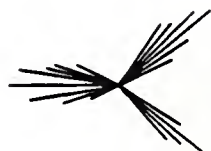




141



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/95

**Sobre a Reversão da Helicidade de Partículas de
Dirac de Spin $1/2$ no Contexto do Eletromagnetismo
de Ordem Superior**

Hatsumi Mukai

Orientador

Antônio José Accioly



Dezembro 1995

*Às minhas pais
Yoshiaki e Yochico
e meus irmãos
Yoshiharu e Hiroaki*

Agradecimentos

Em primeiro ao meu pai e mãe, por toda a compreensão e apoio durante a elaboração deste trabalho, por toda a paciência, confiança e por tudo o que me ensinaram.

A minha mãe e ao Anthoni por toda a paciência e atenção a qual recebi nesta fase final, e a família sempre tão atenciosa, pelas reuniões transmitidas.

Do Fraseki, Maria Luiza, Lúcia e pra Marion, pela amizade, pela carinho com a qual sempre me apoiaram e por toda a ajuda de inestimável valor destas anos de convivência.

Ao Alexander Lúcia, pela sugestão e fornecimento do programa computacional, por todo o apoio e pela alegria de convivência juntos.

Ao DFT (FT) pela participação dos Professores e amigos, Heitor, Evangelista, Alexandre, Malagutti, Evangelista, além por ter atendido e atendido aos meus pedidos de ajuda e pela amizade e apoio de todos os amigos.

Ao meu pai e mãe, por toda a compreensão e apoio durante a elaboração deste trabalho, por toda a paciência, confiança e por tudo o que me ensinaram.

Ao Prof. Lúcia, por toda a compreensão e apoio durante a elaboração deste trabalho, por toda a paciência, confiança e por tudo o que me ensinaram.

Ao amigo, Heitor, Lúcia, por toda a compreensão e apoio durante a elaboração deste trabalho, por toda a paciência, confiança e por tudo o que me ensinaram.

**Aos meus pais
Yoshiaki e Yochico
e meus irmãos
Yoshiharu e Hitomi**

Agradecimentos

Em especial ao orientador e amigo Accioly, pelo companheirismo na elaboração deste trabalho, por todo apoio, confiança e por tudo o que me ensinou.

À Mônica e ao Anthony, por todo carinho e atenção a qual recebi nesta fase final, e à Fátima sempre tão atenciosa, pelos recados transmitidos.

Ao Frenkel, Marie Louise, Luise e Sra Marion, pela amizade, pelo carinho com a qual sempre me apoiaram e por toda ajuda de inestimável valor destes anos de convivência.

Ao Alexander Levin, pela sugestão e fornecimento do programa computacional, por todo o carinho e pela alegria de sorrirmos juntos.

Ao DFI (FUEM), em particular aos Professores e amigos, Renio, Evangelista, Arlindo, Malacarne, Palangana e Maki por ter entendido e atendido aos meus pedidos de tempo, e pelo auxílio com os cursos acadêmicos.

Ao meu fiel escudeiro Renato C. Nery.

Ao Prof. Galeão, pelo período em que atuou como coordenador da pós-graduação.

Aos amigos, Kelma, Lígia, Prof. Guitman, Prof. Tyutin. Antônio Edson, Hugo,

Alberto, Fernando Miguel, Clóvis, Maria C. Tijero pelas palavras de incentivo e pela agradável convivência.

A todos professores e amigos deste instituto, bem como da física-matemática da USP pela amabilidade com que sempre me trataram.

Aos meus tios Novaru e Tuyako, Harto e Mutsumi, e a "mana" Estér, pelo carinho e apoio de sempre.

À Marina, Alexandre e Marcelo, pela amizade, e pelos serviços sempre prestativos da biblioteca.

À Rosane, Luzinete, Vilma e Laura, bem como ao Sr. Laércio, e Sr. José Francisco pelo agradável convívio e pelos serviços sempre prestativos das secretarias.

Ao pólo computacional, Maria José (Zezé) e Walter, e ao Centro Computacional da Faculdade São Francisco, pela atenção dada.

Ao Sr. Antônio Rubi, Sr. Sussumu, Sr. Jorge, Lurdes e Adriana pela amabilidade nesses anos de convivência.

Ao CNPq, Capes e Fapesp pelo apoio financeiro.

RESUMO

Estuda-se o problema da reversão da helicidade de uma partícula massiva de Dirac de spin $1/2$ interagindo com bósons massivos carregados de spin zero via troca de fótons descritos pelo eletromagnetismo de ordem superior de Podolsky. Mostra-se que estes férmions, tal como no eletromagnetismo de Maxwell, podem sofrer reversão de sua helicidade.

Key-words: Podolsky's higher-order electromagnetism, massive spin-

Palavras-chaves: Eletromagnetismo de ordem superior de Podolsky, partícula massiva de Dirac de spin $1/2$, reversão de helicidade.

Área(s) de Conhecimento: 1.05.03.01-3

ABSTRACT

The problem of the helicity flip of a massive spin-1/2 Dirac particle interacting with spin zero massive charged bosons via exchange of photons described by Podolsky's higher-order electromagnetism is studied. It is shown that these fermions, as in Maxwell's electromagnetism, may have their helicity flipped.

Key-words: Podolsky's higher-order electromagnetism, massive spin-1/2 Dirac-particle, helicity flip.

Índice

Introdução	9
1 Eletromagnetismo com Derivadas de Ordem Superior	
Via Relatividade Restrita	14
1.1 A Eletrostática de Podolsky Via Princípios Primeiros .	15
1.2 Generalização da Teoria Eletrostática de Podolsky Via	
Relatividade Restrita	17
1.3 Forças e Observáveis	22
1.4 Algumas Observações	23
2 A Lei da Força para a Eletrodinâmica de Podolsky	
Via Potencial Efetivo Não-Relativístico	25
2.1 A Lagrangiana para a Teoria de Podolsky	26
2.2 O Potencial Efetivo Não-Relativístico	31
2.3 A Lei da Força	37
3 Reversão da Helicidade de Partículas de Dirac de Spin	

1/2 no Contexto do Eletromagnetismo de Podolsky	39
3.1 Polarização no Espalhamento de Elétrons no Contexto da Eletrodinâmica de Podolsky	40
3.1.1 Reversão do Spin do Elétron	42
3.2 Partículas de Dirac de Spin 1/2	49
Epílogo	56
A Propriedades das Matrizes Gama	59
B Variáveis de Mandelstam no sistema de laboratório	61
Referências	63

Introdução

Apesar da maioria dos sistemas físicos ser descrita por lagrangianas que dependem no máximo de derivadas primeiras, tem havido um contínuo interesse na utilização de lagrangianas de ordem superior como correções pretendidas às de primeira ordem; quer para generalizá-las ou para eliminar destas teorias alguma propriedade indesejável. Neste sentido são dignos de nota os trabalhos de Podolsky^[1-4] no âmbito do eletromagnetismo e o de Weyl^[5] e Eddington^[6] no contexto da gravitação.

Podolsky propôs uma eletrodinâmica generalizada baseada na lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\mu\lambda} \quad ,$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ e a é uma constante com dimensão de comprimento. Esta lagrangiana gera uma teoria de campo linear, com simetria de gauge do tipo $U(1)$, e que para $a = 0$ se reduz à teoria de Maxwell. Trata-se evidentemente de uma teoria de ordem

mais alta já que as equações de movimento derivadas da lagrangiana acima contém derivadas quárticas do potencial vetor. A motivação de Podolsky ao propor esta eletrodinâmica de ordem superior era evitar divergências tais como a auto-energia infinita de uma carga pontual.

Weyl e Eddington, por sua vez, adicionaram à ação de Einstein-Hilbert termos quadráticos na curvatura de modo a estender a teoria da relatividade geral. Esta teoria de gravitação de quarta ordem é descrita pela ação

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right]$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$ e α e β são constantes adimensionais. É interessante notar que os termos de ordem superior tem uma influência negligenciável no domínio de baixas frequências, palco dos experimentos clássicos^{[7],[8]}.

As derivadas quárticas no caso do eletromagnetismo (gravitação) levam a um propagador para o fóton (gráviton) que se comporta com k^{-4} para grandes momentos, evidenciando assim um melhor comportamento ultravioleta. Várias décadas após o surgimento destas teorias, Slavnov^[9] mostrou que, no caso das teorias de gauge, a introdução na lagrangiana de termos com derivadas mais altas é um dos

possíveis modos de regularizar teorias quânticas. Na verdade este é o único método conhecido até agora que preserva a supersimetria^[10]. Os fatos expostos nos mostram que estas teorias merecem ser investigadas em maior detalhe.

Neste trabalho vamos examinar a teoria de Podolsky em seus aspectos mais básicos, e analisar o problema da reversão da helicidade de um férmion - aqui considerado como uma partícula de Dirac de spin $1/2$ - no contexto desta teoria de ordem superior.

No Capítulo 1 deduzimos as equações de Podolsky via princípios primeiros^[11-12]. Para tanto postulamos que a lei de força para a interação eletrostática entre duas cargas Q e Q' seja dada, no sistema gaussiano, por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{QQ'}{4\pi} \left(\frac{1 - e^{-r/a}}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{ra} \right) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

onde a é uma constante real com dimensão de comprimento. A partir desta lei e admitindo que o princípio de superposição seja válido, construímos a eletrostática de Podolsky. Em sequência chegamos às equações de campo para a eletrodinâmica de Podolsky, impondo que as equações que descrevem a eletrostática Podolskyana sejam compatíveis com a relatividade especial.

No Capítulo 2 mostramos^[13] como chegar à lei de força postulada no Capítulo 1 a partir do potencial efetivo não-relativístico para à

interação de dois bósons massivos carregados de spin-zero, potencial este que se origina da troca de fótons descritos pela teoria de Podolsky. Para tal foi necessário discutir logo de início um problema básico da física: a existência de uma lagrangiana local para um dado conjunto de equações de campo. Analisamos a condição para a existência de tal lagrangiana e quando esta condição é satisfeita, como determinar a mesma. Esta análise nos permitiu não só mostrar que as equações de campo de Podolsky admitem uma lagrangiana, como também achar sua expressão.

No Capítulo 3 calculamos no âmbito da teoria de Podolsky e a nível de árvore, a probabilidade de reversão da helicidade de um férmion interagindo com uma partícula escalar massiva carregada via troca de fótons Podolskyanos^[14]. Os resultados são idênticos aos da teoria de Maxwell^[15], mostrando que o termo $\frac{1}{2}a^2 (\partial_\lambda F^{\mu\lambda})^2$ introduzido por Podolsky na lagrangiana de Maxwell, não afeta o cálculo da probabilidade de reversão da helicidade fermiônica.

No Epílogo, tecemos algumas considerações sobre o problema da reversão fermiônica no contexto da gravitação de ordem superior^[16].

Antes de terminarmos esta introdução gostaríamos de ressaltar que as derivadas de ordem superior aparecem de modo natural na formulação, em termos de supercampos, das teorias supersimétricas^[17].

O mesmo ocorre com a ação proposta por Polyakov ^[18] para a teoria de cordas.

Capítulo 1

Eletromagnetismo com Derivadas de Ordem Superior Via Relatividade Restrita

As equações para a teoria eletromagnética de ordem superior de Podolsky são obtidas generalizando-se as leis da eletrostática relativa a esta teoria de ordem mais alta, de modo que estas sejam consistentes com a relatividade especial.

1.1 A Eletrostática de Podolsky Via Princípios Primeiros

Capítulo 1

Eletromagnetismo com Derivadas de Ordem Superior Via Relatividade Restrita

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/a}}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{ra} \right] \frac{r}{r} \quad (1.1)$$

onde a é uma constante real com dimensão de comprimento. Deu-

As equações para a teoria eletromagnética de ordem superior de

Podolsky são obtidas generalizando-se as leis da eletrostática relativa

Da equação (1.1), segue-se que o campo elétrico $E(r)$ num ponto

a esta teoria de ordem mais alta, de modo que estas sejam consistentes^[1]

com a relatividade especial.

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/a}}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{ra} \right] \frac{r}{r} \quad (1.2)$$

onde a é uma constante real com dimensão de comprimento. Deu-

onde a é uma constante real com dimensão de comprimento. Deu-

$$\oint E \cdot dS = \begin{cases} 0 & \text{para } R/a \ll 1 \\ Q & \text{para } R/a \gg 1 \end{cases}$$

Tal fluxo, contrastando com o que acontece na eletrostática de Maxwell,

é finito na origem.

