

Andrea Piranha da Silva

Sequências Encadeadas e Polinômios Ortogonais



1910001087



Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais

Andrea Piranha da Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga



T1087/02

São José do Rio Preto

22 de fevereiro de 2002



518.72:51
\$586₂

10104003 — Matemática
aplicada

Silva, Andrrea Piranhe.

Seqüências encadeadas e polinômios ortogonais / Andrrea Piranhe da
Silva. — São José do Rio Preto : [s.n.], 2002.
000 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alagacone Sri Ranga.

Dissertação (mestrado) — Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Matemática aplicada e computacional. 2. Análise numérica.
3. Polinômios ortogonais. 4. Seqüências encadeadas. I. Sri Ranga,
Alagacone. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU — 518.7



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alagomoni do Rangel, pela orientação deste trabalho, dedicação e atenção que sempre teve comigo, pela amizade e companheirismo.

À Prof. Dra. Eliana Xavier L. de Andrade, por contribuir em minha formação pessoal e acadêmica.

À Prof. Dra. Cleonice Fátima Bracchioli, pela disposição e paciência nos momentos em que precisei.

Ao Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov, pela atenção e participação que teve comigo.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos de pós-graduação, em especial, Milena, Sonia, Oscar e Juninho.

As amigas que me acompanharam nos momentos de alegria e de dificuldades, Barbara, Suelina e Bat.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram.

A toda minha família, em especial, aos meus irmãos, que foram

de fundamental importância para que eu chegasse até aqui.

Ao Juninho, pelo carinho, atenção e paciência.

A FAPESP, pela auxílio financeiro.

A Deus por tudo.

A Deus,

aos meus pais, Milton e Rose,

às minhas irmãs, Adriana e Andreza,

aos pequenos Yago, Heloá e Leonardo,

ao meu Bebem,

Dedico

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pela orientação deste trabalho, dedicação e atenção que sempre teve comigo, pela amizade e companheirismo.

À Prof. Dra. Eliana Xavier L. de Andrade, por contribuir em minha formação pessoal e acadêmica.

À Prof. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pela disposição e paciência nos momentos em que precisei.

Ao Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov, pela atenção e preocupação que teve comigo.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os amigos de pós-graduação, em especial, Milena, Sonia, Oscar e Juninho.

Às amigas que me acompanharam nos momentos de alegria e de dificuldades, Barbara, Sabrina e Bat.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram.

A toda minha família, em especial, aos meus tios Ubaldo e Cristina que foram de fundamental importância para que eu chegasse até aqui.

Ao Juninho, pelo carinho, atenção e paciência.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar seqüências encadeadas positivas e algumas de suas extensões e, suas aplicações na teoria de polinômios ortogonais definidos na reta real, bem como, na teoria de polinômios de Szegő, que são polinômios ortogonais definidos no círculo unitário. Como aplicação dos resultados obtidos, foram considerados os polinômios de Szegő e alguns polinômios ortogonais na reta real, cujas medidas apresentam saltos.

Palavras-chave: seqüências encadeadas, polinômios ortogonais, polinômios de Szegő, relação de recorrência.



Sumário

Abstract

1 Introdução

The main purpose of this work is to study positive chain sequences and some of its extension and their applications on the theory of orthogonal polynomials defined over real axis, and also on Szegő polynomials which are orthogonal polynomials on the unit circle. As application of the results obtained we consider the Szegő polynomials and some orthogonal polynomials on real axis whose measures have jumps.

Keywords: chain sequences, orthogonal polynomials, Szegő polynomials, recurrence relation.

2.1 Sequências Recorrentes Positivas	20
3.1 Sequências Recorrentes e Polinômios Ortogonais no Eixo Real	26
4 Sequências Recorrentes Generalizadas e Medidas Relacionadas	34
4.1 Polinômios	34
4.2 Sequências Recorrentes Generalizadas	40
4.3 Sequências Recorrentes Generalizadas e Medidas Relacionadas	42
4.4 Uma Aplicação para os Polinômios $P_n^{(\alpha, \beta)}$	44
4.5 Momentos e a Teoria de $P_n^{(\alpha, \beta)}$	49
5 Sequências Recorrentes e Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário	60

Sumário

1	Introdução	1
2	Polinômios Ortogonais na Reta Real	7
2.1	Propriedades dos Polinômios Ortogonais	7
2.2	Alguns Polinômios Ortogonais Clássicos	9
2.2.1	Polinômios de Jacobi	10
2.2.2	Polinômios de Gegenbauer	11
2.3	Polinômios de Koornwinder	12
3	Seqüências Encadeadas Positivas	14
3.1	Frações Contínuas	14
3.2	Seqüências Encadeadas Positivas	20
3.3	Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais na Reta Real . .	28
4	Seqüências Encadeadas Generalizadas e Medidas Relacionadas	34
4.1	Preliminares	34
4.2	Seqüências Encadeadas Generalizadas	40
4.3	Seqüências Encadeadas Generalizadas e Medidas Relacionadas . .	42
4.4	Uma Aplicação para os Polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$	44
4.5	Monotonicidade dos Zeros de $K_n^{(\lambda, M, k)}$	49
5	Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário	60

5.1	Polinômios de Szegő	60
5.2	Polinômios Para-ortogonais	62
5.3	Relações entre Polinômios de Szegő e Polinômios Ortogonais na Reta Real	68
5.4	Alguns Exemplos de Polinômios de Szegő	75
Apêndice A		80
Apêndice B		82
Referências Bibliográficas		84

Os polinômios ortogonais simétricos P_n^{α} , $\alpha \geq 0$, em relação a uma medida positiva $d\mu$, satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$P_{n+1}^{\alpha}(x) = (x - \beta_n^{\alpha})P_n^{\alpha}(x) - \alpha_n^{\alpha}P_{n-1}^{\alpha}(x),$$

onde $P_0^{\alpha}(x) = 1$, $P_1^{\alpha}(x) = x - \beta_1^{\alpha}$, $\beta_n^{\alpha} \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1 + \alpha_{n+1}^{\alpha} > 0$, $\alpha \geq 1$ (veja, por exemplo, Chihara [4] e Szegő [17]). Poderemos citar algumas áreas que se beneficiam das propriedades desses polinômios, tais como, quadratura numérica, aproximação por polinômios quadrados incluindo série de Fourier, teoria de frações contínuas e outras.

Em 1995, Shi Hanga [15] obteve o seguinte resultado na área de polinômios ortogonais: Sejam $d\mu_1$ e $d\mu_2$ duas medidas positivas simétricas relacionadas por $d\mu_2(x) = (1 + qx^2)d\mu_1(x)$, onde q é real e positivo e c uma constante apropriada. Então, associada a essas medidas, existe uma sequência de números positivos $\{\beta_n\}$, com $\beta_0 = 1$, tal que

$$\begin{aligned} (\beta_n - 1)(\beta_{n+1} + 1) &= 4q\alpha_{n+1}^2, \\ \beta_n &\leq 1, \\ (\beta_n - 1)(\beta_{n-1} + 1) &= 4q\alpha_n^2. \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

Este resultado surgiu como consequência de estudos sobre os polinômios simétricos ortogonais (veja, por exemplo, Shi Hanga [16]). Seu recente trabalho [1],

Capítulo 1

Introdução

Os polinômios ortogonais mônicos P_n^ϕ , $n \geq 0$, em relação a uma medida positiva $d\phi$, satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x),$$

onde $P_0^\phi(x) = 1$, $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, $\beta_n^\phi \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $\alpha_{n+1}^\phi > 0$, $n \geq 1$ (veja, por exemplo, Chihara [4] e Szegő [17]). Podemos citar algumas áreas que se beneficiam das propriedades desses polinômios, tais como, quadratura numérica, aproximação por mínimos quadrados inclusive série de Fourier, teoria de frações contínuas e outras.

Em 1996, Sri Ranga [15] obteve o seguinte resultado na área de polinômios ortogonais: Sejam $d\phi_1$ e $d\phi_2$ duas medidas positivas simétricas relacionadas por $cd\phi_2(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x)$, onde q é real e positivo e c uma constante apropriada. Então, associada a essas medidas, existe uma seqüência de números positivos $\{l_n\}$, com $l_0 = 1$, tal que

$$\begin{aligned}(l_n - 1)(l_{n-1} + 1) &= 4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}, \\ n &\geq 1. \quad (1.0.1) \\ (l_n - 1)(l_{n+1} + 1) &= 4q\alpha_{n+1}^{\phi_2},\end{aligned}$$

Este resultado surgiu como consequência de estudos sobre os polinômios similares aos ortogonais (veja, por exemplo, Sri Ranga [16]). Seu recente trabalho [1],



juntamente com Berti, mostra que (1.0.1) vale para qualquer valor real (não necessariamente positivo) escolhido para q , de maneira que $d\phi_1$ e $d\phi_2$ permaneçam medidas válidas. Com as substituições $k^2 = -1/q$ e $g_n = (1 + l_{n+1})/2$, por exemplo, os resultados associados a (1.0.1) podem ser escritos como

$$cd\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x) \quad (1.0.2)$$

e

$$(1 - g_{n-1})g_{n-2} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2}, \quad (1 - g_{n-1})g_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}, \quad n \geq 1 \quad (1.0.3)$$

com $g_{-1} = 1$. Então, como $\alpha_{n+1}^{\phi_1}/k^2 > 0$ e $\alpha_{n+1}^{\phi_2}/k^2 > 0$, temos $0 < g_n < 1$, $n \geq 1$, se $0 < g_0 = 1 - \alpha_2^{\phi_1}/k^2 < 1$ (veja Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [3]), ou seja, $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ é uma seqüência de parâmetros associada à seqüência encadeada positiva $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}/k^2\}_{n=1}^\infty$. Dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência encadeada positiva, se existe uma segunda seqüência $\{h_k\}_{k=0}^\infty$, tal que $0 \leq h_0 < 1$, $0 < h_n < 1$ e $(1 - h_{n-1})h_n = a_n$ para $n \geq 1$.

Segundo Chihara [6], as seqüências encadeadas surgiram de certas frações contínuas nos estudos de E.B. Van Vleck, e cuja teoria foi formalizada por Wall [21]. Tais seqüências foram estudadas por Chihara [4, 5, 6], e também por vários autores, veja [3, 18, 23].

Com o uso das propriedades dessas seqüências juntamente com o resultado (1.0.3), novos resultados foram obtidos para alguns polinômios ortogonais relacionados a outros bem conhecidos e, em especial, alguns casos particulares de polinômios ortogonais considerados por Koornwinder [11]. Em 1984, Koornwinder considerou os polinômios ortogonais $P_n^{\alpha, \beta, M, N}$ associados à medida $d\phi$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\phi(x) = Mf(-1) + Nf(1) + L \int_{-1}^1 f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$

com $L = \frac{\Gamma(s+1)}{2^s \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}$. Seguindo Kiesel e Wimp [10] chamamos esses polinômios de *polinômios de Koornwinder*. Um de seus aspectos interessantes é que os mesmos são soluções de certas equações diferenciais de segunda ordem. Em



nosso trabalho, consideramos ainda os polinômios ortogonais $K_n^{(\lambda, M, k)}$ associados à medida $d\phi(\lambda, M, k; x)$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\phi(\lambda, M, k; x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-k) + f(k)] + \{\tilde{S}^{(\lambda)}(k)\}^{-1} \int_{-1}^1 f(x) \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2-x^2} dx \right\},$$

com $\tilde{S}^{(\lambda)}(k) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2-x^2} dx$ e $\lambda > -1/2$. A medida tem saltos nos pontos $-k$ e k .

O objetivo inicial proposto para este trabalho foi fazer um estudo sobre polinômios ortogonais na reta real utilizando seqüências encadeadas positivas e uma extensão dessas seqüências, que são chamadas seqüências encadeadas generalizadas, onde são descartadas as exigências de que os parâmetros h_n satisfaçam às condições $0 \leq h_0 < 1$ e $0 < h_n < 1$, $n \geq 1$, e além disso estudar o comportamento dos zeros dos polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$, abordados no artigo de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [3]. O desenvolvimento do estudo proposto inicialmente constitui os Capítulos 2, 3 e 4 desta dissertação.

Contudo, durante nosso estudo, surgiu a oportunidade de aplicarmos seqüências encadeadas no estudo dos polinômios de Szegő, que são ortogonais no círculo unitário (veja, por exemplo, Szegő [17]) definidos por

$$\int_C S_n(z) \overline{S_m(z)} d\nu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\nu(e^{i\theta}) = 0, \quad m \neq n,$$

sendo $d\nu(z)$ uma medida positiva no círculo unitário, isto é, $\nu(e^{i\theta})$ é uma função real, limitada e não decrescente para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Outros autores têm utilizado seqüências encadeadas no estudo de polinômios ortogonais no círculo unitário (veja, por exemplo, Zhedanov [23]), e, muitos têm estudado os polinômios de Szegő (veja, por exemplo, [8, 20]).

Em 1989 Jones, Njåstad e Thron [7] consideraram os polinômios $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$, com $|w_n| = 1$, denominando-os por polinômios para-ortogonais,



que satisfazem

$$\int_C [S_n(z) + w_n S_n^*(z)] \overline{z^s} d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1,$$

onde $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/z)}$ são os polinômios recíprocos e $\overline{S_n}$ indica que somente os coeficientes de S_n são conjugados. Mostraram, por exemplo, que os zeros de $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$ são distintos e estão no círculo unitário.

No Capítulo 5 desta dissertação, considerando somente os polinômios de Szegő reais (que são associados a certas medidas simétricas), construímos os polinômios mônicos

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \quad \text{e} \quad (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_n(0)}$$

para $n \geq 1$, que são casos especiais dos polinômios para-ortogonais e satisfazem à seguinte relação

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1.$$

Os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4\alpha_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.0.4)$$

com $R_0^{(i)}(z) = 1$, $R_1^{(i)}(z) = z+1$ e

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{(1)} &= \frac{1}{4}(1+a_{n-1})(1-a_n) > 0, \\ \alpha_{n+1}^{(2)} &= \frac{1}{4}(1-a_n)(1+a_{n+1}) > 0, \end{aligned} \quad n \geq 1.$$

Observamos que os coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{(1)}\}$ e $\{\alpha_{n+1}^{(2)}\}$ da relação (1.0.4) são seqüências encadeadas, cujas seqüências de parâmetros são dadas respectivamente por

$$\left\{ g_n^{(1)} = \frac{1-a_n}{2} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad \left\{ g_n^{(2)} = \frac{1+a_{n+1}}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Deste modo, através da transformação de Delsarte-Genin $x = x(z) = \frac{(z^{1/2} + z^{-1/2})}{2}$ (veja Zhedanov [23]) podemos obter $P_n^{\phi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, que satisfazem às relações de recorrência

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x), \quad n \geq 1,$$

e são ortogonais em $[-1, 1]$ em relação as medidas $d\phi_1(x) = -d\nu(z)$ e $d\phi_2(x) = -(1 - x^2)d\nu(z)$, respectivamente, e $\alpha_{n+1}^{(i)} = \alpha_{n+1}^{\phi_i}$. É importante observar que $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são dadas por (1.0.2) com $k = 1$, ou seja, $d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x)$. O estudo dessas medidas, que foram dadas originalmente por Sri Ranga [15], como já foi mencionado, teve um papel fundamental em nossas pesquisas. O teorema abaixo, que é o Teorema 5.3.2, demonstrado no Capítulo 5, é uma das importantes contribuições deste trabalho. Precisamente, ele relaciona polinômios ortogonais na reta real com os polinômios de Szegő, e ainda mostra como os coeficientes de reflexão $a_n = S_n(0)$ podem ser gerados.

Teorema: *Sejam $d\phi_1(x)$ e $d\phi_2(x)$ duas medidas positivas em $[-1, 1]$ tais que $d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x)$. Sejam os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ associados a estas medidas que satisfazem*

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i}P_{n-1}^{\phi_i}(x), \quad n \geq 1.$$

Seja

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z - 1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2}P_n^{\phi_i}(x(z))$. Então, S_n são os polinômios de Szegő mônicos associados à medida $d\nu(z) = -d\phi_1(x(z))$. Além disso, os coeficientes de reflexão $a_n = S_n(0)$ podem ser gerados por

$$a_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{(1 + a_{n-1})} \quad \text{ou} \quad a_{n+1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{(1 - a_n)}, \quad n \geq 1.$$

Dado explicitamente,

$$a_{2n-1} = 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \dots \alpha_3^{\phi_2} \mu_0^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \dots \alpha_3^{\phi_1} \mu_0^{\phi_1}} - 1, \quad a_{2n} = 2 \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2} \alpha_{2n-2}^{\phi_2} \dots \alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1} \alpha_{2n-2}^{\phi_1} \dots \alpha_2^{\phi_1}} - 1, \quad n \geq 1,$$

onde $\mu_0^{\phi_i}$, $i = 1, 2$, são os respectivos momentos de ordem zero.

Um dos resultados interessantes deste trabalho, é a aplicação deste teorema feita juntamente com os polinômios ortogonais associados à medida $d\phi_1$ definida em $[-1, 1]$, com $\lambda > -3/2$, $M \geq 0$ e $0 < \tau \leq 1$, tal que

$$\int_{-1}^1 f(x) d\phi_1(x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-1) + f(1)] + c^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2}}{1 - x^2} dx \right\}$$

sendo

$$c = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2}}{1 - x^2} dx.$$

Essa medida tem saltos em $-\tau$ e τ . Quando $\tau = 1$ (e $\lambda > -1/2$), os polinômios associados a $d\phi_1$ são os polinômios de Koornwinder simétricos (veja [11]).

Essa dissertação está dividida da seguinte forma:

No Capítulo 2, fazemos um breve estudo sobre polinômios ortogonais na reta real. Apresentamos, também, um resumo sobre os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi e de Gegenbauer. Consideramos ainda os polinômios de Koornwinder.

No Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e resultados sobre frações contínuas e fazemos um estudo sobre seqüências encadeadas positivas, que possuem muitas aplicações nos estudos de polinômios ortogonais.

No Capítulo 4, relatamos os resultados obtidos no trabalho recente de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [3] sobre seqüências encadeadas generalizadas e medidas relacionadas, tais como, $cd\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x)$. Como uma aplicação desses resultados, utilizamos os polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$, e ainda apresentamos propriedades de monotonicidade dos seus zeros.

No Capítulo 5, aplicamos seqüências encadeadas no estudo dos polinômios de Szegő (polinômios ortogonais definidos no círculo unitário). Fazemos um estudo sobre polinômios para-ortogonais e sobre certas relações entre polinômios de Szegő e polinômios ortogonais na reta real.



Capítulo 2

Polinômios Ortogonais na Reta Real

Neste capítulo consideramos algumas definições sobre os polinômios ortogonais na reta real e algumas de suas propriedades, em particular, alguns polinômios ortogonais clássicos, tais como os polinômios de Jacobi e os polinômios de Gegenbauer que são casos especiais dos polinômios de Jacobi. Na Seção 2.3, apresentamos um estudo sobre os polinômios ortogonais de Koornwinder, que podem ser encontrados em Koornwinder [11]. Os resultados deste capítulo, exceto a última seção, podem ser encontrados nos livros de Chihara [4], Krylov [12] e Szegő [17].

2.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais

Definição 2.1.1. *Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e ϕ uma função real, limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Os valores*

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\phi(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

*são chamados de **momentos**. Se os momentos μ_r , $r = 0, 1, 2, \dots$, existem, $d\phi$ é chamada uma **medida** (medida positiva) em (a, b) . Quando $d\phi(x) = w(x)dx$, onde $w(x) \geq 0$ em (a, b) , mas não identicamente nula, w é uma função peso.*

Definição 2.1.2. Dizemos que $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma **seqüência de polinômios ortogonais** com relação à medida $d\phi$ em (a, b) , se

i) Q_n é de grau exatamente n ;

$$ii) \langle Q_n, Q_m \rangle = \int_a^b Q_n(x) Q_m(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Se $\rho_n = 1$, $n \geq 0$, dizemos que $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortonormais.

Denotamos os coeficientes dos polinômios ortogonais Q_n por $a_{n,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$, ou seja,

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

Teorema 2.1.1 (Relação de recorrência de três termos). Seja $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais em (a, b) , relativamente à medida $d\phi$. Então

$$Q_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})Q_n(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.1.1)$$

com $Q_{-1}(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$ e α_{n+1} , β_{n+1} , $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xQ_n, Q_n \rangle}{\langle Q_n, Q_n \rangle}, \quad (2.1.2)$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos, ou seja, o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1, neste caso $\gamma_{n+1} = 1$ e a relação de recorrência é da forma

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (2.1.3)$$

com $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ e β_{n+1} , $\alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, onde

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} > 0.$$



Teorema 2.1.2. *Seja $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) , relativamente à medida $d\phi$. Então, os zeros de Q_n são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Denotamos os zeros dos polinômios ortogonais Q_n por $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$, em ordem crescente, ou seja,

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}.$$

Definição 2.1.3. *Chamamos de verdadeiro intervalo de ortogonalidade ao menor intervalo fechado $[\xi_1, \eta_1]$, que contém todos os zeros dos polinômios ortogonais Q_n . Temos ainda que*

$$\xi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1} \quad e \quad \eta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n}.$$

Definição 2.1.4. *Dada a seqüência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n\}_{n=0}^\infty$, definimos os polinômios associados mônicos à P_n por*

$$O_n(x) = \frac{1}{\mu_0} \int_a^b \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} d\phi(t), \quad n \geq 1.$$

Os polinômios associados mônicos O_n são polinômios de grau $n - 1$.

Teorema 2.1.3. *Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos. Os polinômios associados mônicos O_n , satisfazem a mesma relação de recorrência dos polinômios P_n , com condições iniciais $O_0(x) = 0$ e $O_1(x) = 1$.*

2.2 Alguns Polinômios Ortogonais Clássicos

Segundo Chihara [4] os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Tchebichef, Legendre e Gegenbauer), Laguerre e Hermite são chamados de polinômios ortogonais clássicos. Nesta seção consideramos algumas propriedades básicas dos polinômios de Jacobi e, em particular, os polinômios de Gegenbauer. Para isso, apresentamos primeiramente a definição da função especial Gama e série hipergeométrica.



