

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***“Análise Teórica e Experimental Vibro-Acústica
Utilizando a Técnica de Matrizes Compactas”***

MAURÍCIO FERREIRA JARDIM

ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO ANTONIO PEREIRA

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia - UNESP – Campus de Ilha
Solteira, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica.
Área de Conhecimento: Mecânica dos
Sólidos

Ilha Solteira – SP
01/2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

J37a

Jardim, Maurício Ferreira.

Análise teórica e experimental vibro-acústica utilizando a técnica de matrizes compactas / Maurício Ferreira Jardim. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2008.

110 f. : il., fots. (algumas color.)

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2008

Orientador: João Antonio Pereira

Bibliografia: p. 103-105

1. Vibro-acústica. 2. Sinal-ruído (Acústica). 3. Vibração – Medição. 4. Análise modal. 5. Resposta em frequência (Dinâmica).



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Análise Teórica e Experimental Vibro-Acústica Utilizando a Técnica de Matrizes Compactas

AUTOR: MAURICIO FERREIRA JARDIM

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:



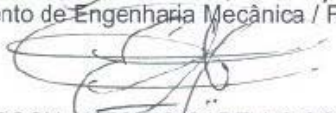
Prof. Dr. JOAO ANTONIO PEREIRA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELLO SOUSA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru

Data da realização: 22 de dezembro de 2008.

Dedico este trabalho ao meu irmão

Mauro Ferreira Jardim

AGRADECIMENTOS

A DEUS, o qual sou grato pela sua misericórdia e bondade em todos os dias da minha vida.

Ao Prof. Dr. João Antonio Pereira, pela sua orientação e principalmente pela sua paciência no desenvolvimento deste trabalho.

À FAPESP, instituição patrocinadora, que concedeu os recursos necessários para o desenvolvimento do trabalho e conclusão do curso de Mestrado.

A minha família, aos quais simplesmente amo.

Aos irmãos da Primeira Igreja Batista e da Igreja Batista Central que me aqueceram o coração nas horas mais difíceis.

A todos os membros que fizeram parte do grupo PET-Engenharia Mecânica durante o período de 2001 a 2007 e ao seu tutor Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski pelos valorosos ensinamentos que adquiri naquele tempo.

Aos inseparáveis amigos, Eng. Leandro Oliveira Salviano e Eng. Msc. Thiago Caetano de Freitas os quais muito contribuíram para a minha formação como engenheiro e como pessoa.

Especialmente ao amigo Diego Nelson Gewehr, pelas noites de sonos perdidas me auxiliando no desenvolvimento da parte experimental deste trabalho.

Finalmente agradeço àquela que me deu a motivação que faltava para terminar este trabalho. Meu amor, Professora Vania Batista Schunck Flose.

"As dificuldades, como as montanhas, aplainam-se
quando avançamos por elas."

(Émile Zola)

JARDIM, M.F. **Análise teórica e experimental vibro-acústica utilizando a técnica de matrizes compactas**. 2009. 110f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

Palavras-Chave: *Análise modal, matrizes compactas, método dos elementos finitos, cavidade de geometria irregular, acústica, vibro-acústica.*

Resumo

Em muitos problemas do nosso cotidiano ocorre acoplamento entre a resposta acústica no interior de uma cavidade e a excitação estrutural em um de seus contornos flexíveis, bem como a resposta estrutural nestes contornos também está relacionada à fonte acústica da cavidade. Interior de automóveis, cabine de caminhões e fuselagem de aviões são apenas alguns exemplos práticos destes tipos de sistemas. Acoplamento implica que o comportamento dos sistemas acústico e estrutural não são independentes um do outro, e ambos devem ser considerados como um único sistema global. O propósito deste trabalho é avaliar a técnica de matrizes compactas na solução de problema de acoplamento vibro-acústico em cavidades de geometria regular e irregular. Preliminarmente, a análise do acoplamento vibro-acústico é baseado no método dos elementos finitos e o conjunto de equações não simétricas que modela o movimento é discutida. A aproximação vibro-acústica por matrizes compactas é feita utilizando conceitos de impedância e mobilidade. No modelo de matrizes compactas, o acoplamento é obtido através da avaliação dos modos acústicos e estruturais desacoplados da cavidade e da estrutura flexível, respectivamente. Simulações numéricas utilizando o método dos elementos finitos e a técnica de matrizes compactas são apresentadas para modelos vibro-acústicos de geometria regular e irregular. Testes experimentais são realizados em uma cavidade irregular feita de PVC e aço. A metodologia de análise dos resultados é baseada nas FRF(s) definidas pelas relações entre a resposta em pressão acústica da cavidade e a força estrutural e entre a resposta em velocidade e a força estrutural aplicada sobre a superfície flexível. A comparação dos modelos numéricos e experimentais mostra o potencial da técnica de matrizes compactas.

JARDIM, M.F. **Theoretical and experimental vibro-acoustic analysis using a compact matrix formulation.** 2009. 110f. Thesis (Master in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

Palavras-Chaves: *Modal Analysis, compact matrix, finite element method, irregular geometry cavity, acoustic, vibro-acoustic.*

Abstract

In many systems of day-life occurs the coupling between the acoustical response in a cavity and a structural excitation on a flexible boundary, whereas the structural response in this same boundary is also related to acoustical excitation source. Car interiors, cabs of trucks and aircraft fuselage are a just a few practical examples of this sort of systems. Coupling implies that the acoustical and structural system behavior is not independent from each other, and therefore they must be considered as a global system behavior. The aim of this work is to evaluate a compact matrix formulation to solve vibro-acoustic problems in regular and irregular shape cavity. Preliminary, the vibro-acoustic coupling analysis is based on finite element method and the set of non-symmetric equation that represents the movement is discussed. The compact matrix formulation approaches have been done using impedance and mobility concepts. In compact matrix model, the coupling is obtained by evaluating the uncoupled acoustic modes and structural modes of the cavity and flexible structure, respectively. Numerical simulation using the finite element method and the compact matrix formulation are shown for regular and irregular shape cavity model. Experimental tests are evaluated in an irregular rigid cavity made of PVC and steel. The results analysis methodology is based on FRF(s) defined by the relationship between the pressure acoustic response in the cavity and structural force and between the velocity response and structural force applied on the flexible boundary. The comparison of numerical and experimental models shows the potential of the compact matrix formulation

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 3.1 – Ilustração da relação linear e não linear entre pressão acústica e densidade	29
Figura 3.2 – Fluxo de massa em um volume de controle	30
Figura 3.3 – Fluxo de momento em um volume de controle	31
Figura 3.4 – Linearização da equação da onda.....	32
Figura 4.1 – Sistema vibro-acústico com excitação estrutural e acústica	41
Figura 4.2 – Sistema vibro-acústico excitado por força estrutural e representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade.....	47
Figura 4.3 – Sistema vibro-acústico excitado por fonte acústica e representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade.....	48
Figura 4.4 – Sistema vibro-acústico excitado por fonte acústica e força estrutural. Representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade.....	49
Figura 4.5 – Sistema vibro-acústico excitado por fonte acústica e força estrutural e representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade em coordenadas modais	52
Figura 4.6 - Fluxograma de cálculo para a construção das matrizes compactas.....	53
Figura 5.1.a – Cavityde Retangular com cinco paredes rígidas e uma flexível	55
Figura 5.1.b – Malha de elementos finitos. Elementos acústicos e estruturais	55
Figura 5.2 - Modos acústicos desacoplados da cavityde	57
Figura 5.3 - Modos estruturais desacoplados da estrutura flexível	58

Figura 5.4.a – Modos vibro-acústicos, predominantemente acústicos, da cavidade.....	59
Figura 5.4.b - Modos vibro-acústicos, predominantemente estruturais, da cavidade vibro-acústica de geometria regular.....	60
Figura 5.5 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação e resposta estrutural.....	62
Figura 5.6 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação estrutural e resposta acústica	62
Figura 5.7 – Superposição das funções de resposta em frequência dos modelos. Excitação e resposta estrutural	63
Figura 5.8 – Superposição das funções de resposta em frequência dos modelos. Excitação estrutural e resposta acústica	64
Figura 5.9 – Cavidade irregular, semelhante à cabine de um automóvel.....	65
Figura 5.10 – Representação das dimensões da cavidade de geometria irregular.....	65
Figura 5.11 – Malha em elementos finitos do modelo	66
Figura 5.12.a – Modos acústicos desacoplados da cavidade vibro-acústica.....	67
Figura 5.12.b – Modos estruturais desacoplados da cavidade vibro-acústica de geometria irregular	67
Figura 5.13 – Função de resposta em frequência (velocidade por força) do modelo	69
Figura 5.14 – Função de resposta em frequência (pressão por força) do modelo	69
Figura 5.15 – Superposição das funções de resposta em frequência. Excitação e resposta estrutural.....	71
Figura 5.16 – Superposição das funções de resposta em frequência. Excitação estrutural e resposta acústica	71

Figura 5.17 – Superposição das funções de resposta em frequência utilizando um maior número de modos. Excitação e resposta estrutural	72
Figura 5.18 – Superposição das funções de resposta em frequência utilizando um maior número de modos. Excitação estrutural e resposta acústica	73
Figura 6.1 – Cavity Vibro-acústica construída em PVC e aço	75
Figura 6.2 – Set-up experimental. Equipamentos utilizados para medir a) resposta acústica e b) resposta estrutural.....	76
Figura 6.3 – Malha onde os sensores de pressão sonora (microfones) foram posicionados	76
Figuras 6.4 – Malha onde os sensores de aceleração (acelerômetros) foram posicionados	77
Figura 6.5 – Suspensão da cavity Vibro-acústica	78
Figura 6.6 – Conjunto de FRF(s) medidas com excitação realizada com excitador eletromagnético (shaker)	80
Figura 6.7 – Conjunto de FRF's medidas com excitação realizada com martelo instrumentado	81
Figura 6.8 – Picos relacionados aos modos vibro-acústico, predominantemente acústico.....	82
Figura 6.9 – Formas modais acústicas estimadas experimentalmente	83
Figura 6.10 – Picos relacionados aos modos vibro-acústico, predominantemente estrutural.....	83
Figura 6.11 – Formas modais estruturais estimadas experimentalmente	85
Figuras 6.12.a - Detalhe de junção do PVC com o aço.....	86
Figuras 6.12.b - Modelo da Junção em elementos finitos.....	86

Figura 6.13.a – Modos acústicos desacoplado da cavidade vibro-acústica	87
Figura 6.13.b – Modos estruturais desacoplado da cavidade vibro-acústica	88
Figura 6.14 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação e resposta estrutural.....	90
Figura 6.15 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação estrutural e resposta acústica	90
Figura 6.16 – Comparação entre as frequências naturais e modos vibro-acústicos, predominantemente estruturais. Coluna esquerda – experimental, coluna direita – numérico	93
Figura 6.17 – Comparação entre as frequências naturais e modos vibro-acústicos, predominantemente acústicos. Coluna esquerda – experimental, coluna direita – numérico	95
Figura 6.18 – Resposta em frequência da velocidade de vibração da chapa no drive point	96
Figura 6.19 – Resposta em frequência da pressão acústica da cavidade em um ponto localizado no centro da caixa	97
Figura 6.20 – Resposta em frequência da velocidade de vibração da chapa no drive point	99
Figura 6.21 – Resposta em frequência da pressão acústica da cavidade em um ponto localizado no centro da caixa	100
Figura A.1 – Coordenadas e graus de liberdade do elemento Fluido30.....	109
Figura A.2 – Coordenada e graus de liberdade do elemento Shell63.	110
Tabela 5.1 – Propriedades dos elementos.....	56
Tabela 5.2 – Frequências naturais vibro-acústica da cavidade.....	61
Tabela 5.3 – Frequências naturais vibro-acústica.....	68

Tabela 6.1 – Dados dos elementos	86
Tabela 6.2 – Frequências naturais vibro-acústica.....	89
Tabela 6.3 – Frequências naturais vibro-acústica.....	98

LISTA DE SÍMBOLOS

p	<i>Pressão do fluido</i>
p_0	<i>Pressão atmosférica</i>
ρ	<i>Densidade do fluido</i>
ρ_0	<i>Densidade de equilíbrio</i>
γ	<i>Fator de compressibilidade</i>
c	<i>Velocidade local do som</i>
u	<i>Velocidade do fluido</i>
P	<i>Pressão acústica</i>
ω	<i>Frequência (rad/s)</i>
r	<i>Função de Ponderação</i>
V	<i>Volume</i>
S	<i>Área</i>
n	<i>Vetor na direção normal</i>
Z	<i>Impedância</i>
N^f	<i>Função de forma do elemento tipo fluido</i>
$[K^f]$	<i>Matriz de rigidez do elemento fluido</i>
$[M^f]$	<i>Matriz de massa do elemento fluido</i>
$[C^f]$	<i>Matriz de amortecimento do elemento fluido</i>
β	<i>Admitância acústica específica</i>
w_n	<i>Deslocamento na direção normal</i>
N^s	<i>Função de forma do elemento tipo estrutural</i>

$[K^s]$	<i>Matriz de rigidez do elemento estrutural</i>
$[M^s]$	<i>Matriz de massa do elemento estrutural</i>
$[C^s]$	<i>Matriz de amortecimento do elemento estrutural</i>
$[M^c]$	<i>Matriz de massa do acoplamento</i>
$[K^c]$	<i>Matriz de rigidez do acoplamento</i>
$\{F\}$	<i>Vetor de forças estrutural</i>
$\{\dot{q}\}$	<i>Vetor de aceleração volumétrica</i>
$[\varphi]$	<i>Matriz de autovetores acústico</i>
$[\psi]$	<i>Matriz de autovetores estrutural</i>
D	<i>Rigidez de flexão de placa</i>
ρ_s	<i>Densidade da estrutura flexível</i>
h	<i>Espessura da estrutura flexível</i>
f_n	<i>Frequência natural numérica</i>
f_{exp}	<i>Frequência natural experimental</i>

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	18
2.	REVISÃO DA LITERATURA	20
2.1.	Análise modal experimental acústica e vibro-acústica.....	22
2.2.	Conceitos de impedância e mobilidade aplicado à construção de matrizes compactas	24
3.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE VIBRO-ACÚSTICA.....	26
3.1.	Acoplamento vibro-acústico.....	26
3.2.	Propagação da pressão sonora em fluídos	27
3.2.1.	Relação entre pressão e densidade em processos adiabáticos	28
3.2.2.	Equações da conservação da massa e do momento	29
3.2.3.	Equação da onda para sinais sonoros	31
3.3.	Solução aproximada da equação da onda pelo método dos elementos finitos ...	33
3.3.1.	Implementação da absorção sonora.....	35
3.3.2.	Acoplamento vibro-acústico.....	36
3.3.3.	Comportamento da estrutura flexível no acoplamento vibro-acústico	38

4.	APROXIMAÇÃO VIBRO-ACÚSTICA PELO MÉTODO DAS MATRIZES COMPACTAS	40
4.1.	Considerações acústicas para aplicação dos conceitos de impedância e mobilidade	40
4.2.	Considerações estruturais para o problema de impedância e mobilidade	44
4.3.	Conceitos de impedância e mobilidade aplicado a problemas de vibro-acústica	45
4.4.	Construção das matrizes compactas baseado nos conceitos de impedância e mobilidade	50
5.	SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....	54
5.1.	Modelo vibro-acústico de geometria regular	55
5.1.1.	Autovalores e autovetores acústico e estrutural do modelo	56
5.1.2.	Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método dos elementos finitos.....	58
5.1.3.	Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método das matrizes compactas.....	63
5.2.	Modelo vibro-acústico de geometria irregular	65
5.2.1.	Autovalores e autovetores acústico e estrutural do modelo	66
5.2.2.	Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método dos elementos finitos.....	68
5.2.3.	Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método das matrizes compactas.....	70

6.	ANÁLISE EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO VIBRO-ACÚSTICO DE UMA CAVIDADE DE GEOMETRIA IRREGULAR.....	74
6.1.	Descrição da cavidade vibro-acústica em PVC e aço.....	74
6.2.	Preparação do modelo experimental da cavidade e testes experimentais	75
6.3.	Modelo experimental de uma cavidade de geometria irregular	78
6.3.1.	Excitação utilizando shaker	79
6.3.2.	Entrada impulsiva	80
6.3.3.	Extração dos modos vibro-acústicos experimentais.....	82
6.4.	Modelo numérico de elementos finitos	85
6.4.1.	Autovalores e autovetores do modelo	87
6.4.2.	Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método dos elementos finitos.....	88
6.5.	Comparação das respostas vibro-acústicas do modelo pelo método dos elementos finitos.....	90
6.5.1.	Modos e frequências naturais	91
6.5.2.	Resposta em frequência	95
6.6.	Método das matrizes compactas	97
7.	CONCLUSÕES.....	101
	REFERÊNCIAS	103
	APÊNDICE	106
	ANEXOS	109

1. INTRODUÇÃO

Em nosso cotidiano estamos continuamente sujeitos a presença de ruídos em locais fechados. Estes locais podem ser os mais variados como cabines de automóveis, trens, aviões, bem como em casas de máquinas, salas de concertos, teatros e etc. De forma que o estudo e entendimento do comportamento acústico nestes locais (cavidades) é fundamental para o projeto de ambientes cada vez mais silenciosos e confortáveis.

O campo acústico em locais fechados apresenta ressonâncias associadas a modos acústicos, devido às sucessivas reflexões nos contornos (FAHY, 2003). Estas ressonâncias têm uma frequência natural associada e uma forma característica de propagação da pressão acústica. A análise do comportamento acústico em cavidades está intimamente ligada ao comprimento de onda das frequências naturais acústica e as dimensões principais da cavidade. Em casos onde o comprimento de onda é muito menor que as dimensões da cavidade, o comportamento acústico é de difícil predição devido à proximidade dos sucessivos modos acústicos. O campo sonoro nestas situações é definido como *difuso* e a análise pode ser realizada utilizando-se métodos estatísticos de energia (FAHY, 2003). Em casos onde o comprimento de onda é da mesma ordem de grandeza das principais dimensões da cavidade, o problema vibro-acústico pode ser tratado sob o ponto de vista dos modos acústicos da cavidade.

Quando um dos contornos da cavidade é flexível, o movimento vibratório da estrutura se *acopla* ao movimento das partículas fluídas no interior da cavidade, de forma que a propagação da pressão acústica interna afeta o movimento da estrutura, bem como o movimento da estrutura influencia a propagação da pressão acústica na cavidade. Esta interação é definida como *acoplamento vibro-acústico*.

O equacionamento do problema vibro-acústico pode ser obtido através do acoplamento entre a equação da onda de pressão acústica e das equações do movimento estrutural presente no contorno. A solução analítica destas equações é conhecida para acoplamentos entre geometrias relativamente simples, por exemplo, uma cavidade retangular com uma de suas faces flexível. Contudo, a maior parte dos problemas de vibro-acústica de ordem prática, envolve cavidades de geometria complexa e a solução analítica é difícil. Nestes casos, a predição do comportamento vibro-acústico pode ser feita fazendo-se uso de

ferramentas numéricas. Uma das ferramentas numéricas que pode ser aplicadas em problemas de vibro-acústica com resultados satisfatórios é o método dos elementos finitos. Contudo, na aproximação por elementos finitos das equações que governam este tipo de problema, aparecem termos de acoplamento que tornam as matrizes não simétricas, gerando grandes problemas nas soluções e uma grande demanda computacional. A proposta deste trabalho é analisar as equações do acoplamento vibro-acústico utilizando um método alternativo, denominado matrizes compactas.

O método de matrizes compactas, apresentado neste trabalho, é um método numérico que utiliza os conceitos de impedância e mobilidade na obtenção da resposta em frequência de problemas de acoplamento vibro-acústico. A grande vantagem deste é que o mesmo utiliza apenas matrizes simétricas na sua formulação. Entretanto, os resultados observados na literatura mostram que o método tem sido avaliado experimentalmente apenas para a análise de cavidades de geometria simples. O propósito deste trabalho é avaliar a técnica de matrizes compactas para o estudo e análise de cavidades vibro-acústicas de geometria irregular, inicialmente através de dados simulados e posteriormente através de testes experimentais. Os testes experimentais são realizados em uma cavidade de material acusticamente rígido (PVC) com alguma semelhança a uma cabine de automóvel e o acoplamento vibro-acústico é obtido através de uma estrutura flexível de aço apoiada nas faces da cavidade. Os resultados são comparados com os resultados obtidos utilizando a formulação vibro-acústica de elementos finitos e testes experimentais. A análise e avaliação da comparação dos resultados mostram o potencial da técnica das matrizes compactas e que a mesma poderia ser utilizada para avaliação do comportamento vibro-acústico de uma cavidade com geometria irregular.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo tem o propósito de apresentar algumas técnicas existentes na literatura para o tratamento do problema de acoplamento entre uma cavidade acústica e uma estrutura flexível.

O estudo do acoplamento vibro-acústico tem sido tratado por muitos pesquisadores há décadas. A técnica normalmente aplicada para a solução deste tipo de problema é examinar a sua porção estrutural e acústica *desacoplada* para, posteriormente, calcular a interação entre elas. Neste sentido, Lyon (1963) discute os efeitos da vibração estrutural na redução do ruído externo em um interior acústico. O caso analisado consiste de uma pequena caixa retangular (cavidade) com uma de suas faces flexível (painel). O conjunto é submetido a uma pressão sonora externa e é avaliado o nível de ruído no interior da cavidade. Lyon calcula através de métodos analíticos, as frequências naturais *desacopladas* da cavidade e do painel. Neste caso particular, a primeira frequência natural do painel é menor do que qualquer ressonância acústica. A redução do ruído externo no interior da cavidade é calculado através de métodos energéticos, considerando o comportamento físico do sistema em cada faixa de frequência de interesse, relacionado às frequências naturais desacopladas do painel e da cavidade. Lyon mostra que em frequências onde o painel é ressonante pode ocorrer amplificação da pressão sonora externa no interior da cavidade. Esta técnica discutida por Lyon, posteriormente se tornou uma das técnicas mais conhecidas atualmente para o estudo e análise de problemas de vibro-acústica. Esse método, conhecido como Análise Estatística de Energética ou SEA, (LYON, 1975), trata estatisticamente a resposta da pressão sonora para situações em que o comprimento de onda é menor do que as dimensões da cavidade.

Para o caso de cavidades acústicas submetidas a situações em que as frequências máximas de excitação possuem comprimentos de ondas na mesma ordem de grandeza das principais dimensões da cavidade, a predição da resposta acústica pode ser feita utilizando o modelo modal. Esta abordagem foi proposta por Pretlove (1965) em que a formulação do modelo numérico é baseado na velocidade potencial acústica e na soma finita das contribuições dos modos de vibrar do painel e dos modos acústicos da cavidade desacoplados. Neste trabalho, pode ser visto que a interação acústica e estrutural é fortemente dependente da localização das frequências naturais de cada subsistema desacoplado. A frequência natural estrutural pode ser fortemente alterada no acoplamento se esta for maior que a primeira

freqüência natural acústica, tornando necessária a utilização de muitos modos acústicos para convergência do método. Pretlove (1966) também discute o caso de vibrações forçadas envolvendo acoplamento vibro-acústico. Neste caso, o método proposto é utilizado para analisar a redução de ruído externo em caixas vibro-acústica. Guy e Bhattacharya (1973) fizeram uma síntese dos trabalhos de Lyon e Pretlove e desenvolveram um modelo teórico e experimental da perda de transmissão sonora em uma placa apoiada em uma cavidade utilizando a velocidade potencial acústica e os modos do painel e da cavidade. Neste trabalho são discutidos diversos efeitos do acoplamento vibro-acústico tais como, o efeito do aumento da transmissão sonora em cavidades, o efeito da ressonância do painel, da ressonância da cavidade, da impedância acústica e da coincidência da velocidade de vibração com a velocidade do som.

Todos estes pesquisadores fizeram grandes contribuições para o entendimento do efeito da vibração de um painel em uma cavidade acústica. Entretanto, todos os modelos numéricos revistos são baseados nas soluções analíticas das equações características do problema, portanto aplicáveis apenas no estudo de problemas vibro-acústicos de geometrias simples, normalmente um painel flexível apoiado em uma cavidade retangular.

Uma a teoria mais geral com potencial aplicação em problemas de vibro-acústica de geometria irregular foi proposta por Dowell et al. (1977). Neste trabalho, a pressão sonora da cavidade e a vibração da estrutura foram escritos na forma de um conjunto de equações diferenciais ordinárias obtidas através da expansão ortogonal dos modos acústicos e estruturais *desacoplados*. Desta forma, a resposta vibro-acústica total pode ser obtida utilizando apenas os parâmetros modais e as condições de contorno de cada subsistema *desacoplado*.

A avaliação do comportamento desacoplado de cada subsistema é muito importante neste caso, para um melhor entendimento do problema vibro-acústico. Para se obter o conhecimento do comportamento puramente acústico ou do comportamento vibro-acústico do problema, uma das formas mais utilizadas é a análise modal experimental acústica e vibro-acústica, as quais serão relatadas aqui em um subitem separado.

2.1. Análise modal experimental acústica e vibro-acústica

A análise modal estrutural é um tema bem discutido na literatura (EWINS, 1986; MAIA, 1997) e a sua aplicação no estudo e análise do comportamento dinâmico de sistemas estruturais é uma realidade. Atualmente existem várias técnicas de extração dos parâmetros modais a partir de dados obtidos em testes experimentais de estruturas (método dos mínimos quadrados, método auto-regressivo, método da exponencial complexa, etc.). A maior parte dessas técnicas e métodos de análise modal estrutural também pode ser aplicada para determinação de parâmetros modais acústicos, através de testes experimentais convencionais, desde que sejam entendidas e respeitadas as diferenças entre os sistemas estruturais e acústicos. Normalmente, em testes experimentais para análise estrutural, procura-se determinar a relação entre a resposta (aceleração, velocidade ou deslocamento) e a força de excitação (martelo ou shaker) e a partir desta relação obter os parâmetros modais do modelo. Esta relação é conhecida como função de transferência ou função de resposta em frequência, FRF, do modelo e contém as informações dos parâmetros modais, frequência natural, resíduo modal e amortecimento, do modelo (MAIA, 1997).

No estudo e análise de problemas de acústica, o objetivo também é determinar a relação entre a resposta e a excitação. Porém a resposta que pode ser melhor mensurada é a pressão acústica, enquanto que a entrada é a fonte de deslocamento volumétrico do fluido contido na cavidade. Neste caso também pode ser determinada uma função de transferência que é relacionada aos parâmetros modais acústicos (frequência natural acústica, modo acústico, amortecimento acústico).

No trabalho de Nieter e Singh (1982) este assunto é claramente discutido e uma análise modal experimental acústica completa é realizada. O teste é concebido em um duto acústico em que a excitação é dada por conjunto formado por um pistão e uma biela conectado a um shaker, a velocidade do pistão é medida por um transdutor que fornece a velocidade volumétrica da fonte acústica. Um microfone é posicionado em várias posições ao longo do tubo para obter a resposta, em pressão acústica, nos diversos pontos do domínio. Neste caso, foram realizados vários testes para diferentes problemas e os resultados foram comparados com as soluções analíticas de cada problema. Posteriormente, Kung e Singh (1985) realizaram duas análises modais experimentais de cavidades tridimensionais do tipo anular. Em ambos os casos os parâmetros modais foram obtidos através do uso de técnicas

convencionais. No primeiro caso, para uma cavidade anular de geometria regular, os parâmetros modais medidos experimentalmente foram comparados com os obtidos por solução analítica. No segundo caso, para uma cavidade anular irregular em que a solução analítica é desconhecida, os parâmetros modais foram comparados com valores de referência obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. Nestes trabalhos pode ser visto que em se levando em conta as características inerentes a problemas de acústica, é possível a aplicação das técnicas de análise modal estrutural convencional na obtenção dos parâmetros modais acústicos para sistemas não acoplados.

Os trabalhos de Wolde et al. (1975) e Norris e Rebinsky (1993) discutem a aplicação do conceito de reciprocidade, utilizado em sistemas estruturais, no acoplamento entre uma estrutura flexível e uma cavidade acústica. Nestes trabalhos pode ser visto que a razão entre a resposta acústica e a excitação estrutural está diretamente relacionada com a razão entre a resposta estrutural e a excitação acústica. Baseado nesta relação de reciprocidade, Wyckaert et al. (1996) discutiu a análise modal experimental vibro-acústica. Neste trabalho, os autores discutem as técnicas de reciprocidade utilizadas para determinação da função de transferência em problemas estruturais e as mesmas são estendidas para problemas de vibro-acústica. Os dados vibro-acústicos foram obtidos através de um experimento realizado em uma caixa de geometria irregular de PVC (com a forma semelhante a uma cabine de um automóvel) com o fundo feito de alumínio (superfície flexível). As funções de transferência foram “sintetizadas” e comparadas com valores experimentais. Alguns ajustes específicos foram necessários para adaptar o método convencional de análise modal aos problemas de vibro-acústica. Isso porque, devido ao acoplamento, foram geradas na formulação do modelo modal matrizes não simétricas. Esse problema de simetria das matrizes do problema de acoplamento é bem discutido nos trabalhos de Sandberg e Goransson (1988) e Everstine (1991), nos quais são propostos alguns métodos para a simetrização das matrizes do problema vibro-acústico. No entanto, a utilização deste método de simetrização, conforme discutido em Wyckaert et al. (1996), implicam no aparecimento de termos muito difíceis de serem medidos em testes experimentais e não são conhecidos trabalhos que utilizam tais métodos.

A literatura mostra que avanços muito importantes foram feitos nos trabalhos de análise modal experimental acústica e vibro-acústica. Entretanto, todos os métodos de solução de problemas de vibro-acústica revistos neste trabalho, mostram que o acoplamento é sempre causa de grandes dificuldades na obtenção da resposta total do sistema. Nos métodos numéricos discutidos, é visto a necessidade de inversão de matrizes não simétricas. Nos métodos experimentais, são necessários ajustes para adaptar os métodos clássicos de análise

modal de estruturas em problemas de acoplamento vibro-acústico. Uma alternativa para evitar os problemas de simetrização é utilizar o conceito de impedância e mobilidade na formulação do problema. Neste caso, o ajuste do acoplamento das matrizes é realizado com base nos parâmetros desacoplados de cada subsistema (acústico e estrutural) isolado.