1.1 A Eletrostática de Podolsky Via Princípios Primeiros

Admitamos que em vez da usual Lei de Coulomb, a lei de força para a interação eletrostática entre duas cargas pontuais Q e Q' seja dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q Q'}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/a}}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{ra} \right] \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

onde a é uma constante real com dimensão de comprimento. Denominaremos esta lei de *Lei de Coulomb Generalizada*.

Da equação (1.1), segue-se que o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ num ponto $\mathbf{r}$ devido a uma carga Q situada na origem é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/a}}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{ra} \right] \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.2)$$

Note que o fluxo deste campo através de uma superfície esférica de raio R é dado por

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{para } R/a \ll 1, \\ Q & \text{para } R/a \gg 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Tal fluxo, contrariamente ao que acontece na eletrostática de Maxwell, é finito na origem.

Da lei de Coulomb generalizada e do princípio de superposição, segue-se que o campo eletrostático devido a uma distribuição de cargas de densidade $\rho(\mathbf{r})$ (vide Fig. 1.1) é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/a}}{R^2} - \frac{e^{-R/a}}{aR} \right] \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (1.3)$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

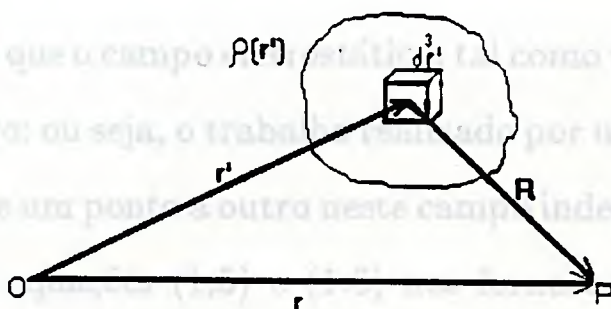


Figura 1.1: Geometria para a determinação do campo eletrostático em P originado pela densidade de carga eletrostática $\rho(\mathbf{r}')$.

De (1.3) vem

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{4\pi a^2} \frac{e^{-R/a}}{R}. \quad (1.4)$$

Utilizando a identidade

$$\nabla_r^2 \frac{e^{-R/a}}{R} = \frac{e^{-R/a}}{a^2 R} - 4\pi \delta^3(\mathbf{R})$$

na equação anterior, obtemos

$$(1 - a^2 \nabla^2) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r}) ; \quad (1.5)$$

equação esta que representa a generalização da *Lei de Gauss da Eletrostática de Maxwell*.

Tomando o rotacional de (1.3) tem-se

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad (1.6)$$

o que mostra que o campo eletrostático, tal como na teoria de Maxwell, é conservativo; ou seja, o trabalho realizado por uma carga-teste para se deslocar de um ponto a outro neste campo independe da trajetória.

O par de equações (1.5) e (1.6) nos fornece as *Leis Fundamentais da Eletrostática de Podolsky*. O próximo passo é torná-las compatíveis com a Relatividade Restrita.

1.2 Generalização da Teoria Eletrostática de Podolsky Via Relatividade Restrita

Iniciamos admitindo que a carga elétrica seja um escalar de Lorentz, o que implica de imediato em que a densidade de carga se transforme como a componente zero de um quadri-vetor¹. Este quadri-vetor é

¹A densidade de carga elétrica ρ é dada por

$$dq = \rho \, d^3x .$$

a densidade de corrente $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$); nossa convenção é $\hbar = c = 1$. Na verdade pode-se mostrar^[19] que se a carga de um elétron (ou próton) que se move a baixa velocidade variar como $q = e(1 + kv^2)$, onde $|k| \ll 1$ e v é a velocidade da carga em movimento, então $|k| < 8 \times 10^{-19}$. Por outro lado, Feynman^[20] mostrou, usando um argumento fundamentalmente devido a Einstein, que se algo se conserva, no caso a carga elétrica, este algo deve se conservar localmente. Consequentemente, fica assegurada a existência de uma equação de continuidade para a carga elétrica

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.7)$$

Evidentemente esta equação é válida para todos os referenciais de Lorentz.

Se $F^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, então $\partial_\nu F^{0\nu}$ se transforma como a componente zero de um quadri-vetor. Definamos então as quantidades:

$$F^{01} = E^1, \quad F^{02} = E^2, \quad F^{03} = E^3 \quad (1.10)$$

As outras componentes de $F^{\mu\nu}$ serão especificadas mais tarde. Temos então que a equação (1.5) pode ser reescrita como

Como dq é um escalar de Lorentz, temos que ρd^3x também o é. Sendo $d^4x = dx^0 d^3x$ um escalar de Lorentz segue-se que ρd^3x se transforma como d^4x ; o que implica em que ρ se transforme como a componente zero de um quadri-vetor.

$$(1 + a^2 \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta) \partial_\nu F^{0\nu} = j^0, \quad (1.8)$$

onde o tensor métrico contravariante $\eta^{\alpha\beta}$ é diagonal e tem componentes

$$\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1,$$

em nossa convenção. Note que ambos os membros de (1.8) se transformam como a componente zero de um quadri-vetor.

Estamos agora em posição de explorar o princípio de relatividade de Einstein, exigindo que a equação (1.8) seja invariante em relação às transformações de Lorentz. Como consequência, (1.8) torna-se

$$(1 + a^2 \square) \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (1.9)$$

onde $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu$.

De (1.9) obtemos

$$(1 + a^2 \square) \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

Evidentemente se $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, então (1.10) é identicamente nula. A bem da simplicidade vamos supor provisoriamente que $F^{\mu\nu}$ seja antissimétrico. Como é possível dar nome a quantidades para as quais ainda não conhecemos a interpretação física ou ainda não possuímos uma definição operacional que possibilita sua mensuração,

vamos denotar as componentes faltantes de $F^{\mu\nu}$ como

$$F^{12} = B^3 \quad , \quad F^{13} = -B^2 \quad , \quad F^{23} = B^1$$

e batizar o vetor $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$ de campo de indução magnética.

Consequentemente, $F^{\mu\nu}$ pode ser representado como se segue:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.11)$$

onde os E^i não são necessariamente estáticos.

Em termos do tensor completamente antissimétrico de ordem quatro $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, com $\varepsilon^{0123} = +1$, a equação (1.6) torna-se

$$\varepsilon^{ijk0} \partial_j F_{k0} = 0 \quad , \quad (1.12)$$

onde

$$F_{k0} = -F^{k0} = F^{0k} = E^k \quad .$$

A generalização covariante de (1.12) é

$$\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (1.13)$$

onde ${}^*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$, e o tensor $F_{\mu\nu}$ é definido como

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta} \quad .$$

As equações (1.9) e (1.13) são as equações de campo relativas à *eletrodinâmica generalizada de Podolsky*.

De (1.9) e (1.11) segue-se que:

1. • $\mu = 0$

Vamos considerar um físico que conhecesse somente a equação de Poisson $(1 + a^2 \square) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, poderia prever a existência de um campo magnético $\mathbf{B}$. Este físico iria evidentemente fazer as seguintes perguntas básicas: este campo é observável?

Como é produzido e mantido-o? Como o físico esta questão está familiarizado com a equação de Ampère-Maxwell $(1 + a^2 \square) \left[\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \mathbf{j}$.

Quando $a = 0$ essas equações nos fornecem as leis de Gauss e de Ampère-Maxwell, respectivamente.

De modo análogo, obtemos de (1.13) e (1.11) :

A forma covariante desta equação é

• $\mu = 0$

$$\frac{dp^\mu}{dt} = q \tilde{F}^{\mu\nu} u_\nu \quad (1.14)$$

onde o tensor potencial é dado por

• $\mu = 1, 2, 3$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad .$$

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu = (\gamma, -\gamma \mathbf{v})$$

1.3 Forças e Observáveis

Vimos anteriormente que um físico que conhecesse somente a eletrostática de Podolsky e a relatividade restrita, poderia prever a existência do campo de indução magnética $\mathbf{B}$. Este físico iria evidentemente se fazer duas perguntas básicas: este campo é observável? Como é possível reconhecê-lo? Como o físico em questão está familiarizado com a eletrostática de Podolsky, ele determina a equação de movimento para uma partícula de carga q e massa m em um campo eletrostático, escrevendo a segunda lei de Newton como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} . \quad (1.14)$$

A forma covariante desta equação é

$$\frac{dp^\nu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\mu , \quad (1.15)$$

onde o tempo próprio é dado por

$$d\tau = dt/\gamma , \quad \text{com} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2} ,$$

a quadri-velocidade por

$$u^\mu = (\gamma , \gamma \mathbf{v}) ,$$

e a quadri-velocidade covariante por

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu}u^\nu = (\gamma , -\gamma \mathbf{v}) .$$

De (1.15) seque-se que

- $\nu = 0$

$$\frac{dU}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad , \quad (1.16)$$

onde $U = p^0$ é a energia da partícula.

- $\nu = 1, 2, 3$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad , \quad (1.17)$$

que é a expressão usual da força de Lorentz.

Nosso físico hipotético encontra nestas equações a fenomenologia que lhe permitirá observar o campo $\mathbf{B}$, medi-lo, e distingui-lo do campo $\mathbf{E}$. O novo campo só se acopla a cargas em movimento, e, ao contrário da força elétrica, que é capaz de mudar a direção e a grandeza do momento da partícula, ele só pode mudar a sua direção.

1.4 Algumas Observações

Vimos como as equações de campo propostas por Podolsky podem ser obtidas formalmente a partir da generalização, via relatividade restrita, das equações da eletrostática de Podolsky.

Nesta dedução formal das equações de campo de Podolsky, admitimos que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, apelando para o critério de simplicidade, hábito bastante comum em física. Pode-se mostrar no entanto que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico^[21-23], sem apelar para o critério de simplicidade, utilizando-se a equação

$$F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0 ,$$

equação esta que se obtém por contração de (1.15) com u_ν .

Da mesma maneira que chegamos às equações de Podolsky a partir da lei de Coulomb generalizada, poderíamos ter tentado chegar às mesmas equações partindo da lei de Biot-Savart generalizada. Encontra-se em andamento um trabalho neste sentido^[12].

No capítulo que se segue vamos mostrar como chegar à lei de força que postulamos no início deste capítulo. Isto vai nos levar à discussão de uma questão fundamental da física, que é a existência de uma lagrangiana para uma dada equação de movimento.

2.1 A Lagrangiana para a Teoria de Podolsky

Capítulo 2

A Lei da Força para a Eletrodinâmica de Podolsky Via Potencial Efetivo Não-Relativístico

Obtém-se a lei da força para a eletrostática de Podolsky, calculando-se o potencial efetivo não-relativístico entre dois bósons massivos carregados de spin zero, o qual se origina da troca de fótons descritos pela teoria de Podolsky^[13].

2.1 A Lagrangiana para a Teoria de Podolsky

No capítulo anterior obtivemos as equações de campo para a teoria de Podolsky via princípios primeiros. Surge então a questão de saber se estas equações podem ser obtidas a partir de alguma lagrangiana. Na verdade, saber se existe uma lagrangiana associada a uma dada equação de movimento, e mais pragmaticamente, saber determiná-la caso ela exista, é uma questão de grande interesse para a teoria quântica de campos, onde os métodos de quantização, em sua maior parte, pressupõem a existência de uma lagrangiana. Será então que existe algum critério simples que nos permita decidir se uma dada equação de movimento admite uma lagrangiana? A resposta é afirmativa: existe uma lagrangiana local^[25-27] para um dado conjunto de equações de campo com uma forma de Euler¹ E , se esta forma for fechada, ou seja, se $\delta E = 0$. Seguem-se alguns exemplos.

