico, as wavelets constituem um poderoso método para um diagnóstico mais preciso do regime do sistema.

*Palavras-chave: Caos, Wavelets, Sistemas Dinâmicos, FFT, Fricção Seca.*

PEREIRA, Danilo Carlos; **Dynamic Analysis for Wavelets in a System with Dry Friction and Damping**. Rio Claro, 2002. 70 p. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) – IGCE (Instituto de Geociências e Ciências Exatas), Campus de Rio Claro, UNESP (Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”).

## ABSTRACT

In this work we analyzed a non-linear oscillator under dry friction conditions and damping via wavelets. Initially we presented a review on wavelets, comparing them with Fourier Transforms, detaching the principal wavelets types and the expansion of a function using wavelets as a basis. Then, varying the frequency of external excitations, we reproduced the data obtained by S. Narayanan and K. Jayaraman [1991] integrating the equations with Runge Kutta method and further obtaining the time series, the Phase Plane, the Poincaré Map and the Fast Fourier Transform for each external frequency. Finally, we probed the system via the wavelets analysis obtaining the wavelet spectrum, or "scalogram", and we observed that when the system passes from a periodic to a chaotic regime, wavelets turns out to be a powerful method for a precise diagnosis of the system.

*Keywords: Chaos, Wavelets, Dynamic Systems, FFT, Dry Friction.*

# SUMÁRIO

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Lista de Figuras .....</b>                                 | <b>1</b>  |
| <b>Nomenclatura .....</b>                                     | <b>4</b>  |
| <b>CAPÍTULO 1.....</b>                                        | <b>5</b>  |
| Introdução .....                                              | 5         |
| <b>CAPÍTULO 2.....</b>                                        | <b>10</b> |
| WAVELETS .....                                                | 10        |
| 2.1 De Fourier a Wavelets (Um pouco de história) .....        | 10        |
| 2.2 De Fourier a Wavelets (Uma visão técnica) .....           | 14        |
| 2.2.1 Série de Fourier.....                                   | 14        |
| 2.2.2 Transformada de Fourier .....                           | 15        |
| 2.2.3 Teorema da Convolução: .....                            | 17        |
| 2.2.4 Transformada Discreta de Fourier .....                  | 18        |
| 2.2.5 Transformada de Wavelet.....                            | 22        |
| 2.2.6 Transformada Wavelet (Mais algumas considerações) ..... | 28        |
| <b>CAPÍTULO 3.....</b>                                        | <b>41</b> |
| 3.1 Introdução ao problema a ser tratado.....                 | 41        |
| 3.2 Descrição do modelo e aplicação.....                      | 41        |
| 3.3 Resultados da simulação. ....                             | 44        |
| 3.4 Conclusões .....                                          | 53        |
| 3.5 Sugestões para próximos trabalhos.....                    | 54        |
| <b>Referências Bibliográficas:.....</b>                       | <b>55</b> |
| <b>APÊNDICE .....</b>                                         | <b>60</b> |
| Apêndice A .....                                              | 60        |
| Apêndice B .....                                              | 62        |
| Apêndice C .....                                              | 63        |
| Apêndice D .....                                              | 66        |
| Apêndice E.....                                               | 67        |
| Apêndice F.....                                               | 69        |

## Lista de Figuras

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.1 – Sistema de Fricção Seca com Amortecimento.....                                 | Página 8.  |
| 1.2 – Sapata de freio aplicada em um cubo de roda.....                               | Página 9.  |
| 2.1 – Gráfico de $f(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{40}\right)$ .....             | Página 21. |
| 2.2 – Espectro de Fourier de $f(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{40}\right)$ ..... | Página 21. |
| 2.3 – Senóide.....                                                                   | Página 23. |
| 2.4 – Wavelet.....                                                                   | Página 23. |
| 2.5 – Transformada de Fourier.....                                                   | Página 23. |
| 2.6 – Transformada de Wavelet.....                                                   | Página 24. |
| 2.7 – Fator Escala.....                                                              | Página 25. |
| 2.8 – Fator Escala em Wavelets.....                                                  | Página 25. |
| 2.9 – Translação de Wavelets deslocada em $k$ .....                                  | Página 25. |
| 2.10 – Análise de Wavelet em uma seção do sinal.....                                 | Página 26. |
| 2.11 – Análise de Wavelet em uma nova seção do sinal.....                            | Página 26. |
| 2.12 – Análise de Wavelet com uma wavelet de nova escala.....                        | Página 27. |
| 2.13 – Correspondência entre escalas e frequências na Análise de Wavelet.....        | Página 28. |
| 2.14 – Wavelet de Morlet.....                                                        | Página 32. |
| 2.15 – Wavelet tipo Chapéu Mexicano.....                                             | Página 32. |
| 2.16 – Wavelet tipo Littlewood-Paley.....                                            | Página 33. |
| 2.17 – Wavelet tipo Haar.....                                                        | Página 34. |
| 2.18 – Wavelet tipo Haar $\psi_{0,0}(t)$ .....                                       | Página 34. |
| 2.19 – Wavelet tipo Haar $\psi_{1,0}(t)$ .....                                       | Página 35. |

|                                                                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.20 – Wavelet tipo Haar $\psi_{1,1}(t)$ .....                                                                   | Página 35. |
| 2.21 – Wavet tipo Haar $\psi_{2,0}(t)$ .....                                                                     | Página 35. |
| 2.22 – Wavelet tipo Haar $\psi_{2,1}(t)$ .....                                                                   | Página 36. |
| 2.23 – Sobreposição de gráficos da wavelet de Haar.....                                                          | Página 36. |
| 2.24 – Escalograma.....                                                                                          | Página 37. |
| 2.25 – Soma de duas funções de Haar.....                                                                         | Página 38. |
| 2.26 – Escalograma do sinal $f(t)$ .....                                                                         | Página 39. |
| 2.27 – Wavelets de Daubechies tipo 2 e tipo 4.....                                                               | Página 40. |
| 3.1 – Sistema de Fricção Seca com Amortecimento.....                                                             | Página 42. |
| 3.2 – Valores da frequência externa e estados do sistema.....                                                    | Página 43. |
| 3.3 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de<br>poincaré para $\omega = 13$ Hz.....  | Página 45. |
| 3.4 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 13$ Hz.....                                              | Página 45. |
| 3.5 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de<br>poincaré para $\omega = 5$ Hz.....   | Página 46. |
| 3.6 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 5$ Hz.....                                               | Página 46. |
| 3.7 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de<br>poincaré para $\omega = 7$ Hz.....   | Página 47. |
| 3.8 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 7$ Hz.....                                               | Página 47. |
| 3.9 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de<br>poincaré para $\omega = 26$ Hz.....  | Página 48. |
| 3.10 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 26$ Hz.....                                             | Página 48. |
| 3.11 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de<br>poincaré para $\omega = 15$ Hz..... | Página 49. |

|                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.12 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 15$ Hz.....                     | Página 49. |
| 3.13 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 4, 7, 5$ Hz.....                | Página 50. |
| 3.14 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 7$ e $2$ Hz.....                | Página 51. |
| 3.15 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 5$ e $2$ Hz.....                | Página 51. |
| 3.16 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 13$ e $15$ Hz.....              | Página 52. |
| 3.17 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 13$ e $26$ Hz.....              | Página 52. |
| 3.18 – posição versus tempo e escalograma para $\omega = 13, 5, 7, 23,7$ e<br>26 Hz..... | Página 53. |
| A.1 – Configuração de um isolador com fricção amortecida.....                            | Página 60. |

# Nomenclatura

|                            |                                                                                      |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $c_1$ .....                | Coeficiente linear de amortecimento                                                  |
| $c_2$ .....                | Coeficiente cúbico de amortecimento;                                                 |
| $c_{j,k}$ .....            | Coeficientes de expansão de wavelet;                                                 |
| $F$ .....                  | Força de fricção;                                                                    |
| $g$ .....                  | Aceleração da gravidade;                                                             |
| $Hz$ .....                 | Hertz;                                                                               |
| $k_1$ .....                | Constante elástica linear;                                                           |
| $k_2$ .....                | Constante elástica cúbica;                                                           |
| $m$ .....                  | Massa do bloco;                                                                      |
| $N$ .....                  | Força normal;                                                                        |
| $P_0$ .....                | Amplitude da excitação harmônica;                                                    |
| $v_0$ .....                | Velocidade da correia;                                                               |
| $\Phi(x)$ .....            | Funções wavelets obtidas através de equações de dilatação;                           |
| $\lambda_i$ .....          | Expoente de Lyapunov;                                                                |
| $\mu_k$ .....              | Coeficiente de fricção cinética;                                                     |
| $\mu_s$ .....              | Coeficiente de fricção estática;                                                     |
| $\mu$ .....                | Coeficiente de atrito;                                                               |
| $\omega$ .....             | Frequência de excitação harmônica;                                                   |
| $\psi(t)$ .....            | Função wavelet primária;                                                             |
| $\psi_{jk}(t)$ .....       | Funções obtidas por dilatações $j$ e translações $k$ de uma função wavelet primária; |
| $\hat{\psi}(\omega)$ ..... | Transformada de Fourier de $\psi(t)$ ;                                               |
| $^\dagger$ .....           | Transposto complexo conjugado;                                                       |

# CAPÍTULO 1

## Introdução

Ao analisarmos um sistema dinâmico, por meio de métodos numéricos, obtemos uma série temporal que descreve aproximadamente o comportamento do sistema estudado.

Depois de obtida a série temporal, normalmente obtida por meio de dados experimentais, um possível próximo passo é obtermos o espectro, ou sua transformada de Fourier, a fim de caracterizarmos se o comportamento do sistema é periódico, caótico, etc. Se o sistema for periódico, procura-se quais as frequências que descrevem o sistema dinâmico.

Mas a transformada de Fourier tem suas limitações. Por exemplo, quando um sistema muda sua frequência de  $f_1$  para  $f_2$  num determinado tempo  $T_1$  o espectro da série temporal mostra as duas frequências, mas não nos informa o momento no tempo no qual ocorreu a mudança dessa frequência. Como outro exemplo, se houver, uma descontinuidade na série temporal esse fato não aparecerá no seu espectro.

Procurou-se então desenvolver novos métodos de utilização da transformada de Fourier para tentar resolver esses problemas. Apareceram, então, as transformadas de

Fourier janeladas, na qual um sinal é dividido em segmentos menores e consecutivos e então aplicada a transformada de Fourier nessas pequenas “janelas”.

Um problema com este método é que para séries temporais que possuem uma duração muito pequena, menor que o tempo da janela considerado, a resolução torna-se muito pobre. Entretanto, ao diminuirmos o tamanho da janela, para aumentarmos a resolução temporal, o esforço computacional aumentará consideravelmente, tornando este processo inaceitável.

A partir destes fatos e a fim de tratar as limitações da transformada de Fourier surgiram as wavelets. A primeira contribuição aparece num apêndice da tese de A. Haar em 1909 [GRAPS, 1995]. Um desenvolvimento mais detalhado pode ser encontrado em Graps [1995].

Wavelets são funções que possuem certas propriedades matemáticas e que formam bases especiais nos espaços funcionais. Todas as funções da base  $\psi_{jk}(t)$  são derivadas através de translações e dilatações de uma função única  $\psi(t)$  chamada de “Wavelet Mãe” ou “Wavelet Primária”.

O conjunto das funções base das wavelets não necessita ser ortogonal, mas ortogonalidade, em geral, simplifica o cálculo computacional nas aplicações.

A partir daí vários tipos de wavelets surgiram: a wavelet tipo Chapéu-mexicano, Coiflets, Daubechies, Morlet, etc... e suas aplicações têm aumentado consideravelmente em várias áreas como tratamento de sinais, compressão de imagens, compressão de arquivos, estudo sobre regimes de chuva, cheias de rio, sistemas dinâmicos, etc.

Apesar do grande numero de aplicações, poucas são as referências onde observamos, de forma didática, como podemos aplicar as wavelets em sistemas dinâmicos.

O objetivo desse trabalho é analisarmos, através das wavelets, um sistema mecânico composto de um oscilador não-linear auto-excitado, com fricção seca e amortecimento que possui estados periódicos e caóticos, já devidamente estudado por Narayanan *et al* [1991] por técnicas como a Transformada de Fourier, Plano de Fase, Mapa de Poincaré e Expoentes de Lyapunov [Ver apêndice].

Chama-se fricção seca, ao fenômeno onde a superfície de dois sólidos está em contato e ocorre um movimento relativo entre eles sem lubrificação, ou seja, *a seco*.

Quando duas superfícies entram em contato, forças são aplicadas por cada superfície, uma na outra. A parte que é tangente a superfície de contato é chamada de força de fricção. Se as duas superfícies em contato não se movem uma em relação a outra, então a fricção é estática. Caso contrário a fricção é cinética (fricção dinâmica ou deslizante).

A força de fricção  $F$  resultante entre duas superfícies sem o deslizamento é dada pela equação:

$$F_{estatica} \leq \mu_s N \quad (1.1)$$

onde  $N$  é a força normal para a superfície, e  $\mu_s$  é o coeficiente de fricção estática.

Já a força de fricção  $F$  que resulta quando duas superfícies deslizam uma sobre a outra é proporcional à força normal aplicada na superfície e tem direção oposta em relação ao movimento das superfícies. O fator de proporcionalidade é o coeficiente de fricção cinética  $\mu_k$  e a equação para a força  $F$  é:

$$F_{cinetica} = \mu_k N \quad (1.2)$$

Em geral o coeficiente de fricção cinética é menor que o coeficiente de fricção estática, o que explica a dificuldade inicial de fazer um objeto deslizar.

Movimento pendente se refere ao estado logo antes das superfícies começarem a deslizar. Neste caso a força de fricção estática alcança seu limite máximo e é dado pela equação:

$$F = \mu_s N \quad (1.3)$$

A direção da força de fricção é sempre oposta em relação ao movimento pendente das superfícies.

O sistema que vamos estudar consiste de uma correia ligada a duas roldanas que giram a uma velocidade constante  $v_0$  seguindo um sentido  $S$ , como mostrado na Figura 1.1. Na superfície dessa correia existe um bloco de massa  $m$  preso a uma mola não linear de constantes  $k_1$  e  $k_2$ . Existe, também, um dispositivo de amortecimento não linear de coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ . Entre essas duas superfícies (correia e bloco) ocorre fricção.

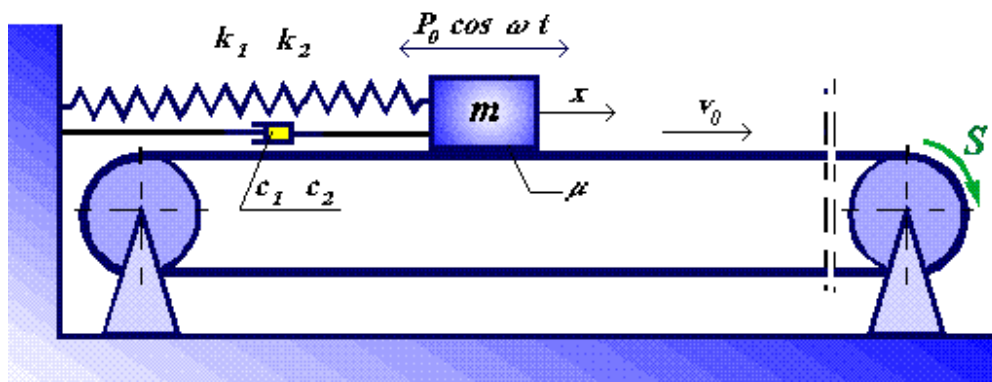


Figura 1.1 – Sistema de Fricção Seca com Amortecimento.

Existem muitos exemplos de fricção seca em nosso dia-a-dia, (ranger de portas, instrumentos musicais como no som produzido pelo violino, o som estridente do giz riscando uma lousa, uma sapata de freio, etc.). Sistemas com fricção seca são muito usados no dia-a-dia, seja na física, na engenharia [Ver apêndice A] e em muitas outras áreas, daí a importância de estudarmos o sistema considerado.

Como uma aplicação da fricção seca pode-se citar o exemplo de uma sapata de freio mostrado na Figura 1.2 abaixo:

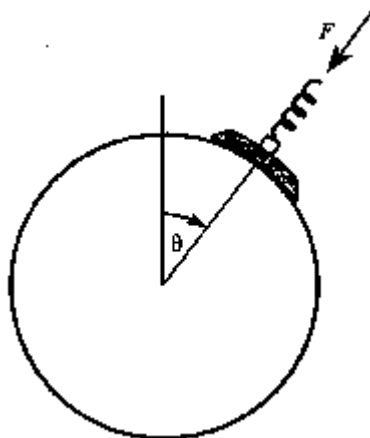


Figura 1.2 – Sapata de freio aplicada em um cubo de roda.

Neste caso a força aplicada pela sapata de freio representa uma fonte de energia e o cubo de roda giratório um oscilador. A fricção seca entre o cubo de roda e a sapata de freio cria um mecanismo de troca para o fluxo de energia. Por causa disto o cubo da roda experimentará movimento aos arrancos. Este movimento é denominado de *stick-slip* ou *prende-eskorrega* [AZENHA, 1998] e existe porque a força de fricção seca não é constante, mas varia com a velocidade de deslizar da sapata de freio relativo ao cubo de roda.

