



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE BAURU

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Willian Minnemann Kuhnert

Isolamento de vibrações utilizando *inerters* e amortecimento não linear

Bauru
2016

Willian Minnemann Kuhnert

Isolamento de vibrações utilizando *inerters* e amortecimento não linear

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves

Bauru
2016

Minnemann Kuhnert, Willian.

Isolamento de vibrações utilizando inerter e amortecimento não linear / Willian Minnemann Kuhnert, 2016

117 f. : il.

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2016

1. Isolamento de vibrações. 2. *Inerter*. 3. Amortecimento não linear. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE WILLIAN MINNEMANN KUHNERT, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA.

Aos 19 dias do mês de julho do ano de 2016, às 08:30 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB/videoconferência, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de WILLIAN MINNEMANN KUHNERT, intitulada **ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES UTILIZANDO INERTER E AMORTECIMENTO NÃO LINEAR**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES

Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO

Dedicatória...

Dedico este trabalho de Mestrado aos meus pais, Werner Kuhnert e Maria Adelaide Saraiva Minnemann Kuhnert, pelo incentivo e apoio em todas as minhas escolhas e decisões durante a vida.

Epígrafe

"Quanto mais aumenta o nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância".

John F. Kennedy

Agradecimentos

Agradeço à Deus por todas as oportunidades que me foram dadas.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” pela oportunidade do curso.

Ao Prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves pela orientação, pelo convívio, apoio, e por sempre ter acreditado em mim, no meu potencial e no potencial do projeto de pesquisa.

Aos professores Dr. Bento Rodrigues de Ponter Jr. e Dr. Paulo Sérgio da Silva pela composição da banca de qualificação, e aos professores Dr. Marcos Silveira e Dr. Douglas Domingues Bueno pela composição da banca de defesa. Todas as críticas e sugestões foram muito importantes para o término deste trabalho.

Aos demais professores da área de projetos deste Programa de Pós-Graduação por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional e técnico, mas também emocional e pessoal, para o processo da minha formação profissional.

Aos meus pais que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

À minha namorada Gabriela pela paciência e parceria em cada momento durante esse processo.

Aos colegas que, de alguma forma, me ajudaram e/ou estiveram presentes durante esta etapa.

À FUNDUNESP e à EMBRAER pelo projeto de cooperação e financiamento.

Resumo

O isolamento de vibração é a técnica mais utilizada atualmente para a proteção de mecanismos e estruturas que sofrem excitação, seja ela por choque/impacto, seja ela harmônica. Este trabalho adiciona ao isolador de vibração comum, composto por molas e amortecedores, um elemento conhecido como *inertor*, que recentemente tem chamado bastante a atenção da comunidade científica, e também, separadamente, adiciona amortecedores não lineares, com o intuito de avaliar a influência destes elementos no isolamento. As curvas de transmissibilidade obtidas, que indicam a performance do isolamento à excitação harmônica, para os isoladores com *inertor* são comparadas à de um isolador comum composto somente por uma mola, e entre elas, enquanto que as curvas obtidas para os isoladores com amortecedores não lineares são comparadas entre si e à de um isolador comum com amortecimento linear. Os resultados obtidos mostram que a adição do *inertor* aos isoladores de vibração pode ser muito benéfica para o isolamento em determinadas faixas de frequência, mas em outras não, e tais faixas dependem de como o isolador é construído. Além disso, os isoladores com *inertor* são benéficos principalmente para sistemas subamortecidos. Os isoladores subamortecidos com *inertor* apresentaram características de isolamento diferentes uns dos outros, o que os leva a serem aplicados em diferentes situações. Os resultados obtidos para os isoladores com amortecedores não lineares mostraram que tais sistemas também podem melhorar ou piorar o isolamento em determinadas faixas de frequência quando comparados à um isolador com amortecimento linear.

Palavras-chave: Isolamento de vibrações, *inertor*, Amortecedor não linear

Abstract

The vibration isolation is currently the most used technique for protecting mechanisms and structures which are under shock/impact or harmonic excitation. This work presents to the common vibration isolator, consisted by springs and dampers, an element known as inerter, which recently has took great attention in the scientific community, and also presents the use of non-linear dampers to analyze the influence of these elements on isolation. The transmissibility curves obtained, which indicate the performance of the isolation for systems under harmonic excitation, for the isolators with the inerter element are compared with the spring-damper isolator frequency response as well the isolators with non-linear damping. The results obtained show that the addition of the inerter element can be beneficial for the isolation performance in a frequency range, but degrades the high frequency isolation, and they depend on how the isolator is built. Besides, the isolators with inerter are beneficial mainly for underdamped systems. The different underdamped systems with inerter presented unique isolation characteristics. The results obtained for the isolators with non-linear dampers presented that such systems can also improve the isolation in certain frequency ranges when compared to an isolator with linear damping.

Keywords: Vibration isolation, *inerter*, Nonlinear damper

Lista de Figuras

1.1	Modelos com <i>inertor</i> . (a) S-1: Massa mola amortecedor <i>inertor</i> . (b) S-2: <i>Inertor</i> acoplado em série com amortecedor secundário. (c) S-3: <i>Inertor</i> acoplado em série com mola secundária. (d) S-4: <i>Inertor</i> acoplado em série com combinação de mola e amortecedor secundários.	4
1.2	Metodologia para os sistemas com <i>inertor</i>	5
1.3	Metodologia para os sistemas com amortecimento não linear	6
2.1	Componentes de um sistema de isolamento de vibrações	9
2.2	Suspensão veicular composta por mola e amortecedor	10
2.3	<i>Inertor</i> de pinhão e cremalheira. (a) Dispositivo. (b) Desenho esquemático. Retirado de Papageorgiou, Houghton e Smith (2009).	11
2.4	<i>Inertor</i> de fuso de esferas recirculantes. (a) Dispositivo. (b) Desenho esquemático. Retirado de Papageorgiou, Houghton e Smith (2009).	11
2.5	Não linearidades. (a) Rigidez. (b) Amortecimento.	12
3.1	Sistema massa-mola-amortecedor	17
3.2	Transmissibilidade de um sistema massa-mola-amortecedor com $\xi = 0.1$	18
3.3	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor	18
3.4	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i>	19
3.5	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> . (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$	20
3.6	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> . (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$	20
3.7	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> com $\mu = 0.1$	21
3.8	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> com $\xi = 0.1$	22
3.9	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> elasticamente acoplado	23
3.10	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> com mola secundária. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$	24
3.11	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> com mola secundária. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$	24
3.12	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> -mola secundária com $\mu = 0.1$	25
3.13	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> -mola secundária com $\xi = 0.1$	26
3.14	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> viscosamente acoplado	27
3.15	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i> com amortecedor secundário. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$	28

3.16	Sistema massa-mola-amortecedor-inerter com amortecedor secundário. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$	28
3.17	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inerter</i> -amortecedor secundário com $\mu = 0.1$	29
3.18	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inerter</i> -amortecedor secundário com $\xi = 0.1$	30
3.19	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inerter</i> viscoelasticamente acoplado	31
3.20	Sistema massa-mola-amortecedor-inerter com mola e amortecedor secundários. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$	32
3.21	Sistema massa-mola-amortecedor-inerter com mola e amortecedor secundários. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$	33
3.22	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inerter</i> -amortecedor e mola secundários com $\mu = 0.1$	33
3.23	Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor- <i>inerter</i> -amortecedor e mola secundários com $\xi = 0.1$	34
4.1	Amortecedor linear. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.	36
4.2	Ilustração do histórico de força e deslocamento de excitação de um amortecedor linear	37
4.3	Transmissibilidade de deslocamento absoluto - Sistema com amortecimento linear	38
4.4	Sistema com amortecimento quadrático	39
4.5	Amortecedor quadrático. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.	39
4.6	Ilustração do histórico de força e deslocamento de excitação de um amortecedor quadrático	40
4.7	Histórico do deslocamento relativo para o sistema com amortecedor linear excitado pela base	43
4.8	Transmissibilidade de deslocamento absoluto de um sistema com amortecimento quadrático	44
4.9	Sistema com amortecimento assimétrico	45
4.10	Amortecedor assimétrico. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.	46
4.11	Ilustração do histórico de força e deslocamento de excitação de um amortecedor assimétrico	46
4.12	Transmissibilidade de deslocamento absoluto de um sistema com amortecimento assimétrico com $\beta = 3$	50
4.13	Sistema com amortecimento geometricamente não linear	51
4.14	Amortecedor com não linearidade geométrica. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.	52
4.15	Histórico de força e deslocamento de excitação em um amortecedor com não linearidade geométrica	52
4.16	Sistema com amortecimento geometricamente não linear	54
5.1	Comparação entre os sistemas S-1 e massa-mola	56
5.2	Comparação entre os sistemas S-2 e massa-mola	58
5.3	Comparação entre os sistemas S-3 e massa-mola	60

5.4	Comparação entre os sistemas S-4 e massa-mola	61
5.5	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$	62
5.6	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 0.1$ e $\xi = 1$	63
5.7	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 0.1$ e $\xi = 1.5$	63
5.8	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 1$ e $\xi = 0.1$	64
5.9	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 1$ e $\xi = 1$	65
5.10	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 1$ e $\xi = 1.5$	66
5.11	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 1.5$ e $\xi = 0.1$	66
5.12	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 1.5$ e $\xi = 1$	67
5.13	Comparação entre os sistemas com <i>inertor</i> para $\mu = 1.5$ e $\xi = 1.5$	67
5.14	Comparação entre os sistemas com amortecimento não linear para $\xi = 0.1$ na frequência e amplitude de ressonância	68
5.15	Comparação entre os sistemas com amortecimento não linear para $\xi = 1$ na frequência e amplitude de ressonância	69
5.16	Comparação entre os sistemas com amortecimento não linear para $\xi = 1.2$ na frequência e amplitude de ressonância	70
C.1	Influência do valor de N_k para o sistema com <i>inertor</i> elasticamente acoplado	94
C.2	Influência do valor de N_k para o sistema com <i>inertor</i> elasticamente acoplado	95
C.3	Influência do valor de N_c para o sistema com <i>inertor</i> viscosamente acoplado	96
C.4	Influência do valor de N_c para o sistema com <i>inertor</i> viscosamente acoplado	96
C.5	Influência do valor de N_k para o sistema com <i>inertor</i> acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo	98
C.6	Influência do valor de N_k para o sistema com <i>inertor</i> acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo	99
C.7	Influência do valor de N_c para o sistema com <i>inertor</i> acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo	99
C.8	Influência do valor de N_c para o sistema com <i>inertor</i> acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo	100

Lista de Tabelas

4.1	Resultados de amplitude máxima de deslocamento relativo em regime permanente para diversos valores de ξ no sistema com amortecimento linear	43
4.2	Valores de c e c_2 calculados	44
4.3	Valores dos coeficientes de amortecimento para o amortecedor linear e o amortecedor assimétrico com $\beta = 3$	49

Lista de símbolos

Letras latinas

Símbolo	Descrição
x	Deslocamento
x_1	Grau de liberdade que corresponde ao ponto comum entre o terminal inferior do inerter e o terminal superior da mola, amortecedor ou mola-amortecedor secundários
x_0	Deslocamento da base do sistema
z	Deslocamento relativo entre os terminais do elemento
z_0	Amplitude do deslocamento relativo entre os terminais do elemento
t	Tempo
m	Massa suspensa
k	Rigidez da mola primária da suspensão
c	Coefficiente de amortecimento linear do amortecedor primário da suspensão
c_2	Coefficiente de amortecimento quadrático
c^+	Coefficiente de amortecimento linear para velocidade relativa positiva
c^-	Coefficiente de amortecimento linear para velocidade relativa negativa
b	Inertância do inerter da suspensão
s	Variável independente do domínio de Laplace
N_k	Constante que indica o percentual de rigidez que a mola secundária possui
N_c	Constante que indica o percentual do coeficiente de amortecimento que o amortecedor secundário possui
j	Unidade imaginária
T_d	Transmissibilidade de deslocamento absoluto
F_A	Força do amortecedor
D	Energia dissipada pelo amortecedor
a	Distância entre o ponto do amortecedor que está engastado e o ponto do amortecedor que está preso na massa suspensa
Y_i	Variáveis de estado

Z_k	Impedância de mola
Z_c	Impedância de amortecedor
Z_b	Impedância de inerter
Z_m	Impedância de massa
Z_0	Impedância equivalente

Letras Gregas

Símbolo	Descrição
ω	Frequência de excitação
ω_n	Frequência natural do sistema
ω_b	Frequência fundamental em relação a inércia
Ω	Razão entre a frequência de excitação e a frequência natural
Ω_b	Razão entre a frequência de excitação e a frequência ω_b
ξ	Fator de amortecimento
μ	Razão entre a inércia e a massa do sistema
β	Razão de assimetria do amortecedor assimétrico

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Introdução ao problema	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Metodologia	4
1.4 Contribuições	7
1.5 Estrutura da dissertação	8
2 Revisão Bibliográfica	9
3 Isolamento com o uso do inerter	16
3.1 Introdução	16
3.2 Sistema mecânico de comparação: sistema massa-mola-amortecedor . . .	17
3.3 Sistemas mecânicos com <i>inerter</i>	19
3.3.1 Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inerter</i>	19
3.3.2 Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inerter</i> elasticamente aco- plado	23
3.3.3 Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inerter</i> viscosamente aco- plado	27
3.3.4 Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inerter</i> acoplado em série com conjunto mola-amortecedor	31
4 Isolamento com o uso de amortecedores não lineares	35
4.1 Introdução	35
4.2 Amortecimento linear	36
4.3 Amortecimento não linear quadrático	39
4.4 Amortecimento não linear assimétrico	45
4.5 Amortecimento geometricamente não linear	51
5 Comparações e Discussões	55
5.1 Comparação e discussão de sistemas com <i>inerter</i> e sistema massa-mola .	55
5.1.1 Comparação entre o sistema S-1 e o sistema massa-mola	56
5.1.2 Comparação entre o sistema S-2 e o sistema massa-mola	58
5.1.3 Comparação entre o sistema S-3 e o sistema massa-mola	60

5.1.4	Comparação entre o sistema S-4 e o sistema massa-mola	61
5.2	Comparação e discussão de sistemas com <i>inertor</i>	62
5.3	Comparação e discussão de sistemas com amortecimento não linear	68
6	Considerações Finais	71
6.1	Conclusões	71
6.2	Trabalhos realizados	73
6.3	Trabalhos futuros	74
	Referências Bibliográficas	75
A	Modelagem	78
A.1	Modelagem do sistema de comparação	78
A.1.1	Resposta em frequência: Mecânica Newtoniana e Transformada de Laplace	78
A.1.2	Resposta em frequência: Método da Impedância	79
A.2	Sistemas mecânicos com <i>inertor</i>	80
A.2.1	Sistema massa-mola-amortecedor- <i>inertor</i>	80
A.2.2	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> elasticamente acoplado	82
A.2.3	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> viscosamente acoplado	85
A.2.4	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> acoplado em série com conjunto mola-amortecedor	88
B	Procedimentos para obtenção de pontos de interesse em software CAS	92
B.1	Procedimento para obtenção de pontos de pico	92
B.2	Procedimento para obtenção de pontos de zero	93
B.3	Procedimento para obtenção de pontos de intersecção	93
B.4	Procedimento para obtenção de comportamento assintótico/decaimento	93
C	Estudo dos valores de N_k e N_c	94
C.1	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> elasticamente acoplado	94
C.2	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> viscosamente acoplado	96
C.3	Sistema massa-mola-amortecedor com <i>inertor</i> acoplado em série com conjunto mola-amortecedor	98

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução ao problema

A vibração é um fenômeno oscilatório que pode ser benéfico e/ou desejável para algumas aplicações, tais como música, massageadores, tratamentos médicos, alertas sonoros, dentre outros; enquanto que para outras aplicações, a vibração é indesejável devido aos seus efeitos negativos em estruturas e sobre o corpo humano. Esses efeitos negativos incluem o desgaste de estruturas e mecanismos por fadiga, o desgaste físico do corpo humano devido a exposição à vibração, o cansaço proveniente de uma viagem em um veículo que balança muito e até a surdez ocasionada devido a exposição à sons de determinadas amplitudes e frequências. De acordo com Ibrahim (2008), existe uma demanda crescente por proteção de instalações estruturais, reatores nucleares, componentes mecânicos e instrumentos sensíveis, de movimentos ocasionados por terremotos e cargas de impacto.

O controle da vibração então tornou-se necessidade devido aos seus efeitos negativos na maioria das aplicações e pode ser efetuado de três grandes maneiras, de acordo com Yan *et al.* (2007): reduzindo a excitação da vibração na fonte; modificando as propriedades físicas do receptor da vibração e; utilizando a técnica de isolamento de vibrações.

Segundo Ruzicka e Derby (1971), a técnica de isolamento de vibrações é a mais prática de ser efetuada, e também a custo mais baixo. Essa técnica consiste em adicionar um isolador (suspensão) entre a fonte de vibração e o receptor (aquele que se quer proteger), de forma a se diminuir os níveis de vibração transmitidas ao mesmo. Segundo Rivin (2003), os isoladores podem ser ativos, semi ativos ou passivos. Os isoladores ativos geralmente têm boa performance, reduzindo os níveis de vibração a níveis desejáveis, mas possuem um custo mais elevado devido à necessidade de computadores, sensores e atuadores empregados para modificar a resposta do sistema, além do gasto contínuo de energia. Os isoladores semiativos modificam as propriedades do sistema, têm boas performances em altas frequências, e utilizam pequenas quantidades de ener-

gia, mas geralmente têm uma maior complexidade construtiva. Por fim, um isolador de vibração passivo é composto geralmente por uma mola e um amortecedor localizados paralelamente entre a fonte de vibração e o receptor, não necessitam de suprimento de energia e podem ter elementos lineares e/ou não lineares, que caracterizam como as forças agem no sistema.

Nesta dissertação, em um primeiro momento, o elemento conhecido como *inertor* será acoplado em isoladores passivos de vibração, e em outro momento, isoladores de vibração passivos terão amortecedores não lineares em conjunto com uma mola em paralelo, obtendo-se assim a resposta de isolamento para diferentes sistemas excitados harmonicamente em diferentes frequências.

1.2 Objetivos

Os objetivos específicos desta dissertação são:

- Avaliar a utilização do elemento *inertor* como componente de um sistema de isolamento de vibração.
- Compreender o benefício da utilização do *inertor* como elemento de isolamento de vibração.
- Comparar diferentes composições de modelos com *inertor* entre si e com um modelo de suspensão com o mínimo de amortecimento, descrevendo as suas vantagens e desvantagens.
- Avaliar a utilização de amortecedores com comportamento não linear como elementos de um sistema de isolamento de vibração.

1.3 Metodologia

Nesta dissertação são utilizados dois métodos analíticos para desenvolver os modelos de suspensão com *inverter*, apresentados na figura 1.1.

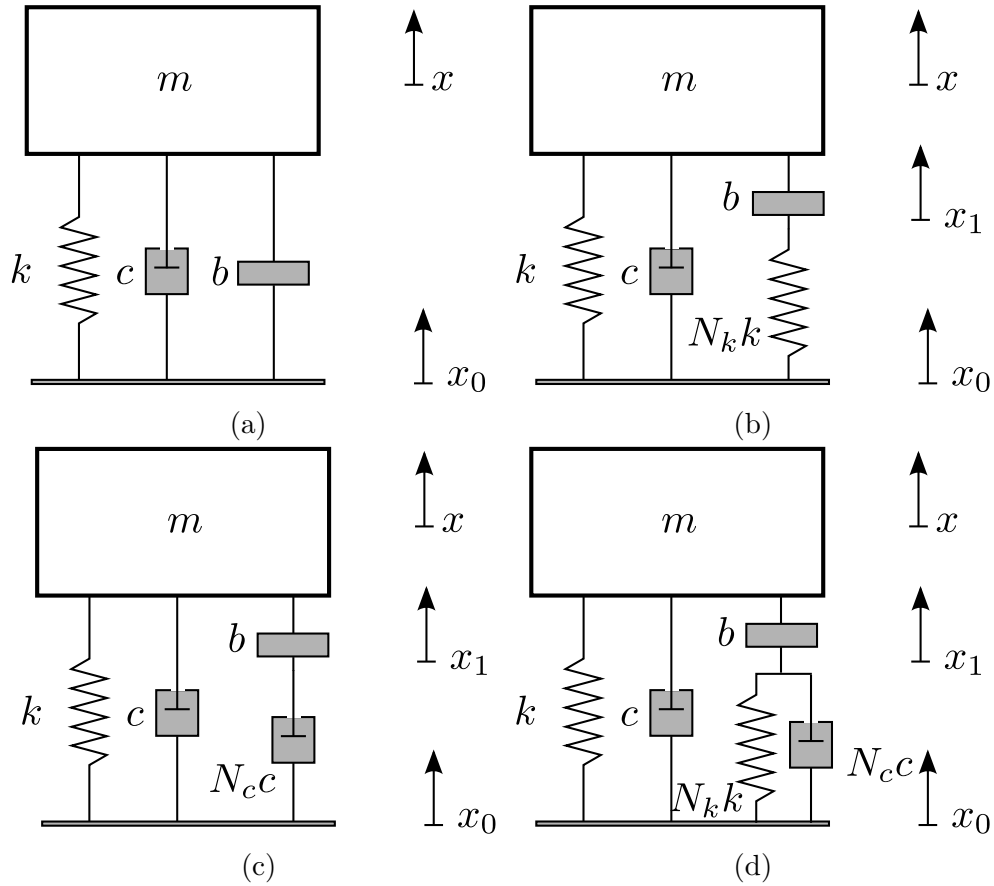


Figura 1.1: Modelos com *inverter*. (a) S-1: Massa mola amortecedor *inverter*. (b) S-2: *Inverter* acoplado em série com amortecedor secundário. (c) S-3: *Inverter* acoplado em série com mola secundária. (d) S-4: *Inverter* acoplado em série com combinação de mola e amortecedor secundários.

O primeiro método considera a **mecânica Newtoniana (MCN)**, onde são obtidas as equações diferenciais dos sistemas pelos respectivos diagramas de corpo livre e posteriormente tais equações são manipuladas aplicando-se a **transformada de Laplace (TL)** obtendo-se, por fim, as funções de transferência no domínio de Laplace (s). O **domínio da frequência (DF)** é introduzido então nas funções de transferência, tendendo a variável de Laplace à $j\omega$. As variáveis com dimensões são **adimensionalizadas** nas funções de transferência obtendo-se as funções de transmissibilidade de deslocamento absoluto. O segundo método analítico utilizado é o **método da impedância (MIM)**, aplicável somente para sistemas lineares, onde considera-se que cada componente do sistema mecânico possui uma impedância própria e característica de seu comportamento dinâmico. Este método traz diretamente as funções de transferência no domínio da frequência. As equações obtidas tanto por um método quanto pelo outro são equiva-

lentes. Os resultados são demonstrados de forma gráfica. A metodologia descrita neste parágrafo pode ser resumida como apresentado na figura 1.2.

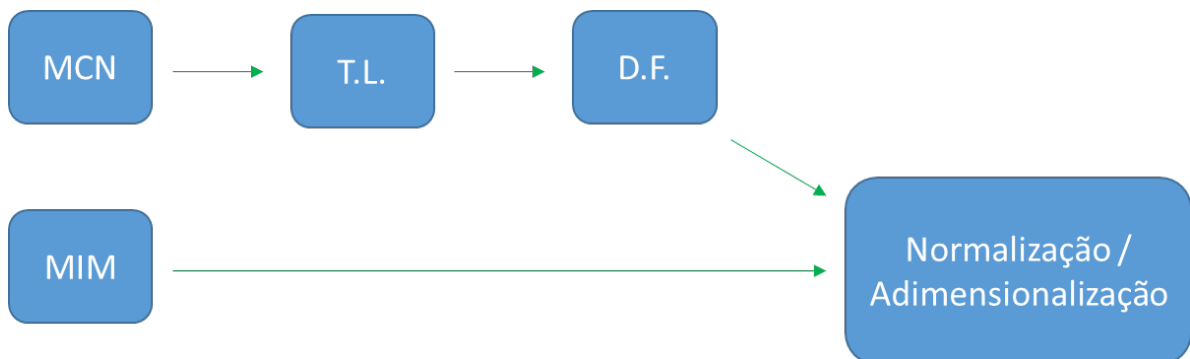


Figura 1.2: Metodologia para os sistemas com inerter

O **método numérico de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem** é utilizado para simular os modelos de suspensão com amortecedores não lineares pois é um método de boa precisão e que consegue trabalhar grande parte das equações diferenciais ordinárias não lineares existentes. Primeiramente, as **equações diferenciais ordinárias (EDO)** dos modelos são obtidas a partir dos diagramas de corpo livre. Em seguida, é realizada a transformação das equações diferenciais para o **espaço de estados**, definindo-se as variáveis de estado para cada modelo, e reduzindo a equação diferencial de segunda ordem para um sistema de equações diferenciais com duas equações diferenciais de primeira ordem. Os parâmetros dos modelos são escolhidos de forma a facilitar a **adimensionalização** numérica dos resultados, possibilitando a sua generalização. Os modelos representados no espaço de estados são simulados no software MATLAB através da função **ode45**, que aplica o método numérico de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem.

Após a **análise de convergência** no domínio do tempo para verificar se as simulações estão corretas para os sistemas nas condições mais críticas de alteração de força (alta frequência), o método numérico é então utilizado para um vetor de razão de frequências, obtendo-se para cada valor desse vetor uma amplitude de deslocamento em regime permanente. A razão entre cada valor de amplitude de deslocamento em regime permanente e o valor da amplitude da excitação (conhecido) fornece a transmissibilidade de deslocamento absoluto. Esses valores de transmissibilidade são guardados de forma a corresponder a cada valor do vetor de razão de frequências utilizado, criando-se então o vetor de transmissibilidade de deslocamento absoluto. Os resultados então são apresentados graficamente. A metodologia descrita neste parágrafo pode ser resumida como apresentado na figura 1.3.

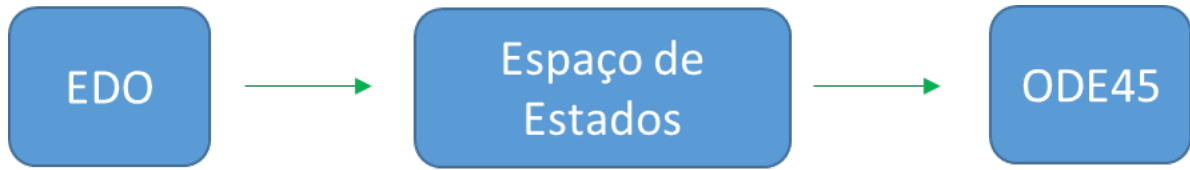


Figura 1.3: Metodologia para os sistemas com amortecimento não linear

Para a análise dos resultados obtidos são efetuadas diversas comparações.

Primeiramente, comparações são realizadas entre os sistemas com *inertor* e o sistema massa-mola, com análise das equações obtidas, obtendo-se expressões para os valores de pico, zero, intersecções e decaimento. O procedimento está melhor detalhado no apêndice B.

Posteriormente, os sistemas com *inertor* são analisados individualmente por meio da variação de seus parâmetros que podem ser, dependendo do sistema, a razão de massas, o fator de amortecimento, a razão entre a mola secundária e primária N_k , e a razão entre o amortecedor secundário e primário N_c . Os sistemas com amortecimento não linear são analisados com variação de um fator de amortecimento correspondente ao sistema linear.

Finalmente, os modelos de suspensão com *inertor* são comparados entre si e com um sistema composto por uma massa e uma mola (com 0.1 de fator de amortecimento para evitar valores muito altos de transmissibilidade na região de ressonância) para cada valor de fator de amortecimento e razão de massas utilizado, enquanto que os modelos de suspensão com amortecedores não lineares são comparados para cada valor de fator de amortecimento linear, por meio do coeficiente de amortecimento equivalente para cada modelo.

1.4 Contribuições

As principais contribuições desta dissertação são:

- O desenvolvimento de expressões analíticas de transmissibilidade de deslocamento absoluto para diferentes modelos de isoladores com *inertor*, com parâmetros adimensionais.
- A demonstração de que os isoladores com *inertor* podem ser úteis na redução de vibrações para determinadas faixas de frequência. Essas faixas de frequência mudam conforme a característica construtiva do isolador é alterada.
- A demonstração de que existe pelo menos um tipo de amortecimento que possui bom desempenho de isolamento tanto na região de ressonância (embora pior se comparado à um sistema com amortecimento linear) quanto para frequências mais altas (amortecimento geometricamente não linear).
- A demonstração de que o amortecimento assimétrico não tem grande influência na transmissibilidade de deslocamento absoluto.
- Uma proposta de processo de análise com comparações, para escolher ou dimensionar o melhor isolador, dentre os modelos que foram estudados.
- Publicações:

Trabalho intitulado “VIBRATION TRANSMISSIBILITY IN SYSTEMS WITH NONLINEAR DAMPERS”, apresentado ao International Congress on Sound and Vibration ICSV 2015 em Florença, Itália.

Trabalho intitulado “VIBRATION DISPLACEMENT TRANSMISSIBILITY IN SYSTEMS WITH *INERTOR*”, apresentado ao COBEM 2015 Rio de Janeiro, Brasil.

1.5 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está dividida em seis capítulos.

O Capítulo 1 contém a introdução ao problema do isolamento de vibrações, bem como os objetivos dessa dissertação, a metodologia que foi utilizada para a realização do trabalho, as contribuições do trabalho realizado no âmbito científico e a estrutura da dissertação.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o isolamento de vibrações, de forma a basear essa dissertação em diversos trabalhos que foram produzidos nos últimos anos, além de situá-la e justificar os objetivos propostos.

O Capítulo 3 apresenta uma breve introdução ao uso do *inertor* no isolamento de vibrações, o modelo de comparação e os modelos de suspensão com *inertor* desenvolvidos, e os resultados de transmissibilidade de deslocamento absoluto obtidos analiticamente para os mesmos. Apresenta-se também uma discussão sobre a influência dos parâmetros adimensionais (razão de massas e fator de amortecimento) nesses sistemas.

O Capítulo 4 apresenta o modelo de comparação e os modelos de suspensão com amortecedores não lineares desenvolvidos, e os resultados de transmissibilidade de deslocamento absoluto obtidos numericamente para os mesmos. Durante o desenvolvimento de cada modelo são apresentadas as curvas de força do amortecedor em função da velocidade, de força do amortecedor em função do tempo e a curva de histerese, que representa a dissipação de energia em um ciclo de amortecimento.

O Capítulo 5 apresenta as comparações entre os diversos sistemas estudados e é dividido em três partes: uma para a comparação e discussão dos sistemas com *inertor* com o sistema massa-mola, uma para a comparação e discussão dos sistemas com *inertor* e uma para os sistemas com amortecedores não lineares.

O Capítulo 6 apresenta as principais conclusões do trabalho conduzido nessa dissertação, trabalhos desenvolvidos e possíveis trabalhos a serem desenvolvidos.

O Apêndice A apresenta o passo a passo da modelagem dos sistemas apresentados no Capítulo 3, partindo das equações diferenciais ordinárias e chegando à equação de transmissibilidade para cada sistema com parâmetros adimensionais.

O Apêndice B apresenta o procedimento de cálculo dos pontos apresentados na primeira seção do Capítulo 5.