Função Gama

Definição 2.2.1. A função gama foi definida por Euler, em 1729, da seguinte forma

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^x \left(\frac{k}{k+x} \right) \right] \text{ para } x \neq 0, -1, -2, \dots$$

A função gama também pode ser dada como integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0.$$

Série Hipergeométrica

Definição 2.2.2. Definimos uma série hipergeométrica por

$${}_2F_1(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n,$$

com $(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)$, $n \geq 1$ e $(a)_0 = 1$, $a \neq 0$. O símbolo $(a)_n$ é chamado de símbolo de Pochhammer-Barnes (veja, por exemplo, Szegő [17]).

2.2.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à medida $d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. São denotados por $P_n^{(\alpha, \beta)}$.

Através da fórmula de Rodrigues, podem ser definidos por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

O coeficiente do termo de maior grau para tais polinômios é dado por

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Teorema 2.2.1. Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_m^{(\alpha, \beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi é dada por

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)},$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}.$$

2.2.2 Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer, também chamados polinômios Ultraesféricos, são casos especiais dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = (\lambda - 1/2)$, $\lambda > -1/2$ e $\lambda \neq 0$, pois para $\lambda = 0$ temos os polinômios de Tchebichef. Eles são ortogonais em $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx$.

Em Chihara [4, p.144] os polinômios de Gegenbauer $Q_n^{(\lambda)}$, são dados por

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x),$$

onde $P_n^{(\alpha, \alpha)}$ são os polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$ e

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, \quad a \geq b.$$

Podemos, então, escrever os polinômios de Gegenbauer como

$$\begin{aligned} Q_n^{(\lambda)}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+1/2)} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x). \end{aligned}$$



Em Rainville [13], os polinômios de Gegenbauer na forma mônica, $P_n^{(\lambda)}$, são dados em termos da série hipergeométrica

$$P_n^{(\lambda)}(x) = (2)^{-n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n} {}_2F_1(-n, n+2\lambda+2; \lambda+3/2; \frac{1-x}{2}), \quad n \geq 1.$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer mônicos é da forma

$$P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xP_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)} P_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.2.1)$$

com $P_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $P_0^{(\lambda)}(x) = 1$. Consequentemente, os coeficientes $\alpha_{n+1}^{(\lambda)}$ são dados por

$$\alpha_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)}.$$

2.3 Polinômios de Koornwinder

Em 1984, Koornwinder considerou os polinômios $P_n^{\alpha, \beta, M, N}$ definidos por

$$P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x) = \left[\frac{(s)_n}{n!} \right]^2 \left\{ \frac{1}{s} [(1-x)MB_n - (1+x)NA_n] \frac{d}{dx} + A_n B_n \right\} P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

para $n \geq 0$, onde $s = \alpha + \beta + 1$,

$$A_n = \frac{(\alpha+1)_n n!}{(\beta+1)_n (s)_n} + \frac{n(n+s)}{s(\beta+1)} M, \quad B_n = \frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n (s)_n} + \frac{n(n+s)}{s(\alpha+1)} N$$

e $P_n^{(\alpha, \beta)}$ são os polinômios de Jacobi.

Os polinômios $P_n^{\alpha, \beta, M, N}$ são ortogonais em $[-1, 1]$ associados à medida $d\phi$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\phi(x) = Mf(-1) + Nf(1) + L \int_{-1}^1 f(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx,$$

onde $L = \frac{\Gamma(s+1)}{2^s \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}$. A medida tem saltos nos pontos -1 e 1 , e sua parte contínua é a medida associada aos polinômios de Jacobi. A relação de recorrência de três termos associada a esses polinômios foi dada por Kiesel e Wimp [10].

No caso $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ e $M = N$, temos os polinômios de Koornwinder simétricos $P_n^{\lambda-1/2, \lambda-1/2, M, M}$, que denotamos por $K_n^{(\lambda, M)}$.

Consideramos ainda os polinômios ortogonais $K_n^{(\lambda, M, k)}$ associados à medida $d\phi(\lambda, M, k; x)$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\phi(\lambda, M, k; x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-k) + f(k)] + \{\tilde{L}^{(\lambda)}(k)\}^{-1} \int_{-1}^1 f(x) \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2-x^2} dx \right\}, \quad (2.3.1)$$

onde

$$\tilde{L}^{(\lambda)}(k) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2-x^2} dx.$$

Neste caso, temos k, λ números reais tais que $k > 1$ e $\lambda > -3/2$ ou $k = 1$ e $\lambda > -1/2$.

Se $k = 1$, então temos os polinômios de Koornwinder simétricos $K_n^{(\lambda, M)}(x) = K_n^{(\lambda, M, 1)}(x)$ e a medida $d\phi(\lambda, M, 1; x)$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\phi(\lambda, M, 1; x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-1) + f(1)] + \frac{2^{-2\lambda} \Gamma(2\lambda+1)}{[\Gamma(\lambda+1/2)]^2} \int_{-1}^1 f(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx \right\}.$$

Esta medida tem saltos nos pontos -1 e 1 , e sua parte contínua é a medida associada aos polinômios de Gegenbauer.

Capítulo 3

Seqüências Encadeadas Positivas

Neste capítulo, nosso objetivo é fazer um estudo sobre seqüências encadeadas positivas, que possuem muitas aplicações no estudo de polinômios ortogonais. Apresentamos então, alguns conceitos e resultados sobre frações contínuas. Em Chihara [4], encontramos todos os resultados aqui apresentados. Acrescentamos também, detalhes de demonstrações omitidos pelo autor. Para maiores detalhes veja, por exemplo, Wall [21].

3.1 Frações Contínuas

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (3.1.1)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências arbitrárias de números complexos (ou funções complexas). Uma fração contínua pode ser finita ou infinita. Consideremos a seqüência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte maneira

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} \\
&\vdots \\
C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

C_n , que é uma fração contínua finita, é chamada de **n-ésima convergente** (ou **aproximante**) da fração contínua (3.1.1).

Neste trabalho, adotamos as seguintes notações para as frações contínuas (3.1.1) e (3.1.2), respectivamente

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \tag{3.1.3}$$

e

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}. \tag{3.1.4}$$

É naturalmente possível que certos convergentes sejam indefinidos. Por exemplo, C_2 não tem sentido se $b_1 b_2 = -a_2$. Contudo, se quisermos ainda considerar a correspondente fração contínua, fazemos uso da definição abaixo.

Definição 3.1.1. Dizemos que a fração contínua (3.1.3) **converge** para o valor K (finito) se, no máximo um número finito de C_n sejam indefinidos, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua **diverge**.

Se a fração contínua converge para K , escrevemos

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots = K.$$

Da relação (3.1.2) podemos escrever $C_n = \frac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Notemos, por exemplo, que $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$ e $B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0$. Deste modo, temos o resultado a seguir.

Teorema 3.1.1. *Sejam as seqüências $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ tais que*

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (3.1.5)$$

com $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$ e $B_0 = 1$. Então, a n -ésima convergente, C_n , dada por (3.1.4), satisfaz $C_n = A_n/B_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Demonstração: Mostremos por indução. Para $n = 1$, o resultado vale, pois

$$A_1 = b_0 b_1 + 1 \cdot a_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} \quad \text{e} \quad B_1 = b_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1}.$$

Suponhamos que (3.1.5) seja válido para $n \leq k$, e mostremos que vale para $n = k + 1$. Como C_{k+1} pode ser obtido de C_k pela substituição de b_k , e pela hipótese de indução, podemos escrever

$$C_{k+1} = \frac{\left[b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right] A_{k-1} + a_k A_{k-2}}{\left[b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right] B_{k-1} + a_k B_{k-2}}.$$

Usando (3.1.5) com $n = k$ e $n = k + 1$, consecutivamente, obtemos

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \frac{b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} A_{k-1}}{b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} B_{k-1}} = \frac{A_k + (a_{k+1}/b_{k+1}) A_{k-1}}{B_k + (a_{k+1}/b_{k+1}) B_{k-1}} \\ &= \frac{b_{k+1} A_k + a_{k+1} A_{k-1}}{b_{k+1} B_k + a_{k+1} B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}. \end{aligned}$$

■



Segundo Chihara [4], as fórmulas dadas por (3.1.5), são conhecidas por **fórmulas de Wallis**, onde A_n é chamado o **n-ésimo numerador parcial** e B_n é o **n-ésimo denominador parcial** da fração contínua.

Através das fórmulas de recorrência de Wallis, podemos obter duas relações importantes. Primeiramente, se multiplicarmos a primeira fórmula por B_{n-1} e a segunda por A_{n-1} e, subtraímos uma da outra, obtemos

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = -a_n (A_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} A_{n-2}),$$

daí

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n, \quad n \geq 1. \quad (3.1.6)$$

A relação (3.1.6) é conhecida como **fórmula do determinante** (veja, Wall [21, p.15]), pois

$$\begin{vmatrix} A_n & B_n \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{vmatrix} = A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1}.$$

Agora, dividindo (3.1.6) por $B_{n-1} B_n$, obtemos

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

Lembrando que $\frac{A_0}{B_0} = b_0$, temos

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \dots a_k}{B_{k-1} B_k}, \quad (3.1.7)$$

desde que $b_k \neq 0$ e $B_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$.

Lema 3.1.1. *Seja $m_0 = 0$, então, o n-ésimo denominador parcial da fração contínua*

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{(1 - m_0)m_1}{1} - \frac{(1 - m_1)m_2}{1} - \dots} \quad (3.1.8)$$

é

$$B_n = (1 - m_0)(1 - m_1) \dots (1 - m_{n-1}), \quad n \geq 1. \quad (3.1.9)$$



Demonstração: Provemos por indução. Da fração contínua (3.1.8), concluímos que $a_1 = -1$, $a_n = -(1 - m_{n-2})m_{n-1}$, $n \geq 2$ e $b_n = 1$, para $n \geq 0$. Deste modo, (3.1.9) vale para $n = 1$, pois pela fórmula de Wallis, $B_1 = 1 - 0 = 1 - m_0$.

Suponhamos que (3.1.9) seja válido para $n \leq k$, e provemos que vale para $n = k + 1$. Temos

$$B_{k+1} = B_k + a_{k+1}B_{k-1}.$$

Substituindo o valor de a_{k+1} e usando a hipótese de indução, concluímos que

$$B_{k+1} = (1 - m_0)(1 - m_1) \cdots (1 - m_{k-1})(1 - m_k).$$

Logo, provamos que a igualdade (3.1.9) vale para todo $n \geq 1$. ■

Lema 3.1.2. *Seja $\alpha_n = (1 - m_{n-1})m_n$, onde $m_0 = 0$, $0 < m_n < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Então, a fração contínua*

$$1 - \frac{\alpha_1}{1} - \frac{\alpha_2}{1} - \frac{\alpha_3}{1} - \dots \quad (3.1.10)$$

converge para $(1 + L)^{-1}$, onde

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}.$$

Demonstração: Sejam $C_n = \frac{A_n}{B_n}$ o n -ésimo convergente da fração contínua (3.1.10), e

$$\frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*} = 1 - \frac{1}{\frac{A_n}{B_n}} = 1 - \frac{1}{1} - \frac{\alpha_1}{1} - \dots - \frac{\alpha_n}{1}.$$

Pelo Lema 3.1.1, podemos dizer que $B_{n+1}^* = (1 - m_0) \cdots (1 - m_n) > 0$. A positividade de B_{n+1}^* segue do fato de que todos os termos m_n são tais que $0 < m_n < 1$. Pela igualdade (3.1.7) temos, com $\alpha_0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*} &= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_k}{B_k^* B_{k+1}^*} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{m_1 m_2 \cdots m_k}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_k)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*}} = \frac{1}{1 + L}.$$

■

Observação: Aqui, L pode ser infinito. Neste caso, a fração contínua converge para 0.

Teorema 3.1.2. *Seja $\beta_n = (1 - g_{n-1})g_n$, onde $0 \leq g_0 < 1$ e $0 < g_n < 1$ para $n \geq 1$. Então*

$$1 - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{1} - \frac{\beta_3}{1} - \dots - \frac{\beta_n}{1} - \dots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \quad (3.1.11)$$

onde

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Demonstração: O caso $g_0 = 0$ é dado pelo Lema 3.1.2, onde $L = G$.

Suponhamos então que $g_0 > 0$. Sejam C_n e C_n^* as n -ésimas convergentes das respectivas frações contínuas (3.1.11) e

$$1 - \frac{\beta_1^*}{1} - \frac{\beta_2^*}{1} - \dots - \frac{\beta_n^*}{1} - \dots \quad (3.1.12)$$

onde $\beta_1^* = g_0$ e $\beta_i^* = \beta_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$. Então

$$C_n^* = 1 - \frac{\beta_1^*}{1} - \frac{\beta_2^*}{1} - \dots - \frac{\beta_n^*}{1}$$

onde $\beta_i^* = (1 - g_{i-1}^*)g_i^*$, com $g_0^* = 0$, $g_i^* = g_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$.

De acordo com o Lema 3.1.2, C_n^* converge para $(1 + K)^{-1}$, onde K é dado por

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1^* g_2^* \cdots g_n^*}{(1 - g_1^*)(1 - g_2^*) \cdots (1 - g_n^*)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0 g_1 \cdots g_{n-1}}{(1 - g_0)(1 - g_1) \cdots (1 - g_{n-1})} \\ &= \frac{g_0}{1 - g_0} [1 + G]. \end{aligned}$$



Sabemos que a $(n + 1)$ -ésima convergente da fração contínua (3.1.12) pode ser escrita como $C_{n+1}^* = 1 - g_0 C_n^{-1}$, assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = g_0 + \frac{g_0}{K} = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}.$$

Portanto, a fração contínua (3.1.11) converge para $g_0 + (1 - g_0)(1 + G)^{-1}$, onde

$$G = \frac{1 - g_0}{g_0} K - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \dots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_n)}.$$

■

3.2 Seqüências Encadeadas Positivas

Definição 3.2.1. Uma seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada **seqüência encadeada positiva** se existir uma seqüência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$i) 0 \leq g_0 < 1, 0 < g_n < 1, n \geq 1, \quad (3.2.1)$$

$$ii) a_n = (1 - g_{n-1})g_n, n = 1, 2, 3, \dots,$$

$\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada uma **seqüência de parâmetros** para $\{a_n\}$, g_0 é o **parâmetro inicial**.

Observação: Neste capítulo, vamos nos referir à seqüência encadeada positiva somente como seqüência encadeada, e consideramos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ somente por $\{a_n\}$ e $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ por $\{g_k\}$.

Embora não seja difícil construir exemplos de seqüências encadeadas, dada uma seqüência, não é trivial determinar se esta é encadeada. Em alguns casos, podemos encontrar uma seqüência de parâmetros, fazendo $g_0 = 0$, $g_1 = a_1$ e, resolvendo (3.2.1) sucessivamente encontramos g_i . Como exemplo, consideramos a seqüência constante $\{1/4\}$ e calculamos sua seqüência de parâmetros

$$g_0 = 0, g_1 = \frac{1}{4}, g_2 = \frac{1}{3}, g_3 = \frac{3}{8}, g_4 = \frac{2}{5}, \dots$$

e, por indução, mostra-se que $g_n = \frac{n}{2(n+1)}$, $n \geq 0$.



Por outro lado, $\{a_n\} = \{1/4\}$ também tem uma sequência de parâmetros simples $\{1/2\}$. Desta maneira, observamos que a sequência encadeada $\{1/4\}$ não possui uma única sequência de parâmetros. Podemos ainda, mostrar que a sequência de parâmetros da sequência encadeada $\{a_n\} = \{a\}$, onde $0 < a \leq \frac{1}{4}$, não é única. De fato, seja $\{l\}$ uma sequência de parâmetros de $\{a\}$, então $a = (1-l)l$, de onde concluímos que $l = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$, quando $0 < a \leq \frac{1}{4}$. Assim

$$\begin{aligned} a &= \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}\right) \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}\right) \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}, \end{aligned}$$

para $0 < a \leq \frac{1}{4}$ e $0 < l < 1$. Portanto, existem pelo menos duas sequências de parâmetros $\{h_k\}$ e $\{g_k\}$ para a sequência encadeada constante $\{a\}$ tais que

$$h_k = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1-4a}] \quad \text{e} \quad g_k = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4a}],$$

com $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\{a_n\}$ uma sequência encadeada e, $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$, sequências de parâmetros para $\{a_n\}$. Então, $g_k < h_k$ para $k \geq 1$ se, e somente se, $g_0 < h_0$.*

Demonstração: Se $(1 - g_{n-1})g_n = a_n = (1 - h_{n-1})h_n$, então

$$\frac{g_k}{h_k} = \frac{(1 - h_{k-1})}{(1 - g_{k-1})}, \quad k \geq 1. \quad (3.2.2)$$

Deste modo, $0 < g_k < h_k < 1$ se, e somente se, $0 < g_{k-1} < h_{k-1} < 1$. Logo, $g_0 < h_0$ se, e somente se, $g_k < h_k$, para $k \geq 1$. ■

Teorema 3.2.2. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Se $\{a_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 tal que $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente sequência de parâmetros $\{h_k\}$.*

Demonstração: Se $0 \leq h_0 < g_0$, temos $0 < \frac{1}{1-h_0} < \frac{1}{1-g_0}$, e ainda, como a_1 é positivo, $0 < \frac{a_1}{1-h_0} < \frac{a_1}{1-g_0}$. Mas $\frac{a_1}{1-g_0} = g_1$, pois g_1 satisfaz $a_1 = (1-g_0)g_1$,



deste modo

$$0 < \frac{a_1}{1-h_0} < \frac{a_1}{1-g_0} = g_1 < 1 \quad \text{pois } 0 < g_1 < 1.$$

Assim, existe h_1 tal que

$$\frac{a_1}{1-h_0} = h_1 < g_1 \text{ com } a_1 = (1-h_0)h_1, \quad 0 < h_1 < 1.$$

Suponhamos que exista h_k tal que $a_k = (1-h_{k-1})h_k$, com $0 < h_k < g_k < 1$, então

$$0 < \frac{1}{1-h_k} < \frac{1}{1-g_k},$$

e ainda, como $a_{k+1} > 0$, temos

$$0 < \frac{a_{k+1}}{1-h_k} < \frac{a_{k+1}}{1-g_k} = g_{k+1}.$$

Deste modo, existe h_{k+1} tal que $h_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{1-h_k}$, assim, $a_{k+1} = (1-h_k)h_{k+1}$, com $0 < h_{k+1} < g_{k+1} < 1$. Portanto, por indução, mostramos que existe uma seqüência de parâmetros $\{h_k\}$. ■

O Teorema 3.2.2, nos mostra que, se o parâmetro inicial de uma seqüência de parâmetros for positivo, sempre existe uma outra seqüência de parâmetros. Além disso, toda seqüência encadeada possui uma seqüência de parâmetros $\{m_k\}$ tal que $m_0 = 0$ e, pelo Teorema 3.2.1, temos $m_n < g_n$ para qualquer outra seqüência de parâmetros $\{g_k\}$.

Definição 3.2.2. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência encadeada. Uma seqüência de parâmetros $\{m_k\}$ é chamada seqüência de parâmetros minimal se $m_0 = 0$.*

Caso a seqüência de parâmetros minimal seja a única seqüência de parâmetros para $\{a_n\}$, então, dizemos que $\{a_n\}$ determina seus parâmetros unicamente.

Definição 3.2.3. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência encadeada. Uma seqüência de parâmetros $\{M_k\}$ é chamada seqüência de parâmetros maximal se $M_k > g_k$, $k \geq 0$, para qualquer outra seqüência de parâmetros $\{g_k\}$.*



Teorema 3.2.3. *Toda seqüência encadeada possui uma seqüência de parâmetros maximal.*

Demonstração: Se $\{a_n\}$ é uma seqüência encadeada que determina seus parâmetros unicamente, então sua seqüência de parâmetros minimal é também sua seqüência de parâmetros maximal.

Suponhamos que $\{a_n\}$ não determine seus parâmetros unicamente e seja M_0 o menor limite superior para o conjunto de todos os parâmetros iniciais, assim $0 < M_0 \leq 1$. Para cada x tal que $0 \leq x < M_0$, existe uma seqüência de parâmetros $\{g_k(x)\}$ tal que $g_0(x) = x$. Para cada valor de n fixo, $g_n(x)$ é uma função crescente, pois se $x_1 < x_2$, temos

$$g_0(x_1) = x_1 < x_2 = g_0(x_2)$$

e, portanto, pelo Teorema 3.2.1, $g_n(x_1) < g_n(x_2)$, para $n \geq 1$.

Como $g_n(x)$ é uma função crescente e limitada (veja (3.2.1)), podemos definir

$$M_n = \lim_{x \rightarrow M_0^-} g_n(x).$$

Portanto, $0 < g_n(x) < M_n \leq 1$, $n > 0$ e, quando $x \rightarrow M_0^-$ em $(1 - g_{n-1}(x))g_n(x) = a_n$, obtemos

$$(1 - M_{n-1})M_n = a_n.$$

Deste modo, $0 < M_n < 1$ para todo n , pois $0 < a_n < 1$. Logo $\{M_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$. ■

Dada uma seqüência $\{a_n\}$, definimos a seqüência $\{a_n^{(k)}\}$ por $a_n^{(k)} = a_{n+k}$, $n = 1, 2, \dots$.

Teorema 3.2.4. (i) $\{a_n^{(1)}\}$ é uma seqüência encadeada com seqüência de parâmetros $\{g_k^{(1)}\}_{k=0}^\infty$, onde $\{g_k\}$ é uma seqüência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$.

(ii) Se $\{m_{1k}\}_{k=0}^\infty$ denota a seqüência de parâmetros minimal para $\{a_n^{(1)}\}$, então $m_{1k} < m_k^{(1)}$, $k \geq 0$.

(iii) $\{M_k^{(1)}\}_{k=0}^\infty$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$.

Demonstração: (i) Temos $a_n^{(1)} = a_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1} = (1 - g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)}$, $n \geq 1$. Logo, $\{a_n^{(1)}\}$ é uma seqüência encadeada tal que $g_k^{(1)}$ satisfaz $0 < g_n^{(1)} < 1$ para $n \geq 0$. Portanto, $\{g_k^{(1)}\}_{k=0}^\infty$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n^{(1)}\}$.