Da mesma maneira nós podemos explicar as oscilações de uma corda de violino e neste caso, para prevenir (ou minimiza) o movimento de *stick-slip*, as cordas são tratadas com um lubrificante apropriado.

# **CAPÍTULO 2**

## **WAVELETS**

### **2.1 De Fourier a Wavelets (Um pouco de história)**

Em 1807, o matemático francês Joseph Fourier, descobriu que toda função periódica podia ser expressa como uma somatória de funções trigonométricas básicas [POLIKAR, 1999]. Essa idéia sofreu muitas críticas de matemáticos como Lagrange, Legendre e Laplace. Essas críticas foram devidas principalmente à falta de rigor e generalidade matemática e, devido a isso, suas descobertas não foram publicadas. Passaram-se mais de 15 anos antes de Fourier conseguir publicá-las. E por mais de 150 anos, desde então, suas idéias foram expandidas e generalizadas para funções não periódicas e seqüências temporais discretas.

A idéia original de Fourier era aproximar uma função complexa como uma somatória de funções mais simples, também conhecidas como funções base, que podem aproximar ou, sob certas condições, representar completamente as funções originais.

Existem muitas vantagens em usar tais aproximações e representações sendo muito valiosa para a análise de funções complicadas. Além disso, se um número

pequeno destas funções base faz boa aproximação, obtemos uma compressão significativa para a representação da função original, pois necessitamos somente dos coeficientes dessas funções base.

Fourier usou senóides de frequências variadas como funções base na representação do conteúdo original desta função (ou sinal). A representação de Fourier tem sido usada em uma grande variedade de campos. Entretanto, essa representação tem uma desvantagem importante: não pode ser usada para aproximar sinais não-estacionários.

A representação de Fourier somente nos fornece o conteúdo espectral sem a indicação sobre a localização no tempo desses componentes espectrais. Então, para fazer uma análise de um sinal não-estacionário cujo conteúdo espectral muda no tempo, será necessária uma representação em Tempo-Frequência. Assim começaram as modificações na transformada de Fourier para permitir a análise de sinais não-estacionários.

A primeira modificação na transformada de Fourier para a análise de sinais não-estacionários foi a transformada de Fourier em intervalos pequenos de tempo (*Short Time Fourier Transform - STFT*) [POLIKAR, 1999] cuja idéia era segmentar o sinal em intervalos de tempo (janelas) e então executar a análise em cada segmento.

Depois da transformada ser computada em todas as janelas do segmento do sinal a STFT fornece uma representação de tempo – frequência. Dennis Gabor [GABOR 1946, APUD POLIKAR, 1999] foi o primeiro a modificar a transformada de Fourier tradicional em STFT em 1946.

No ano seguinte (1947), Jean Ville inventou uma transformada similar para representar a energia de um sinal no plano tempo – frequência (a chamada *Wigner – Ville Transform*) [VILLE 1948, APUD POLIKAR, 1999].

Muitas transformadas foram desenvolvidas entre os finais dos anos da década de 1940 e início dos anos da década de 1970, cada qual diferindo apenas na seleção dessa função janela que particiona os sinais. Entretanto, essas transformadas

possuíam uma desvantagem importante, todas elas usavam a mesma janela para análise do sinal inteiro.

Ao final dos anos 70 J. Morlet [POLIKAR, 1999], um engenheiro geofísico, tratava um problema de análise de sinais que possuía componentes de frequências muito altas em intervalos de tempo muito curtos e também frequências muito baixas em intervalos de tempo muito longos. A transformada tipo STFT era capaz de analisar qualquer componente de alta frequência utilizando janelas largas (Wideband Frequency Analysis) ou analisar qualquer componente de baixa frequência usando janelas estreitas (Narrowband Frequency Analysis), mas não ambas ao mesmo tempo. E foi esse motivo que fez com que Morlet, então, tivesse a idéia de usar diferentes funções janelas para analisar diferentes bandas de frequência. Além disso, todas as janelas eram geradas por dilatação ou compressão de um protótipo de uma função gaussiana.

Devido à natureza destas funções janelas (pequenas e oscilantes), Morlet nomeou sua função base de *Wavelets de forma constante*.

Tal como Fourier, Morlet sofreu muitas críticas de seus colegas. Em 1980, tentando encontrar uma base matemática rigorosa para sua aproximação, Morlet conheceu A. Grossman [GROSSMAN, 1984], um físico teórico de mecânica quântica, que o ajudou a formalizar sua transformada e encontrar sua transformação inversa. Contudo, poucos sabiam que a transformada de wavelet que eles desenvolveram eram meramente um redescobrimto, e talvez uma interpretação ligeiramente diferente do trabalho de Alberto Calderón [POLIKAR, 1999] sobre análise harmônica em 1946.

Foi Yves Meyer [POLIKAR, 1999], um matemático francês que, em 1984, ressaltou a semelhança entre o trabalho de Morlet e Calderón. Fascinado com este esquema, Meyer começou a trabalhar no desenvolvimento das wavelets com melhores propriedades. Em 1985 construiu funções base de wavelets ortogonais que tinham um domínio de tempo e frequência muito boas [GOMES, 2001]. Ironicamente, J. O. Strömberg [STRÖMBERG, 1983], que trabalhava com análise harmônica, tinha descoberto as mesmas wavelets cinco anos antes.

Também deve ser notado que nem Meyer nem Strömberg foram os dois primeiros a descobrir as wavelets ortonormais (funções base). Esta honra ficaria no ano de 1909, com um matemático alemão chamado Alfred Haar [HAAR 1910, APUD POLIKAR 1999], que já tinha construído funções base de wavelets ortonormais, mesmo que suas wavelets fossem de pequeno uso prático.

Em 1985 Stephane Mallat [GRAPS, 1995] descobriu algumas relações entre filtros, algoritmos piramidais e bases de wavelets ortonormais. Alguns anos depois, Ingrid Daubechies, uma estudante de graduação da Universidade de Bruxelas, baseando-se nos resultados de Mallat, desenvolveu uma maneira de se obter funções wavelets através de equações de dilatação:

$$\Phi(x) = \sum_k c_k \Phi(2x - k) \quad (2.1)$$

São creditados a Daubechies, juntamente com Stephane Mallat, o desenvolvimento e a transição da análise contínua para a análise discreta. Em particular, em 1986 Mallat desenvolveu a idéia de análise multiresolucional (MRA) para a transformada de wavelet discreta (DWT) juntamente com Meyer [MALLAT, 1989].

A idéia era decompor um sinal discreto em suas faixas de frequências por uma série de filtros passa-baixa e passa-alta para computar sua DWT por aproximações, em várias escalas de wavelets. Esta idéia, familiar na engenharia elétrica, já fora descoberta há cerca de dez anos com o nome de filtros de quadratura espelhadas (Quadrature Mirror Filters – QMF), desenvolvido por volta de 1976 por A. Croisier, D. Esteban e C. Galand [CROISIER, 1976].

De 1990 até os dias atuais, a área da matemática que estuda as wavelets, têm se desenvolvido com o aparecimento de novas funções-base de wavelets, novas aplicação e novos métodos, constituindo assim um novo campo de pesquisas.

## 2.2 De Fourier a Wavelets (Uma visão técnica)

### 2.2.1 Série de Fourier

Numa série de Fourier [CRANDALL, 1991], uma função periódica  $f(t)$  é escrita como uma soma de termos de senos e de cossenos no intervalo  $[-L, L]$  por.

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (2.2)$$

ou equivalentemente:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{-in\pi t}{L}} \quad (2.3)$$

Os coeficientes são deduzidos do fato de que as funções seno e cosseno formam uma base ortogonal, assim:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier [CRANDALL, 1991] é crucial em qualquer discussão de análise de séries temporais. Vamos, a partir da série de Fourier, estender nosso conceito para a transformada.

Substituindo a equação (2.4) e a equação (2.5) na equação (2.2) obtemos:

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \int_{-L}^L f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi \xi}{L}\right) d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \int_{-L}^L f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{L}\right) d\xi \quad (2.6)$$

que podemos reescrever como:

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(\xi) \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-\xi)\right) d\xi \quad (2.7)$$

Vamos agora fazer com que  $L$  tenda para o infinito, i.e. tornar o intervalo  $(-L, L)$  em  $(-\infty, +\infty)$ .

Vamos escrever também:

$$\omega = \frac{n\pi}{L} \quad (2.8)$$

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L} \quad (2.9)$$

O significado de  $\Delta\omega$  é a quantidade que  $\omega$  muda na soma de  $n$  para  $n + 1$ .

O primeiro termo na série é o componente DC (*Direct Current*) de  $f(t)$ . No limite quando  $L \rightarrow \infty$ , esta integral deve ser zero. Assim nós podemos escrever a expansão agora como:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[\omega(t - \xi)] d\xi \quad (2.10)$$

No limite, usando a definição de integral obtemos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos[\omega(t - \xi)] d\xi \quad (2.11)$$

Como a função seno é ímpar, nós podemos escrever:

$$0 = -i \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin[\omega(t - \xi)] d\xi \right) \quad (2.12)$$

Somando (2.12) na expressão para  $f(t)$  (2.11) teremos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \quad (2.13)$$

Assim, definimos  $F(\omega)$  como a transformada de Fourier de  $f(t)$ , isto é:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.14)$$

Note que  $F$  é função de  $\omega$ . Se interpretarmos  $t$  como o tempo, então  $\omega$  é a frequência angular.

Já a transformada inversa de Fourier [HARISON, 1999] é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.15)$$

Há outras convenções comuns para a transformada de Fourier [HARISON, 1999], por exemplo a transformada denominada de transformada simétrica de Fourier dada por:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.16)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt$$

Ainda podemos inverter a transformada e sua inversa:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.17)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} dt$$

Nós estaremos usando as fórmulas (2.14) e (2.15).

### 2.2.3 Teorema da Convolução:

Aqui nós apresentamos um dos teoremas mais importante no contexto de análise de série temporal.

Vamos assumir uma função  $f(t)$  cuja transformada de Fourier é  $F(\omega)$ , e outra função  $g(t)$  cuja transformada é  $G(\omega)$ . Então a convolução de  $f(t)$  com  $g(t)$  é definida por:

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) du \quad (2.18)$$

Escrevendo  $g(t - u)$  em termos da transformada inversa de Fourier como

$$g(t - u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega(t-u)} d\omega, \quad (2.19)$$

obtemos para a convolução a expressão

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega(t-u)} d\omega du \quad (2.20)$$

e, rearranjando a integral (2.20) temos

$$f(t) \otimes g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du d\omega \quad (2.21)$$

Mas a integral obtida é a transformada de Fourier de  $f(u)$ , assim:

$$f(t) \otimes g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.22)$$

Então:

***“A transformada inversa de Fourier de um produto de transformadas de Fourier é a convolução das funções originais”.***

## 2.2.4 Transformada Discreta de Fourier

Anteriormente somente consideramos funções contínuas. Ao integrarmos numericamente as equações do nosso sistema, obtemos uma série temporal discreta com  $n$  pontos. Para o caso discreto, a transformada de Fourier dada pela Equação (2.14), tem sua integral substituída por uma somatória [HARISON, 1999] e é dada por:

$$F(\omega_j) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) e^{-i\omega_j t_k} \right) \Delta \quad (2.23)$$

onde:

$$t_k = k\Delta \quad (2.24)$$

e  $\Delta$  é o intervalo unitário de tempo de amostragem do sistema.

Substituindo  $\omega_j = j\left(\frac{2\pi}{T}\right)$  e  $T = n\Delta$  nós podemos escrever a transformada de Fourier discreta como:

$$F(\omega_j) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-ij\left(\frac{2\pi}{T}\right)k\Delta} \right) \Delta \quad (2.25)$$

ou:

$$F(\omega_j) = \left( \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2\pi jk}{n}} \right) \Delta \quad (2.26)$$

Para a transformada de Fourier inversa (2.15), [HARISON,1999] ela é discretizada por:

$$f(t_k) = \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} F_j e^{i\omega_j t_k} \right) \delta\omega \quad (2.27)$$

O valor de  $\delta\omega$  é quanto  $\omega_j$  muda quando  $j$  passa para  $j+1$ . Da equação para  $\omega$  temos:

$$\delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{n\Delta} \quad (2.28)$$

Assim a transformada discreta de Fourier inversa é:

$$f(t_k) = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F_j e^{\frac{i2\pi jk}{n}} \right) \frac{1}{\Delta} \quad (2.29)$$

Resumindo, a transformada e sua inversa, fazendo a escolha habitual do intervalo amostral  $\Delta=1$  são dadas por:

$$F_j = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{\frac{-i2\pi jk}{n}} \quad (2.30)$$

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F_j e^{\frac{i2\pi jk}{n}}$$

A transformada de Fourier discreta (DFT) no Mathematica<sup>®</sup> usa uma convenção diferente denominada de transformada de Fourier discreta simétrica que nós passaremos a usar nesse trabalho. Tal transformada é dada por:

$$F(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(k) e^{\frac{i2\pi(j-1)(k-1)}{n}} \quad (2.31)$$

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n F(j) e^{\frac{-i2\pi(j-1)(k-1)}{n}}$$

Note que  $k$  passa de 1 para  $n$ , e não de 0 para  $n-1$ , por ser assim que o Software Mathematica tem acesso aos elementos de uma lista.

A seguir temos um exemplo, mesmo que pobre, mas que servirá apenas para mostrar a utilização da rotina da DFT no software Mathematica.

Tomemos a função  $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{40}\right)$ . Fazemos uma amostragem de 200 pontos e obtemos uma série temporal cujo gráfico é mostrado na Figura 2.1 a seguir:

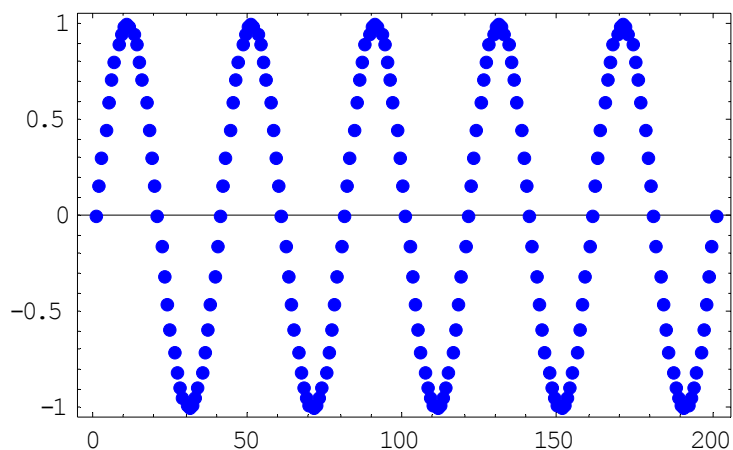


Figura 2.1 - Gráfico de  $f(t)$

O período de  $f(t)$  é 40, assim sua frequência angular é  $2\pi/40$ .

Então, usando Fourier na série temporal acima (Figura 2.1) nós teremos a transformada, cujos valores absolutos são mostrados no gráfico a seguir (Figura 2.2):

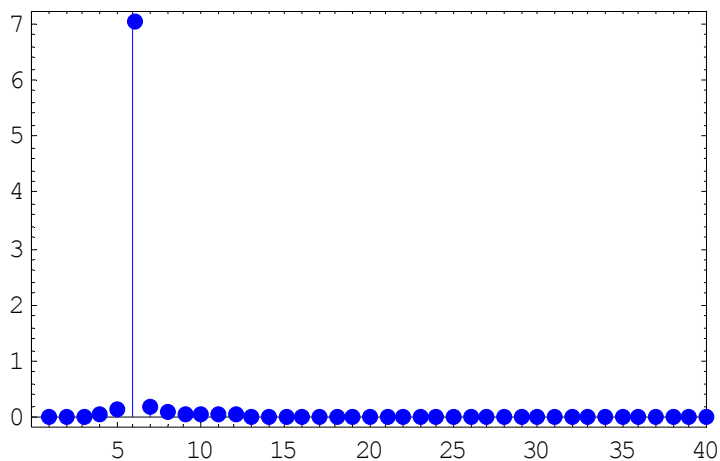


Figura 2.2 - Espectro de Fourier de  $f(t)$ .

Quase todos os valores são nulos, exceto o sexto elemento que possui um valor de 7.07.

Vimos antes que a frequência na transformada de Fourier era dada por  $\omega_j = j \left( \frac{2\pi}{n\Delta} \right)$ . O máximo na transformada acontece ao sexto elemento que corresponde a  $j = 5$ . Assim  $\omega_j = \frac{2\pi}{40}$ , e esta é justamente a frequência da onda do seno original.

Uma observação deve ser feita sobre o acesso do software Mathematica a elementos de uma lista. O Software acessa os elementos com um indexador iniciando em 1 e não em 0. Assim, o primeiro elemento da lista é o DC (Direct Current), logo o sexto elemento corresponde a quinta frequência ( $j=5$ ).

O Software Mathematica utiliza a transformada rápida de Fourier (*FFT - Fast Fourier Transform*) para calcular a transformada de Fourier discreta. A FFT foi desenvolvida em 1965 por Tukey e Cooley [COOLEY, 1965] a fim de minimizar os esforços computacionais, uma vez que os computadores já estavam em pleno uso nessa época.

