

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DUCTILIDADE DE VIGAS  
DE CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL E DE  
ALTO DESEMPENHO**

**ANDRÉ LUÍS GAMINO**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DUCTILIDADE DE VIGAS  
DE CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL E DE  
ALTO DESEMPENHO**

**ANDRÉ LUÍS GAMINO**

Ilha Solteira  
Janeiro de 2003



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

# **ANÁLISE NUMÉRICA DA DUCTILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL E DE ALTO DESEMPENHO**

**ANDRÉ LUÍS GAMINO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista (Unesp), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, Área de Concentração Estruturas

**Orientador:** Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mônica Pinto Barbosa

Ilha Solteira  
Janeiro de 2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Gamino, André Luís

G192a Análise numérica da ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho / André Luís Gamino. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2003  
xvii, 121 p. : il.

Tese (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de concentração: Estruturas, 2003.

Orientador: Mônica Pinto Barbosa

Bibliografia: p. 118-121

1. Vigas de concreto armado. 2. Concreto armado-Ductilidade. 3. Análise funcional não-linear.

# **Análise Numérica da Ductilidade de Vigas de Concreto Armado Convencional e de Alto Desempenho**

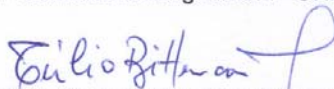
**André Luís Gamino**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DO  
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL.

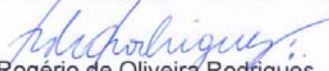
## **COMISSÃO EXAMINADORA:**



Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Mônica Pinto Barbosa – UNESP/Ilha Solteira  
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Civil  
Faculdade de Engenharia - UNESP – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA



Prof. Dr. Tulio Nogueira Bittencourt – USP/São Paulo  
Professor Associado  
Escola Politécnica da USP – EPUSP – SÃO PAULO



Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues  
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Civil  
Faculdade de Engenharia - UNESP – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Ilha Solteira/SP, janeiro de 2003.

*À vós Deus por todas as bênçãos que derramai constantemente sobre a minha vida  
Ao meu falecido pai Antônio Gamino Pastore  
À minha esposa Flávia pelo apoio, compreensão e incentivos*

*(...) Confia no Senhor de todo o teu coração, e não te estribes no teu próprio entendimento  
Reconhece-o em todos os teus caminhos, e ele endireitará as tuas veredas  
Então andarás confiante pelo teu caminho, e o teu pé não tropeçará  
**Pv 3: 5, 6, 23***

## AGRADECIMENTOS

*À Fapesp (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pela concessão da bolsa de mestrado que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.*

*À Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mônica Pinto Barbosa pela orientação e incentivos.*

*Ao Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt pela revisão do abstract e pelos ensinamentos quanto ao efeito escala em vigas de concreto armado.*

*Ao Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues pelas idéias que vieram de encontro à melhoria deste trabalho.*

*Aos amigos de longa data da FEIS/Unesp Roger Augusto Rodrigues e Márcio Gonçalves Lacerda pelos bons momentos de convivência.*

# Sumário

---

<b>Capítulo 1: Introdução</b> .....	01
<b>Capítulo 2: Ductilidade de Estruturas de Concreto Armado</b> .....	04
2.1 Definição .....	04
2.2 Ductilidade dos Materiais .....	04
2.2.1 Concreto .....	04
2.2.2 Aço .....	05
2.3 Ductilidade de Vigas de Concreto Armado .....	06
2.4 Fatores que Influenciam a Ductilidade de Vigas .....	07
2.5 Estado da Arte .....	08
2.6 Normas Relacionadas à Ductilidade .....	22
<b>Capítulo 3: Análise Numérica de Estruturas de Concreto Armado</b> .....	25
3.1 Reologia .....	25
3.1.1 Modelos Reológicos Segundo a Teoria da Plasticidade .....	26
3.1.2 Modelos Reológicos do Concreto .....	28
3.2 Comportamento do Concreto sob Ações de Bicompressão .....	33
3.3 Métodos Numéricos de Solução de Sistemas Não Lineares .....	34
3.3.1 Métodos Incrementais Iterativos .....	34
3.4 Método dos Elementos Finitos com Métodos Iterativos .....	37
3.5 O Código de Cálculo CASTEM 2000 .....	38
<b>Capítulo 4: Simulações de Vigas de Concreto Armado</b> .....	40
4.1 Estudo da Discretização das Vigas .....	40
4.2 Simulação numérica de vigas de concreto armado .....	44
<b>Capítulo 5: Estudo dos Parâmetros que Afetam a Ductilidade de Vigas de Concreto Armado: Flexão Simples Tipo I</b> .....	58
5.1 Resistência à Compressão do Concreto .....	58
5.2 Taxa Geométrica de Armadura Longitudinal de Tração .....	64
5.3 Tensão de Escoamento das Armaduras .....	68
5.4 Espaçamento entre Estribos .....	71

5.5 Variação da Base do Elemento Estrutural .....	77
5.6 Efeito Escala Longitudinal.....	82
<b>Capítulo 6: Estudo dos Parâmetros que Afetam a Ductilidade de Vigas de Concreto Armado: Flexão Simples Tipo II .....</b>	<b>86</b>
6.1 Estudo da Ruptura do Elemento Estrutural .....	86
6.2 Resistência à Compressão do Concreto .....	88
6.3 Taxa Geométrica de Armadura Longitudinal de Tração.....	94
6.4 Tensão de Escoamento das Armaduras .....	98
6.5 Espaçamento entre Estribos.....	100
6.6 Variação da Base do Elemento Estrutural .....	104
6.7 Efeito Escala Transversal.....	108
<b>Capítulo 7: Conclusões .....</b>	<b>112</b>
<b>Capítulo 8: Propostas para Trabalhos Futuros .....</b>	<b>117</b>
<b>Capítulo 9: Bibliografia Consultada .....</b>	<b>118</b>

# Lista de Figuras

<b>Figura 1.1:</b> Terremoto ocorrido em Kobe, Japão ( <a href="http://www.unb.br/ig/sis/catastr.htm">http://www.unb.br/ig/sis/catastr.htm</a> ) . . . . .	01
<b>Figura 1.2:</b> Recalque diferencial em edifício em concreto armado na orla marítima de Santos-S.P. ( <a href="http://atribunadigital.globo.com">http://atribunadigital.globo.com</a> ) . . . . .	02
<b>Figura 2.1:</b> Diagramas tensão – deformação obtidos por Pinto Júnior (1992) . . . . .	05
<b>Figura 2.2:</b> Diagrama tensão – deformação do aço classe A (Gamino e Barbosa, 2002a). . . . .	05
<b>Figura 2.3:</b> Curva força – deslocamento utilizada para a quantificação da ductilidade global de vigas de concreto armado (Barbosa e Gamino, 2002). . . . .	06
<b>Figura 2.4:</b> Curva momento – curvatura utilizada para a quantificação da ductilidade local de vigas de concreto armado (Barbosa e Gamino, 2002). . . . .	06
<b>Figura 2.5:</b> Curvas força – deslocamento (modificado de Leslie <i>et al.</i> , 1976) . . . . .	09
<b>Figura 2.6:</b> Curvas momento – curvatura obtidas para vigas de concreto convencional (modificado de Tognon <i>et al.</i> , 1980). . . . .	10
<b>Figura 2.7:</b> Curvas momento – curvatura obtidas para vigas de concreto de alto desempenho (modificado de Tognon <i>et al.</i> , 1980). . . . .	10
<b>Figura 2.8:</b> Índices de ductilidade local em função da relação entre taxas de armadura (modificado de Nilson <i>apud</i> Pinto Júnior, 1992). . . . .	15
<b>Figura 2.9:</b> Barras de aço utilizadas nos ensaios (modificado de Tholen e Darwin, 1998) . . . . .	15
<b>Figura 2.10:</b> Curvas força – deslocamento (modificado de Tholen e Darwin, 1998). . . . .	16
<b>Figura 2.11:</b> Curvas momento – curvatura (modificado de Tholen e Darwin, 1998). . . . .	16
<b>Figura 2.12:</b> Curvas de evolução da ductilidade local em relação a “ $f_{pe}$ ”, “ $\gamma_{pp}$ ” e “ $\omega$ ” (modificado de Naaman <i>et al.</i> , 1986) . . . . .	19
<b>Figura 2.13:</b> Curvas de evolução da ductilidade local em relação a “ $f_c$ ”, “ $\gamma_{pp}$ ” e “ $\omega$ ” (modificado de Naaman <i>et al.</i> , 1986) . . . . .	19
<b>Figura 3.1:</b> Modelo reológico elastoplástico perfeito (modificado de Proença, 1988). . . . .	26
<b>Figura 3.2:</b> Modelo reológico rígido com encruamento linear (modificado de Proença, 1988) . . . . .	27
<b>Figura 3.3:</b> Modelo reológico bilinear (modificado de Proença, 1988). . . . .	28

