UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

Qualificações de Restrições em Otimização Não Linear com Tempo Contínuo

Tese de Doutorado

São José do Rio Preto
2018

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

Qualificações de Restrições em Otimização Não Linear com Tempo Contínuo

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Matemática Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador:

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira.

São José do Rio Preto

2018

Monte, Moisés Rodrigues Cirilo do.
Qualificações de restrições em otimização não linear com tempo contínuo / Moisés Rodrigues Cirilo do Monte. -- São José do Rio Preto, 2018
96 f. : il.

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira
Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria do controle. 3. Otimização matemática. 4. Banach, Espaços de. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.91.01

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte

Qualificações de Restrições em Otimização Não Linear com Tempo Contínuo

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Matemática Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP/São José do Rio Preto-SP
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP/São José do Rio Preto-SP

Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel
UNESP/São José do Rio Preto-SP

Profa. Dra. Lucelina Batista dos Santos
UFPR/Curitiba-PR

Prof. Dr. Roberto Andreani
UNICAMP/Campinas-SP

São José do Rio Preto, 09 de Março de 2018.

"Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited to all we now know and understand, while imagination embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand."

Albert Einstein

À minha família,

Dedico

Agradecimentos

A Deus, que me deu forças e caminhou comigo.

Ao Professor Dr. Valeriano Antunes de Oliveira, a quem aprendi a admirar, que me orientou desde o início e me ajudou em cada dúvida e dificuldade.

Aos membros da banca examinadora pelo tempo que disponibilizaram na leitura desta tese e em todas sugestões e críticas que fizeram.

À minha esposa Carina, minhas filhas Esther e Ana, meus pais Leobino e Eliete que me apoiaram em todos os momentos. Em memória de Antônio Rodrigues do Prado e Antônio Cirilo do Monte.

Aos colegas, professores e funcionários do IBiLCE/UNESP.

À Universidade Federal de Uberlândia e meus colegas do curso de Matemática da FACIP/UFU.

Resumo

O problema de otimização com tempo contínuo consiste em maximizar um funcional integral, sujeito a restrições de igualdade e desigualdade, onde as funções envolvidas pertencem a um espaço de Banach e variam num certo intervalo de tempo. Os resultados obtidos fornecem condições necessárias para que uma determinada função seja solução do problema. Qualificações de restrições são estabelecidas a fim de se obter tais condições necessárias de otimalidade. Para problemas com restrições de desigualdade apenas, faz-se uso de um teorema de alternativa generalizado para se obter condições tipo Karush-Kuhn-Tucker. Para tratar problemas com restrições de igualdade e desigualdade, teoremas da função implícita uniforme e da aplicação inversa uniforme são necessários.

Palavras-chave: otimização não linear, problema com tempo contínuo, condições necessárias, qualificações de restrições.

Abstract

The continuous-time nonlinear programming problem consists in maximizing an integral functional, subject to equality and inequality constraints, where the involved functions belong to a Banach Space and vary over a certain period of time. The obtained results provide the necessary conditions for a given function to solve the problem. Constraints qualification are established in order to achieve such necessary optimality conditions. For problems with inequality constraints only, a generalized alternative theorem is used to obtain Karush-Kuhn-Tucker-type conditions. To address problems with equality and inequality constraints, uniform implicit function and uniform inverse mapping theorems are necessary.

Keywords: *nonlinear optimization, continuous-time problem, necessary conditions, constraints qualifications.*

Lista de Símbolos

$\|\| \cdot \|\|$	Norma euclidiana
$\mathbb{N}_0$	conjunto dos números naturais unido com o conjunto $\{0\}$.
$L_\infty([0,T];I\!R^n)$	Espaço das funções vetoriais n-dimensionais mensuráveis e essencialmente limitadas em $[0,T]$.
$\\| \cdot \\|_n^\infty$	Norma em $L_\infty([0,T];I\!R^n)$.
$L_1([0,T];I\!R^m)$	Espaço das funções vetoriais m-dimensionais integráveis em $[0,T]$.
$\\| \cdot \\|_m^1$	Norma em $L_1([0,T];I\!R^m)$.
$\partial P(z;\gamma)$	Derivada Fréchet de P em z com direção γ.
$\nabla F(x)$	Matriz jacobiana de uma aplicação $F : I\!R^n \to I\!R^m$ no ponto x.
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente de uma função $f : I\!R^n \to I\!R$ no ponto x.
$\nabla^2 f(x)$	Matriz jacobiana de uma função $f : I\!R^n \to I\!R$ no ponto x.
I_n	Matriz identidade de ordem n.
$\bar{B}$	Bola unitária fechada centrada na origem.
B	Bola unitária aberta centrada na origem.
q.t.p.	quase todo ponto.

Figuras

Sumário

Introdução

Problemas de otimização com tempo contínuo aparecem com certa frequência na literatura e foram inicialmente propostos por Bellman em [1, 2], em suas investigações de modelos dinâmicos de produção e inventário chamados "Problemas de Gargalo". O tratamento matemático rigoroso foi efetivamente estabelecido por Tyndall [3], que estendeu a teoria de Bellman e obteve teoremas de existência e dualidade para uma determinada classe de problemas lineares com tempo contínuo da forma

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & P(z) = \displaystyle\int_0^T a'z(t)\ dt \\ \text{sujeito a} & z(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & Bz(t) \leq c + \displaystyle\int_0^t Kz(s)\ ds, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & z \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n). \end{array}$$

As matrizes B e K são de dimensão $m \times n$, a é um vetor n-dimensional, c é um vetor m-dimensional e cada componente da solução z é mensurável e essencialmente limitada em $[0,T]$, ou seja, existem constantes $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, tal que $|z_i(t)| \leq c_i$ para quase todo $t \in [0,T]$ e todo $i = 1, \ldots, n$. As constantes c_i, $i = 1, \ldots, n$, são chamadas de supremos essenciais e são denotadas por $c_i = \text{ess} \sup\limits_{t \in [0,T]} |z_i(t)|$, $i = 1, \ldots, n$.

Levinson [4] estendeu os resultados de Tyndall para uma classe de problemas primal-dual mais gerais. Outros estudos baseados em relaxações das hipóteses de Levinson e teoremas de existência e dualidade foram realizados por vários outros autores, por exemplo [5, 6, 7].

A primeira extensão do conceito de dualidade com tempo contínuo foi feita por Hanson em [8], que estabeleceu as relações de dualidade para um certo tipo de problema com tempo contínuo. Hanson e Mond [9], consideraram uma generalização do mesmo problema e demonstraram um teorema de dualidade, baseado nos trabalhos de Levinson. Tal resultado apresentava erros na demonstração que foram apontados e corrigidos por Tyndall [10]. Outras generalizações da teoria de dualidade não linear e condições de otimalidade foram dadas por Farr e Hanson [11], Scott e Jefferson [12], Reiland e Hanson [13] e Reiland [14, 15].

Em otimização não linear em dimensão finita temos as condições necessárias de otimalidade Fritz John que, em qualquer solução ótima, garante a existência de certos multiplicadores, mas não garante que o multiplicador associado com a função objetivo do problema seja positivo. Se tal multiplicador associado com a função objetivo for não nulo, temos as condições de otimalidade Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.) mas, nesse caso, devemos impor uma condição adicional às restrições do problema chamada "qualificação de restrições".

Em Reiland [14, 15] pode-se observar o uso de um teorema de Farkas generalizado [16] e de uma qualificação de restrições tipo Abadie que, até certo ponto, pode ser comparada à condição de Abadie [17] da programação não-linear em dimensão finita, para se obter condições necessárias de primeira ordem, isto é, condições tipo K.K.T.. Além disso, as condições tipo K.K.T. dadas por Reiland são válidas sob hipóteses bastante restritivas. Se por um lado, a condição de tipo Abadie é bem geral, Reiland impõe outras hipóteses duras, tais como uma condição tipo Slater e que a imagem de um certo operador (entre espaços de dimensão infinita) seja fechado e o seu núcleo tenha dimensão finita.

Zalmai [18] obtém condições necessárias de otimalidade tipo ponto de sela para uma certa classe de problemas de programação não linear com tempo contínuo, fazendo uso de uma função perturbadora e do conceito de problema estável. Nesse mesmo trabalho, teoremas de dualidade lagrangiana são obtidos.

Baseado em ideias geométricas de Girsanov [19], Zalmai [20] apresenta condições necessárias de otimalidade tipo Fritz John e tipo K.K.T., impondo uma qualificação de restrições tipo Karlin [21] e estabelece uma relação entre os critérios de otimalidade ponto estacionário e ponto de sela. Tais condições necessárias de otimalidade são obtidas usando o Teorema de Alternativa de Gordan Generalizado [22], cuja demonstração apresentava erros que foram indicados e corrigidos por Arutyunov, Zhukovskiy e Marinković em [23].

Zalmai também publicou trabalhos envolvendo problemas de otimização com tempo contínuo que tratam de classes de problemas fracionais generalizados com tempo contínuo [24] e classes de problemas com tempo contínuo e restrições com operadores não lineares de desigualdade e igualdade [25], onde foi usada uma qualificação de restrições denominada propriedade maior-valor, introduzida por Stoer em [26], e as funções variáveis pertencem a $W^n[0,T]$ (Espaço de Hilbert de todas as funções vetoriais n-dimensionais absolutamente contínuas definidas em $[0,T]$).

Os autores Brandão, Rojas-Medar e Silva publicaram trabalhos sobre condições de otimalidade para problemas com tempo contínuo não suaves, sendo que [27] refere-se a condições necessárias e [28] refere-se a condições suficientes. Em [29], de Oliveira e Rojas-Medar generalizaram conceitos de KKT-invexidade e WD-invexidade introduzidas por Martin [30] para problemas de programação não linear com tempo contínuo, provando que a noção de KKT-invexidade é uma condição necessária e suficiente para a otimalidade global de um ponto estacionário e que a noção de WD-invexidade é uma condição necessária e suficiente para a dualidade fraca. Ainda, publicaram um trabalho sobre KKT-Invexidade para problemas de otimização com tempo contínuo não suave [31] e com múltiplos objetivos [32].

Em [33], Nobakhtian e Pouryayevali apresentaram critérios de otimalidade para problemas multi-objetivo com tempo contínuo não suaves. Condições necessárias e suficientes são deduzidas sob hipóteses de convexidade generalizada sobre as funções envolvidas. Abordando este mesmo tipo de problema, Nobakhtian publica em 2009 outro trabalho que amplia conceitos de invexidade e suas generalizações para funções com tempo contínuo [34].

Em [35], de Oliveira estuda problemas de otimização com tempo contínuo vetoriais, apresentando um teorema de transposição de Gordan não-convexo generalizado e resultados sobre otimalidade ponto de sela. Ainda, um problema dual escalar é introduzido e teoremas de dualidade são apresentados sem hipóteses de diferenciabilidade.

Os trabalhos acima citados se referem, em sua maioria, a problemas apenas com restrições de desigualdade. Em $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ e com restrições de igualdade e desigualdade, não encontramos condições necessárias de otimalidade na literatura. Isso pode ser devido ao fato de até poucos anos atrás não haver uma ferramenta para o tratamento das restrições de igualdade: um teorema da função implícita uniforme. Quando se fixa t, podemos aplicar os teoremas de função implícita clássicos. Mas a função implícita obtida assim não necessariamente possui boas propriedades com respeito a t. Tal resultado só apareceria em 1997 com Pinho e Vinter [36].

Sabemos que, na teoria de programação não linear, qualificações de restrições desempenham um papel importante na resolução de problemas, ajudando na obtenção de condições necessárias para otimalidade e ampliando classes de funções que podem ser cobertas por tais problemas.

Em programação não linear em dimensão finita, existem muitos tipos de qualificações de restrições que podem ser usadas para se conseguir condições necessárias. A mais comum na literatura é a qualificação de restrições de independência linear (LICQ) [37, 38]. Mas existem muitas outras: Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) [39], posto constante (CRCQ) [40], condição de dependência linear positiva constante (CPLD) [41], por exemplo. De acordo com o levantamento de bibliografia que fizemos a partir do MathSciNet, constatamos que até o momento as qualificações de restrições mencionadas não foram consideradas no contexto de problemas de otimização não linear com tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade, nem mesmo a qualificação de restrições

LICQ.

De modo semelhante, qualificações de restrições para problemas de otimização com tempo contínuo são de fundamental importância teórica para obtenção dos resultados e que podem ocasionar desdobramentos importantes na implementação e na análise computacional de tais problemas, ver [42, 43, 44, 45, 46]. Além disso, a classe de problemas com tempo contínuo a ser estudada, com hipóteses adequadas, engloba certas classes de problemas variacionais com restrições e problemas de controle ótimo.

Nesta tese, estuda-se uma classe de problemas de otimização não linear com tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade, cuja variável é uma função em $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, e o uso das qualificações de restrições Tipo Slater, Posto Completo, Posto Constante e Tipo Mangasarian-Fromovitz para se obter condições necessárias de otimalidade tipo Karush-Kuhn-Tucker. Tais qualificações de restrições obtidas são mais simples de serem verificadas do que, por exemplo, a qualificação de restrições apresentada em [14, 15] e, em particular, a qualificação de restrições Tipo Mangasarian-Fromovitz é mais fraca do que a condição tipo Karlin [21].

Ressaltamos duas importantes contribuições desta tese: o estudo de problemas com tempo contínuo com a presença de restrições de igualdade, apresentando condições de otimalidade para tais problemas quando o espaço considerado é o $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, e a obtenção de condições necessárias de segunda ordem para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. Estas contribuições não aparecem na literatura relacionada ao problema com tempo contínuo.

A formulação do problema geral, um breve resumo de qualificações de restrições em otimização não linear em dimensão finita, aplicações e resultados que serão utilizados no decorrer da tese, serão apresentados no primeiro capítulo. Nos capítulos subsequentes, resultados originais são apresentados.

No segundo capítulo, por meio de uma condição de posto completo uniforme e do Teorema da Função Implícita Uniforme [36], obtém-se condições necessárias de otimalidade de primeira e segunda ordem. No terceiro capítulo, por meio de resultados que são consequência do Teorema da Aplicação Inversa Uniforme [36] e de uma condição de posto constante uniforme, obtém-se novamente condições necessárias de primeira e segunda ordem, observando-se que a condição de posto constante uniforme utilizada é mais fraca que a condição de posto completo uniforme utilizada no primeiro capítulo.

Com algumas hipóteses adicionais sobre o problema, o quarto capítulo apresenta condições necessárias tipo K.K.T. utilizando-se uma condição "tipo Mangasarian-Fromovitz" imprescindível para a aplicação de um teorema de alternativa para sistemas convexos [23]. Este capítulo termina com uma nota sobre uma condição chamada positivo-linear independência (PLI) para problemas de otimização com tempo contínuo e sua relação com a condição tipo Mangasarian-Fromovitz.

A conclusão e algumas ideias e possibilidades de trabalhos futuros encontram-se no Capítulo 5. O texto contém definições e resultados baseados em Análise Funcional, Teoria da Medida e Programação Não Linear em dimensão finita. Para estes assuntos, o leitor pode consultar, por exemplo, Brézis [47], Folland [48], Bertsekas [37], Luenberger [38, 49] e Mangasarian [21].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos definir o problema geral com tempo contínuo (1.1) que será o objeto de estudo dessa tese, apresentando algumas definições e resultados de Análise, Álgebra Linear e Otimização Não Linear em dimensão finita, que serão utilizados para o bom desenvolvimento e entendimento desta tese. Alguns exemplos de aplicações encontrados na literatura são também apresentados.

1.1 O Problema com Tempo Contínuo

Considere o problema de otimização com tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade da forma

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & P(z) = \displaystyle\int_0^T \phi(z(t), t)dt & \\ \text{sujeito a} & h(z(t), t) = 0 & \text{q.t.p. em } [0, T] \\ & g(z(t), t) \geq 0 & \text{q.t.p. em } [0, T], \end{array} \tag{1.1}$$

onde $z \in L_\infty([0, T]; I\!\!R^n)$. As funções $\phi : I\!\!R^n \times [0, T] \to I\!\!R$, $h : I\!\!R^n \times [0, T] \to I\!\!R^p$ e $g : I\!\!R^n \times [0, T] \to I\!\!R^m$ são funções continuamente diferenciáveis ao longo de $[0, T]$ e $n \geq p + m$. Todos os vetores são vetores coluna a menos de transposição, que será indicada pelo símbolo $\;'\;$. Todas as integrais são no sentido de Lebesgue. Denote o conjunto factível do problema (1.1) por

$$\Omega = \{z \in L_\infty([0, T]; I\!\!R^n) \mid h(z(t), t) = 0,\ g(z(t), t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } [0, T]\}.$$

Por simplicidade, dado um ponto $\bar{z} \in \Omega$, vamos escrever

$$\bar{\phi}(t) = \phi(\bar{z}(t), t) \quad \text{e} \quad \nabla\bar{\phi}(t) = \nabla\phi(\bar{z}(t), t) \quad \text{q.t.p. em } [0, T].$$

Tal notação será usada também para $h,\ \nabla h,\ g,\ \nabla g$ e suas componentes. A norma em $L_\infty([0, T]; I\!\!R^n)$ é dada por

$$\|z\|_n^\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \|z_k\|^\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \ \text{ess} \sup_{t \in [0,T]} |z_k(t)|.$$

A norma em $L_1([0,T];I\!R^m)$ é dada por

$$\|z\|_m^1 = \max_{1\leq k\leq m} \|z_k\|^1 = \max_{1\leq k\leq m} \int_0^T |z_k(t)|\ dt.$$

Denotemos os conjuntos de índices por

$$I = \{1, 2, \ldots, p\} \quad \text{e} \quad J = \{1, 2, \ldots, m\},$$

e, para cada t, o conjunto de índices de restrições ativas por

$$I_a(t) = \{j \in J \mid \bar{g}_j(t) = 0\}$$

e seu complementar por $I_c(t) = J \backslash I_a(t)$. Denote por $q_a(t)$ e $q_c(t)$ as cardinalidades de $I_a(t)$ e $I_c(t)$, respectivamente.

Definição 1.1. *Dizemos que $\bar{z} \in \Omega$ é uma solução ótima local para o problema (1.1) se existe $\epsilon > 0$ tal que $P(\bar{z}) \geq P(z)$ para todo $z \in \Omega$ satisfazendo $z \in \bar{z} + \epsilon\bar{B}$, onde $\bar{B}$ denota a bola unitária fechada centrada na origem em $L_\infty([0,T];I\!R^n)$.*

Reiland ([14], Teorema 2) fornece uma condição para obter direções que, a partir de um dado ponto z, aumentam o valor da função objetivo.

Teorema 1.1. *([14]) Se*

$$\delta P(z;\gamma) = \int_0^T \nabla\phi'(z(t),t)\gamma(t)\ dt > 0$$

onde $z, \gamma \in L_\infty([0,T];I\!R^n)$, então existe um escalar positivo σ tal que

$$P(z + \tau\gamma) > P(z), \ \text{para } 0 < \tau \leq \sigma.$$

1.2 Análise e Álgebra Linear

Pinho e Vinter [36] desenvolveram um teorema da função inversa uniforme que, consequentemente, originou um corolário da função implícita uniforme, possibilitando o tratamento de problemas de otimização com tempo contínuo com restrições de igualdade, onde a variável é uma função vetorial dependente do tempo.

O teorema da aplicação inversa clássico afirma que se uma aplicação diferenciável $F : I\!R^n \to I\!R^n$ possui uma matriz jacobiana ∇F não singular em um certo ponto, então F é inversível em uma vizinhança desse ponto.

Suponha que F seja substituída por uma família de aplicações

$$\{F_a : I\!R^n \to I\!R^n \mid \ a \in A\},$$

parametrizada por pontos $a \in A \subset I\!R^k$. Se ∇F_a for não singular em um ponto x_0 para todo $a \in A$ sabemos que, para cada $a \in A$, existe alguma vizinhança de x_0 tal que F_a é inversível e esta inversa é diferenciável. O teorema da aplicação inversa uniforme nos garante que existe uma vizinhança de x_0 que vale para todo $a \in A$.

A seguir, enunciaremos o Teorema da Aplicação Inversa Uniforme e, consequentemente, o Corolário da Função Implícita Uniforme apresentados por Pinho e Vinter ([36], Proposições 4.1 e Corolário 4.2), que serão usados nos próximos capítulos.

Teorema 1.2 (Aplicação Inversa Uniforme, [36]). *Considere um conjunto $A \subset I\!R^k$, um número $\alpha > 0$, vetores $x_0,\ y_0 \in I\!R^n$, e uma família de funções $\{F_a : I\!R^n \to I\!R^n \mid a \in A\}$ satisfazendo $y_0 = F_a(x_0)$ para todo $a \in A$. Assuma que:*

(i) F_a é continuamente diferenciável em $x_0 + \alpha B$, uniformemente em $a \in A$.

(ii) Existe uma função monótona crescente $\theta : (0,\infty) \to (0,\infty)$, com $\theta(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, tal que

$$\|\nabla F_a(x) - \nabla F_a(\tilde{x})\| \leq \theta(\|x - \tilde{x}\|) \ \ \forall\ x, \tilde{x} \in x_0 + \alpha B,\ a \in A.$$

(iii) $\nabla F_a(x_0)$ é não singular para cada $a \in A$ e existe $c > 0$ tal que

$$\|[\nabla F_a(x_0)]^{-1}\| \leq c \ \ \forall a \in A.$$

Então existem números $\epsilon \in (0, \alpha)$ e $\delta > 0$, e uma família de funções continuamente diferenciáveis $\{G_a : y_0 + \delta B \to x_0 + \alpha B\}_{a\in A}$ que são Lipschitz com uma constante Lipschitz comum K, tais que

$$F_a(G_a(y)) = y \ \ \forall\ y \in y_0 + \delta B,\ a \in A,$$

$$G_a(F_a(x)) = x \ \ \forall\ x \in x_0 + \epsilon B,\ a \in A.$$

Os números ϵ e δ dependem somente de α, $\theta(\cdot)$ e c. Além disso, se A é um conjunto de Borel e $a \mapsto F_a(x)$ for Borel mensurável para cada $x \in x_0 + \alpha B$, então $a \mapsto G_a(y)$ é Borel mensurável para cada $y \in y_0 + \delta B$.

Corolário 1.1 (Função Implícita Uniforme, [36]). *Considere um conjunto $A \subset I\!R^k$, um número $\alpha > 0$, uma família de funções*

$$\{\psi_a : I\!R^m \times I\!R^n \to I\!R^n\}_{a\in A},$$

e um ponto $(u_0, v_0) \in I\!R^m \times I\!R^n$ tal que $\psi_a(u_0, v_0) = 0$ para todo $a \in A$. Considere as seguintes hipóteses:

(i) ψ_a *é continuamente diferenciável em* $(u_0, v_0) + \alpha B$*, uniformemente em* $a \in A$.

(ii) Existe uma função monótona crescente $\theta : (0, \infty) \to (0, \infty)$*, com* $\theta(s) \downarrow 0$ *quando* $s \downarrow 0$*, tal que*

$$\|\nabla \psi_a(\tilde{u}, \tilde{v}) - \nabla \psi_a(u, v)\| \leq \theta(\|(\tilde{u}, \tilde{v}) - (u, v)\|)$$

para todo $a \in A$*,* $(\tilde{u}, \tilde{v}),\ (u, v) \in (u_0, v_0) + \alpha B$.

(iii) $\nabla_v \psi_a(u_0, v_0)$ *é não singular para cada* $a \in A$ *e existe* $c > 0$ *tal que*

$$\|[\nabla_v \psi_a(u_0, v_0)]^{-1}\| \leq c \ \ \forall\ a \in A.$$

Então existe $\delta \geq 0$ *e uma família de funções continuamente diferenciáveis*

$$\{\phi_a : u_0 + \delta B \to v_0 + \alpha B\}_{a \in A}$$

que são Lipschitz, com constante Lipschitz comum K *tais que, para todo* $a \in A$*,*

$$\begin{aligned} v_0 &= \phi_a(u_0) \\ \psi_a(u, \phi_a(u)) &= 0 \ \ \forall\ u \in u_0 + \delta B, \\ \nabla_u \phi_a(u_0) &= -[\nabla_v \psi_a(u_0, v_0)]^{-1} \nabla_u \psi_a(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Os números δ *e* K *dependem somente de* $\theta(\cdot)$*,* c *e* α*. Além disso, se* A *é um conjunto de Borel e* $a \mapsto \psi_a(u, v)$ *é uma função Borel mensurável para cada* $(u, v) \in (u_0, v_0) + \alpha B$*, então* $a \mapsto \phi_a(u)$ *é uma função Borel mensurável para cada* $u \in u_0 + \delta B$.

Observação 1.1. *O Corolário 1.1 afirma que existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\psi_a(u, \phi_a(u)) = 0 \ \ \forall\ u \in u_0 + \delta B,\ a \in A.$$

Suponha que ψ_a *seja duas vezes continuamente diferenciável em* $(u_0, v_0) + \alpha B$*, uniformemente em* $a \in A$*. Usando a regra da cadeia temos, para todo* $u \in u_0 + \delta B$ *e* $a \in A$*, que*

$$\begin{aligned} \nabla_u \psi_a(u, \phi_a(u)) + \nabla_v \psi_a(u, \phi_a(u)).\nabla_u \phi_a(u) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla_v \psi_a(u, \phi_a(u)).\nabla_u \phi_a(u) &= -\nabla_u \psi_a(u, \phi_a(u)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por hipótese, $\nabla_v \psi_a(u_0, \phi_a(u_0))$ *é inversível para todo* $a \in A$*. Usando a mesma técnica de demonstração desenvolvida no Teorema 1.2 [36], pode-se concluir que* $\nabla_v \phi_a(u, \phi_a(u))$ *é inversível em uma vizinhança* $u_0 + \delta_1 B$*,* $0 < \delta_1 < \delta$*, para todo* $a \in A$*. Assim, (1.2) torna-se*

$$\nabla_u \phi_a(u) = -[\nabla_v \psi_a(u, \phi_a(u))]^{-1} \nabla_u \psi_a(u, \phi_a(u)) \ \ \forall\ u \in u_0 + \delta_1 B,\ a \in A. \tag{1.3}$$

Para cada $a \in A$ fixo, denote por $\mathscr{T}_a(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, por $\mathscr{L}_a(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e por $\mathscr{S}_a : \mathscr{T}_a(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{L}_a(\mathbb{R}^n)$ a inversão de transformações lineares. Escrevendo (1.3) na forma

$$\nabla_u \phi_a = -[\mathscr{S}_a \circ \nabla_v \psi_a] \nabla_u \psi_a$$

e lembrando que ψ_a é duas vezes continuamente diferenciável em $(u_0, v_0) + \alpha B$ e observando que $\mathscr{S}_a$ é de classe C^∞ (conforme Lima [50]), temos que $\phi_a(u)$ é duas vezes continuamente diferenciável numa vizinhança de u_0 para todo $a \in A$.

Lema 1.1 ([51])**.** *Sejam $k,\ n \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $t \in [0,T]$, $m(t),\ q(t),\ l(t) \in \mathbb{N}_0$, $m(t) + q(t) = n \leq k$, e considere*

$$J(t) := \begin{pmatrix} A(t) & 0 & 0 \\ N(t) & 0 & B(t) \end{pmatrix} \in R^{n \times (k + l(t) + q(t))},$$

com

$$A(t) \in R^{m(t) \times k}, \quad N(t) \in R^{q(t) \times k}, \quad B(t) \in R^{q(t) \times q(t)}.$$

Então, as seguintes condições

(i) $\exists\ c_A > 0 :\ \det\{A(t)A'(t)\} \geq c_A$ *para q.t.p.* $t \in [0,T]$;

(ii) $\exists\ c_B > 0 :\ \det\{B(t)B'(t)\} \geq c_B$ *para q.t.p.* $t \in [0,T]$;

(iii) $\exists\ c > 0 :\ \det\{J(t)J'(t)\} \geq c$ *para q.t.p.* $t \in [0,T]$;

estão relacionadas como se segue:

- (i), (ii) *e* $N \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^{q(t) \times k} \Rightarrow (iii)$.
- $(iii) \Rightarrow (i)$.
- $(iii) \not\Rightarrow (ii)$.