O Apêndice C apresenta um estudo sobre os valores de N_k e N_c , isto é, as constantes das molas e amortecedores secundários utilizados nos modelos com *inertor*.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Ainda hoje o controle de vibração em sistemas mecânicos é um desafio em engenharia. Segundo Ruzicka e Derby (1971), o isolamento de vibração é uma técnica de controle de vibração em que o isolador é acoplado entre a fonte de vibração e o sistema que requer proteção para reduzir o nível da vibração transmitida da fonte para o sistema em questão. De acordo ainda com Ruzicka e Derby (1971), sistemas de isolamento de vibração podem ser lineares ou não lineares, ativos ou passivos, e sua inserção no isolador de vibração faz com que o sistema composto pelo sistema mecânico, isolador e fonte de vibração gere um comportamento de ressonância na resposta em frequência. Para frequências mais altas, os isoladores fazem com que a resposta em frequência tenda a diminuir. A figura 2.1 apresenta os componentes da técnica de isolamento de vibrações: **fonte** ou *source*, **caminho** ou *path* e **receptor** ou *receiver*. A fonte de vibração pode ser, por exemplo, o pavimento de uma pista, o caminho, portanto, o isolador, e a carroceria do carro, o receptor.

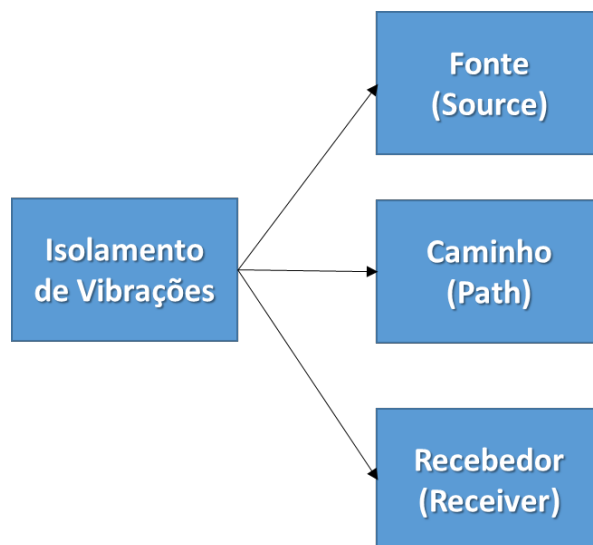


Figura 2.1: Componentes de um sistema de isolamento de vibrações

De acordo com Harris e Piersol (2010), os isoladores são compostos por pelo menos um elemento que proporciona rigidez (mola) e por pelo menos um elemento que proporciona dissipação de energia (amortecedor). O isolador então, tende a isolar, ou proteger, uma determinada inércia (massa) de uma fonte de vibração. A fonte de vibração pode ser uma força atuante ou um deslocamento, velocidade ou aceleração da base, isto é, o local onde a inércia está apoiada por meio do isolador. A figura 2.2 mostra uma típica suspensão veicular, que é um isolador de vibrações, composta por mola e amortecedor.



Figura 2.2: Suspensão veicular composta por mola e amortecedor

Em 2002, Malcolm C. Smith introduziu pela primeira vez o conceito de um elemento mecânico conhecido como *inertor*, descrevendo-o como um dispositivo mecânico cuja propriedade é ter sua força de reação proporcional à aceleração relativa entre os seus terminais (SMITH, 2002). O *inertor* ideal tem essa relação de maneira linear. Tal elemento foi concebido por meio da observação das correspondências entre os elementos mecânicos e os elementos que compõem um circuito elétrico, isto é, por meio da analogia eletromecânica, ou analogia de mobilidade. Por meio dessa analogia é possível representar um sistema mecânico por um sistema elétrico equivalente ou um sistema elétrico por um sistema mecânico equivalente. Para que haja equivalência, portanto, deve-se notar que o elemento mecânico “amortecedor” pode ser representado pelo elemento elétrico “resistor”, e vice-versa, pois ambos possuem a função de dissipar energia do sistema; o elemento mecânico “mola” pode ser representado pelo elemento elétrico “indutor”, e vice-versa, pois ambos possuem a função de restaurar energia ao sistema; força mecânica pode ser representada por corrente elétrica, e vice-versa; velocidade pode ser representada por tensão e vice-versa; massa pode ser representada por um capacitor aterrado em um dos terminais e vice-versa. No entanto, Malcolm observou que faltava um elemento mecânico que representasse o capacitor sem aterramento e conseguiu desenvolver o *inertor*, que passou a completar a analogia da mobilidade. A partir de então, os isoladores de vibração passaram a ter a possibilidade de serem constituídos de molas, amortecedores e *inerters*. As figuras 2.3 e 2.4 mostram dois exemplos de *inertor* que foram construídos, e os respectivos desenhos esquemáticos.

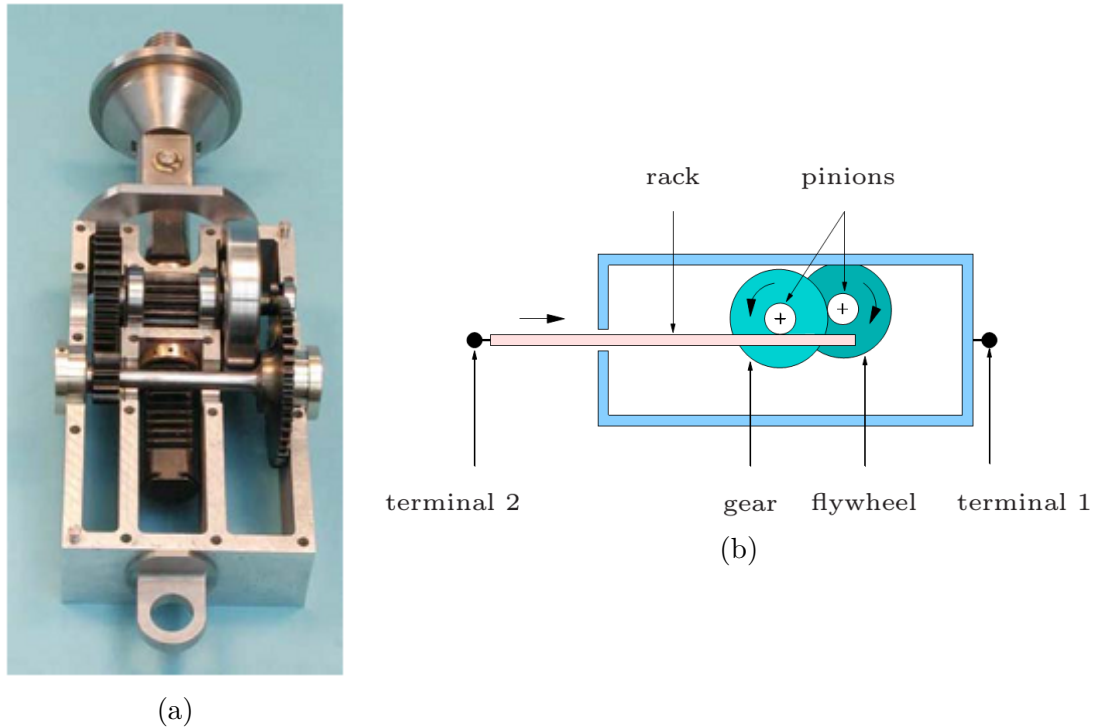


Figura 2.3: *Inerter* de pinhão e cremalheira. (a) Dispositivo. (b) Desenho esquemático. Retirado de Papageorgiou, Houghton e Smith (2009).

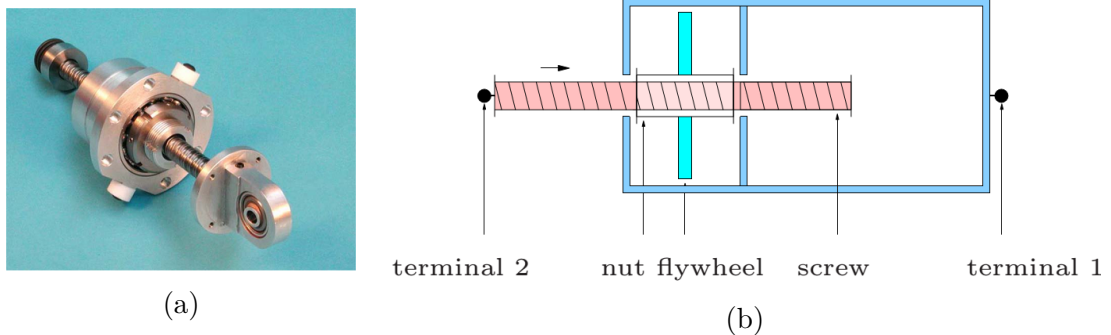


Figura 2.4: *Inerter* de fuso de esferas recirculantes. (a) Dispositivo. (b) Desenho esquemático. Retirado de Papageorgiou, Houghton e Smith (2009).

Da figura 2.3, pode-se observar que ao mover-se o terminal 2 da cremalheira (*rack*) no sentido do terminal 1 ou no sentido contrário, gira-se o pinhão (*pinion*) do eixo da engrenagem (*gear*), fazendo-a entrar em movimento. Com isso, a engrenagem gira o pinhão do eixo com o volante de inércia (*flywheel*).

Da figura 2.4, pode-se observar que ao mover-se o terminal 2 do fuso (*screw*), faz-se com que as esferas recirculantes dentro da castanha (*nut*) acionem a roda livre (*flywheel*). Em ambos os casos supracitados, a inércia do *inerter* é determinada a partir do momento de inércia do volante de inércia.

Os elementos que compõem um isolador de vibração, no entanto, são mais do que simplesmente molas, amortecedores e *inerters* lineares, isto é, as forças reativas que

tais elementos exercem muitas vezes são mais complexas do que se tem idealmente. A construção desses elementos acarreta, geralmente, em características não lineares que podem, segundo Harris e Piersol (2010), criar novos e inesperados fenômenos. Tais fenômenos não podem ser detectados por meio da análise linear, isto é, a análise linear é insuficiente para descrever o comportamento do sistema em questão. Assim, modelos de isoladores compostos por molas, amortecedores e *inerters* não lineares poderiam descrever melhor comportamentos de determinados sistemas mecânicos. De acordo com Harris e Piersol (2010), alguns sistemas que possuem características não lineares são: pêndulo simples, sendo a não linearidade um seno dependente do deslocamento angular na equação diferencial; sistema massa-mola simples com deformações maiores da mola apresentam os fenômenos de endurecimento (do inglês “hardening”) ou amolecimento (do inglês “softening”) e, tal não linearidade, é representada na equação diferencial por meio da famosa “Rigidez Duffing”, que depende da própria deformação; sistemas com cordas esticadas, sendo a não linearidade representada por alteração da constante de rigidez; sistemas com amortecimento viscoso quadrático ou superior, ou ainda, segundo Ruzicka e Derby (1971), com força de dissipação proporcional à velocidade de enésima ordem; sistemas com amortecimento por fricção; sistemas com assimetria de rigidez; sistemas com rigidez, amortecimento e/ou inércia geometricamente não lineares; entre outros. A figura 2.5 mostra exemplos de rigidez e de amortecimento não lineares. Na figura 2.5a, a força de mola linear e as forças de mola com *hardening* e *softening* são mostradas, enquanto que na figura 2.5b, a força de amortecedor linear e as forças de amortecedor por atrito e quadrático são mostradas.

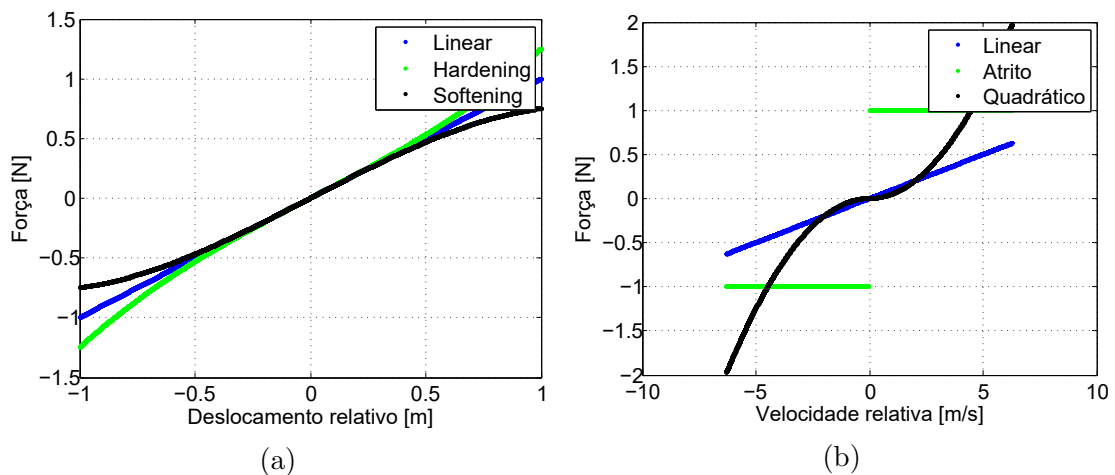


Figura 2.5: Não linearidades. (a) Rigidez. (b) Amortecimento.

Os isoladores passivos diferem dos ativos por não precisarem utilizar energia para o controle da vibração, enquanto que os isoladores ativos requerem uma fonte de energia, além de uma malha de controle fechada (sensor) para controlarem devidamente a vibração. Enquanto que os isoladores passivos possuem a vantagem de não gastarem energia, os isoladores ativos possuem a vantagem de controlar vibrações com diferentes frequências e amplitudes. De qualquer forma, ambos os tipos de isoladores possuem aplicações. Suspensões de veículos, por exemplo, utilizam geralmente isoladores passivos, enquanto que controladores de superfícies de comando de asas de aviões utilizam atuadores, que agem como isoladores ativos.

Um meio de verificar a performance de um isolador de vibração é por meio da função de transmissibilidade de deslocamento absoluto (RUZICKA; DERBY, 1971). Vários autores desenvolveram diversos trabalhos verificando a transmissibilidade de isoladores para sistemas mecânicos, tanto lineares, quanto não lineares. De acordo com Carrella *et al.* (2012), o isolador de vibração ideal deve ter alta rigidez estática para suportar cargas estáticas sem deslocamentos muito grandes e, ao mesmo tempo, baixa rigidez dinâmica de forma que a frequência fundamental do sistema seja a mais baixa possível, resultando em uma maior região de isolamento. Segundo Carrella *et al.* (2012), esses dois efeitos são mutualmente exclusivos quando se trata de isoladores lineares, mas podem ser obtidos mutualmente se isoladores não lineares forem adequadamente configurados. Um exemplo de isolador que atende a estes dois requisitos é o amortecedor geometricamente não linear descrito por Tang e Brennan (2013). Esse amortecedor só atua no isolador quando o deslocamento relativo entre os terminais é grande e isso ocorre na região de ressonância. Portanto, esse amortecedor consegue limitar a amplitude da resposta em frequência do sistema quando excitado próximo à sua frequência fundamental. Esse mesmo amortecedor melhora o isolamento em altas frequências pois o deslocamento relativo entre os terminais do isolador é pequeno, o que faz esse amortecedor ter menos influência no sistema. No mesmo artigo publicado, Tang e Brennan (2013) apresentaram um amortecedor cúbico. Eles concluíram que ambos os amortecedores são melhores que o amortecedor linear quando considerando transmissibilidade de força, porém, quando considerando transmissibilidade de deslocamento, somente o amortecedor geometricamente não linear demonstrou características desejáveis. López (2013) também mostrou que sistemas com amortecedor geometricamente não linear são bons isoladores de vibração. Outro amortecedor que apresentou características desejáveis para o isolamento de vibração é o amortecedor assimétrico. Silveira, Pontes Junior e Balthazar (2014) mostraram que esse tipo de amortecedor pode aumentar o conforto de passageiros em veículos submetidos à excitações transientes (choque), aplicando tal amortecedor em modelos de um quarto de veículo e metade de veículo. Flannelly (1968) propôs um amortecedor cuja força depende da velocidade, mas que não utiliza fluido.

Os isoladores que possuem *inerters*, em contrapartida aos isoladores que utilizam

amortecimento não linear, são mais raros, provavelmente devido à recente divulgação do elemento. O dispositivo *inertor* ganhou maior notoriedade na comunidade científica em 2008, após a divulgação por algumas revistas do segmento automotivo de que os carros de corrida da Fórmula 1 estavam utilizando um dispositivo na suspensão conhecido como J-Damper, que aumentava a manobrabilidade e a aderência do carro à pista. Chen *et al.* (2009) afirmam que o J-Damper é, na realidade, o *inertor*, e que ele é o dispositivo responsável pelos benefícios do novo tipo de suspensão. Componentes mecânicos com comportamento similar (ou igual) ao do *inertor* foram considerados em outras referências. Em Rivin (2003), o *inertor* é descrito como um sistema vibratório que transforma o movimento retilíneo em rotação e, além disso, desenvolve a função de transmissibilidade de um sistema desse tipo.

Analizando outros tipos de isoladores mecânicos, pode ser observado que o comportamento do *inertor* é muito similar ao do isolador de vibração anti-ressonante do tipo “alavanca”, apresentado por Yilmaz e Kikuchi (2006). Aparentemente, a primeira patente dessa aplicação fora obtida em 1969 por W. G. Flannelly, com base em um trabalho de sua autoria (FLANNELLY, 1966). O mecanismo, à época, foi chamado de DAVI - Dynamic Vibration Antiresonant Isolator (Isolador de vibração dinâmico anti-ressonante). Em Dylejko e MacGillivray (2014), esse mecanismo foi utilizado para suprimir a ressonância interna em sistemas mecânicos. Em Chen *et al.* (2014), os autores investigaram a influência do *inertor* nas frequências naturais de um sistema com múltiplos graus de liberdade. Em Hu, Chen e Shu (2014), os autores estudaram suspensões passivas de veículos com *inertor*, considerando múltiplos requisitos de performance incluindo conforto, deflexão da suspensão e aderência do pneu. Outros trabalhos com *inertor* também foram realizados: Em Smith e Wang (2004), os autores modelaram vários sistemas de isolamento passivos simples que incluíam um *inertor* e verificaram os benefícios na performance do elemento isolado; em Jiang *et al.* (2012), os autores incorporaram o *inertor* à suspensão passiva de um trem; em Wang *et al.* (2007), os autores analisaram a performance do controle exercido pelo *inertor* em uma suspensão; em Wang e Su (2008), o impacto de não linearidades no *inertor* foi analisado no controle da suspensão de veículos; em Wang, Hong e Lin (2011), foi desenvolvido um *inertor* hidráulico, trazendo mais uma forma de construção desse tipo de dispositivo e novas possibilidades de controle; em Zhang e Hu (2014), o *inertor* foi aplicado na suspensão de um caminhão pesado; em Zhang, Chen e Huang (2014), os autores analisaram a resposta em frequência de um sistema de suspensão com *inertor* e folga, e; Hu e Chen (2015) avaliaram e otimizaram a performance de absorvedores dinâmicos de vibração com *inertor*.

Levando-se em consideração a revisão bibliográfica realizada, este trabalho investiga a utilização de algumas configurações de isoladores com *inertor*, algumas delas sugeridas por Chen *et al.* (2009) e algumas já investigadas por Hu *et al.* (2014), além de alguns

isoladores com amortecimento não linear, nomeadamente, o quadrático, o assimétrico e o geométrico, com o intuito de verificar as funções de transmissibilidade de deslocamento absoluto de cada um, e compará-los para identificar em quais regiões os isoladores possuem melhor ou pior isolamento. Com relação aos modelos com *inerters*, não foram encontradas comparações entre os quatro modelos desenvolvidos nesse trabalho, embora o primeiro modelo seja conhecido, como mostrado por Rivin (2003). Com relação aos amortecedores não lineares, muito embora o amortecedor geometricamente não linear tenha sua função de transmissibilidade conhecida, não há comparações prévias com o amortecedor assimétrico ou quadrático. Assim, o que se propõe neste trabalho é verificar regiões de frequência nas funções de transmissibilidade dos modelos desenvolvidos que possuam melhor e pior isolamento.

Capítulo 3

Isolamento com o uso do inerter

3.1 Introdução

O conceito de um *inerter* ideal foi primeiramente mencionado por Smith (2002), descrevendo-o como um dispositivo mecânico de dois terminais com a propriedade de que a força aplicada aos seus terminais é proporcional à aceleração relativa entre eles. Essa definição pode ser representada pela expressão $F = b(a_2 - a_1)$, sendo que F é a força aplicada, a_1 e a_2 são as acelerações dos terminais e b é um coeficiente de inertância. De acordo com Smith, o *inerter* é o dispositivo mecânico equivalente a um capacitor sem qualquer terminal aterrado. Em outras palavras, para que um circuito elétrico tenha uma equação diferencial ordinária equivalente à equação de um oscilador massa-mola-amortecedor, o capacitor do circuito elétrico deve ser aterrado em um de seus terminais.

Nas próximas seções deste capítulo são desenvolvidos analiticamente os modelos de sistemas mecânicos com *inerter* com o intuito de verificar as respectivas transmissibilidades de deslocamento absoluto e identificar regiões de frequência em que há melhor ou pior isolamento, de maneira semelhante ao que foi feito por Smith e Wang (2004), mas com modelos com apenas um grau de liberdade.

3.2 Sistema mecânico de comparação: sistema massa-mola-amortecedor

O sistema mecânico composto por uma massa m , uma mola de rigidez k e um amortecedor de coeficiente de amortecimento c , apresentado na figura 3.1, é a base de comparação para os sistemas subsequentes.

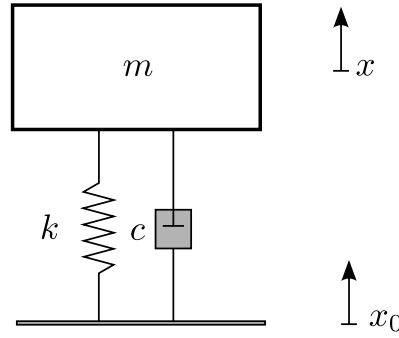


Figura 3.1: Sistema massa-mola-amortecedor

Resultados gráficos para esse sistema

A equação A.7 demonstrada no Apêndice A (seção A.1) é reapresentada a seguir e descreve a transmissibilidade T_d do sistema, definida como a razão entre a amplitude de deslocamento da massa X pela amplitude de deslocamento da base X_0 , em função da razão de frequências Ω e do fator de amortecimento ξ :

$$|T_d| = \left| \frac{X}{X_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}$$

O sistema descrito, composto por uma mola, uma massa e um amortecedor, é simulado com fator de amortecimento ($\xi = 0.1$) e comparado aos outros sistemas com *inerters* que serão simulados com variação do fator de amortecimento e da razão de massas. O fator de amortecimento utilizado neste sistema de comparação tem como único objetivo evitar valores muito altos de transmissibilidade de deslocamento absoluto, pois a intenção é de que todos os outros sistemas sejam comparados à um sistema sem amortecimento (ou com o mínimo possível), para verificar apenas a influência do *inerters* no isolamento.

A figura 3.2 mostra a transmissibilidade do sistema massa-mola-amortecedor com 0.1 de fator de amortecimento. Esse sistema é a base de comparação para os sistemas subsequentes e é denominado, a partir deste ponto, como sistema “massa-mola” ou simplesmente “sistema de comparação”, pelos motivos supracitados.

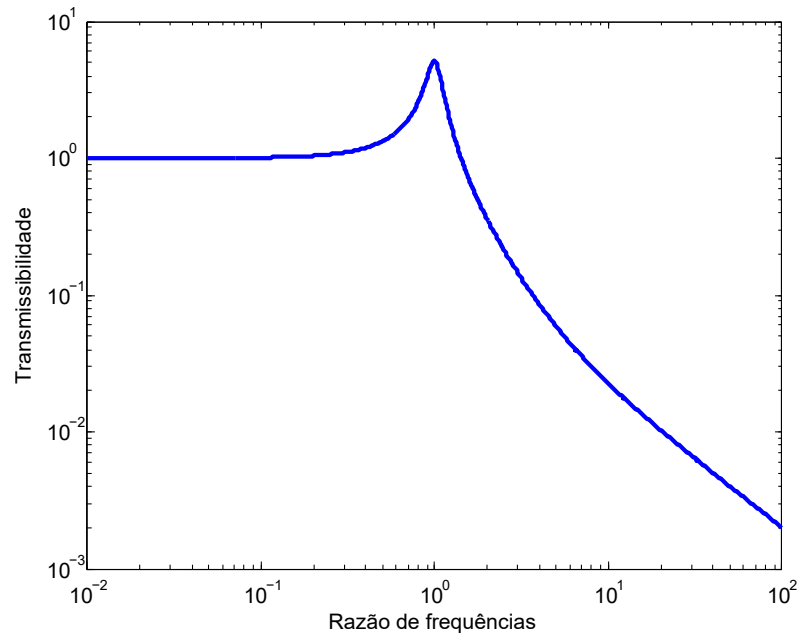


Figura 3.2: Transmissibilidade de um sistema massa-mola-amortecedor com $\xi = 0.1$

A figura 3.3 mostra a superfície gerada da função de transmissibilidade com variação do fator de amortecimento e da razão de frequências, demonstrando o efeito do amortecimento no sistema.

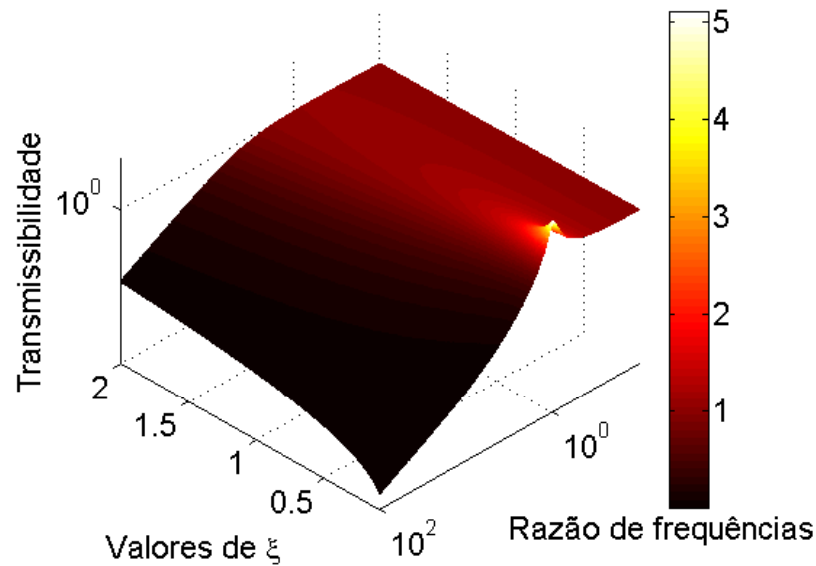


Figura 3.3: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor

Conforme amplamente discutido na literatura, o aumento do amortecimento no sistema resulta em melhoria do isolamento na região de ressonância e piora do isolamento em frequências mais altas.

3.3 Sistemas mecânicos com *inert*

Com o intuito de apresentar os efeitos que o uso de um *inert* em determinados sistemas mecânicos pode ocasionar, alguns modelos de sistemas mecânicos foram analiticamente desenvolvidos.

3.3.1 Sistema massa-mola-amortecedor-*inert*

O primeiro sistema mecânico investigado, em que um *inert* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor-*inert* como mostrado na figura 3.4 a seguir. A inércia do elemento adicionado é denotada por b . Tal sistema é denominado **S-1**.

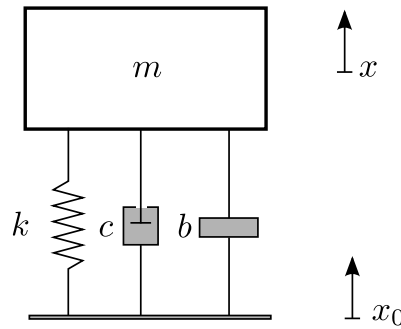


Figura 3.4: Sistema massa-mola-amortecedor-*inert*

Resultados gráficos para esse sistema

Com a equação A.18 rerepresentada a seguir, demonstrada no Apêndice A (seção A.2.1) e que descreve a transmissibilidade para este sistema, é possível obter diversas curvas de resposta em frequência com variação dos parâmetros de fator de amortecimento ξ e razão de massas μ , definida como a razão entre a inércia do inert b e a massa do sistemas m , com o intuito de verificar a influência destes no sistema em estudo.

$$|T_d| = \sqrt{\frac{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - (1 + \mu)\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}$$

A figura 3.5 mostra o desempenho do sistema com valores de razão de massas constantes para as três condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e superamortecido ($\xi = 1.5$).

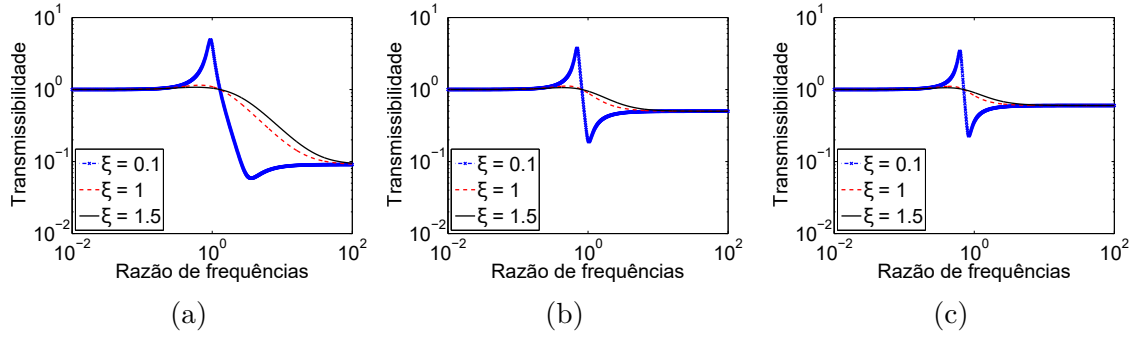


Figura 3.5: Sistema massa-mola-amortecedor-inert. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$.

Ao observar as figuras 3.5a a 3.5c, verifica-se que o aumento do amortecimento no sistema para os três valores de razão de massas diminui o efeito benéfico que o *inert*er proporciona ao isolamento, enquanto que para frequências mais altas, as curvas de transmissibilidade se mantêm convergentes.

A figura 3.6 mostra o desempenho do sistema com valores de fator de amortecimento constante para as três condições de razão de massas: inertância menor que massa suspensa ($\mu = 0.1$), inertância igual à massa suspensa ($\mu = 1$) e inertância maior que a massa suspensa ($\mu = 1.5$).

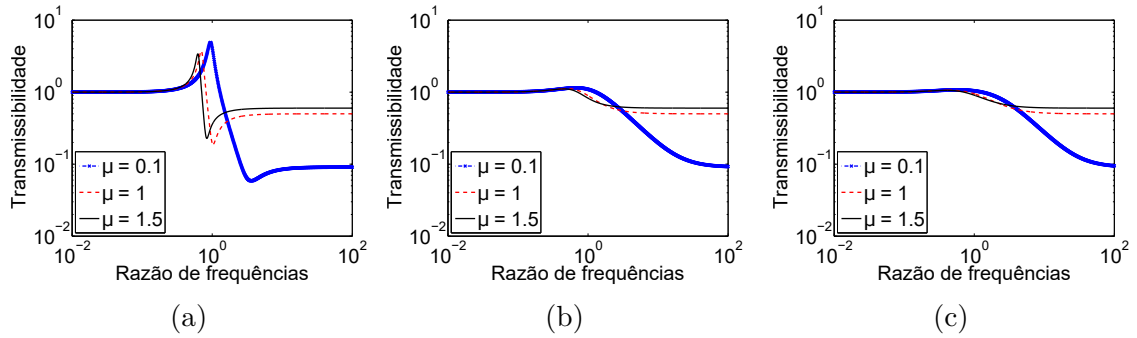


Figura 3.6: Sistema massa-mola-amortecedor-inert. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$.

Ao observar a figura 3.6a, verifica-se que o aumento da razão de massas diminui o valor da frequência de ressonância do sistema, bem como o valor da transmissibilidade no respectivo pico, no entanto, aumenta o valor da transmissibilidade no vale, isto é, na região de melhor isolamento do sistema. Para frequências mais altas, o aumento da razão de massas resulta em uma piora do isolamento. Ao observar as figuras 3.6, verifica-se novamente que o aumento do amortecimento tende a retirar o efeito positivo que o *inert*er fornece ao isolamento e, que a diferença das curvas de transmissibilidade para cada μ se tornam cada vez menores na região de ressonância.