Desde então, a transformada de Fourier têm sido extensamente usada tornando-se uma ferramenta matemática importante, não só em engenharia como também em muitas disciplinas que requerem análise funcional.

### 2.2.5 Transformada de Wavelet

Uma função representando uma onda (wave), é normalmente definida como uma função oscilante no tempo ou espaço, tal qual uma senóide. A wavelet ou “ondaleta” nada mais é do que uma “pequena onda”. Enquanto a análise de Fourier consiste em decompor um sinal em senos e cossenos de várias frequências, a análise de wavelet é a decomposição de um sinal através de dilatações (escalas) e translações de uma dada wavelet original (Wavelet Mãe).

Comparando uma onda de wavelet com a de uma senóide (que são bases para análise de Fourier) pode-se verificar, até visualmente, que senóides (Figura 2.3) não tem uma duração limitada, se estendem de  $-\infty$  a  $+\infty$  e tem um comportamento previsível. Já a wavelet (Figura 2.4), embora também possa ter um comportamento

previsível, tem uma forma de onda de duração limitada e possui um valor médio igual a zero.

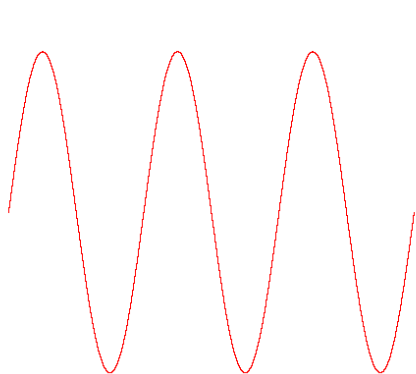


Figura 2.3 Senóide.

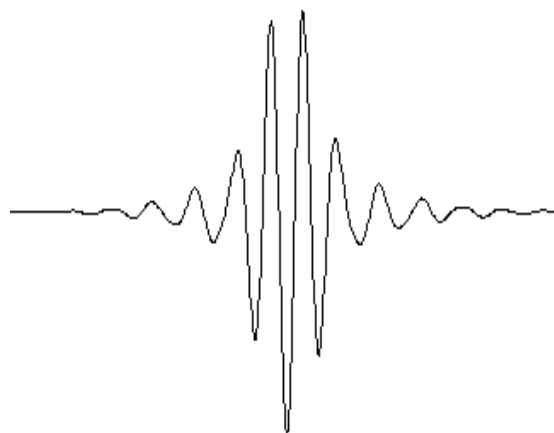


Figura 2.4 - Wavelet.

Assim, as wavelets são usadas como funções base para decompormos um sinal ou função similarmente como a transformada de Fourier utiliza as funções seno e cosseno.

O resultado da transformada de Fourier são os coeficientes de Fourier  $F(\omega)$ , que quando multiplicado por senóides e cossenóides de frequência apropriada  $\omega$ , reconstroem a função original (Figura 6) [BURRUS, 1998].

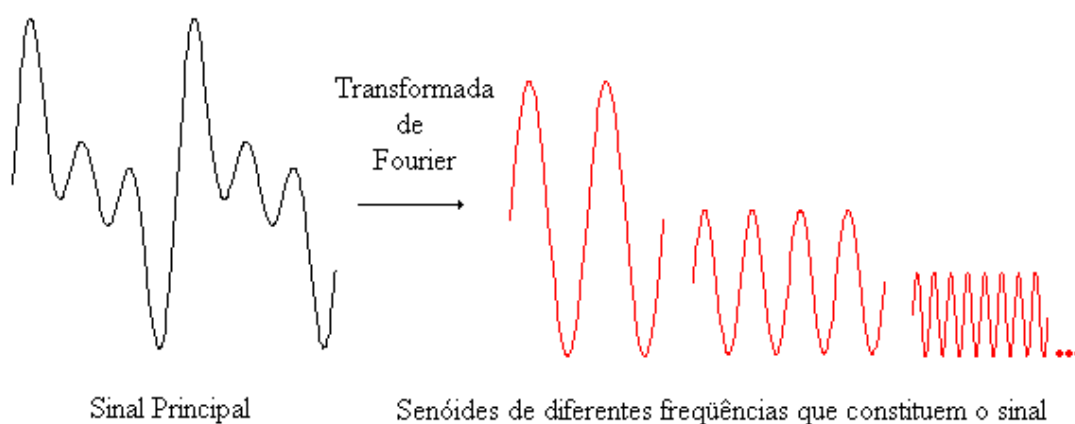


Figura 2.5 - Transformada de Fourier

O Resultado da transformada de wavelet são os coeficientes wavelets que quando multiplicados pela wavelet-mãe (ou wavelet primária) e suas “filhas” (que são dilatações e translações da wavelet primária) reconstroem o sinal ou função.

Os coeficientes wavelets são calculados por:

$$C(escala, posição) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(escala, posição)dt \quad (2.32)$$

Assim, cada um desses coeficientes multiplicados por apropriadas wavelets dependentes de *escala e posição* (obtidas a partir de uma wavelet primária  $\psi$ ) reconstroem o sinal original. (Figura 2.6) [BURRUS, 1998].

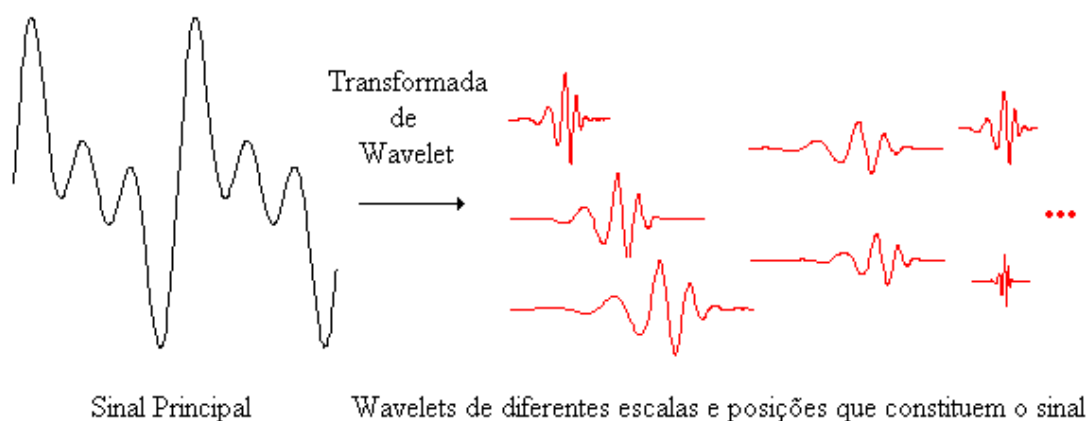


Figura 2.6 - Transformada de wavelet

### Mas, o que significa Wavelets em diferentes escalas e posições?

Wavelets em diferentes escalas significa comprimir ou dilatar uma mesma wavelet.

Para complementarmos mais essa noção de dilatar, nós introduzimos o fator escala, frequentemente denotada pela letra “a”. Se usarmos senóides, por exemplo, a noção de escala fica mais fácil de visualizar (Figura 2.7).

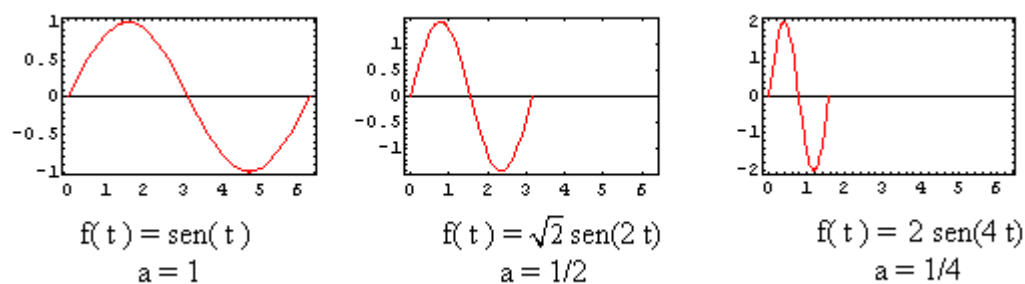


Figura 2.7 - Fator escala

O sistema de escalas aplica-se de forma análoga para as wavelets, fatores de escala menores fazem a “compressão” da wavelet e fatores de escala maiores fazem a dilatação da wavelet (Figura 2.8).

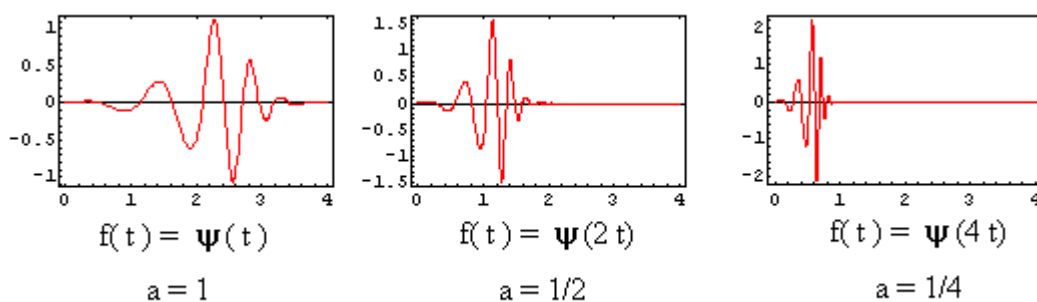


Figura 2.8 - Fator escala em Wavelets

E deslocamento de wavelet significa a translação da função wavelet. Matematicamente, deslocar uma função  $f(t)$  em  $k$  é representá-la por  $f(t - k)$  (Figura 2.9).

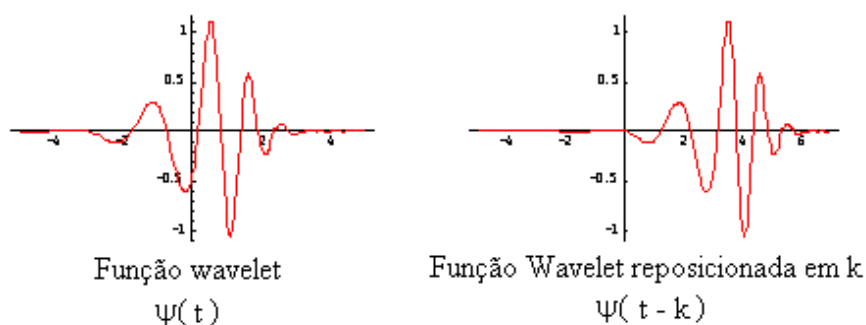


Figura 2.9 – translação de wavelets deslocada.

Podemos, também, representar a transformada wavelet como uma convolução do sinal com a wavelet original e com versões da wavelet original, com escalas e deslocamentos diferentes.

Para obtermos a transformada wavelet de um sinal [MISITI,1996] devemos proceder como se segue:

Passo 1: tomar uma Wavelet Mãe e compará-la com uma seção no começo do sinal original;

Passo 2: calcular o coeficiente  $C$  que representa quão correlacionada está a wavelet com esta seção do sinal. Quanto maior for o número  $C$  maior é a semelhança entre a wavelet e o sinal na seção tomada;

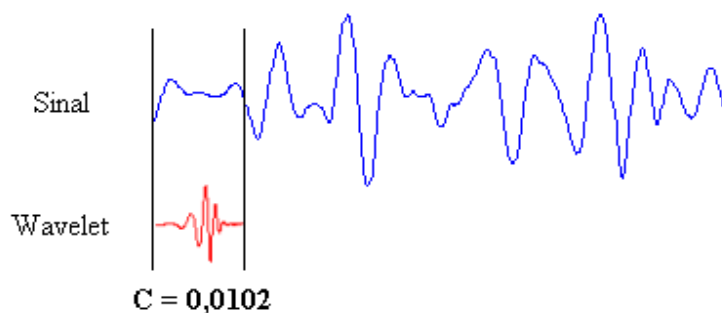


Figura 2.10 – Análise wavelet em uma seção do sinal

Passo 3: tomar a próxima seção do sinal e novamente repetir os passos 1 e 2 até cobrir, de seção em seção, todo o sinal;

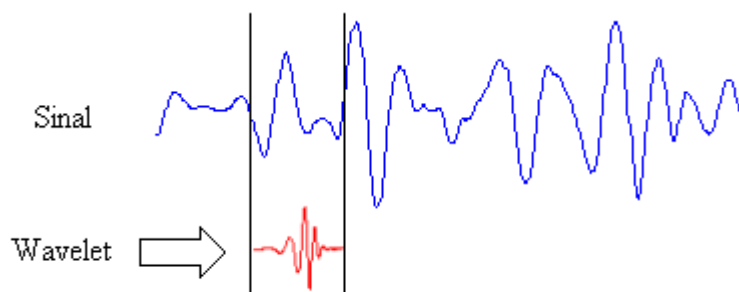


Figura 2.11 – Análise wavelet em uma nova seção do sinal.

Passo 4: ajustar uma nova escala para a wavelet (dilatar ou comprimir) e repetir os passos de 1 até 3;

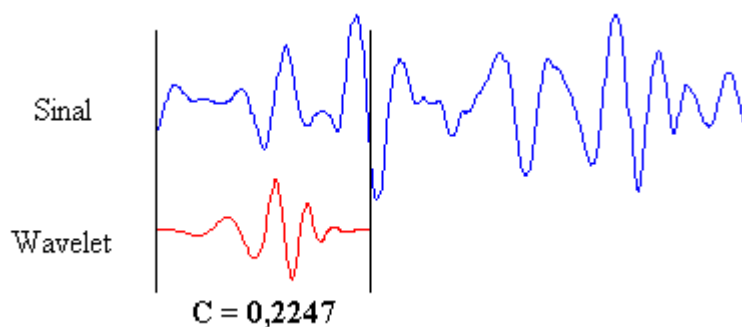


Figura 2.12 – Análise wavelet com uma wavelet de nova escala.

Passo 5: repetir os passos de 1 a 4 para todas as escalas da wavelet (tantas vezes quanto for necessário).

Ao terminar todos os passos descritos acima teremos produzido diferentes coeficientes em diferentes escalas e seções do sinal.

Escalas maiores correspondem a wavelets mais dilatadas e escalas menores a wavelets mais comprimidas.

Note que quanto mais dilatada for a wavelet, maior será a seção do sinal com o qual ela estará sendo comparada e, deste modo, as características mais visíveis estão sendo medidas pelos coeficientes wavelet ( $C$ ).

Assim, existe uma correspondência entre as escalas wavelet e a frequência revelada pela análise wavelet (Figura 2.13).

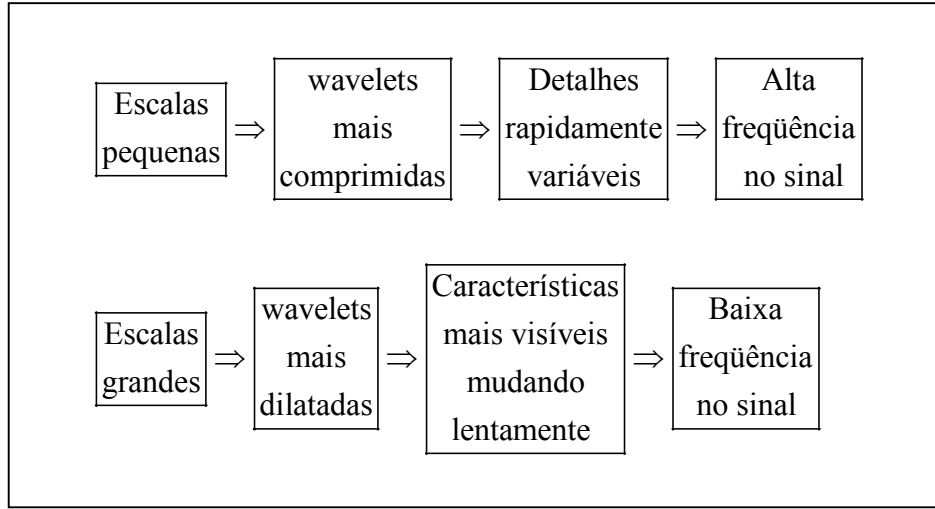


Figura 2.13 – Correspondência entre escalas e frequências na análise wavelet.

### 2.2.6 Transformada Wavelet (Mais algumas considerações)

Podemos expressar um sinal ou função  $f(t)$  por:

$$f(t) = \sum_m c_m \psi_m(t) \quad (2.33)$$

onde  $m$  é um indexador inteiro para uma somatória finita ou infinita,  $c_m$  são os coeficientes reais estimados na expansão e  $\psi_m(t)$  é o conjunto de funções reais de  $t$  chamadas de conjunto de expansão. Se a expansão (2.33) é única, o conjunto é chamado de base para a classe de funções que podem ser também expressadas. Se a base for ortonormal [BURRUS, 1998], isto é:

$$\begin{aligned} \langle \psi_m(t), \psi_n(t) \rangle &= \int \psi_m(t) \psi_n(t) dt = 0, & \text{para } m \neq n \\ \text{ou} & \\ \langle \psi_m(t), \psi_n(t) \rangle &= \int \psi_m(t) \psi_n(t) dt = 1, & \text{para } m = n \end{aligned} \quad (2.34)$$

então os coeficientes podem ser calculados pelo produto interno:

$$c_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t) \psi_k(t) dt \quad (2.35)$$

Para a expansão de uma função utilizando como funções base as wavelets, necessitamos de dois parâmetros tal que (2.33) nos dá:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.36)$$

onde os índices  $j$  e  $k$  são inteiros e  $\psi_{j,k}(t)$  são funções base que normalmente formam uma base ortogonal.