Teorema 1.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. [52])**.** *Sejam E um conjunto mensurável, g uma função integrável sobre E e $\{f_k\}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $|f_k| \leq g$ em E e para quase todo x em E temos que $f(x) = \lim f_k(x)$. Então*

$$\int_E f = \lim \int_E f_k.$$

O Lema 1.2 nos servirá de resultado auxiliar para obtermos informações sobre a inversa da soma de duas matrizes com certas propriedades, conforme o Lema 1.1.

Lema 1.2. *([53]) Sejam $p > 0$ um inteiro positivo e $F \in I\!R^{n\times n}$. Se $\|F\|_p < 1$, então $I_n - F$ é não singular e*

$$(I_n - F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k,$$

com

$$\|(I_n - F)^{-1}\|_p \leq \frac{1}{1 - \|F\|_p}.$$

Usando o Lema 1.2, verificamos um primeiro resultado que será utilizado nos próximos capítulos.

Proposição 1.1. *Se S e J são matrizes $n \times n$, S inversível e*

$$\|J\| < \frac{1}{2\|S^{-1}\|}, \tag{1.4}$$

então $S + J$ é inversível e

$$\|(S + J)^{-1}\| \leq 2\|S^{-1}\|.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que $S + J = (I_n + JS^{-1})S$. Escrevendo

$$I_n + JS^{-1} = I_n - (-JS^{-1}) = I_n - F,$$

onde $F = -JS^{-1}$, temos por (1.4) que

$$\|F\| = \| - JS^{-1}\| \leq \|J\|.\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{2}. \tag{1.5}$$

Logo, pelo Lema 1.2, $I_n - F = I_n + JS^{-1}$ é não singular e

$$\|(I_n + JS^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|JS^{-1}\|}. \tag{1.6}$$

Usando a desigualdade (1.5) temos que

$$\frac{1}{1 - \|JS^{-1}\|} \leq 2. \tag{1.7}$$

Assim por (1.6) e (1.7), temos que $\|(I_n + JS^{-1})^{-1}\| \leq 2$. Por fim, temos que $S + J$ é não singular e

$$\|(S + J)^{-1}\| = \|S^{-1}(I_n + JS^{-1})^{-1}\| \leq \|S^{-1}\|.\|(I_n + JS^{-1})^{-1}\| \leq 2\|S^{-1}\|.$$

$\square$

1.3 Teorema de Alternativa para Sistemas com Desigualdades Convexas

Vamos enunciar nesta seção um teorema de alternativa dado por Arutyunov, Zhukovskiy e Marinković ([23], Teorema 1) que estuda a existência de multiplicadores para um sistema com desigualdades convexas.

Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $\bar{R}$ o conjunto dos números reais estendido no sentido da Análise Convexa, $g_j : E \times [0,1] \to \bar{I\!R}$, $j = 1, \ldots, k$, funções dadas, X um subconjunto de E e sejam I_1 e I_2 dois subconjuntos de índices tais que $I_1 \sqcup I_2 = \{1, \ldots, k\}$ (aqui $\sqcup$ representa a união disjunta). Considere o sistema

$$\begin{cases} f_j(x,t) \leq 0, & j \in I_1 \\ f_j(x,t) < 0, & j \in I_2 \\ x \in X. \end{cases} \tag{I}$$

Uma solução deste sistema é uma função $\gamma \in L_\infty([0,1], X)$ tal que para quase todo $t \in [0, T]$ tem-se que

$$f_j(\gamma(t), t) \leq 0,\ j \in I_1, \quad f_j(\gamma(t), t) < 0, \quad j \in I_2, \quad \gamma(t) \in X.$$

Sobre o sistema (I), considere válidas as seguintes condições:

(1) X é fechado e convexo;

(2) Para cada $j = 1, \ldots, k$, as funções $f_j(\cdot, t)$ são convexas, contínuas em X, e $X \subset \text{int}(\text{dom}(f_j(\cdot, t)))$ para quase todo $t \in [0,1]$; Aqui, $\text{dom}(f_j(\cdot, t))$ denota o domínio efetivo de $f_j(\cdot, t)$ no sentido da Análise Convexa.

(3) Para cada $j = 1, \ldots, k$, as funções $f_j(x, \cdot)$ são Lebesgue mensuráveis para todo $x \in X$;

(4) Para cada $K \geq 0$ existe $M = M(K) \geq 0$ tal que

$$\|x\| \leq K \Rightarrow |f_j(x,t)| \leq M \ \text{ q.t.p. em } [0,1] \ \forall\, x \in X,\ \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

Denote por $\mathscr{I}(x,t)$ o conjunto de índices ativos do sistema (I), isto é,

$$\mathscr{I}(x,t) := \{j \mid f_j(x,t) = \max_{i=1,\ldots,k} f_i(x,t)\},\ t \in [0,1],\ x \in X.$$

Definição 1.2 (Cone Tangente de Bouligand, [54]). *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e S um subconjunto de X. O cone tangente a S em um ponto $z \in S$, denotado por $T_S(z)$, consiste de todos os pontos $\gamma \in X$ que podem ser expressos na forma*

$$\gamma = \lim_{k \to \infty} \frac{z_k - z}{t_k},$$

onde $\{z_k\}$ é uma sequência em S convergindo para z, e $\{t_k\}$ é uma sequência positiva convergindo para 0.

Ainda, denote por $O(x,R)$ a bola aberta centrada em $x \in E$ com raio $R \geq 0$ e S_E a esfera unitária em E. Para um vetor $x \in E$ e um funcional linear limitado $\varphi \in E^*$, denote por $\langle \varphi, x \rangle$ o valor de φ em x. A mesma notação significará produto interno entre os vetores $\varphi,\ x \in I\!\!R^n$.

Para uma função $f : E \to I\!\!R$, denotaremos por $\partial f(x)$ o subdiferencial de f no ponto x no sentido da análise convexa (ver [55, 56]), ou seja,

$$\partial f(x) = \{x^* \in E \mid f(x+h) \geq \langle x^*, h \rangle + f(x) \ \ \forall\ h \in E\}.$$

Para uma função $f : E \times [0,1] \to I\!\!R$ e um ponto $t \in [0,1]$ tal que $f(\cdot,t)$ é convexa, denotamos por $\partial_x f(x,t)$ o subdiferencial de $f(\cdot,t)$ no ponto $x \in E$.

Definição 1.3. *Dizemos que o sistema (I) é regular quando existem uma função $\bar{\gamma}(\cdot) \in L_\infty([0,1],X)$, reais $R \geq 0$ e $\alpha > 0$ tais que para quase todo $t \in [0,1]$ e para todo $x \in X \setminus O(\bar{\gamma}(t),R)$, existe $e = e(x,t) \in (-T_X(x)) \cap S_E$ satisfazendo*

$$\langle x^*, e \rangle \geq \alpha \ \ \forall\ x^* \in \partial_x f_j(x,t),\ \forall\ j \in \mathscr{I}(x,t).$$

Teorema 1.4. *([23]) Suponha que E seja um espaço de Banach separável, o sistema (I) é regular e, para quase todo $t \in [0,1]$, existe um vetor $u = u(t) \in X$ tal que $f_j(u(t),t) < 0$ para cada $j \in I_1$. Então, uma e somente uma das seguintes afirmações são válidas:*

- *(i) existe uma solução $\chi(\cdot)$ para o sistema (I).*
- *(ii) existe uma função não nula $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_k(\cdot)) \in L_\infty([0,1]; I\!\!R^k_+)$ tal que $\varphi_i(t) \not\equiv 0$ para algum $i \in I_2$ e*

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(x,t)\varphi_i(t) \geq 0 \ \ \text{q.t.p. em } [0,1],\ \forall\ x \in X.$$

Exemplo 1.1 ([23]). *Sejam $E = X = I\!\!R$, $f_1(x,t) = -x$, $f_2(x,t) = -\mathrm{sgn}(t-\frac{1}{2})x$, $t \in [0,1]$, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2\}$. Então o sistema (I) é equivalente a*

$$\begin{cases} -x \leq 0, \\ -\mathrm{sgn}(t - \frac{1}{2})x < 0. \end{cases}$$

Este sistema é regular. De fato, note que

- *$\mathscr{I}(x,t) = \{1,2\}$ para todo $t > \frac{1}{2}$;*

- $\mathscr{I}(x,t) = \{2\}$ *para todo* $t < \frac{1}{2}$ *e* $x > 0$*;*
- $\mathscr{I}(x,t) = \{1\}$ *para todo* $t < \frac{1}{2}$ *e* $x < 0$*.*

Assim, o sistema é regular com $R > 0$ *arbitrário,* $\alpha = 1$*,* $\bar{\gamma}(t) \equiv 0$ *e*

$$e(x,t) = \begin{cases} -1 & se \quad t > \frac{1}{2} \quad ou \quad (t < \frac{1}{2} \ e \ x < 0), \\ 1 \quad se \quad t < \frac{1}{2} \ e \ x > 0. \end{cases}$$

1.4 Otimização Não Linear em Dimensão Finita

Consideremos o problema de programação não linear em dimensão finita dado por

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & f(x) & \\ \text{sujeito a} & h_i(x) = 0, \quad i \in I, & \\ & g_j(x) \geq 0, \quad j \in J, & \end{array} \qquad \text{(PNL)}$$

onde $I = \{1, \ldots, p\}$, $J = \{1, \ldots, m\}$, f, h_i, $g_j : I\!R^n \to I\!R$, $i \in I$, $j \in J$, são funções continuamente diferenciáveis em $I\!R^n$. O conjunto factível do problema (PNL) é dado por

$$F = \{x \in I\!R^n \mid h_i(x) = 0,\ i \in I,\ g_j(x) \geq 0,\ j \in J\}$$

e o conjunto de restrições de desigualdade ativas em um certo ponto $\bar{x} \in F$ é dado por

$$A(\bar{x}) = \{j \in J \mid g_j(\bar{x}) = 0\}.$$

Um ponto $\bar{x} \in F$ é um minimizador local para (PNL) quando existe uma vizinhança $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) \geq f(x)$ para todo $x \in V(\bar{x})$. Um ponto $\bar{x} \in F$ é um minimizador global para (PNL) quando $f(\bar{x}) \geq f(x)$ para todo $x \in F$.

Uma condição de otimalidade é uma condição necessária que um minimizador local deve satisfazer. Os métodos computacionais de programação não linear em dimensão finita utilizam da condição de otimalidade para buscar pontos estacionários para o problema (PNL), ou seja, candidatos factíveis que possam ser solução do problema (PNL).

Condição K.K.T.: Um ponto $x \in F$ satisfaz a condição K.K.T. quando existem $\lambda \in I\!R^p$ e $\mu \in I\!R^m$ tais que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0,$$
$$\mu_j \geq 0,\ j \in J, \quad \mu_j g_j(\bar{x}) = 0,\ j \in J.$$

A condição K.K.T., por si só, não é uma condição de otimalidade pois podemos encontrar minimizadores de problemas (PNL) que não verificam K.K.T.. Por exemplo,

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & e^x \\ \text{sujeito a} & x^2 = 0, \end{array}$$

onde $\bar{x} = 0$ é o único ponto factível e solução global do problema, mas

$$f'(0) + \lambda h'(0) = 1 + \lambda 0 = 1 \neq 0.$$

Para garantir que um minimizador local (global) satisfaça K.K.T. devemos impor uma hipótese adicional às restrições do problema. Esta hipótese é chamada de **qualificação de restrições**. Existem muitas qualificações de restrições na literatura, sendo um campo vasto para estudos e pesquisa. Como exemplos, apresentaremos a seguir algumas delas.

Condição de Slater [57]: A condição de Slater acontece para (PNL) quando h é afim, g é convexa e existe $\hat{x} \in F$ tal que

$$h(\hat{x}) = 0 \quad \text{e} \quad g(\hat{x}) > 0.$$

Independência Linear (LICQ) (ver [37, 38]): A qualificação de restrições de independência linear acontece em $\bar{x} \in F$ quando o conjunto de vetores

$$\{\nabla h_i(\bar{x}) \mid i \in I\} \cup \{\nabla g_j(\bar{x}) \mid j \in A(\bar{x})\}$$

for linearmente independente.

Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) [39]: A qualificação de restrições de Mangasarian-Fromovitz é satisfeita em $\bar{x} \in F$ quando o conjunto de vetores $\{\nabla h_i(\bar{x}) \mid i \in I\}$ é linearmente independente e existe $d \in I\!R^n$ tal que

$$\nabla h_i'(\bar{x})d = 0, \; i \in I, \quad \text{e} \quad \nabla g_j'(\bar{x})d > 0, \; j \in A(\bar{x}).$$

Definição 1.4 (ver [58])**.** *Sejam $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_s\}$ conjuntos finitos de vetores em $I\!R^n$. Dizemos que o par de conjuntos (B, C) é positivo-linearmente independente (PLI) quando não existem escalares $\beta_i, \; \eta_j \in I\!R, \; \eta_j \geq 0, \; i = 1, \ldots, r, \; j = 1, \ldots, s$, não simultaneamente nulos, tais que*

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i + \sum_{j=1}^{s} \eta_j c_j = 0.$$

Caso contrário, dizemos que o par de conjuntos (B, C) é positivo-linearmente dependente (PLD).

Observação 1.2. *Do mesmo modo que na dependência e independência linear de vetores, se $(\tilde{B}, \tilde{C}) \subset (B, C)$ e (B, C) for PLI, então $(\tilde{B}, \tilde{C})$ é PLI. Também, se $(\tilde{B}, \tilde{C}) \subset (B, C)$ e $(\tilde{B}, \tilde{C})$ for PLD, então (B, C) é PLD.*

Independência Linear Positiva (PLI) (ver [59]): A qualificação de restrições de independência linear positiva é satisfeita em $\bar{x} \in F$ quando o conjunto de vetores

$$\{\nabla h_i(\bar{x}) \mid i \in I\} \cup \{\nabla g_j(\bar{x}) \mid j \in A(\bar{x})\}$$

for PLI.

Condição de Posto Constante (CRCQ) [40]: A qualificação de restrições de posto constante é satisfeita em $\bar{x} \in F$ quando existe uma vizinhança $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que para todo $i \subset I$ e $j \subset A(\bar{x})$ o conjunto de vetores

$$\{\nabla h_i(y) \mid i \in I\} \cup \{\nabla g_j(y) \mid j \in A(\bar{x})\}$$

tem posto constante para todo $y \in V(\bar{x})$.

Dependência Linear Positiva Constante (CPLD) [60]: A qualificação de restrições de dependência linear positiva é satisfeita em $\bar{x} \in F$ se para todo $I_0 \subset I$ e $J_0 \subset A(\bar{x})$, com o conjunto de vetores

$$\{\nabla h_i(\bar{x}) \mid i \in I_0\} \cup \{\nabla g_j(\bar{x}) \mid j \in J_0\}$$

positivo-linearmente dependente, existir uma vizinhança uma vizinhança $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que o conjunto de vetores

$$\{\nabla h_i(y) \mid i \in I_0\} \cup \{\nabla g_j(y) \mid j \in J_0\}$$

seja positivo-linearmente dependente para todo $y \in V(\bar{x})$.

Definição 1.5. *([61])*

- *Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, chamamos de polar de S o seguinte cone convexo fechado:*

$$P(S) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y'x \leq 0 \ \ \forall \ x \in S\}.$$

- *Dados $\bar{x} \in F$ definimos o cone viável linearizado de F em torno de $\bar{x}$ por $D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_i'(\bar{x})d = 0, \ i \in I, \ \nabla g_j'(\bar{x})d \geq 0, \ j \in A(\bar{x})\}$.*

Considere a Definição 1.2 de cone tangente quando $X = \mathbb{R}^n$ e $S \subset \mathbb{R}^n$ e denote por $T_F(\bar{x})$ o cone tangente a F em $\bar{x}$. $T_F(\bar{x})$ é um cone fechado.

Condição de Guignard [62]: A qualificação de restrições de Guignard acontece em $\bar{x} \in F$ quando $P(T_F(\bar{x})) = P(D(\bar{x}))$.

Condição de Abadie [17]: A qualificação de restrições de Abadie acontece em $\bar{x} \in F$ quando $T_F(\bar{x}) = D(\bar{x})$.

A condição de Guignard é a condição mais fraca possível para se provar as condições K.K.T., isto é, todas as demais qualificações de restrições implicam

Guignard. Abaixo, temos um esquema com as relações entre as qualificações apresentadas nesta seção. Para mais informações sobre outras qualificações de restrições e das relações entre elas, indicamos os textos [59, 61, 64].

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \boxed{\text{LICQ}} & \Rightarrow & \boxed{\text{CRCQ}} & & & & \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \\ \boxed{\text{Slater}} & \Rightarrow & \boxed{\text{MFCQ}} & \Rightarrow & \boxed{\text{CPLD}} & \Rightarrow & \boxed{\text{Abadie}} & \Rightarrow & \boxed{\text{Guinard}} \\ & & \Updownarrow & & & & & & \\ & & \boxed{\text{PLI}} & & & & & & \end{array}$$

Figura 1. Qualificações de Restrições em Otimização com Dimensão Finita.

1.5 Aplicações

Há 60 anos, Bellman [2] publicou o livro “Dynamic Programming” onde desenvolveu conceitos matemáticos teóricos aplicados a processos de decisão em múltiplas etapas. Em uma das aplicações, considera-se um sistema com dois processos industriais: o automobilístico e o de produção de aço. Em qualquer tempo t, assume-se que o sistema é completamente determinado pelas seguintes quantidades:

$$\begin{cases} x_1(t) := & \text{estoque de carros no tempo } t; \\ x_2(t) := & \text{capacidade de produção de carros no tempo } t; \\ x_3(t) := & \text{estoque de aço no tempo } t; \\ x_4(t) := & \text{capacidade de produção de aço no tempo } t. \end{cases}$$

Considerando t uma variável contínua, em cada instante devemos determinar taxas de distribuição do estoque de aço para três diferentes objetivos:

(a) Produção de automóveis;

(b) Construção de fábricas de automóveis (para aumento da capacidade de produção);

(c) Construção de siderúrgicas (para aumento da capacidade de produção de aço).

Os dois últimos desses objetivos devem ser tratados com o objetivo primário de maximizar o total de automóveis produzidos em um determinado período de tempo T, ou seja, a quantidade $x_1(T)$. As hipóteses básicas desse modelo são as seguintes: as medidas de estocagem e capacidade são escolhidas de tal forma que uma unidade de capacidade, ou automóvel ou aço, é necessária para produção de uma unidade de estoque num tempo unitário.

Admitiremos que b_1 unidades de aço são necessárias para produzir uma unidade de automóvel, b_2 unidades de aço são necessárias para aumentar a capacidade de produção em uma unidade e b_4 unidades de aço são necessárias para aumentar a capacidade de produção de aço em uma unidade (produção de novas fábricas). Todavia, vamos supor que nenhuma unidade de aço é necessárias para produção de mais aço.

Uma outra hipótese importante é que não existe atraso entre a distribuição e aumento da capacidade de produção. Problemas que envolvem tais atrasos são mais difíceis de serem tratados e não serão considerados nesse exemplo. Sejam

$$\begin{cases} z_1(t) := & \text{taxa de produção de carros;} \\ z_2(t) := & \text{taxa de aumento da capacidade de produção de carros;} \\ z_3(t) := & \text{taxa de produção de aço;} \\ z_4(t) := & \text{taxa de aumento da capacidade de produção de aço.} \end{cases}$$

Seguindo argumentações e raciocínios feitos no Capítulo VI de [2], pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = z_1(t), \quad \frac{dx_2}{dt} = z_2(t), \\ &\frac{dx_3}{dt} = z_3(t) - b_1 z_1(t) - b_2 z_2(t) - b_4 z_4(t), \quad \frac{dx_4}{dt} = z_4(t), \\ &x_1(0) = c_1,\ x_2(0) = c_2,\ x_3(0) = c_3,\ x_4(0) = c_4, \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde $x_i,\ z_i,\ i = 1, \ldots, 4$, estão sujeitas às seguintes restrições:

$$\text{(a) } z_1(t) \leq x_2(t),\ \text{(b) } z_3(t) \leq x_4(t),\ \text{(c) } x_1 \geq 0,\ \text{(d) } x_3(t) \geq 0. \tag{1.9}$$

As desigualdades (a) e (b) são restrições de capacidade, a desigualdade (c) nos diz que as taxas de produção são não-negativas e a desigualdade (d) afirma que o estoque de aço deve ser não-negativo, ou seja, sem empréstimo de aço. O problema agora é o de determinar $z_i(t)$ satisfazendo as restrições de (1.9) que maximize $x_1(T)$. (1.8) e (1.9) podem ser combinados para se obter

$$\begin{aligned} &z_1(t) - \int_0^t z_2(s)\ ds \leq c_2, \\ &\int_0^t [-z_3(s) + b_1 z_1(s) + b_2 z_2(s) + b_4 z_4(s)]\ ds \leq c_3, \\ &z_3(t) - \int_0^t z_4(s)\ ds \leq c_4. \end{aligned}$$

Este problema é um caso especial do seguinte problema mais geral:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \displaystyle\int_0^T a'z(t)\ dt \\ \text{sujeito a} & z(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \displaystyle Bz(t) + \int_0^t Cz(s)\ ds \leq c, \quad 0 \leq t \leq T, \end{array}$$

onde B e C são matrizes e c é um vetor constante.

De modo mais geral e sob hipóteses apropriadas, certas classes de problemas variacionais e de controle ótimo com restrições podem ser escritos na forma (1.1). Por exemplo, o problema de controle ótimo com dinâmica linear, restrições de igualdade lineares e restrições de desigualdades não lineares nas variáveis de estado e de controle é um caso especial do problema (1.1) ([20], p. 517):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\int_0^T f(x(t), u(t), t)\ dt \\ & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + a(t), \\ & \displaystyle C(t)x(t) + D(t)u(t) + \int_0^t K_s(t,\tau)x(\tau)\ d\tau + \\ & \displaystyle\int_0^t K_c(t,\tau)u(\tau)\ d\tau = b(t), \\ & \displaystyle g(x(t), u(t), t) \leq c(t) + \int_0^t h(x(t), u(t), t, \tau)\ d\tau \\ & t \in [0,T],\ x(0) \text{ dado}, \end{array}$$

onde A, B, C, D, K_s, K_c são matrizes dependentes do tempo. Também, o problema de controle ótimo com dinâmica não linear e com restrições nas variáveis de estado e de controle é um caso especial do problema (1.1) ([65], p. 144):

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \displaystyle\int_0^T \psi(x(t), u(t), t)\ dt \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\alpha_i(x(t), u(t), t) = \beta_i(t) + \int_0^t \gamma_i(x(s), u(s), t, s)\ ds \\ & \text{q.t.p. em } [0,T],\ i = 1, \ldots, p, \\ & \displaystyle\lambda_i(x(t), u(t), t) \leq \mu_i(t) + \int_0^t v_i(x(s), u(s), t, s)\ ds \\ & \text{q.t.p. em } [0,T],\ i = 1, \ldots, m, \\ & x \in X,\ u \in U, \end{array}$$

onde $X = L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n)$ e U é o conjunto de controles admissíveis.

Capítulo 2

Qualificação de Restrições Posto Completo

Neste capítulo, uma qualificação de restrições posto completo e o Teorema 1.1 serão usados para obter condições necessárias de primeira e segunda ordem para problemas de otimização com tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade.

Na primeira seção, condições necessárias de primeira e segunda ordem são apresentadas para um problema com tempo contínuo sem restrições. Na segunda seção, abordando um problema com tempo contínuo e com restrições de igualdade, obtém-se condições necessárias de primeira e segunda ordem com a utilização de uma condição de posto completo e do Corolário 1.1. Na terceira seção, condições necessárias de primeira e segunda ordem para o problema (1.1) são obtidas, reescrevendo o problema por meio de folgas complementares e resolvendo-o como um problema com apenas restrições de igualdade, utilizando resultados da primeira e segunda seções.

2.1 Problema Irrestrito

Considere o problema de programação não linear com tempo contínuo sem restrições (SR) dado por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & P(z) = \displaystyle\int_0^T \phi(z(t),t)dt \\ \text{sujeito a} & z \in \Omega \end{array} \tag{SR}$$

onde $\Omega = L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ e $\phi : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Dado $\bar{z} \in \Omega$, admita como válida a seguinte hipótese sobre a função objetivo de (SR):

(H1) $\phi(z,\cdot)$ é mensurável para cada z, $\phi(\cdot,t)$ é uma função escalar duas vezes continuamente diferenciável em $\bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0,T]$. Existe $K_\phi > 0$

tal que
$$\|\nabla\bar{\phi}(t)\| \leq K_\phi \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Proposição 2.1. *Se $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (SR) então*

$$\nabla\phi(\bar{z}(t),t) = 0 \quad \textit{q.t.p. em } [0,T]$$

e
$$\int_0^T \gamma'(t)\nabla^2\phi(\bar{z}(t),t)\gamma(t)\ dt \leq 0 \quad \forall\ \gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Sejam $\tau > 0$ e $\gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ tais que $P(\bar{z}) \geq P(\bar{z}+\tau\gamma)$ para τ suficientemente pequeno. Pela expansão de Taylor de primeira ordem em espaços de Banach ([66], p. 309) temos que

$$0 \geq P(\bar{z}+\tau\gamma) - P(\bar{z}) = \tau\delta P(\bar{z};\gamma) + \varepsilon(\tau),$$

onde $\varepsilon(\tau)/\tau \to 0$ quando $\tau \to 0$ e $\delta P(\bar{z};\gamma)$ representa a derivada Fréchet de P em $\bar{z}$ com direção γ. Dividindo a desigualdade acima, em ambos os membros, por $\tau > 0$ e considerando τ suficientemente pequeno, temos que $\delta P(\bar{z};\gamma) \leq 0$. Como $\gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ é arbitrária, com $-\gamma$ e um raciocínio análogo, concluiremos que $\delta P(\bar{z};\gamma) \geq 0\ \forall\ \gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$. Assim, $\delta P(\bar{z};\gamma) = 0$, isto é,

$$\int_0^T \nabla\phi'(\bar{z}(t),t)\gamma(t)\ dt = 0 \quad \forall\ \gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n),$$

resultando em
$$\nabla\phi(\bar{z}(t),t) = 0 \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Agora, pela expansão de Taylor de segunda ordem [66] e o fato de que $\delta P(\bar{z};\gamma) = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 \geq P(z+\tau\gamma) - P(\bar{z}) &= \tau\delta P(\bar{z};\gamma) + \frac{1}{2}\tau^2\delta^2 P(\bar{z};(\gamma,\gamma)) + \varepsilon(\tau) \\ &= \frac{1}{2}\tau^2\delta^2 P(\bar{z};(\gamma,\gamma)) + \varepsilon(\tau), \end{aligned}$$

onde $\varepsilon(\tau)/\tau^2 \to 0$ quando $\tau \to 0$. Dividindo a desigualdade anterior por τ^2, ambos os membros, e considerando $\tau > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\delta^2 P(\bar{z};(\gamma,\gamma)) \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^T \gamma'(t)\nabla^2\phi(\bar{z}(t),t)\gamma(t)\ dt \leq 0.$$

Como $\gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ é arbitrária, a proposição está demonstrada. □

2.2 Problema com Restrições de Igualdade

Considere o problema tempo contínuo com restrições de igualdade (RI) dado por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & P(z) = \int_0^T \phi(z(t),t)dt \\ \text{sujeito a} & z \in \Omega \end{array} \tag{RI}$$

onde

$$\Omega = \{z \in L_\infty([0,T]; \mathbb{R}^n) \mid h(z(t),t) = 0 \text{ q.t.p. em } [0,T]\},$$

com $\phi : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^p$. Sejam $\epsilon > 0$ e $\bar{z} \in \Omega$. Considere válida a hipótese (H1) para o problema (RI) e as seguintes hipóteses adicionais:

(H2) $h(z,\cdot)$ é mensurável para cada z e $h(\cdot,t)$ é duas vezes continuamente diferenciável em $\bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0,T]$.

(H3) Existe uma função crescente $\tilde{\theta} : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\theta(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, tal que para todo $\tilde{z}, z \in \bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ e q.t.p. em $[0,T]$,

$$\|\nabla h(\tilde{z},t) - \nabla h(z,t)\| \le \tilde{\theta}(\|\tilde{z} - z\|).$$

Existe $K_0 > 0$ tal que para q.t.p. em $[0,T]$,

$$\|\nabla \bar{h}(t)\| \le K_0.$$

(H4) Existe $K > 0$ tal que, para q.t.p. em $[0,T]$,

$$\det\{\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)\} \ge K,$$

onde $\nabla \bar{h}(t) = \nabla h(\bar{z}(t),t)$.