Ainda com a equação A.18, é possível gerar superfícies formadas pela transmissibilidade em função da razão de frequências, da razão de massas e do fator de amortecimento. Como pode ser observado nas figuras anteriores, a melhor condição para se visualizar

o efeito do amortecimento é mantendo a razão de massas em 0.1, dentre as três opções apresentadas, e a melhor condição para se visualizar o efeito da razão de massas é mantendo o fator de amortecimento em 0.1, dentre as três opções apresentadas. As figuras 3.7 e 3.8 mostram, respectivamente, as superfícies para a razão de massas constante e o fator de amortecimento constante.

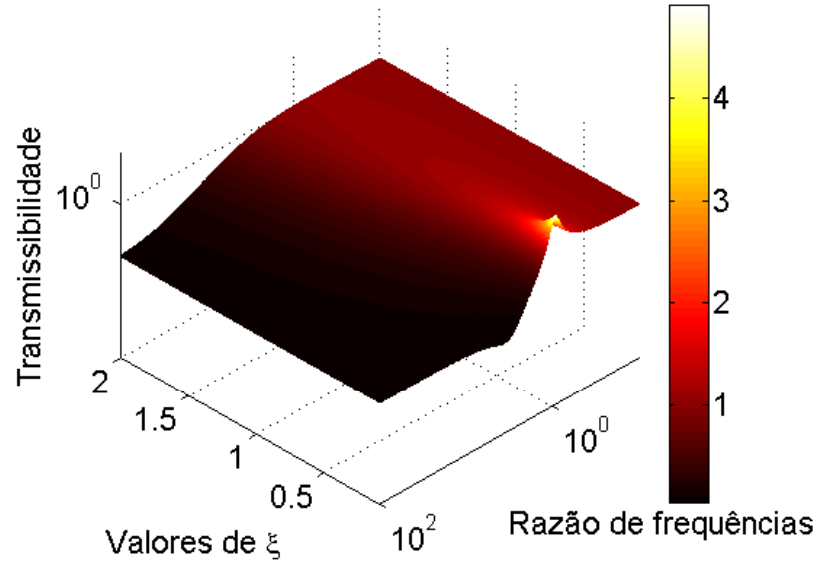


Figura 3.7: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor* com $\mu = 0.1$

Ao observar a figura 3.7, conclui-se que o aumento do fator de amortecimento realmente retira o efeito benéfico que o *inertor* apresenta ao isolamento do sistema, mas não influencia no valor assintótico que a transmissibilidade do sistema assume para frequências mais altas.

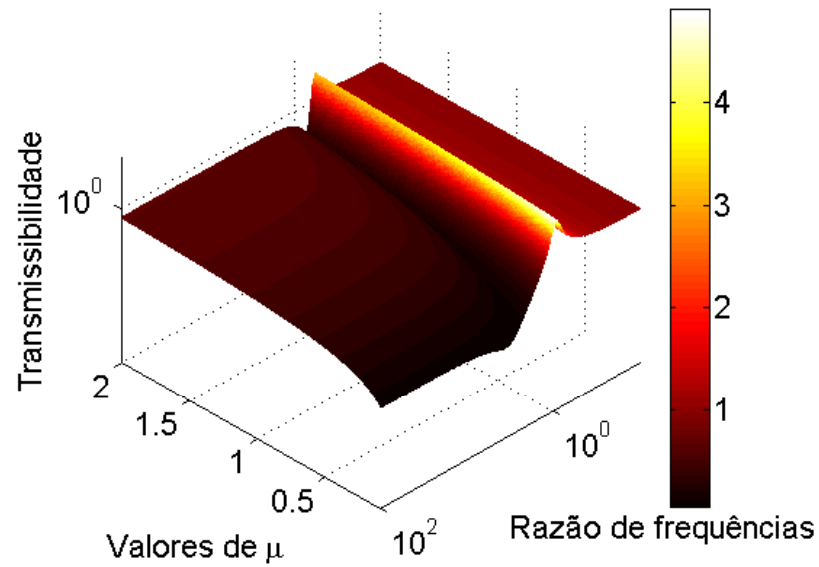


Figura 3.8: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor* com $\xi = 0.1$

Ao observar a figura 3.8, conclui-se que o aumento da razão de massas realmente desloca o pico da região de ressonância e o vale de isolamento para frequências mais baixas, enquanto que na região de alta frequência o valor assintótico que a transmissibilidade do sistema assume aumenta.

3.3.2 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* elasticamente acoplado

O segundo sistema mecânico investigado, em que um *inertor* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor com um *inertor* em série com uma segunda mola de rigidez $N_k k$, sendo N_k uma constante, como mostrado na figura 3.9. Tal sistema é denominado **S-2**.

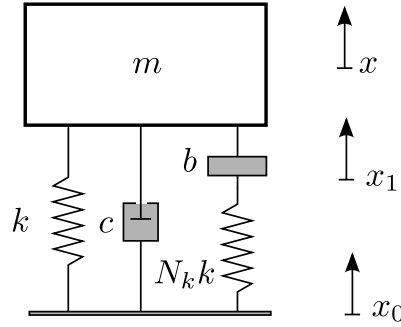


Figura 3.9: Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* elasticamente acoplado

Resultados gráficos para esse sistema

Com a equação A.32 reapresentada a seguir, demonstrada no Apêndice A (seção A.2.2) e que descreve a transmissibilidade para este segundo sistema, é possível obter diversas curvas de resposta em frequência com variação dos parâmetros ξ e μ , com o intuito de verificar a influência destes no sistema em estudo. O valor escolhido para N_k , depois do estudo realizado no Apêndice C (seção C.1), foi de $N_k = 0.1$. Com o estudo realizado no Apêndice C para esse sistema, foi concluído que valores baixos de N_k resultaram em um efeito anti-ressonante, enquanto que valores mais altos resultaram em maior banda de isolamento.

$$|T_d| = \sqrt{\frac{\left(1 - \Omega^2 \mu \left(1 + \frac{1}{N_k}\right)\right)^2 + \left(-2\Omega^3 \mu \frac{\xi}{N_k} + 2\Omega\xi\right)^2}{\left(1 + \Omega^4 \mu \frac{1}{N_k} - \Omega^2 - \Omega^2 \mu \left(1 + \frac{1}{N_k}\right)\right)^2 + \left(-2\Omega^3 \mu \frac{\xi}{N_k} + 2\Omega\xi\right)^2}}$$

A figura 3.10 mostra o desempenho do sistema com valores de razão de massas constantes para as três condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e superamortecido ($\xi = 1.5$).

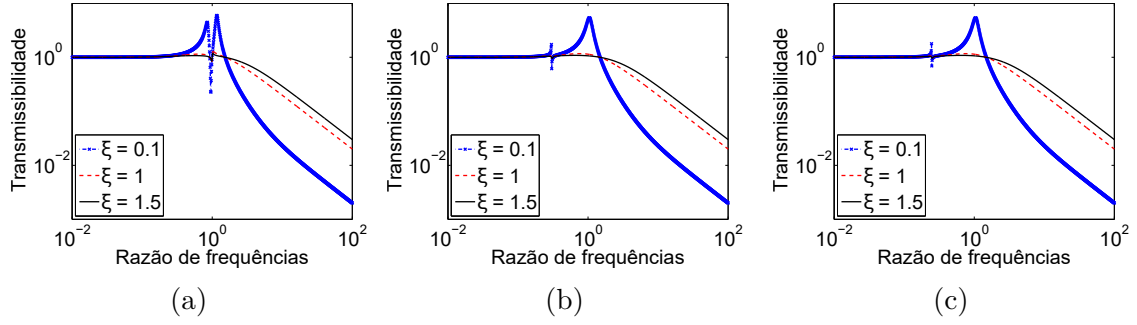


Figura 3.10: Sistema massa-mola-amortecedor-inert com mola secundária. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$.

A figura 3.11 mostra o desempenho do sistema com fator de amortecimento $\xi = 0.1$ para três condições de razão de massas: inércia menor que massa suspensa ($\mu = 0.1$), inércia igual à massa suspensa ($\mu = 1$) e inércia maior que a massa suspensa ($\mu = 1.5$).

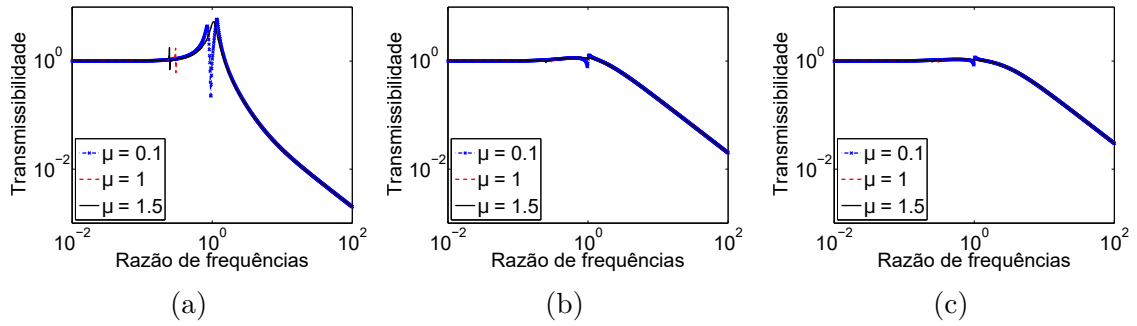


Figura 3.11: Sistema massa-mola-amortecedor-inert com mola secundária. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$.

Ao observar as figuras 3.10a a 3.10c, verifica-se novamente que o aumento do amortecimento no sistema diminui o efeito positivo que o *inert*er proporciona ao isolamento, para os valores de razão de massas utilizados.

Ao observar as figuras 3.11a a 3.11c, verifica-se que o aumento da razão de massas desloca os dois picos e o vale da curva para frequências mais baixas. Para alta frequência, as curvas convergem para o mesmo decaimento para qualquer valor de μ . Pode-se observar também a supressão do efeito do inert devido ao amortecimento nas figuras 3.11b e 3.11c.

As figuras apresentadas que possuem subamortecimento ($\xi = 0.1$) mostram que esse sistema gera dois picos e um vale de isolamento no que seria uma região próxima a região de ressonância de um sistema massa-mola ($\Omega = 1$). Para frequências mais altas, pode-se verificar que os valores de transmissibilidade continuam decaindo. Assim, pode-se concluir que a vantagem desse sistema sobre o sistema anterior é o decaimento em alta frequência e, sua desvantagem, é a geração de um segundo pico de transmissibilidade. Com relação ao sistema massa-mola, o vale gerado é a vantagem, enquanto que o segundo

pico gerado e o decaimento menor na alta frequência são desvantagens.

Ainda com a equação A.32, é possível gerar superfícies formadas pela transmissibilidade em função da razão de frequências, da razão de massas, do fator de amortecimento e dos valores de N_k . Novamente, como pode ser observado nas figuras anteriores, a melhor condição para se visualizar o efeito do amortecimento é mantendo a razão de massas em 0.1, e a melhor condição para se visualizar o efeito da razão de massas é mantendo o fator de amortecimento em 0.1. O valor de N_k também deve ser constante para gerar as superfícies e foi escolhido o valor supracitado (0.1). As figuras 3.12 e 3.13 mostram, respectivamente, as superfícies para a razão de massas constante e o fator de amortecimento constante. para o valor de $N_k = 0.1$.

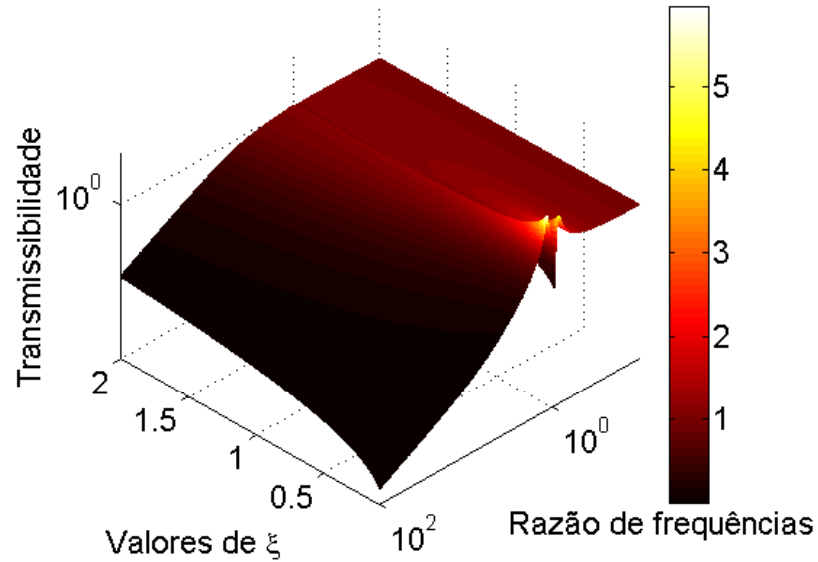


Figura 3.12: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*-mola secundária com $\mu = 0.1$

Ao observar a figura 3.12, verifica-se que realmente há a geração de dois picos e um vale para esse sistema e que, para os valores constantes de N_k e μ , a geração destes são sempre na mesma frequência para qualquer valor de ξ . É evidente que o aumento do fator de amortecimento passa a suprimir os efeitos positivos e negativos da nova configuração ao isolamento no sistema na região de ressonância, enquanto que para a alta frequência o decaimento dos valores de transmissibilidade é levemente deteriorado.

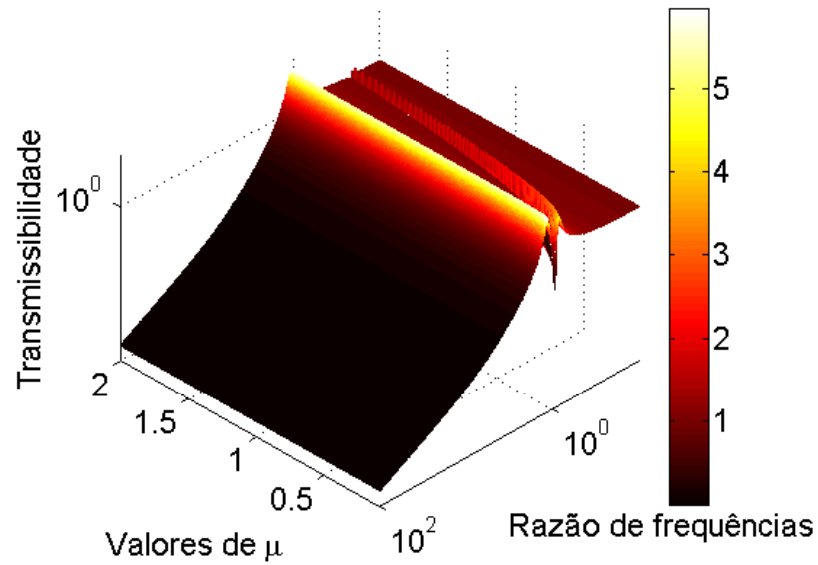


Figura 3.13: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*-mola secundária com $\xi = 0.1$

Ao observar a figura 3.13, verifica-se que o aumento do valor da razão de massas (μ) faz com que os picos e o vale se desloquem no eixo da razão de frequências (Ω) para frequências mais baixas, sendo que o maior pico se desloca pouco, enquanto que o pico menor, bem como o vale, se deslocam muito significativamente. Além disso, é possível verificar que o efeito anti-ressonante só ocorre para valores baixos da razão de massas, isto é, $0 < \mu \leq 0.1$. Também é possível observar discontinuidades presentes na superfície. Estas se devem a problemas de discretização, não comprometendo o entendimento da tendência do formato da superfície caso tal discretização fosse perfeita.

3.3.3 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* viscosamente acoplado

O terceiro sistema mecânico investigado, em que um *inertor* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor com um *inertor* em série com um segundo amortecedor viscoso, com coeficiente de amortecimento $N_c c$, sendo N_c uma constante, como mostrado na figura 3.14. Tal sistema é denominado **S-3**.

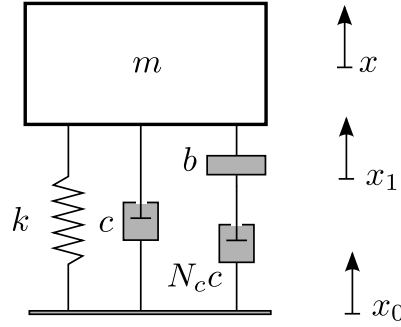


Figura 3.14: Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* viscosamente acoplado

Resultados gráficos para esse sistema

Com a equação A.48 rerepresentada a seguir, demonstrada no Apêndice A (seção A.2.3) e que descreve a transmissibilidade para este terceiro sistema, é possível obter diversas curvas de resposta em frequência com variação dos parâmetros ξ e μ , com o intuito de verificar a influência destes no sistema em estudo. O valor escolhido para N_c , depois do estudo realizado no Apêndice C (seção C.2) para esse sistema, foi de $N_c = 2$, visto que há benefício se comparado com outros valores mais baixos. Com o estudo realizado no Apêndice C, concluiu-se que para esse sistema o maior benefício para a região de ressonância ocorre com altos valores de N_c enquanto que para a alta frequência, valores mais baixos trazem maiores benefícios.

$$|T_d| = \sqrt{\frac{\left(1 - \Omega^2 \mu \left(1 + \frac{1}{N_c}\right)\right)^2 + \left(\Omega \left(2\xi + \frac{\mu}{2N_c\xi}\right)\right)^2}{\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \mu + \frac{\mu}{N_c}\right)\right)^2 + \left(\Omega \left(2\xi + \frac{\mu}{2N_c\xi}\right) - \Omega^3 \mu \frac{1}{2N_c\xi}\right)^2}}$$

A figura 3.15 mostra o desempenho do sistema com $\mu = 0.1$ para as três condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e superamortecido ($\xi = 1.5$).

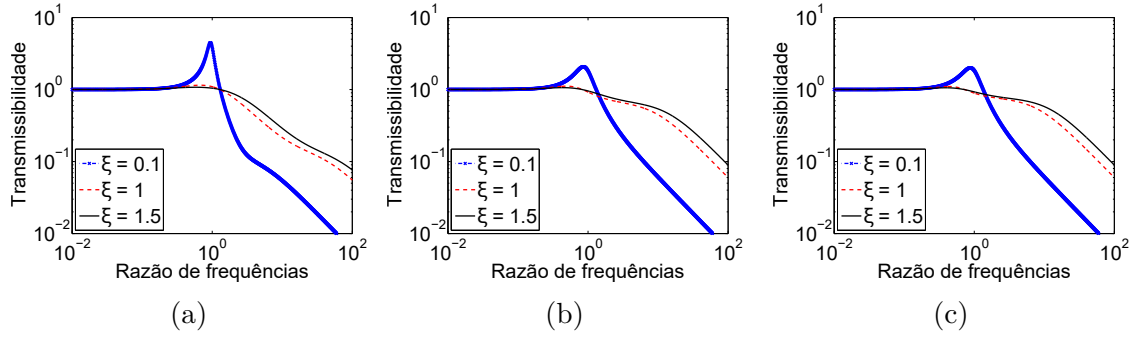


Figura 3.15: Sistema massa-mola-amortecedor-inert com amortecedor secundário. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$.

Ao observar as figuras 3.15a a 3.15c, verifica-se novamente que o aumento do amortecimento no sistema tende a suprimir os efeitos que o inert proporciona ao isolamento. A adição do segundo amortecedor, como explicado no Apêndice C, traz vantagem desse sistema em relação a um sistema massa-mola na região de ressonância quando N_c for um valor mais alto, mas em alta frequência apresenta desvantagens. Portanto, a grande vantagem desse sistema é que é possível regular o parâmetro N_c de forma a se configurar o quanto se quer obter de vantagem na região de ressonância em detrimento da alta frequência ou o inverso. Esse sistema, no entanto, não é possível de ser construído, uma vez que não há força restauradora agindo sobre o grau de liberdade x_1 , embora sugere o que pode ocorrer para o sistema analisado na próxima seção.

A figura 3.16 mostra o desempenho do sistema com fator de amortecimento $\xi = 0.1$ para três condições de razão de massas: inertância menor que massa suspensa ($\mu = 0.1$), inertância igual à massa suspensa ($\mu = 1$) e inertância maior que a massa suspensa ($\mu = 1.5$).

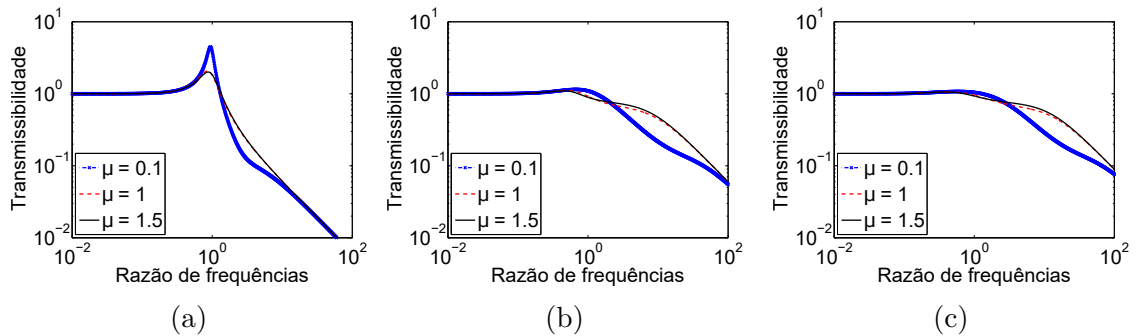


Figura 3.16: Sistema massa-mola-amortecedor-inert com amortecedor secundário. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$.

Ao observar as figuras 3.16a a 3.16c, verifica-se que o aumento da razão de massas melhora a performance do sistema na região de ressonância, mas, em consequência, piora a performance em uma região de frequências intermediária entre a região de ressonância e a de alta frequência. Para frequências mais altas, as curvas são convergentes e há decaimento, portanto, uma vantagem sobre o primeiro sistema com inert.

Ainda com a equação A.48, é possível gerar superfícies formadas pela transmissibilidade em função da razão de frequências, da razão de massas, do fator de amortecimento e dos valores de N_c . Como nas seções anteriores, as melhores condições de visualização das curvas de transmissibilidade ocorrem para quando $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$, variando-se o parâmetro não fixado. O valor de N_c também deve ser constante para gerar as superfícies e foi escolhido o valor supracitado (2). As figuras 3.17 e 3.18 mostram, respectivamente, as superfícies para a razão de massas e o fator de amortecimento constantes.

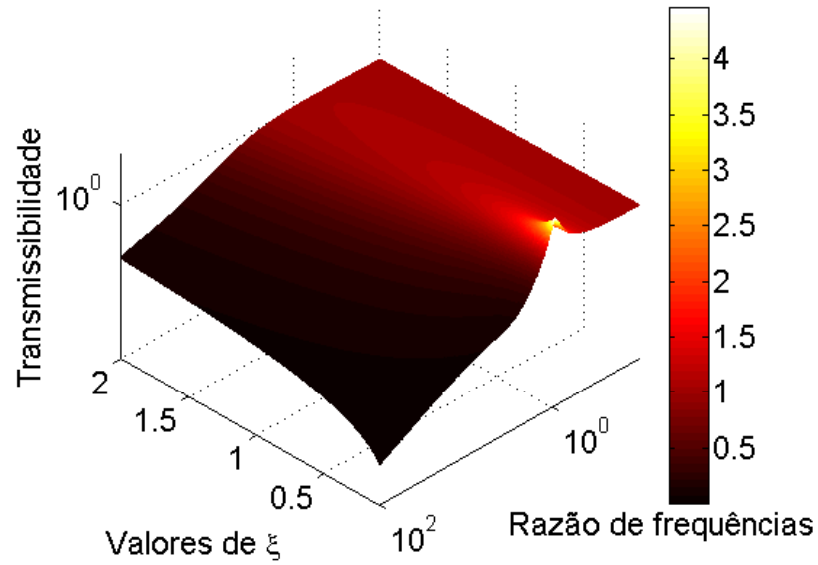


Figura 3.17: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*-amortecedor secundário com $\mu = 0.1$

Ao observar a figura 3.17, verifica-se que os efeitos gerados pelo aumento de ξ são semelhantes aos efeitos que o aumento de ξ gera em um sistema massa-mola-amortecedor.

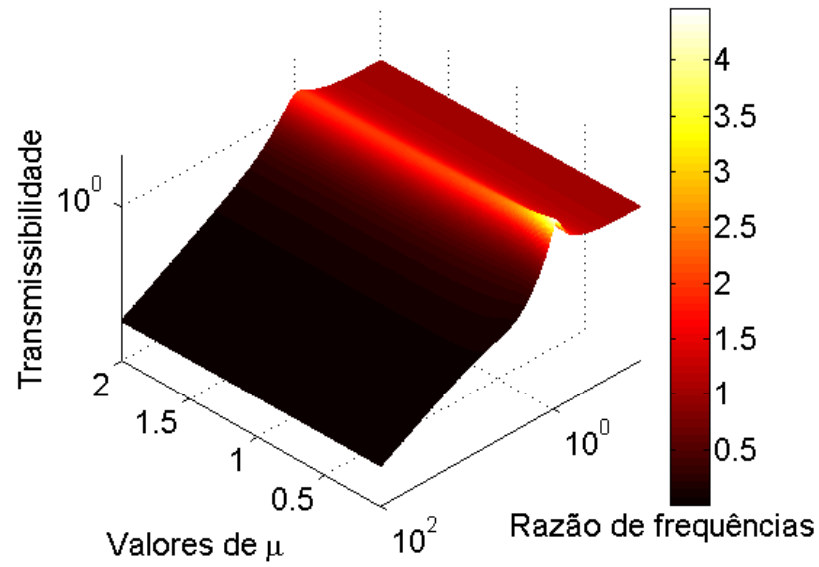


Figura 3.18: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*-amortecedor secundário com $\xi = 0.1$

Ao observar a figura 3.18, verifica-se que o aumento de μ diminui o valor do pico na região de ressonância e diminui o decaimento para frequências mais altas (degrada o isolamento). Conclui-se, portanto, que a razão de massas tem um efeito muito semelhante ao fator de amortecimento para esse sistema.

3.3.4 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* acoplado em série com conjunto mola-amortecedor

O quarto sistema mecânico investigado, em que um *inertor* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor com um *inertor* em série com um conjunto de mola e amortecedor secundários, com rigidez $N_k k$ e com coeficiente de amortecimento $N_c c$, respectivamente, sendo N_k e N_c constantes, como mostrado na figura 3.19. Tal sistema é denominado **S-4**.

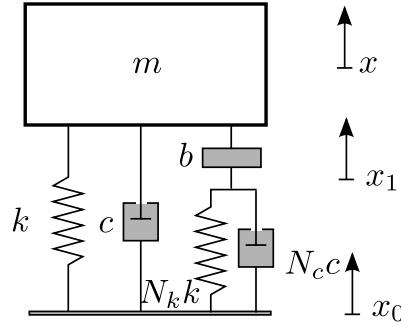


Figura 3.19: Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* viscoelasticamente acoplado

Resultados gráficos para esse sistema

Com a equação A.68 rerepresentada a seguir, demonstrada no Apêndice A (seção A.2.4) e que descreve a transmissibilidade para este quarto sistema, é possível obter diversas curvas de resposta em frequência com variação dos parâmetros ξ e μ , com o intuito de verificar a influência destes no sistema em estudo. Os valores escolhidos para N_k e N_c foram, respectivamente, $N_k = 0.1$ e $N_c = 2$, para não diferenciá-los dos escolhidos nas seções anteriores, embora um estudo destes parâmetros fora realizado no Apêndice C (seção C.3). Neste estudo foi constatado que valores mais altos de N_c em relação a N_k levam o comportamento da curva de transmissibilidade de deslocamento absoluto mais próximo do encontrado na seção 3.3.3, enquanto que valores mais baixos de N_c em relação a N_k levam o comportamento da curva de transmissibilidade de deslocamento absoluto mais próximo do encontrado na seção 3.3.2.

$$\begin{aligned}
|T_d| &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \\
A &= \left(1 - \left(\mu + \frac{\mu}{N_k} + \frac{4N_c\xi^2}{N_k}\right)\Omega^2\right) \\
B &= \left(2\xi\left(1 + \frac{N_c}{N_k}\right)\Omega - \frac{2\mu\xi}{N_k}(1 + N_c)\Omega^3\right) \\
C &= \left(1 + \frac{\mu}{N_k}\Omega^4 - \left(1 + \mu + \frac{\mu}{N_k} + \frac{4N_c\xi^2}{N_k}\right)\Omega^2\right) \\
D &= \left(2\xi\left(1 + \frac{N_c}{N_k}\right)\Omega - \frac{2\xi}{N_k}(N_c + \mu + N_c\mu)\Omega^3\right)
\end{aligned}$$

A figura 3.20 mostra o desempenho do sistema com valores de razão de massas constantes para as três condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e superamortecido ($\xi = 1.5$).

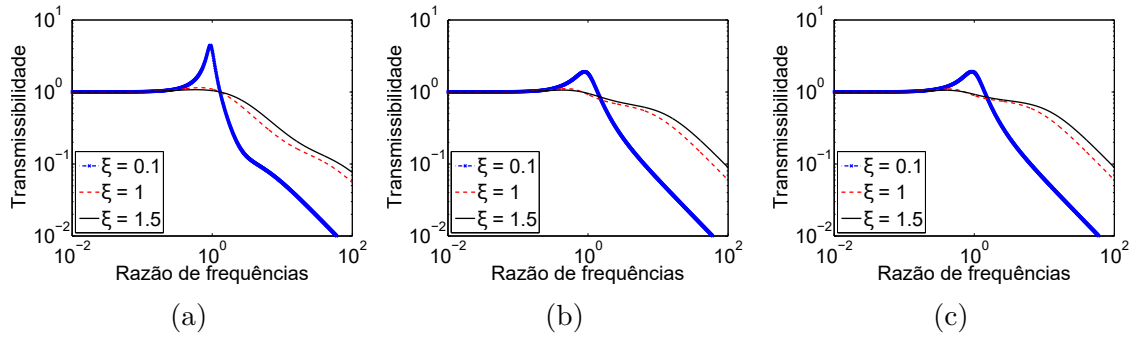


Figura 3.20: Sistema massa-mola-amortecedor-inertor com mola e amortecedor secundários. (a) $\mu = 0.1$. (b) $\mu = 1$. (c) $\mu = 1.5$.

Ao observar as figuras 3.20a a 3.20c, verifica-se praticamente o mesmo das figuras 3.15a a 3.15c. A vantagem desse sistema, no entanto, sobre o anterior, é a de que há uma força de restauração de mola agindo sobre o grau de liberdade x_1 , tornando esse sistema possível de ser construído. Além disso, é possível regular os parâmetros N_k e N_c para obter benefício de isolamento na região desejada (região de ressonância ou de alta frequência).

A figura 3.21 mostra o desempenho do sistema com fator de amortecimento $\xi = 0.1$ para três condições de razão de massas: inércia menor que massa suspensa ($\mu = 0.1$), inércia igual à massa suspensa ($\mu = 1$) e inércia maior que a massa suspensa ($\mu = 1.5$).

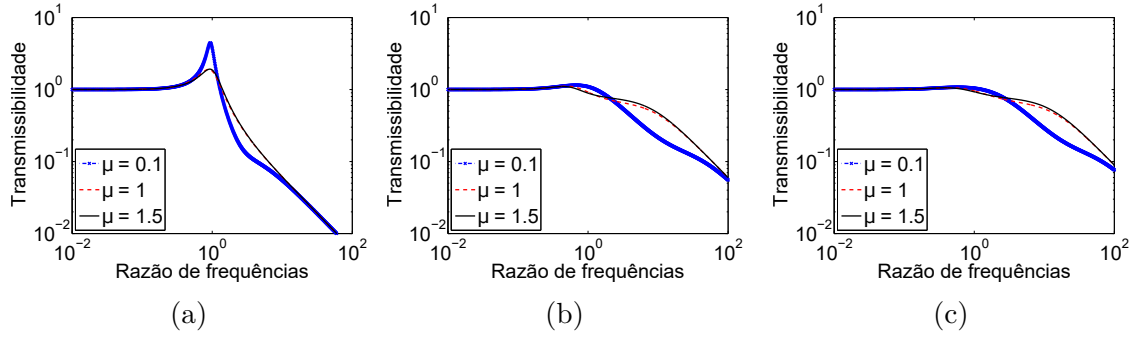


Figura 3.21: Sistema massa-mola-amortecedor-inertor com mola e amortecedor secundários. (a) $\xi = 0.1$. (b) $\xi = 1$. (c) $\xi = 1.5$.