<b>Figura 3.4:</b> Representação do critério de Drucker-Prager no plano desviador (Medrano, 2000) ..	31
<b>Figura 3.5:</b> Representação do critério de Drucker-Prager na seção meridiana (Medrano, 2000) ..	31
<b>Figura 3.6:</b> Superfície de plastificação segundo o critério de Drucker-Prager (Gamino e Barbosa, 2002a).....	31
<b>Figura 3.7:</b> Superfície de ruptura de Chen-Chen (modificado de Proença, 1988) .....	32
<b>Figura 3.8:</b> Curvas tensão – deformação (modificado de Proença, 1988).....	33
<b>Figura 3.9:</b> Método de Newton-Raphson (Gamino e Barbosa, 2002b) .....	35
<b>Figura 3.10:</b> Método de Newton-Raphson modificado .....	35
<b>Figura 3.11:</b> Diagrama de blocos utilizado em análises não lineares de estruturas (modificado de Kwak, 1997) .....	37
<b>Figura 4.1:</b> Detalhamento da viga ensaiada por Barbosa (1998) .....	41
<b>Figura 4.2:</b> Malhas utilizadas para a discretização da viga .....	42
<b>Figura 4.3:</b> Curvas força – deslocamento experimental e numérica para a malha M1 .....	42
<b>Figura 4.4:</b> Curvas força – deslocamento experimental e numérica para a malha M2 .....	43
<b>Figura 4.5:</b> Curvas força – deslocamento experimental e numérica para a malha M3 .....	43
<b>Figura 4.6:</b> Detalhamento da viga 04 ensaiada por Ribeiro (1996) .....	45
<b>Figura 4.7:</b> Detalhamento da viga 05 ensaiada por Ribeiro (1996) .....	46
<b>Figura 4.8:</b> Detalhamento da viga 06 ensaiada por Ribeiro (1996) .....	47
<b>Figura 4.9:</b> Curvas força – deslocamento da viga 01 .....	48
<b>Figura 4.10:</b> Curvas força – deslocamento da viga 02 .....	48
<b>Figura 4.11:</b> Curvas força – deslocamento da viga 03 .....	49
<b>Figura 4.12:</b> Curvas força – deslocamento da viga 04 .....	49
<b>Figura 4.13:</b> Curvas força – deslocamento da viga 05 .....	49
<b>Figura 4.14:</b> Curvas força – deslocamento da viga 06 .....	50
<b>Figura 4.15:</b> Curvas força – deformação no concreto da viga 01 .....	51

<b>Figura 4.16:</b> Curvas força – deformação no concreto da viga 02 .....	52
<b>Figura 4.17:</b> Curvas força – deformação no concreto da viga 03 .....	52
<b>Figura 4.18:</b> Curvas força – deformação no concreto da viga 04 .....	52
<b>Figura 4.19:</b> Curvas força – deformação no concreto da viga 05 .....	53
<b>Figura 4.20:</b> Curvas força – deformação no concreto da viga 06 .....	53
<b>Figura 4.21:</b> Curvas força – deformação no aço da viga 01 .....	54
<b>Figura 4.22:</b> Curvas força – deformação no aço da viga 02 .....	54
<b>Figura 4.23:</b> Curvas força – deformação no aço da viga 03 .....	54
<b>Figura 4.24:</b> Curvas força – deformação no aço da viga 04 .....	55
<b>Figura 4.25:</b> Curvas força – deformação no aço da viga 05 .....	55
<b>Figura 4.26:</b> Curvas força – deformação no aço da viga 06 .....	55
<b>Figura 4.27:</b> Deformada da viga 01 equivalente ensaiada por Barbosa (1998) para a força de ruptura (fator de escala igual a 8) .....	57
<b>Figura 5.1:</b> Detalhamento da viga de concreto armado utilizada nas simulações .....	59
<b>Figura 5.2:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” .....	60
<b>Figura 5.3:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” .....	60
<b>Figura 5.4:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” em relação à variação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ” .....	61
<b>Figura 5.5:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” em relação à variação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ” .....	62
<b>Figura 5.6:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” .....	63
<b>Figura 5.7:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” .....	63
<b>Figura 5.8:</b> Detalhamento da viga 02 .....	65
<b>Figura 5.9:</b> Detalhamento da viga 03 .....	66
<b>Figura 5.10:</b> Curvas força – deslocamento obtidas para as vigas variando-se a taxa de armadura longitudinal de tração .....	67
<b>Figura 5.11:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo da relação “ $\rho/\rho_b$ ” .....	67

<b>Figura 5.12:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo da relação “ $\rho/\rho_b$ ”	.68
<b>Figura 5.13:</b> Curvas força – deslocamento obtidas para as vigas variando-se o valor limite da tensão de escoamento das armaduras	.69
<b>Figura 5.14 –</b> Curvas momento – curvatura obtidas para as vigas variando-se o valor limite da tensão de escoamento das armaduras	.69
<b>Figura 5.15:</b> Detalhamento das vigas 04 e 05	.70
<b>Figura 5.16:</b> Curva força – deslocamento obtida para a viga 06	.71
<b>Figura 5.17:</b> Curva força – deslocamento obtida para a viga 07	.72
<b>Figura 5.18:</b> Curva força – deslocamento obtida para a viga 08	.72
<b>Figura 5.19:</b> Detalhamento da viga 06	.73
<b>Figura 5.20:</b> Detalhamento da viga 07	.74
<b>Figura 5.21:</b> Detalhamento da viga 08	.75
<b>Figura 5.22:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com o aumento dos espaçamentos entre estribos	.76
<b>Figura 5.23 –</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com o aumento dos espaçamentos entre estribos	.76
<b>Figura 5.24:</b> Curvas força – deslocamento obtidas variando-se a base das vigas	.77
<b>Figura 5.25:</b> Curvas momento – curvatura obtidas variando-se a base das vigas	.78
<b>Figura 5.26:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com o aumento da base das vigas	.78
<b>Figura 5.27:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com o aumento da base das vigas	.78
<b>Figura 5.28 –</b> Diminuição da relação “ $x/d$ ” com o aumento da base das vigas	.79
<b>Figura 5.29:</b> Detalhamento da viga 10	.80
<b>Figura 5.30:</b> Detalhamento da viga 11	.81
<b>Figura 5.31:</b> Curvas força – deslocamento obtidas na avaliação do efeito escala	.82
<b>Figura 5.32:</b> Curvas momento – curvatura obtidas na avaliação do efeito escala	.83
<b>Figura 5.33:</b> Detalhamento da viga 13	.84
<b>Figura 5.34:</b> Detalhamento da viga 14	.85
<b>Figura 6.1:</b> Posição relativa das forças para cada viga	.87

<b>Figura 6.2:</b> Curvas força – deslocamento obtidas no estudo de ruptura das vigas .....	88
<b>Figura 6.3:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com a ampliação de “ $f_c$ ” .....	89
<b>Figura 6.4:</b> Detalhamento das vigas simuladas submetidas à flexão simples tipo II .....	90
<b>Figura 6.5:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com a ampliação de “ $f_c$ ” .....	91
<b>Figura 6.6:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” em função do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ” .....	91
<b>Figura 6.7:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” em função do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ” .....	91
<b>Figura 6.8:</b> Variação de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” .. .....	93
<b>Figura 6.9:</b> Variação de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” .. .....	93
<b>Figura 6.10:</b> Curvas força – deslocamento obtidas no estudo da variação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração .....	94
<b>Figura 6.11:</b> Detalhamento da viga 19 .....	95
<b>Figura 6.12:</b> Detalhamento da viga 20 .....	96
<b>Figura 6.13:</b> Evolução de “ $\mu_d$ ” com relação à variação de “ $\rho/\rho_b$ ” .....	97
<b>Figura 6.14:</b> Evolução de “ $\mu_c$ ” com relação à variação de “ $\rho/\rho_b$ ” .....	97
<b>Figura 6.15:</b> Curvas força – deslocamento obtidas na avaliação da influência da tensão de escoamento das armaduras.....	98
<b>Figura 6.16:</b> Detalhamento das vigas 21 e 22 .....	99
<b>Figura 6.17:</b> Curva força – deslocamento obtida para a viga 23.....	100
<b>Figura 6.18:</b> Curva força – deslocamento obtida para a viga 24.....	101
<b>Figura 6.19:</b> Curva força – deslocamento obtida para a viga 25.....	101
<b>Figura 6.20:</b> Detalhamento da viga 23 .....	102
<b>Figura 6.21:</b> Detalhamento da viga 25 .....	103
<b>Figura 6.22:</b> Curvas força – deslocamento obtidas para as vigas analisadas.....	104
<b>Figura 6.23:</b> Curvas momento – curvatura obtidas para as vigas analisadas.....	105
<b>Figura 6.24:</b> Detalhamento da viga 27 .....	106

<b>Figura 6.25:</b> Detalhamento da viga 28 .....	107
<b>Figura 6.26:</b> Curvas força – deslocamento obtidas na avaliação da influência do efeito escala ... .....	108
<b>Figura 6.27:</b> Curvas momento – curvatura obtidas na avaliação da influência do efeito escala ... .....	109
<b>Figura 6.28:</b> Detalhamento da viga 30 .....	110
<b>Figura 6.29:</b> Detalhamento da viga 31 .....	111