¹Dado um conjunto de equações de campo $E_\mu[\phi(x)] = 0$, onde $\phi(x)$ representa um conjunto de campos, denominamos de forma de Euler a expressão

$$E[\phi] = E_\mu[\phi(x)] \delta\phi^\mu(x) .$$

Note que esta forma é exata. Por comodidade vamos escrever a expressão acima sem os argumentos, ou seja,

$$E = E_\mu \delta\phi^\mu .$$

(i) *Equação de Navier-Stokes*

A equação de Navier-Stokes é dada por

$$\rho v^j \partial_j v^i + \partial^i p - \mu \partial^j \partial_j v^i = 0 \quad , \quad (2.1)$$

juntamente com a equação de incompressibilidade

$$\partial_j v^j = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Ela descreve o comportamento de um fluido incompressível de densidade ρ e viscosidade μ . Os campos físicos de interesse são as componentes da velocidade v^j e a pressão p .

A forma de Euler é dada por

$$E = -(\rho v_j \partial^j v_i + \partial_i p - \mu \partial_j \partial^j v_i) \delta v^i + (\partial_j v^j) \delta p \quad . \quad (2.3)$$

Calculando a diferencial exterior de (2.3) vem

$$\begin{aligned} \delta E = & -\rho \delta(v_j \partial^j v_i) \wedge \delta v^i - \delta(\partial_i p) \wedge \delta v^i + \\ & + \mu \delta(\partial_j \partial^j v_i) \wedge \delta v^i + \delta(\partial_j v^j) \wedge \delta p \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Porém,

$$\bullet \delta(\partial_i p) \wedge \delta v^i = \partial_i \delta p \wedge \delta v^i = -\delta p \wedge \delta \partial_i v^i,$$

$$\bullet \delta(\partial_j v^j) \wedge \delta p = -\delta p \wedge \delta(\partial_j v^j),$$

$$\bullet \delta(\partial_j \partial^j v_i) \wedge \delta v^i = -\delta(\partial^j v_i) \wedge \delta(\partial_j v^i) = 0.$$

Logo:

$$\delta E = -\rho \delta(v_j \partial^j v_i) \wedge \delta v^i \neq 0 . \quad (2.4)$$

O termo não-lagrangiano é dado por $\rho v_j \partial^j v_i$. Tentar “conserver” a não-lagranginidade deste termo, afetaria os outros termos da equação.

Consequentemente a equação de Navier-Stokes não admite uma lagrangiana em relação aos campos físicos v e p .

(ii) Equação de Korteweg - de Vries (KdV)

Esta é dada por

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 , \quad (2.5)$$

onde os índices representam derivadas em relação a t e a x .

Da forma de Euler associada

$$E = (u_t - 6uu_x + u_{xxx}) \delta u , \quad (2.6)$$

vem que a diferencial exterior é dada por

$$\delta E = \delta u_t \wedge \delta u - 6\delta(uu_x) \wedge \delta u + \delta u_{xxx} \wedge \delta u .$$

Esta equação não possui lagrangiana em relação a u , visto que nenhum dos termos é nulo, ou seja, $\delta E \neq 0$. Mas, se fizermos a

mudança de variável $u = \varphi_x$, a equação (2.6) toma a forma

$$E = (\varphi_{tx} - 6\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{xxxx})\delta\varphi. \quad (2.7)$$

Calculando sua derivada exterior, obtemos

$$\begin{aligned} \delta E &= \delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi - 6\varphi_x (\delta\varphi_{xx} \wedge \delta\varphi) + \\ &- 6\varphi_{xx} (\delta\varphi_x \wedge \delta\varphi) + \delta\varphi_{xxxx} \wedge \delta\varphi. \end{aligned}$$

Uma análise individual dos termos nos leva a

- $\delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi = -\delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi \Rightarrow \delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi = 0,$
- $6\varphi_x (\delta\varphi_{xx} \wedge \delta\varphi) = -6\varphi_{xx} (\delta\varphi_x \wedge \delta\varphi),$
- $\delta\varphi_{xxxx} \wedge \delta\varphi = -\delta\varphi_{xxx} \wedge \delta\varphi_x = \delta\varphi_{xx} \wedge \delta\varphi_{xx} = 0.$

Segue-se que

$$\delta E = 0. \quad (2.8)$$

ou seja, a equação (2.7) admite uma lagrangiana, em relação a φ .

Vamos agora analisar se as equações de campo de Podolsky admitem uma lagrangiana. A forma de Euler associada a estas equações é dada por

$$E = \left[(1 + a^2 \square) \partial_\nu F^{\mu\nu} - j^\mu \right] \delta A_\mu. \quad (2.9)$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}\delta E &= -\frac{1}{2}\delta F^{\mu\nu} \wedge \delta F_{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \delta (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \wedge \delta (\partial^\alpha F_{\mu\alpha}) \\ &= 0 .\end{aligned}\quad (2.10)$$

Portanto existe uma lagrangiana para as equações de campo da teoria de Podolsky. Nosso próximo passo é determinar esta lagrangiana. É possível mostrar^[25-27] que satisfeita a condição $\delta E = 0$, a lagrangiana para um dado conjunto de equações de campo é dada por

$$\mathcal{L} = \int_0^1 d\lambda E_\mu(\lambda\varphi) \varphi^\mu . \quad (2.11)$$

No caso da teoria de Podolsky, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_0^1 d\lambda [\lambda (\partial_\nu F^{\mu\nu} + a^2 \square \partial_\nu F^{\mu\nu}) A_\mu - j^\mu A_\mu] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\nu F^{\mu\nu} A_\mu + a^2 \square \partial_\nu F^{\mu\nu} A_\mu] - j^\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \square A_\mu - j^\mu A_\mu .\end{aligned}$$

O que implica em que a lagrangiana da teoria de Podolsky possa ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\alpha F_{\mu\alpha} - j^\mu A_\mu . \quad (2.12)$$

De posse da lagrangiana, vamos calcular o potencial efetivo não-relativístico entre dois bósons massivos carregados de spin zero, o qual se origina da troca de fótons descritos pela teoria de Podolsky.

O conhecimento deste potencial nos permitirá determinar a lei de força que postulamos no início deste trabalho.

2.2 O Potencial Efetivo Não-Relativístico

Analisemos pois, em ordem mais baixa em teoria de perturbação, o processo

$$S + S \rightarrow S + S ,$$

onde S representa um bóson de massa m , carga Q e spin zero. O diagrama de Feynman correspondente está mostrado na Fig. 2.1.

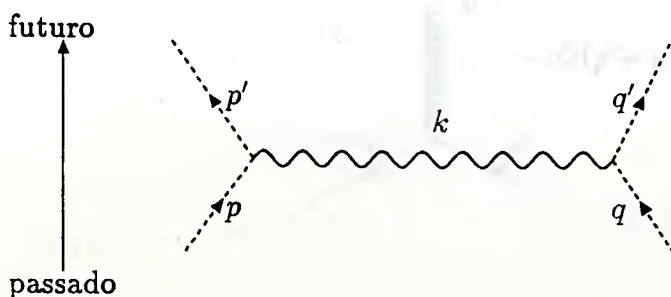


Figura 2.1: Contribuição, em ordem mais baixa, para o processo $S + S \rightarrow S + S$, onde S representa um bóson carregado de spin zero.

No gauge de Lorentz, a *eletrodinâmica escalar de Podolsky* é des-

crita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\mu\lambda} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2 + (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \quad (2.13)$$

onde

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + iQA_\mu\phi. \quad (2.16)$$

Em ordem mais baixa, a lagrangiana de interação é dada por

$$\mathcal{L}_I = iQA^\mu (\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi). \quad (2.14)$$

A regra de Feynman correspondente se encontra na Fig. 2.2. Vamos

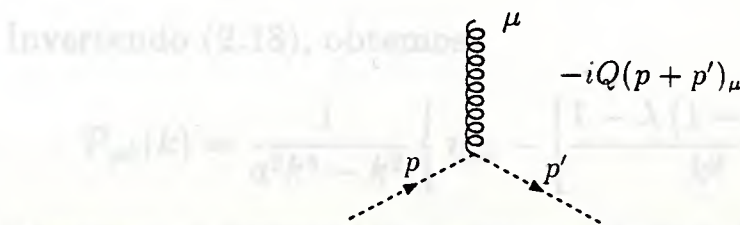


Figura 2.2: Vértice elementar para a eletrodinâmica escalar de Podolsky. Q é a carga do bóson de spin zero.

em sequência determinar o propagador, no gauge de Lorentz, associado à eletrodinâmica de Podolsky.

A parte quadrática da lagrangiana livre de Podolsky acrescida do termo de fixação de gauge, ou seja,

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\mu\lambda} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.15)$$

pode ser escrita como

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}A_\mu(x) [\mathcal{P}^{\mu\nu}(x)] A_\nu(x), \quad (2.16)$$

onde

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(x) \equiv \eta^{\mu\nu}(1 + a^2\Box)\Box - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} + a^2\Box\right)\partial^\mu\partial^\nu. \quad (2.17)$$

De (2.17) segue-se que

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = \eta^{\mu\nu}(a^2k^4 - k^2) - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} + a^2k^2\right)k^\mu k^\nu. \quad (2.18)$$

Invertendo (2.18), obtemos

$$\mathcal{P}_{\mu\lambda}(k) = \frac{1}{a^2k^4 - k^2} \left\{ \eta_{\mu\lambda} - \left[\frac{1 - \lambda(1 - a^2k^2)}{k^2} \right] \right\} k_\mu k_\lambda.$$

Portanto, o propagador (função de Green de dois pontos) é dado por

$$D_{\mu\nu}^F(k) = \frac{i M^2}{k^2(k^2 - M^2 + i\varepsilon)} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{1 - \lambda\left(1 - \frac{k^2}{M^2}\right)}{k^2} k_\mu k_\nu \right], \quad (2.19)$$

onde $M^2 \equiv \frac{1}{a^2}$.

Este propagador apresenta um bom comportamento ultravioleta ($\approx k^{-4}$), graças à presença de um fantasma não-taquiônico.

A amplitude invariante de Feynman para o processo mostrado na Fig. 2.1 pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= V^\mu(1) \left\{ \frac{iM^2}{k^2(k^2 - M^2)} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{1 - \lambda \left(1 - \frac{k^2}{M^2}\right)}{k^2} k_\mu k_\nu \right] \right\} V^\nu(2) \\
 &= i \left\{ V^\mu(1) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{1 - \lambda \left(1 - \frac{k^2}{M^2}\right)}{k^2} k_\mu k_\nu \right] V^\nu(2) \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} \right\} \\
 &= i V^\mu(1) V^\nu(2) \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} , \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 V^\mu(1) &\equiv -iQ (p + p')^\mu , \\
 V^\mu(2) &\equiv -iQ (q + q')^\mu .
 \end{aligned}$$

Da conservação de momento-energia temos que

$$k = p - p' = q' - q .$$

Portanto

$$\mathcal{M} = -\frac{iM^2Q^2}{k^2(k^2 - M^2)} (2p - k) (2q + k) . \quad (2.21)$$

No limite não-relativístico, a expressão (2.21) torna-se

$$\mathcal{M}_{N.R.} = -4i \frac{M^2Q^2m^2}{k^2(k^2 + M^2)} . \quad (2.22)$$

No sistema gaussiano de unidades o potencial efetivo não-relativístico é expresso por:

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{F}_{N.R.} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (2.23)$$

onde

$$\mathcal{F}_{N.R.} = i\mathcal{M}_{N.R.} .$$

Realizando as devidas substituições, obtemos

$$U(r) = \frac{Q^2}{(2\pi)^3} M^2 \int \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2 + M^2)k^2} d^3k , \quad (2.24)$$

ou seja,

$$U(r) = \frac{Q^2 M^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-i|\mathbf{k}|\cdot|\mathbf{r}|\cos\theta}}{k^2(M^2 + k^2)} k^2 \sin\theta d\theta d\phi d|\mathbf{k}| .$$

Resolvendo a integral em ϕ e θ vem

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{Q^2 M^2}{r(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{sen} kr}{k(M^2 + k^2)} dk . \\ &= \frac{Q^2}{r(2\pi)^2} \left[2 \int_0^\infty \frac{1}{k} \operatorname{sen} kr dk - 2 \int_0^\infty \frac{k \operatorname{sen} kr}{(M^2 + k^2)} dk \right] , \end{aligned}$$

onde $|\mathbf{k}| \equiv k$.