Ao observar as figuras 3.21a a 3.21c, verifica-se praticamente o mesmo das figuras 3.16a a 3.16c. Assim, tem-se conclusões semelhantes.

Ainda com a equação A.68, é possível gerar superfícies formadas pela transmissibilidade em função da razão de frequências, da razão de massas, do fator de amortecimento, dos valores de N_k e dos valores de N_c . Como explicado anteriormente, a melhor condição para se visualizar o efeito do amortecimento é mantendo a razão de massas em 0.1, e a melhor condição para se visualizar o efeito da razão de massas é mantendo o fator de amortecimento em 0.1. Os valores de N_k e N_c também devem ser constantes para gerar as superfícies e foram escolhidos os supracitados (0.1 e 2, respectivamente). As figuras 3.22 e 3.23 mostram, respectivamente, as superfícies para a razão de massas e o fator de amortecimento constantes.

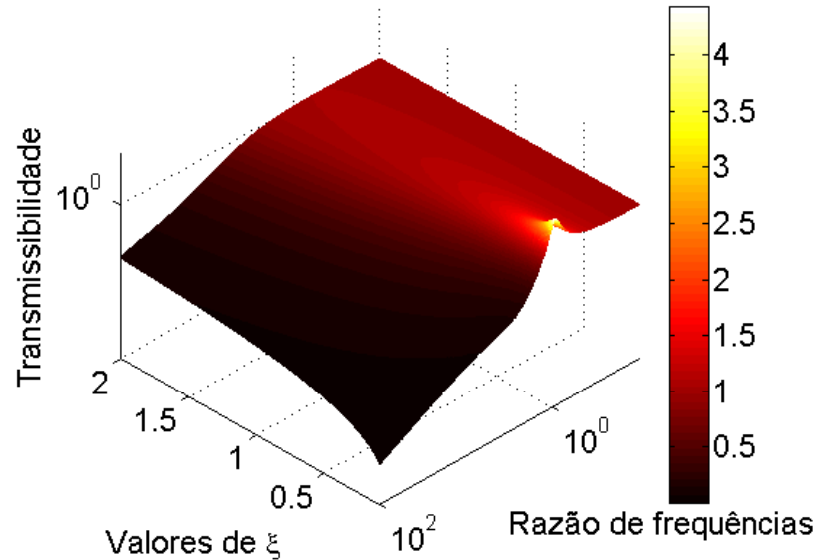


Figura 3.22: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*-amortecedor e mola secundários com $\mu = 0.1$

As conclusões da figura 3.22 são semelhantes às da figura 3.17 devido aos valores de N_k e N_c escolhidos aproximarem esse sistema ao sistema da seção anterior. Similar-

mente, as conclusões da figura 3.23 são semelhantes às da figura 3.18 devido aos valores de N_k e N_c escolhidos também aproximarem esse sistema ao sistema da seção anterior.

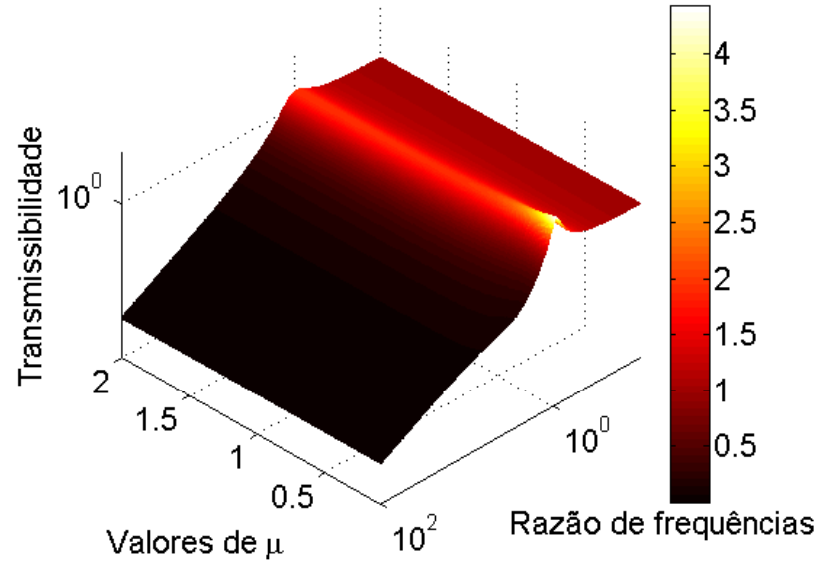


Figura 3.23: Superfície de transmissibilidade para o sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*-amortecedor e mola secundários com $\xi = 0.1$

Capítulo 4

Isolamento com o uso de amortecedores não lineares

4.1 Introdução

O que apresenta-se neste capítulo são as transmissibilidades de deslocamento absoluto para sistemas mecânicos utilizando os amortecedores linear, quadrático, assimétrico e não-linear geométrico, e compará-los com o intuito de identificar as faixas de frequência em que cada um deles melhora ou piora o isolamento.

4.2 Amortecimento linear

O sistema com amortecimento linear foi apresentado na seção 3.2. É o sistema mecânico - com amortecimento - trivial quando tratamos de isolamento de vibrações. Esse tipo de amortecimento é do tipo fluídico-viscoso, dependendo linearmente da velocidade relativa entre os terminais do amortecedor, de acordo com a equação 4.1.

$$F_A = c(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (4.1)$$

Com a equação 4.1 e excitação harmônica imposta ao amortecedor, é possível obter a curva da força do amortecedor em função da velocidade relativa entre os terminais (figura 4.1a), bem como a curva de histerese (figura 4.1b) que representa a dissipação de energia desse tipo de amortecimento em um ciclo.

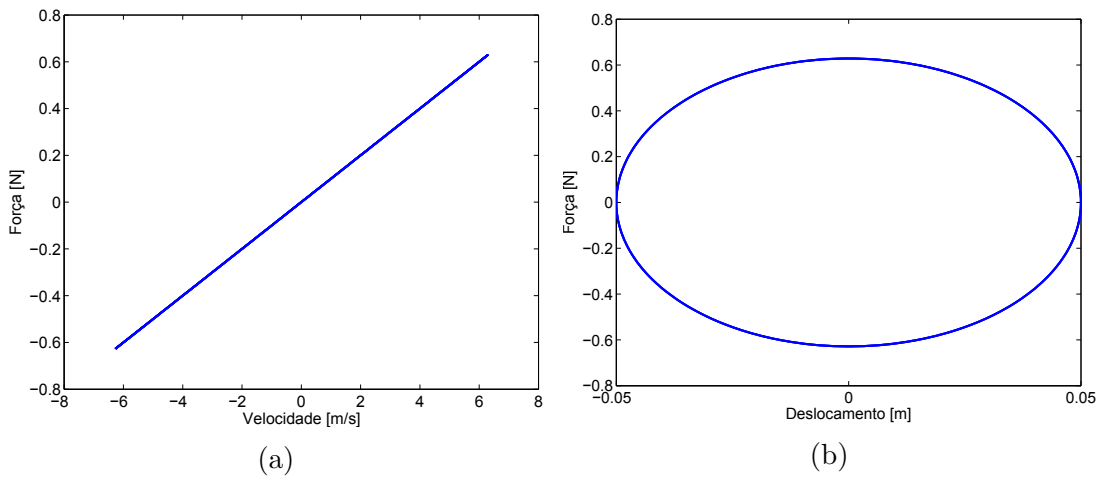


Figura 4.1: Amortecedor linear. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.

Ainda sobre o amortecedor linear, é possível obter o histórico da força junto com o histórico do deslocamento de excitação (figura 4.2), para fins de observação dos valores assumidos pela força em certos instantes de tempo e dos valores do deslocamento de excitação, e se o valor da velocidade de excitação é maior ou menor que zero (ângulo da reta tangente à curva do deslocamento).

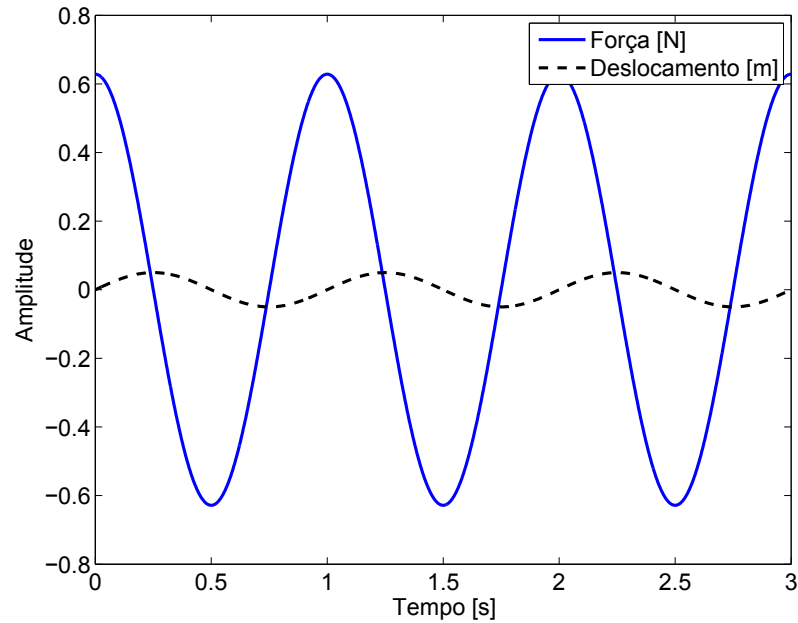


Figura 4.2: Ilustração do histórico de força e deslocamento de excitação de um amortecedor linear

A figura 4.3 é obtida da equação A.7 e mostra o resultado da transmissibilidade de deslocamento absoluto para esse sistema, com variação de ξ entre os valores $\xi = 0.1$, $\xi = 1$ e $\xi = 1.2$. Como esse sistema é o de base de comparação para os outros sistemas com amortecimento não linear, e a intenção é a de verificar a influência do amortecimento no isolamento da vibração, então caberá, nesse tipo de comparação, a variação do fator de amortecimento do sistema com amortecimento linear (ao contrário do que foi feito com o sistema de base de comparação para os sistemas com *inertor*). A figura 4.3 será utilizada como base de comparação para os resultados obtidos para os sistemas com amortecedores não lineares.

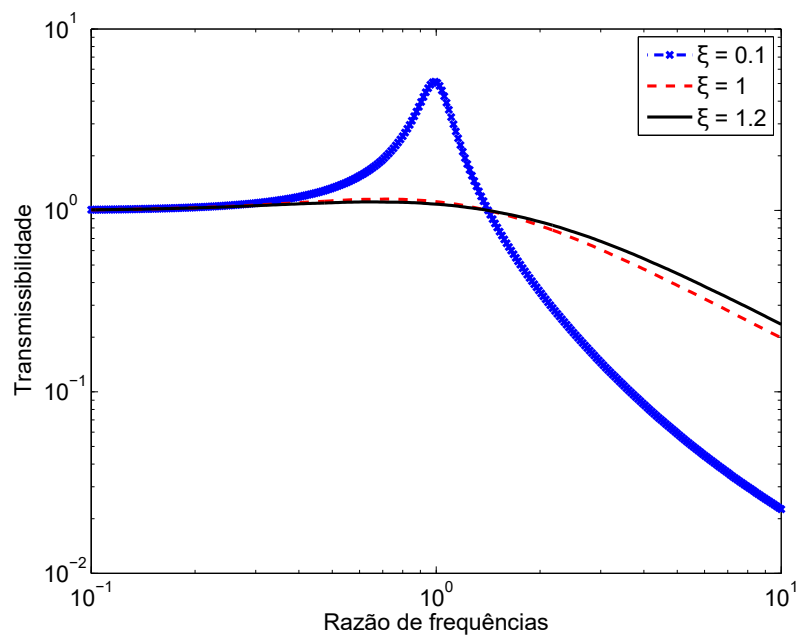


Figura 4.3: Transmissibilidade de deslocamento absoluto - Sistema com amortecimento linear

4.3 Amortecimento não linear quadrático

A figura 4.4 mostra um sistema mecânico com amortecimento quadrático. Esse amortecimento é do tipo fluido viscoso, mas com dependência quadrática da velocidade relativa entre os terminais do amortecedor, como mostra a equação 4.2, de acordo com Ruzicka e Derby (1971).

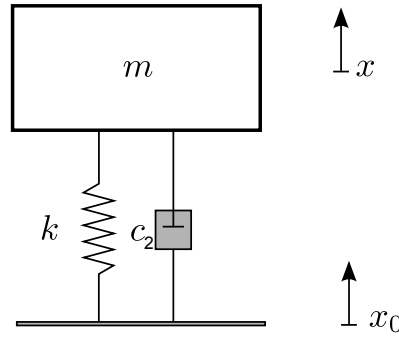


Figura 4.4: Sistema com amortecimento quadrático

$$F_A = c_2 |(\dot{x} - \dot{x}_0)|^2 \text{sign}(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (4.2)$$

Com a equação 4.2 e impondo excitação harmônica ao amortecedor quadrático, é possível obter a curva da força do amortecedor em função da velocidade relativa entre os seus terminais (figura 4.5a), bem como a curva de histerese que representa a dissipação de energia desse tipo de amortecimento em um ciclo (figura 4.5b).

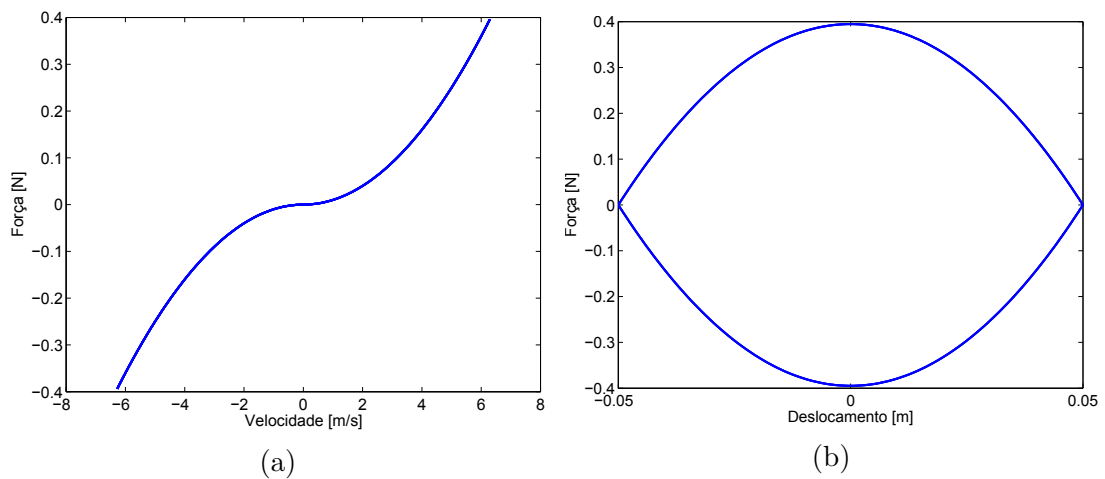


Figura 4.5: Amortecedor quadrático. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.

É possível obter também o histórico da força junto com o histórico do deslocamento de excitação (figura 4.6), para fins de observação dos valores assumidos pela força e pelo deslocamento de excitação para certos instantes de tempo, bem como verificar o sinal da velocidade.

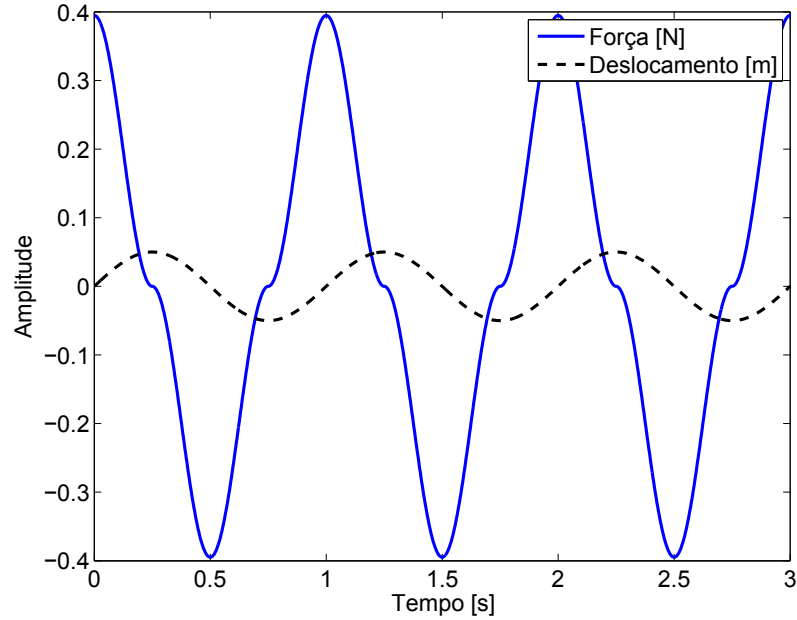


Figura 4.6: Ilustração do histórico de força e deslocamento de excitação de um amortecedor quadrático

Por meio do diagrama de corpo livre para a massa da figura 4.4 e, de acordo com a segunda lei de Newton, a EDO para o sistema com amortecimento quadrático é:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c_2 |(\dot{x} - \dot{x}_0)|^2 \text{sign}(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (4.3)$$

Rearranjando-se a equação 4.3 torna-se:

$$m\ddot{x} + c_2 |(\dot{x} - \dot{x}_0)|^2 \text{sign}(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0 \quad (4.4)$$

Para realizar a simulação numérica da equação 4.4 alguns procedimentos são necessários. Primeiro, deve-se transformar a equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem para o espaço de estados. Como essa EDO é de segunda ordem, são necessárias duas variáveis de estado com condições iniciais conhecidas para que se possa prever o comportamento dinâmico do sistema. Segue:

$$\begin{aligned} Y_1 &= x \\ Y_2 &= \dot{x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como x_0 e $\dot{x}_0$ são conhecidas (excitação imposta) e, portanto, não correspondem a um grau de liberdade, não são consideradas variáveis de estado para elas. Com as variáveis de estado definidas na equação 4.5, deve-se obter as taxas de variação no tempo das mesmas:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= \dot{x} \\ \dot{Y}_2 = \ddot{x} &= \frac{-c_2 |\dot{x} - \dot{x}_0|^2 \text{sign}(\dot{x} - \dot{x}_0) - k(x - x_0)}{m} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Finalmente o sistema de equações nas variáveis de estado se torna:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= \frac{-c_2 |(Y_2 - \dot{x}_0)|^2 \text{sign}(Y_2 - \dot{x}_0) - k(Y_1 - x_0)}{m} \end{aligned} \quad (4.7)$$

O sistema de equações 4.7 está na estrutura necessária para a simulação numérica no software MATLAB, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem, através do comando MATLAB ode45, bastante utilizado na simulação de problemas em engenharia. No entanto, deve-se atribuir valores aos parâmetros do sistema, bem como determinar-se as condições iniciais das variáveis de estado escolhidas e estruturar os resultados de forma adimensional, para que estes possam ser generalizados. Como o objetivo é obter a curva de transmissibilidade de deslocamento absoluto em função da razão de frequências, pode-se fazer uma simulação do sistema de equações 4.7 para cada valor de frequência de excitação e obter-se um ponto correspondente de transmissibilidade de deslocamento absoluto. Se o valor da frequência natural do sistema for a unidade, então, a razão de frequências será igual ao valor da frequência de excitação, conseqüentemente, tem-se:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 1 \quad [\text{rad/s}] \\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} &= \frac{\omega}{1} = \omega \quad [\text{adimensional}] \\ m &= 1 \quad [\text{Kg}] \\ k &= 1 \quad [\text{N/m}] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Finalmente, para que se possa comparar o sistema com amortecimento quadrático ao sistema linear é necessário que haja pelo menos uma relação entre eles. Como o objetivo deste trabalho, nesta seção, é preparar a comparação entre o isolamento de vibração proveniente de um isolador com amortecimento quadrático com o isolamento de vibração proveniente de um isolador com amortecimento linear, pode-se estabelecer que ambos os sistemas estejam nas mesmas condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e, superamortecido ($\xi = 1.2$). De acordo com Ruzicka e Derby (1971), o coeficiente de amortecimento linear equivalente é relacionado ao coeficiente de amortecimento quadrático pela equação 4.9:

$$c = \frac{8c_2\omega z_0}{3\pi} \quad (4.9)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso linear, c_2 é o coeficiente de amortecimento viscoso quadrático, ω é uma determinada frequência de excitação e z_0 é amplitude em regime permanente do deslocamento relativo entre os terminais do amortecedor.

Nota-se pela equação 4.9 que há dependência do coeficiente de amortecimento quadrático com o deslocamento relativo em regime permanente e com a frequência de excitação. Assim, para determinada frequência de excitação e correspondente amplitude de deslocamento relativo entre os terminais do amortecedor linear, haverá um valor para c_2 em que o amortecedor quadrático dissipará a mesma energia que o amortecedor linear.

Portanto, convenientemente, para fins de comparação, foi escolhida a frequência natural do sistema como sendo a frequência de excitação, com o intuito de que ambos os sistemas tenham a dissipação de energia por ciclo equivalente nessa frequência, isto é, $\omega_n = 1$ [rad/s], bastando apenas determinar qual é a amplitude do deslocamento relativo entre os terminais do amortecedor linear. Como este procedimento deverá ser efetuado para os diferentes valores de ξ , o sistema com amortecimento linear deverá ser simulado então para a frequência de ressonância, para os mesmos parâmetros de sistema (massa e rigidez) e mesmas condições iniciais. As condições iniciais de deslocamento e velocidade são convenientemente adotadas como zero. O resultado da simulação está demonstrado na figura 4.7. Os valores apontados na figura 4.7 estão dispostos na tabela 4.1.

Outra maneira de determinar a amplitude do deslocamento relativo entre os terminais do amortecedor linear é a analítica. Para o sistema com amortecimento linear, obtém-se do diagrama de corpo livre a EDO 4.10:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0 \quad (4.10)$$

Na equação 4.10, pode-se substituir o deslocamento relativo como $z = x - x_0$,

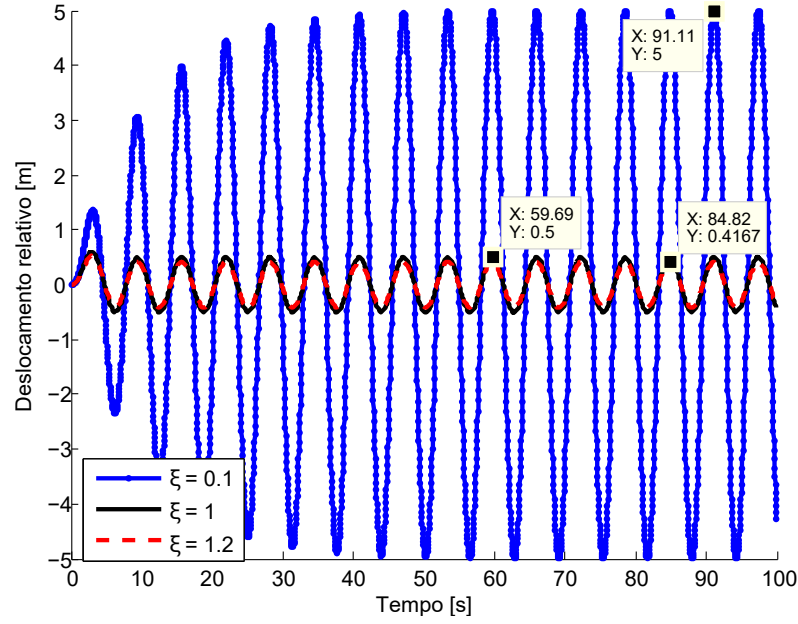


Figura 4.7: Histórico do deslocamento relativo para o sistema com amortecedor linear excitado pela base

resultando em:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\ddot{x}_0 = F \quad (4.11)$$

Assim, em termos do deslocamento relativo, obtém-se uma EDO equivalente a equação diferencial de um sistema forçado, sem excitação de base, cuja solução de resposta em frequência é:

$$\left| \frac{Z}{F} \right| = \sqrt{\frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (4.12)$$

Como $\omega = \omega_n = 1$, então $\Omega = 1$. Para os valores de $\xi = 0.1$, $\xi = 1$ e $\xi = 1.2$, obtém-se, respectivamente, os seguintes valores da equação 4.12: $\left| \frac{Z}{F} \right| = 5$, $\left| \frac{Z}{F} \right| = 0.5$ e $\left| \frac{Z}{F} \right| = 0.4167$.

Tabela 4.1: Resultados de amplitude máxima de deslocamento relativo em regime permanente para diversos valores de ξ no sistema com amortecimento linear

Valores de ξ	Amplitude de z_0 [m]
$\xi = 0.1$	5
$\xi = 1$	0.5
$\xi = 1.2$	0.4167

Com os valores de amplitude da tabela 4.1, o valor da respectiva frequência de

excitação, que é a frequência natural do sistema, e a equação 4.9, pode-se então calcular o valor de c_2 equivalente para essa condição. Ao utilizar o parâmetro c_2 calculado para cada ξ para determinar a transmissibilidade de deslocamento absoluto do sistema em função da razão de frequências obtém-se curvas generalizadas para o sistema mecânico representado pela equação 4.4. Os valores obtidos para c_2 estão dispostos na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Valores de c e c_2 calculados

Valores de ξ	Amplitude de z_0 [m]	Valor de c_2 [Ns ² /m ²]	Valor de c [Ns/m]
$\xi = 0.1$	5	0.04715	0.2
$\xi = 1$	0.5	4.7115	2
$\xi = 1.2$	0.4167	6.7853	2.4

Pode-se impor excitação harmônica como a da equação 4.13 ao sistema e então simulá-lo variando-se a frequência de excitação, que no caso é a própria razão de frequências, e obter-se assim o gráfico da figura 4.8 de transmissibilidade de deslocamento absoluto em função da razão de frequências para os diversos valores de ξ . Os resultados da figura 4.8 serão comparados posteriormente com os de outros sistemas com amortecimento não linear.

$$\begin{aligned} x_0 &= \sin(\omega t); \\ \dot{x}_0 &= \omega \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (4.13)$$

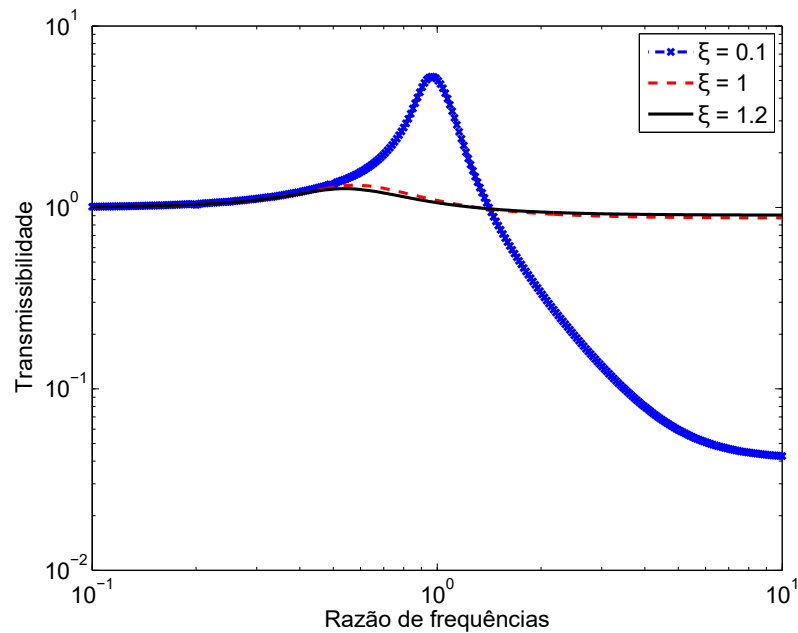


Figura 4.8: Transmissibilidade de deslocamento absoluto de um sistema com amortecimento quadrático

4.4 Amortecimento não linear assimétrico

A figura 4.9 mostra um sistema mecânico com amortecimento assimétrico. Esse amortecimento é do tipo fluídico-viscoso, com dependência linear da velocidade relativa entre os terminais do amortecedor. No entanto, quando essa velocidade relativa é positiva, o coeficiente de amortecimento possui um valor, e quando essa velocidade relativa é negativa, o coeficiente de amortecimento possui um valor diferente. A equação 4.14 descreve o comportamento da força desse tipo de amortecedor em função da velocidade relativa entre seus terminais.

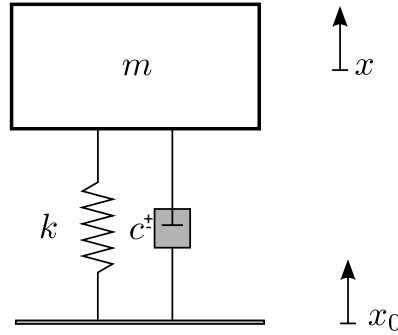


Figura 4.9: Sistema com amortecimento assimétrico

$$\begin{aligned} F_A &= c^+(\dot{x} - \dot{x}_0), \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 \geq 0; \\ F_A &= c^-(\dot{x} - \dot{x}_0), \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 < 0; \end{aligned} \quad (4.14)$$

Com a equação 4.14 e impondo excitação harmônica ao amortecedor assimétrico, é possível obter a curva da força do amortecedor em função da velocidade relativa entre os seus terminais (figura 4.10a), bem como a curva de histerese que representa a dissipação de energia desse tipo de amortecimento em um ciclo (figura 4.10b).

É possível obter também o histórico da força junto com o histórico do deslocamento de excitação (figura 4.11), para fins de observação dos valores assumidos pela força em certos instantes de tempo, bem como do valor do deslocamento de excitação e se o valor da velocidade de excitação é maior ou menor que zero.

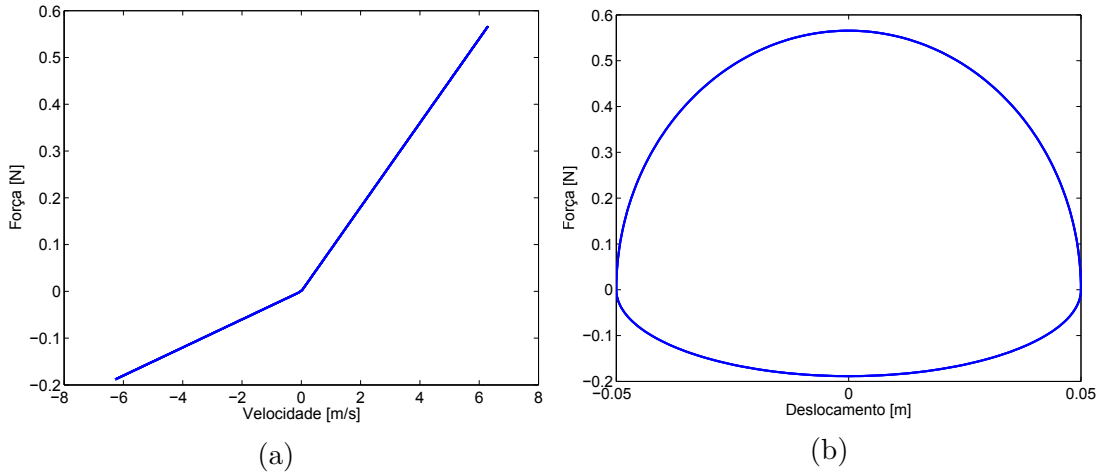


Figura 4.10: Amortecedor assimétrico. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.