## Lista de Tabelas

<b>Tabela 2.1:</b> Características dos concretos ensaiados por Pinto Júnior (1992) .....	04
<b>Tabela 2.2:</b> Resultados obtidos por Leslie <i>et al.</i> (1976).....	08
<b>Tabela 2.3:</b> Resultados dos ensaios realizados na pesquisa de Shin <i>et al.</i> (1989).....	11
<b>Tabela 2.4:</b> Resultados obtidos por Pastor <i>et al.</i> (1984).....	12
<b>Tabela 2.5:</b> Resultados obtidos por Farage (1995).....	13
<b>Tabela 2.6:</b> Dados obtidos por Ashour (2000) .....	14
<b>Tabela 2.7:</b> Resultados obtidos por Mo e Lai (1995).....	17
<b>Tabela 2.8:</b> Resultados obtidos por Pendyala <i>et al.</i> (1996) .....	20
<b>Tabela 2.9:</b> Características físicas das vigas ensaiadas por Borges (2002) .....	21
<b>Tabela 2.10:</b> Resultados obtidos por Borges (2002) .....	21
<b>Tabela 4.1:</b> Características mecânicas dos materiais utilizados na confecção da viga ensaiada por Barbosa (1998) .....	40
<b>Tabela 4.2:</b> Valores de força obtidos experimentalmente e numericamente para a viga ensaiada por Barbosa (1998) .....	43
<b>Tabela 4.3:</b> Valores de deslocamento obtidos experimentalmente e numericamente para a viga ensaiada por Barbosa (1998) .....	44
<b>Tabela 4.4:</b> Características mecânicas dos materiais aço e concreto utilizados na confecção das vigas ensaiadas por Barbosa (1998) e Ribeiro (1996).....	48
<b>Tabela 4.5:</b> Valores de força e deslocamento obtidos numericamente e experimentalmente para as vigas ensaiadas por Barbosa (1998) e Ribeiro (1996) .....	50
<b>Tabela 5.1:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da influência da resistência à compressão do concreto.....	58
<b>Tabela 5.2:</b> Valores de “ $\epsilon_{cu}$ ”, “ $\epsilon_y$ ”, “ $\rho$ ”, “ $\rho_b$ ”, “ $\rho/\rho_b$ ” e “ $A_s$ ” .....	61
<b>Tabela 5.3:</b> Valores obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”.....	62
<b>Tabela 5.4:</b> Valores numéricos obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” .....	63
<b>Tabela 5.5:</b> Valores numéricos obtidos no estudo de variação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração .....	64

<b>Tabela 5.6:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da influência da tensão de escoamento das armaduras . . . . .	.68
<b>Tabela 5.7:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da influência do espaçamento entre estribos . . . . .	.71
<b>Tabela 5.8:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da ampliação da base do elemento estrutural . . . . .	.77
<b>Tabela 5.9:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação do efeito escala . . . . .	.82
<b>Tabela 6.1:</b> Valores de força de ruptura obtidos . . . . .	.86
<b>Tabela 6.2:</b> Valores numéricos obtidos no estudo da influência de “ $f_c$ ” sobre a ductilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo II . . . . .	.89
<b>Tabela 6.3:</b> Valores obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” . . . . .	.92
<b>Tabela 6.4:</b> Valores numéricos obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” . . . . .	.92
<b>Tabela 6.5:</b> Valores numéricos obtidos no estudo de variação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração . . . . .	.94
<b>Tabela 6.6:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da influência da tensão de escoamento das armaduras . . . . .	.98
<b>Tabela 6.7:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da influência do espaçamento entre estribos . . . . .	.100
<b>Tabela 6.8:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação da ampliação da base do elemento estrutural . . . . .	.104
<b>Tabela 6.9:</b> Valores numéricos obtidos na avaliação do efeito escala . . . . .	.108

## Lista de Símbolos

---

**A:** Tensor de segunda ordem

**A<sub>ps</sub>:** Área da seção transversal das armaduras ativas

**A<sub>s</sub>:** Área da seção transversal das armaduras longitudinais de tração

**A<sub>u</sub>:** Constante característica do material

**A'<sub>s</sub>:** Área da seção transversal das armaduras longitudinais de compressão

**A'<sub>u</sub>:** Constante característica do material

**B:** Tensor de segunda ordem

**B<sup>T</sup>:** Matriz deformação – deslocamento na sua forma transposta

**D:** Altura efetiva total da peça em relação às armaduras ativa e passiva

**D':** Vetor de deslocamentos

**D\*:** Operador escalar que afeta a rigidez do material

**D<sub>c</sub>\*:** Parcela do operador escalar em compressão que afeta a rigidez do material

**D<sub>t</sub>\*:** Parcela do operador escalar em tração que afeta a rigidez do material

**E:** Módulo de elasticidade longitudinal

**E<sub>c</sub>:** Módulo de elasticidade longitudinal do concreto

**E<sub>s</sub>:** Módulo de elasticidade longitudinal do aço

**E<sub>o</sub>:** Módulo de elasticidade longitudinal inicial

**F<sub>e</sub>:** Vetor de forças nodais equivalentes

**F:** Vetor de forças nodais externas

**G:** Módulo de elasticidade transversal

**G<sub>s</sub>:** Módulo de elasticidade transversal secante

**H:** Parâmetro de endurecimento

**H':** Vetor resultante da diferença entre esforços externos e internos

**I<sub>1</sub>:** Invariante

**J<sub>2</sub>**: Invariante

**K<sub>s</sub>**: Módulo de elasticidade longitudinal secante

**L**: Vão das vigas

**R<sub>c</sub>**: Resultante das tensões de compressão nas vigas de concreto armado

**R<sub>r</sub>**: Área relativa entre mossas nas armaduras

**S**: Vetor de forças nodais internas

**a**: Distância do apoio ao ponto de aplicação da força

**b**: Largura da seção transversal

**d**: Altura efetiva das vigas

**d<sub>p</sub>**: Altura efetiva em relação à armadura ativa

**d<sub>s</sub>**: Altura efetiva em relação à armadura passiva

**f**: Força atuante em um ponto genérico de um corpo

**f<sub>bc</sub>**: Tensão limite de bicompressão do concreto

**f<sub>c</sub>**: Resistência à compressão do concreto

**f<sub>ck</sub>**: Resistência à compressão característica do concreto

**f<sub>cu</sub>**: Tensão última do concreto

**f<sub>pe</sub>**: Nível de protensão efetiva

**f<sub>ps</sub>**: Tensão na armadura ativa

**f<sub>pu</sub>**: Tensão última da armadura ativa

**f<sub>s</sub>**: Tensão na armadura passiva de tração

**f<sub>s</sub>'**: Tensão na armadura passiva de compressão

**f<sub>stk</sub>**: Tensão característica de ruptura das armaduras

**f<sub>t</sub>**: Tensão limite de tração do concreto

**f<sub>tk</sub>**: Tensão característica de ruptura das armaduras

**f<sub>u</sub>**: Tensão última do aço

$f_y$ : Tensão de escoamento do aço

$f_{yd}$ : Tensão de escoamento de cálculo do aço

$f_{yk}$ : Tensão característica de escoamento das armaduras

$h$ : Altura das vigas

$k$ : Matriz de rigidez global

$k_{dp}$ : Constante do material

$[k]_T$ : Matriz de rigidez tangente

$u$ : Deslocamento na direção x

$v$ : Deslocamento na direção y

$w$ : Deslocamento na direção z

$x$ : Altura da linha neutra

$\alpha$ : Constante do material

$\alpha^*$ : Escalar compreendido entre 0 e 1 integrante do modelo de Mazars

$\beta$ : Representa o cisalhamento em vigas de concreto armado no modelo de Mazars

$\Delta F_i$ : Força incremental

$\delta$ : Coeficiente de redistribuição de momentos fletores

$\delta_y$ : Deslocamento correspondente ao escoamento das armaduras

$\delta_u$ : Deslocamento correspondente ao ponto de ruptura do elemento estrutural

$\delta_{80}$ : Deslocamento correspondente à 80% da força de ruína

$\varepsilon$ : Deformações longitudinais

$\varepsilon_c$ : Deformação do concreto

$\varepsilon_{c\text{ máx}}$ : Deformação máxima à compressão do concreto

$\varepsilon_{cu}$ : Deformação última do concreto

$\varepsilon_e$ : Deformação elástica

$\varepsilon_i$ : Deformação principal na direção i

$\varepsilon_{ic}$ : Deformação máxima no concreto

$\varepsilon_{iu}$ : Deformação uniaxial equivalente

$\varepsilon_p$ : Deformação plástica

$\varepsilon_s$ : Deformação do aço

$\varepsilon_u$ : Deformação última do aço

$\varepsilon_{uk}$ : Deformação característica última do aço

$\varepsilon_y$ : Deformação da armadura longitudinal de tração no momento do escoamento

$\phi_y$ : Curvatura correspondente ao escoamento das armaduras

$\phi_u$ : Curvatura correspondente ao ponto de ruptura do elemento estrutural

$\gamma$ : Distorção

$\gamma_{pp}$ : Nível de protensão parcial

$\mu$ : Índice de ductilidade

$\mu_c$ : Índice de ductilidade local

$\mu_d$ : Índice de ductilidade global

$\mu_e$ : Índice de encruamento

$\mu_{HR}$ : Índice de ductilidade global para vigas superarmadas

$\mu_{LR}$ : Índice de ductilidade global para vigas subarmadas

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

$\rho$ : Taxa geométrica de armadura longitudinal de tração

$\rho^*$ : Taxa geométrica de armadura longitudinal de tração calculada a fim de manter constante a relação  $\rho/\rho_b$

$\rho_b$ : Taxa geométrica de armadura longitudinal de tração balanceada

$\sigma$ : Tensão normal

$\sigma_c$ : Tensão normal de compressão no concreto

$\sigma_i$ : Tensão normal principal na direção  $i$

$\sigma_{ic}$ : Tensão normal máxima no concreto

$\sigma_j$ : Tensão normal principal na direção j

$\sigma_k$ : Tensão normal principal na direção k

$\sigma_o$ : Tensão normal crítica

$\sigma_{oct}$ : Tensão normal octaédrica

$\sigma_s$ : Tensão normal de tração no aço

$\sigma_y$ : Tensão de escoamento

$\sigma_1$ : Tensão normal principal

$\sigma_2$ : Tensão normal principal de confinamento

$\sigma_3$ : Tensão normal principal de confinamento

$\tau$ : Tensão de cisalhamento

$\tau_{oct}$ : Tensão cisalhante octaédrica

$\tau_u$ : Constante característica do material

$\tau'_u$ : Constante característica do material

$\omega$ : Taxa de armadura mista

$\psi$ : Vetor de forças residuais

## Resumo

---

GAMINO, A.L. **Análise numérica da ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho**. Ilha Solteira, 2003. 121p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.