Vamos calcular em sequência as integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} kr}{k} dk = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k} dk , \quad (2.25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \operatorname{sen} kr}{M^2 + k^2} dk = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \operatorname{sen} kr}{M^2 + k^2} dk . \quad (2.26)$$

Tomando o contorno C representado na Fig. 2.4, temos que

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k} dk = i\pi ,$$

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ikr}}{(M^2 + k^2)} dk = \oint \frac{ze^{izr}}{(z - iM)(z + iM)} .$$

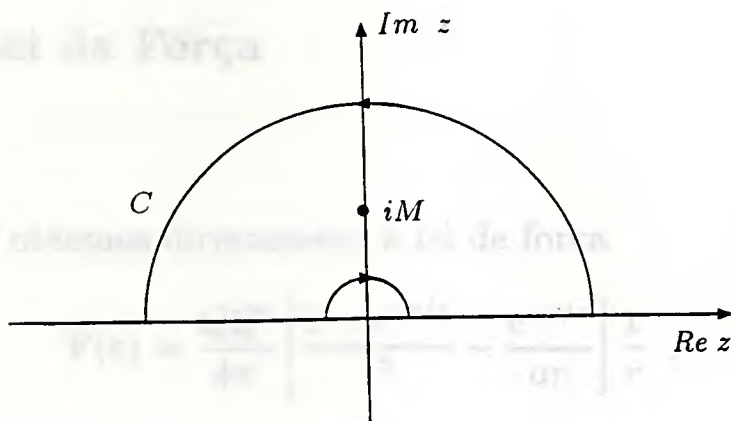


Figura 2.3: Contorno para as integrais 2.25 e 2.26.

Como

$$\frac{k}{k^2 + M^2} \rightarrow 0 \quad \text{no } \infty \quad \text{e } r > 0$$

o teorema de Cauchy nos permite escrever que

$$\oint \frac{ze^{izr}}{(z - iM)(z + iM)} = i\pi e^{-Mr} . \quad (2.27)$$

A energia potencial é dada pois por:

$$U(r) = \frac{Q^2}{4\pi} \left(\frac{1 - e^{-Mr}}{r} \right) ,$$

e o potencial eletrostático por

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{(1 - e^{-r/a})}{r} . \quad (2.28)$$

Este potencial tende a $Q/4\pi$ quando a tende a zero e anula-se no infinito.

2.3 A Lei da Força

De (2.28) obtemos diretamente a lei de força

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{QQ'}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/a}}{r^2} - \frac{e^{-r/a}}{ar} \right] \frac{\mathbf{r}}{r},$$

postulada no início deste trabalho.

Na tabela abaixo

Maxwell	Podolsky
$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\lambda F_{\mu\lambda}$
$V(r) = \frac{Q}{r}$	$V(r) = Q \left(\frac{1-e^{-Mr}}{r} \right) \quad M \equiv 1/a.$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}$	$(1 + a^2\Box) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ $(1 + a^2\Box) [\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}] = \mathbf{j}$

comparamos as teorias de Maxwell e Podolsky.

Uma vez construída a teoria de Podolsky a partir de princípios primeiros, vamos analisar no próximo capítulo o problema da reversão da helicidade fermiônica em campos eletromagnéticos descritos pela teoria de Podolsky, o que nos permitirá pelo menos em tese

avaliar as modificações introduzidas pelo parâmetro a na helicidade de um feixe de partículas de Dirac de spin $1/2$.

Capítulo 3

Reversão da Helicidade de Partículas de Dirac de Spin $1/2$ no Contexto do Eletromagnetismo de Podolsky

Calculamos a polarização de um feixe de partículas fermiônicas espalhado por partículas escalares carregadas, no contexto da teoria de Podolsky¹¹

3.1 Polarização no Espalhamento de Elétrons no Contexto da Eletrodinâmica de Podolsky

Capítulo 3

Reversão da Helicidade de Partículas de Dirac de Spin 1/2 no Contexto do Eletromagnetismo de Podolsky

Calculamos a polarização de um feixe de partículas fermiônicas espalhado por partículas escalares carregadas, no contexto da teoria de Podolsky^[14].

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g^2}{2}[\partial_\mu F^{\mu\nu}]^2 - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \\ & + \bar{\psi}(\not{\partial} - m_e)\psi + \phi^\dagger(\not{\partial} - m_\phi)\phi + \\ & + \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m_\phi^2\phi^\dagger\phi + \\ & + ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - ie\phi^\dagger\partial_\mu\psi\gamma^\mu\psi + e^2\phi^\dagger\psi\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde representamos por m_e e m_ϕ as massas do elétron (carga $-e$) e

3.1 Polarização no Espalhamento de Elétrons no Contexto da Eletrodinâmica de Podolsky

Seria interessante analisar as eventuais modificações que o termo quadrático $\frac{a^2}{2} (\partial_\lambda F^{\mu\lambda})^2$ introduzido por Podolsky na lagrangiana usual de Maxwell poderia produzir no comportamento de uma partícula com spin semi-inteiro num campo eletromagnético descrito pela eletrodinâmica de Podolsky. Para tanto vamos calcular a nível de árvore, a polarização de um feixe de partículas fermiônicas, espalhado por partículas escalares carregadas. Iniciamos analisando o processo

$$e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+ .$$

O diagrama de Feynman para este processo está representado na Fig. 3.1.

A lagrangiana correspondente é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} (\partial_\lambda F^{\mu\lambda})^2 - \frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \\ & + \bar{\psi} (i\not{\partial} - m_e) \psi + e \bar{\psi} \not{A} \psi + \\ & + \partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - m_\pi^2 \phi^* \phi + \\ & + ie (A^\mu \phi \partial_\mu \phi^* - A^\mu \phi^* \partial_\mu \phi) + e^2 A_\mu \phi^* A^\mu \phi , \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde representamos por m_e e m_π as massas do elétron (carga $-e$) e

3.1.1 Reversão do Spin do Elétron

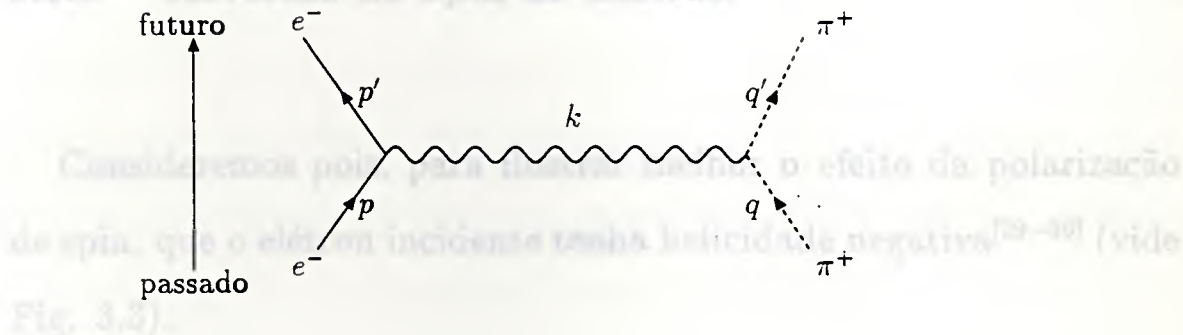


Figura 3.1:

Contribuição em ordem mais baixa em teoria de perturbação para o processo $e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+$ (e^- e π^+ são definidos como partículas).

a do pión carregado (π^+) respectivamente. As regras de Feynman, encontram-se na Fig. 3.2.

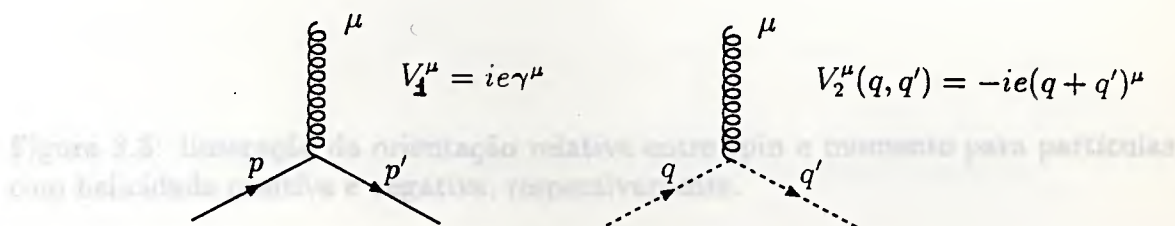


Figura 3.2: Regras de Feynman para a interação elétron-pión positivamente carregado (a carga do elétron é $-e$).

onde N_0 (N_L) denota o número de elétrons que emergem com helicidade positiva(negativa). N_0 , N_L e P são geralmente função do ângulo de espalhamento θ e da energia inicial do elétron E . Note

3.1.1 Reversão do Spin do Elétron

Consideremos pois, para ilustrar melhor o efeito da polarização de spin, que o elétron incidente tenha helicidade negativa^[29–36] (vide Fig. 3.3).

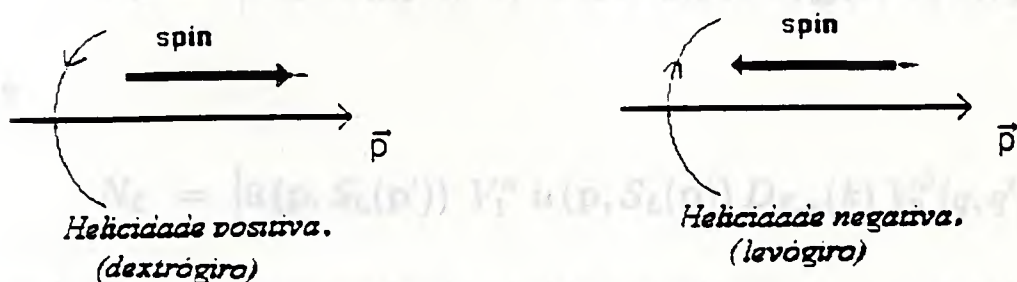


Figura 3.3: Ilustração da orientação relativa entre spin e momento para partículas com helicidade positiva e negativa, respectivamente.

A polarização P_L para um feixe incidente de elétrons totalmente levógiro é dada por

$$P_L = \frac{N_L - N_R}{N_R + N_L} \quad (3.2)$$

onde N_R (N_L) denota o número de elétrons que emergem com helicidade positiva(negativa). N_R , N_L e P são geralmente função do ângulo de espalhamento θ e da energia inicial do elétron E . Note

que se $N_R = 0$, ou seja o feixe de elétrons emergente tem a mesma helicidade que a incidente, então $P_L = 1$, e portanto não há reversão de helicidade. Por outro lado, se $N_L = 0$, ou seja o feixe de elétrons emergente tem helicidade contrária a do feixe incidente, então $P_L = -1$, e há reversão total de helicidade.

Para o atual processo,

$$N_R = \left| \bar{u}(\mathbf{p}', S_R(\mathbf{p}')) V_1^\alpha u(\mathbf{p}, S_L(\mathbf{p})) D_{F_{\alpha\beta}}(k) V_2^\beta(q, q') \right|^2 \quad (3.3)$$

e

$$N_L = \left| \bar{u}(\mathbf{p}, S_L(\mathbf{p}')) V_1^\alpha u(\mathbf{p}, S_L(\mathbf{p})) D_{F_{\alpha\beta}}(k) V_2^\beta(q, q') \right|^2, \quad (3.4)$$

onde $D_{F_{\alpha\beta}}$ é o propagador já obtido anteriormente, eq.(2.19), ou seja,

$$D_{F_{\alpha\beta}}(k) = \frac{iM^2}{k^2(k^2 - M^2 + i\varepsilon)} \left[\eta_{\alpha\beta} - \frac{1 - \lambda \left(1 - \frac{k^2}{M^2}\right)}{k^2} k_\alpha k_\beta \right].$$

Os espinores u e $\bar{u}$ satisfazem as seguintes propriedades

$$u(\mathbf{p}, S_L) = \frac{(1 + \gamma_5 \mathcal{S}_L)}{2} u(\mathbf{p}, S_L) \quad (3.5)$$

$$u(\mathbf{p}, S_R) = \frac{(1 + \gamma_5 \mathcal{S}_R)}{2} u(\mathbf{p}, S_R),$$

e os vetores de polarização são dados por

$$S_R^\lambda(\mathbf{p}) = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m_e}; \frac{p_0 \hat{p}}{m_e} \right)$$

(3.6)

$$S_L^\lambda(\mathbf{p}) = \left(-\frac{|\mathbf{p}|}{m_e}, -\frac{p_0 \hat{p}}{m_e} \right),$$

onde $\hat{p} \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$.