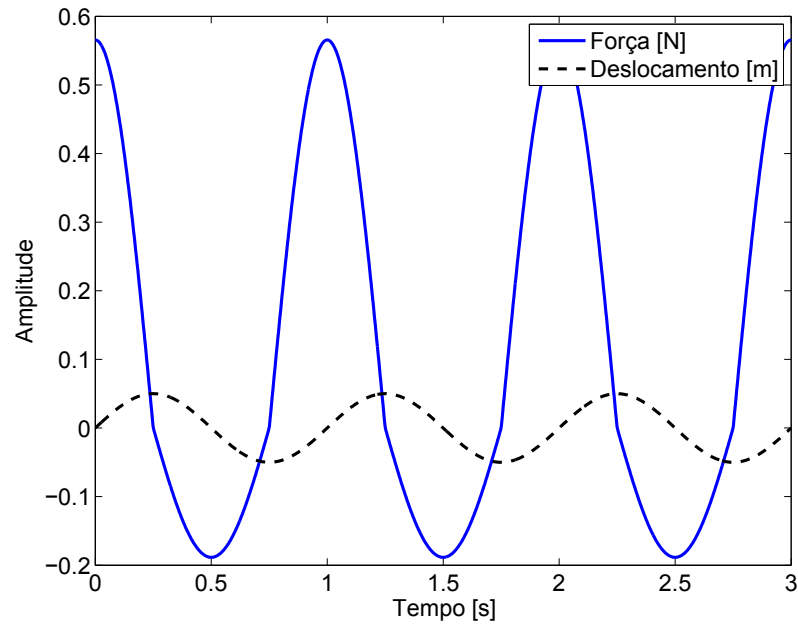


Figura 4.11: Ilustração do histórico de força e deslocamento de excitação de um amortecedor assimétrico

Por meio do diagrama de corpo livre para a massa da figura 4.9 e, de acordo com a segunda lei de Newton, a EDO para o sistema com amortecimento assimétrico é:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - x_0) - c^+(\dot{x} - \dot{x}_0), \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 \geq 0; \\ m\ddot{x} &= -k(x - x_0) - c^-(\dot{x} - \dot{x}_0), \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 < 0; \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rearranjando-se a equação 4.15 torna-se:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + c^+(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) &= 0, \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 \geq 0; \\
m\ddot{x} + c^-(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) &= 0, \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 < 0;
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Para realizar a simulação numérica da equação 4.16 deve-se repetir os procedimentos efetuados na seção anterior, para o amortecimento quadrático. Transforma-se a EDO de segunda ordem para o espaço de estados. Como essa EDO é de segunda ordem, são necessárias duas variáveis de estado com condições iniciais conhecidas para que se possa prever o comportamento dinâmico do sistema. Segue:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= x \\
Y_2 &= \dot{x}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como x_0 e $\dot{x}_0$ são conhecidas (excitação imposta), não há necessidade de considerarmos variáveis de estado para elas. Com as variáveis de estado definidas na equação 4.17, devemos obter as taxas de variação no tempo das mesmas:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_1 &= Y_2 = \dot{x}; \\
\dot{Y}_2 = \ddot{x} &= \frac{-c^+(\dot{x} - \dot{x}_0) - k(x - x_0)}{m}, \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 \geq 0; \\
\dot{Y}_2 = \ddot{x} &= \frac{-c^-(\dot{x} - \dot{x}_0) - k(x - x_0)}{m}, \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 < 0;
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\tag{4.19}$$

Finalmente o sistema de equações nas variáveis de estado se torna:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_1 &= Y_2; \\
\dot{Y}_2 &= \frac{-c^+(Y_2 - \dot{x}_0) - k(Y_1 - x_0)}{m}, \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 \geq 0; \\
\dot{Y}_2 &= \frac{-c^-(Y_2 - \dot{x}_0) - k(Y_1 - x_0)}{m}, \text{ se } \dot{x} - \dot{x}_0 < 0;
\end{aligned} \tag{4.20}$$

O sistema de equações 4.20 está na estrutura necessária para a simulação numérica no software MATLAB. Novamente, deve-se atribuir valores aos parâmetros do sistema, bem como determinar-se as condições iniciais das variáveis de estado escolhidas e estruturar os resultados de forma adimensional, para que estes possam ser generalizados. Os mesmos valores de massa, rigidez, condições iniciais e excitação externa do sistema com

amortecimento quadrático são utilizados para o sistema com amortecimento assimétrico, portanto, utilizando o mesmo método de adimensionalização numérica. Os parâmetros que faltam ser calculados agora são apenas c^+ e c^- . Segundo Ruzicka e Derby (1971), se um elemento de amortecimento está sob excitação harmônica $z = z_0 \sin(\omega t)$, a energia dissipada "D" em um ciclo de vibração é dada por:

$$D = 4\omega z_0 \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} F_A \cos(\omega t) dt \quad (4.21)$$

Para o amortecimento viscoso, um ciclo completo de vibração gera a energia de $\pi c \omega z_0^2$. Para o amortecimento assimétrico, pode-se aproximar um exato meio ciclo para c^+ e um exato meio ciclo para c^- , e somar as energias, resultando em:

$$\begin{aligned} \pi c \omega z_0^2 &= \frac{\pi c^+ \omega z_0^2}{2} + \frac{\pi c^- \omega z_0^2}{2} \\ c &= \frac{c^+}{2} + \frac{c^-}{2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nota-se, na equação 4.22 que não há dependência da frequência de excitação e nem da amplitude em regime permanente. No entanto, como demonstrado por Silveira, Wahi e Fernandes (2017), os meio ciclos de extensão e compressão não possuem o mesmo período, e essa diferença depende da razão de assimetria e da frequência de excitação.

Assim, a equação 4.22 representa o coeficiente de amortecimento linear equivalente em termos do coeficiente de amortecimento para o semiciclo positivo e do coeficiente de amortecimento para o semiciclo negativo do amortecimento assimétrico. Um valor adimensional β pode ser obtido da relação entre c^+ e c^- , que indica o quão assimétrico esse amortecedor é. Se $\beta = 1$, o amortecedor assimétrico é, na realidade, um amortecedor simétrico. De acordo com Dixon (2008), é comum encontrar valores de β entre 3 e 4, nos amortecedores em uso, portanto este valor de β será utilizado. Então, sabendo-se o valor utilizado para c , tem-se:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c^+}{2} + \frac{c^-}{2} \rightarrow 2c = c^+ + c^-; \\ \beta &= \frac{c^+}{c^-} \rightarrow 2c = \beta c^- + c^-; \\ \text{então } c^- &= \frac{2c}{1 + \beta} \text{ e } c^+ = \beta c^- \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como o objetivo desta seção é preparar a comparação entre o isolamento de vibração proveniente de um isolador com amortecimento assimétrico com o isolamento de

Tabela 4.3: Valores dos coeficientes de amortecimento para o amortecedor linear e o amortecedor assimétrico com $\beta = 3$

Valores de ξ	c [Ns/m]	c^+ [Ns/m]	c^- [Ns/m]
$\xi = 0.1$	0.2	0.3	0.1
$\xi = 1$	2	3	1
$\xi = 1.2$	2.4	3.6	1.2

vibração proveniente de um isolador com amortecimento linear, pode-se estabelecer que ambos os sistemas estejam nas mesmas condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e, superamortecido ($\xi = 1.2$). Com os valores de massa e da frequência natural escolhidos anteriormente é possível, para cada valor de ξ e determinado β , calcular os valores de c^+ e c^- . O parâmetro c pode ser calculado pela equação 4.24:

$$c = 2\xi m\omega_n \quad (4.24)$$

Os resultados obtidos então para os parâmetros c , c^+ e c^- , para os valores de $\xi = 0.1$, $\xi = 1$ e $\xi = 1.2$, com $\beta = 3$, estão dispostos na tabela 4.3:

Ao utilizar os parâmetros c^+ e c^- calculados para cada ξ relacionado a determinado β para determinar a transmissibilidade de deslocamento absoluto do sistema em função da razão de frequências, obtém-se curvas generalizadas para o sistema mecânico representado pelo sistema de equações 4.16.

Simulando o sistema então obtém-se o gráfico da figura 4.12, de transmissibilidade de deslocamento absoluto em função da razão de frequências para a variação de ξ . Os resultados da figura 4.12 serão comparados posteriormente com os de outros sistemas com amortecimento não linear.

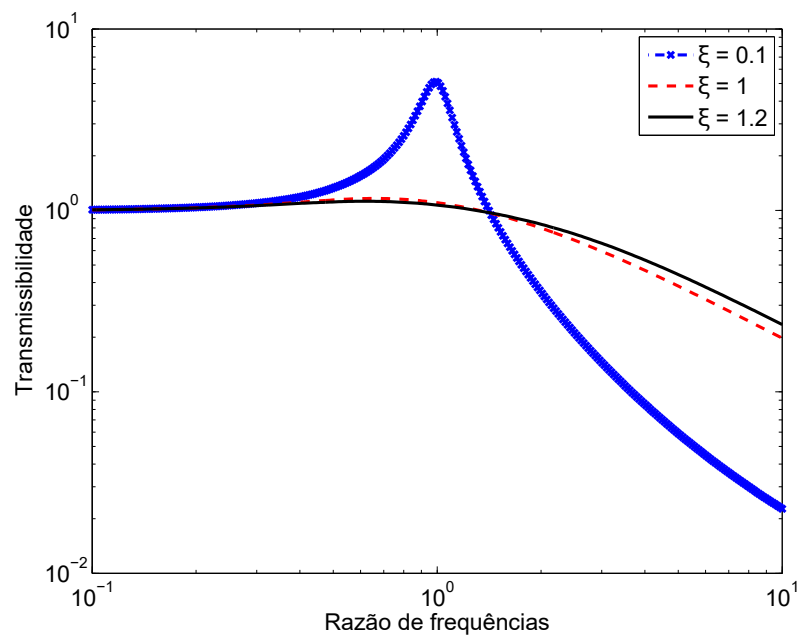


Figura 4.12: Transmissibilidade de deslocamento absoluto de um sistema com amortecimento assimétrico com $\beta = 3$

4.5 Amortecimento geometricamente não linear

A figura 4.13 mostra um sistema mecânico com amortecimento geometricamente não linear. Esse amortecimento é do tipo fluido viscoso. Se o amortecedor fosse montado no sistema paralelamente à mola, o amortecimento seria linear mas, em razão da geometria da montagem, a força de amortecimento tornou-se não linear.

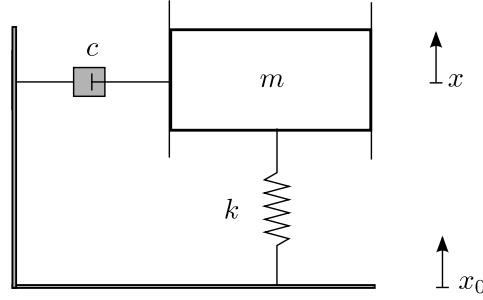


Figura 4.13: Sistema com amortecimento geometricamente não linear

Segundo López (2013), a força que um amortecedor linear colocado nesta posição exerce na vertical é dada pela equação 4.25:

$$F_A = c \frac{z^2}{z^2 + a^2} \dot{z} \quad (4.25)$$

onde a é a distância inicial entre os terminais do amortecedor e z é o deslocamento relativo entre os terminais do mesmo.

Assim, ao observar-se a equação 4.25, pode-se notar que a força do amortecedor depende quadraticamente do deslocamento relativo entre os terminais, bem como depende linearmente da velocidade relativa entre os mesmos. Assim, para baixas frequências de excitação, o amortecedor tende a inclinar mais na vertical, aumentando sua influência no sistema, enquanto que para frequências mais altas, o amortecedor tende a ser mantido na horizontal, minimizando sua ação na vertical. Assim, os dois efeitos citados por Carrella *et al.* (2012) ocorrem nesse tipo de amortecedor, que terá sua maior ação na região de ressonância, que é quando o amortecedor terá deslocamento e velocidade relativos consideráveis.

Com a equação 4.14 e impondo excitação harmônica ao amortecedor com não linearidade geométrica, é possível obter a curva da força do amortecedor em função da velocidade relativa entre os seus terminais (figura 4.14a), bem como a curva de histerese que representa a dissipação de energia desse tipo de amortecimento em um ciclo (figura 4.14b).

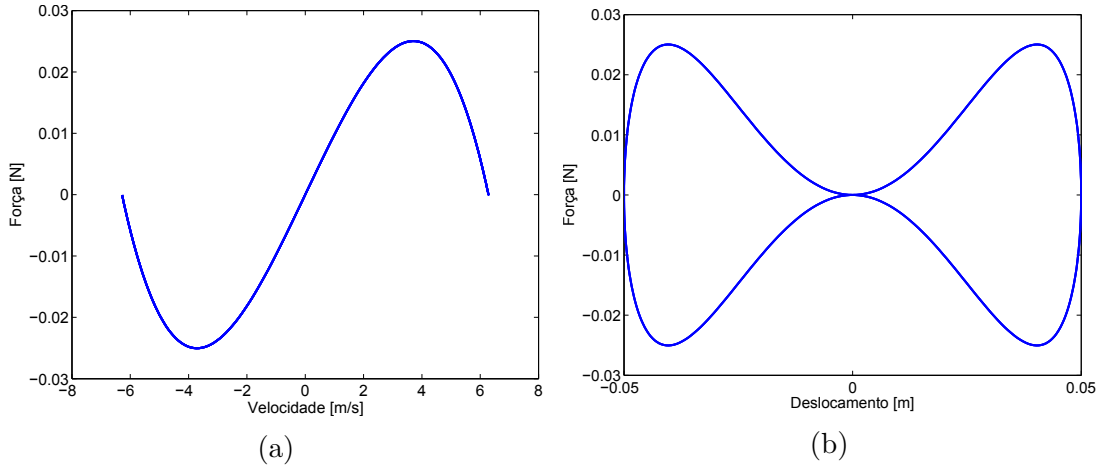


Figura 4.14: Amortecedor com não linearidade geométrica. (a) Curva de força do amortecedor em função da velocidade relativa dos terminais. (b) Curva de histerese.

É possível obter também o histórico da força junto com o histórico do deslocamento de excitação (figura 4.15), para fins de observação dos valores assumidos pela força em certos instantes de tempo, bem como do valor do deslocamento de excitação.

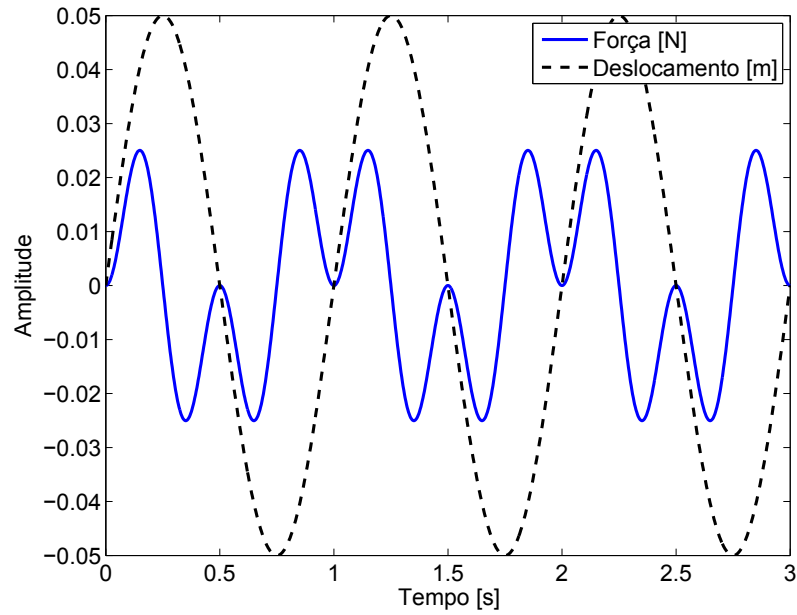


Figura 4.15: Histórico de força e deslocamento de excitação em um amortecedor com não linearidade geométrica

Por meio do diagrama de corpo livre para a massa da figura 4.13 e, de acordo com a segunda lei de Newton, a EDO para o sistema com amortecimento geometricamente não linear é:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + a^2} (\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (4.26)$$

Rearranjando-se a equação 4.26 torna-se:

$$m\ddot{x} + c \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + a^2} (\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0 \quad (4.27)$$

Para realizar a simulação numérica da equação 4.27 deve-se repetir os procedimentos efetuados na seções anteriores, para o amortecimento quadrático e para o amortecedor assimétrico. Transforma-se a EDO de segunda ordem para o espaço de estados. Como essa EDO é de segunda ordem, são necessárias duas variáveis de estado com condições iniciais conhecidas para que se possa prever o comportamento dinâmico do sistema. Segue:

$$\begin{aligned} Y_1 &= x \\ Y_2 &= \dot{x} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Como x_0 e $\dot{x}_0$ são conhecidas (excitação imposta), não há necessidade de considerarmos variáveis de estado para elas. Com as variáveis de estado definidas na equação 4.28, devemos obter as taxas de variação no tempo das mesmas:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= Y_2 = \dot{x}; \\ \dot{Y}_2 = \ddot{x} &= \frac{-k(x - x_0) - c \frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + a^2} (\dot{x} - \dot{x}_0)}{m} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Finalmente, o sistema de equações nas variáveis de estado se torna:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= Y_2 = \dot{x}; \\ \dot{Y}_2 = \ddot{x} &= \frac{-k(Y_1 - x_0) - c \frac{(Y_1 - x_0)^2}{(Y_1 - x_0)^2 + a^2} (Y_2 - \dot{x}_0)}{m} \end{aligned} \quad (4.30)$$

O sistema de equações 4.20 está na estrutura necessária para a simulação numérica no software MATLAB, utilizando o mesmo método numérico da seções anteriores. Novamente, deve-se atribuir valores aos parâmetros do sistema, bem como determinar-se as condições iniciais das variáveis de estado escolhidas e estruturar os resultados de forma adimensional, para que estes possam ser generalizados. Os mesmos valores de massa, rigidez, condições iniciais e excitação externa do sistema com amortecimento quadrático e do sistema com amortecimento assimétrico serão utilizados para o sistema com amortecimento geometricamente não linear, portanto, utilizando o mesmo método

de adimensionalização numérica. O parâmetro a pode ser estipulado com base em amortecedores reais. Para fins de simulação numérica o parâmetro a foi adotado como sendo de 0.1 metro. O último parâmetro a ser determinado passou a ser, portanto, o coeficiente de amortecimento c do amortecedor não linear. Como o sistema possui um amortecedor que é geometricamente não linear e deseja-se compará-lo à um sistema com amortecimento linear, os mesmos valores para c serão utilizados, dispostos na tabela 4.3.

Como o objetivo desta seção é preparar a comparação entre o isolamento de vibração proveniente de um isolador com amortecimento geometricamente não linear com o isolamento de vibração proveniente de um isolador com amortecimento linear, pode-se estabelecer que ambos os sistemas estejam nas mesmas condições de amortecimento: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e, superamortecido ($\xi = 1.2$).

Ao utilizar o parâmetro c calculado para cada ξ , que é um parâmetro adimensional, para determinar a transmissibilidade de deslocamento absoluto do sistema, que é uma função adimensional, em função da razão de frequências, que é um parâmetro adimensional, obtém-se curvas generalizadas para o sistema mecânico representado pelo sistema de equações 4.27.

Simulando o sistema então, obtém-se o gráfico da figura 4.16, de transmissibilidade de deslocamento absoluto em função da razão de frequências para a variação de ξ :

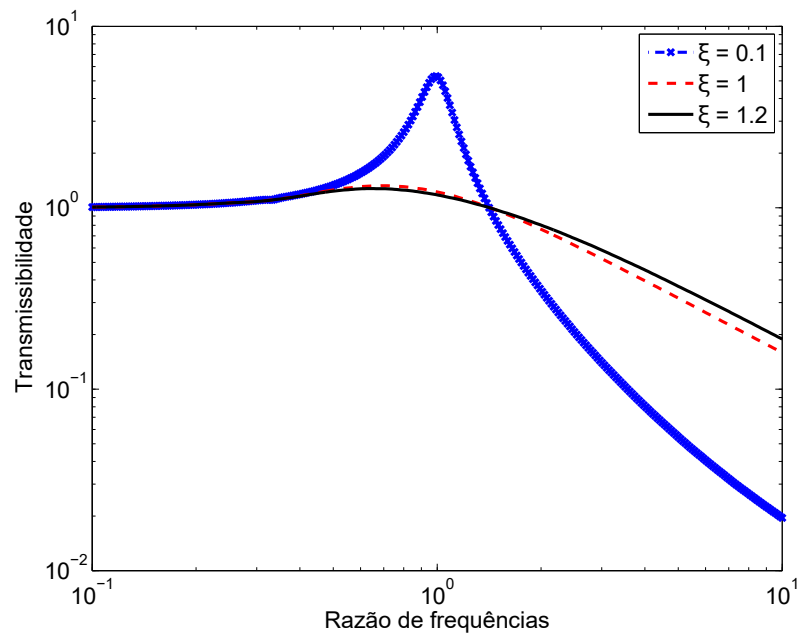


Figura 4.16: Sistema com amortecimento geometricamente não linear

Os resultados da figura 4.16 são comparados posteriormente com os de outros sistemas com amortecimento não linear.

Capítulo 5

Comparações e Discussões

Neste capítulo, dividido em três seções, são apresentadas as comparações entre os sistemas estudados nos capítulos anteriores. Na seção 5.1 apresenta-se as comparações entre o sistema S-1 e o sistema massa-mola, S-2 e o massa-mola, S-3 e o massa-mola, e S-4 e o massa-mola. Algumas informações são destacadas para clareza de entendimento. Na seção 5.2 os sistemas com *inertor* são comparados entre si e a um sistema massa-mola com fator de amortecimento de 0.1. Esse fator de amortecimento é adotado simplesmente para não se obter valores elevados de transmissibilidade na região de ressonância, facilitando assim a visualização do comportamento dos demais sistemas. Na seção 5.3 os sistemas com amortecimento não linear são comparados ao sistema com amortecimento linear para valores de fator de amortecimento linear: subamortecido ($\xi = 0.1$), criticamente amortecido ($\xi = 1$) e superamortecido ($\xi = 1.2$).

5.1 Comparação e discussão de sistemas com *inertor* e sistema massa-mola

Nesta seção as equações obtidas no Capítulo 3 são analisadas e comparadas, e os resultados obtidos são mostrados. Os sistemas S-1, S-2, S-3 e S-4, referem-se, respectivamente, ao sistema com *inertor*, ao sistema com *inertor* elasticamente acoplado, ao sistema com *inertor* viscosamente acoplado e ao sistema com *inertor* acoplado com um conjunto de mola e amortecedor.

5.1.1 Comparação entre o sistema S-1 e o sistema massa-mola

Para realizar a comparação entre o sistema S-1 e o sistema massa-mola, o amortecimento foi retirado do sistema S-1 ($\xi = 0$). O valor da razão de massas utilizado foi $\mu = 0.1$. A figura 5.1 mostra as intersecções entre as curvas (pontos vermelhos indicados com $Inter_{dir}$ de intersecção direita e $Inter_{esq}$ de intersecção esquerda), indica o pico e o zero do sistema S-1 e mostra o valor para o qual a transmissibilidade converge quando a razão de frequências tende ao infinito.

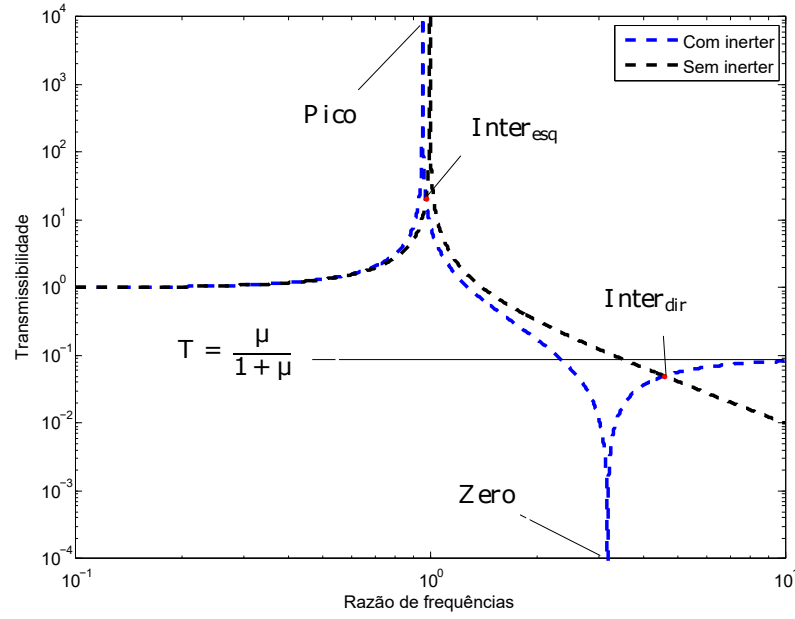


Figura 5.1: Comparação entre os sistemas S-1 e massa-mola

O valor da razão de frequência de pico indicado é (ver seção B.1 do Apêndice B):

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\mu + 1}} \quad (5.1)$$

O valor da razão de frequência do zero indicado é (ver seção B.2 do Apêndice B):

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (5.2)$$

O valor da razão de frequência de intersecção esquerda é (ver seção B.3 do Apêndice B):

$$\Omega = \sqrt{-\frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} + \frac{1}{\mu} + 1} \quad (5.3)$$

O valor da razão de frequência de intersecção direita é (ver seção B.3 do Apêndice B):

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} + \frac{1}{\mu} + 1} \quad (5.4)$$

Portanto, a banda de frequência do isolamento está entre as frequências de intersecção, respectivamente entre o valor da intersecção da equação 5.3 e o da equação 5.4. Quando a razão de frequências tende ao infinito, a transmissibilidade do sistema S-1 converge para (ver seção B.4 do Apêndice B):

$$T = \frac{\mu}{\mu + 1} \quad (5.5)$$

5.1.2 Comparação entre o sistema S-2 e o sistema massa-mola

Para realizar a comparação entre o sistema S-2 e o sistema massa-mola, o amortecimento foi retirado do sistema S-2 ($\xi = 0$). O valor da razão de massas utilizado foi $\mu = 0.1$. A figura 5.2 mostra as intersecções entre as curvas (pontos vermelhos indicados), indica os picos e o zero do sistema S-2 e mostra o valor para o qual a transmissibilidade converge quando a razão de frequências tende ao infinito. Os subíndices *esq* e *dir* indicam se os picos e intersecções são, respectivamente, à esquerda da região de ressonância, ou à direita.

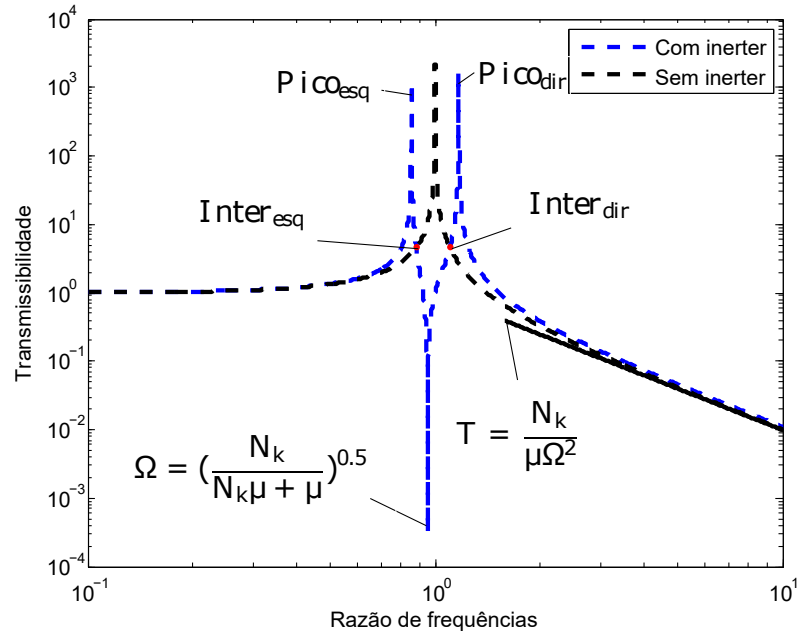


Figura 5.2: Comparação entre os sistemas S-2 e massa-mola

O valor da razão de frequência de pico esquerdo indicado é (ver seção B.1 do Apêndice B):

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{N_k^2 \mu^2 + 2 N_k \mu^2 + \mu^2 + 2 N_k^2 \mu - 2 N_k \mu + N_k^2}}{\mu} + \frac{N_k}{\mu} + N_k + 1}}{\sqrt{2}} \quad (5.6)$$

O valor da razão de frequência de pico direito indicado é (ver seção B.1 do Apêndice B):

$$\Omega = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{N_k^2 \mu^2 + 2 N_k \mu^2 + \mu^2 + 2 N_k^2 \mu - 2 N_k \mu + N_k^2}}{\mu} + \frac{N_k}{\mu} + N_k + 1}}{\sqrt{2}} \quad (5.7)$$

O valor da razão de frequência do zero indicado é (ver seção B.2 do Apêndice B):

$$\Omega = \sqrt{\frac{N_k}{N_k \mu + \mu}} \quad (5.8)$$

O valor da razão de frequência de intersecção esquerda é (ver seção B.3 do Apêndice B):

$$\Omega = \sqrt{-\frac{\sqrt{N_k^2 \mu^2 + 2 N_k \mu^2 + \mu^2 - 2 N_k \mu + N_k^2}}{N_k \mu + 2 \mu} + \frac{N_k \mu}{N_k \mu + 2 \mu} + \frac{\mu}{N_k \mu + 2 \mu} + \frac{N_k}{N_k \mu + 2 \mu}} \quad (5.9)$$

O valor da razão de frequência de intersecção direita é (ver seção B.3 do Apêndice B):

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{N_k^2 \mu^2 + 2 N_k \mu^2 + \mu^2 - 2 N_k \mu + N_k^2}}{N_k \mu + 2 \mu} + \frac{N_k \mu}{N_k \mu + 2 \mu} + \frac{\mu}{N_k \mu + 2 \mu} + \frac{N_k}{N_k \mu + 2 \mu}} \quad (5.10)$$

Portanto, a banda de frequência do isolamento está entre as frequências de intersecção, respectivamente entre o valor da intersecção da equação 5.9 e o da equação 5.10. Finalmente, quando a razão de frequências tende ao infinito, a transmissibilidade do sistema S-2 converge para (ver seção B.4 do Apêndice B):

$$T = \frac{\mu}{\mu + 1} \quad (5.11)$$

5.1.3 Comparação entre o sistema S-3 e o sistema massa-mola

Nesta seção é realizada a comparação entre o sistema S-3 e o sistema massa-mola. O valor da razão de massas utilizado foi $\mu = 0.1$. O valor do fator de amortecimento utilizado foi $\xi = 0.1$. Como o sistema S-3 difere dos dois primeiros por acrescentar um amortecedor secundário, o fator de amortecimento deve ser considerado. A figura 5.3 mostra as intersecções entre as curvas (pontos vermelhos indicados), indica o pico (também indicado por um ponto vermelho) e mostra o valor para o qual a transmissibilidade converge quando a razão de frequências tende ao infinito. Esse sistema não possui zero devido ao amortecimento.