(ii) Como $\{m_{1k}\}_{k=0}^\infty$ é a seqüência de parâmetros minimal para $\{a_n^{(1)}\}$ e como $m_1 > 0$, temos que $m_{10} = 0 < m_1 = m_0^{(1)}$. Então, pelo Teorema 3.2.1

$$m_{1k} < m_k^{(1)}, \quad k \geq 0.$$

(iii) Seja $\{M'_k\}$ a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$. Desde que $\{M_k^{(1)}\}$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n^{(1)}\}$, temos $0 < M_1 = M_0^{(1)} \leq M'_0$. Logo, $(1 - M_0)M'_0 \geq (1 - M_0)M_1$. Então, existe $M^* \geq M_0$ tal que $(1 - M^*)M'_0 = (1 - M_0)M_1 = a_1$. Por hipótese, $\{M'_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$. Assim

$$(1 - M'_{k-1})M'_k = a_k^{(1)} = a_{k+1}.$$

Fazendo $k = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$(1 - M'_0)M'_1 = a_2$$

$$(1 - M'_1)M'_2 = a_3$$

$$\vdots$$

Desta forma, $\{M^*, M'_0, M'_1, M'_2, \dots\}$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n\}$, o que é uma contradição pois, sendo $\{M_k\}$ a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$, não pode ocorrer $M^* \geq M_0$, a menos que $M^* = M_0$. Neste caso, temos que $M'_k = M_k^{(1)}$, $k \geq 0$. Portanto, $\{M_k^{(1)}\}$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n^{(1)}\}$. ■

Teorema 3.2.5. *Seja $\{b_n\}$ uma seqüência encadeada com seqüência de parâmetros $\{h_k\}$. Se $a_n \leq b_n$, $n \geq 1$, então $m_k \leq h_k \leq M_k$, $k \geq 0$.*

Demonstração: Provemos por indução. Se $a_1 \leq b_1 = (1 - h_0)h_1$, então existe um g_1 tal que $a_1 = (1 - h_0)g_1$, $0 < g_1 \leq h_1 < 1$.



Suponhamos que $g_0, g_1, g_2, \dots, g_n$, com $g_0 = h_0$, existam e sejam tais que

$$a_k = (1 - g_{k-1})g_k, \quad 0 < g_k \leq h_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, por hipótese, $a_{n+1} \leq b_{n+1} = (1 - h_n)h_{n+1} \leq (1 - g_n)h_{n+1}$. Deste modo, existe g_{n+1} tal que

$$a_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1}, \quad 0 < g_{n+1} \leq h_{n+1} < 1.$$

Então, $\{a_n\}$ tem uma seqüência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que

$$g_0 = h_0 \quad \text{e} \quad 0 < g_n \leq h_n < 1, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.2.3)$$

Desde que $m_0 = 0 \leq g_0 = h_0$, temos pelo Teorema 3.2.1, que $m_k \leq g_k$ e, por (3.2.3), $m_k \leq h_k$, $k \geq 0$. Além disso, que $M_0 \geq g_0 = h_0$ e, pelo Teorema 3.2.4, aplicando este raciocínio para $\{a_n^{(k)}\}$ e $\{b_n^{(k)}\}$, obtemos

$$h_k = h_0^{(k)} \leq M_0^{(k)} = M_k, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Portanto, $m_k \leq h_k \leq M_k$. ■

De acordo com o Teorema 3.2.5, se $\{a_n\}$ determina seus parâmetros unicamente, então $\{a_n\}$ não é “dominada” por outra seqüência encadeada. Porém, se $\{a_n\}$ não determina seus parâmetros unicamente, podemos construir uma nova seqüência encadeada $\{b_n\}$ que domina $\{a_n\}$, tomando por exemplo, $b_n = (1 - h_{n-1})h_n$, onde

$$(a) \quad h_k = \sqrt{m_k M_k} \quad \text{ou}$$

$$(b) \quad h_k = \lambda m_k + (1 - \lambda)M_k, \quad 0 < \lambda < 1.$$

No caso (a), temos

$$\begin{aligned} b_n^2 &= (1 - \sqrt{m_{n-1}M_{n-1}})^2 m_n M_n \\ &> (1 - m_{n-1} - M_{n-1} + m_{n-1}M_{n-1})m_n M_n \\ &= [(1 - m_{n-1}) - M_{n-1}(1 - m_{n-1})]m_n M_n \\ &= (1 - m_{n-1})m_n(1 - M_{n-1})M_n = a_n^2. \end{aligned}$$



Logo, $b_n > a_n$.

No caso (b), como $\lambda^2 < \lambda$,

$$\begin{aligned}
 b_n &= [(1 - M_{n-1}) + \lambda(M_{n-1} - m_{n-1})][M_n - \lambda(M_n - m_n)] \\
 &= (1 - M_{n-1})M_n - \lambda(M_n - m_n)(1 - M_{n-1}) + \lambda(M_{n-1} - m_{n-1})M_n \\
 &\quad - \lambda^2(M_{n-1} - m_{n-1})(M_n - m_n) \\
 &> a_n - \lambda(M_n - m_n)(1 - M_{n-1}) + \lambda(M_{n-1} - m_{n-1})m_n \\
 &= a_n - \lambda[(1 - M_{n-1})M_n - (1 - m_{n-1})m_n] = a_n.
 \end{aligned}$$

Assim, $b_n > a_n$.

Teorema 3.2.6 (Teste da comparação). *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência encadeada.*

Se $0 < c_n \leq a_n$ para $n \geq 1$, então $\{c_n\}$ também é uma seqüência encadeada.

Demonstração: Definindo $h_0 = 0$ e $h_1 = c_1$, temos

$$c_1 = (1 - h_0)h_1, \quad 0 < h_1 \leq a_1 = m_1 < 1.$$

Suponhamos que

$$c_k = (1 - h_{k-1})h_k, \quad 0 < h_k \leq m_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por hipótese, $c_{k+1} \leq a_{k+1}$, então

$$c_{k+1} \leq a_{k+1} = (1 - m_k)m_{k+1} \leq (1 - h_k)m_{k+1}.$$

Deste modo, existe um h_{k+1} tal que $0 < h_{k+1} \leq m_{k+1} < 1$, onde

$$c_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}.$$

Portanto, provamos por indução que $\{c_n\}$ é uma seqüência encadeada. ■

Atráves do teorema do teste da comparação, conhecendo uma seqüência encadeada é possível saber se uma outra seqüência dada é encadeada através da comparação de seus termos.



Denotamos agora por $\{m_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada $\{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$.

De acordo com o Lema 3.1.2, temos

$$F_k = 1 - \frac{a_1^{(k)}}{1} - \frac{a_2^{(k)}}{1} - \frac{a_3^{(k)}}{1} - \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.4)$$

onde F_k converge para $(1 + L_k)^{-1}$, ou seja, $F_k = (1 + L_k)^{-1}$ e

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{k1}m_{k2} \cdots m_{kn}}{(1 - m_{k1})(1 - m_{k2}) \cdots (1 - m_{kn})} > 0.$$

A positividade de L_k surge do fato que $0 < m_{kn} < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Então, como $L_k > 0$ temos que $0 \leq F_k < 1$. Se considerarmos (3.2.4) para dois valores consecutivos de k , obtemos

$$F_k = 1 - \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Deste modo $F_{k+1} \neq 0$ para $k \geq 0$ e $a_{k+1} = (1 - F_k)F_{k+1}$, com $0 \leq F_0 < 1$ e $0 < F_k < 1$, $k \geq 1$. Logo, $\{F_k\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$.

Teorema 3.2.7. *A sequência $\{F_k\}$ definida por (3.2.4) é a sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$.*

Demonstração: Seja $\{g_k\}$ uma sequência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$. Então, pelo Teorema 3.1.2

$$F_0 = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \quad (3.2.5)$$

onde

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Como $0 \leq g_0 < 1$ e $G > 0$ temos que $F_0 \geq g_0$. Desta forma, pelo Teorema 3.2.1 $F_k \geq g_k$ para $k \geq 1$. Como $\{g_k\}$ é uma sequência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$, então $\{F_k\}$ é a sequência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$. ■

Teorema 3.2.8. *Uma seqüência de parâmetros $\{g_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$ se, e somente se,*

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \dots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_n)} = \infty.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.7, F_0 é o parâmetro inicial da seqüência de parâmetros maximal. Deste modo, se F_0 for igual a g_0 , então $\{g_k\}$ é a seqüência maximal. Mas em (3.2.5), $F_0 = g_0$ se, e somente se, $\frac{1 - g_0}{1 + G} = 0$, ou seja, se $G = \infty$. Portanto, $\{g_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximal para $\{a_n\}$ se, e somente se, $G = \infty$. ■

3.3 Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais na Reta Real

Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos. Vamos obter uma relação entre o verdadeiro intervalo de ortogonalidade $[\xi_1, \eta_1]$, dado pela definição 2.1.3, e as seqüências de coeficientes $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ da relação de recorrência para P_n . Se escrevermos $R_n(x) = P_n(x + s)$, obtemos da relação de recorrência (2.1.3)

$$P_n(x + s) = (x + s - \beta_n)P_{n-1}(x + s) - \alpha_n P_{n-2}(x + s),$$

deste modo

$$R_n(x) = (x - c_n)R_{n-1}(x) - \rho_n R_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

onde $c_n = \beta_n - s$ e $\rho_n = \alpha_n$. Temos então, que $\{R_n\}$ é a seqüência de polinômios ortogonais mônicos cujo verdadeiro intervalo de ortogonalidade é $[\xi_1 - s, \eta_1 - s]$.

Teorema 3.3.1. *Uma condição necessária e suficiente para que $P_n(x)$ seja um polinômio ortogonal, cujo verdadeiro intervalo de ortogonalidade é um subconjunto de $[0, \infty]$, é que $\beta_n > 0$ e $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n \beta_{n+1}} \right\}$ seja uma seqüência encadeada.*

A prova deste teorema, embora simples mas bastante extensa, pode ser encontrada em Chihara [5].

Pelo Teorema 3.3.1 temos que $[\xi_1 - s, \eta_1 - s] \subset [0, \infty]$ se, e somente se, $c_n > 0$ para $n \geq 1$ e $\left\{ \frac{\rho_{n+1}}{c_n c_{n+1}} \right\}$ é uma seqüência encadeada.

Vamos introduzir a seguinte notação

$$a_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x)}. \quad (3.3.1)$$

Teorema 3.3.2. $\xi_1 \geq s$ se, e somente se,

(i) $\beta_n > s$, $n \geq 1$,

(ii) $\{a_n(s)\}$ é uma seqüência encadeada.

Demonstração: O resultado segue do fato de que $\xi_1 \geq s$ se, e somente se, $[\xi_1 - s, \eta_1 - s] \subset [0, \infty]$. ■

Corolário 3.3.1. $\eta_1 \leq t$ se, e somente se, $\beta_n < t$, $n \geq 1$ e $\{a_n(t)\}$ é uma seqüência encadeada.

Demonstração: Sabemos que o polinômio $(-1)^n P_n(-x)$ satisfaz a relação de recorrência (2.1.3), desde que β_n seja substituído por $-\beta_n$. O verdadeiro intervalo de ortogonalidade correspondente é $[-\eta_1, -\xi_1]$.

Do Teorema 3.3.2, temos para o intervalo $[-\eta_1, -\xi_1]$ que $-\eta_1 \geq -t$ se, e somente se, $-\beta_n > -t$, $n \geq 1$ e $\tilde{a}_n(-t)$ é seqüência encadeada para $(-1)^n P_n(-t)$, onde $\tilde{a}_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(-\beta_n - x)(-\beta_{n+1} - x)}$, mas $\tilde{a}_n(-t) = a_n(t)$. Logo, $\{a_n(t)\}$ é seqüência encadeada. ■

Corolário 3.3.2. $\xi_1 < \beta_n < \eta_1$, $n \geq 1$.

Demonstração: Assumindo $s = \xi_1$ no Teorema 3.3.2 e $t = \eta_1$ no Corolário 3.3.1, temos que $\xi_1 < \beta_n < \eta_1$, $n \geq 1$. ■

Observação: Quando os polinômios $P_n(x)$ são simétricos, temos $\beta_n = 0$, $n \geq 0$ (veja Chihara [4, Cap.I, Teor.4.3]). Então, pelo Teorema 3.3.2 e pelo Corolário 3.3.1, temos que, se $\{\alpha_{n+1}\}$ é uma seqüência encadeada, então $-1 \leq \xi_1 < \eta_1 \leq 1$, ou seja, os zeros de $P_n(x)$ estão no intervalo $(-1, 1)$.



Teorema 3.3.3. $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado se, e somente se, ambas $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ são limitadas.

Demonstração: Se $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado, pelo Corolário 3.3.2 temos que $\{\beta_n\}$ é limitada. Como, pelo Teorema 3.3.2 $\{a_n(\xi_1)\}$ é uma seqüência encadeada, então tal seqüência é limitada, daí,

$$0 < \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - \xi_1)(\beta_{n+1} - \xi_1)} < 1.$$

Logo, $\alpha_{n+1} < c$, onde $c = (\eta_1 - \xi_1)^2$. Portanto, $\{\alpha_n\}$ é limitada.

Por outro lado, se $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ são limitados e, como $\alpha_n > 0$, então

$$A \leq \beta_n \leq B, \quad 0 < \alpha_n \leq C, \quad n \geq 1.$$

Escolhendo $a < A$, obtemos $\beta_n - a > \beta_n - A \geq 0$, deste modo

$$(\beta_n - a)(\beta_{n+1} - a) > (\beta_n - A)(\beta_{n+1} - A) \geq 0.$$

Podemos escolher $a < A$ de tal forma que $(\beta_n - a)(\beta_{n+1} - a)$ seja grande o suficiente para que

$$0 < 4\alpha_{n+1} \leq 4C \leq (\beta_n - a)(\beta_{n+1} - a).$$

Então $0 < a_n(a) \leq 1/4$. Como $\{1/4\}$ é uma seqüência encadeada, pelo Teorema 3.2.6 (Teste da Comparação), $\{a_n(a)\}$ é uma seqüência encadeada. Logo, pelo Teorema 3.3.2, se $\{a_n(a)\}$ é uma seqüência encadeada e $\beta_n > a$, deste modo $\xi_1 \geq a$.

Agora, se tomarmos $b > B$, temos da mesma forma, $\beta_n - b < 0$. Analogamente, $\{a_n(b)\}$ é uma seqüência encadeada. Assim, pelo Corolário 3.3.1 temos que $\eta_1 \leq b$. Como $\xi_1 < \eta_1$ segue que $a \leq \xi_1 < \eta_1 \leq b$. Portanto, $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado.

■

Teorema 3.3.4. $[\xi_1, \eta_1] = [-\infty, \infty]$ se, e somente se, $\{a_n(x)\}$ não é uma seqüência encadeada para todo x real.

Demonstração: Suponhamos que $\{a_n(x)\}$ seja uma seqüência encadeada para algum x real, então

$$0 < \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x)} < 1.$$

Como $\alpha_{n+1} > 0$, temos $(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x) > 0$ para $n \geq 1$ e x fixo. Isso implica que $(\beta_n - x)$ e $(\beta_{n+1} - x)$ preservam os sinais para um $x \in \mathbb{R}$ fixo. Analisemos os dois casos. Primeiramente, se $\beta_n - x > 0$ para x fixo então $\beta_n > x$, $n \geq 1$ e como $a_n(x)$ é uma seqüência encadeada para algum x , pelo Teorema 3.3.2, temos $\xi_1 \geq x$, x fixo. E ainda, como $\xi_1 < \eta_1$ temos que $x \leq \xi_1 < \eta_1$, portanto ξ_1 é finito.

Agora, se $\beta_n - x < 0$ para x fixo, então $\beta_n < x$, $n \geq 1$ e, como $a_n(x)$ é uma seqüência encadeada para algum x , pelo Corolário 3.3.1, temos $\eta_1 \leq x$, x fixo. Além disso, como $\xi_1 < \eta_1$ temos que $\xi_1 < \eta_1 \leq x$, portanto η_1 é finito. Mas, se $[\xi_1, \eta_1] = [-\infty, \infty]$, temos em ambos os casos uma contradição. Portanto $\{a_n(x)\}$ não é uma seqüência encadeada para todo x real.

Reciprocamente, se $\{a_n(x)\}$ não é uma seqüência encadeada para todo x real, pelo Teorema 3.3.2, temos que $\xi_1 < x$ para todo x real, ou seja, $\xi_1 = -\infty$. Do mesmo modo, pelo Corolário 3.3.1 temos que $\eta_1 > x$ para todo x real, ou seja, $\eta_1 = \infty$. Portanto $[\xi_1, \eta_1] = [-\infty, \infty]$. ■

Teorema 3.3.5. *Seja $x \notin (\xi_1, \eta_1)$ tal que $\{a_n(x)\}$ dada por (3.3.1) é uma seqüência encadeada. Então, a correspondente seqüência de parâmetros minimal $\{m_k(x)\}$ é dada por*

$$m_k(x) = 1 - \frac{P_{k+1}(x)}{(x - \beta_{k+1})P_k(x)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.2)$$

Demonstração: Da relação de recorrência de três termos (2.1.3) temos que

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x).$$



Dividindo a relação acima por $P_n(x)$, com $x \notin (\xi_1, \eta_1)$ temos

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = (x - \beta_{n+1}) - \alpha_{n+1} \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}.$$

Então

$$\alpha_{n+1} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} \left[(x - \beta_{n+1}) - \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} \right]$$

e ainda

$$\frac{\alpha_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})} = \frac{P_n(x)}{(x - \beta_n)P_{n-1}(x)} \left[1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} \right].$$

Portanto

$$a_n(x) = \frac{P_n(x)}{(x - \beta_n)P_{n-1}(x)} \left[1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} \right], \quad n \geq 1.$$

Fazendo

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)},$$

obtemos

$$[1 - m_{n-1}(x)] = \frac{P_n(x)}{(x - \beta_n)P_{n-1}(x)}.$$

Daí

$$a_n(x) = [1 - m_{n-1}(x)]m_n(x), \quad n \geq 1,$$

onde $m_n(x)$ é dado exatamente por (3.3.2).

Como $\{a_n(x)\}$ é uma seqüência encadeada, temos que $\{m_k(x)\}$ é uma seqüência de parâmetros que será a minimal se $m_0(x) = 0$. De fato, temos

$$m_0(x) = 1 - \frac{P_1(x)}{(x - \beta_1)P_0(x)}.$$

Mas

$$P_1(x) = (x - \beta_1)P_0(x) - \alpha_1 P_{-1}(x) = (x - \beta_1)$$

então $m_0(x) = 0$. Logo, $\{m_k(x)\}$ é a seqüência de parâmetros minimal da seqüência encadeada $\{a_n(x)\}$.

■



Observação: Pela definição de seqüência encadeada, e para $x \notin (\xi_1, \eta_1)$, temos

$$1 - m_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 0.$$

Como $0 \leq m_0(x) < 1$ e $0 < m_k < 1$, $k \geq 1$ então, $0 < 1 - m_0(x) \leq 1$ e $0 < 1 - m_n(x) < 1$, $n \geq 1$. Logo

$$0 < \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} < 1, \quad n \geq 1. \quad (3.3.3)$$

Podemos ainda escrever $m_n(x)$ da seguinte forma

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} = \frac{(x - \beta_{n+1})P_n(x) - P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} = \frac{\alpha_{n+1}P_{n-1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)},$$

ou seja,

$$m_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}P_{n-1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 0, \quad x \notin (\xi_1, \eta_1).$$

Capítulo 4

Seqüências Encadeadas

Generalizadas e Medidas

Relacionadas

Fazemos neste capítulo um estudo do trabalho recente de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [3], sobre seqüências encadeadas generalizadas e medidas relacionadas da forma $c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x)$. Apresentamos um estudo sobre o comportamento assintótico dos zeros dos polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$. Incluímos, também, alguns detalhes de demonstrações que foram omitidos no artigo.

4.1 Preliminares

Seja $d\phi$ uma medida determinada definida sobre a reta real. Seja $Supp(\phi)$ o suporte desta medida e seja I^ϕ o menor intervalo fechado contendo este suporte, ou seja, I^ϕ é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade.

Denotamos por $X^\phi = (-\infty, \infty) \setminus I^\phi$ o complemento do intervalo I^ϕ em $(-\infty, \infty)$. Do mesmo modo $Z^\phi = \bar{\mathbb{C}} \setminus I^\phi$ onde $\bar{\mathbb{C}}$ é o plano complexo estendido. O fecho de X^ϕ dentro da reta real será denotado por $\tilde{X}^\phi$. Como $X^\phi = (-\infty, \xi_1) \cup (\eta_1, \infty)$, com $I^\phi = [\xi_1, \eta_1]$, então $\tilde{X}^\phi = (-\infty, \xi_1] \cup [\eta_1, \infty)$, ou



seja, os pontos extremos de I^ϕ são pontos de $\tilde{X}^\phi$, mas $\pm\infty$ não são.

Neste capítulo, denotamos por $\{P_n^\phi\}$ os polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $d\phi$ e $\{O_n^\phi\}$ os polinômios associados mônicos dados por

$$O_n^\phi(x) = \frac{1}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n^\phi(x) - P_n^\phi(t)}{x - t} d\phi(t), \quad n \geq 0,$$

onde $\mu_r^\phi = \int_{-\infty}^{\infty} t^r d\phi(t)$, $r \geq 0$ são os momentos dados pela definição 2.1.1.