Observação 2.1. *A hipótese (H4) é a condição de posto completo para problemas com apenas restrições de igualdade e nos garante, entre outras coisas, que as linhas da matriz $\nabla \bar{h}(t)$ são linearmente independentes para quase todo $t \in [0,T]$. A limitação uniforme do determinante na hipótese (H4) nos permitirá a aplicação do Corolário 1.1.*

Proposição 2.2. *Considere um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^k$ e uma família de matrizes $p \times p$ dadas por $\{M_a\}_{a \in A}$ tal que*

$$det(M_a) \ge K, \ a \in A,$$

para algum $K > 0$. Se existe $L > 0$ tal que $\|M_a\| \le L$, $a \in A$, então existe $M > 0$ tal que

$$\|[M_a]^{-1}\| \le M, \ a \in A.$$

Demonstração. Considere a decomposição em valores singulares

$$M_a = U_a \Sigma_a V_a^{-1},\ a \in A,$$

onde U_a e V_a são matrizes $p \times p$ unitárias para todo $a \in A$ e $\Sigma_a = \mathrm{diag}\{\sigma_i^a\}_{i=1}^p$ são matrizes diagonais com valores singulares ordenados, sem perda de generalidade, em ordem decrescente

$$\sigma_1^a \geq \sigma_2^a \geq \ldots \sigma_p^a > 0,\ a \in A,$$

e são não nulos pois $\det(M_a) \geq K > 0$ para todo $a \in A$ (Trefethen e Bau [67]). Assim,

$$L \geq \|M_a\| = \|U_a \Sigma_a V_a^{-1}\| = \|\Sigma_a\|,\ a \in A,$$

e podemos concluir que

$$\sigma_i^a \leq \max_{i \in I} |\sigma_i^a| = \|\Sigma_a\| \leq L,\ a \in A,\ i \in I,$$

que, por sua vez, implica que

$$\prod_{i=1}^{p-1} \sigma_i^a \leq L^{p-1},\ a \in A.$$

Por outro lado,

$$\det(M_a) = \prod_{i=1}^{p} \sigma_i^a \geq K,\ a \in A \Leftrightarrow \sigma_p^a \geq K \left[\prod_{i=1}^{p-1} \sigma_i^a\right]^{-1} \geq \frac{K}{L^{p-1}},\ a \in A.$$

Também, temos que

$$[M_a]^{-1} = V_a \Sigma_a^{-1} U_a,\ a \in A,$$

e as matrizes diagonais Σ_a^{-1} tem valores singulares $1/\sigma_i^a$, $a \in A$, $i \in I$. Logo, como

$$\|\Sigma_a^{-1}\| = \max_{i \in I} \left\{\frac{1}{\sigma_i^a}\right\} = \frac{1}{\min\limits_{i \in I} \{\sigma_i^a\}} = \frac{1}{\sigma_p^a},\ a \in A,$$

temos que

$$\|[M_a]^{-1}\| = \|[\Sigma_a^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_p^a} \leq \frac{L^{p-1}}{K},\ a \in A,$$

que conclui a demonstração com $M = \dfrac{L^{p-1}}{K}$. $\square$

Teorema 2.1. *Seja $\bar{z}$ solução ótima local para (RI) que satisfaz (H1)-(H4). Então, existe único $u \in L_\infty([0,T]; I\!R^p)$ tal que*

$$\nabla \bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla \bar{h}_i(t) = 0 \ \ q.t.p. \ \ em \ \ [0,T], \tag{2.1}$$

$$\int_0^T \gamma'(t)\{\nabla^2\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)\}\gamma(t)\ dt \leq 0 \quad \forall\ \gamma \in N, \tag{2.2}$$

onde N é dado por

$$N = \{\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n) \mid \nabla\bar{h}_i'(t)\gamma(t) = 0 \quad q.t.p.\ \ em\ [0,T],\ i \in I\}.$$

Demonstração. Seja $\bar{z}$ solução ótima local para o problema (RI) em $\bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0,T]$. Procederemos em vários passos.

PASSO 1: Vamos definir uma aplicação d que satisfaça as condições do Corolário 1.1. Seja $S_0 \subset [0,T]$ o maior subconjunto onde cada uma das condições (H1)-(H4) não acontecem para todo $t \in S_0$. Sabemos pelas hipóteses que S_0 tem medida nula. Segue de ([68], p. 309) que existe um conjunto de Borel S que é a intersecção de uma coleção enumerável de conjuntos abertos, tal que $S_0 \subset S$ e $S \setminus S_0$ tem medida nula, ou seja, $[0,T] \setminus S$ tem medida total. Identifique no Corolário 1.1, $A = [0,T]\setminus S$ um conjunto de Borel de medida total, t com a, (ξ,η) com (u,v) e $(0,0)$ com (u_0,v_0).

Defina $\mu : I\!R^n \times I\!R^p \times [0,T] \to I\!R^p$ dada por

$$\mu(\xi,\eta,t) = h(\bar{z}(t) + \xi + \nabla\bar{h}'(t)\eta, t).$$

Observe que, para quase todo $t \in [0,T]$, $\mu(0,0,t) = h(\bar{z}(t),t) = 0$ e considerando $\alpha = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2K_0}\}$, que

$$\|\bar{z}(t) + \xi + \nabla\bar{h}'(t)\eta - \bar{z}(t)\| = \|\xi + \nabla\bar{h}'(t)\eta\| \leq \|\xi\| + \|\nabla\bar{h}'(t)\|.\|\eta\| \leq \epsilon,$$

sempre que $(\xi,\eta) \in (0,0)+\alpha\bar{B}$. Segue de (H2) que μ é diferenciável em $(0,0)+\alpha B$ para todo $t \in A$. Para $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$, $(\xi,\eta) \in (0,0)+\alpha B$, $t \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mu(\tilde{\xi},\tilde{\eta},t) - \nabla\mu(\xi,\eta,t)\| \\
&\quad = \|(\ \nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t) \quad \nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t)\nabla\bar{h}'(t)\ ) \\
&\qquad -(\ \nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t) \quad \nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)\nabla\bar{h}'(t)\ )\| \\
&\quad = \|[\nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t) - \nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)][\ I_n \quad \nabla\bar{h}'(t)\ ]\| \\
&\quad \leq \|\nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t) - \nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)\|.\|[\ I_n \quad \nabla\bar{h}'(t)\ ]\| \\
&\quad \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi) + \nabla\bar{h}'(t)(\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0) \\
&\quad \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi)\| + K_0.\|(\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0) \\
&\quad \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}-\eta)\| + K_0.\|(\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0) \\
&\quad = \theta(\|(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) - (\xi,\eta)\|),
\end{aligned}$$

onde a função $\theta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por

$$\theta(s) = (1+K_0)\tilde{\theta}(s + K_0 s)$$

é uma monótona crescente e que, quando $s \downarrow 0$, $\tilde{\theta}(s) \downarrow 0$, implicando que $\theta(s) \downarrow 0$.

Note que

$$\nabla_\eta \mu(0,0,t) = \nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t) \;\; \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Assim, por (H4), $\nabla_\eta \mu(0,0,t)$ é não singular para todo $t \in A$. Usando as hipóteses (H3) e (H4) temos, pela Proposição 2.2, que existe $M > 0$ tal que

$$\|[\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)]^{-1}\| \leq M \text{ q.t.p. em } [0,T]. \tag{2.3}$$

Logo, o Corolário 1.1 nos garante que existem $\sigma \in (0,\epsilon)$, $\delta \in (0,\epsilon)$ e uma aplicação implícita

$$d : \sigma B \times A \to \delta B$$

tal que $d(\xi,\cdot)$ é uma função mensurável para fixo ξ, as funções $\{d(\cdot,t) \mid t \in A\}$ são Lipschitz com constante Lipschitz comum, $d(\cdot,t)$ é continuamente diferenciável para cada $t \in A$,

$$\begin{aligned} d(0,t) &= 0 \;\; \text{q.t.p. em } [0,T], && (2.4)\\ \mu(\xi, d(\xi,t), t) &= 0 \;\; \text{q.t.p. em } [0,T],\ \xi \in \sigma B, && (2.5)\\ \nabla d(0,t) &= -[\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)]^{-1} \nabla \bar{h}(t). && (2.6) \end{aligned}$$

Escolha $\sigma_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que

$$\sigma_1 \in (0, \min\{\sigma, \frac{\epsilon}{2}\}), \qquad \delta_1 \in (0, \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2}\}), \qquad \sigma_1 + K_0 \delta_1 \in (0, \frac{\epsilon}{2}), \tag{2.7}$$

onde K_0 é dado por (H3). Nos passos seguintes e sem perda de generalidade, consideraremos a função implícita d definida em $\sigma_1 B \times [0,T]$ tomando valores em $\delta_1 B$.

PASSO 2: Mostraremos que, se $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (RI), então $\bar{z}$ é uma solução ótima local para o problema auxiliar dado por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \tilde{P}(z) = \displaystyle\int_0^T \varphi(z(t),t)\ dt \\ \text{sujeito a} & z \in L_\infty([0,T]; I\!R^n), \end{array} \tag{AUX}$$

onde $\varphi(z(t),t) = \phi(z(t) + \nabla \bar{h}'(t) d(z(t) - \bar{z}(t), t), t)$.

De fato, suponha que $\tilde{z} \in \bar{z}(t) + \sigma_2 B$, para $0 < \sigma_2 < \sigma_1$ arbitrário, é uma solução factível para (AUX) tal que $\tilde{P}(\tilde{z}) > \tilde{P}(\bar{z})$. Considere

$$\hat{z}(t) = \tilde{z}(t) + \nabla \bar{h}'(t) d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Usando (2.7) e (H3), temos que

$$\begin{aligned} \|\hat{z}(t) - \bar{z}(t)\| &= \|(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)) + \nabla \bar{h}'(t) d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), t)\| \\ &\leq \|\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)\| + \|\nabla \bar{h}'(t)\|.\|d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), t)\| < \sigma_1 + K_0 \delta_1 < \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\tilde{z} - \bar{z} \in \sigma_1 B$, pela definição de μ tem-se

$$\mu(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), t), t) = 0 \Rightarrow h(\tilde{z}(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), t), t) = 0,$$

ou seja, $h(\hat{z}(t), t) = 0$. Mas,

$$P(\hat{z}) = \tilde{P}(\tilde{z}) > \tilde{P}(\bar{z}) = P(\bar{z}),$$

o que contradiz o fato de que $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (RI).
PASSO 3: Sendo $\bar{z}$ solução ótima local para (RI), então $\bar{z}$ é uma solução ótima local para o problema sem restrição (AUX) pelo PASSO 2. Logo, pela Proposição 2.1 temos que, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla\varphi(\bar{z}(t), t) \\
&= \{I_n + \nabla\bar{h}'(t)\nabla d(0, t)\}'\nabla\phi(\bar{z}(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(0, t), t) \\
&= \nabla\phi(\bar{z}(t), t) + \nabla d'(0, t)\nabla\bar{h}(t)\nabla\phi(\bar{z}(t), t) \\
&= \nabla\phi(\bar{z}(t), t) + \nabla h'(\bar{z}(t), t)\{-[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\nabla\phi(\bar{z}(t), t)\} \\
&= \nabla\phi(\bar{z}(t), t) + \nabla h'(\bar{z}(t), t)u(t) \\
&= \nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t)
\end{aligned}$$

fornecendo (2.1) com

$$u(t) = -[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{\phi}(t) \text{ q.t.p. em } [0, T].$$

Pelas hipóteses (H1), (H3) e (2.1), note que $u \in L_\infty([0, T]; I\!R^p)$ pois

$$\|u(t)\| \leq MK_0K_\phi \;\text{ q.t.p. em } [0, T],$$

sendo escrito de forma única.
PASSO 4: Vamos verificar a condição de segunda ordem (2.2). Sendo $\phi(\cdot, t)$ e $h(\cdot, t)$ duas vezes continuamente diferenciáveis em $\bar{z} + \epsilon\bar{B}$ ao longo de $[0, T]$, temos por definição que $\mu(\xi, d(\xi, t), t)$ q.t.p. em $[0, T]$, é duas vezes continuamente diferenciável em $\sigma_1 B$ e, por consequência do Corolário 1.1 (conforme Observação 1.1), d é duas vezes diferenciável em uma vizinhança de $\xi = 0$ que, por simplicidade, consideraremos essa vizinhança como sendo $\sigma_1 B$.

Pela Proposição 2.1, temos que

$$\int_0^T \gamma'(t)\nabla^2\varphi(\bar{z}(t), t)\gamma(t)\, dt \leq 0 \;\; \forall\, \gamma \in L_\infty([0, T]; I\!R^n).$$

Calculando $\nabla\varphi$ temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi(z(t), t) &= [I_n + \nabla\bar{h}'(t)\nabla d(z(t) - \bar{z}(t), t)]'\nabla\phi(z(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(z(t) - \bar{z}(t), t)) \\
&= \nabla\phi(z(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(z(t) - \bar{z}(t), t)) \\
&\quad + \nabla d'(z(t) - \bar{z}(t), t)\nabla\bar{h}(t)\nabla\phi(z(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(z(t) - \bar{z}(t), t)),
\end{aligned}$$

onde

$$\nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}(t)=\sum_{i=1}^{p}\nabla d_i(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}_i'(t).$$

Observe que se $z=\bar{z}$, usando (2.6), resulta que

$$-\nabla\bar{h}'(t)[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)=\nabla d'(0,t)\nabla\bar{h}(t)=\sum_{i=1}^{p}\nabla d_i(0,t)\nabla\bar{h}_i'(t).$$

Da expressão de $\nabla\varphi$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\varphi(z(t),t)\\
&\quad=\left\{I_n+\nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}(t)\right\}\nabla^2\phi'(z(t)+\nabla\bar{h}'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t),t)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{p}\{\nabla^2 d_i(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}_i'(t)\nabla\phi(z(t)+\nabla\bar{h}'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t),t)\\
&\qquad+\nabla d_i(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}_i'(t)\left[I_n+\nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}(t)\right]\\
&\qquad\quad\nabla^2\phi(z(t)+\nabla\bar{h}'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t),t)\}.
\end{aligned}$$

Em particular, com $z=\bar{z}$ e $\gamma\in N$ temos, para q.t.p. em $[0,T]$, que

$$\begin{aligned}
&\gamma'(t)\nabla^2\varphi(\bar{z}(t),t)\gamma(t)\\
&\quad=\gamma'(t)\nabla^2\bar{\phi}(t)\gamma(t)-\gamma'(t)\nabla\bar{h}'(t)[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\nabla^2\bar{\phi}(t)\\
&\qquad+\gamma'(t)\left[\sum_{i=1}^{p}\nabla^2 d_i(0,t)\nabla\bar{h}_i'(t)\right]\nabla\bar{\phi}(t)\gamma(t)\\
&\qquad-\gamma'(t)\nabla\bar{h}'(t)[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\left[I_n+\nabla d'(0,t)\nabla\bar{h}(t)\right]\nabla^2\bar{\phi}(t),
\end{aligned}$$

que integrando de 0 a T nos fornece

$$\int_0^T\gamma'(t)\left\{\nabla^2\bar{\phi}(t)+\left[\sum_{i=1}^{p}\nabla^2 d_i(0,t)\nabla\bar{h}_i'(t)\right]\nabla\bar{\phi}(t)\right\}\gamma(t)\leq 0 \qquad (2.8)$$

Por outro lado, como

$$\mu_i(\xi,d(\xi,t),t)=h_i(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)d(\xi,t),t),\ i\in I,$$

para cada $i\in I$ temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi\mu_i(\xi,d(\xi,t),t)&=[I_n+\nabla\bar{h}'(t)\nabla d(\xi,t)]'\nabla h_i(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)d(\xi,t),t)\\
&=\nabla h_i(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)d(\xi,t),t)\\
&\quad+\nabla d'(\xi,t)\nabla\bar{h}(t)\nabla h_i(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)d(\xi,t),t).
\end{aligned}$$

Por (2.5) temos, para cada $i \in I$, que

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^2 \mu_i(\xi, d(\xi,t), t) \\
&= [I_n + \nabla \bar{h}'(t) \nabla d(\xi,t)]' \nabla^2 h_i(\bar{z}(t) + \xi + \nabla \bar{h}'(t) d(\xi,t), t) \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^{p} \nabla^2 d_j(\xi,t) \nabla \bar{h}_j'(t) \right] \nabla h_i(\bar{z}(t) + \xi + \bar{h}'(t) d(\xi,t), t) \\
&\quad + \left[\nabla d'(\xi,t) \bar{h}(t) \right] \left[I_n + \nabla d'(\xi,t) \bar{h}(t) \right] \nabla^2 h_i(\bar{z}(t) + \xi + \bar{h}'(t) d(\xi,t), t).
\end{aligned}$$

Considerando $\xi = 0$, multiplicando por $u_i(t)$ q.t.p. em $[0,T]$, fazendo o somatório de $i = 1, \ldots, p$ e o produto interno à esquerda e à direita por $\gamma \in N$, em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma'(t) \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \mu_i(0,0,t) \right] \gamma(t) \\
&= \gamma'(t) \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) \right] \gamma(t) \\
&\quad - \gamma'(t) \nabla \bar{h}'(t) [\nabla \bar{h}(t) \Upsilon'(t)]^{-1} \nabla \bar{h}(t) \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) \right] \gamma(t) \\
&\quad + \gamma'(t) \left[\sum_{j=1}^{p} \nabla^2 d_j(0,t) \nabla \bar{h}_j'(t) \right] \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla \bar{h}_i(t) \right] \gamma(t) \\
&\quad - \gamma'(t) \nabla \bar{h}'(t) [\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)]^{-1} \nabla \bar{h}(t) \left[I_n + \nabla d'(0,t) \nabla \bar{h}(t) \right] \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) \right] \gamma(t),
\end{aligned}$$

que integrando de 0 a T resulta que

$$\int_0^T \gamma'(t) \left\{ \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) + \left[\sum_{j=1}^{p} \nabla^2 d_j(0,t) \nabla \bar{h}_j'(t) \right] \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla \bar{h}_i(t) \right] \right\} \gamma(t) \, dt$$
$$= 0. \tag{2.9}$$

Por (2.8) e (2.9) temos que

$$\begin{aligned}
0 \;\geq\; & \int_0^T \gamma'(t) \left\{ \nabla^2 \bar{\phi}(t) + \left[\sum_{i=1}^{p} \nabla^2 d_i(0,t) \nabla \bar{h}_i'(t) \right] \nabla \bar{\phi}(t) \right\} \gamma(t) \\
& + \int_0^T \gamma'(t) \left\{ \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) + \left[\sum_{j=1}^{p} \nabla^2 d_j(0,t) \nabla \bar{h}_j'(t) \right] \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla \bar{h}_i(t) \right] \right\} \gamma(t)\ dt \\
= & \int_0^T \gamma'(t) \{ \nabla^2 \bar{\phi}(t) + \left[\sum_{i=1}^{p} \nabla^2 d_i(0,t) \nabla \bar{h}_i'(t) \right] \nabla \bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) \\
& + \left[\sum_{j=1}^{p} \nabla^2 d_j(0,t) \nabla \bar{h}_j'(t) \right] \left[\sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla \bar{h}_i(t) \right] \} \gamma(t)\ dt \\
= & \int_0^T \gamma'(t) \{ \nabla^2 \bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla^2 \bar{h}_i(t) \\
& + \left[\sum_{j=1}^{p} \nabla^2 d_j(0,t) \nabla \bar{h}_i'(t) \right] \left[\nabla \bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) \nabla \bar{h}_i(t) \right] \} \gamma(t)\ dt
\end{aligned}$$

e usando (2.1), obtemos a desigualdade (2.2). □

2.3 Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Considere o problema com restrições de igualdade e desigualdade (1.1). Sejam válidas a hipótese (H1) e, para $\epsilon > 0$ e $\bar{z} \in \Omega$, as seguintes hipóteses para o problema (1.1):

(H5) $h(z, \cdot)$ e $g(z, \cdot)$ são mensuráveis para cada z, $h(\cdot, t)$ e $g(\cdot, t)$ são continuamente diferenciáveis em $\bar{z}(t) + \epsilon \bar{B}$ q.t.p. em $[0, T]$.

(H6) Existe uma função crescente $\bar{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\bar{\theta}(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, tal que para todo $\tilde{z}, z \in \bar{z}(t) + \epsilon \bar{B}$ e q.t.p. em $[0, T]$,

$$\|\nabla[h, g](\tilde{z}, t) - \nabla[h, g](z, t)\| \leq \bar{\theta}(\|\tilde{z} - z\|).$$

Existe $K_1 > 0$ tal que para q.t.p. em $[0, T]$,

$$\|\nabla[h, g](\bar{z}, t)\| \leq K_1.$$

Observação 2.2. *Note que as hipóteses (H2) e (H3) são casos particulares das hipóteses (H5) e (H6) quando não há restrições de desigualdade no problema (1.1). A hipótese (H4) será substituída pela definição seguinte.*

Definição 2.1. *Diremos que* $\bar{z} \in \Omega$ *satisfaz a condição de posto completo quando existe* $K > 0$ *tal que*

$$\det\{\Upsilon(t)\Upsilon^{'}(t)\} \geq K,$$

onde

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} \nabla \bar{h}(t) & 0 \\ \nabla \bar{g}(t) & \operatorname{diag}\{-2\bar{w}_j(t)\}_{j\in J} \end{pmatrix},$$

onde $\bar{w}_j = \sqrt{\bar{g}_j(t)}$ *q.t.p. em* $[0, T]$, $j \in J$.

Observação 2.3. *A condição de posto completo implica que, para quase todo* $t \in [0, T]$, $\{\nabla \bar{h}_i(t) \mid i \in I\} \cup \{\nabla \bar{g}_j(t) \mid j \in I_a(t)\}$ *é um conjunto linearmente independente. Além disso, possibilita-nos reduzir o problema (1.1) para o caso com apenas restrições de igualdade a fim de que o Teorema 2.1 seja aplicado. Note também que a hipótese (H4) é a condição de posto completo apenas para problemas com restrições de igualdade.*

Exemplo 2.1. *Considere o problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \displaystyle\int_0^1 -z_1^2(t) - z_2^2(t)\ dt \\ \textit{sujeito a} & h(z(t),t) = z_1(t) - z_2(t) = 0 \quad q.t.p. \ em\ t \in [0,1], \\ & g_1(z(t),t) = z_1(t) + \frac{1}{2}z_2^2(t) \geq 0 \quad q.t.p. \ em\ t \in [0,1], \\ & g_2(z(t),t) = z_1(t)z_2(t) + 1 \geq 0 \quad q.t.p. \ em\ t \in [0,1], \end{array}$$

onde $z = (z_1, z_2) \in L_\infty([0, T]; I\!R^2)$ *e* $h, g_1, g_2 : I\!R^2 \times [0, 1] \to I\!R$. *Note que* $\bar{z} = (0, 0)$ *é solução ótima para este problema e que* $I_a(t) = \{1\}$ *q.t.p. em* $[0, T]$. *Assim, a matriz na Definição 2.1 é dada por*

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad q.t.p. \ em\ [0,T],$$

e $\det(\Upsilon(t)\Upsilon'(t)) = 4$ *q.t.p. em* $[0, T]$. *Observe que* $\{\nabla \bar{h}(t), \nabla \bar{g}_1(t)\}$ *são linearmente independentes para quase todo* $t \in [0, T]$.

Exemplo 2.2. *Considere* $h, g_1, g_2 : I\!R^3 \times [0, 1] \to I\!R$ *e*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \displaystyle\int_0^1 -(z_1(t)-1)^2 - (z_2(t)-1)^2\ dt \\ \textit{sujeito a} & h(z,t) = -z_1^2(t) - z_2^2(t) + z_3(t) + 1 = 0, \\ & g_1(z,t) = -2z_1(t)z_2(t) + 4z_2(t) + z_3(t) - 3 \geq 0, \\ & g_2(z,t) = -z_1(t) + \frac{1}{2}z_3(t) + \frac{1}{2} \geq 0. \end{array}$$

O ponto factível $\bar{z} = (1,1,1)'$ *é solução ótima para este problema. Note que, para quase todo* $t \in [0,1]$, $I_a(t) = \{1,2\}$ *e*

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q.t.p.\ \ em\ [0,1].$$

Observe que $\operatorname{posto}[\Upsilon(t)] = 3$ *q.t.p. em* $[0,1]$ *mas* $\det(\Upsilon(t)\Upsilon'(t)) = 0$ *q.t.p. em* $[0,1]$. *Assim,* $\bar{z}$ *não satisfaz a condição de posto completo.*

Exemplo 2.3. *Considere o problema tempo contínuo com funcional objetivo quadrático e restrições lineares da forma*

$$\begin{array}{ll} maximizar & P(z) = \displaystyle\int_0^T -z'(t)Q(t)z(t)\ dt \\ sujeito\ a & A(t)z(t) = 0 \quad q.t.p.\ \ em\ t \in [0,T], \\ & N(t)z(t) + b(t) \geq 0 \quad q.t.p.\ \ em\ t \in [0,T], \end{array}$$

onde $z \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$, *para q.t.p. em* $[0,T]$, $Q(t)$ *é uma* $n \times n$ *matriz real simétrica definida positiva com entradas em* $L_\infty([0,T];\mathbb{R})$, $A(t)$ *é uma matriz* $p \times n$ *dependente do tempo tal que*

$$\det\{A(t)A'(t)\} \geq c_A \quad q.t.p.\ \ em\ [0,T],$$

para algum $c_A > 0$, $N(t)$ *é uma matriz* $m \times n$ *dependente do tempo com entradas em* $L_\infty([0,T];\mathbb{R})$ *e* $b \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m_+)$ *é tal que* $b_j(t) > c_b$ *q.t.p. em* $[0,T]$, $j \in J$, *para algum* $c_b > 0$. *Note que* $\bar{z} \equiv 0$ *é uma solução ótima para o problema e que* $I_a(t) = \emptyset$ *q.t.p. em* $[0,T]$. *Sob tais condições, o Lema 1.1 garante que existe* $c > 0$ *tal que*

$$\det\{\Upsilon(t)\Upsilon'(t)\} \geq c \quad q.t.p.\ \ em\ [0,T],$$

onde

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ N(t) & diag\{-2\sqrt{b_j(t)}\}_{j=1}^m \end{pmatrix}$$

e $\bar{z}$ *satisfaz a condição de posto completo.*

O próximo lema nos servirá de ferramenta para concluir que os multiplicadores (de Lagrange) relacionados com as restrições de desigualdade são maiores ou iguais a zero quase todo $t \in [0,T]$.