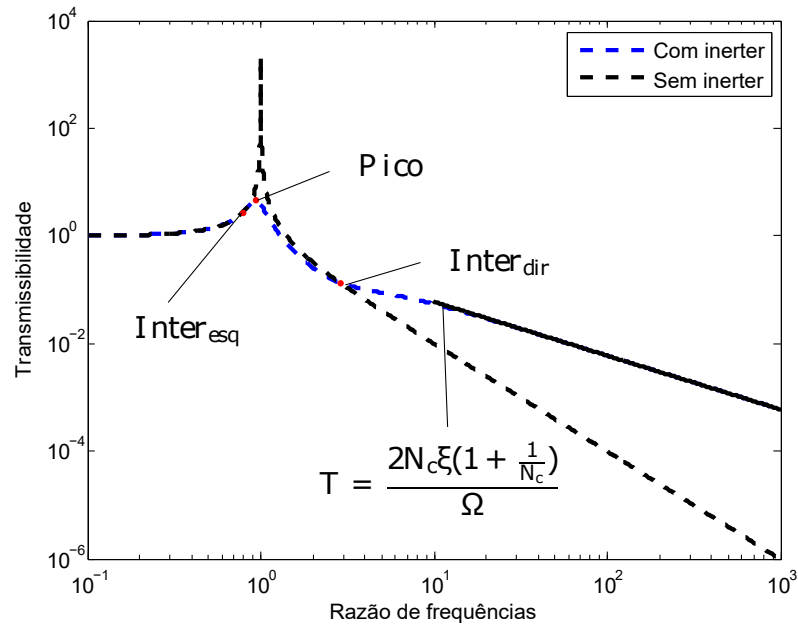


Figura 5.3: Comparação entre os sistemas S-3 e massa-mola

O valor da razão de frequências de pico indicado é uma expressão muito grande para ser colocada no texto, mas pode ser obtido por meio de um software de sistema de álgebra computadorizado (CAS - Computer Algebra System), de acordo com o procedimento apresentado no Apêndice B, (seção B.1). Similarmente, os valores das intersecções também podem ser encontrados utilizando um software CAS e o procedimento apresentado no Apêndice B (seção B.3). Em particular, a banda de frequência do isolamento está entre as frequências de intersecção. Finalmente, quando a razão de frequências tende ao infinito, a transmissibilidade do sistema S-3 converge para:

$$T = \frac{2N_c\xi \left(1 + \frac{1}{N_c}\right)}{\Omega} \quad (5.12)$$

5.1.4 Comparação entre o sistema S-4 e o sistema massa-mola

Nesta seção é realizada a comparação entre o sistema S-4 e o sistema massa-mola. O valor da razão de massas utilizado foi $\mu = 0.1$. O valor do fator de amortecimento utilizado foi $\xi = 0.1$. Como o sistema S-4 difere dos dois primeiros por acrescentar um amortecedor secundário, além da mola secundária, o fator de amortecimento deve ser considerado. A figura 5.4 mostra o valor para o qual a transmissibilidade converge quando a razão de frequências tende ao infinito. Esse sistema não possui zero devido ao amortecimento. Os valores do ponto de pico e das intersecções possuem expressões muito grandes e, portanto, deve-se obtê-los em software CAS utilizando os respectivos procedimentos localizados no Apêndice B. O valor para o qual a transmissibilidade converge é o mesmo que para o sistema S-3.

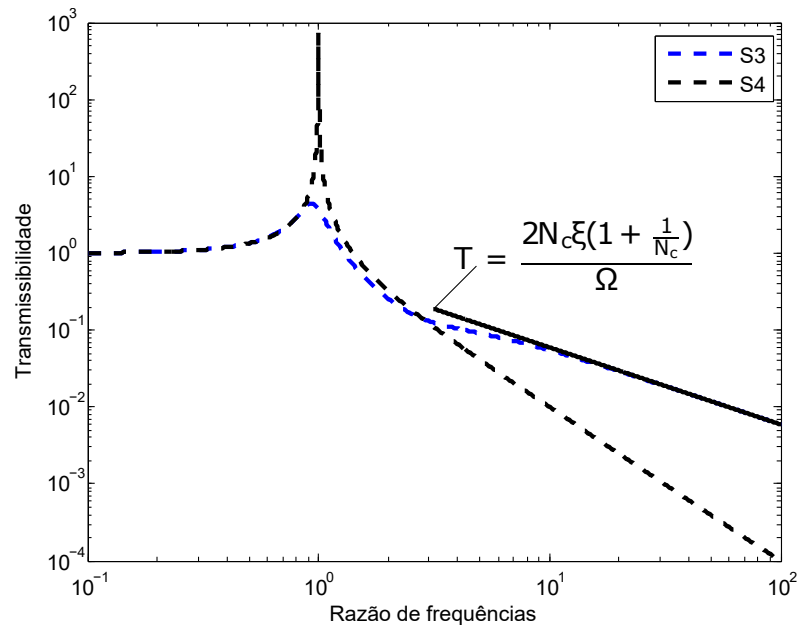


Figura 5.4: Comparação entre os sistemas S-4 e massa-mola

5.2 Comparação e discussão de sistemas com *inert*

A primeira comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$ (sistemas subamortecidos).

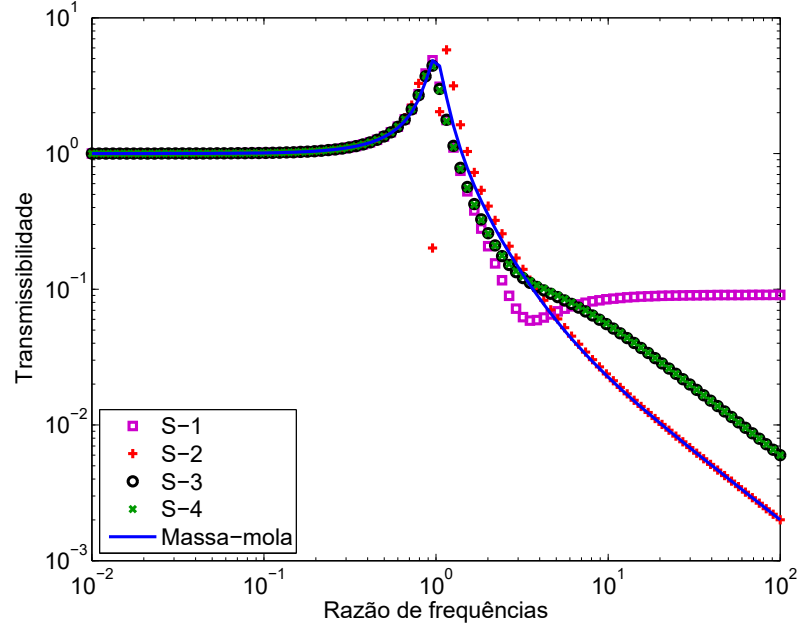


Figura 5.5: Comparação entre os sistemas com *inert* para $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$

Ao observar a figura 5.5, nota-se que o sistema S-1 possui a faixa de isolamento mais ampla se comparado aos demais sistemas, até um certo valor de razão de frequências em que se torna um isolador pior que o sistema massa-mola. O sistema S-2 possui um efeito anti-ressonante e melhor isolamento na alta frequência se comparado aos outros sistemas com *inert*, mas possui dois picos de transmissibilidade ao invés de um, sendo sua única vantagem o efeito anti-ressonante se comparado ao sistema massa-mola. O sistema S-3 e o sistema S-4 possuem praticamente o mesmo comportamento, pela razão explicada ao final da seção 3.3.4. Ambos possuem uma boa faixa de isolamento se comparado ao sistema massa-mola, na região de ressonância, mas perdem eficiência após uma certa razão de frequências. No entanto, para frequências mais altas, ainda são melhores isoladores do que o sistema S-1.

A segunda comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 0.1$ e $\xi = 1$ (sistemas criticamente amortecidos).

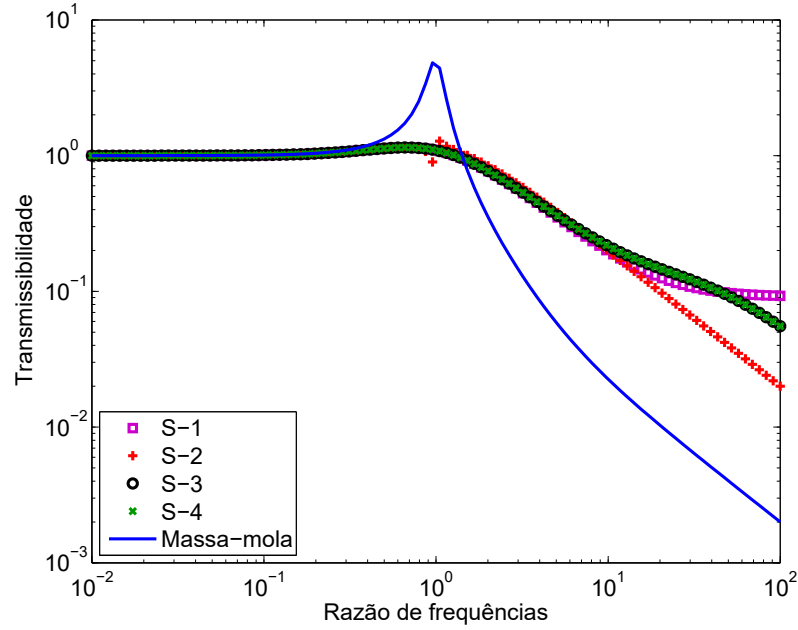


Figura 5.6: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 0.1$ e $\xi = 1$

Ao observar a figura 5.6, nota-se que o aumento do amortecimento retira grande parte do efeito que o *inertor* tem no sistema. Com este valor de razão de massas, as curvas dos sistemas S-1, S-2, S-3 e S-4 tiveram um comportamento praticamente convergente na alta frequência.

A terceira comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 0.1$ e $\xi = 1.5$ (sistemas superamortecidos).

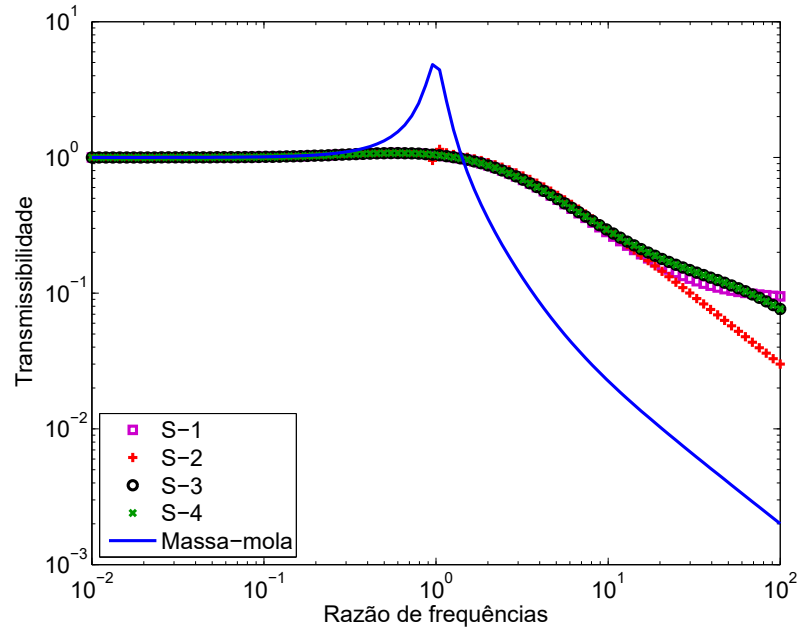


Figura 5.7: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 0.1$ e $\xi = 1.5$

Observa-se mais acentuadamente na figura 5.7 o que ocorreu na figura 5.6. Ainda, a quarta comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 1$ e $\xi = 0.1$ (sistemas

subamortecidos).

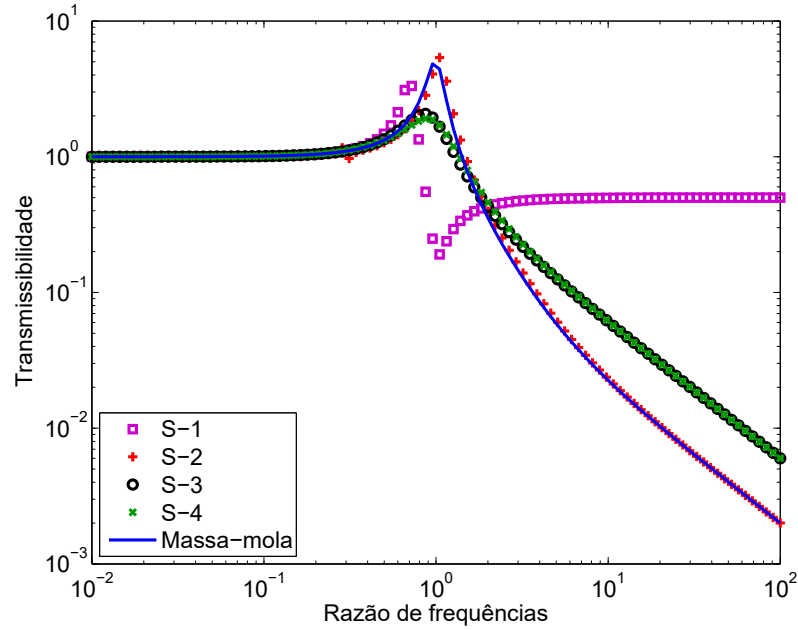


Figura 5.8: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 1$ e $\xi = 0.1$

Ao observar a figura 5.8 nota-se o mesmo que para a figura 5.5. Além disso, o sistema S-1 passa a ter, para este valor de razão de massas, um efeito anti-ressonante. Entretanto, antes da região de ressonância, há degradação do isolamento. O sistema S-2, para este valor de razão de massas, possui um pico muito pequeno e uma faixa de pouco isolamento também muito pequena antes da região de ressonância do sistema massa-mola, embora apresente como benefícios pico menor na região de ressonância se comparado ao sistema massa-mola e melhor isolamento que os outros sistemas com *inertor* para frequências mais altas. O sistema S-3 e o sistema S-4, no entanto, possuem bom isolamento na região de ressonância, não tanto quanto o sistema S-1, mas não possuem pico algum antes dessa região. Além disso, em altas frequências apresentam melhor isolamento que o sistema S-1. Todos os sistemas com *inertor* têm um pior isolamento nas frequências mais altas se comparados ao sistema massa-mola.

A quinta comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 1$ e $\xi = 1$ (sistemas criticamente amortecidos).

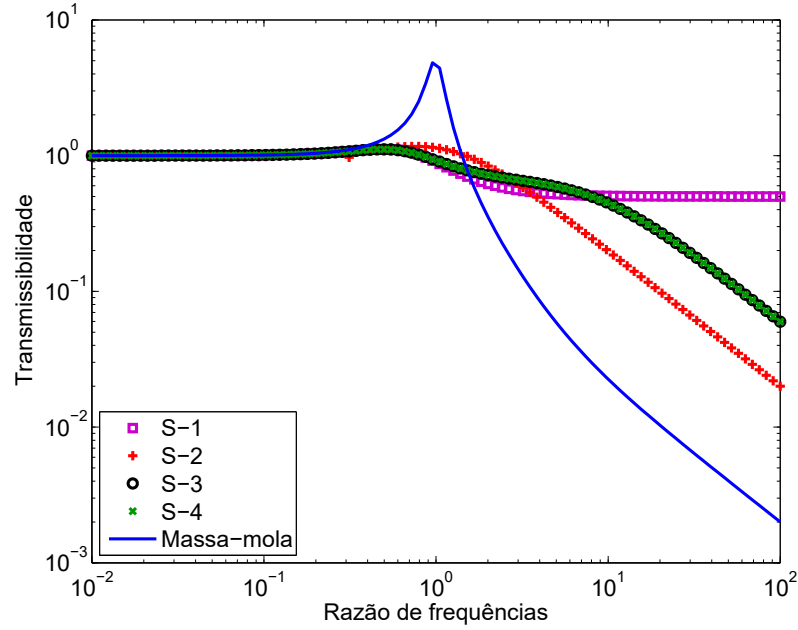


Figura 5.9: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 1$ e $\xi = 1$

Ao observar a figura 5.9, nota-se que o aumento do amortecimento retira grande parte do efeito que o *inertor* tem no sistema. Nota-se aqui que em comparação com a figura 5.6, o aumento da razão de massas ocasionou diferenças. O sistema S-2 possui melhor isolamento na alta frequência se comparado aos demais, mas não melhor do que o sistema massa-mola. Na região de ressonância, os sistemas S-1, S-3 e S-4 possuem melhor isolamento se comparados ao sistema S-2 e ao sistema massa-mola, sendo que a faixa mais ampla de isolamento é a do sistema S-1.

A sexta comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 1$ e $\xi = 1.5$ (sistemas superamortecidos).

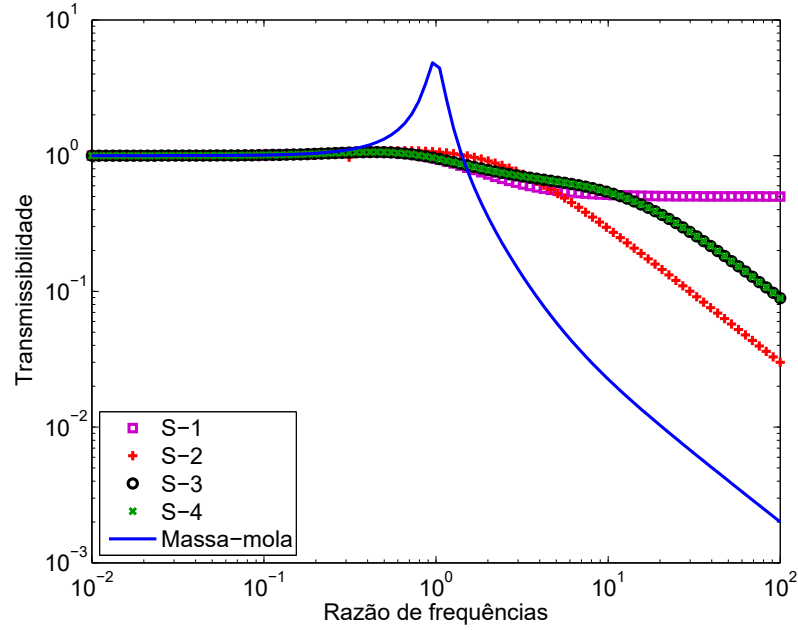


Figura 5.10: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 1$ e $\xi = 1.5$

Ao observar a figura 5.10, nota-se que o aumento do amortecimento retira grande parte do efeito que o *inertor* tem no sistema. Se comparada à figura 5.9, a diferença é que o aumento do fator de amortecimento de 1 para 1.5 retirou ainda mais o efeito que o *inertor* tem sobre os sistemas.

A sétima comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 1.5$ e $\xi = 0.1$ (sistemas subamortecidos).

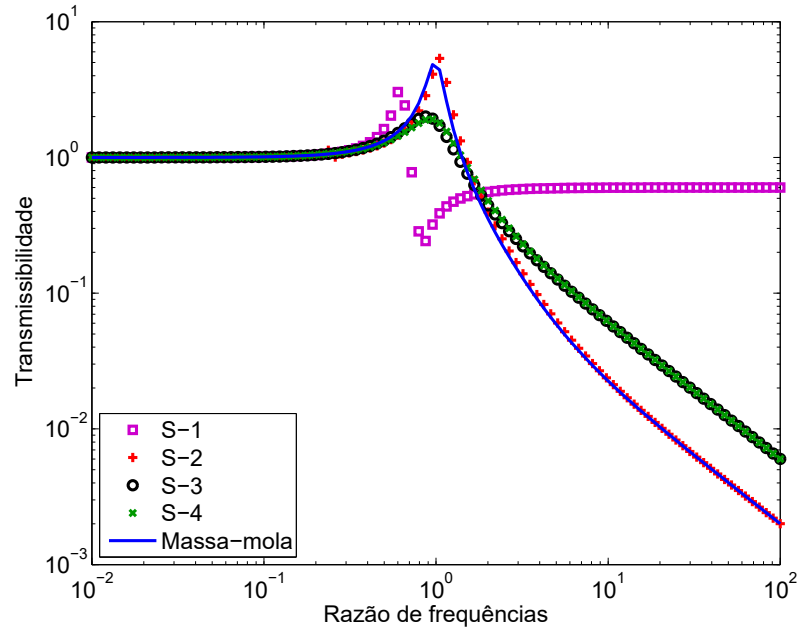


Figura 5.11: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 1.5$ e $\xi = 0.1$

Ao observar a figura 5.11, nota-se com maior nitidez o que ocorreu na figura 5.8.

A oitava comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 1.5$ e $\xi = 1$

(sistemas criticamente amortecidos).

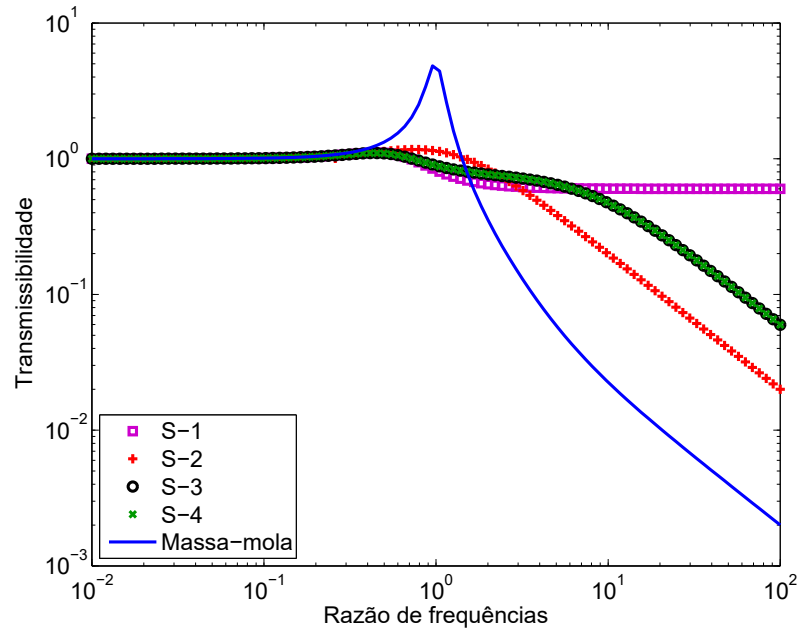


Figura 5.12: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 1.5$ e $\xi = 1$

Ao observar a figura 5.12, nota-se que ocorre o mesmo que para a figura 5.9.

A nona e última comparação entre os sistemas ocorre para valores de $\mu = 1.5$ e $\xi = 1.5$ (sistemas superamortecidos).

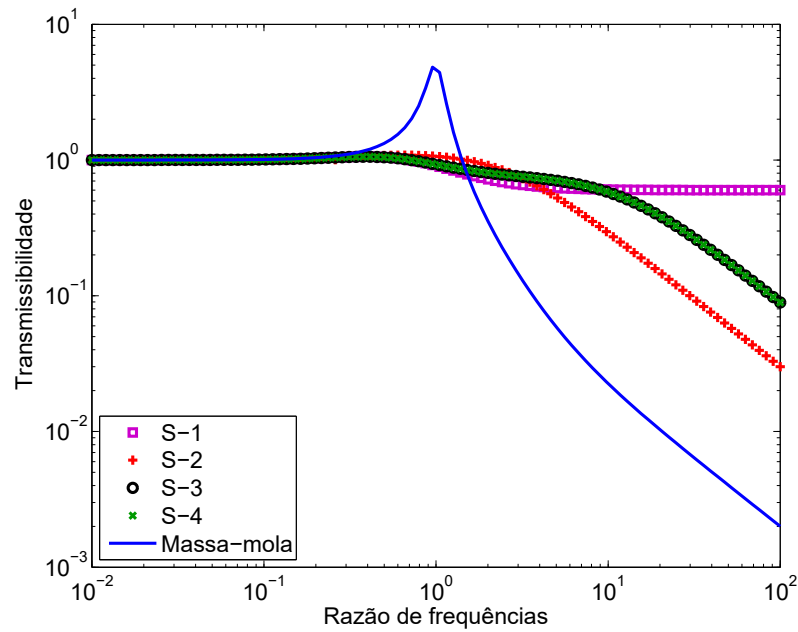


Figura 5.13: Comparação entre os sistemas com *inertor* para $\mu = 1.5$ e $\xi = 1.5$

Ao observar a figura 5.13, nota-se que ocorre o mesmo que para a figura 5.10.

5.3 Comparação e discussão de sistemas com amortecimento não linear

A primeira comparação entre os amortecedores linear, quadrático, assimétrico e não linear geométrico (NL Geométrico) ocorre para o fator de amortecimento do amortecedor linear igual a 0.1.

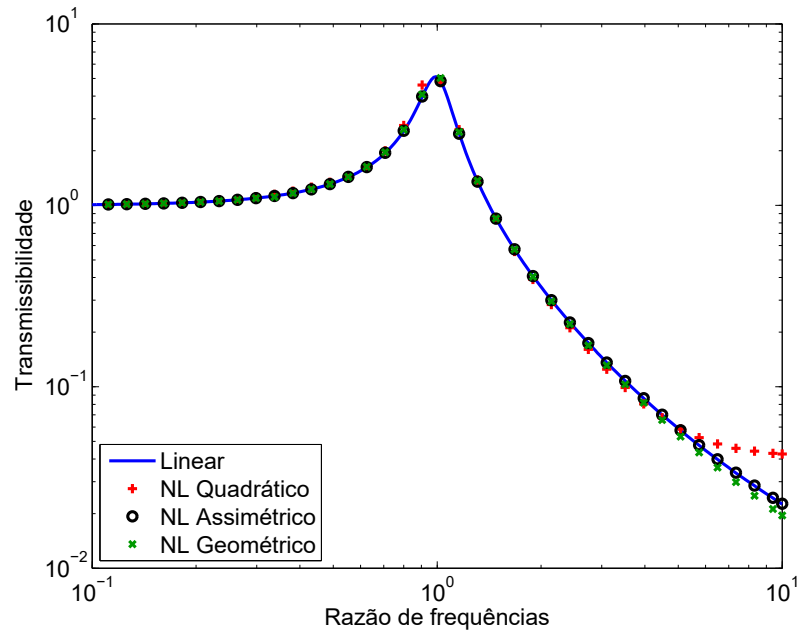


Figura 5.14: Comparação entre os sistemas com amortecimento não linear para $\xi = 0.1$ na frequência e amplitude de ressonância

Ao observar a figura 5.14, nota-se que o sistema com amortecedor assimétrico possui curva de transmissibilidade muito próxima à do sistema com amortecedor linear. Além disso, o sistema com amortecedor quadrático possui um pior isolamento que os demais sistemas em qualquer faixa de frequências. Por fim, o sistema com amortecedor geometricamente não linear possui um melhor isolamento em altas frequências, visto que tende a manter o amortecedor na horizontal para frequências mais altas, retirando seu efeito do sistema e assemelhando-se, nessa região, à um sistema massa-mola.

A segunda comparação entre os amortecedores supracitados ocorre para o fator de amortecimento do amortecedor linear igual a 1.

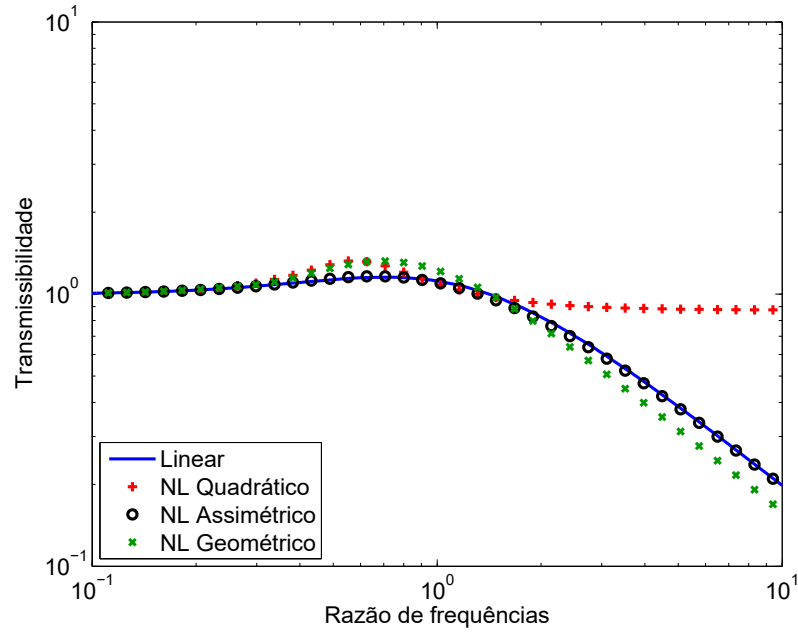


Figura 5.15: Comparação entre os sistemas com amortecimento não linear para $\xi = 1$ na frequência e amplitude de ressonância

Ao observar a figura 5.15, nota-se novamente que o sistema com amortecedor assimétrico possui curva de transmissibilidade muito próxima à do sistema com amortecedor linear. Além disso, o sistema com amortecedor quadrático possui, novamente, um pior isolamento que os demais sistemas em qualquer faixa de frequências, à exceção do amortecedor não linear geométrico, na região de ressonância. Por fim, o sistema com amortecedor geometricamente não linear possui um melhor isolamento em altas frequências, visto que tende a manter o amortecedor na horizontal para frequências mais altas, retirando seu efeito do sistema e assemelhando-se, nessa região, à um sistema massa-mola puro, mas, no entanto, possui um pior isolamento se comparado ao sistema massa-mola e ao sistema com amortecimento assimétrico na região de ressonância.

A terceira e última comparação entre os amortecedores supracitados ocorre para o fator de amortecimento do amortecedor linear igual a 1.2. Ao observar a figura 5.16, nota-se mais acentuadamente o que ocorreu na figura 5.15.

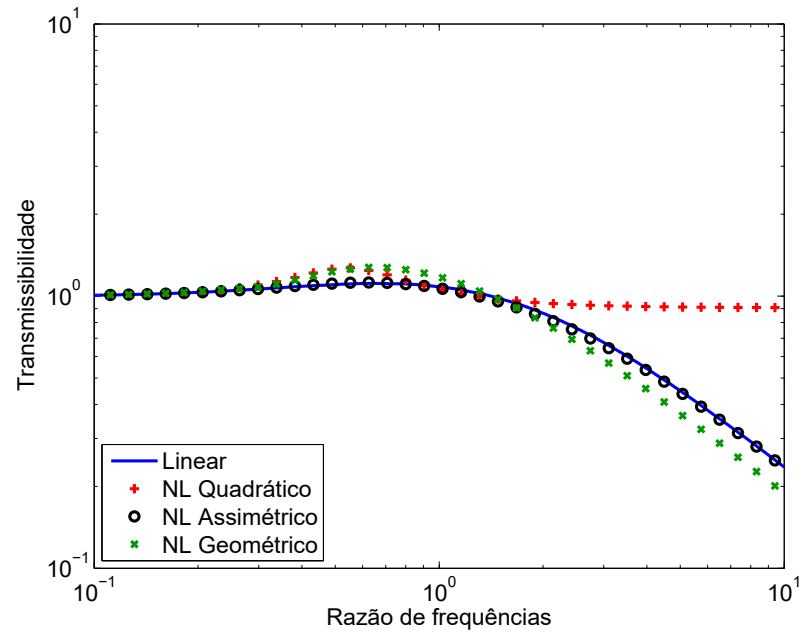


Figura 5.16: Comparação entre os sistemas com amortecimento não linear para $\xi = 1.2$ na frequência e amplitude de ressonância

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Conclusões

Essa dissertação investigou a utilização do elemento *inertor* em isoladores de vibração por meio da análise das curvas de transmissibilidade de deslocamento absoluto das configurações apresentadas no Capítulo 3 e, também, investigou o uso de elementos amortecedores não-lineares em isoladores de vibração por meio da análise das curvas de transmissibilidade de deslocamento absoluto das configurações apresentadas no Capítulo 4. No Capítulo 5 foram realizadas comparações entre os isoladores com *inertor* e o isolador massa-mola (seção 5.1), comparações entre os isoladores com *inertor* (seção 5.2) e comparações entre os isoladores com amortecimento não-linear e o com amortecimento linear (seção 5.3). As principais conclusões obtidas foram:

- Os sistemas com *inertor* foram modelados e respostas analíticas foram obtidas e apresentadas de forma gráfica, enquanto que os sistemas com amortecedores não lineares foram modelados e simulados, obtendo-se respostas numéricas que foram apresentadas de forma gráfica.
- Os sistemas com *inertor* têm seus desempenhos mais evidentes quando os isoladores estão com o menor valor de amortecimento. Assim, concluiu-se no Capítulo 3 que o efeito resultante de maior amortecimento tende a se sobrepor ao efeito positivo que o *inertor* causa ao isolamento do sistema.
- Os isoladores compostos por mola(s), amortecedor(es) e *inertor* trazem benefícios e malefícios no isolamento da vibração, como observado nos Capítulos 3 e 5 na seção 5.2. Através de modificações nas características construtivas do sistema mecânico, pode-se criar regiões de melhor isolamento para tarefas específicas, desde que conhecidas as condições de entrada como: amplitude e frequência da excitação externa (de trabalho) e inércia do elemento a ser protegido.