Em sequência vamos calcular N_R e N_L .

Considerando a equação (3.3) e realizando as devidas substituições, obtemos

$$N_R = \left| \frac{ie^2 M^2}{k^2 (k^2 - M^2)} \bar{u}(\mathbf{p}', S_R(\mathbf{p}')) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}, S_L(\mathbf{p})) Q_\alpha \right|^2 \quad (3.7)$$

onde $Q = q' + q$.

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{p}, S_L(\mathbf{p})) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, S_L(\mathbf{p})) &= \left[\frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \frac{1 + \gamma_5 \not{S}_L(\mathbf{p})}{2} \right]_{\alpha\beta} \\ u_\alpha(\mathbf{p}', S_R(\mathbf{p}')) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}', S_R(\mathbf{p}')) &= \left[\frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \frac{1 + \gamma_5 \not{S}_R(\mathbf{p}')}{2} \right]_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

podemos reescrever N_R como se segue

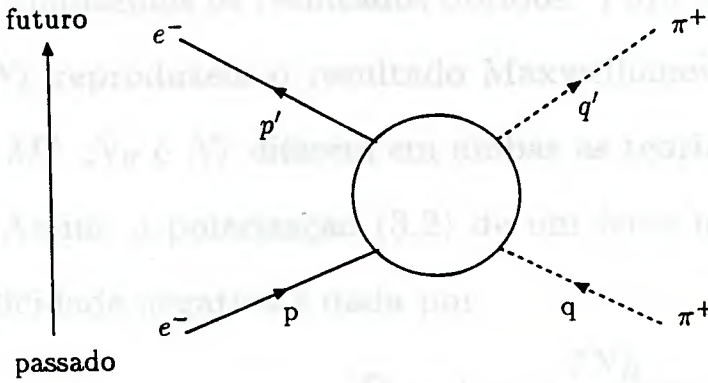
$$\begin{aligned} N_R &= \frac{e^2 M^4}{k^4 (k^2 - M^2)^2} \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \frac{1 + \gamma_5 \not{S}_R(\mathbf{p}')}{2} \not{Q} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \frac{1 + \gamma_5 \not{S}_L(\mathbf{p})}{2} \not{Q} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Utilizando as propriedades do traço das matrizes gama (vide Apêndice A), em (3.8), resulta

$$N_R = \frac{e^4 M^4}{4 m_e^2 k^4 (k^2 - M^2)^2} \{ (1 - S_L(\mathbf{p}) \cdot S_R(\mathbf{p}')) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[(m_e^2 - p \cdot p') Q^2 + 2 (p \cdot Q) (p' \cdot Q) \right] + \\
& + 2 (m_e^2 - p \cdot p') (S_R(\mathbf{p}') \cdot Q) (S_L(\mathbf{p}) \cdot Q) + \\
& + 2 (p' \cdot S_L(\mathbf{p})) (S_R(\mathbf{p}') \cdot Q) (p \cdot Q) + [2p' \cdot Q (S_L(\mathbf{p}) \cdot Q) + \\
& - (p' \cdot S_L(\mathbf{p})) Q^2] \cdot (S_R(\mathbf{p}') \cdot p) \}. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Em termos das variáveis de Mandelstam (vide Fig. 3.4), torna-se



$$\begin{aligned}
s &= (p + q)^2 \\
t &= (p - p')^2 \\
u &= (p - q')^2
\end{aligned}$$

Figura 3.4:

Variáveis de Mandelstam para o processo $e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+$ (e^- e π^+ são definidos como partículas).

$$\begin{aligned}
N_R &= \frac{e^4 M^4}{4m_e^2 t^2 (t - M^2)^2} \left\{ [1 - S_L(\mathbf{p}) \cdot S_R(\mathbf{p}')] \left[\frac{(s - u)^2}{2} + \frac{t}{2} (4m_\pi^2 - t) \right] \right. \\
&+ t (S_R(\mathbf{p}') \cdot Q) (S_L(\mathbf{p}) \cdot Q) + \\
&+ (s - u) [(S_L(\mathbf{p}) \cdot p') (S_R(\mathbf{p}') \cdot Q) + (S_L(\mathbf{p}) \cdot Q) (S_R(\mathbf{p}') \cdot p)] + \\
&\left. - (4m_\pi^2 - t) (S_L(\mathbf{p}) \cdot p') (S_R(\mathbf{p}') \cdot p) \right\}. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

A expressão para N_L é obtida de maneira análoga, e nos conduz ao resultado

$$\begin{aligned}
 N_L = & \frac{e^4 M^4}{4m_\pi^2 t^2 (t - M^2)^2} \left\{ [1 + S_L(\mathbf{p}) \cdot S_R(\mathbf{p}')] \left[\frac{(s - u)^2}{2} + \frac{t}{2} (4m_\pi^2 - t) \right] \right. \\
 & - t (S_R(\mathbf{p}') \cdot Q) (S_L(\mathbf{p}) \cdot Q) + \\
 & - (s - u) [(S_R(\mathbf{p}') \cdot p) (S_L(\mathbf{p}) \cdot Q) + (S_R(\mathbf{p}') \cdot Q) (S_L(\mathbf{p}) \cdot p')] + \\
 & \left. + (4m_\pi^2 - t) (S_L(\mathbf{p}) \cdot p') (S_R(\mathbf{p}') \cdot p) \right\} . \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Analiseemos os resultados obtidos: Para $M^2 \rightarrow \infty$ ($a^2 \rightarrow 0$), N_R e N_L reproduzem o resultado Maxwelliano^[15]. Para outros valores de M^2 , N_R e N_L diferem em ambas as teorias.

Assim, a polarização (3.2) de um feixe incidente de elétron com helicidade negativa é dada por

$$P_L = 1 - \frac{2N_R}{N_R + N_L} . \quad (3.12)$$

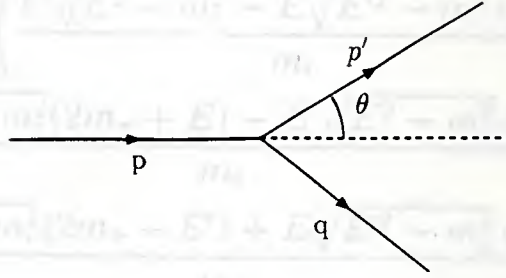
onde

$$N_R + N_L = \frac{e^4 M^4}{4m_\pi^2 t^2 (t - M^2)^2} [(s - u)^2 + t (4m_\pi^2 - t)] . \quad (3.13)$$

Para a análise desses resultados, vamos trabalhar no sistema de laboratório, onde a partícula em repouso é o pión $[q^\mu = (m, \vec{0})]$ (Fig. 3.5).

Neste sistema, as variáveis de Mandelstam em termos das energias e das massas são expressos por (vide Apêndice B).

$$s_{lab.} = m_e^2 + m_\pi^2 + 2Em_\pi .$$



$$t_{lab.} = 2m_{\pi} (E'_{lab.} - E) ,$$

$$u_{lab.} = 2(m_e^2 + m_{\pi}^2) - s_{lab.} - t_{lab.} ,$$

onde

$$E'_{lab.} = \frac{(m_{\pi}E + m_e^2)(E + m_{\pi}) + (E^2 - m_e^2) \cos \theta \sqrt{m_{\pi}^2 - m_e^2 \sin^2 \theta}}{(E + m_{\pi})^2 - (E^2 - m_e^2) \cos^2 \theta} ,$$

sendo E e E' as energias inicial e final do elétron, respectivamente.

Portanto, no sistema de laboratório, a expressão de N_R é dada por

$$\begin{aligned} N_R = & \frac{e^4 M^4}{4m_e^2 t^2 (t - M^2)^2} \left\{ \left[1 + \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} \sqrt{E'^2 - m_e^2} - EE' \cos \theta}{m_e^2} \right] \right. \\ & \times \left[\frac{(s - u)^2}{2} + \frac{t}{2} (4m_{\pi}^2 - t) \right] \\ & - t \left[\frac{\sqrt{E'^2 - m_e^2} (2m_{\pi} + E) - E' \sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right] \\ & \times \left. \left[\frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} (2m_{\pi} - E') + E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (s - u) \left[\left(\frac{E' \sqrt{E^2 - m_e^2} - E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \right. \\
& \times \left(\frac{\sqrt{E'^2 - m_e^2} (2m_\pi + E) - E' \sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \\
& + \left(\frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} (2m_\pi - E') + E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \\
& \times \left. \left(\frac{E \sqrt{E'^2 - m_e^2} - E' \sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \right] \\
& + (4m_\pi^2 - t) \left(\frac{E' \sqrt{E^2 - m_e^2} - E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \\
& \times \left(\frac{E \sqrt{E'^2 - m_e^2} - E' \sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \Bigg\} . \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Consequentemente, a polarização do feixe de elétrons emergentes no sistema de repouso do pión é dada por

$$\begin{aligned}
P_L &= 1 - 2 \left\{ \left[1 + \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} \sqrt{E'^2 - m_e^2} - EE' \cos \theta}{m_e^2} \right] \right. \\
& \times \left[\frac{(s - u)^2}{2} + \frac{t}{2} (4m_\pi^2 - t) \right] \\
& - t \left[\frac{\sqrt{E'^2 - m_e^2} (2m_\pi + E) - E' \sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right] \\
& \times \left[\frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} (2m_\pi - E') + E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right] \\
& - (s - u) \left[\left(\frac{E' \sqrt{E^2 - m_e^2} - E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \right. \\
& \times \left(\frac{\sqrt{E'^2 - m_e^2} (2m_\pi + E) - E' \sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \\
& + \left. \left(\frac{\sqrt{E^2 - m_e^2} (2m_\pi - E') + E \sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \right] \Bigg\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{E\sqrt{E'^2 - m_e^2} - E'\sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \Bigg] \\
& + (4m_\pi^2 - t) \left(\frac{E'\sqrt{E^2 - m_e^2} - E\sqrt{E'^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \\
& \times \left(\frac{E\sqrt{E'^2 - m_e^2} - E'\sqrt{E^2 - m_e^2} \cos \theta}{m_e} \right) \Bigg\} / \\
& \left\{ (s - u)^2 + t(4m_\pi^2 - t) \right\} . \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Vamos agora analisar graficamente o comportamento de P_L em função do ângulo de espalhamento θ , mantido E fixo¹. Consultando o gráfico da Fig. 3.6, onde está traçado o gráfico da polarização em função do ângulo de espalhamento θ , mantido E fixo, para $0 < \theta < \pi/2$, observamos que P_L aumenta à medida que θ aumenta. Portanto, no contexto da Teoria de Podolsky e a nível semi-clássico, os elétrons têm sua helicidade revertida devido à interação eletromagnética de ordem mais alta^[14]. Note que no caso em pauta a “reversão” diminui a medida que θ aumenta. O mesmo acontece no caso do Káon (K^+) (vide Fig. 3.7) .

3.2 Partículas de Dirac de Spin 1/2

Uma situação mais interessante seria variar as massas dos férmions e fixarmos a massa da partícula escalar para uma série de ângulos

¹O programa utilizado para traçar os gráficos foi o *MicroCal Origin - Versão 3.0*.

fixos (Fig. 3.8). Como podemos ver a situação se inverte, ou seja, a medida que tomamos ângulos maiores e a medida que a massa fermiônica também aumenta, menor se torna a polarização. Vejamos isto num caso particular . ou seja uma partícula fermiônica de massa 60MeV . (Fig. 3.9). Realmente a medida que θ aumenta, P_L diminui, havendo reversão da helicidade. E por fim variando, o ângulo e a massa ao mesmo tempo, obtemos que o comportamento se repete (Fig. 3.10).



Figura 3.10: P_L vs ângulo de espalhamento θ para $E = 70 \text{ MeV}$.