O conjunto de coeficientes de expansão  $c_{j,k}$  são chamados de *transformada discreta wavelet (DWT)* de  $f(t)$  e (2.36) é a transformada inversa.

A expansão de uma função ou sinal por funções base wavelets não é único. Existem várias funções wavelets diferentes que podem ser usadas como funções base, sendo que todas as wavelets primárias devem obedecer certas condições matemáticas (2.37) [DAUBECHIES, 1995], como pertencerem ao espaço funcional  $L^2(R)$  (funções de quadrado integrável), e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (2.37)$$

onde  $\hat{\psi}(\omega)$  é a Transformada de Fourier de  $\psi(t)$ .

Ainda a wavelet primária deve ter valor médio nulo e anular-se em  $t = \pm\infty$ , isto é:

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad (2.38)$$

Mais algumas características básicas de wavelets podem ser citadas.

1. a expansão wavelet dá uma localização tempo-freqüência do sinal;

2. o tamanho dos coeficientes de expansão de wavelet  $c_{j,k}$  em (2.36) cai rapidamente com  $j$  e  $k$  para uma ampla classe de sinais, esta propriedade é chamada de uma base incondicional e é por isso que wavelets são tão efetivas em tratamento e compressão de sinais e de imagem;

3. a expansão de wavelets permite uma descrição local mais precisa e uma separação de características mais notáveis;

4. wavelets são ajustáveis e adaptáveis, e porque existem vários conjuntos de funções base wavelets, e outros podem ser criados, elas podem ser projetadas para aplicações individuais, e são ideais para sistemas adaptáveis que se ajustam para cobrir todo o sinal.

Assim, depois de citadas algumas características e propriedades de wavelets podemos, de uma forma simplificada, entender wavelets como um conjunto de funções que formam uma base num espaço funcional, no qual uma série temporal  $f(t)$  pode ser expandida por séries do tipo:

$$f(t) = \sum_{a,b} c_{a,b} \Psi_{a,b}(t) \quad (2.39)$$

onde as funções básicas  $\psi_{a,b}(t)$  são as denominadas de wavelets-filhas definidas por:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.40)$$

onde  $\psi(t)$  é denominada de wavelet primária e as funções  $\psi_{a,b}(t)$  são obtidas da wavelet primária por dilatações (ou escalonamento)  $a$  e translações  $b$ .

As expansões acima podem ser extendidas para o caso discreto [MISITI, 1996] constituindo o que denominamos Transformada Wavelet Discreta (DWT).

Assim:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.41)$$

onde podemos usar como base:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (2.42)$$

que são obtidas da wavelet primária  $\psi_{0,0}(t)$  por dilatações e deslocamentos.

No nosso caso, usamos como wavelet primária a função de Morlet [MISITI,1996] definida por:

$$\Psi(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cos(5t) \quad (2.43)$$

E os coeficientes  $c_{a,b}$  podem ser obtidos por:

$$c_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.44)$$

O gráfico da wavelet de Morlet pode ser observado na figura a seguir (Figura 2.14):

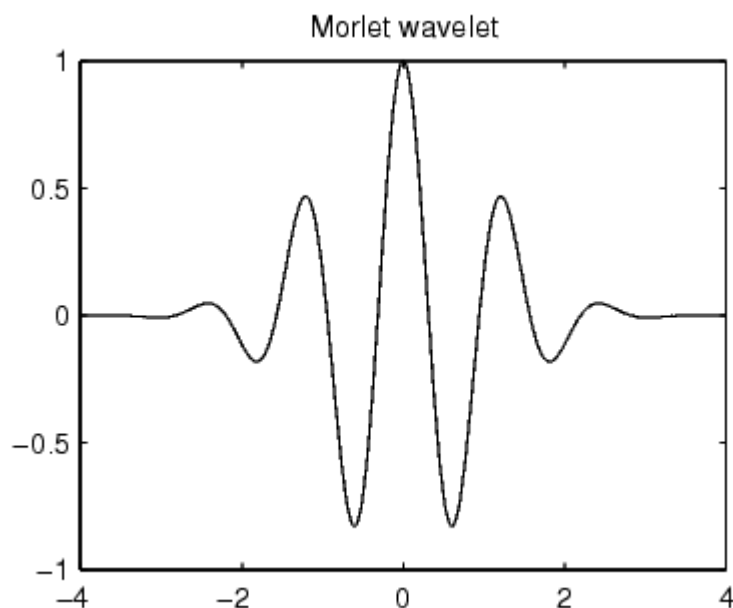


Figura 2.14 – Wavelet de Morlet.

Existem, ainda, vários tipos de wavelets, dependendo da wavelet-mãe  $\psi(t)$  assumida. A seguir, vamos dar mais alguns exemplos de função wavelet [QUINN, 1999].

1. wavelet tipo “Mexican Hat” ou “Chapéu Mexicano” devido ao formato do seu gráfico parecer um chapéu, esse tipo de wavelet é definido pela seguinte função:

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2.45)$$

e seu gráfico é mostrado na Figura 2.15 abaixo:

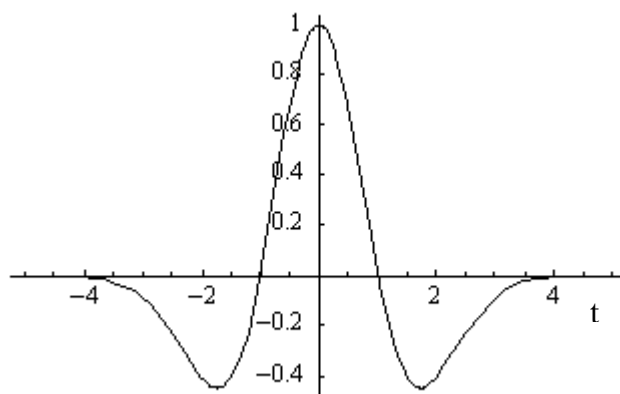


Figura 2.15 - Wavelet tipo Chapéu Mexicano.

2. wavelet tipo Littlewood – Paley definido por:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}(\sin 2\pi t - \sin \pi t) \quad (2.46)$$

e seu gráfico é mostrado na Figura 2.16 a seguir:

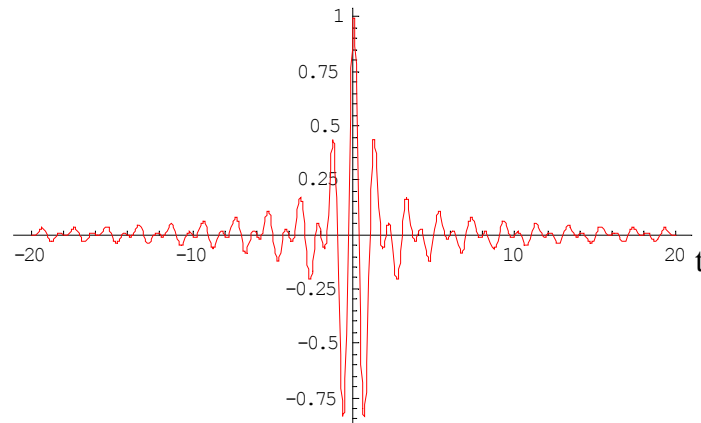


Figura 2.16 - Wavelet tipo Littlewood-Paley

3. wavelet de Haar, definido por:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (2.47)$$

e seu gráfico é mostrado na Figura 2.17 a seguir:

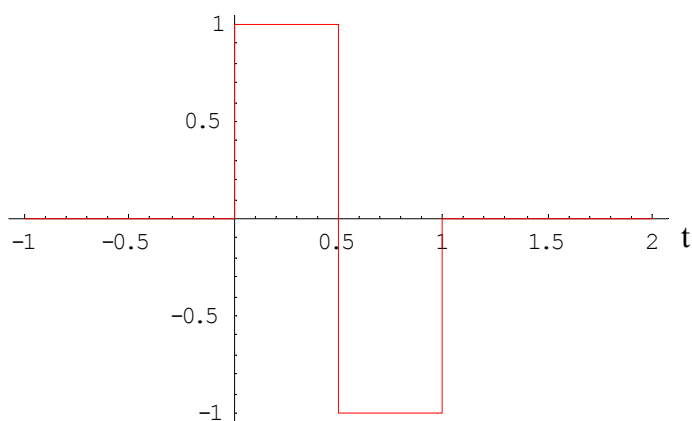


Figura 2.17 - Wavelet tipo Haar

A wavelet tipo Haar é o exemplo mais simples de uma wavelet. Vamos utilizar essa wavelet para desenvolvermos alguns conceitos vistos anteriormente.

Tomando então a wavelet de Haar, definida por (2.47), como a wavelet primária, podemos construir uma família de wavelets de Haar alterando escala e posição da wavelet principal.

Por Exemplo,

1.  $\psi_{0,0}(t) = 2^{\frac{0}{2}} \psi(2^0 t - 0) = \psi(t)$ , e seu gráfico (Figura 2.18):

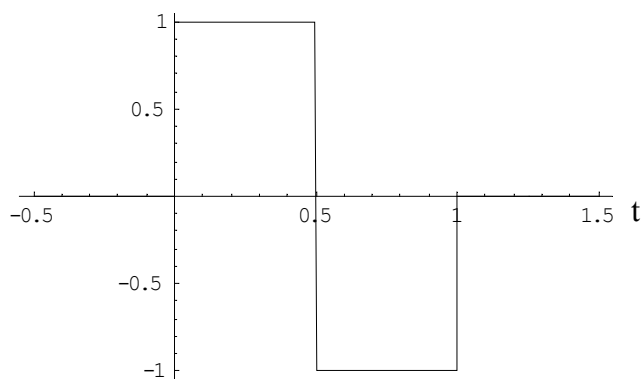


Figura 2.18 – Wavelet de Haar  $\psi_{0,0}(t)$ .

2.  $\psi_{1,0}(t) = 2^{\frac{1}{2}}(2^1 t - 0) = 2\psi(2t)$ , e seu gráfico (Figura 2.19):

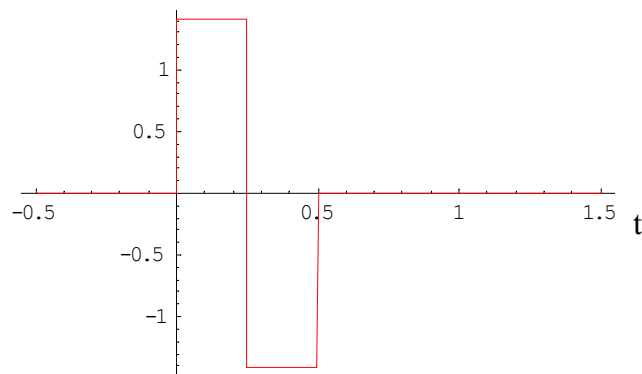


Figura 2.19 – Wavelet de Haar  $\psi_{1,0}(t)$ .

3.  $\psi_{1,1}(t) = 2^{\frac{1}{2}}(2^1 t - 1) = \sqrt{2}\psi(2t - 1)$ , e seu gráfico (Figura 2.20):

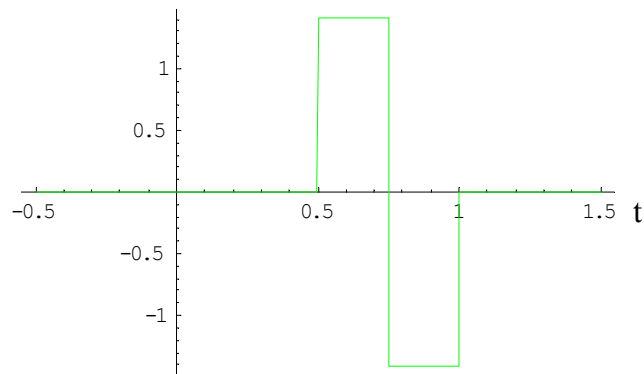


Figura 2.20 – Wavelet de Haar  $\psi_{1,1}(t)$ .

4.  $\psi_{2,0}(t) = 2^{\frac{2}{2}}(2^2 t - 0) = 2\psi(4t)$ , e seu gráfico (Figura 2.21):

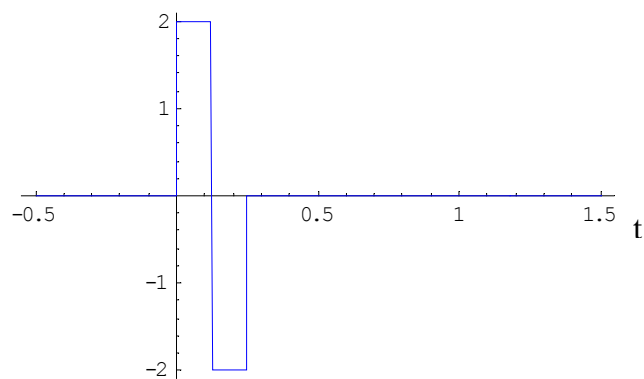


Figura 2.21 – Wavelet de Haar  $\psi_{2,0}(t)$ .

5.  $\psi_{2,1}(t) = 2^{\frac{2}{2}}(2^2 t - 1) = 2\psi(4t - 1)$ , e seu gráfico (Figura 2.22):

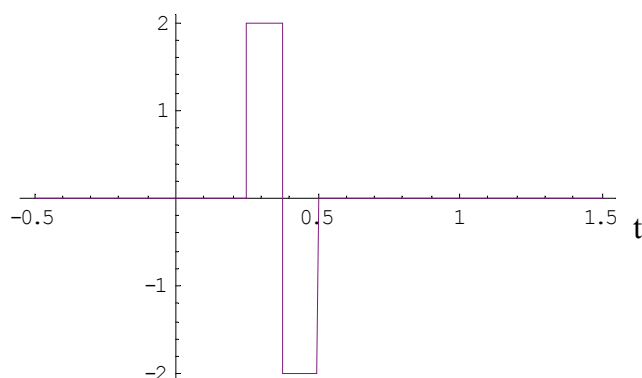


Figura 2.22 – Wavelet de Haar  $\psi_{2,1}(t)$ .

E assim se faz sucessivamente até a classe de wavelet que se queira.

Dessa forma, sobrepondo essas decomposições da wavelet de Haar (Figura 2.23) obtemos:

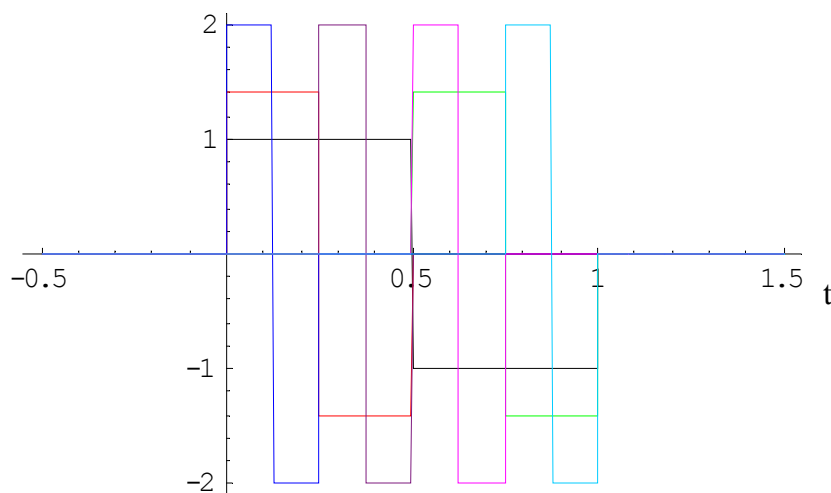


Figura 2.23 - Sobreposição de gráficos da wavelet de Haar.

Podemos verificar que o sistema de funções base gerado por essas wavelets formam um sistema ortogonal, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j t - m) \psi(2^i t - n) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq i \text{ ou } m \neq n \\ 2^{-j} & \text{se } j = i \text{ e } m = n \end{cases} \quad (2.48)$$

o que nos permite calcular os coeficientes wavelets por:

$$c_{i,j} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt \quad (2.49)$$

O resultado da análise através das wavelets são os coeficientes wavelets. Quanto maior o coeficiente, maior a semelhança entre a wavelet e o sinal, e quanto menor o coeficiente menor é a semelhança.

Podemos representar um sinal através de um “*Escalograma*” no qual os valores dos coeficientes wavelets são representados através de intensidades de cores e as wavelets utilizadas pela sua posição conforme o gráfico abaixo (Figura 2.24):

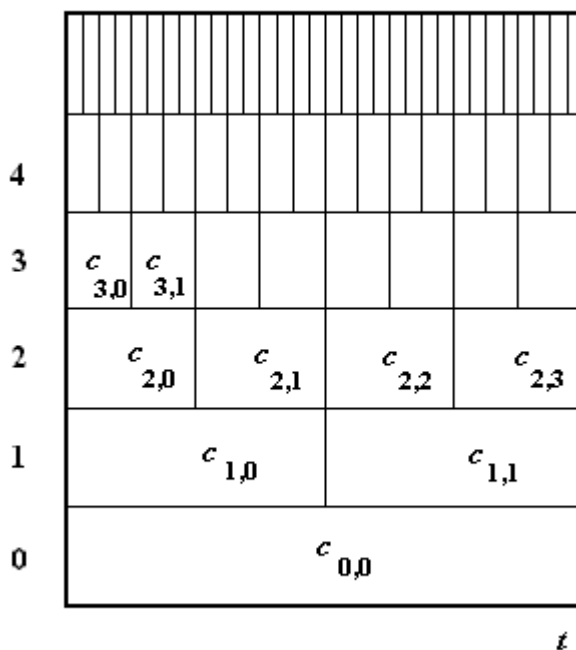


Figura 2.24 - Escalograma.