- O estudo realizado no apêndice A mostra que as configurações de isoladores com *inertor* modeladas neste trabalho possuem grande versatilidade em razão da adição dos parâmetros N_k e N_c . Por serem mais versáteis, esses isoladores podem ter maior quantidade de aplicações do que a suspensão convencional com um *inertor* acoplado.
- A comparação dos modelos de isolador com *inertor*, com um sistema massa-mola, na seção 5.1, permitiram a obtenção de expressões analíticas que determinam a banda de frequência em que há melhor e pior isolamento.
- As expressões analíticas obtidas permitiram verificar a convergência das curvas de transmissibilidade, as frequências dos zeros e as frequências dos picos de cada sistema.
- Os isoladores compostos por mola e amortecedores não lineares podem trazer benefícios e malefícios no isolamento da vibração. O sistema com amortecimento quadrático só traz benefício para velocidades relativas maiores, que ocorrem para frequências na região de ressonância, e somente é observado quando se investiga os históricos de deslocamento no tempo, pois o tempo para atingir o regime permanente é mais curto já que a força do amortecedor torna-se quadraticamente mais alta do que a de um amortecedor linear. Em termos de isolamento, o amortecedor quadrático não demonstra ser melhor do que um amortecedor linear pois a rigidez dinâmica que o amortecedor acrescenta ao sistema faz com que o isolamento seja pior, principalmente para frequências mais altas. O sistema com amortecimento assimétrico, por outro lado, possui curva de transmissibilidade muito próxima à do sistema com amortecimento linear, para o valor de β , sendo que seu maior benefício ocorre, segundo a literatura, sob excitação ao choque. O sistema com amortecimento geometricamente não linear, por sua vez, possui um isolamento um pouco pior do que o sistema com amortecimento linear na ressonância, mas compensa na alta frequência, quando o isolador tende a findar a atuação do amortecedor e assim o sistema consegue um isolamento em alta frequência equivalente ao isolamento de um sistema massa-mola sem amortecimento, isto é, retira parte da rigidez dinâmica do sistema para frequências mais altas.
- Todas as expressões foram obtidas utilizando parâmetros adimensionais, o que permite que tanto elas, quanto os resultados, sejam generalizados para qualquer sistema que possa ser modelado da mesma maneira.

6.2 Trabalhos realizados

Alguns trabalhos foram realizados durante a realização dessa pesquisa:

- Trabalho aceito e apresentado ao ICSV 2015 (International Congress on Sound and Vibration), realizado em Florença, Itália. O trabalho intitulado “VIBRATION TRANSMISSIBILITY IN SYSTEMS WITH NONLINEAR DAMPERS” utiliza parte dos resultados obtidos para os amortecedores não lineares, sob excitação harmônica, e também faz comparações entre os sistemas sob excitação ao choque, onde é mostrado que o amortecedor assimétrico traz benefício no isolamento ao choque.
- Trabalho aceito e apresentado ao COBEM 2015, realizado no Rio de Janeiro, Brasil. O trabalho intitulado “VIBRATION DISPLACEMENT TRANSMISSIBILITY AND SHOCK DISPLACEMENT RATIO IN SYSTEMS WITH *INERTER*” resume os resultados obtidos nessa qualificação para os sistemas com *inserter* e também apresenta os resultados obtidos para excitação ao choque. Neste trabalho é mostrado que o *inserter* também traz benefício no isolamento ao choque.
- Projeto de cooperação com a EMBRAER, intitulado "Avaliação de Sistemas com Amortecimento Não-Linear".

6.3 Trabalhos futuros

Sugestões para trabalhos futuros:

- Avaliar o uso de suspensões com *inertor*, amortecedores e molas não lineares. Por exemplo, combinar o *inertor* com o amortecedor não linear assimétrico poderia trazer maiores benefícios à uma determinada faixa de fatores de severidade quando considerando excitação ao choque. Combinar os dois elementos supracitados com uma mola Duffing poderia trazer maior realidade ao sistema.
- Avaliar o uso de suspensões com *inertor* não linear. Pode-se acoplar o *inertor* em ângulo de forma a adicionar inertância geometricamente não linear ao sistema, na esperança de remover o efeito negativo do *inertor* em altas frequências, mas ainda assim aproveitando seu efeito positivo na região de ressonância.
- Realizar estudos mais amplos das variações dos parâmetros N_k e N_c de forma a se otimizar as curvas de transmissibilidade nos sistemas com *inertor* para se obter melhor isolamento.
- Estudar suspensões eletromecânicas com *inertor* para isolar o sistema, obtendo-se conforto, e para coletar energia.

Referências Bibliográficas

CARRELLA, A.; BRENNAN, M.; WATERS, T.; LOPES, V. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 55, n. 1, p. 22–29, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.11.012>>.

CHEN, M. Z.; HU, Y.; HUANG, L.; CHEN, G. Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 7, p. 1874–1887, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.025>>.

CHEN, M. Z.; PAPAGEORGIOU, C.; SCHEIBE, F.; WANG, F.-C.; SMITH, M. C. The missing mechanical circuit element. *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, IEEE, v. 9, n. 1, p. 10–26, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/MCAS.2008.931738>>.

DIXON, J. *The shock absorber handbook*. John Wiley & Sons, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/9780470516430>>.

DYLEJKO, P. G.; MACGILLIVRAY, I. R. On the concept of a transmission absorber to suppress internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 10, p. 2719–2734, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.037>>.

FLANNELLY, W. G. The dynamic antiresonant vibration isolator. In: *AMERICAN HELICOPTER SOCIETY, ANNUAL NATIONAL FORUM, 22 ND, WASHINGTON, D. C.* [S.l.: s.n.], 1966. p. 152–160.

FLANNELLY, W. G. A nonfluid velocity damper. *The Shock and Vibration Bulletin*, Office of the Director of Defense Research and Engineering., n. 38, p. 111, 1968.

HARRIS, C.; PIERSOL, A. *Harris' shock and vibration handbook*. 6. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Professional, 2010.

HU, Y.; CHEN, M. Z. Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 99, p. 297–307, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.06.003>>.

HU, Y.; CHEN, M. Z.; SHU, Z. Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 8, p. 2212–2225, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.016>>.

HU, Y.; CHEN, M. Z.; SHU, Z.; HUANG, L. Vibration analysis for isolation system with inerter. In: *IEEE. Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese*. [S.l.], 2014. p. 6687–6692.

- IBRAHIM, R. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 314, n. 3, p. 371–452, 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.014>.
- JIANG, J. Z.; MATAMOROS-SANCHEZ, A. Z.; GOODALL, R. M.; SMITH, M. C. Passive suspensions incorporating inerters for railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 50, n. sup1, p. 263–276, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/00423114.2012.665166>.
- LÓPEZ, J. C. C. Comparison between the performances of a linear isolator and an isolator with a geometrically nonlinear damper. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.
- PAPAGEORGIOU, C.; HOUGHTON, N. E.; SMITH, M. C. Experimental testing and analysis of inerter devices. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, ASME International, v. 131, n. 1, p. 011001, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3023120>.
- RIVIN, E. I. *Passive vibration isolation*. Asme press New York, 2003. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1115/1.80187X>.
- RUZICKA, J. E.; DERBY, T. F. *Influence of damping in vibration isolation*. [S.l.], 1971.
- SILVEIRA, M.; PONTES JUNIOR, B.; BALTHAZAR, J. Use of nonlinear asymmetrical shock absorber to improve comfort on passenger vehicles. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 7, p. 2114–2129, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2013.12.001>.
- SILVEIRA, M.; WAHI, P.; FERNANDES, J. Effects of asymmetrical damping on a 2 dof quarter-car model under harmonic excitation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 43, p. 14–24, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.06.029>.
- SMITH, M. Synthesis of mechanical networks: the inerter. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 10, p. 1648–1662, Oct 2002. ISSN 0018-9286. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2002.803532>.
- SMITH, M. C.; WANG, F.-C. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 42, n. 4, p. 235–257, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/00423110412331289871>.
- TANG, B.; BRENNAN, M. A comparison of two nonlinear damping mechanisms in a vibration isolator. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 332, n. 3, p. 510–520, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2012.09.010>.
- WANG, F.-C.; CHEN, C.-W.; LIAO, M.-K.; HONG, M.-F. Performance analyses of building suspension control with inerters. In: IEEE. *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*. 2007. p. 3786–3791. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/CDC.2007.4434186>.
- WANG, F.-C.; HONG, M.-F.; LIN, T.-C. Designing and testing a hydraulic inerter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, SAGE Publications, v. 225, n. 1, p. 66–72, 2011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1243/09544062JMES2199>.

WANG, F.-C.; SU, W.-J. Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control. *Vehicle System Dynamics*, Taylor & Francis, v. 46, n. 7, p. 575–595, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00423110701519031>>.

YAN, Y.; CHENG, L.; WU, Z.; YAM, L. Development in vibration-based structural damage detection technique. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 21, n. 5, p. 2198–2211, 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2006.10.002>>.

YILMAZ, C.; KIKUCHI, N. Analysis and design of passive band-stop filter-type vibration isolators for low-frequency applications. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 291, n. 3, p. 1004–1028, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.07.019>>.

ZHANG, Y.; HU, Y. The realization of inerter for suspension of heavy truck. In: IEEE. *Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese*. 2014. p. 6273–6278. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/ChiCC.2014.6896019>>.

ZHANG, Z.; CHEN, M. Z.; HUANG, L. Frequency response of a suspension system with inerter and play. In: BEIJING. *The 21th International Congress of Sound and Vibration*. [S.l.], 2014. p. 8pp–8pp.

Apêndice A

Modelagem

A.1 Modelagem do sistema de comparação

O sistema mecânico composto por uma massa m , uma mola de rigidez k e um amortecedor de coeficiente de amortecimento c , apresentado na figura 3.1 é desenvolvido analiticamente para fins de comparação com os outros sistemas subsequentes.

A.1.1 Resposta em frequência: Mecânica Newtoniana e Transformada de Laplace

De acordo com a segunda Lei de Newton, o balanço de forças é definido em termos do grau de liberdade x , do deslocamento da base x_0 . As respectivas derivadas no tempo serão denotadas, de agora em diante, por pontos.

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (\text{A.1})$$

Por simplicidade, a partir daqui, a dependência do tempo nessa equação é omitida. A equação A.1 pode ser rearranjada por conveniência.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_0 + kx_0 \quad (\text{A.2})$$

Quando o sistema está sob excitação harmônica, a sua resposta em frequência pode ser obtida facilmente trabalhando-se a equação A.2. Primeiramente aplica-se a transformada de Laplace na equação A.2, resultando em:

$$[ms^2 + cs + k]X = [cs + k]X_0 \quad (\text{A.3})$$

E assim, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \quad (\text{A.4})$$

As equações A.3 e A.4 estão no domínio do Laplace, e não mais no domínio do tempo. Para que elas sejam passadas ao domínio da frequência, basta assumir $s = j\omega$. Aplicando isso para a equação A.4, e suprimindo a dependência de ω obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{j\omega c + k}{-\omega^2 m + j\omega c + k} \quad (\text{A.5})$$

Dividindo-se tanto o denominador quanto o numerador da equação A.5 por k , e substituindo $c = 2\xi m\omega_n$, obtém-se:

$$T_d = \frac{X}{X_0} = \frac{2j\Omega\xi + 1}{-\Omega^2 + 2j\Omega\xi + 1} \quad (\text{A.6})$$

Sendo que $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$.

A equação A.6 representa a função transferência do sistema da figura 3.1 com parâmetros adimensionais. A transmissibilidade de deslocamento absoluto do sistema é representada pelo módulo da função complexa da equação A.6:

$$|T_d| = \left| \frac{X}{X_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Resposta em frequência: Método da Impedância

O Método da Impedância atribui uma impedância à cada elemento do sistema mecânico. Segundo Harris e Piersol (2010), para molas, a impedância é $Z_k = -\frac{jk}{\omega}$, para amortecedores, a impedância é $Z_c = c$, para massas, a impedância é $Z_m = j\omega m$. Para *inerters* então, a impedância é $Z_b = j\omega b$. A impedância de cada elemento deve multiplicar a velocidade relativa entre os seus terminais. Como deseja-se obter a relação de deslocamentos, pode-se utilizar do método da Impedância para determinar que, no domínio da frequência, a velocidade relativa é: $V = j\omega(X - X_0)$. Outra forma de se obter a relação desejada é simplesmente equacionando as rigidezes dinâmicas de cada elemento. Como em um nó de forças a soma das impedâncias deve ser zero, tem-se:

$$-\omega^2 m X + j\omega c(X - X_0) + k(X - X_0) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Logo:

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k) X = (j\omega c + k) X_0 \quad (\text{A.9})$$

Finalmente:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{j\omega c + k}{-\omega^2 m + j\omega c + k} \quad (\text{A.10})$$

A equação A.10 é idêntica à equação A.5. A partir daqui, o procedimento seria a

adimensionalização dos parâmetros dimensionais e obtenção do valor absoluto da função transferência (transmissibilidade de deslocamento absoluto), já efetuados na seção anterior.

A.2 Sistemas mecânicos com *inert*

Com o intuito de apresentar os efeitos que o uso de um *inert* em determinados sistemas mecânicos pode ocasionar, alguns modelos de sistemas mecânicos foram analiticamente desenvolvidos.

A.2.1 Sistema massa-mola-amortecedor-*inert*

O primeiro sistema mecânico analiticamente desenvolvido, em que um *inert* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor-*inert* como mostrado na figura 3.4. A inertância do elemento adicionado é denotada por b .

Resposta em frequência: Mecânica Newtoniana e Transformada de Laplace

De acordo com a Segunda Lei de Newton, o somatório de forças é definido em termos do grau de liberdade x e do deslocamento da base x_0 , bem como as respectivas derivadas em relação ao tempo.

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_0) - b(\ddot{x} - \ddot{x}_0) \quad (\text{A.11})$$

A equação A.11 pode ser rearranjada por conveniência.

$$(m + b)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 \quad (\text{A.12})$$

Quando o sistema está sob excitação harmônica, a sua resposta em frequência pode ser obtida facilmente trabalhando-se a equação A.12. Primeiramente aplica-se a transformada de Laplace na equação A.12, resultando em:

$$[(m + b)s^2 + cs + k]X = [bs^2 + cs + k]X_0 \quad (\text{A.13})$$

E assim, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{bs^2 + cs + k}{(m + b)s^2 + cs + k} \quad (\text{A.14})$$

As equações A.13 e A.14 estão no domínio do Laplace, e não mais no domínio do tempo. Para que elas sejam passadas ao domínio da frequência, basta assumir $s = j\omega$. Aplicando isso para a equação A.14 obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\omega^2 b + j\omega c + k}{-\omega^2(m+b) + j\omega c + k} \quad (\text{A.15})$$

A equação A.15 pode ter seus parâmetros adimensionalizados, ficando em termos do fator de amortecimento ξ , da razão de massas μ e da razão de frequências Ω . Como $\mu = \frac{b}{m}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_b = \sqrt{\frac{k}{b}}$, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ e $\Omega_b = \frac{\omega}{\omega_b}$. Pode-se obter a seguinte relação para as razões de frequência Ω e Ω_b :

$$\Omega_b^2 = \Omega^2 \mu \quad (\text{A.16})$$

Dividindo-se tanto o denominador quanto o numerador da equação A.15 por k , substituindo $c = 2\xi m\omega_n$, e considerando as demais expressões anteriores, obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\Omega^2 \mu + 2j\Omega\xi + 1}{-\Omega^2(1+\mu) + 2j\Omega\xi + 1} \quad (\text{A.17})$$

A equação A.17 representa a função transferência do sistema da figura 3.4 com parâmetros adimensionais. A transmissibilidade de deslocamento do sistema é representada pelo módulo da função complexa da equação A.17:

$$|T_d| = \sqrt{\frac{(1 - \mu\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - (1+\mu)\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (\text{A.18})$$

Resposta em frequência: Método da Impedância

O Método da Impedância é aplicado aqui novamente, para o sistema com *inertor*, baseado nas definições da seção A.1.2.

A soma das impedâncias é:

$$-\omega^2 mX - \omega^2 b(X - X_0) + j\omega c(X - X_0) + k(X - X_0) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Logo:

$$\left(-\omega^2(m+b) + j\omega c + k\right) X = \left(-\omega^2 b + j\omega c + k\right) X_0 \quad (\text{A.20})$$

Finalmente:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\omega^2 b + j\omega c + k}{-\omega^2(m+b) + j\omega c + k} \quad (\text{A.21})$$

A equação A.21 é idêntica à equação A.15. A partir daqui, o procedimento seria a adimensionalização dos parâmetros dimensionais e obtenção do valor absoluto da função transferência (transmissibilidade de deslocamento absoluto), já efetuados na seção anterior.

A.2.2 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* elasticamente acoplado

O segundo sistema mecânico desenvolvido analiticamente, em que um *inertor* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor com um *inertor* em série com uma segunda mola de rigidez $N_k k$, sendo N_k uma constante, como mostrado na figura 3.9.

Resposta em frequência: Mecânica Newtoniana e Transformada de Laplace

Realizando os balanços de forças que são definidos em termos dos graus de liberdade x e x_1 e do deslocamento da base x_0 , além das respectivas derivadas em relação ao tempo obtém-se:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_0) - b(\ddot{x} - \ddot{x}_1) \quad (\text{A.22})$$

$$b(\ddot{x} - \ddot{x}_1) = N_k k(x_1 - x_0) \quad (\text{A.23})$$

O grau de liberdade de interesse é aquele relacionado ao deslocamento da massa. Manipulações podem ser feitas com as equações A.22 e A.23 de forma a se obter apenas uma equação diferencial ordinária que rege o movimento dessa massa. Basta substituir a equação A.23 na equação A.22 e isolar x_1 para obter o comportamento do grau de liberdade x_1 em função dos parâmetros do sistema, do grau de liberdade da massa x e do deslocamento da base x_0 :

$$x_1 = \frac{-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + c\dot{x}_0 + kx_0 + N_k kx_0}{N_k k} \quad (\text{A.24})$$

Derivando a equação A.24 em relação ao tempo uma vez:

$$\dot{x}_1 = \frac{-m\ddot{x} - c\ddot{x} - k\dot{x} + c\ddot{x}_0 + k\dot{x}_0 + N_k k\dot{x}_0}{N_k k} \quad (\text{A.25})$$

Derivando a equação A.25 em relação ao tempo uma vez ou a equação A.24 em relação ao tempo duas vezes:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-m\ddot{x} - c\ddot{x} - k\ddot{x} + c\ddot{x}_0 + k\ddot{x}_0 + N_k k\ddot{x}_0}{N_k k} \quad (\text{A.26})$$

A equação A.26 pode ser substituída na equação A.22, obtendo-se assim a equação

diferencial ordinária para a massa da figura 3.9, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{mb}{N_k k} \ddot{\ddot{x}} + \frac{cb}{N_k k} \ddot{\ddot{x}} + \left(m + b + \frac{b}{N_k}\right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = \\ = \frac{cb}{N_k k} \ddot{\ddot{x}}_0 + \left(b + \frac{b}{N_k}\right) \ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

Nota-se na equação A.27 o aparecimento das derivadas de terceira e quarta ordem do deslocamento com relação ao tempo, $\ddot{\ddot{x}}$ e $\ddot{\ddot{x}}$. Essas derivadas podem ser interpretadas fisicamente como sendo, respectivamente, a taxa de variação da aceleração no tempo e a taxa de variação da taxa de variação da aceleração no tempo, isto é, a velocidade com que a aceleração da massa está mudando e a aceleração com que a aceleração da massa está mudando.

Quando o sistema está sob excitação harmônica, a sua resposta em frequência pode ser obtida facilmente trabalhando-se a equação A.27. Primeiramente aplica-se a transformada de Laplace na equação A.27, resultando em:

$$\begin{aligned} \left[\frac{mb}{N_k k} s^4 + \frac{cb}{N_k k} s^3 + \left(m + b + \frac{b}{N_k}\right) s^2 + cs + k \right] X = \\ = \left[\frac{cb}{N_k k} s^3 + \left(b + \frac{b}{N_k}\right) s^2 + cs + k \right] X_0 \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

E assim, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{\frac{cb}{N_k k} s^3 + \left(b + \frac{b}{N_k}\right) s^2 + cs + k}{\frac{mb}{N_k k} s^4 + \frac{cb}{N_k k} s^3 + \left(m + b + \frac{b}{N_k}\right) s^2 + cs + k} \quad (\text{A.29})$$

As equações A.28 e A.29 estão no domínio do Laplace, e não mais no domínio do tempo. Para que elas sejam passadas ao domínio da frequência, basta assumir $s = j\omega$. Aplicando isso para a equação A.29, e suprimindo a dependência de ω obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-j\omega^3 \frac{cb}{N_k k} - \omega^2 \left(b + \frac{b}{N_k}\right) + j\omega c + k}{\omega^4 \frac{mb}{N_k k} - j\omega^3 \frac{cb}{N_k k} - \omega^2 \left(m + b + \frac{b}{N_k}\right) + j\omega c + k} \quad (\text{A.30})$$

A equação A.30 pode ser adimensionalizada, ficando em termos da constante N_k , do fator de amortecimento ξ , da razão de massas μ e da razão de frequências Ω . Valendo-se das mesmas considerações feitas para as equações A.15 e A.17, obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-2j\Omega^3\mu\frac{\xi}{N_k} - \Omega^2\mu\left(1 + \frac{1}{N_k}\right) + 2j\Omega\xi + 1}{\Omega^4\mu\frac{1}{N_k} - 2j\Omega^3\mu\frac{\xi}{N_k} - \Omega^2 - \Omega^2\mu\left(1 + \frac{1}{N_k}\right) + 2j\Omega\xi + 1} \quad (\text{A.31})$$

A equação A.31 representa a função transferência do sistema da figura 3.9 com parâmetros adimensionalizados. A transmissibilidade de deslocamento do sistema é representada pelo módulo da função complexa da equação A.31:

$$|T_d| = \sqrt{\frac{\left(1 - \Omega^2\mu\left(1 + \frac{1}{N_k}\right)\right)^2 + \left(-2\Omega^3\mu\frac{\xi}{N_k} + 2\Omega\xi\right)^2}{\left(1 + \Omega^4\mu\frac{1}{N_k} - \Omega^2 - \Omega^2\mu\left(1 + \frac{1}{N_k}\right)\right)^2 + \left(-2\Omega^3\mu\frac{\xi}{N_k} + 2\Omega\xi\right)^2}} \quad (\text{A.32})$$

Resposta em frequência: Método da Impedância

O Método da Impedância é aplicado aqui novamente, para o sistema com *inertor* e mola secundária, baseado nas definições da seção A.1.2. O elemento composto por *inertor* e mola secundária do sistema possui impedâncias em série. Para se obter a impedância equivalente Z_0 , basta fazer:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_k} \quad (\text{A.33})$$

Portanto:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{-\omega^2 b} + \frac{1}{N_k k} \quad (\text{A.34})$$

Obtém-se então:

$$Z_0 = -\frac{\omega^2 b N_k k}{N_k k - \omega^2 b} \quad (\text{A.35})$$

A soma das impedâncias é, portanto:

$$-\omega^2 m X - \frac{\omega^2 b N_k k}{N_k k - \omega^2 b} (X - X_0) + j\omega c (X - X_0) + k (X - X_0) = 0 \quad (\text{A.36})$$

Logo:

$$-\omega^2 m X - \frac{\omega^2 b N_k k}{N_k k - \omega^2 b} X + j\omega c X + k X = -\frac{\omega^2 b N_k k}{N_k k - \omega^2 b} X_0 + j\omega c X_0 + k X_0 \quad (\text{A.37})$$

Finalmente:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\frac{\omega^2 b N_k k}{N_k k - \omega^2 b} + j\omega c + k}{-\omega^2 m - \frac{\omega^2 b N_k k}{N_k k - \omega^2 b} + j\omega c + k} \quad (\text{A.38})$$

A equação A.38 é equivalente à equação A.30 e idêntica após alguns rearranjos. A partir daqui, o procedimento seria a adimensionalização dos parâmetros dimensionais e obtenção do valor absoluto da função transferência (transmissibilidade de deslocamento absoluto), já efetuados na seção anterior.

A.2.3 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* viscosamente acoplado

O terceiro sistema mecânico desenvolvido analiticamente, em que um *inertor* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor com um *inertor* em série com um segundo amortecedor viscoso, com coeficiente de amortecimento $N_c c$, sendo N_c uma constante, como mostrado na figura 3.14.

Resposta em frequência: Mecânica Newtoniana e Transformada de Laplace

Os somatórios de forças obtidos pela Segunda Lei de Newton em termos dos deslocamentos relativos dos terminais e as respectivas derivadas resultam em:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_0) - b(\ddot{x} - \ddot{x}_1) \quad (\text{A.39})$$

$$b(\ddot{x} - \ddot{x}_1) = N_c c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) \quad (\text{A.40})$$

O grau de liberdade de interesse é aquele relacionado ao deslocamento da massa. Manipulações podem ser feitas com as equações A.39 e A.40 de forma a se obter apenas uma equação diferencial ordinária que rege o movimento dessa massa. Basta substituir a equação A.40 na equação A.39 e isolar x_1 , obtendo o comportamento da variação do grau de liberdade $\dot{x}_1$ em função dos parâmetros do sistema, da variação do grau de liberdade da massa $\dot{x}$ e da variação do deslocamento da base $\dot{x}_0$:

$$\dot{x}_1 = \frac{-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + c\dot{x}_0 + N_c c\dot{x}_0 + kx_0}{N_c c} \quad (\text{A.41})$$

Derivando a equação A.41 em relação ao tempo uma vez:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-m\ddot{x} - c\ddot{x} - k\dot{x} + c\ddot{x}_0 + N_c c\ddot{x}_0 + k\dot{x}_0}{N_c c} \quad (\text{A.42})$$

A equação A.42 pode ser substituída na equação A.39, obtendo-se assim a equação diferencial ordinária para a massa da figura 3.14, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{mb}{N_c c} \ddot{x} + \left(m + b + \frac{b}{N_c}\right) \ddot{x} + \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) \dot{x} + kx = \\ = \left(b + \frac{b}{N_c}\right) \ddot{x}_0 + \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) \dot{x}_0 + kx_0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Quando o sistema está sob excitação harmônica, a sua resposta em frequência pode ser obtida facilmente trabalhando-se a equação A.43. Primeiramente aplica-se a transformada de Laplace na equação A.43, resultando em:

$$\begin{aligned} \left[\frac{mb}{N_c c} s^3 + \left(m + b + \frac{b}{N_c}\right) s^2 + \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) s + k\right] X = \\ = \left[\left(b + \frac{b}{N_c}\right) s^2 + \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) s + k\right] X_0 \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

E assim, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{\left(b + \frac{b}{N_c}\right) s^2 + \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) s + k}{\frac{mb}{N_c c} s^3 + \left(m + b + \frac{b}{N_c}\right) s^2 + \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) s + k} \quad (\text{A.45})$$

As equações A.44 e A.45 estão no domínio do Laplace, e não mais no domínio do tempo. Para que elas sejam passadas ao domínio da frequência, basta assumir $s = j\omega$. Aplicando isso para a equação A.45, e suprimindo a dependência de ω obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\omega^2 \left(b + \frac{b}{N_c}\right) + j\omega \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) + k}{-j\omega^3 \frac{mb}{N_c c} - \omega^2 \left(m + b + \frac{b}{N_c}\right) + j\omega \left(c + \frac{bk}{N_c c}\right) + k} \quad (\text{A.46})$$

A equação A.46 pode ser adimensionalizada, ficando em termos do fator de amortecimento ξ , da razão de massas μ e da razão de frequências Ω . Valendo-se das mesmas considerações feitas para as equações A.15 e A.17, obtém-se.

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\Omega^2 \mu \left(1 + \frac{1}{N_c}\right) + j\Omega \left(2\xi + \frac{\mu}{2N_c\xi}\right) + 1}{-j\Omega^3 \mu \frac{1}{2N_c\xi} - \Omega^2 \left(1 + \mu + \frac{\mu}{N_c}\right) + j\Omega \left(2\xi + \frac{\mu}{2N_c\xi}\right) + 1} \quad (\text{A.47})$$

A equação A.47 representa a função transferência do sistema da figura 3.14 com parâmetros adimensionalizados. A transmissibilidade de deslocamento do sistema é representada pelo módulo da função complexa da equação A.47:

$$|T_d| = \sqrt{\frac{\left(1 - \Omega^2 \mu \left(1 + \frac{1}{N_c}\right)\right)^2 + \left(\Omega \left(2\xi + \frac{\mu}{2N_c\xi}\right)\right)^2}{\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \mu + \frac{\mu}{N_c}\right)\right)^2 + \left(\Omega \left(2\xi + \frac{\mu}{2N_c\xi}\right) - \Omega^3 \mu \frac{1}{2N_c\xi}\right)^2}} \quad (\text{A.48})$$

Resposta em frequência: Método da Impedância

O Método da Impedância é aplicado aqui novamente, para o sistema com *inertor* e amortecedor secundário, baseado nas definições da seção A.1.2. O elemento composto por *inertor* e amortecedor secundário do sistema possui impedâncias em série. Para se obter a impedância equivalente Z_0 , basta fazer:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} \quad (\text{A.49})$$

Portanto:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{-\omega^2 b} + \frac{1}{j\omega N_c c} \quad (\text{A.50})$$

Obtém-se então:

$$Z_0 = -\frac{j\omega^3 b N_c c}{j\omega N_c c - \omega^2 b} \quad (\text{A.51})$$

A soma das impedâncias é, portanto:

$$-\omega^2 m X - \frac{j\omega^3 b N_c c}{j\omega N_c c - \omega^2 b} (X - X_0) + j\omega c (X - X_0) + k(X - X_0) = 0 \quad (\text{A.52})$$

Logo:

$$-\omega^2 m X - \frac{j\omega^3 b N_c c}{j\omega N_c c - \omega^2 b} X + j\omega c X + kX = -\frac{j\omega^3 b N_c c}{j\omega N_c c - \omega^2 b} X_0 + j\omega c X_0 + kX_0 \quad (\text{A.53})$$

Finalmente:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\frac{j\omega^3 b N_c c}{j\omega N_c c - \omega^2 b} + j\omega c + k}{-\omega^2 m - \frac{j\omega^3 b N_c c}{j\omega N_c c - \omega^2 b} + j\omega c + k} \quad (\text{A.54})$$

A equação A.54 é equivalente à equação A.46 e idêntica após alguns rearranjos. A partir daqui, o procedimento seria a adimensionalização dos parâmetros dimensionais e obtenção do valor absoluto da função transferência (transmissibilidade de deslocamento absoluto), já efetuados na seção anterior.

A.2.4 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* acoplado em série com conjunto mola-amortecedor

O quarto sistema mecânico desenvolvido analiticamente, em que um *inertor* é adicionado, é o sistema massa-mola-amortecedor com um *inertor* em série com um conjunto de mola e amortecedor secundários, com rigidez $N_k k$ e com coeficiente de amortecimento $N_c c$, respectivamente, sendo N_k e N_c constantes, como mostrado na figura 3.19.