Apresenta-se como objeto desta pesquisa o estudo numérico não-linear da ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho. Toda a análise numérica é efetuada no código de cálculo baseado no método dos elementos finitos CASTEM 2000, que utiliza o modelo reológico elastoplástico perfeito para o aço, o modelo de Drucker-Prager para o concreto e o método de Newton-Raphson para a solução de sistemas não-lineares. O núcleo deste trabalho concentra-se na obtenção de curvas força – deslocamento e momento – curvatura com a finalidade de quantificar respectivamente os índices de ductilidade global e local das vigas analisadas. De início, confrontam-se as respostas numéricas obtidas com resultados experimentais fornecidos pela literatura a fim de garantir confiabilidade à análise numérica realizada. Posteriormente, efetua-se a determinação da capacidade de deformação inelástica do elemento estrutural em questão, variando-se a resistência à compressão do concreto, a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, a tensão de escoamento das armaduras, o espaçamento entre estribos, a base da seção transversal do elemento estrutural e o efeito escala. Estes parâmetros foram avaliados para dois casos de solicitação: flexão simples tipo I e flexão simples tipo II. O primeiro caso caracteriza-se pela ação de forças simétricas aplicadas à 1/3 e 2/3 do vão e a segunda por uma força centrada no meio do vão. A linha de tendência geral observada foi de uma maior ductilização das vigas sujeitas à flexão simples tipo II, em detrimento às solicitadas por flexão simples tipo I. Quanto ao efeito escala observa-se que a ductilização das vigas é inversamente proporcional à esbelteza das mesmas.

**Palavras-Chave:** Análise Não-Linear, Ductilidade, Vigas de Concreto Armado

## Abstract

---

GAMINO, A.L. **Numerical analysis of ductility in high and conventional strength reinforced concrete beams**. Ilha Solteira, 2003. 121p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.

The objective of this thesis is the study of the ductility of high and conventional strength reinforced concrete beams by non-linear numerical simulations. The numerical analysis is based on the finite element method implemented in CASTEM 2000. This program uses the constitutive elastoplastic perfect model for the steel, the Drucker-Prager model for the concrete and the Newton-Raphson for the solution of non-linear systems. This work concentrates on the determination of force – displacement and moment – curvature curves with the purpose of quantifying the global and local ductility indexes of the beams. First, the numeric responses are confronted with experimental results found in the literature in order to check the reliability of the numerical analyses. Later, a parametric study is carried on. The inelastic deformation capacity of the structural element is investigated by varying the concrete compressive strength, the longitudinal reinforcement ratio, the yield stress of the reinforcement, the spacing between stirrups, the member section dimensions and the element size. These parameters have been analyzed for two cases: simple type I and simple type II bending. The first case is characterized by the action of applied symmetrical forces to the 1/3 and 2/3 of the beam size and second for a force centered in the middle of the beam size. The general tendency observed points to a high ductilization of the beams subjected to simple type II bending in comparison to the ones subjected to simple type I bending. With respect to the element size, it is noticed that the ductility of the beams is inversely proportional to their slendernesses.

**Keywords:** Non-Linear Analysis, Ductility, Reinforced Concrete Beams

## CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

---

O conhecimento da estrutura interna dos distintos materiais empregados na construção civil permite não somente compreender melhor seu comportamento, como também obter critérios de projeto e de seleção de materiais que levem a uma estrutura mais sólida e resistente.

A utilização cada vez mais freqüente dos concretos de alto desempenho (CAD) é centralizada fundamentalmente nos seguintes aspectos:

- ✓ Elevada resistência à compressão que permite a diminuição de seções transversais, obtendo-se estruturas mais esbeltas e com menor peso próprio proporcionando economia de fôrmas e menores custos com a fundação;
- ✓ Deformações instantâneas menores em consequência do seu elevado módulo de elasticidade;
- ✓ Redução do fenômeno da fluência;
- ✓ Maior durabilidade;
- ✓ Menor permeabilidade do concreto endurecido contribuindo para um processo mais lento de carbonatação que provoca corrosão nas armaduras;
- ✓ Boa resistência à compressão atingida em baixas idades que pode proporcionar menores tempos de desforma e menores prazos de execução de obras em concreto armado.

Entretanto o comportamento frágil deste material pode ser um inconveniente, por exemplo, em regiões de elevado risco sísmico (Figura 1.1) ou locais de ocorrência de recalques diferenciais (Figura 1.2).



**Figura 1.1** – Terremoto ocorrido em Kobe, Japão  
(<http://www.unb.br/ig/sis/catastr.htm>)



**Figura 1.2** – Recalque diferencial em edifício em concreto armado na orla marítima de Santos-S.P.  
(<http://atribunadigital.globo.com>)

A natureza da ruína, frágil ou dúctil, em estruturas de concreto armado vem a ser um dos principais assuntos relacionados à segurança. Os elementos estruturais devem ser projetados para que sofram grandes deformações e deslocamentos nos casos em que haja a possibilidade de colapso local ou global da estrutura a fim de que se possa antever este tipo de fenômeno com o intuito de salvar vidas.

Este trabalho tem por objetivo o estudo numérico da ductilidade de vigas de concreto armado executadas em concreto convencional ou concreto de alto desempenho, através da obtenção numérica dos índices de ductilidade global e local que retratarão a capacidade de deformação inelástica de cada uma das vigas analisadas.

Assim, ter-se-ão condições suficientes à conclusão da perda brusca de capacidade resistente ou não conferida ao elemento estrutural, quando o mesmo é sujeito à grandes taxas de deslocamento e deformação.

A determinação numérica dos índices de ductilidade das vigas constituintes de um sistema estrutural conduz a uma análise crítica sobre a segurança ao colapso local ou global de estruturas, uma vez que os parâmetros de ductilidade demonstram-se como indicativos de uma eficiente redistribuição de esforços e manutenção dos mesmos nas vizinhanças de uma possível ruptura.

Avaliaram-se seis fatores que podem afetar a ductilidade de vigas de concreto armado a saber: resistência à compressão do concreto, taxa geométrica de armadura longitudinal de tração,

tensão de escoamento das armaduras, espaçamento entre estribos, base do elemento estrutural e efeito escala.

Estes parâmetros foram avaliados para dois casos de flexão simples: o primeiro, denominado **flexão simples tipo I**, com carregamentos simétricos aplicados à 1/3 e 2/3 do vão; o segundo, denominado **flexão simples tipo II**, com carregamento centrado no meio do vão.

Esta dissertação está dividida em nove capítulos cujos conteúdos são apresentados abaixo:

- ✓ **Capítulo 1:** Introdução;
- ✓ **Capítulo 2:** Estado da arte da ductilidade de vigas de concreto armado: relaciona as pesquisas realizadas sobre o tema, assim como os resultados obtidos, e as recomendações de normas brasileiras, americanas e européias;
- ✓ **Capítulo 3:** Modelos reológicos: são apresentados os modelos utilizados para a modelagem numérica dos materiais aço e concreto, assim como os métodos numéricos de solução de sistemas não lineares e o código de cálculo CASTEM 2000 utilizado nas simulações;
- ✓ **Capítulo 4:** São apresentadas as simulações realizadas em vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho ensaiadas por Barbosa (1998) e Ribeiro (1996), relacionando e discutindo os resultados numéricos obtidos;
- ✓ **Capítulo 5:** Estão relacionados os estudos elaborados sobre os parâmetros que afetam a ductilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo I a saber: resistência à compressão do concreto, taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, tensão de escoamento das armaduras, espaçamento entre estribos, variação da base do elemento estrutural e efeito escala;
- ✓ **Capítulo 6:** Estão relacionados os estudos elaborados sobre os parâmetros que afetam a ductilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo II: resistência à compressão do concreto, taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, tensão de escoamento das armaduras, espaçamento entre estribos, variação da base do elemento estrutural e efeito escala;
- ✓ **Capítulo 7:** Conclusões;
- ✓ **Capítulo 8:** Propostas para trabalhos futuros;
- ✓ **Capítulo 9:** Bibliografias consultadas para a elaboração deste trabalho.

## CAPÍTULO 2: DUCTILIDADE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

---

### 2.1 DEFINIÇÃO

A ductilidade é a medida da habilidade de um material, seção, elemento estrutural ou sistema estrutural de sofrer deformações inelásticas nas vizinhanças de uma possível ruptura, sem que ocorra perda substancial de sua capacidade resistente. Ela é uma importante propriedade conferida a elementos estruturais no que diz respeito à capacidade de redistribuição de esforços quando da ação, por exemplo, de recalques diferenciais ou sismos sobre a estrutura.