Pelo Capítulo 2, sabemos que os polinômios $\{P_n^\phi\}$ e $\{O_n^\phi\}$ satisfazem às seguintes relações de recorrência, respectivamente,

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 1, \quad (4.1.1)$$

$$O_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi)O_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi O_{n-1}^\phi(x),$$

onde $P_0^\phi(x) = 1$, $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, $O_0^\phi(x) = 0$ e $O_1^\phi(x) = 1$, os coeficientes β_n^ϕ , $n \geq 1$ são reais e α_{n+1}^ϕ , $n \geq 1$ são todos positivos. Além disso, pelo Teorema 3.1.1 (fórmulas de Wallis), obtemos

$$\frac{O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \frac{1}{(x - \beta_1^\phi)} - \frac{\alpha_2^\phi}{(x - \beta_2^\phi)} - \frac{\alpha_3^\phi}{(x - \beta_3^\phi)} - \cdots - \frac{\alpha_n^\phi}{(x - \beta_n^\phi)}. \quad (4.1.2)$$

Temos ainda, que $\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)}$ converge uniformemente para $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi(t)$ em todo subconjunto compacto de Z^ϕ . De fato, como

$$P_n^\phi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}),$$

onde $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ são os zeros de $P_n^\phi(x)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} &= \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,n})} = \frac{\lambda_{n,1}}{(x - x_{n,1})} + \frac{\lambda_{n,2}}{(x - x_{n,2})} + \cdots + \frac{\lambda_{n,n}}{(x - x_{n,n})} \\ &= \frac{\lambda_{n,1}(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}) + \cdots + \lambda_{n,n}(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,n-1})}{(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,n})}. \end{aligned}$$

Para $x = x_{n,r}$, obtemos

$$\mu_0^\phi O_n^\phi(x_{n,r}) = \lambda_{n,r}(x_{n,r} - x_{n,1}) \cdots (x_{n,r} - x_{n,r-1})(x_{n,r} - x_{n,r+1}) \cdots (x_{n,r} - x_{n,n}).$$



Portanto

$$\lambda_{n,r} = \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x_{n,r})}{P_n'^\phi(x_{n,r})},$$

onde $P_n'^\phi$ representa a derivada de P_n^ϕ . Podemos então escrever

$$\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \sum_{r=1}^n \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x_{n,r})/P_n'^\phi(x_{n,r})}{(x - x_{n,r})} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{(x - x_{n,r})}. \quad (4.1.3)$$

Mostremos que $\lambda_{n,r} > 0$, $r = 1, \dots, n$. Seja

$$T_n(x) = O_n^\phi(x)P_{n-1}^\phi(x) - P_n^\phi(x)O_{n-1}^\phi(x),$$

substituindo as relações de recorrência de P_n^ϕ e O_n^ϕ em T_n repetidas vezes encontramos

$$T_n(x) = \alpha_n^\phi \alpha_{n-1}^\phi \cdots \alpha_2^\phi > 0.$$

Através da derivada da relação de recorrência para os polinômios P_n^ϕ , temos

$$\begin{aligned} R_n(x) &= P_n'^\phi(x)P_{n-1}^\phi(x) - P_{n-1}'^\phi(x)P_n^\phi(x) = [P_{n-1}^\phi(x)]^2 + \alpha_n^\phi R_{n-1}(x) \\ &= \cdots = [P_{n-1}^\phi]^2 + \alpha_n^\phi [P_{n-2}^\phi]^2 + \cdots + \alpha_n^\phi \cdots \alpha_3^\phi [P_1^\phi]^2 + \alpha_n^\phi \cdots \alpha_2^\phi > 0. \end{aligned}$$

Logo

$$0 < \frac{T_n(x_{n,r})}{R_n(x_{n,r})} = \frac{O_n^\phi(x_{n,r})}{P_n'^\phi(x_{n,r})} = \frac{\lambda_{n,r}}{\mu_0^\phi}.$$

Mas $\mu_0^\phi = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(t) > 0$. Portanto $\lambda_{n,r} > 0$.

Pelas condições iniciais de O_n^ϕ e P_n^ϕ sabemos que P_n^ϕ é um polinômio de grau n , e O_n^ϕ é um polinômio de grau $n - 1$, então em (4.1.3) temos que

$$\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \frac{\mu_0^\phi (x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0)}{x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{x - x_{n,r}}.$$

Multiplicando por x em ambos os lados e aplicando o limite para $x \rightarrow \infty$, temos

$$\mu_0^\phi = \sum_{r=1}^n \lambda_{n,r}.$$

Definimos a sequência de funções escada $\{\phi_n(t)\}$ por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 0, & t < x_{n,1} \\ \sum_{r=1}^{s-1} \lambda_{n,r}, & x_{n,s-1} \leq t < x_{n,s}, \quad s = 2, 3, \dots, n. \\ \mu_0^\phi, & x_{n,n} \leq t \end{cases}$$

para $n \geq 1$. Assim

$$\sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{x - x_{n,r}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi_n(t),$$

este resultado segue da definição da integral de Stieltjes (veja, por exemplo, Widder [22]). Logo

$$\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi_n(t).$$

Pelo resultado conhecido por Teorema de Gromer-Hamburger ou Teorema de Helly (veja, por exemplo, Shohat e Tamarkin [14]), existe uma subsequência n_k tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^\phi O_{n_k}^\phi(x)}{P_{n_k}^\phi(x)} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi_{n_k}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\psi(t),$$

onde $\psi(t)$ é uma função não decrescente em $(-\infty, \infty)$. Entretanto, a medida considerada é determinada, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi(t).$$

Como exemplos de medidas determinadas temos as medidas clássicas de Jacobi, Hermite e outros. Ainda, quando o intervalo de ortogonalidade é limitado, isto é, α_n e β_n são limitados, temos que a medida é determinada.

Seja $G_n^\phi(x) = \frac{(x - \beta_1^\phi) O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)}$, $n \geq 0$, então $G_0^\phi(x) = 0$, $G_1^\phi(x) = 1$ e de (4.1.2) podemos escrever

$$G_n^\phi(x) = \frac{1}{1 - \frac{a_1^\phi(x)}{1} - \frac{a_2^\phi(x)}{1} - \dots - \frac{a_{n-1}^\phi(x)}{1}}, \quad n \geq 2, \quad (4.1.4)$$

onde $a_n^\phi(x) = \alpha_{n+1}^\phi / [(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)]$, $n \geq 1$.

Seja também G^ϕ , definido em Z^ϕ por

$$G^\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\phi(x),$$

mas

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\phi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - \beta_1^\phi) O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} \\ &= \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi(t). \end{aligned}$$

Portanto $G^\phi(x) = \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi(t).$

Para G_n^ϕ os seguintes resultados são válidos

$$\begin{aligned} G_n^\phi(x) - G_{n-1}^\phi(x) &= \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)}, \\ G_n^\phi(x) &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_j^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{j-1}^\phi(x) P_j^\phi(x)}, \end{aligned} \quad n \geq 2. \quad (4.1.5)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} G_n^\phi(x) - G_{n-1}^\phi(x) &= \frac{(x - \beta_1^\phi) O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} - \frac{(x - \beta_1^\phi) O_{n-1}^\phi(x)}{P_{n-1}^\phi(x)} \\ &= \frac{(x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} [O_n^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x) - O_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)] \\ &= \frac{(x - \beta_1^\phi) \alpha_n^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} [O_{n-1}^\phi(x) P_{n-2}^\phi(x) - O_{n-2}^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x)] \\ &= \cdots = \frac{(x - \beta_1^\phi) \alpha_n^\phi \alpha_{n-1}^\phi \cdots \alpha_2^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

E, então, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} G_n^\phi(x) &= \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} + G_{n-1}^\phi(x) = \cdots = \\ &= \frac{\alpha_2^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} + \frac{\alpha_2^\phi \cdots \alpha_{n-1}^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-2}^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x)} + \cdots + \frac{\alpha_2^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_1^\phi(x) P_2^\phi(x)} + G_1^\phi(x) \\ &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_j^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{j-1}^\phi(x) P_j^\phi(x)}. \end{aligned}$$



Para qualquer $x \in \tilde{X}^\phi$, $G_n^\phi(x) > 1$, $n > 1$ e $\{G_n^\phi\}$ é uma seqüência crescente, isto é, $1 < G_2^\phi(x) < \dots < G_n^\phi(x) < \dots < G^\phi(x)$. De fato, para que $G_n^\phi(x) > G_{n-1}^\phi(x)$, basta mostrarmos (veja (4.1.5)) que

$$\frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \dots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} > 0, \quad n \geq 2.$$

Já sabemos que $\alpha_n^\phi > 0$ para $n \geq 2$. Vamos então analisar o sinal de $\frac{x - \beta_1^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)}$, $n \geq 2$. Como $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, temos que β_1^ϕ é zero de P_1^ϕ , então $\beta_1^\phi \in I^\phi$, mas como $x \in \tilde{X}^\phi$, ou seja, $x \notin I^\phi$, temos os seguintes casos:

(i) Se $x > \beta_1^\phi$ então $x - \beta_1^\phi > 0$ e sabemos ainda que $P_n^\phi(x) > 0$, para $n \geq 1$, portanto

$$\frac{x - \beta_1^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} > 0.$$

(ii) Se $x < \beta_1^\phi$ então $x - \beta_1^\phi < 0$. Mas se $P_n^\phi(x) > 0$ então $P_{n-1}^\phi(x) < 0$ ou ainda se $P_n^\phi(x) < 0$ então $P_{n-1}^\phi(x) > 0$, então $P_n^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x) < 0$, $n \geq 2$. Portanto

$$\frac{x - \beta_1^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} > 0.$$

Logo $G_n^\phi(x) > G_{n-1}^\phi(x)$, $n \geq 2$, para $x \in \tilde{X}^\phi$. Consequentemente,

$$G_1^\phi(x) < G_2^\phi(x) < \dots < G_n^\phi(x) < \dots < G^\phi(x),$$

mas $G_1^\phi(x) = 1$, então $1 < G_2^\phi(x) < \dots < G_n^\phi(x) < \dots < G^\phi(x)$, para $x \in \tilde{X}^\phi$. Deste modo $G_n^\phi(x) > 1$ para $n \geq 2$.

Se $d\phi$ é uma medida simétrica, ou seja, $d\phi(-t) = -d\phi(t)$, então $\beta_n^\phi = 0$, $n \geq 1$ (veja Chihara [4, Cap.I, Teor.4.3]) e

$$\begin{aligned} G^\phi(x) &= \frac{1}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x-t} d\phi(t) = \frac{1}{\mu_0^\phi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x+t} d\phi(-t) + \int_0^{\infty} \frac{x}{x-t} d\phi(t) \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 - t^2} d\phi(t). \end{aligned}$$

Além disso, se $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são duas medidas simétricas relacionadas por

$$c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2) d\phi_1(x) \quad (4.1.6)$$

a relação entre os polinômios $\{P_n^{\phi_1}\}$ e $\{P_n^{\phi_2}\}$ dadas pela fórmula de Christoffel (veja, por exemplo, Berti e Sri Ranga [1]) é

$$(x^2 - k^2)P_n^{\phi_2}(x) = P_{n+2}^{\phi_1}(x) - \frac{P_{n+2}^{\phi_1}(k)}{P_n^{\phi_1}(k)} P_n^{\phi_1}(x), \quad n \geq 0. \quad (4.1.7)$$

Outras relações entre esses polinômios e seus coeficientes da relação de recorrência vistos em [1], podem ser escritos da seguinte maneira:

Se (4.1.6) é válida, existe uma seqüência de números reais $\{l_n\}$, com $l_0 = 1$, tal que, os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ satisfazem

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - \frac{k^2}{4}(1 - l_n)(1 - l_{n-1})P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad (4.1.8)$$

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{k^2}{4}(1 - l_n)(1 + l_{n-1}) \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{k^2}{4}(1 - l_n)(1 + l_{n+1}), \quad n \geq 1.$$

Este resultado foi provado primeiramente em Sri Ranga [15] para $k^2 < 0$ e $c < 0$ e posteriormente provado em [1], para todas escolhas possíveis de k e c .

4.2 Seqüências Encadeadas Generalizadas

Definição 4.2.1. *Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos tal que $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma **seqüência encadeada generalizada** se existe uma seqüência de parâmetros $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $m_0 = 0$, m_n finito e $(1 - m_{n-1})m_n = a_n$, $n \geq 1$.*

Como $a_n \neq 0$ então $m_n \neq 0$ e $m_n \neq 1$ para $n \geq 1$.

Denotamos ainda, $\{m_n\}$ a seqüência de parâmetros minimal da seqüência encadeada generalizada $\{a_n\}$. A classe das seqüências encadeadas positivas é uma subclasse das seqüências encadeadas generalizadas.



Por exemplo, a seqüência encadeada $a_n^\phi(x) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)(x - \beta_n^\phi)}$ é uma seqüência encadeada generalizada para qualquer valor de $x \in Z^\phi$ tal que $x \neq \infty$. O seguinte teorema dá a expressão geral para os elementos de uma seqüência de parâmetros qualquer de $\{a_n^\phi(x)\}$.

Teorema 4.2.1. *Dada a seqüência encadeada generalizada*

$$\left\{ a_n^\phi(x) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)} \right\},$$

seja $\{g_n^\phi(x, t)\}$ sua seqüência de parâmetros tal que o parâmetro inicial $g_0^\phi(x, t) = t$. Se $t^{-1} \neq G_n^\phi(x)$ para todo $n \geq 1$, então $\{g_n^\phi(x, t)\}$ existe e pode ser dada como

$$g_n^\phi(x, t) = \frac{P_{n-1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, se $\{a_n^\phi(x)\}$ é uma seqüência encadeada positiva então suas seqüências de parâmetros $\{g_n^\phi(x, t)\}$, tal que $0 \leq g_0^\phi(x, t) < 1$ e $0 < g_n^\phi(x, t) < 1$, são obtidas para $0 \leq t \leq 1/G^\phi(x)$.

Demonstração: Se $g_n^\phi(x, t) = \frac{P_{n-1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)}$ então

$$\begin{aligned} 1 - g_n^\phi(x, t) &= 1 - \frac{P_{n-1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)} \\ &= \frac{[(x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x)]}{[P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)](x - \beta_{n+1}^\phi)} \\ &\quad - \frac{t(x - \beta_1^\phi)[(x - \beta_{n+1}^\phi)O_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi O_{n-1}^\phi(x)]}{[P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)](x - \beta_{n+1}^\phi)}. \end{aligned}$$

Usando a relação de recorrência (4.1.1), obtemos

$$1 - g_n^\phi(x, t) = \frac{P_{n+1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n+1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{1}{(x - \beta_{n+1}^\phi)}.$$

Desta forma, temos que

$$[1 - g_{n-1}^\phi(x, t)]g_n^\phi(x, t) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)} = a_n^\phi(x).$$

E ainda $g_n^\phi(x, t)$ existe se, e somente se, $P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x) \neq 0$, isto é, se, e somente se, $t^{-1} \neq G_n^\phi(x) = (x - \beta_1^\phi) \frac{O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)}$. Isto prova a primeira parte do teorema.

Temos ainda que

$$\begin{aligned} 1 - g_n^\phi(x, t) &= \frac{P_{n+1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n+1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{1}{(x - \beta_{n+1}^\phi)} \\ &= \frac{1 - tG_{n+1}^\phi(x)}{1 - tG_n^\phi(x)} \frac{P_{n+1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x)(x - \beta_{n+1}^\phi)}. \end{aligned}$$

Para que $0 < g_n^\phi < 1$, basta mostrarmos que, $0 < 1 - g_n^\phi < 1$. Mas de (3.3.3), temos que

$$0 < \frac{P_{n+1}^\phi(x)}{(x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x)} < 1, \quad n \geq 1$$

se $\{a_n^\phi(x)\}$ é uma seqüência encadeada positiva. Isso acontece quando $x \in \tilde{X}^\phi$.

Como $G^\phi(x) > G_{n+1}^\phi(x) > G_n^\phi(x)$, para $t \geq 0$, temos que

$$1 - tG^\phi(x) < 1 - tG_{n+1}^\phi(x) < 1 - tG_n^\phi(x).$$

E se $1 - tG^\phi(x) \geq 0$ então $0 < 1 - tG_{n+1}^\phi(x) < 1 - tG_n^\phi(x)$. Deste modo

$$0 < \frac{1 - tG_{n+1}^\phi(x)}{1 - tG_n^\phi(x)} < 1,$$

se $0 \leq t \leq 1/G^\phi(x)$. Portanto, $0 < g_n^\phi(x, t) < 1$ se $0 \leq t \leq 1/G^\phi(x)$. ■

4.3 Seqüências Encadeadas Generalizadas e Medidas Relacionadas

Nesta seção analisamos seqüências encadeadas que surgem quando consideramos a relação entre as medidas $d\phi_1$ e $d\phi_2$ dada por $c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x)$. Substituindo $g_n = \frac{(1 - l_n)}{2}$, $n \geq 0$ em (4.1.8) temos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2 g_n g_{n-1} P_{n-2}^{\phi_2}(x).$$



Pelo Teorema 3.3.5, podemos escrever $[1 - m_{n-1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2}$, com $m_n^{\phi_1}(k) = 1 - \frac{P_{n+1}^{\phi_1}(k)}{kP_n^{\phi_1}(k)}$, $n \geq 0$, lembrando que as medidas $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são simétricas, ou seja, $\beta_{n+1}^{\phi} = 0$. Mas de (4.1.8), $(1 - g_{n-1})g_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2}$, então $[1 - m_{n-1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = (1 - g_{n-1})g_n$. Como $g_0 = 0 = m_0^{\phi_1}(k)$, comparando g_n com os parâmetros $m_n^{\phi_1}(k)$ temos que $g_n = m_n^{\phi_1}(k)$. Deste modo as equações em (4.1.8) podem ser escritas como

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2 m_n^{\phi_1}(k) m_{n-1}^{\phi_1}(k) P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad (4.3.1)$$

$$[1 - m_{n-1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2} \quad \text{e} \quad [1 - m_{n+1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}$$

para $n \geq 1$, onde $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2} \right\}$ é uma seqüência encadeada generalizada. Esta seqüência é uma seqüência encadeada positiva se k for real e não pertence ao suporte da medida, ou seja, se k não pertence ao verdadeiro intervalo de ortogonalidade.

A fórmula de Christoffel (4.1.7) pode ser escrita como

$$(x^2 - k^2)P_n^{\phi_2}(x) = P_{n+2}^{\phi_1}(x) - k^2[1 - m_{n+1}^{\phi_1}(k)][1 - m_n^{\phi_1}(k)]P_n^{\phi_1}(x), \quad n \geq 0,$$

pois $1 - m_n^{\phi_1}(k) = \frac{P_{n+1}^{\phi_1}(k)}{kP_n^{\phi_1}(k)}$.

As relações acima nos permite obter informações sobre os polinômios $P_n^{\phi_2}$ através de $P_n^{\phi_1}$.

Veremos agora, como podemos obter informações sobre os polinômios $P_n^{\phi_1}$ através de $P_n^{\phi_2}$. Substituindo $g_n = \frac{1 + l_{n+1}}{2}$, $n \geq -1$, em (4.1.8) temos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2(1 - g_{n-1})(1 - g_{n-2})P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad (4.3.2)$$

$$(1 - g_{n-1})g_{n-2} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2} \quad \text{e} \quad (1 - g_{n-1})g_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}$$

para $n \geq 1$. Neste caso, temos $g_{-1} = \frac{1 + l_0}{2} = 1$.

A seqüência $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2} \right\}$ é uma seqüência encadeada generalizada e $\{g_n\}$ é uma seqüência de parâmetros com parâmetro inicial $g_0 = \frac{1+l_1}{2}$, mas de (4.1.8), $\alpha_2^{\phi_1} = \frac{k^2}{2}(1-l_1)$, então $1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2} = \frac{1+l_1}{2}$ deste modo o parâmetro inicial é dado por $g_0 = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2}$.

Pelo Teorema 4.2.1, obtemos

$$g_n = g_n^{\phi_2}(k, t), \quad n \geq 0 \quad (4.3.3)$$

onde $g_0^{\phi_2}(k, t) = t = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2}$. Se $0 < g_0^{\phi_2}(k, t) < 1$, então k precisa ser real, e de (4.3.2) e (4.3.3)

$$g_n^{\phi_2}(k, t) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - g_{n-1}^{\phi_2}(k, t)]} \quad \text{e} \quad [1 - g_n^{\phi_2}(k, t)] = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{k^2 g_{n-1}^{\phi_2}(k, t)}, \quad n \geq 1.$$

Consequentemente, $0 < g_n^{\phi_2}(k, t) < 1$ para todo $n \geq 0$. Nestas condições, $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}/k^2\}$ é uma seqüência encadeada positiva.

4.4 Uma Aplicação para os Polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$

Usaremos as relações da seção anterior, para obter informações sobre os polinômios ortogonais $K_n^{(\lambda, M, k)}$ associados a medida $d\phi(\lambda, M, k; x)$ dada por (2.3.1). Podemos lembrar que, quando $k = 1$, temos que $K_n^{(\lambda, M, 1)}$ são os polinômios de Koornwinder simétricos.

Se fizermos $d\phi_1(x) = d\phi(\lambda, M, k; x)$, como $d\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x)$, obtemos

$$d\phi_2(x) = \{(2M+1)\tilde{L}^{(\lambda)}(k)\}^{-1}(1-x^2)^{\lambda+1/2}dx,$$

onde

$$\tilde{L}^{(\lambda)}(k) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2 - x^2} dx.$$

Deste modo, a medida $d\phi_2$ é a medida associada aos polinômios de Gegenbauer $P_n^{(\lambda+1)}$. Como foi visto no Capítulo 2, os polinômios mônicos, $P_n^{(\lambda+1)}(x) = P_n^{\phi_2}(x)$,



são dados por

$$P_n^{\phi_2}(x) = (2)^{-n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n} {}_2F_1(-n, n+2\lambda+2; \lambda+3/2; \frac{1-x}{2}), \quad n \geq 1,$$

e os coeficientes da relação de recorrência são

$$\alpha_{n+1}^{\phi_2} = \alpha_{n+1}^{(\lambda+1)} = \frac{1}{4} \frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \quad n \geq 1.$$

De (4.3.2) e (4.3.3), escrevendo $g_n^{\phi_2}(k, 1 - \alpha_2^{\phi_1}/k^2) = h_n^{\phi_2}(M, k)$, obtemos para $K_n^{(\lambda, M, k)}(x) = P_n^{\phi_1}(x)$ e $\alpha_n^{(\lambda, M, k)} = \alpha_n^{\phi_1}$ que

$$K_n^{(\lambda, M, k)}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)][1 - h_{n-2}^{\phi_2}(M, k)]P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad (4.4.1)$$

$$\alpha_{n+1}^{(\lambda, M, k)} = k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]h_{n-2}^{\phi_2}(M, k), \quad n \geq 2$$

e $\alpha_2^{(\lambda, M, k)} = k^2[1 - h_0^{\phi_2}(M, k)]$, onde

$$h_0^{\phi_2}(M, k) = g_0^{\phi_2}(k, 1 - \alpha_2^{\phi_1}/k^2) = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2} = 1 - \frac{\mu_2^{\phi_1}}{k^2 \mu_0^{\phi_1}} = \frac{k^2 \mu_0^{\phi_1} - \mu_2^{\phi_1}}{k^2 \mu_0^{\phi_1}}.$$

Mas $\mu_0^{\phi_1} = 1$ então

$$\begin{aligned} h_0^{\phi_2}(M, k) &= \frac{\int_{-1}^1 (k^2 - x^2) d\phi_1(x)}{k^2} = \frac{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda+1/2} dx}{(2M+1)k^2 \tilde{L}^{(\lambda)}(k)} \\ &= \frac{1}{(2M+1)\mu_0^{\phi_2}} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x) \right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

e

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]}, \quad n \geq 1,$$

onde através do Teorema 4.2.1, podemos escrever explicitamente como

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkO_{n-1}^{\phi_2}(k)}{P_n^{\phi_2}(k) - tkO_n^{\phi_2}(k)} \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k}.$$

Mas $G_n^{\phi_2}(k) = \frac{kO_n^{\phi_2}(k)}{P_n^{\phi_2}(k)}$, logo

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k)\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{kP_n^{\phi_2}(k)} \frac{1 - tG_{n-1}^{\phi_2}(k)}{1 - tG_n^{\phi_2}(k)}, \quad n \geq 1,$$

com $t = h_0^{\phi_2}(M, k) = 1 - \frac{\alpha_2^{(\lambda, M, k)}}{k^2}$.

