



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-D.002/10

Formalismo de Hamilton-Jacobi generalizado:

Teorias de campos com derivadas de ordem superior

Mario Cezar Ferreira Gomes Bertin

Orientador

Prof. Dr. *Bruto Max Pimentel Escobar*

Abril de 2010

Para Sofia Amalie.

Agradecimentos

- A meus pais Luiz Júlio e Maria Lúcia, que possibilitaram, com amor e carinho, que eu dispusesse do livre arbítrio e pudesse escolher meu próprio caminho.
- Aos meus irmãos Júlio Cesar e Tainã.
- Ao meu professor B. M. Pimentel, em primeiro lugar pela amizade, mas também por me acompanhar em minha aventura científica.
- Aos meus amigos e colaboradores P. J. Pompéia, G. E. R. Zambrano e C. E. Valcárcel, que muito me ensinaram.
- A Júlio Marny Hoff que, pela grande amizade, merece em minha vida um capítulo especial, a ser escrito num boteco.
- A CAPES, pelo suporte financeiro integral.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares em teorias de campos, com foco em teorias com derivadas de ordem superior. Iniciaremos com uma análise preliminar do cálculo variacional para esses sistemas, que envolve as condições para a extremização de uma integral fundamental múltipla e a análise dos teoremas de Noether. Buscaremos seguir este caminho na construção do formalismo de Hamilton-Jacobi em forma covariante, em que nos utilizaremos da clássica abordagem de Carathéodory adaptada a teorias de campos. No terceiro capítulo, mostraremos como o formalismo pode ser construído dada a escolha de uma dinâmica relativística específica e como esta escolha nos permite tratar de sistemas singulares de forma natural. No quarto capítulo abordaremos o problema das condições de integrabilidade, análise que garantirá um método autoconsistente de análise de vínculos. Nesta análise, seremos capazes de relacionar um conjunto de geradores a simetrias da integral fundamental e um segundo tipo a uma modificação da dinâmica com a introdução de parênteses generalizados. Nos dois últimos capítulos apresentaremos aplicações deste método.

Abstract

In this work we will develop the Hamilton-Jacobi formalism to singular and higher-order derivative field theories. We will begin with a preliminary approach to the variational problem concerning the search for extrema of a given fundamental integral, and the analysis of the Noether's theorems. Next, we will present a covariant Hamilton-Jacobi theory using the classical approach of Carathéodory applied to field theories. In the third chapter we will show how this formalism can be derived given a choice of relativistic dynamics, and how this choice allows us to deal with singular systems. In the fourth chapter we will address the problem of integrability conditions. This analysis will be the basic tool for a self consistent constraint analysis. We will see that we can relate a certain set of generators to symmetries of the action, as well as a second type of generators to a modification of the dynamics by means of generalized brackets. The two last chapters will be used for applications.

Índice Analítico

Introdução	1
Referências	6
1 O problema variacional	8
Introdução	8
1.1 O problema variacional	10
1.2 Os teoremas de Noether	19
1.2.1 O primeiro teorema	23
1.2.2 Integrais de movimento	25
1.2.3 O segundo teorema	29
Referências	34
2 O formalismo de Hamilton-Jacobi generalizado	35
Introdução	35
2.1 Integrais equivalentes e condições para extremos da integral fundamental	36
2.2 Introdução de variáveis canônicas	44
2.3 Equações características	50
2.4 Integrabilidade	54
2.5 Os parênteses de Poisson	57
Referências	64
3 Sistemas não Hessianos	65
Introdução	65
3.1 Formas de dinâmica relativística	67
3.2 O formalismo de Hamilton-Jacobi parametrizado	70
3.3 Sistemas não Hessianos	75
3.4 Equações características	78

3.5	O espaço de fase e os parênteses de Poisson	82
3.6	O quadro geométrico	85
3.7	Dois teoremas	89
	Referências	92
4	Integrabilidade	94
	Introdução	94
4.1	Os parênteses de Lagrange	95
4.2	Condições de Frobenius	99
4.3	O formalismo simplético	101
4.4	Fluxos Hamiltonianos e transformações canônicas	104
4.5	Transformações canônicas e simetrias de gauge	108
4.6	Análise de integrabilidade	113
	Referências	121
5	Teoria eletromagnética de Podolsky	122
	Introdução	122
5.1	Sobre a dinâmica no plano nulo	125
5.2	Os geradores da teoria de Podolsky	127
5.3	Análise de integrabilidade e a matriz M	129
5.4	Cálculo da inversa de M	131
5.5	Os parênteses generalizados	135
5.6	As equações características	137
5.7	Transformações de gauge	140
	Referências	144
6	Relatividade Geral em duas dimensões	145
	Introdução	145
6.1	Notação e convenções	146
6.2	Definição dos geradores	148
6.3	A matriz M	149
6.4	A inversa de M'' e os parênteses generalizados	152
6.5	As equações características	155
	Referências	160
	Considerações finais	161
	Referências	164

Introdução

Mais que apenas um dos formalismos que compõem a mecânica clássica, o formalismo de Hamilton-Jacobi é também uma teoria matemática de grande alcance. Seu desenvolvimento teve início nas primeiras formulações do cálculo variacional, mas ganhou forma final a partir dos trabalhos de Hamilton [1] sobre sua teoria Hamiltoniana da mecânica e de Jacobi com o desenvolvimento da teoria das transformações canônicas. A ideia por trás deste formalismo é bastante simples. Sob certas condições, equações diferenciais ordinárias podem ser relacionadas a sistemas de equações diferenciais parciais [2]. Há pelo menos um caso em que esta correspondência é geral, na relação entre equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e equações diferenciais parciais de primeira ordem. Enquanto soluções das equações ordinárias representam congruências de curvas em certa variedade, como por exemplo o espaço Euclidiano no caso da ótica geométrica ou o espaço de fase na mecânica, as soluções das equações parciais formam famílias de hiper-superfícies neste mesmo espaço. A relação existente entre essas equações é traduzida em relações geométricas entre o campo vetorial característico das congruências e a família de hiper-superfícies.

Na mecânica clássica, quando um sistema pode ser formulado a partir de um princípio variacional, as equações que descrevem a trajetória de uma teoria no espaço de configuração são as equações de Euler-Lagrange. Estas equações formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Contudo, Hamilton nos mostrou que é possível reduzir estas equações a um sistema de equações lineares de primeira ordem, as equações canônicas de Hamilton, cujas soluções descrevem famílias de curvas em um espaço de fase. As equações canônicas podem ser relacionadas a uma equação diferencial parcial de primeira ordem, geralmente não linear, que vem a ser a equação de Hamilton-Jacobi. Sua solução é relacionada a uma família de hiper-superfícies no espaço de configuração. Embora esta não seja toda a história, este roteiro padrão é reproduzido em quase todos os textos de introdução

à mecânica clássica [3, 4]. Nessa literatura, o formalismo de Hamilton-Jacobi aparece como um coadjuvante do formalismo Hamiltoniano através da teoria das transformações canônicas.

Contudo, não só a mecânica clássica pode ser descrita por uma teoria de Hamilton-Jacobi. Este é o caso também da ótica geométrica, em que a equação de Hamilton-Jacobi é a equação Eikonal [5]. Também encontramos o mesmo sistema de relações na termodinâmica [6]. As equações de estado de um sistema termodinâmico determinam “trajetórias” em um espaço de estados formado pelas variáveis termodinâmicas. Essas equações podem ser reconhecidas como equações características de uma equação de Hamilton-Jacobi para a entropia. Outros exemplos do alcance da teoria de Hamilton-Jacobi na física podem ser encontrados na mecânica de fluidos [7] e na mecânica quântica [8]. Mesmo na mecânica clássica, a importância deste formalismo torna-se evidente em muitas situações. Por exemplo, a teoria de Hamilton-Jacobi é o cenário ideal para a teoria de perturbações clássica [4], muito utilizada na mecânica celeste [9].

O poder de generalização do formalismo de Hamilton-Jacobi vem da sua relação direta com os princípios variacionais. No entanto, um quadro completo deste cenário só seria formado com os trabalhos de Carathéodory na teoria das equações diferenciais parciais de primeira ordem [10]. O método de Carathéodory inverte o roteiro que apresentamos acima. A equação de Hamilton-Jacobi aparece como a condição necessária e suficiente para que uma trajetória clássica seja um extremo de uma integral fundamental. A partir desta equação podemos deduzir as equações canônicas de Hamilton com o método das características e, ainda, podemos deduzir diretamente as equações de Euler-Lagrange do sistema. Com este ponto de vista, Carathéodory unificou três disciplinas da matemática que, apesar de relacionadas em casos particulares, eram consideradas disciplinas independentes: o cálculo variacional, a teoria das equações diferenciais parciais de primeira ordem e a teoria das equações diferenciais ordinárias. Este conjunto de relações é conhecido como o quadro completo do cálculo variacional. Para a mecânica clássica regular, a teoria de Carathéodory encontra-se sintetizada na ref. [11].

O quadro completo de Carathéodory permitiu um formalismo alternativo ao método de Dirac-Bergmann [12] para análise de sistemas vinculados. Este estudo foi iniciado por Güler [13] no início da década de 1990 e suas ideias centrais podem ser encontradas também na ref. [14]. No formalismo de Hamilton-Jacobi, sistemas vinculados dão origem a um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, não apenas a uma única equação, como no caso regular tratado por Carathéodory. Como consequência, as equações características tornam-se equações em um espaço de fase reduzido cujas soluções são curvas características parametrizadas pelo tempo e por um conjunto de variáveis independentes. Essas variáveis relacionam-se diretamente às coordenadas generalizadas do espaço de configuração cujas velocidades não podem ser escritas em função dos momentos através da transformação de Legendre. Além disso, os vínculos possuem status de geradores dinâmicos da teoria. Como

também apontado por Güler, esses geradores devem obedecer a condições de integrabilidade para que as equações características sejam integráveis. Essas condições são a base para a análise de vínculos que foi proposta e estudada a partir de então, também por outros autores [15, 16, 17].

Em 2006 o autor defendeu dissertação de mestrado [18] sobre o formalismo de Hamilton-Jacobi para ações de primeira ordem, que constituem sistemas cuja função Lagrangiana é linear nas velocidades generalizadas, estudo que resultou também no trabalho [19]. O principal resultado deste trabalho vem a ser a introdução dos parênteses generalizados ao formalismo, que resultam da existência de vínculos que não obedecem as condições de integrabilidade. Ainda nesta dissertação foi possível mostrar pistas de que essa estrutura de parênteses seria independente da natureza linear das Lagrangianas de primeira ordem e deveriam existir para sistemas gerais com geradores não involutivos. Essa linha de investigação nos levou ao trabalho [20]. Em paralelo, temos também o artigo [21] em que aplicamos os resultados de [19] para sistemas de primeira ordem com derivadas de ordem superior, bem como os trabalhos de revisão [11, 14] e o proceeding [22]. Este último trata de aplicações do formalismo em teorias no plano nulo. Todos esses trabalhos apresentam o formalismo de Hamilton-Jacobi a partir da mecânica clássica, enquanto as aplicações em teorias de campos são feitas através de extensões, como é usual em outros formalismos para sistemas vinculados.

Esta tese, além de apresentar os principais resultados do estudo de doutorado, pretende preencher a ausência de um texto que trate da teoria de Hamilton-Jacobi genuinamente para teorias de campos que incluam sistemas singulares. Em adição, generalizaremos o formalismo para incluir também sistemas com derivadas de ordem superior. Para tanto, o trabalho é dividido em seis capítulos.

O primeiro capítulo é um capítulo introdutório ao problema variacional referente às teorias de campos, que são sistemas descritos por integrais múltiplas de densidades Lagrangianas em volumes do espaço-tempo. Este capítulo não possui nenhuma informação nova, mas serve ao propósito de introduzir um roteiro padrão para o formalismo de Hamilton-Jacobi para campos. Além de plataforma inicial, usaremos este capítulo para apresentar notações e convenções que serão necessárias nos demais capítulos. Trataremos também dos teoremas de Noether para campos, que usaremos mais tarde para estudar simetrias que resultam do formalismo de Hamilton-Jacobi.

No segundo capítulo faremos uma tentativa de formular a teoria de Hamilton-Jacobi em uma forma completamente covariante, embora esta tentativa seja infrutífera para análise de sistemas singulares. Ainda assim há discussões interessantes que brotam dessa tentativa. Seremos capazes de mostrar que, com uma escolha de método de Lagrangianas equivalentes, podemos definir uma equação de Hamilton-Jacobi cujas equações características reproduzem equações canônicas covariantes para teorias de campos. Essas equações também levam a uma estrutura de parênteses de Poisson bem determinada e a condições de integrabilidade na

forma de parênteses de Lagrange das variáveis do espaço de fase.

O terceiro capítulo traz o formalismo de Hamilton-Jacobi para uma escolha particular de dinâmica relativística, que envolve uma foliação do espaço-tempo com a escolha de hipersuperfícies de Cauchy. Este é o método padrão para análise de sistemas vinculados também pelo método de Dirac. Nesta parte, seremos capazes de construir um quadro completo análogo ao quadro completo de Carathéodory para a mecânica clássica. Além disso, introduziremos o formalismo geral para teorias com vínculos, que tornam-se equações funcionais que integram o sistema de Hamilton-Jacobi da teoria. Deduziremos também as equações características deste sistema e discutiremos o espaço de fase e os parênteses de Poisson. Por fim, apresentaremos o teorema de Jacobi, que relaciona soluções completas das equações de Hamilton-Jacobi a configurações características da integral fundamental.

Podemos dizer que o capítulo 4 contém os principais resultados deste trabalho. Este é o capítulo que trata da integrabilidade das equações de Hamilton-Jacobi. Com esta análise, veremos que as equações de Hamilton-Jacobi definem geradores de transformações canônicas no espaço de fase da teoria que, se integráveis, devem fechar uma álgebra de Lie com os parênteses de Poisson. A forma mais direta de analisar como esses geradores agem sobre a dinâmica de uma teoria é através do formalismo simplético, que apresentaremos na seção 4.3. A partir deste ponto, a tese volta-se a aspectos geométricos do formalismo de Hamilton-Jacobi, em detrimento da vocação analítica dos capítulos anteriores. Estudaremos também a relação entre os geradores da teoria e as simetrias da integral fundamental, especialmente focados em como podemos reconstruir simetrias de gauge a partir das transformações canônicas geradas pelos vínculos. Essa análise é também inédita no que diz respeito ao formalismo de Hamilton-Jacobi e consiste em outro resultado importante do nosso trabalho. Na seção 4.6 apresentaremos a generalização dos resultados publicados em [20], ou seja, a análise de sistemas em teorias de campos que possuam vínculos que não obedeçam as condições de integrabilidade. Nesta seção, introduziremos a estrutura dos parênteses generalizados e sua interpretação geométrica em termos do formalismo simplético.

Os capítulos 5 e 6 trazem duas aplicações do formalismo apresentado no capítulo 4. A primeira é a teoria eletromagnética de Podolsky na dinâmica do plano nulo e a segunda é a ação de Einstein-Hilbert em duas dimensões, na dinâmica instantânea. Ambas as aplicações serão úteis em mostrar a validade e abrangência do método introduzido na seção 4.6.

Na literatura sobre sistemas singulares a nomenclatura é baseada inteiramente no formalismo de Dirac e o mesmo ocorre, de alguma forma, nos trabalhos de Güler e de outros autores com o formalismo de Hamilton-Jacobi. Nessa nomenclatura, existem vínculos primários e secundários, assim como vínculos de primeira e segunda classes. Contudo, para evidenciar a independência do formalismo de Hamilton-Jacobi com relação ao método Hamiltoniano, vamos esquecer, durante o texto, essas convenções. O motivo é que trataremos os sistemas vinculados como sistemas dinâmicos e, por isso, usaremos o termo “geradores” no lugar de “vínculos”.

Usaremos frequentemente a denominação “sistemas Hessianos” para sistemas regulares e “sistemas não Hessianos” para sistemas singulares. Da mesma forma, usaremos também as expressões “geradores em involução” e “geradores não involutivos” com a operação dos parênteses de Poisson, que, como será evidente no texto, são equivalentes às expressões “vínculos de primeira classe” e “vínculos de segunda classe”. Além dessas mudanças, é possível que o leitor sinta falta de outros elementos do jargão padrão de sistemas vinculados. Por exemplo, chamaremos as variáveis do espaço de fase reduzido por “variáveis dependentes”, enquanto os parâmetros relacionados à parte não inversível da matriz Hessiana serão tratados como “variáveis independentes”, no estrito sentido de que os primeiros são funções dos últimos nas soluções do problema variacional. Contudo, buscaremos tornar o formalismo conciso e auto-consistente para que a nomenclatura não seja um fator determinante para a compreensão da teoria.

Por fim, as referências serão colocadas no fim de cada capítulo, em vez de no fim do trabalho, com o objetivo de facilitar a leitura e a dinâmica do texto.

Referências

- [1] David R. Wilkins é responsável pela transcrição e edição de uma vasta coleção dos trabalhos de W. R. Hamilton, que se encontram na página <http://www.maths.soton.ac.uk/EMIS/classics/Hamilton>.
- [2] V. I. Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer-Verlag (2004).
- [3] H. Goldstein, C. P. Poole & J. L. Safko, *Classical mechanics*, Addison-Wesley (2002).
E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles & rigid bodies*, Cambridge Un. Press (1988).
A. O. Lopes, *Introdução à mecânica clássica*, Edusp (2006).
V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag (1989).
C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Dover Publications (1986).
- [4] J. V. José & E. J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge Un. Press (1998).
- [5] K. B. Wolf, *Geometric optics on phase space*, Springer-Verlag (2004).
- [6] S. G. Rajeev, *A Hamilton–Jacobi formalism for thermodynamics*, Ann. Phys. **323**, 2265-2285 (2008).
- [7] L. D. Landau & E. M. Lifshits, *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann (2000).
- [8] David Bohm, *Quantum theory*, Dover Publications (1989).
- [9] Y. Hagihara, *Celestial mechanics: Dynamical principles and transformation theory*, MIT Press (1970).
- [10] C. Carathéodory, *Calculus of variations and partial differential equations of the first order - Parts I & II*, Holden Day Inc. (1967).

- [11] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & P. J. Pompeia, *Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory*, Rev. Bras. Ens. Fis. **29**, 393-403 (2007).
- [12] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva University (1964).
- [13] Y. Güler, Il Nuovo Cimento B **107**, 1398 (1992); B **107**, 1143 (1992).
- [14] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & P. J. Pompeia, *Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory parte 2, sistemas singulares*, Rev. Bras. Ens. Fis. **30**, 3310 (2008).
- [15] Y. Güler, Il Nuovo Cimento B **109**, 341 (1994); B **111**, 513 (1996).
Y. Güler & D. Baleanu - Il Nuovo Cimento B **114**, 1023 (1999); B **115**, 319 (2000).
- [16] B. M. Pimentel & R. G. Teixeira, Il Nuovo Cimento B **111**, 841- (1996); B **113**, 805- (1998).
B. M. Pimentel, R. G. Teixeira & J. L. Tomazelli, Ann. Phys. **267**, 75- (1998).
B. M. Pimentel, P. J. Pompeia, J. F. da Rocha-Neto & R. G. Teixeira, Gen. Rel. Grav. **35**, 877- (2003).
B. M. Pimentel, P. J. Pompeia & J. F. da Rocha-Neto, Il Nuovo Cimento B **120**, 981- (2005).
- [17] Soon-Tae Hong, Yong-Wan Kim, Young-Jai Park & K. D. Rothe, Mod. Phys. Lett. A **17**, 435- (2002).
- [18] M. C. Bertin, *Formalismo de Hamilton-Jacobi para ações de primeira ordem*, <http://www.ift.unesp.br/posgrad/mcbertin.pdf>.
- [19] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & P. J. Pompeia, *First-order actions: a new view*, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2873-2889 (2005).
- [20] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & C. E. Valcárcel, *Non-Involutive Constrained Systems and Hamilton-Jacobi Formalism*, Ann. Phys. **323**, 3137–3149 (2008).
- [21] M. C. Bertin, B.M. Pimentel & P.J. Pompeia, *Hamilton–Jacobi approach for first order actions and theories with higher derivatives*, Ann. Phys. **323**, 527–547 (2008).
- [22] M. C. Bertin, B.M. Pimentel, C. E. Valcárcel & G. E. R. Zambrano, *Hamilton-Jacobi formalism on the null-plane: applications*, V International School on Field Theory and Gravitation, PoS(ISFTG)**046** (2009).

Capítulo 1

O problema variacional

Introdução

Neste primeiro capítulo, vamos revisar a análise do problema variacional de se encontrar condições necessárias e suficientes para que uma dada integral fundamental tome um valor extremo (máximo ou mínimo) local. Este problema variacional é comum em diversas áreas da física e da matemática que compartilham de quantidades geométricas que assumam, por requerimentos físicos ou puramente matemáticos, um valor máximo ou mínimo. Por exemplo, o problema variacional que descreve fenômenos da ótica geométrica consiste em encontrar a trajetória do raio de luz para a qual o tempo de propagação seja mínimo (princípio de Fermat). A dinâmica de partículas relativísticas, como outro exemplo, refere-se ao problema de se encontrar trajetórias no espaço-tempo que maximizem o tempo próprio.

Problemas variacionais na mecânica clássica [1, 2], disciplina na qual o cálculo variacional encontrou seu maior terreno de desenvolvimento, precisam ser definidos com base em espaços não tão facilmente intuídos. Um sistema físico neste cenário é descrito por uma trajetória em um espaço de configuração $\mathbb{Q}_n$ formado por suas coordenadas generalizadas q^a , em que $a = 1, \dots, n$ e n indica a dimensão de $\mathbb{Q}_n$. Tal trajetória é definida pelas equações paramétricas

$$C : q^a = q^a(t), \tag{1.1}$$

em que t é um parâmetro relacionado univocamente com o tempo. O problema variacional

consiste em encontrar condições necessárias e suficientes para que a integral fundamental

$$A[C] \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(t, q^a, \dot{q}^a, \dots) dt, \quad (1.2)$$

em que $\dot{q}^a \equiv dq^a/dt$, assumamos um valor extremo sobre C , fornecida uma função Lagrangiana L que dependa do tempo, das coordenadas e de suas derivadas até ordem k . Neste caso, precisamos que as funções $q^a(t)$ sejam pelo menos de classe C^{2k} . Este problema variacional recebe o nome de princípio de Hamilton quando a primeira variação das coordenadas generalizadas em $t = t_0$ e $t = t_1$ é nula. A aplicação direta do princípio de Hamilton leva às equações de Euler-Lagrange

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L}{\partial q_{(i)}^a} = 0, \quad (1.3)$$

que são as equações diferenciais que ditam a dinâmica da teoria. Nessas equações, usamos a notação $q_{(i)}^a$ para indicar a i -ésima derivada temporal das coordenadas.

O caráter do tempo como parâmetro de evolução nessas teorias é bastante especial. Em primeiro lugar, é um parâmetro de evolução único: a integral (1.2) é uma integral simples e as soluções das equações (1.3), se existirem, são famílias de curvas de 1-parâmetro que dependem de um conjunto de condições iniciais. Em segundo lugar, embora seja sempre possível um processo de reparametrização, a integral fundamental não é independente da escolha do parâmetro. Por isso, as equações de Euler-Lagrange não são apenas equações que descrevem uma dada geometria no espaço de configuração, mas possuem também a interpretação de equações que caracterizam um sistema dinâmico finito.

Por causa do papel especial do tempo, o formalismo Hamiltoniano pode ser naturalmente introduzido e a mecânica clássica pode ser analisada através do espaço de fase $T^*\mathbb{Q}_n$, onde as equações de movimento tomam a forma de um conjunto de equações de ordem reduzida. No espaço de fase há a introdução de uma estrutura simplética natural, através da qual é possível conhecer a forma da evolução de qualquer observável físico sem a necessidade da resolução das equações de movimento. Além disso, as propriedades geométricas do espaço de fase permitem que o efeito de transformações sobre observáveis sejam imediatamente reconhecidos, independentemente da dinâmica específica da teoria. Dentre as transformações mais importantes estão as transformações canônicas, que preservam o elemento de volume do espaço de fase. A importância desse formalismo canônico para a física não pode ser subestimada, visto que a mesma estrutura formal está presente também na mecânica quântica.

O cálculo variacional para a mecânica clássica envolve também os teoremas de Noether, que dizem respeito a identidades obedecidas quando a integral fundamental (1.2) é invariante por alguma classe de transformações, assim como o formalismo de Hamilton-Jacobi. Historicamente, este formalismo foi desenvolvido como um braço do formalismo Hamiltoniano, mas

sua estrutura sintetizadora é mais fundamental, como veremos nos capítulos 2 e 3.

O mesmo quadro para teorias de campos não pode ser traçado tão naturalmente. Como veremos, campos são sistemas que dependem de um conjunto de parâmetros, geralmente identificados com as coordenadas retangulares do espaço-tempo. A integral fundamental que caracteriza o problema variacional, análoga à integral (1.2), é uma integral múltipla. Além disso, os sistemas em campos mais importantes na física são invariantes por reparametrizações. Essas características fazem desses sistemas essencialmente distintos dos sistemas clássicos, nos quais o tempo tem um papel privilegiado. Em especial, não há uma forma única de dinâmica Hamiltoniana e, tampouco, um único formalismo de Hamilton-Jacobi possível. Outro aspecto das teorias de campos mais importantes para a física são as simetrias de gauge, que são características de sistemas singulares.

Neste capítulo abordaremos o problema variacional para teorias de campos, tanto para apresentar nomenclatura e convenções que utilizaremos no trabalho, quanto para esclarecer aspectos normalmente obscuros do procedimento de dedução das equações de Euler-Lagrange, como os termos de fronteira do problema de extremização da ação. Este caminho também é o mais coerente para fins de apresentação do formalismo de Hamilton-Jacobi. Este desenvolvimento é fortemente baseado na referência [3], mas nos preocuparemos também na generalização do método para considerar sistemas com derivadas superiores na ação. Na seção 1.2 nos preocuparemos em apresentar, pelas mesmas razões, os teoremas de Noether para campos. Nesta seção, nos baseamos também nas referências [1, 2, 4]. Não nos preocuparemos em apresentar o formalismo Hamiltoniano. De acordo com o ponto de vista que abordaremos, ele é um resultado natural do formalismo de Hamilton-Jacobi, que será o foco do próximo capítulo.

1.1 O problema variacional

Um campo pode ser descrito por um conjunto de n funções $\phi^a(x)$, em que x representa um ponto no espaço-tempo de $d+1$ dimensões, localmente descrito por um sistema de coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d)$ em um dado volume Ω . Todas as nossas considerações serão restritas ao sistema contido nesse volume. O índice a varia de 1 a n . Vamos trabalhar em um espaço de configuração construído da seguinte forma. Os campos ϕ^a são coordenadas de uma variedade $\mathbb{Q}_n$ de dimensão n . Em conjunto com essa variedade, definimos também um espaço para os parâmetros, $\mathbb{R}_{d+1}$. O espaço de configuração vem a ser o produto direto definido por $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}_n \times \mathbb{R}_{d+1}$, de modo que o volume Ω , o qual será tratado também como o domínio dos campos ϕ^a , esteja imerso em $\mathbb{Q}$.

Vamos supor que os campos sejam funções pelo menos de classe C^{2k} , de modo que podemos

definir as derivadas

$$\phi_\mu^a \equiv \partial_\mu \phi^a, \quad \phi_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu \partial_\nu \phi^a, \quad \dots,$$

até ordem $2k$. A configuração dos campos ϕ^a é, portanto, definida como os valores dos campos e de todas as suas derivadas até ordem $2k$. Consideremos, agora, a existência de uma densidade Lagrangiana $L(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^a, \phi_{\mu\nu}^a, \dots)$, contendo derivadas dos campos até ordem k . Com essa densidade Lagrangiana definimos a ação

$$A[\phi] \equiv \int_{\Omega} L(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^a, \phi_{\mu\nu}^a, \dots) d\omega, \quad (1.4)$$

em que usamos a notação $d\omega \equiv dx^0 dx^1 \dots dx^d$.

Para definir o problema variacional vamos fazer da configuração ϕ^a um membro de uma família de configurações de 1-parâmetro, definida por

$$\phi(u) : \phi^a = \phi^a(x^\mu, u); \phi_\mu^a = \phi_\mu^a(x^\mu, u); \dots, \quad (1.5)$$

pelo menos de classe C^2 em u . Se uma dada configuração $\phi(u_0)$ é um extremo da integral fundamental (1.4), $A(u_0)$ deve ser menor (ou maior) que um valor $A(u)$ referente à ação calculada em uma configuração $\phi(u)$, pertencente a uma vizinhança fechada $|u - u_0|$ de $\phi(u_0)$. Supondo $|u - u_0|$ um número muito pequeno, desprezando termos de ordem maior ou igual a $|u - u_0|^2$, a expansão de $\phi(u)$ em série de Taylor ao redor da configuração $\phi(u_0)$ pode ser escrita por

$$\phi^a(x^\alpha, u) \approx \phi^a(x^\alpha, u_0) + \left. \frac{\partial \phi^a(x^\alpha, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u, \quad (1.6)$$

e assim também para as derivadas dos campos, em que $\delta u \equiv u - u_0$. Esta é a fórmula de primeira ordem para a comparação entre duas configurações $\phi(u_0)$ e $\phi(u)$ para um conjunto fixo de parâmetros x^μ . Ela nos permite definir a primeira variação dos campos a ponto fixo, dada pela expressão

$$\delta^* \phi^a \equiv \phi^a(x^\alpha, u) - \phi^a(x^\alpha, u_0) = \left. \frac{\partial \phi^a}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u. \quad (1.7)$$

A mesma expressão é válida para as derivadas. Por exemplo, temos a primeira variação de ϕ_μ^a :

$$\begin{aligned} \delta^* \phi_\mu^a &\equiv \phi_\mu^a(x^\alpha, u) - \phi_\mu^a(x^\alpha, u_0) = \left. \frac{\partial \phi_\mu^a}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u \\ &= \left. \frac{\partial^2 \phi^a}{\partial x^\mu \partial u} \right|_{u=u_0} \delta u = \frac{d}{dx^\mu} \left. \frac{\partial \phi^a}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u = \frac{d}{dx^\mu} (\delta^* \phi^a). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Na expressão (1.8), usamos a derivada total definida por

$$\frac{d}{dx^\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \int_{\Omega} d\omega_x \left[\phi_\alpha^a(x) \frac{\delta}{\delta \phi^a(x)} + \phi_{\mu\alpha}^a(x) \frac{\delta}{\delta \phi_\mu^a(x)} + \phi_{\mu\nu\alpha}^a(x) \frac{\delta}{\delta \phi_{\mu\nu}^a(x)} + \dots \right].$$

A integral que aparece na expressão acima atende ao fato de que campos são, de forma rigorosa, tratados como distribuições do espaço-tempo: as derivadas com relação aos campos são derivadas funcionais e não simples derivadas parciais. Por essa razão usamos o símbolo $\delta F(x)/\delta \phi(y)$ para caracterizar a derivada funcional de uma função $F(x)$, aplicada em um ponto x do volume Ω , com relação a uma função $\phi(y)$, aplicada em um ponto y do mesmo domínio. A relação mais fundamental vem a ser

$$\frac{\delta \phi^a(x)}{\delta \phi^b(y)} = \delta_b^a \delta^{d+1}(x-y),$$

em que temos a delta de Dirac de dimensão $d+1$. No geral podemos ignorar a escrita das integrais, de modo a não sobrecarregar a notação, o que faremos em boa parte do trabalho. Contudo, quando somas em derivadas funcionais aparecem, integrais geralmente as acompanham e devemos ficar atentos a este fato. Por exemplo, usaremos repetidamente expressões do tipo $\phi_\mu^a [\delta L / \delta \phi^a]$, com L sendo a densidade Lagrangiana, que devem ser lidas como

$$\int_{\Omega} d\omega_x \left[\phi_\mu^a(x) \frac{\delta L(y)}{\delta \phi^a(x)} \right].$$

A primeira variação (1.7), portanto, é o termo de primeira ordem da comparação entre duas configurações infinitesimalmente próximas, mantendo fixos o conjunto de parâmetros x^μ e, portanto, o domínio Ω . Podemos generalizar este argumento e considerar também a comparação com configurações que variem os parâmetros. Basta considerarmos a configuração

$$\phi'(u) : \phi'^a = \phi'^a(v^\mu, u); \dots, \quad (1.9)$$

em que os parâmetros v^μ representam coordenadas de um volume Ω' do espaço-tempo. Podemos escolher esta configuração de modo que $v^\mu = x^\mu$ para $u = u_0$ e, assim, ambos os conjuntos estão relacionados pela equação

$$v^\mu = v^\mu(x^\nu, u) \approx x^\mu + \left. \frac{\partial v^\mu}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u,$$

em que, por último, tomamos a expansão até primeira ordem em δu .

Com a variação dos parâmetros, temos a primeira variação total

$$\begin{aligned}\phi'^a(v^\mu, u) &\approx \phi^a(x^\mu, u_0) + \left. \frac{\partial \phi^a(v^\mu, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u + \frac{\delta \phi^a(v^\mu, u)}{\delta v^\beta} \left. \frac{\partial v^\beta}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u \\ &= \phi^a(x^\mu, u_0) + \delta^* \phi^a + (\phi_\beta^a)_{u=u_0} \delta x^\beta,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta \phi^a \equiv \delta^* \phi^a + \phi_\beta^a(x^\mu, u_0) \delta x^\beta, \quad (1.10)$$

em que

$$\delta x^\beta \equiv \left. \frac{\partial v^\beta}{\partial u} \right|_{u=u_0} \delta u. \quad (1.11)$$

Vamos escrever a integral fundamental para a configuração $\phi(u_0)$:

$$A(u_0) = \int_{\Omega} L(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^a, \phi_{\mu\nu}^a, \dots) d\omega, \quad (1.12)$$

assim como para a configuração $\phi'(u)$:

$$A(u) = \int_{\Omega'} L(v^\mu, \phi'^a, \phi_\mu'^a, \phi_{\mu\nu}'^a, \dots) d\omega', \quad (1.13)$$

em que $d\omega' \equiv dv^0 dv^1 \dots dv^d$. A primeira variação total da ação é definida por

$$\delta A \equiv A(u) - A(u_0) \approx \left. \frac{dA(u)}{du} \right|_{u=u_0} \delta u. \quad (1.14)$$

Assim, devemos calcular a primeira derivada de (1.13). A condição fundamental para que a integral seja estacionária é que essa derivada seja nula no ponto $u = u_0$. Dessa forma, temos:

$$\frac{dA}{du} = \frac{d}{du} \left[\int_{\Omega'} L(v^\mu, \phi'^a, \phi_\mu'^a, \phi_{\mu\nu}'^a, \dots) d\omega' \right] = \int_{\Omega'} \left[\frac{dL}{du} d\omega' + L \frac{d}{du} (d\omega') \right].$$

Nesta expressão, o elemento de volume depende de u , o que justifica a segunda derivada no integrando. Podemos trabalhar esse termo, considerando a relação

$$d\omega' = \det \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right) d\omega \equiv B d\omega$$

e assim, a derivada total da ação se escreve

$$\frac{dA}{du} = \int_{\Omega} \left[\frac{dL}{du} B + L \frac{\partial B}{\partial u} \right] d\omega. \quad (1.15)$$

Para o primeiro termo

$$\begin{aligned} \frac{dL}{du} &= \frac{\delta L}{\delta v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi'^a} \left[\frac{\delta \phi'^a}{\delta v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u} + \frac{\partial \phi'^a}{\partial u} \right] \\ &\quad + \frac{\delta L}{\delta \phi'_\mu^a} \left[\frac{\delta \phi'_\mu^a}{\delta v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u} + \frac{\partial \phi'_\mu^a}{\partial u} \right] + \frac{\delta L}{\delta \phi'_{\mu\nu}^a} \left[\frac{\delta \phi'_{\mu\nu}^a}{\delta v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u} + \frac{\partial \phi'_{\mu\nu}^a}{\partial u} \right] + \dots \end{aligned}$$

Devemos manter em mente, entretanto, que integrais estão implícitas nessa expressão.

Organizando os termos de modo a escrever a expressão como combinações lineares das derivadas de u , mostramos que a expressão anterior equivale a

$$\frac{dL}{du} = \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} \frac{\partial \phi_\mu^a}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \frac{\partial \phi_{\mu\nu}^a}{\partial u} + \dots \right] + \frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u}. \quad (1.16)$$

Assim,

$$\frac{dA}{du} = \int_\Omega d\omega \left\{ \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} \frac{\partial \phi_\mu^a}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \frac{\partial \phi_{\mu\nu}^a}{\partial u} + \dots \right] B + \frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u} B + L \frac{\partial B}{\partial u} \right\}. \quad (1.17)$$

Para a derivada do determinante, vamos usar a relação

$$\frac{\partial B}{\partial u} = G^\alpha_\beta \frac{\partial B^\beta_\alpha}{\partial u}, \quad B^\beta_\alpha \equiv \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad (1.18)$$

em que G^α_β são os cofatores de B^β_α , definidos por

$$G^\alpha_\beta B^\beta_\gamma = B \delta^\alpha_\gamma. \quad (1.19)$$

Podemos escrever os dois últimos termos do integrando de (1.17) como

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u} B + L \frac{\partial B}{\partial u} &= \frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial u} B \delta^\alpha_\beta + L \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial u} G^\alpha_\gamma B^\gamma_\beta + L G^\alpha_\beta \frac{\partial B^\beta_\alpha}{\partial u} \\ &= G^\alpha_\gamma \left[\frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial u} B^\gamma_\beta + L \frac{\partial B^\gamma_\alpha}{\partial u} \right] \\ &= G^\alpha_\gamma \left[\frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial u} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\beta} + L \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\alpha} \right) \right] \\ &= G^\alpha_\gamma \left[\frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\beta}{\partial u} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\beta} + L \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial v^\gamma}{\partial u} \right) \right] \\ &= G^\alpha_\gamma \left[\frac{dL}{dx^\alpha} \frac{\partial v^\gamma}{\partial u} + L \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial v^\gamma}{\partial u} \right) \right] = G^\alpha_\gamma \frac{d}{dx^\alpha} \left(L \frac{\partial v^\gamma}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, com (1.17),

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA(u)}{du} \right|_{u=u_0} &= \int_{\Omega} d\omega \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \frac{\partial \phi^a}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu}^a} \frac{\partial \phi_{\mu}^a}{\partial u} + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \frac{\partial \phi_{\mu\nu}^a}{\partial u} + \dots \right]_{u=u_0} \\ &\quad + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\alpha}} \left(L \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

em que usamos $B_{\beta}^{\alpha}|_{u=u_0} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, $B|_{u=u_0} = 1$ e, por consequência da equação (1.19), $G_{\beta}^{\alpha}|_{u=u_0} = \delta_{\beta}^{\alpha}$.

A equação para a primeira variação da ação (1.13) vem a ser, devido a (1.20),

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \delta^* \phi^a + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu}^a} \delta^* \phi_{\mu}^a + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \delta^* \phi_{\mu\nu}^a + \dots \right] + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\alpha}} (L \delta x^{\alpha}).$$

Mas ainda não acabamos com esta expressão. Por meio de (1.8), podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{\Omega} d\omega \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} \delta^* \phi^a + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu}^a} \frac{d}{dx^{\mu}} (\delta^* \phi^a) + \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \frac{d}{dx^{\mu}} \frac{d}{dx^{\nu}} (\delta^* \phi^a) + \dots \right] \\ &\quad + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\alpha}} (L \delta x^{\alpha}) \\ &= \int_{\Omega} d\omega \left(\frac{\delta L}{\delta \phi^a} - \frac{d}{dx^{\mu}} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu}^a} + \frac{d}{dx^{\mu}} \frac{d}{dx^{\nu}} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} - \dots \right) \delta^* \phi^a \\ &\quad + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\left(\frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu}^a} - \frac{d}{dx^{\nu}} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} + \frac{d}{dx^{\nu}} \frac{d}{dx^{\gamma}} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu\gamma}^a} - \dots \right) \delta^* \phi^a \right] \\ &\quad + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\left(\frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} - \frac{d}{dx^{\gamma}} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu\gamma}^a} + \frac{d}{dx^{\gamma}} \frac{d}{dx^{\lambda}} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu\gamma\lambda}^a} - \dots \right) \delta^* \phi_{\nu}^a \right] + \dots \\ &\quad + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} (L \delta x^{\mu}). \end{aligned}$$

Definindo-se a derivada funcional de Lagrange:

$$\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta} \phi} \equiv \frac{\delta}{\delta \phi} - \frac{d}{dx^{\mu}} \frac{\delta}{\delta \phi_{\mu}} + \frac{d}{dx^{\mu}} \frac{d}{dx^{\nu}} \frac{\delta}{\delta \phi_{\mu\nu}} - \dots, \quad (1.21)$$

escrevemos

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^{\mu}} \left\{ L \delta x^{\mu} + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu}^a} \delta^* \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \delta^* \phi_{\nu}^a + \dots \right\}. \quad (1.22)$$

Em (1.22), vamos usar (1.10) na forma

$$\delta^* \phi^a \equiv \delta \phi^a - \phi_{\beta}^a \delta x^{\beta}, \quad (1.23)$$

mas apenas na segunda integral. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\delta A = & \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^\mu} \left\{ L \delta x^\mu + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \delta \phi_\nu^a + \dots \right\} \\ & + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^\mu} \left\{ -\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \phi_\beta^a \delta x^\beta - \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \phi_{\nu\beta}^a \delta x^\beta - \dots \right\}.\end{aligned}$$

Por fim, temos a primeira variação em sua forma final

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^\mu} \left\{ -H^\mu_\beta \delta x^\beta + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \delta \phi_\nu^a + \dots \right\}, \quad (1.24)$$

na qual definimos o tensor densidade de energia-momento

$$H^\mu_\beta \equiv \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \phi_\beta^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \phi_{\nu\beta}^a + \dots - L \delta^\mu_\beta. \quad (1.25)$$

As equações (1.22) e (1.24) descrevem a primeira variação da ação e as trataremos como fórmulas fundamentais. No geral, o princípio variacional utilizado em teorias de campos é mais específico. Envolve apenas a primeira variação com domínio Ω fixo, em que $\delta x^\beta = 0$ e $\delta \phi = \delta^* \phi$. A primeira variação toma a forma

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta \phi^a + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \delta \phi_\nu^a + \dots \right\}. \quad (1.26)$$

Neste caso, o problema variacional é equivalente ao princípio de Hamilton na mecânica clássica.

Em (1.22) e (1.24) a segunda integral tem como integrando uma divergência total. Vamos definir o objeto

$$\Phi^\mu \equiv -H^\mu_\beta \delta x^\beta + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \delta \phi_\nu^a + \dots. \quad (1.27)$$

O teorema de Gauss-Ostrogradski nos garante que

$$\int_{\Omega} d\omega \frac{d\Phi^\mu}{dx^\mu} = \int_{\partial\Omega} d\sigma n_\mu \Phi^\mu, \quad (1.28)$$

no qual $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω , enquanto $d\sigma$ é o seu respectivo elemento de volume. A 1-forma $n = n_\mu dx^\mu$ é tal que, se a fronteira $\partial\Omega$ for definida por meio de uma equação $F(x^\mu) = 0$, n deve ser proporcional a dF ou, em componentes,

$$n_\mu = \alpha \frac{dF}{dx^\mu}. \quad (1.29)$$

O valor de α é, na verdade, uma escolha arbitrária. Se o vetor $\Phi = \Phi^\mu (d/dx^\mu)$ for nulo em $\partial\Omega$, o que pode ser satisfeito se escolhermos $\delta x^\beta = 0$ e $\delta^*\phi = 0$ na fronteira, a integral do termo de divergência será nula e a primeira variação da ação será escrita apenas pela expressão

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a. \quad (1.30)$$

Com a condição de que A seja estacionária, $\delta A = 0$, tomando $\delta^* \phi^a$ arbitrário em Ω , resultam as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} = 0. \quad (1.31)$$

Por outro lado, podemos escolher, em vez das condições $\delta x^\beta = 0$ e $\delta^* \phi = 0$ na fronteira, a condição de ortogonalidade

$$n_\mu \Phi^\mu|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (1.32)$$

que é mais geral e pode trazer informações sobre o sistema não contidas no problema variacional. Por exemplo, vamos tomar o caso da Lagrangiana $L = L(\phi^a, \phi_\mu^a)$. A variação a volume fixo (1.26) é dada por

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \left[\frac{\delta L}{\delta \phi^a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} \right] \delta \phi^a + \int_{\partial\Omega} d\sigma n_\mu \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} \delta \phi^a.$$

As equações de Euler-Lagrange assumem a forma mais usual

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} = 0,$$

como condições necessárias e suficientes para que a ação desse sistema seja estacionária, desde que $\delta \phi^a = 0$ em $\partial\Omega$, ou que as funções

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a},$$

sejam tangentes à fronteira, ou seja,

$$n_\mu \pi_a^\mu|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

É comum reconhecer as funções π_a^μ como momentos conjugados aos campos ϕ^a com relação aos parâmetros x^μ . Se o problema variacional permitir volume variável, o termo de fronteira sofre o acréscimo de

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma n_\mu H^\mu_\beta \delta x^\beta,$$

tal que a densidade

$$H^\mu_\beta \equiv \frac{\delta L}{\delta \phi^a_\mu} \phi^a_\beta - L \delta^\mu_\beta$$

deve obedecer

$$n_\mu H^\mu_\beta \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

Isto indica que o tensor densidade de energia-momento deve ser nulo, ou como condição mais fraca, tangente a $\partial\Omega$. Como veremos na próxima seção, a densidade H^μ_ν vem a ser uma corrente conservada relacionada à invariância da integral fundamental com relação a translações em Ω . Dessa forma, as condições de fronteira tornam-se requerimentos físicos para o fluxo de energia-momento dos campos. Em outras palavras, este fluxo deve estar sempre contido em Ω .

Como exemplo de teoria com derivadas de segunda ordem, vamos encontrar pela primeira vez a densidade Lagrangiana de Podolsky, com a qual trabalharemos no capítulo 5. Os campos fundamentais são denotados por $A_\mu(x)$, que formam as componentes do potencial de gauge, também chamado de conexão de gauge. A teoria de Podolsky é uma teoria de gauge para o grupo $U(1)$, de modo que a densidade Lagrangiana deve ser escrita com os invariantes $F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, em que usamos a notação $A_{\nu,\mu} \equiv dA_\nu/dx^\mu = \partial_\mu A_\nu$. Esta densidade é escrita por

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 \partial_\lambda F^{\mu\lambda} \partial^\gamma F_{\mu\gamma}. \quad (1.33)$$

As equações de Euler-Lagrange (1.31) para esta teoria são dadas por

$$\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} A_\mu} = \frac{\delta L}{\delta A_\mu} - \frac{d}{dx^\nu} \frac{\delta L}{\delta A_{\mu,\nu}} + \frac{d}{dx^\lambda} \frac{d}{dx^\nu} \frac{\delta L}{\delta A_{\mu,\nu\lambda}} = 0,$$

em que os campos A_μ , $A_{\mu,\nu}$ e $A_{\mu,\nu\lambda}$ devem ser considerados independentes. Da expressão acima, obtemos as equações de campo

$$[1 + a^2 \square] \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad (1.34)$$

em que usamos o operador $\square \equiv \partial_\beta \partial^\beta$.

Para calcular o tensor densidade de energia-momento canônico, vamos usar os objetos

$$\Upsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu \right), \quad (1.35)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu + \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu \right). \quad (1.36)$$

Para o campo de Podolsky temos por cálculo direto o tensor

$$\begin{aligned} H^\alpha_\beta &= \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}A_{\mu,\alpha}} A_{\mu,\beta} + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}A_{\mu,\lambda\alpha}} A_{\mu,\lambda\beta} - L\delta^\alpha_\beta \\ &= F^{\mu\alpha} A_{\mu,\beta} + a^2 \Upsilon_{\epsilon\nu}^{\alpha\mu} \partial^\epsilon \partial_\lambda F^{\nu\lambda} A_{\mu,\beta} + 2a^2 \eta^{\gamma\nu} \Delta_{\mu\nu}^{\lambda\alpha} \Upsilon_{\psi\gamma}^{\mu\epsilon} \partial_\tau F^{\psi\tau} A_{\epsilon,\lambda\beta} - \delta^\alpha_\beta L, \end{aligned}$$

ou,

$$H_{\alpha\beta} = F^\mu_\alpha A_{\mu,\beta} + a^2 \eta_{\alpha\tau} \Upsilon_{\epsilon\nu}^{\tau\mu} \partial^\epsilon \partial_\lambda F^{\nu\lambda} A_{\mu,\beta} + 2a^2 \eta^{\gamma\nu} \eta_{\alpha\phi} \Delta_{\mu\nu}^{\lambda\phi} \Upsilon_{\psi\gamma}^{\mu\epsilon} \partial_\tau F^{\psi\tau} A_{\epsilon,\lambda\beta} - \eta_{\alpha\beta} L. \quad (1.37)$$

Contudo, este tensor não é simétrico em α e β . O processo de simetrização, que envolve o uso de termos de divergência total conhecido como processo de Belinfante, não funciona com teorias que apresentam derivadas de ordem superior. Para a teoria de Podolsky, o procedimento adotado em [5], embora tedioso, resulta no tensor simétrico [6]

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu} F^\mu_\beta + a^2 \left[2\partial^\lambda F_\alpha^\mu \partial_\lambda F_{\beta\mu} - 2\partial^\lambda F_\alpha^\mu \partial_\mu F_{\lambda\beta} + \partial_\lambda F_\alpha^\lambda \partial_\mu F_\beta^\mu \right] - \eta_{\alpha\beta} L. \quad (1.38)$$

Aqui, gostaria de deixar um agradecimento a C. A. Bonin pela discussão sobre a densidade de energia-momento do eletromagnetismo de Podolsky.

1.2 Os teoremas de Noether

As propriedades de invariância de um sistema físico são analisadas através de dois teoremas de Amalie “Emmy” Noether [7], de 1918. Ambos referem-se a condições necessárias e suficientes para que uma dada integral fundamental seja invariante, ou quasi-invariante, sob uma transformação nos campos e nas coordenadas do espaço-tempo. Essa condição, em sua forma mais geral, é conhecida como equação de Lie.

O primeiro teorema de Noether diz respeito à invariância da ação sob a ação de um grupo de transformações com parâmetros constantes. Neste caso, a equação de Lie dá origem a um sistema de identidades que relacionam combinações lineares das derivadas de Lagrange da densidade Lagrangiana a divergências totais. Então, as equações de campo do sistema resultam nas chamadas leis de conservação, quando correntes associadas aos campos têm divergência nula. Essas leis de conservação estão relacionadas também com as integrais de movimento, ou quantidades invariantes por evolução temporal. Por exemplo, na mecânica clássica sistemas invariantes por translações resultam na preservação do momento linear. Sistemas invariantes por rotações preservam o momento angular.