Suponhamos um sinal  $f(t) = \psi_{2,1}(t) + \psi_{3,1}(t)$ , que é a soma de duas wavelet do tipo Haar, conforme o gráfico abaixo (Figura 2.25):

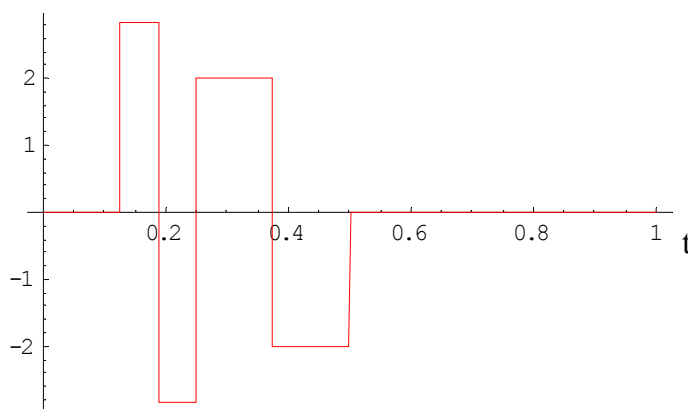


Figura 2.25 - Soma de duas funções de Haar.

Sua decomposição em wavelets do tipo Haar seria, pela Equação (2.33):

$$f(t) = c_{0,0}\psi_{0,0} + c_{1,0}\psi_{1,0} + c_{1,1}\psi_{1,1} + c_{2,0}\psi_{2,0} + c_{2,1}\psi_{2,1} + c_{2,2}\psi_{2,2} + c_{2,3}\psi_{2,3} + \dots \quad (2.50)$$

onde  $c_{i,j}$  são os coeficientes wavelet e  $\psi_{i,j}$  são as wavelets “escala – posição” utilizadas na decomposição do sinal.

Como seria o escalograma desse sinal? Fazendo a análise wavelet os coeficientes wavelets diferentes de zero serão  $c_{2,1}$  e  $c_{3,1}$  relativos, respectivamente, as wavelets “escala – posição”  $\psi_{2,1}$  e  $\psi_{3,1}$ . O escalograma desse sinal é mostrado na Figura 2.26 a seguir:

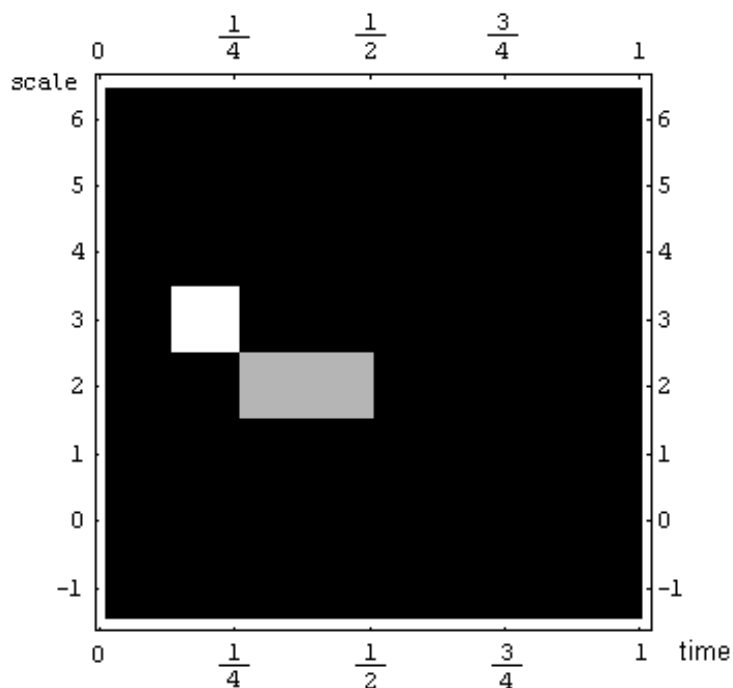


Figura 2.26 - Escalograma do sinal  $f(t)$ .

Nesse caso, temos que quanto maior for o coeficiente  $a_{i,j}$  mais claro será a cor do escalograma que o representa. Assim, observamos no escalograma que as wavelets que coincidiram com o sinal nessa análise foram  $\psi_{2,1}$  e  $\psi_{3,1}$ .

Pode-se fazer essa análise em qualquer sinal, usando qualquer wavelet como base.

Existem muitas outras funções base wavelets que podem ser citadas, por exemplo, wavelet de Daubechies, desenvolvida por Ingrid Daubechies [DAUBECHIES, 1995], inventando o que são chamados de wavelets ortonormais de suporte compacto. Fazendo assim, a análise discreta de wavelet praticável.

A família de wavelet de Daubechies são denotadas por  $dbN$  onde  $N$  é a ordem da wavelet e o  $db$  o tipo de Daubechies. Abaixo (Figura 2.27) segue o exemplo de dois elementos da família das wavelets de Daubechies,  $db2$  e  $db4$ , respectivamente:

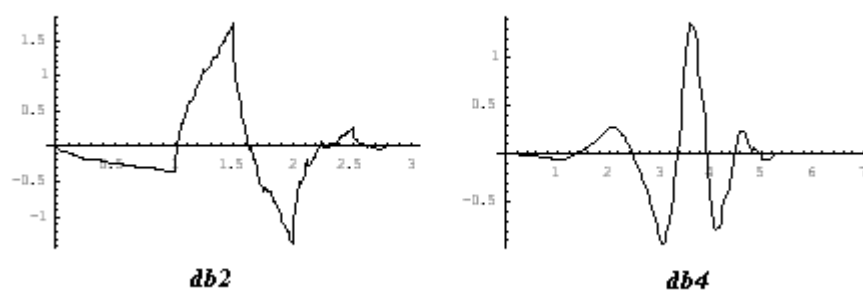


Figura 2.27 - Wavelets de Daubechies tipo 2 e tipo 4

Existem ainda as wavelets biortogonais ou wavelet do tipo Battle – Lemarié, as wavelets tipo Coiflets, Symlets, Morlet, Meyer, entre outras [MISITI, 1996].

Em alguns caso as funções wavelets são obtidas através de iterações da equação de dilatação, Equação (2.1).

A escolha do tipo de wavelet depende do tipo do sinal ou função a ser analisado ou da escolha do pesquisador.

## **CAPÍTULO 3**

### **3.1 Introdução ao problema a ser tratado.**

Narayanan e Jayaraman [1991], baseados num trabalho de Awrejcewicz [1986], estudaram a passagem de um sistema dinâmico não-linear com fricção seca do estado periódico ao caótico. O sistema de equações foi integrado através do método de Runge-Kutta de quarta ordem, e a partir da série temporal obtida foram construídos os planos de fase, o mapa de Poincaré e calculada a Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Por outro lado, com o surgimento das wavelets, se tornou possível estudarmos o sistema em várias escalas de resolução. As wavelets permitem fazermos o escalograma da série temporal e o objetivo desse trabalho foi construirmos o escalograma do sistema ao variarmos a frequência de excitação do mesmo, fazendo com que o sistema passe de periódico a caótico.

### **3.2 Descrição do modelo e aplicação.**

Conforme vimos no Capítulo 1, vamos considerar em nosso trabalho o caso de fricção seca em um sistema auto-excitado como mostrado

na Figura 3.1, onde uma correia é ligada a duas roldanas que giram a uma velocidade constante  $v_0$  seguindo um sentido  $S$ , como na figura. Na superfície dessa correia existe um bloco de massa  $m$  preso a uma mola não-linear de constantes  $k_1$  e  $k_2$  e um dispositivo de amortecimento não linear de constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

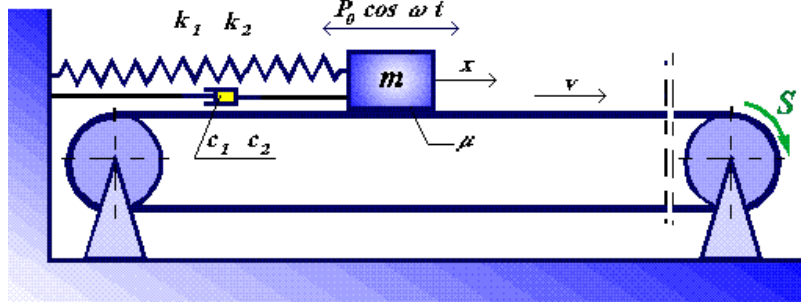


Figura 3.1 - Oscilador não-linear com fricção seca e amortecimento.

Entre essas duas superfícies (correia e bloco) ocorre fricção. Sendo  $F$  essa força de fricção e  $x$  a extensão da mola, a equação desse movimento será:

$$m\ddot{x} + c_2(\dot{x} - v_0)^3 - c_1(\dot{x} - v_0) + k_1x + k_2x^3 + mg\mu \operatorname{sgn}(\dot{x} - v_0) = P_0 \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

onde os parâmetros  $m$ ,  $c_2$ ,  $c_1$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $\mu$  representam respectivamente a massa, coeficiente cúbico de amortecimento, coeficiente linear de amortecimento, constante elástica linear, constante elástica cúbica e coeficiente de atrito.  $P_0$  e  $\omega$  são, respectivamente, a amplitude e frequência da excitação harmônica,  $v_0$  é a velocidade da correia,  $g$  a aceleração da gravidade e  $x$  é o deslocamento da massa.

Podemos expressar a equação (3.1) como duas equações de primeira ordem na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \left[ \mu \operatorname{sgn}(x_2 - v_0) - \alpha(x_2 - v_0) + \beta(x_2 - v_0)^3 \right] - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_1^3 + F_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c_1}{mg} & \beta &= \frac{c_2}{mg} & \gamma_1 &= \frac{k_1}{m} \\ \gamma_2 &= \frac{k_2}{m} & F_0 &= \frac{P_0}{m} & x_1 &= x \end{aligned} \quad (3.3)$$

No trabalho de Narayanan e Jayaraman [1991] o sistema descrito foi simulado com os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,05 \text{ s/m} & \beta &= 0,02 \text{ s/m}^3 & \gamma_1 &= 0 \text{ (s}^2\text{)} \\ \gamma_2 &= 10000 \text{ (ms)}^{-2} & \mu &= 0,6 & \nu &= 1 \text{ m/s} \\ F_0 &= 10,6 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

No trabalho de Narayanan e Jayaraman, o sistema de equações (3.2) foi integrado numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem para frequências  $\omega$  de excitação do sistema variando de 2 a 32 Hz e com condições iniciais  $x_1 = 0,001$  e  $x_2 = 0$ .

Os estados do sistema, se periódicos (e seus respectivos períodos) ou caóticos, foram encontrados por Narayanan e Jayaraman para uma gama de frequências externas conforme a Figura 3.2.

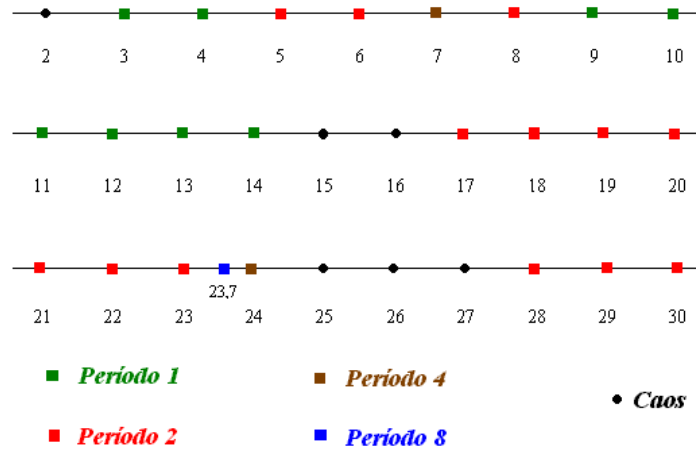


Figura 3.2 - Valores da frequência externa e estados do sistema.

### 3.3 Resultados da simulação.

Primeiramente, reproduzimos os resultados obtidos por Narayanan e Jayaraman integrando as equações pelo método de Runge-Kutta, utilizando para isso o software Mathematica [Ver Apêndice]. Integramos o sistema no intervalo de  $t=0$  a  $t=25$  com intervalo de integração de 0,00183105, desprezamos a parte transiente e tomamos os últimos 2048 pontos e então obtivemos uma série temporal do sistema para a análise através das wavelets. Para fazermos essa análise da série temporal obtida utilizamos a ferramenta WAVELET TOOLBOX do software MATLAB 5.0.

No trabalho de Narayanan e Jayaraman também foram calculados os expoentes de Lyapunov para as condições iniciais  $x_1=0,001$  e  $x_2=0$  para as frequências  $\omega=26Hz$  com expoentes  $\lambda_1=1,97$ ;  $\lambda_2=-1,74$  e  $\lambda_3=0$ , e para  $\omega=13Hz$  com expoentes  $\lambda_1=-0,952$ ;  $\lambda_2=-1,048$  e  $\lambda_3=0$ , que representam, respectivamente, movimento caótico e movimento periódico de período 1 [NARAYANAN, 1991].

Os resultados obtidos por Narayanan e Jayaraman mostram que para uma frequência externa  $\omega=13$  o sistema possui comportamento periódico, onde através do Plano de Fase mostrado na Figura 3.3, observamos a presença de um movimento de período 1. São mostrados na Figura 3.3, o gráfico posição versus tempo, a FFT, o plano de fase e o mapa de poincaré.

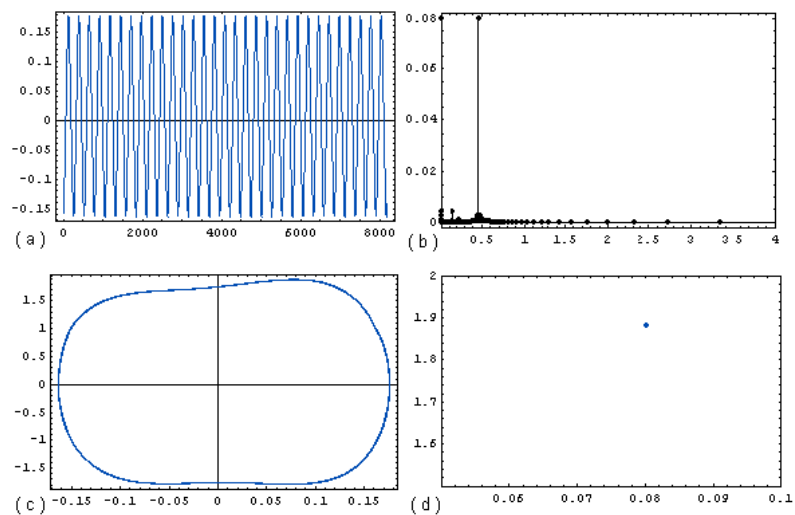


Figura 3.3 - (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de poincaré para  $\omega = 13$  Hz.

Observamos na Figura 3.4, o escalograma obtido pelo “Wavelet Toolbox” do Software MATLAB, utilizando como wavelet primária a Wavelet de Morlet (2.43). O escalograma mostra os períodos do sistema em várias escalas. Podemos perceber que o escalograma nos mostra um comportamento periódico do sistema, mantendo uma frequência dominante em todo o tempo do sinal em uma mesma faixa de escala, cujos resultados também coincidem com aqueles obtidos no trabalho de Narayanan e Jayaraman.

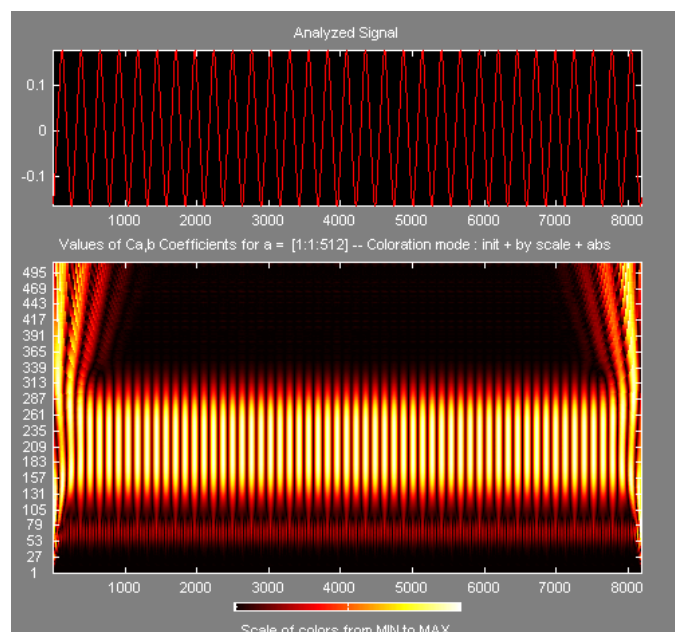


Figura 3.4 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 13$  Hz.