### 2.2 DUCTILIDADE DOS MATERIAIS

#### 2.2.1 CONCRETO

No concreto, a ductilidade pode ser avaliada através de curvas do tipo tensão – deformação. Pode-se citar o trabalho efetuado por Pinto Júnior (1992) onde foram realizados três ensaios para a determinação de tais diagramas em concretos com diferentes valores de resistência à compressão conforme ilustra a Figura 2.1 e cujos resultados encontram-se na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1** – Características dos concretos ensaiados por Pinto Júnior (1992)

Concreto	$f_c$ (MPa)	$\epsilon_{cmáx}$ (%)
A	62,5	2,10
B	82,4	1,88
C	73,9	2,16

Analisando a Figura 2.1 observam-se que concretos com resistências superiores (concreto “B”) possuem curvas tensão – deformação mais acentuadas e lineares quando comparados à concretos de resistências inferiores (concreto “A”). Assim, conclui-se que o concreto “A” poderá sofrer um amplo intervalo de deformações para pequenos acréscimos de tensão, caracterizando uma ruptura do tipo dúctil.

Em outras palavras pode-se afirmar que concretos convencionais tendem a apresentar ductilidade superior frente aos concretos de alto desempenho. Salienta-se, no entanto, que esta observação é plenamente válida somente para o material concreto, não podendo ser estendida necessariamente para vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho.

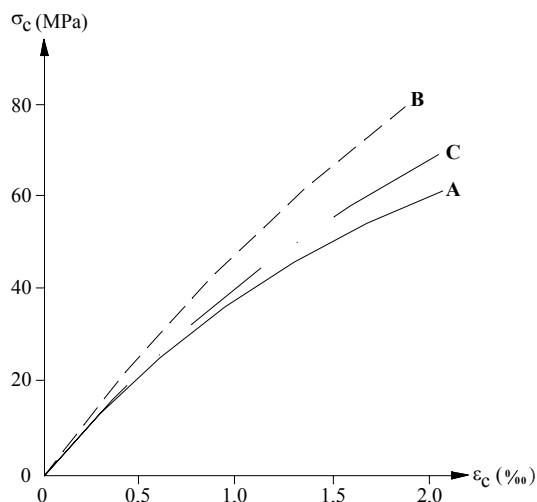


Figura 2.1 – Diagramas tensão – deformação obtidos por Pinto Júnior (1992)

## 2.2.2 AÇO

O aço é um material que apresenta ruptura do tipo dúctil. Esta ductilidade pode ser avaliada através do índice de encruamento “ $\mu_e$ ” obtido através da relação entre as tensões última “ $f_u$ ” e de escoamento “ $f_y$ ” segundo a Equação (1) aliado à deformação correspondente à tensão última conforme ilustra a Figura 2.2.

$$\mu_e = \frac{f_u}{f_y} \quad (1)$$

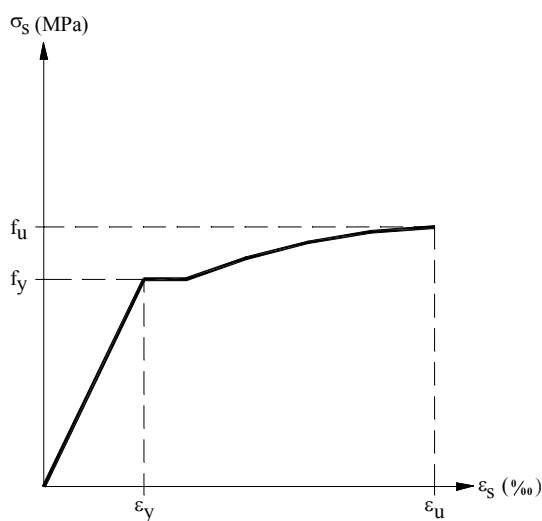
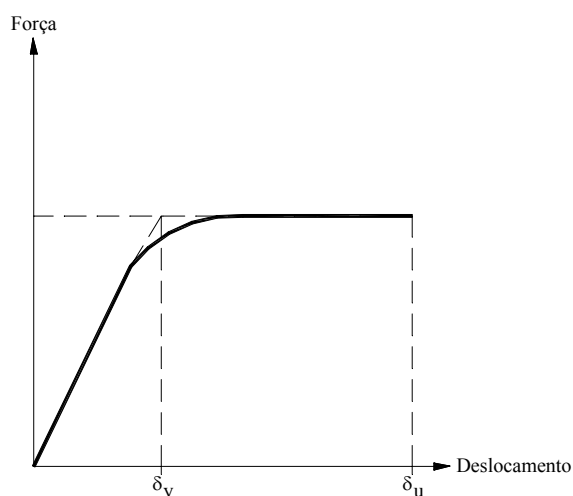


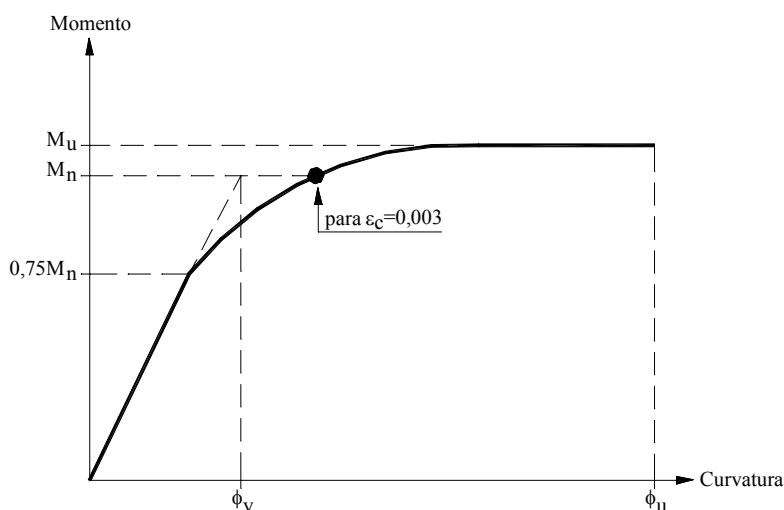
Figura 2.2 – Diagrama tensão – deformação do aço classe A (Gamino e Barbosa, 2002a)

## 2.3 DUCTILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Na quantificação da ductilidade de vigas de concreto armado, podem-se definir alguns índices que podem retratar esses valores de maneira global ou local. Esses índices podem ser respectivamente denominados “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ”, sendo o primeiro calculado a partir de uma curva do tipo força – deslocamento obtida experimentalmente ou numericamente – Figura 2.3 – e o segundo a partir de uma curva momento – curvatura obtida experimentalmente ou numericamente – Figura 2.4.



**Figura 2.3** – Curva força – deslocamento utilizada para a quantificação da ductilidade global de vigas de concreto armado (Barbosa e Gamino, 2002)



**Figura 2.4** – Curva momento – curvatura utilizada para a quantificação da ductilidade local de vigas de concreto armado (Barbosa e Gamino, 2002)

Os índices de ductilidade global “ $\mu_d$ ” e local “ $\mu_c$ ” podem ser calculados segundo as Equações (2) e (3) respectivamente.

$$\mu_d = \frac{\delta_u}{\delta_y} \quad (2)$$

$$\mu_c = \frac{\phi_u}{\phi_y} \quad (3)$$

sendo “ $\delta_y$ ” e “ $\phi_y$ ” respectivamente o deslocamento e a curvatura correspondentes ao escoamento das armaduras e “ $\delta_u$ ” e “ $\phi_u$ ” respectivamente o deslocamento e a curvatura correspondentes ao ponto de ruptura do elemento estrutural.

O índice de ductilidade “ $\mu_c$ ” retrata localmente a deformabilidade de vigas de concreto armado, ou seja, em nível de seção transversal. Já o índice de ductilidade “ $\mu_d$ ” retrata globalmente esta deformabilidade.

O deslocamento “ $\delta_y$ ” pode ser obtido através do ponto de concordância gerado pela intersecção das retas tangentes aos estágios de pós – fissuração e pós – escoamento no diagrama força – deslocamento conforme ilustra a Figura 2.3.

A curvatura “ $\phi_y$ ” pode ser obtida através do ponto de intersecção de duas retas no diagrama momento – curvatura: uma sendo tangente à reta formada entre o ponto de origem e o ponto correspondente a 75% do momento nominal e a outra sendo uma reta horizontal correspondente ao momento nominal onde ocorre a deformação de 3‰ na fibra mais comprimida da seção transversal, segundo ilustra a Figura 2.4. A curvatura “ $\phi_u$ ” e o deslocamento “ $\delta_u$ ” são obtidos no momento da ruptura do elemento estrutural.

## 2.4 FATORES QUE INFLUENCIAM A DUCTILIDADE DE VIGAS

Vários são os fatores que podem influenciar o processo de deformabilidade de vigas de concreto armado. Para Kemp (1998) tais fatores são o grau de confinamento do concreto por estribos, a taxa de armadura longitudinal de tração e a resistência à compressão do concreto.

Entretanto para Boukari (2000) outros parâmetros podem influenciar a capacidade de deformação inelástica de elementos de concreto armado. São eles: o tipo de armadura (ativa ou passiva), a presença de armadura de compressão, a tensão de escoamento das armaduras, o espaçamento entre estribos e o efeito escala.

Pode-se então perceber que a ductilidade é afetada diretamente por grandezas de ordem física em relação às dimensões do elemento estrutural e por grandezas de ordem mecânica no que diz respeito aos materiais componentes da estrutura.