O segundo teorema de Noether diz respeito a teorias invariantes por transformações cujos parâmetros são funções do espaço-tempo. Para esses sistemas, as simetrias implicam na

existência de relações geométricas entre os campos, as identidades de Noether. Essas identidades são independentes da satisfação das equações de campo, ou seja, devem ser satisfeitas também fora das soluções do problema variacional, o que infere ao teorema uma importância fundamental, já que essas relações fornecem informações sobre o sistema físico sem a necessidade de resolvê-lo explicitamente. Por exemplo, as identidades de Ward-Takahashi são identidades de Noether que resultam da invariância da ação efetiva, em teoria quântica de campos, por transformações BRST. A importância desse teorema é ainda mais apreciada quando nos lembramos que há uma crença generalizada de que as interações fundamentais da natureza sejam teorias invariantes por transformações de gauge locais, nas quais o segundo teorema se aplica.

As transformações mais gerais a que uma configuração de campos $\phi^a(x)$ pode ser submetida consistem em dois tipos. O primeiro vem a ser uma transformação ativa no ponto de aplicação no espaço-tempo que leva um ponto $x = (x^\mu)$ a um ponto $y = (y^\mu)$. Essa transformação é caracterizada genericamente pela variação

$$\delta x^\mu \equiv y^\mu - x^\mu, \quad (1.39)$$

tal que δx^μ é uma função do espaço-tempo.

Os campos no ponto y estão relacionados aos mesmos campos no ponto x pela variação

$$\delta \phi^a(x) \equiv \phi^a(y) - \phi^a(x) = \left. \frac{\partial \phi^a(y)}{\partial y^\mu} \right|_{\delta x=0} \delta x^\mu,$$

que é o termo de primeira ordem na série de Taylor de $\phi^a(y)$. Podemos desprezar termos de ordem superior se δx for muito pequeno. Nessas condições, o operador δ age como um operador diferencial e podemos escrever a primeira variação dos campos pela expressão

$$\delta \phi^a = \phi_\mu^a \delta x^\mu. \quad (1.40)$$

Da mesma forma, podemos definir uma transformação que age apenas sobre a forma funcional dos campos, que chamaremos de transformações a ponto fixo, cuja expressão é dada por

$$\bar{\delta} \phi^a(x) = \phi'^a(x) - \phi^a(x) \quad (1.41)$$

e, assim como no caso da transformação a ponto variável, consideraremos esta como uma transformação infinitesimal de primeira ordem.

A variação total de primeira ordem Δ é definida pela soma da transformação a ponto fixo

e a ponto variável, ou seja,

$$\Delta\phi^a(x) = \bar{\delta}\phi^a(x) + \delta\phi^a(x) = \bar{\delta}\phi^a(x) + \phi_\mu^a(x)\delta x^\mu. \quad (1.42)$$

Devemos analisar como a integral fundamental muda a partir de (1.42). A ação de Δ na integral (1.4) resulta na expressão

$$\Delta A[\phi] = \int_{\Omega} [\Delta L d\omega + L \Delta d\omega]. \quad (1.43)$$

É possível verificar que, devido à natureza infinitesimal das transformações e ao fato de todos os campos envolvidos serem suaves, Δ tem as mesmas propriedades de um operador diferencial, assim como δ e $\bar{\delta}$, o que nos permite este procedimento.

A variação total da densidade Lagrangiana pode ser calculada por

$$\Delta L = \bar{\delta}L + \frac{dL}{dx^\mu} \delta x^\mu, \quad (1.44)$$

tal que,

$$\bar{\delta}L = \frac{\delta L}{\delta\phi^a} \bar{\delta}\phi^a + \frac{\delta L}{\delta\phi_\mu^a} \bar{\delta}\phi_\mu^a + \frac{\delta L}{\delta\phi_{\mu\nu}^a} \bar{\delta}\phi_{\mu\nu}^a + \dots. \quad (1.45)$$

Note que, devido ao fato de a variação a ponto fixo não alterar o ponto de aplicação das funções e derivadas, temos

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\phi^a) = \partial_\mu\phi'^a(x) - \partial_\mu\phi^a(x) = \partial_\mu(\phi'^a(x) - \phi^a(x)) = \frac{d}{dx^\mu}(\bar{\delta}\phi^a)$$

e o mesmo se aplica às derivadas de ordem superior. Portanto, a variação funcional de L é dada por

$$\bar{\delta}L = \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} \bar{\delta}\phi^a + \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\mu^a} \bar{\delta}\phi_\mu^a + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{\mu\nu}^a} \bar{\delta}\phi_{\mu\nu}^a + \dots \right], \quad (1.46)$$

em que $\bar{\delta}/\bar{\delta}\phi$ é a já definida derivada de Lagrange (1.21).

A variação total do elemento de volume $d\omega$ pode ser calculada por $\Delta d\omega = \delta d\omega$, visto que a variação a ponto fixo deixa o volume invariante. Temos

$$d\omega' = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) d\omega = \det\left(\delta_\nu^\mu + \frac{\partial[\delta x^\mu]}{\partial x^\nu}\right) d\omega.$$

Tomando apenas termos até primeira ordem em δx ,

$$\det\left(\delta_\nu^\mu + \frac{\partial[\delta x^\mu]}{\partial x^\nu}\right) \approx 1 + \frac{d}{dx^\mu}[\delta x^\mu]$$

e, portanto, a variação do elemento de volume vem a ser

$$\delta d\omega = \frac{d[\delta x^\mu]}{dx^\mu} d\omega. \quad (1.47)$$

Somando as contribuições de (1.44) e (1.47) na variação (1.43), obtemos como resultado

$$\Delta A[\phi] = \int_{\Omega} \left\{ \bar{\delta} L + \frac{d}{dx^\mu} (L \delta x^\mu) \right\} d\omega.$$

Se a ação é invariante, $\Delta A = 0$ e, desde que a integração é efetuada em um volume arbitrário e usando a expressão (1.46), para que a primeira variação da ação seja nula devemos ter

$$\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \bar{\delta} \phi^a + \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \bar{\delta} \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \bar{\delta} \phi_\nu^a + \cdots + L \delta x^\mu \right] = 0. \quad (1.48)$$

Essa é a equação diferencial de Lie. Com conhecimento explícito das variações dos campos e de δx , é possível utilizar esta equação para deduzir uma Lagrangiana a partir das simetrias de um sistema. De fato, (1.48) é a identidade mais geral devida à invariância da ação sob transformações infinitesimais nos campos e nas coordenadas. Toda configuração de campos deve satisfazer a esta equação, independente de ϕ ser ou não um extremo e, ainda, condições de contorno não afetam o caráter físico dessa equação, já que não é necessária a especificação de nenhum comportamento de fronteira dos campos.

Para efeito de aplicação em teorias de campos, pode ser conveniente escrever a equação de Lie como combinações da variação total dos campos, ou seja,

$$\bar{\delta} \phi^a = \Delta \phi^a - \delta \phi^a = \Delta \phi^a - \phi_\mu^a \delta x^\mu.$$

Assim, (1.48) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} (\Delta \phi^a - \phi_\mu^a \delta x^\mu) + \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \Delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \Delta \phi_\nu^a + \cdots \right. \\ \left. + \left(L \delta_\gamma^\mu - \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \phi_\gamma^a - \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \phi_{\nu\gamma}^a - \cdots \right) \delta x^\gamma \right] = 0. \end{aligned}$$

Usando o objeto (1.25) o tensor densidade de energia-momento canônico,

$$H_\nu^\mu \equiv \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \phi_\nu^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\alpha}^a} \phi_{\alpha\nu}^a + \cdots - \delta_\nu^\mu L, \quad (1.49)$$

escrevemos a equação de Lie como

$$\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} (\Delta \phi^a - \phi_\mu^a \delta x^\mu) + \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_\mu^a} \Delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \Delta \phi_\nu^a + \cdots - H_\nu^\mu \delta x^\nu \right] = 0. \quad (1.50)$$

Esta será a equação fundamental que determina condições satisfeitas pelos campos quando simetrias estão presentes no sistema.

A equação de Lie pode ser generalizada para o caso em que a ação é quasi-invariante pela transformação (1.42), ou seja, se a integral fundamental for invariante a menos de um termo de fonte, tal que

$$\Delta A = - \int_{\Omega} d\omega \Psi(x, \phi, \dots).$$

A equação de Lie para este caso torna-se

$$\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} (\Delta \phi^a - \phi_{\mu}^a \delta x^{\mu}) + \frac{d}{dx^{\mu}} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu}^a} \Delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu\nu}^a} \Delta \phi_{\nu}^a + \dots - H_{\nu}^{\mu} \delta x^{\nu} \right] = \Psi.$$

Casos especiais devem ser analisados para formas especiais das transformações (1.39), (1.42) e de Ψ .

1.2.1 O primeiro teorema

Vamos considerar o caso de invariância forte $\Psi = 0$ e vamos supor que as transformações sejam dependentes de um conjunto de parâmetros constantes ε^i em que $i = 1, \dots, N$. A transformação no ponto é definida por

$$x^{\mu} \longrightarrow y^{\mu} = y^{\mu}(x^{\nu}, \varepsilon^i), \quad y^{\mu}(x^{\nu}, \varepsilon^i)|_{\varepsilon^i=0} = x^{\mu}, \quad (1.51)$$

de modo que

$$\delta x^{\mu} = \left. \frac{\partial y^{\mu}}{\partial \varepsilon^i} \right|_{\varepsilon^i=0} \varepsilon^i. \quad (1.52)$$

Vamos impor a seguinte variação nos campos:

$$\Delta \phi^a = \phi'^a(y) - \phi^a(x) = \left. \frac{\delta \phi'^a}{\delta \varepsilon^i} \right|_{\varepsilon^i=0} \varepsilon^i, \quad (1.53)$$

com os mesmos parâmetros de transformação de (1.51). Com isso, estamos assumindo que os campos se transformam como uma representação do grupo de transformações que age no espaço-tempo. Embora essa restrição não seja necessária para os argumentos que seguem, vamos tomá-la com o objetivo de focalizar o formalismo para sistemas com simetrias de gauge. Dizemos que essas transformações são finitas, já que dependem de um número finito de parâmetros. Substituindo as transformações (1.52) e (1.53) em (1.50) e levando em conta

que os parâmetros são constantes, temos o conjunto de N equações

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} \left(\frac{\delta\phi'^a}{\delta\varepsilon^i} - \phi_\mu^a \frac{\partial y^\mu}{\partial \varepsilon^i} \right) + \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\mu^a} \frac{\delta\phi'^a}{\delta\varepsilon^i} + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{\mu\nu}^a} \frac{\delta\phi_\nu'^a}{\delta\varepsilon^i} + \cdots - H_\nu^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial \varepsilon^i} \right] = 0, \quad (1.54)$$

tomadas em $\varepsilon^i = 0$. No segundo termo, possivelmente existirão derivadas funcionais das derivadas dos campos. Assumiremos que as derivadas também possuam a lei de transformação (1.53).

As identidades (1.54) carregam o conteúdo matemático do primeiro teorema de Noether. Se a integral fundamental é invariante por um grupo de transformações com parâmetros constantes, N combinações lineares da derivada de Lagrange estão relacionadas a divergências.

Para configurações de campos que são solução das equações de Euler-Lagrange $\bar{\delta}L/\delta\phi^a = 0$, que formam as superfícies de extremos da ação, o primeiro termo de (1.54) se anula. Se definirmos as densidades de corrente de Noether

$$\Phi_i^\mu \equiv H_\nu^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial \varepsilon^i} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\mu^a} \frac{\delta\phi'^a}{\delta\varepsilon^i} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{\mu\nu}^a} \frac{\delta\phi_\nu'^a}{\delta\varepsilon^i} + \cdots, \quad (1.55)$$

essas obedecerão as equações de continuidade

$$\frac{d\Phi_i^\mu}{dx^\mu} = 0, \quad (1.56)$$

e dizemos que são conservadas. Na literatura [4], essas são chamadas densidades de corrente próprias. Portanto, se a integral fundamental for invariante por um grupo de transformações finito, as equações de campo implicam na conservação das densidades de corrente próprias. A equação (1.56) sintetiza o conteúdo físico do primeiro teorema de Noether.

A condição de invariância da ação implica, nos extremos do problema variacional, nas condições de fronteira

$$\int_\Omega d\omega \frac{d\Phi_i^\mu}{dx^\mu} = \int_{\partial\Omega} d\sigma n_\mu \Phi_i^\mu \varepsilon^i = 0,$$

ou seja,

$$n_\mu \Phi_i^\mu|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (1.57)$$

que podem ser obedecidas se as densidades de corrente forem nulas, ou mesmo tangentes à mesma hiper-superfície, para os pontos que a ela pertencem. Neste caso, o fluxo das correntes próprias deve ser restrito ao volume Ω .

Vamos falar no caso em que a teoria seja apenas quasi-invariante, ou seja, quando $\Psi \neq 0$.

Vamos assumir que esse termo possa ser escrito como

$$\Psi = \Psi_a (\Delta\phi^a - \phi_\mu^a \delta x^\mu),$$

em que Ψ_a podem ser relacionadas com termos de fontes. Neste caso, temos as leis de conservação não homogêneas

$$\Psi_a \left(\frac{\delta\phi'^a}{\delta\varepsilon^i} - \phi_\mu^a \frac{\partial y^\mu}{\partial\varepsilon^i} \right) - \frac{d\Phi_i^\mu}{dx^\mu} = 0. \quad (1.58)$$

A situação de quasi-invariância é equivalente à situação de invariância forte cujas equações de campo sejam equações de Euler-Lagrange generalizadas

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} = \Psi_a. \quad (1.59)$$

Com este ponto de vista podemos ver como as funções Ψ_a podem ser relacionadas com campos fontes. As equações não homogêneas (1.58) indicam o quanto a ação se desvia da invariância com a adição de campos externos. Ainda que o sistema perca sua invariância, esse desvio é bem definido e, por isso, podemos justificar o uso do termo “quasi-invariante” para essas teorias.

1.2.2 Integrais de movimento

As integrais de movimento na mecânica clássica são quantidades invariantes por evolução temporal, como por exemplo a energia, o momento linear e o momento angular em sistemas isolados. Essa qualidade é definida também pela existência do primeiro teorema de Noether na versão do problema variacional para esses casos. Quando tratamos de sistemas mecânicos, o tempo é o único parâmetro de evolução e os sistemas são, no geral, dependentes da escolha de parametrização. Essa qualidade da mecânica clássica, aliada à invariância desta com relação ao grupo de Galilei, dá origem a um conjunto de características bastante peculiar. Como exemplo, podemos citar o fato de que todas as teorias Hamiltonianas que podemos construir com o cenário clássico são equivalentes, ou seja, existe apenas uma estrutura Hamiltoniana para cada problema na mecânica clássica.

Contudo, as teorias físicas mais importantes são invariantes por reparametrizações, com densidades Lagrangianas independentes do ponto do espaço-tempo. Assim, o processo de escolha de parâmetro é arbitrário. Este fato é bem explorado em teorias de campos, já que a parametrização pode sempre ser escolhida levando em conta critérios físicos, como por exemplo o referencial de um observador ou, até mesmo, critérios de conveniência.

Para escolher uma parametrização em teorias de campos, vamos usar uma transformação

de coordenadas tal que

$$x^\mu \longrightarrow y^\mu = \Sigma^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.60)$$

Vamos escolher $\tau = y^0 = \Sigma^0_\mu x^\mu$ como parâmetro de evolução. O parâmetro τ está, dessa forma, relacionado com o eixo y^0 , que é uma combinação linear das coordenadas x^μ .

Agora, vamos supor uma família de hiper-superfícies definida pela equação

$$\Xi(y^\mu, \tau) = 0,$$

que seja ortogonal ao eixo y^0 . Os membros da família são tais que nunca se interceptam no volume Ω . A ação, calculada entre os valores τ_0 e τ_1 que delimitam duas superfícies da família, é dada por

$$A = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int_{\Xi} L d\sigma, \quad (1.61)$$

em que Ξ é o d-volume de uma hiper-superfície $\Xi(\tau)$ a τ constante, enquanto $d\sigma$ é seu elemento de volume. Podemos definir a quantidade

$$L = \int_{\Xi} L d\sigma, \quad (1.62)$$

que é a integral da densidade Lagrangiana sobre Ξ , chamada de função Lagrangiana. A integral fundamental tem a forma

$$A = \int_{\tau_0}^{\tau_1} L d\tau. \quad (1.63)$$

Esta ação assume, portanto, forma análoga à da mecânica clássica.

Entretanto, não podemos definir a função Lagrangiana (1.62) impunemente. Ela deve ser uma quantidade finita, de modo que condições de contorno apropriadas devem ser impostas aos campos e suas derivadas na fronteira $\partial\Xi$. De modo geral, vamos supor que os campos e todas as suas derivadas se anulem nesses pontos. A primeira variação da ação, (1.24), pode ser escrita nas coordenadas y^μ :

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dy^\mu} \left\{ -H^\mu_\beta \delta y^\beta + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a_\mu} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a_{\mu\nu}} \delta \phi^a_\nu + \dots \right\},$$

em que, neste desenvolvimento apenas, estamos considerando Ω como o domínio do sistema transformado, com elemento de volume $d\omega = (\det \Sigma) dy^0 \dots dy^n$. Também estamos mantendo a notação para as derivadas, de modo que $\phi^a_\mu = \partial \phi^a / \partial y^\mu$.

Vamos nos concentrar primeiro no termo de divergência total. Ele pode ser escrito por

$$\begin{aligned} \text{div} \equiv & \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int_{\Xi} d\sigma \frac{d}{dy^0} \left\{ -H^0_{\beta} \delta y^{\beta} + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_0^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{0\nu}^a} \delta \phi_{\nu}^a + \dots \right\} \\ & + \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int_{\Xi} d\sigma \frac{d}{dy^I} \left\{ -H^I_{\beta} \delta y^{\beta} + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_I^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{I\nu}^a} \delta \phi_{\nu}^a + \dots \right\}, \end{aligned}$$

em que $I = 1, \dots, d$. A última integral torna-se um termo de fronteira em $\partial\Xi$ e este termo deve ser nulo de acordo com as condições de fronteira que escolhemos para os campos. Assim, temos

$$\text{div} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \frac{d}{d\tau} \left\{ -H^0_{\beta} \delta y^{\beta} + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_0^a} \delta \phi^a + \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{0\nu}^a} \delta \phi_{\nu}^a + \dots \right\}, \quad (1.64)$$

em que definimos

$$H^{\alpha}_{\beta} \equiv \int_{\Xi} H^{\alpha}_{\beta} d\sigma. \quad (1.65)$$

Supondo que as variações se anulem nos pontos τ_0 e τ_1 , esse termo de divergência é nulo. Se $\delta A = 0$, temos satisfeitas as equações de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} = 0.$$

Com as condições de contorno nos campos, essas equações equivalem a

$$\frac{\delta L}{\delta \phi^a} - \frac{d}{d\tau} \frac{\delta L}{\delta \phi_0^a} + \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\delta L}{\delta \phi_{00}^a} - \dots = 0. \quad (1.66)$$

Os demais termos tornam-se termos de fronteira em Ξ e, por essa razão, são nulos.

Com este procedimento, temos um formalismo idêntico ao da mecânica clássica. Entretanto, a interpretação sobre a dinâmica dos campos deve ser revista. Como vimos anteriormente, os campos

$$\phi^a(y) = \phi^a(\tau, \mathbf{y})$$

e suas derivadas em cada ponto do espaço-tempo constituem uma solução do problema variacional se obedecerem as equações (1.31). Se definirmos as funções

$$\phi^a(\tau) = \int_{\Xi} \phi^a(\tau, \mathbf{y}) d\sigma, \quad (1.67)$$

assim como para todas as derivadas com relação ao parâmetro τ , as equações de Euler-Lagrange (1.66) ainda valem para os campos substituídos por $\phi^a(\tau)$, que representam uma

configuração integrada sobre uma hiper-superfície $\Xi(\tau)$, a τ constante. As equações de campo tornam-se equações dinâmicas que nos dizem como uma configuração em $\tau = \tau_0$ evolui para um valor posterior $\tau = \tau_1$.

Neste cenário, o primeiro teorema de Noether, para o sistema de coordenadas y^μ , implica nas equações

$$\frac{d\Phi_i^\mu}{dy^\mu} = 0. \quad (1.68)$$

Integrando-as no volume Ξ , temos

$$\int_{\Xi} d\sigma \frac{d\Phi_i^0}{d\tau} + \int_{\Xi} d\sigma \nabla \cdot \Phi_i = 0,$$

que implica, com a nulidade da segunda integral, em

$$\int_{\Xi} d\sigma \frac{d\Phi_i^0}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_{\Xi} d\sigma \Phi_i^0 = 0.$$

Assim, as cargas definidas por

$$Q_i^0 \equiv \int_{\Xi} d\sigma \Phi_i^0 \quad (1.69)$$

são integrais de movimento, ou seja, invariantes por evolução com relação ao parâmetro τ .

De modo usual, o procedimento utilizado neste parágrafo é o início da descrição canônica (ou formalismo Hamiltoniano) de teorias de campos relativísticas. Essas teorias possuem a simetria de Poincaré, que envolve translações e rotações no espaço-tempo, como simetria fundamental. A densidade de corrente conservada pela simetria de translações é o tensor densidade de energia-momento canônico

$$H_\nu^\mu \equiv \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\mu^a} \phi_\nu^a + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{\mu\alpha}^a} \phi_{\alpha\nu}^a + \dots - \delta_\nu^\mu L. \quad (1.70)$$

Se escolhermos o parâmetro $\tau = t \equiv x^0$, mantendo o sistema de coordenadas x^μ , a função Hamiltoniana, definida por

$$H_0^0 \equiv \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_0^a} \phi_0^a + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{0\alpha}^a} \phi_{\alpha 0}^a + \dots - L, \quad (1.71)$$

é a integral de movimento relacionada à invariância por evolução temporal. Para teorias com derivadas de até primeira ordem, temos, com $H_0^0 \equiv H$, e $\pi_a \equiv \delta L / \delta \phi_0^a$,

$$H = p_a \phi_0^a - L,$$

em que as funções p_a são momentos canônicos. Esta função Hamiltoniana tem a mesma forma

que o seu análogo na mecânica clássica, $H = p_a \dot{q}^a - L$.

Na teoria eletromagnética de Podolsky, por exemplo, vamos tomar a componente 00 do tensor simétrico

$$T_{00} = F_{0\mu} F_0^\mu + a^2 \left[2\partial^\lambda F_0^\mu \partial_\lambda F_{0\mu} - 2\partial^\lambda F_0^\mu \partial_\mu F_{\lambda 0} + \partial_\lambda F_0^\lambda \partial_\mu F_0^\mu \right] - L.$$

Com a métrica $\eta = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ e explicitando as componentes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, temos a densidade de energia do campo de Podolsky [6]

$$\mathcal{E} \equiv T_{00} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + a^2 \left[(\nabla \cdot \mathbf{E})^2 + \left(\dot{\mathbf{E}} - \nabla \times \mathbf{B} \right)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \square \mathbf{E} + 4\mathbf{E} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \right\}.$$

Esta é a densidade de energia conservada por evolução temporal.

1.2.3 O segundo teorema

Para a discussão do segundo teorema de Noether, vamos considerar a transformação (1.52),

$$\delta x^\mu = \frac{\delta y^\mu}{\delta \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon^i=0} \varepsilon^i, \quad (1.72)$$

e uma transformação nos campos que dependa de um conjunto de N funções $\lambda(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta \phi^a &\equiv \frac{\delta \phi^a}{\delta y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon^i=\lambda^i=0} \varepsilon^i + \phi_\nu^a \delta x^\nu + \frac{\delta \phi^a}{\delta \lambda^i} \frac{d\lambda^i}{dy^\alpha} \frac{dy^\alpha}{dx^\nu} \Big|_{\varepsilon^i=\lambda^i=0} \delta x^\nu \\ &= \frac{\delta \phi^a}{\delta y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon^i=\lambda^i=0} \varepsilon^i + \phi_\nu^a \delta x^\nu + \frac{\delta \phi^a}{\delta \lambda^i} \Big|_{\lambda^i=0} \frac{d\lambda^i}{dx^\nu} \delta x^\nu. \end{aligned}$$

Vamos definir as funções

$$A_i^a \equiv \frac{\delta \phi^a}{\delta y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon^i=\lambda^i=0} \quad \text{e} \quad B_i^{a\nu} \equiv \frac{\delta \phi^a}{\delta \lambda^i} \Big|_{\lambda^i=0} \delta x^\nu.$$

Dessa forma,

$$\Delta \phi^a = A_i^a \varepsilon^i + B_i^{a\nu} \frac{d\lambda^i}{dx^\nu} + \phi_\nu^a \delta x^\nu. \quad (1.73)$$

A variação a ponto fixo é, portanto, dada por

$$\bar{\delta} \phi^a = \Delta \phi^a - \phi_\mu^a \delta x^\mu = A_i^a \varepsilon^i + B_i^{a\nu} \frac{d\lambda^i}{dx^\nu}. \quad (1.74)$$

A partir da equação de Lie (1.48), temos

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} \left[A_i^a \varepsilon^i + B_i^{a\nu} \frac{d\lambda^i}{dx^\nu} \right] - \frac{d\Phi^\mu}{dx^\mu} = 0, \quad (1.75)$$

com Φ^μ definido em (1.27). Podemos escrever esta equação como

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} A_i^a \varepsilon^i - \frac{d}{dx^\nu} \left[\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \right] \lambda^i - \frac{d}{dx^\nu} \left[\Phi^\nu - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \lambda^i \right] = 0.$$

Agora, vamos supor que $\lambda^i(x) = \varepsilon^i(x)$. Temos

$$\left[\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} A_i^a - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \right) \right] \varepsilon^i - \frac{d}{dx^\nu} \left[\Phi_i^\nu \varepsilon^i - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \varepsilon^i \right] = 0. \quad (1.76)$$

Temos que usar um resultado forte devido ao fato de que os parâmetros de transformação são funções do espaço-tempo. Enquanto o primeiro teorema de Noether lida com o caso de parâmetros constantes, em que as transformações são globais e a invariância da ação é definida em todo o domínio Ω , a invariância da ação por transformações com parâmetros que dependem do espaço-tempo é local. A integral fundamental não só é invariante quando calculada num volume Ω , mas também em qualquer sub-domínio $\bar{\Omega}$ de $d+1$ dimensões contido em Ω . Isso nos obriga a tomar a integral

$$\int_{\bar{\Omega}} d\bar{\omega} \frac{d}{dx^\nu} \left[\Phi_i^\nu \varepsilon^i - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \varepsilon^i \right] \quad (1.77)$$

nula em qualquer sub-domínio, com exceção do volume total Ω . Dessa forma, a equação de Lie nos fornece o resultado

$$\int_{\bar{\Omega}} \left[\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} A_i^a - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \right) \right] \varepsilon^i d\bar{\omega} = 0.$$

Como os parâmetros são arbitrários, temos as relações

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} A_i^a - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\nu} \right) = 0. \quad (1.78)$$

Estas são as chamadas identidades de Noether.

Assim, o segundo teorema de Noether atesta que, quando a integral fundamental é invariante por transformações com parâmetros locais, existem N identidades que envolvem combinações lineares das derivadas de Lagrange com relação aos campos.

As identidades de Noether (1.78) podem ser colocadas na forma de uma equação de conservação covariante. Para tal, definimos as funções $G_{a\nu}^i$ tais que

$$G_{a\nu}^i(x) B_j^{b\mu}(y) = \delta_j^i \delta_a^b \delta_\nu^\mu \delta^{d+1}(x-y).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a}A_i^a - \frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a}B_i^{a\nu}\right) &= \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a}B_i^{a\mu}\right)A_j^b G_{b\mu}^j - \delta_\nu^\mu \frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a}B_i^{a\nu}\right) \\ &= -\left[\frac{d}{dx^\mu} - A_j^b G_{b\mu}^j\right]\left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a}B_i^{a\mu}\right) = -\nabla_\mu\left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a}B_i^{a\mu}\right),\end{aligned}$$

em que definimos a derivada covariante

$$\nabla_\mu \equiv \frac{d}{dx^\mu} - \Gamma_\mu, \quad (1.79)$$

com os campos de conexão

$$\Gamma_\mu \equiv A_j^b G_{b\mu}^j. \quad (1.80)$$

Dessa forma, as identidades de Noether podem ser escritas por

$$\nabla_\mu \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\mu} \right) = 0. \quad (1.81)$$

Essas identidades são independentes das equações de movimento e não dependem das condições de fronteira dos campos ou das variações do problema variacional. São válidas para qualquer configuração de campos, extremos ou não. Elas recebem o nome de leis de conservação impróprias: não são verdadeiramente leis de conservação. As quantidades

$$\Upsilon_i^\mu \equiv \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi^a} B_i^{a\mu} \quad (1.82)$$

são chamadas correntes impróprias. Se as equações de campo forem obedecidas, as correntes impróprias obedecem a leis próprias de conservação:

$$\frac{d\Upsilon_i^\mu}{dx^\mu} = 0. \quad (1.83)$$

Na fronteira de Ω , a integral (1.77) não pode ser levada a zero para transformações com forma geral. Assim, para campos que são extremos do problema variacional, a equação (1.76) fornece

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx^\nu} \left[\Phi_i^\nu \varepsilon^i - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} \right] &= \frac{d\Phi_i^\nu}{dx^\nu} \varepsilon^i - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \right) \frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} + \Phi_i^\nu \frac{d\varepsilon^i}{dx^\nu} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} \right) \\ &= \frac{d\Phi_i^\nu}{dx^\nu} \varepsilon^i + \left[\Phi_i^\mu - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \right) \right] \frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} \\ &\quad - \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\mu^a} B_i^{a\nu} \right) \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{d\varepsilon^i}{dx^\mu} \right) = 0.\end{aligned}$$

Independência dos parâmetros e de suas derivadas resulta nas relações

$$\frac{d\Phi_i^\mu}{dx^\mu} = 0, \quad (1.84)$$

$$\Phi_i^\mu = \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} \right), \quad (1.85)$$

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a\mu} + \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\mu^a} B_i^{a\nu} = 0. \quad (1.86)$$

Portanto, na validade das equações de Euler-Lagrange, temos uma corrente própria conservada segundo a relação (1.84). Essa corrente, de acordo com (1.85), pode ser escrita como uma divergência ordinária de um tensor de segunda ordem que, ainda de acordo com (1.86), deve ser antissimétrico nos índices do espaço-tempo. Este conjunto de relações não é, obviamente, independente. Se a corrente é escrita como a divergência de um tensor antissimétrico, a lei de conservação (1.84) é automática, devido à simetria das derivadas.

Se leis de conservação próprias são obedecidas, integrais de movimento podem ser encontradas com uma escolha de parametrização, na forma de

$$\begin{aligned} Q_i^0 &= \int_{\Xi} d\sigma \Phi_i^0 = \frac{1}{2} \int_{\Xi} d\sigma \frac{d}{dy^\nu} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_\nu^a} B_i^{a0} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_0^a} B_i^{a\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Xi} d\sigma \frac{d}{dy^I} \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_I^a} B_i^{a0} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_0^a} B_i^{aI} \right). \end{aligned}$$

Com o teorema de Gauss-Ostrogradski, essa carga pode ser escrita por

$$Q_i^0 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Xi} dv n_I \left(\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_I^a} B_i^{a0} - \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_0^a} B_i^{aI} \right), \quad (1.87)$$

como uma integral de $d - 2$ dimensões na fronteira de Ξ . Além desse fato, a equação de continuidade (1.83) implica que as cargas $\Sigma_\mu^0 \Upsilon_i^\mu$, em que Σ é a matriz definida em (1.60), são também integrais de movimento.

Se a ação for quasi-invariante segundo as transformações locais, ou seja, se $\Psi \neq 0$, podemos mostrar que o procedimento acima acresce às identidades (1.81) as relações

$$\nabla_\mu (\Psi_a B_i^{a\mu}) = 0. \quad (1.88)$$

Como já discutimos, os campos Ψ_a podem ser representados por campos fontes, de modo que as equações (1.88) representam conservação covariante desses campos.

Com a discussão do problema variacional e dos teoremas de Noether temos as ferramentas necessárias para a tentativa de desenvolvimento do formalismo de Hamilton-Jacobi em forma covariante, que será foco do capítulo 2. Dessa forma, trataremos o formalismo como uma

extensão natural do problema variacional inicial, embora sua utilização para sistemas físicos em teorias de campos ainda seja um problema em aberto. Veremos que a invariância por reparametrizações inviabiliza o procedimento covariante para a construção de uma teoria em forma canônica. Ainda assim essa tentativa engloba de maneira satisfatória o ponto de partida para um futuro desenvolvimento neste campo.

Referências

- [1] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, fourth edition, Dover Publications (1986).
- [2] I. M. Gelfand & S. V. Fomin, *Calculus of variations*, Dover Publications (2000).
- [3] H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations; its role in mathematics and physics*, Van Nostrand (1966).
- [4] N. P. Konopleva & V. N. Popov, *Gauge fields*, Harwood Academic Publishers (1981).
- [5] A. O. Barut, *Electrodynamics and the classical theory of fields and particles*, McMillan (1982).
- [6] C. A. Bonin, R. Bufalo, B. M. Pimentel & G. E. R. Zambrano, *Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications on the Stefan-Boltzmann law*, Phys. Rev. D **81**, 025003 (2010).
- [7] E. Noether, *Invariant variation problems*, tradução por M. A. Travel, arXiv:physics/0503066v1 [physics.hist-ph] (2005).

Capítulo 2

O formalismo de Hamilton-Jacobi generalizado

Introdução

Neste capítulo, estudaremos o formalismo de Hamilton-Jacobi sob o ponto de vista do quadro completo de Carathéodory [1], com foco em teorias de campos. Como introdução, utilizaremos de uma discussão qualitativa do quadro completo do cálculo variacional, que envolve um conjunto de relações geométricas consequentes da extremização de uma integral fundamental no contexto de sistemas de 1-parâmetro, ou seja, com base no problema variacional definido pela ação (1.2), que é uma integral simples no tempo t . A exposição dessas ideias pretende lançar luz para o objetivo deste capítulo, que é o estudo de teorias de campos.

O ponto essencial do quadro completo de Carathéodory envolve a definição de integrais fundamentais equivalentes à integral (1.2) pela adição de uma diferencial total de uma função arbitrária. Esta definição lança o conceito de Lagrangianas equivalentes: funções Lagrangianas que diferem apenas pela derivada temporal total de uma função arbitrária definem problemas variacionais equivalentes, que resultam nas mesmas equações de Euler-Lagrange. Denotaremos esta função por $S(t, q^i)$ e esta vem a ser uma função geratriz de uma transformação de ponto em $\mathbb{Q}_n$. Com posse dessa informação, podemos nos perguntar se é possível encontrar uma transformação de ponto tal que a integral fundamental transformada satisfaça identicamente os requerimentos para que seja um extremo: que a ação equivalente seja nula na trajetória C e seja sempre menor (ou maior) que seu valor calculado em qualquer

trajetória que pertença a uma vizinhança infinitesimal de C . Se essa transformação existir, a função S deve obedecer um conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem, que podemos chamar de equações de Hamilton-Jacobi. No caso especial em que a teoria não possui vínculos, o sistema possui apenas uma equação de Hamilton-Jacobi [2].

A função S , como solução de um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem, representa uma família de hiper-superfícies de r -parâmetros em $\mathbb{Q}_n$, $\Sigma : S(t, \sigma^z, q^i) = 0$, em que σ são os parâmetros. A condição de extremização também garante que os momentos conjugados $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}^i$ sejam proporcionais ao gradiente de S , ou seja, $p_i = \partial S / \partial q^i$. A trajetória C que extremiza a ação torna-se, então, parte de uma congruência de curvas ortogonal à família Σ em cada ponto de $\mathbb{Q}_n$. Tal congruência é solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que consistem nas equações características do sistema. Podemos chamar a congruência de curvas pelo nome de curvas características do sistema de Hamilton-Jacobi.

A ação calculada entre duas hiper-superfícies distintas é independente da curva característica, o que caracteriza a família Σ como uma família de superfícies geodesicamente equidistantes. Como consequência, as curvas características são geodésicas referentes ao problema variacional. Para representar este cenário, dizemos que a condição necessária e suficiente para a extremização da integral fundamental é a existência de uma congruência de curvas características pertencente a uma família de hiper-superfícies geodesicamente equidistantes. Este conjunto de relações geométricas é o que chamamos de quadro completo do cálculo variacional.

Este mesmo quadro completo não é tão fácil de ser definido para campos, mas uma generalização do procedimento descrito acima é largamente utilizada na literatura, às vezes sem o devido cuidado. Uma das razões é que as integrais fundamentais que descrevem teorias de campos consistem em integrais múltiplas, sobre o volume de um dado domínio de parâmetros, em vez de uma curva. Diferentemente do caso da mecânica clássica, na qual a definição de ações equivalentes só pode ser feita a partir de diferenciais totais, em teoria de campos existem outras formas de se definir integrais fundamentais equivalentes, que levam a diferentes formalismos de Hamilton-Jacobi.

2.1 Integrais equivalentes e condições para extremos da integral fundamental

Para descrever o formalismo de Hamilton-Jacobi para campos, desejamos encontrar um conjunto de relações equivalentes ao quadro completo de Carathéodory. Este conjunto de relações deve envolver a existência de uma configuração que descreva um campo geodésico,

pertencente a uma família de hiper-superfícies geodesicamente equidistantes no espaço de configuração dos campos. No que consistem esses objetos, quando observamos sistemas cuja integral fundamental é uma integral múltipla, veremos através de uma construção que pretende ser análoga à de Carathéodory para integrais simples.

O primeiro passo para este objetivo é definir um método pelo qual podemos introduzir integrais equivalentes à integral fundamental

$$A[\phi] \equiv \int_{\Omega} L(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^a, \phi_{\mu\nu}^a, \dots) d\omega. \quad (2.1)$$

Diferentemente do caso em que a ação depende apenas de um parâmetro, não existe um único meio de se definir integrais equivalentes. O método mais simples é através de uma diferencial funcional total, ou seja, pela adição de um termo de fronteira na ação. Este método foi primeiramente proposto por Weyl [3, 4]. O segundo método para integrais equivalentes mais conhecido foi proposto pelo próprio Carathéodory e envolve a adição de um determinante à densidade Lagrangiana [4]. Cada método envolve uma definição diferente para campos geodésicos e levam a formalismos de Hamilton-Jacobi distintos. Uma peculiaridade muito interessante sobre o método de Carathéodory é que sua definição leva a uma Hamiltoniana definida pelo determinante do tensor energia-momento. Aqui, trabalharemos com a teoria de Weyl por dois motivos: primeiro, é o procedimento que leva a campos geodésicos análogos aos da mecânica clássica. Segundo, suas limitações não impedem que ela seja praticável para as teorias de campos que são mais importantes na física. A teoria de Carathéodory, por outro lado, exige que a Lagrangiana seja sempre positiva, imposição que acaba por excluir muitos problemas de interesse.

Vamos observar a integral

$$\bar{A}[\phi] \equiv A[\phi] - \int \delta S, \quad (2.2)$$

em que

$$\delta S \equiv \frac{dS^\mu}{dx^\mu} d\omega = \left[\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi^a} \phi_\mu^a + \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_\nu^a} \phi_{\mu\nu}^a + \dots \right] d\omega,$$

na qual consideramos um conjunto de funções $S^\mu = S^\mu(x^\alpha, \phi^a, \phi_\mu^a, \dots)$. Devemos nos lembrar que na expressão à esquerda da diferencial acima temos integrais implícitas devido ao processo de derivação funcional. Sobre os argumentos das funções S^μ , podemos limitá-los a derivadas dos campos até ordem $k-1$ se a Lagrangiana apresentar derivadas até ordem k . O motivo ficará claro adiante.

Segundo o teorema de Gauss-Ostrogradski, a integral

$$\int \delta S = \int_{\Omega} \frac{dS^\mu}{dx^\mu} d\omega$$

depende apenas dos valores de S^μ na fronteira $\partial\Omega$. Portanto, a primeira variação deste termo, se considerarmos fixos os parâmetros x^μ e se escolhermos $\delta^*\phi = 0$ para todo ponto em $\partial\Omega$, é nula. Se uma configuração é um extremo da ação (2.1), ela também será um extremo de (2.2). Essas integrais fundamentais definem, por consequência, problemas variacionais equivalentes. Assim, de forma equivalente à mecânica clássica, a adição de uma divergência total à densidade Lagrangiana leva a uma densidade Lagrangiana equivalente:

$$\bar{L} \equiv L - \frac{dS^\mu}{dx^\mu}. \quad (2.3)$$

Este procedimento leva à nossa primeira limitação. Integrais equivalentes não podem ser definidas simplesmente por (2.2) se o problema variacional tiver fronteira variável, ou seja, se $\delta x^\mu \neq 0$ em (1.10) e (1.11). Nesses casos, uma generalização torna-se obviamente necessária. Contudo, vamos nos preocupar apenas com o caso de problemas variacionais com fronteira fixa, o que abriga de forma geral os sistemas mais importantes em teorias de campos.

Temos devidamente elaborada, portanto, uma forma de definir integrais equivalentes à ação (2.1), de modo que podemos nos preocupar em encontrar extremos para a integral (2.2). A construção a seguir, na direção desse objetivo, vem a ser uma generalização do método desenvolvido em [5].

A princípio, vamos considerar a configuração

$$\phi : \phi^a = \phi^a(x^\mu), \quad (2.4)$$

definida em $\mathbb{Q}$. Se as funções $\phi^a(x)$ devem ser pelo menos de classe C^{2k} , podemos supor a existência de um conjunto de equações diferenciais

$$\phi_\mu : \phi_\mu^a = \beta_\mu^a(\phi^a, x^\mu), \quad (2.5)$$

tais que a configuração (2.4) seja solução de (2.5). De fato, (2.5) define uma configuração dos campos que habitam o espaço tangente $T\mathbb{Q}$ do espaço de configuração. De forma análoga,

$$\phi_{\mu\nu} : \phi_{\mu\nu}^a = \beta_{\mu\nu}^a(\phi_\mu^a, \phi^a, x^\mu), \quad (2.6)$$

correspondem aos campos do espaço tangente dos tensores simétricos de segunda ordem, $T^2\mathbb{Q}$. Construímos, assim, coordenadas para os espaços tangentes a $\mathbb{Q}$ até ordem k , considerando os campos $(\phi_\mu^a, \phi_{\mu\nu}^a, \dots)$ como variáveis independentes entre si, relacionadas por um conjunto de k equações diferenciais tais como (2.5) e (2.6), que escreveremos de forma compacta por

$$\phi_{(i)} : \phi_{(i)}^a = \beta_{(i)}^a(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(i-1)}^a). \quad (2.7)$$

Nessa expressão, o índice i assume os valores de 1 a k e representa a ordem da derivada dos

campos. Por exemplo, quando $i = 1$, a equação (2.7) torna-se a equação para as velocidades (2.5). Se $i = 2$, temos reproduzida a equação (2.6).

Conhecidos todos os campos dos espaços tangentes a $\mathbb{Q}$, assumiremos que existe um conjunto de funções S^μ tal que

$$\bar{L}(x^\mu, \phi^a, \beta_{(i)}^a) = 0. \quad (2.8)$$

Além de (2.8), vamos supor que

$$\bar{L}(x^\mu, \phi^a, \phi_{(i)}^a) > 0, \quad \text{ou} \quad \bar{L}(x^\mu, \phi^a, \phi_{(i)}^a) < 0, \quad (2.9)$$

para quaisquer $\phi_{(i)}^a \neq \beta_{(i)}^a$.

Neste caso, a configuração ϕ é um extremo global da integral (2.2), já que esta integral será nula sempre que $\phi_{(i)}^a = \beta_{(i)}^a$, em razão da validade de (2.8), e será sempre maior ou menor que zero para quaisquer $\phi_{(i)}^a \neq \beta_{(i)}^a$. No caso do sinal maior, a integral fundamental definida por $\bar{L}$ será mínima. Caso contrário, teremos um máximo. Também podemos definir as desigualdades (2.9) para qualquer valor de $\phi_{(i)}^a$ em uma vizinhança ϵ de $\beta_{(i)}^a$ e, assim, lidaríamos com um mínimo local, fato que não afeta o procedimento que teceremos aqui.

Portanto, estamos trabalhando com uma família de densidades Lagrangianas, cuja ação assume um valor extremo quando os campos tangentes obedecem as equações (2.7). As derivadas de $\bar{L}$ com relação aos campos tangentes devem ser nulas independentemente no ponto de mínimo, ou seja,

$$\left. \frac{\delta \bar{L}}{\delta \phi_{(i)}^a} \right|_{\phi_{(i)}^a = \beta_{(i)}^a} = 0. \quad (2.10)$$

A densidade Lagrangiana depende de derivadas dos campos até ordem k . Vamos tomar uma das condições (2.10), digamos, com relação a um campo tangente de ordem i . Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \phi_{(i)}^b} &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^b} - \frac{\delta}{\delta \phi_{(i)}^b} \frac{dS^\nu}{dx^\nu} \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^b} - \frac{\delta}{\delta \phi_{(i)}^b} \frac{\partial S^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\delta}{\delta \phi_{(i)}^b} \sum_{m=0}^{k-1} \left[\phi_{\nu(m)}^a \frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^b} - \frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(i-1)}^b} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(i)}^b} - \sum_{m=0}^{k-1} \left[\phi_{\nu(m)}^a \frac{\delta}{\delta \phi_{(i)}^b} \frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^b} - \frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(i-1)}^b} - \frac{d}{dx^\nu} \left[\frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(i)}^b} \right]. \end{aligned}$$

Para qualquer valor de m tal que $0 \leq m \leq k - 1$, temos, no ponto de mínimo,

$$\frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(m)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(m)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{\nu(m)}^a} \right], \quad (2.11)$$

de acordo com (2.10). Se $m = k - 1$, o que corresponde a $i = k$, temos

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \phi_{\mu(k-1)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu(k-1)}^a} - \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(k-1)}^a},$$

pois as funções S^μ dependem dos campos tangentes apenas até ordem $k - 1$. Portanto, mais uma vez no ponto de mínimo,

$$\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(k-1)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu(k-1)}^a}. \quad (2.12)$$

Se tomarmos uma ordem abaixo, (2.11) indica que

$$\frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(k-2)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(k-2)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{\nu(k-2)}^a} \right] = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(k-2)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu(k-2)}^a} \right].$$

Na ordem $k - 3$,

$$\frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(k-3)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(k-3)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{\nu(k-3)}^a} \right] = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(k-3)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu(k-3)}^a} - \frac{d}{dx^\lambda} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu\lambda(k-3)}^a} \right] \right].$$

Seguindo este processo de iteração, temos a expressão geral

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^\nu}{\delta \phi_{(m)}^a} &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(m)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu\mu(m)}^a} - \frac{d}{dx^\lambda} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu\mu\lambda(m)}^a} - \frac{d}{dx^\gamma} \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu\mu\lambda\gamma(m)}^a} - \dots \right] \right] \right] \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu(m)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu\mu(m)}^a} + \frac{d}{dx^\mu} \frac{d}{dx^\lambda} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu\mu\lambda(m)}^a} \\ &\quad - \frac{d}{dx^\mu} \frac{d}{dx^\lambda} \frac{d}{dx^\gamma} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\nu\mu\lambda\gamma(m)}^a} - \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nesta expressão, temos à direita a derivada de Lagrange (1.21), de modo que podemos escrever

$$\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} = \frac{\delta \bar{L}}{\delta \phi_{\mu(m)}^a}, \quad (2.14)$$

para todo $0 \leq m \leq k - 1$.

Vamos considerar uma densidade Lagrangiana $L(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^a, \phi_{\mu\nu}^a)$, cujo exemplo mais célebre vem a ser a teoria eletromagnética generalizada de Podolsky. Neste caso, $k = 2$, enquanto

m assume os valores de zero e 1. As condições (2.14) assumem a forma

$$\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_\nu^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi^a} &= \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} - \frac{d}{dx^\nu} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} - \phi_\nu^b \frac{\delta^2 L}{\delta \phi^b \delta \phi_{\mu\nu}^a} - \phi_{\nu\lambda}^b \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_\lambda^b \delta \phi_{\mu\nu}^a} - \phi_{\nu\lambda\gamma}^b \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{\lambda\gamma}^b \delta \phi_{\mu\nu}^a}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Portanto, as derivadas funcionais das funções S^μ estão relacionadas com derivadas funcionais da Lagrangiana através das relações (2.14), como condições para que a ação seja um extremo na configuração (2.4). Notemos que essas expressões dependem dos campos tangentes de ordem superior a k .

Observando a condição (2.8), temos

$$L - \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} - \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\mu(m)}^a \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} = 0,$$

novamente lembrando que a igualdade vale para $\phi_{(i)}^a = \beta_{(i)}^a$. Neste caso, podemos escrever

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = L - \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\mu(m)}^a \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a},$$

em que as derivadas de S^μ são obtidas da expressão (2.14), resultando em

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} = L - \sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a}. \quad (2.17)$$

Agora, vamos analisar a desigualdade $\bar{L}(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^{*a}, \dots) > 0$, válida para qualquer $\phi_{(i)}^{*a} \neq \beta_{(i)}^a$, que é análoga à expressão

$$L^* - \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} - \sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^{*a} \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} > 0. \quad (2.18)$$

Nesta, usamos a notação $L^* \equiv L(x^\mu, \phi^a, \phi_\mu^{*a}, \dots)$. As derivadas funcionais não mudam seu valor para o caso em que $\phi_{(i)}^{*a} \neq \beta_{(i)}^a$, de modo que podemos substituir (2.14) e (2.17) diretamente em (2.18). Apenas como notação simplificada, vamos usar $\gamma_{(i)}^a \equiv \phi_{(i)}^{*a} - \phi_{(i)}^a$. Obtemos, por consequência, a desigualdade

$$L^* - L - \sum_{i=1}^k \gamma_{(i)}^a \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} > 0. \quad (2.19)$$

À esquerda, temos a função de Weierstrass:

$$E_W \equiv L^* - L - \sum_{i=1}^k \gamma_{(i)}^a \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a}. \quad (2.20)$$

A condição (2.9) pode, portanto, ser substituída pela condição de Weierstrass

$$E_W(x^\mu, \phi^a, \gamma_{(i)}^a) > 0. \quad (2.21)$$

Para compreender melhor o papel dessa função no problema variacional, vamos considerar a integral

$$J[\phi] \equiv \int \delta \mathcal{S} = \int_{\Omega} d\omega \left[\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\mu(m)}^a \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right].$$

Esta integral é um termo de fronteira e, portanto, independente das funções ϕ_μ^{*a} , ou mais especificamente, independe da configuração dos campos. Substituindo (2.14) e (2.17) nessa integral, temos

$$J[\phi] = \int_{\Omega} d\omega \left[L + \sum_{i=1}^k \gamma_{(i)}^a \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \right]. \quad (2.22)$$

Esta é a integral de Hilbert, independente da configuração dos campos. Na configuração que minimiza a integral fundamental, em que $\gamma_{(i)}^a = 0$, esta integral é igual à ação (2.1), ou seja, $J[\phi = \beta] = I[\phi]$:

$$J[\phi = \beta] = \int_{\Omega} L d\omega.$$

Por isso, dizemos que a configuração que extremiza a ação é um campo geodésico.