Em (4.1.5), temos

$$G_{n+1}^{\phi_2}(k) = G_n^{\phi_2}(k) + \frac{\alpha_2^{\phi_2} \alpha_3^{\phi_2} \cdots \alpha_{n+1}^{\phi_2} k}{P_n^{\phi_2}(k) P_{n+1}^{\phi_2}(k)}, \quad n \geq 1.$$

Mas $\alpha_2^{\phi_2} \alpha_3^{\phi_2} \cdots \alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{n!}{4^n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n(2+\lambda)_n}$, então $G_{n+1}^{\phi_2}$ satisfaz a relação de recorrência

$$G_{n+1}^{\phi_2}(k) = G_n^{\phi_2}(k) + \frac{n!}{4^n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n(2+\lambda)_n} \frac{k}{P_n^{\phi_2}(k) P_{n+1}^{\phi_2}(k)}, \quad n \geq 1 \quad (4.4.3)$$

com $G_1^{\phi_2}(k) = 1$. Como $G_0^{\phi_2}(k) = 0$ temos que esta relação vale também para $n = 0$.

Quando $k = 1$, obtemos

$$P_n^{\phi_2}(1) = (2)^{-n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n}, \quad n \geq 1$$

pois ${}_2F_1(-n, n+2\lambda+2; \lambda+3/2; 0) = 1$ e

$$\begin{aligned} G_{n+1}^{\phi_2}(1) &= G_n^{\phi_2}(1) + \frac{n!}{4^n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n(2+\lambda)_n} \frac{1}{P_n^{\phi_2}(1) P_{n+1}^{\phi_2}(1)} \\ &= G_n^{\phi_2}(1) + \frac{2n!(1+\lambda)_{n+1}}{(2+\lambda)_n(2+2\lambda)_{n+1}} \\ &= G_n^{\phi_2}(1) + \frac{n!}{(3+2\lambda)_n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$G_{n+1}^{\phi_2}(1) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{j!}{(3+2\lambda)_j},$$

então, como ${}_2F_1(1, 1; 3+2\lambda; 1) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{(3+2\lambda)_j}$, temos que sua n -ésima soma parcial é dada por $G_{n+1}^{\phi_2}(1)$.

Para o caso especial $\lambda = 0$, temos $\alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{1}{4}$, $n \geq 1$ e $O_n^{\phi_2}(x) = P_{n-1}^{\phi_2}(x)$ os polinômios de Tchebichef de segunda espécie de grau $n-1$, então podemos escrever

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tk P_{n-2}^{\phi_2}(k)}{P_n^{\phi_2}(k) - tk P_{n-1}^{\phi_2}(k)} \frac{1}{4k}.$$

Como $P_n^{\phi_2}$ são os polinômios de Tchebichef de segunda espécie mônicos, temos sua relação de recorrência de três termos (veja, por exemplo, Szegő [17])

$$P_n^{\phi_2}(k) = kP_{n-1}^{\phi_2}(k) - \frac{1}{4}P_{n-2}^{\phi_2}(k),$$

assim

$$\begin{aligned} h_n^{\phi_2}(M, k) &= \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkP_{n-2}^{\phi_2}(k)}{k(1-t)P_{n-1}^{\phi_2}(k) - \frac{1}{4}P_{n-2}^{\phi_2}(k)} \frac{1}{4k} \\ &= \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkP_{n-2}^{\phi_2}(k)}{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - \frac{1}{4k(1-t)}P_{n-2}^{\phi_2}(k)} \frac{1}{4k^2(1-t)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, se $tk = [4k(1-t)]^{-1}$ então $h_n^{\phi_2}(M, k)$ é uma constante. Isto acontece quando $t = \frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}]$ com os valores para os parâmetros $h_n^{\phi_2}(M, k)$ dados por

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}] = \frac{1}{2k[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]}, \quad n \geq 1.$$

Temos de $h_0^{\phi_2} = t = \frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}]$ e de (4.4.2) que

$$\frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}] = \frac{1}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)}$$

então $2M+1 = \frac{2k[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]}{G^{\phi_2}(k)}$. Deste modo, os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios $K_n^{(0, M, k)}$ quando $2M+1 = 2k[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]/G^{\phi_2}(k)$ são dados por

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(0, M, k)} &= k^2[1 - h_0^{\phi_2}(M, k)] = k^2 \left[1 - \frac{1}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)} \right] \\ &= \frac{k}{2}[k \mp \sqrt{k^2 - 1}] \end{aligned}$$

e

$$\alpha_{n+2}^{(0, M, k)} = k^2[1 - h_n^{\phi_2}(M, k)]h_{n-1}^{\phi_2}(M, k) = \frac{1}{4}, \quad n \geq 1.$$

Vamos analisar os valores de M para os correspondentes sinais de mais e menos. Para calcularmos o valor de $G^{\phi_2}(k) = \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} d\phi_2(x)$, vamos primeiramente calcular, fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$, a seguinte integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx = \int_0^\pi \frac{1}{k - \cos \theta} d\theta,$$

fazendo $t = \tan(\theta/2)$, temos que $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, então

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx &= \frac{2}{k-1} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{k+1}{k-1}\right) t^2} dt \\ &= \frac{2}{k-1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\right)^2 t^2} dt, \end{aligned}$$

como $\frac{d}{dt} \arctan(ct) = \frac{c}{1+c^2t^2}$ com c constante, temos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Podemos agora calcular a integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{1/2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} - \int_{-1}^1 \frac{k^2 - k^2 + x^2}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} - k^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} + k\pi = \pi[k - \sqrt{k^2-1}]. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} G^{\phi_2}(k) &= \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} d\phi_2(x) \\ &= \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \{(2M+1)\tilde{L}^{(0)}(k)\}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{1/2} dx \\ &= \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \{(2M+1)\tilde{L}^{(0)}(k)\}^{-1} \pi[k - \sqrt{k^2-1}] \end{aligned}$$

Mas

$$\mu_0^{\phi_2} = \{(2M+1)\tilde{L}^{(0)}(k)\}^{-1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} dx = \{(2M+1)\tilde{L}^{(0)}(k)\}^{-1} \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, $G^{\phi_2}(k) = 2k[k - \sqrt{k^2-1}]$. Assim,

$$M = \frac{\mp\sqrt{k^2-1} + \sqrt{k^2-1}}{2[k - \sqrt{k^2-1}]}.$$

Logo, para o sinal de menos temos $M = 0$, e para o sinal de mais temos $M = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{[k - \sqrt{k^2 - 1}]}$.

4.5 Monotonicidade dos Zeros de $K_n^{(\lambda, M, k)}$

Nesta seção, estudamos o comportamento dos zeros de $K_n^{(\lambda, M, k)}$ como uma função de seus parâmetros, λ , M e k .

Como $K_n^{(\lambda, M, k)}$ e $P_n^{\phi_2}(x) = P_n^{(\lambda+1)}(x)$ são ortogonais com respeito a medidas simétricas, esses polinômios são polinômios pares (ímpares) quando n é par (ímpar). Então seus zeros são simétricos com respeito a origem, sendo suficiente analisar somente seus zeros positivos.

Denotamos por $x_{n,j}^{(\lambda, M, k)}$ e $x_{n,j}^{(\lambda+1)}$, $j = 1, 2, \dots, [n/2]$, os zeros positivos de $K_n^{(\lambda, M, k)}$ e $P_n^{(\lambda+1)}$ em ordem decrescente.

Lema 4.5.1. *Sejam $q_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ e $q_{n-1}(x) = (x - y_1) \cdots (x - y_{n-1})$ polinômios com zeros reais e que interlaçam, isto é,*

$$x_n < y_{n-1} < x_{n-1} < \cdots < y_1 < x_1.$$

Então, para qualquer constante c real, o polinômio

$$Q(x) = q_n(x) - cq_{n-1}(x)$$

tem n zeros reais $\xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1$ que interlaçam com os zeros de $q_n(x)$ e $q_{n-1}(x)$. Mais precisamente,

(i) se $c > 0$ então

$$x_1 < \xi_1, \tag{4.5.1}$$

$$x_r < \xi_r < y_{r-1}, \quad r = 2, \dots, n \tag{4.5.2}$$

(ii) se $c < 0$ então

$$y_r < \xi_r < x_r, \quad r = 1, \dots, n-1,$$

$$\xi_n < x_n.$$

Além disso, cada ξ_r é uma função crescente de c .



Demonstração: Para $c = 0$ temos que $Q(x) = q_n(x)$, então $\xi_r = x_r$, $r = 1, \dots, n$.

Suponhamos $c > 0$, então como $Q(x_r) = -cq_{n-1}(x_r)$, $r = 2, \dots, n$, temos

$$\text{senal}Q(x_r) = -\text{senal}q_{n-1}(x_r) = (-1)(-1)^{r-1} = (-1)^r$$

e como $Q(y_{r-1}) = q_n(y_{r-1})$, $r = 2, \dots, n$, temos

$$\text{senal}Q(y_{r-1}) = \text{senal}q_n(y_{r-1}) = (-1)^{r-1}.$$

Consequentemente, $Q(x)$ muda de sinal entre x_r e y_{r-1} , $r = 2, \dots, n$. Então, $Q(x)$ possui zeros ξ_r , $r = 2, \dots, n$ satisfazendo (4.5.2). Temos ainda $Q(x_1) = -cq_{n-1}(x_1) < 0$ e ainda quando $x \rightarrow \infty$, $q_n(x)$ vai mais rápido para o infinito que $q_{n-1}(x)$, então $Q(x)$ vai para o infinito. Logo, existe ξ_1 tal que $\xi_1 > x_1$, portanto (i) está provado.

Suponhamos agora $c < 0$, então como $Q(x_r) = -cq_{n-1}(x_r)$, temos

$$\text{senal}Q(x_r) = \text{senal}q_{n-1}(x_r) = (-1)^{r-1}, \quad r = 1, \dots, n-1$$

e como $Q(y_r) = q_n(y_r)$, temos

$$\text{senal}Q(y_r) = \text{senal}q_n(y_r) = (-1)^r, \quad r = 1, \dots, n-1.$$

Portanto, $Q(x)$ muda de sinal entre x_r e y_r , $r = 1, \dots, n-1$. Então $Q(x)$ possui zeros ξ_r , $r = 1, \dots, n-1$ onde $y_r < \xi_r < x_r$. Temos ainda $Q(x_n) = -cq_{n-1}(x_n)$

- se n for par temos $Q(x_n) < 0$ e ainda quando $x \rightarrow -\infty$, $q_n(x)$ vai mais rápido para o infinito que $q_{n-1}(x)$ vai para $-\infty$. Então $Q(x)$ vai para o infinito. Logo, existe $\xi_n < x_n$ tal que ξ_n é um zero de $Q(x)$;

- se n for ímpar temos $Q(x_n) > 0$ e ainda quando $x \rightarrow -\infty$, $q_n(x)$ vai mais rápido para $-\infty$ que $q_{n-1}(x)$ vai para ∞ . Então $Q(x)$ vai para $-\infty$. Logo, existe $\xi_n < x_n$ tal que ξ_n é um zero de $Q(x)$.

Portanto, existe $\xi_n < x_n$ para todo n . Deste modo (ii) está provado.

Provemos agora a monotonicidade dos zeros de $Q(x)$ com respeito a c . Seja

$$Q_\epsilon(x) = q_n(x) - (c + \epsilon)q_{n-1}(x)$$



com $\epsilon \geq 0$. Sejam os zeros de $Q_\epsilon(x)$, $\xi_n(\epsilon) < \dots < \xi_1(\epsilon)$. Podemos notar que $\xi_r = \xi_r(0)$ e como $Q(x) = q_n(x) - cq_{n-1}(x)$ temos

$$Q_\epsilon(x) = Q(x) - \epsilon q_{n-1}(x).$$

Assim $Q_\epsilon(\xi_r) = -\epsilon q_{n-1}(\xi_r)$, então para $\epsilon > 0$

$$\text{sign} Q_\epsilon(\xi_r) = -\text{sign} q_{n-1}(\xi_r) = (-1)^r \quad (4.5.3)$$

devido a propriedade de interlaçamento entre y_r e ξ_r . Como os zeros de $Q_\epsilon(x)$ são todos reais, de (4.5.3) temos que $\text{sign} Q_\epsilon(\xi_1) = -1$, então existe um $\xi_1(\epsilon)$ (zero de $Q_\epsilon(x)$), onde $\xi_1 < \xi_1(\epsilon)$, e ainda de (4.5.3) podemos concluir que $\xi_r < \xi_r(\epsilon)$. ■

Uma modificação do Lema 4.5.1, para polinômios pares ou ímpares, pode ser dado pelo seguinte resultado:

Lema 4.5.2. *Sejam $Q_n(x)$ e $Q_{n-2}(x)$ polinômios pares(ímpares) com os coeficientes do termo de maior grau positivos e com somente zeros reais cujos zeros positivos $x_1 > \dots > x_{[n/2]}$ e $y_1 > \dots > y_{[(n-2)/2]}$ interlaçam, isto é,*

$$x_{[n/2]} < y_{[(n-2)/2]} < \dots < y_1 < x_1.$$

Então, para qualquer constante c real, o polinômio

$$Q(x) = Q_n(x) - cQ_{n-2}(x)$$

tem n zeros e seus zeros $\xi_{[n/2]} < \dots < \xi_2 < \xi_1$ interlaçam com os zeros positivos de $Q_n(x)$ e $Q_{n-2}(x)$. Mais precisamente,

(i) se $c > 0$ então

$$x_1 < \xi_1,$$

$$x_r < \xi_r < y_{r-1}, \quad r = 2, \dots, [n/2]$$

(ii) se $c < 0$ então

$$y_r < \xi_r < x_r, \quad r = 1, \dots, [n/2] - 1,$$

$$\xi_{[n/2]} < x_{[n/2]}.$$

Além disso, todo zero positivo ξ_r , para $r = 1, \dots, [n/2]$, é uma função crescente de c .

Teorema 4.5.1. Para quaisquer $k \geq 1$ e $M \geq 0$ os zeros dos polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$ e $P_n^{(\lambda+1)}$, $n \geq 2$, satisfazem

$$x_{n,1}^{(\lambda+1)} < x_{n,1}^{(\lambda, M, k)}$$

e

$$x_{n,r}^{(\lambda+1)} < x_{n,r}^{(\lambda, M, k)} < x_{n-2,r-1}^{(\lambda+1)}, \quad r = 2, \dots, [n/2].$$

Além disso,

a) para quaisquer n, r tais que $1 \leq r \leq [n/2]$ e $n \geq 2$, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de M para $M \in [0, \infty)$;

b) para quaisquer n, r tais que $1 \leq r \leq [n/2]$ e $n \geq 3$, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é função crescente de k para $k \in [\hat{k}(\lambda, M), \infty)$, onde $\hat{k}(\lambda, M) = \sqrt{\left(1 + \frac{2\lambda + 3}{4(\lambda + 2)M}\right)}$.

Demonstração: De (4.4.1), podemos escrever

$$K_n^{(\lambda, M, k)}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - c_n(\lambda, M, k)P_{n-2}^{\phi_2}(x),$$

onde $c_n(\lambda, M, k) = k^2(1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k))(1 - h_{n-2}^{\phi_2}(M, k))$.

De (4.4.2), temos que

$$h_0^{\phi_2}(k) = \frac{1}{(2M + 1)G^{\phi_2}(k)},$$

como $G^{\phi_2}(k) > 1$ e $M \geq 0$ temos $0 < h_0^{\phi_2}(k) < 1$. Consequentemente, de (4.4.1) e de $\alpha_{n+1}^{\phi_2} = k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]h_n^{\phi_2}(M, k)$, obtemos

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]} \quad \text{e} \quad [1 - h_n^{\phi_2}(M, k)] = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{k^2 h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)}, \quad n \geq 1,$$

podemos então concluir que $0 < h_n^{\phi_2}(M, k) < 1$, $n \geq 1$. Assim, $c_n(\lambda, M, k) > 0$ e, obtemos do Lema 4.5.2 que

$$x_{n,1}^{(\lambda+1)} < x_{n,1}^{(\lambda, M, k)}$$

e

$$x_{n,r}^{(\lambda+1)} < x_{n,r}^{(\lambda, M, k)} < x_{n-2,r-1}^{(\lambda+1)}, \quad r = 2, \dots, [n/2].$$

Portanto, a primeira parte do teorema está provada.



a) Vamos primeiramente analisar o comportamento de $c_n(\lambda, M, k)$ em relação a M .

De (4.4.2) temos que $\{h_0^{\phi_2}(M, k)\}$ é uma função decrescente de M , tal que para $0 < M < \infty$,

$$0 = h_0^{\phi_2}(\infty, k) < h_0^{\phi_2}(M, k) < h_0^{\phi_2}(0, k) = \frac{1}{G^{\phi_2}(k)}.$$

Então, $\{h_n^{\phi_2}(0, k)\}$ é a seqüência de parâmetros maximal da seqüência encadeada positiva $\left\{\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}\right\}$.

Quando $M \rightarrow \infty$ obtemos $h_n^{\phi_2}(\infty, k) \rightarrow m_n^{\phi_2}(k)$, a seqüência de parâmetros minimal, isto é, quando M cresce de 0 para ∞ em (2.3.1), $h_n^{\phi_2}(M, k)$ decresce do parâmetro maximal para o minimal da seqüência encadeada $\left\{\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}\right\}$. Consequentemente, $1 - h_n^{\phi_2}(M, k)$ é uma função crescente de M , então $c_n(\lambda, M, k) = k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)][1 - h_{n-2}^{\phi_2}(M, k)]$ é uma função crescente de M .

Pelo Lema 4.5.2, todo zero $x_{n,j}^{(\lambda, M, k)}$ de $K_n^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de $c_n(\lambda, M, k)$, deste modo $x_{n,j}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de M (com M variando de $[0, \infty)$).

b) Para analisar o comportamento de $c_n(\lambda, M, k)$ em relação a k , consideremos a relação

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]}, \quad n \geq 1.$$

Para qualquer $r \geq 0$ se $h_r^{\phi_2}(M, k)$ é uma função decrescente de k então $1 - h_r^{\phi_2}(M, k)$ é uma função crescente de k . Deste modo, como $\alpha_{r+2}^{\phi_2} > 0$ temos que $h_{r+1}^{\phi_2}(M, k)$ é uma função decrescente de k , isto é, $h_n^{\phi_2}(M, k)$ é uma função decrescente de k para $n = r + 1, r + 2, \dots$. Consequentemente, como

$$c_n(\lambda, M, k) = k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)][1 - h_{n-2}^{\phi_2}(M, k)]$$

temos que $c_n(\lambda, M, k)$ é uma função crescente de k , para $n = r + 2, r + 3, \dots$. Note-mos que $h_0^{\phi_2}(M, k) = 1 - \alpha_2^{(\lambda, M, k)}/k^2$ é uma função crescente de k . Entretanto, vamos mostrar que $h_1^{\phi_2}(M, k)$ é uma função decrescente de k , para $k \in [\hat{k}(\lambda, M), \infty)$.