## 2.5 ESTADO DA ARTE

Várias são as pesquisas, de cunho experimental ou numérico, desenvolvidas por pesquisadores de diversos países com relação à ductilidade de vigas de concreto armado sendo que, na maioria dos casos, os estudos são realizados através de ensaios de flexão simples com carregamento monotônico centrado no meio do vão ou com carregamentos monotônicos e simétricos aplicados a 1/3 e 2/3 do vão.

Para facilitar a identificação das duas situações de carregamento, denominar-se-ão os estudos de flexão simples com carregamentos simétricos aplicados a 1/3 e 2/3 do vão ou com carregamento centrado no meio do vão respectivamente de **flexão simples tipo I e tipo II**.

Leslie *et al.* (1976) desenvolveram uma das primeiras pesquisas à respeito de ductilidade de vigas de concreto armado. Tal estudo compreendeu ensaios de doze vigas biapoiadas de concreto armado, com seção transversal retangular de 20cm de largura por 31cm de altura e 2,13m de vão total, onde avaliou-se a influência da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração “ $\rho$ ” sobre a ductilidade global.

A Figura 2.5 mostra as curvas força – deslocamento obtidas nos ensaios de flexão simples tipo I, para vigas com “ $\rho$ ” variando entre 1% e 2,7%.

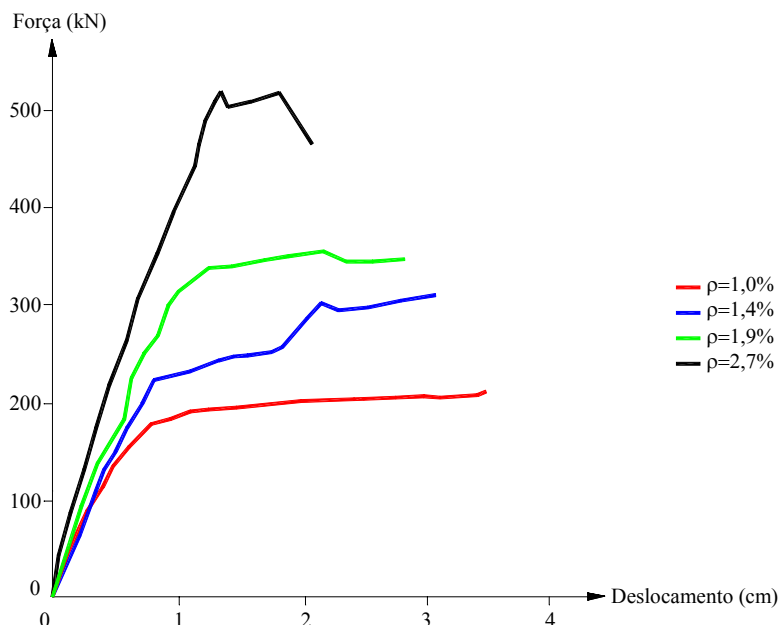
Percebeu-se que os deslocamentos correspondentes ao início do escoamento das armaduras “ $\delta_y$ ” ampliaram com o aumento de “ $\rho$ ” ao passo que os deslocamentos correspondentes ao ponto de ruptura do elemento estrutural “ $\delta_u$ ” diminuíram e, desta forma, os índices de ductilidade global “ $\mu_d$ ” sofreram decréscimos com a ampliação de “ $\rho$ ”.

Esta tendência pode ser melhor observada através dos valores apresentados na Tabela 2.2.

**Tabela 2.2** – Resultados obtidos por Leslie *et al.* (1976)

$f_c$ (MPa)	$\rho$ (%)	$\delta_y$ (cm)	$\delta_u$ (cm)	$\mu_d$
70,3	1,0	0,71	4,32	6,0
75,3	1,4	0,81	3,00	3,7
76,4	1,9	0,91	2,67	2,9
79,5	2,7	1,40	2,54	1,8

Tognon *et al.* (1980) realizaram uma pesquisa de cunho experimental com o intuito de avaliar a ductilidade local de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho com diferentes taxas geométricas de armadura longitudinal de tração.



**Figura 2.5** – Curvas força – deslocamento (modificado de Leslie *et al.*, 1976)

Foram ensaiadas sete vigas submetidas à flexão simples tipo II com 2,0m de vão e seção transversal de 10cm de base por 20cm de altura. A armadura longitudinal consistiu em três ou seis barras com tensão de escoamento entre 350MPa e 400MPa.

Trabalhou-se com dois grupos de vigas com características de resistência à compressão distintas: vigas de concreto convencional denominadas S400 com “ $f_c$ ” de 40MPa e vigas de concreto de alto desempenho denominadas S1600 com “ $f_c$ ” de 160MPa.

Para a série S400 composta por três vigas variou-se o valor da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração “ $\rho$ ” de 0,87% a 4,61% ao passo que a série S1600 composta por quatro vigas variou-se “ $\rho$ ” de 0,87% a 8,88%. A Figura 2.6 ilustra as curvas momento – curvatura obtidas para a série S400 ao passo que a Figura 2.7 mostra as curvas obtidas para a série S1600.

No tocante à capacidade de deformação inelástica das vigas ensaiadas, Tognon *et al.* (1980) concluíram que os índices de ductilidade local apresentaram-se mais elevados para porcentagens de “ $\rho$ ” inferiores a 1%, indicando necessariamente que “ $\mu_c$ ” é inversamente proporcional à taxa geométrica de armadura longitudinal de tração cuja ampliação acarretou em um comportamento do tipo frágil por parte das vigas.

Outro fato importante que merece destaque diz respeito ao tipo de concreto utilizado. Notam-se que as vigas subarmadas e superarmadas apresentaram uma maior ductilização à medida que ampliou-se a resistência à compressão do concreto pois para taxas de armadura semelhantes, vigas dotadas de “ $f_c$ ” superiores possuíram maior ductilidade.

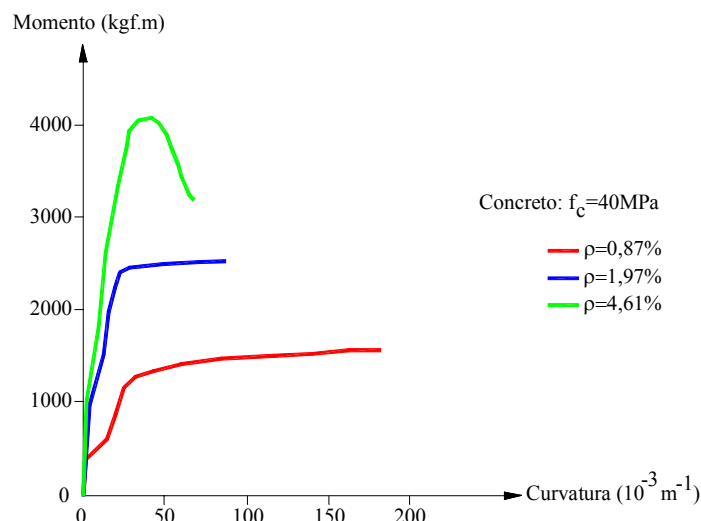


Figura 2.6 – Curvas momento – curvatura obtidas para vigas de concreto convencional (modificado de Tognon *et al.*, 1980)

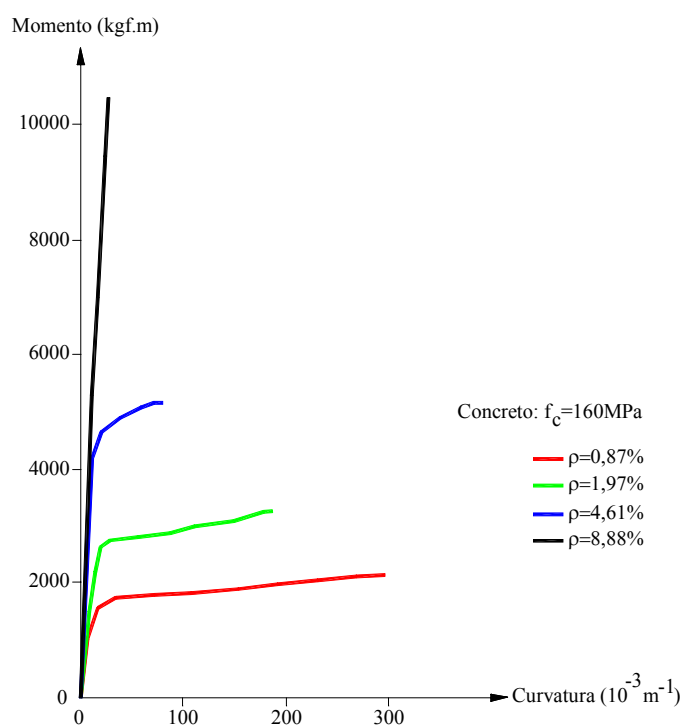


Figura 2.7 – Curvas momento – curvatura obtidas para vigas de concreto de alto desempenho (modificado de Tognon *et al.*, 1980)

Shin *et al.* (1989) realizaram pesquisas a respeito da influência da resistência à compressão do concreto e do espaçamento entre estribos sobre a ductilidade global de vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho. Tais vigas foram ensaiadas à flexão simples tipo II, com carregamento centrado no meio do vão e com apoios articulados cujos valores de resistência à compressão do concreto variaram entre 27MPa e 104MPa.

A Tabela 2.3 apresenta os valores de “ $f_c$ ”, “ $\rho$ ”, “ $s$ ” (espaçamento entre estribos), “ $\rho/\rho_b$ ” (relação entre a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração “ $\rho$ ” e a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração balanceada “ $\rho_b$ ”) e “ $\mu_d$ ”.

