

Sandra Regina Monteiro Masalskiene

Fibrados e Teorias da Gravitação



1910000740



**FIBRADOS E TEORIAS DA
GRAVITAÇÃO**

Sandra Regina Monteiro Masalskiene

**Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional
MAC-014**



FIBRADOS E TEORIAS DA GRAVITAÇÃO

Sandra Regina Monteiro Masalskiene

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas (Área de Concentração: Matemática Aplicada e Computacional).

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto



740/97

São José do Rio Preto

1996

Para João, Dionisia
e José Arnaldo.



Agradecimentos

Ao Prof. Manoel F. Borges Neto
pela orientação sábia e firme
que conduziu este trabalho.

A todos, que de alguma forma
contribuíram para esta
realização.

A Deus.



“Eu penso que estética em matemática, assim como em física, não é essencialmente diferente da estética artística. Em ambas existe uma procura pelo belo e por qualidades como simplicidade, universalidade e elegância.”

Roger Penrose

“A Question of Physics”, edicted by Buckley and Peat. Routledge and Kegan Pauls, G. Britain 1979.



FIBRADOS E TEORIAS DA GRAVITAÇÃO

Resumo

As teorias geométricas de fibrados – “fibre bundles” – e de conexões estão hoje muito bem estabelecidas e suas linguagens podem ser consideradas como padrões de excelência no estudo e desenvolvimento da atual física teórica, principalmente das teorias de gauge. Na teoria da gravitação, segundo versão de Kibble e de Utiyama, e nas modernas teorias construídas em variedades de grupo, os fibrados são essenciais para expor de modo claro e conciso os grupos de simetria e invariância. O principal objetivo a que esta dissertação se propõe é o de apresentar, além de uma revisão formal introdutória sobre fibrados e de boa parte dos conceitos e estruturas matemáticas que historicamente os antecederam, a conveniência que essa linguagem fornece para a discussão e interpretação da relatividade geral, *a la* Kibble e Utiyama, e de uma teoria supersimétrica de Yang-Mills em 5 dimensões construída na variedade de grupo.

FIBRE BUNDLES AND GRAVITY THEORIES

Abstract

The geometrical theories of fibre bundles and connexions are well established and their languages and conceptions may be considered as patterns for the study and progress of the contemporary theoretical physics mainly gauge theories. In gravity theory, from a proposal by Kibble and Utiyama and in the modern theories build up on the group manifold, fibre bundles make the presence of symmetries and invariances clear and concise. The main purpose of this dissertation is that of presenting a formal review on fibre bundles itself, and showing the convenience provided by this language for discussing and interpreting both the general relativity, on Kibble and Utiyama version, and an extended five dimensional gravity theory of Yang-Mills type.



Índice

1	Introdução	11
1.1	Fibrados e o Espaço-tempo: Preliminares	12
2	Estruturas Algébricas	19
2.1	Grupos	19
2.1.1	Definições	19
2.1.2	Subgrupo	20
2.1.3	Homomorfismos	21
2.2	Anéis	22
2.2.1	Definição	22
2.2.2	Ideal	24
2.3	Espaços Lineares	25
2.3.1	Definição	25
2.3.2	Função Linear	26
2.4	Módulos	27
2.5	Álgebras	28
3	Topologia	29
3.1	Definições	29
3.2	Separação	31
3.3	Base	32
3.4	Cobertura e Compacidade	33
3.5	Mapeamentos Contínuos	34

3.6	Topologias Associadas	35
3.7	Topologia relacionada a outras estruturas	36
3.8	Espaços Métricos	37
4	Variedades Diferenciáveis e Grupos de Lie	38
4.1	Variedades Diferenciáveis	38
4.1.1	Definições	38
4.1.2	Diferenciabilidade de uma Função em uma Variedade . .	41
4.2	Produto Direto de Variedades	43
4.3	Difeomorfismos	44
4.3.1	Categoria das Variedades Diferenciáveis	45
4.4	Campos Vetoriais	47
4.4.1	Espaço Vetorial Tangente em um Ponto	47
4.4.2	Campos Vetoriais	49
4.5	Grupos de Lie	49
4.6	Translações à esquerda e à direita de G ; Álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de G ; Estruturas Constantes	52
4.6.1	Álgebra de Lie	52
5	Fibrados	55
5.1	Definição de “Bundles” e “Cross Section”	55
5.2	Morfismos e Categorias de Bundles	57
5.2.1	Morfismos	57
5.2.2	Categoria	58
5.3	Definição de Fibrados	59
5.3.1	Definição:	59
5.4	Fibrados Principais	63
6	Conexões	65
6.1	Introdução	65
6.2	Definições	66

6.3	Conexões em um fibrado principal	67
6.3.1	Definição	67
6.3.2	Isomorfismo Canônico entre a Álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de G e os Espaços Verticais V_p	67
6.4	Conexão Local 1-forma	69
6.4.1	Potenciais	71
6.5	Derivada Covariante	73
6.5.1	Definição	74
6.5.2	Transporte Paralelo	76
6.5.3	Derivada Covariante	77
6.6	Curvatura	78
6.6.1	Curvatura Local na Variedade Base	80
6.7	Conexões Lineares	81
7	Teoria de Utiyama e Kibble	82
7.1	Introdução	82
7.2	Teoria de Utiyama e Kibble	84
8	Teoria Supersimétrica de Yang-Mills: uma Interpretação em Fibrados	88
8.1	Generalizações da Teoria de Gravitação de Einstein	88
8.1.1	Supersimetria e Supergravidade	90
8.2	Teoria Supersimétrica de Yang-Mills	92
9	Conclusão	94
10	Bibliografia	100

Lista de Figuras

1.1	Espaço-Tempo/Seções de Simultaneidade.	15
4.1	Mudança de Coordenadas	40
5.1	Faixa Möbius	56
5.2	Diagrama de Möbius	61
9.1	Diagrama de Trautman	96

Capítulo 1

Introdução

A modificação proposta por Cartan na teoria gravitacional de Einstein, conhecida hoje por teoria da gravitação *a la* Einstein-Cartan, consiste em relacionar a torção à densidade de momento angular intrínseco (spin) da matéria [1].

Do ponto de vista da matemática contemporânea, e da física, certamente a mais importante idéia contida nesta proposta foi a introdução implícita das noções rudimentares fundamentais de conexão em um fibrado principal e da de fibrados. Estas noções dominam boa parte da geometria diferencial moderna e tem papel preponderante em topologia diferencial e topologia algébrica. A noção de fibrados também mostrou-se fundamental no desenvolvimento da teoria de campo.

A primeira definição formal, no entanto, foi dada por Whitney [2].

A importância deste conceito foi exposta magistralmente por S.S. Chern em 1942, em um artigo do Boletim da Sociedade Americana de Matemática [3].

Por volta de 1955 Milnor mostrou-nos a construção universal de fibrados para qualquer grupo topológico em sua teoria de espaços micro-fibrados [5].

Para a física, os fibrados fornecem uma estrutura conveniente para

a discussão de conceitos de relatividade, invariância e transformações de “gauge”^{1, 2}. Por exemplo, a eletrodinâmica clássica pode ser interpretada como uma teoria de conexão infinitesimal de um fibrado com a estrutura de grupo $U(1)$. Uma interpretação similar pode ser dada para o campo de Yang-Mills e em geral, para todos os campos resultantes da transformação de gauge.

1.1 Fibrados e o Espaço-tempo: Preliminares

Apresentamos alguns exemplos de estruturas que são fibrados e introduzimos inúmeros termos que, dentre outros, serão discutidos detalhadamente e formalmente em capítulos seguintes.

Fibrados – “fibre bundles” – ocorrem como uma necessidade histórica de se generalizar o conceito de produto cartesiano [capítulo 5], [6].

¹O termo inglês gauge é por alguns traduzido como calibre. Preferimos adotar a forma inglesa que é universalmente aceita.

²A teoria de gauge foi introduzida por H. Weyl em 1918 [4]. A idéia era usar um par de formas, uma quadrática e outra linear

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k$$

e

$$\phi = \sum_i \phi_i dx_i, \quad 1 \leq i, k \leq 4,$$

definidas por uma transformação de gauge

$$ds^2 \rightarrow \lambda ds^2$$

$$\phi \rightarrow \phi + d \log \lambda,$$

sendo ϕ o potencial eletromagnético e sua derivada exterior $d\phi$. Einstein objetou à indeterminação de ds^2 , mas mostrou-se admirado pela profundidade da proposta de Weyl. Todas essas objeções desapareceram, a posteriori, se interpreta-se essa teoria como baseada na geometria de um círculo S^1 sobre uma variedade de Lorentz. Então a forma ϕ , sujeita à transformação de gauge, pode ser interpretada como definindo uma conexão [capítulo 6] em S^1 e ds^2 permanece inalterado, eliminando-se a objeção de Einstein. A proposta de Weyl foi uma primeira tentativa de obtenção de uma teoria unificada.

Na física aristotélica, o espaço e tempo, eram absolutos, cada evento sendo definido por um instante de tempo e uma localização no espaço. Isto é o mesmo que dizer que o espaço-tempo E é um produto cartesiano $T \times S$, onde T é o eixo do tempo e S o espaço tri-dimensional.

Um “bundle”³ é uma tripla (E, T, π) , onde $\pi : E \rightarrow T$ é um mapa sobrejetivo. O espaço T é chamado *espaço base*, o espaço E é chamado *espaço total* e π é a *projeção* do “bundle”. Para cada $t \in T$, o espaço $\pi^{-1}(t)$ é chamado a *fibra* do “bundle” sobre $t \in T$. Um exemplo é útil para clarear esses conceitos, citamos o exemplo da física de Galileu e Newton percorrido brevemente abaixo.

Exemplo 1.1.1 – A Física de Newton e Galileu e os Fibrados

Na física de Galileu o tempo permanece absoluto mas o espaço é relativo. Isto pode ser descrito mostrando que há um mapa projetivo $\pi : E \rightarrow T$ que associa a cada evento $p \in E$ o instante correspondente do tempo $t = \pi(p)$. Cada fibra é isomorfa ao espaço euclidiano E^3 , que é então chamada fibra típica. Neste exemplo todas as fibras são isomorfas e é possível representar o “bundle” como um produto cartesiano. Entretanto, por ser esta representação dependente do referencial, diremos que não há isomorfismo natural entre as fibras.

Exemplo 1.1.2 – O Espaço-tempo e as Seções de Simultaneidade

A generalização do conceito de produto cartesiano na física newtoniana-galileana, motiva também a introdução de um conceito que é essencial na física relativista, que é aquele das seções de simultaneidade.

Seções de Simultaneidade

Seja t_0 um dado valor do tempo t para um observador. O conjunto de pontos no continuum espaço-tempo, quadri-dimensional (M) que tem o mesmo valor para $t = t_0$ será denominado uma seção de simultaneidade

³Não há tradução fiel a “bundle” em linguagem matemática. Adotamos também ao longo do texto a forma inglesa do termo.

naquele espaço-tempo. Denotemos cada seção de simultaneidade por $\pi^{-1}(t)$. Duas seções de simultaneidade não tem ponto em comum ou serão idênticas. A demonstração é dada abaixo:

Demonstração:

Sejam

$$\pi^{-1}(t_1) \quad \pi(p) = t_1 \quad \forall p \in \pi^{-1}(t_1)$$

$$\pi^{-1}(t_2) \quad \pi(q) = t_2 \quad \forall q \in \pi^{-1}(t_2)$$

suponha que $A \in \pi^{-1}(t_1)$ e $\pi^{-1}(t_2)$, então:

$$\pi(A) = t_1$$

$$\pi(A) = t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 \Rightarrow \pi^{-1}(t_1) = \pi^{-1}(t_2)$$

É conveniente, a título ilustrativo, esboçar um diagrama representativo do espaço-tempo.

Cada seção de simultaneidade é uma fibra no espaço-tempo M . A tripla (M, T, π) define, portanto, um "bundle" com projeção π , espaço total M e espaço base T .

Na figura 1.1 observa-se a representação de Einstein do movimento dos planetas em torno do Sol. A teoria geométrica da gravitação a la Einstein suplantou o antigo ponto de vista newtoniano, de acordo com o qual massas de grande porte como a do Sol, produziram no espaço ao seu redor campos de forças que fariam com que os planetas se movessem segundo órbitas circulares ao invés de linhas retas. Na representação einsteniana, o próprio espaço torna-se curvo e os planetas movem-se segundo as "linhas mais curtas", isto é, segundo geodésicas nesse espaço curvo.

Para evitar qualquer mal entendido, deve-se acrescentar que nos referimos aqui às geodésicas no continuum espaço-tempo quadri-dimensional, e seria errado dizer que as próprias órbitas são geodésicas no espaço a três dimensões.

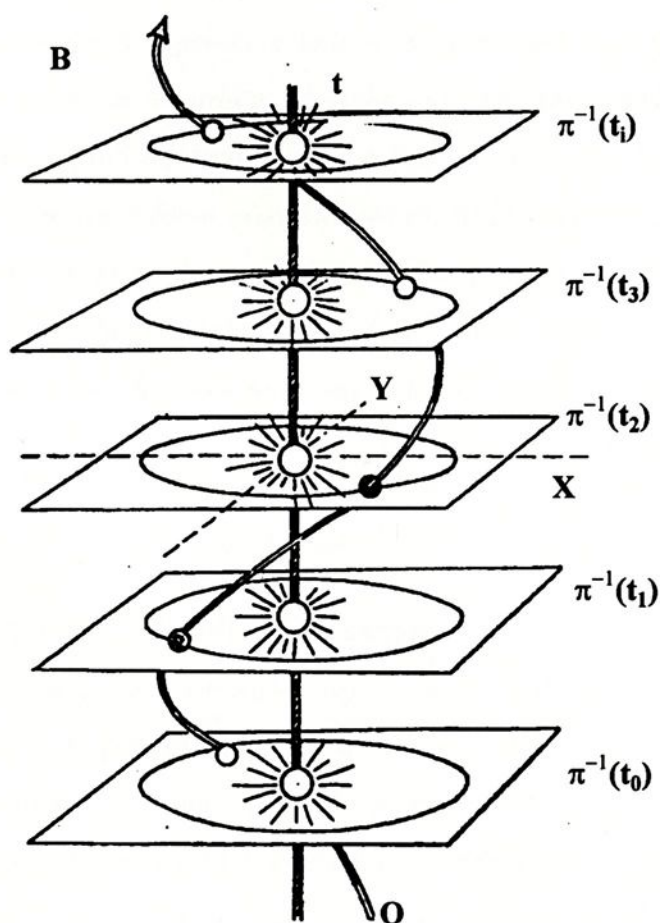


Figura 1.1: Espaço-Tempo/Seções de Simultaneidade.

A linha geodésica OB representa a história do movimento do planeta ao redor do Sol, sendo mais conhecida como linha do mundo.

Esta é a situação esquematicamente ilustrada na figura 1.1, que mostra o eixo dos tempos t , e dois eixos espaciais, x e $y = E = (x \times y)$ localizados no plano da órbita. A linha que sobe em espiral, conhecida como a “linha do mundo” ou “linha do universo” de um objeto em movimento, por exemplo, a terra, é a linha geodésica no continuum espaço-tempo, que “corta” ao longo da “história do movimento do objeto” as seções de simultaneidade (fibras $\pi^{-1}(t_i)$). No capítulo 5, uma definição de “cross section” ⁴, generaliza as seções de simultaneidade aqui percorridas.

Dois outros exemplos úteis são os do “bundle” tangente e o do “frame bundle” ⁵, percorridos a seguir.

Exemplo 1.1.3 – “Bundle” Tangente

Seja E uma variedade diferenciável de n -dimensões e $\tau(E)$ o conjunto de todos os vetores tangentes em todos os pontos de E . Seja $\pi : \tau(E) \rightarrow E$ o mapeamento que mapeia vetores tangentes no ponto E para o qual eles estão ligados. A tripla $(\tau(E), E, \pi)$ é conhecida como o “bundle” tangente da variedade E . Cada fibra $\pi^{-1}(p), p \in E$, é isomorfa ao $\mathbb{R}^n$, que é então uma fibra típica. O isomorfismo não é natural ⁶ e há tantos isomorfismos de $\pi^{-1}(p)$ sobre o $\mathbb{R}^n$ quanto há bases em p . Quaisquer dois isomorfismos são obtidos um do outro aplicando um membro do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ que é chamado o grupo estrutural do fibrado.

⁴Optamos também por manter o termo “cross section” ao invés de seção transversal, devido ao caráter de universalidade.

⁵Mantivemos também o termo inglês pelas razões já anteriormente enunciadas.

⁶O melhor meio de ilustrar o que chamamos de isomorfismo não natural entre as fibras, é dar o exemplo da teoria de espaços vetoriais. Seja V um espaço vetorial n -dimensional e V^* o espaço dual das funções lineares em V . V^* é também um espaço vetorial n -dimensional e é portanto isomorfo a V . Como é necessário definir uma base em V para se construir o isomorfismo, então diz-se que o isomorfismo não é natural. Por outro lado V^{**} (o dual de V^*) é novamente um espaço vetorial n -dimensional, mas agora existe um isomorfismo natural.

Exemplo 1.1.4 – “Frame Bundles”

Seja $P(E)$ o conjunto de todos os vetores dos “frame bundle”s de todos os pontos de E . Um “bundle” pode ser construído como no exemplo 1, a tripla $(P(E), E, \pi)$ será chamada de “frame bundle”. O mapeamento $\pi : P(E) \rightarrow E$ mapeia os vetores referenciais sobre o ponto de E para o qual eles estão ligados. A fibra $\pi^{-1}(p), p \in E$ é isomorfa a $\mathbb{R}^n$ com fibra típica $GL(n, \mathbb{R})$. Suponha que (e_i) seja uma base em $p \in E$ e (r_i) uma segunda base em p . Então $r_i = e_j a_i^j$ com $(a_i^j) = a \in GL(n, \mathbb{R})$. Assim, há um isomorfismo $r \rightarrow a$ e $GL(n, \mathbb{R})$ é a fibra típica. Se $\bar{e}_i$ é outra base, então $r_i = \bar{e}_j \bar{a}_i^j$. O novo isomorfismo $r \rightarrow \bar{a}$ é conectado ao anterior $r \rightarrow a$ por uma transformação matricial única. O grupo estrutural é novamente $GL(n, \mathbb{R})$, que é simultaneamente uma fibra típica. Neste caso, o fibrado é chamado de fibrado principal.

Na física grega o espaço-tempo $E = T \times S$ tinha a estrutura de um “bundle” produto, enquanto que na física de Galileu e na relatividade especial o espaço-tempo tem uma outra, porém o “frame bundle” $(P(E), E, \pi)$ é um “bundle” produto. Na relatividade geral não há isomorfismo natural de $(P(E), E, \pi)$ no produto $E \times F$, mas o fibrado $(P(P(E)), P(E), \pi)$ é um produto [capítulo 9]. Deste modo, generalizações da relatividade podem ser concebidas. D. D. Ivanenko [6] sugeriu que esta generalização fosse chamada de segunda relativização [capítulo 9, “Diagrama de Trautman”].

Além de introduzir brevemente de maneira geométrico intuitiva ao longo deste capítulo a noção de fibrados, nos capítulos seguintes dissertarei formalmente sobre algumas das estruturas matemáticas que norteiam a sua definição e o uso de fibrados, quais sejam: grupos, anéis, topologia, variedades, grupos de Lie e conexões. Finalmente nos capítulos 7, 8 e 9 é mostrado como a teoria de fibrados pode interpretar de modo conciso teorias físicas, por exemplo, as de gravitação, segundo versão de Utiyama e Kibble e as teorias supersimétricas construídas na variedade de grupo, notadamente aquela

de Yang-Mills em 5 dimensões. Cabe salientar ainda que boa parte da motivação ao presente trabalho foi fornecida pelos trabalhos de A. Trautman [6] e R. Kerner [7] sobre fibrados e suas aplicações à estrutura do espaço-tempo, em particular, e à física, em geral, respectivamente.



Capítulo 2

Estruturas Algébricas

Neste capítulo definimos algumas estruturas tais como grupos, anéis, espaços lineares, módulos e álgebras, de acordo com [8, 9, 10].

2.1 Grupos

2.1.1 Definições

Grupo: Diz-se que uma operação $*$ sobre um conjunto G , define uma *estrutura de grupo* sobre G se, e somente se, os seguintes axiomas são verificados:

1. a operação é associativa, ou seja, quaisquer que sejam x, y e z em G tem-se

$$(x * y) * z = x * (y * z);$$

2. existe em G um elemento e tal que

$$x * e = x = e * x, \quad \text{para todo } x \text{ em } G$$

3. para todo elemento x de G existe um elemento x' em G tal que

$$x * x' = e = x' * x.$$

Observação: Se usarmos a notação multiplicativa ou aditiva para a operação de um grupo diremos respectivamente, que o grupo é multiplicativo ou aditivo.

Grupo Abelian: Dizemos que um grupo é *abeliano* (comutativo) se, e somente se,

$$x * y = y * x \quad \forall x, y \in G$$

A operação é, então, frequentemente a aditiva.

Exemplo 2.1.1 *Seja X o conjunto de todas as matrizes $n \times n$; este conjunto, com a operação de adição de matrizes é um grupo abeliano; o subconjunto das matrizes inversíveis com a operação de multiplicação de matrizes não é um grupo abeliano.*

Centro de um Grupo: O *centro* de um grupo G é o conjunto dos elementos que comutam com todos os elementos do grupo.

2.1.2 Subgrupo

Definição: Seja $(G, *)$ um grupo e seja H uma parte do conjunto G ; diz-se que H é um *subgrupo* de $(G, *)$ se, e somente se, as seguintes condições forem verificadas:

- (a) H é fechado em relação à operação $*$;
- (b) H é um grupo em relação à operação induzida sobre H pela operação $*$.