A integral (2.22) pode ser reescrita com a definição (2.20), resultando em

$$J[\phi] = \int_{\Omega} d\omega [L^* - E_W].$$

Se a integral de Hilbert independe da configuração, temos uma identidade fundamental:

$$\int_{\Omega} L^* d\omega = \int_{\Omega} L d\omega + \int_{\Omega} E_W d\omega,$$

que induz na função de Weierstrass a interpretação de uma função de excesso, ou seja, a integral fundamental calculada em uma configuração qualquer excede seu valor calculado no ponto de mínimo pela integral dessa função. Dessa forma, a condição (2.21) é condição suficiente para que a configuração ϕ seja um mínimo da integral fundamental (2.1).

Ainda sobre a função de Weierstrass, podemos colocar a condição (2.21) em uma forma mais tratável. Vamos considerar a expansão da função L^* até segunda ordem em $\gamma_{(i)}^a$:

$$L^*(x, \phi^*) = L(x, \phi) + \sum_{i=1}^k \frac{\delta L^*}{\delta \phi_{(i)}^*} \Big|_{\phi^*=\phi} \gamma_{(i)}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\delta^2 L^*}{\delta \phi_{(i)}^* \delta \phi_{(j)}^*} \Big|_{\phi^*=\phi} \gamma_{(i)}^a \gamma_{(j)}^b. \quad (2.23)$$

De (2.20), temos

$$L^* - L = E_W + \sum_{i=1}^k \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \gamma_{(i)}^a. \quad (2.24)$$

Comparando ambas as equações, obtemos

$$\begin{aligned} E_W &= \sum_{i=1}^k \left[\frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^a} - \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \right] \gamma_{(i)}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(i)}^a \delta \phi_{(j)}^b} \gamma_{(i)}^a \gamma_{(j)}^b \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i+1)}^a} \right] \gamma_{(i)}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(i)}^a \delta \phi_{(j)}^b} \gamma_{(i)}^a \gamma_{(j)}^b \\ &= \sum_{i=2}^k \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \right] \gamma_{(i-1)}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(i)}^a \delta \phi_{(j)}^b} \gamma_{(i)}^a \gamma_{(j)}^b. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Primeiro, vamos nos concentrar no termo de primeira ordem. Ele pode ser escrito por

$$\frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \right] \gamma_{(i-1)}^a = \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \gamma_{(i-1)}^a \right] - \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \frac{d\gamma_{(i-1)}^a}{dx^\mu} = \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \gamma_{(i-1)}^a \right] - \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \gamma_{(i)}^a.$$

Agora, vamos supor que as funções $\gamma_{(i)}^a$ são nulas na fronteira de Ω . Portanto, o termo de divergência total é nulo e a função de Weierstrass toma a forma

$$E_W = - \sum_{i=2}^k \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a} \gamma_{(i)}^a + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(i)}^a \delta \phi_{(j)}^b} \gamma_{(i)}^a \gamma_{(j)}^b. \quad (2.26)$$

Assim, a condição de Weierstrass $E_W > 0$ está ligada ao polinômio à direita de (2.26), que envolve a matriz

$$W_{ab}^{ij} \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(i)}^a \delta \phi_{(j)}^b}.$$

Veremos na seção (2.2) que esta matriz tem importância fundamental. De fato, para teorias de primeira ordem, em que $i = 1$,

$$E_W = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_\mu^a \delta \phi_\nu^b} \gamma_\mu^a \gamma_\nu^b$$

e a condição (2.21) pode ser reescrita por

$$\det W_{ab}^{\mu\nu} > 0.$$

Assim, se a matriz W for positiva-definida, garante-se um mínimo da integral fundamental.

A mesma relação não vale para derivadas de ordem superior, como podemos facilmente verificar em (2.26). Contudo, é imediato notar que

$$\det W_{ab}^{kk} \neq 0 \quad (2.27)$$

é condição necessária (mas não suficiente) para a existência de extremos da integral fundamental. (2.27) é chamada condição Hessiana. Contudo, a existência de condições suficientes que envolvam formas polinomiais como a matriz Hessiana W permanece um problema em aberto para sistemas com derivadas de ordem superior.

2.2 Introdução de variáveis canônicas

A partir das relações (2.14) e (2.17) temos o que é preciso para formular a teoria de Hamilton-Jacobi. Ambas as relações podem ser sintetizadas nas expressões

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\mu(m)}^a \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} - L = 0 \quad (2.28)$$

e

$$\phi_{(i)}^a = \beta_{(i)}^a \left(x, \phi^a, \dots, \phi_{(i-1)}^a \right). \quad (2.29)$$

No entanto, assumir as condições (2.29) é inverossímil, visto que, como regra geral, o conhecimento das soluções do problema variacional é objetivo da existência do formalismo: a solução, bem como as funções β , não podem ser assumidas por princípio. Mas para que a equação (2.28) seja útil do ponto de vista operacional, precisamos conhecer as funções β . Esta equação tornar-se-ia uma equação diferencial para as funções S^μ e, se essas funções forem conhecidas, o caminho para a obtenção de extremos retorna ao foco principal.

Se o conhecimento a priori das funções β não pode ser assumido, podemos trabalhar com condições mais fracas que (2.29) através da introdução de variáveis canônicas, por uma transformação de Legendre. A transformação consiste em um mapeamento entre os campos tangentes $\phi_{(i)}^a$ e novas variáveis canônicas $\pi_a^{(i)}$, que cobrem os respectivos espaços cotangentes definidos sobre $\mathbb{Q}$. Se o mapeamento for biunívoco, expressões para os campos tangentes em função dos momentos e dos campos podem ser obtidas através da transformação de Legendre

inversa. Dizemos que existe um isomorfismo canônico entre os espaços tangentes e cotangentes a $\mathbb{Q}$.

Não existe uma forma única para se definir este mapeamento. O que podemos fazer é tomar um caminho análogo ao da mecânica clássica e esperar que, por construção, o formalismo resultante seja consistente. Vamos observar um sistema clássico tal que a função Lagrangiana dependa das derivadas das coordenadas generalizadas até primeira ordem. A integral fundamental desse sistema é a já conhecida ação de primeira ordem

$$A \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt.$$

O princípio de Hamilton para esta integral compara seu valor calculado em duas curvas entre dois valores fixos de t . A primeira variação devida a tal comparação é dada por

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right].$$

Se olharmos para o termo de fronteira, ao usarmos a definição

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

temos

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} [p \delta q] = p \delta q|_{t=t_2} - p \delta q|_{t=t_1}.$$

Através da teoria das transformações canônicas, sabemos que a 1-forma $p \delta q$ é a função geratriz de transformações de ponto no espaço de configuração, de modo que p , o momento conjugado, é gerador de transformações canônicas no espaço das coordenadas.

De maneira análoga, a primeira variação geral para o mesmo problema em teorias de campos é explícita na expressão (1.24),

$$\delta A = \int_{\Omega} d\omega \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi^a} \delta^* \phi^a + \int_{\Omega} d\omega \frac{d}{dx^\mu} \left[\sum_{m=0}^{k-1} \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu(m)}^a} \delta \phi_{(m)}^a - H^\mu_\beta \delta x^\beta \right],$$

em que temos o tensor densidade de energia-momento canônico (1.25). Essa relação sugere que os momentos canonicamente conjugados sejam definidos por

$$\pi_a^{(i)} \equiv \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(i)}^a}. \quad (2.30)$$

À direita dessa definição temos um conjunto de funções do espaço de configuração e dos campos tangentes até ordem $2k - i$. Esta definição está de acordo com a generalização para campos do procedimento de Ostrogradski [6, 7]. Se a analogia for completa (assumiremos que é, sem

provas imediatas), os momentos (2.30) devem ser geradores de transformações canônicas em um espaço de fase ainda a ser apropriadamente construído. Observando a forma

$$\sum_{i=1}^k \pi_a^{(i)} \delta \phi_{(i-1)}^a,$$

somos imediatamente levados a intuir que os momentos, membros dos espaços cotangentes de ordem i , são geradores de transformações nos espaços tangentes de ordem imediatamente inferior, $i - 1$.

Em termos das variáveis canônicas, a condição (2.14) pode ser reescrita por

$$\pi_a^{\mu(m)} = \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a}. \quad (2.31)$$

Podemos definir também a variável

$$\pi_0 \equiv \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu}, \quad (2.32)$$

que pode ser compreendida como uma simples notação. Neste caso, (2.28) torna-se

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - L = 0. \quad (2.33)$$

Para encontrar condições equivalentes a (2.29), vamos observar a definição (2.30). Para os momentos de ordem k ,

$$\pi_a^{(k)} = \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(k)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{(k)}^a} = \psi_a^{(k)} \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k)}^a \right). \quad (2.34)$$

Para obter expressões para os campos $\phi_{(k)}^a$, basta inverter essa equação. A condição necessária e suficiente vem a ser

$$\det \left[\frac{\delta \psi_a^{(k)}}{\delta \phi_{(k)}^b} \right] = \det \left[\frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(k)}^a \delta \phi_{(k)}^b} \right] \neq 0. \quad (2.35)$$

Esta é a mesma condição Hessiana que encontramos em (2.27). A matriz definida por

$$W_{ab}^{(k)(k)} \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(k)}^a \delta \phi_{(k)}^b}, \quad (2.36)$$

que é uma matriz quadrada nos índices a e b , é chamada matriz Hessiana e é a matriz Jacobiana da transformação $\phi_{(k)}^a \longrightarrow \pi_a^{(k)}$. Se essa matriz for regular, podemos escrever

$$\phi_{(k)}^a = \beta_{(k)}^a \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, \pi_a^{(k)} \right). \quad (2.37)$$

Esta expressão, bem como (2.33), nos faria intuir que a inversão de todos os campos tangentes é necessária, desde os campos de velocidades até os campos tensoriais de ordem $k - 1$. Na verdade, porque derivadas de Lagrange aparecem à direita de (2.30), necessitamos de expressões equivalentes para os campos tangentes de ordem superior a k , até ordem $2k - 1$. Podemos ter isto claro ao ver a expressão para o momento de ordem $k - 1$, dada por

$$\pi_a^{(k-1)} = \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{(k-1)}^a} = \psi_a^{(k-1)} \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k)}^a, \phi_{(k+1)}^a \right). \quad (2.38)$$

As funções à direita dependem dos campos tangentes até ordem $k + 1$ e podemos substituir (2.37) em (2.38): $\psi_{(k-1)}^a$ dependerão dos momentos $\pi_a^{(k)}$. Devido à estrutura da derivada de Lagrange, a dependência dessas funções com os campos $\phi_{(k+1)}^a$ é linear. Para inverter esta expressão, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\psi_a^{(k-1)}}{\delta\phi_{(k+1)}^b} &= \frac{\delta}{\delta\phi_{(k+1)}^b} \left[\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{(k-1)}^a} \right] = \frac{\delta}{\delta\phi_{(k+1)}^b} \left[\frac{\delta L}{\delta\phi_{(k-1)}^a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\delta L}{\delta\phi_{(k)}^a} \right] \\ &= \frac{\delta}{\delta\phi_{(k+1)}^b} \left[\frac{\delta L}{\delta\phi_{(k-1)}^a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta L}{\delta\phi_{(k)}^a} - \sum_{j=1}^{k+1} \phi_{(j)}^c \frac{\delta^2 L}{\delta\phi_{(j-1)}^c \delta\phi_{(k)}^a} \right] \\ &= - \frac{\delta\phi_{(k+1)}^c}{\delta\phi_{(k+1)}^b} \frac{\delta^2 L}{\delta\phi_{(k)}^c \delta\phi_{(k)}^a} = - \frac{\delta^2 L}{\delta\phi_{(k)}^a \delta\phi_{(k)}^b} = -W_{ab}^{(k)(k)}. \end{aligned}$$

Assim, assumindo a condição Hessiana

$$\det W_{ab}^{(k)(k)} \neq 0, \quad (2.39)$$

podemos igualmente inverter a equação (2.38):

$$\phi_{(k+1)}^a = \beta_{(k+1)}^a \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, \pi_a^{(k)}, \pi_a^{(k-1)} \right). \quad (2.40)$$

Com o mesmo processo, podemos inverter os demais campos de ordem superior a k e, porque a Lagrangiana só depende dos campos até esta ordem, o resultado sempre será

$$\frac{\delta\psi_a^{(k-m)}}{\delta\phi_{(k+m)}^b} = (-1)^m W_{ab}^{(k)(k)}, \quad \forall m \in [0, k-1],$$

de modo que a condição Hessiana (2.39) é a condição necessária e suficiente para a inversão dos campos tangentes de ordem k a ordem $2k - 1$, através das definições (2.30). Com este resultado, podemos ao menos escrever

$$\phi_{(k+m)}^a = \beta_{(k+m)}^a \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, \pi_a^{(k)}, \pi_a^{(k-1)}, \dots, \pi_a^{(k-m)} \right). \quad (2.41)$$

Quando $m = k - 1$, temos

$$\phi_{(2k-1)}^a = \beta_{(2k-1)}^a \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, \pi_a^{(1)}, \dots, \pi_a^{(k)} \right). \quad (2.42)$$

Isso é o melhor que se pode fazer. Inverter as relações para os momentos para fins de obter relações similares a (2.29) está fora de questão para os campos entre ϕ_μ^a e $\phi_{(k-1)}^a$. No entanto, se a condição Hessiana (2.39) for satisfeita, Ostrogradski mostrou ser possível a construção de um espaço de fase que contenha as variáveis canônicas $\left(\phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, \pi_a^\mu, \dots, \pi_a^{(k)} \right)$. Assim, o caminho que seguiremos será o seguinte: assumiremos que os campos $\phi_{(m)}^a$, em que $0 \leq m \leq k - 1$, são coordenadas de um espaço de configuração construído pelo produto

$$\bar{\mathbb{Q}} \equiv \prod_{m=0}^{k-1} \mathbf{T}^m \mathbb{Q}, \quad \mathbf{T}^0 \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Q}. \quad (2.43)$$

Os campos de ordem k , $\phi_{(k)}^a$, serão considerados campos de velocidades. Com a transformação de Legendre (2.30), temos as variáveis conjugadas à coordenadas $\phi_{(m)}^a$, os momentos $\pi_a^{\mu(m)}$, que são elementos pertencentes ao espaço cotangente $\mathbf{T}_\pi^* \bar{\mathbb{Q}}$ definido diretamente sobre $\bar{\mathbb{Q}}$. É importante observar que esta correspondência não se dá ordem a ordem; uma dada coordenada é conjugada ao momento de ordem imediatamente superior. Por exemplo, os campos ϕ^a são conjugados aos momentos π_a^μ e, portanto, temos $d + 1$ momentos relacionados a cada campo de ordem zero. Essa assimetria é inteiramente devida ao fato de trabalharmos em um formalismo explicitamente covariante.

Assim, assumiremos a seguinte reformulação do problema variacional: Para que a integral múltipla (2.1) seja um extremo em uma dada configuração $\phi = \left(\phi_{(m)}^a \right)$, é necessário e suficiente que exista um conjunto de funções $S^\mu \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a \right)$ tal que

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - L = 0, \quad \pi_0 \equiv \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu}, \quad \pi_a^{\mu(m)} = \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a}, \quad (2.44)$$

e que seja satisfeita a condição Hessiana

$$\det W_{ab}^{(k)(k)} \neq 0, \quad W_{ab}^{(k)(k)} \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{(k)}^a \delta \phi_{(k)}^b}. \quad (2.45)$$

As condições (2.44) e (2.45) podem, ainda, ser unidas com a definição de uma densidade Hamiltoniana canônica. (2.45) implica em (2.41), de modo que, para $m = 0$, temos a expressão (2.37) para os campos $\phi_{(k)}^a$. Assim, de (2.44) obtemos

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} + \beta_{(k)}^a \pi_a^{(k)} - L \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \beta_{(k)}^a \right) = 0. \quad (2.46)$$

Com esta expressão, definiremos simplesmente

$$H_c \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} + \beta_{(k)}^a \pi_a^{(k)} - L \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \beta_{(k)}^a \right). \quad (2.47)$$

Esta densidade depende, além do ponto do espaço-tempo, das coordenadas $\phi_{(m)}^a$ e dos momentos $\pi_a^{(i)}$. Se escrevermos (2.44) da forma

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + H_c \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right) = 0, \quad (2.48)$$

esta torna-se uma equação diferencial parcial funcional para S^μ .

Esta é a equação de Hamilton-Jacobi, que torna-se condição necessária e suficiente sobre as funções S^μ para que os momentos $\pi_a^{(i)}$ definam campos geodésicos, dentre os quais estão os extremos da integral fundamental.

Como nota sobre a densidade Hamiltoniana, desde já deve ficar claro que nossa intenção é, através deste formalismo, encontrar uma estrutura simplética no espaço das variáveis $(\phi_{(m)}^a, \pi_a^{(m)})$, com a qual essa densidade tornar-se-ia um gerador dinâmico. Nas próximas seções veremos como este objetivo pode ser alcançado. Observando-se a forma dessa função Hamiltoniana, dada genericamente por

$$H_c \equiv \sum_i \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - L,$$

vemos que esta forma nos lembra o traço do tensor energia momento, dado por

$$H^\alpha_\beta \equiv \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\beta(m)}^a \pi_a^{(m)\alpha} - L \delta^\alpha_\beta.$$

Contudo, esta correspondência não é correta, visto que o traço de H^α_β depende da dimensão do espaço dos parâmetros, enquanto a Hamiltoniana canônica não depende. A correspondência entre H_c e H^α_β só pode ser feita através da projeção deste último sobre um eixo definido no espaço-tempo. Este consiste no primeiro obstáculo na busca de uma teoria canônica completamente covariante. O formalismo de Hamilton-Jacobi, portanto, já nasce como um formalismo canônico, baseado em um espaço de fase, assim como o formalismo Hamiltoniano obtido pela transformação de Legendre das equações de Euler-Lagrange. De fato, neste trabalho empregaremos o ponto de vista no qual o formalismo de Hamilton está contido no formalismo de Hamilton-Jacobi.

Agora que dispomos dos momentos covariantes canonicamente conjugados às variáveis de

$\bar{\mathbb{Q}}$, vamos voltar à teoria de Podolsky como exemplo. Temos a densidade Lagrangiana (1.33):

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^2\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\partial^\gamma F_{\mu\gamma}.$$

Como a teoria é de segunda ordem, vamos construir os momentos respectivos às coordenadas A_μ e $A_{\mu,\nu}$

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}A_{\mu,\nu}} = \frac{\delta L}{\delta A_{\mu,\nu}} - \frac{d}{dx^\lambda} \frac{\delta L}{\delta A_{\mu,\nu\lambda}} = F^{\mu\nu} - 2a^2\eta^{\omega\gamma}\Upsilon_{\beta\omega}^{\alpha\mu}\Delta_{\alpha\gamma}^{\nu\lambda}\partial_\lambda\partial_\rho F^{\beta\rho}. \quad (2.49)$$

$$\pi^{\mu\nu\lambda} = \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}A_{\mu,\nu\lambda}} = \frac{\delta L}{\delta A_{\mu,\nu\lambda}} = 2a^2\eta^{\omega\gamma}\Upsilon_{\beta\omega}^{\alpha\mu}\Delta_{\alpha\gamma}^{\nu\lambda}\partial_\rho F^{\beta\rho}, \quad (2.50)$$

em que usamos as deltas (1.35) e (1.36). A matriz Hessiana deste sistema é dada pela derivada de (2.50) com relação a $A_{\mu,\nu\lambda}$, que resulta em

$$W^{\mu\nu\lambda;\sigma\eta\omega} = \frac{\delta\pi^{\mu\nu\lambda}}{\delta A_{\sigma,\eta\omega}} = a^2\eta^{\eta\omega} \left[\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma} \right]. \quad (2.51)$$

Seu determinante é claramente nulo, o que faz deste sistema um sistema não Hessiano, ou singular. Neste caso, alguns momentos não podem ser invertidos para fornecer os campos de velocidades e teremos problemas para definir uma equação de Hamilton-Jacobi. Também vimos que a condição Hessiana é necessária para garantir a presença de extremos da integral fundamental, o que significa que não há configuração extrema da ação de Podolsky em $\bar{\mathbb{Q}}$. Trataremos das ferramentas necessárias para lidar com este tipo de sistema nos capítulos 3 e 4, enquanto a aplicação para a teoria de Podolsky será realizada no capítulo 5

2.3 Equações características

Se a condição Hessiana (2.39) se cumpre, toda informação disponível sobre o sistema descrito pela integral (2.1) está na equação de Hamilton-Jacobi (2.48). Com o uso das variáveis do espaço de fase, escreveremos

$$\pi_a^{\mu(m)} = \frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{\mu(m)}^a} = \frac{\delta S^\mu}{\delta\phi_{(m)}^a}, \quad \pi_0 = \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu}, \quad (2.52)$$

$$\Phi_0 \equiv \pi_0 + H_c \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \pi_a^{\mu(m)} \right) = 0. \quad (2.53)$$

Nesta seção, manteremos os índices $0 \leq m \leq k-1$ e $1 \leq i \leq k$. Derivando (2.53) com relação aos momentos, temos

$$\frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_a^{\mu(m)}} = \frac{\delta H_c}{\delta\pi_a^{\mu(m)}}$$

e essas derivadas podem ser escritas com o auxílio da definição (2.47):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta H_c}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} &= \frac{\delta}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} \left[\sum_{m'=0}^{k-2} \phi_{\nu(m')}^b \pi_b^{\nu(m')} + \beta_{(k)}^b \pi_b^{(k)} - L \left(x^\mu, \phi_{(m)}^b, \beta_{(k)}^b \right) \right] \\
&= \sum_{m'=0}^{k-2} \phi_{\nu(m')}^b \frac{\delta \pi_b^{\nu(m')}}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} + \frac{\delta \beta_{(k)}^b}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} \pi_b^{(k)} + \beta_{(k)}^b \frac{\delta \pi_b^{(k)}}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} - \frac{\delta L}{\delta \phi_{(k)}^b} \frac{\delta \beta_{(k)}^b}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} \\
&= \phi_{\mu(m)}^a + \frac{\delta \beta_{(k)}^b}{\delta \pi_a^{(k)}} \left[\pi_b^{(k)} - \frac{\delta L}{\delta \phi_{(k)}^b} \right].
\end{aligned}$$

O segundo termo à direita é nulo, visto que (2.52) é válida. Assim, todos os campos tangentes até ordem k estão relacionados com derivadas da equação de Hamilton-Jacobi com relação aos momentos por

$$\phi_{(i)}^a = \frac{\delta \Phi_0}{\delta \pi_a^{(i)}}.$$

Consideraremos esta a primeira equação característica da equação de Hamilton-Jacobi. À direita desta equação, temos funções conhecidas das coordenadas e dos momentos. Observemos que essas equações não possuem conteúdo dinâmico: são identidades geométricas que dependem apenas da transformação de Legendre. Será útil futuramente que possamos escrever esta equação em termos de diferenciais totais, da seguinte forma,

$$\delta \phi_{(m)}^a = \frac{\delta \Phi_0}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} dx^\mu. \quad (2.54)$$

Uma segunda equação característica pode ser obtida com a derivação total dos momentos com relação ao parâmetros. Contudo, vamos tomar o traço desta derivada, da seguinte forma:

$$\frac{d\pi_a^{\mu(m)}}{dx^\mu} = \frac{\partial \pi_a^{\mu(m)}}{\partial x^\mu} + \sum_{m'=0}^{k-1} \phi_{\mu(m')}^b \frac{\delta \pi_a^{\mu(m)}}{\delta \phi_{(m')}^b}.$$

De (2.52) temos

$$\frac{\partial \pi_a^{\mu(m)}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] = \frac{\delta}{\delta \phi_{(m)}^a} \left[\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} \right],$$

de modo que

$$\frac{d\pi_a^{\mu(m)}}{dx^\mu} = \frac{\delta \pi_0}{\delta \phi_{(m)}^a} + \sum_{m'=0}^{k-1} \phi_{\mu(m')}^b \frac{\delta \pi_a^{\mu(m)}}{\delta \phi_{(m')}^b}. \quad (2.55)$$

Agora, podemos tomar a derivada total da equação de Hamilton-Jacobi com relação às

coordenadas. Ela se desdobra na equação

$$\frac{\delta\Phi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} + \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_0} \frac{\delta\pi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} + \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_b^{\mu(m')}} \frac{\delta\pi_b^{\mu(m')}}{\delta\phi_{(m)}^a} = 0.$$

Podemos reescrevê-la por

$$\frac{\delta\pi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} = -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} - \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_b^{\mu(m')}} \frac{\delta\pi_b^{\mu(m')}}{\delta\phi_{(m)}^a} \quad (2.56)$$

e, portanto, com a substituição de (2.56) em (2.55),

$$\frac{d\pi_a^{\mu(m)}}{dx^\mu} = -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} - \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_b^{\mu(m')}} \frac{\delta\pi_b^{\mu(m')}}{\delta\phi_{(m)}^a} + \sum_{m'=0}^{k-1} \phi_{\mu(m')}^b \frac{\delta\pi_a^{\mu(m)}}{\delta\phi_{(m')}^b}. \quad (2.57)$$

Nesta, inserimos a equação característica (2.54) e obtemos

$$\frac{d\pi_a^{\mu(m)}}{dx^\mu} = -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} - \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_b^{\mu(m')}} \frac{\delta\pi_b^{\mu(m')}}{\delta\phi_{(m)}^a} + \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_b^{\mu(m')}} \frac{\delta\pi_a^{\mu(m)}}{\delta\phi_{(m')}^b}.$$

A nosso favor, temos a seguinte identidade:

$$\frac{\delta\pi_a^{\mu(m)}}{\delta\phi_{(m')}^b} = \frac{\delta}{\delta\phi_{(m')}^b} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta\phi_{(m)}^a} \right] = \frac{\delta}{\delta\phi_{(m)}^a} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta\phi_{(m')}^b} \right] = \frac{\delta\pi_b^{\mu(m')}}{\delta\phi_{(m)}^a}.$$

Assim,

$$\frac{d\pi_a^{\mu(m)}}{dx^\mu} = -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\phi_{(m)}^a}. \quad (2.58)$$

Com esta equação, temos a segunda equação característica da equação de Hamilton-Jacobi,

$$\delta\pi_a^{\mu(m)} = -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\phi_{(m)}^a} dx^\mu. \quad (2.59)$$

A terceira equação característica é obtida através da diferenciação

$$\frac{dS^\mu}{dx^\mu} = \frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\mu(m)}^a \frac{\delta S^\mu}{\delta\phi_{(m)}^a} = \sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - H_c, \quad (2.60)$$

em que usamos as condições (2.52) e (2.53). À direita podemos reconhecer a densidade Lagrangiana em sua forma canônica. Podemos nos lembrar da definição

$$\frac{dS^\mu}{dx^\mu} d\omega \equiv \delta\mathcal{S}$$

e, assim, temos

$$\delta S = \left[\sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - H_c \right] d\omega.$$

Integrando em todo o espaço-tempo,

$$S = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - H_c \right] d\omega. \quad (2.61)$$

Através da variação direta da integral (2.61) com relação às variáveis canônicas obtemos identicamente as equações características (2.54) e (2.59). Dessa forma, quando essas equações são satisfeitas, $S = A[\phi]$. Também podemos encontrar individualmente as funções S^μ integrando diretamente a equação (2.60), obtendo

$$S^\mu = \int \left[\sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^a \pi_a^{(i)} - H_c \right] dx^\mu. \quad (2.62)$$

Portanto, as soluções do sistema de equações

$$\delta \phi_{(m)}^a = \frac{\delta \Phi_0}{\delta \pi_a^{\mu(m)}} dx^\mu, \quad \delta \pi_a^{\mu(m)} = -\frac{\delta \Phi_0}{\delta \phi_{(m)}^a} dx^\mu, \quad (2.63)$$

são extremos da integral fundamental (2.1). Essas equações características coincidem com as equações canônicas de Hamilton segundo a construção de Ostrogradski e, no caso em que $k = 1$, também com as equações de Hamilton usuais, deduzidas, por exemplo, em [4]. As soluções das equações características podem ser construídas no espaço das variáveis $(\phi_{(m)}^a, \pi_a^{\mu(m)})$, que adotaremos como o espaço de fase $\mathbf{T}^*\bar{\mathbb{Q}} \equiv \bar{\mathbb{Q}} \times \mathbf{T}_\pi^*\bar{\mathbb{Q}}$.

Devidas à transformação de Legendre e à definição da densidade Hamiltoniana temos as identidades

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi_{(m)}^a} H_c(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \pi_a^{\mu(m)}) &= -\frac{\delta}{\delta \phi_{(m)}^a} L(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \phi_{(k)}^a) \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} H_c(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \pi_a^{\mu(m)}) &= -\frac{\partial}{\partial x^\mu} L(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \phi_{(k)}^a), \end{aligned}$$

com as quais as equações características para os momentos resultam em

$$\frac{d}{dx^\mu} \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{\mu(m)}^a} = -\frac{\delta H_c}{\delta \phi_{(m)}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{(m)}^a},$$

ou seja,

$$\frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{(m)}^a} = 0. \quad (2.64)$$

Para $m = 0$ temos as equações de Euler-Lagrange, que devem ser satisfeitas em conjunto com outras $k - 2$ condições que restam em (2.64). Dessa forma, mostramos novamente que as soluções das equações características são extremos do problema variacional. Essas soluções, que definem um subespaço do espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}$, são também campos geodésicos. Isto se constata a partir da integral de Hilbert

$$J[\phi] = \int_{\Omega} d\omega \left[\frac{\partial S^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \sum_{m=0}^{k-1} \phi_{\mu(m)}^{*a} \frac{\delta S^{\mu}}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] = \int_{\Omega} d\omega \left[\pi_0 + \sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^{*a} \pi_a^{(i)} \right].$$

Com a equação de Hamilton-Jacobi,

$$J[\phi] = \int_{\Omega} d\omega \left[\sum_{i=1}^k \phi_{(i)}^{*a} \pi_a^{(i)} - H_c \right], \quad (2.65)$$

em que os momentos são definidos pelas suas respectivas equações canônicas. Quando o campo é geodésico, com $\phi_{(i)}^{*a} = \phi_{(i)}^a$ e $\phi_{(k)}^a = \beta_{(k)}^a$, esta integral é igual à integral fundamental (2.1).

2.4 Integrabilidade

O desenvolvimento anterior depende de um teorema que garanta a existência de uma configuração $\phi_{(m)}^a$ e de funções S^{μ} tais que

$$\pi_a^{\mu(m)} = \frac{\delta S^{\mu}}{\delta \phi_{(m)}^a}. \quad (2.66)$$

Agora, vamos provar este teorema.

Vamos supor um conjunto de soluções das equações características que dependam de n parâmetros u^a , formando assim uma família de sub-espacos de n parâmetros

$$\phi_{(m)}^a = \phi_{(m)}^a(x^{\mu}, u^b), \quad \pi_a^{(i)} = \pi_a^{(i)}(x^{\mu}, u^b), \quad (2.67)$$

cuja dimensão é $d + 1$ e

$$\det \left[\frac{\partial \phi_{(m)}^a}{\partial u^b} \right] \neq 0.$$

Se tal configuração é uma família de extremos, ela pertence a um campo geodésico, para o qual (2.66) é válida segundo o conjunto de funções

$$S^\mu = S^\mu \left\{ x^\mu, \phi_{(m)}^a \left(x^\mu, u^b \right) \right\}. \quad (2.68)$$

Temos

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial u^a} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^b} \frac{\partial \phi_{(m)}^b}{\partial u^a}.$$

Segundo (2.66),

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial u^a} = \sum_{m=0}^{k-1} \pi_b^{\mu(m)} \frac{\partial \phi_{(m)}^b}{\partial u^a}.$$

Vamos derivar novamente com relação a u^a :

$$\frac{\partial^2 S^\mu}{\partial u^a \partial u^b} = \sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^b} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} + \pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial^2 \phi_{(m)}^c}{\partial u^a \partial u^b} \right],$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 S^\mu}{\partial u^a \partial u^b} - \sum_{m=0}^{k-1} \pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial^2 \phi_{(m)}^c}{\partial u^a \partial u^b} = \sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^b} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} \right]. \quad (2.69)$$

Estamos admitindo que todas as funções são pelo menos de classe C^2 em u^a . O lado esquerdo de (2.69) é simétrico em a e b , de modo que a parte antissimétrica do termo à direita da igualdade é nula:

$$\left[u^a, u^b \right]^\mu = 0, \quad (2.70)$$

na qual definimos os parênteses de Lagrange

$$\left[u^a, u^b \right]^\mu \equiv \sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} \frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^b} - \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^b} \frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^a} \right]. \quad (2.71)$$

A relação (2.70) é a condição necessária que garante a existência de um conjunto de funções S^μ que satisfaça (2.66).

Podemos mostrar que (2.70) é uma condição também suficiente. Vamos supor uma família de configurações

$$\phi_{(m)}^a = \phi_{(m)}^a \left(x^\mu, u^b \right), \quad \pi_a^{(i)} = \pi_a^{(i)} \left(x^\mu, u^b \right),$$

tal que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} \frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^b} - \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^b} \frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^a} \right] = 0.$$

Temos

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} \frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^b} - \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^b} \frac{\partial \pi_c^{\mu(m)}}{\partial u^a} \right] = \sum_{m=0}^{k-1} \left[\frac{\partial}{\partial u^b} \left(\pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} \right) - \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^b} \right) \right],$$

ou seja,

$$\sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial u^b} \left(\pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} \right) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^b} \right).$$

Portanto, deve existir um conjunto de funções $\sigma^\mu(x^\mu, u^a)$ de modo que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \pi_c^{\mu(m)} \frac{\partial \phi_{(m)}^c}{\partial u^a} = \frac{\partial \sigma^\mu}{\partial u^a}. \quad (2.72)$$

Podemos inverter a equação paramétrica para os campos a fim de obter a relação

$$u^a = u^a(x^\mu, \phi_{(m)}^a)$$

e definir as funções

$$S^\mu(x^\mu, \phi_{(m)}^a) \equiv \sigma^\mu \left\{ x^\mu, u^a(x^\mu, \phi_{(m)}^a) \right\}.$$

Automaticamente essas definições resultam na identidade

$$\frac{\partial \sigma^\mu}{\partial u^a} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial S^\mu}{\partial \phi_{(m)}^b} \frac{\partial \phi_{(m)}^b}{\partial u^a}. \quad (2.73)$$

Comparando (2.72) e (2.73) temos

$$\pi_a^{\mu(m)} = \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a}. \quad (2.74)$$

Se as coordenadas e os momentos forem canônicos, satisfazendo (2.63), podemos derivar

(2.74) com relação a x^μ , obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\mu} \left[\pi_a^{\mu(m)} - \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] &= \frac{d\pi_a^{\mu(m)}}{dx^\mu} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} = -\frac{\delta \Phi_0}{\delta \phi_{(m)}^a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] \\ &\quad - \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a \delta \phi_{(m')}^a} \phi_{\mu(m')}^a, \end{aligned}$$

ou seja, com a igualdade (2.74),

$$\frac{\delta \Phi_0}{\delta \phi_{(m)}^a} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] + \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a \delta \phi_{(m')}^a} \phi_{\mu(m')}^a = 0.$$

Utilizando a primeira equação característica de (2.63) e lembrando que $\Phi_0 = \pi_0 + H_c$,

$$\frac{\delta H_c}{\delta \phi_{(m)}^a} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] + \sum_{m'=0}^{k-1} \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a \delta \phi_{(m')}^b} \frac{\delta H_c}{\delta \pi_b^{\mu(m')}} = 0,$$

que pode ser colocado na forma

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{(m)}^a} \left[\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + H_c \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right) \right] = 0. \quad (2.75)$$

A solução mais trivial de (2.75) vem a ser

$$\frac{\partial S^\mu}{\partial x^\mu} + H_c \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \frac{\delta S^\mu}{\delta \phi_{(m)}^a} \right) = F(x^\mu). \quad (2.76)$$

A função F depende apenas dos parâmetros e pode, sem perda de generalidade, ser tomada nula. Portanto, reobtemos a equação de Hamilton-Jacobi a partir das condições de integrabilidade (2.70) e das equações características. Isto mostra que a nulidade dos parênteses de Lagrange com relação às coordenadas e momentos garantem que essas variáveis canônicas descrevam campos geodésicos com relação a um conjunto de funções S^μ . Esta condição de integrabilidade assume importância fundamental mais adiante, quando lidaremos com o caso em que a condição Hessiana não é satisfeita pela densidade Lagrangiana.

2.5 Os parênteses de Poisson

Para completar este capítulo, vamos fazer uma tentativa de compreender a estrutura simplética que existe por trás do espaço de fase deste formalismo, que envolve duas generalizações: a descrição de teorias de campos em forma explicitamente covariante e o tratamento de densidades Lagrangianas com derivadas superiores dos campos. Ambas as generalizações

trazem limitações e problemas em sua aplicação conjunta a problemas físicos de interesse, como logo veremos. Contudo, muitas características deste problema variacional são análogas ao problema equivalente que pertence à mecânica clássica. Nota-se, por exemplo, que a construção canônica levada a cabo por Ostrogradski para Lagrangianas de ordem superior foi naturalmente reproduzida pelo formalismo de Hamilton-Jacobi.

Vamos escrever as equações características utilizando explicitamente sua forma correta considerando o cálculo funcional:

$$\delta\phi_{(m)}^a(x) = \int_{\Omega} d\omega_y \frac{\delta\Phi_0(y)}{\delta\pi_a^{\mu(m)}(x)} dy^{\mu}, \quad \delta\pi_a^{\mu(m)}(x) = - \int_{\Omega} d\omega_y \frac{\delta\Phi_0(y)}{\delta\phi_{(m)}^a(x)} dy^{\mu}. \quad (2.77)$$

Estas equações diferenciais totais podem ser naturalmente interpretadas como equações dinâmicas com soluções no espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}$ das variáveis canônicas $\phi_{(m)}^a$ e $\pi_a^{\mu(m)}$. Relembremos que os argumentos das funções acima remetem ao ponto de aplicação no espaço-tempo, já que essas funções devem ser tomadas como densidades distribucionais.

Agora, vamos considerar um observável físico representado por uma função do espaço de fase, $F(x, \phi, \pi)$, que depende explicitamente dos parâmetros, das coordenadas e dos momentos. A evolução deste observável é dada por diferenciação funcional, tal como

$$\delta F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} + \int_{\Omega} d\omega_y \left[\frac{\delta F(x)}{\delta\phi_{(m)}^a(y)} \delta\phi_{(m)}^a(y) + \frac{\delta F(x)}{\delta\pi_a^{\mu(m)}(y)} \delta\pi_a^{\mu(m)}(y) \right]. \quad (2.78)$$

Nesta expressão, bem como no restante desta seção, vamos suprimir a soma sobre as ordens, supondo que o índice m varie sempre entre os valores zero e $k - 1$. Contudo, voltamos a explicitar a integração devida ao processo de diferenciação funcional. As equações características (2.77) podem ser inseridas na lei de evolução (2.78) e, dessa forma, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= \frac{\partial F(x)}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \\ &+ \iint_{\Omega} d\omega_y d\omega_z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta\phi_{(m)}^a(y)} \frac{\delta\Phi_0(z)}{\delta\pi_a^{\mu(m)}(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta\pi_a^{\mu(m)}(y)} \frac{\delta\Phi_0(z)}{\delta\phi_{(m)}^a(x)} \right] dz^{\mu}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Nesta, vamos definir a operação

$$\{A(x), B(y)\}_{\mu} = \frac{\partial F(x)}{\partial y^{\mu}} + \int_{\Omega} d\omega_z \left[\frac{\delta A(x)}{\delta\phi_{(m)}^a(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta\pi_a^{\mu(m)}(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta\pi_a^{\mu(m)}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta\phi_{(m)}^a(z)} \right], \quad (2.80)$$

que vem a ser os parênteses de Poisson da teoria. Podemos escrever a evolução de um observável, portanto, por

$$\delta F(x) = \int_{\Omega} d\omega_y \{F(x), \Phi_0(y)\}_{\mu} dy^{\mu}. \quad (2.81)$$

Como bons parênteses, (2.80) agem como operadores diferenciais bilineares, antissimétricos e que obedecem a identidade de Jacobi. A equação (2.81), por sua vez, é uma equação de evolução Hamiltoniana típica, na qual vemos que Φ_0 age como uma função Hamiltoniana: ela é geradora de transformações em observáveis que conectam diferentes pontos do espaço-tempo.

Os parênteses entre as variáveis canônicas, segundo a definição (2.80), são dados por

$$\left\{ \phi_{(m)}^a(x), \pi_b^{\lambda(m')}(y) \right\}_\mu = \delta_b^a \delta_\mu^\lambda \delta_{(m)}^{(m')} \delta^{d+1}(x-y) \quad (2.82)$$

e, assim, as equações características podem ser escritas por

$$\delta \phi_{(m)}^a(x) = \int_\Omega d\omega_y \left\{ \phi_{(m)}^a(x), \Phi_0(y) \right\}_\mu dy^\mu, \quad (2.83)$$

$$\delta \pi_a^{\alpha(m)}(x) = \int_\Omega d\omega_y \left\{ \pi_a^{\alpha(m)}(x), \Phi_0(y) \right\}_\mu dy^\mu. \quad (2.84)$$

Essas equações definem a evolução das variáveis do espaço de fase com relação aos parâmetros x^μ .

Consideremos por um instante os momentos $\pi_a^{\alpha(m)}$. Através do cálculo dos parênteses

$$\left\{ F(x), \pi_a^{\alpha(m)}(y) \right\}_\mu = \delta_\mu^\alpha \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{(m)}^a(y)},$$

podemos mostrar que uma variação infinitesimal das coordenadas, denotada por $\delta \phi_{(m)}^a$, implica em uma variação infinitesimal equivalente em qualquer observável F , que denotamos por $\delta_\phi F$, através da equação

$$\delta_\phi F(x) \equiv \frac{1}{d+1} \int_\Omega d\omega_y \left\{ F(x), \pi_a^{\mu(m)}(y) \right\}_\mu \delta \phi_{(m)}^a(y). \quad (2.85)$$

Esta equação também pode ser vista como uma transformação ativa $\phi_{(m)}^a \longrightarrow \phi_{(m)}^a + \delta \phi_{(m)}^a$, que tem como geradores os momentos. Assim, em analogia com a mecânica clássica, dizemos que os momentos são geradores de transformações no espaço das coordenadas. Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\delta_\pi F(x) = \int_\Omega d\omega_y \left\{ F(x), \phi_{(m)}^a(y) \right\}_\mu \delta \pi_a^{\mu(m)}(y), \quad (2.86)$$

ou seja, as coordenadas agem como geradores de transformações no espaço dos momentos.

Não existe uma maneira única de dar prosseguimento à construção de um formalismo simplético a partir deste ponto, de modo que nos limitaremos apenas a alguns comentários a respeito. Na literatura existem várias abordagens, nem todas equivalentes, para a geometria simplética por trás desse formalismo. Podemos citar, por exemplo, o formalismo multissim-

plético [8, 9]. No que segue, $\wedge$ representa o produto exterior, enquanto $\otimes$ representa o produto interno. A partir da integral fundamental

$$A = \int_{\Omega} d\omega L,$$

definimos a $(d+1)$ -forma fundamental

$$\theta \equiv L d\omega, \quad d\omega \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d. \quad (2.87)$$

Com esta e a partir da transformação de Legendre, temos a $(d+1)$ -forma canônica

$$\theta = \pi_a^{\mu(m)} d\phi_{(m)}^a \wedge d\omega \otimes \frac{d}{dx^\mu} + \pi_0 d\omega. \quad (2.88)$$

A $(d+2)$ -forma simplética é definida por $\Omega \equiv -d\theta$, resultando na expressão explícita

$$\Omega = d\pi_a^{\mu(m)} \wedge d\phi_{(m)}^a \wedge d\omega \otimes \frac{d}{dx^\mu} - d\pi_0 \wedge d\omega. \quad (2.89)$$

O espaço de fase de coordenadas $(x^\mu, \phi_{(m)}^a, \pi_0, \pi_a^{\mu(m)})$ imbuído com uma $(d+2)$ -forma simplética (2.89) é chamado espaço de fase multissimplético.

À parte desta pequena digressão consideramos os parênteses de Poisson (2.80) a estrutura fundamental. Contudo, o sucesso deste programa em problemas físicos de interesse é seriamente comprometido por dois problemas correlacionados. O primeiro vem a ser a condição Hessiana generalizada (2.27), que não é satisfeita, por exemplo, em teorias com simetria de gauge. Este problema poderia ser contornado com um programa de análise de vínculos covariante. Contudo, essa tentativa certamente se depara com uma segunda barreira: teorias de campo relativísticas são, por definição, invariantes por reparametrizações. No restante desta seção vamos nos preocupar em analisar o motivo pelo qual a invariância com relação aos parâmetros de uma teoria torna-se um sério problema para o programa proposto neste capítulo.

As transformações de parâmetros tomam a forma de transformações de coordenadas no espaço-tempo:

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\nu). \quad (2.90)$$

As funções $\bar{x}^\mu$ são pelo menos de classe C^1 e obedecem a condição

$$J \equiv \det[b_\nu^\mu] \neq 0, \quad b_\nu^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}.$$

Existem exemplos distintos de densidades Lagrangianas que resultam em integrais fundamentais invariantes por reparametrizações. Por exemplo, as teorias de campos no espaço

de Minkowski, como o eletromagnetismo e as teorias de Yang-Mills-Utiyama, são caracterizadas por densidades Lagrangianas que independem explicitamente do ponto do espaço-tempo. Esses sistemas se assemelham mais aos sistemas em mecânica clássica invariantes por reparametrizações: são invariantes por reparametrizações em razão da estrutura algébrica das Lagrangianas.

Por outro lado, a densidade Lagrangiana

$$L = \sqrt{|g|} g^{\mu\nu}(x) \phi_\mu^a \phi_\nu^a, \quad (2.91)$$

resulta em uma integral fundamental invariante, desde que $g^{\mu\nu}$ sejam componentes contravariantes de um tensor simétrico de segunda ordem, com $g = \det(g_{\mu\nu})$. As componentes $g^{\mu\nu}$ se transformam contravariantemente, enquanto os campos tangentes se transformam como vetores covariantes:

$$g^{\alpha\beta} = b_\alpha^\mu b_\beta^\nu \bar{g}^{\mu\nu}, \quad \phi_\mu^a = (b^{-1})_\mu^\nu \bar{\phi}_\nu^a, \quad (b^{-1})_\mu^\nu b_\gamma^\mu = \delta_\gamma^\nu.$$

A raiz do determinante transforma-se pela relação

$$\sqrt{\bar{g}} = |J| \sqrt{g},$$

de modo que a densidade Lagrangiana (2.91) também é uma densidade escalar de peso 1 com relação à transformação (2.90). Assim, a integral fundamental $\int L d\omega$ torna-se invariante, visto que o elemento de volume transforma-se segundo $d\bar{\omega} = |J|^{-1} d\omega$. Neste exemplo, que não possui paralelos na mecânica clássica, a densidade Lagrangiana depende explicitamente dos parâmetros e, mesmo assim, o sistema é invariante em razão de sua estrutura tensorial. O problema físico que mais se assemelha a esta situação poderia ser uma teoria de campos em um espaço-tempo fixo com métrica dependente do ponto.

Os dois tipos de teorias são inteiramente distintos do ponto de vista do cálculo variacional, o que torna a análise das propriedades de invariância da ação pelas transformações (2.90) um problema de difícil generalização.

Vamos considerar uma Lagrangiana explicitamente independente dos parâmetros com a forma $L(\phi^a, \phi_{(i)}^a)$, em que $i = 1, \dots, k$. Para a invariância da integral fundamental, temos

$$\int_{\bar{\Omega}} L(\phi^a, \bar{\phi}_{(i)}^a) d\bar{\omega} = \int_{\Omega} L(\phi^a, b_{(i)}^{(i')} \phi_{(i')}^a) |J|^{-1} d\omega = \int_{\Omega} L(\phi^a, \phi_{(i)}^a) d\omega,$$

em que usamos a notação simbólica

$$b_{(i)}^{(i')} \phi_{(i')}^a \equiv b_\alpha^\mu \phi_\mu^a + b_\alpha^\mu b_\beta^\nu \phi_{\mu\nu}^a + \dots$$

Dessa forma, a condição para que a ação seja invariante vem a ser

$$L\left(\phi^a, b_{(i)}^{(i')} \phi_{(i')}^a\right) = L\left(\phi^a, \phi_{(i)}^a\right) |J|. \quad (2.92)$$

Vamos derivar (2.92) com relação aos elementos $b_{(i)}^{(i')}$. No lado esquerdo temos

$$\frac{\partial}{\partial b_{(i)}^{(i')}} L\left(\phi^a, \bar{\phi}_{(i)}^a\right) = \frac{\delta \bar{L}}{\delta \bar{\phi}_{(i'')}^a} \frac{\partial \bar{\phi}_{(i'')}^a}{\partial b_{(i)}^{(i')}} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{(i'')}^a} \frac{\partial b_{(i'')}^{(i''')}}{\partial b_{(i)}^{(i')}} \phi_{(i''')}^a.$$

No lado direito,

$$\frac{\partial}{\partial b_{(i)}^{(i')}} [L|J|] = L \left| \frac{\partial J}{\partial b_{(i)}^{(i')}} \right|,$$

de modo que a condição (2.92) torna-se

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^a} \phi_{(i')}^a = L \left| \frac{\partial J}{\partial b_{(i)}^{(i')}} \right| \quad (2.93)$$

Esta expressão vale para cada valor de i . Por exemplo, para $i = 1$,

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_\mu^a} \phi_\nu^a = L \left| \frac{\partial J}{\partial b_\mu^\nu} \right|.$$

Para $i = 2$,

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_{\mu\nu}^a} \phi_{\alpha\beta}^a = L \left| \frac{\partial J}{\partial (b_\mu^\alpha b_\nu^\beta)} \right|.$$

No caso especial em que $b_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha$, podemos mostrar facilmente que (2.93) é equivalente a

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_{(i)}^a} \phi_{(i')}^a - \delta_{(i')}^{(i)} L = 0. \quad (2.94)$$

A condição (2.94) é suficiente para que a integral seja invariante por reparametrizações. Ela também é uma condição necessária, cuja prova encontra-se em [4] para o caso $k = 1$. Esta prova é facilmente generalizada para derivadas de ordem superior, de modo que não nos preocuparemos em demonstrá-la aqui. Se esta estrutura é nula, vamos tomar a expressão com $i = k$. Por ser a última ordem das derivadas que ocorrem na Lagrangiana, (2.94) torna-se

$$\frac{\delta L}{\delta \phi_{(k)}^a} \phi_{(k')}^a - \delta_{(k')}^{(k)} L = 0.$$

Se esta expressão é válida, evidencia-se a validade da expressão contraída

$$\frac{\bar{\delta}L}{\bar{\delta}\phi_{\mu(m)}^a}\phi_{(m)\nu}^a - \delta_\nu^\mu L = 0. \quad (2.95)$$

À esquerda de (2.95) temos o tensor densidade de energia-momento canônico, definido em (1.25).