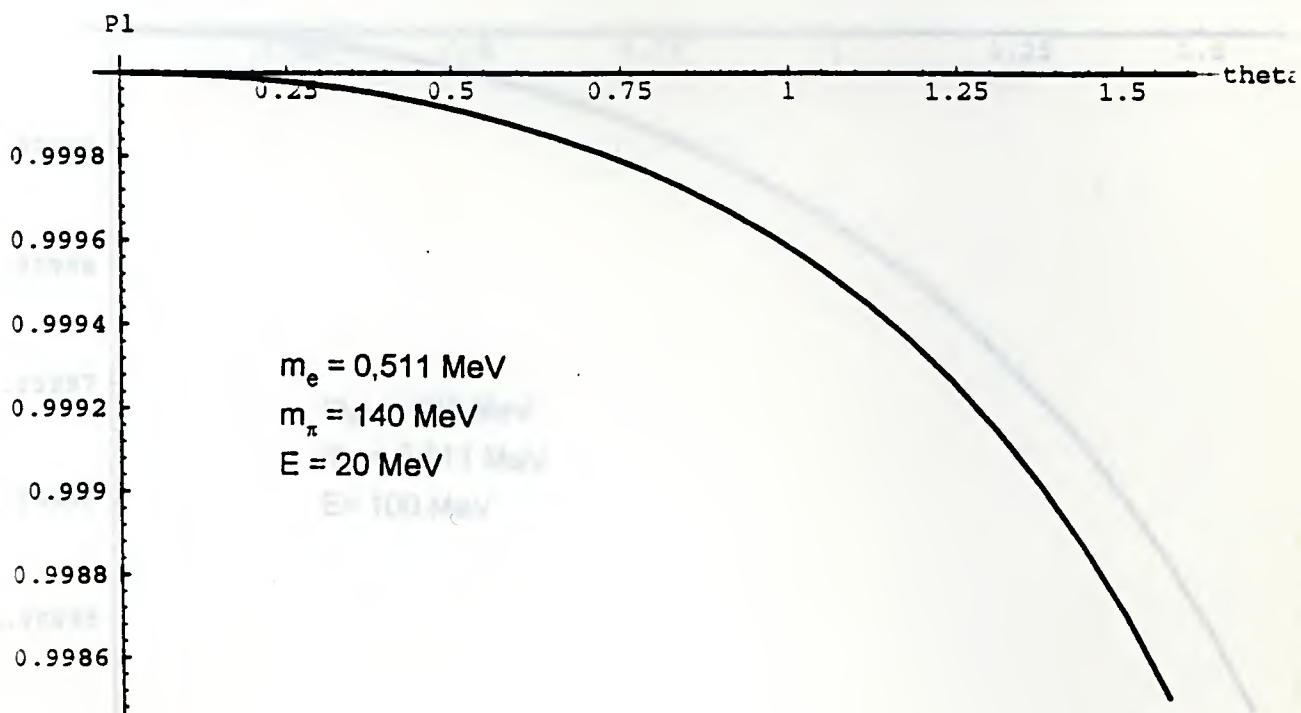


Figura 3.6: P_L em função do ângulo de espalhamento θ para $E = 20 \text{ MeV}$.

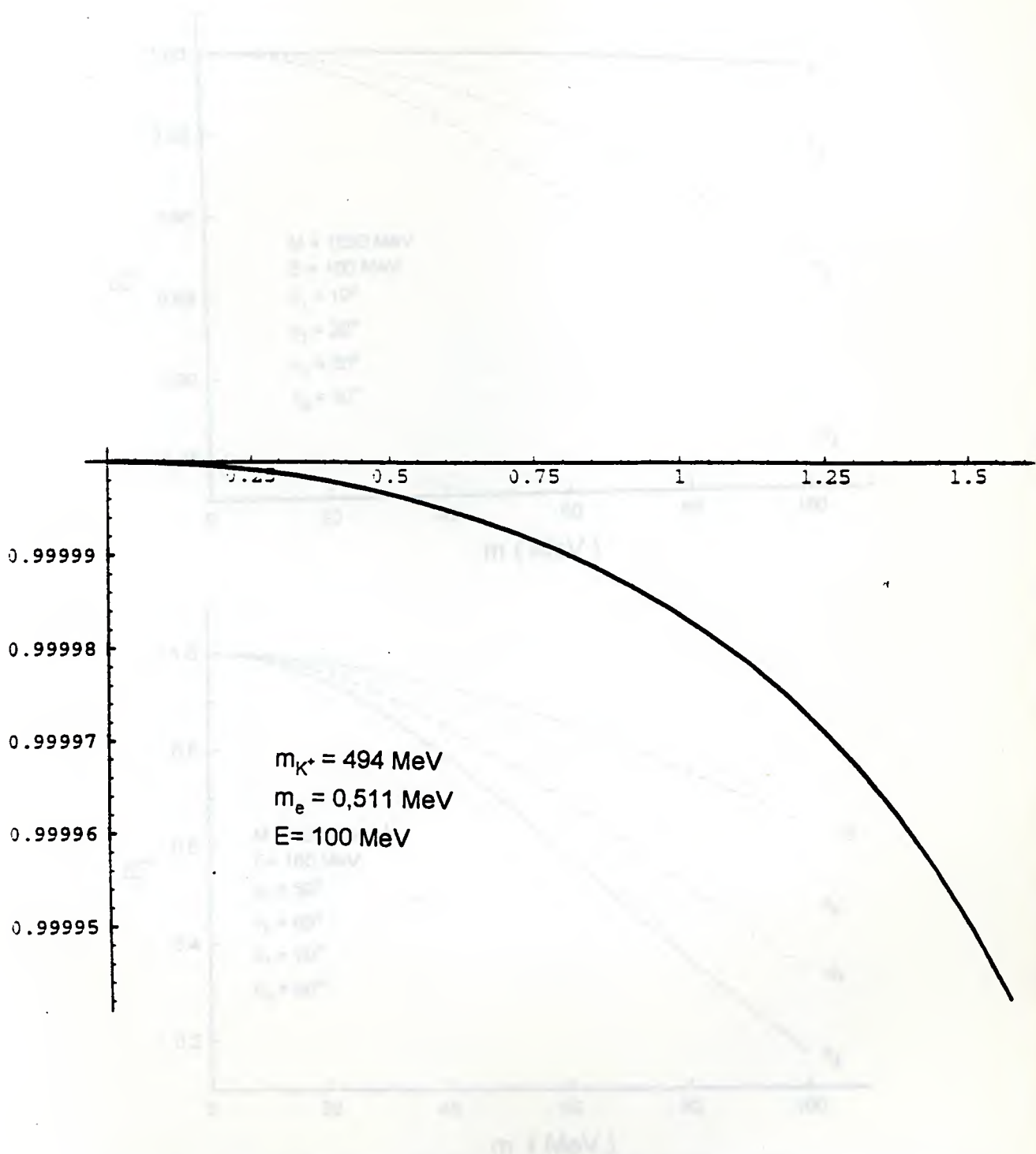


Figura 3.7: P_L em função do ângulo de espalhamento θ onde a partícula escalar carregada é o Káon.

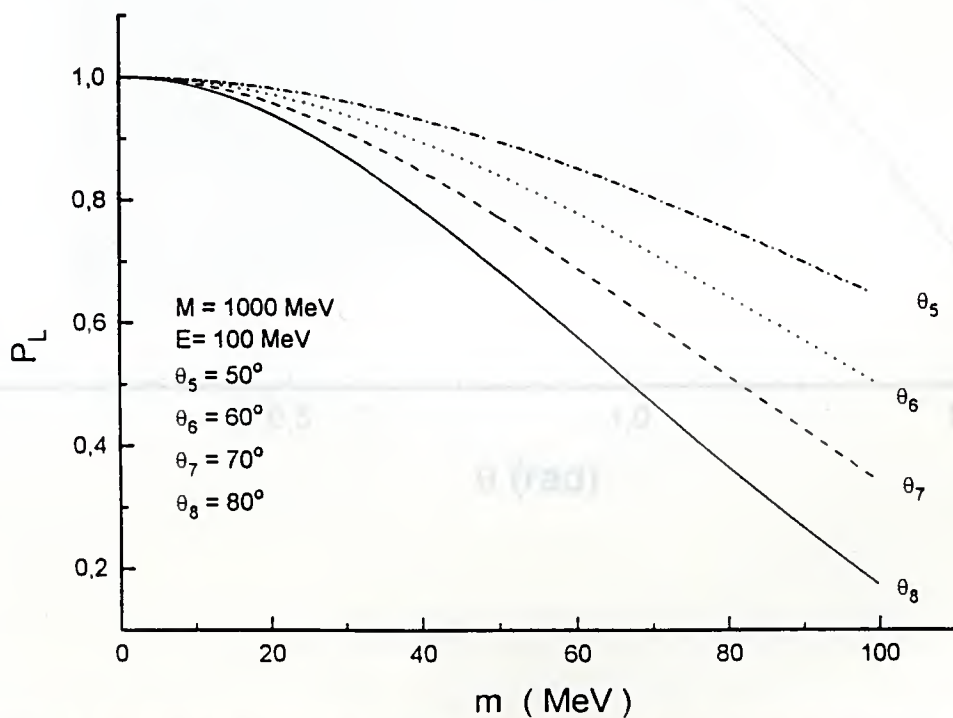
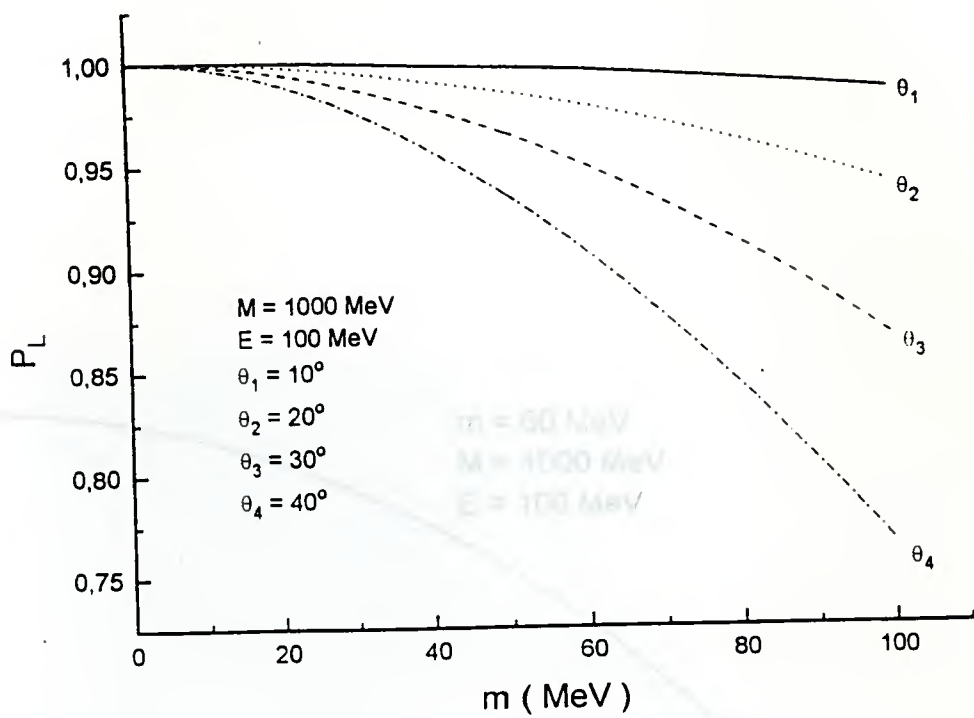


Figura 3.8: P_L em função das massas do férmion, para valores de θ fixos.