A condição (a) impõe que se a e b são dois elementos quaisquer de H , então $a * b \in H$; portanto, a operação $*$ induz uma operação sobre o conjunto H . A condição (b) impõe que a restrição da operação $*$, ao subconjunto H ,

deve satisfazer os axiomas (1, 2, 3), ou seja, um subconjunto H , de G é um subgrupo de $(G, *)$ se, e somente se, H é um grupo em relação à operação $*$.

Classe Lateral: Seja A um subgrupo de G ; o subconjunto $xA = \{xa; a \in A\}$ $[\{Ax = \{ax; a \in A\}]$ é denominado *classe lateral à esquerda* de A em G [*classe lateral à direita*]. Uma classe lateral à esquerda [direita] pode ser definida como a classe de equivalência $[x] = xA$ [a classe de equivalência $[x] = Ax$] determinada pela relação de equivalência $y \sim x$ se, e somente se, $y^{-1}x \in A$ [se, e somente se, $xy^{-1} \in A$].

Subgrupo Normal: Diz-se que A é um *subgrupo normal* (invariante) de G se, e somente se

$$xA = Ax \quad \forall x \in G.$$

Ou seja, se A é um subgrupo normal as classes laterais à direita e à esquerda são idênticas.

Grupo Quociente: O conjunto de todas as classes laterais de um subgrupo A invariante é um grupo chamado *grupo quociente* de X por A ; denotado G/A . A operação do grupo em G/A é:

$$(xA)(yA) = (xy)A.$$

O *elemento unidade* de G/A é a classe lateral $1.A = A$ e para todo xA em G/A , tem-se

$$(xA)^{-1} = x^{-1}A.$$

2.1.3 Homomorfismos

Definição: Denomina-se *homomorfismo* a toda aplicação f , de um grupo multiplicativo G num grupo multiplicativo G' se, e somente se,

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G. \quad (2.1)$$

Se o grupo G é aditivo e G' é multiplicativo, então a fórmula (2.1) será representada sob a forma

$$f(a + b) = f(a)f(b).$$

Nos outros casos possíveis temos

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

Se f é um homomorfismo de G em G' e se f é uma aplicação sobrejetora [injetora], diremos que f é um *epimorfismo* [*monomorfismo*] de G em G' ou que f é um *homomorfismo sobrejetor* [*homomorfismo injetor*] de G em G' .

Finalmente, se f é um homomorfismo de G em G' e se f é uma aplicação bijetora diremos que f é um *isomorfismo* de G em G' ou que f é um *homomorfismo bijetor* de G em G' . Neste caso, também se diz que o grupo G é isomorfo ao grupo G' e escrevemos $G \cong G'$ (leia-se: G é isomorfo a G').

Um homomorfismo de G em G também é denominado um endomorfismo de G e um isomorfismo de G em G é chamado automorfismo de G .

Categoria: Grupos formam uma categoria cujos morfismos usualmente chamados homomorfismos, são os mapeamentos que preservam a estrutura do grupo, isto é,

$$f \in \text{Hom}(G_1, G_2) \Leftrightarrow f(g_1 h_1) = f(g_1) f(h_1) \quad \text{para todo } g_1, h_1 \in G.$$

2.2 Anéis

2.2.1 Definição

Anel: Um *anel* é um conjunto com duas operações internas $(x, y) \mapsto xy$ e $(x, y) \mapsto (x + y)$, chamada respectivamente multiplicação e adição, tal que

1. X é um grupo abeliano em relação à adição;
2. A multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição:

$$(xy)z = x(yz)$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(y + z)x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in X.$$

Um anel é *unitário* se, e somente se há um elemento $e \in X$ tal que $e \cdot x = x \cdot e = x$; ou seja, a operação $\cdot$ admite elemento neutro. O elemento neutro e é então chamado *elemento unidade* do anel.

Se o anel é comutativo em relação à multiplicação é chamado *anel abeliano*.

Subanel: Seja X um anel. Dizemos que um subconjunto $L \subset X, L \neq \emptyset$, é um *subanel* de X se, e somente se,

1. L é fechado para ambas as operações de X , isto é

$$(\forall x, y)(x, y \in X \Rightarrow x + y \in L \text{ e } xy \in L)$$

2. L é também um anel (a adição e a multiplicação indicadas em (1) são as mesmas do anel X só que restritas a L , como é evidente).

Corpo: Um anel X , comutativo com unidade, é chamado *corpo*¹ se todos os elementos não nulos são regulares, isto é, admite simétrico multiplicativo (inverso).

¹Denotamos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números complexos ou dos números reais, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

2.2.2 Ideal

Definição: Um *ideal à esquerda* de um anel X é um subanel de X tal que

$$i \in I \Rightarrow xi \in I \quad x \in X.$$

Um *ideal à direita* de um anel X é um subanel de X tal que

$$i \in I \Rightarrow ix \in I \quad x \in X.$$

Portanto, I é um ideal bilateral do anel X se, e somente se, I é um ideal à esquerda e à direita de X . Quando X é comutativo não há distinção entre ideal à esquerda ou à direita ou ideal bilateral, diremos, então, que I é um *ideal do anel* X .

Anel Quociente: Seja I um ideal em X . A relação

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I \quad \forall x, y \in X$$

é uma relação de equivalência ².

O conjunto quociente X/I de conjuntos de equivalência distinta

$$[x] = \{x + i; i \in I\} = x + I$$

formam um anel sobre a multiplicação

$$([x], [y]) \rightarrow [x][y] = [xy]$$

e adição

$$([x], [y]) \rightarrow [x] + [y] = [x + y].$$

O anel X/I é chamado *anel quociente* de X por I .

²Trata-se de uma relação de equivalência sobre X , pois:

- $0 \in I \Rightarrow x - x \in I (\forall x \in X) \Rightarrow x \sim x (\forall x \in X).$
- $x \sim y \Rightarrow x - y \in I \Rightarrow -(x - y) \in I \Rightarrow y - x \in I \Rightarrow y \sim x.$
- $x \sim y \text{ e } y \sim z \Rightarrow x - y \in I \text{ e } y - z \in I \Rightarrow (x - y) + (y - z) \in I \Rightarrow x \sim z.$

2.3 Espaços Lineares

A descrição linear (espaço vetorial) recordará a dos grupos e anéis diferindo destes no fato de que um dos produtos nele definidos utiliza elementos fora do próprio conjunto.

2.3.1 Definição

Espaço Vetorial: Um conjunto não vazio V é dito um *espaço vetorial* sobre um corpo $\mathbb{K}$ se V é um grupo abeliano com relação a uma operação que indicamos por $+$, e se para todos $\alpha \in \mathbb{K}, v \in V$ está definido um elemento indicado por αv , em V , tal que:

1. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
3. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
4. $1v = v$,

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, v, w \in V$ (onde 1 representa o elemento unidade com relação à multiplicação).

Os elementos de um espaço linear são chamados *vetores*.

Sejam L e M subespaços ³ do espaço linear V . Se cada vetor $z \in V$ é expresso unicamente na forma $z = x + y$ com $x \in L$ e $y \in M$, então V é dito ser a *soma direta*, denotada $L \oplus M$, dos subespaços L e M . L e M são chamados *complementares*. Eles necessariamente, fazem com que $L \cap M = \{0\}$.

³Se V é um espaço vetorial sobre F e se $W \subset V$, então W é um *subespaço* de V se, com relação às operações de V , W forma um espaço vetorial sobre F . Equivalentemente, W é um subespaço de V sempre que $w_1, w_2 \in W$, $\alpha, \beta \in F$ implica que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.

Dependência Linear: Um subconjunto A de um espaço linear X é dito *linearmente independente* se para cada subconjunto finito não vazio $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ de A a relação $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, implica $\lambda_i = 0$ para todo $i \leq n$. Se os vetores $A_1, \dots, A_n$ não são linearmente independentes sobre $\mathbb{K}$, eles são ditos *linearmente dependentes*.

Base: Um grupo de vetores $\{e_i\}$ linearmente independentes é dito ser uma *base* de X , se qualquer elemento $x \in X$ é escrito unicamente como uma combinação linear de $\{e_i\}$.

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^i e_i + \dots$$

Dimensão: Os números $X^i \in X$ são chamados os componentes de x com respeito à base $\{e_i\}$. Se há n elementos na base, a *dimensão* de X é n , denotada por $\dim V = n$. Se o número de elementos em uma base é um número finito n , então qualquer outra base também tem n elementos e o espaço é n -dimensional. Nos outros casos, a dimensão é infinita, contável ou não, por exemplo, a maioria dos espaços cujos elementos são funções têm dimensão infinita.

A *codimensão* de um subespaço L é a dimensão de um subespaço complementar.

Um subespaço *afim* de um espaço linear X é um conjunto dos elementos de X que podem ser escritos

$$x = y + x_0 \quad y \in L$$

onde L é um subespaço linear de X e x_0 é um ponto dado de X .

2.3.2 Função Linear

Mapeamento Linear: Sejam X e Y dois espaços vetoriais, um mapeamento $f : X \rightarrow Y$ é um *mapeamento linear* se $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ para todo $x, y \in X$, e α e $\beta \in \mathbb{K}$. Um mapeamento linear é um exemplo de um homomorfismo que preserva a adição vetorial e a multiplicação escalar.

O núcleo (kernel) de um mapeamento linear $f : X \rightarrow Y$ é o conjunto $\ker f = \{x \in X; f(x) = 0\}$.

Função Linear: A imagem de f é $f(X) \subset Y$ e o núcleo de f é $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ e denota-se $\text{Im } f$ e $\ker f$, respectivamente. $\ker f$ não pode ser vazio já que $f(0)$ é sempre 0. Se o Y é o próprio corpo $\mathbb{K}$, f é chamada uma *função linear*. Se f é um isomorfismo, X é dito ser isomorfo a Y e vice-versa, denotada por $X \approx Y$. Segue que $\dim X = \dim Y$. De fato, todos os espaços vetoriais n -dimensionais são isomorfos ao $\mathbb{K}^n$, e são considerados como espaços vetoriais idênticos. O isomorfismo entre o espaço vetorial é um elemento de $GL(n, \mathbb{K})$.

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ uma função linear em um espaço vetorial $X(n, \mathbb{K})$ sobre um corpo $\mathbb{K}$. Seja $\{e_i\}$ uma base e um vetor arbitrário $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$. Da linearidade de f , temos $f(x) = x^1 f(e_1) + x^2 f(e_2) + \dots + x^n f(e_n)$. Assim, se conhecemos $f(e_i)$ para todo i , conhecemos o resultado da operação de f em qualquer vetor.

2.4 Módulos

Definição: Seja R um anel qualquer; um conjunto não vazio M é dito ser um R -módulo (ou, um módulo sobre R) se M é um grupo abeliano com relação a uma operação $+$ tal que para todo $r \in R$ e todo $m \in M$:

1. $r(a + b) = ra + rb$;
2. $r(sa) = (rs)a$;
3. $(r + s)a = ra + sa$.

para todos $a, b \in M$ e $r, s \in R$.

Se R possui um elemento unidade 1 e se $1 \cdot m = m$ para todo m em M , então M é denominado um R -módulo *unitário*. Notemos que se R é um corpo, um R -módulo unitário nada mais é que um espaço vetorial sobre R .

2.5 Álgebras

Definição: Uma *álgebra* $\mathcal{A}$ é um módulo sobre um anel R com identidade, com uma operação associativa interna, usualmente chamada multiplicação, tal que

1. $\mathcal{A}$ é um anel;
2. A operação externa $(\alpha, c) \rightarrow \alpha c$ é tal que

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

A maioria das álgebras são espaços lineares, com uma operação interna chamada multiplicação. A definição geral dada aqui inclui tanto álgebras como a álgebra dos campos tensoriais sobre os anéis de funções.

Capítulo 3

Topologia

Abordaremos algumas definições de topologia, de acordo com [8, 11, 12], que nos serão úteis nos capítulos posteriores.

3.1 Definições

Topologia: Uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de um conjunto X define uma *topologia* em X se $\mathcal{T}$ satisfaz as seguintes condições:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. A união de um número qualquer de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$; e
3. A intersecção de dois conjuntos quaisquer de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.

Conjuntos Abertos: Os conjuntos em $\mathcal{T}$ são chamados *conjuntos abertos* do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ – frequentemente abreviado para X – e cada elemento de X é designado por um ponto.

Topologia Discreta: Se X é um conjunto não vazio e $\mathcal{T}$ é a coleção de *todos* os subconjuntos de X , então (1) $\sim$ (3) são automaticamente satisfeitas. Esta topologia é chamada *topologia discreta* ¹.

¹Em geral a topologia discreta é dita também uma topologia “strigent” (forte).

Topologia Trivial: Seja X um conjunto não vazio e sejam os conjuntos abertos com $\emptyset$ e X , ou seja, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Claramente $\mathcal{T}$ satisfaz (1) $\sim$ (3), esta topologia é chamada *topologia trivial*².

Exemplo 3.1.1 *Seja X a reta real $\mathbb{R}$. Todos os intervalos abertos (a, b) e suas uniões definem uma topologia chamada topologia usual.*

As propriedades (1) e (2) são obviamente satisfeitas.

Verifiquemos (3):

Sejam A_i e B_j conjuntos abertos.

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad B = \bigcup_{j \in J} B_j$$

O conjunto

$$A \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_j)$$

é aberto desde que a intersecção de dois intervalos abertos seja um conjunto vazio ou um intervalo aberto.

Vizinhança: Seja $\mathcal{T}$ uma topologia em X . N é uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ se N é um subconjunto de X e N contém algum (ou ao menos um) conjunto aberto G_i ao qual x pertença.

Exemplo 3.1.2 *Seja $X = \mathbb{R}$ com uma topologia usual. $[-1, 1]$ é uma vizinhança de um ponto arbitrário $x \in (-1, 1)$.*

Ponto de Acumulação: Um ponto $x \in X$ é um *ponto de acumulação*, ou um *ponto limite*, de $A \subseteq X$ se toda vizinhança N de x contém ao menos um ponto $a \in A$ diferente de x : $(N - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall N$.

O conjunto de pontos de acumulação de A , representado por A' , é chamado o *conjunto derivado* de A .

²De modo análogo esta é uma topologia "trivial" (fraca).

Fecho de um Conjunto: Seja X um espaço topológico. Um subconjunto A de X é *fechado* se, e somente se, seu complementar é um conjunto aberto, ou seja, $X - A \in \mathcal{T}$. De acordo com a definição, X e $\emptyset$ são ambos abertos e fechados.

Considere um conjunto A (aberto ou fechado). O *fecho* de A é o menor conjunto fechado que contém A e é denotado por $\bar{A}$. Um subconjunto A de um espaço topológico X diz-se *denso* em $B \subset X$ se B está contido no fecho de A , isto é $B \subset \bar{A}$. Em particular, A é denso em X , ou é um subconjunto denso de X se, e somente se, $\bar{A} = X$.

Interior O *interior* de A é o maior subconjunto aberto de A e é denotado por A^0 . A *fronteira* $b(A)$ de A é o complemento de A^0 em $\bar{A}$; $b(A) = \bar{A} - A^0$. Um conjunto aberto é sempre disjunto de sua fronteira enquanto um conjunto fechado sempre contém sua fronteira.

Espaço Separável: Um espaço X é *separável* se satisfaz o seguinte axioma:

Axioma 3.1.1 X contém um conjunto denso enumerável.

3.2 Separação

Separação: Um espaço topológico é de *Hausdorff*, se e somente se, satisfaz o axioma:

Axioma 3.2.1 Dois pontos distintos quaisquer $a, b \in X$ pertencem sempre a abertos disjuntos.

Em outras palavras, existem abertos G e H tais que:

$$a \in G, b \in H \text{ e } G \cap H = \emptyset$$

Espaço Normal: Um espaço topológico X é *normal* se, e só se, satisfaz o seguinte axioma:

Axioma 3.2.2 Se F_1 e F_2 são fechados disjuntos de X , então existem abertos disjuntos G e H tais que $F_1 \subset G$ e $F_2 \subset H$.

3.3 Base

Definição: Seja X um espaço topológico. Uma *base* $\mathcal{B}$ de abertos X , ou seja, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, é uma base da topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se

1. todo elemento de $\mathcal{T}$ é a união dos elementos de $\mathcal{B}$.
2. para todo $x \in X$ e $G \in \mathcal{T}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset G$.

Exemplo 3.3.1 Uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$ consiste de todos os intervalos abertos $(a, b) = \{x; a < x < b\}$.

Sub-base: Seja X um espaço topológico. Uma base φ de abertos de X , ou seja, $\varphi \subset \mathcal{T}$, é uma *sub-base* para a topologia $\mathcal{T}$ em X se, e somente se, as intersecções finitas de membros de φ formam uma base para $\mathcal{T}$.

Exemplo 3.3.2 Note que todo intervalo aberto (a, b) em $\mathbb{R}$ é a intersecção de dois intervalos infinitos (a, ∞) e $(-\infty, b)$: $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$.

Espaço Enumerável: Um espaço topológico X é um *espaço enumerável* de 1ª espécie se satisfaz o 1º axioma dos espaços enumeráveis

Axioma 3.3.1 Só se existe uma base local contável em cada ponto $x \in X$.

Exemplo 3.3.3 Seja X um espaço discreto. Ora, o conjunto unitário $\{x\}$ é aberto e está contido em todo aberto G que contém $x \in X$. Logo, todo espaço discreto satisfaz o axioma 3.3.1.

Um espaço topológico X é um *espaço contável de 2ª espécie* se satisfaz o 2º axioma dos espaços enumeráveis.

Axioma 3.3.2 *Existe uma base contável $\mathcal{B}$ para a topologia $\mathcal{T}$.*

Exemplo 3.3.4 *A classe $\mathcal{B}$ de intervalos abertos (a, b) , com extremos racionais, isto é, tais que $a, b \in \mathbb{Q}$, é contável de 2ª espécie, ou seja, $\mathbb{R}$ satisfaz o axioma 3.3.2.*

3.4 Cobertura e Compacidade

Dada uma topologia, é interessante extrair de todos os conjuntos abertos o sistema mais simples que faz a cobertura do espaço.

Cobertura: Um sistema $\{U_j\}$ de subconjuntos [abertos] de X é uma *cobertura* $\mathcal{U}$ [aberta] se cada elemento em X pertence a pelo menos um $\{U_i\}$ (isto é, $\bigcup U_i = X$). Se o sistema $\{U_i\}$ tem um número finito de elementos, a cobertura é dita finita.

Subcobertura: Uma *subcobertura* da cobertura $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $\mathcal{U}$ que é ele mesmo uma cobertura.

Refinamento: A cobertura $\mathcal{V} = \{V_i\}$ é um *refinamento* da cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}$ se para todo V_i existe um U_j tal que $V_i \subset U_j$.

Uma cobertura $\mathcal{U}$ é *localmente finita* se para todo ponto x existe uma vizinhança $N(x)$, que tem uma intersecção não vazia com somente um número finito de membros de $\mathcal{U}$.

Compacto: Um subconjunto $A \subset X$ é *compacto* se é Hausdorff e se toda cobertura de A tem uma subcobertura finita.

$A \subset X$ é *relativamente compacto* se o fecho de $\bar{A}$ é compacto.

Um espaço é *localmente compacto* se todo ponto tem uma vizinhança compacta.

Um espaço de Hausdorff é *paracompacto* se toda cobertura tem um refinamento localmente finito.

3.5 Mapeamentos Contínuos

Definição: Um mapeamento f de um espaço topológico X para um espaço topológico Y é contínuo em $x \in X$ se dada qualquer vizinhança $N \subset Y$ de $f(x)$ existe uma vizinhança M de $x \in X$ tal que $f(M) \subset N$. f é contínua em X se é contínua em todos os pontos $x \in X$.

Exemplo 3.5.1 Considere um espaço discreto $(X, \mathcal{D})$ e um espaço topológico $(Y, \mathcal{T})$. Então todo mapeamento $f : X \rightarrow Y$ é $(\mathcal{D} - \mathcal{T})$ contínuo, pois, se H é um aberto de Y , sua imagem inversa $f^{-1}(H)$ é aberto de X , já que todo subconjunto de um espaço discreto é aberto.

Homeomorfismos: Um *homeomorfismo* é uma bijeção f que é bicontínua³ (f e f^{-1} são contínuas).

Em um homeomorfismo a imagem de um conjunto aberto e sua imagem inversa são também abertos.

Se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos X e Y , X é dito ser homeomorfo a Y e vice-versa.

É fácil mostrar que a existência de um homeomorfismo entre espaços topológicos é uma relação de equivalência.

Vejamos:

X é homeomorfo a Y se existe um mapa $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tal que $fg = \text{id}_Y$ e $gf = \text{id}_X$.

³Uma função é dita *bicontínua* se f é aberta (uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada *aberta* [fechada] se a imagem de todo aberto [fechado] é também um aberto [fechado]) e contínua. Assim, $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se e somente se f é contínua e bijetiva.

Sabemos que uma relação é dita de equivalência se, e somente se, for reflexiva, simétrica e transitiva.

A reflexividade vem da escolha $f = \text{id}_X$, enquanto que a simetria segue de que, se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é um homeomorfismo. E a transitividade segue de que, se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são homeomorfismos então $gf : X \rightarrow Z$ também é.

Invariante Topológico: Uma propriedade P , de conjuntos, é chamada *topológica* ou *invariante topológico* se, sempre que um espaço topológico X goza de P , então todo espaço homeomorfo a X também goza de P , isto é, uma propriedade do espaço topológico que é preservada sobre um homeomorfismo, por exemplo, as propriedades de separação, compacidade e de conexão.

Topologia Projetiva: Seja X um conjunto; e $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ uma família de espaços topológicos. Seja $\{f_\alpha; \alpha \in A\}$ uma família de mapeamentos $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$; a *topologia projetiva* em X com respeito a $\{(X_\alpha, f_\alpha)\}$ é a topologia mais fraca em X para os quais cada f_α é contínuo.