Dessa forma, teorias invariantes por reparametrizações possuem o tensor densidade de energia-momento identicamente nulo se a invariância é devida a independência da densidade Lagrangiana com relação aos parâmetros. De fato, a condição (2.95) é puramente geométrica: não depende das expressões particulares para a Lagrangiana ou para os campos. Como consequência, a densidade Hamiltoniana canônica definida em (2.47) também é identicamente nula:

$$\frac{\delta L}{\delta\phi_{(i)}^a}\phi_{(i)}^a - L = 0.$$

Portanto, o formalismo canônico que desenvolvemos a partir do formalismo de Hamilton-Jacobi torna-se impraticável. Tentativas para corrigir este problema foram realizadas, por exemplo, em [4], onde uma redefinição das transformações de Legendre resulta em uma teoria Hamiltoniana generalizada. Contudo, essa proposição depende de condições que descartam aplicações físicas importantes e, portanto, não seguiremos este caminho. O fato é que ainda não podemos escapar da decomposição $d + 1$, que foi a maneira como Dirac enfrentou o problema da existência de vínculos canônicos.

Portanto, no capítulo 3 vamos voltar à análise de Hamilton-Jacobi, desta vez com a escolha de um eixo temporal que quebra a covariância explícita do formalismo. Com esta escolha o problema da invariância por reparametrizações é resolvido da maneira mais simples possível: com a escolha de uma parametrização particular. Também seremos capazes de abordar o problema da existência de sistemas não Hessianos.

Referências

- [1] C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, Holden Day Inc. (1967).
- [2] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & P. J. Pompeia, *Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory*, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 393-403 (2007).
Formalismo de Hamilton-Jacobi à la Carathéodory parte 2, sistemas singulares, Revista Brasileira de Ensino de Física **30**, 3310 (2008).
- [3] H. Weyl, *Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals*, Ann. Math. **36**, 607-629 (1935).
- [4] H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations; its role in mathematics and physics*, Van Nostrand, (1966).
- [5] B. M. Pimentel & R. G. Teixeira, *Generalization of the Hamilton-Jacobi approach for higher-order singular systems*, Il Nuovo Cimento **B 113**, 805-817 (1998).
- [6] M. Ostrogradski, Mem. Ac. St. Petersbourg **1**, 385 (1850).
- [7] E. T. Whittaker, *A treatise on the analitical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge Un. Press (1917).
- [8] G. Giachetta, L. Mangiarotti & G. Sardanashvily, *New lagrangian and hamiltonian methods in field theory*, World Scientific (1997).
- [9] M. J. Gotay, J. Isenberg & J. E. Marsden, *Momentum maps and classical relativistic fields, Part I: Covariant field theory*, arXiv:physics/9801019v2 (2004).

Capítulo 3

Sistemas não Hessianos

Introdução

No capítulo 2 usamos a introdução de variáveis canônicas para transformar as condições para a construção de um campo geodésico em uma equação diferencial funcional, a equação de Hamilton-Jacobi. A condição para que esta construção seja possível é a condição Hessiana. Esta é uma condição não só para a existência de uma boa transformação de Legendre, mas também para a própria existência dos campos geodésicos: se uma configuração é tal que minimiza ou maximiza a integral fundamental, a condição Hessiana é satisfeita. Isto porque a conexão da matriz Hessiana com a segunda variação da integral fundamental mostra que, se o determinante da matriz Hessiana é nulo, também será nula a segunda variação e, portanto, não podemos garantir a existência de extremos.

Contudo, a matriz Hessiana é uma propriedade da densidade Lagrangiana e não podemos garantir que sistemas físicos obedeçam a condição Hessiana por princípio. De fato, em teorias de campos abundam sistemas nos quais a matriz Hessiana é singular. Dentre tais sistemas estão os campos fundamentais descritos por teorias de gauge e, por esta razão, não podemos nos limitar a tratar apenas sistemas que concordem com a condição (2.39). As teorias que violam a condição Hessiana são tratadas na literatura como sistemas singulares, que possuem vínculos entre as variáveis do espaço de fase. Uma das consequências notáveis dessas teorias vem a ser o fato de que as relações de comutação entre as variáveis canônicas a nível quântico não raro devem ser modificadas para que sejam consistentes com as equações de movimento. Aqui, usaremos frequentemente as expressões “sistemas não Hessianos” e “sistemas singu-

lares” para nos referir a este tipo de teoria.

O problema da não validade da matriz Hessiana foi primeiramente tratado por Dirac [1], em paralelo com trabalhos de Bergmann [2], que elaboraram um formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares. Este método, conhecido como formalismo de Dirac-Bergmann, aplica-se a encontrar um sub-espço do espaço de fase no qual a condição Hessiana seja válida e as equações canônicas sejam equivalentes às equações de Euler-Lagrange. Sob este ponto de vista, a singularidade da matriz Hessiana implica em vínculos algébricos entre as variáveis canônicas. No caminho para a construção da equivalência entre este formalismo Hamiltoniano e o de Euler-Lagrange há que se impor condições de consistência sobre os vínculos, sua separação entre vínculos em primeira e segunda classe, a possível definição dos parênteses de Dirac e, como resultado mais importante, a correspondência entre vínculos de primeira classe e simetrias. Além dos artigos originais, um estudo bastante completo do formalismo de Dirac pode ser encontrado nas referências [3, 4, 5].

Em razão desta motivação, a generalização do formalismo que desenvolvemos até aqui, de modo a englobar sistemas que não obedecem a condição Hessiana, torna-se um caminho natural. A primeira (e também mais séria) consequência que vem desta violação é a impossibilidade de se definir um campo geodésico que contenha imersa uma configuração mínima da integral fundamental. A nível Lagrangiano, tampouco é possível garantir que soluções das equações de Euler-Lagrange sejam extremos locais. Este problema se reflete, como já vimos, na própria construção do formalismo canônico: a construção do espaço de fase pode ser feita através de uma transformação do tipo (2.30), mas esta não consistirá em uma transformação de Legendre, tal que entre os momentos e os campos tangentes não poderá existir uma relação biunívoca. Portanto, não se pode estabelecer um isomorfismo canônico entre os espaços tangentes e cotangentes de $\bar{\mathbb{Q}}$.

No entanto, como vimos também no capítulo 2, as teorias de campos nas quais estamos interessados na Física possuem um requerimento vindo da relatividade geral: a integral fundamental que as descreve deve ser invariante por reparametrizações. Especialmente nas teorias de campos que descrevem interações fundamentais na natureza, a densidade Lagrangiana é explicitamente independente do ponto do espaço-tempo e, como consequência imediata, o tensor densidade de energia-momento canônico (1.25) dessas teorias é identicamente nulo. Isso também ocorre com todas as suas contrações e projeções, particularmente com a densidade Hamiltoniana canônica (2.47). Neste caso, o programa que descrevemos no capítulo 2 sofre um colapso: a equação de Hamilton-Jacobi torna-se uma identidade, não uma equação, fato que frustra a implementação do formalismo canônico subsequente.

Uma tentativa de resolver este problema de forma a manter o formalismo covariante é feita, com certo sucesso, em [6]. O procedimento consiste em redefinir a transformação de Legendre para generalizar a definição dos momentos conjugados. Contudo, essa tentativa depende de condições que tornam impraticável a utilização em sistemas físicos de interesse.

Até o presente momento, nenhuma tentativa no sentido de construir uma teoria Hamiltoniana covariante livre deste problema teve sucesso com campos físicos, de modo que não nos preocuparemos em seguir este caminho. Nos artigos de Dirac sobre quantização de sistemas singulares, salienta-se que a quebra da invariância por reparametrizações, com a escolha de um parâmetro de evolução, resolve este problema, fato de que também se dá conta Bergmann e seus colaboradores. Assim como no caso do formalismo Hamiltoniano desenvolvido nessa linha, sacrificaremos a covariância da teoria em troca de uma descrição canônica coerente com as equações de Euler-Lagrange.

Para realizar este programa, vamos primeiro fazer uma discussão qualitativa das possíveis formas de decomposição $d + 1$ em teorias relativísticas. Em seguida, vamos adequar o formalismo de Hamilton-Jacobi que estudamos no capítulo 2 para uma escolha particular de parametrização. Veremos como sistemas não Hessianos podem ser tratados naturalmente dessa forma.

3.1 Formas de dinâmica relativística

A escolha de um parâmetro de evolução temporal envolve a descrição das teorias de campos como sistemas dinâmicos de dimensão infinita. Neste caso, as equações de Euler-Lagrange são reescritas a partir de uma foliação do espaço-tempo, que chamaremos também de decomposição $d + 1$, nos moldes do desenvolvimento das integrais de movimento discutidas no primeiro capítulo. A decomposição $d + 1$ consiste na escolha de um eixo de evolução temporal $\tau \equiv y^0$ e, portanto, na escolha de uma família de hiper-superfícies de Cauchy

$$\Xi(y^\mu, \tau) = 0,$$

que são ortogonais ao eixo y^0 em cada ponto e nunca se interceptam no domínio Ω . Feita a escolha das superfícies de Cauchy, as equações de Euler-Lagrange, escritas como equações canônicas, agem como equações dinâmicas que indicam como uma configuração de campos em uma dada superfície, digamos $\Xi(\tau = 0)$, evolui para uma segunda superfície $\Xi(\tau = \tau_1)$. Quem faz o trabalho de determinar como age esta dinâmica é o grupo de simetria fundamental do espaço-tempo. Para que essa descrição seja unívoca, ou seja, para que o conhecimento de uma configuração inicial resulte em uma única dinâmica, devemos também escolher a família Ξ de modo que a linha de mundo de um observador nunca passe por uma mesma superfície mais de uma vez.

Na mecânica clássica, o grupo fundamental de simetria do espaço-tempo é o grupo de Galilei. Como o tempo clássico é um parâmetro fixo, o espaço-tempo clássico é dado simplesmente pelo produto $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ e a decomposição $d + 1$ é trivial. A superfície de Cauchy vem a

ser a d -superfície $\mathbb{R}^d$ a t constante. De fato, essa é a única superfície de Cauchy permitida na mecânica clássica. Para qualquer outra família de superfícies existem observadores que interceptam seus membros no mínimo duas vezes. Isto ocorre porque a velocidade de um observador clássico pode ser arbitrária. Neste caso, o grupo de Galilei possui um subgrupo, chamado grupo de estabilidade, cuja ação deixa o sistema invariante por transformações em uma superfície de tempo constante. Os geradores deste subgrupo são o momento linear e a matriz de momento angular, que constituem seis geradores cinemáticos. Existe apenas mais um gerador, de natureza dinâmica, que vem a ser a função Hamiltoniana geradora da evolução temporal entre duas superfícies distintas. Se a família de superfícies de Cauchy é única neste caso, a Hamiltoniana também é única.

No caso de teorias relativísticas, o grupo fundamental é o grupo de Poincaré. Observadores relativísticos não podem se deslocar com velocidades arbitrárias, o que separa o espaço-tempo em regiões acessíveis (dentro do cone de luz) e inacessíveis (fora do cone de luz) a observadores que passam pela origem do sistema de coordenadas. Assim, o espaço-tempo relativístico possui uma estrutura causal. Dirac observou [7] que esta estrutura causal e a invariância por reparametrizações quebram a unicidade do formalismo Hamiltoniano e encontrou três formas inequivalentes de escolher as superfícies de Cauchy com a qual a decomposição $d + 1$ pode ser feita. Mais recentemente uma análise mais completa dos possíveis subgrupos do grupo de Poincaré revelou a existência de mais duas famílias de superfícies [8]. No total, as formas de dinâmica relativística são dadas pelas superfícies:

1. Hiper-superfície $t = x^0 = \text{constante}$, chamada forma instantânea.
2. Hiper-superfície da frente de luz $\tau = x^0 + x^3 = \text{constante}$, chamada forma frontal.
3. Folha do hiperbolóide $\tau \equiv x^2 = a^2$, $x^0 > 0$ com $a = \text{constante}$, chamada forma puntual.
4. Folha do hiperbolóide $\tau = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2$, $x^0 > 0$.
5. Folha do hiperbolóide $\tau = x_0^2 - x_3^2 = a^2$, $x^0 > 0$.

O grupo de Poincaré contém dez geradores e podemos usar a escolha da superfície de Cauchy para decompô-lo em um subgrupo de estabilidade e um subgrupo dinâmico, assim como no caso da mecânica clássica. Contudo, essa decomposição depende da escolha da superfície. Na forma instantânea existem seis geradores cinemáticos, representados pelo momento linear e pela matriz de momento angular, geradores de translações e rotações em $\mathbb{R}^d$. O subgrupo dinâmico é formado pela evolução temporal, gerada pela Hamiltoniana

$$H \equiv \int_{\Xi} \mathcal{H} d\sigma,$$

em que

$$\mathcal{H} \equiv H_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$$

é o tensor densidade de energia-momento (1.25) projetado no eixo temporal. Nesta expressão, ξ é o vetor unitário tangente a este eixo.

No caso da forma instantânea em coordenadas retangulares $x^\mu = (x^0, x^i)$, ξ é um vetor com única componente na direção de x^0 . Por consequência,

$$\mathcal{H} = H_{00} = \frac{\bar{\delta} L}{\bar{\delta} \phi_{0(m)}^a} \phi_{(m)0}^a - L = \pi_a^{0m} \phi_{(m)0}^a - L. \quad (3.1)$$

Esta é a forma usual da densidade Hamiltoniana em teoria de campos. Note que ela não é correspondente à densidade Hamiltoniana canônica (2.47). Além da evolução temporal, o grupo dinâmico contém também o boosts, gerados por rotações que envolvem direções tipo tempo. Os boosts são apenas transformações de Lorentz entre observáveis e constituem transformações cinemáticas do ponto de vista relativístico. A verdadeira dinâmica dos campos é gerada apenas pela Hamiltoniana (3.1).

A forma instantânea é aquela mais comum em teorias de campos por duas razões: a primeira é que esta escolha de superfícies de Cauchy é a que equivale àquela da mecânica clássica. A segunda razão vem a ser experimental, pois o referencial do laboratório tem linha de mundo coincidente com o eixo x^0 , ou seja, a parametrização natural para os experimentais é o tempo clássico Galileano.

Vem ganhando espaço, contudo, a análise de teorias de campos na forma frontal, que também podemos chamar de dinâmica na frente de luz, ou dinâmica no cone de luz. Nesse tipo de dinâmica, o tempo é escolhido como uma combinação linear das coordenadas x^μ , dada por $\tau \equiv x^0 + x^d$, a menos de um termo de normalização. Esta escolha remete a uma preferência natural pelas coordenadas do cone de luz $(x^+, x^-, x^i) = (x^0 + x^d, x^0 - x^d, x^i)$, em que o índice i varia entre 1 a $d - 1$. De fato, há uma diferença fundamental entre essa dinâmica e as demais, pelo fato de que a superfície ortogonal ao eixo x^+ , o plano nulo, não é uma superfície de Cauchy [9, 10]. Ela é uma das superfícies características do cone de luz. Para uma superfície de Cauchy genuína, a definição dos dados iniciais envolve o conhecimento da configuração dos campos em uma única superfície. No caso do plano nulo, uma dinâmica única emerge apenas se fornecermos dados iniciais para as duas famílias de superfícies características $x^+ = \text{constante}$ e $x^- = \text{constante}$.

A decomposição do grupo de Poincaré na dinâmica do cone de luz indica que o grupo de estabilidade possui sete geradores, um a mais que as dinâmicas instantânea e puntual e três a mais que as dinâmicas definidas nos itens 4 e 5. Este fato tem várias consequências sobre a descrição canônica de campos no plano nulo [11]. Por exemplo, a estrutura do espaço de fase

é bastante distinta, como veremos através da aplicação do campo de Podolsky no capítulo 5. Outra característica é que os campos tornam-se sobre-vinculados, ou seja, a dinâmica frontal traz mais vínculos canônicos que reduzem ainda mais os graus de liberdade do sistema.

A grande vantagem de se trabalhar no cone de luz vem a ser o fato de que as constantes de estrutura da álgebra dos geradores cinemáticos tomam a forma mais simples possível. Isto ocorre porque nas coordenadas do cone de luz um boost na direção x^d é uma simples transformação de escala diagonal, que não mistura as coordenadas x^+ e x^- . Para muitos sistemas essa característica é responsável por separar completamente graus de liberdade físicos, resultando em um vácuo quântico limpo, livre de excitações devido a graus de liberdade não físicos. Isto é verificado, por exemplo, na análise de quebra de simetria do modelo padrão [12] e em modelos de teorias de gauge em duas dimensões [13].

3.2 O formalismo de Hamilton-Jacobi parametrizado

Para demonstrar como o formalismo desenvolvido no capítulo 2 pode ser facilmente especializado para uma escolha particular de superfícies de Cauchy, possibilitando a análise de sistemas não Hessianos, vamos trabalhar com a forma instantânea, que representa a escolha das superfícies

$$\Xi(x^i, t = x^0) = 0, \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.2)$$

ortogonais ao eixo x^0 do espaço-tempo de Minkowski. Esta superfície é isomórfica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$. Contudo, o procedimento pode ser facilmente transplantado para outras formas de dinâmica a partir de transformações de coordenadas apropriadas, como veremos na aplicação do campo de Podolsky.

Assim como feito na seção 1.2.2, a integral fundamental de uma teoria pode ser reescrita com a definição da função Lagrangiana, que vem a ser a derivada da densidade Lagrangiana em um d -volume que representa um sub-domínio de Ω , o que nos obriga a escolher condições de contorno para os campos na fronteira desse sub-domínio. Vamos supor que este volume vem a ser uma superfície de Cauchy (3.2) a t contante e as condições de contorno tais que

$$\lim_{x \in \partial\Xi} \phi_{(i)}^a(x) = 0, \quad (3.3)$$

para $i = 0$, inclusive. Neste caso, integrais no volume cujos integrandos sejam divergências totais se anularão. Em particular, podemos tomar a expressão (2.2), que representa a definição

da integral equivalente à ação $A = \int_{\Omega} L d\omega$. Com o uso das condições (3.3) temos

$$\bar{A}[\phi] = A[\phi] - \int_{\Omega} \frac{dS^{\mu}}{dx^{\mu}} d\omega = A[\phi] - \int_{\Omega} \frac{dS^0}{dt} d\omega - \int dt \int_{\Xi} \frac{dS^i}{dx^i} d^d x,$$

em que a última integral é um termo na fronteira de Ξ . Portanto, podemos definir densidades Lagrangianas equivalentes pela simples adição de uma derivada temporal:

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt}, \quad (3.4)$$

na qual suprimimos o índice zero da densidade S^0 .

As condições para extremos locais da integral fundamental neste cenário permanecem as mesmas: se $\bar{L} = 0$ para uma dada configuração ϕ e $\bar{L} > 0$ ou $\bar{L} < 0$ para uma configuração ϕ' infinitesimalmente próxima, ϕ é um extremo. Contudo, como vimos na seção 1.2.2, devemos reavaliar a nossa noção sobre o que consiste uma configuração de campos na decomposição $d + 1$. Em vez de uma configuração geométrica que envolve os valores dos campos em uma região Ω do espaço-tempo, devemos pensar em termos uma distribuição de campos $\phi(\mathbf{x}, t)$ em uma hiper-superfície d -dimensional Ξ em um dado tempo $t = t_0$. A dinâmica é dada pela evolução dessa distribuição na direção de x^0 , gerada pela densidade Hamiltoniana (3.1). Essa dinâmica deve ser univocamente determinada se conhecermos um conjunto de dados iniciais sobre a superfície $\Xi(t_0)$. No caso da dinâmica instantânea, esse conjunto de condições iniciais deve envolver o conhecimento de derivadas temporais dos campos até certa ordem.

Mais adiante, veremos que será necessário restringir a função S de modo que

$$S = S(x^{\mu}, \phi^a, \phi_0^a, \phi_{00}^a, \dots),$$

até ordem $k - 1$, ou seja, S não deve depender das derivadas espaciais dos campos. Esta restrição, contudo, não implica em perda de generalidade.

Vamos observar, para derivadas até segunda ordem, a densidade Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_a^{0m} \phi_{(m)0}^a - L = \pi_a^0 \phi_0^a + \pi_a^{0\mu} \phi_{0\mu}^a - L \\ &= \pi_a^0 \phi_0^a + \pi_a^{00} \phi_{00}^a + \pi_a^{0i} \phi_{0i}^a - L. \end{aligned}$$

Na última linha, vamos fazer uma integração por partes e descartar os termos de fronteira. Dessa forma obtemos

$$\mathcal{H} = \left[\pi_a^0 - \frac{d}{dx^i} \pi_a^{0i} \right] \phi_0^a + \pi_a^{00} \phi_{00}^a - L. \quad (3.5)$$

Se analisarmos um sistema de terceira ordem, o resultado será

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_a^0 \phi_0^a + \pi_a^{0\mu} \phi_{0\mu}^a + \pi_a^{0\mu\nu} \phi_{0\mu\nu}^a - L \\
&= \pi_a^0 \phi_0^a + \pi_a^{0i} \phi_{0i}^a + \pi_a^{00} \phi_{00}^a + \pi_a^{0ij} \phi_{0ij}^a + 2\pi_a^{00i} \phi_{00i}^a + \pi_a^{000} \phi_{000}^a - L \\
&= \left[\pi_a^0 - \frac{d}{dx^i} \pi_a^{0i} + \frac{d}{dx^i} \frac{d}{dx^j} \pi_a^{0ij} \right] \phi_0^a + \left[\pi_a^{00} - 2 \frac{d}{dx^i} \pi_a^{00i} \right] \phi_{00}^a + \pi_a^{000} \phi_{000}^a - L.
\end{aligned}$$

Não vamos nos preocupar, contudo, em escrever uma expressão geral. O importante é que essas expressões revelam como devemos escolher os momentos conjugados, observando a forma geral da densidade Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = p_a \phi_0^a + p_a^1 \phi_{00}^a + p_a^2 \phi_{000}^a + \cdots - L.$$

No caso de uma teoria de segunda ordem, os momentos conjugados são

$$\begin{aligned}
p_a &\equiv \pi_a^0 - \frac{d}{dx^i} \pi_a^{0i}, \\
p_a^1 &\equiv \pi_a^{00}.
\end{aligned}$$

Como exemplo, mais uma vez usaremos a teoria de Podolsky, cujos momentos covariantes são dados pelas expressões (2.49) e (2.50):

$$\begin{aligned}
\pi^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} - 2a^2 \eta^{\omega\gamma} \Upsilon_{\beta\omega}^{\alpha\mu} \Delta_{\alpha\gamma}^{\nu\lambda} \partial_\lambda \partial_\rho F^{\beta\rho}, \\
\pi^{\mu\nu\lambda} &= 2a^2 \eta^{\omega\gamma} \Upsilon_{\beta\omega}^{\alpha\mu} \Delta_{\alpha\gamma}^{\nu\lambda} \partial_\rho F^{\beta\rho}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\pi^{\mu 0} &= F^{\mu 0} + a^2 \partial^0 \partial_\rho F^{\mu\rho} - \frac{1}{2} a^2 \partial^\mu \partial_i F^{0i}, \\
\pi^{\mu 00} &= a^2 \eta^{\mu 0} \partial_i F^{0i} - a^2 \eta^{00} \partial_\rho F^{\mu\rho}, \\
\pi^{\mu 0i} &= \frac{1}{2} a^2 [\eta^{\mu i} \partial_j F^{0j} + \eta^{\mu 0} (\partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij})].
\end{aligned}$$

Com essas expressões, definimos os momentos conjugados

$$\begin{aligned}
p^\mu &\equiv \pi^{\mu 0} - \partial_i \pi^{\mu 0i} \\
&= F^{\mu 0} + a^2 \partial^0 \partial_\rho F^{\mu\rho} - \frac{1}{2} a^2 [\partial^\mu + \eta^{\mu i} \partial_i - \eta^{\mu 0} \partial_0] \partial_j F^{0j},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\pi^\mu \equiv \pi^{\mu 00} = a^2 \eta^{\mu 0} \partial_i F^{0i} - a^2 \eta^{00} \partial_\rho F^{\mu\rho}. \tag{3.7}$$

Voltando ao formalismo, verificamos que as equações (2.10) devem ser substituídas pelas

equações

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \phi_{[i]}^a} = 0, \quad (3.8)$$

em que $[i]$ representa o número de derivadas temporais, sendo $i \in [1, k]$. Seguindo o mesmo procedimento da seção 2.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \phi_{[i]}^a} &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{[i]}^a} - \frac{\delta}{\delta \phi_{[i]}^a} \left[\frac{dS}{dt} \right] = \frac{\delta L}{\delta \phi_{[i]}^a} - \frac{\delta}{\delta \phi_{[i]}^a} \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \phi_{0(m)}^a \frac{\delta S}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{[i]}^a} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta S}{\delta \phi_{[i]}^a} - \frac{\delta \phi_{0(m)}^a}{\delta \phi_{[i]}^a} \frac{\delta S}{\delta \phi_{(m)}^a} - \phi_{0(m)}^a \frac{\delta}{\delta \phi_{[i]}^a} \left[\frac{\delta S}{\delta \phi_{(m)}^a} \right] \\ &= \frac{\delta L}{\delta \phi_{0[m]}^a} - \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^a} - \frac{d}{dt} \frac{\delta S}{\delta \phi_{0[m]}^a}, \end{aligned}$$

em que $m \in [0, k-1]$. Dessa forma, temos as condições

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^a} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{0[m]}^a} - \frac{d}{dt} \frac{\delta S}{\delta \phi_{0[m]}^a}. \quad (3.9)$$

A partir deste ponto, o desenvolvimento é idêntico ao da seção 2.1 a partir da equação (2.11). Com alguma álgebra, o resultado obtido é que a equação (3.9) é equivalente a

$$p_a^m = \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^a}, \quad (3.10)$$

em que p_a^m são exatamente os momentos obtidos da análise da densidade Hamiltoniana. Este resultado se verifica em todas as ordens. Nesta expressão, usamos a notação p_a^m para indicar o momento correspondente à variável de ordem m como forma de expressão geral.

Vamos voltar à equação (3.4), que deve resultar na equação de Hamilton-Jacobi deste sistema. Ela pode ser escrita por

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \phi_{0(m)}^a \frac{\delta S}{\delta \phi_{(m)}^a} - L = 0.$$

Agora, usaremos o fato de que S não deve depender das derivadas espaciais dos campos. Neste caso podemos escrever

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \phi_{0[m]}^a \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^a} - L = 0. \quad (3.11)$$

Com as relações (3.10) e definindo o momento $p_t \equiv \partial S / \partial t$, podemos escrever a equação

$$p_t + p_a^m \phi_{0[m]}^a - L = 0. \quad (3.12)$$

Esta é a condição equivalente a (2.33), desta vez para a dinâmica em forma instantânea da decomposição $d + 1$.

Até agora, recorreremos à decomposição do espaço-tempo em hiper-superfícies de Cauchy para escapar do problema da invariância por reparametrizações em teorias relativísticas. Neste cenário a existência de uma função $S(x, \phi_{[m]}^a)$ que satisfaça as condições (3.10) e (3.12) garante que a integral fundamental possua um extremo. Assim, em analogia com o caso covariante, devemos buscar fazer de (3.12) uma equação diferencial parcial. Novamente vamos recorrer às definições dos momentos conjugados para que isto ocorra.

Vamos tomar a definição para o momento de ordem $k - 1$:

$$p_a^{k-1} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{[k]}^a} = \psi_a(x^\mu, \phi^a, \phi_{(i)}^a),$$

que, exatamente como (2.34), é uma função dos parâmetros e dos campos até ordem k . Podemos inverter esta relação para encontrar o campo $\phi_{[k]}^a$ se

$$\det[W_{ab}] \equiv \det\left[\frac{\delta p_a^{k-1}}{\delta \phi_{[k]}^b}\right] = \det\left[\frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{[k]}^a \delta \phi_{[k]}^b}\right] \neq 0. \quad (3.13)$$

Assim como no caso covariante, a expressão geral para os momentos envolve derivadas temporais dos campos de ordem superior a k , até ordem $2k - 1$. O procedimento é idêntico ao da seção 2.2 e não nos preocuparemos em reproduzi-lo aqui, mas o resultado é análogo: se a condição Hessiana (3.13) for satisfeita, podemos escrever os campos de ordem k a $2k - 1$ em função dos momentos correspondentes aos campos de ordem 1 a k . A expressão tem forma geral

$$\phi_{[k+m]}^a = \beta_{k+m}^a(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, p_a^{k-1}, \dots, p_a^{k-m-1}). \quad (3.14)$$

Tomando a equação (3.12), temos

$$p_t + \sum_{i=1}^{k-1} p_a^{i-1} \phi_{[i]}^a + p_a^{k-1} \phi_{[k]}^a - L = 0.$$

Contudo, sabemos que somente $\phi_{[k]}^a$ pode ser invertida:

$$\phi_{[k]}^a = \beta_k^a(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, p_a^{k-1}).$$

Portanto,

$$p_t = - \sum_{i=1}^{k-1} p_a^{i-1} \phi_{[i]}^a - p_a^{k-1} \beta_k^a + L(\phi_{[k]}^a = \beta_k^a).$$

À direita, temos a densidade Hamiltoniana em sua forma canônica, com os campos $\phi_{[k]}^a$ substituídos pelas suas respectivas expressões β_k^a , ou seja,

$$\mathcal{H}_c \equiv \sum_{i=1}^{k-1} p_a^{i-1} \phi_{[i]}^a + p_a^{k-1} \beta_k^a - L \left(\phi_{[k]}^a = \beta_k^a \right). \quad (3.15)$$

Como os momentos são dados por (3.10), a equação (3.11) torna-se uma equação diferencial funcional para S ,

$$\Phi_0 \equiv p_t + \mathcal{H}_c = 0. \quad (3.16)$$

Esta equação é a equação de Hamilton-Jacobi do sistema.

É uma característica dos sistemas com derivadas superiores que a Hamiltoniana canônica (3.15) dependa linearmente dos momentos p_a a p_a^{k-2} , mas a dependência com p_a^{k-1} não é necessariamente linear. Este fato tem profunda influência na estrutura dinâmica da teoria, como veremos adiante, especialmente no caso de sistemas que não obedecem a condição Hessiana (3.13). Na próxima seção, mostraremos como esses sistemas podem ser tratados naturalmente pelo formalismo de Hamilton-Jacobi.

3.3 Sistemas não Hessianos

Agora, vamos supor que a condição (3.13) seja violada para um sistema de densidade Lagrangiana $L \left(x^\mu, \phi^a, \phi_{(i)}^a \right)$, que contenha derivadas até ordem k nos campos. Vamos admitir o caso em que a matriz Hessiana

$$W_{ab} = \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{[k]}^a \delta \phi_{[k]}^b} \quad (3.17)$$

tenha determinante nulo, o que indica que ela possui um conjunto de autovalores nulos, digamos, de número r . Se ignorarmos, por enquanto, o fato de que podem haver autovalores degenerados e supor que o posto de W , que vem a ser o número de autovalores não nulos, seja dado por $p = n - r$, existe uma submatriz regular de ordem p ,

$$W_{a'b'} \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \phi_{[k]}^{a'} \delta \phi_{[k]}^{b'}}, \quad (a', b') = (1, 2, \dots, p)$$

cujo determinante é diferente de zero. De agora em diante, usaremos os índices com linha para designar variáveis relacionadas com a parte inversível da matriz Hessiana.

Se este for o caso, é possível escrever

$$\phi_{[k]}^{a'} = \beta_k^{a'} \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, p_{a'}^{k-1} \right), \quad (3.18)$$

ou seja, existe um número p de derivadas de ordem k no tempo que podem ser escritas em termos dos momentos. Por consequência, também são escritas em termos dos momentos todas as derivadas de ordem k a $2k - 1$ dos campos $\phi^{a'}$.

Por outro lado, as expressões

$$p_z^{k-1} = \frac{\delta L}{\delta \phi_{[k]}^z} \equiv -\mathcal{H}_z^{k-1} \left(x^\mu, \phi^a, \phi_{(i)}^a \right), \quad z = 1, 2, \dots, r,$$

não podem ser invertidas para fornecer os campos $\phi_{[k]}^z$. Tampouco podemos usar os momentos de ordem inferior para obter expressões para as derivadas dos campos acima de k . Isso indica que as funções $\mathcal{H}_z^{k-1}$ não dependem de $\phi_{[k]}^z$, ou em último caso a dependência é tal que impede a inversão. No geral, este último caso pertence a Lagrangianas com nenhum interesse físico. Portanto, assumiremos que $\mathcal{H}_z^{k-1}$ sejam funções dos campos e de suas derivadas que não incluam derivadas temporais de ordem k .

Por outro lado, $\mathcal{H}_z^{k-1}$ podem depender de $\phi_{[k]}^{a'}$ e podemos utilizar (3.18). De forma mais geral, definiremos as funções

$$\Phi_z^{k-1} \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_a^{k-1} \right) \equiv p_z^{k-1} - \mathcal{H}_z^{k-1} \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_{a'}^{k-1} \right). \quad (3.19)$$

Nessas estamos omitindo possível dependência nas derivadas espaciais de ordem k dos campos. Visto que os momentos estão relacionados com derivadas funcionais de S com relação aos campos, as equações

$$\Phi_z^{k-1} \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_a^{k-1} \right) = 0 \quad (3.20)$$

são equações diferenciais para $S \left(x^\mu, \phi_{[m]}^a \right)$.

O mesmo ocorre para derivadas superiores a k . Por exemplo, podemos inverter as derivadas de ordem $k + 1$ dos campos $\phi^{a'}$:

$$\phi_{[k+1]}^{a'} = \beta_{k+1}^{a'} \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, p_{a'}^{k-1}, p_{a'}^{k-2} \right),$$

mas não podemos fazer o mesmo com $\phi_{[k+1]}^z$, o que resulta nas expressões

$$p_z^{k-2} = -\mathcal{H}_z^{k-2} \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_a^{k-1}, p_a^{k-2} \right).$$

De maneira geral, retrocedendo este procedimento até os momentos p_a , temos

$$\phi_{[k+s]}^{a'} = \beta_{k+s}^{a'} \left(x^\mu, \phi^a, \dots, \phi_{(k-1)}^a, p_{a'}^{k-1}, \dots, p_{a'}^{k-s-1} \right) \quad (3.21)$$

e

$$p_z^{k-s-1} = -\mathcal{H}_z^{k-s-1} \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_{a'}^{k-1}, \dots, p_{a'}^{k-s-1} \right), \quad (3.22)$$

para s de 0 a $k-1$.

Portanto, se a matriz Hessiana (3.17) tem posto p , temos um número de kp relações (3.21) para as derivadas superiores com relação aos momentos e kr equações diferenciais

$$\Phi_z^m \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_a^m \right) = 0, \quad (3.23)$$

que devem ser obedecidas pela função S . A equação de Hamilton-Jacobi (3.16) também deve ser satisfeita, mas para que ela seja colocada sob a forma de uma equação diferencial temos que mostrar que a Hamiltoniana canônica não depende dos campos $\phi_{[k]}^z$. Isto pode ser observado por

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}_c}{\delta \phi_{[k]}^z} &= \frac{\delta}{\delta \phi_{[k]}^z} \left[\sum_{i=1}^{k-1} p_a^{i-1} \phi_{[i]}^a \right] + \frac{\delta}{\delta \phi_{[k]}^z} \left[p_a^{k-1} \phi_{[k]}^a \right] - \frac{\delta L}{\delta \phi_{[k]}^z} \\ &= p_z^{k-1} - \frac{\delta L}{\delta \phi_{[k]}^z} = \Phi_z^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (3.16) permanece válida. As equações (3.16) e (3.23) podem ser colocadas sob um sistema único de equações:

$$\Phi_\alpha^m \left(x^\mu, \phi_{(m)}^a, p_a^m \right) = 0, \quad (3.24)$$

em que $\alpha = 0, 1, \dots, r$. Essas equações são lineares nos momentos p_α^m . Chamaremos essas equações de equações de Hamilton-Jacobi.

Temos, então, um conjunto de $k(r+1)$ equações de Hamilton-Jacobi para sistemas não Hessianos, ou singulares, de posto $p = n - r$. Essas condições constituem a generalização do formalismo para esses sistemas. Observamos de imediato que apenas a equação $\Phi_0 = 0$ sobrevive para o caso em que $p = n$, ou seja, se o sistema for regular, ou Hessiano. No outro caso extremo, em que $r = n$, as equações (3.24) tornam-se $k(n+1)$ equações, uma para cada variável $\left(t, \phi_{[m]}^a \right)$ para m de 0 a $k-1$.

Neste ponto, podemos fazer uma mudança de variáveis bastante conveniente. Vamos supor que o tempo t seja incluso às variáveis $\phi_{[m]}^a$, tal que $t \equiv \phi^0$. De fato, podemos compreender a equação de Hamilton-Jacobi (3.16) como uma equação de vínculo se o tempo for tratado como

variável dinâmica. Neste caso, $p_t = \partial S / \partial t$ deixa de ser uma notação e torna-se um momento conjugado, respectivo à variável $\phi^0 = t$. A esta mudança de variáveis relacionamos um espaço de configuração $\mathbb{Q}$ cujos elementos são as variáveis $(t, \phi^a, \phi_0^a, \dots, \phi_{[k-1]}^a)$. Da mesma forma que no formalismo covariante, as derivadas de ordem k são tidas como análogas aos campos de velocidade em teorias de primeira ordem. Contudo, o fato de a Hessiana ter posto p leva a uma separação natural entre as variáveis do espaço de configuração, $(\phi_{[m]}^\alpha, \phi_{[m]}^{a'})$. Cada variável $\phi_{[m]}^\alpha$ está relacionada a sua respectiva equação de Hamilton-Jacobi, enquanto as variáveis $\phi_{[m]}^{a'}$ estão relacionadas com a submatriz regular de W .

3.4 Equações características

Agora que encontramos o sistema de Hamilton-Jacobi como as condições generalizadas obedecidas pelos sistemas singulares para a existência de extremos da integral fundamental, vamos nos ocupar em como encontrar estes extremos. Assim como na seção 2.3, começamos com as relações

$$p_\alpha^m(x) = \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^\alpha(x)}, \quad \alpha = 0, \dots, r, \quad m = 0, \dots, k-1, \quad (3.25)$$

$$\Phi_\alpha^m(x) = p_\alpha^m(x) + \mathcal{H}_\alpha^m(x) = 0, \quad \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_c. \quad (3.26)$$

A partir de agora, explicitaremos o ponto de aplicação no espaço-tempo nas expressões mais importantes. Acima, verificamos que (3.25) não equivale exatamente a (3.10) pois, a rigor, o objeto definido nesta depende de dois pontos distintos do espaço-tempo. A definição correta do momento exige integração sobre Ξ , de modo que (3.25) é a expressão correta, considerando

$$S \equiv \int_{\Xi} d\sigma_y S(y).$$

Note que Φ_0 pode ser escrito por

$$\Phi_0 = p_t + p_{a'}^m \phi_{0[m]}^{a'} + p_z^m \phi_{0[m]}^z - L,$$

com soma em m implícita.

A partir deste ponto assumiremos que as variáveis $\phi_{[m]}^\alpha$ são independentes entre si, ou seja, que não existem condições algébricas adicionais sobre essas variáveis além das equações (3.26). Veremos mais adiante que esta suposição depende da análise da integrabilidade dessas equações. De fato, a discussão sobre a integrabilidade do sistema de Hamilton-Jacobi deve preceder a dedução das equações características. Mais que isso, veremos no capítulo 4 que essa discussão é o foco da interpretação dos sistemas não Hessianos como sistemas dinâmi-

cos. O que pode parecer uma inversão de procedimento formal, entretanto, nos permitirá introduzir ferramentas que na verdade independem do procedimento de dedução das equações canônicas do formalismo, sendo as mais importantes os parênteses de Poisson. Por enquanto, vamos supor que as equações de Hamilton-Jacobi formam um conjunto completo de equações diferenciais parciais linearmente independentes, condição que assegura a independência entre as variáveis $\phi_{[m]}^\alpha$ e a integrabilidade da teoria.

Em Φ_0 usaremos as demais equações (3.26), $p_z^m = -\mathcal{H}_z^m$, e derivaremos com relação a p_a^m :

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi_0}{\delta p_a^{m'}} &= \frac{\delta}{\delta p_a^{m'}} \left[p_a^m \phi_{0[m]}^{a'} \right] - \frac{\delta}{\delta p_a^{m'}} \left[\mathcal{H}_z^m \phi_{0[m]}^z \right] - \frac{\delta L}{\delta p_a^{m'}} \\ &= \delta_{a'}^a \phi_{0[m']}^{a'} - \frac{\delta \mathcal{H}_z^m}{\delta p_a^{m'}} \phi_{0[m]}^z.\end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\phi_{0[m']}^{a'} = \frac{\delta\Phi_0}{\delta p_a^{m'}} \phi_0^0 + \frac{\delta \mathcal{H}_z^m}{\delta p_a^{m'}} \phi_{0[m]}^z = \frac{\delta\Phi_\alpha^m}{\delta p_a^{m'}} \phi_{0[m]}^\alpha,$$

ou como forma de uma equação diferencial total:

$$\delta\phi_{[m']}^{a'}(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta\Phi_\alpha^m(y)}{\delta p_a^{m'}(x)} \delta\phi_{[m]}^\alpha(y), \quad (3.27)$$

em que explicitamos a integração sobre a hiper-superfície Ξ .

A equação (3.27) é a primeira equação característica do sistema, sendo análoga à equação (2.54). Devemos nos lembrar que estamos utilizando a notação $\phi_{[m]}^\alpha = (t, \phi_{[m]}^z)$ e, portanto, se $r = 0$ essas equações devem se reduzir às equações canônicas de Hamilton para derivadas de ordem superior, como de fato ocorre:

$$\frac{d}{dt} \phi_{[m]}^a(x) = \frac{\delta H_c}{\delta p_a^m(x)}, \quad H_c \equiv \int_{\Xi} \mathcal{H}_c d\sigma.$$

A segunda equação característica do sistema de Hamilton-Jacobi (3.26) pode ser obtida com a variação funcional dos momentos:

$$\begin{aligned}\delta p_a^m(x) &= \int_{\Xi} d\sigma_y \left[\frac{\delta p_a^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^{b'}(x)} \delta \phi_{[m']}^{b'}(y) + \frac{\delta p_a^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^\alpha(x)} \delta \phi_{[m']}^\alpha(y) \right] \\ &= \int_{\Xi} d\sigma_y \left[\frac{\delta p_{b'}^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} \delta \phi_{[m']}^{b'}(y) + \frac{\delta p_\alpha^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} \delta \phi_{[m']}^\alpha(y) \right],\end{aligned}$$

em que, na última linha, usamos (3.25). Com (3.27),

$$\delta p_a^m(x) = \iint_{\Xi} d\sigma_y d\sigma_z \frac{\delta p_{b'}^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m''}(z)}{\delta p_{b'}^{m'}(y)} \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(z) + \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta p_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(y). \quad (3.28)$$

Agora, vamos derivar as equações (3.26) com relação aos campos $\phi_{[m]}^{a'}$, obtendo

$$\frac{\delta \Phi_{\alpha}^m(y)}{\delta \phi_{[m']}^{a'}(x)} + \int_{\Xi} d\sigma_z \left[\frac{\delta \Phi_{\alpha}^m(y)}{\delta p_{b'}^{m''}(z)} \frac{\delta p_{b'}^{m''}(z)}{\delta \phi_{[m']}^{a'}(x)} + \frac{\delta \Phi_{\alpha}^m(y)}{\delta p_{\beta}^{m''}(z)} \frac{\delta p_{\beta}^{m''}(z)}{\delta \phi_{[m']}^{a'}(x)} \right] = 0.$$

As equações de Hamilton-Jacobi são lineares em p_{α}^m , de modo que

$$\frac{\delta p_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} = -\frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} - \int_{\Xi} d\sigma_w \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta p_{b'}^{m''}(w)} \frac{\delta p_{b'}^{m''}(w)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)}. \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29) em (3.28) temos

$$\delta p_a^m(x) = - \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^a(x)} \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(y). \quad (3.30)$$

Esta é a equação característica para os momentos, em analogia com (2.59). Esta equação também se reduz às equações de Hamilton usuais no caso $r = 0$:

$$\frac{d}{dt} p_a^m(x) = -\frac{\delta H_c}{\delta \phi_{[m]}^a(x)},$$

como deve ser.

A terceira equação característica, aquela que resulta em uma forma para a função S , é dada pela variação

$$\begin{aligned} \delta S(x) &= \int_{\Xi} d\sigma_y \left[\frac{\delta S(x)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \delta \phi_{[m]}^{a'}(y) + \frac{\delta S(x)}{\delta \phi_{[m]}^{\alpha}(y)} \delta \phi_{[m]}^{\alpha}(y) \right] \\ &= \int_{\Xi} d\sigma_z \left[\int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta S(x)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta p_{a'}^m(y)} + \frac{\delta S(x)}{\delta \phi_{[m]}^{\alpha}(z)} \right] \delta \phi_{[m]}^{\alpha}(z). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Integrando esta equação em Ξ , podemos escrever

$$\delta S = \int_{\Xi} d\sigma_z \left[\int_{\Xi} d\sigma_y p_{a'}^m(y) \frac{\delta \mathcal{H}_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta p_{a'}^m(y)} - \mathcal{H}_{\alpha}^m(z) \right] \delta \phi_{[m]}^{\alpha}(z). \quad (3.32)$$

Nesta última utilizamos as equações (3.26) e (3.27). Portanto, (3.32) é a terceira equação

característica do sistema (3.26). Note que podemos escrever esta equação como

$$\delta S = \int_{\Xi} d\sigma_z \left[p_{a'}^m(z) \phi_{0[m]}^{a'}(z) - \mathcal{H}_\alpha^m(z) \phi_{0[m]}^\alpha(z) \right] dt.$$

Integrando em t , temos

$$S = \int_{\Omega} d\omega \left[p_{a'}^m \phi_{0[m]}^{a'} - \mathcal{H}_\alpha^m \phi_{0[m]}^\alpha \right]. \quad (3.33)$$

Vamos comparar a integral fundamental

$$A = \int_{\Omega} d\omega L$$

com a integral (3.33). Vemos claramente que A torna-se uma solução do sistema de Hamilton-Jacobi se

$$\begin{aligned} L &= p_{a'}^m \phi_{0[m]}^{a'} - \mathcal{H}_\alpha^m \phi_{0[m]}^\alpha \\ &= p_{a'}^m \phi_{0[m]}^{a'} - \mathcal{H}_c - \mathcal{H}_z^m(z) \phi_{0[m]}^z. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo os termos $p_z^m \phi_{0[m]}^z$, temos

$$\begin{aligned} L &= p_{a'}^m \phi_{0[m]}^{a'} + p_z^m \phi_{0[m]}^z - \mathcal{H}_c + p_z^m \phi_{0[m]}^z - \mathcal{H}_z^m \phi_{0[m]}^z \\ &= p_a^m \phi_{0[m]}^a - \mathcal{H}_c + [p_z^m - \mathcal{H}_z^m] \phi_{0[m]}^z \\ &= p_a^m \phi_{0[m]}^a - \mathcal{H}_c + \Phi_z^m \phi_{0[m]}^z. \end{aligned}$$

Com a expressão acima, temos uma ligação entre o método de Dirac e o formalismo de Hamilton-Jacobi. Assumindo que Φ_z^m são vínculos primários na nomenclatura de Dirac, os campos $\phi_{0[m]}^z$ são campos indeterminados. Definindo os parâmetros $\lambda_m^z \equiv \phi_{0[m]}^z$,

$$L = p_a^m \phi_{0[m]}^a - \mathcal{H}_c + \Phi_z^m \lambda_m^z.$$

Portanto, a existência dos vínculos $\Phi_z^m = 0$ exige que a densidade Lagrangiana e, por consequência, a densidade Hamiltoniana canônica, sejam redefinidos com a adição de combinações lineares dos vínculos primários. Este procedimento indica de forma natural a definição da densidade Hamiltoniana primária no formalismo de Dirac.

Contudo, no que diz respeito ao formalismo de Hamilton-Jacobi, as equações características (3.27) e (3.30), que tomaremos a liberdade de chamar de equações canônicas, são as equações de campo da teoria. A função S pode ser encontrada por (3.31) apenas se as equações

canônicas forem resolvidas. Por outro lado, a forma

$$\delta S \equiv \int_{\Xi} d\sigma_x \left[p_{a'}^m(x) \delta \phi_{[m]}^{a'}(x) - \mathcal{H}_\alpha^m(x) \delta \phi_{[m]}^\alpha(x) \right]$$

sugere uma integral fundamental com várias variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha$. Se for tomada a primeira variação da ação na forma (3.33) com relação às variáveis $p_{a'}^m$ e $\phi_{[m]}^{a'}$, as equações (3.27) e (3.30) serão as condições para que esta primeira variação seja nula, a menos de termos de superfície.

3.5 O espaço de fase e os parênteses de Poisson

Vamos trabalhar com as equações canônicas

$$\delta \phi_{[m]}^{a'}(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}(y)}{\delta p_{a'}^m(x)} \delta \phi_{[m']}^\alpha(y), \quad (3.34)$$

$$\delta p_{a'}^m(x) = - \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}(y)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(x)} \delta \phi_{[m']}^\alpha(y), \quad (3.35)$$

cujas soluções gerais são um conjunto de funções

$$\phi_{[m]}^{a'} = \phi_{[m]}^{a'}(x, \phi_{[m]}^\alpha) = \phi_{[m]}^{a'}(x, t, \phi_{[m]}^z), \quad (3.36)$$

$$p_{a'}^m = p_{a'}^m(x, \phi_{[m]}^\alpha) = p_{a'}^m(x, t, \phi_{[m]}^z). \quad (3.37)$$

Se estas soluções existirem, elas representam campos geodésicos que são extremos da integral fundamental. No que segue, os índices desses campos permanecem com os mesmos valores: m varia de zero a $k-1$, em que k é a ordem da maior derivada temporal presente na densidade Lagrangiana; a varia de 1 a n , enquanto a' toma valores de 1 a p , o posto da matriz Hessiana e z , de 1 a r tal que $r = n - p$. O índice α não deve ser confundido com índices do espaço-tempo: ele varia de zero a r para englobar quantidades relacionadas à evolução temporal, como o momento p_0 e a densidade Hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_c$.