Lema 2.1. *Seja* $k \in J$ *arbitrário e* $D \subset [0,T]$ *subconjunto de medida positiva tal que* $k \in I_a(t)$ *para todo* $t \in D$. *Se* $\bar{z} \in \Omega$ *satisfaz a condição de posto completo, então existe* $\gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$ *tal que, para todo* $t \in D$, *temos*

$$\nabla\bar{h}_i'(t)\gamma(t) = 0,\ i \in I, \quad \nabla\bar{g}_j'(t)\gamma(t) = 0,\ j \in I_a(t) \setminus \{k\},\ \nabla\bar{g}_k'(t)\gamma(t) > 0. \quad (2.10)$$

Demonstração. Se as componentes de g forem permutadas de modo que as restrições ativas sejam as primeiras, então $\Upsilon(t)$ na Definição 2.1 pode ser reescrita como

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} \nabla\bar{h}(t) & 0 \\ \nabla\bar{g}^{I_a(t)}(t) & 0 \\ \nabla\bar{g}^{I_c(t)}(t) & \Lambda(t) \end{pmatrix} \quad \text{q.t.p. em } [0,T],$$

onde $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1(t) \end{pmatrix}$ é uma matriz em blocos com $0 \in I\!R^{q_c(t)\times q_a(t)}$ e $\Lambda_1(t) = diag\{-2\bar{w}_j(t)\}$, $j \in I_c(t)$. Por definição, a matriz $\Upsilon(t)$ tem posto completo para quase todo $t \in [0,T]$. Seja $b \in L_\infty([0,T]; I\!R^{n+m})$ dado por

$$b_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ j \in I \cup J \setminus \{k\}, \ t \in D, \\ 1, & \text{se } \ j = k, \ t \in D, \\ 0, & \text{se } \ t \in [0,T] \setminus D. \end{cases}$$

Então o sistema

$$\Upsilon(t)\gamma(t) = b(t) \ \text{ q.t.p. em } [0,T], \tag{2.11}$$

é consistente para quase todo $t \in [0,T]$, com solução $\tilde{\gamma} = (\gamma, \gamma_1) \in L_\infty([0,T]; I\!R^{n+m})$ dada por

$$\tilde{\gamma}(t) = \Upsilon'(t)[\Upsilon(t)\Upsilon'(t)]^{-1} b(t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Em particular, (2.11) acontece para todo $t \in D$. Assim, (2.11) nos garante que, para todo $t \in D$, existe $\gamma \in L_n^\infty[0,T]$ tal que

$$\nabla\bar{h}_i'(t)\gamma(t) = 0, \ i \in I, \ \ \nabla\bar{g}_j'(t)\gamma(t) = 0, \ j \in I_a(t) \setminus \{k\} \ \text{ and } \ \nabla\bar{g}_k'(t)\gamma(t) = 1 > 0.$$

$\square$

Teorema 2.2. *Seja $\bar{z}$ solução ótima local para o problema (1.1) que satisfaz a condição de posto completo e as hipóteses (H1),(H5) e (H6). Suponha que $\bar{g}(\cdot)$ é limitada em $[0,T]$. Então, existe um único $(u,v) \in L_\infty([0,T]; I\!R^{p+m})$ tal que, para quase todo $t \in [0,T]$, $v(t) \geq 0$ e*

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t) = 0, \tag{2.12}$$

$$v_j(t)\bar{g}_j(t) = 0, \ j \in J. \tag{2.13}$$

Além disso, vale a condição de segunda ordem

$$\int_0^T \gamma'(t)\{\nabla^2\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla^2\bar{g}_j(t)\}\gamma(t)\ dt \leq 0 \tag{2.14}$$

para toda $\gamma \in \bar{N}$, onde $\bar{N}$ é dado por

$$\bar{N} = \{\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n) \mid \nabla\bar{h}(t)\gamma(t) = 0, \ \ \nabla\bar{g}_j'(t)\gamma(t) = 0 \ \textit{q.t.p.}\ [0,T], \ j \in I_a(t)\}.$$

Demonstração. Seja $w : [0,T] \to I\!R^m$ função mensurável. Considere o problema auxiliar

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \tilde{P}(z,w) = \displaystyle\int_0^T \phi(z(t),t)\ dt \\ \text{sujeito a} & h(z(t),t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T], \\ & g(z(t),t) - w^2(t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T], \end{array} \tag{AUX1}$$

onde

$$w^2(t) = \begin{pmatrix} w_1^2(t) \\ w_2^2(t) \\ \vdots \\ w_m^2(t) \end{pmatrix} \ \text{ q.t.p. em } [0,T],$$

procederemos em vários passos.

PASSO 1: Se $\bar{z}$ é solução ótima local para o problema (1.1), então $(\bar{z},\bar{w})$ é solução ótima local para (AUX1), onde

$$\bar{w}_j(t) = \sqrt{\bar{g}_j(t)} \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J.$$

De fato, se $\bar{z}$ é uma solução ótima de (1.1) em uma ϵ-vizinhança, $\epsilon \in (0,1)$, suponha que para qualquer vizinhança aberta $(\bar{z},\bar{w}) + \bar{\epsilon}B$, $0 < \bar{\epsilon} < \epsilon$, exista $(\tilde{z},\tilde{w})$ solução ótima local para (AUX1) com $\tilde{P}(\tilde{z},\tilde{w}) > \tilde{P}(\bar{z},\bar{w})$. Notando que

$$h(\tilde{z}(t),t) = 0 \ \text{ e } \ g(\tilde{z}(t),t) = \tilde{w}^2(t) \geq 0 \ \text{ q.t.p. em } \ [0,T],$$

temos que $\tilde{z}$ é factível para o problema (1.1) e

$$P(\tilde{z}) = \int_0^T \phi(\tilde{z}(t),t)\ dt = \tilde{P}(\tilde{z},\tilde{w}) > \tilde{P}(\bar{z},\bar{w}) = \int_0^T \phi(z(t),t)\ dt = P(\bar{z}),$$

contradizendo a otimalidade local de $\bar{z}$ para o problema (1.1).

PASSO 2: Definindo, para q.t.p. $t \in [0,T]$,

$$\Psi(z(t),w(t),t) = \begin{pmatrix} h(z(t),t) \\ g(z(t),t) - w^2(t) \end{pmatrix} \in I\!R^{p+m},$$

vamos verificar que o problema auxiliar (AUX1) satisfaz as condições (H1)-(H4) com Ψ e (z,w) fazendo o papel de h e z, respectivamente, no problema (2.2) para que o Teorema 2.1 seja aplicável. As hipóteses (H1) e (H2) são imediatas para (AUX1). Considerando $(\tilde{z},\tilde{w}),\ (z,w) \in (\bar{z}(t),\bar{w}(t)) \in \epsilon\bar{B}$ temos, para quase todo

$t \in [0,T]$, que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\Psi(\tilde{z},\tilde{w},t) - \nabla\Psi(z,w,t)\| \\
&\quad = \left\| \begin{pmatrix} \nabla_z\Psi(\tilde{z},\tilde{w},t) - \nabla_z\Psi(z,w,t) & \nabla_w\Psi(\tilde{z},\tilde{w},t) - \nabla_w\Psi(z,w,t) \end{pmatrix} \right\| \\
&\quad \leq \|\nabla[h,g](\tilde{z},t) - \nabla[h,g](z,t)\| + \|(-2).\mathrm{diag}\{\tilde{w}_i(t) - w_i(t)\}\| \\
&\quad = \|\nabla[h,g](\tilde{z},t) - \nabla[h,g](z,t)\| + 2\|I_m(\tilde{w}(t) - w(t))\| \\
&\quad \leq \bar{\theta}(\|\tilde{z} - z\|) + 2\ \|I_m\|\ \|\tilde{w} - w\| = \bar{\theta}(\|\tilde{z} - z\|) + 2\|\tilde{w} - w\| \\
&\quad \leq \bar{\theta}(\|(\tilde{z} - z, \tilde{w} - w)\|) + 2\|(\tilde{z} - z, \tilde{w} - w)\| = \tilde{\theta}(\|(\tilde{z}, z) - (\tilde{w}, w)\|),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\theta} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é dada por $\tilde{\theta}(s) = \bar{\theta}(s) + 2s$. Quando $s \downarrow 0$, $\tilde{\theta}(s) = \bar{\theta}(s) + 2s \downarrow 0$, sendo a mesma monótona crescente. Também,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Psi(\bar{z},\bar{w},t)\| &\leq \|\nabla_z\Psi(\bar{z}(t),\bar{w}(t),t)\| + \|\nabla_w\Psi(\bar{z}(t),\bar{w}(t),t)\| \\
&= \|\nabla[h,g](\bar{z}(t),t)\| + 2.\|\mathrm{diag}\{\bar{w}_i(t)\}\| \leq K_0,
\end{aligned}$$

onde $K_0 = K_1 + \|\bar{w}\|_m^\infty$ segue de (H6) e pela hipótese de que $\bar{w}(t) = \bar{g}(t)$ é uniformemente limitada em $[0,T]$, verificando (H3) para (AUX1). Por fim, como

$$\nabla\Psi(\bar{z}(t),t) = \Upsilon(t) \quad \text{q.t.p. em } [0,T],$$

temos pela Definição 2.1 que a hipótese (H4) é satisfeita para o problema com restrições de igualdade (AUX1).

PASSO 3: Vamos aplicar o Teorema 2.1 para (AUX1). Existe único $(u,v) \in L_\infty([0,T]; I\!R^{p+m})$ tal que

$$\begin{pmatrix} \nabla\bar{\phi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla\Psi'(\bar{z}(t),t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{q.t.p. em } [0,T],$$

fornecendo as igualdades

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t) = 0 \quad \text{q.t.p. em } [0,T] \qquad \text{e}$$

$$\bar{w}_j(t)v_j(t) = 0 \quad \text{q.t.p. em } [0,T] \Rightarrow \bar{g}_j(t)v_j(t) = 0 \quad \text{q.t.p. em } [0,T],\ j \in J$$

resultando em (2.12) e (2.13).

Vamos mostrar que $v_j(t) \geq 0$ a.e. in $[0,T]$, $j \in I$. Suponha que para algum $k \in J$, exista um subconjunto de medida positiva $D \subset [0,T]$ tal que $v_k(t) < 0$, para todo $t \in D$. Note que, por (2.13), $k \in I_a(t)$ para todo $t \in D$. Pelo Lema 2.1, existe $\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ tal que (2.10) acontece. Definindo $\tilde{\gamma} \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in D \\ 0, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

e usando (2.12) e (2.13) resulta que

$$\nabla\bar{\phi}'(t)\tilde{\gamma}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla\bar{h}_i'(t)\tilde{\gamma}(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\tilde{\gamma}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla\bar{\phi}'(t)\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} -v_k(t)\nabla\bar{g}_k'(t)\gamma(t) > 0, & \text{se } t \in D, \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases}$$

Então

$$\int_0^T \nabla\bar{\phi}'(t)\tilde{\gamma}(t)\ dt = \int_D^T \nabla\bar{\phi}'(t)\tilde{\gamma}(t)\ dt + \int_{[0,T]\setminus D} \nabla\bar{\phi}'(t)\tilde{\gamma}(t)\ dt > 0$$

e pelo Teorema 1.1 temos que existe $\sigma > 0$ tal que $P(\bar{z} + \tau\tilde{\gamma}) > P(\bar{z})$ para $0 < \tau \leq \sigma$, contradizendo o fato de que $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (1.1). Portanto, $v_j(t) \geq 0$ para quase todo $t \in [0,T]$, $j \in J$.

PASSO 4: Vamos verificar a condição de segunda ordem (2.14). Para simplificar a notação, escreveremos para q.t.p. em $[0,T]$,

$$L(z,w,t) = \phi(z(t),t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)h_i(z(t),t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)[g_j(z(t),t) - w_j^2(t)],$$

onde u e v são os multiplicadores que já foram obtidos do problema (AUX1). Assim,

$$\nabla L(z,w,t) = \begin{pmatrix} \nabla_z L(z,w,t) \\ \nabla_w L(z,w,t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla\phi(z(t),t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla h_i(z(t),t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla g_j(z(t),t) \\ -2w_1(t)v_1(t) \\ \vdots \\ -2w_m(t)v_m(t) \end{pmatrix},$$

e

$$\nabla^2 L(z,w,t) = \begin{pmatrix} \nabla_{zz} L(z,w,t) & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}\{-2v_j(t)\}_{j=1}^{m} \end{pmatrix},$$

onde

$$\nabla_{zz} L(z,w,t) = \nabla^2\phi(z(t),t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla^2 h_i(z(t),t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla^2 g_j(z(t),t).$$

Pelo Teorema 2.1, temos que

$$\int_0^T (\gamma(t),\nu(t))'\nabla^2 L(\bar{z},\bar{w},t)(\gamma(t),\nu(t))\ dt \leq 0, \qquad (2.15)$$

para toda $(\gamma, \nu) \in L_\infty([0,T]; I\!R^n) \times L_\infty([0,T]; I\!R^m)$ satisfazendo

$$\nabla h(\bar{z}(t), t)\gamma(t) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g_j'(\bar{z}(t), t)\gamma(t) - 2\bar{w}_j(t)\nu_j(t) = 0, \quad j \in J, \tag{2.16}$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Para qualquer $\gamma \in \bar{N}$ considere ν da seguinte forma:

$$\nu_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \in I_a(t) \\ \dfrac{\nabla g_j'(\bar{z}(t), t)\gamma(t)}{2\bar{w}_j(t)}, & \text{se } j \in I_c(t) \end{cases} \qquad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Dessa forma, observe que (γ, ν) satisfaz (2.16), $\bar{w}_j(t)\nu_j(t) = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, para todo $j \in I_a(t)$, e por (2.13) temos que $v_j(t) = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, para todo $j \in I_c(t)$. Assim,

$$v_j(t)\nu_j(t) = 0 \text{ q.t.p. em } [0,T], \; j \in J.$$

Substituindo este (γ, ν) em (2.15) obtemos

$$\int_0^T \gamma'(t)\nabla_{zz}^2 L(\bar{z}, \bar{w}, t)\gamma(t)\, dt \leq 0,$$

com $\gamma \in \bar{N}$ arbitrário, que nos fornece (2.14). □

Capítulo 3

Qualificação de Restrições Posto Constante

Em programação não linear em dimensão finita, Andreani, Martínez e Schuverdt [69] apresentaram alguns resultados auxiliares que foram usados para demonstrar que a condição de dependência linear positiva constante implica uma condição chamada quase normalidade.

Na primeira seção, utilizando o Teorema 1.2 e o Corolário 1.1, uma releitura de tais resultados é realizada, adaptando-os para o caso tempo contínuo. Estes resultados nos possibilitam escrever um subproblema do problema principal (1.1), de forma que certas restrições possam ser "descartadas" sem influenciar na obtenção das condições necessárias para o problema (1.1).

Na segunda seção, usando os resultados auxiliares da primeira seção, condições necessárias para o problema (1.1) com restrições de igualdade são obtidas. Na terceira seção, reduz-se o problema (1.1) a um problema com restrições apenas de igualdade de forma que os resultados obtidos na segunda seção sejam utilizados.

3.1 Resultados Auxiliares

Lema 3.1. *Considere um conjunto $A \subset I\!R^k$, um número $\alpha > 0$, vetores $x_0,\ y_0 \in I\!R^n$, e uma família de funções*

$$\{F_a = (f_1^a, \ldots, f_n^a) : I\!R^n \to I\!R^n \mid a \in A\}$$

satisfazendo $y_0 = F_a(x_0)$ para todo $a \in A$ e todas as condições do Teorema 1.2 (Isso nos garante que existem $\alpha > 0$ e $\delta > 0$ tais que $F_a^{-1} : \{y_0 + \delta B\} \to \{x_0 + \alpha B\}$ estão bem definidas, para todo $a \in A$). Sejam $0 < r \leq n$ um número inteiro e $f^a : \{x_0 + \alpha B\} \to I\!R$ funções continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$ uniformemente em $a \in A$, tais que $\nabla f^a(x)$ é uma combinação linear de

$\nabla f_1^a(x), \ldots, \nabla f_r^a(x)$ $\forall\, x \in x_0 + \alpha B$, $\forall\, a \in A$. Para todo $a \in A$ e $u \in y_0 + \delta B$, defina

$$\varphi^a(u) = f^a(F_a^{-1}(u)). \tag{3.1}$$

Então, para todo $u \in y_0 + \delta B$ e $j = r+1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial u_j}(u) = 0 \ \ \forall\, a \in A. \tag{3.2}$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.2, existem $\alpha > 0$, $\delta > 0$ e uma família de funções continuamente diferenciáveis

$$\{F_a^{-1} : \{y_0 + \delta B\} \to \{x_0 + \alpha B\} \mid a \in A\}$$

tal que, se $F_a^{-1}(u) = (g_1^a(u), \ldots, g_n^a(u)),\ a \in A$, temos que

$$\begin{aligned} u &= (F_a \circ F_a^{-1})(u) \\ &= F_a(g_1^a(u), \ldots, g_n^a(u)) \\ &= (f_1^a(g_1^a(u), \ldots, g_n^a(u)), \ldots, f_q^a(g_1^a(u), \ldots, g_n^a(u)), \ldots, f_n^a(g_1^a(u), \ldots, g_n^a(u))) \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$f_q^a(g_1^a(u), \ldots, g_n^a(u)) = u_q \ \ \forall\, q = 1, \ldots, n,\ \forall\, a \in A. \tag{3.3}$$

Seja $u \in y_0 + \delta B$. Usando a regra da cadeia em (3.1), obtemos

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial u_j}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_a}{\partial x_i}(F_a^{-1}(u)) \frac{\partial g_i^a}{\partial u_j}(u) \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n,\ \forall\, a \in A. \tag{3.4}$$

Por hipótese, para cada $a \in A$, existem números $\lambda_1^a, \ldots, \lambda_r^a$ tais que

$$\begin{aligned} \nabla f_a(x) &= \sum_{q=1}^{r} \lambda_q^a \nabla f_q^a(x) \ \ \forall\, x \in x_0 + \alpha B, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f_a}{\partial x_i}(x) &= \sum_{q=1}^{r} \lambda_q^a \frac{\partial f_q^a}{\partial x_i}(x) \ \ \forall\, x \in x_0 + \alpha B. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.4), obtemos

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial u_j}(u) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{q=1}^{r} \lambda_q^a \frac{\partial f_q^a}{\partial x_i}(F^{-1}(u)) \right] \frac{\partial g_i^a}{\partial u_j}(u) = \sum_{q=1}^{r} \lambda_q^a \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_q^a}{\partial x_i}(F^{-1}(u)) \frac{\partial g_i^a}{\partial u_j}(u) \right]$$

e usando (3.3), temos que

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial u_j}(u) = 0 \ \ \forall\, j = r+1, \ldots, n,\ \forall\, a \in A.$$

$\square$

Lema 3.2. *Considere um conjunto* $A \subset I\!R^k$, *um número* $\alpha > 0$, *vetores* $x_0,\ y_0 \in I\!R^n$, *uma família de funções*

$$\{\tilde{F}_a : I\!R^n \to I\!R^r \mid a \in A\},$$

$\tilde{F}_a = (f_1^a, \ldots, f_r^a)$, $0 < r \leq n$, *satisfazendo* $\tilde{F}_a(x_0) = (y_{0_1}, \ldots, y_{0_r})$ *para todo* $a \in A$. *Suponha que são válidas as seguintes condições:*

(a) $\tilde{F}_a$ *é continuamente diferenciável em* $x_0 + \alpha B$, *uniformemente em* $a \in A$.

(b) Existe $\theta : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\theta(s) \downarrow 0$ *quando* $s \downarrow 0$, *tal que*

$$\|\nabla \tilde{F}_a(x) - \nabla \tilde{F}_a(\tilde{x})\| \leq \theta(\|x - \tilde{x}\|)$$

para todo $x, \tilde{x} \in x_0 + \alpha B$, $a \in A$. *Existe* $\bar{K} > 0$ *tal que*

$$\|\nabla \tilde{F}_a(x_0)\| \leq \bar{K},\ a \in A.$$

(c) Existe $\hat{K} > 0$ *tal que*

$$\det\{[\nabla \tilde{F}_a(x_0)][\nabla \tilde{F}_a(x_0)]'\} \geq \hat{K},\ a \in A.$$

Então existe uma família de funções continuamente diferenciáveis

$$\{\bar{F}_a : I\!R^n \to I\!R^{n-r} \mid a \in A\},$$

$\bar{F}_a(x_0) = (y_{0_{r+1}}, \ldots, y_{0_n})$, *tal que* $F_a = (\tilde{F}_a, \bar{F}_a)$ *satisfaz* $F_a(x_0) = y_0$ *para todo* $a \in A$, *e todas as hipóteses do Teorema 1.2.*

Demonstração. A hipótese (c) implica que a matriz

$$\nabla \tilde{F}_a(x_0) = \begin{pmatrix} \eta_{11}^a & \eta_{12}^a & \cdots & \eta_{1n}^a \\ \eta_{21}^a & \eta_{22}^a & \cdots & \eta_{2n}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{r1}^a & \eta_{r2}^a & \cdots & \eta_{rn}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta_1^a)' \\ (\eta_2^a)' \\ \vdots \\ (\eta_r^a)' \end{pmatrix}$$

possui linhas linearmente independentes para todo $a \in A$. Denote $I_r = \{1, \ldots, r\}$ e $I_{n-r} = \{r+1, \ldots, n\}$ com $I = I_r \cup I_{n-r}$, e construa funções $f_i^a : I\!R^n \to I\!R$ dadas por

$$f_i^a(x) = (\zeta_i^a)'(x - x_0) + y_{0_i},\ i \in I_{n-r},\ a \in A,$$

onde ζ_i^a, $i \in I_{n-r}$, são vetores ortonormais pertencentes ao conjunto $\{\eta_1^a, \ldots, \eta_r^a\}^\perp$ de maneira que $\{\eta_1^a, \ldots, \eta_r^a, \zeta_{r+1}^a, \ldots, \zeta_n^a\}$ forma uma base para $I\!R^n$ para todo $a \in A$.

Note que, para todo $a \in A$ e $i \in I_{n-r}$, $f_i^a(x_0) = y_{0_i}$ e $\nabla f_i^a(x_0) = \zeta_i^a$. Escrevendo $F_a : I\!R^n \to I\!R^n$ como $F_a = (\tilde{F}_a, \bar{F}_a)$, onde $\bar{F}_a = (f_{r+1}^a, \ldots, f_n^a)$, vemos que $F_a(x_0) = y_0\ \ \forall\ a \in A$, e que

(i) F_a é continuamente diferenciável em $x_0 + \alpha B$, uniformemente em $a \in A$.

(ii) Usando a hipótese (b) e a definição de $\bar{F}_a$, para $x, \tilde{x} \in x_0 + \alpha B$ temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla F_a(x) - \nabla F_a(\tilde{x})\| &= \|(\nabla \tilde{F}_a(x) - \nabla \tilde{F}_a(\tilde{x}), 0)\| \\ &= \|\nabla \tilde{F}_a(x) - \nabla \tilde{F}_a(\tilde{x})\| \leq \theta(\|x - \tilde{x}\|), \end{aligned}$$

onde $\theta : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\theta(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$. Notando que $\|\nabla \bar{F}_a(x_0)\| = 1$ pelo fato de que as colunas de $\nabla \bar{F}_a(x_0)$ são ortonormais, temos que

$$\|\nabla F_a(x_0)\| \leq \sqrt{\|\nabla \tilde{F}_a(x_0)\|^2 + \|\nabla \bar{F}_a(x_0)\|^2} \leq \sqrt{\bar{K}^2 + 1} = L,\ L > 0,$$

(iii) Escrevendo

$$\nabla F_a(x_0) = (\eta_1^a \quad \eta_2^a \quad \ldots \quad \eta_r^a \quad \zeta_{r+1}^a \quad \ldots \quad \zeta_n^a)',$$

vemos que

$$[\nabla F_a(x_0)][\nabla F_a(x_0)]' = \begin{pmatrix} \|\eta_1^a\|^2 & \ldots & (\eta_1^a)'\eta_r^a & 0 & \ldots & 0 \\ (\eta_2^a)'\eta_1^a & \ldots & (\eta_2^a)'\eta_r^a & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\eta_r^a)'\eta_1^a & \ldots & \|(\eta_r^a)\|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

resultando que

$$\det([\nabla F_a(x_0)][\nabla F_a(x_0)]') = \det([\nabla F_a^r(x_0)][\nabla F_a^r(x_0)]') \geq \hat{K},\ a \in A,$$

implicando que $\det(\nabla F_a(x_0)) \geq \sqrt{\hat{K}}$, $a \in A$. Por este fato e pelo item (ii), a Proposição 2.2 nos garante que existe $M > 0$ tal que

$$\|[\nabla F_a(x_0)]^{-1}\| \leq M,\ a \in A.$$

Logo, F_a satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.

□

Proposição 3.1. *Considere um conjunto $A \subset I\!R^k$, um número $\alpha > 0$, vetores $x_0,\ y_0 \in I\!R^n$, funções $f^a, f_1^a, \ldots, f_r^a : I\!R^n \to I\!R$ continuamente diferenciáveis em $x_0 + \alpha B$ uniformemente em $a \in A$. Suponha que $\tilde{F}_a = (f_1^a, \ldots, f_r^a)$*

satisfaz todas as condições do Lema 3.2 e que $\nabla f^a(x)$ é combinação linear de $\nabla f_1^a(x), \ldots, \nabla f_r^a(x)\ \ \forall\ a \in A$ e $x \in x_0 + \alpha B$. Em particular,

$$\nabla f_a(x_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^a \nabla f_i^a(x_0)\ \ \forall\ a \in A. \tag{3.6}$$

Então existem $\alpha' > 0$, uma bola aberta B_1 que contém $(f_1^a(x_0), \ldots, f_r^a(x_0))\ \ \forall\ a \in A$, e uma família de funções continuamente diferenciáveis

$$\{\tilde{\varphi}^a : B_1 \to I\!R \mid a \in A\},$$

tais que, para todo $x \in x_0 + \alpha' B$, temos que $(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x)) \in B_1$ e

$$f^a(x) = \tilde{\varphi}^a(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x))\ \ \forall\ a \in A.$$

Além disso, para todo $i = 1, \ldots, r$ e $a \in A$,

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^a}{\partial u_i}(f_1^a(x_0), \ldots, f_r^a(x_0)) = \lambda_i^a. \tag{3.7}$$

Demonstração. Usando o Lema 3.2, para cada $a \in A$ podemos definir $n - r$ funções $f_{r+1}^a, \ldots, f_n^a$ de tal forma que verifiquem as hipóteses do Lema 3.1. Então, usando (3.2), temos que a função φ^a definida em (3.1) não depende da variáveis $u_{r+1}, \ldots, u_n$ para todo $a \in A$. Como $f_1^a, \ldots, f_n^a$ são contínuas, uniformemente em $a \in A$, existem bolas abertas $B_2 \subset x_0 + \alpha B$ (cujo raio é $0 < \alpha' < \alpha$), D_1 e D_2 que contém x_0, $(f_1^a(x_0), \ldots, f_r^a(x_0))$ e $(f_{r+1}^a(x_0), \ldots, f_n^a(x_0))$, respectivamente, tais que

(a) $D_1 \times D_2 \subset y_0 + \delta B$;

(b) $\forall\ x \in B_2$, $(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x)) \in D_1$.

Defina $\tilde{\varphi}^a : D_1 \to I\!R$ como $\tilde{\varphi}^a(u) = \varphi(u_1, \ldots, u_r, f_{r+1}^a(x_0), \ldots, f_n^a(x_0))$. Claramente temos que $\tilde{\varphi}^a \in C^1(D_1)$ para todo $a \in A$. Pondo $B_1 = D_1$ temos, para todo $x \in B_2$ e $a \in A$, usando (b) e (3.1), que

$$(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x)) \in B_1 \quad \text{e} \quad \tilde{\varphi}^a(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x)) = \varphi^a(F_a(x)) = f^a(x).$$

Logo, $f^a(x) = \tilde{\varphi}^a(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x))$ para todo $x \in B_2$ e $a \in A$. Além disso, pela última relação obtemos

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^a}{\partial u_j}(f_1^a(x), \ldots, f_r^a(x)) = \frac{\partial \varphi^a}{\partial u_j}(f_1^a(x), \ldots, f_n^a(x)) = \lambda_j^a\ \ \forall\ j = 1, \ldots, r,\ a \in A,$$

fornecendo (3.7). $\square$

3.2 Problema com Restrições de Igualdade

Considere o problema de otimização com tempo contínuo com restrições de igualdade

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & P(z) = \displaystyle\int_0^T \phi(z(t),t)dt \\ \text{sujeito a} & z \in \Omega \end{array} \tag{RI}$$

onde

$$\Omega = \{z \in L_\infty([0,T]; I\!R^n) \mid h(z(t),t) = 0 \text{ q.t.p. em } [0,T]\},$$

$\phi : I\!R^n \times [0,T] \to I\!R$ e $h : I\!R^n \times [0,T] \to I\!R^p$. Dados $\epsilon > 0$ e $\bar{z} \in \Omega$, considere válidas as seguintes (H1)-(H3) apresentadas no Capítulo 2 e a seguinte hipótese adicional:

(H4*) (i) posto $[\nabla h(z,t)] = r(z,t) = r$ para quase todo $t \in [0,T]$ e todo $z \in \bar{z}(t) + \epsilon B$.