Topologia Induzida: Seja $\{g_\alpha; \alpha \in A\}$ a família de mapeamentos $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ a *topologia induzida* em X com respeito a $\{(X_\alpha, g_\alpha)\}$ é a topologia mais fina em X para os quais cada g_α é contínuo.

3.6 Topologias Associadas

Topologia Relativa: Seja A um subconjunto não-vazio de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. A classe $\mathcal{T}_A$ de todas as intersecções de A com subconjuntos $\mathcal{T}$ -abertos de X é uma topologia em A ; é chamada *topologia relativa em A* , ou *relativização de $\mathcal{T}$ para A* ; o espaço topológico $(A, \mathcal{T}_A)$ é chamado um *subespaço* de $(X, \mathcal{T})$, ou seja, a topologia relativa em A é $\mathcal{T}_A = \{A \cap G; G \in \mathcal{T}\}$.

Exemplo 3.6.1 *Seja a topologia usual U em $\mathbb{R}$ e a topologia relativa $\mathcal{T}_A$ no intervalo fechado $A = [3, 8]$. O intervalo semi-aberto $[3, 5)$ é um aberto na topologia relativa em A , isto é, é um $\mathcal{T}_A$ -aberto, pois $[3, 5) = (2, 5) \cap A$, onde $(2, 5)$ é um subconjunto $\mathcal{T}_A$ -aberto de $\mathbb{R}$. Vemos, que um conjunto pode ser aberto em relação a um subespaço sem que seja aberto ou fechado em um espaço inteiro.*

Topologia Produto: Seja $\{X_i; i \in I\}$ uma classe de subconjuntos; representemos por X o produto cartesiano desses conjuntos, isto é, $X = \prod_i X_i$. Note-se que X consiste em todos os pontos $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ onde $a_i \in X_i$. Lembremos que, para cada $j_0 \in I$, definimos a projeção π_{j_0} do conjunto-produto X no espaço coordenado X_{j_0} , isto é, $\pi_{j_0} : X \rightarrow X_{j_0}$ por

$$\pi_{j_0}(\langle a_i : i \in I \rangle) = a_{j_0}.$$

Através dessas projeções, definamos topologia produto. Seja $\{X_i, \mathcal{T}_i\}$ uma coleção de espaços topológicos, e seja X o produto dos conjuntos X_i , isto é, $X = \prod_i X_i$. A topologia menos fina $\mathcal{T}$ em X em relação à qual todas as projeções $\pi_i : X \rightarrow X_i$ são contínuas é chamada *topologia produto*. O conjunto produto X com a topologia-produto $\mathcal{T}$, isto é, $(X, \mathcal{T})$ é chamado *espaço produto topológico*, ou simplesmente, *espaço-produto*.

3.7 Topologia relacionada a outras estruturas

Grupo Topológico: Um conjunto X junto com uma operação de grupo e uma topologia é dito ser um *grupo topológico* se os mapeamentos que definem sua estrutura de grupo são contínuos, isto é, se os mapeamentos

$$X \times X \rightarrow X \text{ por } (x, y) \mapsto x \cdot y = xy$$

$$X \rightarrow X \text{ por } x \mapsto x^{-1}$$

são contínuos.

Espaço Vetorial Topológico: Um espaço topológico X que é também um espaço vetorial em $\mathbb{K}$ é um *espaço vetorial topológico* se as operações de adição e multiplicação escalar são contínuas, isto é, se os mapeamentos

$$X \times X \rightarrow X \text{ por } (x, y) \mapsto x + y$$

$$K \times X \rightarrow X \text{ por } (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

são contínuos.

3.8 Espaços Métricos

Definição: Um *espaço métrico* é um conjunto X junto com um mapeamento $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $d(x, y) \geq 0$;
- $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$, simetria;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, desigualdade triangular.

$d(x, y)$ é chamada a *métrica* entre dois pontos.

Bola Aberta: Uma *bola aberta* $B_a(x_0)$ de raio a sobre x_0 é o conjunto de pontos $x \in X$ tal que $d(x, x_0) < a$.

Espaço Metrizável: Duas métricas d e d^* em um conjunto X dizem-se equivalentes se, e somente se, induzem à mesma topologia em X , isto é, se tanto as bolas d -abertas como as bolas d^* -abertas em X são bases para a mesma topologia em X .

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, se existe uma métrica d em X , que induza à topologia $\mathcal{T}$, então o espaço topológico diz-se *metrizável*.

Exemplo 3.8.1 *Todo espaço discreto $(X, \mathcal{D})$ é metrizável pois a métrica trivial em X induz à topologia discreta $\mathcal{D}$.*

Capítulo 4

Variedades Diferenciáveis e Grupos de Lie

4.1 Variedades Diferenciáveis

O conceito de uma variedade é como uma superfície que não precisa estar contida no espaço euclidiano, em outras palavras, generaliza o conceito de uma superfície ou curva no $\mathbb{R}^3$.

4.1.1 Definições

Variedade: Uma *variedade* (topológica) é um espaço de Hausdorff [3.2] tal que todos os pontos tenham uma vizinhança homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ ¹.

¹Como um conjunto $\mathbb{R}^n$ consiste de todas as n-tuplas $(t_1 \dots t_n)$ de números reais. Então, $\mathbb{R}^n$ é o n-ésimo produto cartesiano

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

da reta real $\mathbb{R}$. Os membros do $\mathbb{R}^n$ são chamados *pontos* do $\mathbb{R}^n$.

Para quaisquer dois pontos $a = (a_1 \dots a_n)$ e $b = (b_1 \dots b_n)$ do $\mathbb{R}^n$, define-se sua soma $a + b$ por

$$a + b = (a_1 + b_1 \dots a_n + b_n)$$

Esta adição $+$ torna $\mathbb{R}^n$ um grupo abeliano.

Carta: Uma *carta* (U, φ) , ou sistema de coordenadas locais, de uma variedade E é um conjunto aberto U de E , chamado o conjunto domínio da carta, com um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Para cada $x \in U \subset E$ tem-se $(x^1 \dots x^n)$ que são coordenadas de x na carta (U, φ) .

Atlas: Um *atlas* $\mathcal{A}$ é uma coleção de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ em E , cujos domínios cobrem E .

Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi_\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_\beta : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $x \in U \cap V$ tem coordenadas (x^i) e (y^i) respectivamente nas cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) .

A correspondência

$$(x^1 \dots x^n) \leftrightarrow (y^1 \dots y^n)$$

estabelece um homeomorfismo $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ que é chamado *mudança de coordenadas*.

Um atlas $\mathcal{A}$ ²diz-se diferenciável, de classe C^k ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas $\varphi_{\alpha\beta}, \varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}$ são aplicações da classe C^k ³.

Define-se a multiplicação escalar por

$$\lambda t = (\lambda t_1 \dots \lambda t_n)$$

para todo número real λ e todo ponto $t = (t_1 \dots t_n)$ do $\mathbb{R}^n$. Esta multiplicação escalar torna $\mathbb{R}^n$ um *espaço linear* (ou espaço vetorial) sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. O elemento zero do espaço linear $\mathbb{R}^n$ é a origem O , que é o ponto $O = (0 \dots 0)$.

² $\mathcal{A} \in C^k$. Como $\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi_{\alpha\beta})^{-1}$, segue-se que os $\varphi_{\alpha\beta}$ são de fato, difeomorfismos [4.3] de classe C^k .

Em particular, se escrevemos $\varphi_{\alpha\beta} : (x^1 \dots x^n) \rightarrow (y^1 \dots y^n)$, então o determinante jacobiano $\det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] \neq 0$ em todo ponto de $\varphi(U \cap V)$.

Seja $f : w \rightarrow \mathbb{R}$ a função valor real definida em um subespaço aberto não vazio W do $\mathbb{R}^n$. A função $f : w \rightarrow \mathbb{R}$ é dito ser da classe C^0 se e, somente se, é contínua. Para qualquer inteiro positivo k , $f : w \rightarrow \mathbb{R}$ é dito ser da classe C^k se, e somente se, tem derivadas parciais

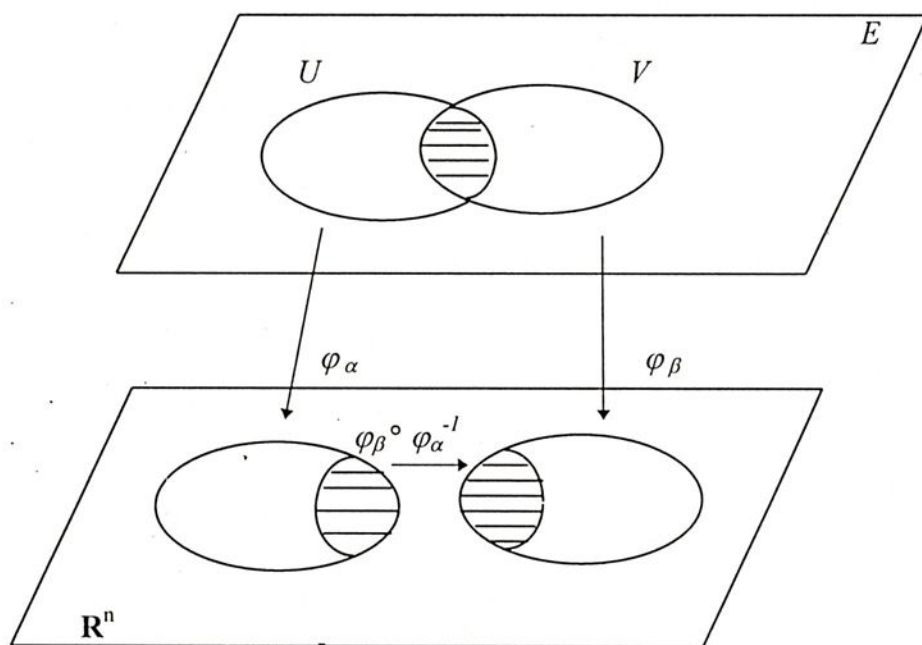


Figura 4.1: Mudança de Coordenadas

Um atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ diz-se *máximo* ou *maximal* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis ⁴ em relação a $\mathcal{A}$.

Dois atlas $C^k(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$ são *equivalentes* se, e somente se, sua união – domínios $(U_\alpha, U_{\alpha'})$, homeomorfismos $(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha'})$ – é novamente um atlas C^k .

Variedade Diferenciável: Uma *variedade diferenciável* é um par ordenado $(X, \mathcal{A})$ onde X é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathcal{A}$ é um atlas máximo sobre X .

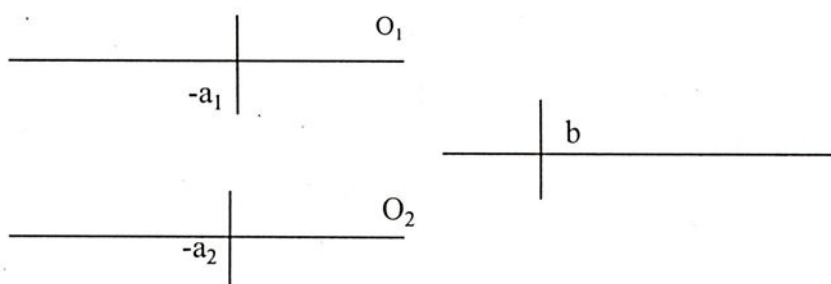
contínuas de todas as ordens $r \leq k$. A função $f : w \rightarrow \mathbb{R}$ é dito ser da classe C^∞ se, e somente se, é da classe C^k para todo inteiro positivo k . A função $f : w \rightarrow \mathbb{R}$ é dito ser da classe C^ω se, e somente se, é uma função analítica

⁴Um sistema de coordenadas $\varphi_\gamma : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se *admissível* relativamente ao atlas $\mathcal{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\varphi_{\alpha\gamma}$ e $\varphi_{\gamma\alpha}$ são de classe C^k , isto é, se $\mathcal{A} \cup \{\varphi_\gamma\}$ é ainda um atlas de classe C^k .

Variedade Analítica: Uma *variedade analítica real* C^ω é tal que os mapas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são analíticos reais, isto é, dado por n funções que podem ser expandidas em série de Taylor.

Observação: Algumas vezes uma variedade é definida somente como um espaço topológico X localmente euclidiano, com as exigências apropriadas para as cartas que mapeam um conjunto aberto de X no $\mathbb{R}^n$. Entretanto, X pode ter a característica indesejada de não ser Hausdorff, como mostramos no exemplo seguinte.

Exemplo 4.1.1 Considere o espaço que consiste de duas semi-retas fechadas $(-\infty, 0]$ e uma semi-reta aberta $(0, +\infty)$ em que a base das vizinhanças abertas O_i , $i = 1, 2$ é da forma $(-a_i, O_i] \cup (0, b)$.

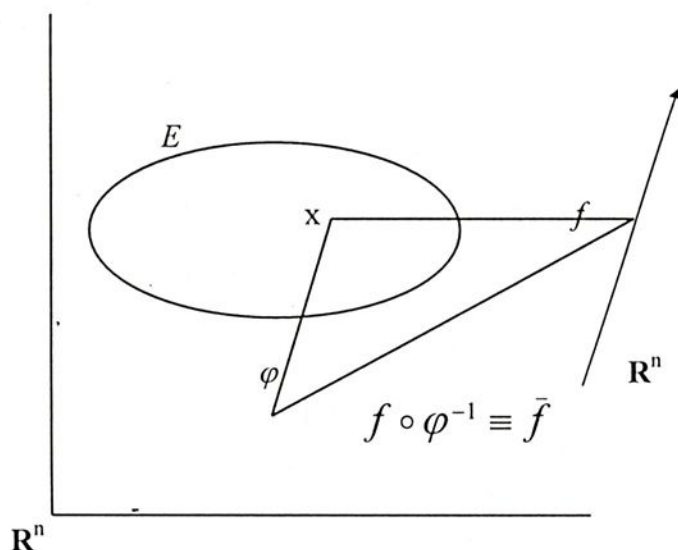


Este espaço é localmente euclidiano, mas não é de Hausdorff porque quaisquer dois conjuntos abertos contendo O_1 e O_2 conterá um segmento $(0, b)$.

4.1.2 Diferenciabilidade de uma Função em uma Variedade

A definição de carta torna possível definirmos a diferenciabilidade de uma função em uma variedade.

Considere a função f na variedade E , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ por $x \mapsto f(x)$



Seja (u, φ) uma carta em x (isto é, $x \in U$), então, $f \circ \varphi^{-1}$ é um mapeamento de $V = \varphi(U)$, um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, dentro do $\mathbb{R}$. Exatamente como as coordenadas de $f(x)$ representam x na carta local (U, φ) , o mapeamento $f \circ \varphi^{-1}$ representa f na carta local.

Função Diferenciável: A função f é diferenciável em x em uma variedade diferenciável se, em uma carta em x , $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável $\varphi(x)$.

A definição não depende da carta: se $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(x)$ para uma carta (U, φ) em x , então $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\tilde{\varphi}(x)$ para toda carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ em x , pois

$$f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}).$$

A função f é C^r em x em uma variedade C^k ($k \geq r$) se, em uma carta x , $f \circ \varphi^{-1}$ é C^k em $\varphi(x)$. Os mapeamentos $\varphi \circ \varphi^{-1}$ são da classe C^k em uma variedade C^k . A definição é independente da carta se $r \leq k$.

Uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é C^r em E se é C^r em cada ponto $x \in E$. O espaço de C^r funções em E é denotado por $C^r(E)$.

A estrutura diferenciável em uma variedade determina a ordem máxima de diferenciabilidade das funções definidas em uma variedade.

Algumas vezes deseja-se escrever algumas expressões mais explicitamente como segue.

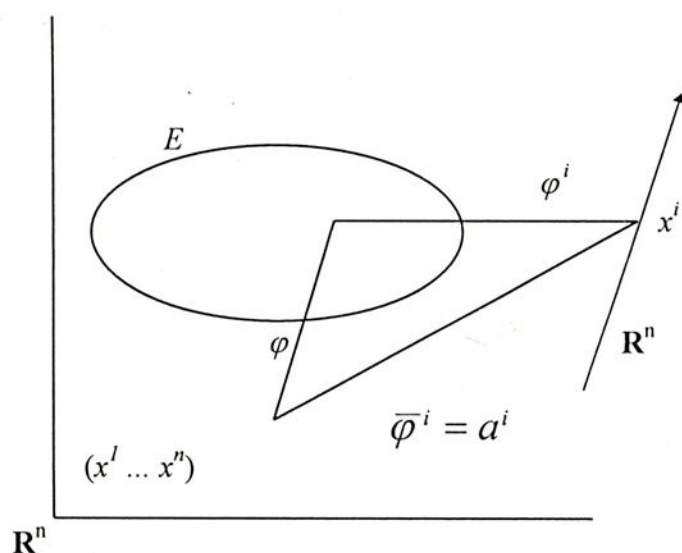
Seja a^i as funções de coordenadas no $\mathbb{R}^n$ cujo mapa de um ponto $u(u^1 \dots u^n) \in \mathbb{R}^n$ dentro $\mathbb{R}$ por

$$a^i(u^1 \dots u^n) = u^i$$

$a^i \circ \varphi(x)$ é o que abreviamos para x^i .

O mapeamento composto $a^i \circ \varphi \equiv \varphi^i$ mapeia E dentro do $\mathbb{R}$ por $x \mapsto x^i$. Sua representação de carta local $\varphi^i \circ \varphi^{-1} = a^i$ é a função coordenada

$$\bar{\varphi}^i(x^1 \dots x^n) = x^i$$



4.2 Produto Direto de Variedades

Definição: O *produto direto* de duas variedade com conjuntos X^n, Y^p , topologias $\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y$ e estruturas diferenciáveis $(U_x, \varphi_x), (U_y, \varphi_y)$ são definidas em um

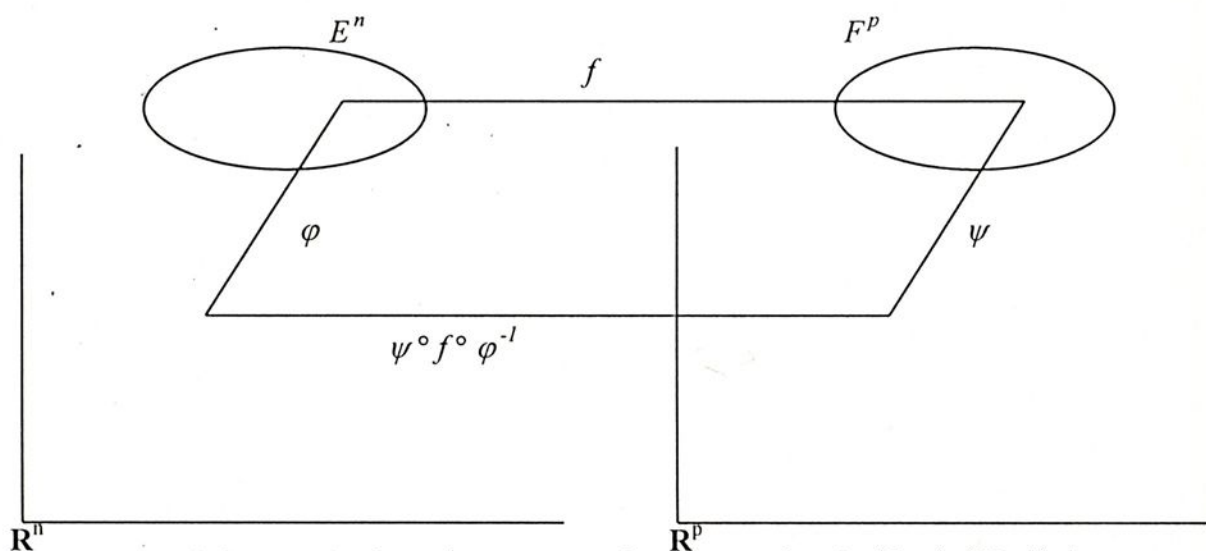
caminho natural para ser a variedade Z^{n+p} com conjunto $X^n \times Y^p$, a topologia produto, e o atlas produto formado das cartas (U_z, φ_z) , onde $U_z = U_x \times U_y$ e

$$\varphi_z(x, y) = (\varphi_x(x), \varphi_y(y)), \quad x \in U_x, y \in U_y, xy \in U_z.$$

4.3 Difeomorfismos

Sejam E^n e F^p duas variedades diferenciáveis (C^k) de dimensão n e p , respectivamente;

Seja $f : E^n \rightarrow F^p$



A função $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ representa f nas cartas locais $(U, \varphi), (W, \psi)$ de E^n e F^p . A diferenciabilidade de $f : E^n \rightarrow F^p$ era apenas um caso particular da situação agora considerada.

A função f é diferenciável C^r em x para $r \leq k$ se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(x)$. Em outras palavras, f é diferenciável $[C^r]$ em x se as coordenadas $(y^\alpha = f^\alpha(x^i))$ de y são funções diferenciáveis $[C^r]$ das coordenadas (x^i) de x . f é um mapeamento C^r de E^n para F^p se f é C^r em cada ponto $x \in E^n$.

Em particular, f é um *difeomorfismo* (C^r) se f é uma bijeção e f e f^{-1} são continuamente diferenciáveis (C^r). Difeomorfismos são para variedades diferenciáveis o que os homeomorfismos são para os espaços topológicos, e o que os isomorfismos são para os espaços vetoriais.

Seja $f : E \rightarrow F$ e seja g uma função em F .