Através das equações canônicas (3.34) e (3.35) somos capazes de observar que as variáveis $\phi_{[m]}^z$ possuem o mesmo status que o parâmetro t , ou seja, são variáveis independentes do sistema, no sentido que os campos em (3.36) e (3.37) são funções dessas variáveis. A separação do espaço de configuração entre os campos $\phi_{[m]}^{a'}$ e $\phi_{[m]}^z$, evidente já na análise da singularidade da matriz Hessiana, reflete-se também na separação do espaço de fase do sistema. Observando-se as equações características, está claro que o espaço de fase deve ser definido pelas variáveis $\xi_m^A \equiv (\phi_{[m]}^{a'}, p_{a'}^m)$. Dizemos que essas variáveis são as variáveis dependentes do sistema. Naturalmente, quando tratarmos explicitamente das variáveis ξ_m^A o índice A varia de 1 a $2p$.

Vamos usar o procedimento padrão e verificar como podemos escrever a evolução de um observável físico dadas as equações características. Vamos supor que este observável seja representado por uma função

$$F(x) = F\left(\phi_{[m]}^{a'}, p_{a'}^m, \phi_{[m]}^\alpha\right),$$

ou seja, uma função tanto das variáveis dependentes como independentes do sistema. Estamos usando o argumento x para lembrar que estamos tratando F como uma densidade distribucional.

A diferencial funcional

$$\delta F(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \delta \phi_{[m]}^{a'}(y) + \frac{\delta F(x)}{\delta p_{a'}^m(y)} \delta p_{a'}^m(y) + \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m]}^\alpha(y)} \delta \phi_{[m]}^\alpha(y) \right]$$

representa a variação de F com relação às variáveis, independentes e dependentes. Com as equações canônicas (3.36) e (3.37), escrevemos

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= \iint_{\Xi} d\sigma_y d\sigma_z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta p_{a'}^m(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p_{a'}^m(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \right] \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(z) \\ &+ \int_{\Xi} d\sigma_z \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m']}^{\alpha}(z)} \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(z). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esta equação sugere a adoção dos parênteses de Poisson

$$\{A(x), B(y)\} \equiv \int_{\Xi} d\sigma_z \left[\frac{\delta A(x)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta p_{a'}^m(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta p_{a'}^m(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(z)} \right], \quad (3.39)$$

tal que a evolução de F é observada segundo

$$\delta F(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \left[\{F(x), \Phi_{\alpha}^m(y)\} + \frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m]}^{\alpha}(y)} \right] \delta \phi_{[m]}^{\alpha}(y). \quad (3.40)$$

A última integral refere-se à dependência de $F(x)$ com relação às variáveis independentes. Esta função não deve depender dos momentos p_{α}^m , mas podemos generalizar a diferencial para atender a este caso. Basta escrever

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= \iint_{\Xi} d\sigma_y d\sigma_z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta p_{a'}^m(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta p_{a'}^m(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta \phi_{[m]}^{a'}(y)} \right] \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(z) \\ &+ \iint_{\Xi} d\sigma_y d\sigma_z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \phi_{[m]}^{\beta}(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta \pi_{\beta}^m(y)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi_{\beta}^m(y)} \frac{\delta \Phi_{\alpha}^{m'}(z)}{\delta \phi_{[m]}^{\beta}(y)} \right] \delta \phi_{[m']}^{\alpha}(z). \end{aligned}$$

Esta expressão reduz-se a (3.38) se F independe dos momentos p_α^m e se Φ_α^m depender linearmente desses momentos, como é o caso das equações (3.26). Vamos introduzir aqui os parênteses de Poisson estendidos

$$\{A(x), B(y)\} \equiv \int_{\Xi} d\sigma_z \left[\frac{\delta A(x)}{\delta \phi_{[m]}^i(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta p_i^m(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta p_i^m(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta \phi_{[m]}^i(z)} \right], \quad (3.41)$$

em que estamos usando o índice i para englobar variáveis dependentes e independentes do sistema. Mais uma vez, devemos ressaltar que essas relações são tomadas sobre uma hipersuperfície de Cauchy a t constante.

Da definição (3.41) podemos intuir um espaço de fase estendido com as variáveis $\xi_m^I \equiv (\phi_{[m]}^i, p_i^m)$, tais que $I = 0, \dots, n, n+1, \dots, 2n+1$. A dinâmica do observável $F(x)$ pode ser escrita, com o auxílio de (3.41), por

$$\delta F(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \{F(x), \Phi_\alpha^m(y)\} \delta \phi_{[m]}^\alpha(y). \quad (3.42)$$

Os parênteses fundamentais das variáveis dinâmicas são dados por

$$\{\phi_{[m]}^a(x), \phi_{[m']}^b(y)\} = 0, \quad (3.43)$$

$$\{p_a^m(x), p_b^{m'}(y)\} = 0, \quad (3.44)$$

$$\{\phi_{[m]}^a(x), p_b^{m'}(y)\} = \delta_b^a \delta_m^{m'} \delta^d(x-y), \quad (3.45)$$

o que pode ser verificado diretamente pela definição (3.41). Com a definição podemos, também, provar as propriedades:

1. Antissimetria:

$$\{A(x), B(y)\} = -\{B(y), A(x)\}; \quad (3.46)$$

2. Bilinearidade:

$$\begin{aligned} \{A(x), (a+b)B(y)\} &= \{A(x), aB(y)\} + \{A(x), bB(y)\} \\ &= a\{A(x), B(y)\} + b\{A(x), B(y)\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\{A(x), bB(y) + cC(z)\} = b\{A(x), B(y)\} + c\{A(x), C(z)\}; \quad (3.48)$$

3. As regras de composição e de Leibniz:

$$\{A(x), B(y)C(z)\} = B(y)\{A(x), C(z)\} + \{A(x), B(y)\}C(z), \quad (3.49)$$

$$\{A(x), B[C(y)]\} = \int_{\Xi} d\sigma_z \frac{\delta B(y)}{\delta C(z)} \{A(x), C(z)\}; \quad (3.50)$$

4. A identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} \{A(x), \{B(y), C(z)\}\} + \{B(y), \{C(z), A(x)\}\} \\ + \{C(z), \{A(x), B(y)\}\} = 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

com a, b e c , números complexos.

As equações características são obtidas facilmente com (3.42):

$$\begin{aligned} \delta\phi_{[m]}^{a'}(x) &= \int_{\Xi} d\sigma_y \left\{ \phi_{[m]}^{a'}(x), \Phi_{\alpha}^{m'}(y) \right\} \delta\phi_{[m']}^{\alpha}(y) = \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta\Phi_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta p_{a'}^m(x)} \delta\phi_{[m']}^{\alpha}(y), \\ \delta\pi_{a'}^m(x) &= \int_{\Xi} d\sigma_y \left\{ \phi_{[m]}^{a'}(x), \Phi_{\alpha}^{m'}(y) \right\} \delta\phi_{[m']}^{\alpha}(y) = - \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\delta\Phi_{\alpha}^{m'}(y)}{\delta\phi_{[m]}^{a'}(x)} \delta\phi_{[m']}^{\alpha}(y), \\ \delta S(x) &= \int_{\Xi} d\sigma_y \{S(x), \Phi_{\alpha}^m(y)\} \delta\phi_{[m]}^{\alpha}(y) \\ &= \iint_{\Xi} d\sigma_y d\sigma_z \left[\frac{\delta S(x)}{\delta\phi_{[m']}^{\alpha'}(z)} \frac{\delta\Phi_{\alpha}^m(y)}{\delta p_{a'}^{m'}(z)} + \frac{\delta S(x)}{\delta\phi_{[m']}^{\beta}(z)} \frac{\delta\Phi_{\alpha}^m(y)}{\delta p_{\beta}^{m'}(z)} \right] \delta\phi_{[m]}^{\alpha}(y) \\ &= \int_{\Xi} d\sigma_y \left[\int_{\Xi} d\sigma_z \frac{\delta S(x)}{\delta\phi_{[m']}^{\alpha'}(z)} \frac{\delta\Phi_{\alpha}^m(y)}{\delta p_{a'}^{m'}(z)} + \frac{\delta S(x)}{\delta\phi_{[m]}^{\alpha}(y)} \right] \delta\phi_{[m]}^{\alpha}(y). \end{aligned}$$

Além disso, as equações para as variáveis independentes são triviais:

$$\delta\phi_{[m]}^{\alpha}(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \left\{ \phi_{[m]}^{\alpha}(x), \Phi_{\beta}^{m'}(y) \right\} \delta\phi_{[m']}^{\beta}(y) = \int_{\Xi} d\sigma_y \frac{\Phi_{\beta}^{m'}(y)}{p_{\alpha}^m(x)} \delta\phi_{[m']}^{\beta}(y) = \delta\phi_{[m]}^{\alpha}(x).$$

As variáveis independentes não possuem dinâmica. Dessa forma, com a lei de evolução (3.42) aprendemos que a dinâmica se restringe ao espaço de fase das variáveis dependentes ξ_m^A , que denotaremos pelo símbolo $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$. Este espaço de fase tem dimensão $2pk$. As soluções que são extremos da integral fundamental são hiper-superfícies r -dimensionais pertencentes a $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$ e parametrizadas pelas variáveis independentes $\phi_{[m]}^{\alpha}$.

3.6 O quadro geométrico

Neste ponto, vamos definir um conjunto de campos vetoriais

$$X_{\alpha}^m(x) [\star] \equiv \int_{\Xi} d\sigma_y \chi_{\alpha m'}^{Im'}(x, y) \frac{\delta \star}{\delta \xi_{m'}^I(y)}, \quad (3.52)$$

que são operadores diferenciais lineares no espaço de fase completo das variáveis ξ_m^I . Usaremos $\star$ para indicar em que lugar nas expressões entram as funções sobre as quais esses

operadores atuam. Os componentes são dados por

$$\chi_{\alpha m'}^{Im}(x, y) \equiv \{\xi_{m'}^I(y), \Phi_{\alpha}^m(x)\}. \quad (3.53)$$

Note que a ação desses campos em $F(x)$ é dada por

$$\begin{aligned} X_{\alpha}^m(y)[F(x)] &= \int_{\Xi} d\sigma_z \chi_{\alpha m'}^{Im}(y, z) \frac{\delta F(x)}{\delta \xi_{m'}^I(z)} = \int_{\Xi} d\sigma_y \{\xi_{m'}^I(z), \Phi_{\alpha}^m(y)\} \frac{\delta F(x)}{\delta \xi_{m'}^I(y)} \\ &= \{F(x), \Phi_{\alpha}^m(y)\}, \end{aligned}$$

de modo que podemos escrever

$$\delta F(x) = \int_{\Xi} d\sigma_y \delta \phi_{[m]}^{\alpha}(y) X_{\alpha}^m(y)[F(x)]. \quad (3.54)$$

Podemos escrever as equações canônicas simplesmente por

$$\frac{\delta \xi_m^I(x)}{\delta \phi_{[m']}^{\alpha}(y)} = X_{\alpha}^{m'}(y)[\xi_m^I(x)] = \chi_{\alpha m}^{Im'}(x, y). \quad (3.55)$$

Com a definição dos campos vetoriais X_{α}^m pretendemos induzir uma interpretação geométrica, que vem a ser uma generalização daquela que podemos facilmente deduzir do formalismo simplético da mecânica clássica. As equações canônicas (3.34) e (3.35) levam naturalmente à definição dos vetores X_{α}^m , com componentes $\chi_{\alpha m}^{Im'}$ definidos em (3.53). Dizemos que esses campos vetoriais são responsáveis por gerar soluções do problema variacional a partir das equações (3.55). Devido à estrutura dos componentes desses campos, escritos a partir dos parênteses de Poisson, conclui-se que esta é uma estrutura universal. Por exemplo, vamos tomar uma função $G(x)$ do espaço de fase. A este observável relacionamos um campo vetorial definido por

$$\Lambda(x)[\star] \equiv \int_{\Xi} d\sigma_y \lambda_m^I(x, y) \frac{\delta \star}{\delta \xi_m^I(y)},$$

com componentes

$$\lambda_m^I(x, y) \equiv \{\xi_m^I(x), G(y)\}.$$

A este campo vetorial podemos relacionar a operação

$$\delta_{\rho} \star = \int_{\Xi} d\sigma_y \delta \rho(y) \Lambda(y)[\star], \quad (3.56)$$

que determina a variação de uma quantidade qualquer do espaço de fase estendido com re-

lação a $\rho(y)$, que é um parâmetro relacionado às soluções das equações diferenciais ordinárias

$$\frac{\delta \xi_m^I(x)}{\delta \rho(y)} = \Lambda(y) [\xi_m^I(x)] = \{\xi_m^I(x), G(y)\}. \quad (3.57)$$

Dizemos que G é gerador de soluções das equações (3.57), mas também é gerador de transformações infinitesimais definidas a partir do operador (3.56), sobre as soluções de (3.57). Essas transformações são definidas por

$$\delta_\rho F(x) = F(x)|_{\rho=\rho_1} - F(x)|_{\rho=\rho_0}, \quad \rho_1 - \rho_0 \equiv \delta\rho \ll 1,$$

para uma função arbitrária $F(x)$.

Da mesma forma, as funções $\Phi_\alpha^m(x)$ são geradores de transformações infinitesimais que descrevem a evolução dinâmica de uma função $F(x)$ de acordo com a diferencial (3.54). Esta evolução é parametrizada com as variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha(x)$. $\Phi_0(x)$ é o gerador de transformações infinitesimais na direção do parâmetro $t = x^0$, de modo que a Hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_c$ é a geradora da evolução temporal do sistema. As demais funções Φ_z^m , que no formalismo de Dirac são tratadas como vínculos entre as variáveis canônicas, são geradores de transformações infinitesimais com relação às suas respectivas variáveis independentes $\phi_{[m]}^z$. Vamos assumir, dessa forma, a interpretação de que as equações de Hamilton-Jacobi

$$\Phi_\alpha^m = p_\alpha^m + \mathcal{H}_\alpha^m = 0 \quad (3.58)$$

dão origem a um conjunto de geradores Φ_α^m que geram a evolução dinâmica do sistema com relação a um conjunto de variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha$. A dinâmica segue a lei de evolução

$$\delta F(x) = \int_\Xi d\sigma_y \delta\phi_{[m]}^\alpha(y) X_\alpha^m(y) [F(x)] = \int_\Xi d\sigma_y \{F(x), \Phi_\alpha^m(y)\} \delta\phi_{[m]}^\alpha(y). \quad (3.59)$$

Esta equação será tratada como a diferencial fundamental do formalismo de Hamilton-Jacobi.

Neste ponto, vamos definir os objetos

$$p \equiv \int_\Xi d\sigma_x p_i^m(x) \delta\phi_{[m]}^i(x), \quad (3.60)$$

$$X_\alpha^m \equiv \int_\Xi d\sigma_x X_\alpha^m(x). \quad (3.61)$$

Dada a diferencial

$$\delta S \equiv \int_\Xi d\sigma_x \frac{\delta S}{\delta\phi_{[m]}^i(x)} \delta\phi_{[m]}^i(x), \quad (3.62)$$

as condições (3.25) são equivalentes a $p = \delta S$. A definição dos objetos S , p e X_α^m , que representam as densidades $S(x)$, $p_i^m(x)$ e $X_\alpha^m(x)$ integradas em uma superfície de Cauchy a t

constante, nos permite traçar um quadro geométrico para o formalismo de Hamilton-Jacobi em teorias de campos. A partir de (3.52) vemos que X_α^m são vetores definidos a partir da construção de uma variedade tangente ao espaço de fase completo $T^*\bar{\mathbb{Q}}$, que engloba o conjunto de variáveis $\xi_m^I = (t, \phi_{[m]}^\alpha, p_t, p_a^m)$. Por outro lado, a quantidade p é claramente a 1-forma definida sobre $T^*\bar{\mathbb{Q}}$ cujos componentes são os momentos conjugados p_i^m . A condição $p = \delta S$, por sua vez, indica que S é geradora de uma família de hiper-superfícies em $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$, de dimensão $k(r+1)$:

$$\sigma : S(\phi_{[m]}^{a'}, \phi_{[m]}^\alpha) = \sigma. \quad (3.63)$$

Neste caso, σ faz o papel de um conjunto de parâmetros que identificam os membros da família.

Nesta discussão torna-se útil a definição das funções

$$\xi_m^I \equiv \int_{\Xi} d\sigma_x \xi_m^I(x), \quad (3.64)$$

que representam os campos do espaço de fase estendido integrados sobre uma superfície de Cauchy. Com essas funções, a diferencial fundamental pode ser facilmente colocada na forma de um sistema de equações diferenciais totais:

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = X_\alpha^m[F]. \quad (3.65)$$

O momento p é claramente ortogonal à família S . Cada vetor X_α^m gera uma curva de 1-parâmetro, ou um fluxo Hamiltoniano. Esses fluxos são soluções das equações canônicas

$$\frac{\delta \xi_m^I}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = X_\alpha^m[\xi_m^I], \quad (3.66)$$

que descrevem curvas em $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Com esta seção, consideramos fechado o quadro completo de Carathéodory para teorias de campos com derivadas de ordem superior. Contudo, este desenvolvimento depende da integrabilidade do sistema de Hamilton-Jacobi, que investigaremos no capítulo 4. Como vimos anteriormente, a principal característica de teorias com matriz Hessiana singular vem a ser o fato de as condições para extremos da integral fundamental apresentarem-se como um conjunto de equações diferenciais parciais, ou com o devido rigor, como equações funcionais de primeira ordem. No decorrer da descrição da teoria de Hamilton-Jacobi, vimos que essas equações estão relacionadas com equações diferenciais totais, as equações características, enquanto as soluções dessas equações são descritas por fluxos Hamiltonianos no espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$ de coordenadas $(\phi_{[m]}^{a'}, p_a^m)$, parametrizados pelas variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha$. As funções Φ_α^m que definem as equações de Hamilton-Jacobi são os geradores da dinâmica do sistema. Do ponto de vista geométrico, o formalismo de Hamilton-Jacobi pode ser sintetizado

pela existência de uma família de hiper-superfícies σ (3.63), de fluxos Hamiltonianos gerados por vetores X_α^m (3.52) e pela 1-forma p definida em (3.60). Se p for ortogonal à família σ , temos cumpridas todas as condições para a existência de um campo geodésico que seja um extremo da integral fundamental.

3.7 Dois teoremas

Antes de discutir a integrabilidade do sistema de Hamilton-Jacobi, vamos a dois teoremas fundamentais, que dizem respeito à construção de campos geodésicos a partir de soluções completas dessas equações. Consideremos genericamente um conjunto de $k(r+1)$ equações

$$\Phi_\alpha^m \left(\phi_{[m]}^{a'}, \phi_{[m]}^\alpha, p_{a'}^m, p_\alpha^m \right) = 0, \quad (3.67)$$

$$p = \delta S, \quad (3.68)$$

$$m = 1, \dots, k; \quad a' = 1, \dots, p; \quad \alpha = 0, \dots, r,$$

que dependem apenas de primeiras derivadas de S , ou seja, são de primeira ordem. Como caso especial, as equações de Hamilton-Jacobi são obtidas considerando-se linearidade em p_α^m . Uma integral completa de (3.67) é dada por uma solução

$$S = S \left(\phi_{[m]}^i, \lambda \right), \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.69)$$

em que λ representa um conjunto de parâmetros. Dizemos que a solução (3.69) é completa se

1. Os parâmetros forem linearmente independentes, o que assumiremos por princípio.
2. O número de parâmetros presentes em S for máximo, ou seja, igual ao número de graus de liberdade do sistema.

Se o sistema (3.67) possuir pelo menos uma integral completa na forma (3.69), dizemos também que este é um sistema completo de equações diferenciais parciais.

As equações características referentes a (3.67) são dadas por

$$\delta \xi_m^A = \delta \phi_{[m]}^\alpha \bullet X_\alpha^{m'} [\xi_m^A], \quad A = 1, \dots, 2p, \quad (3.70)$$

em que usaremos $\bullet$ para indicar a operação de convolução, definida por

$$A \bullet B \equiv \int_{\Xi} d\sigma_x A(x) B(x). \quad (3.71)$$

Os vetores X_α^m possuem componentes definidos em (3.52).

Para o primeiro teorema, vamos supor que dispomos de uma solução parcial do sistema (3.67). Tal solução seria tal que $S = S(\phi_{[m]}^i, \lambda_m^{a''})$, em que $a'' = 1, \dots, p' < p$. Neste caso, diferenciação de S com relação aos parâmetros resultam em

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\delta S}{\delta \lambda_m^{a''}} \right) &= \delta \phi_{[m']}^{a'} \bullet \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m']}^{a'} \delta \lambda_m^{a''}} + \delta \phi_{[m']}^\alpha \bullet \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m']}^\alpha \delta \lambda_m^{a''}} \\ &= \delta \phi_{[m'']}^\alpha \bullet \left[X_\alpha^{m''} [\phi_{[m']}^{a'}] \bullet \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m']}^{a'} \delta \lambda_m^{a''}} + \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m']}^\alpha \delta \lambda_m^{a''}} \right]. \end{aligned}$$

Tomando as derivadas de (3.67) com relação a $\lambda_m^{a''}$ e usando a linearidade com relação a p_α^m obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}}{\delta \lambda_m^{a''}} &= \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}}{\delta p_{m''}^\beta} \bullet \frac{\delta p_{m''}^\beta}{\delta \lambda_m^{a''}} + \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}}{\delta p_{m''}^{a'}} \bullet \frac{\delta p_{m''}^{a'}}{\delta \lambda_m^{a''}} = \frac{\delta p_{m'}^\alpha}{\delta \lambda_m^{a''}} + \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}}{\delta p_{m''}^{a'}} \bullet \frac{\delta p_{m''}^{a'}}{\delta \lambda_m^{a''}} \\ &= \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m']}^\alpha \delta \lambda_m^{a''}} + X_\alpha^{m'} [\phi_{[m'']}^{a'}] \bullet \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m'']}^{a'} \delta \lambda_m^{a''}} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta \left(\frac{\delta S}{\delta \lambda_m^{a''}} \right) = 0.$$

Portanto, as funções definidas por

$$\beta_{a''}^m \equiv \frac{\delta S}{\delta \lambda_m^{a''}} \quad (3.72)$$

são constantes de movimento. Este consiste no primeiro teorema.

Se obtivermos uma solução completa do tipo (3.69) e a condição

$$\det \left[\frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m'']}^{a'} \delta \lambda_m^{b'}} \right] \neq 0$$

for satisfeita, podemos mostrar que a inversão da relação

$$\beta_{a''}^m \equiv \frac{\delta S}{\delta \lambda_m^{a''}},$$

nos fornece

$$\phi_{[m]}^{a'} = \phi_{[m]}^{a'}(\phi_{[m]}^\alpha, \beta_{a''}^m, \lambda_m^{a'}). \quad (3.73)$$

Além disso, temos os momentos

$$p_{a'}^m = \frac{\delta S}{\delta \phi_m^{a'}} = p_{a'}^m \left(\phi_{[m]}^\alpha, \lambda_m^{a'} \right). \quad (3.74)$$

Podemos, assim, enunciar o teorema de Jacobi:

Se existir uma solução completa (3.69) do sistema (3.67), as funções (3.73) e (3.74) são soluções das equações características (3.70).

Para provar este teorema precisamos construir um envelope arbitrário da família de hiper-superfícies definida pela solução completa e usar o fato de que todo envelope construído dessa forma é também uma solução de (3.67). A prova para sistemas com uma variável independente ($r = 0$), pode ser encontrada nas referências [14, 15]. Para o caso em que $r > 0$ devemos ter em mente que, alternativamente, podemos descrever uma solução completa das equações de Hamilton-Jacobi como uma função dependente de $k(r + 1)$ funções arbitrárias de $k(p - 1)$ parâmetros. Essas funções podem ser identificadas com as variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha$. A generalização do procedimento torna-se imediata mas em nada acrescentaria ao ponto de vista deste trabalho, de modo que não nos preocuparemos em apresentá-la aqui.

Esses teoremas possuem importância fundamental, ainda que a resolução analítica das equações de Hamilton-Jacobi para uma dada teoria torne-se tarefa impossível. A importância reside no fato de sermos capazes de encontrar constantes de movimento a partir de simples derivação funcional de uma solução particular. No próximo capítulo, através da análise de integrabilidade, discutiremos outras formas de encontrar constantes de movimento e, com algum sucesso, conectar essas constantes a transformações de simetria.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J. Math. **2**, 129-148 (1950).
The Hamiltonian form of field dynamics, Can. J. Math. **3**, 1-23 (1951).
Generalized Hamiltonian dynamics, Proc. Roy. Soc. Lond. **A246**, 326-332 (1958).
Lectures on quantum mechanics, Yeshiva University, New York (1964).
- [2] P. G. Bergmann, *Non-linear field theories*, Phys. Rev. **75**, 680-685 (1949).
J. Anderson & P. G. Bergmann, *Constraints in covariant field theories*, Phys. Rev. **83**, 1018-1025 (1951).
P. G. Bergmann & R. Schiller, *Classical and quantum field theories in the Lagrangian formalism*, Phys. Rev. **89**, 4-16 (1953).
P. G. Bergmann & I. Goldberg, *Dirac bracket transformations in phase space*, Phys. Rev. **98**, 531-538 (1955).
- [3] A. Hanson, T. Regge & C. Teitelboin, *Constrained Hamiltonian systems*, Academia Nazionale dei Licei **22** (1976).
- [4] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics **169**, Springer-Verlag, New York/Berlin (1982).
- [5] D. M. Gitman & I. V. Tyutin, *Quantization of fields with constraints*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [6] H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations; its role in mathematics and physics*, Van Nostrand (1966).
- [7] P. A. M. Dirac, *Forms of relativistic dynamics*, Rev. Mod. Phys. **21**, 392-399 (1949).
- [8] B. L. G. Bekker, *Forms of relativistic dynamics*, Lecture Notes in Physics, **572**, Springer (2001).

- [9] R. A. Neville & F. Rohrlich, *Quantum field theory of null planes*, Il Nuovo Cimento **A1**, 625 (1971).
- [10] P. J. Steinhardt, *Problems of quantization in the infinite momentum frame*, Ann. Phys. **128**, 425-447 (1980).
- [11] R. K. Sachs, *On the characteristic initial value problem in gravitational theory*, J. Math. Phys. **3**, 908-914 (1962).
- [12] Th. Heinzl, St. Krusche & E. Werner, *Spontaneous symmetry breaking in light cone quantum field theory*, Phys. Lett. **B272**, 54-60 (1991).
- [13] P. P. Srivastava, *Theta vacua in the light front quantized Schwinger model*, *arXiv:hep-th/9610149v1* (1996).
- [14] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons (1964).
- [15] C. R. Chester, *Techniques in partial differential equations*, McGraw-Hill Inc. (1971).

Capítulo 4

Integrabilidade

Introdução

Na mecânica clássica a definição de sistemas completamente integráveis envolve um campo vetorial Hamiltoniano, gerador da evolução temporal, que possua um conjunto completo de integrais de movimento. Este conjunto comuta entre si e com a Hamiltoniana canônica, com a operação dos parênteses de Poisson, e está relacionado a transformações de simetria da integral fundamental. Por exemplo, se um sistema mecânico é invariante por translações, os momentos lineares, juntamente com a Hamiltoniana, são constantes do movimento. Obtendo H e $\vec{p}$ tais que $\{H, H\} = 0$ (sistema conservativo), $\{\vec{p}, H\} = 0$ (momentos são constantes de movimento) e $\{p_i, p_j\} = 0$, temos um sistema integrável. Se outras simetrias forem envolvidas, existirão também outras integrais de movimento.

No caso de teorias de campos as simetrias podem ser também locais, como vimos no caso dos teoremas de Noether na seção 1.2. Este é o caso de simetrias de gauge locais, no qual estamos interessados. Veremos que as condições de integrabilidade podem nos fornecer, com a devida interpretação, a mesma definição de sistema integrável que a mecânica clássica. De modo geral, um sistema em teorias de campos deve possuir um conjunto de geradores Φ_α^m que feche uma álgebra de Lie com os parênteses de Poisson. Cada gerador está relacionado a uma transformação de simetria que deixa a ação invariante, a menos de termos em $\partial\Xi$. No formalismo de Dirac-Bergmann [1] esta relação ocorre entre vínculos de primeira classe e simetrias locais. Aqui, usando o formalismo de Hamilton-Jacobi, buscaremos estabelecer relação equivalente.

Para cumprir essa meta, chegaremos primeiro às condições de integrabilidade de Frobenius, que indicam as condições para que o sistema de equações $\Phi_\alpha^m = 0$ seja completo e, consequentemente, suas equações características sejam integráveis. A existência deste conjunto completo de geradores tem diversas consequências do ponto de vista matemático que podem ser melhor analisadas sob o ponto de vista do formalismo simplético. Também dedicaremos espaço para tratar desse tema. Com este roteiro, seremos capazes de mostrar a relação entre as curvas características do sistema de Hamilton-Jacobi e transformações canônicas infinitesimais. Mostraremos que os vetores X_α^m são geradores de transformações de simetria, desta vez no sentido de teoria de grupos, e buscaremos a relação entre essas transformações e as funções Φ_α^m , nos moldes da relação existente entre vínculos de primeira classe e transformações de gauge no formalismo Hamiltoniano.

No geral, o conjunto de geradores devido à singularidade da matriz Hessiana não é completamente integrável e esta é a razão da existência dos métodos de análise de vínculos. Pelas condições de integrabilidade de Frobenius podemos usar o formalismo de Hamilton-Jacobi para fazer esta análise. Portanto, a última seção será dedicada a uma proposta de método para este fim. A chave para esta questão é encontrar um conjunto de geradores que obedeçam as condições de Frobenius, o que envolve a análise da matriz definida pelos parênteses de Poisson entre esses geradores.

Também seremos capazes de conectar a existência de geradores não integráveis à existência de parênteses generalizados, que representam uma dinâmica modificada. Esta operação induz à interpretação de que existe uma estrutura simplética modificada natural em sistemas não Hessianos, que evidencia a integrabilidade. As condições de Frobenius são as únicas relações necessárias para se obter esta estrutura, o que é um entendimento novo com relação ao que se supunha possível realizar no formalismo de Hamilton-Jacobi [2, 3].

4.1 Os parênteses de Lagrange

Existem maneiras diferentes, embora equivalentes, de assegurar a integrabilidade das equações de Hamilton-Jacobi de uma dada teoria. O ponto de vista que tomaremos diz respeito às condições necessárias e suficientes para que exista uma integral completa dessas equações. Se esta solução existir, o teorema de Jacobi garante que as funções definidas em (3.73) e (3.74) são soluções das equações características. Por consequência, condições que garantam a integrabilidade das equações (3.67) asseguram a integrabilidade de (3.70). Com isso podemos começar com a análise das equações características (3.70), cujas soluções, se

existirem, podem ser escritas como

$$\phi_{[m]}^{a'} = \phi_{[m]}^{a'} \left(\phi_{[m]}^\alpha \right), \quad (4.1)$$

$$p_{a'}^m = p_{a'}^m \left(\phi_{[m]}^\alpha \right). \quad (4.2)$$

Vamos supor que essas funções sejam pelo menos de classe C^2 nas variáveis independentes. Se as soluções das equações características são campos geodésicos, temos uma função

$$S = S \left(\phi_{[m]}^{a'}, \phi_{[m]}^\alpha \right) = S \left\{ \phi_{[m]}^{a'} \left(\phi_{[m]}^\alpha \right), \phi_{[m]}^\alpha \right\}, \quad (4.3)$$

para a qual

$$p_{a'}^m = \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^{a'}}. \quad (4.4)$$

Tomando (4.3) e (4.4), temos

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} + \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m']}^{a'}} \cdot \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = p_i^{m'} \cdot \frac{\delta \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m]}^\alpha}.$$

Derivando novamente esta relação,

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m]}^\alpha \delta \phi_{[m'']}^\beta} = \frac{\delta \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \cdot \frac{\delta p_i^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} + p_i^{m'} \cdot \frac{\delta^2 \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m]}^\alpha \delta \phi_{[m'']}^\beta},$$

ou seja,

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m]}^\alpha \delta \phi_{[m'']}^\beta} - p_i^{m'} \cdot \frac{\delta^2 \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m]}^\alpha \delta \phi_{[m'']}^\beta} = \frac{\delta \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \cdot \frac{\delta p_i^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta},$$

O lado esquerdo é simétrico com relação às variáveis independentes. Isto significa que a parte antissimétrica do termo à direita deve ser nula. Aqui, definimos os parênteses de Lagrange das variáveis independentes com relação ao espaço de fase completo $T^*\bar{\mathbb{Q}}$:

$$\left(\phi_{[m]}^\alpha, \phi_{[m'']}^\beta \right) \equiv \frac{\delta \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \cdot \frac{\delta p_i^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} - \frac{\delta \phi_{[m']}^i}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \cdot \frac{\delta p_i^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha}. \quad (4.5)$$

Portanto, se (4.1) e (4.2) são soluções das equações características referentes a um sistema de Hamilton-Jacobi com solução (4.3), os parênteses de Lagrange das variáveis independentes devem ser nulos, ou seja,

$$\left(\phi_{[m]}^\alpha, \phi_{[m'']}^\beta \right) = 0. \quad (4.6)$$

Assim, mostramos que (4.6) é uma condição necessária para a integrabilidade das equações características.

Note que

$$\begin{aligned} \left(\phi_{[m]}^\alpha, \phi_{[m'']}^\beta \right) &= \frac{\delta p_\alpha^m}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} - \frac{\delta p_\beta^{m''}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} + \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet \frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} - \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \bullet \frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \\ &= \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet \frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} - \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \bullet \frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

visto que há a identidade

$$\frac{\delta p_\alpha^m}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} - \frac{\delta p_\beta^{m''}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = 0.$$

Então, a parte referente às variáveis independentes anula-se identicamente e os parênteses de Lagrange são, na verdade, definidos no espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Podemos mostrar que (4.6) é também uma condição suficiente para a integrabilidade. Vamos considerar um conjunto de funções (4.1) e (4.2) tal que

$$\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet \frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} - \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \bullet \frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = 0,$$

que podemos reescrever por

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \left[\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet p_{a'}^{m'} \right] - \frac{\delta}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \left[\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \bullet p_{a'}^{m'} \right] - \frac{\delta^2 \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha \delta \phi_{[m'']}^\beta} \bullet p_{a'}^{m'} + \frac{\delta^2 \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta \delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet p_{a'}^{m'} = 0.$$

Os dois últimos termos à esquerda se cancelam pela simetria das derivadas. Obtemos, então, a condição

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \left[\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet p_{a'}^{m'} \right] = \frac{\delta}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \left[\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m'']}^\beta} \bullet p_{a'}^{m'} \right]. \quad (4.8)$$

Esta expressão mostra que existe uma função σ tal que

$$\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} \bullet p_{a'}^{m'} = \frac{\delta \sigma}{\delta \phi_{[m]}^\alpha}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, sendo as funções (4.1) inversíveis, podemos escrever

$$\phi_{[m]}^\alpha = \phi_{[m]}^\alpha \left(\phi_{[m]}^{a'} \right)$$

e

$$S \left\{ \phi_{[m]}^{a'}, \phi_{[m]}^\alpha \right\} \equiv \sigma \left\{ \phi_{[m]}^{a'}, \phi_{[m]}^\alpha \left(\phi_{[m]}^{a'} \right) \right\}.$$

A partir dessas últimas expressões é imediata a identidade

$$\frac{\delta \sigma}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m']}^{a'}} \bullet \frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha}. \quad (4.10)$$

Como consequência, a comparação entre (4.9) e (4.10) nos mostra que

$$p_{a'}^m = \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^{a'}}. \quad (4.11)$$

Agora, vamos derivar (4.11) com relação às variáveis independentes:

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{[m']}^\alpha} \left[p_{a'}^m - \frac{\delta S}{\delta \phi_{[m]}^{a'}} \right] = \frac{\delta p_{a'}^m}{\delta \phi_{[m']}^\alpha} - \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m]}^{a'} \delta \phi_{[m']}^\alpha} - \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m]}^{a'} \delta \phi_{[m'']}^{b'}} \bullet \frac{\delta \phi_{[m'']}^{b'}}{\delta \phi_{[m']}^\alpha} = 0.$$

Se as variáveis dependentes obedecem as equações características, esta expressão torna-se

$$\frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^{a'}} + \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m]}^{a'} \delta \phi_{[m']}^\alpha} + \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{[m]}^{a'} \delta \phi_{[m'']}^{b'}} \bullet \frac{\delta \Phi_\alpha^{m'}}{\delta p_{b'}^{m''}} = 0,$$

que pode ser colocada na forma

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{[m]}^{a'}} \Phi_\alpha^{m'} \left(\phi_{[m]}^{a'}, p_{a'}^m, \phi_{[m]}^\alpha, p_\alpha^m \right) = 0.$$

Esta equação nos mostra que

$$\Phi_\alpha^{m'} \left(\phi_{[m]}^{a'}, p_{a'}^m, \phi_{[m]}^\alpha, p_\alpha^m \right) = F \left(\phi_{[m]}^\alpha \right).$$

As equações de Hamilton-Jacobi

$$\Phi_\alpha^{m'} \left(\phi_{[m]}^{a'}, p_{a'}^m, \phi_{[m]}^\alpha, p_\alpha^m \right) = 0,$$

podem ser obtidas com a absorção de F no lado esquerdo.

Com este procedimento, mostramos que as condições (4.6) são necessárias e suficientes para que uma função do tipo (4.3) seja uma integral completa das equações de Hamilton-Jacobi. Entretanto, essas condições não são convenientes para possibilitar aplicações do formalismo, já que são necessárias as soluções das equações características. Estas soluções, em se tratando de teorias clássicas de campos, são geralmente o objetivo do formalismo, não seu “input” inicial.

Portanto, devemos nos preocupar em encontrar condições de integrabilidade mais convenientes e, neste caso, mostraremos a seguir que essas condições recaem sobre os geradores da teoria. Este resultado será de extrema importância, visto que nos permitirá reduzir o formalismo de Hamilton-Jacobi à procura de um conjunto completo de geradores linearmente independentes, que podem ser naturalmente construídos a partir da densidade Lagrangiana e das próprias condições de integrabilidade.

4.2 Condições de Frobenius

Vamos relembrar que as equações características

$$\delta \xi_m^A = \delta \phi_{[m']}^\alpha \bullet X_\alpha^{m'} [\xi_m^A], \quad (4.12)$$

podem ser escritas como um conjunto de equações canônicas da seguinte forma:

$$\frac{\delta \phi_{[m']}^{a'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = X_\alpha^m [\phi_{[m']}^{a'}] = \left\{ \phi_{[m']}^{a'}, \Phi_\alpha^m \right\}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\delta p_{a'}^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} = X_\alpha^m [p_{a'}^{m'}] = \left\{ p_{a'}^{m'}, \Phi_\alpha^m \right\}. \quad (4.14)$$

Nessas equações, estamos usando os parênteses de Poisson das funções integradas sobre uma superfície de Cauchy. Para nos adaptar à linguagem deste capítulo, esses parênteses podem ser escritos como

$$\{A, B\} = \frac{\delta A}{\delta \phi_{[m]}^i} \bullet \frac{\delta B}{\delta p_i^m} - \frac{\delta B}{\delta \phi_{[m]}^i} \bullet \frac{\delta A}{\delta p_i^m}. \quad (4.15)$$

Ao substituir (4.13) e (4.14) em (4.7), obtemos

$$\left(\phi_{[m]}^\alpha, \phi_{[m'']}^\beta \right) = X_\alpha^m [\phi_{[m']}^{a'}] \bullet X_\beta^{m''} [p_{a'}^{m'}] - X_\beta^{m''} [\phi_{[m']}^{a'}] \bullet X_\alpha^m [p_{a'}^{m'}]. \quad (4.16)$$

A partir da expressão à direita, vamos definir

$$\left[X_\alpha^m, X_\beta^{m''} \right] \equiv X_\alpha^m X_\beta^{m''} - X_\beta^{m''} X_\alpha^m. \quad (4.17)$$

Este objeto é conhecido como o comutador de Lie. Com (4.17), a condição (4.6) torna-se

$$\left[X_\alpha^m, X_\beta^{m''} \right] \left(\phi_{[m']}^{a'}, p_{a'}^{m'} \right) = 0, \quad (4.18)$$

ou seja, o comutador (4.17) aplicado em $\phi_{[m']}^{a'}$ e $p_{a'}^{m'}$. Esta equação nos fornece uma condição de

integrabilidade sobre os vetores X_α^m . Já que $\phi_{[m']}^{a'}$ e $p_{a'}^{m'}$ são, no geral, não nulos e as equações canônicas devem ser não degeneradas, a igualdade será cumprida se

$$[X_\alpha^m, X_\beta^{m'}] = 0. \quad (4.19)$$

Ainda com respeito à expressão (4.16), podemos reescrevê-la usando (4.13) e (4.14):

$$\begin{aligned} (\phi_{[m]}^\alpha, \phi_{[m'']}^\beta) &= \left\{ \phi_{[m']}^{a'}, \Phi_\alpha^m \right\} \bullet \left\{ p_{a'}^{m'}, \Phi_\beta^{m''} \right\} - \left\{ \phi_{[m']}^{a'}, \Phi_\beta^{m''} \right\} \bullet \left\{ p_{a'}^{m'}, \Phi_\alpha^m \right\} \\ &= \frac{\delta \Phi_\alpha^m}{\delta p_{a'}^{m'}} \bullet \frac{\delta \Phi_\beta^{m''}}{\delta \phi_{[m']}^{a'}} - \frac{\delta \Phi_\beta^{m''}}{\delta p_{a'}^{m'}} \bullet \frac{\delta \Phi_\alpha^m}{\delta \phi_{[m']}^{a'}} = - \left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m''} \right\}. \end{aligned}$$

Então, temos

$$[X_\alpha^m, X_\beta^{m''}] (\phi_{[m']}^{a'}, p_{a'}^{m'}) = - \left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m''} \right\},$$

de modo que a condição de integrabilidade (4.19) é equivalente a estabelecer

$$\left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m''} \right\} = 0 \quad (4.20)$$

para todo o conjunto de geradores da teoria. As equações (4.19) e (4.20) são as condições de integrabilidade de Frobenius.

Assim, encontramos nesta condição uma boa condição de integrabilidade para o formalismo de Hamilton-Jacobi, já que os geradores são conhecidos, em tese, a partir de derivadas da densidade Lagrangiana com relação às velocidades relativas às variáveis independentes. A expressão “em tese”, como veremos, é apropriada. No geral, esses geradores não obedecem as condições de integrabilidade, o que significa que o respectivo sistema de equações de Hamilton-Jacobi não consiste em um sistema completo de equações diferenciais linearmente independentes.

Nossa proposta para a realização deste procedimento será discutida na seção 4.6, já que existem ainda dois tópicos que necessitam de discussão, o formalismo simplético da teoria e transformações canônicas. Mas podemos adiantar que existe uma forma para as condições de Frobenius ainda mais conveniente que (4.20). Note que, se (4.20) é satisfeita, a evolução dinâmica dos geradores é dada por

$$\delta \Phi_\alpha^m = \left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'} \right\} \bullet \delta \phi_{[m']}^\beta = 0, \quad (4.21)$$

ou seja, os geradores são constantes do movimento. A condição de Frobenius é, então equivalente a $\delta \Phi_\alpha^m = 0$.

Para finalizar esta seção, vamos usar explicitamente as equações de Hamilton-Jacobi na

forma

$$\Phi_\alpha^m = p_\alpha^m + H_\alpha^m = 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'} \right\} &= \left\{ p_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\} + \left\{ H_\alpha^m, p_\beta^{m'} \right\} + \left\{ H_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\} \\ &= \frac{\delta H_\beta^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} - \frac{\delta H_\alpha^m}{\delta \phi_{[m']}^\beta} + \left\{ H_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\}. \end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned} \left\{ H_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\} &= \frac{\delta H_\alpha^m}{\delta \phi_{[m']}^\beta} - \frac{\delta H_\beta^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} + \frac{\delta H_\alpha^m}{\delta \phi_{[m'']}^{a'}} \bullet \frac{\delta H_\beta^{m'}}{\delta p_{a'}^{m''}} - \frac{\delta H_\beta^{m'}}{\delta \phi_{[m'']}^{a'}} \bullet \frac{\delta H_\alpha^m}{\delta p_{a'}^{m''}} \\ &= \frac{\delta H_\alpha^m}{\delta \phi_{[m']}^\beta} - \frac{\delta H_\beta^{m'}}{\delta \phi_{[m]}^\alpha} + \left\{ H_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\}_{T^*\bar{\mathbb{Q}}_p}, \end{aligned}$$

em que o último parênteses são os parênteses de Poisson definidos no espaço de fase reduzido $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$, (3.39). Na comparação das expressões anteriores:

$$\left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'} \right\} = \left\{ H_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\}_{T^*\bar{\mathbb{Q}}_p}.$$

Assim, a condição de integrabilidade de Frobenius equivale também a

$$\left\{ H_\alpha^m, H_\beta^{m'} \right\}_{T^*\bar{\mathbb{Q}}_p} = 0. \quad (4.22)$$

Com esta condição, temos as diferenciais

$$\delta H_\alpha^m = \frac{\delta H_\alpha^m}{\delta \phi_{[m']}^\beta} \bullet \delta \phi_{[m']}^\beta. \quad (4.23)$$

Usaremos esta relação mais adiante.

4.3 O formalismo simplético

Assim como na mecânica clássica, este cenário pode ser compreendido através de um formalismo simplético, construído da seguinte forma: Seja o espaço de configuração estendido

definido por $\bar{\mathbb{Q}}_{(kn+1)}$, cujas coordenadas são dadas pelas $kn + 1$ variáveis

$$\phi_{[m]}^i = \left(t, \phi^a, \phi_{[1]}^a, \dots, \phi_{[k-1]}^a \right). \quad (4.24)$$

O problema variacional é definido a partir da integral fundamental

$$A \equiv \int_{\Omega} d\omega_x L(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt, \quad (4.25)$$

em que

$$L(t) = \int_{\Xi} d\sigma_x L(x), \quad (4.26)$$

ainda na qual Ξ é uma superfície de Cauchy a t constante. Os campos obedecem, a princípio e sem perda de generalidade, as condições de serem nulos na fronteira de Ξ , para que L seja uma função bem definida. Entretanto, outras condições de contorno podem ser empregadas para este fim.

A partir de (4.25) podemos definir a 1-forma fundamental

$$\theta \equiv L(t) dt. \quad (4.27)$$

Uma transformação de Legendre, com a definição dos momentos (3.9) e (3.10), define um conjunto de $k(r+1)$ equações diferenciais de Hamilton-Jacobi $\Phi_{\alpha}^m = 0$, com os quais podemos escrever (4.27) em forma canônica:

$$\theta_c \equiv p_{a'}^m \bullet \delta\phi_{[m]}^{a'} - \mathcal{H}_{\alpha}^m \bullet \delta\phi_{[m]}^{\alpha}. \quad (4.28)$$

Vamos aplicar a derivada exterior na 1-forma canônica (4.28), que envolve as propriedades:

1. Se F é uma função do espaço de fase, $dF = \delta F$.
2. $d^2 = 0$.
3. Se α é uma s -forma, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - (-1)^s \alpha \wedge d\beta$.

Assim, temos

$$d\theta_c = \delta p_{a'}^m \wedge \delta\phi_{[m]}^{a'} - \delta\mathcal{H}_{\alpha}^m \wedge \delta\phi_{[m]}^{\alpha}. \quad (4.29)$$

Por consequência, podemos definir a 2-forma simplética

$$\omega \equiv -d\theta_c = \delta\phi_{[m]}^{a'} \wedge \delta p_{a'}^m - \delta\phi_{[m]}^{\alpha} \wedge \delta\mathcal{H}_{\alpha}^m, \quad (4.30)$$

que é fechada, ou seja, $d\omega = 0$.

Pela definição (4.30), está claro que

$$\omega = \omega_p + a, \quad (4.31)$$

em que $\omega_p \equiv \delta\phi_{[m]}^{a'} \wedge \delta p_{a'}^m$ é uma 2-forma definida em $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$. Quanto à 2-forma a , temos

$$a \equiv -\delta\phi_{[m]}^\alpha \wedge \delta H_\alpha^m = -\frac{\delta H_\alpha^m}{\delta\phi_{[m']}^\beta} \bullet \left[\delta\phi_{[m]}^\alpha \wedge \delta\phi_{[m']}^\beta \right], \quad (4.32)$$

em que usamos (4.23). Contudo,

$$\frac{\delta H_\alpha^m}{\delta\phi_{[m']}^\beta} = -\frac{\delta p_\alpha^m}{\delta\phi_{[m']}^\beta} = -\frac{\delta p_\beta^{m'}}{\delta\phi_{[m]}^\alpha},$$

ou seja, os componentes são simétricos no índices. A 2-forma a é nula identicamente.

Portanto, ω é degenerada. Isto pode ser observado de outra forma quando escrevemos ω como um tensor antissimétrico de segunda ordem

$$\omega = \omega_{IJ}^{mm'} \delta\xi_m^I \delta\xi_{m'}^J, \quad (4.33)$$

em que $\omega_{IJ}^{mm'}$ é a matriz

$$\omega_{IJ}^{mm'} = \begin{pmatrix} 0_{2p} & 1_{2kp} & 0_{k(r+1)} \\ -1_{2kp} & 0 & 0_{k(r+1)} \\ 0_{k(r+1)} & 0_{k(r+1)} & a_{\alpha\beta}^{mm'} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Esta matriz é singular, de posto $4kp$. Ou seja, existem $k(r+1)$ autovalores nulos. Os autovetores correspondentes aos modos zero de $\omega_{IJ}^{mm'}$ são dados por $\chi_{\alpha m'}^{Im}$, ou seja, cada vetor X_α^m é um vetor nulo da 2-forma simplética ω . Com isso,

$$i_{X_\alpha^m} \omega = 0,$$

o que atesta a degenerescência de ω .

Contudo, ω_p é uma 2-forma regular, dada pelos componentes

$$\omega_{AB}^{mm'} = \begin{pmatrix} 0_{2kp} & 1_{2kp} \\ -1_{2kp} & 0_{2kp} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Ou seja, $i_X \omega_p = 0$ se, e somente se, $X = 0$. Em particular, as equações características podem ser escritas como

$$i_{X_\alpha^m} \omega_p = \delta H_\alpha^m, \quad (4.36)$$

enquanto as condições de integrabilidade de Frobenius são equivalentes a

$$i_{X_\alpha^m} i_{X_\beta^{m'}} \omega = 0. \quad (4.37)$$

Um conjunto completo de vetores nulos de ω formam um espaço vetorial definido sobre o espaço das variáveis independentes. Esses vetores obedecem as condições de integrabilidade de Frobenius (4.19) e formam uma base completa linearmente independente. Como bons campos vetoriais, eles são geradores de fluxos Hamiltonianos. Na próxima seção, vamos analisar essas transformações e ver como elas afetam a dinâmica dos sistemas não Hessianos.