Como

$$h_1^{\phi_2}(M, k) = \frac{\alpha_2^{\phi_2}}{k^2[1 - h_0^{\phi_2}(M, k)]} = \frac{\alpha_2^{\phi_2}}{k^2\left[1 - \frac{1}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)}\right]},$$

vamos analisar os valores de k cuja derivada de $f(k) = k^2\left[1 - \frac{1}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)}\right]$ seja positiva. Temos

$$\begin{aligned} G^{\phi_2}(k) &= \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_{-1}^1 \frac{k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x) = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{2k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x) \\ &= \frac{k^2}{\int_0^1 (1 - x^2)^{\lambda+1/2} dx} \int_0^1 \frac{(1 - x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

então, obtemos

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 2k \left[1 - \frac{1}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)} \right] + \frac{k^2}{(2M+1)\{G^{\phi_2}(k)\}^2} \frac{\partial G^{\phi_2}(k)}{\partial k}.$$

Mas

$$\frac{\partial G^{\phi_2}(k)}{\partial k} = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{-4kx^2}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x)$$

assim

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 2k \left[1 - \frac{G^{\phi_2}(k)\mu_0^{\phi_2} + 2k^2 \int_0^1 \frac{x^2}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x)}{(2M+1)\{G^{\phi_2}(k)\}^2 \mu_0^{\phi_2}} \right]$$

como $G^{\phi_2}(k) = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{2k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x)$ temos que

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 2k \left[1 - \frac{2k^4}{(2M+1)\{G^{\phi_2}(k)\}^2 \mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x) \right].$$

Temos para $k > 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x) < \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - 1)(k^2 - x^2)} d\phi_2(x) = \frac{1}{(k^2 - 1)} \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)} d\phi_2(x)$$

deste modo

$$\int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x) < \frac{\mu_0^{\phi_2}}{(k^2 - 1)2k^2} G^{\phi_2}(k).$$

Logo

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 2k \left[1 - \frac{k^2}{(2M+1)G^{\phi_2}(k)(k^2 - 1)} \right]. \quad (4.5.4)$$

Mas de (4.1.4), temos

$$G_2^{\phi_2}(k) = \frac{k^2}{k^2 - \alpha_2^{\phi_2}}.$$

Como $G_2^{\phi_2}(k) < G^{\phi_2}(k)$ temos (para $k > 1$)

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 2k \left[1 - \frac{k^2 - \alpha_2^{\phi_2}}{(2M+1)(k^2-1)} \right].$$

Para descobrirmos os valores de k , tais que, $\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$, precisamos analisar

$$1 - \frac{k^2 - \alpha_2^{\phi_2}}{(2M+1)(k^2-1)} \geq 0.$$

Mas $\alpha_2^{\phi_2} = \frac{1}{2(\lambda+2)}$, então

$$1 - \frac{2(\lambda+2)k^2 - 1}{2(\lambda+2)(k^2-1)(2M+1)} \geq 0 \quad (4.5.5)$$

e ainda

$$k^2 \geq 1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}.$$

Portanto, se $k^2 \geq 1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}$ então $\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$. Assim, $h_1^{\phi_2}(M, k)$ é uma função decrescente de k , para $k \geq \sqrt{1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}}$. Então, $c_n(\lambda, M, k)$ é uma função crescente de k , para $n = 3, 4, \dots$. Deste modo, pelo Lema 4.5.2 $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de $c_n(\lambda, M, k)$, então $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de k , com $1 \leq r \leq [n/2]$ e $n \geq 3$, e ainda quando $k \in [\hat{k}(\lambda, M), \infty)$, onde $\hat{k}(\lambda, M) = \sqrt{1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}}$. ■

Através da relação $1 < G_2^{\phi_2}(x) < G_3^{\phi_2}(x) < \dots < G_n^{\phi_2}(x) < G^{\phi_2}(x)$ vista anteriormente na Seção 4.1, observamos que $G_3^{\phi_2}$ está mais próximo de G^{ϕ_2} que $G_2^{\phi_2}$, ou seja, $G_3^{\phi_2}$ fornece uma melhor aproximação para $G^{\phi_2}(x)$. Mas

$$G_3^{\phi_2}(k) = \frac{1}{1 - \frac{a_1(k)}{1} - \frac{a_2(k)}{1}} = \frac{1 - a_2(k)}{1 - a_2(k) - a_1(k)} = \frac{1 - \alpha_3^{\phi_2}/k^2}{1 - \alpha_3^{\phi_2}/k^2 - \alpha_2^{\phi_2}/k^2}$$

como $\alpha_2^{\phi_2} = \frac{1}{2(\lambda+2)}$ e $\alpha_3^{\phi_2} = \frac{(2\lambda+3)}{2(\lambda+2)(\lambda+3)}$ obtemos

$$\frac{1}{G_3^{\phi_2}(k)} = \frac{2(\lambda+2)(\lambda+3)k^2 - 3(\lambda+2)}{2(\lambda+2)(\lambda+3)k^2 - (2\lambda+3)}$$

Através da relação (4.5.4) e como $G_3^{\phi_2} < G^{\phi_2}$ (para $k > 1$)

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 2k \left[1 - \frac{k^2 \{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - 3(\lambda + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - (2\lambda + 3)\}} \right]$$

Da mesma forma, para descobrirmos os valores de k , tais que, $\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$, precisamos analisar

$$1 - \frac{k^2 \{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - 3(\lambda + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - (2\lambda + 3)\}} \geq 0$$

Com o uso do software Mathematica® 4 calculamos os valores das raízes de

$$A(k) = 1 - \frac{k^2 \{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - 3(\lambda + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - (2\lambda + 3)\}}. \quad (4.5.6)$$

Os cálculos seguem no diagrama abaixo, com $\lambda = L$.

$$A = 1 - \frac{k^2 \{2(L + 2)(L + 3)k^2 - 3(L + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(L + 2)(L + 3)k^2 - (2L + 3)\}}$$

$$1 - \frac{k^2 (-3(2 + L) + 2k^2(2 + L)(3 + L))}{(-1 + k^2)(-3 - 2L + 2k^2(2 + L)(3 + L))(1 + 2M)}$$

FullSimplify[Solve[A == 0, k]]

$$\left\{ \left\{ k \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left((9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M)) - \sqrt{-16(2 + L)(3 + L)(3 + 2L)M(1 + 2M)} + (9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M))^2 \right)} \right) / ((2 + L)(3 + L)M) \right\}, \right. \\ \left\{ k \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left((9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M)) - \sqrt{-16(2 + L)(3 + L)(3 + 2L)M(1 + 2M)} + (9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M))^2 \right)} \right) / ((2 + L)(3 + L)M) \right\}, \\ \left\{ k \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left((9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M)) + \sqrt{-16(2 + L)(3 + L)(3 + 2L)M(1 + 2M)} + (9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M))^2 \right)} \right) / ((2 + L)(3 + L)M) \right\}, \\ \left. \left(k \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left((9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M)) + \sqrt{-16(2 + L)(3 + L)(3 + 2L)M(1 + 2M)} + (9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M))^2 \right)} \right) / ((2 + L)(3 + L)M) \right) \right\}$$

Planilha 3.1 - Planilha de cálculo - Mathematica® 4

Tomando os valores arbitrários $\lambda = L = 1/2$ e $M = 1$, temos o seguinte gráfico (Gráfico 3.1) de $A(k)$ no intervalo $[-2, 2]$.

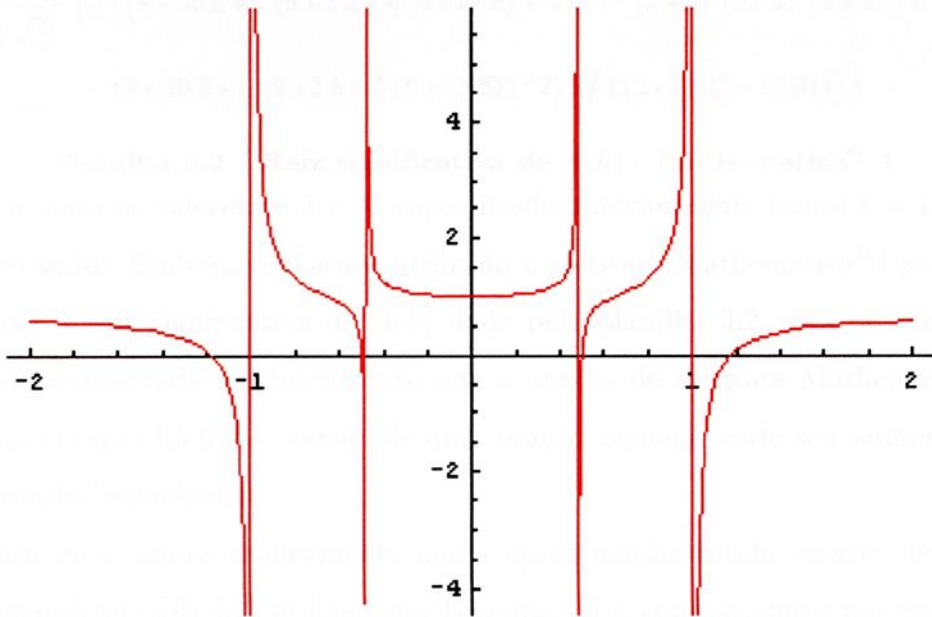


Gráfico 3.1 - Gráfico de $A(k)$ para $\lambda = 1/2$ e $M = 1$ no intervalo $[-2, 2]$

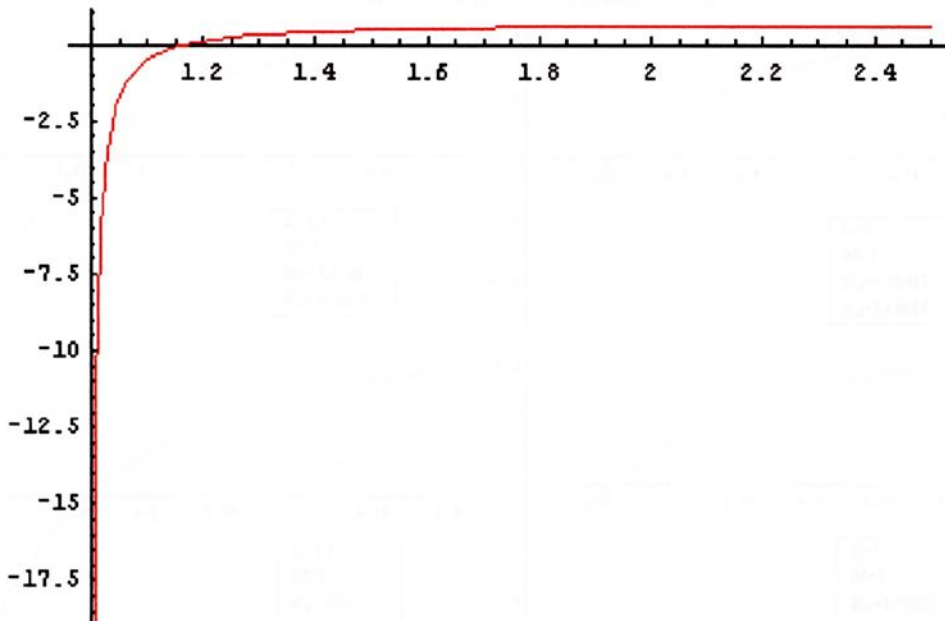


Gráfico 3.2 - Gráfico de $A(k)$ para $\lambda = 1/2$ e $M = 1$ no intervalo $[1, 2.5]$

Observemos, porém, que como $k > 1$ o intervalo de estudo significativo está representado pelo gráfico 3.2, onde a raiz visualizada é dada por

$$\left\{ k \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\left((9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M)) + \sqrt{-16(2 + L)(3 + L)(3 + 2L)M(1 + 2M)} + (9 + 30M + L(9 + 2L + 4(6 + L)M))^2 \right)} / ((2 + L)(3 + L)M) \right) \right\}$$

Planilha 3.2 - Raiz significativa de $A(k)$ - Mathematica® 4

De fato, para os valores de λ e M especificado anteriormente temos $k = 1.1748$.

Observação: Embora tenhamos utilizado o software Mathematica®4 para calcularmos a raiz significativa de $A(k)$ dada pela planilha 3.2, esta raiz também pode ser encontrada algébricamente sem o auxílio do software Mathematica®4, por $A(k)$ (veja (4.5.6)) se tratar de uma função racional onde seu numerador é uma função biquadrática.

Para mostrarmos graficamente que a aproximação obtida através de $G_3^{\phi_2}$ é mais precisa que a de $G_2^{\phi_2}$ utilizada no Teorema 4.5.1, comparamos a raiz escolhida de forma que $k > 1$, entre $A(k)$ dada por (4.5.6) e $B(k)$ o qual pode ser obtido de (4.5.5), ou seja

$$B(k) = 1 - \frac{2(\lambda + 2)k^2 - 1}{2(\lambda + 2)(k^2 - 1)(2M + 1)}$$

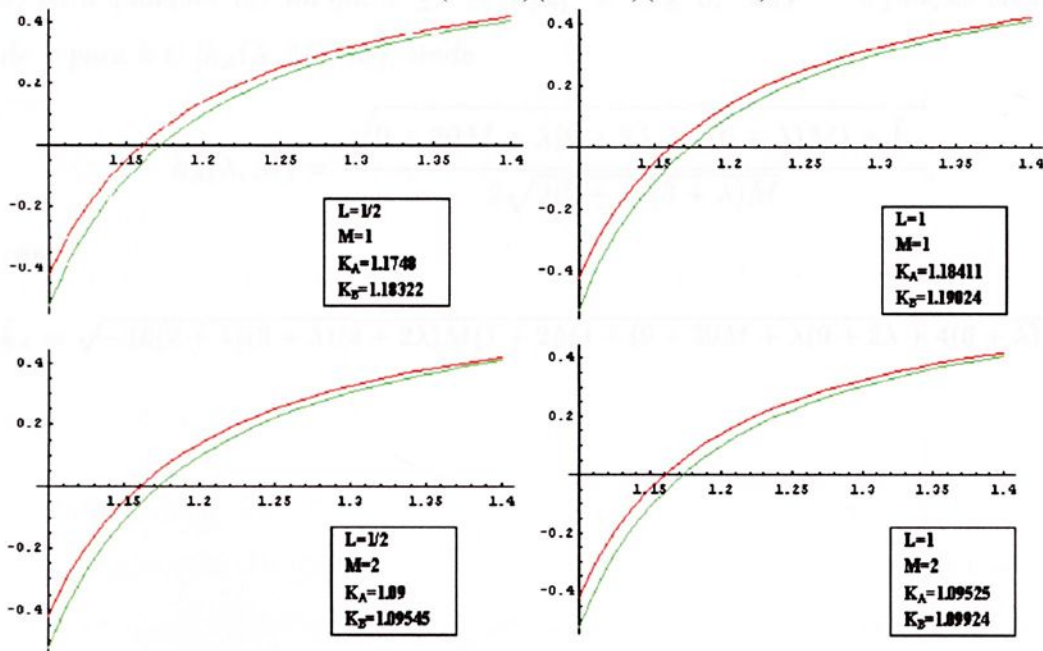


Gráfico 3.3 - Raízes de $A(k)$ (vermelho) e $B(k)$ (verde) e seus respectivos valores para diferentes parâmetros $L = \lambda$ e M - Mathematica® 4

Tomando valores arbitrários para $\lambda = L$ e M , como mostra o gráfico 3.3, observamos que as respectivas raízes referentes a $A(k)$ são menores que as correspondentes em $B(k)$, o que nos informa que o intervalo real delimitado pela raiz de $A(k)$, isto é, $[k_A, \infty)$ é maior que $[k_B, \infty)$, onde k_A é dado pela planilha 3.2 e $k_B = \hat{k}(\lambda, M) = \sqrt{1 + \frac{(2\lambda + 3)}{4(\lambda + 2)M}}$.

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado que melhora a parte b) do Teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.2. Para qualquer $k \geq 1$ e $M \geq 0$ os zeros dos polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$ e $P_n^{(\lambda+1)}$, $n \geq 2$, satisfazem

$$x_{n,1}^{(\lambda+1)} < x_{n,1}^{(\lambda, M, k)}$$

e

$$x_{n,r}^{(\lambda+1)} < x_{n,r}^{(\lambda, M, k)} < x_{n-2,r-1}^{(\lambda+1)}, \quad r = 2, \dots, [n/2].$$

Além disso,

a) para qualquer n, r tal que $1 \leq r \leq [n/2]$ e $n \geq 2$, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de M para $M \in [0, \infty)$;

b) para qualquer n, r tal que $1 \leq r \leq [n/2]$ e $n \geq 3$, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é função crescente de k para $k \in [k_A(\lambda, M), \infty)$, onde

$$k_A(\lambda, M) = \frac{\sqrt{9 + 30M + \lambda(9 + 2\lambda + 4(6 + \lambda)M) + \tilde{k}_A}}{2\sqrt{2(2 + \lambda)(3 + \lambda)M}}.$$

com

$$\tilde{k}_A = \sqrt{-16(2 + \lambda)(3 + \lambda)(3 + 2\lambda)M(1 + 2M) + (9 + 30M + \lambda(9 + 2\lambda + 4(6 + \lambda)M))^2}.$$

Capítulo 5

Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário

Neste capítulo, nosso objetivo é aplicar seqüências encadeadas no estudo de polinômios ortogonais no círculo unitário, que são conhecidos por polinômios de Szegő. Para isso, fazemos um estudo sobre os polinômios para-ortogonais. Além disso, com o uso de seqüências encadeadas, conseguimos obter novos resultados, como por exemplo o Teorema 5.3.2, citado na Introdução (Capítulo 1), que nos fornece relações entre polinômios de Szegő e polinômios ortogonais na reta real. Fazemos, também, exemplos dos polinômios de Szegő relacionados a certos polinômios ortogonais conhecidos, como em particular os polinômios de Koornwinder.

5.1 Polinômios de Szegő

Seja $d\nu(z)$ uma medida positiva no círculo unitário. Isto significa que $\nu(e^{i\theta})$ é uma função real, limitada e não decrescente para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Os polinômios ortogonais $S_n(z)$ definidos no círculo unitário, introduzidos por Szegő, são definidos por



$$\int_C S_n(z) \overline{S_m(z)} d\nu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\nu(e^{i\theta}) = 0, \quad m \neq n.$$

Como no círculo unitário $\bar{z} = \frac{1}{z}$, então S_n também pode ser definido por

$$\int_C z^{-n+s} S_n(z) z d\nu(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1,$$

ou seja, os polinômios de Szegő satisfazem a propriedade de L-ortogonalidade no círculo unitário em relação a $z d\nu(z)$ (veja Jones, Thron e Waadeland [9]). Neste caso, S_n é chamado polinômio L-ortogonal com relação a $z d\nu(z)$.

Como foi visto no Capítulo 2, os polinômios ortogonais reais satisfazem uma relação de recorrência de três termos que, em geral, não é válida para os polinômios ortogonais no plano complexo. Porém, existe uma relação de recorrência que é válida para os polinômios ortogonais no círculo unitário (veja Szegő [17]). Esta relação para os polinômios de Szegő mônicos é dada por

$$S_{n+1}(z) = zS_n(z) + a_{n+1}S_n^*(z), \quad n \geq 0. \quad (5.1.1)$$

onde $a_n = S_n(0)$, $n \geq 1$, são conhecidos como os coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő, com $|a_n| < 1$ para todo n , $S_0(z) = 1$ e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/z)}$ que são os polinômios recíprocos, onde $\overline{S_n}$ indica que somente os coeficientes de S_n são conjugados. É conhecido também, que os zeros de S_n estão localizados no disco unitário aberto. Podemos ainda, aplicando a operação $*$ a (5.1.1), escrever $S_{n+1}^*(z) = S_n^*(z) + \overline{a_{n+1}}zS_n(z)$, $n \geq 0$, então

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= zS_n(z) + a_{n+1}[S_{n+1}^*(z) - \overline{a_{n+1}}zS_n(z)] \\ &= zS_n(z) + a_{n+1}S_{n+1}^*(z) - |a_{n+1}|^2zS_n(z) \\ &= \{1 - |a_{n+1}|^2\}zS_n(z) + a_{n+1}S_{n+1}^*(z). \end{aligned}$$

Portanto, os polinômios de Szegő satisfazem também, a relação de recorrência

$$\{1 - |a_{n+1}|^2\}zS_n(z) = S_{n+1}(z) - a_{n+1}S_{n+1}^*(z), \quad n \geq 0. \quad (5.1.2)$$

5.2 Polinômios Para-ortogonais

Em 1989 Jones, Njåstad e Thron [7] consideraram os polinômios $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$, com $|w_n| = 1$ onde denominaram de polinômios para-ortogonais, isto é, a seqüência $\{S_n(z) + w_n S_n^*(z)\}$ que é uma seqüência de polinômios de grau n , satisfazem

$$\int_C [S_n(z) + w_n S_n^*(z)] \bar{z}^s d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1$$

que equivale a

$$\int_C z^{-n+s} [S_n(z) + w_n S_n^*(z)] d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1. \quad (5.2.1)$$

Mostraram também o seguinte resultado.

Teorema 5.2.1. *Os zeros de $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$, onde $|w_n| = 1$, são distintos e estão localizados no círculo unitário C .*

Demonstração: Seja $n \geq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} [S_n(z) + w_n S_n^*(z)]^* &= z^n [\bar{S}_n(1/z) + \bar{w}_n \bar{S}_n^*(1/z)] \\ &= S_n^*(z) + \bar{w}_n S_n(z). \end{aligned}$$

Como $|w_n| = 1$ temos

$$[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]^* = \frac{1}{w_n} [S_n(z) + w_n S_n^*(z)]. \quad (5.2.2)$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ zeros de ordem ímpar (distintos) de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$ localizados em C . Se não existem tais zeros em C , temos $p = 0$. Se existem então $1 \leq p \leq n$. É suficiente mostrar que $p = n$.

Seja β um zero de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$ que não está no círculo unitário C , então de (5.2.2), $1/\bar{\beta}$ é também um zero de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$, além disso, $1/\bar{\beta}$ não está no círculo unitário. Desta forma temos que os zeros de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$ que não estão em C ocorrem em pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$.

Se β é um zero de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$ em C , então como $|\beta| = 1$ temos que $\beta = 1/\bar{\beta}$. Neste caso existe um número par de zeros de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$ em C

mas não no conjunto $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p]$. Segue que os zeros de $[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]$ que não estão em $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p]$ ocorrem em pares $(\beta, 1/\bar{\beta})$. Denotemos estes zeros por $2q$ números, $\beta_1, 1/\bar{\beta}_1, \dots, \beta_q, 1/\bar{\beta}_q$. Se não existem tais zeros, temos $q = 0$. Temos que $p + 2q = n$. Como $[S_n(0) + w_n S_n^*(0)] \neq 0$, então $\beta_j \neq 0$ e $1/\bar{\beta}_j \neq \infty$ para $j = 1, 2, \dots, q$. Sejam

$$A(z) = \begin{cases} (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_p) & \text{se } p \geq 1 \\ 1 & \text{se } p = 0 \end{cases}$$

$$B(z) = \begin{cases} (z - \beta_1) \dots (z - \beta_q) & \text{se } q \geq 1 \\ 1 & \text{se } q = 0 \end{cases} \quad \text{e } D(z) = z^q A(z).$$

Suponhamos $p < n$ o que é equivalente a $q \geq 1$. Isto significa que $\text{grau} D = p + q = n - q \leq n - 1$. Portanto a condição de para-ortogonalidade implica que

$$\int_C [S_n(z) + w_n S_n^*(z)] \overline{D(z)} d\nu(z) = 0.$$

Por outro lado, usando as simples relações

$$\bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \text{e } \overline{A(1/z)} = \overline{A(z)}, \quad \text{para } z \in C,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_C [S_n(z) + w_n S_n^*(z)] \overline{D(z)} d\nu(z) &= \int_C A(z) B(z) \frac{(z - 1/\bar{\beta}_1) \dots (z - 1/\bar{\beta}_q)}{z^q} \overline{A(1/z)} d\nu(z) \\ &= \int_C A(z) B(z) (-1)^q \frac{(1 - \bar{\beta}_1 z) \dots (1 - \bar{\beta}_q z)}{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q z^q} \overline{A(1/z)} d\nu(z) \\ &= \frac{(-1)^q}{\beta_1 \dots \beta_q} \int_C A(z) B(z) \overline{A(z) B(z)} d\nu(z) \neq 0. \end{aligned}$$

Temos então uma contradição, logo $p = n$. ■

A partir daqui, consideramos polinômios de Szegő reais. Isto acontece quando a medida $d\nu$ satisfaz a simetria $d\nu(1/z) = -d\nu(z)$, pois os momentos μ_n^ν satisfazem $\mu_{-n}^\nu = \overline{\mu_n^\nu} = \mu_n^\nu$. Deste modo temos que os momentos são reais e portanto, os coeficientes do polinômio de Szegő são reais se $d\nu(1/z) = -d\nu(z)$.