A imagem recíproca (pull back) sobre f das funções g é a função $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$; denota-se

$$g \circ f = f^*(g).$$

A mesma definição aplica-se para o pull back (imagem recíproca) f^*g de um mapeamento $g : F \rightarrow G$ sobre $f : E \rightarrow F$

$$f^*g = g \circ f.$$

4.3.1 Categoria das Variedades Diferenciáveis

Uma *categoria* é uma classe (não usualmente um conjunto), cujos membros são chamados *objetos*, juntos com $\text{Hom}(E, F)$, para cada par ordenado de objetos (E, F) , e mapeamentos

$$\text{Hom}(E, F) \times \text{Hom}(F, G) \rightarrow \text{Hom}(E, G) \quad \text{por} \quad (f, g) \mapsto h = g \circ f$$

1. Se $f \in \text{Hom}(E, F)$, $g \in \text{Hom}(F, G)$ e $h \in \text{Hom}(G, U)$ então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. Para cada objeto E há um único elemento em $\text{Hom}(E, F)$, denotado Id_E , tal que para todos objetos F

$$f \circ \text{Id}_E = f, \quad \forall f \in \text{Hom}(E, F)$$

$$\text{Id}_E \circ g = g, \quad \forall g \in \text{Hom}(F, E)$$

Os membros de $\text{Hom}(E, F)$ são chamados *morfismos* e a operação é chamada *composição*.

Na categoria das variedades diferenciáveis, os objetos são as variedades diferenciáveis e os morfismos são os mapeamentos diferenciáveis entre as variedades.

Suponha que temos duas categorias A e B e uma correspondência C entre seus objetos e morfismos. C é chamado um *functor* covariante se acontece a seguinte situação:

$$\begin{array}{ccccccc} A: & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ \downarrow C & & & & & \\ B: & C(E) & \xrightarrow{C(f)} & C(F) & \xrightarrow{C(g)} & C(G) \end{array}$$

$$C(g) \circ C(f) = C(g \circ f), \quad C(\text{Id}_E) = \text{Id}_{C(E)}$$

$C(f)$ é frequentemente denotado f_* .

C é um functor contravariante se sucede que:

$$\begin{array}{ccccccc} A: & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ \downarrow C & & & & & \\ B: & C(E) & \xleftarrow{C(f)} & C(F) & \xleftarrow{C(g)} & C(G) \end{array}$$

$$C(g) \circ C(f) = C(g \circ f), \quad C(\text{Id}_E) = \text{Id}_{C(E)}$$

$C(f)$ é frequentemente denotado f^* .

Exemplo 4.3.1 *Sejam E, F, G variedades diferenciáveis; sejam $f : E \rightarrow F$ e $g : F \rightarrow G$ mapeamentos diferenciáveis; Sejam X, Y, Z espaços vetoriais de funções definidas respectivamente em E, F, G ; e sejam*

$$\begin{aligned} C(E) = X \quad C(F) = Y \quad C(G) = Z \\ C(f) = f^* : Y \rightarrow X \quad \text{por} \quad f^*h = h \circ f \\ C(g) = g^* : Z \rightarrow Y \quad \text{por} \quad g^*k = k \circ g. \end{aligned}$$

Então, C é um functor contravariante:

$$(g \circ f)^* : z \rightarrow X \quad \text{por} \quad (g \circ f)^*k = k \circ g \circ f.$$

Por outro lado,

$$f^* \circ g^* : Z \rightarrow X \quad \text{em dois passos:}$$

$$(f^* \circ g^*)k = f^*(g^*k) = f^*(k \circ g) = k \circ g \circ f$$

e

$$Id_{E^*} = Id_x.$$

4.4 Campos Vetoriais

4.4.1 Espaço Vetorial Tangente em um Ponto

O espaço vetorial tangente $T_x(X)$ de uma variedade em um ponto $x \in X$ é usado para definir propriedades de objetos em uma vizinhança de x independentemente de coordenadas locais. O espaço vetorial tangente $T_x(X)$ “modela” a variedade em X . Muitas aproximações em física consistem em substituir localmente uma dada variedade pelo seu espaço vetorial tangente em um ponto. Tais aproximações podem ser chamadas linearização local. $T_x(X)$ é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$ se X é uma variedade de dimensão n .

Vetor Tangente

Definição 1: Um *vetor tangente* $\mathbf{v}_x$ para uma variedade diferenciável X em um ponto x é uma função linear do espaço de funções definido e diferenciáveis em algumas vizinhanças de $x \in X$ no $\mathbb{R}$, que satisfaz a regra de Leibniz:

$$\mathbf{v}_x(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{v}_x(f) + \beta \mathbf{v}_x(g)$$

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R}, f, g, \text{ funções em } X \text{ diferenciáveis em } x;$$

$$\mathbf{v}_x(fg) = f(x)\mathbf{v}_x(g) + g(x)\mathbf{v}_x(f) \quad \text{Regra de Leibniz.}$$

O espaço $T_x(X)$ de vetores tangentes a X em x com uma multiplicação escalar definida por

$$(\alpha \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{v}_x)(f) = \alpha \mathbf{u}_x(f) + \beta \mathbf{v}_x(f)$$

é um espaço vetorial, chamado o *espaço vetorial tangente*.

Mais intuitivamente, definimos um vetor tangente nos termos de uma classe de equivalência de curvas diferenciáveis $C_1, C_2 \dots$ em X passando por x . (os vetores tangentes são escritos independentemente da escolha do sistema de coordenadas).

Curva Diferenciável: Uma curva (parametrizada) C em X é um mapeamento de $I \subset \mathbf{R}$ em X por $t \in I \mapsto C(t) \in X$. Seja C uma curva diferenciável, isto é, um mapeamento diferenciável de $I \subset \mathbf{R}$ em X , tal que $C(0) = x_0$ e seja f uma função em X diferenciável em x_0 . O mapeamento composto $f \circ C$ é uma função em I diferenciável em $t = 0$. O vetor tangente a curva C em x_0 é definido por

$$\mathbf{v}_{x_0}^C(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C)(t) \big|_{t=0}$$

$\mathbf{v}_{x_0}^C(f)$ é chamado a derivada de f ao longo de C em x_0 . $\mathbf{v}_{x_0}^C(f)$ é algumas vezes denotado $C(f)$. Se duas curvas C_1 e C_2 são tais que, para todo f , $C_1(f) = C_2(f)$, são ditas tangentes em x_0 . Podemos, dizer também que elas tem o mesmo vetor tangente em x_0 .

Reciprocamente, dada um vetor tangente $\mathbf{v}_{x_0}$ é sempre possível encontrar uma curva diferenciável em x_0 que em $\mathbf{v}_{x_0}$ é tangente. Assim, é possível identificar um vetor tangente em x_0 com uma classe de equivalência das curvas tangente em x_0 . Se (U, φ) é uma carta em $x_0 \in U$, definimos uma *base natural* associada a esta carta como $\frac{\partial}{\partial x^i} (i = 1 \dots n)$ definida por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = \delta_i^j.$$

Definição 2: Uma classe de equivalência das curvas tangente em x é chamada um *vetor tangente* $\mathbf{v}_x$ em x .

As componentes do vetor tangente $\mathbf{v}_{x_0}$ à curva C em x_0 são

$$(\mathbf{v}_{x_0}^C)^i = \mathbf{v}_{x_0}^C(\varphi^i) = \frac{d(\varphi^i \circ C)}{dt} \Big|_{y=0} = \frac{dC^i(t)}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (4.1)$$

4.4.2 Campos Vetoriais

Definição: Um *campo vetorial* $\mathbf{v}$ em X^n é uma cross section [5.1] do bundle tangente $T(X^n)$; um campo vetorial associa a cada ponto $x \in X^n$ um vetor tangente $\mathbf{v}_x \in T_x(X^n)$ pelo mapeamento $\mathbf{v} : x \mapsto (x, \mathbf{v}_x)$, frequentemente abreviado para $x \mapsto \mathbf{v}_x$.

Em coordenadas locais, um vetor $\mathbf{v}_x$ é definido por suas n componentes; por isso um campo vetorial $\mathbf{v}$ é definido no domínio de uma carta por n funções $\mathbf{v}^i$ de n variáveis reais. Por definição um campo vetorial $\mathbf{v}$ em uma variedade C^k é diferenciável (C^r) se o mapeamento $\mathbf{v} : x^n \mapsto T(X^n)$ é diferenciável (C^r).

Se $\mathbf{v}$ é um campo vetorial diferenciável C^r em X^n , e se $f : X^n \rightarrow Y^n$ é um difeomorfismo C^{r+1} então $f'\mathbf{v}$ é um campo vetorial em Y^n . Mas se f não é inversível, a imagem de $\mathbf{v}$ sobre $f : X^n \rightarrow Y^p$ não é um campo vetorial em Y^p . Se f^{-1} existe mas não é diferenciável a imagem não é diferenciável. Entretanto as imagens de alguns campos vetoriais diferenciáveis sobre alguns mapeamentos diferenciáveis são campos vetoriais diferenciáveis; se isto acontece é dito ser *projetável* por f . ($\mathbf{v}$ e $f'\mathbf{v}$ são também ditos “ f -related” em [6]).

4.5 Grupos de Lie

Definição: Um *grupo de Lie* G é um grupo tal que a operação $G \times G \rightarrow G$ por $(a, b) \mapsto a^{-1}b$ seja um mapeamento diferenciável.

Dois grupos de Lie são isomorfos se existe um difeomorfismo entre eles que preserva a estrutura de grupo (que é um homomorfismo de grupo).

Exemplo 4.5.1 $\mathbb{R}^n$ com a operação de adição vetorial é um grupo de Lie quando enriquecido com uma estrutura diferencial usual.

Exemplo 4.5.2 O espaço de mapeamentos bijetivos lineares do $\mathbb{R}^n$ para o $\mathbb{R}^n$ com a operação de aplicações compostas é um grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$.

Grupo de um Parâmetro: Um grupo de Lie unidimensional é usualmente chamado um *grupo de um parâmetro*.

Grupo de Lie Local: Um *grupo de Lie local* é uma vizinhança da origem (elemento identidade) do grupo. Um grupo local de um parâmetro é isomorfo ao intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo a origem.

Consideraremos grupos finitos dimensionais de transformações $\{\sigma_g :$ onde g é um elemento de um grupo de Lie G de dimensão $p\}$.

Grupo de Lie de Transformações: O conjunto $\{\sigma_g\}$ é um *grupo de Lie de transformações* se o mapeamento

$$\sigma : G \times X \rightarrow X \text{ por } (g, x) \mapsto \sigma(g, x)$$

é diferenciável e se o conjunto de transformações $\{\sigma_g : X \rightarrow X; \sigma_g(x) = \sigma(g, x)\}$, com o mapeamento composto, seguem as propriedades de grupo

$$\begin{cases} \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{gh} & (G\text{-ação à esquerda em } X) \text{ ou} \\ \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{hg} & (G\text{-ação à direita em } X) \\ \sigma_e & \text{é a transformação identidade} \end{cases} \quad (4.2)$$

Disto segue que

$$\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1}.$$

G opera *efetivamente* em X se $\sigma_g(x) = x$ para todo $x \in X$ o que implica que $g = e$.

G opera *livremente* em X se $\sigma_g(x) \neq x$ a menos que $g = e$.

G opera *transitivamente* em X se para todo $x \in X$ e $y \in X$ existe $g \in G$ tal que $\sigma_g(x) = y$.

Subgrupo um parâmetro: Um *subgrupo um parâmetro* de um grupo de Lie G é uma curva diferenciável

$$\mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{por} \quad t \mapsto g(t)$$

tal que

$$\begin{cases} g(t)g(s) = g(t+s) \\ g(0) = e. \end{cases} \quad (4.3)$$

Campo Vetorial de Killing: O campo vetorial que gera o grupo de transformação $\{\sigma_{g(t)}; t \in \mathbb{R}\}$ é chamado *campo vetorial de Killing* em X relativo a ação do grupo G ⁵.

A integral de curva indo através de x do campo vetorial de Killing v satisfaz as equações

$$\begin{cases} d\sigma_x(g(t))/dt = v(\sigma_x(g(t))) \\ \sigma_x(e) = x \end{cases} \quad (4.4)$$

Temos visto que um subgrupo um parâmetro é definido por seus vetores tangentes γ e e

$$\gamma = dg(t)/dt|_{t=0}$$

Donde podemos chamar o campo vetorial de Killing que gera $\{\sigma_{g(t)}; dg(t)/dt|_{t=0} = \gamma, t \in \mathbb{R}\}$ por γ ,

$$v^\gamma(x) = \left. \frac{d\sigma_{g(t)}(x)}{df} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\sigma_x(g(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sigma'_x(e)\gamma.$$

A seguinte transformação de G sobre ele mesmo, traça um papel central na teoria de grupos de Lie.

$L_g : G \rightarrow G$ por $L_g(h) = gh$ chamada *translação à esquerda* e

$R_g : G \rightarrow G$ por $R_g(h) = hg$ chamada *translação à direita*.

Obviamente $R_g(h) = L_h(g)$.

⁵Quando X é dotado de uma métrica g - por exemplo em relatividade geral - o grupo G é geralmente o grupo que define isometrias.

4.6 Translações à esquerda e à direita de G ; Álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de G ; Estruturas Cons- tantes

Os dois grupos de transformações de um grupo de Lie G em G definido pelas translações à direita e à esquerda atuam efetivamente, transitivamente e livremente sobre G .

O conjunto dos campos vetoriais invariantes sob a translação à esquerda [à direita] são chamados *campos vetoriais invariantes à esquerda [à direita]* em G .

4.6.1 Álgebra de Lie

Parênteses de Lie: O parênteses de Lie definido por

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{v}$$

$$\overline{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}f = (v^i \partial_i w^j - w^i \partial_i v^j) \partial_j \bar{f}$$

é um campo vetorial.

Identidade de Jacobi: A multiplicação definida pelo parênteses de Lie é distributiva com respeito a adição e anticomutatividade; não é associativa mas satisfaz a identidade de Jacobi

$$[\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]] + [\mathbf{v}_2, [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1]] + [\mathbf{v}_3, [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]] = 0.$$

Um módulo com uma operação interna que satisfaz estas propriedades é chamado uma *álgebra de Lie*.

Ou ainda, o espaço vetorial dos campos vetoriais invariantes à esquerda em G com a multiplicação do parênteses de Lie é chamada a *álgebra de Lie $\mathcal{L}$* do grupo G .

Constantes de Estruturas: Seja $\{\mathbf{v}_\alpha; \alpha = 1, \dots, p\}$ uma base da álgebra de Lie; existem números $C_{\alpha\beta}^\gamma$ tais que

$$[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{v}_\gamma.$$

Os coeficientes $C_{\alpha\beta}^\gamma$ são chamados as *constantes de estruturas* do grupo de Lie G .

Representação Adjunta: A representação adjunta é uma representação de um grupo G em sua álgebra de Lie $\mathcal{L}$. Desde que a álgebra de Lie $\mathcal{L}$ é isomorfa a $T_e(G)$ um mapeamento de $\mathcal{L}$ nele mesmo pode ser definido por um mapeamento de $T_e(G)$ nele mesmo. O mapeamento

$$L_g R_g^{-1} : h \mapsto ghg^{-1}$$

é um automorfismo interno de G que define um mapeamento linear $(L_g R_g^{-1})'(e)$ de $T_e(G)$ nele mesmo. O mapeamento

$$\text{Ad}(g) : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$$

é por definição o mapeamento correspondente a $(L_g R_g^{-1})'(e)$ no isomorfismo entre $T_e(G)$ e $\mathcal{L}$. Sejam $\alpha_e, \gamma_e \in T_e(G)$; e $\alpha, \gamma \in \mathcal{L}$ o campo vetorial invariante à esquerda gerado por α_e e γ_e respectivamente:

$$\alpha_e = (L_g R_g^{-1})'(e) \gamma_e \Leftrightarrow \alpha = \text{Ad}(g) \gamma.$$

Frequentemente identificamos $T_e(G)$ e $\mathcal{L}$ e escrevemos

$$\text{Ad}(g) = (L_g R_g^{-1})'(e) = L'_g(g^{-1}) R_g^{-1'}(e).$$

O mapeamento de G no espaço $L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ de mapeamentos lineares de $\mathcal{L}$ nele mesmo

$$\text{Ad} : G \mapsto L(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \text{ por } \text{Ad} : g \mapsto \text{Ad}(g)$$

é chamado a *representação adjunta* de G em $\mathcal{L}$.

A abreviação seguinte também é usada

$$\text{Ad}(g) \gamma = g \gamma g^{-1}, \quad \gamma \in \mathcal{L}.$$

Forma de Maurer-Cartan: A *forma de Maurer-Cartan* ω ou *forma canônica* em um grupo de Lie G é uma 1-forma com valores na álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de G definida pela relação

$$\omega(\mathbf{v}_g) = \gamma \text{ onde } \gamma = L_g^{-1'} \mathbf{v}_g \in T_e(G).$$

A forma de Maurer-Cartan é frequentemente definida pela equação $\omega(\mathbf{v}_g) = g^{-1} \mathbf{v}_g$. Esta notação abreviada é literalmente correta se G é o grupo linear $GL(n)$ ou um de seus subgrupos desde que a derivada de um mapeamento possa ser identificada com o próprio mapeamento.

Capítulo 5

Fibrados

5.1 Definição de “Bundles” e “Cross Section”

Os “bundles” tem sido introduzidos para generalizar produtos topológicos.

A necessidade de tal generalização pode ser vista em um exemplo simples: Um cilindro, Figura 5.1(a), obtido pelo produto cartesiano de um círculo S^1 com um segmento de linha I , e $(S^1 \times I, S^1, \pi_1)$ é um “bundle” produto, ou seja, pode ser descrito globalmente como um produto topológico. Entretanto – a Figura 5.1(b) mostra a faixa Möbius – localmente a faixa Möbius e o cilindro são ambos produtos de segmento de retas, porém a faixa Möbius, devido a curvatura, não é um produto global, enquanto o cilindro o é.

Assim, a idéia da teoria de fibrados é estudar espaços que não são produtos globais mas somente produtos locais.

Foi entre 1935 e 1940 que esses conceitos intuitivos foram definidos na literatura matemática, muito embora para alguns a idéia formal de “bundle”s tenha sido de fato antecipada por Elie Cartan no seu célebre artigo “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée”, Gauthier Villars, 1923 [1]. Neste artigo, Cartan se refere a possibilidade de se associar, por exemplo, a cada ponto de uma variedade um número infinito de

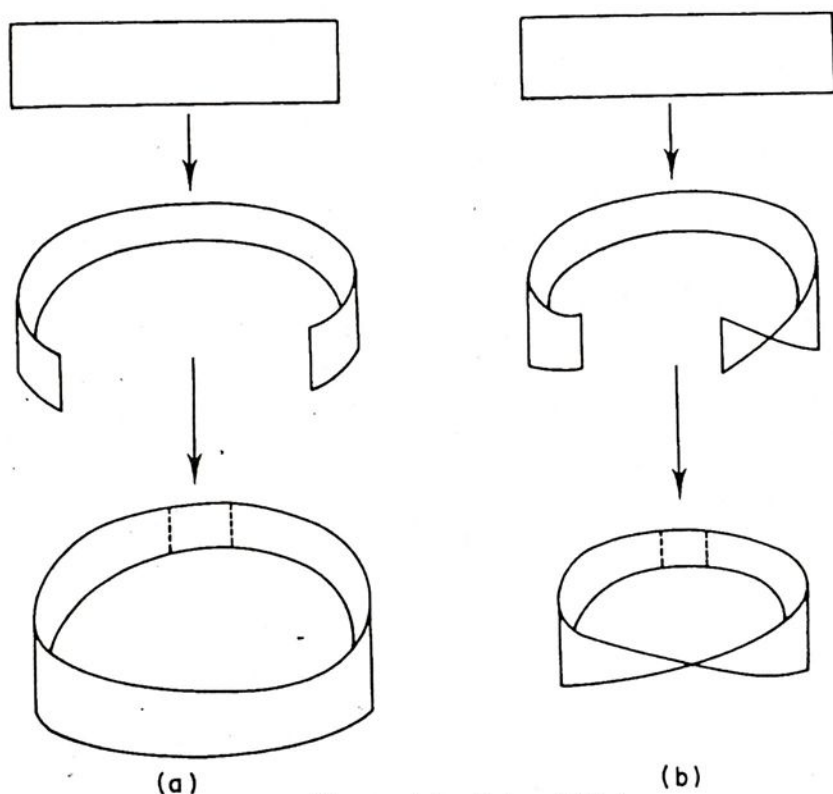


Figura 5.1: Faixa Möbius

sistemas de referência. Aqui aparecia de maneira intuitiva a idéia fundamental de frame “bundle” [5.3.1] em uma variedade.

“Bundle”: Um “bundle” é uma tripla (E, B, π) consistindo de duas variedades E e B e um mapeamento sobrejetivo $\pi : E \rightarrow B$. B é chamado o *espaço base*. E é chamado o *espaço total* e o mapa π é a *projeção* do “bundle”. Para todo $x \in B$, o espaço $\pi^{-1}(x)$ é chamado a *fibra* do “bundle” sobre $x \in B$.

Intuitivamente, podemos ver um “bundle” como a união das fibras $\pi^{-1}(x)$ para $x \in B$ parametrizadas por B e “coladas juntas” pela topologia do espaço E .

Exemplo 5.1.1 O exemplo mais simples é o “bundle” cartesiano $(B_1 \times B_2, B_1, \pi_1)$ com π_1 sendo a primeira projeção definida por $\pi_1(x^1, x^2) = x^1$ para todo $x^1 \in B_1$ e $x^2 \in B_2$.

Subbundle: Um “bundle” (E', B', π') é um *subbundle* de (E, B, π) se E' é um subespaço de E , B' é um subespaço de B , e $\pi' = \pi|_{E'} : E' \rightarrow B'$.

“Cross section”: Uma “*cross section*” do “bundle” (E, B, π) é um mapeamento $f : B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ f = \text{identidade}$. Isto é, uma “*cross section*” é um mapa $f : B \rightarrow E$ tal que $f(x) \in \pi^{-1}(x)$, a fibra sobre x , para todo $x \in B$.