**Tabela 2.3** – Resultados dos ensaios realizados na pesquisa de Shin *et al.* (1989)

$f_c$ (MPa)	$\rho$ (%)	$s$ (mm)	$\rho/\rho_b$	$\mu_d$
26,9	0,37	152	0,176	10,0
27,9				8,9
29,0		76		8,3
29,2				7,0
29,4	1,05	152	0,350	2,7
29,5				2,5
29,6		76		2,4
30,2				3,7
30,2	3,50	152	0,800	1,6
30,3				1,3
30,3		76		1,4
33,3				-
103,0	0,37	152	0,066	13,0
104,0				14,1
99,9		76		12,0
104,0				13,0
103,0	1,05	152	0,118	4,0
103,7				3,5
103,0		76		4,5
103,9				3,8
103,0	3,50	152	0,466	2,1
103,9				1,5
103,9		76		-
103,9				-
84,3	0,37	152	0,082	21,0
84,3				15,6
84,3		76		14,4
84,3				11,7
84,3	1,05	152	0,147	5,0
84,3				4,9
84,3		76		5,0
84,3				5,1
84,3	3,50	152	0,54	1,8
84,3				1,5

sendo “ $s$ ” o espaçamento entre os estribos.

Shin *et al.* (1989) concluíram que os índices de ductilidade global sofreram acréscimos com o aumento da resistência à compressão do concreto porém para taxas variáveis de “ $\rho/\rho_b$ ”.

Notou-se que a peculiaridade de ampliação de “ $\mu_d$ ” está mais intimamente ligada com a diminuição da relação “ $\rho/\rho_b$ ” do que propriamente ao aumento de “ $f_c$ ”.

Sabe-se que a diminuição do espaçamento entre estribos causa efeitos positivos na ductilidade de vigas de concreto armado por proporcionar um maior confinamento do concreto e por ampliar ligeiramente o intervalo de deslocamentos após o escoamento das armaduras em forças próximas à força última da estrutura, porém, na pesquisa desenvolvida por Shin *et al.* (1989) este efeito não mostrou-se muito significativo.

A fim de analisar a influência das armaduras de compressão e do espaçamento entre estribos sobre a ductilidade global de vigas de alto desempenho, Pastor *et al.* (1984), cuja pesquisa é mencionada na norma **ACI 363R-92**, realizaram ensaios de flexão simples tipo I, em doze vigas biapoiadas com concretos convencionais e de alto desempenho.

As vigas da série “A” foram executadas omitindo-se os estribos e armaduras de compressão, com “ $f_c$ ” variando entre 26MPa a 64MPa.

As vigas da série “B” foram executadas com área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão “ $A'_s$ ,” variando entre “**0,5.A<sub>s</sub>**” e “**1,0.A<sub>s</sub>**”, espaçamento entre estribos variando entre 75mm e 300mm e “ $f_c$ ” da ordem 59MPa.

Os resultados desses ensaios encontram-se listados na Tabela 2.4.

**Tabela 2.4 – Resultados obtidos por Pastor *et al.* (1984)**

Série A				Série B					
Viga	$f_c$ (MPa)	$\rho/\rho_b$	$\mu_d$	Viga	$f_c$ (MPa)	$\rho/\rho_b$	$A'_s/A_s$	s(mm)	$\mu_d$
A1	26	0,51	3,54	B1	59	0,57	0,5	300	2,36
A2	45	0,52	2,84	B2	59	0,55	1,0	300	2,64
A3	59	0,29	2,53	B3	59	0,57	0,5	150	4,88
A4	59	0,64	1,75	B4	58	0,59	1,0	150	8,32
A5	64	0,87	1,14	B5	59	0,56	0,5	75	5,61
A6	60	1,11	1,07	B6	58	0,58	1,0	75	6,14

Observando-se as vigas A1 e A2 ensaiadas, notou-se que uma vez mantida constante a relação “ $\rho/\rho_b$ ” da ordem de 0,52 e aumentando-se “ $f_c$ ” de 26MPa para 45 MPa o índice de ductilidade global “ $\mu_d$ ” sofreu um decréscimo de 3,54 para 2,84. Logo, concluiu-se que para taxas constantes de “ $\rho/\rho_b$ ” o aumento da resistência do concreto ocasionou diminuição nos índices de ductilidade global.

Nas vigas A3, A4, A5 e A6 percebeu-se que acréscimos na relação “ $\rho/\rho_b$ ” proporcionam uma diminuição em “ $\mu_d$ ” onde esta linha de tendência também é observada na pesquisa de Shin *et al.* (1989).

As vigas B1 e B2 apresentaram valores de “ $\mu_d$ ” superiores, porém não muito significativos, comparados com a viga A4, mostrando-se como benéfico o efeito dos estribos sobre a ductilidade.

Comparando-se as vigas B1 e B2 com as vigas B3 e B4 concluiu-se que a diminuição do espaçamento entre estribos de 300mm para 150mm ocasionou uma ampliação significativa nos índices de ductilidade global. Comparando-se as vigas B3 e B4 com as vigas B5 e B6 concluiu-se que a diminuição do espaçamento entre estribos de 150mm para 75mm não provocou um aumento significativo em “ $\mu_d$ ”.

Analisando os efeitos da armadura de compressão notou-se que para as vigas B1, B2, B5 e B6 o aumento da seção transversal da armadura longitudinal de compressão proporcionou um aumento muito significativo em “ $\mu_d$ ”. Já para as vigas B3 e B4 percebeu-se com evidência o acréscimo no índice de ductilidade global com o aumento de “ $A'_s$ ”.

Farage (1995) realizou uma pesquisa com a finalidade de avaliar a influência da resistência à compressão do concreto na ductilidade global e local de vigas de concreto armado.

O programa experimental compreendeu ensaios de onze vigas biapoiadas de concreto armado, com 5,15m de vão e seção transversal de 15cm de base por 45cm de altura, sujeitas à flexão simples tipo I, com três níveis de “ $f_c$ ”, – convencional, intermediária e alta – para diferentes relações de “ $\rho/\rho_b$ ”.

Para toda a armadura das vigas utilizou-se o aço CA-50A. As características geométricas das vigas e o tipo de carregamento foram mantidos constantes e os resultados obtidos encontram-se na Tabela 2.5.

**Tabela 2.5 – Resultados obtidos por Farage (1995)**

Série	Viga	$f_c$ (MPa)	$\rho/\rho_b$	$\mu_c$	$\mu_d$
VA	V-1A	41,8	0,15	7,45	7,73
	V-2A	65,5		-	6,28
	V-3A	89,5		5,59	5,08
VI	V-1R	45,6	0,27	-	4,99
	V-2R	66,3		5,99	4,58
	V-2	62,5		1,76	2,33
VII	V-1	28,3	0,37	4,70	3,13
	V-3	83,1		1,81	1,28
VB	V-1B	33,7	0,47	3,31	2,33
	V-2B	66,9		-	2,10
	V-3B	80,0		2,19	1,32

Observam-se as mesmas linhas de tendência verificadas em outros trabalhos. Para taxas constantes de “ $\rho/\rho_b$ ” acréscimos de “ $f_c$ ” provocaram decréscimos nos índices de ductilidade

global e local. Comparando-se as séries “VA” e “VB” percebeu-se a influência significativa da relação “ $\rho/\rho_b$ ” sobre os índices “ $\mu_c$ ” e “ $\mu_d$ ”.

Ashour (2000) realizou uma pesquisa com o intuito de avaliar a influência da taxa de armadura longitudinal de tração sobre a ductilidade de vigas de concreto armado.

O programa experimental compreendeu o ensaio de nove vigas biapoiadas em ensaio de flexão simples tipo I, com vão de 3,40m e seção transversal de 20cm de base por 25cm de altura, “ $f_c$ ” variando entre 49MPa e 102MPa e “ $\rho$ ” variando entre 1,18% e 2,37%, cujos resultados alcançados encontram-se dispostos na Tabela 2.6. A tensão de escoamento das armaduras utilizadas foi de 530MPa.

**Tabela 2.6 – Dados obtidos por Ashour (2000)**

Vigas	$f_c$ (MPa)	$\rho$ (%)	$\mu_d$
B-N2	48,61	1,18	3,39
B-N3	48,61	1,77	3,88
B-N4	48,61	2,37	3,71
B-M2	78,50	1,18	2,50
B-M3	78,50	1,77	2,70
B-M4	78,50	2,37	2,43
B-H2	102,40	1,18	1,49
B-H3	102,40	1,77	1,84
B-H4	102,40	2,37	1,81

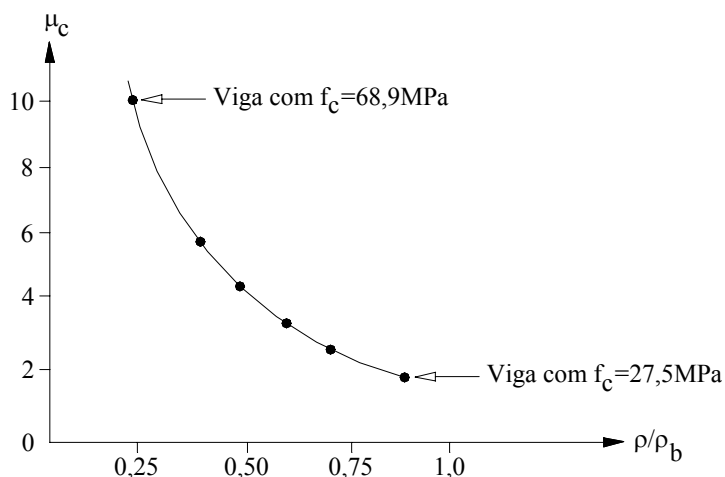
Para todos os grupos de vigas com resistência à compressão do concreto iguais, percebeu-se um aumento não muito significativo nos índices de ductilidade global para as taxas de armadura variando de 1,18% para 1,77%, ao passo que ocorreram decréscimos em “ $\mu_d$ ” para taxas de armadura variando de 1,77% para 2,37%.