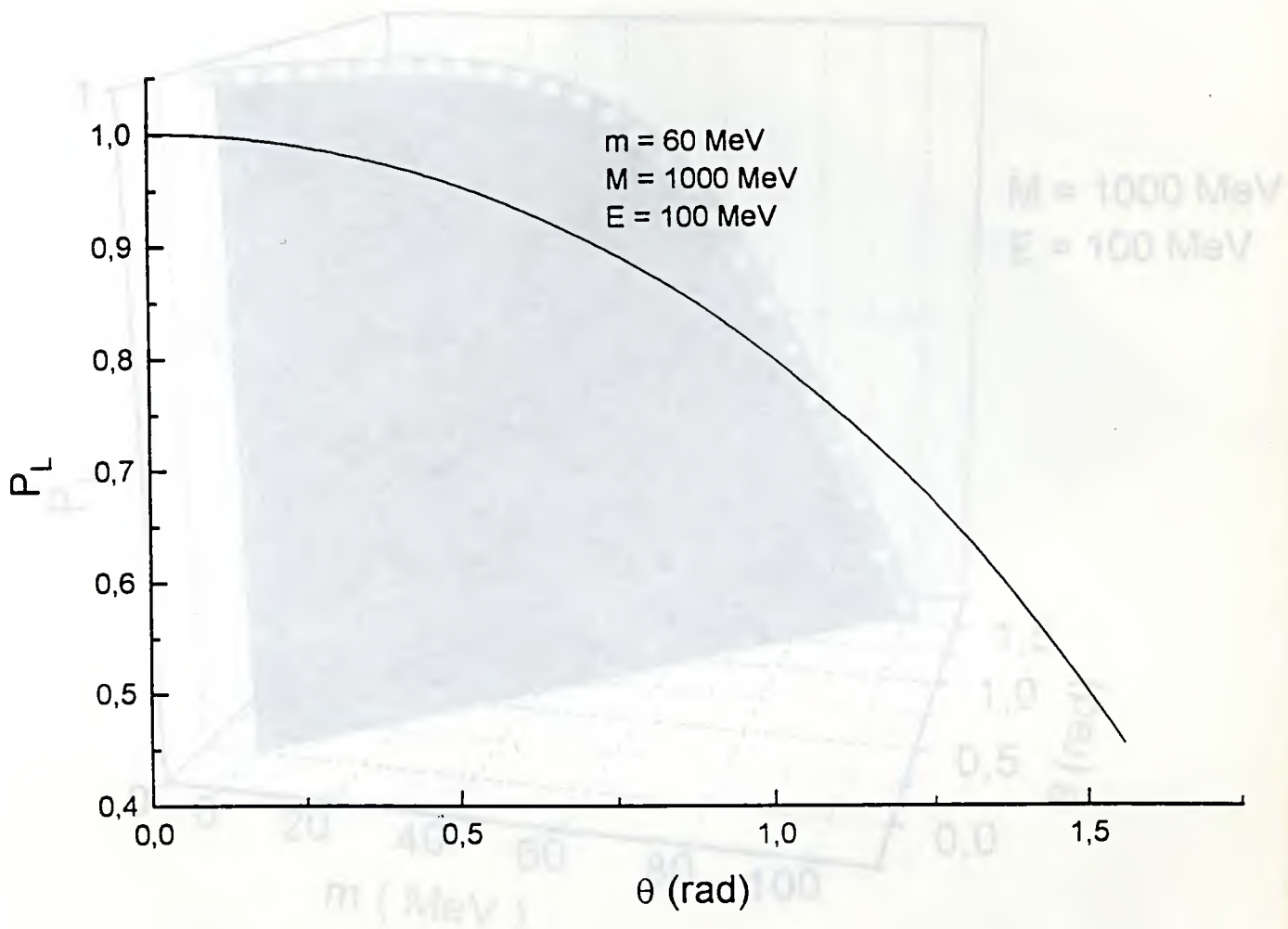


Figura 3.9: Caso particular de P_L em função de θ para a massa fermiônica de 60 MeV .

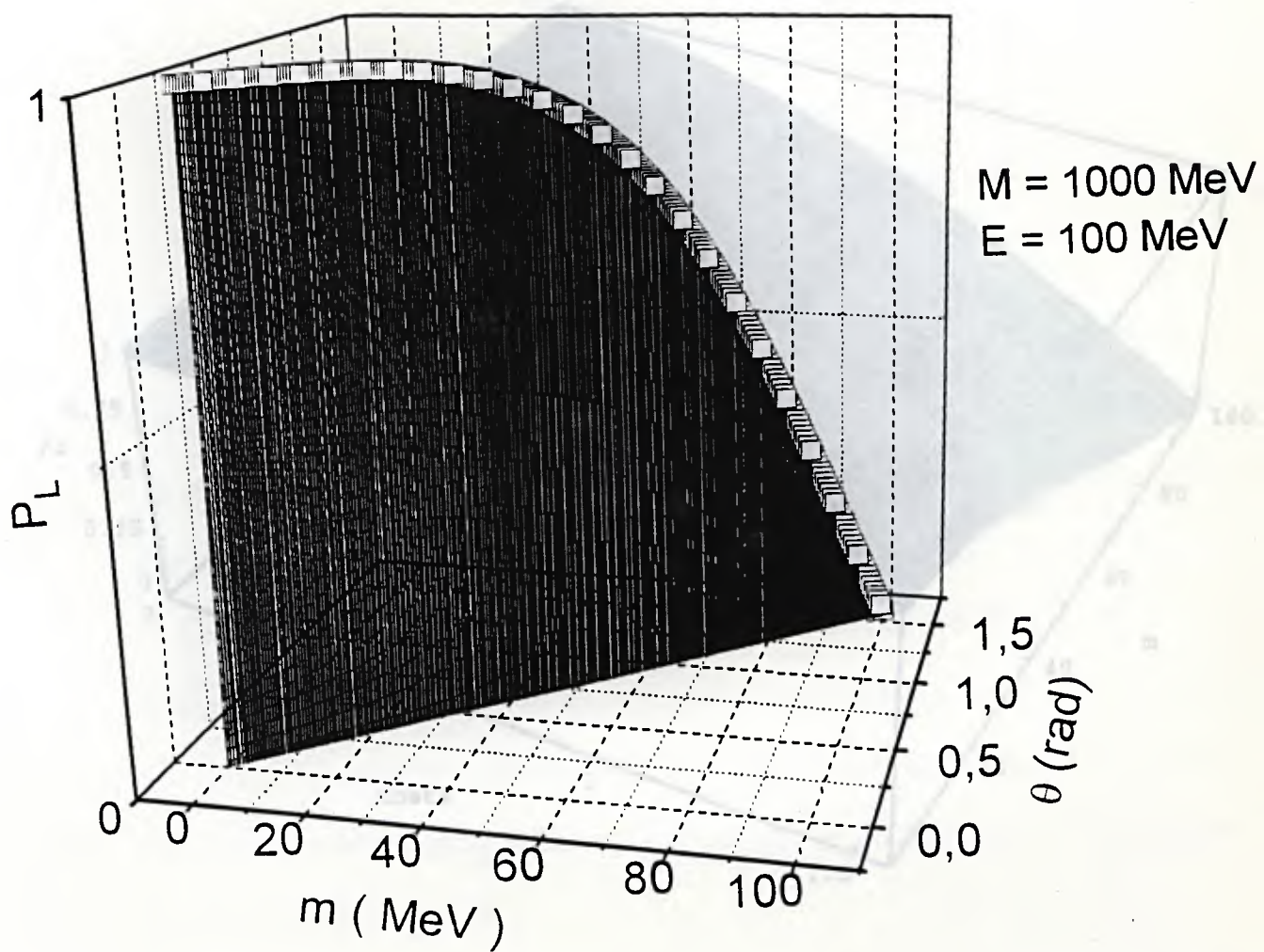


Figura 3.10: P_L em função de θ e das massa fermiônicas, para $E = 100 \text{ MeV}$.

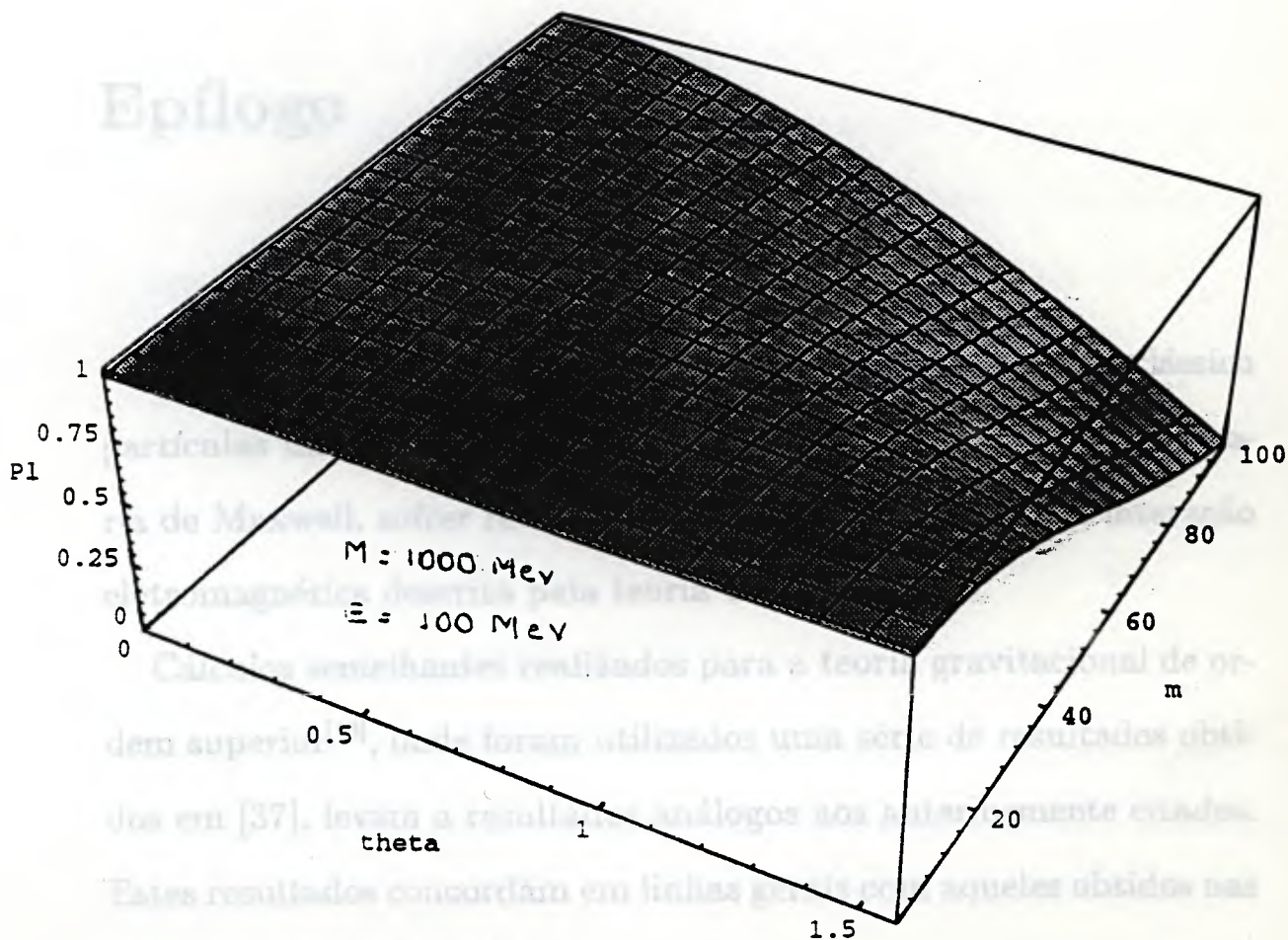


Figura 3.10: P_L em função de θ e das massa fermiônicas, para $E = 100 \text{ MeV}$.

Epílogo

Mostramos no decorrer deste trabalho que a nível semi-clássico partículas massivas de Dirac de spin $1/2$ podem, tal como na teoria de Maxwell, sofrer reversão de sua helicidade devido à interação eletromagnética descrita pela teoria de Podolsky.

Cálculos semelhantes realizados para a teoria gravitacional de ordem superior^[16], onde foram utilizados uma série de resultados obtidos em [37], levam a resultados análogos aos anteriormente citados. Estes resultados concordam em linhas gerais com aqueles obtidos nas referências [38,39,40,41].

Acreditamos que presentemente seria mais interessante pensar na teoria de gravitação de ordem superior como uma teoria de gravitação efetiva para baixas energias, do mesmo modo que o modelo sigma não-linear descreve efetivamente a interação pión-núcleon a baixas energias.

Provavelmente uma interpretação semelhante poderá ser encon-

trada para a teoria de Podolsky.