Seja (E', B', π') um subbundle de (E, B, π) , e seja f uma “*cross section*” de (E, B, π) . Então f é uma “*cross section*” de (E', B', π') se e somente se $f(x) \in E'$ para todo $x \in B$, então f é dita ser uma “*cross section*” local.

5.2 Morfismos e Categorias de Bundles

5.2.1 Morfismos

Os mapeamentos que levam fibras em fibras são chamados *morfismos “bundles”* [13]. A definição abaixo torna esta idéia mais precisa.

Definição: Sejam (E_1, B_1, π_1) e (E_2, B_2, π_2) dois “bundles”. Um *morfismo “bundle”* $(F, f) : (E_1, B_1, \pi_1) \rightarrow (E_2, B_2, \pi_2)$ é um par de mapas $F : E_1 \rightarrow E_2$ e $f : B_1 \rightarrow B_2$ tal que:

$$\pi_2 F = f \pi_1 \quad (5.1)$$

Ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

é comutativo.

A condição de morfismo “bundle” (5.1), pode ser expressa pela relação $F(\pi_1^{-1}(b)) \subset (\pi_2^{-1}(f(b)))$ para todo $b \in B$, i.e., a fibra sobre $b \in B$ é levada na fibra $f(b)$ por F . Então observamos que o mapa f é único, determinado por F quando π é sobrejetora.

Definição: Sejam (E_1, B, π_1) e (E_2, B, π_2) dois “bundles” sobre B . Um morfismo “bundle” $F : (E_1, B, \pi_1) \rightarrow (E_2, B, \pi_2)$ é um mapa $F : E_1 \rightarrow E_2$ tal que:

$$\pi_1 = \pi_2 F \quad (5.2)$$

A condição (5.2), é a exigência de comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & B & \end{array}$$

Podemos, ainda expressar 5.2 pela relação $F(\pi_1^{-1}(b)) \subset (\pi_2^{-1}(b))$ para todo $b \in B$, i.e., F está conservando a fibra. Os morfismos “bundle” F sobre B são os morfismos “bundle” $(F, 1_B)$.

5.2.2 Categoria

Uma categoria de “bundle” consiste de “bundles” e morfismos “bundle”.

Definição: A categoria dos “bundles”, denotada por **Bun**, tem como seus objetos todos “bundles” (E, B, π) e como morfismos de (E_1, B_1, π_1) para (E_2, B_2, π_2) o conjunto de todos os “bundle” morfismos. Para cada espaço B , a subcategoria dos “bundles” sobre B , denotada, $\mathbf{Bun}_B$, tem como seus objetos “bundles” com espaço base B e B -morfismos como seus morfismos.

Das propriedades gerais em uma categoria, um morfismo “bundle” $(F, f) : (E_1, B_1, \pi_1) \rightarrow (E_2, B_2, \pi_2)$ é um isomorfismo se, e somente se, existe um morfismo $(F', f') : (E_1, B_1, \pi_1) \rightarrow (E_2, B_2, \pi_2)$ com

$$f'f = 1_{B_1}; ff' = 1_{B_2}; F'F = 1_{E_1} e FF' = 1_{E_2}. \quad (5.3)$$

Definição: Um espaço F é a fibra típica de um “bundle” (E, B, π) se toda fibra $\pi^{-1}(x)$ para $x \in B$ é homeomorfa a F , também denotada F_x . Um

“bundle” é *trivial* com fibra F se (E, B, π) é B -isomorfa ao “bundle produto” $(B \times F, \pi, B)$.

5.3 Definição de Fibrados

Um fibrado é um “bundle” com uma estrutura adicional derivada da ação de um grupo topológico nas fibras.

Tomemos o exemplo da faixa Möbius, vimos que localmente ela pode ser descrita: $U \subseteq S^1$, o produto topológico $U \times I$ descreve um segmento da faixa Möbius, mas precisamos de alguns mecanismos para dizer onde ocorre a curvatura.

5.3.1 Definição:

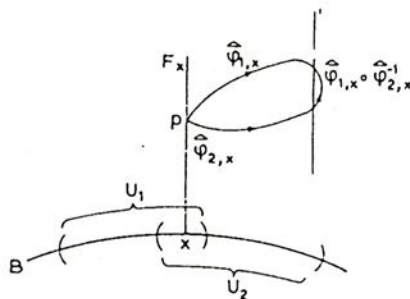
Definição: Um *fibrado* (E, B, π, G) é um “bundle” (E, B, π) com uma fibra típica F , um grupo topológico G de homeomorfismos de F , e uma cobertura de B por uma família de conjuntos abertos $U_j; j \in J$, tal que:

1. Localmente o “bundle” é um “bundle” trivial; isto é, é homeomorfo a um “bundle” produto; mais precisamente $\pi^{-1}(U_j)$ é homeomorfo ao produto topológico $U_j \times F$ para todo $j \in J$. O homeomorfismo $\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$ tem a forma $\varphi_j(p) = (\pi(p), \overset{\Delta}{\varphi}_j(p))$ e o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_j} & U_j \times F \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{Projeção Canônica} \\ & U_j & \end{array}$$

Seja $x \in U_j$, notemos que $\overset{\Delta}{\varphi}_j k_x$, ou $\overset{\Delta}{\varphi}_{j,x}$ para simplificar a notação, é um homeomorfismo de F_x em F .

Os conjuntos U_i, φ_i são chamados uma família de *trivializações locais* do “bundle”.



2. Há uma correlação dos subbundles triviais definidos nos conjuntos abertos U_j cobrindo a base. Seja $x \in U_j \cap U_k$.

A relação entre os mapeamentos $\varphi_{k,j}^\Delta$ e $\varphi_{k,x}^\Delta$ dá a estrutura do fibrado; por exemplo, dá a curvatura da faixa Möbius.

O homeomorfismo $\varphi_{k,x}^\Delta \circ \varphi_{j,x}^{-1}: F \rightarrow F$ é um elemento do grupo estrutural G para todo $x \in U_j \cap U_k$ e todo $j, k \in J$. Se G tem somente um elemento o “bundle” é trivializável.

3. Os mapeamentos induzidos $g_{jk}: U_j \cap U_k \rightarrow G$ por $x \mapsto g_{jk}(x) = \varphi_{j,x}^\Delta \circ \varphi_{k,x}^{-1}$ são contínuos. São chamados *funções de transição*. Satisfazem a relação:

$$g_{jk}(x)g_{hi}(x) = g_{ji}(x). \quad (5.4)$$

Exemplo 5.3.1 – Faixa Möbius

Base: S^1 de comprimento $4a$ coberta por dois conjuntos abertos U_1 e U_2

$$U_1 = \{x; -2a < x < a\} \quad U_2 = \{x; 0 < x < 3a\}$$

onde x é a coordenada de um ponto de S^1 , então $x \pm 4na = x$.

Projeção: $\pi(p) \in S^1$; identificando um ponto de S^1 com sua coordenada escrevemos $\pi(p) = x_p$.

Fibra Típica: $I \subset \mathbb{R}$ por $\varphi_1(p) = (\pi(p), \varphi_1(p))$. Seja i_p a coordenada de $\varphi_1(p) \in I$, escrevemos $\varphi_1(p) = i_p$.

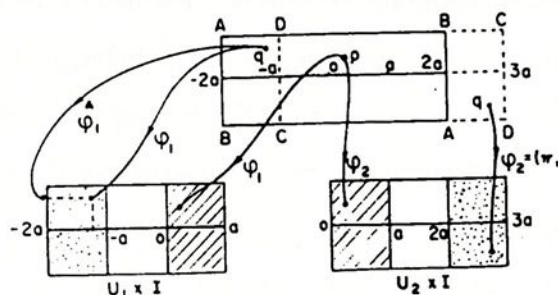


Figura 5.2: Diagrama de Möbius

Pontos com o mesmo nome A, B, C, D são identificados.

Grupo Estrutural: A intersecção de U_1 e U_2 consiste de dois conjuntos disjuntos V e W

$$V = x; 0 < x < a \quad W = x; -2a < x < -a$$

Seja p tal que $\pi(p) \in V$,

$$\varphi_{1,x_p}^\Delta(p) = i_p \quad \varphi_{2,x_p}^\Delta(p) = i_p \quad \varphi_{1,x_p}^\Delta \circ \varphi_{2,x_p}^{\Delta^{-1}} = e.$$

Seja q tal que $\pi(q) \in W$,

$$\varphi_{1,x_q}^\Delta(q) = i_q \quad \varphi_{2,x_q}^\Delta(q) = i_q \quad \varphi_{1,x_q}^\Delta \circ \varphi_{2,x_q}^{\Delta^{-1}} = g,$$

onde e e g são os elementos do grupo de simetria de ordem 2. Este grupo com a topologia discreta é um grupo topológico.

Fibrado Diferenciável: Um “bundle” (E, B, π, G) é dito ser um *fibrado diferenciável* $[C^k]$ se E, B e a fibra típica são variedades diferenciáveis $[C^k]$, π é um mapeamento diferenciável $[C^k]$, G é um grupo de Lie e a cobertura de B sendo o domínio de um atlas admissível, os mapeamentos g_{jk} da condição (5.4) são diferenciáveis $[C^k]$.

Coordenadas em Fibrados Todos os sistemas de coordenadas próprios para E como uma variedade, não são próprios para E como um fibrado. Considere um fibrado diferenciável (E, B, π) onde E e B são variedades de dimensões $n + p$ e n . Uma carta (U, φ) em E define coordenadas da fibra em E se o mapeamento $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é um “bundle” morfismo, com $\mathbb{R}^{n+p}$ tendo a estrutura natural de “bundle” (produto cartesiano) $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

“Bundle” Tangente Seja $T(X^n)$ o espaço dos pares $(x, \mathbf{v}_x)$ para todo x na variedade diferenciável X^n e todo $\mathbf{v}_x \in T_x(X^n)$. Pode ser dado como uma estrutura de fibrado $(T(X^n), X^n, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ como segue.

Fibra em $x : T_x(X^n)$. Fibra Típica $F : \mathbb{R}^n$.

Projeção $\pi : (x, \mathbf{v}_x) \mapsto x$.

Cobertura de $X^n : U_j; (U_j, \psi_j)$ é um atlas de X^n .

Homeomorfismos $\varphi_j : \varphi_j$ é o par $(\pi, \psi'_j \circ \pi_2)$ onde $\pi_2(x, \mathbf{v}_x) = \mathbf{v}_x$, e $\psi'_j(\mathbf{v}_x)$ é a representação de $\mathbf{v}_x$ na carta (U_j, ψ_j) .

$$(\pi \psi'_j \circ \pi_2) : \pi^{-1}(U_j) \longrightarrow U_j \text{ por } (x, \mathbf{v}_x) \mapsto (x, \psi'_j(\mathbf{v}_x)).$$

As coordenadas da fibra em $T(X^n)$ são dadas pelos mapeamentos

$$(\psi_j, \text{identidade}) \circ (\pi, \psi'_j \circ \pi_2) : \pi^{-1}(U_j) \longleftarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

As coordenadas de um ponto $p = (x, \mathbf{v}_x) \in \pi^{-1}(U_j) \subset T(X^n)$ são então

$$(x^1, \dots, x^n, v_x^1, \dots, v_x^n).$$

Uma mudança de coordenadas da fibra em $T(X^n)$ é totalmente determinada por uma mudança de cartas em X^n ; isto é, um “bundle” morfismo da forma $((f, f'), f)$ onde $f : X^n \rightarrow X^n$ é um mapeamento diferenciável (C^k).

Grupo Estrutural G : $GL(n, \mathbb{R})$ o grupo de automorfismos lineares do $\mathbb{R}^n$ (isomorfismo do $\mathbb{R}^n$ sobre si mesmo) no qual a matriz de representação é o conjunto de $n \times n$ matrizes com determinante não nulo. Isto é, se $\psi'_{1,x} : \mathbf{v}_x \in T_x(X^n) \mapsto \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ e $\psi'_{2,x} : \mathbf{v}_x \in T_x(X^n) \mapsto \mathbf{V}' \in \mathbb{R}^n$, então

$$\psi'_{1,x} \circ \psi'^{-1}_{2,x} \in GL(n, \mathbb{R}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ por } \mathbf{V}' \mapsto \mathbf{V};$$

$GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

“Bundle” Tangente Diferenciável: Se X^n é uma variedade diferenciável de classe C^k , $T(X^n)$ é uma variedade diferenciável de classe C^{k-1} ; $T(X^n)$ é então chamado um *“bundle” tangente diferenciável* C^{k-1} .

Não há isomorfismo canônico entre a fibra e um ponto e a fibra típica, e conseqüentemente não há isomorfismo canônico entre fibras e pontos diferentes, a menos que o fibrado é dado em uma estrutura adicional; por exemplo transporte paralelo [6.5.2].

“Frame Bundle”: Dado ρ_x um *“frame”* em $T_x(X^n)$; ρ_x é um conjunto de n vetores linearmente independentes $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ que podem ser escritos como uma combinação linear de elementos de uma base particular $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ de $T_x(X^n)$.

$$e_i = a_i^j \bar{e}_j(a_i^j) = a \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Então há uma bijeção entre o conjunto de todos os “frames” em $T_x(X^n)$ e $GL(n, \mathbb{R})$. Dado $F(X^n)$ o espaço dos pares (x, ρ_x) para todo $x \in X^n$; isto pode ser dado por uma estrutura de fibra diferenciável $(F(X^n, X^n, \pi, GL(n, \mathbb{R})))$:

5.4 Fibrados Principais

Definição: Um fibrado no qual a fibra típica F e o grupo estrutural G são isomorfos e no qual G atua em F pela translação à esquerda (4.5) é chamado *um fibrado principal* (6.1).

Ação à Direita de G : No capítulo [6] usaremos muito a definição de ação à direita de G no fibrado principal (E, X, π, G) . Seja U_i a cobertura de X usado

para definir a estrutura de fibrado. Primeiro definimos o mapeamento $\tilde{R}_g$ em $\pi^{-1}(U_i)$.

Seja $p \in F_x, x \in U_i$ e defina g_i por

$$g_i = \overset{\Delta}{\varphi}_{i,x}(p)$$

onde $\overset{\Delta}{\varphi}_{i,x}$ é o homeomorfismo de F_x em G . Por definição

$$(\tilde{R}_g p) = \overset{\Delta^{-1}}{\varphi}_{i,x}(R_g g_i) = \overset{\Delta^{-1}}{\varphi}_{i,x}(g_i g), \quad p \in \pi^{-1}(U_i).$$

$\tilde{R}_{g_1} \tilde{R}_{g_2} p = \tilde{R}_{g_2 g_1} p$, isto é $\tilde{R}_g, g \in G$ é um grupo (anti) isomorfo a G , que atua à direita em $\pi^{-1}(U_i)$. Note que p e $\tilde{R}_g p$ pertencem a mesma fibra e que o grupo $\tilde{R}_g; g \in G$ atua transitivamente em cada fibra.

Desde que o mapeamento $\tilde{R}_g$ seja independente da escolha dos conjuntos abertos U_i contendo $\pi(p)$, ele é bem definido sobre todo E , e pode-se escrever

$$\tilde{R}_g(p) = \overset{\Delta^{-1}}{\varphi}_{i,x} \circ R_g \circ \overset{\Delta}{\varphi}_{i,x}(p), \quad x = \pi(p).$$

Também usa-se a notação simplificada pg ao invés de $\tilde{R}_g p$.

Redução: Dado um fibrado (E, B, π, F, G) é interessante saber se ele admite uma estrutura equivalente definida com um subgrupo G_1 do seu grupo estrutural G_2 . Se sim, ele admite uma família de trivializações locais com funções de transição g_{jk} tomando seus valores em um subgrupo G_1 de G ; o grupo estrutural G é dito ser *reduzível* a G_1 .

No caso de um fibrado principal (E, X, π, G) , ele é dito ser *reduzível* ao fibrado principal (E_1, X, π_1, G_1) se G_1 é um subgrupo de G e E_1 um subespaço de E , tal que $f : E_1 \rightarrow E$ seja um morfismo "bundle" que comuta com a ação de G_1 :

$$\pi f(p) = \pi_1 p, \quad \forall p \in E_1$$

$$f(\tilde{R}_g p) = \tilde{R}_g f(p), \quad \forall p \in E_1, \quad g \in G_1.$$

Capítulo 6

Conexões

6.1 Introdução

A teoria das conexões surgiu em 1916, com um artigo do matemático Gerhard Hessenberg [14]. Esta teoria teve consequência direta no desenvolvimento da relatividade geral, como se vê pela contínua referência a essa teoria em todos os artigos sobre conexões que surgiram nos anos seguintes, de autores como Weyl [15], Levi-Civita, Schouten [16], Struik e, especialmente Elie Cartan [1]. Cartan percebeu a importância da noção de conexões e sua relevância para a física. Hermann Weyl foi o primeiro a introduzir conexões lineares não riemaniannas ao relaxar as condições de compatibilidade, $\nabla_i g_{kl} = 0$, entre uma métrica (g_{hl}) e a conexão. As generalizações feitas por Elie Cartan foram ainda mais significantes: ele introduziu conexões com *torção* e uma nova lei de transporte paralelo (“o deslocamento de Cartan”). O próprio Cartan disse: “A translação mostra a presença da torção, enquanto a rotação revela a presença da curvatura de uma dada variedade”. As equações podem ser apresentadas como

$$\begin{aligned}\Omega^i &= d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} Q_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \\ \Omega_j^i &= d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde (Q^i_{jk}) e (R^i_{jkl}) são as componentes dos tensores de torção e curvatura, respectivamente. (ω^i_j) são as conexões, e ω^i uma 1-forma que foi posteriormente chamada de téttrade (Vierbein) [17]. Introduzindo o conceito de torção, diferente de zero, em uma variedade, Cartan introduziu modificações na teoria da gravitação de Einstein. Essas modificações levaram a teoria de Einstein-Cartan [capítulo 8].

6.2 Definições

Em um fibrado principal (P, X, G, π) cada fibra é difeomorfa a fibra típica G . Entretanto o difeomorfismo não é canônico; ele depende da cobertura $\{U_i\}$ de X e da escolha dos mapeamentos $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$. Uma conexão em P faz a correspondência entre quaisquer duas fibras ao longo de uma curva C em X . Diz-se que um ponto p da fibra sobre um ponto x da curva é *transladado paralelamente* ao longo da curva por esta correspondência. Também dizemos que a curva $\hat{C}$ descrita pelo transporte paralelo [6.5] de p é um levantamento horizontal da curva C .

Para obter os levantamentos horizontais da curva C de X , será suficiente definir sua contraparte infinitesimal, que está associada com cada vetor tangente $\mathbf{v}_x$ em qualquer $x \in X$, e cada ponto p da fibra $G_x \equiv \pi^{-1}(x)$, um vetor tangente $\mathbf{v}_p$ para P em p , chamado um *vetor horizontal*, que projeta π' em $\mathbf{v}_x$. O levantamento horizontal de uma curva C em X , por um ponto $p \in P$, será então obtido como a curva integral através de p destes vetores horizontais que projetam π em C .

Queremos que o transporte paralelo seja compatível com a diferenciabilidade e a estrutura do fibrado principal P ; o mapeamento entre $T_x(X)$ e $T_p(P)$ deve preservar suas estruturas vetoriais e ser diferenciável com respeito a X ; além disso, vimos que o grupo estrutural G tem uma ação global à direita em P denotada $\tilde{R}_g$, que preserva, e atua transitivamente em cada fibra. Desejamos, então, dois diferentes levantamentos horizontais $\hat{C}_1$ e $\hat{C}_2$ de uma

curva C em X , para a mesma conexão através de diferentes pontos p_1 e p_2 em $\pi^{-1}(x)$, relatado pela transformação $\tilde{R}_g$ que leva p_1 em p_2 . Estas condições levam-nos à definição de uma *conexão*.

6.3 Conexões em um fibrado principal

6.3.1 Definição

Uma conexão em um fibrado principal (P, B, G, π) é um campo de espaços vetoriais $H_p, H_p \subset T_p(P)$, tal que

1. $\pi' : H_p \rightarrow T_x(X), x = \pi(p)$, é um isomorfismo,
2. H_p depende diferencialmente de p ,
3. $H_{\tilde{R}_g p} = \tilde{R}'_g H_p$.

Os elementos de H_p são os vetores horizontais em p . Os elementos do espaço tangente $T_p(G_x) \equiv V_p$ a fibra G_x em p são chamados *vetores verticais*. Desde que $\pi' V_p = 0$, então $T_p(P) = H_p \oplus V_p$, ou seja, qualquer $\mathbf{v} \in T_p(P)$ pode ser escrito, unicamente

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_v \mathbf{v}_H \in H_p, \mathbf{v}_v \in V_p.$$

Note que $\mathbf{v}_v$ (também denotado por $\mathbf{v}$) depende de $\mathbf{v}_H$ (também denotado por $\mathbf{v}$) na escolha de H_p .

6.3.2 Isomorfismo Canônico entre a Álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de G e os Espaços Verticais V_p .