Seja $S_n(z) = s_0 + s_1z + \cdots + s_{n-1}z^{n-1} + z^n$, como $S_n^*(z) = z^n S_n(1/z)$, temos que $S_n^*(z) = s_0z^n + s_1z^{n-1} + \cdots + s_{n-1}z + 1$ e então

$$S_n(z) + S_n^*(z) = (s_0 + 1)z^n + (s_1 + s_{n-1})z^{n-1} + \cdots + (s_0 + 1).$$

Se dividirmos este polinômio por $(s_0 + 1)$ obtemos $\frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{s_0 + 1}$, um polinômio mônico. Mas $s_0 = S_n(0) = a_n$ (coeficiente de reflexão), assim definimos

$$S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)}, \quad n \geq 1, \quad (5.2.3)$$

e analogamente definimos

$$S_n^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_n(0)}, \quad n \geq 1, \quad (5.2.4)$$

polinômios mônicos. Os polinômios $S_n^{(1)}$ e $S_n^{(2)}$ são dois casos especiais de polinômios para-ortogonais.

De (5.1.2) e da relação $S_{n+1}^*(z) = S_n^* + a_{n+1}zS_n(z)$, temos para os polinômios de Szegő reais que

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= \frac{[(1 - a_{n+1}^2)zS_n(z) + a_{n+1}S_{n+1}^*(z)] + S_{n+1}^*(z)}{1 + a_{n+1}} \\ &= (1 - a_{n+1})zS_n(z) + S_{n+1}^*(z) \\ &= zS_n(z) + S_n^*(z). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $S_n(z) + zS_n^*(z)$ no lado direito da igualdade acima

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z + 1)[S_n(z) + S_n^*(z)] - S_n(z) - zS_n^*(z).$$

De (5.2.3) com $S_n(0) = a_n$,

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z + 1)S_n^{(1)}(z)(1 + a_n) - S_n(z) - zS_n^*(z) \\ &= (z + 1)S_n^{(1)}(z) + \left[\frac{za_n - 1}{1 + a_n} \right] S_n(z) + \left[\frac{a_n - z}{1 + a_n} \right] S_n^*(z). \end{aligned}$$

De (5.1.1) e da relação $S_{n+1}^*(z) = S_n^* + a_{n+1}zS_n(z)$, temos que

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z + 1)S_n^{(1)}(z) - (1 - a_n)z[S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)].$$



E novamente de (5.2.3) obtemos

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1+a_{n-1})(1-a_n)zS_{n-1}^{(1)}(z).$$

Analogamente, obtemos também que

$$S_{n+1}^{(2)}(z) = (z+1)S_n^{(2)}(z) - (1-a_{n-1})(1+a_n)zS_{n-1}^{(2)}(z).$$

Portanto, os polinômios $S_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem às relações de recorrência de três termos

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1+a_{n-1})(1-a_n)zS_{n-1}^{(1)}(z),$$

$n \geq 1, \quad (5.2.5)$

$$S_{n+1}^{(2)}(z) = (z+1)S_n^{(2)}(z) - (1-a_{n-1})(1+a_n)zS_{n-1}^{(2)}(z),$$

com $a_0 = 1$, $S_0^{(1)}(z) = S_0^{(2)}(z) = 1$, $S_1^{(1)}(z) = z+1$ e $S_1^{(2)}(z) = z-1$. Podemos observar da relação de recorrência que $S_{n+1}^{(2)}(1) = 0$, para $n \geq 1$, pois $S_{n+1}^{(2)}$ é múltiplo de $z-1$. Consideremos então os polinômios

$$R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z) \quad \text{e} \quad R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}^{(2)}(z)}{(z-1)}, \quad n \geq 0.$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} 2S_n(z) &= 2S_n(z) + S_n^*(z) - S_n^*(z) \\ &= [S_n(z) + S_n^*(z)] + [S_n(z) - S_n^*(z)]. \end{aligned}$$

De (5.2.3) e (5.2.4), temos a seguinte relação entre os polinômios de Szegő e os polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$,

$$2S_n(z) = (1+a_n)R_n^{(1)}(z) + (1-a_n)(z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1.$$

Temos também, de (5.1.2), que $(1-a_n^2)2zS_{n-1}(z) = 2S_n(z) - 2a_nS_n^*(z)$ então somando e subtraindo $S_n^*(z) + a_nS_n(z)$ no lado direito desta igualdade obtemos

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \quad (5.2.6)$$



Teorema 5.2.2. Os polinômios mônicos $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, satisfazem

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4\alpha_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \quad (5.2.7)$$

com $R_0^{(i)}(z) = 1$, $R_1^{(i)}(z) = z+1$ e

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{(1)} &= \frac{1}{4}(1+a_{n-1})(1-a_n) > 0, \\ \alpha_{n+1}^{(2)} &= \frac{1}{4}(1-a_n)(1+a_{n+1}) > 0, \end{aligned} \quad n \geq 1.$$

Além disso, esses polinômios satisfazem as relações de L -ortogonalidade

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1 \quad (5.2.8)$$

e

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) (z-1) d\nu(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (5.2.9)$$

Demonstração: A relação de recorrência para $R_{n+1}^{(i)}$, $i = 1, 2$, segue da relação (5.2.5). Através da relação de recorrência observamos que $R_n^{(i)}$ satisfaz a propriedade $z^n R_n^{(i)}(1/z) = R_n^{(i)}(z)$, aqui chamada de auto inversiva, pois $z^n R_n^{(i)}(1/z)$ satisfaz a mesma relação de recorrência de $R_n^{(i)}(z)$, com as mesmas condições iniciais.

Mostremos primeiramente (5.2.9). Como $R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1-S_{n+1}(0))}$, de (5.2.1) temos

$$\int_C z^{-(n+1)+s} R_n^{(2)}(z) (z-1) d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n,$$

que equivale a

$$\int_C z^{-n+(s-1)} R_n^{(2)}(z) (z-1) d\nu(z) = 0, \quad 0 \leq s-1 \leq n-1,$$

e ainda equivale a (5.2.9).

Provemos agora, (5.2.8). Novamente de (5.2.1)

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z-1}{z-1} d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad (5.2.10)$$

que é equivalente a

$$\int_C z^{-n} P_{n,s}(z) R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad (5.2.11)$$

onde $P_{n,s}(z) = z^{s-1}(z-1)$, $s = 1, 2, \dots, n-1$. Provemos que se tomarmos $P_{n,n}(z) = z + z^{n-1}$ então a relação (5.2.11) também vale para $s = n$. De (5.2.10)

$$\int_C z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = \int_C z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{1}{z-1} d\nu(z), \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

Substituindo z por $1/z$ no lado direito da igualdade e usando a simetria da medida $d\nu(1/z) = -d\nu(z)$ e a propriedade auto inversiva de $R_n^{(1)}$, $z^n R_n^{(1)}(1/z) = R_n^{(1)}(z)$, obtemos

$$\int_C z^{-n} [z^s + z^{n-s}] R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

Consequentemente, $P_{n,n}(z)$ é obtido quando fazemos $s = 1$ na expressão $z^s + z^{n-s}$, ou seja,

$$\int_C z^{-n} P_{n,n}(z) R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = 0.$$

Portanto (5.2.11) vale também para $s = n$, ou seja

$$\int_C z^{-n} P_{n,s}(z) R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = 0, \quad 1 \leq s \leq n. \quad (5.2.12)$$

Podemos verificar que o conjunto de polinômios $P_{n,s}$, $s = 1, 2, \dots, n$, de grau menor ou igual a $n-1$, formam um conjunto linearmente independente. Em particular, podemos escrever

$$z^s - \frac{1}{2} P_{n,n}(z) = \frac{z(z^{s-1} - 1) - z^s(z^{n-s-1} - 1)}{2},$$

mas, $z^k - 1 = (1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1})(z-1)$, para $k > 1$. Então, para cada monômio z^s , $0 \leq s \leq n-1$, conseguimos uma única combinação linear do tipo $z^s = d_1^{(s)} P_{n,1}(z) + d_2^{(s)} P_{n,2}(z) + \dots + d_{n-1}^{(s)} P_{n,n-1}(z) + \frac{1}{2} P_{n,n}(z)$. Consequentemente, de (5.2.12) chegamos ao resultado (5.2.8). ■



5.3 Relações entre Polinômios de Szegő e Polinômios Ortogonais na Reta Real

Seja $\{R_n\}$ uma sequência de polinômios mônicos dados por

$$R_{n+1}(z) = (z+1)R_n(z) - 4\alpha_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (5.3.1)$$

com $R_0(z) = 1$, $R_1(z) = z+1$ e $\alpha_{n+1} > 0$.

Teorema 5.3.1. *Seja $\{R_n\}$ a sequência de polinômios mônicos dados pela relação de recorrência (5.3.1). Então, os zeros de R_n são distintos (exceto para um possível zero $z = 1$, de multiplicidade 2) e estão no círculo unitário ou na reta real positiva. Em particular, se $\{\alpha_{n+1}\}$ é uma sequência encadeada, todos os zeros são distintos e estão no círculo unitário aberto $\{z : z = e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$. Neste caso, existe uma medida positiva $d\nu(z)$ no círculo unitário tal que*

$$\int_C z^{-n+s} R_n(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (5.3.2)$$

Demonstração: Da relação de recorrência (5.3.1), podemos concluir que $z^n R_n(1/z) = R_n(z)$, pois satisfazem a mesma relação de recorrência, com as mesmas condições iniciais. Considerando a transformação de Delsarte-Genin $x = x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$ (veja Zhedanov [23]), então, os polinômios $P_n(x) = (4z)^{-n/2} R_n(z)$, $n \geq 0$, satisfazem a relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.3.3)$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$. Através da *Fórmula Confluyente para a Identidade de Christoffel Darboux* dada por

$$P'_n(x)P_{n-1}(x) - P'_{n-1}(x)P_n(x) > 0$$

e ainda pela relação de recorrência (5.3.3), temos que os zeros de P_n são reais, distintos e simétricos com relação à origem. Se escrevermos, $P_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{2n,k}^2)$

e $P_{2n+1}(x) = x \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{2n+1,k}^2)$, de $R_n(z) = (4z)^{n/2} P_n(x(z))$ temos que

$$R_{2n}(z) = (4z)^n \prod_{k=1}^n (x^2 - x_{2n,k}^2)$$

mas

$$\begin{aligned} (x^2 - x_{2n,k}^2) &= \left[\frac{1}{2} (z^{1/2} + z^{-1/2}) \right]^2 - \left[\frac{1}{2} (z_{2n,k}^{1/2} + z_{2n,k}^{-1/2}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4z} (z - z_{2n,k})(z - 1/z_{2n,k}), \end{aligned}$$

então

$$R_{2n}(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_{2n,k})(z - 1/z_{2n,k}).$$

Analogamente,

$$R_{2n+1}(z) = (z + 1) \prod_{k=1}^n (z - z_{2n+1,k})(z - 1/z_{2n+1,k}),$$

onde $z_{n,k} = (2x_{n,k}^2 - 1) + 2\sqrt{x_{n,k}^2(x_{n,k}^2 - 1)}$. Consequentemente, se $x_{n,k}^2 < 1$ então $z_{n,k}$ e $1/z_{n,k}$ são pares conjugados de zeros de R_n no círculo unitário e se $x_{n,k}^2 > 1$ então $z_{n,k}$ e $1/z_{n,k}$ são zeros positivos de R_n na reta real. Deste modo, concluímos que os zeros de R_n estão no círculo unitário ou na reta real positiva. Se $z = 1$ é um zero de R_n então ele é um zero de multiplicidade 2.

Se $\{\alpha_{n+1}\}$ é uma seqüência encadeada, e como $P_n(x)$ é um polinômio simétrico, segue da observação obtida através do Teorema 3.3.2 e Corolário 3.3.1, que todos os zeros de P_n estão em $(-1, 1)$. Consequentemente, neste caso, todos os zeros de R_n estão no círculo unitário aberto $\{z : z = e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$.

Como P_n , $n > 1$ satisfaz a relação de recorrência (5.3.3) e ainda como seus zeros estão em $(-1, 1)$, o Teorema de Favard (veja, por exemplo, Chihara [4]) garante que existe uma medida positiva $d\phi$, com suporte em $[-1, 1]$, tal que

$$\int_{-1}^1 x^s P_n(x) d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$



Usando expansão binomial e pela simetria de P_n podemos escrever¹

$$\int_{-1}^1 [x + i\sqrt{1-x^2}]^{-(n-1)+2s} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1. \quad (5.3.4)$$

Fazendo $x = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$, isto é, fazendo $z^{1/2} = x + i\sqrt{1-x^2}$, obtemos

$$\int_{-C} [z^{1/2}]^{-(n-1)+2s} (4z)^{-n/2} R_n(z) \frac{z^{1/2} 2i}{(z-1)} d\phi(x(z)) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Portanto

$$\int_{-C} z^{-n+s} R_n(z) \frac{z}{(z-1)} d\phi(x(z)) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Como $x(z)$ é uma função decrescente de $z = e^{i\theta}$ com θ variando de 0 a 2π , obtemos a medida positiva $d\nu(z) = -d\phi(x(z))$. Deste modo concluímos (5.3.2). ■

Voltando às relações de recorrência de $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$,

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4\alpha_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $i = 1, 2$, $R_0^{(i)}(z) = 1$, $R_1^{(i)}(z) = z+1$ e

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{(1)} &= \frac{1}{4}(1+a_{n-1})(1-a_n) > 0, \\ \alpha_{n+1}^{(2)} &= \frac{1}{4}(1-a_n)(1+a_{n+1}) > 0, \end{aligned} \quad n \geq 1,$$

observamos que os coeficientes $\{\alpha_{n+1}^{(1)}\}$ e $\{\alpha_{n+1}^{(2)}\}$ são seqüências encadeadas com as respectivas seqüências de parâmetros

$$\left\{ g_n^{(1)} = \frac{1-a_n}{2} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{e} \quad \left\{ g_n^{(2)} = \frac{1+a_{n+1}}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Mais precisamente

$$\begin{aligned} (1-g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)} &= \alpha_{n+1}^{(1)}, & g_{n-2}^{(2)}(1-g_{n-1}^{(2)}) &= \alpha_{n+1}^{(2)}, \\ (1-g_{n-1}^{(2)})g_n^{(2)} &= \alpha_{n+1}^{(2)}, & g_n^{(1)}(1-g_{n+1}^{(1)}) &= \alpha_{n+1}^{(1)}, \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (5.3.5)$$

com $g_0^{(1)} = g_{-1}^{(2)} = 1$ e $0 < g_0^{(2)} = 1 - \alpha_2^{(1)} = \frac{(1+a_1)}{2} < 1$.

¹veja Apêndice A



Os polinômios $P_n^{\phi_1}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(1)}(z)$ e $P_n^{\phi_2}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(2)}(z)$ satisfazem as relações de recorrência

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.3.6)$$

e são ortogonais em $[-1, 1]$ em relação as medidas $d\phi_1(x) = -d\nu(z)$ e $d\phi_2(x) = -(1 - x^2)d\nu(z)$, respectivamente. Podemos observar que $\alpha_{n+1}^{\phi_i} = \alpha_{n+1}^{(i)}$, $i = 1, 2$ onde $\alpha_{n+1}^{\phi_i}$ é dado pela relação de recorrência (5.3.6) e $\alpha_{n+1}^{(i)}$ é dado pela relação (5.2.7). A partir de agora usaremos somente a notação $\alpha_{n+1}^{\phi_i}$, $i = 1, 2$.

Note que $d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x)$, onde $x = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$. Como foi visto no Capítulo 4, Seção 4.1, $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são dadas por (4.1.6) com $k = 1$. Então $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ satisfazem as relações de recorrência dadas por (4.1.8) com $l_n = a_n$, $n \geq 0$, isto é,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\phi_1}(x) &= xP_n^{\phi_1}(x) - \frac{1}{4}(1 - a_n)(1 + a_{n-1})P_{n-1}^{\phi_1}(x), \\ P_{n+1}^{\phi_2}(x) &= xP_n^{\phi_2}(x) - \frac{1}{4}(1 - a_n)(1 + a_{n+1})P_{n-1}^{\phi_2}(x), \\ P_{n+1}^{\phi_1}(x) &= P_{n+1}^{\phi_2}(x) - \frac{1}{4}(1 - a_n)(1 - a_{n+1})P_{n-1}^{\phi_2}(x), \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

para $n \geq 1$.

O próximo resultado, que é o teorema mencionado na Introdução (Capítulo 1), relaciona polinômios ortogonais na reta real com os polinômios de Szegő, mais precisamente, ele nos mostra que conhecido certos polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ associados a certas medidas, podemos obter seus respectivos polinômios de Szegő, e ainda mostra como os coeficientes de reflexão $a_n = S_n(0)$ podem ser gerados.

Teorema 5.3.2. *Sejam $d\phi_1(x)$ e $d\phi_2(x)$ duas medidas positivas em $[-1, 1]$ tais que $d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x)$. Sejam os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ associados a estas medidas que satisfazem*

$$P_{n+1}^{\phi_i}(x) = xP_n^{\phi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_i} P_{n-1}^{\phi_i}(x), \quad n \geq 1. \quad (5.3.8)$$



Seja

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1, \quad (5.3.9)$$

onde $R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{\phi_i}(x(z))$. Então, S_n são os polinômios de Szegő mônicos associados à medida $d\nu(z) = -d\phi_1(x(z))$. Além disso, os coeficientes de reflexão $a_n = S_n(0)$ podem ser gerados por

$$a_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{(1+a_{n-1})} \quad \text{ou} \quad a_{n+1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{(1-a_n)}, \quad n \geq 1.$$

Dado explicitamente,

$$a_{2n-1} = 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \cdots \alpha_3^{\phi_2} \mu_0^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \cdots \alpha_3^{\phi_1} \mu_0^{\phi_1}} - 1, \quad a_{2n} = 2 \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2} \alpha_{2n-2}^{\phi_2} \cdots \alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1} \alpha_{2n-2}^{\phi_1} \cdots \alpha_2^{\phi_1}} - 1, \quad n \geq 1,$$

onde $\mu_0^{\phi_i}$, $i = 1, 2$, são os respectivos momentos de ordem zero.

Demonstração: Considerando a transformação $x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$ e multiplicando a relação de recorrência (5.3.8) por $(4z)^{\frac{n+1}{2}}$ obtemos

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4\alpha_{n+1}^{\phi_i} z R_{n-1}^{(i)}(z). \quad (5.3.10)$$

Como $d\phi_2(x) = (1-x^2)d\phi_1(x)$ temos de (5.3.7) que

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^{\phi_1} &= \frac{1}{4}(1-a_n)(1+a_{n-1}), \\ \alpha_{n+1}^{\phi_2} &= \frac{1}{4}(1-a_n)(1+a_{n+1}), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (5.3.11)$$

e

$$P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\phi_2}(x) - \frac{1}{4}(1-a_n)(1-a_{n+1})P_{n-1}^{\phi_2}(x),$$

então, multiplicando a relação acima por $(4z)^{\frac{n+1}{2}}$ e usando a transformação $x(z) = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$ obtemos

$$R_{n+1}^{(1)}(z) = R_{n+1}^{(2)}(z) - (1-a_n)(1-a_{n+1})zR_{n-1}^{(2)}(z). \quad (5.3.12)$$

que equivale, de (5.3.10), a

$$R_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)R_n^{(2)}(z) - 2(1-a_n)zR_{n-1}^{(2)}(z). \quad (5.3.13)$$

Por hipótese temos que $2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z)$, $n \geq 1$ e através da propriedade auto inversiva $z^n R_n^{(i)}(1/z) = R_n^{(i)}(z)$, podemos então escrever que

$$2S_{n-1}^*(z) = R_n^{(1)}(z) - (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1 \quad (5.3.14)$$

Precisamos provar que $S_n(z)$ satisfaz a relação de recorrência para os polinômios de Szegő, isto é, que $S_n(z) = zS_{n-1}(z) + a_n S_{n-1}^*(z)$, $n \geq 1$.

De (5.3.9) e (5.3.14) temos

$$2[zS_{n-1}(z) + a_n S_{n-1}^*(z)] = (1+a_n)R_n^{(1)}(z) + (1-a_n)(z-1)R_{n-1}^{(2)}(z).$$

De (5.3.13)

$$\begin{aligned} 2[zS_{n-1}(z) + a_n S_{n-1}^*(z)] &= (1+a_n)(z+1)R_{n-1}^{(2)}(z) - 2(1-a_{n-1})(1+a_n)R_{n-2}^{(2)}(z) \\ &\quad + (1-a_n)(z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) \\ &= 2(z+a_n)R_{n-1}^{(2)}(z) - 2(1-a_{n-1})(1+a_n)zR_{n-2}^{(2)}(z) \\ &= 2(z+1)R_{n-1}^{(2)}(z) - 2(1-a_{n-1})(1+a_n)zR_{n-2}^{(2)}(z) \\ &\quad - 2(1-a_n)R_{n-1}^{(2)}(z). \end{aligned}$$

Ainda de (5.3.10)

$$\begin{aligned} 2[zS_{n-1}(z) + a_n S_{n-1}^*(z)] &= 2R_n^{(2)}(z) - 2(1-a_n)R_{n-1}^{(2)}(z) \\ &= \left\{ \frac{(z+1)}{z} + \frac{(z-1)}{z} \right\} R_n^{(2)}(z) - 2(1-a_n)R_{n-1}^{(2)}(z) \\ &= \frac{1}{z} \left[(z+1)R_n^{(2)}(z) - 2(1-a_n)zR_{n-1}^{(2)}(z) \right. \\ &\quad \left. + (z-1)R_n^{(2)}(z) \right] \end{aligned}$$

e novamente de (5.3.13) e de (5.3.9) concluímos que

$$2[zS_{n-1}(z) + a_n S_{n-1}^*(z)] = \frac{1}{z} \left[R_{n+1}^{(1)}(z) + (z-1)R_n^{(2)}(z) \right] = 2S_n(z).$$

Basta mostrarmos agora que $S_n(z)$ satisfaz a relação de ortogonalidade para os polinômios de Szegő. Como $\{\alpha_{n+1}^{\phi_i}\}$, $i = 1, 2$, são seqüências encadeadas temos



5.3 Relações entre Polinômios de Szegő e Polinômios Ortogonais na Reta Real

pelo Teorema 5.2.2 que $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ satisfazem as relações de L-ortogonalidade dadas por (5.2.8) e (5.2.9) respectivamente. Então de (5.3.9) temos que

$$\begin{aligned}\int_C z^{-n+1+s} 2S_{n-1}(z) z d\nu(z) &= \int_C z^{-n+1+s} R_n^{(1)}(z) d\nu(z) + \int_C z^{-n+1+s} R_{n-1}^{(2)}(z)(z-1) d\nu(z) \\ &= \int_C z^{-n+1+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z-1}{z-1} d\nu(z) + \int_C z^{-n+1+s} R_{n-1}^{(2)}(z)(z-1) d\nu(z) \\ &= 0, \quad 0 \leq s \leq n-1\end{aligned}$$

que equivale a

$$\int_C z^{-n+s} S_n(z) z d\nu(z) = \int_C \bar{z}^{n-s-1} S_n(z) d\nu(z) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Portanto S_n são os polinômios mônicos de Szegő associados à $d\nu(z) = -d\phi_1(x(z))$.