Mudando a frequência de excitação do sistema para  $\omega = 5$  Hz, onde, segundo Narayanan e Jayaraman, o sistema é periódico com período 2. Mostramos na Figura 3.5 a série temporal, a FFT, o plano de fase e o mapa de poincaré.

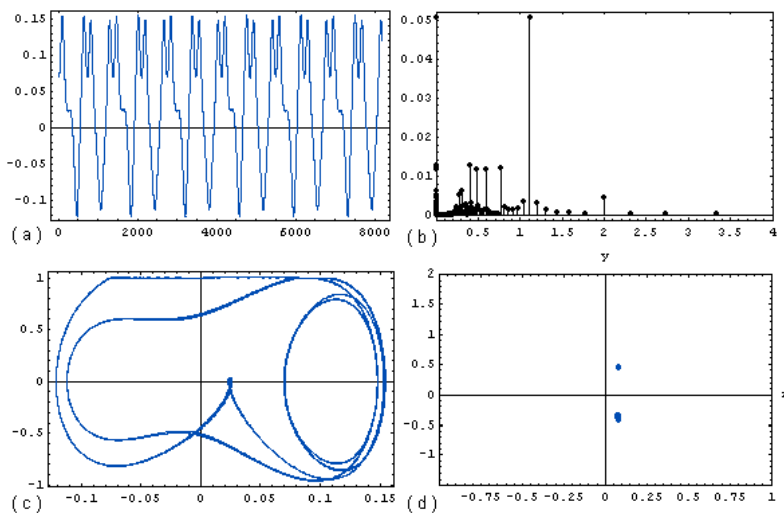


Figura 3.5 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de poincaré para  $\omega = 5$  Hz.

E o escalograma (Figura 3.6) nos confirma o regime periódico com frequências definidas em duas faixas em todo o sinal.

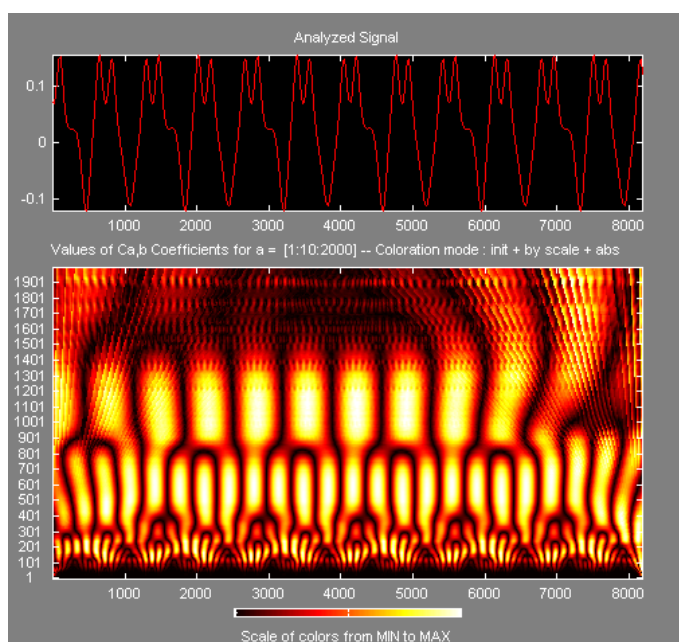


Figura 3.6 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 5$  Hz.

Mudando a frequência de excitação do sistema para  $\omega = 7$  Hz segundo Narayanan e Jayaraman o sistema é periódico com período 4. Mostramos na Figura 3.7 a série temporal, a FFT, o plano de fase e o mapa de poincaré.

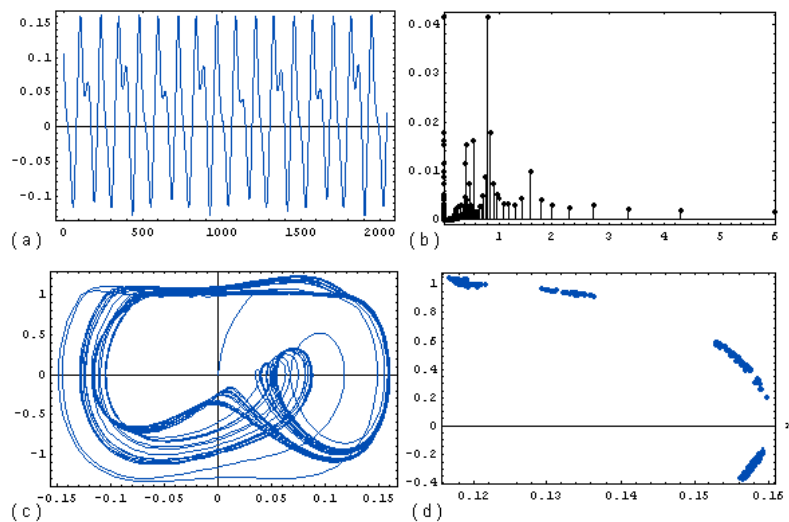


Figura 3.7 – (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de poincaré para  $\omega = 7$  Hz.

E o escalograma (Figura 3.8) nos confirma o regime ainda periódico com frequências definidas em mais faixas de escala em todo o sinal.

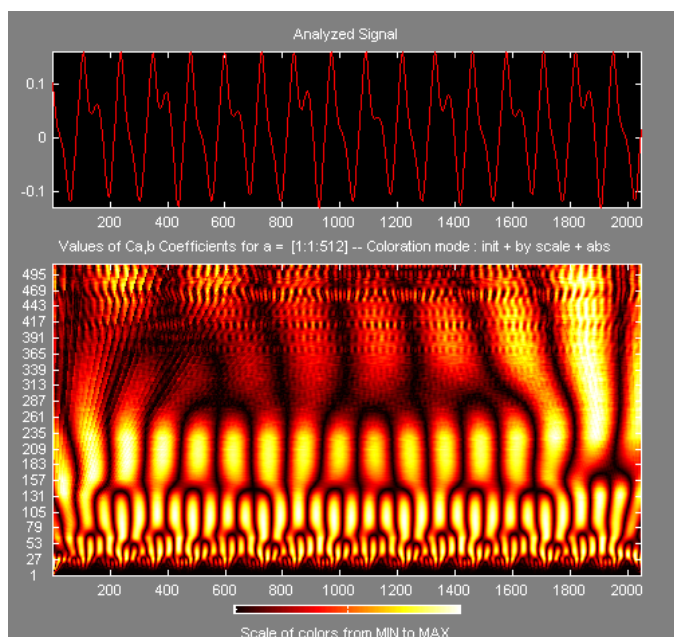


Figura 3.8 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 7$  Hz.

Já para  $\omega = 26$ , observamos no plano de fase e no mapa de poincaré da Figura 3.9 e o aparecimento de regime caótico do sistema.

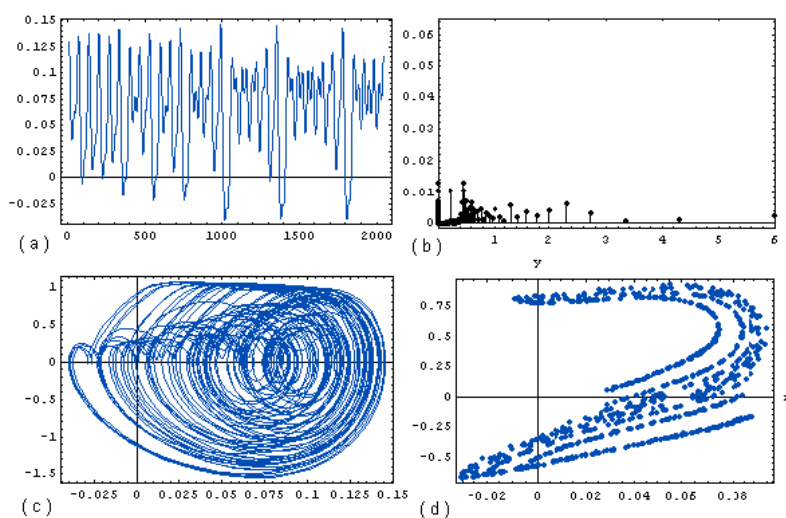


Figura 3.9 - (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de poincaré para  $\omega = 26$  Hz.

No escalograma da Figura (3.10) abaixo nota-se a quebra de periodicidade indicando o estado caótico do sinal.

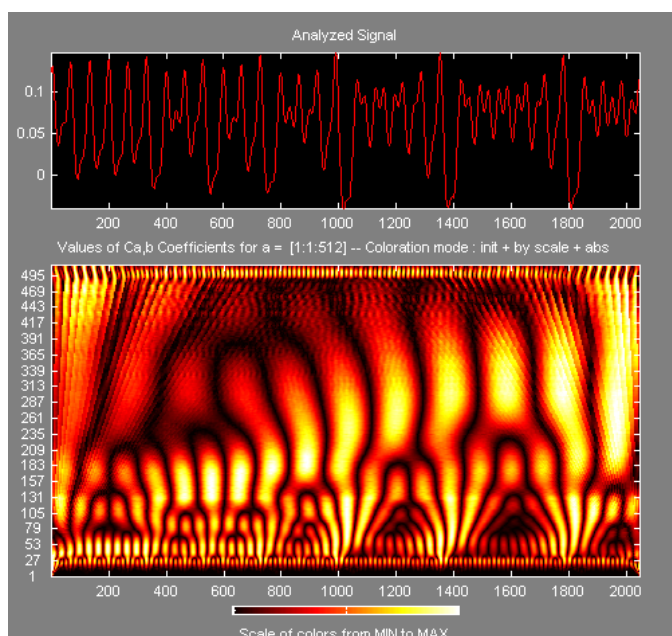


Figura 3.10 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 26$  Hz.

Também para  $\omega = 15$ , observamos no plano de fase e no mapa de poincaré da Figura 3.11 o aparecimento de regime caótico do sistema.

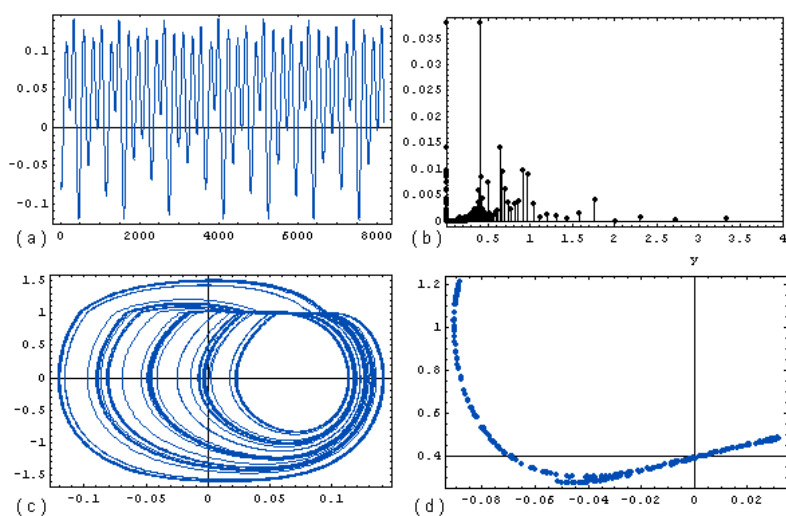


Figura 3.11 - (a) posição versus tempo, (b) FFT, (c) plano de fase e (d) mapa de poincaré para  $\omega = 15$  Hz.

No escalograma da Figura (3.12) abaixo nota-se também a quebra de periodicidade indicando o estado caótico.

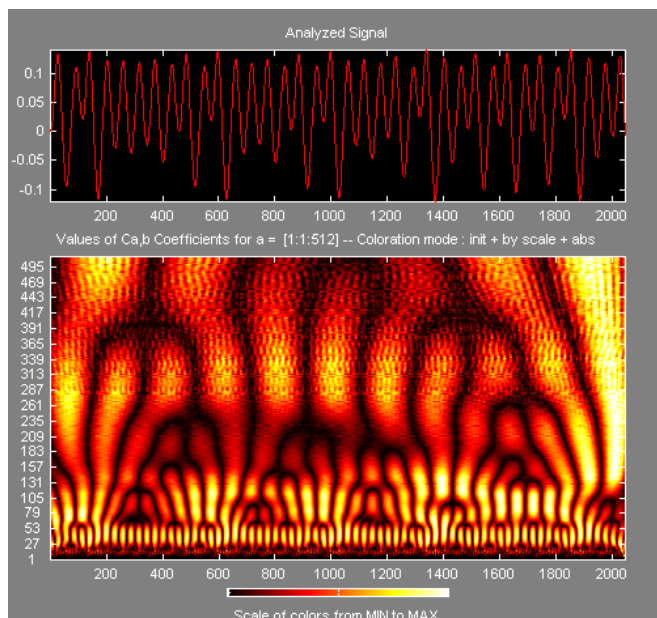


Figura 3.12 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 15$

Vamos construir um sinal composto por três sinais menores, cada um com uma frequência de excitação diferente, respectivamente 4, 7 e 5 Hz e períodos 1, 4 e 2. Na Figura 3.13 temos o escalograma desse sinal, onde se percebe claramente a mudança em cada intervalo do sinal. Em cada intervalo o regime do sistema permanece periódico

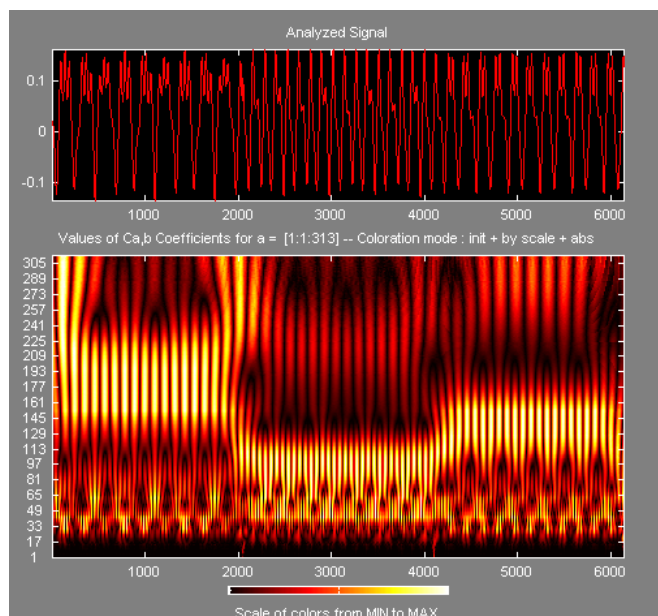


Figura 3.13 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 4, 7, 5$  Hz.

Vamos agora construir um sinal a partir de dois sinais que possuem, cada um, uma frequência de excitação diferente, primeiramente um sinal periódico e outro de regime caótico.

Note que esse novo sinal, assim como o sinal da Figura 3.13, foi construído simplesmente “unindo” duas séries temporais cada uma com uma frequência de excitação diferente.

Obs: Os sinais representados a seguir (Figuras 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18) também foram construídos da mesma maneira, ou seja, formando um único sinal a partir da “junção” de sinais de menor duração, cada um com uma frequência de excitação diferente.

O sinal abaixo (Figura 3.14) relativo a duas freqüências de excitação do sistema, respectivamente 7 Hz e 2 Hz, que são, respectivamente, regimes periódico e caótico. Note a quebra de freqüências no intervalo de 2048 pontos.

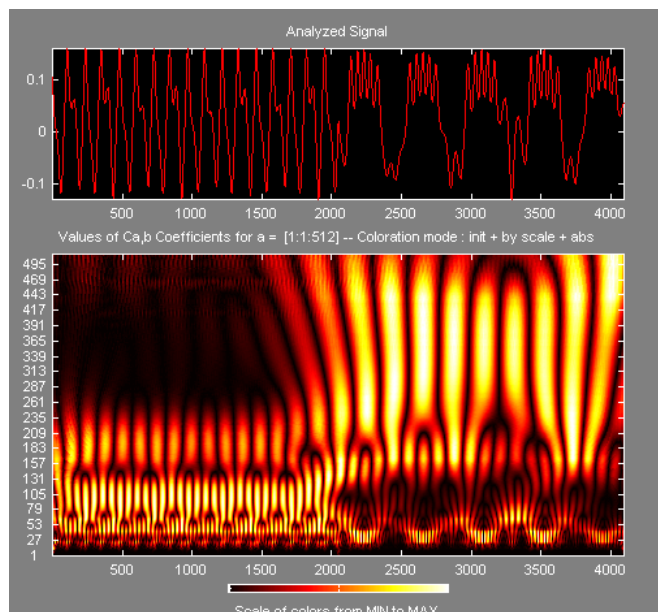


Figura 3.14 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 7e 2$  Hz.

O sinal abaixo (Figura 3.15) relativo a duas freqüências de excitação do sistema, respectivamente 5 Hz e 2 Hz, que são, respectivamente, regimes periódico e caótico. Note a quebra de freqüências no intervalo de 2048 pontos.