4.4 Fluxos Hamiltonianos e transformações canônicas

Mais uma vez vamos considerar as equações características (4.12), que são as equações que definem os fluxos Hamiltonianos característicos da 1-forma fundamental θ_c . Elas definem, portanto, uma aplicação infinitesimal

$$g : T^* \bar{\mathbb{Q}}_p \rightarrow T^* \bar{\mathbb{Q}}_p : \xi_m^A|_{\phi_m^\alpha = \sigma_m^\alpha} \rightarrow \xi_m^A|_{\phi_m^\alpha = \lambda_m^\alpha}, \quad (4.38)$$

tal que:

$$\forall \delta\phi_{[m]}^\alpha \equiv \lambda_m^\alpha - \sigma_m^\alpha \ll 1, \delta\xi_m^A \equiv \xi_m^A(\lambda_m^\alpha) - \xi_m^A(\sigma_m^\alpha) \ll 1.$$

Neste caso, dizemos que g é um fluxo Hamiltoniano local.

De (4.12), temos

$$\xi_m^A(\lambda_m^\alpha) = g\xi_m^A(\sigma_m^\alpha),$$

na qual temos o operador

$$g \equiv 1 + \delta\phi_{[m]}^\alpha \bullet X_\alpha^m. \quad (4.39)$$

Vamos definir a aplicação inversa

$$g^{-1} \equiv 1 - \delta\phi_{[m]}^\alpha \bullet X_\alpha^m, \quad (4.40)$$

tal que

$$\begin{aligned} g^{-1}g &= \left(1 - \delta\phi_{[m]}^\alpha \bullet X_\alpha^m\right) \left(1 + \delta\phi_{[m']}^\beta \bullet X_\beta^{m'}\right) \\ &= 1 - \delta\phi_{[m]}^\alpha \bullet X_\alpha^m X_\beta^{m'} \bullet \delta\phi_{[m']}^\beta = 1 - \mathcal{O}\left[(\delta\phi_m^\alpha)^2\right] \approx 1. \end{aligned}$$

Como o comutador de Lie entre os vetores X_α^m e $X_\beta^{m'}$ é nulo, temos também $g^{-1}g = gg^{-1}$. Note que a composição de duas transformações infinitesimais geradas por g é dada por

$$g_\epsilon g_\lambda = (1 + \epsilon_m^\alpha \bullet X_\alpha^m) \left(1 + \lambda_{m'}^\beta \bullet X_\beta^{m'} \right) = 1 + (\lambda_m^\alpha + \epsilon_m^\alpha) \bullet X_\alpha^m + \mathcal{O}(\epsilon^2) \approx g_{\lambda+\epsilon}$$

Então, uma sequência de transformações infinitesimais é também uma transformação infinitesimal. As condições de Frobenius garantem que essas transformações são comutativas, ou seja, $g_\epsilon g_\lambda = g_\lambda g_\epsilon$, como podemos ver de imediato.

É direto observar que, devido às condições de integrabilidade, a 2-forma ω é preservada pela transformação (4.38):

$$g\omega g^{-1} = [1 + \delta\phi_m^\alpha \bullet X_\alpha^m] \omega [1 - \delta\phi_{m'}^\beta \bullet X_\beta^{m'}] = \omega - \delta\phi_{m'}^\alpha \bullet [i_{X_\alpha^m} i_{X_\beta^{m'}} \omega] \bullet \delta\phi_{m'}^\beta.$$

O termo $i_{X_\alpha^m} i_{X_\beta^{m'}} \omega$ é antissimétrico pela troca dos vetores, portanto, o resultado

$$g\omega g^{-1} = \omega \tag{4.41}$$

se cumpre. Por consequência, (4.38) é uma transformação canônica em $T^*\bar{\mathbb{Q}}$.

Como usual em geometria simplética, ω é uma medida de área diferencial de hiper-planos contidos no espaço de fase. Tomemos uma superfície bidimensional E em $T^*\bar{\mathbb{Q}}$. A área dessa superfície é dada por

$$I_E = \int_E \omega = - \int_E d\theta_c.$$

Pelo teorema de Stokes generalizado, esta integral pode ser escrita como uma integral na fronteira de E :

$$I_E = - \int_E d\theta_c = - \int_{\partial E} \theta_c,$$

em que ∂E é um contorno fechado. Como a 2-forma simplética é preservada, I_E é um invariante integral e, por consequência, θ_c também é preservado. Isto ocorre especialmente com os fluxos característicos gerados por X_α^m , mas vale para toda transformação canônica. Dizemos que θ_c é o primeiro invariante de Poincaré, enquanto ω é o segundo invariante de Poincaré. De fato, todas as $2p$ -formas

$$\omega^{\wedge p} \equiv \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_p$$

são invariantes diferenciais sob transformações canônicas. O teorema de Liouville segue de imediato: a $2n$ -forma $\omega^{\wedge n}$ é proporcional ao elemento de volume de $T^*\bar{\mathbb{Q}}$ e, portanto, os fluxos

Hamiltonianos canônicos carregam e distorcem regiões do espaço de fase completo preservando seus volumes.

Em especial, é imediato observar que a invariância de θ_c , a menos de termos de fronteira, reflete-se na invariância da integral fundamental (4.25). Assim, a ação

$$A = \int \left[p_{a'}^m \bullet \delta \phi_{[m]}^{a'} - H_\alpha^m \bullet \delta \phi_{[m]}^\alpha \right] = \int p_i^m \delta \phi_{[m]}^i = \int \theta_c$$

é uma integral invariante do movimento. Portanto, os fluxos Hamiltonianos característicos são transformações de simetria da integral fundamental.

Na seção 4.3 vimos que ω é uma 2-forma degenerada, o que causa a separação do espaço de fase em um espaço de fase reduzido caracterizado pela 2-forma ω_p e um espaço nulo da matriz $\omega_{IJ}^{mm'}$ isomórfico ao espaço das variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha$. De (4.41) imediatamente segue que a 2-forma ω_p também é preservada:

$$g\omega_p g^{-1} = \omega_p. \quad (4.42)$$

Neste caso, também se preserva o elemento de volume do espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$. Em vez de apresentar uma prova analítica, vamos apenas argumentar que o principal resultado da seção 4.3, que atesta a degenerescência da 2-forma simplética ω , implica na existência de coordenadas locais tais que a 2-forma a é nula e, portanto, o volume do subespaço formado por $(\phi_m^\alpha, p_\alpha^m)$ colapsa a zero. Então, todos os resultados pertinentes ao espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}$ são imediatamente válidos para $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Tendo em mãos a compreensão do formalismo simplético por trás de sistemas não Hessianos a partir do ponto de vista do formalismo de Hamilton-Jacobi, torna-se oportuno lançar mão de alguma interpretação física dessas teorias. Não há diferença qualitativa entre este quadro geométrico e aquele que encontramos na análise de sistemas regulares, a não ser o fato de que sistemas não Hessianos são, de certa forma, uma generalização. Por exemplo, vamos considerar o caso em que $r = 0$. As curvas características do sistema são fluxos Hamiltonianos relacionados ao vetor X_0 , que tem como componentes $\{\xi_m^I, \Phi_0\}$, sendo famílias de soluções das equações canônicas de Hamilton. Portanto, a Hamiltoniana canônica H_c é geradora da evolução temporal com os parênteses de Poisson:

$$dF = \{F, \Phi_0\} dt = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \{F, H_c\} dt,$$

enquanto X_0 é também gerador, desta vez sob o ponto de vista da transformação infinitesimal

$$g = 1 + dtX_0.$$

Esta consiste em uma transformação canônica que pode ser interpretada como a evolução

dinâmica do espaço de fase do sistema, ou seja, que descreve como este espaço de fase evolui com o tempo.

Para sistemas não Hessianos vimos que, se o sistema é integrável, há um conjunto de $k(r+1)$ funções Φ_α^m e a evolução dinâmica envolve várias variáveis independentes:

$$\delta F = \{F, \Phi_\alpha^m\} \bullet \delta \phi_{[m]}^\alpha. \quad (4.43)$$

Cada variável $\phi_{[m]}^\alpha$ está relacionada a um campo vetorial X_α^m e esses campos obedecem as condições de Frobenius, que refletem-se também na condição $\{\Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'}\} = 0$. Cada função Φ_α^m é geradora da dinâmica do sistema com relação à sua respectiva variável independente, assim como os vetores X_α^m são geradores de transformações canônicas soluções das equações características, no sentido da definição da operação (4.39).

O ponto fundamental diz respeito à invariância da ação com respeito à transformação (4.38). Esta invariância nos diz que X_α^m são geradores de transformações de simetria. Note que, se $\{\Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'}\} = 0$, cada gerador é invariante pelas transformações de simetria gerada pelos demais. Mais que isso, esses geradores são integrais do movimento, ou seja, $\delta \Phi_\alpha^m = 0$.

Do ponto de vista matemático, todas as variáveis independentes são equivalentes. Ao adotarmos um ponto de vista físico, contudo, a variável $\phi_0 = t$ é claramente diferenciada. Vamos observar o sistema de relações acima sob esta ótica, ou seja, supondo que a evolução dinâmica verdadeira do sistema seja caracterizada apenas pela evolução temporal. Neste caso, qual é a interpretação física que podemos atribuir às transformações de simetria dos demais geradores Φ_z^m ?

Notemos que, na separação dos geradores, inferimos de imediato que

1. $\{\Phi_z^m, \Phi_0\} = 0$, ou seja, os geradores Φ_z^m são invariantes por evolução temporal.
2. O gerador Φ_0 é invariante pelas transformações de simetria geradas por Φ_z^m , o que pode ser visto usando a antissimetria dos parênteses de Poisson.
3. $\{\Phi_z^m, \Phi_y^{m'}\} = 0$, ou seja, os geradores Φ_z^m fecham uma álgebra de Lie abeliana com os parênteses de Poisson.

Assim, temos um conjunto completo e linearmente independente de observáveis que são integrais do movimento devido às simetrias geradas pelos seus respectivos campos vetoriais. Este cenário é obviamente equivalente à relação “simetrias $\Leftrightarrow$ leis de conservação” estabelecida pelos teoremas de Noether e é também a própria definição de sistemas Hamiltonianos completamente integráveis.

4.5 Transformações canônicas e simetrias de gauge

Três questões podem ser imediatamente levantadas a partir da construção da seção 4.4: (1) sob quais condições a álgebra dos geradores implica na existência de um grupo de Lie finito, (2) que tipo de transformação de simetria este grupo, se existir, representa e (3), o que ocorre com a integrabilidade do sistema se a álgebra associada for uma álgebra de Lie geral, ou seja, não comutativa?

Com relação a sistemas dinâmicos de dimensão infinita, essas questões já possuem respostas que vêm da aplicação do formalismo Hamiltoniano. A questão (3) é, contudo, matematicamente bastante complicada. Há um teorema, de Fomenko e Mishchenko [4], que garante, com algumas condições sobre o espaço de fase, que um conjunto completo de funções Φ_α^m tais que

$$\{\Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'}\} = C_{\alpha\beta m}^{mm'\gamma} \bullet \Phi_\gamma^{m''}, \quad (4.44)$$

são suficientes para garantir a integrabilidade. Podemos ver que este é o caso apenas observando as propriedades deste conjunto de geradores. Primeiro, podemos usar a identidade de Jacobi para mostrar que, se duas funções F e G são integrais do movimento, ou seja, se $\delta F = 0$ e $\delta G = 0$, os parênteses $H = \{F, G\}$ também o são. Portanto, se um sistema de geradores F e G não está completo, os parênteses de Poisson entre eles, H , pode fornecer outro gerador que complete o sistema na forma da equação $H = 0$. Se H é um gerador, devemos ter $\{H, F\} = 0$ e $\{H, G\} = 0$ se o sistema for integrável. Se não for o caso, esses últimos parênteses podem indicar novos geradores. Podemos, então, completar um sistema de Hamilton-Jacobi com a análise dos parênteses de Poisson dos geradores originais. Se este processo for finito e se as equações resultantes não forem inconsistentes entre si, o processo terminará e os parênteses entre os geradores serão combinações lineares dos mesmos.

Contudo, na maioria dos sistemas este procedimento é um tanto ingênuo, já que uma equação de Hamilton-Jacobi resultante dos parênteses entre dois geradores não raramente é inconsistente com as equações anteriores. Para lidar com este caso, a análise de integrabilidade deve ser mais sutil. Na seção 4.6 apresentaremos um procedimento livre deste problema. Por outro lado, se o processo de iteração não tiver fim, ou seja, se uma álgebra não for fechada, o sistema obviamente não pode ser integrado. Dessa forma, podemos generalizar a condição de Frobenius para a forma (4.44), ou seja, para o caso em que os geradores fechem uma álgebra de Lie não abeliana com os parênteses de Poisson.

Com a resposta da questão (3), vamos analisar a questão (1) separando a evolução temporal dos demais geradores. A função Φ_0 independe das variáveis independentes (seção 3.3) e, portanto, $\delta\Phi_0 = 0$, o que resulta em $\{\Phi_0, \Phi_\alpha^m\} = 0$ independentemente da álgebra dos outros

geradores. A composição de N transformações infinitesimais geradas por Φ_0 pode ser colocada na forma

$$g(t - t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t - t_0}{N} X_0 \right]^N = \exp[(t - t_0) X_0]. \quad (4.45)$$

Com os demais geradores já vimos o caso em que $\{\Phi_z^m, \Phi_y^{m'}\} = 0$, o que significa que os respectivos campos vetoriais comutam entre si e as transformações geradas por esses campos podem ser colocadas em forma finita, já que a exponenciação da álgebra é trivial. No caso mais geral, não abeliano, a exponenciação no espaço de fase completo só é possível se as constantes de estrutura da álgebra forem independentes dos campos do espaço de fase. Observemos que, para uma função F de $T^*\bar{\mathbb{Q}}$,

$$\begin{aligned} g_\epsilon g_\lambda F &= F + \epsilon_m^z \bullet X_z^m F + \lambda_{m'}^y \bullet X_y^{m'} F + (\epsilon_m^z \lambda_{m'}^y) \bullet (X_z^m X_y^{m'}) F, \\ g_\lambda g_\epsilon F &= F + \lambda_{m'}^y \bullet X_y^{m'} F + \epsilon_m^z \bullet X_z^m F + (\epsilon_m^z \lambda_{m'}^y) \bullet (X_y^{m'} X_z^m) F, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[g_\epsilon, g_\lambda] F = (\epsilon_m^z \lambda_{m'}^y) \bullet [X_z^m, X_y^{m'}] F.$$

Neste caso, $X_z^m F = \{F, \Phi_z^m\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} [X_z^m, X_y^{m'}] F &= \left\{ \{F, \Phi_y^{m'}\}, \Phi_z^m \right\} - \left\{ \{F, \Phi_z^m\}, \Phi_y^{m'} \right\} \\ &= \left\{ \{F, \Phi_y^{m'}\}, \Phi_z^m \right\} + \left\{ \{\Phi_z^m, F\}, \Phi_y^{m'} \right\} = \left\{ F, \{\Phi_y^{m'}, \Phi_z^m\} \right\}, \end{aligned}$$

em que usamos a identidade de Jacobi. Com $\{\Phi_y^{m'}, \Phi_z^m\} = C_{yzm''}^{m'mx} \bullet \Phi_x^{m''}$, temos

$$\begin{aligned} [X_z^m, X_y^{m'}] F &= \left\{ F, C_{yzm''}^{m'mx} \bullet \Phi_x^{m''} \right\} = C_{yzm''}^{m'mx} \bullet \left\{ F, \Phi_x^{m''} \right\} + \left\{ F, C_{yzm''}^{m'mx} \right\} \bullet \Phi_x^{m''} \\ &= -C_{zym''}^{mm'x} \bullet X_x^{m''} F + \left\{ F, C_{yzm''}^{m'mx} \right\} \bullet \Phi_x^{m''}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Do resultado (4.46), vemos imediatamente que a álgebra dos geradores não implica na obediência de uma álgebra de Lie pelos vetores X_z^m . Isto certamente ocorre no caso abeliano $C_{zym''}^{mm'x} = 0$, mas caso não abeliano ocorre apenas em duas situações: se as constantes de estrutura forem independentes das variáveis do espaço de fase, neste caso os vetores obedecem a uma álgebra de Lie em todo o espaço de fase completo $T^*\bar{\mathbb{Q}}$, ou se restringirmos as transformações ao espaço de fase reduzido $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$, onde valem as equações de Hamilton-Jacobi $\Phi_z^m = 0$.

Se, no geral, a álgebra dos geradores não se reflete na álgebra nos seus respectivos campos vetoriais, as transformações definidas em (4.38) não formam, no geral, um grupo de Lie.

Podemos ver este fato a partir de

$$\begin{aligned}
[g_\epsilon, g_\lambda] F &= (\epsilon_m^z \lambda_{m'}^y) \bullet [X_z^m, X_y^{m'}] F \\
&= - \left(\epsilon_m^z \bullet C_{zym''}^{mm'x} \bullet \lambda_{m'}^y \right) \bullet X_x^{m''} F + (\epsilon_m^z \lambda_{m'}^y) \bullet \left\{ F, C_{yzm''}^{m'mx} \right\} \bullet \Phi_x^{m''} \\
&= \omega_{m''}^x \bullet X_x^{m''} F + (\epsilon_m^z \lambda_{m'}^y) \bullet \left\{ F, C_{yzm''}^{m'mx} \right\} \bullet \Phi_x^{m''},
\end{aligned} \tag{4.47}$$

em que definimos

$$\omega_{m''}^x \equiv \epsilon_m^z \bullet C_{yzm''}^{m'mx} \bullet \lambda_{m'}^y.$$

Assim, apenas se as funções $C_{zym''}^{mm'x}$ forem independentes do espaço de fase, ou no caso de restrição do grupo de transformações a atuar apenas em $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$, podemos construir um grupo de Lie a partir da álgebra dos geradores. No caso da segunda condição, não podemos esperar reproduzir as simetrias da ação a nível Lagrangiano, já que estas simetrias são válidas em todo o espaço de configuração, não apenas no espaço reduzido de dimensão p .

Se as constantes de estrutura forem independentes dos campos, as transformações (4.38) podem ser escritas em forma finita através do limite da composição de transformações infinitesimais:

$$g = \exp \left[\Delta \phi_{[m]}^\alpha \bullet X_\alpha^m \right] = \exp [\Delta t X_0] \exp \left[\Delta \phi_{[m]}^z \bullet X_z^m \right] = g_t g_{\phi_m^z}. \tag{4.48}$$

Observamos, assim, que a evolução temporal é efetivamente independente das demais transformações de simetria. Assim, respondemos à primeira questão. Um grupo de Lie finito pode ser construído genericamente a partir das transformações infinitesimais geradas por X_α^m se as constantes de estrutura forem independentes dos campos e dos momentos.

Contudo, a questão mais importante é a questão (2). Supondo a forma do operador

$$g_{\epsilon_m^z} = \exp \left[\epsilon_{[m]}^z \bullet X_z^m \right], \tag{4.49}$$

em que escrevemos $\epsilon \equiv \Delta \phi$, temos de imediato que g_ϵ é uma transformação canônica e, portanto, uma transformação de simetria. A integral fundamental

$$A = \int dt L = \int \left[p_a^{m'} \bullet \delta \phi_{[m']}^a - H_\alpha^{m'} \bullet \delta \phi_{[m']}^\alpha \right] \tag{4.50}$$

é invariante pela ação de g_ϵ a menos de um termo de fronteira. Agora, é mais conveniente definir a variação

$$\delta_\epsilon F = \epsilon_m^z \bullet X_z^m F. \tag{4.51}$$

Como a aplicação desta transformação na ação resulta em $\delta_\epsilon A = d\Lambda$, chamaremos esta pelo nome de transformação canônica.

Se esta é uma transformação de gauge no sentido das transformações discutidas no capítulo 1, sabemos que ela possui uma forma bem definida quando aplicada aos campos do espaço de configuração. Ao aplicarmos δ_ϵ nos campos $\phi_{[m]}^i$, temos

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \phi_{[m']}^a &= \epsilon_m^z \bullet X_z^m \phi_{[m']}^a = \epsilon_m^z \bullet \left\{ \phi_{[m']}^a, \Phi_z^m \right\} = \frac{\delta \Phi_z^m}{\delta p_a^{m'}} \bullet \epsilon_m^z, \\ \delta_\epsilon \phi_{[m']}^\alpha &= \epsilon_m^z \bullet X_z^m \phi_{[m']}^\alpha = \epsilon_m^z \bullet \left\{ \phi_{[m']}^\alpha, \Phi_z^m \right\} = \delta_z^\alpha \bullet \epsilon_m^z.\end{aligned}$$

A segunda relação apenas nos comprova que $\delta_\epsilon \phi_{[m]}^z = \epsilon_m^z$. No geral, podemos comparar ambas as equações com a equação (1.53). Obtemos, portanto, a equação

$$\frac{\delta \Phi_z^m}{\delta p_i^{m'}} \bullet \epsilon_m^z = \left. \frac{\delta \phi_{m'}^{i'}}{\delta \Lambda^r} \right|_{\Lambda=0} \bullet \Lambda^r. \quad (4.52)$$

Nesta equação, os parâmetros ϵ não são necessariamente iguais aos parâmetros Λ , já que estamos comparando transformações canônicas com transformações de gauge a nível Lagrangiano, o que é uma comparação longe de ser trivial.

Um exemplo pode ser ilustrativo. Vamos tomar a teoria eletromagnética de Maxwell, discutida por exemplo em [5] pelo método Hamiltoniano. O espaço de configuração é formado pelos campos A_μ cujos momentos conjugados são dados por π^μ . Este sistema é não Hessiano e uma análise de seus geradores resulta em

$$\Phi_1 \equiv \pi^0 = 0, \quad \Phi_2 = \partial_i \pi^i = 0 \quad (4.53)$$

como o conjunto completo de equações de Hamilton-Jacobi da teoria. Temos

$$\frac{\delta \Phi_1(x)}{\delta \pi^0(y)} = \delta^3(x-y), \quad \frac{\delta \Phi_2(x)}{\delta \pi^i(y)} = \partial_i^x \delta^3(x-y),$$

enquanto as demais expressões são nulas.

Por outro lado, a simetria de gauge do eletromagnetismo é a invariância pelo grupo $U(1)$. A transformação de gauge é dada por

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu^x \Lambda(x), \quad (4.54)$$

de modo que

$$\frac{\delta A'_\mu(x)}{\delta \Lambda(y)} = \partial_\mu^x \delta^3(x-y).$$

Neste caso, as equações (4.52) são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi_1}{\delta\pi^0} \bullet \epsilon_1 &= \left. \frac{\delta A'_0}{\delta\Lambda} \right|_{\Lambda=0} \bullet \Lambda, \\ \frac{\delta\Phi_2}{\delta\pi^i} \bullet \epsilon_2 &= \left. \frac{\delta A'_i}{\delta\Lambda} \right|_{\Lambda=0} \bullet \Lambda,\end{aligned}$$

que resultam em $\epsilon_1 = \partial_0\Lambda = \dot{\Lambda}$ e $\partial_i\epsilon_2 = \partial_i\Lambda$. A primeira relação fixa ϵ_1 univocamente, mas a segunda nos diz que

$$\epsilon_2 = \Lambda + f(t).$$

Como f é uma função arbitrária do tempo, que depende das condições de contorno da teoria, pode ser considerada nula sem perda de generalidade, de forma que podemos escrever

$$\epsilon_1 = \dot{\Lambda}, \quad \epsilon_2 = \Lambda. \quad (4.55)$$

Portanto, as relações (4.52) podem nos fornecer relações entre os parâmetros das transformações canônicas (4.51) e os parâmetros das transformações de gauge Lagrangianas. Em geral, uma transformação de gauge δ_g pode ser gerada por um único gerador G tal que

$$\delta_g F = \{F, G\}. \quad (4.56)$$

Comparando (4.56) com (4.51), que pode ser escrita como

$$\delta_\epsilon F = \epsilon_m^z \bullet \{F, \Phi_z^m\} = \{F, \epsilon_m^z \bullet \Phi_z^m\} - \{F, \epsilon_m^z\} \bullet \Phi_z^m, \quad (4.57)$$

vemos que em $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$, onde $\Phi_z^m = 0$, (4.56) e (4.57) são iguais e podemos escrever

$$G = \epsilon_m^z \bullet \Phi_z^m. \quad (4.58)$$

No caso do campo eletromagnético, podemos usar (4.55) para escrever

$$G = \dot{\Lambda}\Phi_1 + \Lambda\Phi_2 = \dot{\Lambda}\pi^0 + \Lambda\partial_i\pi^i. \quad (4.59)$$

A partir da equação (4.52) não podemos esperar que todos os parâmetros das transformações canônicas possuam relação com os parâmetros das transformações de gauge, o que implica na possibilidade de alguns geradores não estarem relacionados com transformações de gauge locais. Este fato pode ser genericamente estudado pela matriz

$$U_{zm'}^{im}(x, y) \equiv \left\{ \phi_{[m']}^i(x), \Phi_z^m(y) \right\} = \frac{\delta\Phi_z^m(y)}{\delta p_i^{m'}(x)}.$$

Esta matriz não é, em geral, quadrada, então não podemos falar sobre regularidade ou singularidade. Contudo, podem existir casos em que o lado esquerdo de (4.52) não possua algum subconjunto dos parâmetros ϵ . Neste caso, os geradores referentes a estes parâmetros não são geradores de transformações de gauge, embora de fato gerem transformações canônicas no espaço de fase.

Todo o formalismo que apresentamos desde as equações características, passando pela definição dos parênteses de Poisson e da estrutura simplética, até a relação entre os geradores, transformações canônicas e transformações de gauge, necessita de uma generalização apropriada se o sistema possuir geradores que não obedeçam as condições de Frobenius (4.44). Este será o objetivo da próxima seção.

4.6 Análise de integrabilidade

Nesta seção, apresentaremos um método para tratar sistemas não Hessianos que violem as condições de integrabilidade. Este é o caso da maioria dos sistemas em teorias de campos, do campo eletromagnético ao campo gravitacional. Quando um conjunto de geradores não é integrável, é possível estabelecer um processo autoconsistente que garanta a integrabilidade do sistema, através da análise dos autovalores da matriz dos parênteses de Poisson entre os geradores. Este processo pode resultar em dois passos:

1. Encontrar novos geradores que completem o sistema de Hamilton-Jacobi.
2. Detectar e corrigir possível dependência linear entre os vetores X_α^m .

A ordem de execução dessas tarefas é irrelevante, desde que o resultado final seja a obtenção de um conjunto completo de geradores linearmente independentes.

Começamos com uma densidade Lagrangiana $L \left[x^\mu, \phi_{[m]}^a(x^\mu), \phi_{[m]}^z(x^\mu) \right]$, cuja função Lagrangiana é dada por

$$L \left[t, \phi_{[m]}^a(t), \phi_{[m]}^z(t), \phi_{[k]}^a(t), \phi_{[k]}^z(t) \right] = \int_{\Xi} d\sigma L \left[x^\mu, \phi_{[m]}^a(x^\mu), \phi_{[m]}^z(x^\mu), \phi_{[k]}^a(t), \phi_{[k]}^z(t) \right].$$

Nesta, m corre de zero a $k-1$. Como usual, definimos esta função na dinâmica instantânea. A integração ocorre sobre uma superfície de Cauchy a t constante e os campos obedecem a condições de fronteira apropriadas. Vamos considerar o caso em que a matriz Hessiana é singular, de posto kp . Nesta seção seremos sobrecarregados com índices, de modo que mudaremos nossa notação: o índice a passa a correr de 1 a p . Isto significa que existem kr autovalores nulos desta matriz, o que resulta, como já vimos, em $k(r+1)$ equações diferenciais parciais

de Hamilton-Jacobi

$$\Phi_\alpha^m = p_\alpha^m + H_\alpha^m \left(\phi_{[m]}^a, \phi_{[m]}^\alpha, p_a^m \right) = 0. \quad (4.60)$$

Temos $p_\alpha^m = \delta S / \delta \phi_{[m]}^\alpha$, $p_a^m = \delta S / \delta \phi_{[m]}^a$ e $\alpha = 0, 1, \dots, r$. Todas as quantidades acima estão integradas sobre Ξ , de modo que existe uma densidade para cada uma delas. Embora seja oportuno que a análise seguinte siga esta convenção, nas aplicações nos próximos capítulos trabalharemos com as densidades. Contudo, não deve haver nenhuma confusão no procedimento.

Diremos neste trabalho que as funções H_α^m são funções Hamiltonianas, embora esta não seja a nomenclatura utilizada normalmente com o formalismo de Hamilton-Jacobi. Em geral, este nome é reservado às funções Φ_α^m . Contudo, já que estamos empregando o ponto de vista de sistemas dinâmicos, dizemos que Φ_α^m são geradores. Obviamente, temos que calcular H_z^m com o processo de iteração da seção 3.3. Já a Hamiltoniana canônica é calculada por

$$H_c = p_a^m \phi_{[m+1]}^a + p_z^m \phi_{[m+1]}^z - L, \quad (4.61)$$

onde devemos substituir todas as velocidades inversíveis. Como vimos, esta Hamiltoniana, assim como as demais, não depende das velocidades $\phi_{[k]}^z$.

O processo, agora, seria o cálculo das equações características, mas este cálculo só pode ser feito se os geradores formarem um conjunto completo e linearmente independente. A condição para tal é a condição de integrabilidade de Frobenius,

$$M_{\alpha\beta}^{mm'} \equiv \left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'} \right\} = 0, \quad (4.62)$$

ou, na forma mais conveniente,

$$\delta \Phi_\alpha^m = \left\{ \Phi_\alpha^m, \Phi_\beta^{m'} \right\} \bullet \delta \phi_{[m']}^\beta = 0. \quad (4.63)$$

Há, contudo, uma questão que pode gerar confusão. Na seção 3.5 usamos as equações características de um sistema completo para deduzir os parênteses de Poisson. Mais adiante, na seção 4.2, voltamos a utilizar as equações canônicas para deduzir as condições de Frobenius. Pode parecer, portanto, que tanto os parênteses definidos no espaço de fase completo $T^*\mathbb{Q}$ quanto as condições de integrabilidade dependem das equações características. No entanto, isto não é verdade, como descobrimos com a análise da estrutura simplética da teoria. Enquanto os parênteses de Poisson estão ligados à 2-forma simplética ω de maneira intrínseca, as condições de integrabilidade são simplesmente condições sobre o espaço vetorial nulo de ω , visto que esta é uma 2-forma degenerada. A relação com as equações características é construída a posteriori. Com esta consideração, a análise de integrabilidade precede a análise das

equações características do sistema de Hamilton-Jacobi.

Vamos supor que o sistema não seja integrável, ou seja, (4.60) não é um conjunto completo e linearmente independente de equações. Neste caso, a matriz M definida em (4.62) não é nula, como deveria ser, mas possui um posto diferente de zero. Notemos também que

$$M_{\alpha\beta}^{mm'} = i_{X_{\beta}^{m'}} i_{X_{\alpha}^m} \omega.$$

Com isto podemos ver que se M tiver modos não nulos, ω tem posto maior que kp .

Para limpar os graus de liberdade de um sistema desse tipo, vamos usar a condição (4.63). Contudo, a variável independente $\phi^0 = t$ será separada do conjunto, já que estamos interessados na dinâmica temporal do sistema de forma diferenciada. Veremos por que essa escolha é bastante conveniente. Com a separação, (4.63) torna-se

$$\left\{ \Phi_{\alpha}^m, \Phi_z^{m'} \right\} \bullet \delta\phi_{[m']}^z = - \left\{ \Phi_{\alpha}^m, \Phi_0 \right\} dt. \quad (4.64)$$

Vamos analisar o caso em que $\alpha = 0$. Neste caso, o lado direito de (4.64) é nulo, enquanto obtemos

$$\left\{ \Phi_0, \Phi_z^{m'} \right\} \bullet \delta\phi_{[m']}^z = 0. \quad (4.65)$$

Por enquanto, vamos salvar esta equação.

Para $\alpha = y$, temos

$$\left\{ \Phi_y^m, \Phi_z^{m'} \right\} \bullet \delta\phi_{[m']}^z = - \left\{ \Phi_y^m, \Phi_0 \right\} dt. \quad (4.66)$$

Com a matriz $M_{yz}^{mm'} \equiv \left\{ \Phi_y^m, \Phi_z^{m'} \right\}$, podemos escrever

$$M_{yz}^{mm'} \bullet \delta\phi_{[m']}^z = - \left\{ \Phi_y^m, \Phi_0 \right\} dt. \quad (4.67)$$

Deve estar evidente a esta altura que estamos procurando dependência entre os parâmetros, ou seja, estamos tentando escrever dt como combinações lineares de $\delta\phi_{[m']}^z$. Isso dependerá do determinante da matriz $M_{yz}^{mm'}$. Vamos dizer que o posto desta matriz é kP . Como sua dimensão é kr , $M_{yz}^{mm'}$ tem $kR = k(P - r)$ autovalores nulos. Dessa forma, existe uma matriz $M_{a'b'}^{mm'}$ regular, cuja inversa $(M^{-1})_{mm'}^{a'b'}$ é única e obedece a identidade

$$M_{a'c'}^{mm''} \bullet (M^{-1})_{m''m'}^{c'b'} = \delta_{a'}^{b'} \delta_{m'}^m, \quad a', b' = 1, \dots, P. \quad (4.68)$$

Se este for o caso, podemos dividir (4.67) em duas relações:

$$M_{a'b'}^{mm'} \bullet \delta\phi_{[m']}^{b'} + M_{a'z'}^{mm'} \bullet \delta\phi_{[m']}^{z'} = -\{\Phi_{a'}^m, \Phi_0\} dt. \quad (4.69)$$

$$M_{y'b'}^{mm'} \bullet \delta\phi_{[m']}^{b'} + M_{y'z'}^{mm'} \bullet \delta\phi_{[m']}^{z'} = -\{\Phi_{y'}^m, \Phi_0\} dt., \quad (4.70)$$

$$y', z' = 1, \dots, R.$$

Podemos escrever a equação (4.69) como

$$M_{a'b'}^{mm'} \bullet \delta\phi_{[m']}^{b'} = -\{\Phi_{a'}^m, \Phi_{\alpha'}^{m'}\} \bullet \delta\phi_{[m']}^{\alpha'}, \quad (4.71)$$

na qual introduzimos as variáveis $\phi_{[m']}^{\alpha'} = (t, \phi_{[m']}^{z'})$, com índice $\alpha' = 0, 1, \dots, R$. Como $M_{a'b'}^{mm'}$ é regular, podemos resolver esta equação algebricamente e obter

$$\delta\phi_{[m]}^{\alpha'} = -(M^{-1})_{mm'}^{a'b'} \bullet \{\Phi_{b'}^{m'}, \Phi_{\alpha'}^{m''}\} \bullet \delta\phi_{[m'']}^{\alpha'}. \quad (4.72)$$

Estas são equações diferenciais totais para as variáveis $\phi_{[m]}^{\alpha'}$, que julgávamos fazer parte do conjunto de variáveis independentes da teoria. São equações características que dizem respeito ao fato de a 2-forma simplética ω ter mais modos não nulos que os indicados pelo sistema de Hamilton-Jacobi.

A dinâmica do sistema em $T^*\bar{\mathbb{Q}}$ é caracterizada pela diferencial fundamental

$$\delta F = \{F, \Phi_{\alpha}^m\} \bullet \delta\phi_{[m]}^{\alpha}. \quad (4.73)$$

Contudo, a separação entre as variáveis $\phi_{[m]}^{\alpha'}$ e $\phi_{[m]}^{\alpha''}$ resulta em

$$\delta F = \{F, \Phi_{\alpha'}^m\} \bullet \delta\phi_{[m]}^{\alpha'} + \{F, \Phi_{\alpha'}^m\} \bullet \delta\phi_{[m]}^{\alpha''}.$$

Com (4.72), temos

$$\begin{aligned} \delta F &= -\{F, \Phi_{\alpha'}^m\} \bullet (M^{-1})_{mm'}^{a'b'} \bullet \{\Phi_{b'}^{m'}, \Phi_{\alpha'}^{m''}\} \bullet \delta\phi_{[m'']}^{\alpha'} + \{F, \Phi_{\alpha'}^m\} \bullet \delta\phi_{[m]}^{\alpha'} \\ &= \left[\{F, \Phi_{\alpha'}^m\} - \{F, \Phi_{\alpha'}^m\} \bullet (M^{-1})_{mm'}^{a'b'} \bullet \{\Phi_{b'}^{m'}, \Phi_{\alpha'}^{m''}\} \right] \bullet \delta\phi_{[m'']}^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Este é um resultado muito importante. Dado o sistema de Hamilton-Jacobi (4.60), se existir uma matriz $M_{a'b'}^{mm'} = \{\Phi_{a'}^m, \Phi_{b'}^{m'}\}$ regular, implicando na não integrabilidade do sistema para um subconjunto de equações $\Phi_{a'}^m = 0$, a dinâmica em $T^*\bar{\mathbb{Q}}$ é modificada segundo a lei (4.74).

A partir de (4.74) vamos definir o que chamaremos de parênteses generalizados:

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, \Phi_{\alpha'}^m\} \bullet (M^{-1})_{mm'}^{a'b'} \bullet \{\Phi_{b'}^{m'}, B\}. \quad (4.75)$$

Podemos mostrar que estes parênteses são bem comportados, ou seja, obedecem as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson, que descrevemos na seção 3.5.

Podemos ver claramente que a definição (4.75) implica em

$$\omega^* \equiv \omega_p + a^*, \quad (4.76)$$

em que a^* é a parte não degenerada da 2-forma a definida em (4.31). É também evidente que a matriz $M_{a'b'}^{mm'}$ está relacionada aos componentes do tensor antissimétrico relacionado a a^* e, portanto, a^* é uma genuína 2-forma simplética não degenerada. Podemos reescrever (4.74) através de

$$\delta F = \{F, \Phi_{\alpha'}^m\}^* \bullet \delta \phi_{[m]}^{\alpha'}. \quad (4.77)$$

Como os geradores $\Phi_{\alpha'}^m$ estão relacionados com seus respectivos vetores $X_{\alpha'}^m$, é possível escrever as equações características como

$$\delta H_{\alpha'}^m = i_{X_{\alpha'}^m} \omega^*, \quad (4.78)$$

ou, de forma explícita,

$$\delta \xi_m^{I'} = \left\{ \xi_m^{I'}, \Phi_{\alpha'}^{m'} \right\}^* \bullet \delta \phi_{[m']}^{\alpha'}, \quad \xi_m^{I'} = \left(\xi_m^I, \phi_{[m]}^{a'}, p_{a'}^m \right). \quad (4.79)$$

É imediato verificar que (4.79) reproduz (4.72).

Por consequência, temos um espaço de fase reduzido definido pela 2-forma ω^* , e não mais por ω_p . Isto não quer dizer, contudo, que o sistema de equações $\Phi_{\alpha'}^m = 0$ seja completo e que (4.79) sejam completamente integráveis, já que nos falta verificar as condições (4.65) e (4.70). De (4.70), podemos escrever

$$\left\{ \Phi_{y'}^m, \Phi_{\alpha'}^{m'} \right\} \bullet \delta \phi_{[m']}^{\alpha'} + \left\{ \Phi_{y'}^m, \Phi_{a'}^{m'} \right\} \bullet \delta \phi_{[m']}^{a'} = 0.$$

Usando (4.72),

$$\left\{ \Phi_{y'}^m, \Phi_{\alpha'}^{m'} \right\} \bullet \delta \phi_{[m']}^{\alpha'} - \left\{ \Phi_{y'}^m, \Phi_{a'}^{m'} \right\} \bullet (M^{-1})_{m'm''}^{a'b'} \bullet \left\{ \Phi_{b'}^{m''}, \Phi_{\alpha'}^{m'''} \right\} \bullet \delta \phi_{[m''']}^{\alpha'} = 0,$$

que resulta em

$$\left\{ \Phi_{y'}^m, \Phi_{\alpha'}^{m'} \right\}^* \bullet \delta \phi_{[m']}^{\alpha'} = 0. \quad (4.80)$$

A condição de integrabilidade (4.65) pode ser incluída em (4.80) se considerarmos a condição

$$\left\{ \Phi_{\alpha'}^m, \Phi_{\beta'}^{m'} \right\}^* \bullet \delta \phi_{[m']}^{\beta'} = 0,$$

ou, no espírito original das condições de Frobenius,

$$M_{\alpha'\beta'}^{mm'} \equiv \left\{ \Phi_{\alpha'}^m, \Phi_{\beta'}^{m'} \right\}^* = 0. \quad (4.81)$$

Se os geradores $\Phi_{\alpha'}^m$ forem completos e linearmente independentes, (4.80) será identicamente satisfeita. Contudo, veremos casos em que isso não ocorre, o que nos obrigará novamente a fazer a análise na matriz $M_{\alpha'\beta'}^{mm'}$. Se ainda houver geradores que não estão em involução com os parênteses generalizado entre as funções $\Phi_{\alpha'}^m$, uma redefinição dos parênteses generalizados será necessária. É direto verificar que, depois desse procedimento, (4.81) se resume a

$$\left\{ \Phi_{z'}^m, \Phi_0 \right\}^* = 0. \quad (4.82)$$

Se essas condições forem satisfeitas para todos os $\Phi_{z'}^m$, o sistema é completamente integrável e nada mais pode ser feito a nível clássico. Dessa forma, dizemos que $\Phi_{\alpha'}^m$ formam o conjunto completo de geradores da teoria.

Contudo, (4.82) pode resultar ainda em expressões não nulas. Essas expressões devem ser consistentes com as equações características, caso contrário não haverá meios de tornar o sistema integrável. Se essas expressões forem consistentes, elas representarão novas relações que devem ser incorporadas na teoria. Portanto, às equações de Hamilton-Jacobi restantes devem ser acrescentadas todas as relações não nulas em (4.82) e essas relações devem igualmente respeitar as condições de integrabilidade até que todo o sistema de geradores torne-se involutivo.

Existe um problema, no entanto, que devemos resolver. A regra é que cada gerador, sejam aqueles oriundos da definição dos momentos, sejam os que surgem de (4.82), seja relacionado a uma variável independente. Os geradores iniciais, que podemos chamar também de geradores primários, estão relacionados com os campos $\phi_{[m]}^\alpha$. Contudo, novos geradores não possuem esta relação com as variáveis independentes do sistema. Por outro lado, ainda que os novos geradores não tenham a mesma estrutura das equações de Hamilton-Jacobi originais (essas novas equações podem assumir formas não lineares em p_α^m , por exemplo, ou não depender dos momentos), qualquer função do espaço de fase tem uma dada transformação a ele associada.

Como o procedimento deve garantir que esses geradores obedeçam as condições de Frobenius, essas transformações são também canônicas. Tudo o que temos a fazer é expandir o espaço de parâmetros para incluir campos arbitrários, cada um correspondente a um novo gerador, que podemos chamar de geradores secundários. Com isso, a dinâmica pode ser escrita como

$$\delta F = \left\{ F, \Phi_{\alpha'}^m \right\}^* \bullet \delta \phi_m^{\alpha'} + \left\{ F, \Lambda \right\}^* \bullet \delta \lambda,$$

em que Λ representa o conjunto de geradores secundários e λ seu respectivo conjunto de parâmetros. Contudo, não há razão para que os geradores sejam tratados separadamente, de modo que, ao escrever $(\Phi_{\alpha'}^m, \Lambda) \rightarrow \Phi_{\alpha'}^m$ e $(\phi_m^{\alpha'}, \lambda) \rightarrow \phi_m^{\alpha'}$, temos

$$\delta F = \{F, \Phi_{\alpha'}^m\}^* \bullet \delta \phi_m^{\alpha'}, \quad (4.83)$$

e todos os geradores em involução são computados. Com (4.83) temos acesso às equações características do sistema completo de Hamilton-Jacobi, que agora envolve todos os possíveis geradores. Como estes obedecem as condições de Frobenius para os parênteses generalizados, o sistema é completamente integrável e garante a existência de soluções das equações características que sejam únicas quando condições iniciais sobre a superfície de Cauchy forem fornecidas.

Ainda assim este procedimento, assim como outros métodos de análise de sistemas singulares baseados em variáveis canônicas, não garante compatibilidade com as equações de Euler-Lagrange. Portanto, essa compatibilidade deve ser testada caso a caso, o que normalmente é negligenciado principalmente nas aplicações do formalismo de Dirac-Bergmann, embora o próprio Dirac alerte sobre esta necessidade [1].

Dessa forma, o formalismo de Hamilton-Jacobi separa naturalmente geradores em involução e geradores não involutivos com relação aos parênteses de Poisson. Aqueles não involutivos são tornados involutivos através da definição (4.75), já que os parênteses generalizados de qualquer observável com esses geradores são nulos identicamente:

$$\begin{aligned} \{F, \Phi_{a'}^m\}^* &= \{F, \Phi_{a'}^m\} - \{F, \Phi_{c'}^{m'}\} \bullet (M^{-1})_{m'm''}^{c'b'} \bullet \{\Phi_{b'}^{m''}, \Phi_{a'}^m\} \\ &= \{F, \Phi_{a'}^m\} - \{F, \Phi_{a'}^m\} = 0, \end{aligned}$$

em que usamos (4.68).

Com a nova dinâmica definida pela lei (4.77), os geradores da dinâmica da teoria passam a ser os geradores em involução $\Phi_{\alpha'}^m = (\Phi_0, \Phi_{z'}^m)$. Se uma teoria possuir tais geradores, a discussão que fizemos nas seções 4.4 e 4.5 se mantém. Enquanto Φ_0 é gerador da evolução temporal, $\Phi_{z'}^m$ podem ser interpretados como geradores de transformações de simetria locais da integral fundamental. Contudo, os parênteses de Poisson devem ser substituídos pelos parênteses generalizados. Em especial, temos a matriz

$$U_{zm'}^{im}(x, y) \equiv \left\{ \phi_{[m']}^i(x), \Phi_z^m(y) \right\}^* \quad (4.84)$$

e a equação que relaciona os parâmetros das transformações canônicas ao parâmetros das

transformações de gauge locais deve ser substituída por

$$U_{zm'}^{im} \bullet \epsilon_m^z = \left. \frac{\delta \phi_{m'}^{'i}}{\delta \Lambda^r} \right|_{\Lambda=0} \bullet \Lambda^r. \quad (4.85)$$

Nos capítulos 5 e 6 apresentaremos duas aplicações deste programa. Começaremos com a teoria eletromagnética de Podolsky na dinâmica do plano nulo, que é singular e possui derivadas de segunda ordem na integral fundamental. Nas coordenadas do cone de luz a estrutura de geradores da teoria torna-se bastante interessante, possuindo geradores involutivos e não involutivos com relação aos parênteses de Poisson, o que possibilitará uso máximo das ferramentas que apresentamos neste capítulo: os geradores não involutivos dão origem a parênteses generalizados e os geradores em involução podem ser relacionados à simetria $U(1)$ característica da teoria.

No capítulo 6 trabalharemos com um exemplo aparentemente mais simples, a ação de Einstein-Hilbert em duas dimensões. Apesar de ser uma teoria igualmente de segunda ordem, usaremos o formalismo de Palatini, o que evitará o uso do formalismo para derivadas de ordem superior. Contudo, teremos um número consideravelmente maior de variáveis. Este exemplo também apresenta geradores não involutivos, os últimos dando origem a parênteses generalizados. Veremos também a existência de geradores em involução que fecham uma álgebra não abeliana com estes parênteses.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures on quantum mechanics*, Yeshiva University, New York (1964).
- [2] E.M. Rabei & Y. Güler, *Hamilton-Jacobi treatment of second-class constraints*, Phys. Rev. A **46**, 3513 (1992).
- [3] K.D. Rothe & F.G. Scholtz, *On the Hamilton-Jacobi equation for second class constrained systems*, Ann. Phys. **308**, 639 (2003).
- [4] A. S. Mishchenko & A. T. Fomenko, *A generalized method for Liouville integration of Hamiltonian systems*, Func. Anal. Appl. **12**, 46-56 (1978).
A. T. Fomenko & V. V. Trofimov, *Integrable systems on Lie algebras and symmetric spaces*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics Vol. 2, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam (1988).
- [5] K. Sundermeyer, *Constrained dynamics - Lecture notes in physics*, Springer-Verlag, New York (1982).

Capítulo 5

Teoria eletromagnética de Podolsky

Introdução

Nesta aplicação, vamos trabalhar com a eletrodinâmica de Podolsky em 3+1 dimensões, descrita pela densidade Lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^2\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\partial^\gamma F_{\mu\gamma}, \quad F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (5.1)$$

Nesta equação, utilizamos a notação $A_{\nu,\mu} \equiv \partial_\mu A_\nu$, em que A_ν são os campos fundamentais. A Lagrangiana (5.1) é invariante sob a ação do grupo $U(1)$. De fato, mostra-se em [1] que todas as Lagrangianas escalares de Lorentz e invariantes por $U(1)$ são equivalentes a (5.1) a menos de termos de fronteira.

A teoria de Podolsky foi inicialmente desenvolvida nos trabalhos de Podolsky, Schwed e Bopp [2, 3] na tentativa de resolver um conhecido problema da eletrodinâmica de Maxwell. A teoria eletromagnética usual prevê um potencial eletrostático proporcional a $r^{-1} \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$, de modo que a energia eletrostática necessária para se montar um sistema de cargas pontuais, dada por

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (5.2)$$

recebe contribuição infinita da auto-energia das cargas, quando $i = j$. Essas contribuições devem ser retiradas do cálculo dessa energia.

Contudo, a expressão da energia envolvendo o campo eletrostático deste mesmo sistema,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 d^3x, \quad (5.3)$$

claramente não condiz com a expressão anterior, já que esta última é sempre positiva, enquanto (5.2) admite contribuições negativas para cargas opostas. A expressão (5.3), contendo a contribuição de auto-energia das partículas, é a verdadeira expressão que calcula a energia do sistema eletrostático, enquanto (5.2) consiste apenas no trabalho necessário para montar o sistema, sem levar em conta a energia necessária para criar as próprias cargas. Este problema é conhecido como o problema da auto-energia do elétron. Ligados a este problema da teoria eletromagnética clássica estão divergências relacionadas ao setor infravermelho da QED e o problema do valor infinito da corrente de polarização no vácuo.

O termo de ordem superior acrescido à Lagrangiana de Maxwell em (5.1) resulta numa teoria na qual o potencial eletrostático é despidido da singularidade em $r = 0$. Neste caso, temos a seguinte expressão análoga a (5.2):

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{a\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (5.4)$$

Portanto, a contribuição da auto-energia pode ser computada e é apenas proporcional a q^2/a para cada carga. A teoria de Podolsky resolveria, dessa forma, os problemas relacionados à divergência do potencial eletrostático. Ela pode ser interpretada como uma teoria efetiva para curtas distâncias [4], em que o parâmetro a pode representar uma distância típica de validade da teoria. Para $r \gg a$ a teoria tornar-se-ia indistinguível da de Maxwell.