(ii) Existe um conjunto de índices, digamos $\{i_1, \ldots, i_r\}$, e uma constante $\hat{K} > 0$ tal que para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\det\{\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)\} \geq \hat{K},$$

onde

$$\Upsilon_r(t) = \left(\nabla \bar{h}_{i_1}(t) \ \cdots \ \nabla \bar{h}_{i_r}(t)\right)'.$$

Exemplo 3.1. *Em $L_\infty([0,1]; I\!R^3)$, considere $z : [0,1] \to I\!R^3$ e o sistema*

$$\begin{cases} h_1(z(t),t) = tz_1(t) + t^2 z_2(t) - t^3 z_3(t) = 0 \\ h_2(z(t),t) = -z_1(t) - tz_2(t) + t^2 z_3(t) = 0 \end{cases} \quad q.t.p. \ em \ [0,1],$$

no ponto factível $\bar{z}(t) = (0,0,0)$ q.t.p. em $[0,1]$. Note que

$$\nabla h(z(t),t) = \begin{pmatrix} t & t^2 & -t^3 \\ -1 & -t & t^2 \end{pmatrix} \quad q.t.p. \ em \ [0,1],$$

tem posto 1 com z numa vizinhança aberta arbitrária da origem. Considerando o subconjunto de índices $\{2\}$, temos que

$$\Upsilon_1(t)\Upsilon_1'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ t^2 \end{pmatrix} = 1 + t^2 + t^4$$

e $\det\{\Upsilon_1(t)\Upsilon_1'(t)\} \geq 1$ q.t.p. em $[0,1]$. Portanto, a condição (H4) é satisfeita em $\bar{z} \equiv 0$.*

Observação 3.1. *O teorema a seguir apresenta condições necessárias de primeira e segunda ordem tipo K.K.T. que são análogas às condições do Teorema 2.1. A diferença se encontra no uso da hipótese (H4*) em substituição à hipótese (H4) e em alguns passos da demonstração.*

Teorema 3.1. *Seja $\bar{z}$ solução ótima local para (RI) e suponha que as hipóteses (H1)-(H3) e (H4*) são satisfeitas. Então existe $u \in L_\infty([0,T];I\!R^p)$ tal que*

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t) = 0 \ q.t.p. \ em \ \ [0,T], \tag{3.8}$$

e

$$\int_0^T \gamma'(t)\{\nabla^2\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)\}\gamma(t)\ dt \leq 0 \ \ \forall\ \gamma \in N, \tag{3.9}$$

onde N é dado por

$$N = \{\gamma \in L_\infty([0,T];I\!R^n) \mid \nabla\bar{h}_i'(t)\gamma(t) = 0 \ \ q.t.p. \ em\ [0,T],\ i \in I\}.$$

Demonstração. Seja $\bar{z}$ solução ótima local para o problema (RI) em $\bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0,T]$. A demonstração será feita em vários passos.

PASSO 1: De modo análogo à demonstração do Teorema 2.1, seja $A = [0,T]\setminus S$ um conjunto de Borel de medida total, onde S é um conjunto de Borel de medida nula onde as hipóteses (H1)-(H3) e (H4*) não se verificam, conforme ([68], p. 309).

Para cada $t \in A$, usando a hipótese (H4*)-(ii), podemos permutar as linhas de $\nabla\bar{h}(t)$ de tal maneira que as linhas linearmente independentes sejam as r primeiras linhas e escrever a matriz $(r \times n)$

$$\Upsilon_r(t) = (\nabla\bar{h}_1(t), \ldots, \nabla\bar{h}_r(t))'$$

que tem posto completo para todo $t \in A$. Então, para $j = 1, \ldots, p-r$, temos por (H4*)-(i) que $\nabla h_{r+j}(z(t),t)$ é uma combinação linear dos vetores do conjunto

$$\{\nabla h_1(z,t), \ldots, \nabla h_r(z,t)\}$$

para quaisquer $t \in A$ e $z \in \bar{z}(t) + \epsilon B$.

Para cada $j = 1, \ldots, p-r$, identifique na Proposição 3.1, t com a, x_0 com 0, α com ϵ e, para $x \in x_0 + \epsilon B$,

$$f_i^t(x) = h_i(\bar{z}(t) + x, t),\ i = 1, \ldots, r,$$

e a função f^t fará o papel de cada uma das $p-r$ coordenadas restantes, a saber,

$$f^t(x) = h_{r+j}(\bar{z}(t) + x, t),\ j = 1, \ldots, p-r.$$

Note que, como $x \in \epsilon B$, temos que $z = \bar{z}(t) + x \in \{\bar{z}(t) + \epsilon B\}$ q.t.p. em $[0, T]$. Usando as hipóteses (H2)-(H3) e (H4*), vemos que todas as hipóteses da Proposição 3.1 são satisfeitas e vamos aplicá-la $(p - r)$ vezes. Então, para quase todo $t \in [0, T]$, existem uma bola aberta B_1 que contém $(h_1(\bar{z}(t), t), \ldots, h_r(\bar{z}(t), t))$ e funções $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_p$ definidas em $B_1 \times [0, T]$ tais que, para todo $z \in \bar{z}(t) + \epsilon B$ e para quase todo $t \in [0, T]$, temos que $(h_1(z, t), \ldots, h_r(z, t)) \in B_2$ e

$$h_{r+j}(z, t) = \varphi_{r+j}(h_1(z, t), \ldots, h_r(z, t), t), \; j = 1, \ldots, p - r. \tag{3.10}$$

Então para todo $z \in \bar{z}(t) + \epsilon B$ q.t.p. em $[0, T]$,

$$\begin{aligned} &h(z, t) \\ &= (h_1(z, t), \ldots, h_r(z, t), \varphi_{r+1}(h_1(z, t), \ldots, h_r(z, t)), \ldots, \varphi_p(h_1(\bar{z}, t), \ldots, h_r(z, t)))', \end{aligned}$$

isto é, as $p - r$ últimas coordenadas de h estão em função das r primeiras, com

$$\varphi_{r+j}(0, \ldots, 0) = 0 \;\; \forall\, j = 1, \ldots, p - r. \tag{3.11}$$

Defina $H : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^r$ por

$$H(z, t) = (h_1(z, t), \ldots, h_r(z, t))$$

e $\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, T] \to \mathbb{R}^r$ por

$$\mu(\xi, \eta, t) = H(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)\eta, t),$$

onde $\Upsilon_r'(t) = (\nabla \bar{h}_1(t) \;\; \ldots \;\; \nabla \bar{h}_r(t))' = \nabla H'(\bar{z}(t), t)$ q.t.p. em $[0, T]$. Deste ponto em diante, a demonstração segue de maneira similar à demonstração do Teorema 2.1 diferindo de pequenos detalhes. Usando a hipótese (H3), temos que existe um $K_0 > 0$ tal que para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|\Upsilon_r'(t)\| &= \|\nabla H'(\bar{z}(t), t)\| = \|(\nabla \bar{h}_1(t), \ldots, \nabla \bar{h}_r(t))\| \\ &\leq \|(\nabla h_1(\bar{z}(t), t), \ldots, \nabla h_r(\bar{z}(t), t), \ldots, \nabla h_p(\bar{z}(t), t))\| \leq K_0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Para $(\xi, \eta) = (0, 0)$, $\mu(0, 0, t) = H(\bar{z}(t), t) = 0$ q.t.p. em $[0, T]$ e considerando $\alpha = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2K_0}\}$, temos que

$$\|\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)\eta - \bar{z}(t)\| = \|\xi + \Upsilon_r'(t)\eta\| \leq \|\xi\| + \|\Upsilon_r'(t)\|.\|\eta\| \leq \epsilon,$$

sempre que $(\xi, \eta) \in (0, 0) + \alpha \bar{B}$. Segue de (H2) que μ é diferenciável em $(0, 0) + \alpha B$ para q.t.p. $t \in [0, T]$. Tomando $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, $(\xi, \eta) \in (0, 0) + \alpha B$, temos para q.t.p.

$t \in [0,T]$ que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mu(\tilde{\xi},\tilde{\eta},t) - \nabla\mu(\xi,\eta,t)\| \\
&\quad = \| \begin{pmatrix} \nabla H(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\Upsilon_r'(t)\tilde{\eta},t) & \nabla H(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\Upsilon_r'(t)\tilde{\eta},t)\Upsilon_r'(t) \end{pmatrix} \\
&\qquad - \begin{pmatrix} \nabla H(\bar{z}(t)+\xi+\Upsilon_r'(t)\eta,t) & \nabla H(\bar{z}(t)+\xi+\Upsilon_r'(t)\eta,t)\Upsilon_r'(t) \end{pmatrix} \| \\
&\quad = \left\| \Big(\nabla H(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\Upsilon_r'(t)\tilde{\eta},t) - \nabla H(\bar{z}(t)+\xi+\Upsilon_r'(t)\eta,t)\Big) \begin{pmatrix} I_n & \Upsilon_r'(t) \end{pmatrix} \right\| \\
&\quad \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi)+\Upsilon_r'(t)(\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0) \\
&\quad \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi)\| + K_0.\|(\tilde{\eta}-\eta)\|)(1+K_0) \\
&\quad \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}-\eta)\| + K_0\|(\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}-\eta)\|)(1+K_0) = \theta(\|(\tilde{\xi},\tilde{\eta})-(\xi,\eta)\|),
\end{aligned}$$

onde a função $\theta : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por

$$\theta(s) = (1+K_0)\tilde{\theta}(s+K_0 s)$$

é monótona crescente e que, quando $s \downarrow 0$, $\tilde{\theta}(s) \downarrow 0$, implicando que $\theta(s) \downarrow 0$. Note que

$$\nabla_\eta \mu(0,0,t) = \nabla H(\bar{z}(t),t)\Upsilon_r'(t) = \Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t),$$

é uma matriz real simétrica definida positiva cujo determinante é uniformemente limitado pela hipótese (H4*) e que, junto com (3.12) e a Proposição 2.2, temos que existe $M > 0$ tal que

$$\|[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\| \leq M \text{ q.t.p. em } [0,T]. \tag{3.13}$$

Pelo Corolário 1.1, existem $\sigma \in (0,\epsilon)$, $\delta \in (0,\epsilon)$ e uma aplicação implícita

$$d : \sigma B \times [0,T] \to \delta B$$

tal que $d(\xi,\cdot)$ é uma função mensurável para fixo ξ, as funções $d(\cdot,t)$ q.t.p. em $[0,T]$ são Lipschitz com constante Lipschitz comum, $d(\cdot,t)$ é continuamente diferenciável para q.t.p. em $[0,T]$,

$$\begin{aligned}
d(0,t) &= 0 \text{ q.t.p. em } [0,T], && (3.14)\\
\mu(\xi,d(\xi,t),t) &= 0 \text{ q.t.p. em } [0,T],\ \xi \in \sigma B && (3.15)\\
\nabla d(0,t) &= -[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\nabla H(\bar{z}(t),t) \text{ q.t.p. em } [0,T]. && (3.16)
\end{aligned}$$

Escolha $\sigma_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que

$$\sigma_1 \in (0,\min\{\sigma,\frac{\epsilon}{2}\}), \qquad \delta_1 \in (0,\min\{\delta,\frac{\epsilon}{2}\}), \qquad \sigma_1 + K_0\delta_1 \in (0,\frac{\epsilon}{2}), \tag{3.17}$$

onde K_0 é dado por (H3). Nos passos seguintes e sem perda de generalidade, consideraremos a função implícita d definida em $\sigma_1 B \times [0,T]$ tomando valores em

$\delta_1 B$.

PASSO 2: Mostraremos que, se $\bar{z}$ é uma solução ótima para o problema (RI), então $\bar{z}$ é uma solução ótima local para o problema auxiliar dado por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \tilde{P}(z) = \displaystyle\int_0^T \varphi(z(t),t)\ dt \\ \text{sujeito a} & z \in \Omega, \end{array} \tag{AUX}$$

onde $\Omega = L_\infty([0,T];I\!R^n)$ e $\varphi(z,t) = \phi(z + \Upsilon_r'(t)d(z - \bar{z}(t),t),t)$.

De fato, suponha que exista $\tilde{z} \in \Omega$ tal que $\tilde{z}(t) \in \bar{z}(t) + \sigma_2 B$, $0 < \sigma_2 < \sigma_1$ arbitrário, é uma solução factível para (AUX) tal que $\tilde{P}(\tilde{z}) > \tilde{P}(\bar{z})$. Considere

$$\hat{z}(t) = \tilde{z}(t) + \Upsilon_r'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Usando (3.12) e (3.17), temos que

$$\begin{array}{rcl} \|\hat{z}(t) - \bar{z}(t)\| & = & \|(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)) + \Upsilon_r'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t)\| \\ & \leq & \|\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)\| + \|\Upsilon_r'(t)\|.\|d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t)\| < \sigma_1 + K_0\delta_1 < \epsilon. \end{array}$$

Como $\tilde{z}(t) - \bar{z}(t) \in \sigma_1 B$, por (3.15) temos que

$$\mu(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t),t) = 0 \Rightarrow H(\tilde{z}(t) + \Upsilon_r'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t),t) = 0,$$

implicando que $h_i(\hat{z}(t),t) = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, $i = 1,\ldots,r$, e consequentemente, $h_{j+r}(\hat{z}(t),t) = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, $j = 1,\ldots,p-r$, por (3.10) e (3.11). Logo, $\hat{z}$ é factível para o problema (RI) e

$$P(\hat{z}) = \tilde{P}(\tilde{z}) > \tilde{P}(\bar{z}) = P(\bar{z}),$$

o que contradiz o fato de que $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (RI).

Note que este problema auxiliar é análogo ao problema (AUX) do PASSO 2 da demonstração do Teorema 2.1, com a matriz $\Upsilon(t)$ substituída pela matriz $\Upsilon_r(t)$.

PASSO 3: Sendo $\bar{z}$ uma solução ótima local para (RI), então $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (AUX) pelo PASSO 2. Então, pela Proposição 2.1 temos que, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \nabla\varphi(\bar{z}(t),t) \\ & = & \{I_n + \Upsilon_r'(t)\nabla d(0,t)\}'\nabla\phi(\bar{z}(t) + \Upsilon_r'(t)d(0,t),t) \\ & = & \nabla\phi(\bar{z}(t),t) + \nabla d'(0,t)\Upsilon_r(t)\nabla\phi(\bar{z}(t),t) \\ & = & \nabla\phi(\bar{z}(t),t) + \nabla H'(\bar{z}(t),t)\{-[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\Upsilon_r(t)\nabla\phi(\bar{z}(t),t)\} \\ & = & \nabla\phi(\bar{z}(t),t) + \nabla H'(\bar{z}(t),t)\tilde{u}(t) \end{array}$$

fornecendo a igualdade

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{r} \tilde{u}_i(t)\nabla\bar{h}_i(t) = 0 \text{ q.t.p. em } [0,T], \tag{3.18}$$

onde $\tilde{u} \in L_\infty([0,T]; I\!R^r)$ é dado por

$$\tilde{u}(t) = -[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\Upsilon_r(t)\nabla\bar{\phi}(t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Considerando $u_i \equiv 0$ para $i = r+1, \ldots, n$, temos que a equação (3.8) está verificada.

PASSO 4: Vamos verificar a condição de segunda ordem (3.9). Sendo $\phi(\cdot,t)$ e $h(\cdot,t)$ sejam duas vezes continuamente diferenciáveis em $\bar{z} + \epsilon\bar{B}$ ao longo de $[0,T]$, temos por definição que $\mu(\xi, d(\xi,t), t)$ q.t.p. em $[0,T]$, é duas vezes continuamente diferenciável em $\sigma_1 B$ e, por consequência do Corolário 1.1, d é duas vezes diferenciável em uma vizinhança de $\xi = 0$ (por simplicidade, consideraremos essa vizinhança como sendo $\sigma_1 B$). Pela Proposição 2.1, temos que

$$\int_0^T \gamma'(t)\nabla^2\varphi(\bar{z}(t),t)\gamma(t)\, dt \leq 0 \quad \forall\, \gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n).$$

Calculando $\nabla\varphi$ temos que

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi(z(t),t) &= [I_n + \Upsilon_r'(t)\nabla d(z(t)-\bar{z}(t),t)]'\nabla\phi(z(t)+\Upsilon_r'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t)) \\
&= \nabla\phi(z(t)+\Upsilon_r'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t)) \\
&\quad +\nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\Upsilon_r(t)\nabla\phi(z(t)+\Upsilon_r'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t)),
\end{aligned}$$

onde

$$\nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\Upsilon_r(t) = \sum_{i=1}^r \nabla d_i(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}_i'(t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Observe que se $z = \bar{z}$, usando (3.16), resulta que

$$-\nabla\bar{H}'(t)[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\nabla\bar{H}(t) = \nabla d'(0,t)\Upsilon_r(t) = \sum_{i=1}^r \nabla d_i(0,t)\nabla\bar{h}_i'(t).$$

Da expressão de $\nabla\varphi$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\varphi(z(t),t) \\
&\quad = \{I_n + \nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\Upsilon_r(t)\}\,\nabla^2\phi'(z(t)+\Upsilon_r'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t),t) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^r \{\nabla\bar{h}_i'(t)\nabla\phi(z(t)+\Upsilon_r'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t),t)\nabla^2 d_i(z(t)-\bar{z}(t),t) \\
&\qquad +\nabla d_i(z(t)-\bar{z}(t),t)\nabla\bar{h}_i'(t)\,[I_n+\nabla d'(z(t)-\bar{z}(t),t)\Upsilon_r(t)] \\
&\qquad\quad \nabla^2\phi(z(t)+\Upsilon_r'(t)d(z(t)-\bar{z}(t),t),t)\}.
\end{aligned}$$

Fazendo $z = \bar{z}$ e considerando $\gamma \in N$ temos, para q.t.p. em $[0, T]$, que

$$\begin{aligned}
&\gamma'(t)\nabla^2\varphi(\bar{z}(t), t)\gamma(t) \\
&\quad = \gamma'(t)\nabla^2\bar{\phi}(t)\gamma(t) - \gamma'(t)\nabla\bar{h}'(t)[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\nabla^2\bar{\phi}(t) \\
&\qquad +\gamma'(t)\left[\sum_{i=1}^{r}\nabla^2 d_i(0,t)\nabla\bar{h}_i'(t)\right]\nabla\bar{\phi}(t)\gamma(t) \\
&\qquad -\gamma'(t)\nabla\bar{h}'(t)[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\left[I_n + \nabla d'(0,t)\Upsilon_r(t)\right]\nabla^2\bar{\phi}(t),
\end{aligned}$$

que integrando de 0 a T nos fornece

$$\int_0^T \gamma'(t)\left\{\nabla^2\bar{\phi}(t) + \left[\sum_{i=1}^{r}\nabla^2 d_i(0,t)\nabla\bar{h}_i'(t)\right]\nabla\bar{\phi}(t)\right\}\gamma(t) \leq 0. \tag{3.19}$$

Por outro lado, como

$$\mu_i(\xi, d(\xi,t), t) = h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t), \ i = 1, \ldots, r,$$

para cada $i = 1, \ldots, r$, temos que

$$\begin{aligned}
&\nabla h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t) \\
&\quad = [I_n + \Upsilon_r'(t)\nabla d(\xi,t)]'\nabla h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t) \\
&\quad = \nabla h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t) \\
&\qquad +\nabla d'(\xi,t)\Upsilon_r(t)\nabla h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t).
\end{aligned}$$

Por (3.15) temos, para cada $i = 1, \ldots, r$, que

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^2 h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t) \\
&= [I_n + \Upsilon_r'(t)\nabla d(\xi,t)]'\nabla^2 h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t) \\
&\quad + \left[\sum_{j=1}^{r}\nabla^2 d_j(\xi,t)\nabla\bar{h}_j'(t)\right]\nabla h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t) \\
&\quad + \left[\nabla d'(\xi,t)\Upsilon_r(t)\right]\left[I_n + \nabla d'(\xi,t)\Upsilon_r(t)\right]\nabla^2 h_i(\bar{z}(t) + \xi + \Upsilon_r'(t)d(\xi,t), t).
\end{aligned}$$

Pondo $\xi = 0$, multiplicando por $\tilde{u}_i(t)$ q.t.p. em $[0, T]$, fazendo o somatório de $i = 1, \ldots, r$ e o produto interno à esquerda e à direita por $\gamma \in N$, em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & \gamma'(t)\left[\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)\right]\gamma(t) \\
& -\gamma'(t)\nabla\bar{h}'(t)[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\left[\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)\right]\gamma(t) \\
& +\gamma'(t)\left[\sum_{j=1}^{r}\nabla^2 d_j(0,t)\nabla\bar{h}_j'(t)\right]\left[\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla\bar{h}_i(t)\right]\gamma(t) \\
& -\gamma'(t)\nabla\bar{h}'(t)[\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\left[\nabla d'(0,t)\Upsilon_r(t)\right]\left[\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)\right]\gamma(t),
\end{aligned}$$

que integrando de 0 a T resulta que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \gamma'(t)\left\{\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)+\left[\sum_{j=1}^{r}\nabla^2 d_j(0,t)\nabla\bar{h}_j'(t)\right]\left[\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla\bar{h}_i(t)\right]\right\}\gamma(t)\;dt & \\
= 0. & \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Somando (3.19) e (3.20), e usando (3.18), obtemos

$$\int_0^T \gamma'(t)\left\{\nabla^2\bar{\phi}(t)+\sum_{i=1}^{r}\tilde{u}_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t)\right\}\gamma(t)\;dt \leq 0.$$

Fazendo $u_i = \tilde{u}_i$ se $i = 1,\ldots,r$ e $u_i = 0$ se $i = r+1,\ldots,n$, concluímos a demonstração. □

Observação 3.2. *Em (H4*) podemos escolher as linhas de $\Upsilon_r(t)$ de $C_{p,r}$ (combinação de p tomados r a r) maneiras diferentes para cada t, implicando que os multiplicadores, obtidos na demonstração acima, não são únicos. Uma possibilidade seria escolher $\Upsilon_r(t)$ de tal modo que os multiplicadores tenham norma mínima.*

3.3 Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Considere o problema com tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade (1.1), sendo válidas as hipóteses (H1), (H5) e (H6) apresentadas no Capítulo 2 para algum $\epsilon > 0$ e $\bar{z} \in \Omega$.

Definição 3.1. *Diremos que $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz a condição de posto constante quando* *(i) para quase todo* $t \in [0,T]$ *a matriz*

$$\Upsilon(z,w,t) = \begin{pmatrix} \nabla h(z,t) & 0 \\ \nabla g(z,t) & \operatorname{diag}\{-2w_j(t)\}_{j=1}^m \end{pmatrix}$$

tem posto $r(z,w,t)$ *constante e igual a* r *em* $(\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon B$, *com* $\bar{w}_j(t) = \sqrt{\bar{g}_j(t)}$ *q.t.p. em* $[0,T]$ *e todo* $j \in J$, *e*

(ii) existe um subconjunto de índices, digamos $\{i_1, \ldots, i_r\}$, *e uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$\det\{\Upsilon_r(t)\Upsilon_r'(t)\} \geq K \quad \text{q.t.p. em } [0,T],$$

onde $\Upsilon_r(t)$ *é uma sub-matriz obtida removendo-se as linhas de índice* $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ *de* $\Upsilon(\bar{z}(t), \bar{w}(t), t)$.

Sobre a Definição 3.1 vale fazer as seguintes observações:

(a) Note que a hipótese (H4*) é a condição de posto constante para o caso de problemas com tempo contínuo apenas com restrições de igualdade.

(b) Se considerarmos as restrições de desigualdade lineares em z, podemos encontrar vários exemplos onde as condições (i) e (ii) da Definição 3.1 acontecem. Mas, podemos também encontrar casos onde nem a condição (i) da Definição 3.1 é satisfeita (por exemplo, alguns casos onde as restrições de desigualdade são redundantes). Se as restrições de desigualdade não forem lineares em z, o cumprimento de tais condições em um dado $\bar{z}$ fica bem mais difícil. Assim, um estudo futuro deverá ser realizado a fim de definir uma condição de posto constante tal que restrições de desigualdade lineares em z a satisfaçam e que um número maior de problemas com restrições de desigualdade não lineares em z satisfaça tal condição.

Teorema 3.2. *Seja* $\bar{z}$ *solução ótima local para o problema (1.1) que satisfaz a condição de posto constante. Suponha que as hipóteses (H1),(H5) e (H6) são satisfeitas e que* $g(\bar{z}(\cdot), \cdot)$ *é limitada em* $[0,T]$. *Então, existe* $(u,v) \in L_\infty([0,T]; I\!R^p \times I\!R^m)$ *tal que para q.t.p. em* $[0,T]$, $v(t) \geq 0$,

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^p u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t) = 0, \tag{3.21}$$

$$v_j(t)\bar{g}_j(t) = 0, \; j \in J. \tag{3.22}$$

Além disso, vale a condição de segunda ordem

$$\int_0^T \gamma'(t)\{\nabla^2\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^p u_i(t)\nabla^2\bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla^2\bar{g}_j(t)\}\gamma(t)\, dt \leq 0 \tag{3.23}$$

para toda $\gamma \in \bar{N}$, *onde* $\bar{N}$ *é dado por*

$\bar{N} = \{\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n) \mid \nabla \bar{h}(t)\gamma(t) = 0,\ \ \nabla \bar{g}_j'(t)\gamma(t) = 0\ \ q.t.p.\ [0,T],\ j \in I_a(t)\}.$

Demonstração. Seja $w : [0,T] \to I\!R^m$ função mensurável. Considere o problema auxiliar

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \tilde{P}(z,w) = \displaystyle\int_0^T \phi(z(t),t)\ dt \\ \text{sujeito a} & h(z(t),t) = 0\ \ \text{q.t.p. em } [0,T], \\ & g(z(t),t) - w^2(t) = 0\ \ \text{q.t.p. em } [0,T], \end{array} \tag{AUX1}$$

onde

$$w^2(t) = \begin{pmatrix} w_1^2(t) \\ w_2^2(t) \\ \vdots \\ w_m^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{q.t.p. em } [0,T],$$

e procederemos em vários passos.

PASSO 1: Mostraremos que $(\bar{z}, \bar{w})$ é uma solução ótima local para (AUX1), onde

$$\bar{w}_j(t) = \sqrt{\bar{g}_j(t)}\ \ \text{q.t.p. em } [0,T],\ j \in J.$$

se $\bar{z}$ é uma solução ótima de (1.1) em uma ϵ-vizinhança, $\epsilon \in (0,1)$, suponha que para qualquer vizinhança aberta $(\bar{z},\bar{w}) + \bar{\epsilon}B$, $0 < \bar{\epsilon} < \epsilon$, exista $(\tilde{z},\tilde{w})$ solução ótima local para (AUX1) com $\tilde{P}(\tilde{z},\tilde{w}) > \tilde{P}(\bar{z},\bar{w})$. Então,

$$h(\tilde{z}(t),t) = 0\ \ \text{e}\ \ g(\tilde{z}(t),t) = \tilde{w}^2(t) \geq 0\ \ \text{q.t.p. em}\ \ [0,T].$$

Logo, $\tilde{z}$ é factível para (1.1) e

$$P(\tilde{z}) = \int_0^T \phi(\tilde{z}(t),t)\ dt = \tilde{P}(\tilde{z},\tilde{w}) > \tilde{P}(\bar{z},\bar{w}) = \int_0^T \phi(\bar{z}(t),t)\ dt = P(\bar{z}),$$

o que é uma contradição.