2.2. Conceitos de impedância e mobilidade aplicado à construção de matrizes compactas

A solução de problemas utilizando o conceito de impedância e mobilidade é bem conhecido de engenheiros eletricitas e físicos e é particularmente aplicável a análise de sistemas acoplados, o qual é composto de vários elementos lineares isolados. Cada elemento em uma determinada conexão pode ser caracterizado por uma impedância ou uma mobilidade, e o comportamento dinâmico do sistema pode ser descrito por alguns ou todos os pontos de interesse. Este conceito é particularmente útil para determinar se o grau de acoplamento entre dois ou mais elementos conectados, e são freqüentemente usados para análise de sistemas elétricos (OGATA, 1998). Contudo, o conceito de impedância e mobilidade também pode ser aplicado a sistemas mecânicos (HIXSON, 1987). Desta forma, Kim e Bennan (1999) propuseram a construção de matrizes compactas que relacionam, de forma simples, a pressão acústica e a velocidade normal da estrutura com as excitações acústicas na cavidade e as forças externas na estrutura através de termos que podem ser considerado como impedância e mobilidade do sistema. Neste artigo, os autores reexaminam a teoria clássica de acústica e elasticidade proposta por Dowell et. al. (1977), sob o ponto de vista de impedância e mobilidade. A simulação numérica e a análise experimental discutidas por Kim e Bennan (1999) são baseadas numa cavidade de geometria regular. Em um artigo mais recente, Luo et al. (2005) mostra numericamente que a formulação de matriz compacta pode ser empregada em problemas de vibro-acústica com geometria irregular.

A formulação do problema através de matrizes compactas apresenta a vantagem de que para obter a resposta total do sistema, não é necessária a solução completa das equações acopladas. As matrizes compactas são construídas utilizando apenas os modos acústicos e estruturais *desacoplados* e as freqüências naturais relacionadas a cada modo. Uma outra vantagem deste método, é que a resposta é escrita na forma matricial e a adição de uma fonte

auxiliar no modelo matemático para controlar o ruído interno na cavidade pode ser feito de maneira razoavelmente simples (NELSON, 2000).

A formulação do modelo das matrizes compactas, conforme discutido, pode representar uma alternativa potencialmente bastante atrativa para a análise do comportamento vibro-acústico de uma cavidade de geometria irregular. Neste trabalho, esse método será avaliado utilizando dados de referencia obtidos por modelos simulados em elementos finitos e dados obtidos experimentalmente através de testes de laboratório realizados em uma cavidade com uma de suas faces flexível.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE VIBRO-ACÚSTICA

Este capítulo apresenta uma discussão dos fundamentos e conceitos básicos de acústica objetivando fornecer os subsídios técnicos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Conceitos de termodinâmica e escoamento de fluídos são discutidos sob o ponto de vista de acústica e a equação da onda é mostrada. A solução aproximada da equação da onda é discutida numericamente através da aplicação do método dos elementos finitos. A interação nos contornos é discutida sob o ponto de vista acústico e é apresentada uma das equações do acoplamento vibro-acústico. Também são analisadas as vibrações nos contornos flexíveis da cavidade acústica, levando em consideração o acoplamento da velocidade estrutural com a pressão acústica. As equações estruturais são escritas, na sua forma final utilizando o método dos elementos finitos sem o detalhamento das suas respectivas deduções. As equações do comportamento acústico e estrutural são escritas na forma de um conjunto de equações não simétricas que representam o acoplamento entre uma estrutura vibrante e uma cavidade acústica.

3.1. Acoplamento vibro-acústico

Quando dois ou mais meios físicos interagem um com o outro e o comportamento independente de um meio não pode ser obtido sem a solução simultânea dos outros, o sistema é chamado de acoplado. A intensidade do acoplamento pode ser forte ou fraca, dependendo do grau de interação. O acoplamento, conforme discutido em Zienkiewicz (1989), pode ocorrer na interface entre os meios físicos, *classe I*, ou nos dois domínios simultaneamente, *classe II*.

No processo vibro-acústico, onde o acoplamento se dá na interface fluído-estrutura, o acoplamento é de *classe I* e a obtenção do comportamento do fluído ou da estrutura não pode ser obtido separadamente sem o prévio conhecimento das forças atuantes na interface. Desta forma, para melhor entender o problema vibro-acústico é necessário, primeiro, um estudo do

sistema acústico e do sistema de vibração de uma forma isolada, para posteriormente estudar o comportamento na interface.

O problema acústico é caracterizado pela rápida variação de pressão e densidade que se propaga na forma de ondas longitudinais em um meio elástico. No caso da propagação do som, em que as variações de densidade e pressão são muito pequenas, um modelo que pode representar esta propagação é a equação da onda, que relaciona a variação de pressão sonora em função do espaço e do tempo. Já as vibrações mecânicas podem ser caracterizadas pelo movimento oscilatório em torno de uma posição de referência. Quando uma estrutura vibra em um meio acústico (por exemplo, uma cavidade) esses movimentos oscilatórios podem provocar uma variação nas propriedades do fluido no contorno produzindo as variações de pressão e densidade que vão provocar a propagação do som. Esta propagação, por sua vez, pode interagir com a estrutura de forma considerável, produzindo movimentos na própria estrutura e vice-versa. Tal comportamento caracteriza o acoplamento vibro-acústico.

3.2. Propagação da pressão sonora em fluídos

O fenômeno do som envolve essencialmente as taxas de variação de densidade, associadas às variações de pressão, temperatura e posição das partículas do fluido ao longo do tempo. Pode ser visto experimentalmente que estas variações de densidade, pressão e temperatura são extremamente pequenas em relação aos seus valores de equilíbrio na ausência de som (FAHY, 2003). Neste caso, o som se propaga através de ondas longitudinais. As ondas são produzidas pela rápida compressão e descompressão do ar e a velocidade dessa propagação é conhecida como *velocidade do som*. O estudo da propagação da pressão sonora pode ser feito de forma simplificada supondo-se ondas planas, o que representa considerar as variáveis acústicas com amplitudes constantes ao longo de um plano perpendicular ao plano de propagação. A equação da onda será deduzida pela relação existente entre pressão e densidade combinada com a equação da massa e do momento.

3.2.1. Relação entre pressão e densidade em processos adiabáticos

O problema acústico é caracterizado pela variação de pressão dentro da cavidade, produzido por excitações estruturais e/ou acústicas, que podem se propagar no meio fluido. Estas variações de pressão e densidade devem estar de acordo com as leis da termodinâmica.

A propagação de ondas sonoras é um fenômeno adiabático, isto é, os gradientes de temperatura entre partes adjacentes do fluido que são comprimidas e expandidas são relativamente pequenos (KINSLER, 1962). Nestas condições, a relação de pressão e densidade para processos adiabáticos pode ser dada pela equação:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (3.1)$$

Em que: p e ρ são a pressão e a densidade no fluido, respectivamente. p_0 e ρ_0 são os valores de equilíbrio e γ é o fator de compressibilidade do fluido.

A equação (3.1) descreve a curva de variação da pressão com a densidade, a variação se dá na forma de uma hipérbole. No entanto, para sinais acústicos, estas variações são muito pequenas, de forma que podem ser aproximadas por uma reta em torno do ponto de equilíbrio p_0 e ρ_0 , como mostra a figura 3.1. Isto permite escrever a curva de variação da pressão na forma da equação (3.2).

$$c^2 = \frac{\rho - \rho_0}{p - p_0} \quad (3.2)$$

Em que: $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ - tem unidades (m/s) – é chamada velocidade local do som.

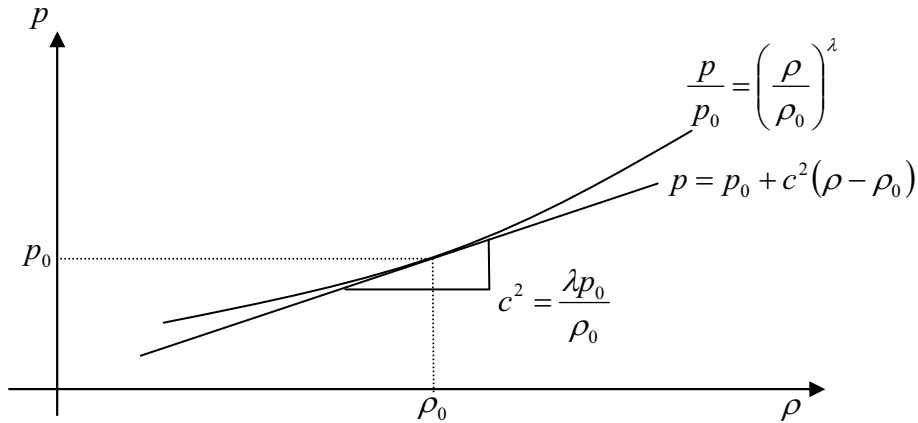


Figura 3.1 – Ilustração da relação linear e não linear entre pressão acústica e densidade

A equação (3.2) mostra o comportamento linear entre pressão e densidade em torno do ponto de equilíbrio (pressão e densidade em condições atmosféricas). Esta relação é muito útil na análise acústica visto que a pressão é dada como função linear apenas da densidade.

3.2.2. Equações da conservação da massa e do momento

A rápida compressão do ar faz com que as ondas sonoras se propaguem de um ponto a outro. Se um volume de controle (v.c.) for escolhido arbitrariamente em uma região de propagação sonora, o fluxo de massa no interior deste v.c. deve ser igual à variação de massa no seu interior. Considere um volume de controle de volume V , área S e comprimento $\Delta \varepsilon$ mostrado na figura 3.2, o qual é sujeito a um fluxo de massa de densidade ρ e velocidade u em uma direção arbitrária ε .

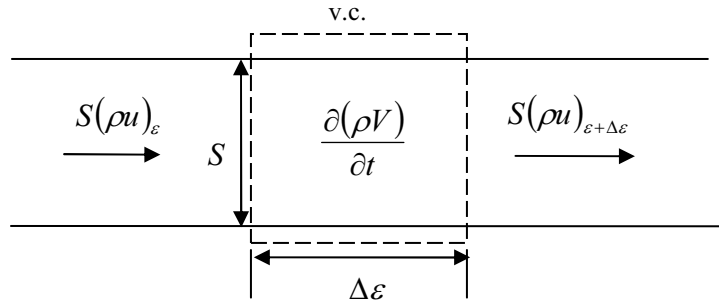


Figura 3.2 – Fluxo de massa em um volume de controle

Se este volume for indeformável e invariante no tempo, o balanço de massa no v.c. pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho u)_\varepsilon - (\rho u)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}}{\Delta\varepsilon} \quad (3.3)$$

Fazendo-se $\Delta\varepsilon$ suficientemente pequeno, pode-se reescrever a equação acima como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\rho u)_\varepsilon - (\rho u)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}}{\Delta\varepsilon} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial \varepsilon} \quad (3.4)$$

O balanço de massa escrito na direção ε pode ser estendido para todos os eixos do sistema de coordenada cartesiano, desta forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0 \quad (3.5)$$

Em que $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$

A equação (3.5), conhecida como equação da conservação da massa, relaciona as variações de densidade e velocidade das partículas fluidas no escoamento. Para o caso da propagação sonora, a densidade ρ na equação da massa pode ser substituída pela pressão sonora p através da equação 3.2.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \nabla(\rho u) = 0 \quad (3.6)$$

Neste momento têm-se duas equações (equação 3.2 e 3.6) e três incógnitas (p , ρ e u). A terceira equação é obtida aplicando a segunda lei de Newton no volume de controle escolhido. O fluxo de massa carrega certa quantidade de movimento para o interior do volume de controle. Esta quantidade de movimento deve ser igual às forças externas aplicadas neste

volume (BLACKSTOCK, 2000). Na figura abaixo, o volume de controle é sujeito as pressões acústicas e ao fluxo de momento, na fronteira.

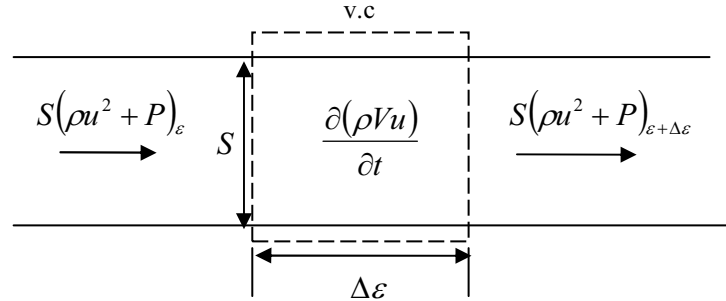


Figura 3.3 – Fluxo de momento em um volume de controle

O balanço de forças para o volume de controle, para $\Delta\epsilon$ suficientemente pequeno, pode ser escrito como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \lim_{\Delta\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\rho u^2)_\epsilon - (\rho u^2)_{\epsilon+\Delta\epsilon} + P_\epsilon - P_{\epsilon+\Delta\epsilon}}{\Delta\epsilon} = -\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial \epsilon} - \frac{\partial(P)}{\partial \epsilon} \quad (3.7)$$

Estendendo o resultado acima para todas as coordenadas cartesianas e aplicando a equação da conservação da massa, a equação do momento é escrita como:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u \right) + \nabla p = 0 \quad (3.8)$$

Neste momento, tem-se um conjunto de equações básicas que representam o comportamento da propagação sonora. Estas equações (3.2, 3.6 e 3.8) serão adequadamente combinadas e apenas uma equação será escrita, a equação da onda.

3.2.3. Equação da onda para sinais sonoros

O problema acústico, como foi discutido anteriormente, é caracterizado por pequenas variações de pressão e densidade em torno de um ponto de equilíbrio. Para se ter uma idéia da ordem de grandeza da variação de pressão acústica, a decolagem de um avião a jato pode chegar a 130 dB, que é aproximadamente uma variação de 64 Pa em torno da pressão

atmosférica, que é aproximadamente 100 kPa (o valor de referência na escala decibel é $\text{dB}_{ref} = 20 \mu\text{Pa}$).

Desta forma, as equações (3.6) e (3.8) podem ser linearizadas, de forma a se obter uma equação mais simples que relacione as taxas de variação da pressão sonora.

Para a linearização do problema, são consideradas pequenas variações de pressão e densidade (e de temperatura) em torno dos valores de equilíbrio P_0 , ρ_0 e T_0 , figura 3.4.

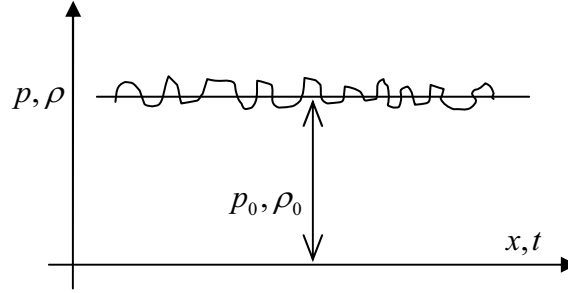


Figura 3.4 – Linearização da equação da onda

Definindo as pequenas variações como P e $\delta\rho$, equação (3.9) e (3.10).

$$P \approx p - p_0 \quad (3.9)$$

$$\delta\rho \approx \rho - \rho_0 \quad (3.10)$$

e substituindo as expressões acima nas equações de conservação de massa e momento, vem:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \left(\rho_0 \nabla u + \underbrace{\delta\rho \nabla u}_{\approx 0} + \underbrace{u \nabla \delta\rho}_{\approx 0} \right) = 0 \quad (3.11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\rho_0 u \nabla u}_{\approx 0} + \underbrace{\delta\rho \frac{\partial u}{\partial t}}_{\approx 0} + \underbrace{\delta\rho u \nabla u}_{\approx 0} + \nabla P = 0 \quad (3.12)$$

Desde que $|\delta\rho| \ll \rho_0$ e $|u| \ll c$, os termos sublinhados por chaves nas equações acima são muito pequenos comparados aos demais, de forma que podem ser desprezados. Assim têm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla u = 0 \quad (3.13)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla P = 0 \quad (3.14)$$

Derivando a equação (3.13) em relação ao tempo e aplicando o operador ∇ à equação (3.14), a velocidade de partícula, u , pode ser eliminada nas duas equações, assim:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (3.15)$$

Em que: $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} i + \frac{\partial^2}{\partial y^2} j + \frac{\partial^2}{\partial z^2} k \right)$. A equação acima é a conhecida equação da onda, da qual relaciona as variações de pressão sonora dentro de um campo acústico.

Para sinais harmônicos, a pressão sonora pode ser expressa por uma simples equação da forma:

$$P = P e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

Substituindo a relação acima na equação (3.15), pode se obter a equação da onda no domínio da frequência, equação de helmholtz (FAHY; GARDONIO, 2007).

$$\nabla^2 P + (\omega/c)^2 P = 0 \quad (3.17)$$

Das equações escritas nesta etapa, a equação da onda, equação (3.15), relaciona a variação da pressão acústica no espaço e no tempo enquanto a equação de helmholtz, equação (3.17), é utilizada quando a pressão acústica pode ser representada harmonicamente. Na próxima etapa, será apresentada a solução numérica aproximada da equação de helmholtz por elementos finitos, visando à aplicação no estudo e análise vibro-acústica em problemas de cavidade de geometria complexa.

3.3. Solução aproximada da equação da onda pelo método dos elementos finitos

A solução analítica da equação (3.17), equação de helmholtz, pode ser obtida para problemas de geometria relativamente simples, como uma cavidade retangular, cilíndrica ou esférica (BLACKSTOCK, 2000; FAHY, 2003). Contudo, a maior parte dos problemas de ordem prática se apresenta em cavidades de geometria complexa, no qual é impraticável ou até mesmo impossível a obtenção de solução analítica. Nestes casos, uma alternativa para se obter uma a solução aproximada da equação da onda é através de métodos numéricos. Esta seção apresenta a solução aproximada da equação da onda pelo método dos elementos finitos.

Para a discretização da equação da onda pelo método dos elementos finitos, a equação de helmholtz é multiplicada por uma função peso, r , e integrada no domínio V :

$$\int_V r (\nabla^2 P + (\omega/c)^2 P) dV = 0 \quad (3.18)$$

A ordem (grau) da equação acima pode ser reduzida aplicando-se a primeira identidade de green, desta forma (BLACKSTOCK, 2000):

$$\int_V (\nabla P \cdot \nabla r - r(\omega/c)^2 P) dV - \int_S r \frac{\partial P}{\partial n} dS = 0 \quad (3.19)$$

A equação (3.19) está escrita em uma forma conveniente para a aproximação clássica por elementos finitos, contudo, ainda é necessária uma discussão com relação às condições de contorno associadas ao problema de acústica. De uma forma geral, as condições de contorno do campo acústico são: $(\partial P / \partial n) = 0$, para o caso de parede rígida e $P = 0$, para o caso de fronteira aberta. Para o caso de absorção sonora, uma condição de contorno pode ser expressa em termos da impedância normal da superfície, $P / u_n = Z_n$, em que o subscrito n indica a componente normal ao contorno. No acoplamento vibro-acústico a velocidade de vibração no contorno é igual à velocidade das partículas de fluido do domínio acústico.

Nesta seção, a aproximação por elementos finitos será feita para o caso de paredes rígidas. Nas seções seguintes, serão discutidos os casos de absorção sonora e acoplamento vibro-acústico.

Na aproximação por elementos finitos, conforme discutido em Zienkiwicz (1989) a solução do meio contínuo pode ser aproximada pela soma de seus valores nodais, P_e , multiplicados por uma função de forma, N_i^f , pré-definida. Desta forma, a pressão acústica pode ser dada por:

$$P \approx \sum_{i=1}^N N_i^f P_e \quad (3.20)$$

Como discutido em Zienkiewicz e Taylor (1989), a função peso da equação (3.19) pode ser escolhida com as mesmas características da função de forma utilizada como solução do problema (procedimento de Galerkin), isto é:

$$r = \sum_{i=1}^N N_i^f \quad (3.21)$$

Substituindo as relações contidas nas equações (3.20) e (3.21) na equação (3.19) e utilizando a condição de contorno de parede rígida, escreve-se a equação (3.22).

$$\int_V \nabla N_i^f \nabla N_j^f dV P_e - \omega^2 \frac{1}{c^2} \int_V N_i^f N_j^f dV P_e = 0 \quad (3.22)$$

A equação (3.22) permite a representação da equação da onda na forma direta para cada elemento e o cálculo das integrais leva as matrizes do elemento, expressões (3.23) e (3.24).

$$[K_e^f] = \int_V \nabla N_i^f \nabla N_i^f dV \quad (3.23)$$

$$[M_e^f] = \frac{1}{c^2} \int_V N_i^f N_i^f dV \quad (3.24)$$

Substituindo as equações elementares (3.23) e (3.24) na equação (3.22), e baseado no procedimento utilizado na formulação do método dos elementos finitos para escrever a matriz global do sistema, escreve-se a equação:

$$([K^f] - \omega^2 [M^f])\{P\} = 0 \quad (3.25)$$

A equação (3.25) representa o modelo numérico de elementos finitos da resposta acústica livre em uma cavidade de paredes rígidas sem absorção sonora. As matrizes $[K^f]$ e $[M^f]$ são dadas pela composição das matrizes $[K_e^f]$ e $[M_e^f]$ dos vários elementos e não representam necessariamente as matrizes de massa e rigidez tal como são conhecidas no problema estrutural (GÖRANSSON, 1993).

Uma outra forma fisicamente mais direta de modelar as matrizes de massa e rigidez do problema acústico é obtida escrevendo as equações em relação ao deslocamento do fluido, ao invés de pressão acústica. Contudo, é muito mais fácil medir pressão acústica num fluido do que medir deslocamento, velocidade ou aceleração de partículas do fluido, (WYCKAERT, 1996). Razão pela qual a formulação para pressão é utilizada nos trabalhos de acústica. Na próxima seção, será discutida a inclusão de um termo de absorção sonora no modelo de elementos finitos.

3.3.1. Implementação da absorção sonora

Outro aspecto importante na formulação dos problemas de vibro-acústica é a absorção sonora. Se um problema de acústica contém algum mecanismo ou material o qual tem o propósito de absorver energia do campo acústico, o problema pode ser modelado de diferentes maneiras (CRAGGS, 1986). Contudo, uma aproximação simples pode ser alcançada através do conceito de impedância. Em acústica, impedância é definida como a relação entre a pressão acústica e a velocidade normal de partícula no contorno, expressão (3.26).

$$Z_n = \frac{P}{u_n}, \text{ em } S \quad (3.26)$$

Neste caso, S representa a superfície absorviva da cavidade. A equação (3.26) representa a impedância na direção normal das paredes que circundam o fluido. Para a aplicação do método dos elementos finitos, torna-se conveniente normalizar a impedância acústica no contorno. Uma normalização que pode ser utilizada é a definida por NELSON (2000) como *admitância acústica específica*, a qual é dada por:

$$\beta = \frac{\rho_0 c}{Z_n} \quad (3.27)$$

Em que o valor β varia de 0 (fronteira de paredes rígida ou impedância infinita) à 1 (fronteira aberta) .

Substituindo (3.26) e (3.27) na equação do momento, pode se escrever a equação (3.28).

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{i\omega\beta}{c} P \quad (3.28)$$

Agora, substituindo a equação (3.28) em (3.19) e utilizando o procedimento de Galerkin para definir as funções de ponderação, pode-se escrever uma expressão, na forma matricial, para o amortecimento do problema, expressão (3.29).

$$[C^f] = \frac{\beta}{c} \int_S N^i N^f dS \quad (3.29)$$

Nota-se que para $\beta = 0$, o contorno possui uma impedância infinita, ou seja, condição de parede rígida. De outra forma, se $\beta = 1$, a impedância no contorno é igual a $\rho_0 c$ - condição de Sommerfeld (1949) -, ou seja, não ocorrem reflexões no contorno.

No caso em que ocorrem reflexões no contorno e envolve paredes flexíveis, existe a necessidade da discussão do acoplamento vibro-acústico e sua inclusão no modelo de elementos finitos, o que é tratado na próxima seção.

3.3.2. Acoplamento vibro-acústico

Se uma das paredes da cavidade que circundam o fluido for flexível, tem se caracterizado um problema de vibro-acústica. Neste caso, a velocidade de vibração da estrutura flexível no contorno é igual à velocidade das partículas do fluido. Considerando

resposta harmônica, esta relação pode ser escrita convenientemente em função dos deslocamentos, assim:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_0 \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = \rho_0 \omega^2 w_n \quad (3.30)$$

A equação (3.30) apresenta um novo termo, w_n , que representa os deslocamentos do contorno flexível no contorno da cavidade. Considerando a aproximação dos deslocamentos estruturais pela soma dos deslocamentos nodais, multiplicado por uma função de forma pré-definida para o problema estrutural o deslocamento estrutural do modelo pode ser escrito em termos dos deslocamentos modais dos elementos, equação (3.31).

$$w \approx \sum_{i=1}^M N_i^s w_e \quad (3.31)$$

Desta forma, aplicando (3.30) e (3.31) na equação (3.19) e utilizando os procedimentos de galerkin, a matriz de acoplamento pode ser escrita da seguinte forma, (GÖRANSSON, 1993):

$$[M^c] = \rho_0 \omega^2 \int_{S_f} N_i^f N_j^s \vec{n} w_e dS \quad (3.32)$$

Assim, pode-se escrever a equação do comportamento vibro-acústico em função da pressão acústica, equação (3.33).

$$(-\omega^2 [M^f] - i\omega [C^f] + [K^f])\{P\} = \omega^2 [M^c]\{w\} \quad (3.33)$$

A equação (3.33) representa o modelo aproximado em elementos finitos da equação da onda para uma cavidade contemplando as quatro condições de contorno definidas, são elas: paredes rígidas, fronteira aberta, absorção sonora e acoplamento vibro-acústico. O modelo pode ainda ser escrito de uma forma mais completa, através da inserção de um termo que caracteriza a variação do volume do fluido através da ação de um agente externo, fonte acústica.

$$(-\omega^2 [M^f] - i\omega [C^f] + [K^f])\{P\} = \omega^2 [M^c]\{w\} + \rho\{\dot{q}\} \quad (3.34)$$

O termo $\rho\{\dot{q}\}$ é conhecido como a “densidade da força da fonte acústica” (FAHY, 2003). A equação (3.34) não pode ser resolvida sem o conhecimento dos deslocamentos estruturais no contorno. Desta forma, a próxima seção apresenta de uma forma resumida as equações aproximadas por elementos finitos do problema estrutural.

3.3.3. Comportamento da estrutura flexível no acoplamento vibro-acústico

Se a cavidade acústica tem uma de suas bordas flexível, o fluido pode excitar movimento estrutural, bem como o movimento estrutural, pode variar o volume da cavidade, provocando movimento das partículas do fluido. O problema estrutural discretizado em elementos finitos é bem conhecido (ZIENKIEWICZ, 1989; GÖRANSSON, 1993) e é dado pela expressão (3.35).

$$\left(-\omega^2[M^s] - i\omega[C^s] + [K^s]\right)\{x\} = \{F\} + \int_{S_f} P dS \quad (3.35)$$

$\{F\}$ é o vetor de forças externas aplicadas em um nó da estrutura e $\int_{S_f} P dS$ é a distribuição de pressão acústica na área da estrutura flexível. Através dos procedimentos de Galerkin, maiores detalhes em ZIENKIEWICZ (1989) e GÖRANSSON (1993), o termo de acoplamento fluido estrutura pode ser dado por:

$$[K^c] = \int_{S_f} N^s \bar{n} N^f dS \quad (3.36)$$

Agora, escrevendo as equações (3.34) e (3.35) em um conjunto de equações de segunda ordem, tem-se:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M^s & 0 \\ M^c & M^f \end{bmatrix} - i\omega \begin{bmatrix} C^s & 0 \\ 0 & C^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^s & K^c \\ 0 & K^f \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

A equação (3.37) representa a aproximação por elementos finitos do problema de acoplamento vibro-acústico. Nota-se que a equação não é simétrica, isto porque o efeito do campo acústico na estrutura atua como um tipo de rigidez e a influência estrutural na cavidade como um tipo de inércia. A falta de simetria na equação (3.37) gera dificuldades na solução do problema de acoplamento.

No caso de simulações numéricas, a obtenção dos modos vibro-acústicos e da resposta em frequência envolve a utilização de algoritmos com capacidade de extração de autovalores e autovetores de equações não simétricas. Em problemas com um grande número de elementos, o esforço e tempo computacional podem ser tão grandes que tornam a solução do problema impraticável (GÖRANSSON, 1993).

Alguns autores têm tratado o problema de simetria propondo a inclusão de novos termos de forma a tornar simétrica a equação do acoplamento, contudo, esta formulação possui apenas aplicação computacional, devido à impossibilidade de se medir estes termos

experimentalmente (WYCKAERT *et al.*, 1996). Um método alternativo, no qual está baseado este trabalho, será apresentado no próximo capítulo. O método utiliza as formas modais desacopladas, isto é, $[K_c] = [M_c] = 0$ para calcular a resposta em frequência aproximada do acoplamento vibro-acústico. Desta forma, não é necessário obter a solução das matrizes não simétricas da equação (3.37).

4. APROXIMAÇÃO VIBRO-ACÚSTICA PELO MÉTODO DAS MATRIZES COMPACTAS

Neste capítulo, será apresentada a técnica de solução de problemas de vibro-acústica utilizando matrizes compactas. Nesta técnica, os conceitos de impedância e mobilidade são utilizados para a construção de um conjunto de matrizes compactas que relacionam a pressão acústica na cavidade e a velocidade normal do contorno flexível. Adicionalmente, os conceitos de impedância e mobilidade são revistos sob o ponto de vista de acústica e vibrações e as matrizes compactas são escritas baseadas apenas nos parâmetros modais acústicos e estruturais desacoplados.

4.1. Considerações acústicas para aplicação dos conceitos de impedância e mobilidade

Nesta etapa, o comportamento acústico será avaliado para o caso em que a frequência máxima de excitação possui comprimento de onda da mesma ordem de grandeza das principais dimensões da cavidade. Nestes casos, a resposta acústica pode ser dada pela soma das contribuições de cada modo na faixa de frequência escolhida. Desta forma, as contribuições modais podem ser relacionadas a elementos de impedância e mobilidade.

Considere o esquema do problema vibro-acústico representado na figura 4.1.