As equações de Euler-Lagrange da densidade (5.1) são escritas por

$$[\square + m_\gamma^2] \partial_\alpha F^{\mu\alpha} = 0, \quad (5.5)$$

em que $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ e $m_\gamma \equiv 1/a$. Essas equações são lineares e podem ser expressas em termos dos campos fundamentais:

$$[\square + m_\gamma^2] [\partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha - \square A_\mu] = 0.$$

O primeiro termo desta equação pode ser anulado por uma escolha de gauge, o gauge de Lorenz generalizado, para o qual

$$\partial_\mu [\square + m_\gamma^2] \partial^\alpha A_\alpha = 0$$

e, portanto, analogamente à teoria de Maxwell temos uma equação de onda generalizada para

o potencial A_μ :

$$[\square + m_\gamma^2] \square A_\mu = 0. \quad (5.6)$$

Com uma transformada de Fourier, esta equação torna-se a equação de dispersão

$$p^2 (p^2 - m_\gamma^2) = 0, \quad p^2 \equiv p_\mu p^\mu. \quad (5.7)$$

Nesta, somos capazes de identificar dois tipos de fótons, ligados aos modos $p^2 = 0$ e $p^2 = m_\gamma^2$ respectivamente. O primeiro modo corresponde a fótons sem massa, assim como ocorre com a eletrodinâmica de Maxwell. O segundo modo corresponde a fótons com massa igual a m_γ , o que podemos ver imediatamente pela equação

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m_\gamma^2,$$

que é a equação relativística para a energia de uma partícula de massa m_γ . Portanto, a teoria de Podolsky prevê a existência de graus de liberdade massivos para o fóton.

Longe de ser uma desvantagem desse modelo, a previsão de fótons massivos permite que a eletrodinâmica de Podolsky seja testada como teoria efetiva, ou mesmo como uma teoria fundamental da integração eletromagnética. Ao contrário do modelo de Proca, no qual a inserção de massa na Lagrangiana resulta em uma quebra da simetria de gauge, a teoria de Podolsky mantém todos os requerimentos que, assim acreditamos, devem compor uma teoria de interação fundamental. Em particular, a preservação da simetria $U(1)$. Portanto, apenas os experimentos podem escolher entre a teoria de Podolsky e a de Maxwell.

Contudo, não se observam fótons com massa na natureza, sejam em processos clássicos ou quânticos. Ainda assim tentativas de se estabelecer limites superiores para a massa m_γ através de diversas técnicas experimentais têm sido realizadas ao longo do tempo. As primeiras buscaram observar desvios na lei de Coulomb. O potencial eletrostático da teoria de Podolsky é dado por

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} (1 - e^{-m_\gamma r}),$$

no qual podemos observar que o potencial de Coulomb é acrescido de um potencial do tipo Yukawa. Dessa forma observamos que fótons com massa implicam em correções na força eletrostática entre cargas pontuais. A melhor estimativa experimental já encontrada no teste de desvios da lei de Coulomb é dada por Williams, Faller e Hill [5], que estima o limite superior para a massa do fóton em $m_f = (\hbar/c) m_\gamma < 1.1 \times 10^{-47} g$. Resultados de caráter indireto, através da análise de campos magnéticos planetários, também têm sido obtidos, sendo o mais notável a análise de Davis, Goldhaber e Nieto [6] que resulta em $m_f < 7 \times 10^{-49} g$. O resultado

direto de maior alcance, contudo, parece ser o obtido por Luo, Tu, Hu e Luan [7], em que $m_f < 2.1 \times 10^{-51} g$.

5.1 Sobre a dinâmica no plano nulo

Para tratar dessa teoria no plano nulo, vamos tomar a seguinte transformação de coordenadas do espaço-tempo:

$$y^\mu = \Sigma^\mu_\nu x^\nu, \quad (5.8)$$

tal que

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{I}_{2 \times 2} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade 2×2 , x^μ é associada à quadrupla (x^0, x^1, x^2, x^3) e y^μ é associada a (x^+, x^-, x^1, x^2) . Com este sistema, vamos definir o eixo de evolução temporal ao longo de $x^+ = 1/\sqrt{2} (x^0 + x^3)$, tal que o parâmetro de evolução temporal seja definido por $\tau = x^+$. Neste caso, a equação $x^+ = \text{constante}$ define uma hiper-superfície característica ortogonal ao eixo x^+ , o plano nulo, que representa a frente de onda eletromagnética no vácuo. As coordenadas y^μ são chamadas coordenadas do plano nulo. Também usaremos a nomenclatura coordenadas da frente de luz, ou coordenadas do cone de luz.

A dinâmica no plano nulo foi confundida, por algum tempo, com um processo limite conhecido como referencial do momento infinito, como podemos ver no trabalho de Steinhardt [8]. A transformação (5.8), longe de ser uma escolha de referencial, é exatamente o que diz ser: uma transformação de coordenadas. Além disso, não é uma transformação de Lorentz, como podemos ver pela forma das componentes da métrica de Minkowski, dada por

$$\eta' = \Sigma \eta \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Com esta métrica (a partir deste ponto ignoraremos a linha em (5.9)), podemos verificar com facilidade que a norma de um vetor deixa de ser uma forma quadrática nas componentes temporal + e longitudinal –, mas permanece quadrática nas componentes transversais 1 e 2. Ou seja,

$$A^2 = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = 2A^+ A^- - (A^i)^2, \quad i = 1, 2.$$

Essa diferença com relação à forma instantânea é mais notável no operador D'Alembertiano, que assume a forma

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = 2\partial_+ \partial_- - \nabla^2, \quad (5.10)$$

em que $\nabla \equiv \partial_i \partial_i$. Em razão desta forma, a dinâmica no plano nulo é distinta das demais formas. Por exemplo, vamos considerar a equação de campo de Klein-Gordon-Fock

$$(\square + m^2) \phi = 0,$$

que nas coordenadas do cone de luz se decompõe em

$$\partial_+ \partial_- \phi = \frac{1}{2} (\nabla^2 - m^2) \phi.$$

Esta equação é de primeira ordem com relação à coordenada temporal x^+ . Portanto, a análise de valores iniciais não é mais uma análise de Cauchy. Para prover a equação dinâmica acima com um conjunto de condições iniciais de modo a fixar univocamente a evolução temporal necessitamos, para este caso, da configuração dos campos no plano $x^+ = \text{constante}$ e de uma segunda configuração em alguma hiper-superfície $x^- = \text{constante}$. Isto pode ser claramente observado se a equação dinâmica for escrita na forma

$$\partial_+ \phi = \frac{1}{2} (\partial_-)^{-1} (\nabla^2 - m^2) \phi,$$

em que $(\partial_-)^{-1}$ representa a inversa do operador ∂_- , que para ser univocamente determinada necessita de condições de contorno em $x^- = \text{constante}$.

No caso da Lagrangiana (5.1), as equações de campo são dadas por

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.11)$$

sendo, em razão de (5.10), de segunda ordem nas coordenadas do cone de luz. Devido à análise das condições de contorno nos planos característicos, uma possível forma de fixação da dinâmica é promover uma condição inicial, o valor dos campos A_μ sobre a hiper-superfície $x^+ = 0$, e três condições de contorno sobre uma hiper-superfície $x^- = \text{constante}$. Por motivos que ficarão claros no decorrer da análise, assumiremos que essas condições envolvam o valor das derivadas $\partial_- A_\mu$, $(\partial_-)^2 A_\mu$ e $(\partial_-)^3 A_\mu$ como nulos no limite $x^- \rightarrow -\infty$.

5.2 Os geradores da teoria de Podolsky

Na seção 2.2, através da matriz Hessiana, descobrimos que a teoria de Podolsky é uma teoria não Hessiana. Com (2.51) podemos encontrar a matriz Hessiana na dinâmica do cone de luz, que é dada por $W^{\mu++;\nu++} \equiv W^{\mu\nu}$:

$$W^{\mu\nu} = a^2 \eta^{++} [\eta^{\mu\nu} \eta^{++} - \eta^{\mu+} \eta^{+\nu}] = 0,$$

ou seja, a matriz Hessiana tem posto nulo com a métrica (5.9). Portanto, esperamos encontrar um conjunto de equações de Hamilton-Jacobi para este sistema a partir da definição de seus momentos canonicamente conjugados. Como já discutimos anteriormente, as variáveis A_μ e $A_{\mu,+}$ devem ser consideradas independentes. Por questão de comodidade, vamos usar as variáveis $\bar{A}_\mu \equiv A_{\mu,+}$.

As equações (2.49) e (2.50) contêm as expressões para os momentos conjugados covariantes do campo de Podolsky:

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} - 2a^2 \eta^{\omega\gamma} \Upsilon_{\beta\omega}^{\alpha\mu} \Delta_{\alpha\gamma}^{\nu\lambda} \partial_\lambda \partial_\rho F^{\beta\rho}, \\ \pi^{\mu\nu\lambda} &= 2a^2 \eta^{\omega\gamma} \Upsilon_{\beta\omega}^{\alpha\mu} \Delta_{\alpha\gamma}^{\nu\lambda} \partial_\rho F^{\beta\rho}. \end{aligned}$$

Da mesma forma com que procedemos na seção 3.2 para encontrar os momentos (3.6) e (3.7), podemos usar a forma geral da Hamiltoniana canônica. Neste caso, a função Hamiltoniana é encontrada pela componente $H^+_{+} = H_{+-}$ do tensor energia momento (1.37), que pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &\equiv H^+_{+} = \pi^{\mu+} A_{\mu,+} + \pi^{\mu+\nu} A_{\mu,+\nu} - L \\ &= [\pi^{\mu+} - \partial_- \pi^{\mu+-} - \partial_i \pi^{\mu+i}] A_{\mu,+} + \pi^{\mu++} A_{\mu,++} - L \\ &\equiv p^\mu \bar{A}_\mu + \pi^\mu \bar{A}_{\mu,+} - L, \end{aligned} \tag{5.12}$$

com o uso de termos de fronteira. Nessa expressão, podemos reconhecer os momentos

$$\begin{aligned} p^\mu &\equiv \pi^{\mu+} - \partial_- \pi^{\mu+-} - \partial_i \pi^{\mu+i}, \\ \pi^\mu &\equiv \pi^{\mu++}. \end{aligned}$$

Calculando essas expressões, obtemos

$$\pi^\mu = a^2 \eta^{\mu+} \partial_\rho F^{+\rho}, \tag{5.13}$$

$$p^\mu = F^{\mu+} + \partial_+ \pi^\mu + 2a^2 \left[\delta_\beta^\mu \partial^+ - \frac{1}{4} \delta_\beta^+ \partial^\mu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \Delta_{\alpha\beta}^{+\lambda} \partial_\lambda \right] \partial_\rho F^{\beta\rho}. \tag{5.14}$$

Note que, para $a \rightarrow 0$, (5.13) se anula, enquanto (5.14) reduz-se à expressão dos momentos canônicos para a teoria de Maxwell.

Agora, devemos abrir as expressões (5.13) e (5.14) em suas componentes no cone de luz, o que resulta em

$$\begin{aligned}\pi^+ &= 0, \\ \pi^i &= 0, \\ \pi^- &= a^2 \partial_\rho F^{+\rho}, \\ p^+ &= a^2 \partial^+ \partial_\rho F^{+\rho} = \partial_- \pi^-, \\ p^- &= F^{-+} + 2a^2 \partial^+ \partial_\rho F^{-\rho}, \\ p^i &= F^{i+} + 2a^2 \partial^+ \partial_\rho F^{i\rho} - \partial^i \pi^-.\end{aligned}$$

Estes são, respectivamente, os momentos conjugados às variáveis $\bar{A}_+$, $\bar{A}_i$, $\bar{A}_-$, A_+ , A_- e A_i . Podemos perceber de imediato que alguns desses momentos não são inversíveis. Salta à vista que este é o caso de π^+ , π^i e p^+ , este último absorvendo também a expressão para π^- . Para esses momentos, temos as equações

$$\begin{aligned}\phi_1 &\equiv \pi^+ = 0, \\ \phi_2^i &\equiv \pi^i = 0, \\ \phi_3 &\equiv p^+ - \partial_- \pi^- = 0.\end{aligned}$$

Podemos expressar p^- em termos das variáveis A_μ e $\bar{A}_\mu$ da seguinte forma:

$$p^- = [1 + 2a^2 \partial_- \partial_+] \bar{A}_- - [1 - 2a^2 \nabla^2] \partial_- A_+ - 2a^2 \partial_- \partial_- \bar{A}_+ - 2a^2 \partial_- \partial_i \bar{A}_i.$$

A partir desta expressão, podemos ver que $\bar{A}_{\mu,+}$ pode ser obtida por

$$\bar{A}_{-,+} = \left(\frac{1}{2a^2 \partial_-} \right) [p^- - \bar{A}_- + [1 - 2a^2 \nabla^2] \partial_- A_+ + 2a^2 \partial_- \partial_- \bar{A}_+ + 2a^2 \partial_- \partial_i \bar{A}_i]. \quad (5.15)$$

À direita, escrevemos o operador

$$\left(\frac{1}{2a^2 \partial_-} \right) = (2a^2 \partial_-)^{-1},$$

que é a função de Green do operador $2a^2 \partial_-$. A solução para (5.15) não é única, mas forma uma família de soluções. Contudo, a fixação das condições de contorno no plano $x^- \rightarrow -\infty$ é suficiente para fixar $\bar{A}_{-,+}$. A rigor, como a inversão da transformação de Legendre não é única, a expressão para p^- também é um vínculo canônico. Felizmente, como ficará evidente logo a seguir, a expressão (5.15) não será necessária para o desenvolvimento da análise.

Resta analisar a expressão para p^i , que pode ser escrita por

$$p^i = F_{-i} + \partial_i \pi^- + 2a^2 \partial_- [2\partial_- \bar{A}_i - \partial_i \bar{A}_- - \partial_- \partial_i A_+ + \partial_j F_{ij}].$$

Esta expressão também não fornece nenhuma velocidade, de modo que ela também consiste em uma equação diferencial parcial. Portanto, temos o conjunto de geradores

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \pi^+, \\ \phi_2^i &= \pi^i, \\ \phi_3 &= p^+ - \partial_- \pi^-, \\ \phi_4^i &= p^i - \partial_i \pi^- + F_{i-} + 2a^2 \partial_- [\partial_i \bar{A}_- - 2\partial_- \bar{A}_i + \partial_- \partial_i A_+ - \partial_j F_{ij}].\end{aligned}$$

O gerador de evolução temporal é dado por $\phi_0 \equiv p_0 + \mathcal{H}_c$, com a Hamiltoniana canônica definida em (5.12). Sua expressão é dada por

$$\mathcal{H}_c = p^\mu \bar{A}_\mu + \pi^- (\partial_- \bar{A}_+ + \partial_i \bar{A}_i - \nabla^2 A_+) - \frac{1}{2} a^2 \partial_\lambda F^{i\lambda} \partial^\gamma F_{i\gamma} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.16)$$

Note que essa densidade Hamiltoniana não depende explicitamente de nenhuma velocidade, o que evita o uso da expressão (5.15), já que os demais geradores também não possuem essa dependência. Então, podemos escrever o conjunto de geradores da teoria de Podolsky:

$$\phi_0 = p_0 + \mathcal{H}_c, \quad (5.17)$$

$$\phi_1 = \pi^+, \quad (5.18)$$

$$\phi_2^i = \pi^i, \quad (5.19)$$

$$\phi_3 = p^+ - \partial_- \pi^-, \quad (5.20)$$

$$\phi_4^i = p^i - \partial_i \pi^- + F_{i-} + 2a^2 \partial_- [\partial_i \bar{A}_- - 2\partial_- \bar{A}_i + \partial_- \partial_i A_+ - \partial_j F_{ij}]. \quad (5.21)$$

5.3 Análise de integrabilidade e a matriz M

Precisamos verificar a integrabilidade da teoria, o que significa verificar se este conjunto está relacionado a campos vetoriais completos e linearmente independentes. Para tal, a condição de Frobenius nos diz que esses geradores devem estar em involução com os parênteses de Poisson. Primeiro, vamos estabelecer as relações fundamentais entre as variáveis

canônicas:

$$\{A_\mu(x), p^\nu(y)\} = \{\bar{A}_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y). \quad (5.22)$$

Essas relações, como já sabemos, são tomadas a x^+ constante, de modo que

$$\delta^3(x - y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Como vimos no capítulo 4 seção 4.6, devemos construir a matriz dos parênteses de Poisson desses geradores. A evolução temporal é tratada de forma diferenciada: basta-nos analisar a matriz $M_{IJ} \equiv \{\phi_I(x), \phi_J(y)\}$, em que $\phi_I \equiv (\phi_1, \phi_2^i, \phi_3, \phi_4^i)$. O gerador ϕ_1 tem parênteses nulos com todos demais, inclusive com ϕ_0 . Os outros obedecem as relações

$$\{\phi_2^i(x), \phi_4^j(y)\} = -4a^2 \eta^{ij} \partial_-^x \partial_-^y \delta^3(x - y), \quad (5.23)$$

$$\{\phi_3(x), \phi_4^j(y)\} = 4a^2 \partial_-^x \partial_-^y \delta_j^3(x - y), \quad (5.24)$$

$$\{\phi_4^i(x), \phi_4^j(y)\} = 2\eta^{ij} [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \partial_-^x \delta^3(x - y). \quad (5.25)$$

Podemos construir, dessa forma, a matriz

$$M = 2\partial_-^x \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a^2 \eta^{ij} \partial_-^x \\ 0 & 0 & 2a^2 \partial_-^x \partial_i^x \\ 2a^2 \eta^{ij} \partial_-^x & 2a^2 \partial_-^x \partial_i^x & 1 - 2a^2 \eta^{ij} \nabla_x^2 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (5.26)$$

Esta matriz, contudo, é singular, o que indica que há pelo menos uma combinação linear dos geradores que está em involução com os demais, exceto possivelmente com ϕ_0 . Uma análise de autovalores mostra que esta matriz tem posto quatro e que o gerador em involução é, portanto, apenas um: está relacionado com o único modo zero de M . Um processo bastante seguro de se encontrar esta combinação é supondo que ela toma a forma

$$\Sigma(x) \equiv \int d^3y [\phi_2^i(x) B_i(x, y) + \phi_3(x) C(x, y) + \phi_4^i(x) D_i(x, y)].$$

Neste caso, o gerador Σ deve satisfazer

$$\{\phi_2^i(x), \Sigma(y)\} = \{\phi_3(x), \Sigma(y)\} = \{\phi_4^i(x), \Sigma(y)\} = 0,$$

que é um sistema de equações para os coeficientes B_i , C e D_i . Resolvendo este sistema, temos que ϕ_3 deve ser substituído no conjunto de geradores por $\Sigma = \phi_3 - \partial_i \phi_2^i$, com $B_i(x, y) = \partial_i^x \delta^3(x - y)$, $C(x, y) = \delta^3(x - y)$ e $D_i = 0$.

No entanto, não precisamos fazer essa redefinição dos geradores. Temos a liberdade de

simplesmente limitar a matriz a um subconjunto de geradores não involutivos e linearmente independentes quaisquer, o que é um procedimento que evita o tedioso cálculo anterior. Vamos tomar, portanto, os geradores ϕ_2^i e ϕ_4^i e construir a matriz

$$M_{IJ}^{ij} \equiv 2\eta^{ij} \begin{pmatrix} 0 & -2a^2 \partial_-^x \partial_-^x \\ 2a^2 \partial_-^x \partial_-^x & \partial_-^x [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (5.27)$$

Esta matriz está relacionada a um conjunto de geradores não involutivos e, como já sabemos, podemos redefinir a dinâmica do sistema com a definição de parênteses generalizados envolvendo a inversa da matriz (5.27). Vamos definir a inversa por N_{ij}^{IJ} , tal que

$$\int d^3z M_{IJ}^{ij}(x, z) N_{jk}^{JK}(z, y) = \delta_k^i \delta_I^K \delta^3(x - y). \quad (5.28)$$

Nosso objetivo, agora, é encontrar uma matriz N que seja única e que obedeça (5.28).

5.4 Cálculo da inversa de M

É bastante razoável supor que a inversa de M tenha a forma

$$N_{ij}^{IJ}(x, y) \equiv \frac{1}{2} \eta_{ij} \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & \beta(x, y) \\ \gamma(x, y) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Assim, a condição (5.28) torna-se

$$\begin{pmatrix} 0 & -2a^2 \partial_-^x \partial_-^x \\ 2a^2 \partial_-^x \partial_-^x & [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \partial_-^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x, y) & \beta(x, y) \\ \gamma(x, y) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

que nos fornece o seguinte conjunto de equações diferenciais parciais para os coeficientes:

$$\begin{aligned} -2a^2 \partial_-^x \partial_-^x \gamma(x, y) &= \delta^3(x - y), \\ 2a^2 \partial_-^x \partial_-^x \alpha(x, y) + [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \partial_-^x \gamma(x, y) &= 0, \\ 2a^2 \partial_-^x \partial_-^x \beta(x, y) &= \delta^3(x - y). \end{aligned}$$

Resolver essas equações envolve o conhecimento da função de Green do operador $\partial_-^x \partial_-^x$, que obedece a equação

$$\partial_-^x \partial_-^x G(x, y) = \delta^3(x - y).$$

Portanto, as equações para os coeficientes da inversa tomam a forma

$$\begin{aligned}\gamma(x, y) &= -\frac{1}{2a^2} G(x, y), \\ \partial_-^x \partial_-^x \alpha(x, y) &= \frac{1}{4a^4} [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \partial_-^x G(x, y), \\ \beta(x, y) &= \frac{1}{2a^2} G(x, y).\end{aligned}$$

Para encontrar $G(x, y)$, usaremos uma transformada de Fourier

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \int d^3 k G(k) \exp[-ik \cdot (x - y)], \\ \delta^3(x - y) &= \frac{1}{(-2\pi)^3} \int d^3 k \exp[-ik \cdot (x - y)].\end{aligned}$$

de modo que

$$G(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 k_-^2}.$$

Portanto, temos

$$G(x, y) = \int d^3 k \frac{1}{(2\pi)^3 k_-^2} \exp[-ik \cdot (x - y)].$$

A integração nas componentes transversais k_1 e k_2 é simples, resultando em

$$G(x, y) = \int dk_- \frac{1}{2\pi k_-^2} \exp[-ik_- (x^- - y^-)] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.30)$$

Em (5.30), temos que resolver a integral

$$I \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{k^2} \exp[-ik\Delta x]. \quad (5.31)$$

Isto pode ser feito considerando a função complexa

$$f(z) \equiv \exp(-iz\Delta x).$$

Neste caso, vamos utilizar a integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} f(a),$$

em que C é um contorno fechado contendo o ponto $z = a$.

Para $n = 2$, temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = i \frac{d}{da} f(a) = \Delta x \exp(-ia\Delta x),$$

com integração no sentido anti-horário. Agora, vamos escolher um contorno apropriado, supondo C um semicírculo no plano superior com base no eixo real, de raio r . Devemos deslocar o polo duplo para o plano imaginário superior, o que é feito tomando-se $a = i\epsilon$. Neste caso, temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-i\epsilon)^2} dz = \Delta x \exp(\epsilon\Delta x).$$

A integral em C pode ser decomposta em

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-i\epsilon)^2} dz = \int_{-r}^r \frac{f(k)}{(k-i\epsilon)^2} dk + \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-i\epsilon)^2} dz,$$

em que C_1 é o arco de círculo de raio r centrado em $z = 0$ de 0 a π . A função $f(z)$ tem limite nulo para $r \rightarrow \infty$, de modo que a integral em C_1 será nula neste limite. Dessa forma, temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k)}{(k-i\epsilon)^2} dz = \Delta x \exp(\epsilon\Delta x).$$

A integral (5.31) é o limite da integral acima para $\epsilon \rightarrow 0$, de modo que

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta x \exp(\epsilon\Delta x) = \Delta x, \quad \Delta x > 0.$$

Da mesma forma, se escolhermos como contorno o semicírculo inferior, mudando a prescrição para o deslocamento do polo duplo para o semiplano complexo inferior, temos uma mudança de sinal devido à mudança no sentido de integração:

$$I = -\Delta x, \quad \Delta x < 0.$$

Como o resultado não pode depender do contorno utilizado, temos o resultado geral

$$I = |\Delta x|,$$

que nos fornece a função de Green

$$G(x, y) = |x^- - y^-| \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.32)$$

A função $\beta(x, y)$ em (5.30) é dada, portanto, por

$$\beta(x, y) = \frac{1}{a^2} |x^- - y^-| \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.33)$$

Da mesma forma,

$$\gamma(x, y) = -\frac{1}{a^2} |x^- - y^-| \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.34)$$

A equação para $\alpha(x, y)$ contém uma derivada de $\gamma(x, y)$, que envolve a derivada da função módulo. Sabemos, no entanto, que

$$\frac{d}{dx} |x - y| = \epsilon(x - y),$$

em que $\epsilon(x - y)$ é definida como a função sinal

$$\epsilon(x - y) \equiv \begin{cases} 1 & x > y \\ 0 & x = y \\ -1 & x < y \end{cases}.$$

Dessa forma, precisamos resolver a equação diferencial

$$\partial_-^x \partial_-^x \alpha(x, y) = \frac{1}{2a^4} [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \epsilon(x - y) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.35)$$

Usando novamente a função de Green (5.32),

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{4a^2} |x^- - y^-|^2 \epsilon(x - y) [1 - 2a^2 \nabla_x^2] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.36)$$

As soluções (5.33), (5.34) e (5.36) são definidas obviamente a menos de funções arbitrárias independentes de x^- e y^- ou, na melhor das hipóteses, dependentes dessas coordenadas até segunda ordem. Essas funções podem ser fixadas com o uso de condições de contorno apropriadas para os campos no plano $x^- = -\infty$. Tomaremos essas condições como $\partial_- A_\mu = \partial_-^2 A_\mu = \partial_-^3 A_\mu = 0$ neste plano. Assim, somos capazes de construir uma inversa única para a matriz M . Sem a definição dessas condições a inversa N não será única, mas uma família de inversas que, na construção dos parênteses generalizados, resultará em uma dinâmica degenerada. A existência dessas funções arbitrárias está relacionada à existência de geradores em involução que estão relacionados, por sua vez, às condições de contorno acima. Esta análise está fora do escopo do nosso trabalho, mas pode ser encontrada em [10, 9] para o formalismo Hamiltoniano.

5.5 Os parênteses generalizados

Assumindo as condições de contorno para que N seja única podemos tomar as soluções de $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ e $\gamma(x, y)$ e utilizar a matriz (5.29) para construir os parênteses generalizados

$$\{A(x), B(y)\}^* = \{A(x), B(y)\} - \iint d^3z d^3w \{A(x), \phi_I^i(z)\} N_{ij}^{IJ}(z, w) \{\phi_J^j(w), B(y)\}. \quad (5.37)$$

Com esses parênteses podemos continuar a examinar a integrabilidade do sistema de geradores, dentre os quais podemos eliminar ϕ_I^i , em que $I = 2, 4$, já que a estrutura (5.37) implica que quaisquer parênteses que envolvam esses geradores são identicamente nulos.

Podemos usar a estrutura (5.37), que pode ser mais fácil de ser manipulada em certos casos, ou utilizar as propriedades dos parênteses generalizados com o conhecimento das relações fundamentais envolvendo as variáveis canônicas. Essas relações são dadas por

$$\{A_\mu(x), \bar{A}_\nu(y)\}^* = -\frac{1}{2}\eta_{\mu j}\delta_\nu^j\beta(x, y), \quad (5.38)$$

$$\{A_\mu(x), p^\nu(y)\}^* = \delta_\mu^\nu\delta^3(x - y), \quad (5.39)$$

$$\{\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(y)\}^* = \frac{1}{2}\eta_{\mu j}\delta_\nu^j\alpha(x, y) + \Delta_{\mu\nu}^{j-}\partial_j^x\beta(x, y), \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{A}_\mu(x), p^\nu(y)\}^* &= \frac{1}{2}\delta_\mu^i\delta_-^\nu\partial_i^x\beta(x, y) \\ &\quad - a^2\delta_\mu^i\left[\delta_k^\nu\partial_k^x\partial_i^x - \delta_+^\nu\partial_i^x\partial_-^x + \delta_i^\nu\left(\frac{1}{2a^2} - \nabla_x^2\right)\right]\partial_-^x\beta(x, y) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\{\bar{A}_\mu(x), \pi^\nu(y)\}^* = \delta_\mu^\nu\delta^3(x - y) + a^2\delta_\mu^i[\delta_-^\nu\partial_i^x - 2\delta_i^\nu\partial_-^x]\partial_-^x\beta(x, y). \quad (5.42)$$

Todas as demais são nulas identicamente. Nessas equações, temos as soluções

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \frac{1}{a^2}|x^- - y^-|\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \partial_-^x\beta(x, y) &= \frac{1}{a^2}\epsilon(x^- - y^-)\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \partial_-^x\partial_-^x\beta(x, y) &= \frac{2}{a^2}\delta^3(x - y), \\ \alpha(x, y) &= \frac{1}{4a^2}|x^- - y^-|^2\epsilon(x - y)[1 - 2a^2\nabla_x^2]\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\}^* = \{\phi_1(x), \phi_3(y)\}^* = 0, \quad (5.43)$$

$$\{\phi_0(x), \phi_1(y)\}^* = \phi_3(x)\delta^3(x - y). \quad (5.44)$$

Contudo, temos os parênteses

$$\{\phi_0(x), \phi_3(y)\}^* = -[\partial_-^x p^-(x) + \partial_i^x p^i(x) + \partial_i^x \phi_4^i(x)] \delta^3(x-y). \quad (5.45)$$

Portanto, a álgebra dos geradores ainda não está fechada. Para tornar o sistema integrável temos que considerar a expressão (5.45) um novo gerador, que definiremos como

$$\Sigma(x) \equiv -\partial_-^x p^-(x) - \partial_i^x p^i(x).$$

A dependência em ϕ_4^i pode ser descartada, desde que os parênteses envolvendo esses geradores são sempre nulos. Os parênteses generalizados de Σ com os demais resultam em

$$\{\Sigma(x), \Sigma(x)\}^* = \{\Sigma(x), \phi_1\}^* = \{\Sigma(x), \phi_3\}^* = 0,$$

enquanto um cálculo um pouco mais longo mostra que

$$\{\phi_0(x), \Sigma(y)\}^* = 0.$$

Por conveniência, vamos renomear o conjunto de geradores que obtivemos até agora. Eles são dados por

$$\Sigma_0(x) \equiv p_0 + \mathcal{H}_c, \quad (5.46)$$

$$\Sigma_1(x) \equiv \pi^+(x), \quad (5.47)$$

$$\Sigma_2(x) \equiv p^+(x) - \partial_-^x \pi^-(x), \quad (5.48)$$

$$\Sigma_3(x) \equiv -\partial_-^x p^-(x) - \partial_i^x p^i(x). \quad (5.49)$$

O cálculo dos parênteses generalizados referentes a esses geradores mostra que eles formam um conjunto involutivo completo e, portanto, o sistema de equações diferenciais parciais

$$\Sigma_\mu(x, A, p, \bar{A}, \pi) = 0, \quad p^\mu = \frac{\delta S}{\delta A_\mu}, \quad \pi^\mu = \frac{\delta S}{\delta \bar{A}_\mu}$$

é completamente integrável. Assim, podemos buscar as equações características deste sistema. A dinâmica da teoria é construída através da diferencial funcional

$$\delta F(x) = \int d^3y \{F(x), \Sigma_\mu(y)\}^* \delta \sigma^\mu(y). \quad (5.50)$$

Nesta, σ^μ são as variáveis independentes. Sabemos que $\sigma^0(x) = x^+$, portanto, o gerador Σ_0 é o gerador de evolução temporal. Da mesma forma, σ^1 e σ^2 estão relacionados com as variáveis $\bar{A}_+$ e A_+ respectivamente. Os geradores Σ_1 e Σ_2 , por consequência, geram transformações infinitesimais no espaço de configuração na direção dessas coordenadas. O gerador Σ_3 ,

por outro lado, não possui uma variável independente relacionada ao espaço de configuração. Assim, delegamos uma variável σ^3 para este trabalho, expandindo o espaço das variáveis independentes.

5.6 As equações características

Vamos tomar a lei de evolução (5.50) e verificar as equações de campo canônicas associadas às variáveis A_μ , $\bar{A}_\mu$, p^μ e π^μ . Vamos começar tomando $F(x) = A_\mu(x)$:

$$\delta A_\mu(x) = \int d^3y \{A_\mu(x), \Sigma_\nu(y)\}^* \delta \sigma^\nu(y).$$

Com os parênteses

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \Sigma_0(y)\}^* &= \bar{A}_\mu(y) \delta^3(x-y) - \frac{1}{2} \eta_{\mu i} \beta(x, y) \phi_4^i(y) = \bar{A}_\mu(y) \delta^3(x-y), \\ \{A_\mu(x), \Sigma_1(y)\}^* &= 0, \\ \{A_\mu(x), \Sigma_2(y)\}^* &= \{A_\mu(x), p^+(y)\}^* = \delta_\mu^+ \delta^3(x-y), \\ \{A_\mu(x), \Sigma_3(y)\}^* &= \{A_\mu(x), \partial_-^y p^-(y) + \partial_i^y p^i(y)\}^* = [\delta_\mu^- \partial_-^x + \delta_\mu^i \partial_i^x] \delta^3(x-y), \end{aligned}$$

temos

$$\delta A_\mu(x) = \bar{A}_\mu(x) \delta \sigma^0(x) + \delta_\mu^+ \delta \sigma^2(x) + [\delta_\mu^- \partial_-^x + \delta_\mu^i \partial_i^x] \delta \sigma^3(x). \quad (5.51)$$

Com essas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \delta A_+(x) &= \bar{A}_+(x) \delta x^+ + \delta \sigma^2(x), \\ \delta A_-(x) &= \bar{A}_-(x) \delta x^+ + \partial_-^x \delta \sigma^3(x), \\ \delta A_i(x) &= \bar{A}_i(x) \delta x^+ + \partial_i^x \delta \sigma^3(x), \end{aligned}$$

ou, derivando com relação a x^+ ,

$$A_{+,+} = \bar{A}_+ + \dot{\sigma}^2, \quad (5.52)$$

$$A_{-,+} = \bar{A}_- + \partial_- \dot{\sigma}^3, \quad (5.53)$$

$$A_{i,+} = \bar{A}_i + \partial_i \dot{\sigma}^3. \quad (5.54)$$

Nessas, usamos a notação $\dot{\sigma} \equiv \partial_+ \sigma$.

Essas equações são equivalentes à definição inicial $A_{\mu,+} = \bar{A}_\mu$ a menos de termos envolvendo as variáveis independentes. Desde já, para que essas equações características sejam

equivalentes às equações de Euler-Lagrange, devemos ter condições sobre essas variáveis. De (5.51), temos de imediato

$$\dot{\sigma}^2 = 0, \quad \partial_- \dot{\sigma}^3 = 0, \quad \partial_i \dot{\sigma}^3 = 0.$$

As equações características para $F(x) = \bar{A}_\mu(x)$ são calculadas usando

$$\delta \bar{A}_\mu(x) = \int d^3 y \{ \bar{A}_\mu(x), \Sigma_\nu(y) \}^* \delta \sigma^\nu(y).$$

Após algum cálculo, em que devemos usar as expressões $\phi_4^i = 0$ e $\Sigma_3 = 0$, chegamos diretamente aos parênteses

$$\begin{aligned} \{ \bar{A}_\mu(x), \Sigma_0(y) \}^* &= \delta_\mu^- \left[\partial_-^y \bar{A}_+(y) + \partial_j^y \bar{A}_j(y) - \nabla_y^2 A_+(y) \right] \delta^3(x-y), \\ \{ \bar{A}_\mu(x), \Sigma_1(y) \}^* &= \delta_\mu^+ \delta^3(x-y), \\ \{ \bar{A}_\mu(x), \Sigma_2(y) \}^* &= [\delta_\mu^- \partial_-^x + \delta_\mu^i \partial_i^x] \delta^3(x-y), \\ \{ \bar{A}_\mu(x), \Sigma_3(y) \}^* &= 0. \end{aligned}$$

Com estes, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \bar{A}_\mu(x) &= \delta_\mu^- [\partial_-^x \bar{A}_+(x) + \partial_j^x \bar{A}_j(x) - \nabla_x^2 A_+(x)] \delta \sigma^0(x) \\ &\quad + \delta_\mu^+ \delta \sigma^1(x) + [\delta_\mu^- \partial_-^x + \delta_\mu^i \partial_i^x] \delta \sigma^2(x). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Os resultados individuais são dados por

$$\begin{aligned} \delta \bar{A}_+(x) &= \delta \sigma^1(x), \\ \delta \bar{A}_-(x) &= [\partial_-^x \bar{A}_+(x) + \partial_j^x \bar{A}_j(x) - \nabla_x^2 A_+(x)] \delta x^+ + \partial_-^x \delta \sigma^2(x), \\ \delta \bar{A}_i(x) &= \partial_i^x \delta \sigma^2(x), \end{aligned}$$

que mostram que devemos relacionar $\bar{A}_+ = \sigma^1$ e $\bar{A}_i = \partial_i^x \sigma^2$. Da equação para $\bar{A}_-$, temos

$$\bar{A}_{-,+} = \bar{A}_{+,-} + \bar{A}_{i,i} - A_{+,ii} + \partial_- \dot{\sigma}^2.$$

Usando (5.52), (5.53) e (5.54), podemos montar a relação

$$\partial_\mu F^{-\mu} = - [\partial_- \partial^- + \partial_i \partial^i] \dot{\sigma}^3. \quad (5.56)$$

As equações características para os momentos p^μ são obtidas da equação

$$\delta p^\mu(x) = \int d^3 y \{ p^\mu(x), \Sigma_\nu(y) \}^* \delta \sigma^\nu(y).$$

Mais uma vez, com alguma manipulação e uso das relações (5.52), (5.53), (5.54) e (5.56), temos

$$\begin{aligned}
\{p^\mu(x), \Sigma_0(y)\}^* &= \delta_+^\mu \left[\partial_\lambda^y F^{\lambda+}(y) - a^2 \partial_i^y \partial_-^y \partial_\lambda^y F^{\lambda i}(y) \right. \\
&\quad \left. - a^2 \nabla_y^2 \partial_\lambda^y F^{\lambda+}(y) + (1 + a^2 \nabla_y^2) \partial_-^y \partial_-^y \dot{\sigma}^3(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \delta_-^\mu \left[\partial_i^y F^{i-}(y) + \nabla_y^2 \dot{\sigma}^3(y) \right] \delta^3(x-y) \\
&\quad + \delta_i^\mu \left[\partial_-^y F^{-i}(y) + \partial_j^y F^{ji}(y) - a^2 \square \partial_j^y F^{ij}(y) \right. \\
&\quad \left. - \partial_-^y \partial_i^y \dot{\sigma}^3(y) \right] \delta^3(x-y), \\
\{p^\mu(x), \Sigma_1(y)\}^* &= 0 \\
\{p^\mu(x), \Sigma_2(y)\}^* &= 0 \\
\{p^\mu(x), \Sigma_3(y)\}^* &= 0
\end{aligned}$$

Então, resultam as expressões

$$\begin{aligned}
\delta p^+ &= \left[\partial_\lambda F^{\lambda+} - a^2 \partial_i \partial_- \partial_\lambda F^{\lambda i} - a^2 \nabla^2 \partial_\lambda F^{\lambda+} + (1 + a^2 \nabla^2) \partial_- \partial_- \dot{\sigma}^3 \right] \delta x^+, \\
\delta p^- &= \left[\partial_i F^{i-} + \nabla^2 \dot{\sigma}^3 \right] \delta x^+, \\
\delta p^i &= \left[\partial_- F^{-i} + \partial_j F^{ji} - a^2 \square \partial_j F^{ij} - \partial_- \partial_i \dot{\sigma}^3 \right] \delta x^+,
\end{aligned}$$

ou,

$$\partial_+ p^+ = \partial_\lambda F^{\lambda+} - a^2 \partial_i \partial_- \partial_\lambda F^{\lambda i} - a^2 \nabla^2 \partial_\lambda F^{\lambda+} + (1 + a^2 \nabla^2) \partial_- \partial_- \dot{\sigma}^3, \quad (5.57)$$

$$\partial_+ p^- = \partial_i F^{i-} + \nabla^2 \dot{\sigma}^3, \quad (5.58)$$

$$\partial_+ p^i = \partial_- F^{-i} + \partial_j F^{ji} - a^2 \square \partial_j F^{ij} - \partial_- \partial_i \dot{\sigma}^3. \quad (5.59)$$

Essas são as equações dinâmicas da teoria.

As equações características para π^μ fornecem expressões para os momentos p^μ . Basta calcular os parênteses

$$\begin{aligned}
\{\pi^\mu(x), \Sigma_0(y)\}^* &= \delta_+^\mu \phi_3(y) \delta(x-y) - \delta_i^\mu \phi_4^i(y) \delta^3(x-y), \\
&\quad + \delta_-^\mu \left[F_{+-}(y) - p^-(y) + a^2 \partial_i^y \partial_\lambda^y F^{\lambda i}(y) \right. \\
&\quad \left. + \partial_-^y \dot{\sigma}^3(y) - a^2 \partial_-^y \nabla_y^2 \dot{\sigma}^3(y) \right] \delta^3(x-y) \\
\{\pi^\mu(x), \Sigma_1(y)\}^* &= 0, \\
\{\pi^\mu(x), \Sigma_2(y)\}^* &= 0, \\
\{\pi^\mu(x), \Sigma_3(y)\}^* &= 0.
\end{aligned}$$

Assim, temos as equações

$$\partial_+ \pi^+ = \phi_3,$$

$$\partial_+ \pi^- = F_{+-} - p^- + a^2 \partial_i \partial_\lambda F^{\lambda i} + (1 - a^2 \nabla^2) \partial_- \dot{\sigma}^3,$$

$$\partial_+ \pi^i = -\phi_4^i.$$

As relações referentes a π^+ e π^- apenas indicam o que podemos ver diretamente a partir das condições de integrabilidade, ou seja, $\phi_3 = 0$ e $\phi_4^i = 0$ resultam das condições $\delta\phi_1 = 0$ e $\delta\phi_2^i = 0$. Usando o fato de que $\partial_+ \pi^+ = 0$, $\partial_+ \pi^i = 0$ e $\pi^- = a^2 \partial_\lambda F^{+\lambda}$, essas equações nos fornecem

$$p^+ = a^2 \partial_- \partial_\lambda F^{+\lambda}, \quad (5.60)$$

$$p^- = F^{-+} + a^2 \partial_\lambda F^{-\lambda} + (1 - a^2 \nabla^2) \partial_- \dot{\sigma}^3, \quad (5.61)$$

$$p^i = F^{+i} - a^2 \partial_i \partial_+ \partial_\lambda F^{\lambda+} - 2a^2 \partial_- \partial_+ \partial_\lambda F^{\lambda i} + 2a^2 \partial_- \partial_- \partial_i \ddot{\sigma}^3. \quad (5.62)$$

Substituindo (5.60), (5.61) e (5.62) respectivamente em (5.57), (5.58) e (5.59), temos as equações de campo

$$(1 + a^2 \square) \partial_\lambda F^{\mu\lambda} = [\delta_+^\mu \partial_- (1 + a^2 \nabla) + \delta_-^\mu a^2 \partial_+ \nabla - \delta_i^\mu \partial_i (1 + 2a^2 \partial_+ \partial_-)] \partial_- \dot{\sigma}^3. \quad (5.63)$$

Essas equações formam uma família de equações de campo e as equações de Euler-Lagrange (5.11) são obtidas quando o lado direito de (5.63) é nulo.

5.7 Transformações de gauge

Seguindo a ideia desenvolvida na seção 4.5, a de que geradores em involução são geradores de transformações de simetria, vamos analisar o conjunto de equações $\Sigma_I = 0$ formado pelos geradores

$$\Sigma_1 = \pi^+, \quad (5.64)$$

$$\Sigma_2 = p^+ - \partial_- \pi^-, \quad (5.65)$$

$$\Sigma_3 = -\partial_- p^- - \partial_i p^i. \quad (5.66)$$

Com a operação dos parênteses generalizados, esses geradores fecham uma álgebra de Lie abeliana, ou seja,

$$\{\Sigma_I(x), \Sigma_J(y)\}^* = 0.$$

Nossa análise consiste simplesmente na aplicação da equação (4.85) com a matriz (4.84), cujas

expressões já calculamos. São dadas por

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \Sigma_1(y)\}^* &= 0, \\
\{A_\mu(x), \Sigma_2(y)\}^* &= \delta_\mu^+ \delta^3(x-y), \\
\{A_\mu(x), \Sigma_3(y)\}^* &= -[\delta_\mu^- \partial_-^x + \delta_\mu^i \partial_i^x] \delta^3(x-y), \\
\{\bar{A}_\mu(x), \Sigma_1(y)\}^* &= \delta_\mu^+ \delta^3(x-y), \\
\{\bar{A}_\mu(x), \Sigma_2(y)\}^* &= [\delta_\mu^- \partial_-^x + \delta_\mu^i \partial_i^x] \delta^3(x-y), \\
\{\bar{A}_\mu(x), \Sigma_3(y)\}^* &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o lado direito de (4.85) contém expressões para todas as variáveis independentes da teoria. Vamos reescrever esta equação por

$$\int d^3y \{A_\mu(x), \Sigma_I(y)\}^* \delta \sigma^I(y) = \int d^3y \left. \frac{\delta A'_\mu(x)}{\delta \Lambda^r(y)} \right|_{\Lambda=0} \Lambda^r(y), \quad (5.67)$$

$$\int d^3y \{\bar{A}_\mu(x), \Sigma_I(y)\}^* \delta \sigma^I(y) = \int d^3y \left. \frac{\delta \bar{A}'_\mu(x)}{\delta \bar{\Lambda}^r(y)} \right|_{\bar{\Lambda}=0} \bar{\Lambda}^r(y). \quad (5.68)$$

A simetria de gauge da teoria é a mesma da teoria de Maxwell. É dada pelas transformações

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{d\Lambda(x)}{dx^\mu} \quad (5.69)$$

para uma única função arbitrária $\Lambda(x)$. Como o sistema é de segunda ordem, temos também

$$\bar{A}'_\mu(x) = \bar{A}_\mu(x) + \frac{d\dot{\Lambda}(x)}{dx^\mu}. \quad (5.70)$$

Portanto, $r = 1$ e, como consequência,

$$\int d^3y \left. \frac{\delta A'_\mu(x)}{\delta \Lambda(y)} \right|_{\Lambda=0} \Lambda(y) = \frac{d\Lambda(x)}{dx^\mu} = \partial_\mu^x \Lambda(x), \quad (5.71)$$

$$\int d^3y \left. \frac{\delta \bar{A}'_\mu(x)}{\delta \dot{\Lambda}(y)} \right|_{\dot{\Lambda}=0} \dot{\Lambda}(y) = \frac{d\dot{\Lambda}(x)}{dx^\mu} = \partial_\mu^x \dot{\Lambda}(x). \quad (5.72)$$

A equação (5.67) torna-se

$$\delta_\mu^+ \delta \sigma^2(x) + \delta_\mu^- \partial_-^x \delta \sigma^3(x) + \delta_\mu^i \partial_i^x \delta \sigma^3(x) = \partial_\mu^x \Lambda(x), \quad (5.73)$$

enquanto (5.68) lê-se

$$\delta_\mu^+ \delta \sigma^1(x) + \delta_\mu^- \partial_-^x \delta \sigma^2(x) + \delta_\mu^i \partial_i^x \delta \sigma^2(x) = \partial_\mu^x \dot{\Lambda}(x). \quad (5.74)$$

De (5.73), tomando-se $\mu = +$, obtemos a relação

$$\delta\sigma^2(x) = \partial_+^x \Lambda(x) = \dot{\Lambda}(x).$$

As demais escolhas resultam em

$$\partial_-^x \delta\sigma^3(x) = \partial_-^x \Lambda(x), \quad \partial_i^x \delta\sigma^3(x) = \partial_i^x \Lambda(x).$$

Já a equação (5.74) tem como resultado

$$\delta\sigma^1(x) = \partial_+^x \dot{\Lambda}(x), \quad \partial_-^x \delta\sigma^2(x) = \partial_-^x \dot{\Lambda}(x), \quad \partial_i^x \delta\sigma^2(x) = \partial_i^x \dot{\Lambda}(x).$$

Assim, torna-se claro que

$$\delta\sigma^1 = \ddot{\Lambda}, \quad \delta\sigma^2 = \dot{\Lambda}, \quad \delta\sigma^3 = \Lambda. \quad (5.75)$$

A variável $\delta\sigma^3$ é definida a menos de uma função arbitrária de x^+ , que pode ser tomada nula com condições iniciais apropriadas.

O gerador G das transformações de gauge é dado por

$$G = \delta\sigma^I \bullet \Sigma_I = \ddot{\Lambda}\Sigma_1 + \dot{\Lambda}\Sigma_2 + \Lambda\Sigma_3. \quad (5.76)$$

Para conferir, podemos calcular

$$\begin{aligned} \{A_\mu, G\}^* &= \ddot{\Lambda} \{A_\mu, \Sigma_1\}^* + \dot{\Lambda} \{A_\mu, \Sigma_2\}^* + \Lambda \{A_\mu, \Sigma_3\}^* \\ &= \delta_\mu^+ \dot{\Lambda} + [\delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i] \Lambda \\ &= [\delta_\mu^+ \partial_+ + \delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i] \Lambda = \partial_\mu \Lambda, \\ \{\bar{A}_\mu, G\}^* &= \ddot{\Lambda} \{\bar{A}_\mu, \Sigma_1\}^* + \dot{\Lambda} \{\bar{A}_\mu, \Sigma_2\}^* + \Lambda \{\bar{A}_\mu, \Sigma_3\}^* \\ &= \delta_\mu^+ \ddot{\Lambda} + [\delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i] \dot{\Lambda} \\ &= [\delta_\mu^+ \partial_+ + \delta_\mu^- \partial_- + \delta_\mu^i \partial_i] \dot{\Lambda} = \partial_\mu \dot{\Lambda}, \end{aligned}$$

que reproduzem corretamente as transformações (5.69) e (5.70).