PASSO 2: Defina $\Psi : I\!R^n \times I\!R^m \times [0,T] \to I\!R^{p+m}$ por

$$\Psi(z(t),w(t),t) = \big(h(z(t),t), g(z(t),t) - w^2(t)\big)\quad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Vamos verificar que o problema auxiliar (AUX1) satisfaz as condições (H1)-(H3) e (H4*) com Ψ e (z,w) fazendo o papel de h e z, respectivamente, no problema (RI) para que o Teorema 3.1 seja aplicável. As hipóteses (H1) e (H2) são imediatas para (AUX1). Considerando $(\tilde{z},\tilde{w})$, $(z,w) \in (\bar{z}(t),\bar{w}(t)) \in \epsilon\bar{B}$ e a matriz de ordem $(p+m)\times m$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{diag}\{-2(\tilde{w}_j(t) - w_j(t))\}_{j=1}^m \end{pmatrix}\quad \text{q.t.p. em } [0,T],$$

temos, para quase todo $t \in [0,T]$, que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\Psi(\tilde{z},\tilde{w},t) - \nabla\Psi(z,w,t)\| \\
&\quad = \|\,(\nabla_z\Psi(\tilde{z},\tilde{w},t) - \nabla_z\Psi(z,w,t), \nabla_w\Psi(\tilde{z},\tilde{w},t) - \nabla_w\Psi(z,w,t))\,\| \\
&\quad = \|\,(\nabla[h,g](\tilde{z},t) - \nabla[h,g](z,t), \Lambda(t))\,\| \\
&\quad \le \|\nabla[h,g](\tilde{z},t) - \nabla[h,g](z,t)\| + \|(-2)\mathrm{diag}\{\tilde{w}_i(t) - w_i(t)\}\| \\
&\quad = \|\nabla[h,g](\tilde{z},t) - \nabla[h,g](z,t)\| + 2\|I_m(\tilde{w}(t) - w(t))\| \\
&\quad \le \bar{\theta}(\|\tilde{z} - z\|) + 2\,\|I_m\|\,\|\tilde{w} - w\| = \bar{\theta}(\|\tilde{z} - z\|) + 2\|\tilde{w} - w\| \\
&\quad \le \bar{\theta}(\|(\tilde{z} - z, \tilde{w} - w)\|) + 2\|(\tilde{z} - z, \tilde{w} - w)\| = \tilde{\theta}(\|(\tilde{z}, z) - (\tilde{w}, w)\|),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\theta} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é dada por

$$\tilde{\theta}(s) = \bar{\theta}(s) + 2s.$$

Quando $s \downarrow 0$, $\tilde{\theta}(s) = \bar{\theta}(s) + 2s \downarrow 0$, sendo a mesma monótona crescente. Também,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Psi(\bar{z},\bar{w},t)\| &\le \|\nabla_z\Psi(\bar{z}(t),\bar{w}(t),t)\| + \|\nabla_w\Psi(\bar{z}(t),\bar{w}(t),t)\| \\
&= \|\nabla[h,g](\bar{z}(t),t)\| + 2.\|\mathrm{diag}\{\bar{w}_i(t)\}\| \le K_0,
\end{aligned}$$

onde $K_0 = K_1 + \|\bar{w}\|_m^\infty$ segue de (H6) e pela hipótese de que $\bar{w}(t) = g(\bar{z}(t),t)$ é uniformemente limitada em $[0,T]$, verificando (H3) para (AUX1). Por fim, como

$$\nabla\Psi(z,w,t) = \Upsilon(z,w,t)$$

e $\bar{z}$ satisfaz a condição de posto constante, temos que a hipótese (H4*) está satisfeita para o problema (AUX1).

PASSO 3: Pelo Teorema 3.1, existe $(u,v) \in L_\infty([0,T]; I\!R^p \times I\!R^m)$ tal que

$$\begin{pmatrix} \nabla\bar{\phi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla\Psi'(\bar{z}(t),t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T],$$

fornecendo as igualdades

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T] \ \text{ e}$$

$$\bar{w}_j(t)v_j(t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T] \Rightarrow \bar{g}_j(t)v_j(t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J,$$

resultando em (3.21) e (3.22).

PASSO 4: Vamos verificar a condição de segunda ordem (3.23) e usá-la para verificar que $v(t) \ge 0$ q.t.p. em $[0,T]$. Para simplificar a notação, escreveremos para q.t.p. em $[0,T]$,

$$L(z,w,t) = \phi(z(t),t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)h_i(z(t),t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)[g_j(z(t),t) - w_j^2(t)],$$

onde u e v são os multiplicadores que já foram obtidos do problema (AUX1). Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla L(z,w,t) &= \begin{pmatrix} \nabla_z L(z,w,t) \\ \nabla_w L(z,w,t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \nabla\phi(z(t),t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla h_i(z(t),t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla g_j(z(t),t) \\ -2w_1(t)v_1(t) \\ \vdots \\ -2w_m(t)v_m(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\nabla^2 L(z,w,t) = \begin{pmatrix} \nabla_{zz}L(z,w,t) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}\{-2v_j(t)\}_{j=1}^m \end{pmatrix},$$

onde

$$\nabla_{zz}L(z,w,t) = \nabla^2\phi(z(t),t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla^2 h_i(z(t),t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla^2 g_j(z(t),t).$$

Pelo Teorema 3.1, temos que

$$\int_0^T (\gamma(t),\nu(t))'\nabla^2 L(\bar{z},\bar{w},t)(\gamma(t),\nu(t))\ dt \leq 0 \tag{3.24}$$

para toda $(\gamma,\nu) \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ satisfazendo

$$\nabla h(\bar{z}(t),t)\gamma(t) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g_j'(\bar{z}(t),t)\gamma(t) - 2\bar{w}_j(t)\nu_j(t) = 0, \quad j \in J, \tag{3.25}$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Para qualquer $\gamma \in \bar{N}$ considere ν da seguinte forma:

$$\nu_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \in I_a(t) \\ \dfrac{\nabla g_j'(\bar{z}(t),t)\gamma(t)}{2\bar{w}_j(t)}, & \text{se } j \in I_c(t) \end{cases} \quad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Tomado dessa forma, note que (γ,ν) satisfaz (3.25), e que

$$v_j(t)\nu_j(t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J.$$

Substituindo este (γ,ν) em (3.24) obtemos

$$\int_0^T \gamma'(t)\nabla^2_{zz}L(\bar{z},\bar{w},t)\gamma(t)\ dt \leq 0,$$

com $\gamma \in \bar{N}$ arbitrário, fornecendo (3.23).

PASSO 5: Suponha que $v_l(t) < 0$ para todo $t \in D \subset [0,T]$, onde D possui medida positiva, para algum $l \in J$. Por (3.22), $l \in I_a(t)$ para todo $t \in D$. Tome (γ, ζ) tal que $\gamma(t) \equiv 0$, $\zeta_j(t) \equiv 0$ para $j \neq l$ e

$$\zeta_l(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \in [0,T] \setminus D, \\ k, \text{ se } t \in D, \end{cases}$$

onde k é uma constante arbitrária. Observe que (γ, ζ) satisfaz (3.25). De (3.24) segue que

$$\int_D v_l(t)\zeta_l^2(t)\ dt \geq 0.$$

Mas

$$v_l(t) < 0 \text{ e } \zeta_l(t) = k \neq 0 \Rightarrow \int_D v_l(t)\zeta_l^2(t)\ dt < 0$$

que é um contradição.

$\square$

Proposição 3.2. *Suponha que $\Upsilon(z, w, \cdot)$ é uniformemente limitada em $(\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon B$ pela mesma constante que limita $\Upsilon(\bar{z}(\cdot), \bar{w}(\cdot), \cdot)$ uniformemente. Se vale a condição de posto completo, isto é, se existe $\hat{K} > 0$ tal que*

$$\det\{\Upsilon(t)\Upsilon'(t)\} \geq \hat{K} \quad \textit{q.t.p. em } [0,T],$$

onde

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} \nabla\bar{h}(t) & 0 \\ \nabla\bar{g}(t) & diag\{-2\bar{w}_j(t)\}_{j=1}^{\infty} \end{pmatrix}$$

então vale a condição de posto constante.

Demonstração. Note que, por hipótese, a condição (ii) da Definição 3.1 é automaticamente satisfeita para $\Upsilon_r(t) = \Upsilon(t)$ q.t.p. em $[0,T]$ e, usando os cálculos desenvolvidos no Passo 2 do Teorema 3.2, temos que

(i) existe uma função monótona crescente $\tilde{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\tilde{\theta} \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, tal que

$$\|\Upsilon(\tilde{z}, \tilde{w}, t) - \Upsilon(z, w, t)\| \leq \tilde{\theta}(\|(\tilde{z}, z) - (\tilde{w}, w)\|),$$

para todo $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in (\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon B$.

(ii) Existe $K_0 > 0$ tal que

$$\|\Upsilon(\bar{z}(t), \bar{w}(t), t)\| = \|\Upsilon(t)\| \leq K_0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Denotando $A(t) = \Upsilon(t)\Upsilon'(t)$ q.t.p, em $[0,T]$, por (ii) temos que existe um $M > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq M$ para quase todo $t \in [0,T]$. Pela Proposição 2.2, temos que $\|[A(t)]^{-1}\| \leq M$ para quase todo $t \in [0,T]$. Considere a matriz dependente do tempo

$$A(z,w,t) = \Upsilon(z,w,t)\Upsilon(z,w,t)' \ \text{ q.t.p em } [0,T],$$

onde $(z,w) \in (\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon B$. Por (i) com $0 < \epsilon' < \epsilon$ escolhido de tal forma que $\theta(\epsilon') \leq \frac{1}{4K_0 M}$, tomando $(z,w) \in (\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon' B$ de modo arbitrário temos que

$$\begin{aligned}
&\|A(z,w,t) - A(t)\| \\
&\quad = \|\Upsilon(z,w,t)\Upsilon'(z,w,t) - \Upsilon(t)\Upsilon'(t)\| \\
&\quad \leq \|\Upsilon(z,w,t) - \Upsilon(t)\|.\|\Upsilon'(z,w,t)\| + \|\Upsilon(t)\|.\|\Upsilon'(z,w,t) - \Upsilon'(t)\| \\
&\quad \leq 2K_0\theta(\epsilon') \leq \frac{1}{2M} \leq \frac{1}{2\|[A(t)]^{-1}\|} \ \text{ q.t.p. em } [0,T].
\end{aligned}$$

Escrevendo

$$A(z,w,t) = A(t) + [A(z,w,t) - A(t)] \ \text{ q.t.p em } [0,T],$$

temos, pela Proposição 1.1, que $A(z,w,t)$ é inversível para todo $(z,w) \in (\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon' B$. Isso implica que $\Upsilon(z,w,t)$ q.t.p. em $[0,T]$ tem posto completo (portanto constante) para todo $(z,w) \in (\bar{z}(t), \bar{w}(t)) + \epsilon' B$, resultando que a Definição 3.1-(i) acontece. □

Observação 3.3. *A Proposição 3.2 nos diz que a condição de posto completo dada no Capítulo 2, munida com uma hipótese adicional, implica na condição de posto constante. A recíproca não é sempre verdadeira.*

Exemplo 3.2. *Em $L_\infty([0,1]; \mathbb{R}^3)$, considere $z : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ e o sistema*

$$\begin{cases} tz_1(t) + t^2 z_2(t) - t^3 z_3(t) = 0 \\ -z_1(t) - tz_2(t) + t^2 z_3(t) = 0 \qquad \textit{q.t.p. em } [0,1], \\ z_1(t) + z_2(t) + z_3(t) \geq 0 \end{cases}$$

no ponto factível $\bar{z}(t) = (0,0,0)$ q.t.p. em $[0,1]$. Considerando $\bar{w}(t) = 0$ q.t.p. em $[0,1]$, note que

$$\Upsilon(z,w,t) = \begin{pmatrix} t & t^2 & -t^3 & 0 \\ -1 & -t & t^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2w \end{pmatrix} \ \textit{q.t.p. em } [0,1],$$

tem posto 2 para (z,w) numa arbitrária vizinhança aberta de $(\bar{z}, \bar{w})$ e escolhendo as linhas $\{2,3\}$, temos que

$$\Upsilon_2(t)\Upsilon_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t & t^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -t & 1 \\ t^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t^2 + t^4 & -1 - t + t^2 \\ -1 - t + t^2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$det\{\Upsilon_2(t)\Upsilon_2'(t)\} = 3(1+t^2+t^4) + (-1-t+t^2)^2 = 4+2t+2t^2+4t^4 \geq 4$$

para todo $t \in [0,1]$. *Portanto, a condição de posto constante acontece, mas a condição de posto completo não.*

Capítulo 4

Qualificação de Restrições Tipo Mangasarian-Fromovitz

Nos capítulos anteriores, abordamos primeiramente o problema com restrições de igualdade para depois resolver o problema com restrições de igualdade e desigualdade. Neste capítulo, consideraremos inicialmente o problema (1.1) apenas com restrições de desigualdade sob certas hipóteses a fim de que o Teorema de Alternativa 1.4 seja aplicado (Seção 4.1). Na Seção 4.2, com a utilização do Teorema da Função Implícita Uniforme 1.1, obteremos condições necessárias para o problema com restrições de igualdade e desigualdade. Na Seção 4.3 faremos uma breve análise sobre a condição de independência linear positiva e sua relação com a condição tipo Mangasarian-Fromovitz que definiremos na sequência.

Para o problema geral (1.1), dados $\epsilon > 0$ e $\bar{z} \in \Omega$, considere válidas as seguintes hipóteses:

(A1) $\phi(\cdot, t)$ é continuamente diferenciável em $\bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0, T]$, $\phi(z, \cdot)$ e $\nabla\phi(z, \cdot)$ são Lebesgue mensuráveis para cada z e existe um número $K_\phi > 0$ tal que

$$\|\nabla\phi(\bar{z}(t), t)\| \leq K_\phi \;\; \text{q.t.p. em } [0, T].$$

(A2) $[g, h](z, \cdot)$ é Lebesgue mensurável para cada z, $[h, g](\cdot, t)$ é continuamente diferenciável em $\bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0, T]$ e $g(z(\cdot), \cdot)$ é essencialmente limitada em $[0, T]$ para todo z.

(A3) Existe uma função crescente $\bar{\theta} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $\bar{\theta}(s) \downarrow 0$ quando $s \downarrow 0$, tal que para quaisquer $\tilde{z}, z \in \bar{z}(t) + \epsilon\bar{B}$ q.t.p. em $[0, T]$, temos que

$$\|\nabla h(\tilde{z}, t) - \nabla h(z, t)\| \leq \bar{\theta}(\|\tilde{z} - z\|).$$

Existe um número $K_0 > 0$ tal que

$$\|\nabla[\bar{h}, \bar{g}](t)\| \leq K_0 \;\; \text{q.t.p. em } [0, T].$$

Para todo $j \in J$, defina a função $\delta_j : [0,T] \to \mathbb{R}$ como

$$\delta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j \in I_a(t), \\ 0 & \text{se} \quad j \in I_c(t). \end{cases}$$

Dado o sistema

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} f_0(\gamma,t) = & -\displaystyle\int_0^T \nabla\bar{\phi}'(s)\gamma \, ds < 0 \\ f_j(\gamma,t) = & -\bar{g}_j(t) - \delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma \leq 0, \ j \in J, \end{cases}$$

seja $L = \{0\} \cup J$, defina o conjunto de índices ativos do sistema (Γ) por

$$\mathscr{I}(\gamma,t) = \{j : f_j(\gamma,t) = \max_{j\in L} f_j(\gamma,t)\}, \ t \in [0,T], \ \gamma \in I\!R^n,$$

e suponha válida a seguinte hipótese:

(A4) existem $\bar{\gamma} \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ e números reais $r > 0$ e $\alpha > 0$ tais que para quase todo $t \in [0,T]$ e para todo $\gamma \in I\!R^n \setminus \{\bar{\gamma}(t) + rB\}$, existe um vetor unitário $w = w(\gamma,t) \in I\!R^n$ tal que

$$\langle \partial_\gamma f_j(\gamma,t), \bar{H}(t)w \rangle \geq \alpha \quad \forall \ j \in \mathscr{I}(\gamma,t),$$

onde $\partial_\gamma f_j(\gamma,t)$, $j \in L$, denota a subdiferencial de $f_j(\cdot,t)$ no ponto γ no sentido da análise convexa (veja [55, 56]) e

$$\bar{H}(t) = \begin{cases} I_n & \text{se não há restrições de igualdade} \\ I_n - \nabla h'(t)[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t) & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{q.t.p. em } [0,T].$$

Definição 4.1. *Diremos que $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz a condição Tipo Mangasarian-Fromovitz (TMF) quando*

(i) existe $\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ tal que para q.t.p. em $[0,T]$,

$$\nabla\bar{h}(t)\gamma(t) = 0, \quad e \quad f_j(\gamma(t),t) \leq -\beta, \ j \in J,$$

para algum $\beta > 0$;

(ii) existe $K > 0$ tal que para q.t.p. em $[0,T]$, tem-se

$$\det\{\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)\} \geq K.$$

Observação 4.1. *A hipótese (A4) é imprescindível para a aplicação do Teorema 1.4 e está relacionada apenas com o funcional objetivo e as restrições de desigualdades do problema (1.1). A seguir, damos dois exemplos referentes à hipótese (A4) e a Definição 4.1, apenas com restrições de desigualdade.*

Exemplo 4.1. *Considere*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \displaystyle\int_0^1 -z_1^2(t) - z_2(t)\ dt \\ \textit{sujeito a} & g_1(z(t),t) = z_2(t) \geq 0 \\ & g_2(z(t),t) = z_1^2(t) + z_2(t) \geq 0 \end{array}$$

onde $z : [0,T] \to I\!R^2$. *A solução do problema é dada por* $\bar{z}(t) = (0,0)$ *q.t.p. em* $[0,T]$. *Observe que para* $\gamma \in I\!R^2$, *temos*

$$f_0(\gamma,t) = -\int_0^1 -\gamma_2\ ds = \gamma_2 \quad e \quad f_1(\gamma,t) = f_2(\gamma,t) = -\gamma_2.$$

Considere $\bar{\gamma} \equiv (0,0)$, $r > 0$ *arbitrário,* $\alpha = 1$ *na hipótese (A4) e para* $\gamma \in I\!R^2 \setminus \{\bar{\gamma}(t) + rB\}$ *note que*

- *Se* $\gamma_2 > 0$, *temos que* $\mathscr{I}(\gamma,t) = \{0\}$ *e tomando* $w = (0,1)'$ *resulta que*

$$\langle \partial_\gamma f_0(\gamma,t), w\rangle = 1.$$

- *Se* $\gamma_2 < 0$, *temos que* $\mathscr{I}(\gamma,t) = \{1,2\}$. *Considerando então* $w = (0,-1)$, *temos que*

$$\langle \partial_\gamma f_j(\gamma,t), w\rangle = 1 \quad \forall\ j \in \mathscr{I}(\gamma,t).$$

Assim, a hipótese (A4) está satisfeita para este problema. Com $\gamma(t) = (0,1)'$ *q.t.p. em* $[0,T]$ *e* $\beta = 1$, *temos que*

$$\bar{g}_j(t) + \delta_j(t)\nabla\bar{g}_j(t)\gamma(t) = 1 = \beta \quad q.t.p.\ em\ [0,T],\ j = 1,2,$$

satisfazendo a condição (TMF). Observe que

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q.t.p.\ em\ [0,T]$$

e como $\det\{\Upsilon(t)\Upsilon'(t)\} = 0$ *q.t.p. em* $[0,T]$, *temos que a condição de posto completo não é satisfeita. Considerando* $\bar{\omega} \equiv (0,0)$, *note também que*

$$\Upsilon(z,\omega,t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\omega_1(t) & 0 \\ 2z_1(t) & 1 & 0 & -2\omega_2(t) \end{pmatrix} \quad q.t.p.\ em\ [0,T]$$

não possui posto constante em nenhuma vizinhança de $(\bar{z},\bar{\omega}) \equiv (0,0)$. *Logo, a condição de posto constante não é satisfeita.*

Exemplo 4.2. *Em $L_\infty([0,T];I\!R)$, considere o problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \displaystyle\int_0^1 -z^2(t)\ dt \\ \textit{sujeito a} & g_1(z,t) = z(t) - 1 \geq 0 \quad \textit{q.t.p. em } t \in [0,1], \\ & g_2(z,t) = 2 - z(t) \geq 0 \quad \textit{q.t.p. em } t \in [0,1], \end{array}$$

onde $z : [0,1] \to I\!R$. Claramente, $\bar{z} \equiv 1$ é a solução ótima. Note que, $I_a(t) = \{1\}$ q.t.p. em $[0,T]$. Observe que para $\gamma \in I\!R$, temos

$$f_0(\gamma,t) = -\int_0^1 -2\gamma\ ds = 2\gamma, \quad f_1(\gamma,t) = -\gamma \quad e \quad f_2(\gamma,t) = -1.$$

Considere $\bar{\gamma} \equiv 0$, $r = 1$ e $\alpha = 1$ na hipótese (A4) e, supondo que $\gamma \in I\!R \backslash \{(-1,1)\}$, note que

- *Se $\gamma \geq 1$, temos que $\mathscr{I}(\gamma,t) = \{0\}$ e tomando $w = 1$ resulta que*

$$\langle \partial_\gamma f_0(\gamma,t), w \rangle = 2w = 2 \geq 1.$$

- *Se $\gamma \leq -1$, temos que $\mathscr{I}(\gamma,t) = \{1\}$. Considerando então $w = -1$, temos que*

$$\langle \partial_\gamma f_1(\gamma,t), w \rangle = -w = 1.$$

Com relação à (TMF), tomando $\gamma \equiv 1$ e $\beta = 1$ temos que

$$\bar{g}_j(t) + \delta_j(t) \nabla \bar{g}_j'(t)\gamma = 1, \ j = 1, \ 2.$$

Portanto, a condição (TMF) é satisfeita para este problema. Como

$$\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{q.t.p. em } [0,T]$$

e $\det\{\Upsilon(t)\Upsilon'(t)\} = 1$ q.t.p. em $[0,T]$, temos que a condição de posto completo é satisfeita. Considerando $\bar{\omega} \equiv (0,1)$, note também que

$$\Upsilon(z,\omega,t) = \begin{pmatrix} 1 & -2\omega_1(t) & 0 \\ -1 & 0 & -2\omega_2(t) \end{pmatrix} \quad \textit{q.t.p. em } [0,T]$$

tem posto 2 para todo $(z,\omega) \in (\bar{z}(t), \bar{\omega}(t)) + B$ q.t.p. em $[0,T]$. Assim, a condição de posto constante também acontece.

4.1 Problema com Restrições de Desigualdade

Com o objetivo de aplicar o Teorema 1.4 ao sistema (Γ), vamos considerar primeiramente o problema (1.1) apenas com restrições de desigualdade, a saber,

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & P(z) = \displaystyle\int_0^T \phi(z(t),t)dt \\ \text{sujeito a} & g(z(t),t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } [0,T] \end{array} \tag{RD}$$

e o conjunto factível Ω terá apenas restrições de desigualdade. Note que, neste caso, as hipóteses (A1)-(A4) e a condição (TMF) serão apenas sobre a função objetivo e as restrições de desigualdade.

Definição 4.2. *Dado $\bar{z} \in \Omega$, consideremos os seguintes conjuntos:*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}(\bar{z}) & = & \{\gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \mid \displaystyle\int_0^T \nabla\bar{\phi}'(t)\gamma(t)\ dt > 0\}, \\ \mathscr{F}(\bar{z}) & = & \{\gamma \in L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n) \mid \quad \bar{g}_j(t) \\ & & +\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma(t) \geq 0 \ q.t.p. \ em\ [0,T],\ j \in J\}. \end{array}$$

Considerando a Definição 1.2 sobre Cone Tangente de Bouligand, apresentamos os seguintes resultados:

Proposição 4.1. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e S um subconjunto de X. Dado $z \in S$, o cone tangente a S em z, denotado por $T_S(z)$, é fechado.*

Demonstração. Seja $\{\gamma_k\} \subset T_S(z)$ tal que $\gamma_k \to \gamma$. Queremos mostrar que $\gamma \in T_S(z)$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \in T_S(z)$, existem sequências $\{z_i^k\}_{i=1}^\infty \subset S$, $z_i^k \to z$ quando $i \to \infty$, e $\{t_i^k\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $t_i^k \downarrow 0$ quando $i \to \infty$, tais que

$$\frac{z_i^k - z}{t_i^k} \to \gamma_k \ \text{ quando } \ i \to \infty.$$

Para cada k, escolha i_k tal que $i_k > i_{k-1} > \ldots > i_1$ e uma sequência diagonal $\{z_{i_k}^k\}$ tal que

$$\|z_{i_k}^k - z\| < \frac{1}{2^k} \ \text{ e } \ \|\frac{z_{i_k}^k - z}{t_{i_k}^k} - \gamma_k\| < \frac{1}{2^k}.$$

Note que $\{z_{i_k}^k\} \subset S$, $\{t_{i_k}^k\} \subset \mathbb{R}_+$, $z_{i_k}^k \to z$ quando $k \to \infty$ e $t_{i_k}^k \downarrow 0$ quando $k \to \infty$. Também

$$\|\frac{z_{i_k}^k - z}{t_{i_k}^k} - \gamma_k\| \to 0 \ \text{ quando } \ k \to \infty.$$

Por este fato e como $\gamma_k \to \gamma$ e

$$\|\frac{z_{i_k}^k - z}{t_{i_k}^k} - \gamma\| \leq \|\frac{z_{i_k}^k - z}{t_{i_k}^k} - \gamma_k\| + \|\gamma_k - \gamma\|$$

temos que

$$\|\frac{z_{i_k}^k - z}{t_{i_k}^k} - \gamma\| \to 0 \ \text{ quando } \ k \to \infty,$$

verificando que $\gamma \in T_S(z)$. Logo, $T_S(z)$ é fechado. $\square$

Proposição 4.2. *Seja $\bar{z} \in \Omega$ uma solução ótima local para (RD). Então*

$$\mathscr{A}(\bar{z}) \cap T_\Omega(\bar{z}) = \emptyset.$$

Demonstração. Suponha que exista $\gamma \in \mathscr{A}(\bar{z}) \cap T_\Omega(\bar{z})$. Logo, existem sequências $\{t_k\} \subset I\!R_+$, $t_k \downarrow 0$, e $\{z_k\} \subset \Omega$, $z_k \to \bar{z}$ tais que

$$\gamma_k = \frac{z_k - \bar{z}}{t_k} \to \gamma \ \text{ quando } \ k \to \infty.$$

Pelo Teorema do Valor Médio ([70], pag. 253, Teorema 12.6) existe um $\lambda^* \in (0,1)$ tal que

$$P(z_k) - P(\bar{z}) = \delta P(\tilde{z}_k; z_k - \bar{z}) = t_k \delta P(\tilde{z}_k; \gamma_k) \tag{4.1}$$

onde $\tilde{z}_k = (1-\lambda^*)z_k + \lambda^* \bar{z}$. Como $\gamma \in \mathscr{A}(\bar{z})$, então $\delta P(\bar{z}; \gamma) > 0$.
Afirmação: Se existe $K_\phi > 0$ tal que

$$||\nabla\phi(\bar{z}(t), t)|| \le K_\phi \text{ q.t.p. em } [0, T],$$

então existe $M > 0$ tal que

$$||\nabla\phi(z(t), t)|| \le M \text{ q.t.p. em } [0, T]$$

para todo z numa vizinhança de $\bar{z}$.
De fato, defina $\psi : I\!R^n \times [0,T] \to I\!R$ por $\psi(z,t) = \|\nabla\phi(z,t)\|$. Como $\psi(\cdot, t)$ é contínua para q.t.p. em $[0,T]$, dado $\epsilon = 1$ existe um $\delta > 0$ tal que, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} &\|z - \bar{z}(t)\| < \delta \Rightarrow |\psi(z,t) - \psi(\bar{z}(t), t)| < 1 \\ \Leftrightarrow \ \ &\psi(z,t) > \psi(\bar{z}(t), t) - 1 \ \text{ e } \ \psi(z,t) < \psi(\bar{z}(t), t) + 1. \end{aligned}$$

Tomando $z \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ tal que $\|z - \bar{z}\|_n^\infty < \delta$, temos que

$$\psi(z(t), t) < \psi(\bar{z}(t), t) + 1 \Leftrightarrow \|\nabla\phi(z(t), t)\| < \|\nabla\phi(\bar{z}(t), t)\| + 1 < K_\phi + 1 = M$$

para quase todo $t \in [0,T]$, sendo verdadeira a afirmação.