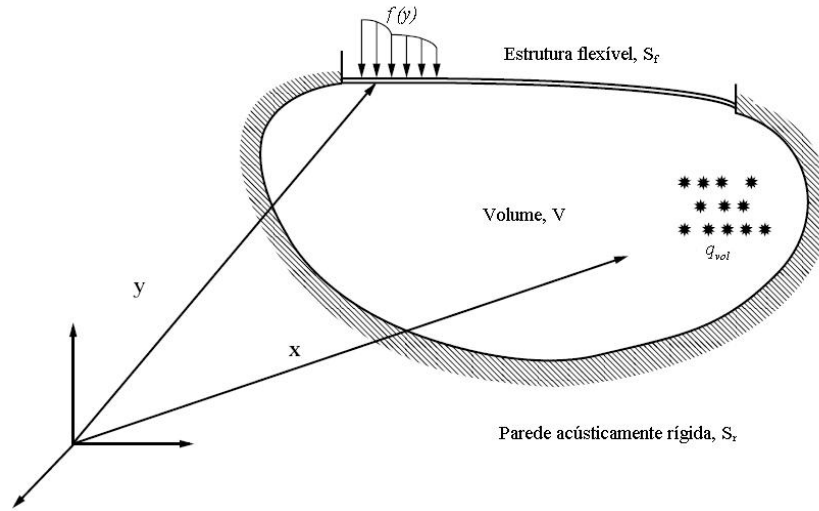


Figura 4.1 – Sistema vibro-acústico com excitação estrutural e acústica

Desde que a cavidade acústica ocupe um Volume V (coordenadas x 's) e seu contorno seja uma superfície S (coordenadas y 's) e ainda que o contorno S_f seja flexível enquanto o contorno S_r seja rígido, se houver uma fonte acústica e o movimento do fluido se acoplar ao contorno flexível, a variação de pressão no fluido satisfaz a equação da onda não homogênea e suas condições de contorno associadas (FAHY,2003):

$$\nabla^2 P(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} P(x, \omega) = -i\rho_0 \omega q_{vol}(x, \omega) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n}(y) &= -\rho_0 \omega^2 w(y, \omega) = -i\rho_0 \omega u(y, \omega) \text{ em } S_f \\ &= 0 \text{ em } S_r \end{aligned} \quad (4.2)$$

De outra forma, se o volume V estiver circundado apenas por superfícies rígidas e não houver qualquer fonte permanente de excitação, então o autovetor φ_r associado ao r -ésimo modo é solução da equação e tem as seguintes propriedades (DOWELL, *et al.* 1977):

$$\nabla^2 \varphi_r(x) = -\left(\frac{\omega_r}{c}\right)^2 \varphi_r(x) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial n}(y) = 0 \text{ em } S = S_r + S_f \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \int_V \varphi_r(x) \varphi_n(x) dV &= 0 \quad r \neq n, \\ &\equiv M_n \quad r = n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em que ω_r é a r -ésima frequência natural acústica associada ao modo φ_r .

As equações (4.1) e (4.3) podem ser combinadas e integradas em uma única equação. Aplicando o teorema de Green, pode-se escrever a equação (4.6):

$$\int_V \left(P(x, \omega) \nabla^2 \varphi_r(x) - \varphi_r(x) \nabla^2 P(x, \omega) \right) dV = \int_S \left(P(y, \omega) \frac{\partial \varphi_r}{\partial n}(y) - \varphi_r(y) \frac{\partial P}{\partial n}(y, \omega) \right) dS \quad (4.6)$$

A equação (4.6) pode ser escrita em uma forma mais conveniente, aplicando as condições de contorno descritas nas equações (4.2) e (4.4).

$$\int_V P(x, \omega) \varphi_r(x) dV = \frac{i \omega \rho_0 c^2}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \left(\int_{S_f} \varphi_r(y) u(y, \omega) dS + \int_V q_{vol}(x) dV \right) \quad (4.7)$$

As integrais relativas às variáveis: pressão acústica e velocidade de vibração, contidas na equação (4.7), podem ser calculadas aproximadamente utilizando as respostas modais em pressão acústica da cavidade e em velocidade de vibração no contorno flexível, ou seja, a pressão acústica e a vibração da estrutura podem ser descritas pela soma dos seus R e M modos respectivamente. Assim a pressão P dentro do volume V e a velocidade de vibração u no contorno flexível S_f podem ser escritas como (DOWELL *et al.*, 1977):

$$P(x, \omega) = \sum_{r=1}^R \varphi_r(x) \tilde{P}_r(\omega) \quad (4.8)$$

$$u(y, \omega) = \sum_{m=1}^M \psi_m(y) \tilde{u}_m(\omega) \quad (4.9)$$

Em que $\tilde{P}_r$ e $\tilde{u}_m$ são variáveis complexas definidas como o termo de ressonância do modo acústico e o termo de ressonância do modo estrutural, respectivamente.

Substituindo as relações apresentadas nas equações (4.8) e (4.9) na equação (4.7) e lançando mão das condições de ortogonalidade (4.5), escreve-se a equação (4.10):

$$\tilde{P}_r(\omega) = \frac{\rho_0 c^2}{M_r} \frac{i \omega}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \left(\int_{S_f} \sum_{m=1}^M \varphi_r(y) \psi_m(y) \tilde{u}_m(\omega) dS + \int_V \varphi_r(x) q_{vol}(x, \omega) dV \right) \quad (4.10)$$

A equação (4.10) foi escrita para o caso de parede rígida $(\partial P / \partial n) = 0$, isto é, impedância infinita na parede. Contudo, tal fato é muito difícil de conseguir na prática. De modo que a parede deve apresentar uma admitância positiva e maior que zero, como representado na equação (3.31). Desta forma, a equação (4.10) é reescrita considerando um modelo conveniente de amortecimento, na seguinte forma:

$$\tilde{P}_r(\omega) = \frac{\rho_0 c^2}{M_r} \frac{i\omega}{\left(\omega_r^2 - \omega^2 + \sum_{m=1}^M i\eta_{r,m}\omega\right)} \left(\int_{S_f} \sum_{m=1}^M \varphi_r(y) \psi_m(y) \tilde{u}_m(\omega) dS + \int_V \varphi_r(x) q_{vol}(x, \omega) dV \right) \quad (4.11)$$

Em que:

$$\eta_{r,m} = \frac{\beta}{c} \int_S \varphi_r(y) \varphi_m(y) \quad (4.12)$$

O termo $\eta_{r,m}$, conforme discutido por Nelson (2000), para baixos níveis de amortecimento, leva a termos cruzados de $\eta_{r,m}$ que são relativamente pequenos e podem ser desprezados.

Nota-se que o primeiro modo acústico caracteriza-se por $\omega_1 = 0, \varphi_1 = 1$ (ver equação (4.3)), o qual caracteriza o comportamento compliante da cavidade (NELSON, 2000). Para este caso especial, $r=1$, Kim e Brennan (1999) desenvolveram a seguinte expressão para o termo de amortecimento:

$$\eta_{1,1} = \frac{I}{\tau_a} \quad (4.13)$$

Em que τ_a é definido como uma constante de tempo de decaimento para o primeiro modo (NELSON, 2000).

Para os demais modos, conforme mostrado em Nelson (2000), os termos de amortecimento podem ser escritos na forma de amortecimento viscoso.

$$\eta_{r,r} = 2\zeta_r \omega_r \quad r = 2, 3 \dots R \quad (4.14)$$

Desta forma, a equação (4.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{P}_r(\omega) = D_r \left(\int_{S_f} \sum_{m=1}^M \varphi_r(y) \psi_m(y) \tilde{u}_m(\omega) dS + \int_V \varphi_r(x) q_{vol}(x, \omega) dV \right) \quad (4.15)$$

Em que:

$$D_r = \frac{\rho_0 c^2}{M_r} \frac{1}{1/\tau_a + i\omega} \quad r=1 \quad (4.16)$$

$$D_r = \frac{\rho_0 c^2}{M_r} \frac{i\omega}{\left(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega\right)} \quad r = 2, 3 \dots R \quad (4.17)$$

Cada termo D_r pode ser caracterizado como um elemento de impedância acústica do fluido em relação ao r -ésimo modo. Neste modelo, a impedância é calculada, baseado nos modos acústicos e nas frequências naturais do problema acústico desacoplado.

Para resolver a equação (4.15), é necessário conhecer a velocidade de vibração do contorno flexível. Desta forma, na próxima etapa, as equações estruturais serão analisadas sob o ponto de vista de sua resposta modal e a velocidade de vibração no contorno flexível será escrito em termos relacionados a elementos de impedância e mobilidade.

4.2. Considerações estruturais para o problema de impedância e mobilidade

Quando a estrutura pode ser representada por um modelo estrutural linear a interação total entre o fluído e a estrutura pode ser modelada de uma maneira direta. Baseado em Timoshenko (1994), a equação diferencial parcial das placas pode ser escrita como:

$$D\nabla^4 w(y, \omega) - \rho_s h \omega^2 w(y, \omega) = P(y, \omega) - P_s(y, \omega) \quad (4.18)$$

Em que D é a rigidez de flexão da placa, ρ_s e h é a densidade e a espessura da placa, respectivamente. Os termos do lado direito da equação (4.18) são as pressões devido à cavidade acústica e devido a algum agente externo.

Se a placa estiver no vácuo e sem forças externas, então ψ_m , um m -ésimo autovetor estrutural, é solução da equação (4.18), ou seja:

$$D\nabla^4 \psi_m(y) - \rho_s h \omega_m^2 \psi_m(y) = 0 \quad (4.19)$$

Admitindo ortogonalidade entre os modos, pode-se escrever a seguinte normalização:

$$\int_{S_f} \psi_r(y) \psi_m(y) dy = 0 \text{ para } r \neq m \quad (4.20)$$

$$\equiv M_m \text{ para } r = m$$

Aplicando (4.20) em (4.19), escreve-se a equação (4.21)

$$w(y, \omega) = \frac{I}{\rho_s h (\omega_m^2 - \omega^2)} (P(y, \omega) - P_s(y, \omega)) \quad (4.21)$$

Desde que a resposta do sistema seja harmônica, o deslocamento estrutural pode ser escrito em velocidade, através da seguinte relação:

$$\tilde{u}(\omega) = i\omega \tilde{w}(\omega) \quad (4.22)$$

Desta forma, a equação (4.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{u}(y, \omega) = i\omega \sum_{m=1}^M \psi_m(y) \tilde{w}_m(\omega) \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.21), multiplicando por ψ_n e integrando sobre S_f , depois usando a condição (4.20), escreve-se a equação (4.24)

$$\tilde{u}_m(\omega) = D_m \left(\int_{S_f} \left(\sum_{r=1}^R \psi_m(y) \varphi_r(y) \tilde{P}(\omega) - \psi_m(y) P_s(y, \omega) \right) dS \right) \quad (4.24)$$

Considerando um termo conveniente de amortecimento (DOWELL *et al.*, 1977), o termo D_m pode ser escrito da seguinte forma:

$$D_m = \frac{i\omega}{\rho_s h M_m (\omega_m^2 - \omega^2 + 2i\xi_m \omega_m \omega)} \quad (4.25)$$

Cada termo D_m representa a mobilidade estrutural da estrutura flexível em relação ao m -ésimo modo. Neste modelo, a mobilidade é calculada, baseado nos modos de vibrar nas frequências naturais do problema estrutural *desacoplado*.

Na próxima etapa, o acoplamento vibro-acústico será avaliado do ponto de vista de impedância e mobilidade. A aproximação será feita utilizando um modelo vibro-acústico simples possuindo apenas um modo acústico e um modo estrutural.

4.3. Conceitos de impedância e mobilidade aplicado a problemas de vibro-acústica

Para uma melhor compreensão da aproximação do problema de acoplamento vibro-acústico baseado nos conceitos de impedância e mobilidade, considere um modelo conceitual simples de uma cavidade acústica e uma estrutura flexível descrito sob o ponto de vista de impedância e mobilidade. Este modelo será utilizado como um ponto de partida para a compreensão de um modelo geral envolvendo o acoplamento vibro-acústico com base nos trabalhos de DOWELL *et al.* (1977) e KIM e BRENNAN (1999).

A impedância mecânica em um sistema vibratório é definida como a razão entre a força senoidal aplicada em um ponto e a resposta medida em velocidade, sendo que a mobilidade é definida como o inverso da impedância (HIXSON, 1987). O conceito de impedância é muito conhecido na área elétrica e pode também ser aplicado na mecânica, e, com alguns ajustes esse conceito pode ser estendido para o tratamento de problemas de acoplamento entre cavidades acústicas e estruturas flexíveis.

Considere uma força senoidal de magnitude F_0 e uma frequência angular ω , equação (4.26):

$$F = F_0 e^{i\omega t} \quad (4.26)$$

A aplicação desta força em um sistema linear resulta em uma velocidade u :

$$u = u_0 e^{i(\omega t + \theta)} \quad (4.27)$$

em que u_0 é a magnitude da velocidade e θ é o ângulo de fase entre a força e a velocidade.

Desta forma, pela definição, a impedância mecânica do sistema Z_m será dada pela expressão (4.28):

$$Z_m = F/u \quad (4.28)$$

Do mesmo modo, a mobilidade mecânica do sistema Y_m é dada por:

$$Y_m = u/F \quad (4.29)$$

Estes conceitos de impedância e mobilidade podem ser estendidos para problemas de acústica desde que alguns ajustes sejam feitos em relação às dimensões. Para o modelo simples em questão, possuindo apenas um modo acústico e um modo estrutural, este termo de ajuste pode ser definido pelo quadrado da área do contorno de acoplamento, S_f^2 , conforme discutido em (KIM; BRENNAN 1999).

Excitação estrutural

O conceito de impedância e mobilidade acústica são definidas de forma similar, utilizando as variáveis pressão acústica P e fonte acústica q (KINSLER; FREI, 1962). A impedância e a mobilidade acústica de um sistema acústico são dadas pelas expressões (4.30) e (4.31) respectivamente.

$$Z_a = P/q \quad (4.30)$$

$$Y_a = q/P \quad (4.31)$$

Para estudar e entender um sistema vibro-acústico considere um sistema simples, consistindo de mobilidade estrutural desacoplada Y_m e impedância acústica acoplada Z_{ca} excitado por uma força estrutural F como mostrado na figura 4.2.

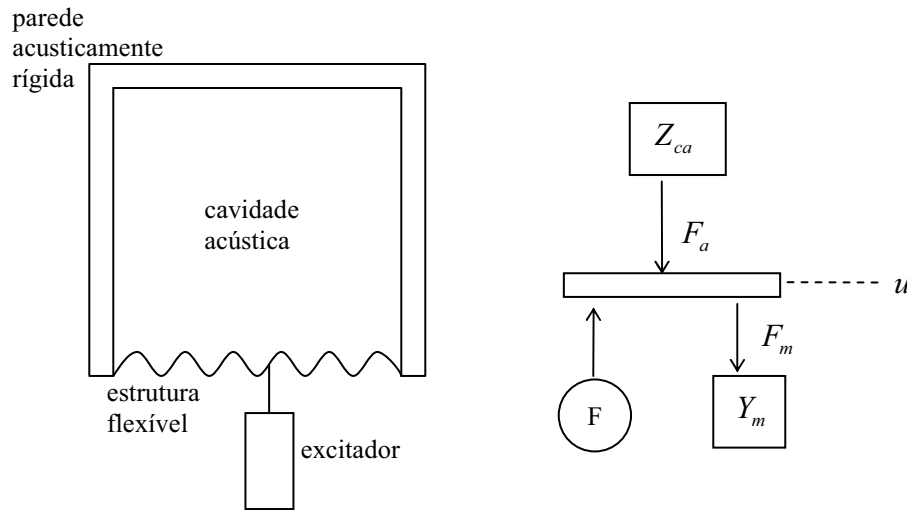


Figura 4.2 – Sistema vibro-acústico excitado por força estrutural e representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade

A mobilidade Y_m do sistema (KIM; BRENNAN 1999) é definida como *mobilidade estrutural desacoplada*, ou seja, é a razão entre a velocidade na estrutura u e a força aplicada F_m e a impedância Z_{ca} é definida pela força de reação acústica F_a e velocidade estrutural u expressões (4.32) e (4.33)

$$Y_m = u / F_m \quad (4.32)$$

$$Z_{ca} = F_a / u \quad (4.33)$$

Utilizando as condições de equilíbrio, isto é, a força estrutural aplicada no sistema é igual à força de reação estrutural mais a força de reação acústica, $F = F_m + F_a$, pode-se obter uma expressão para a velocidade u da estrutura em termos de mobilidade estrutural Y_m e a impedância acústica acoplada Z_{ca} .

$$u = \frac{Y_m}{1 + Y_m Z_{ca}} F \quad (4.34)$$

Excitação acústica

Da mesma forma, o problema pode ser discutido sob o ponto de vista da aplicação de uma fonte acústica q , a qual excita o mesmo sistema vibro-acústico simples. Assim, o sistema agora pode ser representado pela impedância acústica Z_a e pela mobilidade estrutural acoplada Y_{cm} como mostrado na figura 4.3.

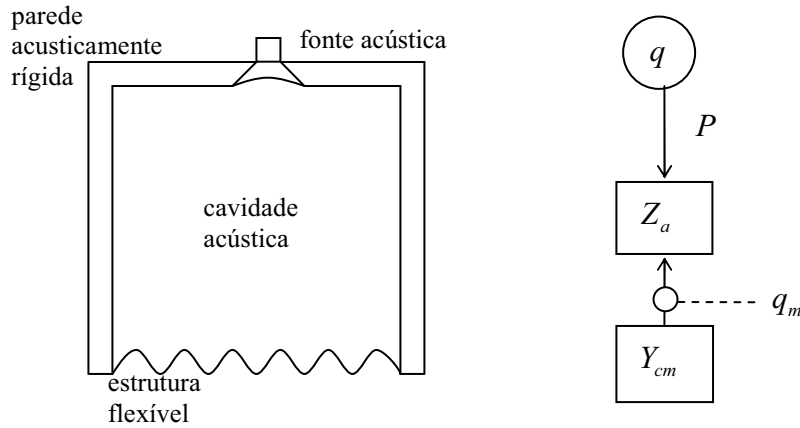


Figura 4.3 – Sistema vibro-acústico excitado por fonte acústica e representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade

A ilustração do sistema acústico mostrado na figura 4.3, pode ser considerada uma representação P - q , enquanto que o diagrama da figura 4.2 pode ser definido como representação F - u (KIM; BRENNAN 1999). A impedância acústica Z_a é definida como a *impedância acústica desacoplada* e é a razão entre a pressão acústica P na cavidade e a fonte acústica q atuando no sistema acústico. A mobilidade Y_{cm} é dada pela fonte induzida q_m na estrutura e pressão acústica P , definida como *mobilidade estrutural acoplada*, expressões (4.35) e (4.36).

$$Z_a = q_a / P \quad (4.35)$$

$$Y_{cm} = -q_m / P \quad (4.36)$$

O sinal de menos na expressão (4.36) indica que a direção de q_m é oposta à pressão acústica. Desde que estas fontes estejam atuando no sistema acústico, a fonte sonora de excitação deve ser igual as reações acústica no interior da cavidade e a excitação provocada pelo movimento estrutural, ou seja, $q = q_a - q_m$. Assim a pressão acústica no interior da cavidade pode ser dada pela expressão (4.37).

$$P = \frac{Z_a}{1 + Z_a Y_{cm}} q \quad (4.37)$$

Excitação acústica e estrutural

Quando há força estrutural e excitação acústica no sistema, um fator de acoplamento que conecta as representações $F-u$ e $P-q$ é requerido por causa da diferença dimensional entre os elementos acústicos e estruturais. Para o sistema genérico apresentado, uma área S pode ser usada para igualar as dimensões. Assim, a relação entre as impedâncias acústicas acopladas e desacopladas, e as mobilidades acopladas e desacopladas, são dadas por (KIM;BRENNAN, 1999).

$$Z_{ca} = S^2 Z_a \quad (4.38)$$

$$Y_{cs} = S^2 Y_s \quad (4.39)$$

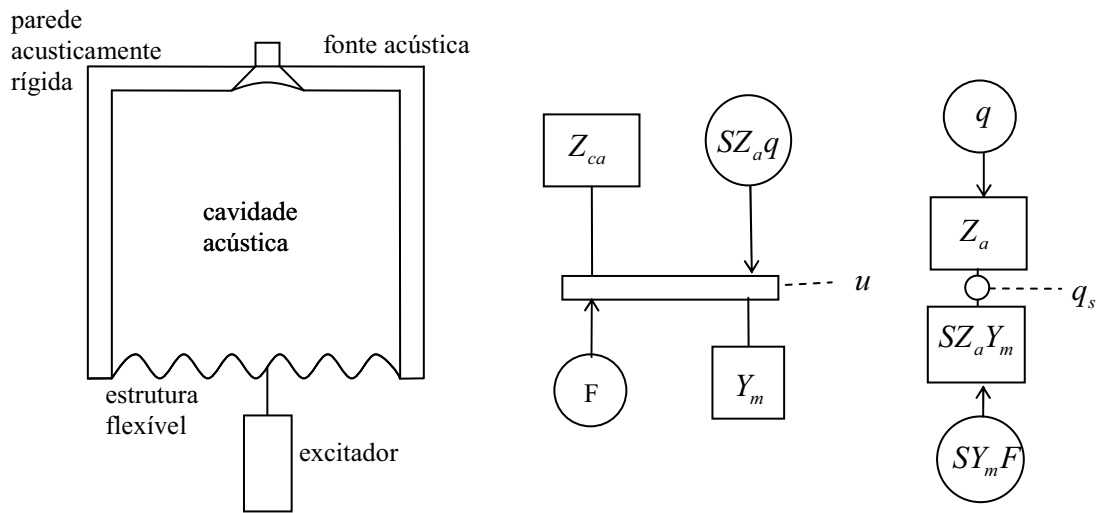


Figura 4.4– Sistema vibro-acústico excitado por fonte acústica e força estrutural. Representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade

A representação $F-u$ e a representação $P-q$ para um sistema vibro-acústico genérico, excitado por uma fonte acústica e uma excitação estrutural é mostrado na figura 4.4. As equações relativas à velocidade estrutural e a pressão acústica com relação à excitação são dadas pelas expressões (4.40) e (4.41):

$$u = \frac{1}{1 + Y_s Z_{ca}} Y_s (F - S Z_a q) \quad (4.40)$$

$$P = \frac{1}{1 + Z_a Y_{cm}} Z_a (q + S Y_m F) \quad (4.41)$$

Estas são equações chaves para a análise de um problema geral de acoplamento vibro-acústico. Essas expressões podem ser estendidas para vetores e matrizes para representar

sistemas com vários graus de liberdade e com vários pontos de excitação (KIM;BRENNAN,1999).

A partir das equações de acústica e elasticidade reexaminadas sob o ponto de vista modal, definidas nas seções 4.1 e 4.2, é possível escrever a pressão acústica e a velocidade estrutural como um conjunto de equações representado por elementos de mobilidade e impedância (equações (4.40) e (4.41)).

4.4. Construção das matrizes compactas baseado nos conceitos de impedância e mobilidade

Os termos da equação (4.15) e (4.24) podem ser combinados com as equações (4.40) e (4.41) para formar um conjunto de equações formado por matrizes compactas que descrevem o modelo aproximado do comportamento vibro-acústico de uma cavidade e uma estrutura flexível acoplada. Desta forma estas equações podem ser escritas de uma forma mais compacta e em notação matricial.

$$\{\tilde{P}\} = [Z_A](\{Q_A\} + \{Q_M\}) \quad (4.42)$$

$$\{\tilde{u}\} = [Y_M](\{G_M\} - \{G_A\}) \quad (4.43)$$

Em que $\{\tilde{P}\}$ é o vetor contendo r componentes das quais representam os r -modos do problema acústico desacoplado, $\{\tilde{u}\}$ é o vetor contendo m componentes das quais representam os m -modos do problema estrutural desacoplado. Z_A é a matriz diagonal cujo os elementos são dados por D_r e é definida como a *matriz de impedância modal acústica desacoplada*. Y_M é a matriz diagonal cujo os elementos são dados por D_m e é definida como a *matriz de mobilidade estrutural desacoplada*. $\{Q_A\}$ é o vetor contendo r componentes que define a fonte acústica modal generalizada e $\{Q_M\}$ é o vetor que representa a fonte modal acústica induzida devido a vibração na estrutura:

$$\{Q_A\} = \int_V \{\phi\}^T \{q_{vol}\} dV \quad (4.44)$$

$$\{Q_M\} = [C]\{\tilde{u}\} \quad (4.45)$$

A matriz C é a matriz de acoplamento cujos termos podem ser calculados por:

$$C_{rm} = \int_{S_f} \phi_r(y) \psi_m(y) dS \quad (4.46)$$

$\{G_M\}$ é o vetor contendo m componentes da qual é chamado de força modal generalizada e $\{G_A\}$ é a força modal de reação devido a variação da pressão acústica na cavidade, definidas por:

$$\{G_M\} = \int_{S_f} \{\psi\}^T \{P_s\} dS \quad (4.47)$$

$$\{G_A\} = [C]^T \{\tilde{P}\} \quad (4.48)$$

Combinando as equações (4.42), (4.43) e (4.46), pode ser escrito um conjunto de equações da qual:

$$\{\tilde{P}\} = ([I] + [Z_A][C][Y_M][C]^T)^{-1} [Z_A](\{Q_A\} + [C][Y_S]\{G_M\}) \quad (4.49)$$

$$\{\tilde{u}\} = ([I] + [Y_M][C]^T[Z_A][C])^{-1} [Y_M](\{G_M\} - [C]^T[Z_A]\{Q_A\}) \quad (4.50)$$

As equações (4.49) e (4.50) podem ser escritas usando o conceito de impedância e mobilidade discutido na seção 4.3. Desde que apenas excitação estrutural esteja atuando no sistema e substituindo $\{Q_M\} = [C]\{\tilde{u}\}$ na equação (4.42), obtém-se $\{\tilde{P}\} = [Z_A][C]\{\tilde{u}\}$. Combinando este resultado com a expressão para a força de reação acústica, $\{G_A\} = [C]^T \{\tilde{P}\}$, vem:

$$\{G_A\} = [Z_{CA}]\{\tilde{P}\} \quad (4.51)$$

Em que matriz simétrica de tamanho $m \times m$, $[Z_{CA}]$, é definida como a *matriz de impedância acústica modal acoplada*, a qual determina a força de reação acústica G_A , em coordenadas modais, induzida pela velocidade de vibração u na estrutura.

Por outro lado, pode-se substituir $\{G_A\} = [C]^T \{\tilde{P}\}$ na equação (4.43) e assumindo que há apenas excitação acústica, pode-se obter $\{\tilde{u}\} = -[Y_M][C]^T \{\tilde{P}\}$. Combinando este resultado com a expressão para a reação na estrutura devido à variação de pressão acústica, $\{Q_M\} = [C]\{\tilde{u}\}$, vem:

$$\{Q_M\} = -[Y_{CM}]\{\tilde{P}\} \quad (4.52)$$

Em que a matriz simétrica de tamanho $n \times n$, $[Y_{CM}]$, é definida como a *matriz de mobilidade estrutural modal acoplada*, a qual determina a fonte acústica induzida na estrutura sobre a estrutura flexível, Q_M devido à excitação acústica P . Desta forma, pode-se construir um conjunto de equações semelhante às equações (4.40) e (4.41) obtida na seção 4.3, ou seja:

$$\{\tilde{P}\} = ([I] + [Z_A][Y_{CM}])^{-1} [Z_A](\{Q_A\} + [C][Y_M]\{G_A\}) \quad (4.53)$$

$$\{\tilde{u}\} = ([I] + [Y_M][Z_{CA}])^{-1} [Y_M] (\{G_m\} - [C]^T [Z_A] \{Q_M\}) \quad (4.54)$$

A figura 4.5 apresenta a representação esquemática, em termos de impedância e mobilidade das equações (4.53) e (4.54).

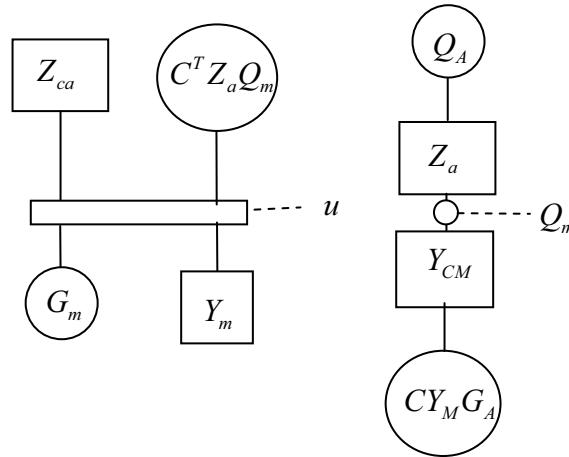


Figura 4.5 – Sistema vibro-acústico excitado por fonte acústica e força estrutural e representação esquemática através de elementos de impedância e mobilidade em coordenadas modais

As equações (4.53) e (4.54) representam o modelo matemático aproximado do acoplamento vibro-acústico na forma de matrizes compactas. O cálculo aproximado da resposta em frequência do acoplamento vibro-acústico é feito sem a necessidade da inversão de matrizes não simétricas. Além disso, o método das matrizes compactas apresenta a facilidade da inclusão de fontes acústicas e forças estruturais visando o controle de ruído dentro da cavidade. Isto porque o acoplamento é calculado baseado na interação dos modos acústicos e estruturais desacoplados.

A figura 4.6 mostra o fluxograma de cálculo que é implementado no algoritmo do programa de Matrizes Compactas. Dado um sistema físico vibro-acústico, a primeira etapa do procedimento de cálculo é identificar a sua parte acústica *desacoplada* e estrutural *desacoplada*. Posteriormente devem-se extrair os modos e as frequências naturais de ambos os sistemas *desacoplados*. A partir destes dados, determinam-se as matrizes de mobilidade estrutural desacoplada e impedância acústica desacoplada. Através da matriz de acoplamento, é avaliada a interação entre os termos desacoplados de impedância e mobilidade e as Matrizes Compactas são escritas.

Através das equações de Matrizes Compactas, é possível obter a resposta em frequência para qualquer ponto do domínio do sistema vibro-acústico, tanto para excitação acústica, estrutural ou ambas.

O próximo capítulo apresenta algumas simulações numéricas utilizadas para avaliar a potencialidade da técnica de matrizes compactas.