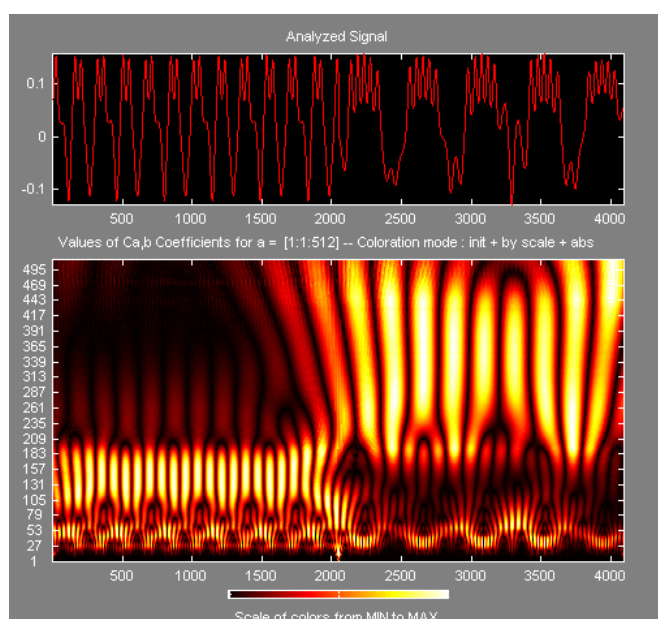


Figura 3.15 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 5e 2$  Hz.

O sinal abaixo (Figura 3.16) relativo a duas frequências de excitação do sistema, respectivamente 13 Hz e 15 Hz, que são, respectivamente, regimes periódico e caótico. Note a quebra de frequências no intervalo de 2048 pontos.

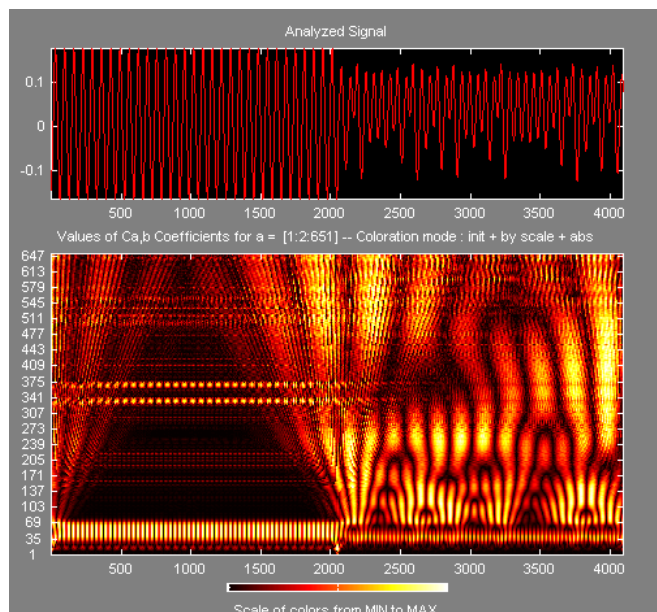


Figura 3.16 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 13$  e 15 Hz.

Agora com frequências de excitação do sistema de 13 Hz e 26 Hz, Figura 3.17 que são, respectivamente, regimes periódico e caótico. Note a quebra de frequências no intervalo de 2048 pontos.

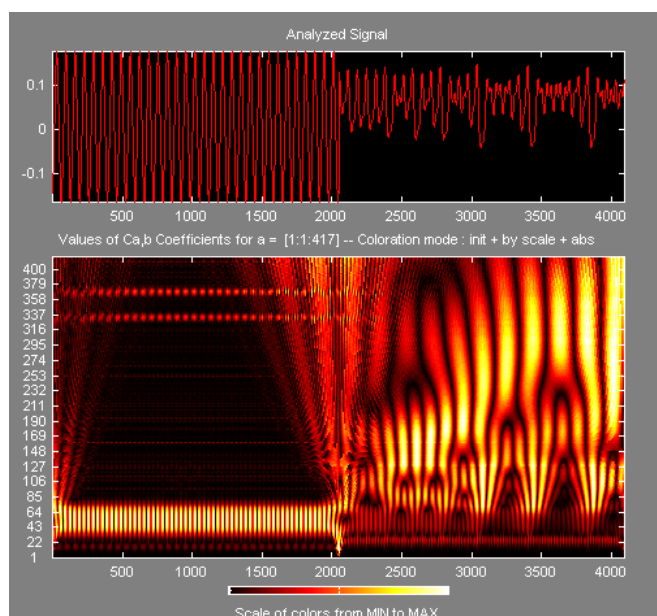


Figura 3.17 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 13$  e 26 Hz.

Analisaremos agora o escalograma com a junção de todos os sinais (Figura 3.18):

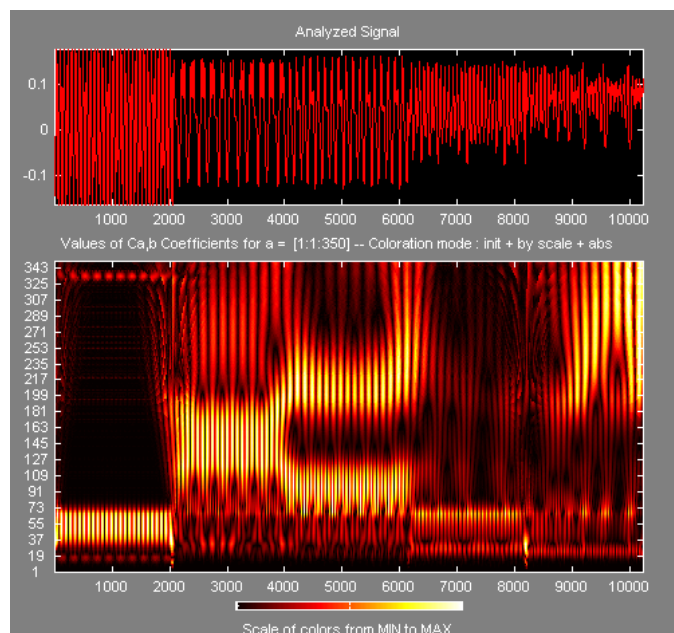


Figura 3.18 - posição versus tempo e escalograma para  $\omega = 13, 5, 7, 23,7$  e  $26$  Hz com escala de 512

### 3.4 Conclusões

Determinarmos se um sistema dinâmico encontra-se num estado periódico ou caótico, não é uma tarefa fácil. Geralmente a interpretação dos resultados é muito trabalhosa e difícil, principalmente em regimes caóticos [PONTES, 2001]. No nosso trabalho concluímos que a análise de um sistema através das wavelets constitui um método poderoso para análise do comportamento da periodicidade de um sistema servindo como uma ferramenta auxiliar para o diagnóstico do estado do regime. Quanto maior o número de ferramentas utilizadas melhor será o diagnóstico. Dentro desse contexto mostramos que a utilização das wavelets ajuda na caracterização de um sistema.

Note que nas Figuras 3.10 e 3.12 os escalogramas não mostram uma uniformidade como nos escalogramas das Figuras 3.4, 3.6 e 3.8 que representam um regime periódico para os respectivos parâmetros do sistema. Já a falta de uniformidade nos escalogramas das Figuras 3.10 e 3.12, mostra que nesse estado o regime do sistema

é caótico, o que foi mostrado por Narayanan e Jayaraman [1991] em seu trabalho. Resultados esses, obtidos através de ferramentas como plano de fase, mapa de Poincaré e expoente de Lyapunov.

Com base nessas ferramentas, pudemos comparar os resultados obtidos nesse trabalho com os obtidos no trabalho de Narayanan e Jayaraman e verificar que a utilização de wavelets para análise de um sinal produz um resultado de maior facilidade de interpretação se houver uma quebra ou mudança de frequência durante um certo tempo  $t_i$  do sinal (neste caso a análise por meio das wavelets mostra o instante  $t_i$  que ocorreu a mudança da frequência), já para a verificação do regime do sistema, se periódico ou caótico, a análise por meio das wavelets deve ser utilizada concomitantemente com outras ferramentas para uma análise mais precisa do sinal para diminuir a dificuldade de uma interpretação. Assim, esses resultados podem ser mais facilmente analisados se utilizarmos outras ferramentas junto com as wavelets.

### **3.5 Sugestões para próximos trabalhos**

Finalizando esse trabalho gostaria de deixar em aberto novas possibilidades para o prosseguimento desse tipo de análise em outros sistemas dinâmicos.

Um sistema cuja frequência varie automaticamente com o tempo seria interessante, e até uma sequência lógica desse trabalho, para se fazer uma análise através das wavelets, uma vez que, neste trabalho nosso sistema possuía uma frequência de excitação constante e simplesmente mudamos essa frequência “manualmente”. Seria interessante num próximo trabalho a utilização de um sistema que varie sua frequência de excitação automaticamente durante o tempo, como os sistemas não-ideais [PONTES, 2000], assim, poderíamos ver as variações em um determinado período de tempo nos escalogramas, nas escalas de wavelets, mostrando a mudança de frequência no tempo. Simulamos esse tipo de padrão em nosso trabalho simplesmente coletando séries temporais para cada frequência de excitação e depois juntando-as.

Essas são novas possibilidades de pesquisa que poderiam ser exploradas futuramente.

## Referências Bibliográficas:

AWREJCEWICZ, J.

**Chaos in Simple Mechanical System With Friction.**

Jornal of Sound and Vibration, **109**, p. 178 – 180, 1986.

AZENHA, A. J. G. O.

**Análise Dinâmica e Controlo de Forças em Manipuladores Robóticos.**

Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 218 f, 1998.

BURRUS, C. S.; GOPHINATH, R. A.; GUO, H.; with additional material and programs by J. E. Odegard and I. W. Selesnick.

**Introduction to wavelets and wavelet transforms : a primer.**

Prentice-Hall, Inc. Simon & Schuster / A Viacom Company. Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1998.

COOLEY, J. W.; TUKEY, O. W.

**An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series.**

*Math. Comput.* **19**, p. 297-301, 1965.

(PDF File).

Disponível em: URL <<http://www.math.ucdavis.edu/%7Esaito/courses/ACHA/cooley-tukey.pdf>> acesso em 03 de janeiro de 2002.

COIFMAN, R. R.; WEISS, G.

**Extensions of Hardy spaces and their use in analysis.**

Bull. Amer. Math. Soc., 83, p. 569-645, 1977.

CRANDALL, R.E.

**Mathematica for the Sciences.**

Addison-Wesley, 1991

CROISIER, A.; ESTEBAN, D., GALAND, C.

**Perfect channel splitting by use of interpolation, decimation, tree decomposition techniques.**

Int. Conf. Information Sciences/Systems, Patras, Greece, p. 443-446, August 1976.

DAUBECHIES, I.

**Ten Lectures on Wavelets**

Rutgers University and AT&T Bell Laboratories. Copyright by Society for Industrial and Applied Mathematics – Philadelphia, Pennsylvania 1992. Printed by Capital City Press, Montpelier, Vermont, Fourth Printing 1995.

GANDUR, M. C.

**Comportamento Dinâmico em Despelamento de Fitas Adesivas.**

(PDF File), Tese de doutorado, p 69 – 70, 159 f., 2001.

Disponível em:

<[http://www.ifi.unicamp.br/~kleinke/f082/caos\\_deterministico.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~kleinke/f082/caos_deterministico.pdf)>, acesso em 2 de janeiro de 2003.

GOMES, S.M.; DOMINGUES, M.O.; KAIBARA, M.K.

**Navegando de Fourier a Wavelets.**

In APLICON – Aplicações em Dinâmica e Controle – J.M. Balthazar *et al* editores, São Carlos – SP, ABCM e SBMAC, p. 243 – 265, 2001.

GRAPS, A.

**An Introduction to Wavelets.**

Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. (IEEE). The original version of this work appears in IEEE Computational Science and Engineering, vol. 2, num. 2, p. 50–61, published by the IEEE Computer Society, 10662 Los Vaqueros Circle, Los Alamitos, CA 90720, USA, Summer 1995.

GROSSMANN, A.; MORLET, J.

**Decomposition of Hardy functions into square-integrable wavelets of constant shape.**

SIAM, J. Math. Analysis, **15**, p. 723-736, 1984.

HARISON, D. M.

**The Fourier Transform.**

(PDF File), 1999.

Disponível em:

<[www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/TimeSeries/Fourier.pdf](http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/TimeSeries/Fourier.pdf)>, acesso em 23 de outubro de 2000.

KAHANE, J-P.; LEMARIE-RIEUSSET, P-G.

**Fourier series and wavelets.**

Luxembourg: Gordon and Breach Publishers, 1995.

McCAULEY; J.L.

**Chaos, Dynamics and Fractals: an Algorithmic Approach to Deterministic Chaos.**

Cambridge University Press, 1993.

MALLAT, S.

**Multiresolution approximation and wavelets.**

Trans. Amer. Math. Soc., **315**, p. 69-88, 1989.

MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, J-M.

**Wavelet Toolbox User's Guide.**

The MathWorks, Inc. 24 Prime Park Way, Natick Mass, 1996.

NARAYANAN, J.; JAYARAMAN, K.

**Chaotic vibration in a non-linear oscillator with Coulomb damping.**

Journal of Sound and Vibration, **146** (1), p. 17-31, 1991.

OIWA, N.N.

**Comparação de algoritmos para estimativa de expoentes de lyapunov**

Dissertação de Mestrado, IF-USP, São Paulo, SP, 138 f., 1994.

OGAWA, Kazushi; SAKAI, Fujikazu; YABE, Jun-ichi; TAMAKI, Toshihiro; KOBAYASHI, Hidekazu; NISHIDA, Tooru; SAITOH, Toshio.

**Development of an Isolator with Friction Damping.**

Disponível em: < <http://www.khi.co.jp/tech/> >. Acesso em 7 de outubro de 2001.

PALMER, R. G.

**Fast Fourier Transform.**

(Mathematica Notebook), 1997.

Disponível em: <<http://www.phy.duke.edu/~palmer/notebooks>>, acesso em 23 de outubro de 2000.

POLIKAR, R.

**The story of wavelets.**

Invited Plenary Talk, 3<sup>rd</sup> IEEE / IMACS International Joint Conference on Circuits, Systems, Communications. and Computers, Athens, Greece, 1999.

PONTES, B. R; OLIVEIRA, V. A; BALTHAZAR, J. M.

**On Friction-Driven Vibrations in a Mass Block-Belt-Motor System with a Limited Power Supply.**

Jornal of Sound and Vibration, **234 (4)**, p. 713 – 723, 2000.

PONTES, B. R; OLIVEIRA, V. A.; BALTHAZAR, J. M.

**On Stick-Slip Homoclinic Chaos and Bifurcations in a Mechanical System with Dry Friction.**

International Journal of Bifurcation and Chaos, v.11, n. 7, p.2019 – 2029, 2001.

QUINN, D.

**Survey of Wavelet Analysis.**

Tese (Master of Science) – Department of Applied Mathematics, National University of Ireland, June, 99 f, 1997.

SCHUSTER, H.G.

**Deterministic Chaos : An Introduction.**

Weinheim, Germany, VCH, 1995.

SILVA, M.F.; MACHADO, A.J.T.

**Análise de Sistemas Através do Plano de Fase.**

(PDF File) Copyright © 2002 Manuel F. Silva. All rights reserved.

Última atualização: Julho 05, 2002.

Disponível em:

<[http://www.ave.dee.isep.ipp.pt/~gris/teaching/TSIS/files/apontamentos/tsis\\_sebenta\\_cap\\_2.pdf](http://www.ave.dee.isep.ipp.pt/~gris/teaching/TSIS/files/apontamentos/tsis_sebenta_cap_2.pdf)>, acesso em 2 de janeiro de 2003.

STRÖMBERG, J. O.

**A modified Franklin system and higher-order spline systems on  $R^n$  as unconditional bases for Hardy spaces.**

In Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, W. Beckner, A. P. Calderón, R. Fefferman, and P. W. Jones, editors, Wadsworth International Group, Belmont, CA, p. 475–494, 1983.

# APÊNDICE

## Apêndice A

Exemplo do estudo do sistema de fricção amortecida para aplicação em um sistema cujo objetivo é minimizar os efeitos de terremotos em construções.

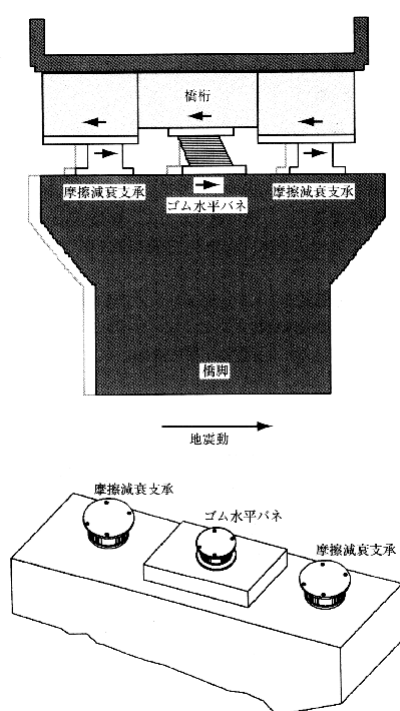


図 摩擦減衰型免震装置の構成  
Fig. Configuration of the isolators with friction damping

Figura A.1 – Configuração de um isolador com fricção amortecida.