Em (5.3.11) podemos escrever

$$a_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{(1+a_{n-1})} \quad \text{ou} \quad a_{n+1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{(1-a_n)}, \quad n \geq 1.$$

Então usando os dois resultados acima obtemos

$$\begin{aligned}a_{2n-1} &= -1 + \frac{4\alpha_{2n-1}^{\phi_2}}{1-a_{2n-2}} = -1 + \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1}/(1+a_{2n-3})} = -1 + \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} 4\alpha_{2n-3}^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} (1-a_{2n-4})} \\ &= \dots = -1 + \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \dots \alpha_5^{\phi_2} 4\alpha_3^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \dots \alpha_5^{\phi_1} (1-a_2)} = -1 + \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \dots \alpha_5^{\phi_2} \alpha_3^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \dots \alpha_5^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} / (1+a_1)} \\ &= -1 + 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \dots \alpha_5^{\phi_2} \alpha_3^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \dots \alpha_5^{\phi_1} \alpha_3^{\phi_1} / (1-\alpha_2^{\phi_1})}.\end{aligned}$$

Mas como foi visto no Capítulo 2, podemos escrever

$$1 - \alpha_2^{\phi_1} = 1 - \frac{\langle P_1^{\phi_1}, P_1^{\phi_1} \rangle}{\langle P_0^{\phi_1}, P_0^{\phi_1} \rangle} = 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 d\phi_1(x)}{\int_{-1}^1 d\phi_1(x)}$$

pois $P_0^{\phi_1}(x) = 1$ e $P_1^{\phi_1}(x) = x$, já que $P_n^{\phi_1}$ é simétrico. Deste modo

$$1 - \alpha_2^{\phi_1} = \frac{\int_{-1}^1 (1-x^2) d\phi_1(x)}{\int_{-1}^1 d\phi_1(x)} = \frac{\int_{-1}^1 d\phi_2(x)}{\int_{-1}^1 d\phi_1(x)} = \frac{\mu_0^{\phi_2}}{\mu_0^{\phi_1}}.$$

Logo

$$a_{2n-1} = 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{\phi_2} \alpha_{2n-3}^{\phi_2} \dots \alpha_3^{\phi_2} \mu_0^{\phi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\phi_1} \alpha_{2n-3}^{\phi_1} \dots \alpha_3^{\phi_1} \mu_0^{\phi_1}} - 1, \quad n \geq 1.$$

Analogamente, obtemos

$$a_{2n} = 2 \frac{\alpha_{2n}^{\phi_2} \alpha_{2n-2}^{\phi_2} \dots \alpha_2^{\phi_2}}{\alpha_{2n}^{\phi_1} \alpha_{2n-2}^{\phi_1} \dots \alpha_2^{\phi_1}} - 1, \quad n \geq 1.$$

■

5.4 Alguns Exemplos de Polinômios de Szegő

Consideramos alguns exemplos para mostrar como os resultados anteriores podem ser usados para obter informações sobre os polinômios de Szegő reais.

Polinômios de Gegenbauer e polinômios de Szegő associados.

Sejam $d\phi_1(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}dx$ e $d\phi_2(x) = (1-x^2)^{\lambda+1/2}dx$ em $[-1, 1]$, onde $\lambda > -1/2$. Então $P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{(\lambda)}(x)$ e $P_n^{\phi_2}(x) = P_n^{(\lambda+1)}(x)$ são os respectivos polinômios de Gegenbauer mônicos com parâmetros λ e $\lambda + 1$. Consequentemente,

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{n(n+2\lambda+1)}{4(n+\lambda+1)(n+\lambda)}, \quad n \geq 1.$$

Os polinômios $S_n^{(\lambda)}$ definidos por

$$2zS_n^{(\lambda)}(z) = R_{n+1}^{(1,\lambda)}(z) + (z-1)R_n^{(2,\lambda)}(z), \quad n \geq 0,$$

onde

$$R_n^{(1,\lambda)}(z) = (4z)^{n/2}P_n^{(\lambda)}(x(z)) \quad \text{e} \quad R_n^{(2,\lambda)}(z) = (4z)^{n/2}P_n^{(\lambda+1)}(x(z)),$$

são os polinômios de Szegő-Gegenbauer (veja, por exemplo, Van Assche [19]) associados à medida $d\nu(z) = -d\phi_1(x(z))$. Mas $x = (z^{1/2} + z^{-1/2})/2 = \cos(\theta/2)$, então

$$d\nu(z) = \left[\frac{(z-1)^2}{-4z} \right]^\lambda \frac{dz}{2iz} = \frac{1}{2} |\sin(\theta/2)|^{2\lambda} d\theta,$$

com $z = e^{i\theta}$. Os coeficientes de reflexão são $a_n^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{n+\lambda}$, $n \geq 1$.

Quando $\lambda = 0$, então $a_n^{(0)} = 0$ e temos os resultados associados aos polinômios de Tchebichef. Neste caso temos $R_n^{(1,0)}(z) = (4z)^{n/2}P_n^{(0)}(x(z))$, mas $P_n^{(0)}$ são os polinômios de Tchebichef de primeira espécie mônicos que são dados por

$$P_n^{(0)}(x) = 2^{-(n-1)} \cos(n \arccos x)$$

(veja, por exemplo, Chihara [4]), então

$$P_n^{(0)}(x(z)) = \frac{\cos(n\theta/2)}{2^{n-1}} = \frac{z^{n/2} + z^{-n/2}}{2^n},$$



com $z = e^{i\theta}$. Portanto

$$R_n^{(1,0)}(z) = z^n + 1.$$

Analogamente, $R_n^{(2,0)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{(1)}(x(z))$, mas $P_n^{(1)}$ são os polinômios de Tchebichef de segunda espécie mônicos que são dados por

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{\text{sen}[(n+1) \arccos x]}{2^n \sqrt{1-x^2}}$$

(veja, por exemplo, Szegő [17]), então

$$P_n^{(1)}(x(z)) = \frac{\text{sen}((n+1)\theta/2)}{2^n \text{sen}(\theta/2)} = \frac{z^{(n+1)/2} - z^{-(n+1)/2}}{2^n(z^{1/2} - z^{-1/2})},$$

com $z = e^{i\theta}$. Portanto

$$R_n^{(2,0)}(z) = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Assim, obtemos

$$S_n^{(0)}(z) = \frac{1}{2z} [R_{n+1}^{(1,0)}(z) + (z-1)R_n^{(2,0)}(z)] = z^n,$$

que são os polinômios de Szegő mônicos associados à medida $d\nu(z) = -d\phi_1(x(z)) = \frac{dz}{2iz}$.

Polinômios de Koornwinder e polinômios de Szegő associados

Seja a medida $d\phi_1(x)$ definida em $[-1, 1]$, com $\lambda > -3/2$, $M \geq 0$ e $0 < \tau \leq 1$, tal que

$$\int_{-1}^1 f(x) d\phi_1(x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-1) + f(1)] + c^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2}}{1-x^2} dx \right\} \quad (5.4.1)$$

onde

$$c = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2}}{1-x^2} dx$$

de forma que a massa total da medida $d\phi_1$ é 1, isto é, $\mu_0^{\phi_1} = 1$. Quando $\tau = 1$ (e $\lambda > -1/2$), os polinômios $P_n^{\phi_1}$ associados a $d\phi_1$ são os polinômios de Koornwinder simétricos, como vimos na Seção 2.3.

Seja $d\phi_2(x) = (1 - x^2)d\phi_1(x)$, então de (5.4.1)

$$\int_{-1}^1 f(x)d\phi_2(x) = \frac{1}{(2M+1)c} \frac{1}{c} \int_{-\tau}^{\tau} f(x)(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2} dx$$

logo, $d\phi_2(x) = [(2M+1)c]^{-1}(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2} dx$. Consequentemente, $P_n^{\phi_2}(x) = P_n^{(\lambda, \tau)}(x)$ associados à medida $d\phi_2(x)$ são os polinômios de Gegenbauer com parâmetro $(\lambda+1)$ sobre o intervalo $[-\tau, \tau]$. Portanto

$$P_{n+1}^{\phi_2}(x) = xP_n^{\phi_2}(x) - \alpha_{n+1}^{\phi_2} P_{n-1}^{\phi_2}(x), \quad n \geq 1$$

com

$$\alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{\tau^2}{4} \frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda)}.$$

Denotemos por $S_n^{(\lambda, M, \tau)}$ os polinômios de Szegő associados à medida $d\nu(\lambda, M, \tau; z)$ onde $d\nu(\lambda, M, \tau; z) = -d\phi_1(x)$, então dada a transformação $x = (z^{1/2} + z^{-1/2})/2 = \cos(\theta/2)$ com $z = e^{i\theta}$, obtemos²

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\nu(\lambda, M, \tau; e^{i\theta}) = \frac{1}{(2M+1)} \left\{ 2Mf(1) + \frac{c(f, \lambda, \tau)}{c(1, \lambda, \tau)} \right\} \quad (5.4.2)$$

onde

$$c(f, \lambda, \tau) = \int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} f(e^{i\theta}) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda+1/2}}{\sin(\theta/2)} d\theta,$$

com $\theta(x) = 2 \arccos(x)$.

Para o coeficiente de reflexão $S_n^{(\lambda, M, \tau)}(0)$ temos que

$$\left\{ g_n(\lambda, M, \tau) = \frac{1 + S_{n+1}^{(\lambda, M, \tau)}(0)}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

é a sequência de parâmetros para a sequência encadeada $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}\}$. Então, podemos escrever

$$[1 - g_{n-1}(\lambda, M, \tau)]g_n(\lambda, M, \tau) = \frac{\tau^2}{4} \frac{n(n+2\lambda+1)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda)}, \quad n \geq 1.$$

De (5.3.5),

$$g_{n-2}(\lambda, M, \tau)[1 - g_{n-1}(\lambda, M, \tau)] = \alpha_{n+1}^{\phi_1}, \quad n \geq 1,$$

²veja Apêndice B

então $g_{-1}(\lambda, M, \tau) [1 - g_0(\lambda, M, \tau)] = \alpha_2^{\phi_1}$. Como $g_{-1}(\lambda, M, \tau) = 1$ temos

$$\begin{aligned} g_0(\lambda, M, \tau) &= 1 - \alpha_2^{\phi_1} = \int_{-1}^1 (1 - x^2) d\phi_1(x) \\ &= \frac{1}{(2M+1)c} \int_{-\tau}^{\tau} (\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2} dx, \end{aligned}$$

com $x = \tau \cos(\theta/2)$ temos então, que o parâmetro inicial é dado por

$$g_0(\lambda, M, \tau) = [(2M+1)c(1, \lambda, \tau)]^{-1} \int_0^{2\pi} [\tau \operatorname{sen}(\theta/2)]^{2\lambda+2} d\theta. \quad (5.4.3)$$

Através do valor de $g_0(\lambda, M, \tau)$ chegamos em $g_n(\lambda, M, \tau)$, $n \geq 1$, de onde encontramos todos os valores dos coeficientes de reflexão $S_{n+1}^{(\lambda, M, \tau)}(0) = a_{n+1}$, $n \geq 0$. Deste modo, os polinômios de Szegő $S_n(z)$ dados por (5.1.1) podem ser determinados.

Observação: Em (5.4.3), quando $M \rightarrow \infty$ temos que $\{g_n(\lambda, M, \tau)\}$ se reduz a sequência de parâmetros minimal e se $M = 0$, podemos mostrar que $\{g_n(\lambda, M, \tau)\}$ representa a sequência de parâmetros maximal. De fato, como foi visto no Capítulo 3, de (3.2.4) a sequência $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$M_n = 1 - \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_{n+3}^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_{n+4}^{\phi_2}}{1} - \dots, \quad n \geq 0,$$

é a sequência de parâmetros maximal da sequência encadeada $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}\}$, então

$$M_0 = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_3^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_4^{\phi_2}}{1} - \dots$$

Mas, pelo Teorema 4.2.1 temos que $g_n(\lambda, M, \tau)$ será a sequência de parâmetros maximal quando $M_0 = [G^{\phi_2}(z)]^{-1}$ para algum z fixo. Mas de (4.1.4), com $z = 1$ temos

$$G_n^{\phi_2}(1) = \frac{1}{1} - \frac{\alpha_2^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_3^{\phi_2}}{1} - \dots - \frac{\alpha_n^{\phi_2}}{1}, \quad n \geq 2.$$

Dai

$$[G^{\phi_2}(1)]^{-1} = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_3^{\phi_2}}{1} - \frac{\alpha_4^{\phi_2}}{1} - \dots = M_0.$$

Mas

$$M_0 = [G^{\phi_2}(1)]^{-1} = \mu_0^{\phi_2} = c^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} (\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2} dx$$

fazendo $x = \tau \cos(\theta/2)$ temos

$$M_0 = [c(1, \lambda, \tau)]^{-1} \int_0^{2\pi} [\tau \sin(\theta/2)]^{2\lambda+2} d\theta = g_0(\lambda, 0, \tau).$$

Portanto, $\{g_n(\lambda, 0, \tau)\}$ é a sequência de parâmetros maximal para sequência encadeada $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}\}$.

Apêndice A

Aqui mostramos detalhadamente como obter (5.3.4). Através de expansão binomial podemos escrever

$$\{\sqrt{1-x^2} \pm ix\}^{2l} = \sum_{r=0}^{2l} \binom{2l}{r} \{\sqrt{1-x^2}\}^{2l-r} \{\pm x\}^r, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0,$$

então

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} \pm ix]^{2l} \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) \\ &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{r=0}^{2l} \binom{2l}{r} \{\sqrt{1-x^2}\}^{2l-r} \{\pm x\}^r \right] \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) \\ &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{r=0}^{l-1} \binom{2l}{2r+1} \{\sqrt{1-x^2}\}^{2l-2r-1} \{\pm x\}^{2r+1} \right] \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) \\ &= \int_{-1}^1 \left[\sum_{r=0}^{l-1} \binom{2l}{2r+1} \{1-x^2\}^{l-r-1} \{\pm x\}^{2r+1} \right] P_{2m+1}(x) d\phi(x) \\ &= 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0, \end{aligned}$$

pois $\sum_{r=0}^{l-1} \binom{2l}{2r+1} \{1-x^2\}^{l-r-1} \{\pm x\}^{2r+1}$ é um polinômio de grau $2l-1$. Portanto

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} \pm ix]^{2l} \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0. \quad (A.1)$$

Analogamente obtemos

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} \pm ix]^{2l+1} \frac{P_{2m+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0. \quad (A.2)$$

De (A.1) temos

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} + ix]^{2l} \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0,$$

e

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} - ix]^{2l} \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0. \quad (A.3)$$

Como

$$[\sqrt{1-x^2} + ix]^{-1} = \sqrt{1-x^2} - ix, \quad (A.4)$$

então (A.3) equivale a

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} + ix]^{-2l} \frac{P_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0.$$

Analogamente de (A.2) obtemos

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} + ix]^{-(2l+1)} \frac{P_{2m+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad m \geq 0.$$

Através das duas relações acima e de (A.1) e (A.2), podemos escrever

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} + ix]^{-(n-1)+2s} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Mas de (A.4) temos que

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} - ix]^{(n-1)-2s} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1$$

que equivale a

$$\int_{-1}^1 [\sqrt{1-x^2} - ix]^{-(n-1)+2s} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1$$

ou ainda

$$\int_{-1}^1 (-i)^{-(n-1)+2s} [x + i\sqrt{1-x^2}]^{-(n-1)+2s} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$

Logo, provamos que

$$\int_{-1}^1 [x + i\sqrt{1-x^2}]^{-(n-1)+2s} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} d\phi(x) = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1.$$



Apêndice B

Aqui mostramos detalhadamente como obter (5.4.2). De (5.4.1) temos o seguinte resultado

$$\int_{-1}^1 f(x) d\phi_1(x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-1) + f(1)] + c^{-1} \int_{-\tau}^{\tau} f(x) \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}}{1-x^2} dx \right\}$$

onde $c = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda+1/2}}{1-x^2} dx$. Como $x = \cos(\theta/2)$, podemos escrever

$$\int_{2\pi}^0 f(\cos(\theta/2)) d\phi_1(\cos(\theta/2)) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(\cos\pi) + f(\cos 0)] - \frac{1}{2c} \int_{\theta(-\tau)}^{\theta(\tau)} f(\cos(\theta/2)) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda+\frac{1}{2}}}{1 - \cos^2(\theta/2)} \text{sen}(\theta/2) d\theta \right\},$$

onde $\theta(x) = 2\arccos(x)$.

Seja $F(e^{i\theta}) = f(\cos(\theta/2))$, então

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^0 F(e^{i\theta}) d\phi_1(\cos(\theta/2)) &= \frac{1}{2M+1} \left\{ M[F(e^{i2\pi}) + F(e^{i0})] - \frac{1}{2c} \int_{\theta(-\tau)}^{\theta(\tau)} F(e^{i\theta}) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\text{sen}^2(\theta/2)} \text{sen}(\theta/2) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2M+1} \left\{ 2MF(1) + \frac{1}{2c} \int_{\theta(\tau)}^{\theta(-\tau)} F(e^{i\theta}) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\text{sen}(\theta/2)} d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Mas $\theta(-\tau) = 2\pi - \theta(\tau)$, então

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) [-d\phi_1(\cos(\theta/2))] &= \frac{1}{2M+1} \left\{ 2MF(1) + \frac{1}{2c} \int_{\theta(\tau)}^{2\pi-\theta(\tau)} F(e^{i\theta}) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\text{sen}(\theta/2)} d\theta \right\} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} c &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(\tau^2 - x^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}}{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{\theta(-\tau)}^{\theta(\tau)} \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\theta/2)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\theta/2)} d\theta, \end{aligned}$$

então

$$2c = \int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\theta/2)} d\theta.$$

Como $d\nu(\lambda, M, \tau; e^{i\theta}) = -d\phi_1(\cos(\theta/2))$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) d\nu(\lambda, M, \tau; e^{i\theta}) &= \frac{1}{2M+1} \left\{ 2MF(1) + \left[\int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\theta/2)} d\theta \right]^{-1} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} F(e^{i\theta}) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\theta/2)} d\theta \right\}, \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\nu(\lambda, M, \tau; e^{i\theta}) = \frac{1}{(2M+1)} \left\{ 2Mf(1) + \frac{c(f, \lambda, \tau)}{c(1, \lambda, \tau)} \right\},$$

onde

$$c(f, \lambda, \tau) = \int_{\theta(\tau)}^{2\pi - \theta(\tau)} f(e^{i\theta}) \frac{[\tau^2 - \cos^2(\theta/2)]^{\lambda + \frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}(\theta/2)} d\theta$$

com $\theta(x) = 2\arccos(x)$.



Referências Bibliográficas

- [1] A.C. Berti, A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials: some applications, *Appl. Num. Maths.* **39**, 127-149 (2001).
- [2] C.F. Bracciali, A.P. da Silva, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials, submetido.
- [3] C.F. Bracciali, D.K. Dimitrov, A. Sri Ranga, Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.*, aceito.
- [4] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] T.S. Chihara, Chain sequences and orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **104**, 1-16 (1962).
- [6] T.S. Chihara, The parameters of a chain sequence, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108**, 775-780 (1990).
- [7] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. London Math. Soc.* **21**, 113-152 (1989).
- [8] W.B. Jones, O. Njåstad, W.J. Thron, H. Waadeland, Szegő polynomials applied to frequency analysis, *J. Comp. Appl. Math.* **46**, 217-228 (1993).



- [9] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **261**, 503-528 (1980).
- [10] H. Kiesel, J. Wimp, A note on Koornwinder's polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Numerical algorithms* **11**, 229-241 (1996).
- [11] T.H. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Canad. Math. Bull.* **27**, 205-214 (1984).
- [12] V.I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Macmillan, New York, 1962.
- [13] E.D. Rainville, *Special Functions*, The Macmillan Company, New York, 1960.
- [14] J.A. Shohat, J.D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Mathematical Surveys, Amer. Math. Soc. (1943).
- [15] A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **75**, 23-33 (1996).
- [16] A. Sri Ranga, Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123**, 3135-3141 (1995).
- [17] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Colloq. Publ., New York, vol. 23, 1959.
- [18] R. Szwarc, Chain sequences, orthogonal polynomials, and Jacobi matrices, *J. Approx. Theory* **92**, 59-73 (1998).
- [19] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, in Field Institute Communications 14: Special functions, q-series



- and related topics (M.E.H. Ismail et al., eds.), *Amer. Math. Soc.* 211-245 (1997).
- [20] L. Vinet, A. Zhedanov, Szegő polynomials on the real axis, *Integr. Transforms and Special Func.*, aceito.
- [21] H.S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*, The University Series in Higher Mathematics, Chelsea, Van Nostrand, New York, vol. 01, 1948.
- [22] D.V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1948.
- [23] A. Zhedanov, On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval, *J. Approx. Theory* **94**, 73-106 (1998).



Através da relação (4.5.4) e como $G_3^{\phi_2} < G^{\phi_2}$ (para $k > 1$)

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 2k \left[1 - \frac{k^2 \{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - 3(\lambda + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - (2\lambda + 3)\}} \right]$$

Da mesma forma, para descobrirmos os valores de k , tais que, $\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$, precisamos analisar

$$1 - \frac{k^2 \{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - 3(\lambda + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - (2\lambda + 3)\}} \geq 0$$

Com o uso do software Mathematica[®] 4 calculamos os valores das raízes de

$$A(k) = 1 - \frac{k^2 \{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - 3(\lambda + 2)\}}{(k^2 - 1)(2M + 1)\{2(\lambda + 2)(\lambda + 3)k^2 - (2\lambda + 3)\}}. \quad (4.5.6)$$

Os cálculos seguem no diagrama abaixo, com $\lambda = L$.