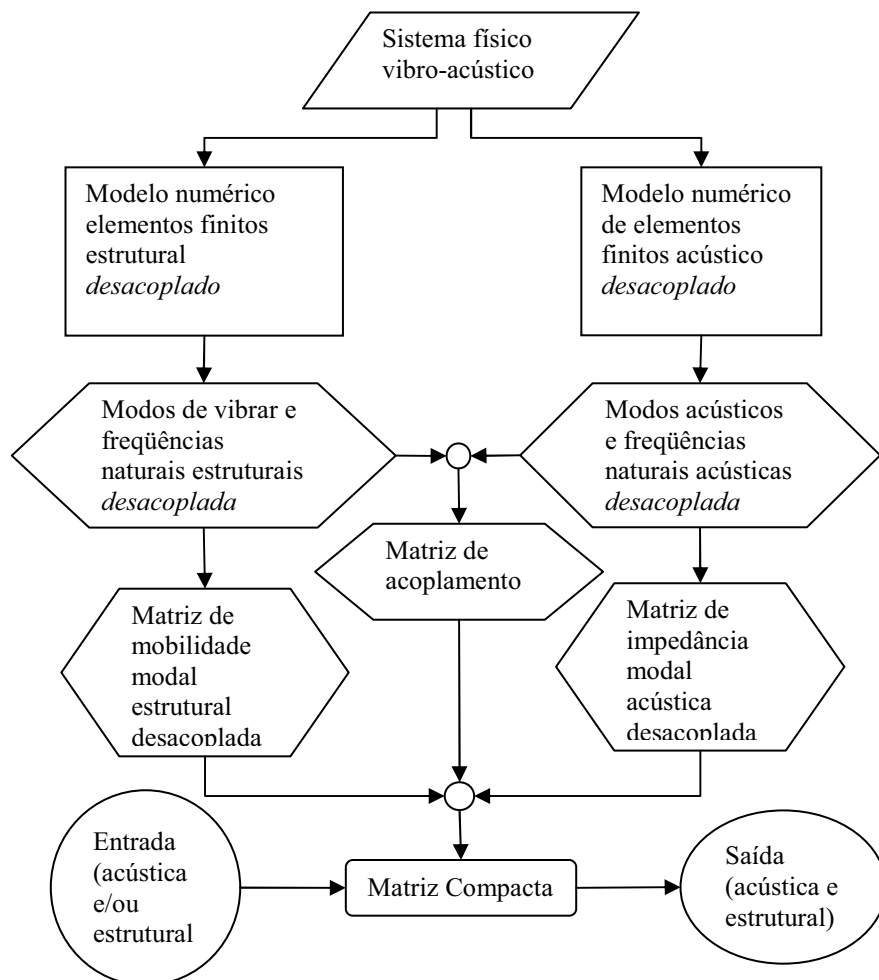


Figura 4.6 - Fluxograma de cálculo para a construção das matrizes compactas

5. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo é avaliado a implementação e a potencialidade da técnica de matrizes compactas para estudar o efeito do acoplamento vibro-acústico, nesta avaliação são utilizados dados simulados. A utilização de dados simulados é fundamental nesta etapa de implementação, visto que ela permite conhecer os valores exatos dos parâmetros do modelo simulado e assim estabelecer uma base de referência isenta de erros para a avaliação da metodologia proposta. Neste caso, o comportamento vibro-acústico dos modelos utilizados como referência são obtidos pelo método dos elementos finitos utilizando um software comercial, ANSYS.

O procedimento de cálculo da técnica de matrizes compactas consiste inicialmente em identificar a porção acústica e estrutural do sistema vibro-acústico. Posteriormente é construído um modelo numérico para cada subsistema *desacoplado*. Neste caso, foi utilizado um programa comercial de elementos finitos para confecção dos modelos desacoplados. A partir do modelo numérico de elementos finitos, são extraídos os modos e as frequências naturais de cada subsistema *desacoplado*. Os dados obtidos são utilizados para a construção das matrizes compactas através de um algoritmo implementado no software Matlab®.

A base de dados de referência para o estudo e análise da técnica de matrizes compactas também é obtida pelo método dos elementos finitos. Os dados são obtidos através de um modelo numérico de elementos finitos construído considerando o acoplamento existente entre a cavidade acústica e a estrutura flexível. A metodologia de estudo e análise consiste em comparar as respostas em frequência calculas pelo do método de matrizes compactas com aquelas obtidas pelo método dos elementos finitos.

São discutidos os resultados inicialmente para um modelo simples de geometria regular e posteriormente para um caso em que o modelo apresenta geometria irregular.

5.1. Modelo vibro-acústico de geometria regular

A técnica de matrizes compactas será utilizada para avaliar o comportamento vibro-acústico de uma cavidade em forma de paralelepípedo. Esta análise preliminar de uma cavidade de geometria regular é estudada devido a sua simplicidade e maior facilidade para o entendimento do acoplamento entre os modos acústicos da cavidade e os modos estruturais da estrutura flexível.

A cavidade de geometria regular apresentada aqui é composta de uma caixa retangular contendo cinco faces *acusticamente rígidas* e uma face formada por uma estrutura flexível. As dimensões da cavidade são dadas pelo comprimento $L = 0,5$ m, pela largura $B = 0,3$ m e pela altura da caixa $H = 0,4$ m. A estrutura flexível tem o mesmo comprimento L e largura B e espessura de 3,1 mm, (Fig. 5.1 (a)).

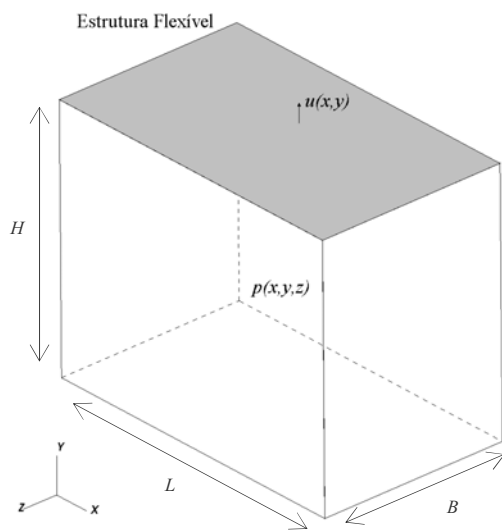


Figura 5.1.a – Cavidade Retangular com cinco paredes rígidas e uma flexível

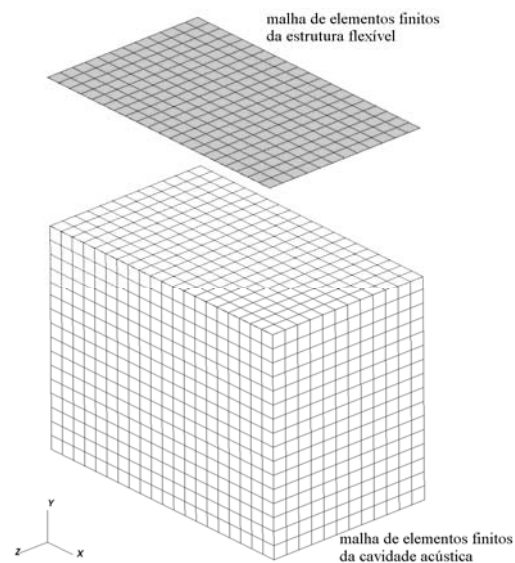


Figura 5.1.b – Malha de elementos finitos. Elementos acústicos e estruturais

O modelo de elementos finitos foi construído utilizando o software ansys. Uma breve discussão sobre os elementos utilizados é apresentada no ANEXO I. A tabela abaixo mostra as propriedades adotadas para os elementos acústicos (ar) e estruturais (aço).

Tabela 5.1 – Propriedades dos elementos

Material	Ar	Aço
Densidade [Kg/m^3]	1,21	7890
Velocidade do som [m/s]	340	
Modulo de elasticidade [GPa]		200
Coefficiente de Poisson		0,33

5.1.1. Autovalores e autovetores acústico e estrutural do modelo

Numa primeira etapa, o comportamento do modelo foi estudado com base no método dos elementos finitos, sendo que cada subsistema foi analisado isoladamente, isto é, foi construído um modelo numérico acústico *desacoplado* e um modelo numérico com características puramente estrutural. Esses dois modelos serão usados posteriormente como subsídio para a construção das matrizes compactas.

O modelo acústico da cavidade foi criado utilizando-se elementos acústicos tridimensionais do tipo *FLUID30*. O modelo numérico de elementos finitos, construído apenas com elementos acústicos, implica que todas as faces da cavidade são *acusticamente rígidas*, em outras palavras, não ocorre vibração nas paredes do contorno da cavidade. Uma vez definidas as propriedades do modelo e impostas as condições de contorno, o comportamento do mesmo foi analisado na faixa de frequência de 0 a 800 Hz. A figura 5.2 mostra os modos acústicos e suas respectivas frequências naturais obtidas na análise.

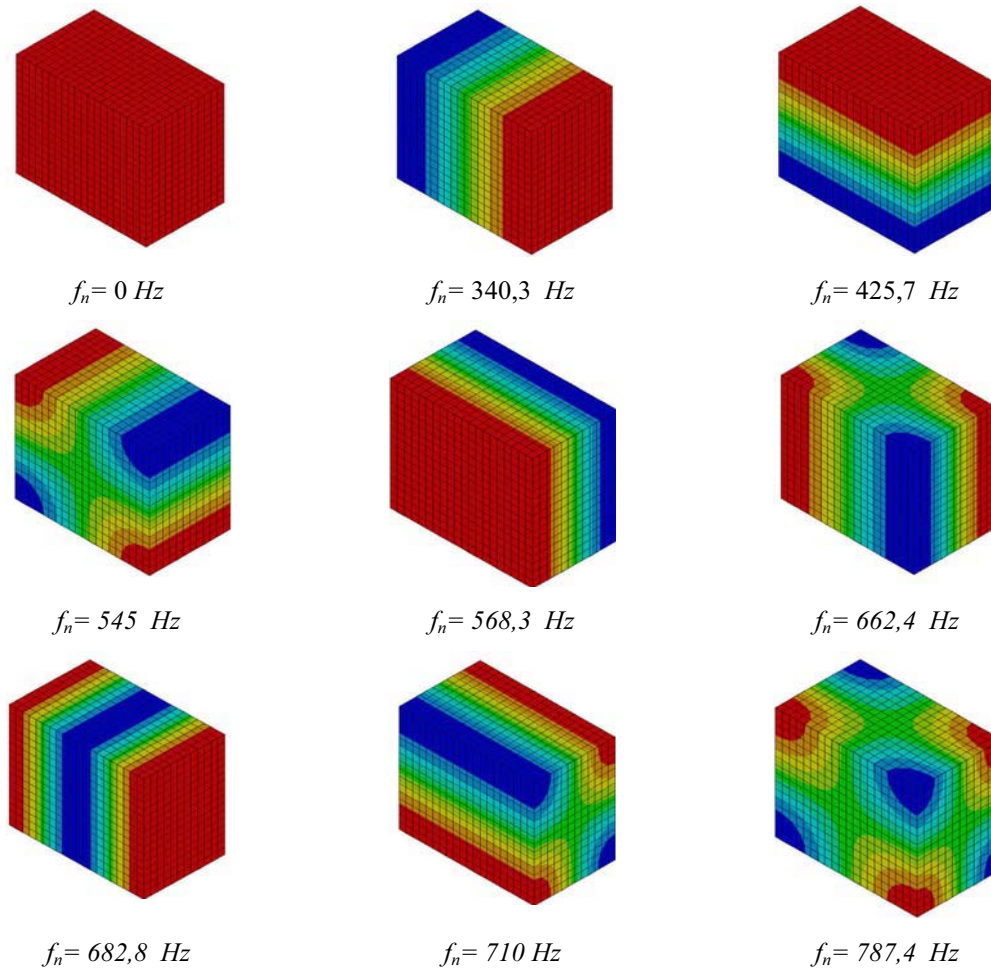


Figura 5.2 - Modos acústicos desacoplados da cavidade

O modelo estrutural da estrutura flexível foi criado utilizando-se elementos bidimensionais do tipo placa (*SHELL63*). A condição de fixação da placa foi considerada como sendo *simplesmente apoiada*, ou seja, as vibrações transversais no contorno foram restritas. A figura 5.3 mostra os modos estruturais e as respectivas frequências naturais obtidas na análise.

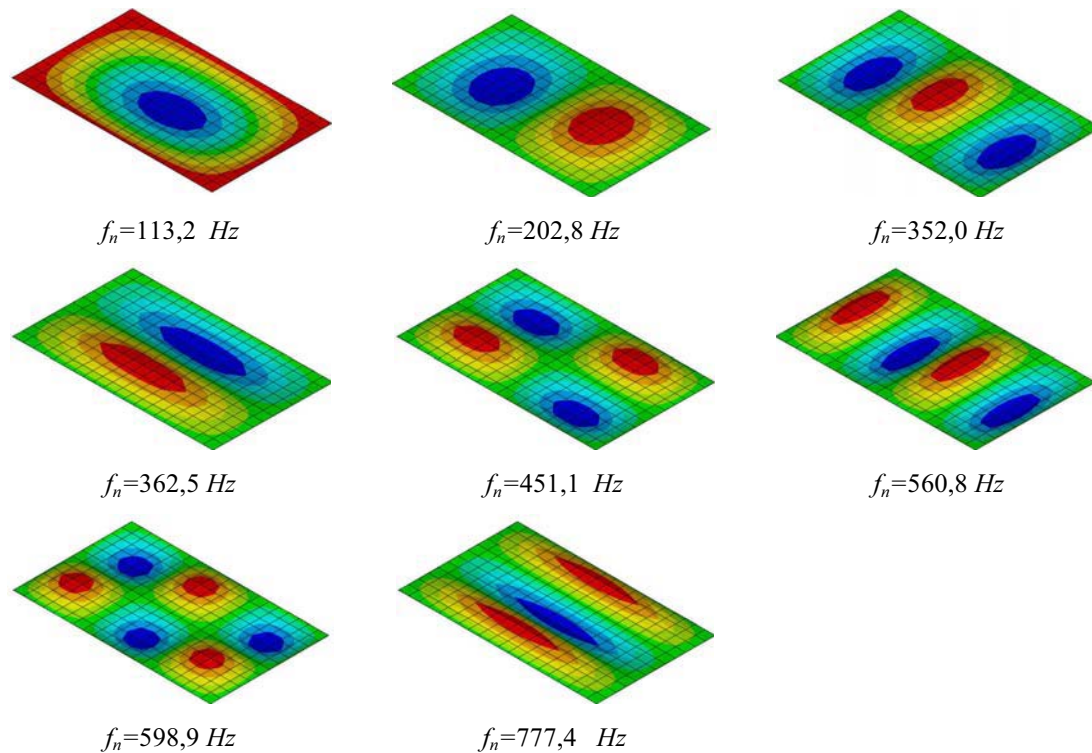


Figura 5.3 - Modos estruturais desacoplados da estrutura flexível

Os modos e frequências naturais obtidos nesta etapa, foram armazenados para utilização posterior no modelo de matrizes compactas.

5.1.2. Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método dos elementos finitos

O modelo numérico construído nesta etapa assume que a face localizada no topo da cavidade mostrada na figura 5.1.a não é acusticamente rígida, mas sim flexível. O campo acústico da cavidade neste caso é influenciado pelo movimento da estrutura flexível, e a vibração da estrutura flexível também sofre mudanças devido à presença da pressão sonora.

O esboço da malha da malha tridimensional do modelo de elementos finitos da cavidade acústica foi mostrado na figura 5.1.b. Foram utilizados elementos finitos do tipo acústico e a malha foi construída de tal forma que os nós presentes na face superior da caixa coincidem com a malha bidimensional dos elementos estruturais. Assim, as vibrações transversais da placa agem como uma fonte acústica em cada nó e a pressão sonora pode ser representada como um carregamento distribuído na estrutura flexível.

Para otimizar a análise numérica, é necessário construir o modelo levando em conta que os elementos do interior da cavidade e nas faces acusticamente rígidas *não* estão em contato com a estrutura flexível, ou seja, possuem matrizes simétricas. Os elementos em contato com fluido, possuem matrizes não simétricas em virtude do acoplamento. Assim, torna-se necessário escolher elementos apropriados para modelar o interior acústico e a interface vibro-acústica. O software de elementos finitos utilizado disponibiliza opções de elementos do tipo acústico para serem utilizados em ambos os casos. O comportamento da cavidade foi analisado na faixa de frequência de 0 a 800 Hz. Nesta faixa de frequência foram encontrados 16 modos vibro-acústicos. Destes, 8 modos são de característica predominantemente acústica e 8 de característica predominantemente estrutural. Os modos, bem como suas respectivas frequências naturais, são mostrados na figura 5.4.a e 5.4.b.

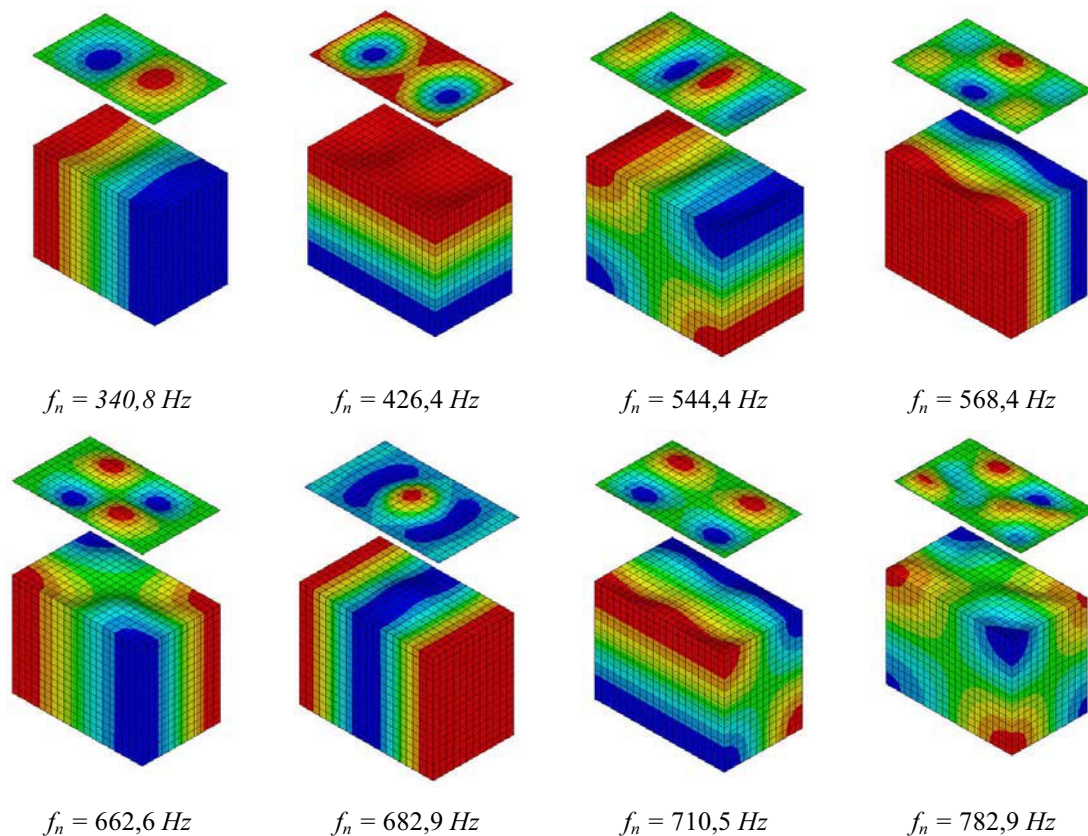


Figura 5.4.a – Modos vibro-acústicos, predominantemente acústicos, da cavidade

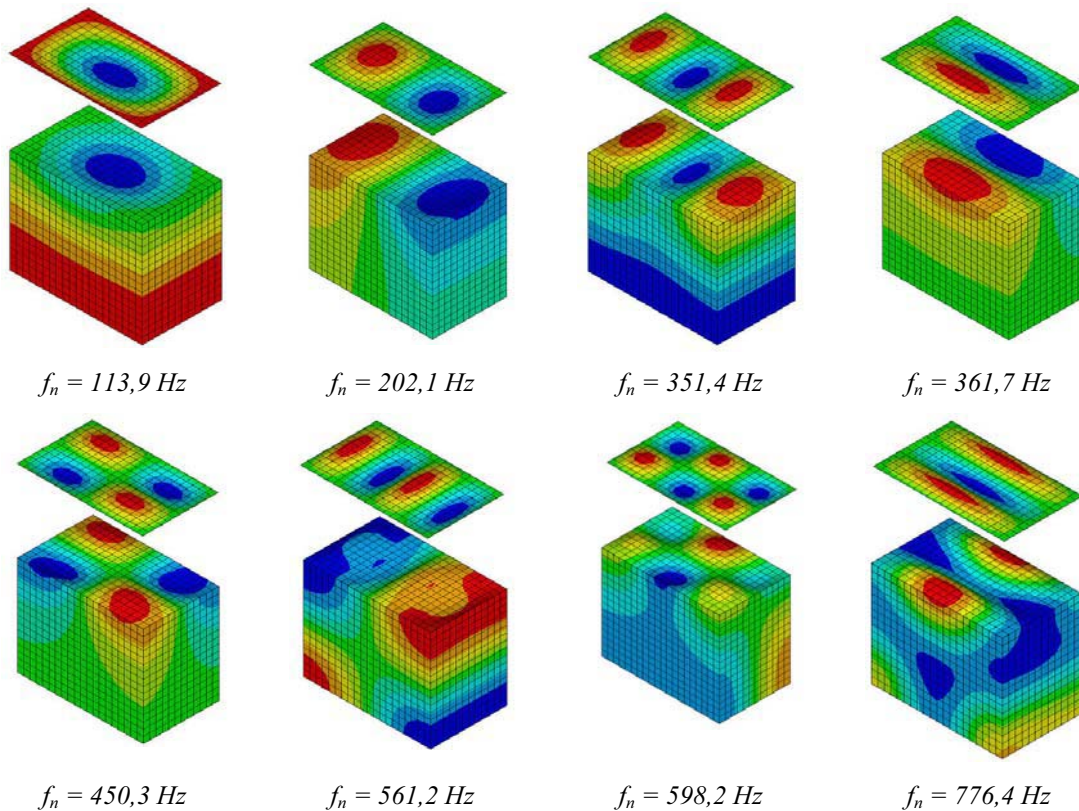


Figura 5.4.b - Modos vibro-acústicos, predominantemente estruturais, da cavidade vibro-acústica de geometria regular

Posteriormente, o comportamento dos modelos foi comparado, considerando o caso em que não existe acoplamento entre o modelo acústico e estrutural e o modelo acoplado. A tabela 5.2, mostra a relação entre as frequências encontradas nos estudos dos dois subsistemas *desacoplados* e aquelas encontradas no modelo vibro-acústico.

Tabela 5.2 – Frequências naturais vibro-acústica da cavidade

Modo	Frequência natural acústica desacoplada (Hz)	Frequência natural estrutural desacoplada (Hz)	Frequência natural vibro-acústica (Hz)
1	0	-	-
2	-	113,2	113,9
3	-	202,8	202,1
4	340,4	-	340,8
5	-	352,0	351,4
6	-	362,5	361,7
7	425,7	-	426,4
8	-	451,1	450,3
9	545,0	-	544,4
10	-	560,8	561,2
11	568,3	-	568,4
12	-	598,9	598,2
13	662,4	-	662,6
14	682,8	-	682,9
15	710,0	-	710,5
16	-	777,4	776,4
17	787,4	-	782,9

Comparando as frequências naturais da cavidade e da estrutura flexível *desacopladas* com aquelas encontradas no sistema *acoplado*, mostrados na Tabela 5.2, nota-se que em frequências próximas e acima do primeiro modo acústico, as frequências naturais dos modos predominantemente estruturais são um pouco menor do que aquelas encontradas na estrutura flexível desacoplada e que as frequências naturais dos modos predominantemente acústicos são um pouco maior do que aquelas encontradas na cavidade acústica *desacoplada*. Nota-se também que há uma variação mais significativa das frequências naturais *desacopladas* acústicas ou estruturais, quando estão mais próximas de uma frequência predominante estrutural ou acústica, respectivamente, do modelo acoplado.

Adicionalmente, visando fornecer subsídios para a comparação com o resultado do método das matrizes compactas foi calculada nesta etapa também a resposta em frequência do problema vibro-acústico.

Neste caso, a resposta em frequência foi obtida a partir da análise harmônica do modelo numérico de elementos finitos. A análise harmônica é uma técnica utilizada para determinar a resposta, em regime permanente, de um sistema sujeito a carregamentos que variam senoidalmente (harmonicamente) com o tempo. Desta forma, a resposta do sistema pode ser calculada para cada ponto de frequência (senóide) definido na faixa de frequência analisada e posteriormente o gráfico da resposta em frequência pode ser facilmente obtido. A

força senoidal foi considerada sendo aplicada no modelo numérico no ponto cujas coordenadas são $(L/6, 0, B/4)$, no sentido positivo do eixo y e de valor unitário.

A figura 5.5 mostra a função de resposta em frequência (velocidade estrutural) calculada para o *drive point*, isto é, força e resposta medidas no mesmo ponto. A função de resposta em frequência (pressão acústica) calculada para o ponto cujas coordenadas são $(2L/5, H/4, 2B/3)$, é mostrada na figuras 5.6.

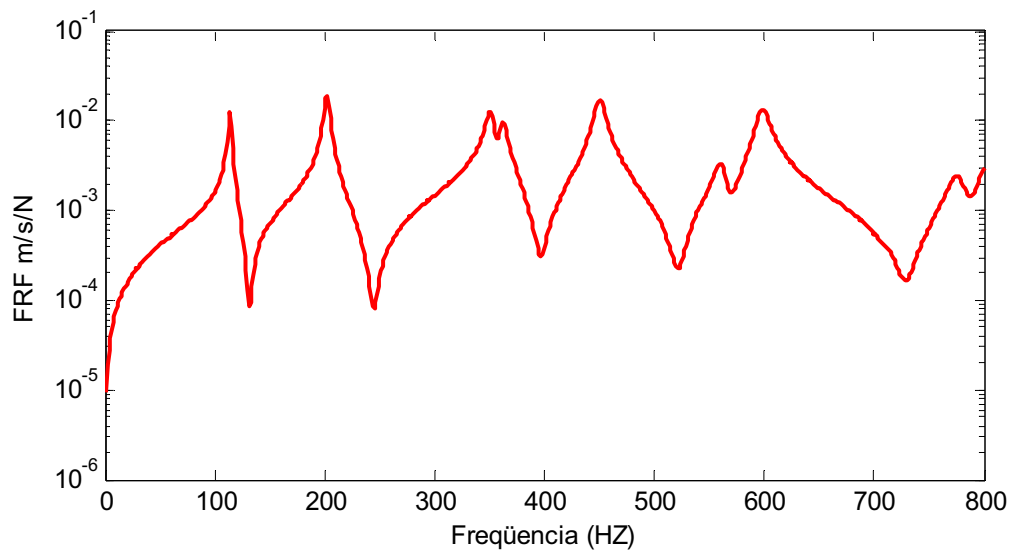


Figura 5.5 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação e resposta estrutural

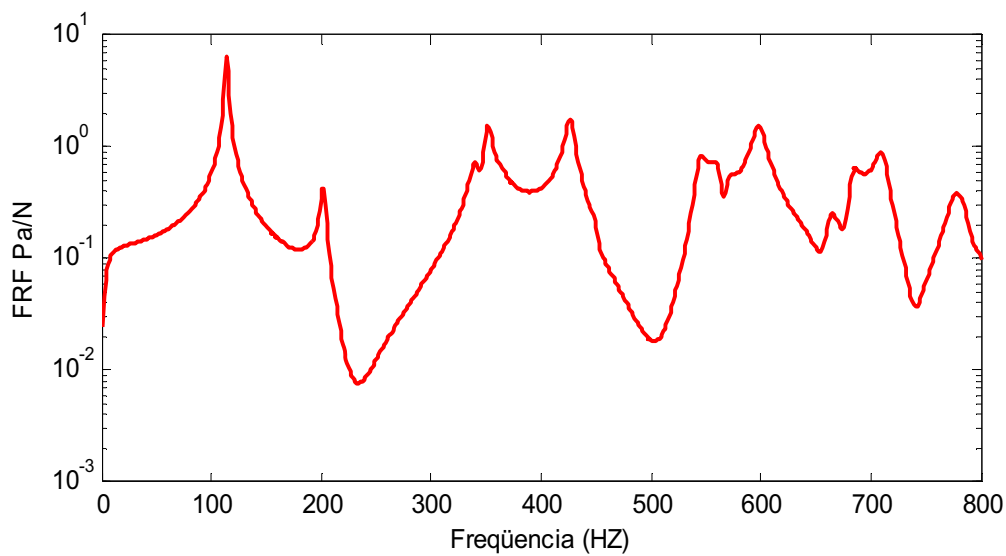


Figura 5.6 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação estrutural e resposta acústica

5.1.3. Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método das matrizes compactas

O estudo do comportamento da cavidade, conforme discutido, foi inicialmente analisado utilizando o método dos elementos finitos visando criar subsídios para comparar e analisar a capacidade e potencialidade do método das matrizes compactas para avaliar o comportamento de cavidades vibro-acústica sem a necessidade de trabalhar com matrizes não simétricas.

A proposta do método de matrizes compactas é calcular a resposta do acoplamento vibro-acústico baseado apenas nos parâmetro modais de cada subsistema *desacoplado*. Uma vez obtido a resposta do modelo desacoplado via método dos elementos finitos, o método de matrizes compactas pode ser aplicado baseado nos autovalores e autovetores de cada subsistema desacoplado (acústico e estrutural).

Neste caso, as respostas foram calculadas para os mesmos pontos do caso anterior, a figura 5.7 mostra a comparação entre o modelo de referência (elementos finitos) e o método das matrizes compactas. O gráfico mostra a resposta estrutural obtida na estrutura flexível no ponto (L/6, 0, B/4), e força aplicada no mesmo ponto.