Desde que G atua efetivamente em P por $\tilde{R}_g$, há um isomorfismo natural entre a álgebra de Lie $\mathcal{L}$ e o espaço dos campos vetoriais de Killing (4.5) $\mathbf{v}^k$ em P relativo a G , definido por $\hat{\mathbf{v}}_{(\alpha)} \leftrightarrow \mathbf{v}_{(\alpha)}^k$ onde $\hat{\mathbf{v}}_{(\alpha)} \in \mathcal{L}$ e $\mathbf{v}_{(\alpha)}^k \in \mathbf{v}^k$ são ambos gerados por $\mathbf{v}_{(\alpha)}(e) = dg(s)/ds|_{s=0} \in t_e(G)$:

$$\hat{\mathbf{v}}_{(\alpha)}(g) = L'_g(e)\mathbf{v}_{(\alpha)}(e), \quad \mathbf{v}_{(\alpha)}^k(p) = d(\tilde{R}_{g(s)}p)/ds|_{s=0}. \quad (6.2)$$

Devido a p e $\tilde{R}_g p$ pertencerem a mesma fibra, qualquer vetor de Killing $\mathbf{v}^k(p)$ é um vetor vertical. Além disso, um campo vetorial de Killing não desaparece em qualquer ponto a menos que corresponda ao elemento zero da álgebra de Lie. Se a correspondência é linear, a dimensão do espaço $\{\mathbf{v}^k(p)\}$ é igual a dimensão do espaço $\{\mathbf{v}^k\}$, que é igual a dimensão do grupo G e de $\mathbf{V}_p$. Concluindo, seja $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{L}$ correspondente a $dg(s)/ds|_{s=0} \in T_e(G)$; a equação

$$\mathbf{v}(p) = d(\tilde{R}_{g(s)}p)/ds|_{s=0}$$

define o isomorfismo canônico entre $\mathcal{L}$ e $\mathbf{V}_p$,

$$\mathbf{v}(p) \leftrightarrow \hat{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v}(p) \in \mathbf{V}_p. \quad (6.3)$$

Dado um elemento $\gamma \in \mathcal{L}$, este isomorfismo define um campo vetorial $\mathbf{v}_\gamma$ em P , chamado um *campo vetorial fundamental*, por $\widehat{\mathbf{v}_\gamma(p)} = \gamma$. Também escrevemos $\check{\gamma} = \mathbf{v}_\gamma(p)$.

Quando são dados os campos dos subespaços horizontais H_p temos, para todo $p \in P$, uma família de mapeamentos lineares bem definidos

$$T_p(P) \rightarrow \mathcal{L} \text{ por } \mathbf{v} \mapsto \widehat{v\epsilon r} \mathbf{v}, p \in P. \quad (6.4)$$

De acordo com definições anteriores, chamamos a família de mapeamentos (6.4) 1-forma ω em P com valores no espaço vetorial $\mathcal{L}$, a álgebra de Lie de G :

$$\omega(\mathbf{v}) = \widehat{v\epsilon r} \mathbf{v} \quad \text{e, então } \omega(\text{hor} \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in T_p(P).$$

Observe que se (e_α) é uma base para $\mathcal{L}$ e se (Θ^i) é uma base para $T_p^*(P)$, então ω^1 pode ser escrito

$$\omega = \omega^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha = \omega_i^\alpha \Theta^i \otimes \mathbf{e}_\alpha$$

onde os ω^α são 1-formas em P .

¹Temos $\omega(\mathbf{v}) = (\omega(\mathbf{v}))^\alpha e_\alpha$ e escrevemos $(\omega(\mathbf{v}))^\alpha = \omega^\alpha(\mathbf{v})$.

Resulta da propriedade (2) da definição [6.3.1] que os ω^α são 1-forma diferenciáveis em P , e então que ω é 1-forma diferenciável em P com valores em $\mathcal{L}$. A equivariância, propriedade 3 de [6.3.1] dos subespaços horizontais H_p assegura que R'_g preserva a decomposição de qualquer vetor tangente $\mathbf{v}$ para P em uma parte horizontal e uma vertical:

$$\tilde{R}'_g \mathbf{v} = (\tilde{R}'_g \mathbf{v})_H + (\tilde{R}'_g \mathbf{v})_V = \tilde{R}'_g \mathbf{v}_H + \tilde{R}'_g \mathbf{v}_V \quad \text{se } \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_V.$$

6.4 Conexão Local 1-forma

Para uma dada conexão ω associaremos a cada seção local diferenciável de $\pi^{-1}(U) \subset X$, uma 1-forma em U com valores em $\mathcal{L}$. Seja

$$F : U \subset X \rightarrow f(U) \subset P, \quad \pi f = \text{id}$$

uma seção local de P ; definimos uma 1-forma $f^*\omega$ em U com valores em $\mathcal{L}$ pelo “pull back” de ω por f : isto é, se $\mathbf{u} \in T_x(X)$, $x \in U$

$$(f^*\omega)_x(\mathbf{u}) = \omega_{f(x)}(f'\mathbf{u}).$$

Reciprocamente

Teorema 6.4.1 *Dada uma 1-forma diferenciável $\bar{\omega}$ em U com valores em $\mathcal{L}$, e uma seção diferenciável f de $\pi^{-1}(U)$, existe uma e, somente uma conexão ω em $\pi^{-1}(U)$ tal que $f^*\omega = \bar{\omega}$.*

Demonstração:

1. Seja $\mathbf{v} \in T_{p_0}(P)$, $p_0 = f(x)$; escrevemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

onde $\mathbf{v}_1 = (f' \circ \pi')\mathbf{v}$, e logo $\mathbf{v}_2$ é vertical: temos $\pi'\mathbf{v}_2 = 0$ desde que $\pi' \circ f' = \text{id}$.

Definimos uma 1-forma ω com valores em $\mathcal{L}$ em cada ponto $p_0 \in f(U)$ da seção por

$$\omega_{p0}(\mathbf{v}) = \bar{\omega}_x(\pi' \mathbf{v}) + \hat{\mathbf{v}}_2$$

onde $\hat{\mathbf{v}}_2$ é obtido de $\mathbf{v}_2$ pelo isomorfismo canônico $\mathbf{V}_p \rightarrow \mathcal{L}$.

2. Estendemos ω para todos os pontos de $\pi^{-1}(U)$ pela G -ação que é

$$\omega_p(\mathbf{v}) = \text{Ad}(g^{-1})\omega_{p0}(\tilde{R}_g^{-1}\mathbf{v}) \quad \text{se } p = \tilde{R}_g p0.$$

A 1-forma então definida apresenta as propriedades abaixo:

- (a) $\omega(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}}$ onde $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_p$ e $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}$ são relacionados pelo isomorfismo canônico 6.3.2,
- (b) ω_p depende diferencialmente em P ,
- (c) $\omega_{\tilde{R}_g p}(\tilde{R}'_g \mathbf{v}) = \text{Ad}(g^{-1})\omega_p(\mathbf{v})$.

e é somente uma tal que $f^*\omega = \bar{\omega}$.

Dada uma trivialização $\{U_i, \phi_i\}$ do "bundle" P e uma conexão ω em P , corresponde uma única família $\{\bar{\omega}_i\}$ da conexão 1-forma na variedade. Primeiro, definimos a seção S_i de $\pi^{-1}(U_i)$ canonicamente associada com a trivialização ϕ_i .

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_j) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times G \\ s_i \uparrow & & \\ U_j & \nearrow & \text{id}_i \end{array}$$

Seja $\bar{\text{Id}} : U_i \rightarrow U_i \times G$ por $x \mapsto (x, e)$. Uma trivialização ϕ define uma seção s_i , e vice-versa, através da equação

$$s_i = \phi_i^{-1} \circ \bar{\text{Id}}.$$

Seja $\bar{\omega}_i = s_i^* \omega$, a forma $\bar{\omega}_i$ em U_i é chamado a *forma conexão na trivialização local* ϕ_i .

6.4.1 Potenciais

Nas teorias físicas de Yang-Mills, as 1-formas $\bar{\omega}_i$ são usualmente chamadas *potenciais* (potenciais de “gauge”) e as trivializações ϕ_i são chamadas *gauges locais*. Os $\bar{\omega}_i$ estão relacionados ao potencial tradicional $\mathbf{A}$ por constantes multiplicativas.

Teorema 6.4.2 *Em um ponto $x \in U_i \cap U_j$ a forma conexão $\bar{\omega}_i$ e $\bar{\omega}_j$ nos gauge locais ϕ_i e ϕ_j correspondentes a mesma conexão ω em P são unidas pela relação*

$$\bar{\omega}_{i,x} = \text{Ad}(g_{ji}^{-1}(x))\bar{\omega}_{j,x} + (g_{ji}^*\Theta_{MC})_x \quad (6.5)$$

onde g_{ij} é o mapeamento de transição

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G \quad \text{por} \quad x \mapsto g_{ij}(x) = \phi_{i,x}^{\Delta} \circ \phi_{j,x}^{\Delta^{-1}} \in G$$

e $g_{ij}^*\Theta_{MC}$ denota o “pull back” em $U_i \cap U_j$ da Maurer-Cartan 1-forma em G .

Demonstração:

O “pull back” $\phi_i^{-1*}\omega : TU_i \times TG \rightarrow \mathcal{L}$ é um $\mathcal{L}$ -valor 1-forma em $U_i \times G$. Seja $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in T_x U_i \times T_g G$;

$$(\phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{0}_g) + (\phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{0}_x, \mathbf{w})$$

onde $\mathbf{0}_g$ e $\mathbf{0}_x$ são os vetores zeros em g e x respectivamente.

Usando $\mathbf{0}_g = \mathbf{R}'_g \mathbf{0}_e$ e a definição de conexão, obtemos:

$$\begin{aligned} (\phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{0}_g) &= \text{Ad}(g^{-1})(\phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{0}_e) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(\phi_i^{-1} \circ \bar{\text{Id}})^*\omega(\mathbf{v}) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})s_i^*\omega(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Desde que $(\mathbf{0}_x, \mathbf{w})$ seja um vetor vertical,

$$(\phi_i^{-1*}\omega)(0_x, \mathbf{w}) = \Theta_{MC}(\mathbf{w})$$

onde Θ_{MC} é a 1-forma Maurer-Cartan [4.6.1] em G . Finalmente

$$(\phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{Ad}(g^{-1}s_i^*\omega(\mathbf{v}) + \Theta_{MC}(\mathbf{w})).$$

Para obtermos $\bar{\omega}_i = s_i^*\omega$ em termos de $\bar{\omega}_j = s_j^*\omega$, calculamos:

$$\begin{aligned} ((\Phi_j^{-1} \circ \Phi_j \circ \Phi_i^{-1})^*\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\Phi_j^{-1*}\omega)((\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})'(x, g)(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \\ &= (\Phi_j^{-1*}\omega)((id_X, L_{g_{ji}(x)})'(x, g)(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \end{aligned}$$

Desde que

$$(id_X, L_{g_{ji}(x)}) : (U_i \cap U_j) \times G \rightarrow (U_i \cap U_j) \times G \quad \text{por} \quad (x, g) \mapsto (x, g_{ij}(x)g)$$

Temos

$$(id_X, L_{g_{ji}(x)})'(x, g) : T_x(U_i \cap U_j) \times T_g G \rightarrow T_x(U_i \cap U_j) \times T_{g_{ji}(x)g} G$$

Por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial x / \partial x & \partial x / \partial g \\ \partial L_{g_{ij}(x)} g / \partial x & \partial L_{g_{ij}(x)} g / \partial g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

Donde

$$\begin{aligned} &(\Phi_j^{-1*}\omega)(id_X, L'_{g_{ji}(x)})(x, g)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= (\Phi_j^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{R}'_g(g_{ji}(x))(\mathbf{v}) + L'_{g_{ji}(x)}(g)(\mathbf{w})) \\ &= (\Phi_j^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, 0_{g_{ji}(x)g}) + (\Phi_j^{-1*}\omega)(0_x, \mathbf{R}'_g(g_{ji}(x))g'_{ji}(x)\mathbf{v} + L'_{g_{ji}(x)}(g)\mathbf{w}) \\ &= \text{Ad}g^{-1}(\text{Ad}(g_{ji}(x))^{-1}\bar{\omega}_j(\mathbf{v}) + \theta_{MC}(g'_{ji}(x)\mathbf{v})) + \theta_{MC}(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Como

$$(\Phi_i^{-1*}\omega)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{Ad}(g^{-1})\bar{\omega}(\mathbf{v}) + \theta_{MC}(\mathbf{w})$$

Disto segue que

$$\bar{\omega}_i(\mathbf{v}) = \text{Ad}(g_{ji}(x)^{-1})\bar{\omega}_j(\mathbf{v}) + \theta_{MC}(g'_{ji}(x)\mathbf{v}) \quad (6.6)$$

Exemplo 6.4.1 Potencial Eletromagnético. *Considere um fibrado principal com grupo estrutural $U(1)$, isto é, o grupo dos números complexos z de norma unitária escritos como*

$$z = \exp ia.$$

Uma função de transição de $U_i \cap U_j$ em $U(1)$ é dada por

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \exp i\phi(x) \\ g_{ji}(x) &= \exp(-\phi(x)) \end{aligned}$$

onde $x \mapsto \phi(x)$ é uma função real em $U_i \cap U_j$.

Uma conexão em um gauge local é um $\bar{\omega}_i$ 1-forma em $U_i \subset X$ com valores na álgebra de Lie $\mathcal{U}(1)$ de $U(1)$.

Se escolhemos $\bar{\omega}_i(x) = -ie\mathbf{A}_i(x)$, a função real $\mathbf{A}_i(x)$ é o potencial eletromagnético. Segue de (6.6) que a lei dos potenciais sobre uma mudança de gauge é dada por

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{v}) = \mathbf{A}_j(\mathbf{v}) + \frac{1}{e}\phi'(x)\mathbf{v},$$

isto é, em coordenadas

$$\mathbf{A}_{i\mu}\mathbf{v}^\mu = \mathbf{A}_{j\mu}\mathbf{v}^\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\phi(x)\mathbf{v}^\mu.$$

Note que esta lei de transformação é válida em $U_i \cap U_j$, que é quando os potenciais são definidos em conjuntos abertos difeomorfos ao $\mathbb{R}^n$.

6.5 Derivada Covariante

Uma conexão em um fibrado principal (P, X, π, G) define uma derivada covariante de seções dos “bundles vetores”, chamados associados aos fibrados principais.

6.5.1 Definição

Um “*bundle vetor*” (E, X, π, F, G) com base X fibra típica F e grupo estrutural G é dito *associado ao fibrado principal* (P, X, π, G) pela representação ρ de G no espaço vetorial F se suas funções de transição são as imagens sobre ρ das funções de transição correspondentes ao fibrado principal P ; isto é; sejam as trivializações locais de P relativas a cobertura $\{U_i\}$ de X

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$$

$$\overset{\Delta}{\Phi}_{i,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow G, \quad x \in U_i.$$

Logo, as funções de transição de P são

$$g_{ji} : U_j \cap U_i \rightarrow G \quad \text{por} \quad x \mapsto g_{ji}(x) = \overset{\Delta}{\Phi}_{j,x} \circ \overset{\Delta^{-1}}{\Phi}_i \in G$$

as funções de transição de E são a mesma cobertura de X , e dadas por

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$$

$$\overset{\Delta}{\Phi}_{i,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow F, \quad x \in U_i$$

com

$$\overset{\Delta}{\Phi}_{j,x} \circ \overset{\Delta^{-1}}{\Phi}_i = \rho(g_{ji}(x)) \in \mathcal{L}(F, F)$$

isto é, se $\mathbf{V}_i$ e $\mathbf{V}_j$ são elementos de F que são imagens do mesmo $\mathbf{x}_x \in F_x$ pela trivialização Φ_i e Φ_j , respectivamente, então

$$\mathbf{V}_i = \rho(g_{ij}(x))\mathbf{V}_j$$

Esta definição pode ser facilmente estendida para definir fibrados associados, não necessariamente “bundles” vetores, a um fibrado principal; ρ é então uma realização de G sobre uma variedade diferenciável F . Reciprocamente, dado um fibrado $B = (B, X, \pi, G)$ de fibra típica $\mathbf{Y}$, pode-se construir um fibrado principal $P(B) \equiv (P(B), X, P(\pi), G)$ associado com B , como descrevemos a seguir.

Um mapa $u : Y \rightarrow B_x$ de uma fibra típica para uma fibra em x é dita ser *admissível* se há algum $g \in G$ tal que $\overset{\Delta}{\Phi}_{i,x} \circ u = g$. Esta definição é independente da escolha de U_i isto é, se $x \in U_i \cap U_j$ então

$$\overset{\Delta}{\Phi}_{j,x} \circ u = (\overset{\Delta}{\Phi}_{j,x} \circ \overset{\Delta^{-1}}{\Phi}_{i,x}) \circ (\overset{\Delta}{\Phi}_{i,x} \circ u) = g'g \in G,$$

para algum $g' \in G$.

Para construir o conjunto $P(B)$ cada fibra

$$P(B_x) = \{u : Y \rightarrow B_x \text{ tal que } u \text{ é admissível}\}$$

e cada conjunto

$$P(B) = \cup P(B_x).$$

Defina $P(\pi) : P(B) \rightarrow X$ por $P(\pi)(P(B)_x) = x$ e defina $P(\phi_i) : (P(\pi))^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ por $u \mapsto (P(\pi)(u), \overset{\Delta}{\phi}_{i,x} \circ u)$. Sendo $P(\phi_i)$ uma bijeção podemos ter $P(B)$ como uma única estrutura diferenciável com respeito a qual $P(\phi_i)$ é um difeomorfismo. A ação à direita de G sobre $P(B)$ pode ser definida por $(u, g) \mapsto y \circ g \equiv ug$. Então o mapa $u \circ g$ é outro mapa admissível como exigido.

Exemplo 6.5.1 Se $\pi : E \rightarrow X$ é um “bundle vetor” com uma fibra típica F e grupo $\rho(G) \subset GL(F)$, onde G é um grupo abstrato e ρ é uma representação fiel de G sobre F , então a construção acima pode ser ligeiramente modificada para dar um fibrado principal $P(E)$ do grupo abstrato G para o qual E é associado por uma representação ρ . A modificação consiste em definir $P(\phi_i)$ por $u \mapsto (P(\pi)(u), \rho^{-1}(\overset{\Delta}{\phi}_{i,x} \circ u))$ em vez de como foi feito acima. A ação à direita de G sobre $P(E)$ pode então ser definida por $ug \equiv u \circ \rho(g)$.

A definição de um “bundle” E associado a um fibrado principal P nos leva naturalmente ao conceito de transporte paralelo de um elemento de E ao longo de uma curva C de x_1 até x_2 , estando ambos em um subconjunto aberto $U_i \subset X$.

6.5.2 Transporte Paralelo

O *Transporte Paralelo* de $v_1 \in E, \pi_1(v_1) = x_1$ ao longo da curva C unindo x_1 e x_2 é um elemento $v_2 \in E, \pi_1(v_2) = x_2$, tal que, mantendo a variável x sobre $\overset{\Delta}{\Phi}_{i,x}$ e $\overset{\Delta}{\phi}_{i,x}$

$$\overset{\Delta}{\phi}_i(v_2) = \rho(\overset{\Delta}{\Phi}_i(p_2) \overset{\Delta}{\Phi}_i(p_1)^{-1}) \overset{\Delta}{\Phi}_i(v_1)$$

onde p_2 é o transporte paralelo de $p_1 \in P, \pi(p_1) = x_1$, ao longo da curva C de x_1 a x_2 .

Lema 6.5.1 *O elemento v_2 transportado paralelamente de v_1 ao longo de C não depende nem da escolha da trivialização nem da escolha de p_1*

Demonstração

(1) Sejam os conjuntos:

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\Phi}_i(p_1) &= g_{1,i} \in G & \overset{\Delta}{\Phi}_i(p_2) &= g_{2,i} \in G \\ \overset{\Delta}{\Phi}_i(v_1) &= \mathbf{V}_{1,i} & \overset{\Delta}{\Phi}_i(v_2) &= \mathbf{V}_{2,i} \end{aligned}$$

Como $g_{2,i} = g_{ij}(x_2)g_{2,j}$ e $g_{1,i}^{-1} = g_{1,j}^{-1}g_{ij}^{-1}(x_1)$ temos, de acordo com a definição de transporte paralelo,

$$\mathbf{V}_{2,i} = \rho(g_{ij}(x_2)g_{2,j}g_{1,j}^{-1}(x_1))\mathbf{V}_{1,i}$$

Como ρ é uma representação de G

$$\rho(g_{ij}^{-1}(x_2))\mathbf{V}_{2,i} = \rho(g_{2,j}g_{1,j}^{-1})\rho(g_{ij}^{-1}(x_1))\mathbf{V}_{1,i}$$

o que, de acordo com a definição de “bundles” associados implica em

$$\mathbf{V}_{2,j} = \rho(g_{2,j}g_{1,j}^{-1})\mathbf{V}_{1,j}$$

o que prova que a definição de transporte paralelo não depende da escolha da trivialização.

(2) Ele não depende também da escolha de p_1 , proveniente de $\pi(p_1) = x_1$, desde que o transporte paralelo em P comute com a ação $\tilde{R}_g$ de G sobre a fibra: o transporte paralelo

p'_2 de p'_1 é

$$p'_2 = \tilde{R}_h p_2 \text{ se } p'_1 = \tilde{R}_h p_1$$

com p_2 o transportado paralelamente de p_1 e, em uma trivialização dada, de acordo com a definição de $\tilde{R}_h$

$$g'_{2,i} = g_{2,i}h \quad \text{se} \quad g'_{1,i} = g_{1,i}h$$

donde

$$\rho(g'_{2,i}g'^{-1}_{1,i}) = \rho(g_{2,i}g^{-1}_{1,i}).$$

6.5.3 Derivada Covariante

Seja v uma seção diferenciável de um “bundle vetor” (E, X, π, F, G) associado a fibra principal (P, X, π, G) . Seja u um vetor em $x_0 \in X$ tangente a curva $C : t \mapsto C(t)$ sobre X com $C(0) = x_0$. A *derivada covariante* de v na **direção de u** e x_0 é por definição o vetor

$$(\nabla_u v)(x_0) \equiv (\nabla_u v)_{x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} (\tau_0^t v_t - v_0)/t$$

em que $\tau_0^t v_t$ é o vetor $v_t \equiv v_{x(t)}$ do campo vetorial v transportado paralelamente ao longo de C de $x(t)$ para x_0 , a única exigência sobre C sendo $\dot{x}(0) = u$.