A resposta de deslocamento de dispositivos de isolamento sísmico em construções podem ser muito grandes durante eventos sísmicos de grande porte como, por exemplo, o Grande Terremoto de Hanshin. Para reduzir esta resposta de deslocamento, um novo dispositivo de isolamento sísmico que utiliza fricção seca e amortecimento foi desenvolvido através das indústrias Kawasaki Heavy Industries, Ltd. (KHI). O dispositivo contém um mecanismo de controle de pressão que vai liberando o deslocamento extenso que pode acontecer depois de um terremoto importante. Uma experiência em uma mesa vibrando foi administrada para confirmar o

desempenho do novo amortecedor de fricção que foi projetado para ser usado em pontes. Sua dissipação de energia foi excelente, identificada como uma resposta de deslocamento pequena com uma resposta de aceleração aceitável. Uma simulação satisfatória que usa um modelo simples de fricção seca com amortecimento que usou os resultados experimentais foi alcançada. A comparação dos resultados experimentais com simulação numérica mostrou a conveniência deste método de simulação [OGAWA, 2001].

O título original do inglês: Development of an Isolator with Friction Damping, por Kazushi Ogawa, Fujikazu Sakai, Jun-ichi Yabe, Toshihiro Tamaki, Hidekazu Koba, Tooru Nishida e Toshio Saitoh.

Urls pesquisadas:

<http://www.khi.co.jp/tech/ne137g13.htm>;

[http://www.khi.co.jp/index\\_e.html](http://www.khi.co.jp/index_e.html).

## Apêndice B

Código fonte no Software Mathematica do exemplo de Transformada de Fourier numa senoíde:

```
<< SignalPlot.m
```

```
f[t_] := Sin[(2*Pi*t)/40]
```

```
senoide = Table[f[t], {t, 0, 200}] // N
```

```
ListPlot[senoide, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[0, 0, 1]}, Frame -> True]
```

```
transformada = Fourier[senoide]
```

```
transformadaabs = Abs[transformada]
```

```
ListPlot[transformadaabs, PlotStyle -> {PointSize[0.025], RGBColor[0, 0, 1]},  
Frame -> True, PlotRange -> {{0, 200}, All}]
```

```
Show[%, PlotRange -> {{0, 40}, All}]
```

```
LinePlot[transformadaabs, {PointSize -> PointSize[0.017],  
LineStyle -> Thickness[0.001], PlotRange -> {{0, 40}, All}}, Frame -> True]
```

```
Show[%, PlotRange -> {{0, 40}, All}]
```

```
LinePlot[transformadaabs, PlotRange -> All, PointStyle -> {PointSize[0.025],  
Hue[2/3]}, LineStyle -> Hue[2/3], Frame -> True];
```

```
Show[%, PlotRange -> {{0, 40}, All}]
```

## Apêndice C

Código fonte no Software Mathematica da rotina para calcular as equações do oscilador com fricção seca e amortecimento:

```
<< SignalPlot.m
g = 10;
w = 7;
alfa = 0.05;
beta = 0.02;
gama1 = 0;
gama2 = 10000;
mu = 0.6;
v = 1;
F0 = 10.5;
signal[x_ /; x > 0] := 1
signal[x_ /; x == 0] := 0
signal[x_ /; x < 0] := -1
Equações do Oscilador Não Linear:
RKStep[f_, y_, y0_, dt_] :=
  Block[{ k1, k2, k3, k4 },
    k1 = dt N[ f /. Thread[y -> y0] ];
    k2 = dt N[ f /. Thread[y -> y0 + k1/2] ];
    k3 = dt N[ f /. Thread[y -> y0 + k2/2] ];
    k4 = dt N[ f /. Thread[y -> y0 + k3] ];
    y0 + (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)/6
  ]
RungeKutta2[f_List, y_List, y0_List, {t1_, dt_}] :=
  NestList[ RKStep[f, y, #, N[dt]]&, N[y0], Round[N[t1/dt]] ] /;
  Length[f] == Length[y] == Length[y0]
RungeKutta2[f_List, y_List, y0_List, {t_, t0_, t1_, dt_}] :=
  Block[{res},
```

```

res = RungeKutta2[ Append[f, 1], Append[y, t], Append[y0, t0], {t1 - t0,
dt} ];

Drop[#, -1]& /@ res
] /; Length[f] == Length[y] == Length[y0];
Clear[points]
points = Module[{x, y},
RungeKutta2[{y, -g*(mu*signal[y-v]-alfa*(y-v)+beta*(y-v)^3)-gama1*x-
gama2*(x)^3+F0*Cos[w*t]},
{x, y}, {0.001, 0}, {t, 0, 25, 15/8192}]];
ListPlot[points, PlotJoined -> True, Frame -> True,
PlotStyle -> RGBColor[0, .3, .7]]
points1 = Drop[points, 5461];
Length[points1]
ListPlot[points1, PlotJoined -> True, Frame -> True,
PlotStyle -> RGBColor[0, .3, .7]]
Length[points]
points = Drop[points, 5461];
Length[points]
points = Transpose[Drop[points, 1]];
ListPlot[points[[1]], PlotJoined -> True, Frame -> True,
PlotStyle -> RGBColor[0, .3, .7]]
Fourier
trange = Table[t, {t, 5, 20, 15/8192}];
Length[trange]
T = (Max[trange] - Min[trange]) // N
Ts = T/Length[trange] // N
1/Ts // N
1/T // N
fim = 1/Ts - 1/T // N
delta = 1/T // N
frange = Drop[1/Table[i, {i, .1, fim + 0.1, delta}], -1];
Length[frange]
transform = Abs[Fourier[points[[1]]]/Sqrt[Length[points[[1]]]] // Chop;
Length[transform]

```

```

modulo = Transpose[{frange, transform}];
ListPlot[modulo, PlotRange -> All, PlotJoined -> True, Frame -> True]
Show[%, PlotRange -> {{0, 4}, All}]
LinePlot[modulo, {PointSize -> PointSize[0.017],
  LineStyle -> Thickness[0.001]}]
Show[%, Frame -> True, PlotRange -> {{0, 4}, All}]
SetDirectory["C:\\MATLABR11\\work"]
Export["sst.freq7.dat", points[[1]], "List"]
Export["freq7.mat", points[[1]], "MAT"]
Export["sst.freq_geral.dat", points[[1]], "List"]
Export["freq_geral.mat", points[[1]], "MAT"]
Poincaré
poincaremap[
  g_, \[Alpha]_, \[Omega]_, \[Beta]_, \[Gamma]1_, \[Gamma]2_, \[Mu]_, v_,
  F0_, ndrop_, nplot_, psize_ := (T = 2 \[Pi]/\[Omega];
  L[{xnew_, ynew_}] := {x[T], y[T]} /.
  Flatten[NDSolve[{x'[t] == y[t],
    y'[t] == -g*(\[Mu]*
      Sign[y[t] - v] - \[Alpha]*(y[t] -
        v) + \[Beta]*(y[t] - v)^3) - \[Gamma]1*
      x[t] - \[Gamma]2*(x[t])^3 + F0*Cos[\[Omega]*t],
    x[0] == xnew, y[0] == ynew}, {x, y}, {t, 0, T, T/200},
    AccuracyGoal -> 1, Method -> RungeKutta];
  ListPlot[Drop[NestList[L, {0, 0}, nplot + ndrop], ndrop],
    PlotStyle -> {PointSize[psize], RGBColor[0, .3, .7]},
    PlotRange -> {{0.08, 0.2}, {-0.5, 1.2}}, Frame -> True,
    AxesLabel -> {"x", "y"}])
poincaremap[10, .05, w, .02, 0, 10000, .6, 1, 10.5, 200, 300, .018]

```

## Apêndice D

Código Fonte no Software Mathematica para construir um sinal composto de outros sinais menores cada um com uma frequência de excitação diferente.

```

SetDirectory["C:\\MATLABR11\\work"]
A2 = ReadList["sst.freq2.dat", Number];
A4 = ReadList["sst.freq4.dat", Number];
A5 = ReadList["sst.freq5.dat", Number];
A7 = ReadList["sst.freq7.dat", Number];
A13 = ReadList["sst.freq13_2048.dat", Number];
A15 = ReadList["sst.freq15.dat", Number];
A23e7 = ReadList["sst.freq23e7.dat", Number];
A26 = ReadList["sst.freq26.dat"];
tudo = Flatten[{A4, A5, A7, A23e7, A26}];
tudomenos1 = Drop[tudo, {-1}];
ListPlot[tudomenos1]
Export["tudo4e5e7e23v7e26.mat", tudomenos1, "MAT"]
Export["sst.freq_geral.dat", tudomenos1, "List"]
Length[tudomenos1]

```

## Apêndice E

### Plano de fase

Considere um sistema de segunda ordem descrito pela equação diferencial:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.1)$$

A solução deste sistema pode ser ilustrada por meio da resposta temporal, isto é, de  $x(t)$  *versus*  $t$ . Alternativamente, pode ser ilustrada traçando o gráfico de  $\dot{x}(t)$  *versus*  $x(t)$  com  $t$  como um parâmetro.

O par  $\{x(t), \dot{x}(t)\}$  é as coordenadas de um ponto num plano (plano de fase) que dá origem a uma curva (trajetória) à medida que  $t$  varia.

Através desta técnica é fácil visualizar a resposta de segunda ordem. No entanto, é mais difícil visualizar sistemas de terceira ordem. Para sistemas n-dimensionais os conceitos são generalizados de uma forma “abstrata” [SILVA, 2002].

O plano de fase permite analisar a resposta de sistemas de segunda ordem, mesmo com não-linearidades “fortes”, e para quaisquer tipos de sinais.

O método do plano de fase foi introduzido por Poincaré para obter graficamente a solução de:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definindo  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$  obtém-se a forma mais comum do plano de fase.

As trajetórias dos sistemas de segunda ordem no plano de fase podem ser obtidos por métodos analíticos, numéricos e experimentais. Dentre esses, os métodos analíticos encontram-se limitados a equações diferenciais simples, já os métodos numéricos permitem analisar equações diferenciais complexas, mas requerem a concretização de valores numéricos para os parâmetros.

Assim, define-se por plano de fases um sistema de coordenadas associado às variáveis independentes que descrevem a dinâmica deste sistema. Por exemplo, o plano de fases de um pêndulo simples é definido por suas coordenadas de posição e velocidade. Um sistema estável é representado por um ponto fixo no plano de fases; enquanto um sistema periódico apresenta uma órbita fechada (ciclo limite).

Um ciclo limite representa uma oscilação em regime permanente. Um sistema pode apresentar mais do que um ciclo limite.

No plano de fase, um ciclo limite corresponde a uma trajetória fechada. Na sua vizinhança, todas as demais trajetórias poderão convergir ou divergir para o ciclo limite, assim, uma trajetória não pode cruzar um ciclo limite de “dentro para fora” ou de “fora para dentro”. No entanto, deve ser realçado que nem todas as curvas fechadas do plano de fase representam ciclos limite. Ciclos limite podem ser estáveis, instáveis ou semi-instáveis [SILVA, 2002].

## Apêndice F

### Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov,  $\lambda$ , é um parâmetro de caracterização dinâmica de atratores. Ele mede a taxa de divergência de órbitas vizinhas (e consecutivas) dentro do atrator [GANDUR, 2001] e, assim, quantifica a dependência, ou sensibilidade do sistema às condições iniciais. Analogamente, pode-se dizer que o expoente de Lyapunov fornece uma indicação de quão rápido perde-se informação movendo-se ao longo do atrator. Nos sistemas caóticos, associados a um atrator estranho, a dependência das condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. Em séries temporais experimentais, o ponto de partida para o cálculo dos expoentes é o atrator reconstruído, em uma dimensão de imersão adequada (para maiores detalhes ver Nelson F. Ferrara & C. P. C. Prado. *Caos: Uma introdução*, Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1994) [GANDUR, 2001]. Uma vez reconstruído o atrator, define-se uma trajetória fiducial a partir da sequência de vetores reconstruídos. A seguir, deve-se analisar o que ocorre com pontos vizinhos desta trajetória. Com as informações sobre as taxas de divergência destes pontos, pode-se obter então os expoentes de Lyapunov. Existem vários métodos para o cálculo dos expoentes, os quais diferem na maneira de analisar a dinâmica ao longo da trajetória fiducial. Os métodos mais conhecidos são os métodos de Wolf, de Eckmann e Ruelle e o método de Brown e Bryant [GANDUR, 2001].

Dadas duas trajetórias  $\xi_0(t)$  e  $\xi_1(t)$ , pertencentes a algum espaço de fases  $n$ -dimensional, a diferença entre essas trajetórias a cada tempo é dada por  $\delta_0(t)$ .

Pode-se considerar tanto as trajetórias e a diferença entre elas, como evoluções temporais dos valores iniciais. Desse modo, se a evolução temporal de  $\delta_0(t=0)$  para  $\delta_0(t)$  é de caráter exponencial, então pode-se escrever

$$\delta_0(t) = \delta_0(0)e^{\lambda t} \quad (5.1)$$

assim,

$$\lambda = \left( \frac{1}{t} \right) \ln \left( \frac{\|\delta_0(t)\|}{\|\delta_0(0)\|} \right) \quad (5.2)$$

onde  $\lambda$  é uma aproximação do expoente de Lyapunov, que é o maior expoente possível para o afastamento das trajetórias.

Para a obtenção do verdadeiro expoente de Lyapunov, devemos considerar a diferença entre as trajetórias cuja norma ao quadrado é

$$\|\delta_0(t)\|^2 = \delta_0(t)^\dagger \delta_0(t) \quad (5.3)$$

porém, como  $\delta_0(t)$  é uma evolução temporal de  $\delta_0(t=0)$ , podemos escrever

$$\delta_0(t) = A\delta_0(0) \quad (5.4)$$

onde  $A$  é o operador de evolução temporal, desse modo, substituindo (5.4) na equação (5.3) teremos

$$\|\delta_0(t)\|^2 = (A\delta_0(0))^\dagger (A\delta_0(0)) \quad (5.5)$$

e assim,

$$\|\delta_0(t)\|^2 = \delta_0(0)^\dagger A^\dagger A \delta_0(0) \quad (5.6)$$

O novo operador  $A^\dagger A$ , é hermitiano [OIWA, 1994], portanto possui auto valores reais e auto funções ortogonais entre si, formando um conjunto de funcoes, que serve de base para o espaço que as contém.

Dessa forma, é possível escrever  $\delta_0(0)$  com base nas auto funções de  $A^\dagger A$ , denotadas por  $u_i$ , com auto valores  $\alpha_i^2$ .

$$\delta_0(0) = \sum_i c_i u_i \quad (5.7)$$

onde  $c_i$  é a probabilidade de se encontrar o espaçamento  $u_i$  entre as trajetórias no tempo  $t = 0$ .

Aplicando o operador  $A$  em  $\delta_0(0)$  obteremos

$$A\delta_0(0) = \sum_i c_i A u_i = \sum_i c_i \alpha_i u_i \quad (5.8)$$

e calculando a norma ao quadrado

$$(A\delta_0(0))^\dagger (A\delta_0(0)) = \left( \sum_i c_i \alpha_i u_i \right)^\dagger \left( \sum_j c_j \alpha_j u_j \right) = \sum_i c_i^2 \alpha_i^2 u_i^2 \quad (5.9)$$

pois, da hermiticidade de  $A^\dagger A$  conclui-se que as auto funções da  $A$  são ortogonais entre si [OIWA, 1994].

Calculando o quociente

$$\left( \frac{\|\delta_0(t)\|^2}{\|\delta_0(0)\|^2} \right) = \left( \frac{\sum_i |c_i|^2 \alpha_i^2}{\sum_i |c_i|^2} \right) \quad (5.10)$$

e escolhendo  $\delta_0(t)$  paralelo a alguma das auto funções de  $A$ , temos

$$\left( \frac{\|\delta_0(t)\|^2}{\|\delta_0(0)\|^2} \right) = \left( \frac{|c_i|^2 \alpha_i^2}{|c_i|^2} \right) = \alpha_i^2 \quad (5.11)$$

e,

$$\|\delta_0(t)\| = \alpha_i \|\delta_0(0)\| \quad (5.12)$$

Se considerarmos que o afastamento entre as trajetórias evolui exponencialmente com o tempo, podemos escrever

$$\|\delta_0(t)\| = e^{\lambda_i t} \|\delta_0(0)\| \quad (5.13)$$

o que implica

$$\lambda_i = \left(\frac{1}{t}\right) \ln \left( \frac{\|\delta_0(t)\|}{\|\delta_0(0)\|} \right) \quad (5.14)$$

Porém, ainda é necessário mais um passo para a obtenção do expoente de Lyapunov, é preciso aplicar o limite assintótico previsto pela teoria ergódica de Oselec,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \right) \ln \left( \frac{\|\delta_0(t)\|}{\|\delta_0(0)\|} \right) \quad (5.15)$$

onde,  $\lambda_i$  é o expoente de Lyapunov.

Agora, observamos o expoente. Assim, se esse número for negativo então as trajetórias colapsam com o tempo, mostrando um regime integrável; se o expoente for zero então as trajetórias não se afastam e nem colapsam, o que indica também um sistema integrável; no caso do expoente ser positivo finito então as trajetórias se afastam exponencialmente com o tempo, explicitando um quadro caótico no sistema; e no caso do expoente ser divergente positivamente então o sistema é puramente estocástico.

Uma descrição mais detalhada da obtenção do expoente de Lyapunov pelo método de Wolf pode ser encontrada no apêndice 7.3 da tese de doutorado de Marcelo C. Gandur [GANDUR, 2001].