Resposta em frequência: Mecânica Newtoniana e Transformada de Laplace

Utilizando a Segunda Lei de Newton para esse sistema obtém-se:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_0) - b(\ddot{x} - \ddot{x}_1) \quad (\text{A.55})$$

$$b(\ddot{x} - \ddot{x}_1) = N_c c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + N_k k(x_1 - x_0) \quad (\text{A.56})$$

O grau de liberdade de interesse é aquele relacionado ao deslocamento da massa. Manipulações podem ser feitas com as equações A.55 e A.56 de forma a se obter apenas uma equação diferencial ordinária que rege o movimento dessa massa. Para isso, da equação A.55 temos:

$$\ddot{x}_1 = \frac{(m + b)\ddot{x} + c\dot{x} + kx - c\dot{x}_0 - kx_0}{b} \quad (\text{A.57})$$

E da equação A.56:

$$x_1 = \frac{b\ddot{x} + N_c c\dot{x}_0 + N_k k\dot{x}_0 + c\ddot{x}_0 - N_c c\dot{x}_1 - b\ddot{x}_1}{N_k k} \quad (\text{A.58})$$

A equação A.57 pode ser substituída na equação A.58, obtendo-se assim o seguinte resultado:

$$x_1 = \frac{-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + (c + N_c c)\dot{x}_0 + (k + N_k k)x_0 - N_c c\dot{x}_1}{N_k k} \quad (\text{A.59})$$

Derivando-se a equação A.59, obtém-se:

$$\dot{x}_1 = \frac{-m\ddot{\dot{x}} - c\ddot{x} - k\dot{x} + (c + N_c c)\ddot{x}_0 + (k + N_k k)\dot{x}_0 - N_c c\ddot{x}_1}{N_k k} \quad (\text{A.60})$$

Pode-se incluir a equação A.57 na equação A.60, resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \frac{-bm\ddot{\dot{x}} - (bc + N_c mc + N_c bc)\ddot{x} - (bk + N_c c^2)\dot{x} - N_c c k x}{N_k b k} \\ & + \frac{(bc + N_c bc)\ddot{x}_0 + (bk + N_k b k + N_c c^2)\dot{x}_0 + N_c c k x_0}{N_k b k} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

A equação A.62 coloca $\dot{x}_1$ em função de x , x_0 , e as derivadas com relação ao tempo destas. Basta derivar no tempo a equação A.62 para obter-se $\ddot{x}_1$ em função dos graus de liberdade de interesse e a equação resultante poderá ser substituída na equação A.55:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & \frac{-bm\ddot{\ddot{x}} - (bc + N_c mc + N_c bc)\ddot{\ddot{x}} - (bk + N_c c^2)\ddot{\dot{x}} - N_c c k \dot{x}}{N_k b k} \\ & + \frac{(bc + N_c bc)\ddot{\ddot{x}}_0 + (bk + N_k b k + N_c c^2)\ddot{\dot{x}}_0 + N_c c k \dot{x}_0}{N_k b k} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Substituindo a equação A.62 na equação A.55 e reorganizando:

$$\begin{aligned} \frac{bm}{N_k k} \ddot{\ddot{x}} + \frac{bc + N_c mc + N_c bc}{N_k k} \ddot{\ddot{x}} + \left(m + b + \frac{bk + N_c c^2}{N_k k} \right) \ddot{\dot{x}} + \left(c + \frac{N_c c}{N_k} \right) \ddot{\dot{x}} + kx = \\ = \frac{bc + N_c bc}{N_k k} \ddot{\ddot{x}}_0 + \frac{bk + N_k b k + N_c c^2}{N_k k} \ddot{\dot{x}}_0 + \left(c + \frac{N_c c}{N_k} \right) \ddot{\dot{x}}_0 + kx_0 \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Quando o sistema está sob excitação harmônica, a sua resposta em frequência pode ser obtida facilmente trabalhando-se a equação A.63. Primeiramente aplica-se a transformada de Laplace na equação A.63, resultando em:

$$\begin{aligned} \left[\frac{bm}{N_k k} s^4 + \frac{bc + N_c mc + N_c bc}{N_k k} s^3 + \left(m + b + \frac{bk + N_c c^2}{N_k k} \right) s^2 + \left(c + \frac{N_c c}{N_k} \right) s + k \right] X \\ = \left[\frac{bc + N_c bc}{N_k k} s^3 + \frac{bk + N_k b k + N_c c^2}{N_k k} s^2 + \left(c + \frac{N_c c}{N_k} \right) s + k \right] X_0 \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

E assim, obtém-se a função de transferência do sistema:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{\frac{bc+N_cbc}{N_kk} s^3 + \frac{bk+N_kbk+N_cc^2}{N_kk} s^2 + \left(c + \frac{N_cc}{N_k}\right) s + k}{\frac{bm}{N_kk} s^4 + \frac{bc+N_cmc+N_cbc}{N_kk} s^3 + \left(m + b + \frac{bk+N_cc^2}{N_kk}\right) s^2 + \left(c + \frac{N_cc}{N_k}\right) s + k} \quad (\text{A.65})$$

As equações A.64 e A.65 estão no domínio do Laplace, e não mais no domínio do tempo. Para que elas sejam passadas ao domínio da frequência, basta assumir $s = j\omega$. Aplicando isso para a equação A.65, e suprimindo a dependência de ω obtém-se:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-j\frac{bc+N_cbc}{N_kk}\omega^3 - \frac{bk+N_kbk+N_cc^2}{N_kk}\omega^2 + j\left(c + \frac{N_cc}{N_k}\right)\omega + k}{\frac{bm}{N_kk}\omega^4 - j\frac{bc+N_cmc+N_cbc}{N_kk}\omega^3 - \left(m + b + \frac{bk+N_cc^2}{N_kk}\right)\omega^2 + j\left(c + \frac{N_cc}{N_k}\right)\omega + k} \quad (\text{A.66})$$

A equação A.66 pode ser adimensionalizada, ficando em termos do fator de amortecimento ξ , da razão de massas μ e da razão de frequências Ω . Valendo-se das mesmas considerações feitas para as equações A.15 e A.17, obtém-se.

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-2j\frac{\mu\xi}{N_k}(1+N_c)\Omega^3 - \left(\mu + \frac{\mu}{N_k} + \frac{4N_c\xi^2}{N_k}\right)\Omega^2 + 2j\xi\left(1 + \frac{N_c}{N_k}\right)\Omega + 1}{\frac{\mu}{N_k}\Omega^4 - 2j\frac{\xi}{N_k}(N_c + \mu + N_c\mu)\Omega^3 - \left(1 + \mu + \frac{\mu}{N_k} + \frac{4N_c\xi^2}{N_k}\right)\Omega^2 + 2j\xi\left(1 + \frac{N_c}{N_k}\right)\Omega + 1} \quad (\text{A.67})$$

A equação A.67 representa a função transferência do sistema da figura 3.14 com parâmetros adimensionalizados. A transmissibilidade de deslocamento do sistema é representada pelo módulo da função complexa da equação A.67:

$$|T_d| = \sqrt{\frac{\left(1 - \left(\mu + \frac{\mu}{N_k} + \frac{4N_c\xi^2}{N_k}\right)\Omega^2\right)^2 + \left(2\xi\left(1 + \frac{N_c}{N_k}\right)\Omega - \frac{2\mu\xi}{N_k}(1+N_c)\Omega^3\right)^2}{\left(1 + \frac{\mu}{N_k}\Omega^4 - \left(1 + \mu + \frac{\mu}{N_k} + \frac{4N_c\xi^2}{N_k}\right)\Omega^2\right)^2 + \left(2\xi\left(1 + \frac{N_c}{N_k}\right)\Omega - \frac{2\xi}{N_k}(N_c + \mu + N_c\mu)\Omega^3\right)^2}} \quad (\text{A.68})$$

Resposta em frequência: Método da Impedância

O Método da Impedância é aplicado aqui novamente, para o sistema com *inertor* e mola e amortecedor secundários, baseado nas definições da seção A.1.2. O elemento composto por *inertor* e mola e amortecedor secundários do sistema possui impedâncias em série e paralelo. Para se obter a impedância equivalente Z_0 , basta fazer:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c + Z_k} \quad (\text{A.69})$$

Portanto:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{-\omega^2 b} + \frac{1}{N_k k + j\omega N_c c} \quad (\text{A.70})$$

Obtém-se então:

$$Z_0 = -\frac{-\omega^2 b (N_k k + j\omega N_c c)}{N_k k + j\omega N_c c - \omega^2 b} \quad (\text{A.71})$$

A soma das impedâncias é, portanto:

$$-\omega^2 m X - \frac{-\omega^2 b (N_k k + j\omega N_c c)}{N_k k + j\omega N_c c - \omega^2 b} (X - X_0) + j\omega c (X - X_0) + k (X - X_0) = 0 \quad (\text{A.72})$$

Logo:

$$\left(-\omega^2 m - \frac{-\omega^2 b (N_k k + j\omega N_c c)}{N_k k + j\omega N_c c - \omega^2 b} + j\omega c + k \right) X = \left(-\frac{-\omega^2 b (N_k k + j\omega N_c c)}{N_k k + j\omega N_c c - \omega^2 b} + j\omega c + k \right) X_0 \quad (\text{A.73})$$

Finalmente:

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-\frac{-\omega^2 b (N_k k + j\omega N_c c)}{N_k k + j\omega N_c c - \omega^2 b} + j\omega c + k}{-\omega^2 m - \frac{-\omega^2 b (N_k k + j\omega N_c c)}{N_k k + j\omega N_c c - \omega^2 b} + j\omega c + k} \quad (\text{A.74})$$

A equação A.74 é equivalente à equação A.66 e idêntica após alguns rearranjos. A partir daqui, o procedimento seria a adimensionalização dos parâmetros dimensionais e obtenção do valor absoluto da função transferência (transmissibilidade de deslocamento absoluto), já efetuados na seção anterior.

Apêndice B

Procedimentos para obtenção de pontos de interesse em software CAS

Este Apêndice tem como objetivo mostrar o procedimento de obtenção dos pontos de pico, zero e intersecção, além das linhas de comportamento assintótico ou decaimento das curvas de transmissibilidade, de forma analítica, utilizando um software do tipo CAS.

B.1 Procedimento para obtenção de pontos de pico

- Para se obter os pontos de pico para os sistemas sem amortecimento, deve-se igualar o denominador da função transferência à zero e comandar o software para resolver a equação (comando “solve” em geral).

$$T_d = \frac{\textit{Numerador}}{\textit{Denominador}}$$

$$\textit{Solve}(\textit{Denominador} = 0)$$

- Para os sistemas com amortecimento, deve-se derivar a função transferência em relação à razão de frequências e igualar a derivada à zero. As expressões de razão de frequências obtidas podem retornar picos, vales ou inflexões.

$$\text{Solve} \left(\frac{d(T_d)}{d\Omega} = 0 \right)$$

B.2 Procedimento para obtenção de pontos de zero

- Para se obter o ponto de zero, o sistema não deve ter amortecimento. Basta igualar o numerador da função transferência à zero e comandar o software para resolver.

$$T_d = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

$$\text{Solve}(\text{Numerador} = 0)$$

B.3 Procedimento para obtenção de pontos de intersecção

- Para se obter os pontos de intersecção entre as curvas das funções transferência, basta igualar as funções transferências dos sistemas que se quer obter as intersecções.

$$\text{Solve}(T_{d1} = T_{d2})$$

B.4 Procedimento para obtenção de comportamento assintótico/decaimento

- Para se obter o comportamento assintótico do sistema ou seu decaimento, basta tender a razão de frequências Ω ao infinito e verificar o valor limite.

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} T_d(\Omega)$$

Apêndice C

Estudo dos valores de N_k e N_c

Este apêndice apresenta estudos dos valores de N_k e N_c para os sistemas com *inertor* elasticamente acoplado, *inertor* viscosamente acoplado, e *inertor* acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo. Estes estudos servem para complementar e clarificar os argumentos apresentados no texto com relação aos valores desses dois parâmetros.

C.1 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* elasticamente acoplado

Para o sistema com *inertor* elasticamente acoplado, a função de transmissibilidade para $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$ resulta na superfície da figura C.1.

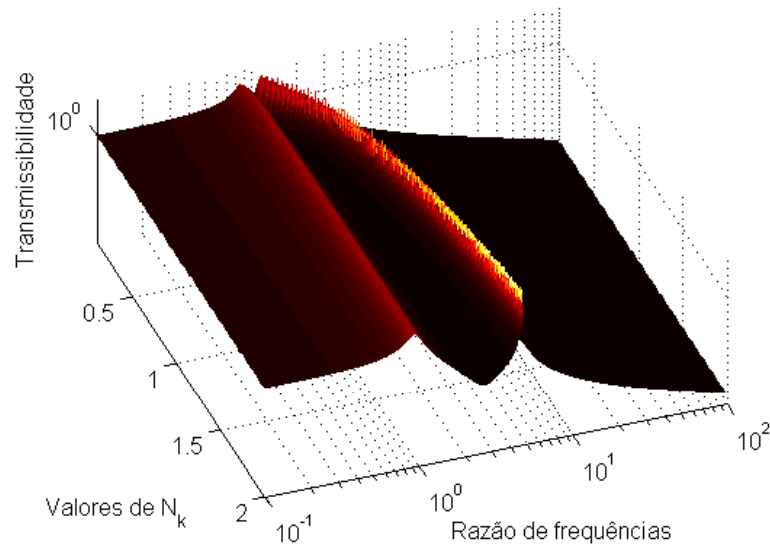


Figura C.1: Influência do valor de N_k para o sistema com *inertor* elasticamente acoplado

Para complementar e clarificar um pouco mais a figura anterior, pode-se ver o que ocorre em duas dimensões na figura C.2, com valores selecionados de N_k .

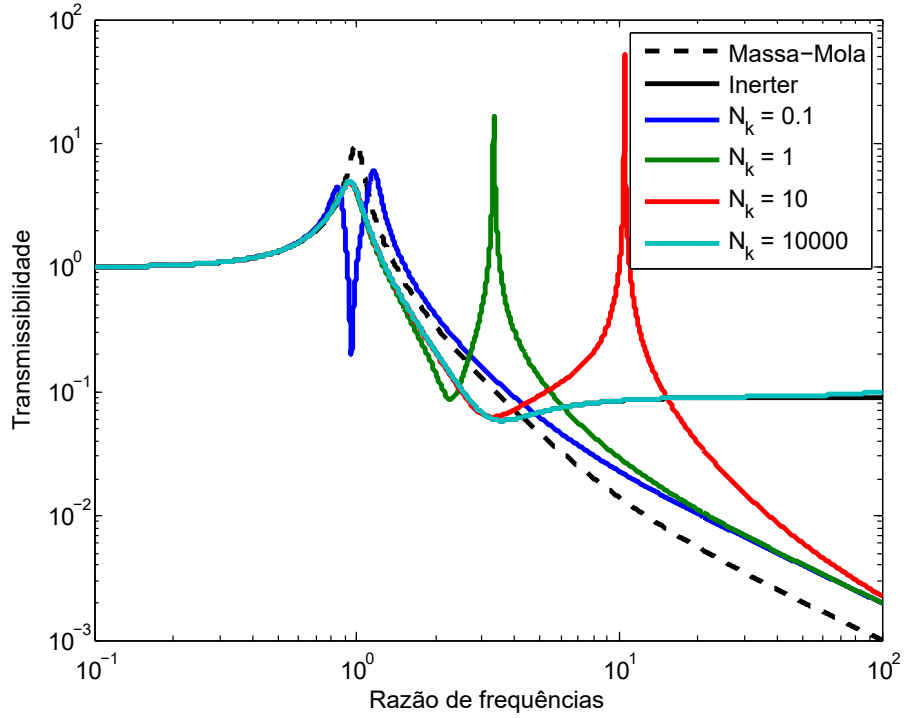


Figura C.2: Influência do valor de N_k para o sistema com *inert*er elasticamente acoplado

Observando as figuras C.1 e C.2, pode-se notar que para valores de N_k próximos à zero, cria-se um vale de isolamento perto da região de ressonância de um sistema massa-mola, e um pequeno pico de amplificação em uma frequência um pouco mais alta. Conforme o valor de N_k aumenta, o segundo pico criado aumenta de valor, a frequência em que esse segundo pico é gerado é cada vez maior, e a banda de isolamento, isto é, a região entre os picos, torna-se cada vez maior. Como a intenção do trabalho é comparar os sistemas com *inert*er à um sistema massa-mola, o valor de $N_k = 0.1$ é escolhido para obter os resultados para esse sistema, principalmente devido ao efeito "antiressonante" criado com relação ao sistema massa-mola. De qualquer forma, esse valor pode não ser o melhor dependendo do tipo de aplicação que se tem. Por exemplo, se algum equipamento trabalha numa maior faixa de frequências, o interessante seria utilizar valores mais altos de N_k com o intuito de aumentar a banda de frequência do isolamento. É importante notar que para um valor infinito de N_k , esse sistema torna-se um sistema massa-mola-amortecedor-*inert*er. Nota-se ainda que na figura C.1 existem descontinuidades causadas pela discretização dos pontos. Entretanto, é possível verificar a tendência para o formato que a superfície tomaria caso a discretização fosse perfeita.

C.2 Sistema massa-mola-amortecedor com *inert*er viscosamente acoplado

Para o sistema com *inert*er viscosamente acoplado, a função de transmissibilidade para $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$ resulta na superfície da figura C.3.

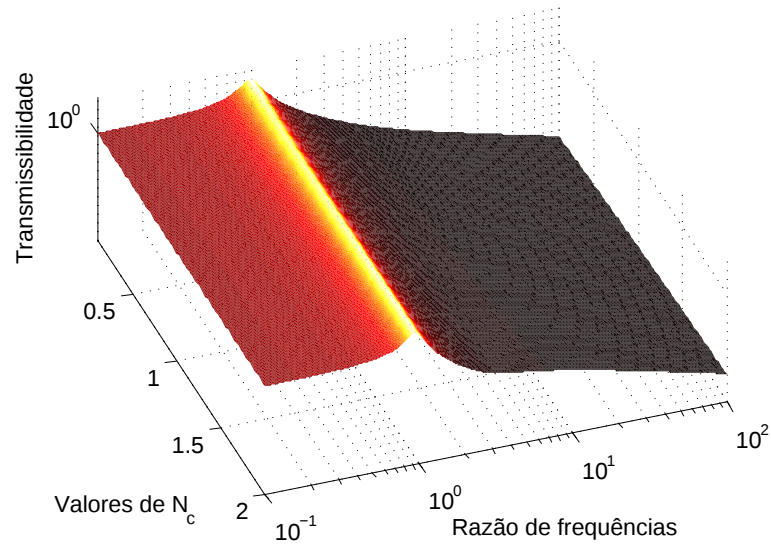


Figura C.3: Influência do valor de N_c para o sistema com *inert*er viscosamente acoplado

Para complementar e clarificar um pouco mais a figura anterior, pode-se ver o que ocorre em duas dimensões na figura C.4, com valores selecionados de N_c .

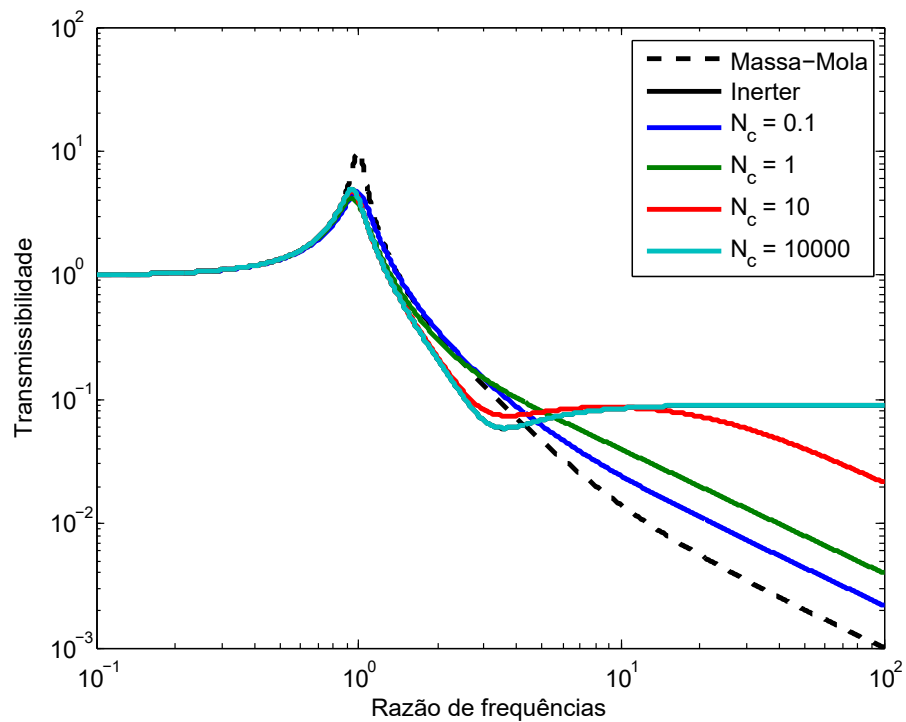


Figura C.4: Influência do valor de N_c para o sistema com *inert*er viscosamente acoplado

Observando as figuras C.3 e C.4, pode-se notar que, quanto maior for o valor de N_c , ligeiramente mais baixo se torna o pico de transmissibilidade na região de ressonância. A frequência de ressonância também se torna ligeiramente mais baixa. Também pode-se notar que existe uma faixa de frequência em que há melhora do isolamento e, após ela, aumentar o valor de N_c torna o isolamento pior. Para esse sistema, o valor de $N_c = 2$ é escolhido, visto que qualquer valor de N_c piorará o isolamento do sistema em alta frequência se comparado à um sistema massa-mola, enquanto que na região mais próxima da região de ressonância há melhora do isolamento. É importante salientar que esse sistema é possível de ser simulado e estudado analiticamente, porém não é possível de ser construído devido à ausência de uma força de restauração para o grau de liberdade que acopla o *inertor* ao amortecedor. Também é importante observar que um valor infinito de N_c tornará o sistema um sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*.

C.3 Sistema massa-mola-amortecedor com *inertor* acoplado em série com conjunto mola-amortecedor

Para o sistema com *inertor* acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo, a função de transmissibilidade para $\mu = 0.1$ e $\xi = 0.1$ traz duas possibilidades: A primeira, para um valor constante de N_c , varia-se N_k e, a segunda, para um valor constante de N_k , varia-se N_c . O valor considerado para N_c e N_k quando constantes é de 0.1. Essa escolha ficará clara com a observação dos próximos resultados.

Considerando a primeira possibilidade, a superfície obtida é apresentada na figura C.5.

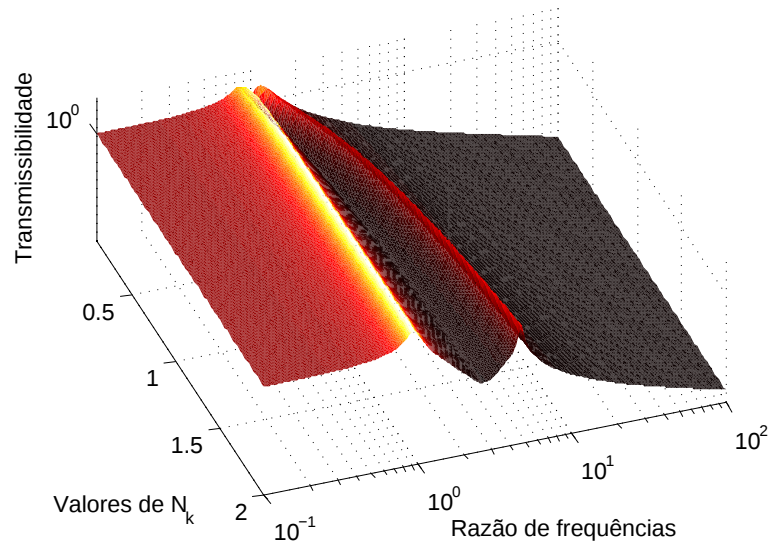


Figura C.5: Influência do valor de N_k para o sistema com *inertor* acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo

Para complementar e clarificar um pouco mais a figura anterior, pode-se ver o que ocorre em duas dimensões na figura C.6, com valores selecionados de N_k .

Observando as figuras C.5 e C.6, pode-se notar que para valores mais baixos de N_k , bem próximos à zero, existe um efeito de isolamento acentuado próximo à frequência natural de um sistema massa-mola, embora a largura da banda de isolamento seja mais curta e um pequeno pico de amplificação seja gerado em outra frequência. Conforme o valor de N_k aumenta, esse efeito de isolamento passa a se deslocar no sentido positivo do eixo de frequências, aumentando a banda de frequência em que há isolamento. Entretanto, picos de amplificação são gerados em frequências cada vez mais altas e com valores de transmissibilidade ligeiramente maiores. Para o valor de N_c escolhido como constante, se N_k for infinito, o sistema então torna-se um sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*.

Considerando a segunda possibilidade, a superfície obtida é apresentada na figura C.7.

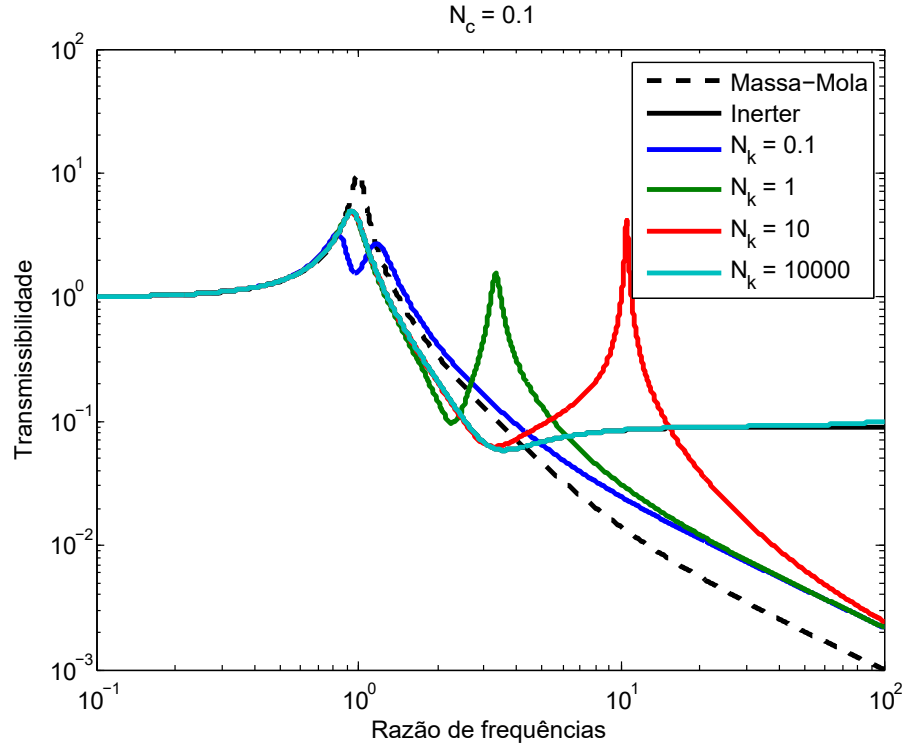


Figura C.6: Influência do valor de N_k para o sistema com *inerte* acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo

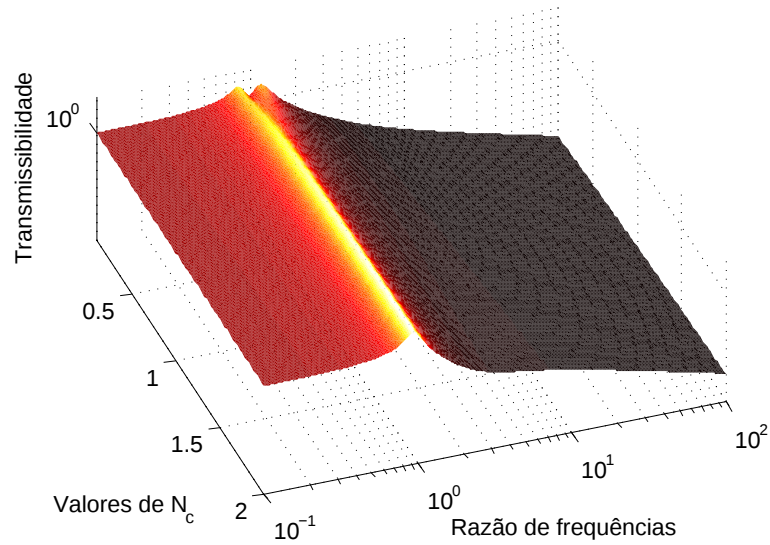


Figura C.7: Influência do valor de N_c para o sistema com *inerte* acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo

Para complementar e clarificar um pouco mais a figura anterior, pode-se ver o que ocorre em duas dimensões na figura C.8, com valores selecionados de N_c .

Observando as figuras C.7 e C.8, pode-se notar que o aumento de N_c retira o efeito de isolamento proporcionado por N_k no vale criado, porém, melhora o isolamento no que seria o segundo pico proporcionado por N_k . Para frequências mais altas, o isolamento é piorado. Se o valor de N_c for infinito, o sistema se tornará um sistema massa-mola-

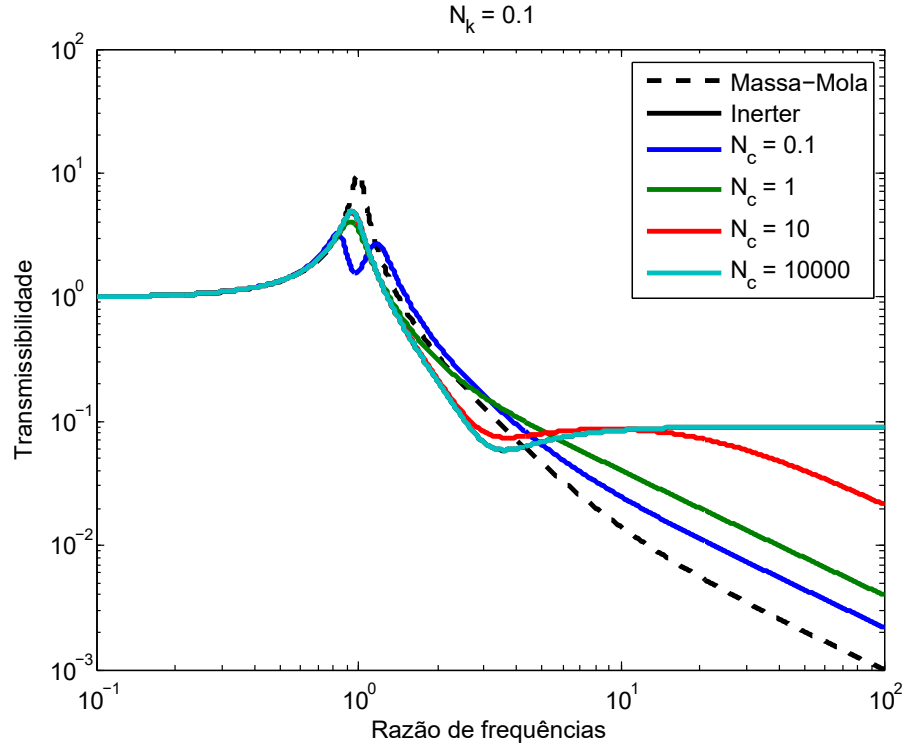


Figura C.8: Influência do valor de N_c para o sistema com *inertor* acoplado em série com mola e amortecedor em paralelo

amortecedor-*inertor*.

Concluindo o estudo deste apêndice, para os resultados apresentados na dissertação, foram utilizados os valores de $N_k = 0.1$ e $N_c = 2$. Outros valores poderiam ser utilizados, possibilitando que o isolamento fosse melhorado (ou piorado), abrindo um grande leque de possíveis aplicações. Todos os sistemas, quando N_k , N_c ou ambos se tornam infinitos, transformam-se em um sistema massa-mola-amortecedor-*inertor*.