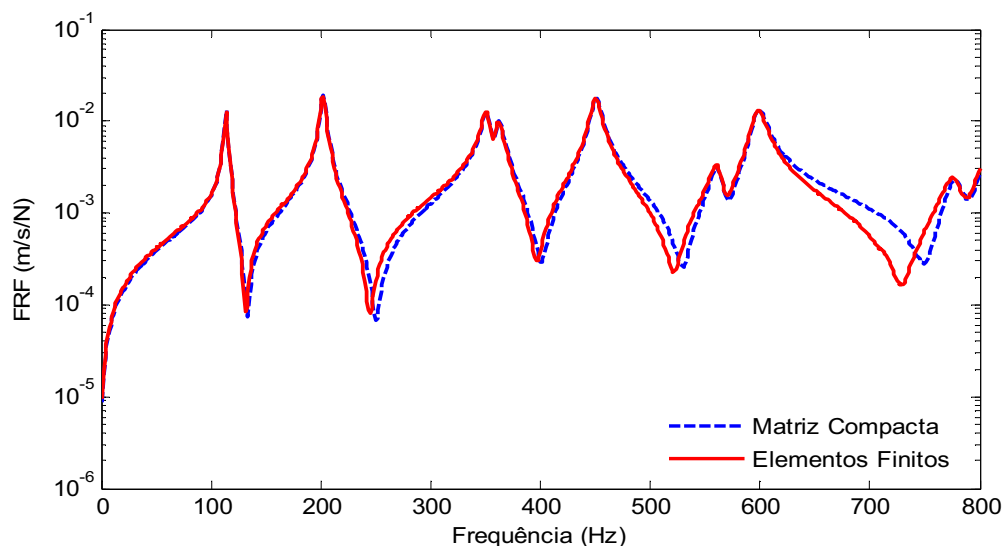


Figura 5.7 – Superposição das funções de resposta em frequência dos modelos. Excitação e resposta estrutural

Observa-se que o método das matrizes compactas apresenta uma boa convergência com o método dos elementos finitos nas frequências mais baixas. Vários testes foram realizados posteriormente, incluído modos mais altos (acima de 800 Hz) no cálculo e estimativa das matrizes compactas e os resultados se mostraram semelhantes aos obtidos anteriormente.

A figura abaixo mostra a comparação das funções de resposta em frequência (pressão acústica por força estrutural) obtidas no ponto cujas coordenadas são $(2L/5, H/4, 2B/3)$.

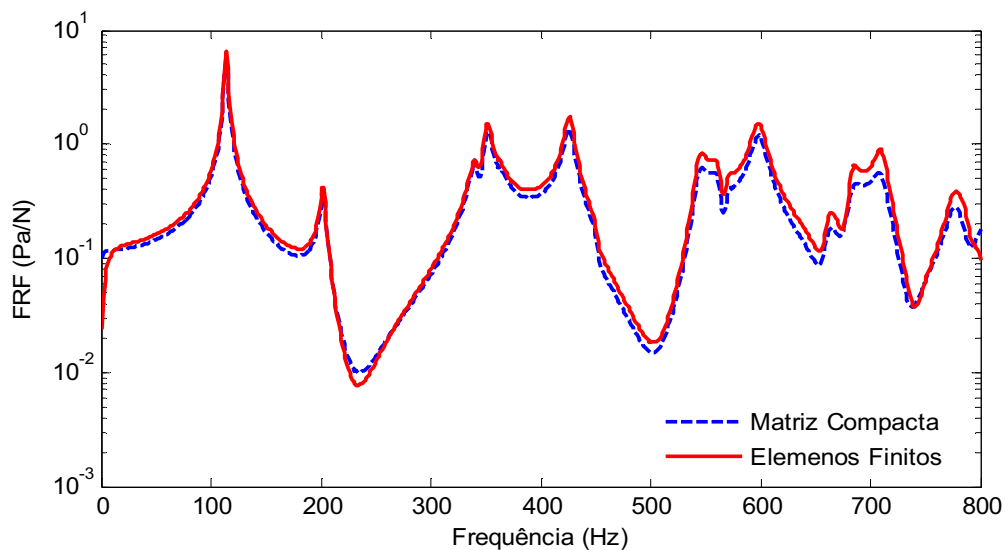


Figura 5.8 – Superposição das funções de resposta em frequência dos modelos. Excitação estrutural e resposta acústica

Nota-se que muitos picos são provenientes da interação dos modos estruturais na cavidade acústica. A influência da estrutura no meio fluido é muito maior do que a influência do fluido na estrutura, isto pode ser explicado pela diferença de rigidez entre os dois subsistemas.

Os resultados entre os métodos se mostraram muito próximos nesta primeira análise. Contudo, o modelo estudado possui uma geometria simples e mesmo existe a solução analítica. O próximo tópico discute a aplicação do método de matriz compacta para o caso de uma geometria irregular.

5.2. Modelo vibro-acústico de geometria irregular

O modelo numérico para uma cavidade de geometria simples foi discutido na seção anterior. Nesta etapa, o método de matrizes compactas será utilizado para estimar o comportamento de uma cavidade de geometria irregular. A cavidade acústica analisada foi definida tomando como base a cabine simplificada de um automóvel e o acoplamento vibro-acústico é dado por uma estrutura flexível localizada no lado inferior da cavidade, figura 5.9.

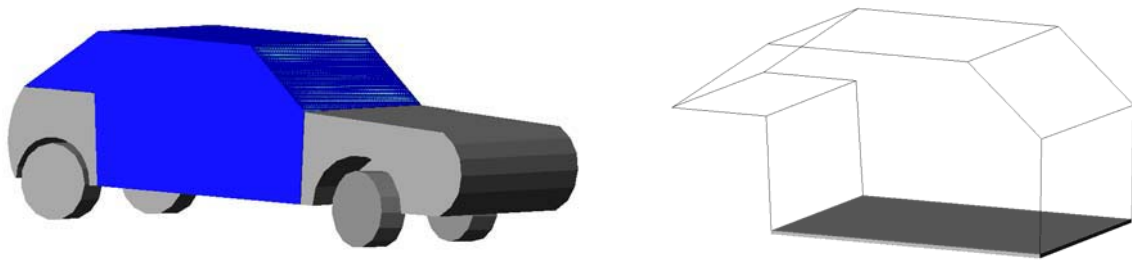


Figura 5.9 – Cavidade irregular, semelhante à cabine de um automóvel

A cavidade analisada apresenta dimensões irregulares e é composta por oito faces rígidas e uma flexível. A disposição das faces é feita de forma semelhante à cabine de um automóvel. As dimensões escolhidas para a cavidade são representadas na figura 5.10, em que os comprimentos são dados por: $C_1 = 400$, $C_2 = 300$, $C_3 = 110$, $C_4 = 140$ e $C_5 = 139$; as alturas são representadas por $H_1 = 150$ e $H_2 = 100$; e a largura é dada por $L = 325$, todas as cotas são dadas em milímetros. A face flexível é apoiada nos dois maiores lados da parte inferior da cavidade e tem comprimento C_1 , largura L e a espessura é dada por 3,1 mm.

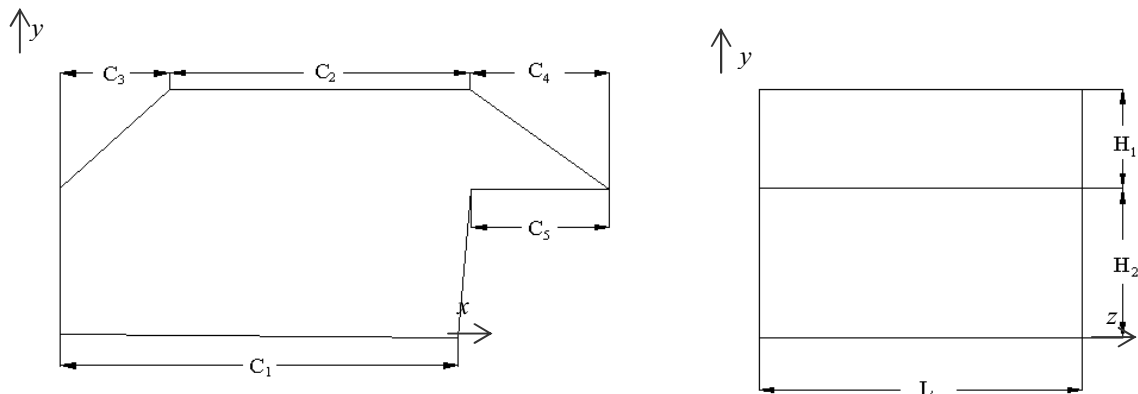


Figura 5.10 – Representação das dimensões da cavidade de geometria irregular

5.2.1. Autovalores e autovetores acústico e estrutural do modelo

O procedimento para a análise numérica adotado é semelhante ao apresentado na seção 5.1.1. São utilizados os mesmos tipos de elementos e as mesmas propriedades físicas.

A figura 5.11 mostra o esboço da malha utilizada no modelo numérico de elementos finitos da cavidade acústica e da estrutura flexível.

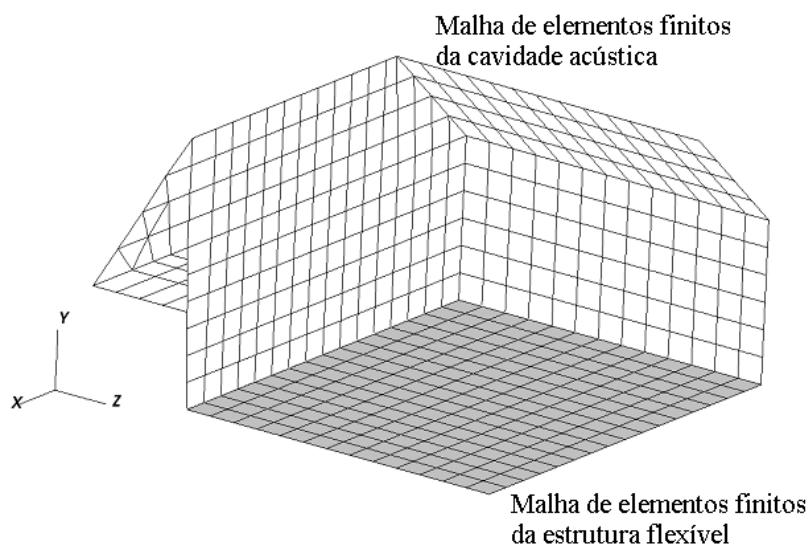


Figura 5.11 – Malha em elementos finitos do modelo

Para obter o comportamento desacoplado da cavidade, conforme discutido na seção 5.1.1, foram construídos dois modelos. Um somente com elementos acústicos tridimensionais do tipo FLUID30 e outro apenas com elementos estruturais bidimensionais do tipo Shell 63. Foram utilizados 1232 elementos do tipo FLUID30 para o cálculo dos modos acústicos. As figuras 5.11.a mostra 6 modos acústicos, encontrados na faixa de frequência de 0 a 800 Hz.

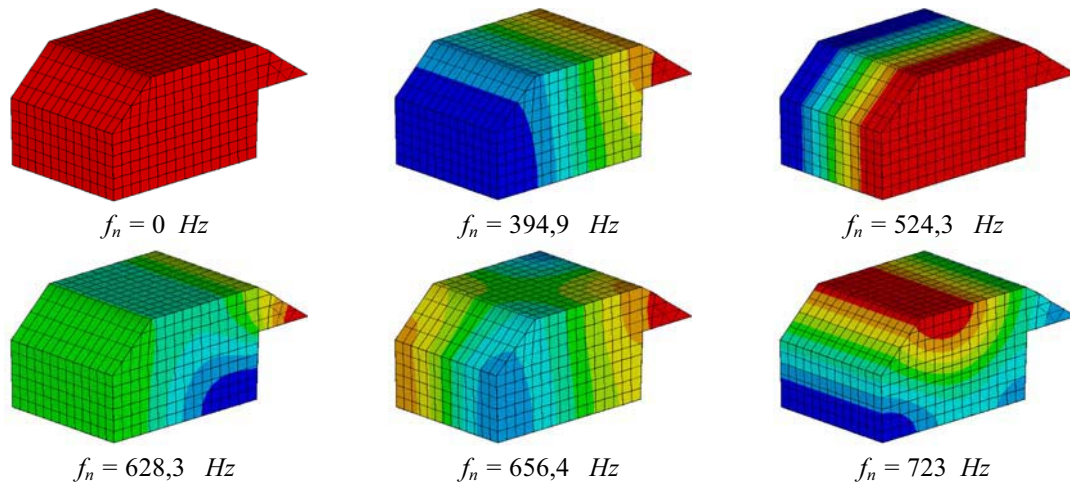


Figura 5.12.a – Modos acústicos desacoplados da cavidade vibro-acústica

O modelo estrutural consiste de 208 elementos do tipo Shell63. A figura 5.12.b mostra 12 modos estruturais, encontrados na faixa de frequência de 0 a 800 Hz.

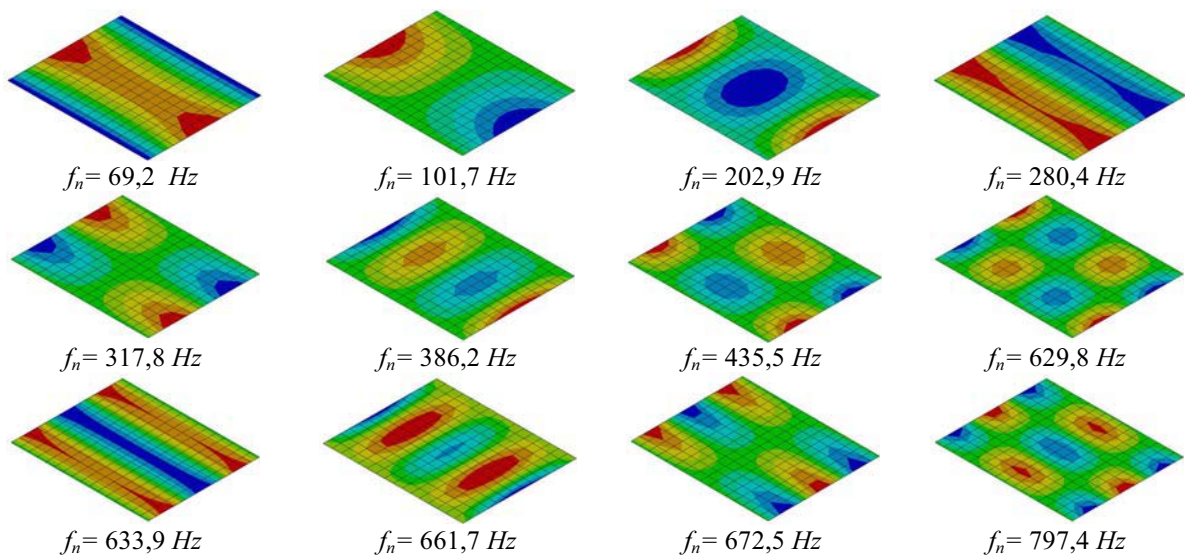


Figura 5.12.b – Modos estruturais desacoplados da cavidade vibro-acústica de geometria irregular

Uma vez obtidos os modos acústicos e estruturais do modelo desacoplado, passou-se para a análise vibro-acústica do modelo pelo método dos elementos finitos.

5.2.2. Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método dos elementos finitos

O modelo numérico da cavidade foi construído levando em consideração as mesmas restrições e coincidências das malhas acústica e estrutural discutidas no item 5.1.2. No modelo foi levado em conta o acoplamento existente entre a cavidade acústica e a estrutura flexível. Alguns resultados obtidos na análise do comportamento vibro-acústico do modelo de geometria regular serão omitidos nesta etapa.

O comportamento da cavidade foi analisado na faixa de frequência de 0 a 800 Hz. Nesta faixa de frequência foram encontrados 18 modos vibro-acústicos. Destes, 6 modos são de característica predominantemente acústica e 12 de característica predominantemente estrutural. O comportamento dos modelos foi comparado, considerando o caso em que não existe acoplamento entre o modelo acústico e estrutural e o modelo acoplado. A tabela 5.3, mostra a relação entre as frequências encontradas nos estudos dos dois subsistemas *desacoplados* e aquelas encontradas no modelo vibro-acústico.

Tabela 5.3 – Frequências naturais vibro-acústica

Modo	Frequência natural acústica desacoplada (Hz)	Frequência natural estrutural desacoplada (Hz)	Frequência natural vibro-acústica (Hz)
1	0	-	0
2	-	69,2	72,3
3	-	101,7	101,4
4	-	202,9	202,6
5	-	280,4	279,8
6	-	317,8	317,2
7		386,2	385,8
8	394,9	-	395,4
9	-	435,5	434,9
10	524,3	-	524,8
11	628,3	-	627,5
12		629,8	629,2
13	-	633,9	634,2
14	656,4	-	656,3
15		661,7	661,2
16	-	672,5	672,1
17	723,0	-	723,6
18	-	797,4	796,6

Adicionalmente, visando fornecer subsídios para a comparação com o resultado do método das matrizes compactas foi calculada nesta etapa também a resposta em frequência do problema vibro-acústico.

A análise foi realizada na faixa de frequência de 0 a 800 Hz e a força senoidal foi aplicada na direção transversal da estrutura flexível no ponto cujas coordenadas são $(C_1/5, 0, L/4)$. Foi calculada a resposta em frequência estrutural (velocidade estrutural por força) para o *drive point* e a resposta em frequência acústica (pressão por força) em um ponto no interior da cavidade irregular cujas coordenadas são dadas por $(C_1/5, H_2, L/4)$. As figuras 5.13 e 5.14 mostram os resultados.

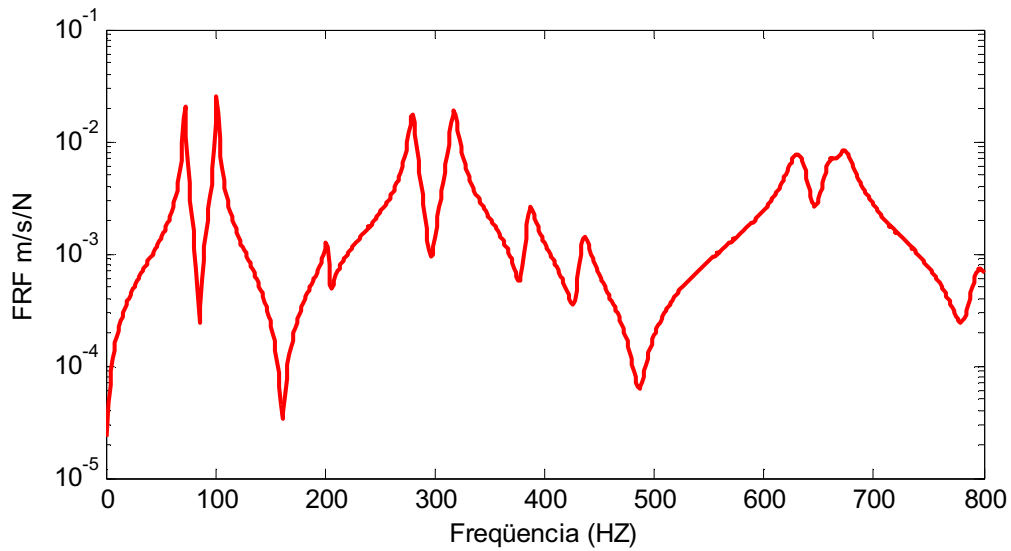


Figura 5.13 – Função de resposta em frequência (velocidade por força) do modelo

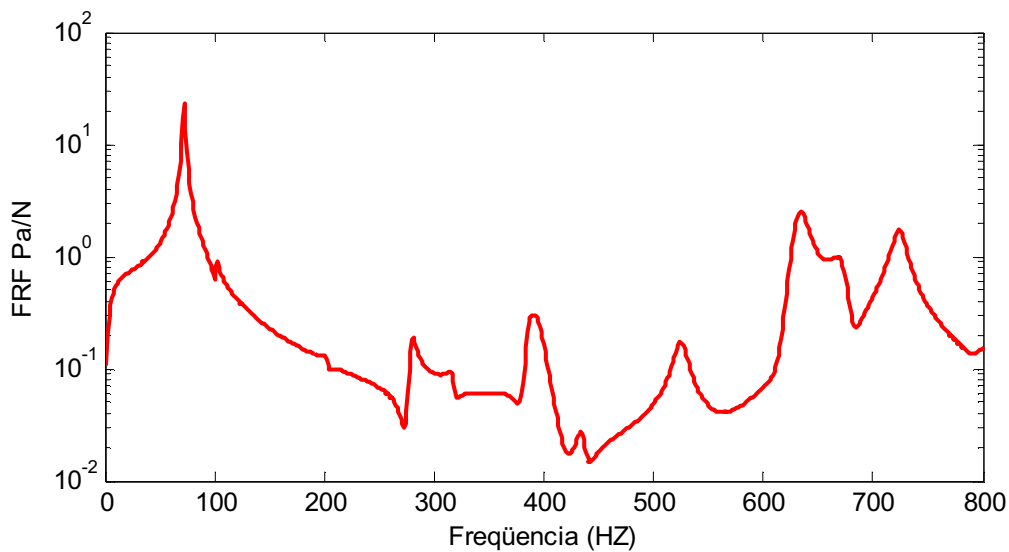


Figura 5.14 – Função de resposta em frequência (pressão por força) do modelo

Alguns efeitos tornaram-se pronunciados nesta avaliação numérica. Levou um grande tempo computacional para o software de elementos finitos resolver as equações matriciais do modelo. Isto se dá porque para cada incremento de frequência, a resposta é calculada da inversão de matrizes não simétricas. O método de matrizes compactas, proposto neste trabalho, propõe-se a calcular a resposta em frequência de problemas de acoplamento, de uma forma mais eficiente.

Na próxima seção, o modelo vibro-acústico de geometria irregular será estudado e analisado pelo método das matrizes compactas. No caso das matrizes compactas, existe um maior controle na solução das equações, de forma que se pode calcular a resposta em frequência apenas nos pontos de interesse. Fazendo-se uso, desta forma, de menos tempo e espaço de armazenamento computacional.

5.2.3. Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método das matrizes compactas

O método das matrizes compactas calcula a resposta do modelo vibro-acústico utilizando apenas os parâmetros modais de cada subsistema desacoplado. Estes parâmetros foram inicialmente obtidos na seção 5.2.1, o que torna possível escrever as matrizes compactas para o modelo. O procedimento de cálculos adotados são os mesmos discutidos na seção 5.1.3. Para o cálculo das respostas foram utilizados apenas os modos na faixa de frequência de 0 a 800 Hz. O sistema foi assumido excitado por uma força estrutural, aplicada no ponto cujas coordenadas são $(C_1/5, 0, L/4)$.

A figura 5.15 mostra a comparação entre a resposta do modelo de elementos finitos (dados de referencia) e do método das matrizes compactas. O gráfico mostra a superposição da função de resposta em frequência (velocidade) estrutural obtida no mesmo ponto de aplicação da força.

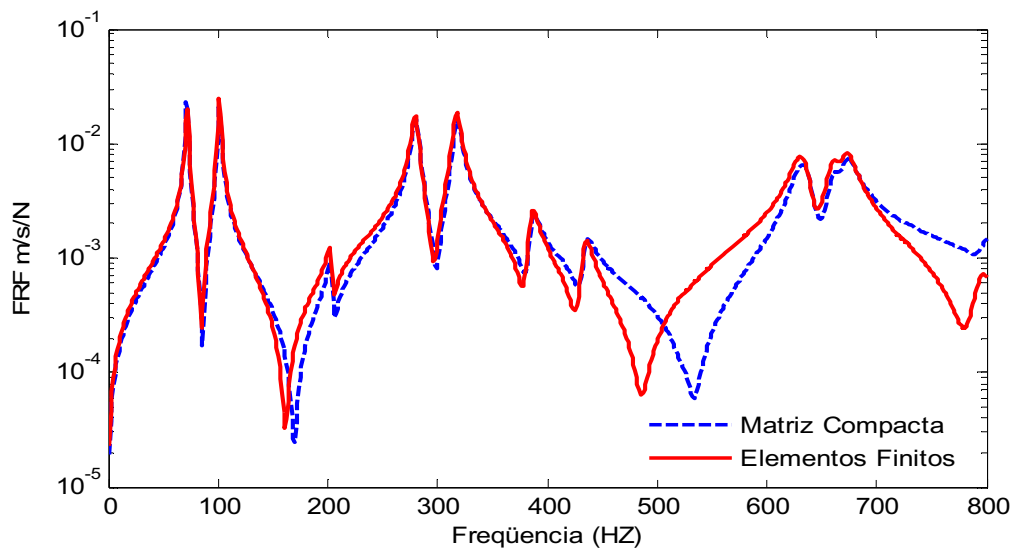


Figura 5.15 – Superposição das funções de resposta em frequência. Excitação e resposta estrutural

A resposta vibro-acústica da cavidade também foi simulada para a pressão acústica no interior da cavidade. A figura abaixo mostra a comparação da resposta obtida pelo método das matrizes compactas e pelo método dos elementos finitos. A excitação é a mesma da condição anterior e a resposta (pressão acústica) foi obtida no ponto cujas coordenadas são $(C_1/5, H_2, L/4)$.

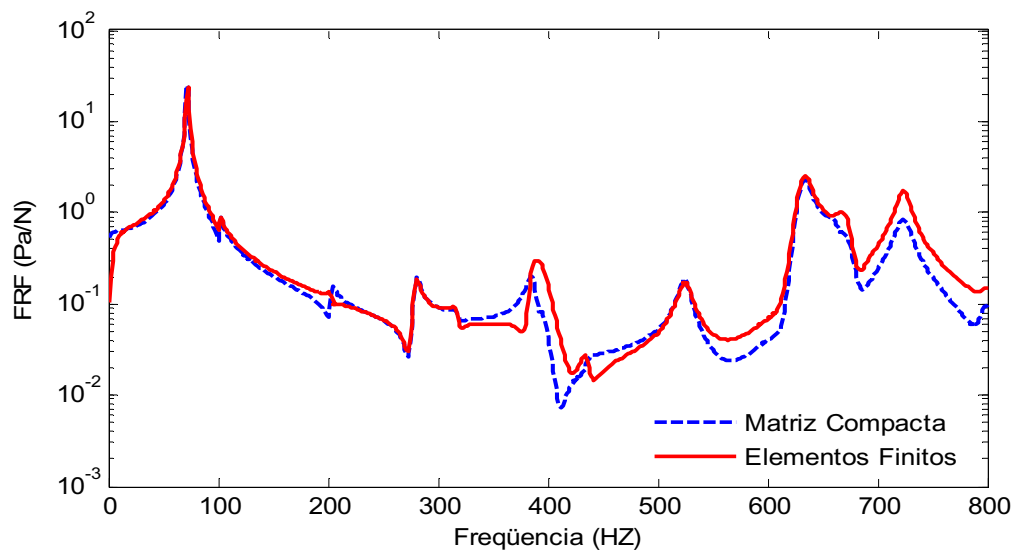


Figura 5.16 – Superposição das funções de resposta em frequência. Excitação estrutural e resposta acústica

A comparação das respostas mostra que existe uma boa representação dos picos de frequência, entretanto, existe pequenas divergências nas regiões de anti-ressonância nas faixas de frequências mais altas em ambos gráficos. Esta discrepância nas respostas dos modelos está relacionada com o número de modos utilizados na simulação da resposta no modelo de matrizes compactas.

Neste caso, foram utilizados apenas os modos na faixa de 0 a 800 Hz e as informações contidas nos modos que ocorrem em frequências mais altas foram perdidas devido o efeito de truncamento. A inclusão de modos acima da banda de frequência utilizada melhora os resultados com a técnica de matrizes compactas. Contudo, o aumento do número de modos faz com que o número de variáveis também seja incrementado no programa numérico.

A figura 5.17 mostra a comparação entre as funções de resposta em frequência estrutural obtidas pelo método dos elementos finitos e pelo método das matrizes compactas utilizando o dobro de modos no cálculo da resposta pelo método das matrizes compactas. A figura 5.18 mostra a comparação entre as funções de resposta em frequência acústica, sendo que o modelo numérico de matrizes compactas inclui modos mais altos.

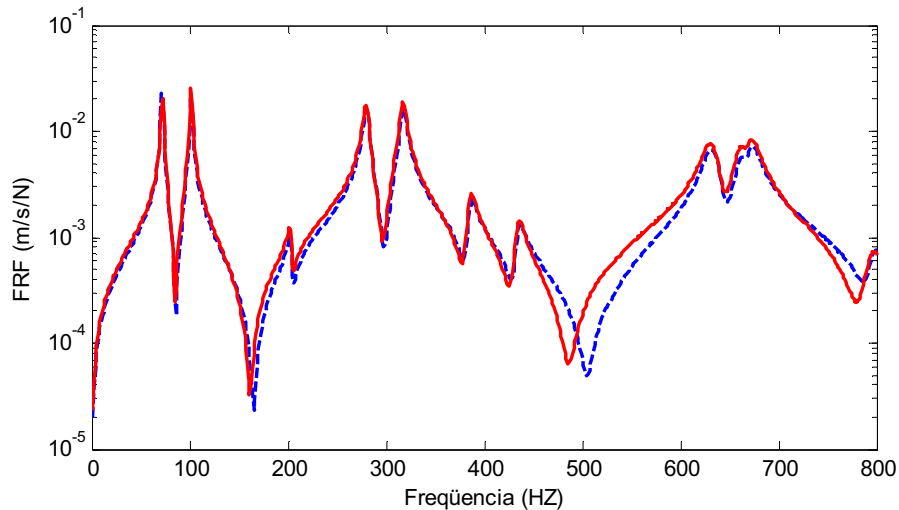


Figura 5.17 – Superposição das funções de resposta em frequência utilizando um maior número de modos. Excitação e resposta estrutural

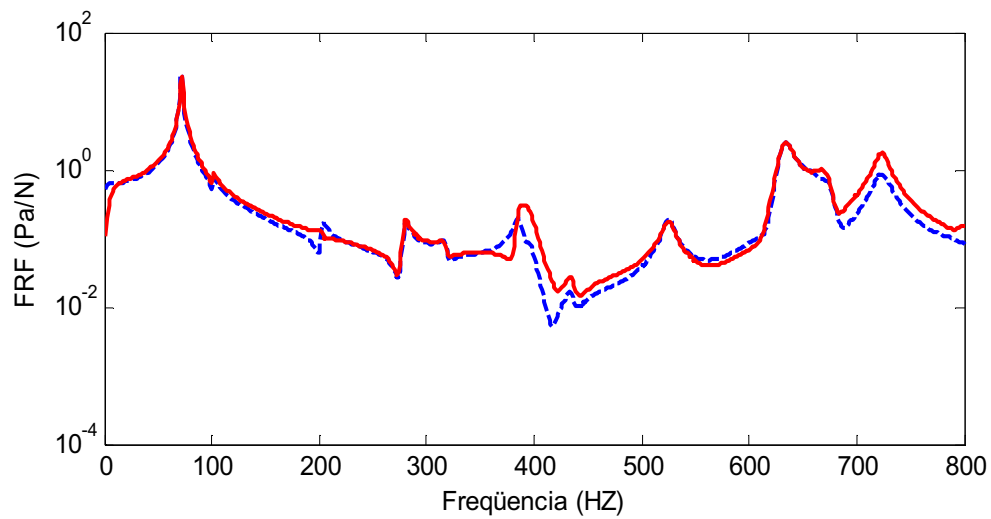


Figura 5.18 – Superposição das funções de resposta em frequência utilizando um maior número de modos. Excitação estrutural e resposta acústica

Nas etapas anteriores foram apresentadas as bases teóricas para a técnica de matrizes compactas. Exemplos simulados foram utilizados para a avaliação prévia da metodologia em situações, onde foram levantadas e discutidas as principais dificuldades e limitações para o uso da técnica de matrizes compactas. Na próxima etapa da avaliação serão apresentados os resultados obtidos para os testes experimentais utilizados para a comparação e avaliação dos resultados obtidos com a técnica de matrizes compactas.