Escrevendo $\nabla\tilde{\phi}_k(t) = \nabla\phi(\tilde{z}_k(t), t)$ q.t.p. em $[0,T]$ note que, como $\tilde{z}_k \to \bar{z}$ quando $k \to \infty$, por (A1) existe um $N_0 > 0$ tal que

$$\|\nabla\tilde{\phi}_k(t)\| \le M \ \text{ q.t.p. em } [0,T]$$

sempre que $k \geq N_0$. Como $\gamma_k \to \gamma$, existe $N_1 > 0$ tal que

$$\|\gamma_k - \gamma\|_n^\infty \;\; \leq \;\; 1 \;\; \text{sempre que} \;\; k \geq N_1.$$

Tomando $N = \max\{N_0, N_1\}$ temos para quase todo $t \in [0, T]$ e $k \geq N$ que

$$\|\nabla \tilde{\phi}_k(t)\| \leq M$$

e

$$\|\gamma_k(t)\| \leq \|\gamma_k(t) - \gamma(t)\| + \|\gamma(t)\| \leq 1 + c,$$

onde $c > 0$ é a constante que limita γ uniformemente. Considere $\{\tilde{z}_\ell\}_{\ell=N}^\infty$ subsequência de $\{\tilde{z}_k\}_{k=1}^\infty$ diferindo apenas por um número finito de elementos e note que quando $\ell \to \infty$ temos que

$$F_\ell(t) = \nabla\phi'(\tilde{z}_\ell(t), t)\gamma_\ell(t) \to \bar{F}(t) = \nabla\bar{\phi}(t)\gamma(t) \text{ q.t.p. em } [0, T],$$

e que $\|\nabla\tilde{\phi}_\ell(t)\|$ e $\|\gamma_\ell(t)\|$ são limitadas uniformemente para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Ainda, para quase todo $t \in [0, T]$ e $\ell \in \mathbb{N}$, temos que

$$|F_\ell(t)| \leq \|\nabla\tilde{\phi}_\ell(t)\|.\|\gamma_\ell(t)\| \leq M(1 + c) = L.$$

Portanto, $F_\ell \in L_\infty([0, T]; I\!R)$. Pelo Teorema 1.3 obtemos

$$\lim_{\ell\to\infty} \delta P(\tilde{z}_\ell; \gamma_\ell) = \lim_{\ell\to\infty} \int_0^T F_\ell(t)\; dt = \int_0^T \bar{F}(t)\; dt = \delta P(\bar{z}; \gamma) > 0$$

implicando que $\delta P(\tilde{z}_k; \gamma_k) > 0$ para todo k suficientemente grande e de (4.1) que $P(z_k) > P(\bar{z})$ para k suficientemente grande. Isto contradiz a otimalidade local de $\bar{z}$. $\square$

Proposição 4.3. *Seja $\bar{z} \in \Omega$ arbitrário. Então*

(a) $T_\Omega(\bar{z}) \subset \mathscr{F}(\bar{z})$ e

(b) se $\bar{z}$ satisfaz (TMF), então $T_\Omega(\bar{z}) = \mathscr{F}(\bar{z})$.

Demonstração. Escolha $S_0 \subset [0, T]$ o maior subconjunto onde as condições (A1)-(A4) e (TMF) não acontecem com relação a restrição g, para todo $t \in S_0$. Por hipótese, S_0 tem medida nula. Segue que existe um conjunto de Borel S, que é a intersecção de um coleção enumerável de conjuntos abertos, tal que $S_0 \subset S$ e $S \setminus S_0$ tem medida nula. Assim S é um conjunto de Borel de medida nula. Defina $A = [0, T] \setminus S$ o conjunto de Borel de medida total.

(a) Seja $\gamma \in T_\Omega(\bar{z})$. Para $\gamma \equiv 0$ é trivial. Seja $\gamma(t) \neq 0$ em um subconjunto de medida positiva de $[0,T]$. Então, existem sequências $\{t_k\} \subset I\!R_+$, $t_k \downarrow 0$, e $\{z_k\} \subset \Omega$, $z_k \to \bar{z}$ tais que

$$\gamma_k = \frac{z_k - \bar{z}}{t_k} \to \gamma \ \text{ quando } \ k \to \infty.$$

Fixe $t \in A$. Para $j \in I_a(t)$, usando expansão de Taylor (ver [66]) e o fato de que $\{z_k\} \subset \Omega$, temos que

$$0 \leq g_j(z_k(t),t) = g_j(\bar{z}(t),t) + \nabla \bar{g}'_j(t)(z_k(t) - \bar{z}(t)) + \epsilon(\|z_k(t) - \bar{z}(t)\|),$$

onde $\epsilon(\|z_k(t) - \bar{z}(t)\|)/\|z_k(t) - \bar{z}(t)\| \to 0$ quando $k \to 0$. Como $t_k = \|z_k(t) - \bar{z}(t)\|/\|\gamma_k\|$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \nabla \bar{g}'_j(t)\gamma_k(t) + \frac{\epsilon(\|z_k(t) - \bar{z}(t)\|)}{t_k} \\ &= \nabla \bar{g}'_j(t)\gamma_k(t) + \|\gamma_k(t)\| \frac{\epsilon(\|z_k(t) - \bar{z}(t)\|)}{\|z_k(t) - \bar{z}(t)\|}. \end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, temos que $\nabla \bar{g}'_j(t)\gamma(t) \geq 0$, $t \in A$, $j \in I_a(t)$. Como $t \in A$ e $j \in I_a(t)$ são arbitrários, temos que

$$\begin{aligned} \nabla \bar{g}'_j(t)\gamma(t) &\geq 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in I_a(t), \\ \Leftrightarrow \delta_j(t)\nabla \bar{g}'_j(t)\gamma(t) &\geq 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J, \end{aligned}$$

implicando que

$$\bar{g}_j(t) + \delta_j(t)\nabla \bar{g}'_j(t)\gamma(t) \geq \delta_j(t)\nabla \bar{g}'_j(t)\gamma(t) \geq 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T], j \in J.$$

(b) Seja $\gamma \in \mathscr{F}(\bar{z})$ e, pela condição (TMF), seja $\bar{\gamma} \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ tal que

$$\bar{g}_j(t) + \delta_j(t)\nabla \bar{g}'_j(t)\bar{\gamma}(t) > 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J.$$

Defina

$$\gamma_k = (1 - \frac{1}{k})\gamma + \frac{1}{k}\bar{\gamma},\ k \in \mathbb{N}.$$

Note que $\gamma_k \to \gamma$ quando $k \to \infty$. Vamos mostrar que $\gamma_k \in T_\Omega(\bar{z})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Fixe k e defina

$$z_i^k = \bar{z} + \lambda_i \gamma_k,$$

onde $\lambda_i = 1/i,\ i \in \mathbb{N}$. Quando $i \to \infty$, $\lambda_i \to 0$, $z_i^k \to \bar{z}$ e

$$\lim_{i \to \infty} \frac{z_i^k - \bar{z}}{\lambda_i} = \gamma_k$$

para cada k. Vamos mostrar que $z_i^k \in \Omega$ para i suficientemente grande. Defina $G_j : L_\infty([0,T]; I\!\!R^n) \to L_\infty([0,T]; I\!\!R)$ como $G_j(z)(t) = g_j(z(t),t)$, $t \in [0,T]$, $j \in J$. Usando Definição 4.1-(i) e a continuidade de G, dado $0 < \epsilon < \beta$ existe um índice $i_1 > 0$ independente de t tal que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} |g_j(z_i^k(t),t) - g_j(\bar{z}(t),t)| < \epsilon,\ j \in J,$$

para todo $i \geq i_1$. Então, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$|g_j(z_i^k(t),t) - g_j(\bar{z}(t),t)| < \epsilon,\ j \in J,\ i \geq i_1,$$

implicando para quase todo $t \in [0,T]$ e $j \in I_c(t)$ que

$$g_j(z_i^k(t),t) > g_j(\bar{z}(t),t) - \epsilon \geq \beta - \epsilon > 0,\ i \geq i_1.$$

Usando expansão de Taylor [66] temos que

$$G_j(z_i^k) = G_j(\bar{z}) + \lambda_i \delta G_j(\bar{z};\gamma_k) + \epsilon(\|z_i^k - \bar{z}\|_n^\infty)$$

onde $\epsilon(\|z_i^k - \bar{z}\|_n^\infty)/\|z_i^k - \bar{z}\|_n^\infty \to 0$ quando $i \to \infty$, ou equivalentemente,

$$\left\|\frac{G_j(z_i^k) - G_j(\bar{z})}{\lambda_i} - \delta G_j(\bar{z};\gamma_k)\right\|_n^\infty \to 0 \ \text{ quando } \ i \to \infty.$$

Usando a condição (i) da Definição 4.1 e a definição de limite, dado $0 < \epsilon < \beta$ existe um índice $i_2 > 0$, independente de t, tal que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \left|\frac{g_j(z_i^k(t),t) - g_j(\bar{z}(t),t)}{\lambda_i} - \nabla \bar{g}_j'(t)\gamma_k(t)\right| < \epsilon$$

para todo $i \geq i_2$. Logo, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\left|\frac{g_j(z_i^k(t),t)}{\lambda_i} - \nabla \bar{g}_j'(t)\gamma_k(t)\right| < \epsilon,\ j \in I_a(t),\ i \geq i_2,$$

implicando que, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\frac{g_j(z_i^k(t),t)}{\lambda_i} > \nabla \bar{g}_j'(t)\gamma_k(t) - \epsilon > \beta - \epsilon > 0,\ j \in I_a(t),\ i \geq i_2.$$

Como $\lambda_i > 0$ para todo i, temos que $g_j(z_i^k(t),t) > 0$ q.t.p. em $[0,T]$, $j \in I_a(t)$, para todo $i \geq i_2$. Portanto, para todo $i \geq i_0 = \max\{i_1, i_2\}$, temos que $z_i^k \in \Omega$, de modo que $\gamma_k \in T_\Omega(\bar{z})$. Como k é arbitrário, $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty \subset T_\Omega(\bar{z})$ e como $T_\Omega(\bar{z})$ é fechado, $\gamma \in T_\Omega(\bar{z})$, uma vez que $\gamma_k \to \gamma$.

$\square$

Corolário 4.1. *Se* $\bar{z} \in \Omega$ *satisfaz (TMF), então* $\mathscr{A}(\bar{z}) \cap \mathscr{F}(\bar{z}) = \emptyset$.

Demonstração. Segue diretamente das Proposições 4.3 e 4.2. $\square$

Observação 4.2. *A inclusão (a) na Proposição 4.3, em muitos casos, é própria, como vemos no exemplo abaixo.*

Exemplo 4.3. *Considere* $g_1, g_2 : I\!R^2 \times [0,T] \to I\!R$ *e o sistema*

$$\begin{cases} g_1(z(t),t) = -z_1^3(t) - z_2(t) \geq 0 \\ g_2(z(t),t) = -z_1^3(t) + z_2(t) \geq 0 \end{cases} \qquad q.t.p. \;\; em \;[0,T].$$

Para $\bar{z} = (0,0)$, *se* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in T_\Omega(\bar{z})$, *existem sequências* $\{z^k\} \subset \Omega$, $z^k = (z_1^k, z_2^k) \to (0,0)$ *quando* $k \to \infty$, *e* $\{s^k\} \subset I\!R_+$, $s^k \downarrow 0$ *quando* $k \to \infty$, *tais que*

$$\frac{z^k}{s^k} \to \gamma \quad quando \quad k \to \infty. \tag{4.2}$$

Mas $\{z^k\} \subset \Omega$ *implica, q.t.p. em* $[0,T]$ *e todo* k, *que*

$$\begin{cases} -[z_1^k(t)]^3 - z_2^k(t) \geq 0 \\ -[z_1^k(t)]^3 + z_2^k(t) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(s^k)^2 \left[\dfrac{z_1^k(t)}{s^k}\right]^3 - \dfrac{z_2^k(t)}{s^k} \geq 0 \\ -(s^k)^2 \left[\dfrac{z_1^k(t)}{s^k}\right]^3 + \dfrac{z_2^k(t)}{s^k} \geq 0 \end{cases},$$

que implica que $\dfrac{z_2^k(t)}{s^k} = 0$ *q.t.p. em* $[0,T]$ *e que* $\gamma_2 \equiv 0$. *Ainda, para q.t.p. em* $[0,T]$ *e para todo* k, *temos que*

$$[z_1^k(t)]^3 \leq z_2^k(t) \leq -[z_1^k(t)]^3 \Rightarrow z_1^k(t) \leq 0,$$

implicando que $\gamma_1(t) \leq 0$ *q.t.p. em* $[0,T]$. *Então*

$$T_\Omega(\bar{z}) \subset \{(\gamma_1, 0) \in L_\infty([0,T]); I\!R^2) \mid \; \gamma_1(t) \leq 0 \;\; q.t.p. \;\; em \; [0,T]\}.$$

Para a inclusão contrária, considere $z^k = t^k(\gamma_1, 0)$ *e* $t^k = \frac{1}{k}$, *para todo* k. *Logo,*

$$T_\Omega(\bar{z}) = \{(\gamma_1, 0) \in L_\infty([0,T]); I\!R^2) \mid \; \gamma_1(t) \leq 0 \;\; q.t.p. \;\; em \; [0,T]\}.$$

Mas como

$$\mathscr{F}(\bar{z}) = \{(\gamma_1, 0) \in L_\infty([0,T]; I\!R^2)\},$$

temos que $T_\Omega(\bar{z}) \subsetneq \mathscr{F}(\bar{z})$.

Teorema 4.1. *Seja $\bar{z}$ solução ótima local para (RD) que satisfaz (A1)-(A4) e (TMF). Então existe $v \in L_\infty([0,T]; I\!R^m)$ tal que, para quase todo $t \in [0,T]$, $v(t) \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t) &= 0, \ e \\ v_j(t)\bar{g}_j(t) &= 0, \ j \in J. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.1, $\mathscr{A}(\bar{z}) \cap \mathscr{F}(\bar{z}) = \emptyset$. Isto equivale dizer que (Γ) não admite solução $\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$. Usando as hipóteses (A1)-(A4) e (TMF), temos que as hipóteses do Teorema 1.4 são satisfeitas sobre o sistema (Γ). Logo, existe uma função $(\mu, \tilde{v}) \in L_\infty([0,T]; I\!R \times I\!R^m)$ tal que para q.t.p. em $[0,T]$, $\mu(t) > 0$, $\tilde{v}(t) \geq 0$ e

$$\mu(t) f_0(\gamma, t) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_j(t) f_j(\gamma, t) \geq 0 \ \ \forall\, \gamma \in I\!R^n,$$

ou equivalentemente, para todo $\gamma \in I\!R^n$, temos que

$$\mu(t) \int_0^T \nabla\bar{\phi}'(s)\gamma \; ds + \sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_j(t)\bar{g}_j(t) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_j(t)\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma \leq 0. \tag{4.3}$$

Em particular, se $\gamma = 0$, então

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_j(t)\bar{g}_j(t) \leq 0.$$

Para q.t.p. em $[0,T]$, se $j \in I_a(t)$, então $\bar{g}_j(t) = 0$. Se $j \in I_c(t)$, $\bar{g}_j(t) > 0$ e como $\tilde{v}_j(t) \geq 0$ para todo $j \in J$, temos que

$$\sum_{j \in I_c(t)} \tilde{v}_j(t)\bar{g}_j(t) \leq 0 \Rightarrow \tilde{v}_j(t) = 0, \ j \in I_c(t).$$

Portanto, $\tilde{v}_j(t)\bar{g}_j(t) = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, $j \in J$, e (4.3) fornece

$$\mu(t) \int_0^T \nabla\bar{\phi}'(s)\gamma \; ds + \sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_j(t)\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma \leq 0 \ \ \forall\, \gamma \in I\!R^n.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a T, com respeito a t, para todo $\gamma \in I\!R^n$, temos que

$$\int_0^T \left[\mu(t) \int_0^T \nabla\bar{\phi}'(s)\gamma \; ds + \sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_j(t)\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma \right] dt \leq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\left[\int_0^T \mu(t)\ dt\right]\int_0^T \nabla\bar{\phi}'(s)\gamma\ ds + \int_0^T \sum_{j=1}^m \tilde{v}_j(t)\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma\ dt \le 0.$$

Tomando $\mu = \displaystyle\int_0^T \mu(t)\ dt > 0$, dividindo por μ, juntando os termos em um mesmo integrando e escrevendo

$$v_j(t) = \frac{\tilde{v}_j(t)\delta_j(t)}{\mu} \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J,$$

obtemos

$$\int_0^T \left[\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t)\right]'\gamma\ dt \le 0 \ \ \forall\ \gamma \in I\!R^n.$$

Como a desigualdade é válida para todo $\gamma \in I\!R^n$, então a igualdade acontece, implicando que

$$\int_0^T \left[\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t)\right]'\gamma\ dt = 0 \ \ \forall\ \gamma \in I\!R^n,$$

resultando que

$$\nabla\bar{\phi}(t) + \sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla\bar{g}_j(t) = 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Para quase todo $t \in [0,T]$, se $j \in I_c(t)$, então $v_j(t) = 0$ e se $j \in I_a(t)$, então $\bar{g}_j(t) = 0$. Portanto, $v_j(t)\bar{g}_j(t) = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, $j \in J$. □

Proposição 4.4. *Sejam $\bar{z} \in \Omega$, $g_j(\cdot,t)$ função côncava para quase todo $t \in [0,T]$, $j \in I_a(t)$, e suponha que existam $\tilde{\beta} > 0$ e $\tilde{z} \in \Omega$, $\tilde{z} \in \bar{z} + \epsilon B$, $\epsilon > 0$, tais que*

$$g_j(\tilde{z}(t),t) \ge \tilde{\beta} \ \text{ q.t.p. em } [0,T],\ j \in J,$$

Então, $\bar{z}$ satisfaz (TMF) com relação a (RD).

Demonstração. Para $j \in J$, defina $G_j : L_\infty([0,T]; I\!R^n) \to L_\infty([0,T]; I\!R)$ por $G_j(z)(t) = g_j(z(t),t)$ q.t.p. em $[0,T]$. Pela continuidade de G, que segue de (A2), dado $0 < \epsilon' < \tilde{\beta}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|G_j(\bar{z}) - G_j(z)\|_n^\infty < \epsilon' \quad \text{sempre que} \quad z \in \bar{z} + \delta B,\ j \in J.$$

Se $\epsilon < \delta$, temos que $\tilde{z} \in \bar{z} + \delta B$. Assim, para $j \in J$ temos

$$\begin{aligned} & \operatorname*{ess\ sup}_{t\in[0,T]} |G_j(\bar{z})(t) - G_j(\tilde{z})(t)| < \epsilon' \\ \Rightarrow\quad & |G_j(\bar{z})(t) - G_j(\tilde{z})(t)| < \epsilon' \ \text{ q.t.p. em } [0,T] \\ \Rightarrow\quad & -\epsilon' < g_j(\bar{z}(t),t) - g_j(\tilde{z}(t),t) < \epsilon' \ \text{ q.t.p. em } [0,T]. \end{aligned}$$

Logo, para quase todo $t \in [0,T]$, $j \in I_c(t)$ e $\gamma \in L_\infty([0,T]; I\!R^n)$ arbitrária, temos que

$$\bar{g}_j(t) + \delta_j \nabla \bar{g}_j'(t)\gamma(t) = \bar{g}_j(t) > g_j(\tilde{z}(t),t) - \epsilon' \geq \tilde{\beta} - \epsilon' = \hat{\beta}.$$

Em particular, podemos escolher $\gamma = \tilde{z} - \bar{z}$. Se $\epsilon \geq \delta$, podemos redefinir ϵ no enunciado de modo a obter $\epsilon < \delta$.

Sendo $g(\cdot,t)$ côncava para cada t e usando a hipótese temos para quase todo $t \in [0,T]$ e $j \in I_a(t)$ que

$$\hat{\beta} < \tilde{\beta} \leq g_j(\tilde{z}(t),t) \leq \nabla \bar{g}_j'(t)[\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)] = \bar{g}_j(t) + \delta_j(t)\nabla \bar{g}_j'(t)[\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)].$$

Portanto, $\bar{z}$ satisfaz (TMF) com relação ao problema (RD) com $\gamma = \tilde{z} - \bar{z}$ e $\beta = \hat{\beta}$. □

4.2 Problema com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Consideremos agora o problema (1.1) com restrições de igualdade e desigualdade.

Teorema 4.2. *Seja $\bar{z}$ solução ótima local para o problema (1.1) que satisfaz as hipóteses (A1)-(A4) e (TMF). Então existe $(u,v) \in L_\infty([0,T]; I\!R^p \times I\!R^m)$ tal que para quase todo $t \in [0,T]$, $v(t) \geq 0$,*

$$\nabla \bar{\phi}(t) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t)\nabla \bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\nabla \bar{g}_j(t) = 0 \tag{4.4}$$

$$v_j(t)\bar{g}_j(t) = 0, \; j \in J. \tag{4.5}$$

Demonstração. Seja $\bar{z}$ solução ótima local para o problema (1.1) em $\bar{z}(t) + \epsilon \bar{B}$ q.t.p. em $[0,T]$. Vamos fazer a demonstração em alguns passos.

PASSO 1: Usando o Teorema 1.1, vamos reescrever o problema (1.1) como um problema com restrições de desigualdade apenas e aplicar os resultados da seção anterior. Alguns dos cálculos aqui contidos são análogos aos cálculos do Teorema 2.1, mas vamos refazê-los para não haver confusão. Seja $S_0 \subset [0,T]$ o maior subconjunto onde cada uma das condições (A1)-(A4) e (TMF) não acontecem para todo $t \in S_0$. Sabemos pelas hipóteses que S_0 tem medida nula. Segue de ([68], p. 309) que existe um conjunto de Borel S que é a intersecção de uma coleção enumerável de conjuntos abertos, tal que $S_0 \subset S$ e $S \backslash S_0$ tem medida nula, ou seja, $[0,T] \setminus S$ tem medida total. Identifique no Corolário 1.1, $A = [0,T] \setminus S$ um conjunto de Borel de medida total, t com a, (ξ,η) com (u,v) e $(0,0)$ com (u_0,v_0), e defina $\mu : I\!R^n \times I\!R^p \times [0,T] \to I\!R^p$ dada por

$$\mu(\xi,\eta,t) = h(\bar{z}(t) + \xi + \nabla \bar{h}'(t)\eta, t).$$

Note que se $(\xi,\eta)=(0,0)$, temos que $\mu(0,0,t)=h(\bar{z},t)=0$ q.t.p. em $[0,T]$ e considerando $\alpha'=\min\{\frac{\epsilon}{2},\frac{\epsilon}{2K_0}\}$ obtemos

$$\|\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta-\bar{z}(t)\|=\|\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta\|\leq\|\xi\|+\|\nabla\bar{h}'(t)\|.\|\eta\|\leq\epsilon,$$

sempre que $(\xi,\eta)\in(0,0)+\alpha'\bar{B}$. Isto implica que μ é diferenciável em $(0,0)+\alpha' B$, para todo $t\in A$. Para $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$, $(\xi,\eta)\in(0,0)+\alpha' B$, $t\in A$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\nabla\mu(\tilde{\xi},\tilde{\eta},t)-\nabla\mu(\xi,\eta,t)\|\\
&\quad=\|[\nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t)\quad\nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t)\nabla\bar{h}'(t)]\\
&\qquad-[\nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)\quad\nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)\nabla\bar{h}'(t)]\|\\
&\quad=\|[\nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t)-\nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)](I_n\quad\nabla\bar{h}'(t))\|\\
&\quad\leq\|\nabla h(\bar{z}(t)+\tilde{\xi}+\nabla\bar{h}'(t)\tilde{\eta},t)-\nabla h(\bar{z}(t)+\xi+\nabla\bar{h}'(t)\eta,t)\|.\|(I_n\quad\nabla\bar{h}'(t))\|\\
&\quad\leq\tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi)+\nabla\bar{h}'(t)(\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0)\\
&\quad\leq\tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi)\|+K_0.\|(\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0)\\
&\quad\leq\tilde{\theta}(\|(\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}-\eta)\|+K_0.\|(\tilde{\xi}-\xi,\tilde{\eta}-\eta)\|).(1+K_0)=\theta(\|(\tilde{\xi},\tilde{\eta})-(\xi,\eta)\|),
\end{aligned}$$

onde a função $\theta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ dado por

$$\theta(s)=(1+K_0)\tilde{\theta}(s+K_0 s)$$

é crescente e quando $s\downarrow 0$, $\tilde{\theta}(s)\downarrow 0$, implicando que $\theta(s)\downarrow 0$. Temos que

$$\nabla_\eta\mu(0,0,t)=\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t),$$

pela Definição 4.1-(ii), $\det\{\nabla_\eta\mu(0,0,t)\}\geq K>0$ para todo $t\in A$ e juntamente com a hipótese (A3), resulta que existe $M>0$ tal que

$$\|[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\|\leq M,\ t\in A. \tag{4.6}$$

Pelo Corolário 1.1 existe $\sigma\in(0,\epsilon)$, $\delta\in(0,\epsilon)$ e uma função implícita

$$d:\sigma B\times A\to\delta B$$

tal que $d(\xi,\cdot)$ é mensurável para fixo ξ, as funções da família $\{d(\cdot,t)\mid t\in A\}$ são Lipschitz com constante Lipschitz comum, $d(\cdot,t)$ é continuamente diferenciável para cada $t\in A$,

$$\begin{aligned}
d(0,t)&=0,\quad t\in A, &(4.7)\\
\mu(\xi,d(\xi,t),t)&=0,\quad t\in A,\ \xi\in\sigma B &(4.8)\\
\nabla d(0,t)&=-[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t),\quad t\in A. &(4.9)
\end{aligned}$$

Escolha $\sigma_1 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que

$$\sigma_1 \in (0, \min\{\sigma, \frac{\alpha'}{2}\}), \qquad \delta_1 \in (0, \min\{\delta, \frac{\alpha'}{2}\}), \qquad \sigma_1 + K_0\delta_1 \in (0, \frac{\alpha'}{2}), \quad (4.10)$$

No restante da demonstração e sem perda de generalidade consideraremos a função implícita d definida em $\sigma_1 B \times [0,T]$ tomando valores em $\delta_1 B$. Escreveremos "q.t.p. em $[0,T]$" em vez de "para todo $t \in A$".

PASSO 2: Vamos mostrar que se $\bar{z}$ é solução ótima local para o problema (1.1), então $\bar{z}$ é solução ótima local para o problema auxiliar

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \tilde{P}(z) = \displaystyle\int_0^T \varphi(z(t),t)\ dt \\ \text{sujeito a} & G(z(t),t) \geq 0 \ \text{ q.t.p. em } [0,T], \end{array} \qquad \text{(AUX)}$$

onde

$$\varphi(z(t),t) = \phi(z(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(z(t) - \bar{z}(t),t),t)$$

e

$$G(z(t),t) = g(z(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(z(t) - \bar{z}(t),t),t), \ \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

De fato, suponha que $\tilde{z} \in \bar{z} + \sigma_2 B$, $0 < \sigma_2 < \sigma_1$ arbitrário, é um solução ótima local para (AUX) tal que $\tilde{P}(\tilde{z}) > \tilde{P}(\bar{z})$. Considere

$$\hat{z}(t) = \tilde{z}(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t) \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Usando desigualdade triangular, (4.10) e (H3), obtemos

$$\begin{aligned} \|\hat{z}(t) - \bar{z}(t)\| &= \|(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)) + \nabla\bar{h}'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t)\| \\ &\leq \|\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)\| + \|\nabla\bar{h}'(t)\|.\|d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t)\| < \sigma_1 + K_0\delta_1 < \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\tilde{z} - \bar{z} \in \sigma_1 B$, pela definição de μ temos que

$$\mu(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t), d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t),t) = 0 \Rightarrow h(\tilde{z}(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t),t) = 0,$$

ou seja, $h(\hat{z}(t),t) = 0$. Também,

$$g(\hat{z}(t),t) = g(\tilde{z}(t) + \nabla\bar{h}'(t)d(\tilde{z}(t) - \bar{z}(t),t),t) = G(\tilde{z}(t),t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } [0,T].$$

Isto mostra que $\hat{z} \in \Omega$, mas

$$P(\hat{z}) = \tilde{P}(\tilde{z}) > \tilde{P}(\bar{z}) = P(\bar{z}),$$

que contradiz o fato de que $\bar{z}$ é uma solução ótima local para (1.1).