Podemos definir a *Diferencial Absoluta* ∇ de v por

$$(\nabla_u v)_U(x_0) = (\nabla v)_U(u)(x_0) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\mu} u^\mu - \rho'(e) \alpha_\mu u^\mu \mathbf{V}_0 \equiv (\nabla_\mu v)_U u^\mu(x_0)$$

Se a conexão local na base é definida por

$$\phi' \circ \sigma_p(u) = (id, \alpha)$$

então

$$(\nabla_u v)_U = d\mathbf{V}/dt - \rho'(e) \alpha(u) \mathbf{V}$$

Se a conexão local na base é definida por

$$\bar{\omega} = s^* \omega$$

então

$$(\nabla_u v)_U = dV/dt + \rho'(e)\bar{\omega}(u)V$$

6.6 Curvatura

Definições

Seja (P, X, π, G) um fibrado principal com conexões H_p definidas pela 1-forma ω em P com valores em $\mathcal{L}$. Seja $h : T_p(P) \rightarrow H_p$ por $v \mapsto v_h$. A derivada covariante exterior $D\phi$ de uma r -forma $\phi = \phi^\alpha \otimes e_\alpha$ em P com valores no espaço vetorial com base (e_α) é definida pela relação

$$D\phi(v_1, \dots, v_{r+1}) = d\phi(hv_1, \dots, hv_{r+1})$$

em que $d\phi = (d\phi^\alpha) \otimes e_\alpha$.

A 2-forma $\Omega = D\omega$ com valores em $\mathcal{L}$ é chamado a *forma de curvatura* da conexão ω (forma de curvatura da conexão H_p).

Uma conexão ω é dita *plana* se $\Omega \equiv 0$.

Uma r -forma diferenciável α em um fibrado principal P é uma *forma horizontal* se $\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0$ quando pelo menos um dos vetores $v_1, \dots, v_r$ é vertical.

Uma r -forma diferenciável α em P com valores em um espaço vetorial E é dita ser do *tipo* (ρ, E) se

$$\tilde{R}_g^* \alpha = \rho(g^{-1})\alpha, \quad g \in G.$$

onde ρ é uma representação de G em E .

Dizemos também que α é *equivariante* sobre a ação à direita R_g pela representação ρ .

Além disso, se α é horizontal ela será também chamada de *tensorial do tipo* (ρ, E) .

Equação Estrutural de Cartan: Se ω é uma conexão em P e $D\omega = \Omega$ então

$$\Omega(u, v) = d\omega(u, v) + [\omega(u), \omega(v)]. \quad (6.7)$$

Demonstração

$\Omega(u_p, v_p) = d\omega(u_p - \text{ver } u_p, v_p - \text{ver } v_p)$. Estendendo $\text{ver } u_p$ e $\text{ver } v_p$ para os campos vetoriais de Killing $\text{ver } u$ e $\text{ver } v$ em uma vizinhança de p , obtém-se a equação (6.7).

1. Usando as propriedades de produto interior [8], temos

$$d\omega(\text{ver } u, \text{ver } v) = \mathcal{L}_{\text{ver } u}(\omega(\text{ver } v)) - \mathcal{L}_{\text{ver } v}(\omega(\text{ver } u)) - \omega[\text{ver } u, \text{ver } v].$$

desde que $\omega(\text{ver } v) = \widehat{\text{ver } v} = \text{constante}$, temos

$$\begin{aligned} d\omega(\text{ver } u, \text{ver } v) &= -\omega([\text{ver } u, \text{ver } v]) = -[\widehat{\text{ver } u}, \widehat{\text{ver } v}] \\ &= -[\widehat{\text{ver } u}, \widehat{\text{ver } v}] = -[\omega(\text{ver } u), \omega(\text{ver } v)]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

2. Usando novamente as propriedades de produto interior e $\omega(\text{hor } v) = 0$ temos que $d\omega(\text{ver } u, \text{hor } v) = -\omega[\text{ver } u, \text{hor } v]$. Note que $[\text{ver } u, \text{hor } v]$ é horizontal desde que

$$[\text{ver } u, \text{hor } v] = \mathcal{L}_{\text{ver } u} \text{hor } v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tilde{R}'_{g(t)-1} \text{hor } v - \text{hor } v)$$

e

$$\tilde{R}'_{g(t)-1} \text{hor } v$$

é horizontal. Donde $d\omega(\text{ver } u, \text{hor } v) = 0$.

- 3.

$$d\omega(u, \text{ver } v) = d\omega(\text{ver } u, \text{ver } v) + d\omega(\text{hor } u, \text{ver } v) \quad (6.9)$$

$$= -[\omega(\text{ver } u), \omega(\text{ver } v)]. \quad (6.10)$$

Combinando (1) e (3) temos a equação estrutural.

6.6.1 Curvatura Local na Variedade Base

Em uma trivialização local (U_i, ϕ_i) a 2-forma Ω em $\pi^{-1}(U_i)$ é representada pela 2-forma $\bar{\Omega}_i$ em U_i , definida através da “cross section” s_i por

$$\bar{\Omega}_i = s_i^* \Omega.$$

Resulta da equação estrutural de Cartan e comutatividade do pull back com d que

$$\bar{\Omega}_i = d\bar{\omega}_i + \frac{1}{2}[\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_i].$$

Nas teorias de Yang-Mills uma 2-forma $\bar{\Omega}_i$ é chamada um *potencial de campo* no gauge ϕ_i .

Identidades de Bianchi: Em termos das bases (e_α) de $\mathcal{L}$ a equação estrutural de Cartan (6.7) torna-se

$$\Omega^\alpha = d\omega^\alpha + \frac{1}{2}C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma. \quad (6.11)$$

Diferenciando temos

$$d\Omega^\alpha = \frac{1}{2}C_{\beta\gamma}^\alpha d\omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \frac{1}{2}C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge d\omega^\gamma. \quad (6.12)$$

Então, como ω desaparece nos vetores horizontais

$$[D\Omega^\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})] = d\Omega^\alpha(h\mathbf{v}, h\mathbf{u}, h\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}. \quad (6.13)$$

Conseqüentemente, temos as Identidades de Bianchi

$$D\Omega = 0.$$

6.7 Conexões Lineares

Uma conexão linear sobre uma variedade X é uma conexão no fibrado principal $F(X)$ de “frames” em X .

Seja $\Phi_p : T_x(X^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p = (x, \rho_x)$ os mapeamentos que mapeiam² um vetor em $T_x(X^n)$ dentro de seus componentes com respeito ao “frame” ρ_x . Em outras palavras, se $\rho_x = (e_i)$ então $\Phi_p \mathbf{u} = (\Theta^i(\mathbf{u}))$ onde (Θ^i) é a base dual para (e_i) .

A 1-forma Θ em $F(X)$ com valor no $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\Theta_p(\mathbf{v}) = \Phi_p \pi' \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in T_p F(X)$$

é chamada a *forma canônica* de X .

A 2-forma $\Xi = D\Theta$ é chamada de torção da conexão linear em X .

²Se o “frame” ρ_x é considerado um mapeamento do $\mathbb{R}^n$ em $T_x(X^n)$, então $\Phi_p = \rho^{-1}x$.

Capítulo 7

Teoria de Utiyama e Kibble

7.1 Introdução

A estrutura de gauge da teoria da gravitação foi pela primeira vez aventada por Elie Cartan [1] nos anos vinte, mas permaneceu por muito tempo, como que desconhecida dos físicos.

A teoria de Utiyama e Kibble [17, 18, 22] desenvolvida no início dos anos sessenta, foi uma notável tentativa de reformular a gravitação *a la* Einstein, dando-lhe uma nova formulação, equivalente àquela de Cartan. Teve por contribuição maior a introdução na Teoria da Gravitação do uso da Tétrada (Vierbien) [23], que é uma extensão do conceito anteriormente desenvolvido por Cartan [6.1].

Este formalismo é necessário e essencial para introduzir campos de spinors na variedade. Além do sistema de coordenadas, estabelece-se quatro vetores de referência em cada ponto do espaço-tempo V^a (uma “tétrada”) cujos componentes, são:

$$V_a^\mu \quad (a = 1 \dots 4) \tag{7.1}$$

tal que

$$V_a^\mu V_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}; \tag{7.2}$$

η_{ab} é a métrica plana da relatividade especial. Os índices latinos simplesmente enumeram os quatro vetores. A equação (7.2) é a condição de ortonormalidade; os quatro vetores são mutuamente ortogonais e unitários, três espaciais e um temporal.

Seja V_μ^a o inverso da matrix V_a^μ :

$$V_a^\mu V_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad (7.3)$$

$$V_a^\mu V_\mu^a = \delta_a^a \quad (7.4)$$

Calculando-se o determinante de ambos os membros da equação (7.2), teremos:

$$\begin{aligned} \det(V_a^\mu V_b^\nu g_{\mu\nu}) &= \det \eta_{ab} \\ \Rightarrow \det(V_a^\mu) \det(V_b^\nu) \det g_{\mu\nu} &= -1 \\ \Rightarrow \det(V_\nu^b) g &= -\det V_\mu^a, \end{aligned}$$

em que $g = \det g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \det(V_\mu^a) \det(V_b^\nu) g &= -(\det V_\mu^a)^2 \\ \Rightarrow \det(V_\mu^a) &= \mathcal{V} = -\sqrt{g} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Pela equação (7.5) vemos que a matriz não é singular.

Pode-se especificar qualquer vetor dando suas componentes com respeito ao sistema de coordenadas, ou alternativamente, pode-se especificá-los pelo conjunto dos quatro invariantes que são as projeções do vetor nos quatro vetores de referência da tétrada:

$$A^a = V_\mu^a A^\mu, A_a = V_a^\mu A_\mu, \} \quad (7.6)$$

Pode-se usar, como é sabido, $g_{\mu\nu}$ ou $g^{\mu\nu}$ para obter índices covariantes ou contravariantes (gregos) respectivamente, e similarmente η_{ab} ou η^{ab} para índices latinos. As matrizes V_a^μ e V_μ^a das componentes da tétrada são usadas para converter índices de um tipo a outro.

As componentes da tétrada são arbitrárias mas devem satisfazer (7.2). Também exige-se que $V_a^\mu(x)$ seja contínuo e (ao menos três vezes) funções diferenciáveis das coordenadas. Suponha que mudamos de um sistema tétrada V_a^μ para outro, $\bar{V}_a^\mu$, então os vetores da nova tétrada podem ser escritos como combinação linear dos anteriores

$$\bar{V}_a^\mu = \Lambda_a^b V_b^\mu. \quad (7.7)$$

Desde que as novas componentes também satisfaçam (7.2), obtem-se o resultado que a matriz Λ de (7.7) deve satisfazer

$$\Lambda_a^b \eta_{bc} \Lambda_d^c = \eta_{ad}$$

isto é, é uma *matriz de Lorentz*. Dessa forma, no contexto do espaço-tempo curvo podemos reinterpretar o grupo de Lorentz como o grupo de rotações da tétrada.

7.2 Teoria de Utiyama e Kibble

Considere um fibrado principal P com o grupo estrutural $SO(2)$, sobre o espaço tempo E (Minkowski ou Riemann). Suponha que há uma conexão em P caracterizada pela conexão 1-forma ω . Considere a representação (homomorfismo) $\sigma : SO(2) \rightarrow U(1)$ dada por

$$\sigma \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = e^{i\alpha} \quad (7.8)$$

Para construir o fibrado associado [6.5] M com fibra C definida por σ e usar formas reais, vamos introduzir A e F , como:

$$iA = \Gamma = e^*(\sigma' \circ \omega); \quad iF = R = e^*(\sigma' \circ \Omega)$$

para quaisquer “cross sections” $e \in C(P)$.

Se

$$S : E \rightarrow U(1), \quad S(p) = e^{ix(p)},$$

descreve uma mudança da “cross section” local $e \in C(P)$ para $\bar{e}$, então $f \in C(M)$ transforma-se como

$$\bar{f}(P) = e^{-ix(p)} f(p),$$

pois,

$$\begin{aligned} F(P) &= e^{ix(P)} \bar{f}(P) \\ \Rightarrow \bar{e}^{ix(p)} f(p) &= \bar{e}^{ix(p)} e^{ix(p)} \bar{f}(p) \end{aligned}$$

As leis de transformação para A e F seguem das definições de A e F , como sendo:

$$\bar{A} = A + dx; \quad \bar{F} = F \quad (7.9)$$

Observe que se interpretarmos f como um campo descrevendo a carga das partículas, A como o potencial eletromagnético e F como o campo eletromagnético, então (7.9) é a lei de transformação de gauge. O grupo estrutural sendo abeliano, a relação entre a conexão e curvatura e identidades de Bianchi tornam-se respectivamente,

$$F = dA \quad \text{e} \quad dF = 0.$$

A derivada covariante no “bundle” (complexo) associado a P por σ pode ser escrita como

$$\nabla_k f = (\partial_k - iA_k)f$$

e esta fórmula pode ser usada como uma base para introduzir interações entre partículas carregadas e o campo eletromagnético. A representação $\sigma_n : SO(2) \rightarrow U(1)$ da forma

$$\sigma_n \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = e^{in\alpha} \quad (7.10)$$

nos levará a outro “bundle” associado. Suas “cross sections” serão interpretadas como campos descrevendo partículas cuja carga é n vezes a da partículas

descritas pelo campo f . A relação entre as transformações de gauge de ambos os tipos, seria então: o grupo estrutural $SO(2)$ é o grupo das transformações de gauge de primeiro tipo, enquanto o grupo de transformações de gauge de segundo tipo atua, da mesma maneira, no conjunto de todas as “cross sections” de P .

Segundo Utiyama [22] pode-se considerar campos mais gerais, admitindo-se transformações de gauge correspondentes a mudanças das “cross sections” no fibrado principal com grupo estrutural G .

Kibble [17] ao afirmar que a teoria da relatividade geral possa ser obtida desta maneira, tomando G como o grupo de Poincaré estava, na verdade, lançando as bases das modernas teorias de supergravidade na variedade de grupo.

Nestas, todas as simetrias locais de uma dada teoria de gauge são transformações gerais de coordenadas em um espaço de dimensão maior. Este espaço maior é a variedade de grupo. Esta variedade de grupo tem dois tipos distintos de simetria: simetria locais, que são as simetrias internas quais as simetrias locais de Lorentz e de Yang-Mills, e as simetrias no espaço-tempo, tais como as transformações gerais de coordenadas e as invariâncias de supersimetria. As simetrias internas formam um grupo H . O grupo total G (variedade de grupo), a partir do qual as teorias supersimétricas (e.g. supergravidade e super-Yang-Mills) [capítulo 8] são derivadas é em geral maior que H . Diz-se que H é um subgrupo de G . A escolha de G e H seria, no caso da gravitação *a la* Einstein, segundo o próprio Kibble, a de G como sendo o grupo de Poincaré e H o grupo de Lorentz. Em outros casos a escolha, em geral, pode não ser tão óbvia. Algumas vezes vários candidatos a grupos de uma dada teoria aparecem. Por exemplo, na teoria de Kaluza-Klein [24], pode-se tomar G como sendo o grupo de Poincaré em 4-dimensões. Algumas vezes ainda o grupo G pode nos levar a diferentes teorias, dependendo da escolha do subgrupo H e da dimensionalidade do espaço-tempo associado. Por exemplo, no caso de teorias supersimétricas, o grupo superconforme $SU(2, 2/1)$ produz

o que se chama supergravidade conforme, se decide-se em ter o espaço-tempo final associado como sendo um espaço em 4-dimensões, $d = 4$, mas para $d = 5$ produz supergravidade não conforme.

A contribuição de Utiyama e Kibble foi notável por antecipar um procedimento que pode ser encarado como introdutório às teorias supersimétricas construídas em variedades de grupo, como no exemplo a ser estudado na seqüência [capítulo 8].



Capítulo 8

Teoria Supersimétrica de Yang-Mills: uma Interpretação em Fibrados

8.1 Generalizações da Teoria de Gravitação de Einstein

Discutiremos neste capítulo a teoria da relatividade geral e suas generalizações de acordo com [19, 20, 21].

As tentativas de generalizações da teoria de gravitação de Einstein começaram desde o seu aparecimento. O sucesso de Einstein em geometrizar a interação gravitacional levaram à tentativas de geometrizar outras interações já conhecidas, como por exemplo, o eletromagnetismo. Isto era perfeitamente concebível, pois muito antes da relatividade geral ter sido idealizada e os efeitos físicos do espaço não-euclidiano serem discutidos, Clifford e outros cientistas hipotetizaram conexões entre os efeitos eletromagnéticos e a geometria do mundo real [18].

Portanto, imediatamente após os artigos fundamentais de Einstein de 1916-1917, Hermann Weyl (1885-1955) sugeriu uma generalização da Geo-

metria Riemanniana que permitiu introduzir um campo geométrico adicional que poderia ser interpretado como o eletromagnetismo [15]. T. Kaluza estudou as geometrias riemannianas do espaço em 5 dimensões e E. Cartan viu a possibilidade de generalizar espaço riemanniano 4-dimensional para uma geometria com torção [1].

Einstein mesmo passou os últimos 30 anos de sua vida procurando uma maneira de geometrizar a gravitação e o eletromagnetismo em uma teoria unificada.

Nos anos vinte, o desenvolvimento de uma teoria unificada parecia necessário e um dos aspectos mais promissores da física teórica. Esperava-se que estes estudos revelassem novas propriedades do espaço-tempo e, mais cedo ou mais tarde poderiam levar a inovações tecnológicas.

Todavia, com o tempo estas esperanças desapareceram, mas neste ínterim resultados importantes foram obtidos na teoria quântica, e como resultado destes desenvolvimentos uma variedade de aplicações tecnológicas apareceram rapidamente na eletrônica, engenharia atômica, etc.

Nos anos setenta, a situação começou a mudar rapidamente e novamente o interesse em uma teoria unificada que combinaria todas as interações conhecidas reapareceram. Contudo, o que a princípio era a unificação entre a interação gravitacional e eletromagnética, em virtude da descoberta das interações fraca e forte acabou-se por acrescentar ambas, na busca por uma interação que descrevesse em uma teoria unificada as quatro interações básicas. Durante este período muitas informações novas se acumularam sobre o universo, portanto essas idéias antigas foram revigoradas em nova base.

Nesta nova era, muitos artigos antigos e esquecidos foram redescobertos e as idéias, técnicas, leis e regularidades que eles continham foram usadas no desenvolvimento de teorias mais modernas.

As generalizações da teoria de Einstein podem ser divididas em quatro grupos de acordo com os conceitos básicos de geometria, tais como conexões, métricas e dimensionalidade, que são:



1. Teorias baseadas em variedades de quatro dimensões descritas pela geometria diferencial mais geral do que a geometria riemanniana usada na teoria da relatividade geral (e.g. teoria da gravitação *a la* Cartan, com a introdução da torção [1]);
2. Teorias que usam fatores adicionais, tais como um campo escalar, definições de métricas diferentes, etc. (e.g. a teoria de Brans e Dicke que considera um campo escalar φ ao lado do campo tensorial do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, dando a teoria além das 10 equações de Einstein, uma outra que seria a equação de onda do campo φ [18];
3. Teorias baseadas em diferentes conceitos do quadro físico do universo (e.g. teoria da gravitação de ação à distância, que é diferente de todas as outras físicas porque é baseada no conceito de ação à distância que se opõe ao conceito geralmente aceito de campo. É o *approach* menos aceito e que oferece mais problemas [25].
4. Teorias em espaços com mais de quatro dimensões (e.g. as modernas teorias de supergravidade que são uma extensão dos itens 1 e 2 [6].

Estas quatro classes podem ser suplementadas por outros grupos de teorias, como por exemplo combinações dessas descritas acima.

8.1.1 Supersimetria e Supergravidade

Um crescente número de teóricos estão fascinados com a idéia de Grande Unificação, como sendo a teoria para unificar as interações fraca e forte, eletromagnética e gravitacional sobre a base da simetria local. O princípio da simetria local permite ao observador olhar diferentemente os campos físicos. Assume-se que as propriedades de grupo conhecidas (simetrias) tais como as transformações de Lorentz (ou Poincaré), transformações de gauge em eletrodinâmica, etc., apenas acontecem localmente, isto é em cada ponto do

espaço-tempo separadamente. Direções, gauges e medidas padrão são rigorosamente individuais para cada ponto. Quando movem-se de um ponto para outro elas são comparadas. As noções necessárias para esta comparação e que a descrevem na linguagem de cada grupo são chamadas campo de gauge. Por exemplo, um campo gravitacional é visto como gauge com relação ao grupo de Poincaré, o campo eletromagnético como gauge com relação a transformação de gauge eletromagnética, etc. Os grupos de simetria $SU(3)$ e $SU(2)$ são introduzidos em uma teoria que descreve as interações fortes e fracas e campos de gauge correspondentes são determinados como os transmissores dessa interação. Na Teoria da Grande Unificação procura-se uma unificação local de todos os grupos de simetria conhecidos. As variantes iniciais da Grande Teoria da Unificação que tem sido sugeridas levam a conclusão que em baixas energias três tipos de interação (fraca, eletromagnética e forte) são manifestadas em diferentes direções. Mas em energias de aproximadamente $10^{15} - 10^{16} GeV$, entretanto, nenhuma distinção pode ser feita entre elas, isto é elas são a mesma interação. Por volta de $10^{19} GeV$ a interação gravitacional é esperada seguir o mesmo caminho. Isto significa que por volta desta variação, a teoria que unifica todos os quatro tipos de interação torne-se válida.

A teoria de supergravidade é baseada em uma supersimetria que unifica a descrição de bósons e fermions (isto é, partículas com spins inteiros e semi-inteiros). Supersimetria significa que a contribuição dos campos de bósons e fermions para todo o processo são simétricas, podendo ser associados. Supersimetria Local significa que isto pode ser feito diferentemente em diferentes pontos no espaço; então a interação gravitacional pode ser incluída de um modo natural dentro da teoria.