6. ANÁLISE EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO VIBRO-ACÚSTICO DE UMA CAVIDADE DE GEOMETRIA IRREGULAR

No capítulo anterior foi apresentada a simulação numérica para avaliação da técnica de matrizes compactas. Alguns sistemas vibro-acústicos foram analisados e as dificuldades e limitações do método proposto foram avaliados.

Neste capítulo serão apresentados os estudos experimentais feito em uma cavidade vibro-acústica de geometria irregular. As funções de resposta em frequência acústica (pressão) e estrutural (velocidade de vibração) são estimadas experimentalmente e pelo método das matrizes compactas. Os resultados obtidos são comparados para avaliar a potencialidade da técnica proposta.

6.1. Descrição da cavidade vibro-acústica em PVC e aço

A cavidade vibro-acústica utilizada nos testes experimentais consiste de um protótipo que tem uma ligeira semelhança com a cabine de um automóvel, construído de material acusticamente rígido (PVC). O protótipo tem as dimensões do modelo numérico apresentado na seção 5.2 e foi construído com placas de 10 mm de espessura. As chapas foram fresadas e coladas para dar forma à geometria do modelo. A parte inferior da cavidade foi fechada com uma chapa de aço ABNT 1040 de 3,1 mm de espessura para obter o acoplamento vibro-acústico, figura 6.1.

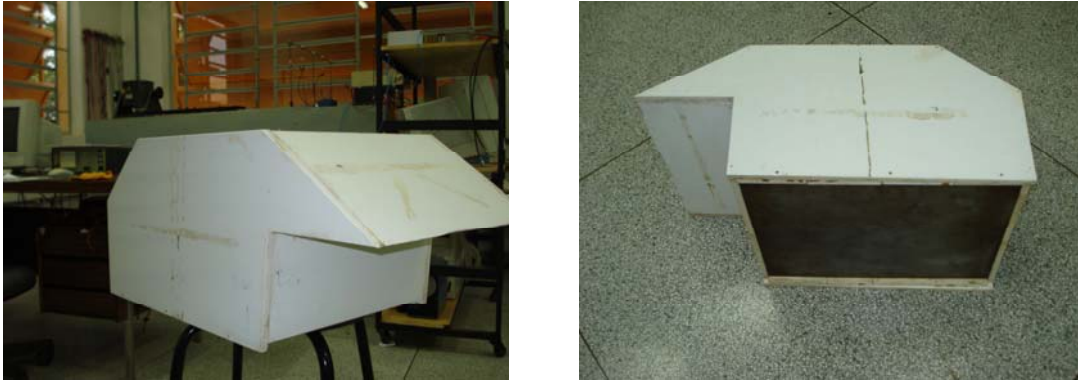


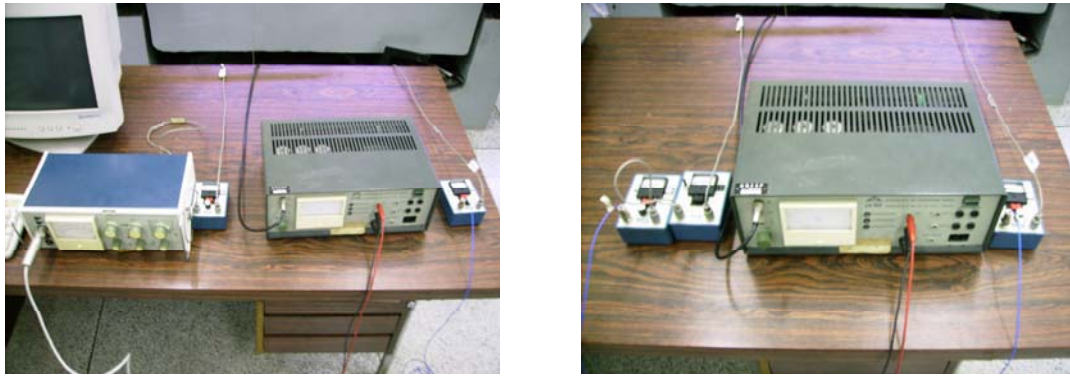
Figura 6.1 – Cavity Vibro-acústica construída em PVC e aço

A fixação da estrutura flexível (placa de aço) na cavidade de PVC foi feita com pequenas tiras de PVC coladas internamente na cavidade e pressionadas para fixar a chapa de aço. A tampa superior da cavidade é removível para proporcionar o posicionamento dos microfones. Um pequeno furo foi feito na parte frontal da cavidade para possibilitar a passagens dos cabos que conectam o microfone ao computador.

6.2. Preparação do modelo experimental da cavidade e testes experimentais

O objetivo dos testes experimentais aqui apresentados é obter as funções de resposta em frequência, FRF(s), da cavidade vibro-acústica. As FRF(s) foram estimadas tanto para a pressão acústica da cavidade, como para a velocidade de vibração da chapa de aço, sendo que a excitação consistia de uma força estrutural aplicada na chapa de aço.

O setup experimental montado para a realização dos testes consiste de um sistema de aquisição, transdutor de pressão e aceleração, condicionadores, amplificadores, excitador eletromagnético, martelo instrumentado, medidor de nível de pressão sonora, fios, conectores e etc. O sistema de aquisição de dados utilizado é o *signal calc ace* da empresa DATA PHYSICS, a pressão acústica na cavidade foi medida com um conjunto formado por um microfone de $\frac{1}{2}$ " da marca *robotron mk201* e um pré-amplificador *robotron mv201* conectados a um medidor de pressão sonora *robotron 00026*. A figura 6.2 mostra o setup experimental utilizado.



a)

b)

Figura 6.2 – Set-up experimental. Equipamentos utilizados para medir a) resposta acústica e b) resposta estrutural

A definição da malha e a escolha dos pontos de medição da pressão acústica foram realizados com base na análise e nos resultados dos testes numéricos. A figura 6.3 mostra os pontos correspondente a malha acústica utilizada.

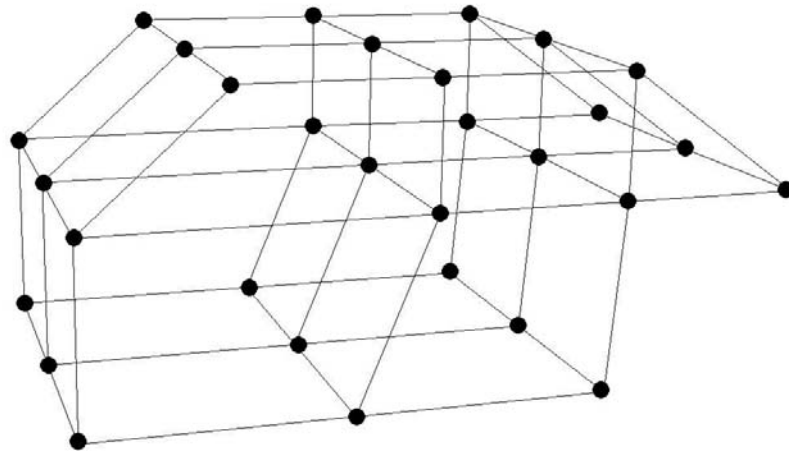
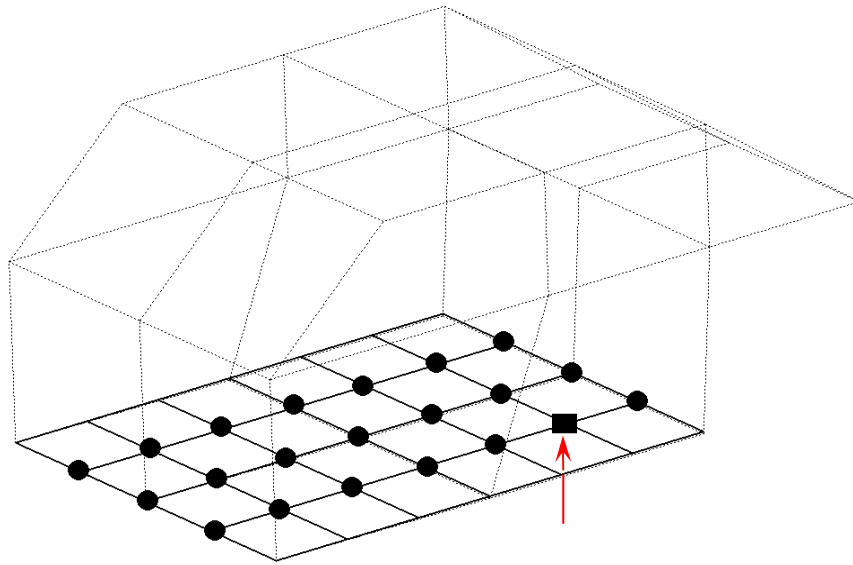


Figura 6.3 – Malha onde os sensores de pressão sonora (microfones) foram posicionados

A velocidade de vibração na chapa de aço foi medida utilizando um acelerômetro piezelétrico *PCB 325C68* conectado a um integrador analógico *PCB 480B10* e a um condicionador de sinais *PCB 480E09*. A integração da aceleração é realizada através de um amplificador operacional integrador que fornece o sinal medido em velocidade, para uma integração e deslocamento, para duas integrações. Baseado nas análises numéricas preliminares foram escolhidos 21 pontos de medição, conforme mostra a figura 6.4. A força estrutural de entrada foi aplicada no ponto marcado na figura 6.3.



Figuras 6.4 – Malha onde os sensores de aceleração (acelerômetros) foram posicionados

Nesta etapa inicial de pré-testes, foram testadas várias configurações e condições para a aquisição da resposta da cavidade vibro-acústica tomando como base os resultados experimentais e os testes simulados, optou-se por conduzir os testes na condição livre-livre. A condição livre-livre da estrutura foi obtida com a utilização de elásticos para manter a estrutura livre. A figura 6.5 mostra a estrutura pendurada nos elásticos que estão fixados em um cavalete de aço.



Figura 6.5 – Suspensão da cavidade Vibro-acústica

O sistema de aquisição de sinal tem uma frequência máxima de operação de 20 kHz, possui duas entradas e duas saídas e tensão máxima de entrada de 5V. Na preparação dos testes foram realizadas algumas medidas prévias com o intuito de calibrar o sistema, isto é, ajustar o sistema de aquisição para capturar a entrada e a saída em níveis adequados de energia para a construção adequada das FRF(s).

6.3. Modelo experimental de uma cavidade de geometria irregular

O comportamento vibro-acústico do modelo foi analisado para dois tipos de excitação. No primeiro caso o sinal de entrada foi gerado por um excitador eletromagnético (shaker) fixado na chapa de aço por uma haste flexível. No segundo caso foi aplicada uma entrada impulsiva (força) utilizando um martelo instrumentado.

6.3.1. Excitação utilizando shaker

Neste caso a estrutura foi excitada com uma força do tipo aleatória. O contato do shaker com a estrutura foi feito utilizando uma haste flexível, ressaltando-se que várias hastes foram testadas preliminarmente a fim de minimizar a influência do shaker na resposta do sistema vibro-acústico. A força aplicada pelo shaker à estrutura foi medida através de uma célula de carga *PCB 208C02* posicionada entre a haste flexível e chapa de aço.

As respostas nos testes foram medidas utilizando sensores de pressão (resposta acústica) e de aceleração (resposta estrutural) posicionados nos pontos mostrados nas figuras 6.2 e 6.3. A frequência de amostragem foi de 0 a 800 Hz, com resolução de 640 linhas espectrais e o ponto de excitação é o mesmo discutido anteriormente, figura 6.4. Ressaltando que a resposta estrutural foi medida em aceleração e posteriormente convertida em velocidade.

A figura 6.6 mostra o conjunto das 30 FRF(s) medidas em cada teste para a resposta em pressão acústica e o conjunto das 21 FRF(s) medidas em cada teste para a resposta em velocidade de vibração para a entrada aleatória.

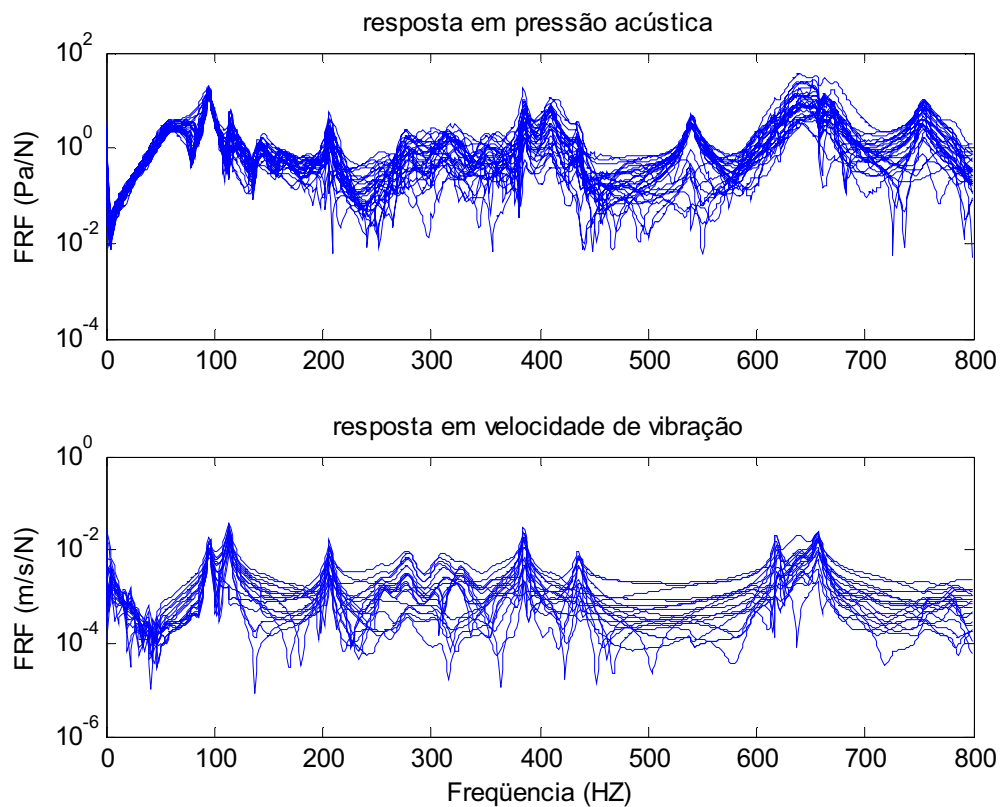


Figura 6.6 – Conjunto de FRF(s) medidas com excitação realizada com excitador eletromagnético (shaker)

As FRF(s) foram geradas automaticamente pelo software de geração e aquisição de sinais *Signal Calc Ace*. Os testes foram realizados utilizando uma entrada e uma saída.

6.3.2. Entrada impulsiva

O ensaio utilizando entrada impulsiva, teste de impacto, envolve a aplicação de um golpe instantâneo com um martelo instrumentado e a medição do movimento resultante com um acelerômetro ou do sinal acústico com um microfone. O tamanho, comprimento, material e velocidade de impacto do martelo determinam a amplitude e a frequência da força impulsiva. Geralmente, o material da ponta do martelo determina o nível de energia do impacto. No caso experimental analisado, foi utilizado o martelo instrumentado PCB 086C04

que disponibiliza diversos tipos de pontas. Foram testados vários tipos de pontas do martelo para adequar o nível de energia do teste.

A figura 6.7 mostra o conjunto das 30 FRF(s) medidas em cada teste para a resposta em pressão acústica e o conjunto das 20 FRF(s) medidas em cada teste para a resposta em velocidade de vibração para a entrada impulsiva.

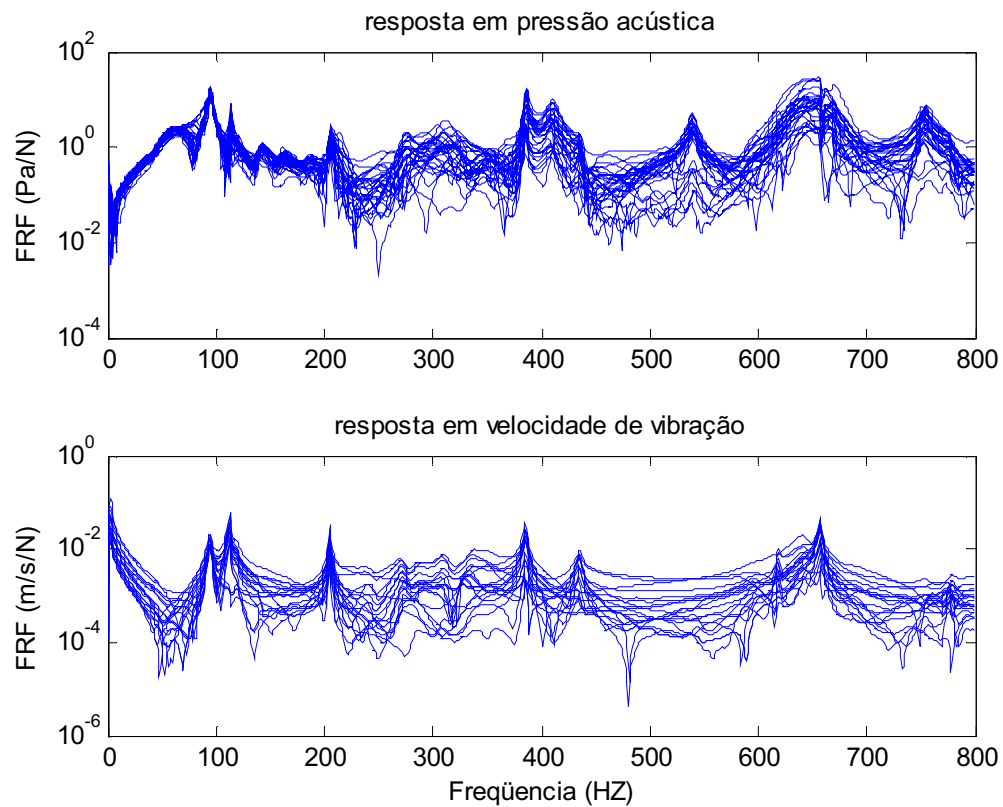


Figura 6.7 – Conjunto de FRF's medidas com excitação realizada com martelo instrumentado

A correlação visual das diversas FRF(s) mostra que o experimento foi bem sucedido. Desta forma, a escolha de uma FRF no conjunto de FRF(s) pode ser feita para a avaliação da técnica de matrizes compactas.

6.3.3. Extração dos modos vibro-acústicos experimentais

Uma estimativa dos modos do modelo foi realizada a partir da análise de todos os picos de frequência das FRF(s) medidas. A figura 6.8 mostra o gráfico da média das FRF(s) para a resposta em pressão sonora da cavidade vibro-acústica. As frequências naturais vibro-acústica, predominantemente acústica, encontradas nos testes experimentais têm os seus picos indicados na figura. Os demais picos são provenientes de frequências naturais predominantemente estruturais.

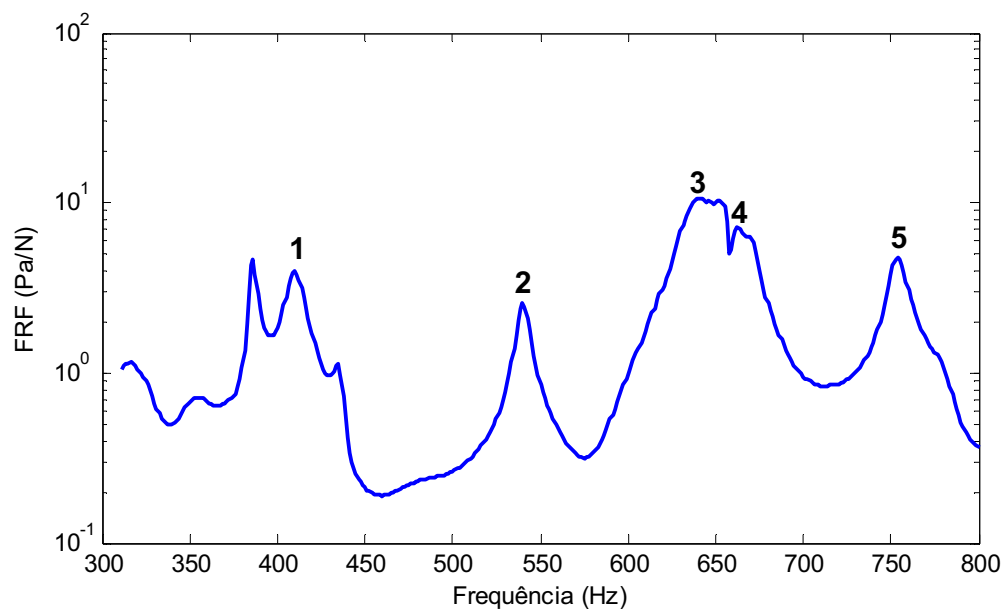


Figura 6.8 – Picos relacionados aos modos vibro-acústico, predominantemente acústico

A parte real da resposta em pressão sonora nas frequências naturais vibro-acústica predominantemente acústicas, foram utilizadas para a estimativa dos modos e plotadas em um gráfico de cores com o auxílio do software *open source* vislit 1.10.0 – visualization tool. A figura 6.9 mostra as formas modais estimadas experimentalmente.

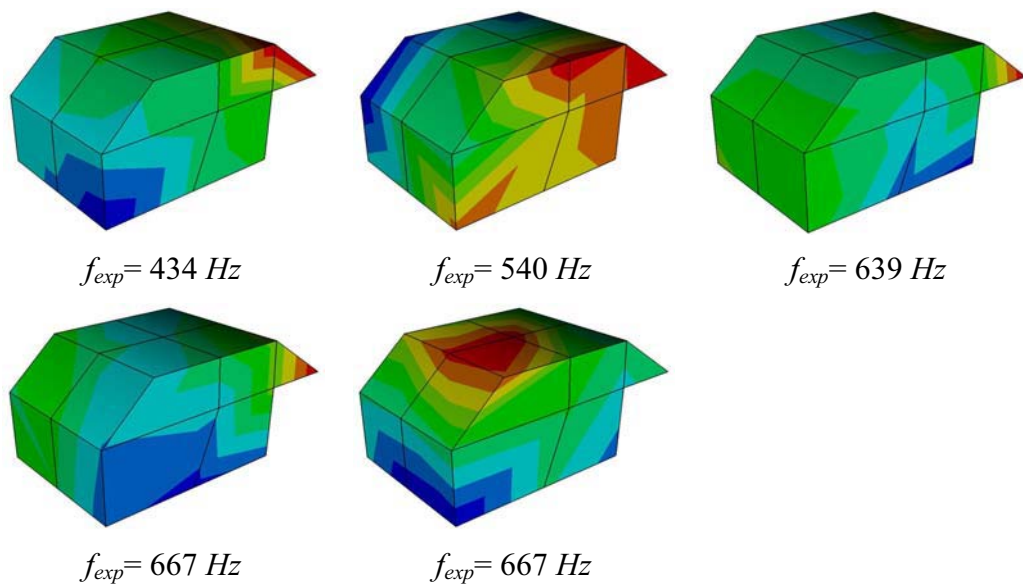


Figura 6.9 – Formas modais acústicas estimadas experimentalmente

Os modos estruturais foram estimados a partir das FRF(s) medidas na placa. experimentais A figura 6.10 mostra o gráfico da soma das FRF(s) experimentais dos pontos de medida da chapa de aço. Os pontos indicados na figura representam as frequências naturais vibro-acústica, predominantemente estruturais, encontrados nos testes experimentais.

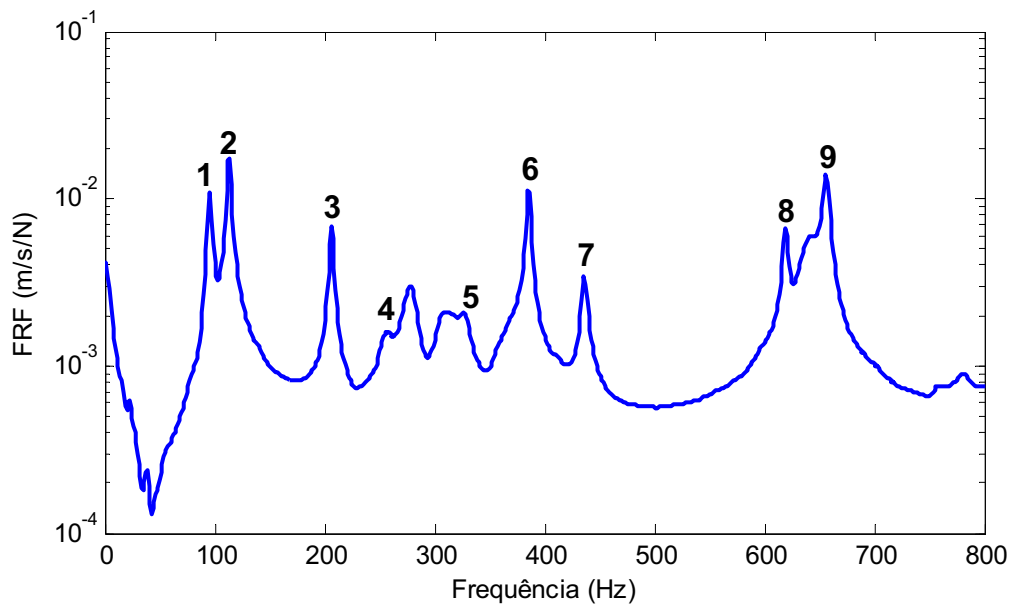
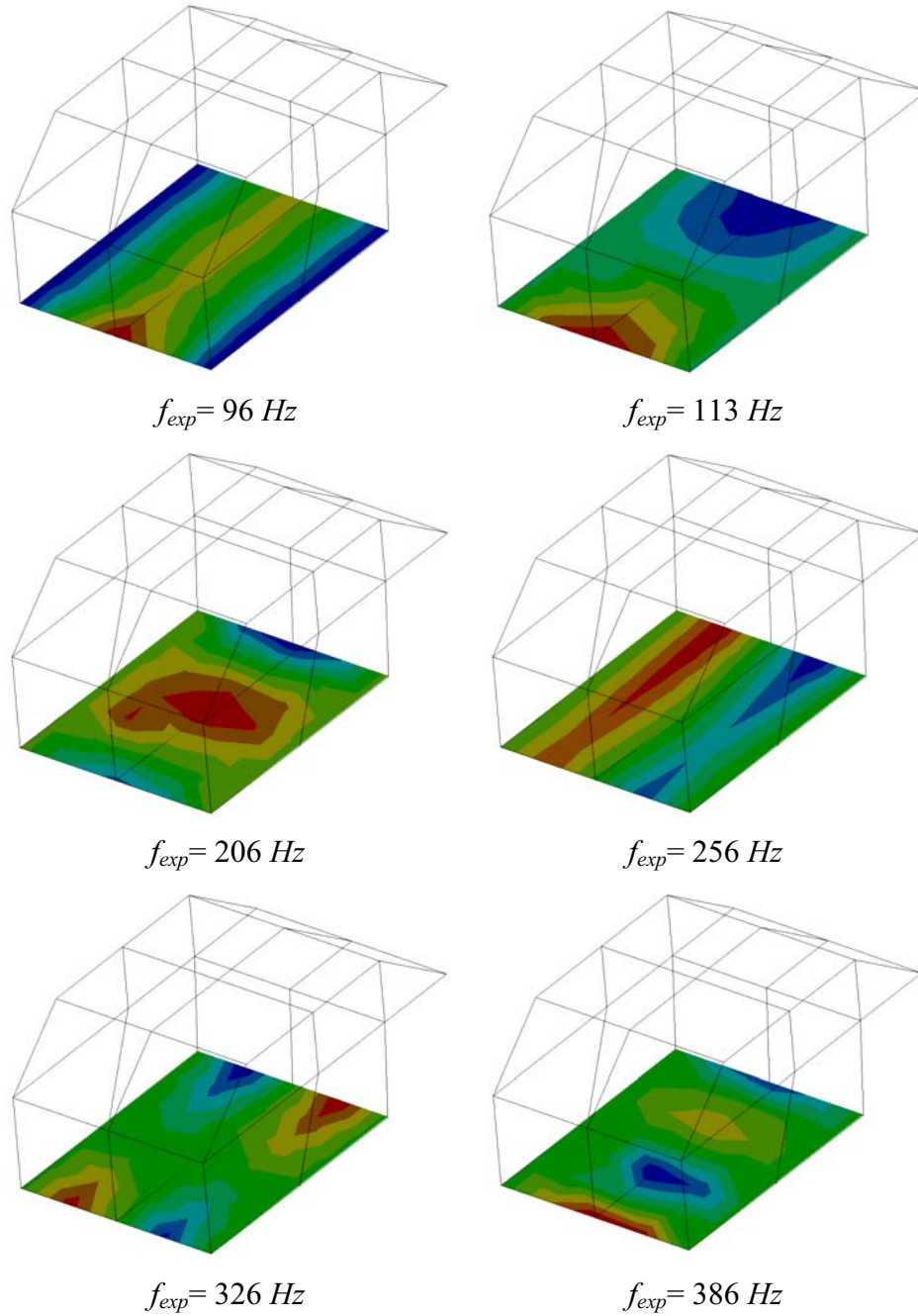


Figura 6.10 – Picos relacionados aos modos vibro-acústico, predominantemente estrutural

A parte real das FRF(s) nos pontos marcados na figura foi plotada através de gráfico de cores, para visualização dos modos de vibrar da chapa de aço montada na cavidade de PVC. Os picos que ocorrem entre as frequências denotadas com o número 4 e 5 são atribuídas

a frequências de ressonância da cavidade de PVC. O pico entre os números 8 e 9 são relacionados ao forte acoplamento com um modo predominantemente acústico. A figura 6.11 mostra os modos estruturais estimados experimentalmente.