PASSO 3: Vamos mostrar que o Teorema 4.1 é aplicável ao problema (AUX). Pelas hipóteses (A1) e (A2) note que como $\phi(\cdot,t)$, $g(\cdot,t)$ e $h(\cdot,t)$ são continuamente diferenciáveis em $\bar{z}(t)+\epsilon B$ q.t.p. em $[0,T]$, temos que $\varphi(\cdot,t)$ e $G(\cdot,t)$ também são. $\varphi(z,\cdot)$ e $G(z,\cdot)$ são mensuráveis para cada z. Notando que

$$\nabla\bar{\varphi}(t)=[I_n+\nabla\bar{h}'(t)\nabla d(0,t)]'\nabla\bar{\phi}(t) \;\text{ q.t.p. em } [0,T], \tag{4.11}$$

$$\nabla\bar{G}(t)=[I_n+\nabla\bar{h}'(t)\nabla d(0,t)]'\nabla\bar{g}(t) \;\text{ q.t.p. em } [0,T], \tag{4.12}$$

temos que $\nabla\bar{\varphi}(\cdot)$ e $\nabla\bar{G}(\cdot)$ são uniformemente limitadas em $[0,T]$ por (A1), (A2) e por (4.6). Também, se γ satisfaz (A5)-(i), temos para q.t.p. em $[0,T]$ que

$$\begin{aligned}\int_0^T\nabla\bar{\varphi}'(t)\gamma(t)\,dt &= \int_0^T\nabla\bar{\phi}'(t)[I_n-\nabla\bar{h}'(t)[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)]\gamma(t)\,dt\\ &= \int_0^T\nabla\bar{\phi}'(t)\gamma(t)\,dt=f_0(\gamma,t),\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}&-\bar{G}_j(t)-\delta_j(t)\nabla\bar{G}_j'(t)\gamma(t)\\ &\quad=-\bar{g}_j(t)-\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)[I_n-\nabla\bar{h}'(t)[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)]\gamma(t)\\ &\quad=-\bar{g}_j(t)-\delta_j(t)\nabla\bar{g}_j'(t)\gamma(t)=f_j(\gamma,t),\;\; j\in J.\end{aligned}$$

Então, as hipóteses (A3), (A4) e (TMF) acontecem para as funções φ e G do problema (AUX). Pelo Teorema 4.1, existe $v\in L_\infty([0,T];I\!R^m)$ tal que, para q.t.p. em $[0,T]$, temos que $v(t)\geq 0$ e

$$\nabla\bar{\varphi}(t)+\sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla\bar{G}_j(t)=0, \tag{4.13}$$

$$v_j(t)\bar{G}_j(t)=0,\;\; j\in J. \tag{4.14}$$

Note que (4.14) implica (4.5). Por (4.11) e (4.12), para q.t.p. em $[0,T]$, temos que

$$\nabla\bar{\varphi}(t)=\nabla\bar{\phi}(t)+\nabla\bar{h}'(t)\{-[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\}\nabla\bar{\phi}(t) \tag{4.15}$$

e

$$\nabla\bar{G}_j(t)=\nabla\bar{g}_j(t)+\nabla\bar{h}'(t)\{-[\nabla\bar{h}(t)\nabla\bar{h}'(t)]^{-1}\nabla\bar{h}(t)\}\nabla\bar{g}_j(t),\;\; j\in J. \tag{4.16}$$

Substituindo (4.15) e (4.16) em (4.13) resulta para q.t.p. em $[0,T]$ que

$$\nabla\bar{\phi}(t)+\sum_{i=1}^p u_i(t)\nabla\bar{h}_i(t)+\sum_{j=1}^m v_j(t)\nabla\bar{g}(t)=0,$$

fornecendo (4.4) com

$$u_i(t) = \left[[-[\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)]^{-1} \nabla \bar{h}(t)][\nabla \bar{\phi}(t) + \sum_{j=1}^{m} v_j(t) \nabla \bar{g}_j(t)] \right]_i, \ i \in I.$$

Como $u \in L_\infty([0,T]; I\!R^p)$ por (H1)-(H3) e (4.6), concluímos a demonstração. $\square$

Exemplo 4.4. *Considere o problema*

$$\begin{array}{ll} \textit{maximizar} & \displaystyle\int_0^1 -(z_1(t)-1)^2 - (z_2(t)-1)^2 - z_3^2(t) \ dt \\ \textit{sujeito a} & h(z,t) = -z_1^2(t) - z_2^2(t) + z_3(t) + 2 = 0 \quad \textit{q.t.p. em } t \in [0,1], \\ & g_1(z,t) = -2z_1(t)z_2(t) + 4z_2(t) + z_3(t) - 2 \geq 0 \quad \textit{q.t.p. em } t \in [0,1], \\ & g_2(z,t) = z_1(t) + \frac{1}{2} z_3(t) - 1 \geq 0 \end{array}$$

onde $z : [0,T] \to I\!R^3$ *e* $h, g_1, g_2 : I\!R^3 \times [0,T] \to I\!R$. *O ponto factível* $\bar{z} = (1,1,0)'$ *é uma solução ótima para este problema. Note que, para q.t.p. em* $[0,T]$,

$$\nabla \bar{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \bar{h}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla \bar{g}_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla \bar{g}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Considerando $\gamma(t) = (1,1,4)'$ *q.t.p. em* $[0,T]$ *e* $\beta = 1$, *vemos que* $\bar{z}$ *satisfaz a condição (TMF). Este problema satisfaz as condições do Teorema 4.2 e nos fornece os multiplicadores* $u(t) = v_1(t) = \frac{1}{2}$ *e* $v_2(t) = 2$ *q.t.p. em* $[0,T]$. *Observe ainda que as condições de posto completo e posto constante também são satisfeitas para este problema.*

Proposição 4.5. *Seja* $\bar{z} \in \Omega$. *Suponha que*

(a)

$$h(z(t),t) = A(t)z(t) - b(t) \quad \textit{q.t.p. em } [0,T],$$

onde $A(t) \in I\!R^{p \times n}$ *é uma matriz dependente do tempo tal que*

$$\det \{A(t)A'(t)\} \geq c \quad \textit{q.t.p. em } [0,T],$$

para algum $c > 0$, *e* $b \in L_\infty([0,T]; I\!R^p)$.

(b) $g_j(\cdot,t)$ *é côncava para q.t.p. em* $[0,T]$, $j \in I_a(t)$, *e existem* $\tilde{\beta} > 0$ *e* $\tilde{z} \in \Omega$, $\tilde{z} \in \bar{z} + \epsilon B$, $\epsilon > 0$, *tais que*

$$g_j(\tilde{z}(t),t) \geq \tilde{\beta} \quad \textit{q.t.p. em } [0,T], \ j \in J.$$

Então, $\bar{z}$ *satisfaz a condição (TMF) para o problema (1.1).*

Demonstração. Pela Proposição 4.4, temos que $\bar{z}$ satisfaz o item (i) da Definição 4.1 com relação às restrições de desigualdade, com $\gamma = \tilde{z} - \bar{z}$. Como $\tilde{z} \in \Omega$, pela hipótese (a) temos para quase todo $t \in [0, T]$ que

$$\nabla h(\bar{z}(t), t)\gamma(t) = A(t)[\tilde{z}(t) - \bar{z}(t)] = A(t)\tilde{z}(t) - A(t)\bar{z}(t) = b(t) - b(t) = 0.$$

Assim, a condição (i) da Definição 4.1-(i) acontece com relação a restrição de igualdade e, ainda pela hipótese (a) temos que a condição (ii) da Definição 4.1 é satisfeita. □

4.3 Nota sobre Dependência e Independência Linear Positiva

Em otimização não linear com dimensão finita, Qi e Wei [41] definiram a condição de independência linear positiva (PLI), apresentada na Definição 4.6. Esta condição é equivalente à condição de Mangasarian-Fromovitz [39] para problemas com restrições de igualdade e desigualdade (ver [59]).

Numa tentativa de adaptar a condição (PLI) para problemas com tempo contínuo, apresentamos uma definição de (PLI) em $L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ e analisamos a relação de tal condição de regularidade com a condição (TMF).

Definição 4.3. *Sejam $F = \{b_i \mid i \in I\}$ e $G = \{c_j \mid j \in J\}$ conjuntos de funções em $L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Dizemos que o conjunto $F \cup G$ é positivo-linearmente dependente (PLD) quando existirem funções $(\beta, \eta) \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m)$, $\eta(t) \geq 0$ q.t.p. em $[0, T]$ e um subconjunto $D \subset [0, T]$ de medida positiva satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^{p} |\beta_i(t)| + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) = 1 \quad \forall\ t \in D,$$

tais que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i(t) b_i(t) + \sum_{i=1}^{m} \eta_j(t) c_j(t) = 0 \quad \forall\ t \in D.$$

Caso contrário, dizemos que $F \cup G$ é positivo-linearmente independente (PLI).

Observação 4.3. *Do mesmo modo que na dependência e independência linear de vetores, qualquer subconjunto de um conjunto conjunto de funções (PLI) é sempre (PLI) e um conjunto de funções que contém um subconjunto PLD é sempre PLD, conforme proposições seguintes.*

Proposição 4.6. *Sejam $F = \{b_i \mid i \in I\}$ e $G = \{c_j \mid j \in J\}$ conjunto de funções em $L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Se $F \cup G$ é (PLI) então todo subconjunto de $F \cup G$ é (PLI).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, sejam $F_1 = \{b_1, \ldots, b_q\}$, $q < p$, e $G_1 = \{c_1, \ldots, c_r\}$, $r < m$, tais que $F_1 \cup G_1 \subset F \cup G$. Se $F_1 \cup G_1$ for (PLD), então existem funções $(\tilde{\beta}, \tilde{\eta}) \in L_\infty([0,T]; I\!R^q \times I\!R^r)$, $\tilde{\eta}(t) \geq 0$ q.t.p. em $[0,T]$ e um subconjunto $D \subset [0,T]$ de medida positiva satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{q} |\tilde{\beta}_i(t)| + \sum_{j=1}^{r} \tilde{\eta}_j(t) = 1 \ \ \forall\ t \in D,$$

tais que

$$\sum_{i=1}^{q} \tilde{\beta}_i(t) b_i(t) + \sum_{j=1}^{r} \tilde{\eta}_j(t) c_j(t) = 0 \ \ \forall\ t \in D.$$

Definindo $\tilde{\beta}_{q+i} \equiv 0$, $i = 1, \ldots, p-q$, e $\tilde{\eta}_{r+j} \equiv 0$, $j = 1, \ldots, m-r$, temos que $(\beta, \eta) = (\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_p, \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_m) \in L_\infty([0,T]; I\!R^p \times I\!R^m)$, $\eta(t) \geq 0$ q.t.p. em $[0,T]$ satisfaz

$$\sum_{i=1}^{p} |\beta_i(t)| + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) = 1 \ \ \forall\ t \in D,$$

e também

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i(t) b_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) c_j(t) = 0 \ \ \forall\ t \in D,$$

contradizendo o fato de que $F \cup G$ é (PLI). Então, $F_1 \cup G_1$ é (PLI). □

Proposição 4.7. *Sejam $F = \{b_i \mid i \in I\}$ e $G = \{c_j \mid j \in J\}$ conjunto de funções em $L_n^\infty[0,T]$. Se $F \cup G$ tem um subconjunto (PLD) então $F \cup G$ é (PLD).*

Demonstração. Raciocínio análogo à demonstração da Proposição 4.6. □

O modo como definimos a condição (TMF), nos induz a escrever a seguinte definição:

Definição 4.4. *Diremos que $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz a condição (TMF)-Regular para o problema (1.1) quando o conjunto de funções em $L_\infty([0,T]; I\!R^{n+1})$*

$$\{b_i \mid i \in I\} \cup \{c_j \mid j \in J\}$$

for (PLI) onde, para quase todo $t \in [0,T]$, temos que

$$b_i(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \bar{h}_i(t) \end{pmatrix} \quad e \quad c_j(t) = \begin{pmatrix} \bar{g}_j(t) \\ \delta_j(t) \nabla \bar{g}_j(t) \end{pmatrix}.$$

Caso contrário, diremos que $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz a condição (TMF)-Não Regular.

Proposição 4.8. *Se $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz (TMF), então $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz (TMF)-Regular.*

Demonstração. Suponha que $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz (TMF)-Não Regular. Então existem $(\beta, \eta) \in \{L_\infty([0,T]; I\!R^p \times I\!R^m),\ \eta(t) \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } [0,T]$, e um subconjunto $D \subset [0,T]$ de medida positiva D satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{p} |\beta_i(t)| + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) = 1 \ \ \forall\ t \in D, \tag{4.17}$$

tais que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i(t) b_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) c_j(t) = 0 \ \ \forall\ t \in D, \tag{4.18}$$

onde, para quase todo $t \in [0,T]$, temos que

$$b_i(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \bar{h}_i(t) \end{pmatrix},\ i \in I \quad \text{e} \quad c_j(t) = \begin{pmatrix} \bar{g}_j(t) \\ \delta_j(t) \nabla \bar{g}_j(t) \end{pmatrix},\ j \in J.$$

Como a Definição 4.1-(i) é satisfeita, existem $\tilde{\gamma} = (1, \gamma) \in L_\infty([0,T]; I\!R \times I\!R^n)$ e $\beta > 0$ tais que

$$b_i'(t)\tilde{\gamma}(t) = 0,\ i \in I, \quad \text{e} \quad c_j'(t)\tilde{\gamma}(t) \geq \beta,\ j \in J.$$

Transpondo (4.18) ambos os membros e fazendo o produto interno a direita por $\tilde{\gamma}$ temos para $t \in D$, que

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i(t) b_i'(t)\tilde{\gamma}(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) c_j'(t)\gamma(t) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \eta_j(t) c_j'(t)\tilde{\gamma}(t) = 0 \Rightarrow \eta_j(t) = 0 \ \ \forall\ t \in D,\ j \in J.$$

Substituindo esta última igualdade em (4.18) e usando a condição (ii) da Definição 4.1obtemos

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i(t) \nabla h_i(\bar{z}(t), t) = 0 \Rightarrow \beta_i(t) = 0 \ \ \forall\ t \in D,\ i \in I,$$

contradizendo (4.17). Logo, $\bar{z} \in \Omega$ satisfaz (TMF)-Regular. $\square$

Note que nem sempre a recíproca da Proposição 4.8 é verdadeira. A condição (TMF)-Regular nos garante independência linear do conjunto

$$\{\nabla \bar{h}_i(t) \mid i \in I\}$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Mas isso não garante que o determinante de $\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)$ seja uniformemente limitado em $[0,T]$, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.5. *Considere um sistema com duas restrições de igualdade* $h_1, h_2 : I\!R^2 \times [0,T] \to I\!R$ *dadas por* $h_1(z,t) = z_1 + z_2$*,* $h_2(z,t) = tz_1$*, com* $z = (z_1, z_2)$*. Considerando* $\bar{z} = (0,0)$*, note que*

$$\nabla \bar{h}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \nabla \bar{h}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes para todo $t \in (0,T]$*, resultando que* $\bar{z}$ *satisfaz a condição (TMF)-Regular. Mas,*

$$\det\{\nabla \bar{h}(t) \nabla \bar{h}'(t)\} = \det\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} = \det\{\begin{pmatrix} 2 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}\} = t^2,$$

não existindo um constante positiva que limita inferiormente o determinante para quase todo $t \in [0,T]$*.*

Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesta tese, foram definidas quatro novas qualificações de restrições para problemas com tempo contínuo: Posto Completo, Posto Constante, Tipo Slater e Tipo Mangasarian-Fromovitz. A Proposição 3.2 nos diz que a condição de posto completo, associada a um hipótese adicional, implica na condição de posto constante mas a recíproca não é verdadeira, conforme Exemplo 3.2. A condição Tipo Slater implica na condição Tipo Mangasarian-Fromovitz pela Proposição 4.5, mas a recíproca não é sempre verdadeira (basta tomarmos uma função g não côncava).

Vale destacar outras duas importantes contribuições desta tese:

(a) a obtenção de condições necessárias de otimalidade para problemas com tempo contínuo com a presença de restrições de igualdade, e

(b) a apresentação de condições necessárias de otimalidade de segunda ordem para problemas com tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade.

Tais contribuições citadas não aparecem na literatura quando o problema com tempo contínuo está definido no espaço $L_\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$.

A teoria até aqui desenvolvida abre um leque de possibilidades de trabalhos futuros. Uma delas é definir uma condição de regularidade que seja uma generalização para tempo contínuo da condição (PLI) da otimização em dimensão finita, que seja equivalente à condição (TMF) do Capítulo 4.

Andreani e Schuverdt [69] verificam que uma condição chamada dependência linear positiva constante (CPLD) é uma qualificação de restrições, ou seja, se um problema de otimização não linear em dimensão finita e com restrições de igualdade e desigualdade verifica (CPLD) em um dado ponto, então as condições Karush-Kuhn-Tucher acontecem nesse ponto. Esta condição é mais fraca do que a condição de Mangasarian-Fromovitz no sentido de que pontos que satisfazem (MFCQ) também satisfazem (CPLD). Interessa-nos generalizar (CPLD) para tempo contínuo de tal modo que essa implicação continue sendo verdadeira. Além da (CPLD), pode-se citar as novas qualificações de restrições geradores positivos constantes (CPG) e posto constante do subespaço componente (CRSC)(ver [71]).

Pode-se estudar a possibilidade de se conseguir um Teorema tipo Fritz John usando o teorema de alternativa dado em [23]. Uma outra utilidade desse teorema de alternativa pode ser na obtenção de condições suficientes para problemas tempo contínuo com restrições de igualdade e desigualdade, usando hipóteses de convexidade generalizada.

Podemos considerar qualificações de restrições para o problema com tempo contínuo multiobjetivo. Maciel, Santos e Sottosanto [58] realizaram um estudo sobre condições de qualificação para problemas multiobjetivos em dimensão finita, onde discutem as relações existentes entre a condição de dependência linear dos gradientes e das distintas noções de regularidade existentes para o contexto multiobjetivo (ver [72]). Tais resultados em dimensão finita podem ser estendidos para o caso tempo contínuo?

Um outro caminho seria analisar a possibilidade de adaptar os resultados obtidos nesta tese para problemas de programação infinita. Em sua tese de doutorado, de Oliveira [73] discute condições de otimalidade Fritz John e K.K.T. para problemas de programação infinita e utiliza uma qualificação de restrições análoga à (MFCQ).

Devido aos erros na demonstração do Teorema de Gordan Generalizado [22], vários resultados conhecidos na programação com tempo contínuo foram invalidados. Por exemplo, teoremas de dualidade, de ponto de sela, condições de otimalidade Fritz John, escalarização de problemas multiobjetivos, entre outros. Uma possibilidade seria recuperar tais resultados utilizando a nova versão do teorema de alternativa dado por Arutyunov et al. [23].

Referências Bibliográficas

[1] R. Bellman, "Bottleneck problems and dynamic programming," in *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 39, pp. 947–951, National Academic Sciences, 1953.

[2] R. Bellman, *Dynamic Programming.* Princeton University Press, 1957.

[3] W. F. Tyndall, "A duality theorem for a class of continuous linear programming problems," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 3, pp. 644–666, 1965.

[4] N. Levinson, "A class of continuous linear programming problems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 16, no. 1, pp. 73–83, 1966.

[5] G. B. Dantzig, "Linear control processes and mathematical programming," *SIAM Journal on Control*, vol. 4, no. 1, pp. 56–60, 1966.

[6] R. C. Grinold, "Continuous programming part one: linear objectives," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 28, no. 1, pp. 32–51, 1969.

[7] A. Larsen and E. Polak, "Some sufficient conditions for continuous linear-programming problems," *International Journal of Engineering Science*, vol. 4, no. 5, pp. 583–604, 1966.

[8] M. Hanson, "Duality for a class of infinite programming problems," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 16, no. 2, pp. 318–323, 1968.

[9] M. A. Hanson and B. Mond, "A class of continuous convex programming problems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 22, no. 2, pp. 427–437, 1968.

[10] W. F. Tyndall, "On two duality theorems for continuous programming problems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 31, no. 1, pp. 6–14, 1970.

[11] W. H. Farr and M. A. Hanson, "Continuous time programming with nonlinear time delayed constraints," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 46, no. 1, pp. 41–61, 1974.

[12] C. Scott and T. Jefferson, "Duality in infinite-dimensional mathematical programming: convex integral functionals," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 61, no. 1, pp. 251–261, 1977.

[13] T. W. Reiland and M. A. Hanson, "Generalized Kuhn-Tucker conditions and duality for continuous nonlinear programming problems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 74, no. 2, pp. 578–598, 1980.

[14] T. W. Reiland, "Optimality conditions and duality in continuous programming i. Convex programs and a theorem of the alternative," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 77, no. 1, pp. 297–325, 1980.

[15] T. W. Reiland, "Optimality conditions and duality in continuous programming ii. The linear problem revisited," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 77, no. 2, pp. 329–343, 1980.

[16] B. D. Craven and J. J. Koliha, "Generalizations of farkas theorem," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 8, no. 6, pp. 983–997, 1977.

[17] J. M. Abadie, "On the Kuhn-Tucker theorem," *In J.M. Abadie, editor, Nonlinear Programming, John Wiley*, pp. 21–36, 1967.

[18] G. Zalmai, "Optimality conditions and Lagrangian duality in continuous-time nonlinear programming," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 109, no. 2, pp. 426–452, 1985.

[19] I. V. Girsanov, *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems, vol. 67.* Springer-Verlag, New York, 1972.

[20] G. Zalmai, "The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous-time nonlinear programming," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 110, no. 2, pp. 503–518, 1985.

[21] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming, v.10.* SIAM Classics in Applied Mathematics, Philadelphia, 1993.

[22] G. Zalmai, "A continuous-time generalization of Gordan's transposition theorem," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 110, no. 1, pp. 130–140, 1985.

[23] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, and B. Marinkovic, "Theorems of the alternative for systems of convex inequalities," *Set-Valued and Variational Analysis*, vol. 25, pp. 1–20, 2017.

[24] G. Zalmai, "Optimality conditions and duality for a class of continuous-time generalized fractional programming problems," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 153, no. 2, pp. 356–371, 1990.

[25] G. Zalmai, "Optimality conditions and duality for a class of continuous-time programming problems with nonlinear operator equality and inequality constraints," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 153, no. 2, pp. 309–330, 1990.

[26] J. Stoer, "Duality in nonlinear programming and the minimax theorem," *Numerische Mathematik*, vol. 5, no. 1, pp. 371–379, 1963.

[27] A. J. V. Brandão, M. A. Rojas Medar, and G. N. Silva, "Nonsmooth continuous-time optimization problems: necessary conditions," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 41, no. 12, pp. 1477–1486, 2001.

[28] M. A. Rojas Medar, A. J. Brandao, and G. N. Silva, "Nonsmooth continuous-time optimization problems: sufficient conditions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 227, no. 2, pp. 305–318, 1998.

[29] V. A. de Oliveira and M. A. Rojas-Medar, "Continuous-time optimization problems involving invex functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 327, no. 2, pp. 1320–1334, 2007.

[30] D. Martin, "The essence of invexity," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 47, no. 1, pp. 65–76, 1985.

[31] V. A. de Oliveira, M. A. Rojas Medar, and A. J. V. Brandão, "A note on KKT-invexity in nonsmooth continuous-time optimization," *Proyecciones (Antofagasta)*, vol. 26, no. 3, pp. 269–279, 2007.

[32] V. A. de Oliveira and M. A. Rojas-Medar, "Continuous-time multiobjective optimization problems via invexity," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2007, no. 1, p. 11, 2007.

[33] S. Nobakhtian and M. Pouryayevali, "Optimality criteria for nonsmooth continuous-time problems of multiobjective optimization," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 136, no. 1, pp. 69–76, 2008.

[34] S. Nobakhtian, "Nonsmooth multiobjective continuous-time problems with generalized invexity," *Journal of Global Optimization*, vol. 43, no. 4, pp. 593–606, 2009.

[35] V. A. de Oliveira, "Vector continuous-time programming without differentiability," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, no. 3, pp. 924–933, 2010.

[36] M. R. de Pinho and R. Vinter, "Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 212, no. 2, pp. 493–516, 1997.

[37] D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming.* Athena scientific Belmont, 1999.

[38] D. G. Luenberger and Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*, vol. 2. Springer, 1984.

[39] O. L. Mangasarian and S. Fromovitz, "The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints," *Journal of Mathematical Analysis and applications*, vol. 17, no. 1, pp. 37–47, 1967.

[40] R. Janin, "Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming," *Sensitivity, Stability and Parametric Analysis*, pp. 110–126, 1984.

[41] L. Qi and Z. Wei, "On the constant positive linear dependence condition and its application to SQP methods," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, no. 4, pp. 963–981, 2000.

[42] R. Andreani, P. Gonçalves, and G. N. Silva, "Discrete approximations for strict convex continuous time problems and duality," *Computational & Applied Mathematics*, vol. 23, no. 1, pp. 81–105, 2004.

[43] M. C. Pullan, "An algorithm for a class of continuous linear programs," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 31, no. 6, pp. 1558–1577, 1993.

[44] G. Weiss, "A simplex based algorithm to solve separated continuous linear programs," *Mathematical Programming*, vol. 115, no. 1, pp. 151–198, 2008.

[45] C.-F. Wen, Y.-Y. Lur, and H.-C. Lai, "Approximate solutions and error bounds for a class of continuous-time linear programming problems," *Optimization*, vol. 61, no. 2, pp. 163–185, 2012.

[46] H.-C. Wu, "Solving continuous-time linear programming problems based on the piecewise continuous functions," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 37, no. 9, pp. 1168–1201, 2016.

[47] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise.Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree*. Masson, Paris, 1983.

[48] G. B. Folland, *Real analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1984.

[49] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley, New York, 1969.

[50] E. L. Lima, *Curso de análise vol. 2*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[51] M. R. de Pinho and A. Ilchmann, "Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints," *Nonlinear Analysis*, vol. 48, no. 1, pp. 11–59, 2002.

[52] H. L. Royden, *Real Analysis, second edition*. Macmillan, New York, 1968.

[53] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix computations, vol. 3*. JHU Press, 2012.

[54] F. Clarke, *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*, vol. 264. Springer Science & Business Media, 2013.

[55] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, vol. 6. Elsevier, North-Holland, 2009.

[56] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*. New Jersey Princeton Unibersity Press, Princeton, 1970.

[57] M. Slater, "Lagrange multiplier revised: A contribution to nonlinear programming," *Cowles Commission Discussion Paper*, vol. 403, 1950.

[58] M. Maciel, S. Santos, and G. Sottosanto, "Regularity conditions in differentiable vector optimization revisited," *Journal of optimization theory and applications*, vol. 142, no. 2, pp. 385–398, 2009.

[59] M. L. Schuverdt, *Métodos de Lagrangiano Aumentado com Convergência Utilizando a Condição de Dependência Linear Positiva Constante*. Tese de doutorado. IMECC, UNICAMP, SP, 2006.

[60] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt, "Augmented lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification," *Mathematical Programming*, vol. 111, no. 1-2, pp. 5–32, 2008.

[61] A. A. Ribeiro and E. W. Karas, "Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais," *São Paulo: Cengage Learning*, 2013.

[62] M. Guignard, "Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a banach space," *SIAM Journal on Control and Optimization*, no. 7, pp. 232–241, 1969.

[63] F. J. Gould and J. W. Tolle, "A necessary and sufficient qualification for constrained optimization," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, no. 20, pp. 164–172, 1971.

[64] G. Haeser, *Condições de otimalidade de primeira e segunda ordem em otimização não linear.* Livre Docência, USP, São Paulo, 2015.

[65] G. Zalmai, "Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 111, no. 1, pp. 130–147, 1985.

[66] L. A. Lusternik and V. J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis.* Frederick Ungar, New York, 1961.

[67] L. N. Trefethen and D. Bau III, *Numerical linear algebra.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.

[68] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis 3rd Edition.* McGraw-Hill, New York, 1976.

[69] R. Andreani, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt, "The constant positive linear dependence condition of qi and wei implies the quasinormality constraint qualification," *Journal of Optimization Theory and Applications*, no. 125, pp. 473–485, 2004.

[70] L. W. Baggett, *Functional analysis: A primer.* Chapman & Hall Pure And Applied Mathematics Series, CRC Press, 1992.

[71] R. Andreani, G. Haeser, M. L. Schuverdt, and P. J. Silva, "Two new weak constraint qualifications and applications," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 22, no. 3, pp. 1109–1135, 2012.

[72] G. Bigi and M. Pappalardo, "Regularity conditions for the linear separation of sets," *Journal of optimization theory and applications*, vol. 99, no. 2, pp. 533–540, 1998.

[73] V. A. de Oliveira, *Contribuições na teoria de otimização para alguns problemas de programação infinita e de programação com tempo continuo*. Tese de doutorado. IMECC, UNICAMP, SP, 2007.