É interessante observar que o propagador para a teoria de Podolsky apresenta um comportamento ultravioleta melhor graças à presença de um fantasma não-taquiônico massivo originário de uma métrica negativa, enquanto que o propagador da gravitação de ordem mais alta, cuja expressão no gauge de De Donder é dada por^[16]

$$\begin{aligned}
 D_{\mu\nu,\lambda\theta}^F(k) = & \frac{1}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\kappa^2 k^2\right) k^2} \left\{ - \left[\frac{-2 + \left(2\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\kappa^2 k^2}{-2 + (3\alpha + \beta)\kappa^2 k^2} \right] \right. \\
 & \times \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\theta} + (\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\theta} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\theta}) \\
 & + \frac{2\kappa^2(2\alpha + \beta)}{-2 + \kappa^2 k^2(3\alpha + \beta)} (\eta_{\mu\nu}k_\lambda k_\theta + \eta_{\lambda\theta}k_\mu k_\nu + \frac{2}{k^2}k_\mu k_\nu k_\lambda k_\theta) \\
 & \left. + \frac{\beta}{4}\kappa^2 (\eta_{\mu\lambda}k_\theta k_\nu + \eta_{\mu\theta}k_\lambda k_\nu + \eta_{\nu\theta}k_\lambda k_\mu + \eta_{\nu\lambda}k_\theta k_\mu) \right\} ,
 \end{aligned}$$

apresenta um melhor comportamento ultravioleta graças à presença tanto de um fantasma taquiônico massivo quanto de um fantasma não-taquiônico massivo.

Para finalizar gostaríamos de chamar à atenção para o fato de que teorias não-lagrangianas podem ser quantizadas bastando, que estas sejam perturbativamente coerentes, ou seja, apresentam vértices bem definidos^[27]. É interessante observar que no conhecido livro de Bjorken and Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, as regras de Feynman são obtidas sem a utilização da lagrangiana. Na verdade em nenhuma parte desse livro é sequer feita menção à palavra la-

grangiana.

Apêndice A

Propriedades das Matrizes Gama

* Matrizes Gama

$$\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_\pm = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$\alpha \gamma^0 = \gamma^0$$

$$\alpha \gamma^i = -\gamma^i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\alpha \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\alpha (\gamma^0)^2 = 1$$

$$\alpha (\gamma^i)^2 = -1 = (\gamma^j)^2 = (\gamma^k)^2$$

$$\alpha \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_\pm = 0 \quad \begin{cases} \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0 \\ \gamma^i \gamma^j = -\gamma^j \gamma^i \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\alpha (\gamma^5)^2 = 1$$

$$\alpha (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

* Propriedades do traço das matrizes gama.

Apêndice A

Propriedades das Matrizes Gama

- Matrizes Gama

- $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$

- $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$

- $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad i = 1, 2, 3$

- $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

- $(\gamma^0)^2 = 1$

- $(\gamma^1)^2 = -1 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2$

- $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

- $[\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0 \quad \begin{cases} \gamma^0\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^0 \\ \gamma^i\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^i \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3$

- $(\gamma^5)^2 = 1$

- $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$

- Propriedades do traço das matrizes gama.

$$\circ \text{Tr} \gamma^\mu = \text{Tr} \gamma^5 = 0 = -\text{Tr} \gamma^5$$

$$\circ \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 4 \eta^{\mu\nu}$$

$$\circ \text{Tr} \gamma^5 \gamma^\mu = 0$$

$$\circ \text{Tr} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu = -\frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \gamma^{\mu\beta} = 0$$

$$\circ \text{Tr} \left(\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\rho}_{\text{número ímpar}} \right) = 0$$

$$\circ \text{Tr} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = -4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\circ \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4 (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho})$$

$$\circ \text{Tr} (A_1 A_2 \dots A_{2n}) = (A_1 A_2) \text{Tr} (A_3 \dots A_{2n}) - (A_1 A_3) \text{Tr} (A_2 A_4 \dots A_{2n}) + \dots + (A_1 A_{2n}) \text{Tr} (A_2 A_3 \dots A_{2n-1})$$

$$\circ \text{Tr} (A_1 A_2 \dots A_{2n}) = \text{Tr} (A_{2n} \dots A_2 A_1)$$

$$p = p' \cos \theta + q' \cos \theta' \quad (B.1)$$

$$p \sin \theta = q' \sin \theta' \quad (B.2)$$

$$\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1 \quad (B.3)$$

Substituindo (B.3) em (B.2) e em (B.1), segue-se que

$$p = p' \cos \theta + \sqrt{q'^2 - p'^2 \sin^2 \theta} \quad (B.4)$$

que pode ser descrita na forma

$$q^2 = p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2 \quad (B.5)$$

Apêndice B

Variáveis de Mandelstam no sistema de laboratório

Considerando que a partícula incidente possui massa m , momento inicial $p = (E, \mathbf{p})$, e final $p' = (E, \mathbf{p}')$, e que a partícula em repouso de massa M , tenha momento $q = (M, 0)$ inicial e $q' = (W, \mathbf{q})$ final (vide Fig.3.5), obtemos

$$p = p' \cos \theta + q' \cos \theta' , \quad (\text{B.1})$$

$$p' \sin \theta = q' \sin \theta' , \quad (\text{B.2})$$

$$\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1 . \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.3) em (B.2) e em (B.1), segue-se que

$$p = p' \cos \theta + \sqrt{q'^2 - p'^2 \sin^2 \theta} , \quad (\text{B.4})$$

que pode ser reescrita na forma

$$q'^2 = p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2 . \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado, temos que

- $W^2 = M^2 + q'^2$,

- $W = E - E' + M$,

- $E^2 = m^2 + p^2$.

Chegamos então a seguinte equação

$$(a^2 - p^2 \cos^2 \theta) E'^2 - 2abE' + b^2 + m^2 p^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (\text{B.6})$$

onde $a = E + M$ e $b = ME + m^2$.

Consequentemente,

$$E' = \frac{ab \pm \sqrt{p^2 \cos^2 \theta (-a^2 m^2 + b^2 + m^2 p^2 \cos^2 \theta)}}{(a^2 - p^2 \cos^2 \theta)}. \quad (\text{B.7})$$

Portanto

$$E'_{lab.} = \frac{(E + M)(ME + m^2) \pm p^2 \cos \theta \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos \theta}, \quad (\text{B.8})$$

onde $p^2 = E^2 - m^2$.

Partindo da equação (B.4) obtemos

$$pp' \cos \theta = \frac{p^2 + p'^2 - q'^2}{2}.$$

Utilizando as relações

$$q'^2 = W^2 - M^2$$

$$p^2 = E^2 - m^2$$

$$p'^2 = E'^2 - m^2$$

chegamos à expressão

$$pp' \cos \theta = (E + M)E' - m^2 - ME . \quad (\text{B.9})$$

Como

$$\begin{aligned} t &= (p - p')^2 \\ &= 2(m^2 - EE' + pp' \cos \theta) , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

e considerando (B.10) temos que

$$t_{lab.} = 2M(E'_{lab.} - E) , \quad (\text{B.11})$$

$$s_{lab.} = m^2 + M^2 + 2EM , \quad (\text{B.12})$$

$$u_{lab.} = 2(m^2 + M^2) - s_{lab.} - t_{lab.} . \quad (\text{B.13})$$

O momento final da partícula incidente, a energia final da partícula em repouso e o momento final da partícula em repouso são dados respectivamente, por

$$p'_{lab} = \frac{(ME + m^2) \cos \theta \pm (E + M) \sqrt{M^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2 \theta} p \quad (\text{B.14})$$

$$W_{lab.} = M \left[\frac{(E + M)^2 + p^2 \cos^2 \theta'}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2 \theta'} \right] e \quad (\text{B.15})$$

$$q'_{lab.} = \frac{2M(E + M^2)|p| \cos \theta'}{(E + M)^2 - p^2 \cos^2 \theta'} . \quad (\text{B.16})$$

Referências

- [1] B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
- [2] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. **65**, 228 (1944).
- [3] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. **67**, 184(1945).
- [4] B. Podolsky, P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).
- [5] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie* (4th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1921). [Tradução inglesa: *Space-Time-Matter* (Dover, New York, 1952)].
- [6] A. Eddington, *The Mathematical Theory of General Relativity* (2nd. ed. Cambridge University Press, 1924).
- [7] K. S. Stelle, Phys. Rev. **D16**, 953 (1977).
- [8] A. J. Accioly, Rev. Bras. Fis. **18**, 593 (1988).
- [9] A. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **13**, 1064 (1972); **33**, 997 (1978). Ver também L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields:*

- An Introduction to Quantum Theory* (2nd. ed. Addison - Wesley Publishing Company, 1991) e J. Barcelos-Neto, N. R. F. Braga, Mod. Phys Lett. A4, 2195 (1989).
- [10] P. West, Nucl. Phys. B268, 113 (1986).
- [11] A. J. Accioly, H. Mukai, *From Coulomb's generalized law to higher-derivative electromagnetism via special relativity* [A ser publicado na Phys. Rev. D].
- [12] A. J. Accioly, H. Mukai, *From Biot-Savart generalized law to Podolskian equations using special relativity* (em andamento).
- [13] A. J. Accioly, H. Mukai, *Higher-derivative electromagnetism from first principles* (a ser publicado em Mod. Phys. Lett. A).
- [14] A. J. Accioly, H. Mukai, *Spin-1/2 Dirac particle helicity flip in higher-derivative electromagnetism* (a ser publicado em Prog. Theor. Phys.).
- [15] A. J. Accioly, E. C. de Rey Neto, H. S. Blas Achic, *Tree-level approach to fermion helicity flip in electromagnetic fields*, (a ser publicado em Nuovo Cim. A).

- [16] A. J. Accioly, H. Mukai, *Can higher-derivative gravity flip the helicity of a spin-1/2 Dirac particle?* [A ser publicado em Classical Quantum Grav.].
- [17] J. Barcelos-Neto, N. R. F. Braga, Phys. Rev. **D39**, 494 (1989).
- [18] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B268**, 406 (1986).
- [19] D. F. Bartlett, B. F. L. Ward, Phys. Rev. **D16**, 3453 (1977); D. F. Bartlett, J. Shepard, C. Zafiratos, B. F. L. Ward, Phys. Rev. **D20**, 578 (1979).
- [20] R. Feynman, *The Character of Physical Law*, British Broadcasting Corporation 35 Marylebone Higher street, London 1965.
- [21] W. Rindler, *Essential Relativity*, Springer, New York, 1977, 2nd ed.; *Introduction to Special Relativity*, Clarendon, Oxford, 1982.
- [22] M. Schwartz, *Principles of Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [23] D. H. Kobe, Am. J. Phys. **54**, 631 (1986).
- [24] D. E. Neuenschwander, B. N. Turner, Am. J. Phys, **60**, 35 (1992).
- [25] Roberto A. Kraenkel - Tese de Doutorado, IFT. TD - 02/88, *Cálculo Variacional Exterior* - 1988.

- [26] R. Aldrovandi, R. A. Kraenkel, J. Phys. A: Math. General **21**, 1329 (1988).
- [27] R. Aldrovandi, R. A. Kraenkel, J. Math. Phys. **30**, 1866 (1988).
- [28] A. J. Accioly, H. Mukai, O. Negrini Neto, J. H. O. Sales, Brazilian Journal of Physics, **25**, 76 (1995).
- [29] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (Mc Graw-Hill Book Company, 1964).
- [30] M. Jacob, G. C. Wick, Annals of Phys **7**, 404 (1959).
- [31] M. D. Scadron, *Advanced Quantum Theory and its Applications through Feynman Diagrams*, Springer-Verlag, New York Inc. 1979.
- [32] F. Gross, *Relativistic Mechanics and Field Theory*, John Wiley & Sons, Inc. 1993.
- [33] D. C. Cheng, G. K. O'Neill, *Elementary Particle Physics (An Introduction)*, Addison-Wesley Publishing Company (Advanced Book Program), Reading Massachusetts, 1979.
- [34] W. Greiner, A. Schäfer, *Quantum Chromodynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

- [35] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica de Campos*, Instituto de Física da USP, Departamento de Física-Matemática, C.P.20516 - São Paulo, S.P., Brazil, 1990.
- [36] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons Ltd, 1986.
- [37] A. J. Accioly, D. Spehler, S. F. Novaes, S. F. Kwok, and H. Mukai, Phys. Rev. D **51**, 931(1995).
- [38] Anandan J., Phys. Rev. D **15**, 1448(1977); Nuvo Cim. **53**, 221(1979); Phys. Rev. Lett. **68**, 3809(1992).
- [39] Cai, Y. Q. and Papini G., Phys. Rev. Lett. **66**, 1259(1991).
- [40] R. Aldrovandi, G. E. A. Matsas, S. F. Novaes, and D. Spehler, Phys. Rev. D **50**, 2645(1994).
- [41] C. Mergulhão Jr., Gen. Rel. Gravit. **27**, 657(1995).