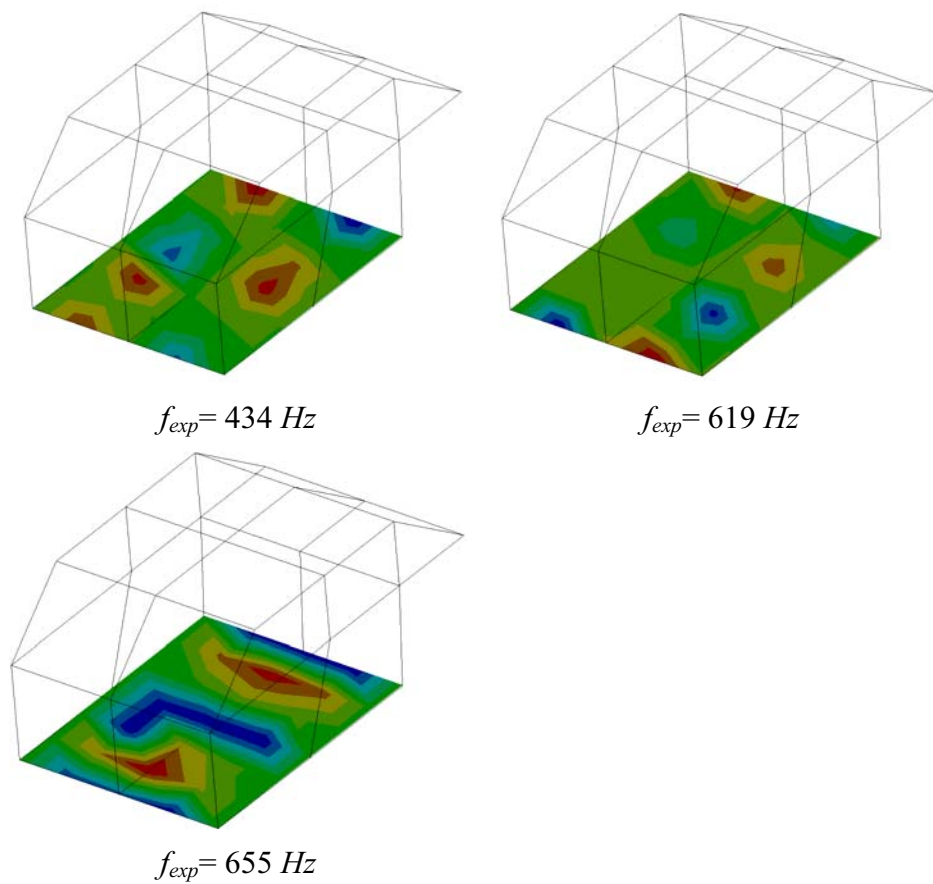


Figura 6.11 – Formas modais estruturais estimadas experimentalmente

6.4. Modelo numérico de elementos finitos

O modelo de elementos finitos da cavidade de geometria irregular discutido na simulação numérica foi bastante útil na montagem, seleção de parâmetros e realização dos testes experimentais. Entretanto, conforme pôde ser observado, os valores das frequências naturais da estrutura flexível medida e os valores calculados pelo método dos elementos finitos não apresentaram uma boa concordância. Após alguns testes de simulação e observação dos resultados, notou-se que este fato poderia ser explicado pela influência da estrutura de PVC na vibração da chapa de aço montada no lado inferior da cavidade, visto que a cavidade não se comporta como uma estrutura acusticamente rígida. Uma forma que poderia ser utilizada para resolver este problema seria envolver a caixa em um material mais rígido

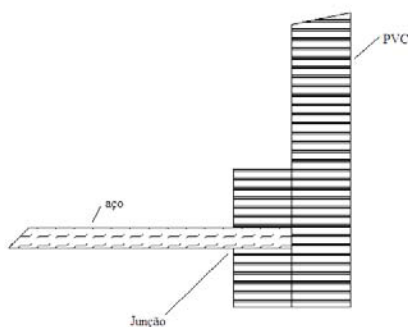
para garantir a rigidez acústica necessária, por exemplo areia (KIM; BRENNAN, 1999). Contudo, optou-se por adequar o modelo numérico buscando levar em conta a influência da estrutura de PVC da cavidade.

Neste caso o modelo de elementos finitos foi redefinido, adicionando 800 elementos bidimensionais do tipo placa para incluir a caixa de PVC no modelo numérico de elementos finitos. A tabela 6.1 mostra os dados e propriedades utilizados no modelo.

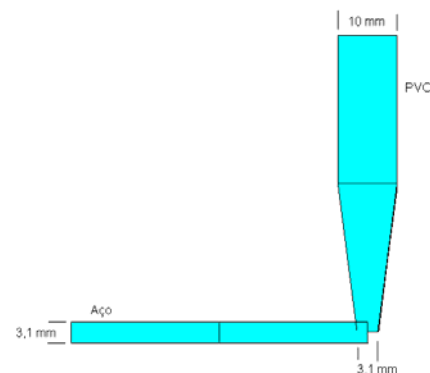
Tabela 6.1 – Dados dos elementos

Material	Ar	Aço	PVC
Densidade [Kg/m^3]	1,21	7890	1500
Velocidade do som [m/s]	340		
Modulo de elasticidade [GPa]		200	3,06
Coefficiente de Poisson		0,33	0,36

Neste novo cenário, a junção entre a parede de PVC e a chapa de aço teve também de ser levada em conta. A chapa de aço é apoiada nas laterais da caixa, por uma junção mostrada esquematicamente na figura 6.12.a. A fixação foi feita através de duas vigas de PVC de seção 10mm x 10mm coladas na parede interna da cavidade de PVC pressionando a chapa de aço. A figura 6.12.b mostra o modelo de elementos finitos que melhor se adequou para a região.



Figuras 6.12.a - Detalhe de junção do PVC com o aço



Figuras 6.12.b - Modelo da Junção em elementos finitos

6.4.1. Autovalores e autovetores do modelo

Com o objetivo de obter subsídios para aplicação da técnica de matrizes compactas, o comportamento do modelo foi estudado com base no método dos elementos finitos, sendo que cada subsistema foi analisado isoladamente para obter os autovalores e autovetores do modelo *desacoplado*. Nesta análise preliminar, a cavidade acústica foi modelada de maneira semelhante à apresentada na seção 5.2.1. A figura 6.13.a mostra os modos acústicos e as frequências naturais encontrados na faixa de frequência de 0 a 800 Hz.

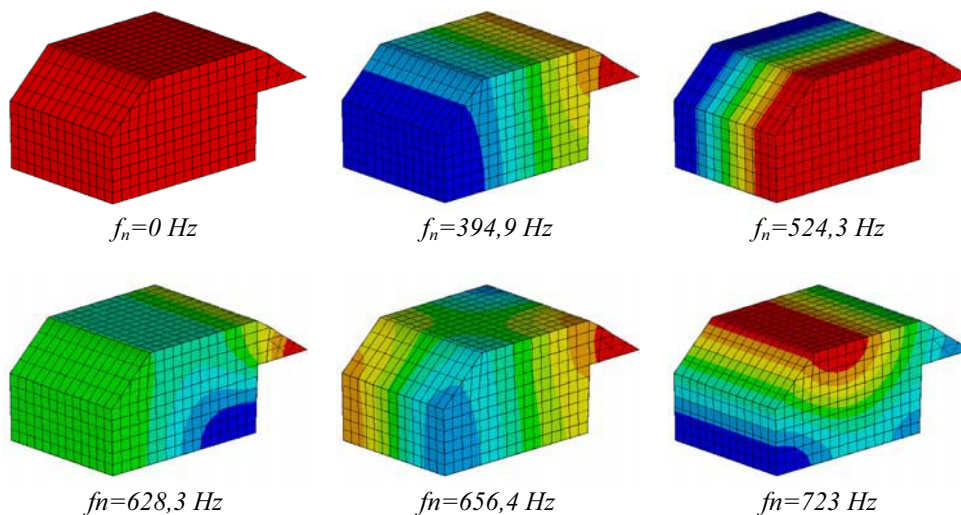


Figura 6.13.a – Modos acústicos desacoplado da cavidade vibro-acústica

O modelo estrutural de elementos finitos foi redefinido utilizando elementos bidimensionais do tipo placa nos nós do contorno da cavidade para obter as formas modais da estrutura *desacoplada* levando em conta a estrutura de PVC da cavidade.

Nesta análise numérica, os modos desacoplados são obtidos com o objetivo da aplicação da técnica das matrizes compactas. Desta forma, os elementos estruturais de interesse são os contidos na chapa de aço. Adicionalmente, o método de matrizes compactas requer apenas os graus de liberdade localizados na direção transversal à chapa. Sob estas condições, foi realizada uma análise modal reduzida no modelo numérico de elementos finitos, isto é, os autovalores e autovetores estruturais foram obtidos apenas nos nós e graus de liberdade de interesse. A análise foi realizada na faixa de frequência de 0 a 800 Hz. A figura 6.13.b mostra os modos estruturais desacoplados encontrados na faixa de frequência

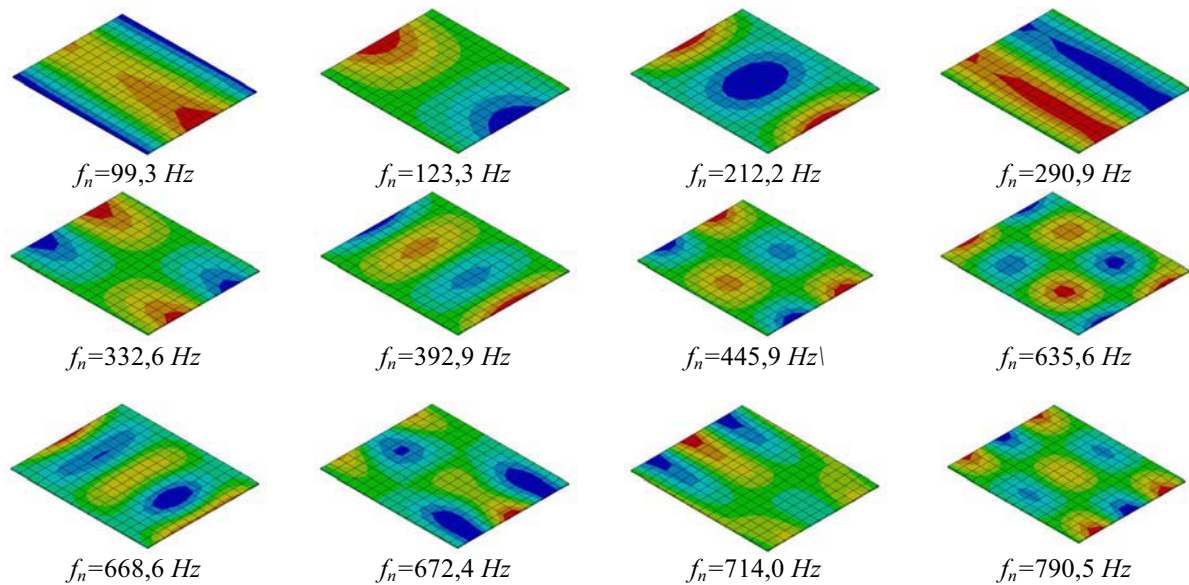


Figura 6.13.b – Modos estruturais desacoplado da cavidade vibro-acústica

Uma vez obtido os autovalores e autovetores do modelo *desacoplado* passou-se para a análise do comportamento vibro-acústico da cavidade.

6.4.2. Análise do comportamento vibro-acústico do modelo pelo método dos elementos finitos

Nesta etapa, o modelo numérico foi construído levando em consideração o acoplamento existente entre a estrutura flexível e a cavidade. Nesta análise do modelo acoplado, é assumido que não ocorre acoplamento vibro-acústico entre a estrutura de PVC e o fluido contido na cavidade. Desta forma, a região de acoplamento definida no modelo de elementos finitos é dada pela interface entre a chapa de aço e o fluido contido na cavidade. Os resultados obtidos mostraram que este modelo foi coerente.

O comportamento vibro-acústico da cavidade foi analisado na faixa de frequência de 0 a 800 Hz. Nesta faixa de frequência foram encontrados 18 modos vibro-acústicos. Destes, 6 modos são de característica predominantemente acústica e 12 de característica

predominantemente estrutural. O comportamento dos modelos foi comparado, considerando o caso em que não existe acoplamento entre o modelo acústico e estrutural e o modelo acoplado. A tabela 6.2, mostra a relação entre as frequências encontradas nos estudos dos dois subsistemas *desacoplados* e aquelas encontradas no modelo vibro-acústico.

Tabela 6.2 – Frequências naturais vibro-acústica

Modo	Frequência natural acústica desacoplada (Hz)	Frequência natural estrutural desacoplada (Hz)	Frequência natural vibro-acústica (Hz)
1	0	-	0
2	-	99,3	99,2
3	-	123,3	123,6
4	-	212,2	211,7
5	-	290,9	307,8
6		332,6	329,2
7		392,9	391,7
8	394,9	-	397,7
9	-	445,9	450,7
10	524,3		524,8
11	628,3	-	628,8
12	-	635,6	638,7
13	656,4	-	656,9
14		668,6	668,5
15	-	672,4	691,1
16	723,0		723,6
17	-	714	716,6
18	-	790,5	803,7

Adicionalmente, visando fornecer subsídios para a comparação com o resultado do método das matrizes compactas foi calculada nesta etapa também a resposta em frequência do problema vibro-acústico.

A análise foi realizada na faixa de frequência de 0 a 800 Hz e a força senoidal foi aplicada na direção transversal da estrutura flexível no ponto cujas coordenadas são $(C_1/5, L/4)$. Foi calculada a resposta em frequência estrutural (velocidade estrutural por força) para o *drive point* e a resposta em frequência acústica (pressão por força) em um ponto no interior da cavidade irregular cujas coordenadas são dadas por $(C_1/2, H_1, L/2)$. As figuras 6.14 e 6.15 mostram os resultados.

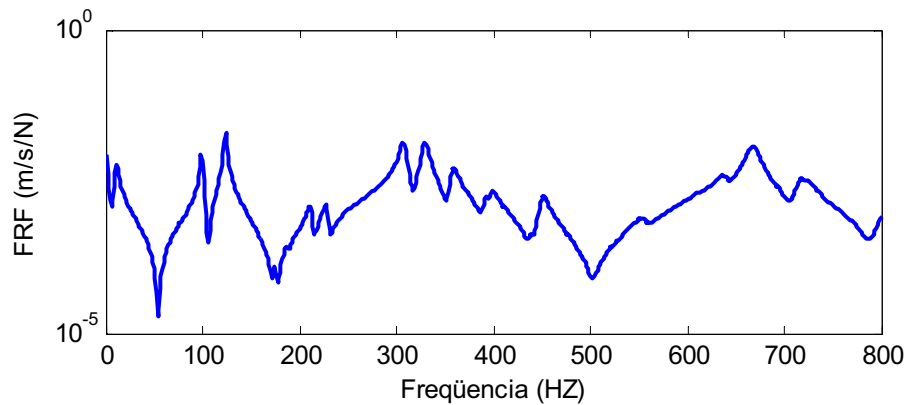


Figura 6.14 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação e resposta estrutural

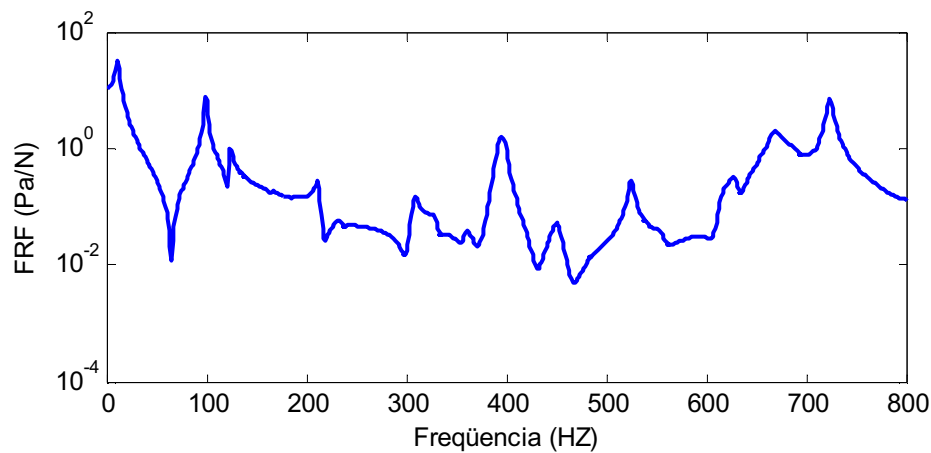


Figura 6.15 – Função de resposta em frequência do modelo. Excitação estrutural e resposta acústica

6.5. Comparação das respostas vibro-acústicas do modelo pelo método dos elementos finitos

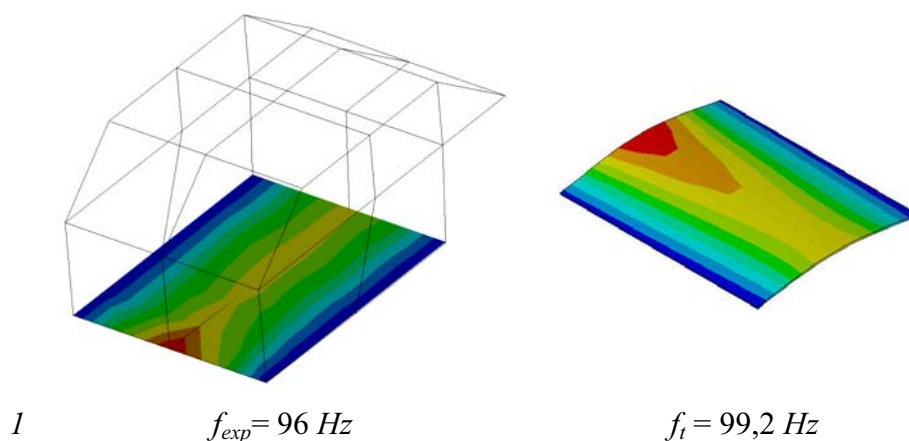
A comparação das respostas vibro-acústicas dos modelos busca validar o modelo numérico de elementos finitos, visto que a proposta do método das matrizes é baseado na utilização dos parâmetros modais do modelo de elementos finitos desacoplado. Conseqüentemente o modelo de elementos finitos desacoplado tem que ser representativo,

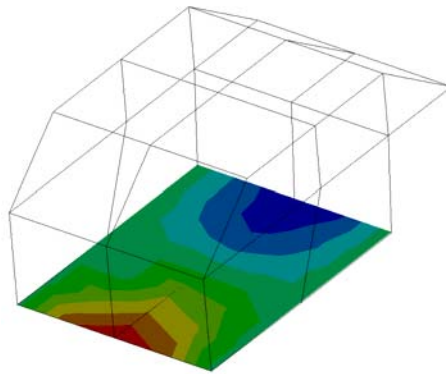
caso contrário, não é possível representar o comportamento vibro-acústico do modelo, utilizando o conceito de matrizes compactas.

A próxima seção mostra a comparação dos modos e frequências naturais vibro-acústicos obtidos numericamente e experimentalmente para a cavidade vibro-acústica.

6.5.1. Modos e frequências naturais

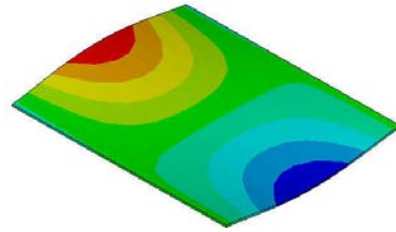
As formas modais vibro-acústicas, predominantemente estruturais, obtidas numericamente na seção 6.4 foram plotados na coluna direita da figura 6.16 para visualização e comparação das formas modais e das frequências naturais obtidas experimentalmente e numericamente pelo método dos elementos finitos. Nota-se que as formas modais apresentam uma boa correlação visual. Contudo, nota-se um erro sistemático da frequência natural numérica com aquela medida experimentalmente. Estas diferenças entre valores preditos numericamente e os encontrados experimentalmente possivelmente é proveniente de perturbações externas e do acoplamento, que não foi levado em conta, entre a estrutura de PVC e o fluido no interior da cavidade. O dégradé de cores representa a variação da pressão sonora ao longo da cavidade.



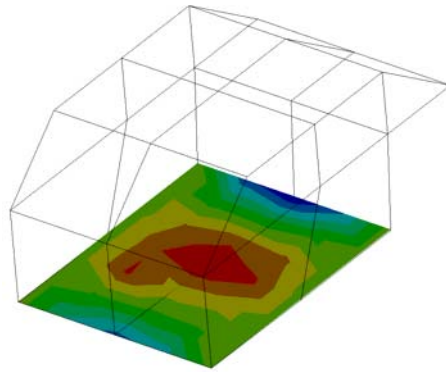


2

$$f_{exp} = 113 \text{ Hz}$$

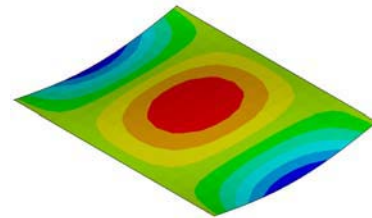


$$f_i = 123,6 \text{ Hz}$$

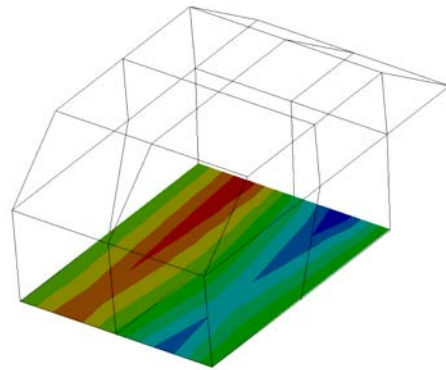


3

$$f_{exp} = 206 \text{ Hz}$$

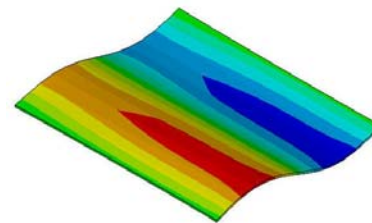


$$f_i = 211,7 \text{ Hz}$$

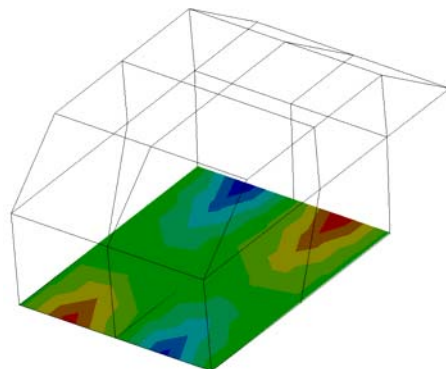


4

$$f_{exp} = 256 \text{ Hz}$$

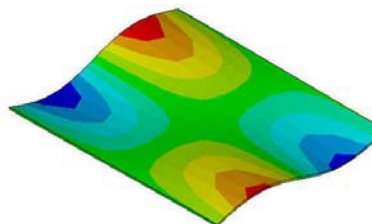


$$f_i = 307,8 \text{ Hz}$$



5

$$f_{exp} = 326 \text{ Hz}$$



$$f_i = 329,2 \text{ Hz}$$

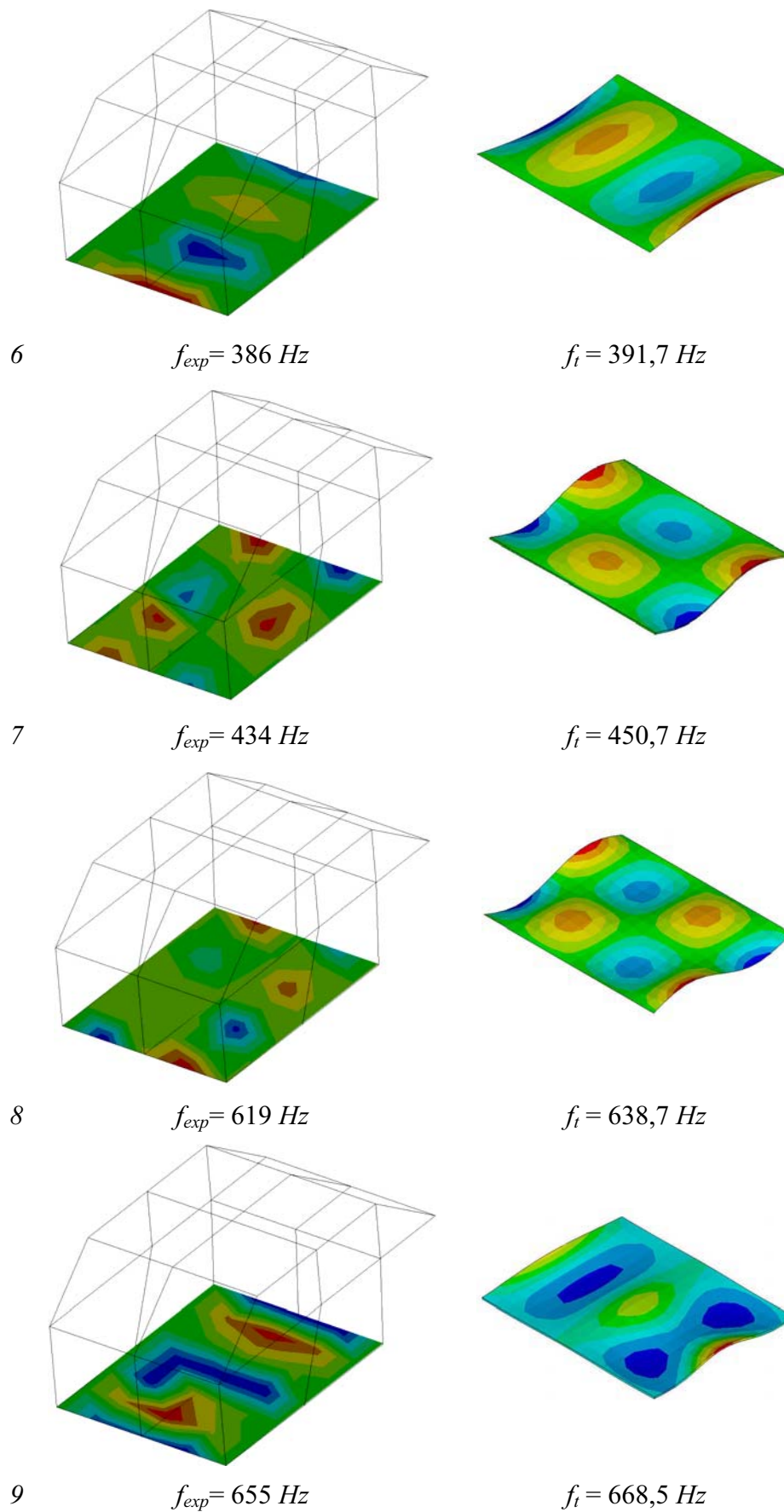
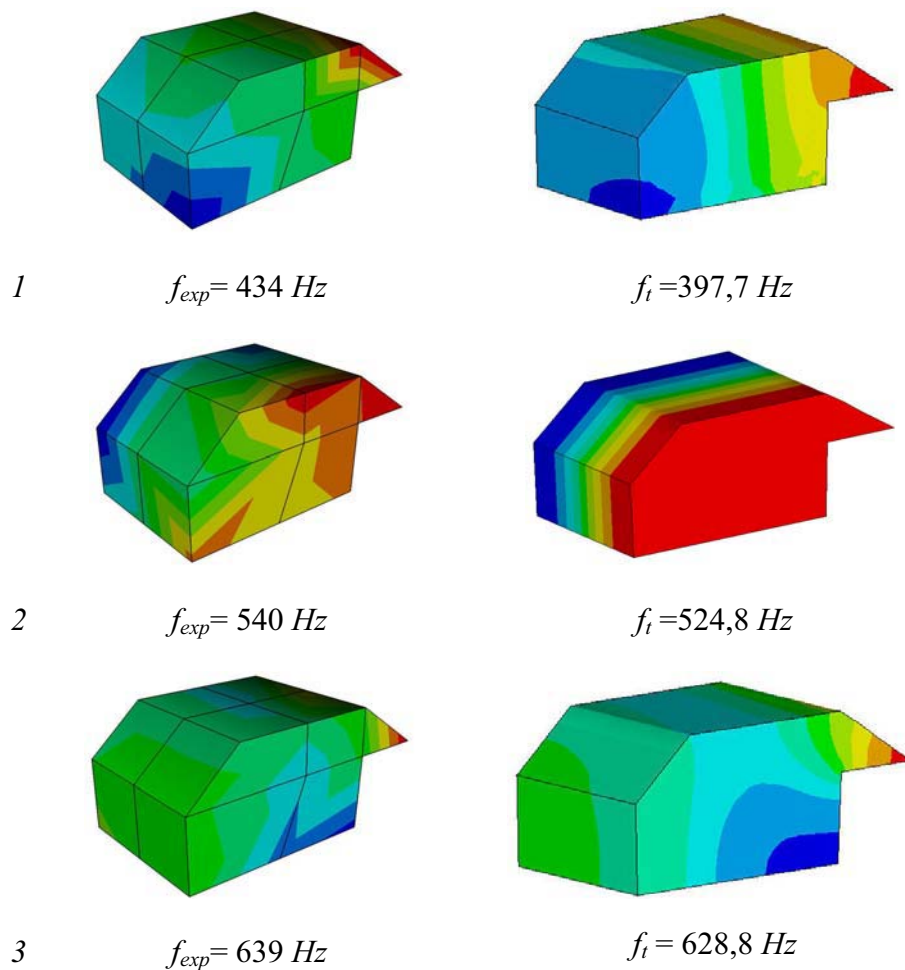


Figura 6.16 – Comparação entre as frequências naturais e modos vibro-acústicos, predominantemente estruturais. Coluna esquerda – experimental, coluna direita – numérico

Os valores das freqüências naturais da chapa de aço são bastante influenciados pela cavidade de PVC. Contudo, nota-se que as formas modais são bem semelhantes àsquelas medidas experimentalmente. Este fato leva a possibilidade destas divergências estarem associadas à difícil modelagem da junção entre o PVC e a chapa de aço.

As formas modais vibro-acústicas, predominantemente acústicas, obtidas numericamente na seção 6.4 foram plotados na coluna direita da figura 6.17 para visualização e comparação das formas modais e das freqüências naturais obtidas experimentalmente e numericamente pelo método dos elementos finitos.

A comparação mostra que há uma boa correlação entre os modos. Contudo, alguma distorção é notada, possivelmente devido à influência de ruídos externos.