Neste exemplo, podemos ver que todos os geradores contribuem para a construção do gerador de transformações de gauge da teoria. Este pode não ser o caso, contudo, de outras aplicações. A contagem de graus de liberdade é dada pela dimensão do espaço de configuração diminuída do número de geradores da teoria, já que cada gerador em involução, com exceção a Σ_0 , corresponde a uma variável independente indeterminada. Na teoria de Podolsky o espaço de configuração contém oito campos $(A_\mu, \bar{A}_\mu)$ e três geradores $\Sigma_I = 0$, de modo que existem cinco componentes dinâmicos na dinâmica do plano nulo, ainda que existam seis va-

riáveis dependentes $(A_-, \bar{A}_-, A_i, \bar{A}_i)$. Assim como no caso do formalismo de Dirac-Bermann, um processo de fixação das variáveis independentes deve ser implementado, processo que é conhecido como fixação de gauge. Na teoria de Podolsky este processo é determinado pela escolha de três condições $\Gamma_I = 0$ tais que $\{\Sigma_I, \Gamma_J\} \neq 0$ e, portanto, obrigaria a redefinição da dinâmica do sistema com novos parênteses generalizados. Este processo é efetuado em [10], no contexto do formalismo canônico, com a escolha do gauge de radiação generalizado

$$\begin{aligned} A_+ &= 0, \\ \bar{A}_+ &= 0, \\ (1 + a^2 \square) (\bar{A}_- - \partial_i A_i) &= 0. \end{aligned}$$

Contudo, esta é uma discussão fora do nosso escopo. Na dinâmica instantânea, em que $x^0 = t$ é o parâmetro de evolução temporal, a teoria de Podolsky é analisada na ref. [11], também pelo formalismo Hamiltoniano.

Referências

- [1] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros & P. J. Pompeia, *How can one probe Podolsky Electrodynamics?* arXiv:0810.4106v2 [quant-ph] (2009).
- [2] F. Bopp, *Ann. d. Phys.* **38**, 345- (1940).
- [3] B. Podolsky & P. Schwed, *Review of a generalized electrodynamics*, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40-50 (1948).
- [4] J. Frenkel, *4/3 problem in classical electrodynamics*, *Phys. Rev.* **E54**, 5859-5862 (1996).
- [5] E. R Williams, J. E. Faller & H. A. Hill, *New experimental test of Coulomb's law: a laboratory upper limit on the photon rest mass*, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 721-724 (1971).
- [6] L. Davis, A. S. Goldhaber & M. M. Nieto, *Limit on the photon mass deduced from Pioneer-10 observations of Jupiter's magnetic field*, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1402-1405 (1975).
- [7] J. Luo, L.-C. Tu, Z. K. Hu & E.-J. Luan, *New experimental limit on the photon rest mass with a rotating torsion balance*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 081801-1 (2003).
L.-C. Tu, J. Luo, & G. T. Gillies, *The mass of the photon*, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 77-130 (2005).
- [8] P. J. Steinhardt, *Problems of quantization in the infinite momentum frame*, *Ann. Phys.* **128**, 425-447 (1980).
- [9] R. A. Neville & F. Rohrlich, *Quantum field theory of null planes*, *Il Nuovo Cimento* **A1**, 625- (1971).
- [10] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & G. E. R. Zambrano, *The canonical structure of Podolsky's generalized electrodynamics on the Null-Plane*, arXiv:0907.1078v1 [hep-th] (2009).
- [11] C. A. P. Galvão & B. M. Pimentel, *The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics*, *Can. J. Phys.* **66**, 460-466 (1988).

Capítulo 6

Relatividade Geral em duas dimensões

Introdução

Em nossa segunda aplicação, vamos analisar a estrutura de geradores de um caso particular da teoria da Relatividade Geral, em que a hiper-superfície de Cauchy definida a $t = x^0$ constante é uma linha unidimensional.

O grande objetivo da física moderna no que concerne teorias de campos é a quantização do campo gravitacional e sua possível unificação com as demais interações fundamentais da natureza. No entanto, tanto a Relatividade Geral quanto outras teorias gravitacionais resistem a este programa. Muitos dos problemas encontrados para quantizar a gravitação advêm do fato de a Relatividade Geral não ser uma teoria de gauge, pelo menos não no sentido do eletromagnetismo de Maxwell e das teorias de Yang-Mills-Utiyama. Um dos problemas mais notáveis é o fato de a teoria ser não renormalizável perturbativamente, o que levanta dúvidas com relação à existência de uma teoria quântica completa, ou não perturbativa.

A Relatividade Geral é uma teoria singular e, por isso, o conhecimento de sua estrutura de geradores, ou estrutura de vínculos na nomenclatura de Dirac, é fundamental para o processo de construção de uma teoria quântica [1]. O que está por trás da análise de vínculos é a busca por um espaço de fase com estrutura simplética não degenerada e essa estrutura depende fortemente das simetrias da integral fundamental. Infelizmente, em quatro dimensões a análise de vínculos é complexa e ainda permanece um problema em aberto, mas a análise de teorias em dimensões inferiores provou-se um excelente laboratório, em razão da enorme simplificação que ocorre no sistema de geradores. A motivação para o estudo de teo-

rias gravitacionais em dimensões inferiores a quatro é hoje bastante extensa, mas começou com o desejo de melhor compreender a estrutura de uma possível teoria quântica da gravidade em quatro dimensões.

Em duas dimensões, no entanto, a Relatividade Geral torna-se uma teoria bastante peculiar e a razão é a própria estrutura do espaço-tempo. Toda variedade pseudo-riemanniana em duas dimensões é conformalmente plana, ou seja, existe sempre um referencial para o qual $g_{\alpha\beta} = \exp[\phi] \eta_{\alpha\beta}$, em que ϕ é um parâmetro de escala. Além disso, a própria estrutura da integral de Einstein-Hilbert parece carecer de estruturas não triviais: as equações de campo são trivialmente satisfeitas e o campo gravitacional não possui graus de liberdade físicos. Enfim, não há campo gravitacional verdadeiro, o que torna a própria estrutura da Relatividade Geral de pouco interesse para $d = 2$. Este fato fez com que novas estruturas fossem acrescentadas à teoria, dando origem às teorias com dilações [2, 3], de modo que a definição de variáveis canônicas fosse possível. Teorias quânticas construídas a partir desses modelos são exatamente solúveis em $d = 2$ [3, 4], o que suscitou imenso interesse no assunto.

Contudo, embora a Relatividade Geral em si seja trivial em duas dimensões, sua estrutura de geradores não o é e sua análise de fato pode trazer contribuições para a compreensão da estrutura de vínculos em quatro dimensões. Por este motivo, temos interesse nessa teoria não só como aplicação do formalismo de Hamilton-Jacobi, mas também como um legítimo sistema canônico que pode lançar luz na teoria em dimensões superiores.

Na seção 6.1 vamos apresentar a notação que utilizaremos no restante do capítulo. Discutiremos também sobre a trivialidade das equações de Einstein em duas dimensões. Nas demais seções vamos proceder à análise de geradores. No entanto, usaremos a análise de Palatini, em que métrica e conexão são consideradas variáveis independentes entre si. Este caminho traz grande simplificação ao formalismo, já que evita a necessidade de tratar a teoria como um sistema de derivadas de ordem superior.

6.1 Notação e convenções

Trabalharemos, então, com a ação de Einstein-Hilbert

$$S_d = \int d^d x \sqrt{(-1)^{d-1} g} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (6.1)$$

em $d = 2$ dimensões, sem fontes e sem constante cosmológica. Em (6.1), $g^{\mu\nu}$ são as componentes contravariantes da métrica do espaço-tempo de dimensão d . A métrica é representada pelas componentes covariantes $g_{\mu\nu}$ tais que $g_{\mu\gamma} g^{\gamma\nu} = \delta_\mu^\nu$ e $g = \det g_{\mu\nu}$. $R_{\alpha\beta}$ são os componentes

do tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} \equiv \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}, \quad (6.2)$$

nas quais temos os componentes $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ da conexão afim, que são simétricos em seus índices inferiores. O elemento de volume invariante escrito como $d^d x \sqrt{(-1)^{d-1} g}$ implica na assinatura da métrica positiva no setor temporal e negativa no setor espacial. Usaremos a vírgula para indicar a derivada ordinária e o ponto e vírgula será empregado para a derivada covariante, definida por

$$A_{\gamma;\alpha} \equiv \partial_{\alpha} A_{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} A_{\sigma} \quad \text{e} \quad (6.3)$$

$$A^{\gamma}_{;\alpha} \equiv \partial_{\alpha} A^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} A^{\beta} \quad (6.4)$$

no caso dos componentes de 1-formas e vetores.

Na Relatividade Geral, a métrica é covariantemente conservada, ou seja,

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} - 2\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} \Gamma_{\gamma\nu}^{\lambda} = 0, \quad (6.5)$$

em que $\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \equiv 1/2 \left(\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} \right)$. Esta condição é conhecida também como metricidade. Neste caso, os componentes da conexão afim estão relacionados aos símbolos de Christoffel pela expressão

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} [g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}]. \quad (6.6)$$

Definimos também o tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, pelos componentes

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \left[\Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \right]. \quad (6.7)$$

Considerando (6.2) e (6.6), podemos ver que a integral fundamental (6.1) representa uma teoria de segunda ordem nas derivadas da métrica. A variação de (6.1) com relação à métrica resulta diretamente nas equações de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0, \quad (6.8)$$

em que $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura. Essas equações são apenas de segunda ordem, embora esperemos de uma teoria de densidade Lagrangiana de segunda ordem que suas equações de Euler-Lagrange sejam de quarta ordem. A razão é que a dependência das derivadas de ordem superior no tensor de Ricci é linear e permite que esses termos sejam colocados na forma de divergências totais [5].

Se contraídas com $g^{\alpha\beta}$, (6.8) resultam nas condições

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{d}{2} R = 0. \quad (6.9)$$

Para $d = 2$ essa última equação resulta na própria definição para o escalar de curvatura. Portanto, as equações de campo em duas dimensões são trivialmente satisfeitas.

6.2 Definição dos geradores

Consideremos a integral fundamental (6.1) na forma de Palatini

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left[\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \right], \quad (6.10)$$

em que d é par e diferente de zero. Nessa análise métrica e conexão são tratadas como campos independentes, não relacionados por (6.6). Com esta escolha, contornamos o problema de considerar o formalismo de derivadas superiores, já que esta integral fundamental torna-se de primeira ordem. Contudo, a independência entre métrica e conexão deveria vir acompanhada da condição de metricidade, para que o sistema descrito pela ação (6.10) seja equivalente à Relatividade Geral. Dessa forma, a condição $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$ deve ser incluída na ação com um multiplicador de Lagrange, mas vamos evitar essa abordagem por duas razões. A primeira vem a ser o fato de a condição de metricidade ser um vínculo que contém derivadas da métrica, o que tornaria a análise consideravelmente mais complicada. A segunda razão é que ela não é realmente necessária. Veremos que a integral (6.10) dará origem a uma teoria para a qual a Relatividade Geral é um caso especial.

A integral (6.10) é de primeira ordem nas velocidades, ou seja, a densidade Lagrangiana é dada pela expressão

$$L = -\Omega_{\gamma}^{\alpha\beta} \dot{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} - \Psi_{\alpha\beta} \dot{g}^{\alpha\beta} - \mathcal{H}_0, \quad (6.11)$$

em que o ponto acima dos campos indicam derivadas temporais. Nesta aplicação, estamos usando a dinâmica em forma instantânea, em que $x^0 = t$ é o parâmetro de evolução temporal e as superfícies $\Sigma (x^0 = t) = \text{constante}$, são as hiper-superfícies de Cauchy da teoria. As funções que aparecem nesta Lagrangiana são dadas pelas expressões

$$\Psi_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.12)$$

$$\Omega_{\gamma}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g} \left[\Delta_{\pi\gamma}^{\alpha\beta} g^{0\pi} - \delta_{\gamma}^0 g^{\alpha\beta} \right], \quad (6.13)$$

$$\mathcal{H}_0 = \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left[\Delta_{\alpha\beta}^{i\rho} \Gamma_{\rho\lambda,i}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta,i}^i - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^{\sigma} \right], \quad (6.14)$$

em que $\mathcal{H}_0$ representa a densidade Hamiltoniana do sistema, que depende apenas dos campos $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma$ e de suas derivadas espaciais.

Outra maneira de proceder à análise de Hamilton-Jacobi dessa teoria é considerando a densidade de métrica $h^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}$ como variável, no lugar da métrica. Para dimensão 3 ou superior ambas as abordagens são equivalentes. Contudo, observando a expressão para o determinante,

$$h \equiv \det h^{\alpha\beta} = -(-g)^{\frac{d-2}{2}}, \quad (6.15)$$

notamos que para $d = 2$ temos $h = -1$. A equação $h = -1$ é, na verdade, um vínculo entre as variáveis $h^{\alpha\beta}$ e este vínculo reduz o número de graus de liberdade: espera-se que a métrica em duas dimensões tenha três componentes independentes, mas a densidade de métrica deve possuir apenas dois componentes independentes. Neste caso é impossível escrever a métrica em função da densidade e, portanto, também os símbolos de Christoffel. A única análise possível utilizando a densidade de métrica é a de Palatini. Vamos proceder, contudo, com as variáveis $(g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\gamma)$.

Como a Lagrangiana (6.11) é linear nas derivadas da conexão e não depende das derivadas da métrica na descrição de Palatini, é imediato reconhecer os geradores

$$\phi_0(x) \equiv p_0(x) + \mathcal{H}_0(x) = 0, \quad (6.16)$$

$$\phi_{\alpha\beta}(x) \equiv \pi_{\alpha\beta}(x) = 0, \quad (6.17)$$

$$\phi_\gamma^{\alpha\beta}(x) \equiv \pi_\gamma^{\alpha\beta}(x) + \Omega_\gamma^{\alpha\beta}(x) = 0. \quad (6.18)$$

Vamos recorrer à análise de integrabilidade para este conjunto.

6.3 A matriz M

A princípio, temos as relações fundamentais dos parênteses de Poisson:

$$\{g^{\alpha\beta}(x), \pi_{\mu\nu}(y)\} = \Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta^{(d-1)}(x - y), \quad (6.19)$$

$$\{\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(x), \pi_\gamma^{\mu\nu}(y)\} = \delta_\gamma^\lambda \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \delta^{(d-1)}(x - y). \quad (6.20)$$

Estamos interessados na matriz que envolve os parênteses de Poisson entre os geradores (6.17) e (6.18). Usando a identidade

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \quad (6.21)$$

temos

$$\begin{aligned}\{\phi_{\alpha\beta}(x), \phi_{\mu\nu}(y)\} &= \{\phi_{\gamma}^{\alpha\beta}(x), \phi_{\lambda}^{\mu\nu}(y)\} = 0, \\ \{\phi_{\alpha\beta}(x), \phi_{\lambda}^{\mu\nu}(y)\} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g(x)} \left[g_{\alpha\beta} g^{\gamma\tau} - 2\Delta_{\alpha\beta}^{\gamma\tau} \right] \left[\Delta_{\gamma\tau}^{0\sigma} \Delta_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} - \Delta_{\gamma\tau}^{\mu\nu} \delta_{\lambda}^0 \right] \delta^n(x-y),\end{aligned}$$

em que $n = d - 1$. Portanto, temos a matriz

$$M(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & C(x, y) \\ -C^T(x, y) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

com $C \equiv \{\phi_{\alpha\beta}, \phi_{\lambda}^{\mu\nu}\}$.

Agora, vamos especializar o sistema para $d = 2$. As variáveis do espaço de configuração do sistema serão organizadas na ordem

$$g^{00}, g^{01}, g^{11}, \Gamma_{00}^0, \Gamma_{00}^1, \Gamma_{01}^0, \Gamma_{01}^1, \Gamma_{11}^0, \Gamma_{11}^1.$$

Em duas dimensões, os geradores da teoria são escritos como

$$\begin{aligned}\phi_0 &= p_0 + \mathcal{H}_0, \\ \phi_{00} &= \pi_{00}, \\ \phi_{01} &= \pi_{01}, \\ \phi_{11} &= \pi_{11}, \\ \phi_0^{00} &= \pi_0^{00}, \\ \phi_1^{00} &= \pi_1^{00}, \\ \phi_0^{01} &= \pi_0^{01} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{01}, \\ \phi_1^{01} &= \pi_1^{01} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{00}, \\ \phi_0^{11} &= \pi_0^{11} - \sqrt{-g}g^{11}, \\ \phi_1^{11} &= \pi_1^{11} + \sqrt{-g}g^{01}.\end{aligned}$$

Podemos usar a relação $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ para manipular convenientemente os componentes. Então, a matriz C torna-se

$$C = \frac{1}{4}\sqrt{-g} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_{00}g^{01} & g_{00}g^{00} - 2 & -2g_{00}g^{11} & 2g_{00}g^{01} \\ 0 & 0 & g_{00}g^{00} & g_{01}g^{00} & -2g_{01}g^{11} & -2g_{00}g^{00} \\ 0 & 0 & g_{01}g^{00} & g_{11}g^{00} & 4 - 2g_{11}g^{11} & 2g_{11}g^{01} \end{pmatrix} \delta(x-y). \quad (6.23)$$

Por convenção, os objetos à esquerda de uma delta de Dirac serão tratados como aplicados no primeiro ponto da delta, ou seja, $F\delta(x-y) \equiv F(x)\delta(x-y)$, o que deve nos poupar algum

espaço.

É fácil notar que a matriz C é singular e, portanto, também o é a matriz M . Dois de seus modos nulos estão relacionados ao fato de os geradores ϕ_0^{00} e ϕ_1^{00} estarem em involução. Existem, contudo, outros modos nulos, pois podemos ver que ϕ_0^{01} e ϕ_1^{11} não são linearmente independentes. Em vez da matriz (6.23), vamos considerar os geradores $(\phi_{00}, \phi_{01}, \phi_{11}, \phi_0^{01}, \phi_1^{01}, \phi_0^{11})$, que resultam na submatriz

$$M'(x, y) \equiv \frac{1}{4} \sqrt{-g} \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & B_{3 \times 3} \\ -(B^T)_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (6.24)$$

em que

$$B \equiv \begin{pmatrix} -g_{00}g^{01} & g_{00}g^{00} - 2 & -2g_{00}g^{11} \\ g_{00}g^{00} & g_{01}g^{00} & -2g_{01}g^{11} \\ g_{01}g^{00} & g_{11}g^{00} & 4 - 2g_{11}g^{11} \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Esperamos que M' seja regular e, neste caso, para o cálculo da inversa é suficiente conhecer a inversa de $B(x)$. Contudo, seu determinante é dado por

$$\det B = 4 \left(2 - g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \right), \quad (6.26)$$

que é identicamente nulo em duas dimensões, em razão da identidade $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = d$. Temos, assim, o problema da existência da relação $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} - 2 = 0$, que é um vínculo relacionado ao fato de que introduzimos na teoria os componentes covariantes da métrica. Este vínculo poderia ser integrado à ação com um multiplicador de Lagrange, mas isso não se mostra realmente necessário. Em vez disso, vamos escolher uma submatriz mais restrita, por exemplo, considerando o conjunto $(\phi_{01}, \phi_{11}, \phi_0^{01}, \phi_1^{01})$. A matriz dos parênteses de Poisson desse conjunto vem a ser

$$M''(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & A(x, y) \\ -A^T(x, y) & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

em que

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{-g} g^{00} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{01} & g_{11} \end{pmatrix} \delta(x - y). \quad (6.28)$$

Neste caso, podemos verificar que ambos A' e M'' são regulares. Note que a partir de (6.28) podemos escrever

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sqrt{-g} g^{00} g_{\alpha\beta} \delta(x - y). \quad (6.29)$$

6.4 A inversa de M'' e os parênteses generalizados

A inversa de $M''(x, y)$ é simples de ser obtida, requerendo apenas métodos algébricos. Temos, portanto,

$$(M'')^{-1} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & -(A^T)^{-1} \\ A^{-1} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Como $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, precisamos apenas da inversa de A , que é dada por

$$A^{-1} = \frac{4}{\sqrt{-g}} \frac{1}{g^{00}} \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} \\ g^{01} & g^{11} \end{pmatrix} \delta(x - y). \quad (6.31)$$

Assim como em (6.29), podemos denotar os componentes da matriz inversa (6.31) por

$$A^{\alpha\beta} = \frac{4}{\sqrt{-g}} \frac{1}{g^{00}} g^{\alpha\beta} \delta(x - y). \quad (6.32)$$

Por uma questão de conveniência, vamos redefinir o conjunto de geradores que dá origem à matriz (6.27) por

$$H_0^1 \equiv \phi_{01}, \quad H_1^1 \equiv \phi_{11}, \quad H_0^2 \equiv \phi_0^{01}, \quad H_1^2 \equiv \phi_1^{01}.$$

Dessa forma, podemos reescrever

$$M_{\alpha\beta}^{IJ} \equiv \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & A_{\alpha\beta} \\ -A_{\alpha\beta} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

$$(M^{-1})_{IJ}^{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & -A^{\alpha\beta} \\ A^{\alpha\beta} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

com $I = 1, 2$ e $\alpha, \beta = 0, 1$.

Com (6.34) definimos os parênteses generalizados

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}^* &= \{F(x), G(y)\} \\ &\quad - \int dz dw \{F(x), H_\alpha^I(z)\} (M''^{-1})_{IJ}^{\alpha\beta}(z, w) \{H_\beta^J(w), G(y)\}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Usando a relação (6.35), podemos definir as relações fundamentais

$$\begin{aligned} \left\{ g^{\alpha\beta}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right\}^* &= -\frac{4}{\sqrt{-g}} \frac{\Delta_{\mu\nu}^{01}}{g^{00}} \left[\delta_0^\lambda \left[\Delta_{01}^{\alpha\beta} g^{00} + \Delta_{11}^{\alpha\beta} g^{01} \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta_1^\lambda \left[\Delta_{01}^{\alpha\beta} g^{01} + \Delta_{11}^{\alpha\beta} g^{11} \right] \right] \delta(x-y), \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\left\{ g^{\alpha\beta}, \pi_{\mu\nu} \right\}^* = \Delta_{\mu\nu}^{00} \frac{g^{\alpha\beta}}{g^{00}} \delta(x-y), \quad (6.37)$$

$$\left\{ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \pi_\lambda^{\mu\nu} \right\}^* = \delta_\lambda^\gamma \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \delta(x-y). \quad (6.38)$$

Por construção, os geradores usados na construção de M'' têm parênteses generalizados nulos com qualquer função do espaço de fase. Contudo, devemos verificar os demais geradores. Se forem integráveis, eles devem obedecer uma álgebra de Lie com (6.35).

Podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \left\{ \phi_{\alpha\beta}, \phi_{\mu\nu} \right\}^* &= 0, \\ \left\{ \phi_{\alpha\beta}, \phi_\lambda^{\mu\nu} \right\}^* &= \Delta_{\alpha\beta}^{00} \sqrt{-g} \left[1 - \frac{d}{2} \right] \left[\frac{g^{\mu\nu}}{g^{00}} \delta_\lambda^0 - \frac{g^{\tau 0}}{g^{00}} \Delta_{\lambda\tau}^{\mu\nu} \right] \delta(x-y) = 0, \\ \left\{ \phi_{\gamma'}^{\alpha\beta}, \phi_\lambda^{\mu\nu} \right\}^* &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema $(\phi_{\alpha\beta}, \phi_\lambda^{\mu\nu})$ está em involução entre si para $d = 2$.

Os parênteses dos geradores com ϕ_0 , por outro lado, são dados por

$$\begin{aligned} \left\{ \phi_{\alpha\beta}, \phi_0 \right\}^* &= -\Delta_{\alpha\beta}^{00} \sqrt{-g} \frac{g^{\mu\nu}}{g^{00}} \left[1 - \frac{1}{2} d \right] \left[\Delta_{\mu\nu}^{1\rho} \Gamma_{\rho\lambda,1}^\lambda \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{\mu\nu,1}^1 - \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Delta_{\mu\nu}^{\rho\tau} \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda \Gamma_{\tau\lambda}^\sigma \right] \delta(x-y) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\{ \phi_0^{11}, \phi_0 \right\}^* &= \left[\partial_1 (\sqrt{-g} g^{01}) + \sqrt{-g} (g^{00} \Gamma_{01}^1 + g^{11} \Gamma_{11}^0) \right] \delta(x-y), \\ \left\{ \phi_0^{00}, \phi_0 \right\}^* &= \left[-\partial_1 (\sqrt{-g} g^{00}) - \sqrt{-g} (g^{00} (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) - 2g^{01} \Gamma_{11}^0) \right] \delta(x-y), \\ \left\{ \phi_1^{00}, \phi_0 \right\}^* &= \left[\partial_1 (\sqrt{-g} g^{11}) - \sqrt{-g} (g^{11} (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) + 2g^{01} \Gamma_{01}^1) \right] \delta(x-y). \end{aligned}$$

Assim, $\phi_{\alpha\beta}$ têm suas condições de integrabilidade satisfeitas. Contudo, as relações envolvendo $\phi_\gamma^{\mu\nu}$ propõem novos geradores, dados por

$$\chi_1 \equiv \partial_1 (\sqrt{-g} g^{01}) + \sqrt{-g} [g^{00} \Gamma_{01}^1 + g^{11} \Gamma_{11}^0], \quad (6.39)$$

$$\chi_2 \equiv -\partial_1 (\sqrt{-g} g^{00}) - \sqrt{-g} [g^{00} (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) - 2g^{01} \Gamma_{11}^0], \quad (6.40)$$

$$\chi_3 \equiv \partial_1 (\sqrt{-g} g^{11}) - \sqrt{-g} [g^{11} (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) + 2g^{01} \Gamma_{01}^1]. \quad (6.41)$$

Para ϕ_1^{11} ,

$$\{\phi_1^{11}, \phi_0\}^* = \frac{1}{g^{00}} [g^{11}\chi_1 - 2g^{01}\chi_3] \delta(x-y),$$

que é uma combinação linear do conjunto $\chi_A \equiv (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ e não consiste em um novo gerador.

As funções χ_A , assim como os geradores originais da teoria, devem obedecer as condições de integrabilidade de Frobenius. Para tal, calculamos

$$\{\chi_A, \phi_{\alpha\beta}\}^* = 0, \quad \{\chi_A, \phi_\lambda^{\mu\nu}\}^* = 0, \quad (6.42)$$

e

$$\{\chi_1, \chi_2\}^* = -\chi_2 \delta(x-y), \quad (6.43)$$

$$\{\chi_1, \chi_3\}^* = \chi_3 \delta(x-y), \quad (6.44)$$

$$\{\chi_2, \chi_3\}^* = 2\chi_1 \delta(x-y). \quad (6.45)$$

Ainda devemos calcular as condições de integrabilidade $\{\chi_A, \phi_0\}^* = 0$. Contudo, podemos mostrar que a densidade Hamiltoniana desse sistema é uma combinação linear desses geradores:

$$\mathcal{H}_0 = (\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0) \chi_1 - \Gamma_{00}^1 \chi_2 - \Gamma_{01}^0 \chi_3. \quad (6.46)$$

Assim, todas as condições de integrabilidade são satisfeitas. Portanto, com a definição dos parênteses (6.35), os geradores $\phi_0, \phi_{\alpha\beta}, \phi_\gamma^{\alpha\beta}$ e χ_A estão em involução e o sistema de Hamilton-Jacobi da teoria é completamente integrável.

Vamos usar a transformação

$$\sigma_1 \equiv \frac{1}{2} (\chi_3 + \chi_2), \quad \sigma_2 \equiv \frac{1}{2} (\chi_3 - \chi_2), \quad \sigma_3 \equiv \chi_1, \quad (6.47)$$

que resulta nas relações

$$\{\sigma_1, \sigma_2\}^* = \sigma_3, \quad \{\sigma_3, \sigma_1\}^* = \sigma_2, \quad \{\sigma_2, \sigma_3\}^* = -\sigma_1. \quad (6.48)$$

Com respeito aos parênteses generalizados, os geradores σ_A fecham uma álgebra de Lie do grupo $SO(2,1)$ com funções de estrutura constantes.

Agora, vamos considerar a densidade de métrica $h^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}$ e a derivada

$$D_\gamma h^{\alpha\beta} \equiv \partial_\gamma h^{\alpha\beta} + 2\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} h^{\mu\sigma} \Gamma_{\gamma\sigma}^\nu - h^{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma\mu}^\mu. \quad (6.49)$$

A derivada (6.49) é a derivada covariante para uma densidade tensorial de segunda ordem.

Por cálculo direto, podemos mostrar que as equações de Hamilton-Jacobi $\chi_A = 0$ podem ser escritas como

$$D_1 h^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.50)$$

Nos resta, agora, calcular as equações de campo da teoria.

6.5 As equações características

Para analisar as equações canônicas, usaremos a lei de evolução

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= \int dy \{F(x), \phi_0(y)\}^* \delta t \\ &\quad + \int dy \{F(x), \phi_{\alpha\beta}(y)\}^* \delta \omega^{\alpha\beta}(y) + \int dy \{F(x), \phi_{\gamma}^{\alpha\beta}(y)\}^* \delta \omega_{\alpha\beta}^{\gamma}(y) \\ &\quad + \int dy \{F(x), \chi_A(y)\}^* \delta \omega^A(y). \end{aligned} \quad (6.51)$$

em que ω representa o conjunto de variáveis independentes. Desde já, sabemos que $\omega^{\alpha\beta}$ estão relacionados com $g^{\alpha\beta}$, enquanto $\omega_{\alpha\beta}^{\gamma}$ estão relacionados com $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$. Contudo, a necessidade de imposição das equações $\chi_A = 0$ para assegurar a integrabilidade da teoria nos obriga a expandir o espaço das variáveis independentes, com a adição das funções ω^A . Como o conjunto $(\phi_{01}, \phi_{11}, \phi_0^{01}, \phi_1^{01})$ não está em involução pelos parênteses de Poisson, os parênteses generalizados que envolvem esses geradores é nulo por construção, mas (6.51), que envolve todos os geradores, é conveniente para escapar de problemas referentes a simetrias dos índices.

Com o uso das relações (6.36), (6.37) e (6.38), podemos empregar (6.51). A equação para g^{00} é

$$\delta g^{00}(x) = \delta \omega^{00}(x), \quad (6.52)$$

o que confirma que $\omega^{00} = g^{00}$ a menos de uma constante de integração. Já a variável g^{01} tem equação característica

$$\begin{aligned} \delta g^{01} &= - \left[g^{00} \Gamma_{00}^1 + g^{01} (\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0) + g^{11} \Gamma_{01}^0 - 2 \frac{g^{01}}{g^{00}} g^{01} \Gamma_{01}^0 - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\chi_3 - \frac{g^{01}}{g^{00}} \chi_1 \right] \right] \delta t \\ &\quad + \frac{g^{01}}{g^{00}} \delta g^{00} - g^{01} \delta \omega^1 + g^{00} \delta \omega^2 + \frac{1}{g^{00}} [g^{11} g^{00} - 2 g^{01} g^{01}] \delta \omega^3. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Obviamente, as equações $\chi_3 = 0$ e $\chi_1 = 0$ são válidas, de modo que a dependência com relação a esses geradores na verdade é nula. Podemos também escrever esta equação em forma de

equação canônica:

$$\begin{aligned}\partial_0 g^{01} = & -g^{00}\Gamma_{00}^1 - g^{01}(\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0) - g^{11}\Gamma_{01}^0 + 2\frac{g^{01}}{g^{00}}g^{01}\Gamma_{01}^0 \\ & + \frac{g^{01}}{g^{00}}\partial_0 g^{00} - g^{01}\dot{\omega}^1 + g^{00}\dot{\omega}^2 + \frac{1}{g^{00}}[g^{11}g^{00} - 2g^{01}g^{01}]\dot{\omega}^3,\end{aligned}\quad (6.54)$$

em que $\dot{\omega} \equiv \partial_0 \omega$.

A equação que envolve g^{11} é obtida por

$$\begin{aligned}\delta g^{11} = & -2\left[g^{01}\Gamma_{00}^1 + g^{11}(\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0) - g^{01}\frac{g^{11}}{g^{00}}\Gamma_{01}^0 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{1}{g^{00}}[g^{01}\chi_3 - g^{11}\chi_1]\right]\delta t \\ & + \frac{g^{11}}{g^{00}}\delta g^{00} - 2g^{11}\delta\omega^1 + 2g^{01}\delta\omega^2 - 2\frac{g^{01}g^{11}}{g^{00}}\delta\omega^3.\end{aligned}\quad (6.55)$$

Novamente, descartando termos lineares em χ_A , temos a equação

$$\begin{aligned}\partial_0 g^{11} = & -2g^{01}\Gamma_{00}^1 - 2g^{11}(\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0) + 2\frac{g^{01}}{g^{00}}g^{11}\Gamma_{01}^0 \\ & + \frac{g^{11}}{g^{00}}\partial_0 g^{00} - 2g^{11}\dot{\omega}^1 + 2g^{01}\dot{\omega}^2 - 2\frac{g^{01}g^{11}}{g^{00}}\dot{\omega}^3.\end{aligned}\quad (6.56)$$

As equações (6.54) e (6.56) são as equações que ditam como os campos g^{01} e g^{11} variam na direção do eixo x^0 e formam uma família de equações que dependem de quatro parâmetros. Esses parâmetros são dados pelas derivadas temporais de ω^{00} e ω^A , que são variáveis independentes da teoria. Para que a análise seja completa, necessitamos que essas equações canônicas sejam consistentes com as equações de campo. Neste ponto vamos fazer esta análise para as equações (6.52), (6.54) e (6.56).

As equações de campo na descrição de Palatini referentes à integral (6.10) são encontradas a partir de sua primeira variação com relação às variáveis $g^{\alpha\beta}$ e $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ independentemente. A variação com relação à conexão afim [6] resulta nas equações

$$D_\gamma h^{\alpha\beta} - \Delta_{\gamma\mu}^{\alpha\beta} D_\lambda h^{\lambda\mu} = 0. \quad (6.57)$$

Partir das equações características para mostrar que elas obedecem (6.57) é uma tarefa bastante árdua. Portanto, vamos fazer o caminho inverso. Para h^{00} temos

$$D_\gamma h^{00} - \delta_\gamma^0 D_\lambda h^{\lambda 0} = 0.$$

Note que para $\gamma = 1$ temos $D_1 h^{00} = 0$. Para $\gamma = 0$, temos

$$D_0 h^{00} - D_\lambda h^{\lambda 0} = -D_1 h^{01} = 0.$$

Vamos analisar a equação para h^{01} :

$$D_\gamma h^{01} - \frac{1}{2} \delta_\gamma^0 D_\lambda h^{\lambda 1} - \frac{1}{2} \delta_\gamma^1 D_\lambda h^{\lambda 0} = 0.$$

Se tomarmos $\gamma = 1$, chegamos na equação

$$D_1 h^{01} - D_0 h^{00} = 0.$$

Considerando $D_1 h^{01} = 0$, temos $D_0 h^{00} = 0$. Com $\gamma = 0$ temos

$$D_0 h^{01} - D_1 h^{11} = 0. \quad (6.58)$$

Para h^{11} , podemos obter as equações

$$D_\gamma h^{11} - \delta_\gamma^1 D_\lambda h^{\lambda 1} = 0,$$

que resultam diretamente em $D_0 h^{11} = 0$ e $D_0 h^{01} = 0$. Portanto, (6.58) é na verdade $D_1 h^{11} = 0$. De tudo isso, aprendemos simplesmente que, se

$$D_\gamma h^{\alpha\beta} = 0, \quad (6.59)$$

as equações (6.57) são satisfeitas. Sabemos que $D_1 h^{\alpha\beta} = 0$ equivalem às equações $\chi_A = 0$: os geradores advindos das condições de integrabilidade equivalem a parte das equações de campo para $\gamma = 1$. As equações restantes, $D_0 h^{\alpha\beta} = 0$, com o uso da definição (6.49), equivalem ao sistema

$$[2 - g_{00} g^{00}] \partial_0 g^{00} - 2g_{01} g^{00} \partial_0 g^{01} - g_{11} g^{00} \partial_0 g^{11} + 2g^{00} (\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{01}^1) + 4g^{01} \Gamma_{01}^0 = 0, \quad (6.60)$$

$$g_{00} g^{01} \partial_0 g^{00} - 2g_{00} g^{00} \partial_0 g^{01} - g_{01} g^{00} \partial_0 g^{11} - 2g^{00} \Gamma_{00}^1 - 2g^{11} \Gamma_{01}^0 = 0, \quad (6.61)$$

$$g_{00} g^{11} \partial_0 g^{00} + 2g_{01} g^{11} \partial_0 g^{01} - [2 - g_{00} g^{00}] \partial_0 g^{11} + 2g^{11} (\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{01}^1) - 4g^{01} \Gamma_{00}^1 = 0. \quad (6.62)$$

Essas equações são de primeira ordem, o que já deveria ser esperado, já que a não há derivadas da métrica na ação. Se a análise que nos levou às equações (6.52), (6.54) e (6.56) for consistente, devemos esperar que este sistema seja subdeterminado, ou seja, que a matriz dos coeficientes, dada por

$$N \equiv \begin{pmatrix} [2 - g_{00} g^{00}] & -2g_{01} g^{00} & -g_{11} g^{00} \\ g_{00} g^{01} & -2g_{00} g^{00} & -g_{01} g^{00} \\ g_{00} g^{11} & -2g_{00} g^{01} & -[2 - g_{00} g^{00}] \end{pmatrix},$$

seja singular. Este é realmente o caso, considerando-se a identidade $g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$.

Vamos tomar as equações (6.60) e (6.61). Podemos escrevê-las como

$$\partial_0 g^{11} = \frac{2 - g_{00} g^{00}}{g_{11} g^{00}} \partial_0 g^{00} + 2 \frac{g^{01}}{g^{00}} \partial_0 g^{01} + 2 \frac{1}{g_{11}} (\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{01}^1) + 4 \frac{g^{01}}{g_{11} g^{00}} \Gamma_{01}^0, \quad (6.63)$$

$$\partial_0 g^{01} = \frac{1}{2} \frac{g^{01}}{g^{00}} \partial_0 g^{00} + \frac{1}{2} \frac{g^{01}}{g^{11}} \partial_0 g^{11} - \frac{1}{g_{00}} \Gamma_{00}^1 - \frac{1}{g_{11}} \Gamma_{01}^0. \quad (6.64)$$

Ao substituir uma na outra, obtemos

$$\partial_0 g^{11} = \frac{g^{11}}{g^{00}} \partial_0 g^{00} - 2g^{01} \Gamma_{00}^1 + 2g^{11} (\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{01}^1) + 2 \frac{g^{01} g^{11}}{g^{00}} \Gamma_{01}^0, \quad (6.65)$$

$$\partial_0 g^{01} = \frac{g^{01}}{g^{00}} \partial_0 g^{00} - g^{00} \Gamma_{00}^1 + g^{01} (\Gamma_{00}^0 - \Gamma_{01}^1) - g^{11} \Gamma_{01}^0 + 2 \frac{g^{01}}{g^{00}} g^{01} \Gamma_{01}^0. \quad (6.66)$$

Na comparação de (6.65) e (6.66) com (6.54) e (6.56) vemos que as equações características são equivalentes às equações $D_0 h^{\alpha\beta} = 0$ a menos de combinações lineares de derivadas das variáveis independentes ω^A . As equações $D_\gamma h^{\alpha\beta} = 0$ têm como consequência direta a não observância da condição de metricidade em duas dimensões e, portanto, não podemos relacionar univocamente os componentes da conexão afim aos símbolos de Christoffel [6].

Dessa forma, as equações características da teoria formam uma família de equações diferenciais totais, das quais as equações de Euler-Lagrange (6.57) são um membro dessa família, caracterizado pela observância das condições $\dot{\omega}^A = 0$.

Novamente a menos de combinações lineares de $\dot{\omega}^A$, as equações canônicas para $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são dadas por

$$\begin{aligned} \Gamma_{01,0}^0 &= \Gamma_{00,1}^0 - \Gamma_{01,1}^1 + \Gamma_{11,0}^1 + 2\Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^0 - 2\Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^1 \\ &\quad + 2 \frac{g^{01}}{g^{00}} [\Gamma_{01,1}^0 - \Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{01}^0 (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) + \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0)], \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01,0}^1 &= \Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{01}^1 (\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0) - \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) \\ &\quad + \frac{g^{11}}{g^{00}} [-\Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{01,1}^0 + \Gamma_{01}^0 (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^1) + \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0)], \end{aligned} \quad (6.68)$$

assim como

$$\delta \Gamma_{00}^\lambda = \delta \omega_{00}^\lambda, \quad \delta \Gamma_{11}^\lambda = \delta \omega_{11}^\lambda. \quad (6.69)$$

As equações para $\Gamma_{01,0}^0$ e $\Gamma_{01,0}^1$ podem ser reescritas com o tensor de Ricci:

$$g^{00} R_{(01)} + g^{01} R_{11} = 0, \quad (6.70)$$

$$g^{00} R_{00} - g^{11} R_{11} = 0, \quad (6.71)$$

em que $R_{(\alpha\beta)} \equiv 1/2 (R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha})$. Em razão do fato de o traço da conexão ser uma 1-forma

arbitrária em duas dimensões, o tensor de Ricci não é simétrico. A solução tensorial para este sistema de equações possui apenas um componente independente, como esperado. Comparando essas equações com as equações de Einstein sem fontes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \tag{6.72}$$

que são obtidas com a variação da ação com relação à conexão afim, notamos que a contração desta equação com $g^{\gamma\mu}$ é equivalente ao sistema (6.70,6.71). As equações de campo obtidas pelo formalismo de Hamilton-Jacobi são, portanto, equivalentes às equações de Einstein parcialmente contraídas na ausência de fontes, desde que as variáveis ω^A sejam escolhidas convenientemente.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation*, Phys. Rev. **114**, 924-930 (1958).
P. A. M. Dirac, *The theory of gravitation in Hamiltonian form*, Proc. R. Soc. of London A **246**, 333-343 (1958).
- [2] R. Jackiw, *Lower dimensional gravity*, Nucl. Phys. B **252**, 343-356 (1985).
- [3] D. Grumiller, W. Kummer & D. V. Vasilevich, *Dilaton gravity in two dimensions*, Phys. Rep. **369**, 327-430 (2002).
- [4] E. Martinec, *Soluble systems in quantum gravity*, Phys. Rev. D **30**, 1198-1204 (1984).
M. Henneaux, *Quantum gravity in two dimensions: Exact solution of the Jackiw model*, Phys. Rev. Lett. **54**, 959-962 (1985).
D. Louis-Martinez, J. Gegenberg & G. Kunstatter, *Exact Dirac quantization of all 2 – D dilaton gravity theories*, Phys. Lett. B **27**, 193-198 (1994).
- [5] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields, Fourth revised english edition*, Butterworth-Heinemann, Burlington (1975).
- [6] S. Deser, *Inequivalence of first and second-order formulations in $D = 2$ gravity models*, Found. Phys. **26**, 617-621 (1996).

Considerações finais

Os resultados fundamentais deste trabalho sobre a teoria de Hamilton-Jacobi aplicada a teorias de campos com derivadas de ordem superior estão basicamente concentrados nos capítulos 3 e 4. Contudo, o caminho percorrido nos dois capítulos iniciais trouxe alguns aspectos matematicamente interessantes sobre essas teorias, todos bem conhecidos, mas que não constam em uma literatura acessível sobre o cálculo variacional. Podemos citar, por exemplo, o estudo das condições de fronteira do problema variacional no capítulo 1 e a formulação completa dos teoremas de Noether. O aspecto mais intrigante talvez seja o fato de que, com a definição da derivada de Lagrange (1.27), todas as expressões adquirem aspecto bastante simples e tratável, de modo que a generalização dos sistemas de primeira ordem para aqueles de ordem superior torna-se imediata. Nesse primeiro capítulo, especialmente, usamos o problema variacional para deduzir a forma do tensor densidade de energia-momento canônico (1.25), que tornou-se uma quantidade fundamental durante todo o trabalho. Através dele somos capazes não só de deduzir uma expressão para os momentos canônicos covariantes (2.30), como também a forma da Hamiltoniana canônica (3.1) no formalismo parametrizado, no capítulo 3. A cadeia de relações nos levou, também, a uma forma geral e consistente de definição dos momentos não covariantes.

No capítulo 2 estabelecemos um bom laboratório para o estudo do formalismo de Hamilton-Jacobi para campos, com a tentativa de manter a covariância explícita dessas teorias. Este, contudo, é um programa ainda em aberto e de difícil tratamento. Vimos que a teoria desenvolvida nesses moldes não pode ser aplicada a sistemas relativísticos, já que a equação de Hamilton-Jacobi torna-se uma identidade trivial. Este problema pode ser rastreado à escolha de Weyl de integrais equivalentes, que nos garante a existência de campos geodésicos para Lagrangianas explicitamente dependentes do ponto do espaço-tempo, mas colapsa no caso conservativo. Contudo, a existência de outras definições para campos geodésicos em teorias

de campos poderia resolver este problema, o que pode ser um tema de pesquisa futuro. Ainda nesse capítulo, vimos como podemos deduzir as equações características em forma covariante e como essas equações evidenciam a existência de parênteses de Poisson. Esta linha de investigação também pode ser seguida futuramente, já que um formalismo simplético completo e autoconsistente ainda necessita ser formulado para esses sistemas.

No capítulo 3, seguindo o mesmo roteiro já apresentado no capítulo anterior, escolhemos uma determinada foliação do espaço-tempo que nos permitiu formular uma teoria de Hamilton-Jacobi com duas qualidades fundamentais. Primeiro, a escolha de parametrização eliminou o problema da trivialidade da equação de Hamilton-Jacobi covariante em teorias invariantes por reparametrizações. Segundo, a teoria abriga com naturalidade sistemas singulares, ou não Hessianos. Essa formulação, em que os campos são tratados como distribuições sobre hiper-superfícies de Cauchy (ou características no caso da dinâmica no cone de luz), mostrou-se bastante similar à teoria de Carathéodory para a mecânica clássica, assim como à extensão provida por Güler para sistemas singulares. Sistemas não Hessianos de dimensão n e posto p são, como mostrado, caracterizados por um sistema de $k(r+1)$ equações funcionais (3.24) para a função S , em que r é o número de autovalores nulos da matriz Hessiana. Cada equação está relacionada a uma variável independente e estas formam um espaço de parâmetros que é um subespaço do espaço de configuração. Relacionadas às equações de Hamilton-Jacobi estão as equações características (3.27) e (3.30), cujas soluções são parametrizadas pelas variáveis independentes $\phi_{[m]}^\alpha$ e determinam um espaço de fase $T^*\bar{\mathbb{Q}}_p$ coberto pelas variáveis dependentes $(\phi_{[m]}^{\alpha'}, p_{\alpha'}^m)$. Através das equações características fomos capazes de evidenciar a estrutura dos parênteses de Poisson (3.41) e de construir os campos vetoriais Hamiltonianos (3.52) geradores dos fluxos Hamiltonianos do sistema.

No capítulo 4 estudamos o papel das equações de Hamilton-Jacobi como geradores da dinâmica através de sua integrabilidade. Vimos que esses geradores devem fechar uma álgebra de Lie abeliana com os parênteses de Poisson para que definam uma teoria integrável e, na seção 4.5, generalizamos esta condição para o caso não abeliano, que chamamos genericamente de condição de Frobenius. Como geradores de uma álgebra de Lie, as funções Φ_α^m são também integrais de movimento. Através do estudo da estrutura simplética do formalismo vimos que os fluxos Hamiltonianos gerados pelos vetores X_α^m são transformações canônicas infinitesimais. Por consequência, são também transformações de simetria. Mostramos que sistemas não Hessianos definem naturalmente uma estrutura simplética reduzida natural, denotada pela 2-forma ω_p , e que os vetores X_α^m são os autovetores nulos da 2-forma ω . Com essa visão geométrica, fomos capazes de estudar a relação entre as transformações canônicas geradas pelos campos Hamiltonianos e transformações de simetria a nível Lagrangiano, especialmente as transformações de gauge. Como resultado mais importante nessa investigação, encontramos a equação (4.52), que relaciona os parâmetros das transformações canônicas aos parâmetros das transformações de gauge locais. Na seção 4.6 apresentamos o método que

desenvolvemos em [1] para a análise de sistemas não Hessianos, baseado nas condições de integrabilidade de Frobenius. A definição dos parênteses generalizados, quando da existência de geradores não involutivos, é o resultado mais importante deste tema. Com esse método, temos um procedimento autoconsistente para tornar integrável uma dada teoria e, por consequência, encontrar todos os seus geradores.

Nos dois últimos capítulos aplicamos com sucesso esse programa. No caso da teoria de Podolsky usamos a dinâmica do plano nulo, que é responsável pela existência de quatro geradores não involutivos, eliminados pelos parênteses generalizados (5.37). A análise de integrabilidade dos geradores restantes indicou a existência de um gerador secundário. Com a expansão do espaço dos parâmetros para permitir que este gerador fosse também um gerador da dinâmica da teoria, pudemos relacionar o conjunto completo de geradores, com a dinâmica dos parênteses de Poisson, ao gerador das transformações de gauge do grupo $U(1)$, através da equação (4.85). Com isso, construímos o gerador das transformações de gauge, dado pela equação (5.76).

No caso da ação de Einstein-Hilbert, em que trabalhamos na formulação de Palatini na dinâmica instantânea, a aplicação do formalismo foi capaz de construir uma teoria canônica cujas equações de campo reproduzem as equações de Einstein. Da mesma forma que a teoria de Podolsky, geradores não involutivos foram tratados com a adoção de parênteses generalizados e os demais geradores primários deram origem a novos geradores. Contudo, a análise da simetria de gauge dessa teoria ainda encontra-se em andamento, de modo que não pudemos apresentá-la aqui. No caso específico dessa teoria, produzimos o preprint [2].

No campo das perspectivas futuras, consideramos que a análise das relações entre os fluxos Hamiltonianos e as transformações de simetria Lagrangianas ainda é um campo fértil. Pretendemos levar este estudo adiante em duas frentes. A primeira segue a ideia de que as simetrias da integral fundamental de uma teoria se refletem em suas equações de Hamilton-Jacobi. Especificamente, pretendemos buscar um método geral de reconstrução das simetrias a partir dos geradores sem conhecimento prévio das transformações Lagrangianas. Outro caminho é o de implementar a fixação de gauge, bem como a transformação dos geradores não involutivos em geradores involutivos, evitando o uso dos parênteses generalizados. Ambos os caminhos pretendem ser uma rota para a melhor compreensão do processo de quantização não perturbativo de teorias de campos. A própria estrutura dos parênteses generalizados pode ser melhor explorada futuramente. Sistemas descritos por esses parênteses, que possuem relações de comutação fundamentais complicadas, devem poder ser descritos por coordenadas que transformem essas relações nas mesmas relações obedecidas com os parênteses de Poisson. Isto depende, claro, de uma análise do teorema de Darboux para sistemas não Hessianos. Como perspectiva imediata, estamos no término de dois trabalhos. O primeiro é uma análise da gravitação linearizada, enquanto o segundo consiste em uma análise da teoria de Yang-Mills topologicamente massiva.

Referências

- [1] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & C. E. Valcárcel, *Non-Involutive constrained systems and Hamilton-Jacobi formalism*, Ann. Phys. **323**, 3137–3149 (2008).
- [2] M. C. Bertin, B. M. Pimentel & P. J. Pompeia, *General Relativity in two dimensions: a Hamilton-Jacobi constraint analysis*, arXiv:0911.2120v1 [gr-qc] (2009).