Alguns resultados de teorias supersimétricas mostram que este caminho ajuda a evitar dificuldades de divergência, que são problemas com respeito a não-renormalização da gravidade quântica [26]. Alguns destes resultados são, sem dúvida, as teorias supersimétricas construídas em variedades de grupo [27, 30]. Um exemplo é dado a seguir de acordo com recentes resultados



obtidos em [27], que são reinterpretados na linguagem dos fibrados.

8.2 Teoria Supersimétrica de Yang-Mills

Propõem-se, então, uma conexão entre uma teoria de supergravidade e os campos de gauge [27].

A teoria de supergravidade $N=2$, $d=5$, é fatorizada com respeito ao grupo $H' = SO(1,4) \otimes U(1)$, já que a curvatura não tem componentes ao longo de ω^{ab1} e B^2 [30].

Isto significa que:

- ω^{ab} é uma conexão em fibrado principal com base dada por $SU(2,2/1)/SO(1,4)$, com o grupo de gauge $H = SO(1,4)$ como a fibra;
- B também é uma conexão em um fibrado principal. A base é $SU(2,2/1)/U(1)$ com o grupo de gauge $U(1)$ como a fibra.

Existindo o invariante de gauge na teoria de supergravidade sobre H' , o grupo $SU(2,2/1)$ adquire a estrutura de fibrados com uma *fibra* H' , representada por $SO(1,4) \otimes U(1)$ e *espaço base* G/H' .

A teoria estendida de gravidade *a la* Cartan-Einstein, proposta em [27] tem a mesma estrutura da teoria da supergravidade, entretanto, é enriquecida com um grupo geral de gauge $\mathcal{G}$.

Esta condição é assegurada pela invariância do grupo de gauge com respeito a $\mathcal{G} \otimes SO(1,4) \otimes U(1)$, que é uma consequência das condições de integrabilidade das derivadas covariantes exteriores de Yang-Mills presentes no grupo $\mathcal{G}$.

Usando o sistema de curvaturas proposto em [27], encontramos os parâmetros através das condições de integrabilidade. Tais condições são

¹ ω^{ab} = conexão de Cartan

² B = campo eletromagnético

também chamadas identidades de Bianchi para os campos λ_a (campo spinorial, relacionado a equação de Dirac ($\Gamma^m \Lambda_{mA} = 0$), A (campo de gauge, relacionado ao potencial de Yang-Mills) e σ (campo escalar), ou seja:

$$DDA = DD\lambda_A = DD\sigma = 0 \quad (8.1)$$

Encontramos então as equações para os parâmetros livres. Resolvendo o sistema para tais equações temos que:

$$n = 1; k = 1/2; p = d = 1; l = 1/2; t = z = -1/2; g = h = -1/2 \quad (8.2)$$

A solução do sistema, dada pelas equações 8.2 indicam que as hipóteses de curvatura estavam corretas. Pela solução das identidades de Bianchi, asseguramos a invariância do grupo de gauge e portanto a teoria proposta tem uma estrutura em fibrados, onde $H'' = \mathcal{G} \otimes SO(1,4) \otimes U(1)$ é a *fibra* e G/H'' o *espaço base*.

Capítulo 9

Conclusão

1. No capítulo 5, seção 5.7, ao estudar-se brevemente as conexões lineares, também comumente chamadas de conexões de Cartan, introduzimos a 1-forma Θ no fibrado principal de frames $P(E)$, chamada também de 1-forma canônica de E – E é uma variedade n -dimensional, e a torção, como uma 2-forma $\Xi = D\Theta$.

A asserção feita na introdução de que o “frame bundle” $(P(E), E, \pi)$ é um “bundle produto” na física de Galileu e Newton, e não o é na relatividade geral, fica agora mais clara e precisa: no mundo clássico assim como na relatividade especial os espaços-tempo eram planos (Euclidiano E^3 , ou de Minkovski M^4) e portanto todo o recobrimento das variedades E^3 ou M^4 pode ser feito por planos tangentes, e pela definição de conexões admissíveis que definem o transporte entre as “cross sections”. Na relatividade geral cuja arena onde se desenvolvem os fenomenos físicos é curva – variedade riemanniana – este não é bem o caso.

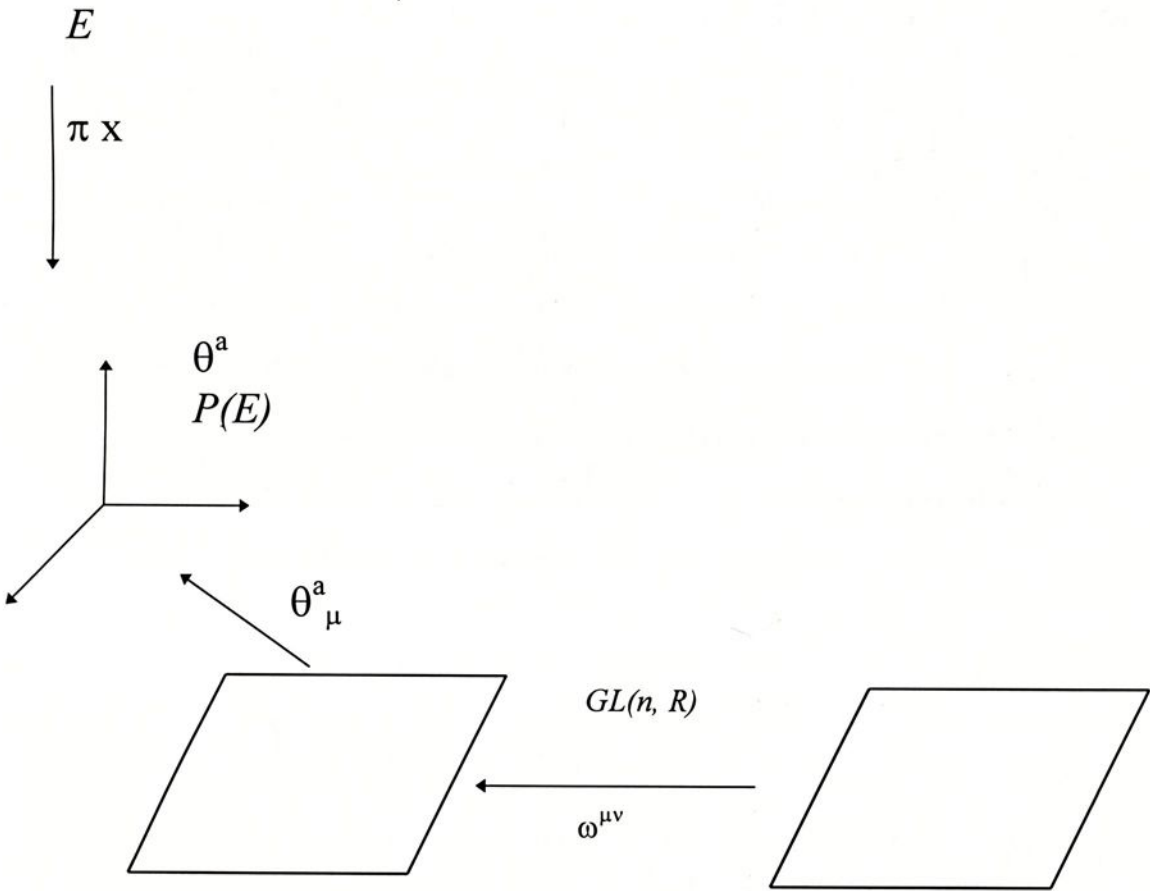
A introdução da tétroda [7.1] que se mantém invariante por mudanças de coordenadas no plano tangente, e portanto não “afetada” por transformações do tipo $GL(n)$ e da 1-forma conexão ω^a , permite-nos ultrapassar esta dificuldade; define-se então uma forma completa de paralelismo em $P(E)$, o que em outras palavras significa dizer que o “bundle” $(P(P(E)), P(E), \pi)$ é

um “bundle produto”.

$$\begin{array}{ccc} P(E) & \xrightarrow{\text{t\'etra}da} & P(P(E)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{A}_\mu & \xrightarrow{V_a^\mu} & \vec{A}_a \end{array}$$

As 1-formas ω^a s\~ao conex\~oes nos fibrados dos referenciais ortonormais m\~oveis, e como consequ\~encia estabelecem-se as identidades de Bianchi.

Dessa forma, temos:



$$\left\{ \begin{array}{ll} \Theta = \Theta_\mu^a dx^\mu; & \Theta(x) = \pi^{-1}(\pi x) \\ \Theta \text{ \textit{\'e} definida em } P(E)[\mathbb{R}^n] & \\ \omega^{\mu\nu}(\text{nos planos tangentes}) = & \Gamma_\lambda^{\mu\nu} dx^\lambda \\ & (\text{conex\~ao})[\mathbb{R}^{n^2}] \end{array} \right.$$

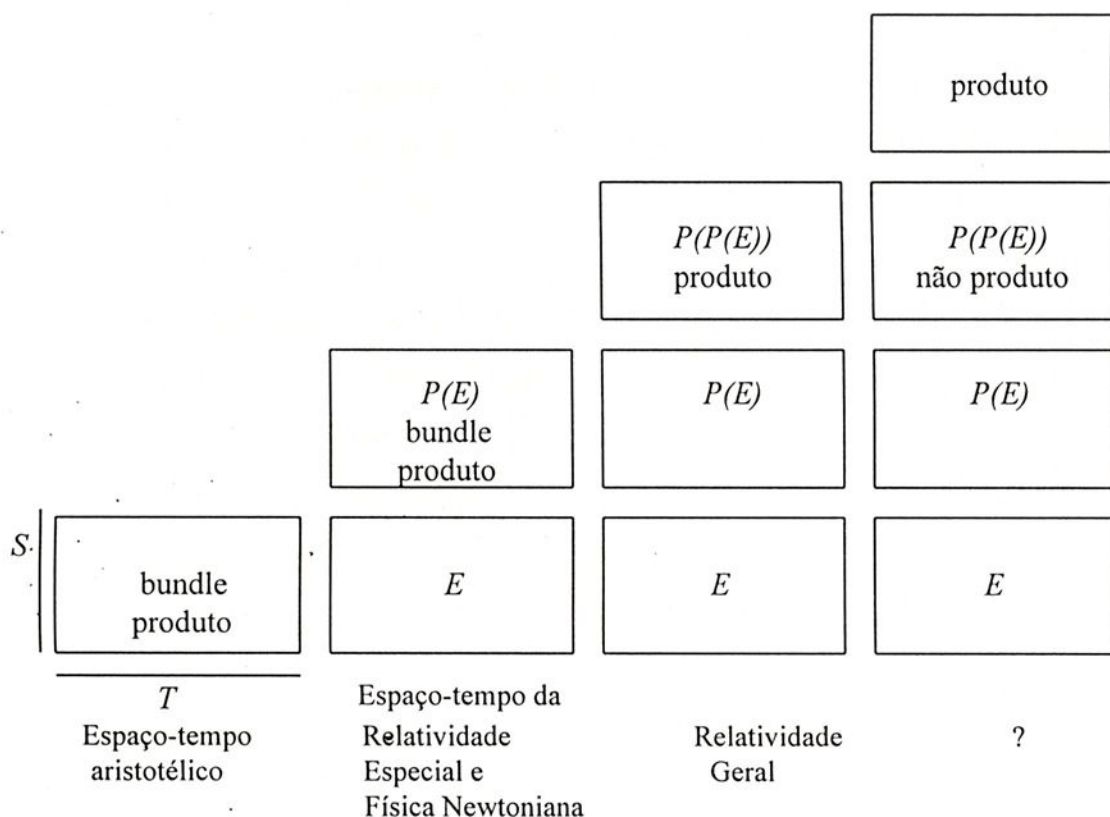


Figura 9.1: Diagrama de Trautman

Aumento gradativo de complexidade na estrutura do espaço tempo.

Mas, como:

$$\begin{cases} \Theta(x) = 0 & \Longleftrightarrow \pi(x) = 0 \\ \omega(x) = 0 & \Longleftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \Theta_r : H_r \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega_r : V_r \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\omega_r, \Theta_r)$ é uma base de $\tau_r^*(P(E))$.

Portanto, é definido um paralelismo completo em $P(E)$, ou seja, o “bundle” $P(P(E))$ é um “*bundle produto*”. Trautman e Ivanenko chamam ao procedimento acima de 2ª relativização. O “diagrama de Trautman”, Figura 9.1, ilustra melhor o que foi dito;

2. A forma como a presente dissertação foi apresentada, bem como a abordagem aos problemas tratados foi, como mencionado na introdução, de certa forma inspirados pelos trabalhos importantíssimos de A. Trautman, de Varsóvia e por R. Kerner, da Universidade de Paris VI. Como discutido na dissertação, é possível discernir que a nossa visão de geometria do espaço-tempo evoluiu desde a Grécia antiga, e pode ser descrita por fibrações cada vez mais complexas. A relatividade geral de Einstein, ou sua reinterpretação devido a Utiyama e Kibble, por exemplo, introduz as conexões nos “frame bundles” ortogonais ao longo do espaço-tempo V_4 .

Os campos físicos em geral são definidos, e assumem valores, em espaços que possuem uma topologia em geral um pouco mais complexa do que aquela simples do $\mathbb{R}^n$, e admitem grupos de automorfismos que chamamos de gauge. Por exemplo, todos os campos carregados eletricamente possuem simetria sob a ação do grupo $U(1)$. O fibrado correspondente é portanto $(P(V_4), V_4, S^1) - S^1$ é o círculo unitário. As interações fortes entre os núcleos (prótons e neutrons), implica no aparecimento de uma outra simetria: se as interações fracas e eletromagnéticas podem ser negligenciadas, todas as combinações de estados quânticos descrevem o próton ou o neutron como equivalentes (que é uma condição de preservar a norma no espaço de Hilbert), o que implica na simetria unitária $SU(2)$ e a teoria de campo correspondente é descrita pelo fibrado $(P(V_4), V_4, SU(2))$; a conexão nesse fibrado identificável como sendo o campo de Yang-Mills. Sendo estes dois fenômenos completamente independentes, a descrição que se impõe é dada em termos do fibrado $(P(V_4), V_4, SU(2) \otimes U(1))$. Neste caso nem a conexão, nem a curvatura possuem componentes mistas, e portanto as interações não terão nenhuma influência sobre a outra.

Caso, por exemplo, aqueles dois tipos de interação tenham uma fonte comum e não possam ser consideradas totalmente independentes deve-se examinar as teorias de gauge sobre os fibrados $P_1(P(V_4, U_1), P(V_4, U_1)SU(2))$ e $P_2(P(V_4, SU(2))), P(V_4, SU(2)), U(1))$. As conexões e as curvaturas nesses



fibrados , os quais chamam-se também na literatura de fibrados duplos, descrevem não apenas os dois fenômenos, mas também a influência de um sobre outro.

Um exemplo deste último caso de fibrações duplas, concernente a construção de uma teoria supersimétrica de Yang-Mills em 5 dimensões [27, 28, 29], que foi também chamada de teoria estendida de gravitação *a la* Einstein-Cartan. Neste trabalho o grupo estrutural, ou a variedade de grupo que comporta toda a teoria construída, é o grupo $G = \mathcal{G} \otimes SU(2, 2/1)$, sendo $\mathcal{G}$ o grupo de gauge associado às curvaturas internas de Yang-Mills e $SU(2, 2/1)$ a variedade de grupo associada à teoria de supergravidade. A teoria possui como fibra o grupo $H'' = \mathcal{G} \otimes SO(1, 4) \otimes U(1) - SO(1, 4)$ é o grupo de Lorentz em 5 dimensões e $U(1)$ o grupo de gauge associado ao eletromagnetismo – que representa as simetrias internas da teoria. Esta admite ainda o espaço base G/H'' , chamado em teorias supersimétricas de superespaços, e tem consequentemente uma representação em fibrados identificada pelo “bundle produto” $(G, G/H'', H'')$.

É interessante notar que as curvaturas associadas ao campo de gauge de Yang-Mills [27], identificadas abaixo,

$$F = dA = F_{ab}V^a \wedge V^b + ic\bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_m \psi_A \wedge V^m + \\ + id\epsilon_{AB}\bar{\lambda}_A \wedge \Gamma_m \psi_B \wedge V^m + if\sigma \wedge \bar{\psi}_A \wedge \psi_A \quad (9.1)$$

$$D\lambda_A = \Lambda_{mA} \wedge V^m + igF_{ab} \wedge \Sigma^{ab} \psi_A + h\phi_a \wedge \Gamma^a \psi_A + \\ + itF_{ab} \wedge \epsilon_{AB} \Sigma^{ab} \psi_B + Z\phi_a \wedge \Gamma^a \epsilon_{AB} \psi_B \quad (9.2)$$

$$D\sigma = \phi_a \wedge V^a + ik\bar{\lambda}_A \wedge \psi_A + il\epsilon_{AB}\bar{\lambda}_A \wedge \psi_B \quad (9.3)$$

$$DF^{ab} = G_m^{ab} \wedge V^m + in\bar{\Lambda}_A^{[a\wedge\Gamma^b]} \psi_A + ip\epsilon_{AB}\bar{\Lambda}_A^{[a\wedge\Gamma^b]} \psi_B \quad (9.4)$$

onde $\phi_a = \partial_a \sigma$ e $G_m^{ab} = \partial_m F^{ab}$, e aquelas da supergravidade [30] identificadas a seguir

$$R^a = DV^a - \frac{i}{2} \bar{\psi}_A \wedge \Gamma^a \psi_A$$

$$\rho_A = D\psi_A$$

possuem termos em comum, os spinors ψ , que são os geradores de álgebras de supersimetria, e portanto indicam que as interações têm algo em comum que é a transformação supersimétrica entre bósons e fermions.

Espero que esta dissertação tenha provido o leitor de elementos que motivem-no a um estudo ulterior – mais aprofundado – sobre fibrados, quer em seus aspectos teóricos quer em aplicações à física.

Bibliografia

- [1] Cartan, E., Ann. Ec. Norm.Super; 40(1923)325:41(1924)1. Reprinted in Oeuvres Completes. Vol.3. pag 569, *Gauthier-Villars*, paris,1955.
- [2] Whitney, H., Topological properties of differentiable manifolds , *Bull. Am. Math. Soc.*, **43**: 785 (1937).
- [3] Chern, S.S., Some New Viewpoints in diferencial geometry in the large, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 1-30.
- [4] Chern, S. S., General Relativity and Differential Geometry, in Harry Woolf (ed.), Some Strangeness in the Proportion: A centennial Symposium to Celebrate the Achievements of Albert Einstein, Addison-Wesley, 1980.
- [5] Milnor, J., Construction of Universal bundles: I, *Ann. Math.*, (2) 63: 272-284(1956).
- [6] Trautman, A., Fibre Bundles Associated with Space-Time, *Reports on Mathematical Physics*,(1)**1**: 29 (1970).
- [7] Kerner, R., Fibrés Multiples it Leurs Applications en Physique, Proceedings of *Journées Relativistes*, Torino, Pitagora Editrice, 190-204.
- [8] Choquet-Bruhat, Y. and Dewitt-Morette, C., Analysis, manifolds and physics, *North-Holland*, (1991).
- [9] Herstein, I., Topics in Algebra, *Blaisdell Publishing Company*, 1964.
- [10] Monteiro, L. H.J., Elementos de Algebra, *Ed. Ao Livro Técnico*, RJ, 1969.



- [11] Lipschutz, S., Topologia Geral, Coleção Schaum, *Ed. Mc Graw-Hill*, 1973.
- [12] Nakahara, M. and Hilger, A., Geometry, Topology and Physics, *Institute of Physics publishing*, Bristol and Philadelphia, 1995.
- [13] Husemoller, D., Fibre Bundles, *Springer-Verlag*, USA, second edition, 1981.
- [14] Hessenberg, G., Math. Ann. 78(1916)187.
- [15] Weyl, H. Z. Phy. 56(1929)330.
- [16] Schouten, J., Ricci-Calculus, Springer, Berlin, 1954.
- [17] Kibble, T.W.B., Lorentz Invariance and the gravitational field, J. Math. Phys. 2(1961),212-221.
- [18] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. Gravitation, *W.H. Freeman*, San Francisco, 1973.
- [19] Bergmann, P.G., Introduction to the Theory of Relativity, *Dover*, 1981.
- [20] Vladimirov, Yu.; Mitskievich, N.; Horsky, J., Space Time Gravitation, *Mir Publishers*, 1981.
- [21] Weinberg, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, *John Wiley & Sons*, 1972.
- [22] Utiyama, R., Phys. Rev. 101(1956), 1957.
- [23] Lord, E. A., Tensors Relativity and cosmology, *Tata MacGraw-Hill Publishing Co. Ltd.*, New Delhi, 1976.
- [24] Kaluza, T., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1921), 966.
- [25] Carelli, A., Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relatività. Negli Sviluppi del Pensiero Scientifico di Albert Einstein, *Géunti Barbéra, Firenze*, 1979.



- [26] Nieuwenhuizen, P., Van Phys. Rep 68(1981)189
- [27] Borges, M.F., Bianchi identities for an $N = 2$, $d = 5$ supersymmetric Yang-Mills theory on the group manifold, in *Journal of Geometry and Physics*, Elsevier, Amsterdam, Holland.,(2)**20**: 142 (1996).
- [28] Borges, M.F. and Masalskiene, S.R.M., A Fibre Bundles Approach to Extended Einstein-Cartan Gravity Theory, XIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Goiânia, 1996.
- [29] Borges, M.F.; Masalskiene, S.R.M; Seixas, W., Bundles in a Supersymmetric Yang-Mills Theory, XVII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Serra Negra, 1996.
- [30] D'Àuria, R; Fré, P; Maina, E; Regge, T., Geometrical first order supergravity in 5 space-time dimensions, *Ann.Phys.*, **135**: 237 (1981).