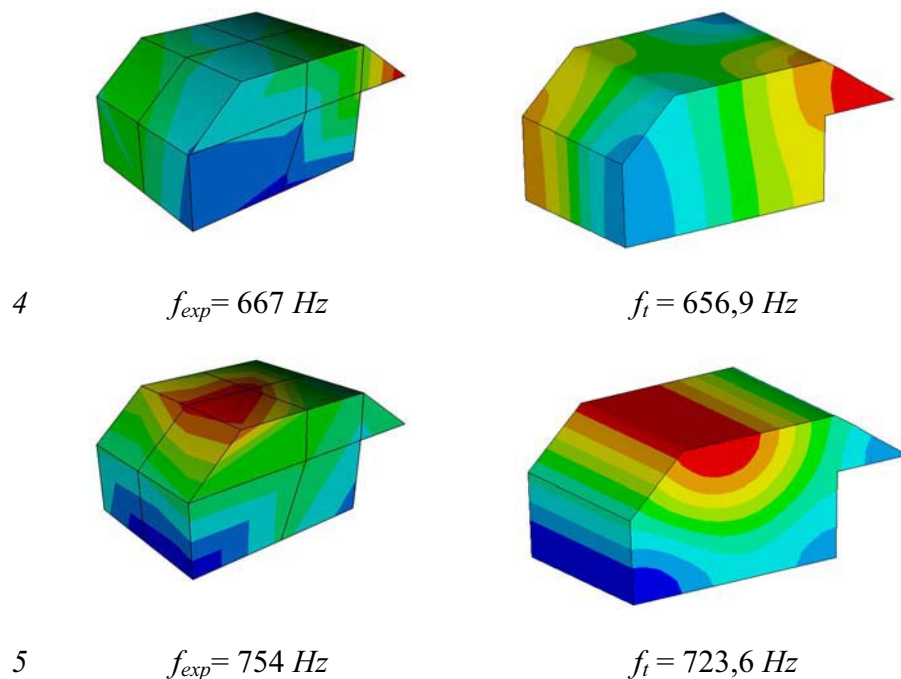


Figura 6.17 – Comparação entre as frequências naturais e modos vibro-acústicos, predominantemente acústicos. Coluna esquerda – experimental, coluna direita – numérico

Na próxima seção, será avaliada a resposta em frequência da cavidade vibro-acústica, pelo método dos elementos finitos.

6.5.2. Resposta em frequência

A resposta em frequência do modelo é calculada aplicando-se uma força senoidal unitária e variando a frequência na faixa de interesse. Neste caso a força foi aplicada no mesmo ponto utilizado no modelo experimental para a mesma faixa de frequência (0 a 800 Hz).

A figura 6.18 mostra a comparação entre as FRF(s) estrutural (vibração da chapa de aço) obtidas numericamente e experimentalmente para o *drive point*. Já se esperava encontrar divergências entre as FRF(s) numéricas e experimentais nesta comparação preliminar com o método dos elementos finitos. Alguns picos aparecem nas FRF(s) devido a influência da cavidade de PVC em ambos os modelos numérico e experimental.

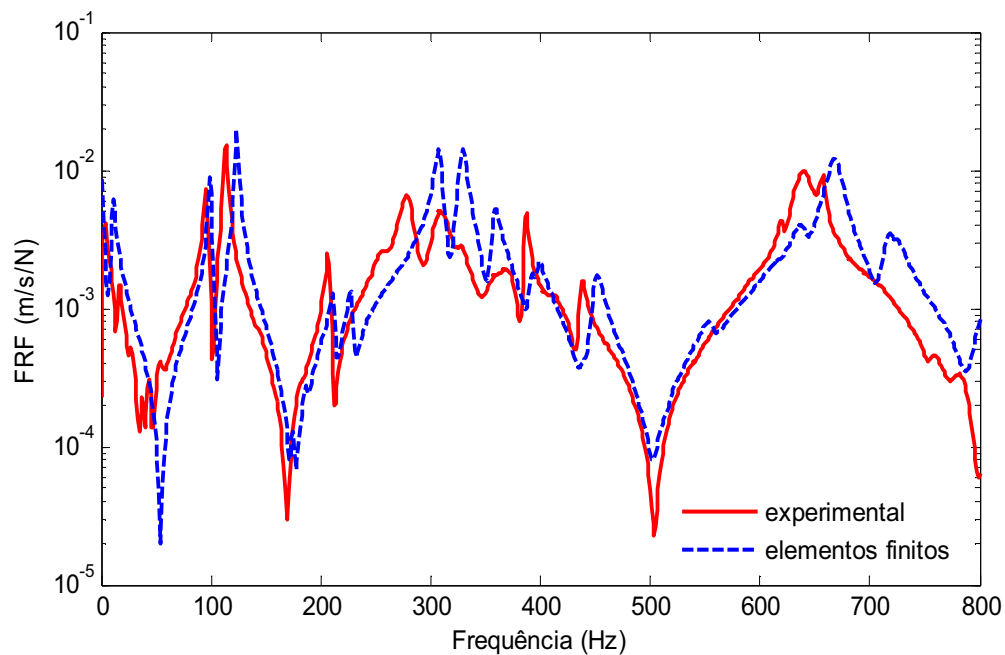


Figura 6.18 – Resposta em frequência da velocidade de vibração da chapa no drive point

A resposta acústica foi analisada para a mesma faixa de frequência, calculada em um ponto localizado no centro da cavidade. A fig. 6.15 mostra a comparação em frequência (para o modelo numérico e experimental) da pressão acústica na cavidade. Nota-se na FRF experimental de pressão acústica a presença de vários picos não identificados no modelo numérico em diversas faixas de frequência. Tais picos são possivelmente provenientes de ruídos externos ou de acoplamentos com a cavidade de PVC. Apesar do esforço de se medir a pressão acústica no ponto exato definido no modelo numérico e experimental, existem, também, fontes de erro associado a diferença entre a localização dos pontos na malha de elementos finitos e os medidos nos testes experimentais.

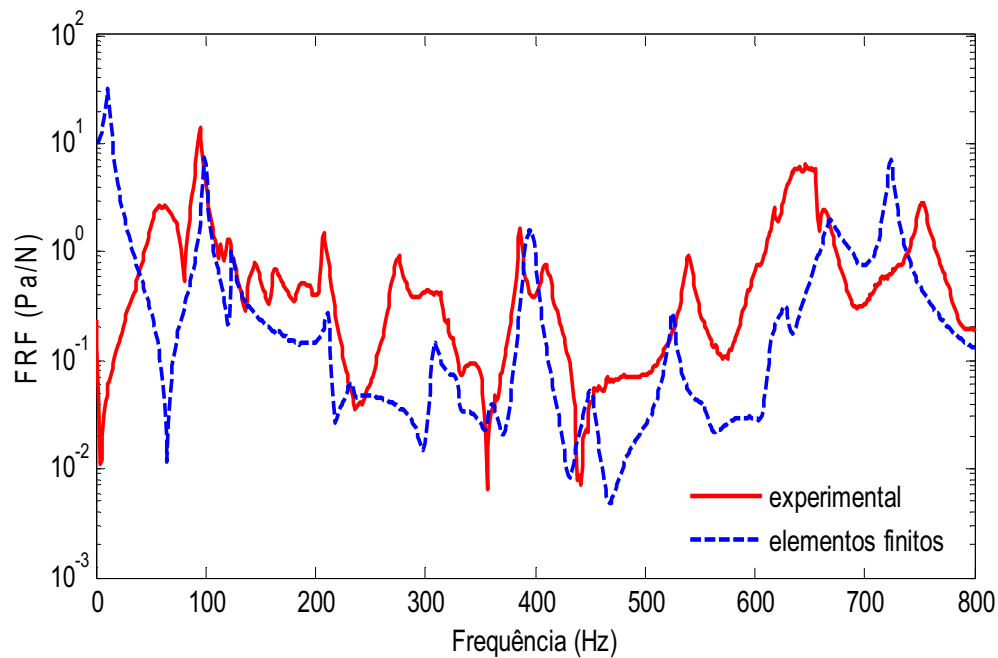


Figura 6.19 – Resposta em frequência da pressão acústica da cavidade em um ponto localizado no centro da caixa

Nota-se que o método dos elementos finitos se mostrou suficiente para o cálculo aproximado das formas modais, frequências naturais e resposta em frequência da cavidade vibro-acústica. Com a inclusão dos elementos estruturais bidimensionais para modelar o PVC, ainda mais tempo e espaço de armazenamento computacional foram requeridos comparado ao modelo de elementos finitos da seção 5.2. Este fato se dá pela impossibilidade de se fazer um controle da solução computacional, ou seja, a obtenção da resposta em frequência é feita através da solução das equações de elementos finitos para todos os nós e elementos definidos no modelo numérico vibro-acústico. Na próxima seção será avaliado o método das matrizes compactas na obtenção aproximada da resposta em frequência da cavidade vibro-acústica.

6.6. Método das matrizes compactas

O método das matrizes compactas é um método de análise do acoplamento vibro-acústico que utiliza apenas os parâmetros modais de cada subsistema *desacoplado* para estimar a resposta em frequência do sistema acoplado. A vantagem do método está na

utilização apenas de matrizes simétricas na sua formulação. Adicionalmente, o modelo de matrizes compactas é construído baseado nos conceitos de impedância e mobilidade, o qual possibilita escrever as equações baseado apenas nos parâmetros modais do modelo desacoplado. Nesta etapa, o método das matrizes compactas será estudado e avaliado utilizando dados experimentais.

Inicialmente, em uma avaliação preliminar, o objetivo é verificar quais modos obtidos numericamente pelo método dos elementos finitos puderam ser identificados nos testes experimentais. A tabela 6.3 mostra as frequências naturais *desacopladas* calculadas pelo método dos elementos finitos e as frequências naturais encontradas nos testes experimentais.

Tabela 6.3 – Frequências naturais vibro-acústica

Modo	Frequências naturais acústicas desacopladas (Hz) - numérico	Frequências naturais estruturais <i>desacopladas</i> (Hz) - numérico	Frequências naturais vibro-acústica (Hz) - experimental
1	0	-	-
2	-	99,3	98,6
3	-	123,3	119,9
4	-	212,2	211
5	-	290,9	307
6	-	332,6	329
7	-	392,2	391,7
8	394,9	-	434
9	-	445,9	450,7
10	524,3	-	540
11	-	605,1	619
12	628,3	-	639
13	-	635,6	N
14	-	643,0	N
15	656,4	-	667
16	-	668,6	655
17	-	672,4	N
18	723,0	-	754
19	-	714,9	N
20	-	790,9	N

Os modos marcados com a letra N na coluna dos modos acústicos experimentais da tabela 6.3, não foram identificados nos testes experimentais. Acima da frequência de 640 Hz começam a ocorrer muitos modos locais das chapas de PVC e estes interferem na chapa de aço, de modo que nenhum destes modos pôde ser claramente identificado nos testes experimentais.

Uma vez definidas as formas modais e frequências naturais do modelo desacoplado, as matrizes compactas puderam ser escritas. Foi definida uma força unitária no modelo de matrizes compactas para que fossem obtidas as FRF(s) acústicas e estruturais. O amortecimento modal foi definido com um valor constante e igual a 0,01. A figura 6.20 mostra a comparação da FRF estrutural (velocidade de vibração) obtidas numericamente pelo método de matrizes compactas e medida experimentalmente.

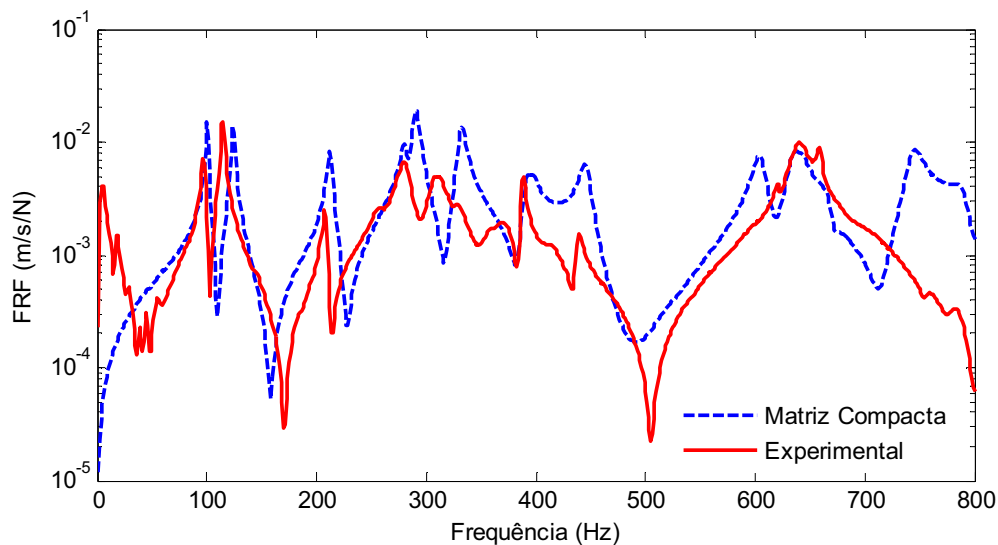


Figura 6.20 – Resposta em frequência da velocidade de vibração da chapa no drive point

Nota-se no gráfico uma boa correlação entre as frequências naturais obtidas numericamente e experimentalmente. Ocorrem diferenças na amplitude provavelmente devido ao amortecimento que não foi ajustado para cada modo. O amortecimento em alguns modos é alto devido a dissipação de energia nos modos rígidos e na junção da chapa de aço com as chapas de PVC. Acima de 640 Hz, onde os modos não puderam ser identificados no modelo experimental, começa a aparecer certa divergência entre as FRF(s). Isto provavelmente é devido aos muitos modos locais das chapas de PVC.

A figura 6.21 mostra a comparação entre as FRF(s) acústica (pressão) obtida numericamente pelo método de matrizes compactas e medida experimentalmente. Abaixo da frequência de 50 Hz nota-se o comportamento compliante da pressão acústica devido a inexistência de modos nesta faixa de frequência. Entre as frequências de 100 e 200 Hz aparecem alguns picos provavelmente provenientes de pequenas amplitudes de vibração de alguns modos locais da chapa de PVC que são excitados juntamente com a chapa de aço.

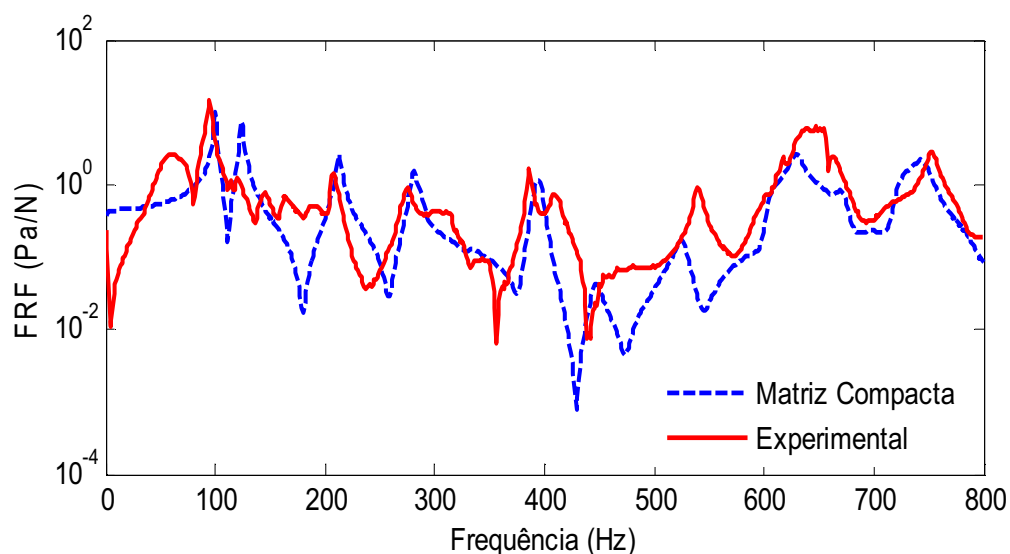


Figura 6.21 – Resposta em frequência da pressão acústica da cavidade em um ponto localizado no centro da caixa

Estes picos também aparecem acima da frequência de 200 Hz, contudo com amplitudes cada vez menores. Nota-se que a aplicação da técnica de matrizes compactas produz resposta em frequência bem próximas daquelas obtidas experimentalmente.

A utilização do método de matrizes compactas no estudo e análise de sistemas vibro-acústicos acoplados foi apresentada nesta seção. Pode ser observado que a aplicação do método envolve uma modelagem representativa das porções acústicas e estruturais *desacopladas*. O método se mostra vantajoso por apresentar-se na forma de vetores e matrizes, o que facilita sua implementação computacional. A formulação do modelo possibilita um bom entendimento das condições de acoplamento através da avaliação

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi discutida a utilização da aplicação da técnica de matrizes compactas para avaliar a resposta em frequência de sistemas vibro-acústicos. O método relaciona a entrada e a saída das quantidades físicas envolvidas semelhantemente a elementos de impedância e mobilidade utilizados na área elétrica. Isto o torna vantajoso no sentido de não necessitar a solução de matrizes não simétricas, comumente encontrada em problemas de acoplamento. Outra vantagem é que conhecidos os termos de impedância e mobilidade, a resposta vibro-acústica pode ser calculada para um determinado ponto, sem a necessidade de resolver o sistema global.

A técnica tem a comodidade de utilizar apenas os parâmetros modais *desacoplados* para a construção das matrizes. As equações podem ser escritas em uma forma compacta e podem ser resolvidas apenas para os pontos de interesse. Entretanto, a funcionalidade do método é condicionada a uma correta modelagem das porções acústicas e estruturais do modelo *desacoplado*.

Os resultados obtidos através da aplicação da técnica de matrizes compactas foram comparados com os obtidos numericamente, utilizando o método dos elemento finitos, e através de testes de laboratório em uma cavidade de geometria irregular. O estudo e análise destes resultados mostraram o potencial da técnica para a solução problemas vibro-acústicos de geometria regular e irregular.

Uma aplicação interessante do método que pode ser explorada é o controle ativo de ruído no interior da cavidade. Para tanto, pode se utilizar os próprios parâmetros modais obtidas experimentalmente na construção das matrizes compactas e adicionar um elemento de controle nas equações de impedância e mobilidade descritas no capítulo 4.

O que deve ser também levado em conta na aplicação da técnica de matrizes compactas são os valores de amortecimento modal. Neste trabalho, não foi levado em conta as atualizações dos parâmetros modais para cada modo. Contudo, isto pode ser facilmente implementado nas equações. Ruídos de fundo nos testes experimentais podem mascarar os resultados de amortecimento medidos numericamente, desta forma, torna-se importante a realização do experimento em ambientes com baixo nível de ruído externo.

Foi utilizada apenas excitação estrutural nos testes experimentais devido a sua maior praticidade. Contudo, um experimento futuro poderia ser realizado utilizando-se excitação acústica através de gerador de velocidade volumétrica. No caso, um auto-falante calibrado seria o mais apropriado. Desta forma, os modos acústicos poderiam ser excitados de uma forma direta.

A aplicação da técnica de matrizes compactas se mostrou uma importante ferramenta na avaliação de resposta em frequência em sistemas vibro-acústicos. A sua forma de equações compactas mostrou-se de fácil implementação computacional e uma ferramenta promissora que pode ser utilizada tanto na identificação quanto no controle ativo de ruído de sistemas vibro-acústicos.

REFERÊNCIAS

- BLACKSTOCK, D. T. **Fundamentals of physical acoustics**. New York: John Willey and Sons, Inc., 2000.
- CRAGGS, A. A finite element model for acoustically lined room small rooms. *Journal of sound and vibration*, v. 108, n.2, p. 327-337, 1986.
- DOWELL, E.H.; GORMAN III, G.F.; SMITH, D.A. Acoustoelasticity: general theory, acoustic modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiments. **Journal of sound and vibration**, v. 52, n.4, p. 519-542, 1977.
- EVERSTINE, G.C. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. **Journal of sound and vibration**, v. 79, n.1, p. 157-160, 1991.
- EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice**. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- FAHY, F. J. **Foundation of Engineering Acoustics**. 2. ed. San Diego: Academic Press, 2003. 443 p.
- FAHY, F. J.; GARDONIO, P. **Sound and structural vibration**. 2. ed. San Diego, Academic Press, 2007.
- GÖRANSSON, P., Acoustic Finite Element Method. In SAS P. (ed.) **Advanced Techniques in Applied and Numerical Acoustics**. Leuven K.U, Parte VI, 1993.
- GUY, R.W; BHATTACHARYA, M.C. The transmission of sound through a cavity-backed finite plate. **Journal of Sound and Vibration**, v.27, n.2, p. 217-223, 1973.
- HIXSON, E. L. Mechanical Impedance. In: HARRIS, C. M. (ed.). **Shock and Vibration Handbook**. New York: McGraw-Hill, 1987. p. 10.1-10.14.
- KIM, S.M.; BRENNAN, M.J. A compact matrix formulation using the impedance and mobility approach for the analysis of structural-acoustic system. **Journal of sound and vibration**, v. 223, v.1, p. 97-113, 1999.

KINSLER, L.E.; FREY, A.R. **Fundamentals of acoustics**. 2. ed. New York e London: John Willey and Sons, Inc., 1962. 534 p.

KUNG, C.; SINGH, R. Experimental modal analysis technique for three-dimensional acoustic cavities. **Journal of the Acoustical Society of America**, v.77, n.2, p. 731- 738, 1985.

LUO, C.; ZHAO, M.; RAO, Z. The analysis of structural-acoustic coupling of an enclosure using Green's function method. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v.27, n. 3-4, p. 242-247, 2005.

LYON, R. H. Statistical Energy Analysis. M.I.T. press, 1975.

LYON, R.H. Noise reduction of rectangular enclosures with one flexible wall. **Journal of the Acoustical Society of America**, v. 35, p. 1791-1797, 1963.

MAIA, S. et al. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. New York : Taunton, Research Studies Press , 1997.

NELSON, P. A.; ELLIOT, S.J. **Active Control of Sound**. 5.ed. San Diego: Academic Press, 2000.

NIETER, J. J.; SINGH, R. Acoustic Modal Analysis experiment. **Journal of the Acoustical Society of America**, v.72, n.2, p. 319-326, 1982.

NORRIS, A. N.; REBINSKY, D. A. Acoustic reciprocity for fluid-structure problems. **Journal of the Acoustical Society of America**, v.94, n.3, p. 1714-1715, 1993.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Rio de Janeiro: Prentice-hall do Brasil, 1998.

PRETLOVE, A.J. Forced Vibrations on a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. **Journal of Sound and Vibration**, v.3, n.3, p. 252-261, 1966.

PRETLOVE, A.J. Free Vibrations on a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity. **Journal of Sound and Vibration**, v.2, n.3, p. 179-209, 1965.

SANDBERG, G.; GÖRANSSON, P. A symmetric finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction analysis. **Journal of sound and vibration**, v. 123, n.3, p. 507-515, 1988.

TIMOSHENKO, S. **Mecânica dos Sólidos**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

WOLDE, T.; VERHEIJ, J. M.; STEENHOEK, H. F. Reciprocity method for the measurement of mechano-acoustical transfer functions. **Journal of sound and vibration**, v. 42, n.1, p. 49-55, 1975.

WYCKAERT, K.; AUGUSTINOVICZ, F.; SAS, P. Vibro-Acoustical Modal Analysis: Reciprocity, Model Symmetry, and Model Validity. **Journal of Acoustical Society of America**, v.100, n.5, p. 2587-3465, 1996.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**: Basic formulations and linear problems. London: McGraw-Hill, 1989. 648 p. v.1.

APÊNDICE A

Algoritmo de Implementação da Técnica de Matrizes Compactas Código desenvolvido em ambiente MatLab®

```
% Autor: Maurício Ferreira Jardim - mauriciojardim@yahoo.com.br
% Orientador: João Antonio Pereira - japereira@dem.feis.unesp.br
% Algoritmo de implementação do Método de Matrizes Compactas
% Dissertação de Mestrado: "Análise Teórica e Experimental Vibro-Acústica
%      Utilizando a Técnica de Matrizes Compactas"
clear
clc
load A %Autovetor acústico, referente a porção em contato com a
      %estrutura flexível, previamente obtido por elementos finitos
load An %Autovetor acústico, previamente obtido por EF.
load S % Autovetor estrutural, previamente obtido por EF.
load fs % Autovalor estrutural, previamente obtido por EF.
load fa % Autovalor acústico, previamente obtido por EF.
force='?' ; % Escolha do ponto de excitação estrutural
source='?' ; % Escolha do ponto de excitação acústica
no='?';    % nó onde se deseja medir a resposta estrutural
noa='?';   % nó onde se deseja medir a resposta acústica
vforce='?'; %magnitude da força norma aplicado na estrutura flexível
vsource='?'; % magnitude da fonte acústica aplicada na cavidade
f='?': '?': '?'; % Escolha da faixa de frequência de interesse e da resolução
      % (baseado na quantidade de modos acústicos e estruturais desacoplados)
% Termos para o cálculo da impedância acústica
ro='?'; % Densidade do ar
c0='?'; % velocidade local do som
% Termos para o cálculo da mobilidade estrutural
hs='?'; % Espessura da estrutura flexível
ros='?'; % Densidade do aço
% cálculos do numero de autovalores e autovetores associados
m=length(fs,1);
n=length(fa,1);
% fator de amortecimento
```

```

csis='?' *ones(m,1);
csia='?' *ones(n,1);
% Constantes para o cálculo aproximado das integrais
u=size(S,1);
v=size(An,1);
area='?' *'?'; % Área da estrutura flexível
darea=area/u;
vol='?'; % Volume da cavidade acústica
dvol=(vol)/v;
% Cálculo aproximado da integral da matriz de acoplamento
C=(darea*A'*S);
% Conversão da frequência para rad/s
w=2*pi*f;
% Cálculo das constantes de impedância acústica
Za=c0^2*ro;
V=diag(dvol*An'*An);
% Cálculo das constantes de mobilidade estrutural
Zc=ros*hs;
M=diag(darea*S'*S);
% Cálculo do tamanho do vetor de frequências
j=size(f,2);
% Transformação da força estrutural e da fonte acústica em coordenadas modais
Fl=zeros(u,1);
Fl(force)=vforce;
F=(Fl'*S)';
q1=zeros(v,1);
q1(source)=vsource;
q=(q1'*An)';
% cálculo da impedância acústica
dn(1,1,:)=Za./(V(1)*(5+i*w));
k=0;
for k=2:n
    dn(k,k,:)=(Za*i*w)./(V(k)*((2*pi*fa(k))^2-w.*w+2*i*csia(k)*2*pi*fa(k)*w));
end
% cálculo da mobilidade estrutural

```

```

k=0;
for k=1:m
    dm(k,k,:)=(i*w)./(Zc*M(k)*((2*pi*fs(k))^2-w.*w+2*i*csis(k)*2*pi*fs(k)*w));
end
k=0;
% cálculo dos termos de ressonância acústico e estrutural
for k=1:j
    a(:,k)=inv(eye(n,n)+dn(:,k)*C*dm(:,k)*C')*dn(:,k)*(q+C*(dm(:,k)*F));
    b(:,k)=inv(eye(m,m)+dm(:,k)*C'*dn(:,k)*C)*dm(:,k)*(F-C'*dn(:,k)*q);
end
% cálculo da resposta estrutural
k=0;
for k=1:j
    vel(:,k)=0;
    for h=1:m
        vel(:,k)=vel(:,k)+b(h,1,k)*S(no,h);
    end
    velo(k)=vel(:,k);
end
end
velos=abs(velo);
semilogy(f,velos); % FRF - Velocidade estrutural por força estrutural
k=0;
%cálculo da resposta acústica
figure(2)
for k=1:j
    pres(:,k)=0;
    for h=1:n
        pres(:,k)=pres(:,k)+a(h,1,k)*An(noa,h);
    end
    press(k)=pres(:,k);
end
end
pressa=abs(press);
semilogy(f,pressa); % FRF - Pressão acústica por força estrutural

```

ANEXO A

Elementos Utilizados no Modelo de Elementos Finitos

A.1 Elemento FLUID30

O elemento Fluid 30 é usado para a modelagem de fluido e da interação da interface fluido-estrutura. Aplicações típicas desse elemento incluem propagação da onda sonora e de estruturas dinâmicas submersas. Este elemento possui quatro graus de liberdade por nó, pressão e deslocamento nos eixos x , y , e z . As constantes necessárias para definir o elemento são: velocidade do som, densidade do fluido e pressão de referência. A geometria, a localização dos nós e o sistema de coordenadas são mostrados na figura 5.2.

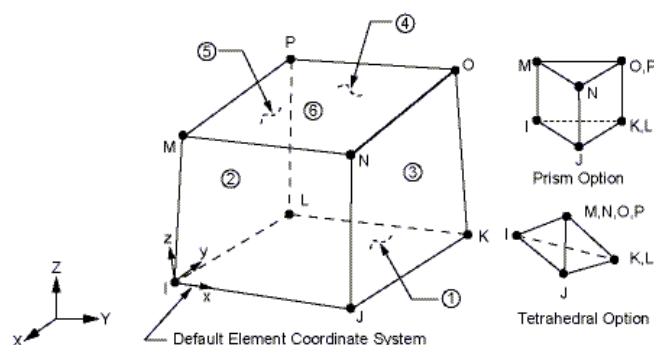


Figura A.1 – Coordenadas e graus de liberdade do elemento Fluido30.

O elemento possui duas opções de aplicação. A opção 1 é utilizada para elementos na interface, em contato com a estrutura tridimensional. A opção 2 é utilizada para elementos sem interface com os elementos da estrutura.

A.2 Elemento SHELL63

O elemento shell63 possui seis graus de liberdade por nó (translação e rotação nos eixos x , y , e z). O elemento pode ser usado na modelagem de membranas e estruturas flexíveis. A geometria, a localização dos nós e o sistema de coordenadas são mostrados na figura 5.3. As constantes necessárias para definir o elemento são: Espessura, modulo de elasticidade e coeficiente de poisson.

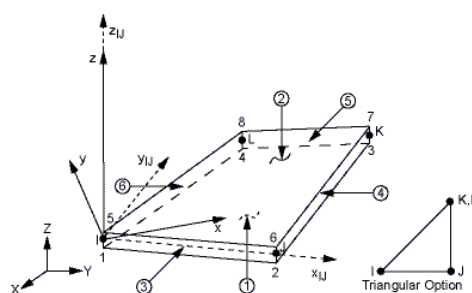


Figura A.2 – Coordenada e graus de liberdade do elemento Shell63.