Nilson *apud* Pinto Júnior (1992) realizou uma pesquisa com o intuito de quantificar os índices de ductilidade local “ $\mu_c$ ” em vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho.

Foram realizados ensaios de flexão simples tipo II em vigas biapoiadas cujo valor da resistência à compressão do concreto variou entre 27,5MPa a 68,9MPa.

Chegou-se à conclusão que vigas confeccionadas com concretos de resistência mais elevada possuíram maior ductilidade, retratada pelos índices de ductilidade local, em relação às que utilizaram concretos de resistência mais baixa conforme ilustra a Figura 2.8.

Tholen e Darwin (1998) realizaram um estudo a respeito da influência da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração “ $\rho$ ” e do espaçamento entre as mossas nas barras de aço sobre a ductilidade global e local de vigas de concreto armado.

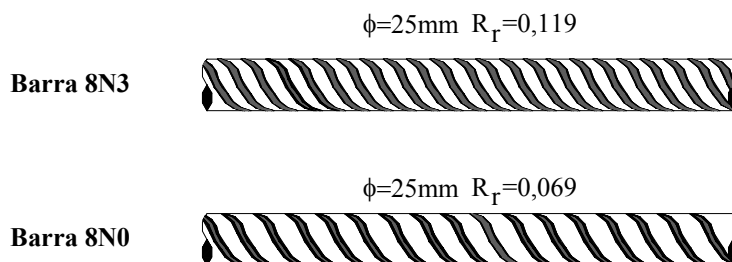


**Figura 2.8** – Índices de ductilidade local em função da relação entre taxas de armadura (modificado de Nilson *apud* Pinto Júnior, 1992)

A característica de espaçamento entre nervuras foi descrita segundo o parâmetro “ $R_r$ ” que descrevia a área relativa entre mossas nas armaduras, cujo valor da tensão de escoamento foi de 538MPa.

Foram ensaiadas quatro vigas de concreto armado biapoiadas, sujeitas à flexão simples tipo II.

Tais vigas possuíam 4,06m de comprimento e seção transversal com 30,5cm de base e 40,6cm de altura. Para a armadura longitudinal de tração, foram utilizadas as barras 8N3 (mossas mais próximas e “ $R_r$ ” mais elevado) e 8N0 (mossas mais separadas e “ $R_r$ ” menor) conforme ilustra a Figura 2.9.



**Figura 2.9** – Barras de aço utilizadas nos ensaios (modificado de Tholen e Darwin, 1998)

As vigas foram ensaiadas com tais barras, variando-se a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração cujas curvas força – deslocamento e momento – curvatura obtidas estão ilustradas respectivamente nas Figuras 2.10 e 2.11.

Tholen e Darwin (1998) concluíram que o aumento de “ $R_r$ ” não afetou a ductilidade global ou local das vigas, como também não afetou a distribuição de fissuras no banzo tracionado.

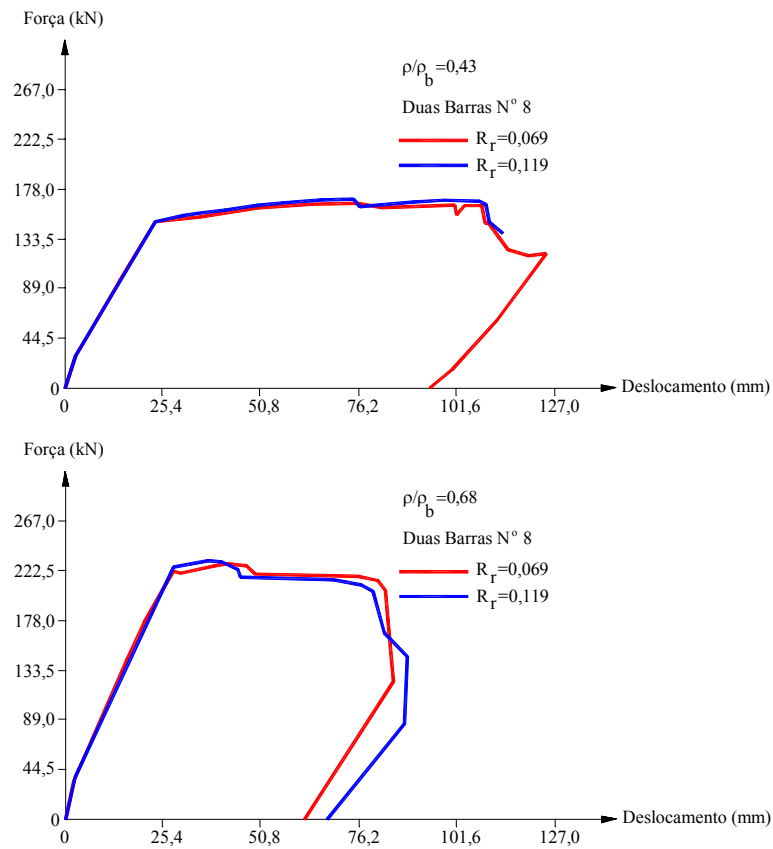


Figura 2.10 – Curvas força – deslocamento (modificado de Tholen e Darwin, 1998)

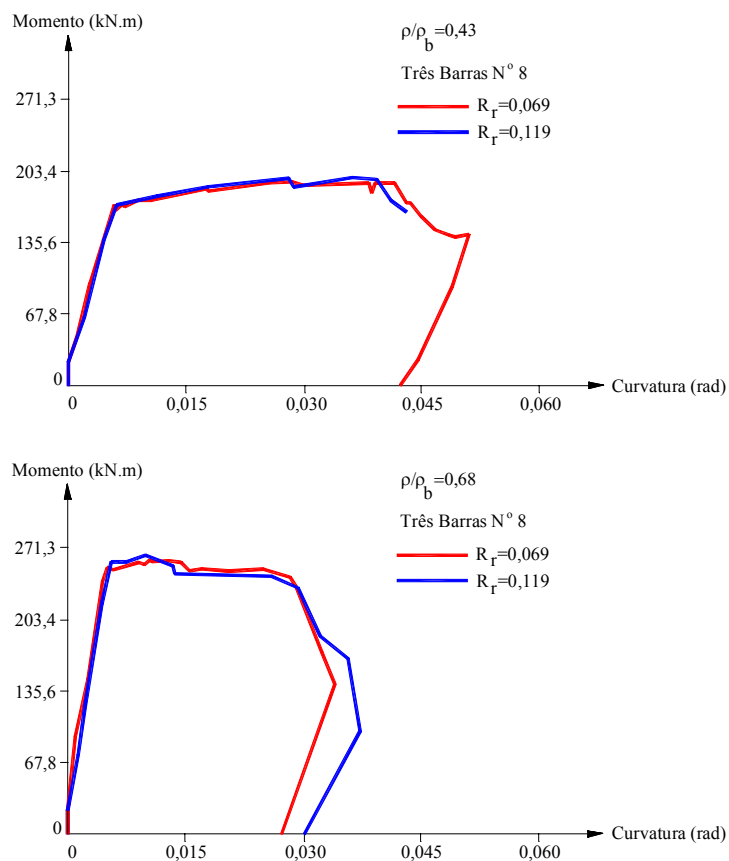


Figura 2.11 – Curvas momento – curvatura (modificado de Tholen e Darwin, 1998)

Nota-se também a partir das Figuras 2.10 e 2.11 que as vigas que possuíam maior relação “ $\rho/\rho_b$ ” sofreram uma diminuição na ductilidade global e local.

Mo e Lai (1995) avaliaram a influência do processo de moldagem e abatimento do concreto empregado em vigas de concreto com armadura passiva.

Tais vigas possuíam 3,84m de comprimento e seção transversal retangular de 30cm de base por 50cm de altura.

Estudaram-se um total de nove vigas divididas em três agrupamentos:

✓No grupo “X” as vigas foram totalmente concretadas de uma só vez com concreto de abatimento de 180mm;

✓No grupo “Y” as vigas foram concretadas parcialmente até a altura de 360mm no primeiro dia e até a altura de 500mm no segundo dia com concreto de abatimento de 180mm;

✓No grupo “Z” a concretagem procedeu-se analogamente ao grupo “Y”, porém com concreto de abatimento igual a 145mm.

Todas as vigas (biapoiadas) foram submetidas a um ensaio de flexão simples tipo II, sendo que os resultados obtidos encontram-se na Tabela 2.7.

**Tabela 2.7 – Resultados obtidos por Mo e Lai (1995)**

Vigas	$f_c$ (MPa)	Abatimento(mm)	$\mu_d$	$\mu_d$ médio
XI-1	34	180	11,90	14,33
XI-2	34	180	17,36	
XI-3	34	180	13,73	
YII-1	34	180	18,15	18,97
YII-2	34	180	19,23	
YII-3	34	180	19,53	
ZII-1	34	145	12,55	13,87
ZII-2	34	145	14,42	
ZII-3	34	145	14,63	

Tais valores permitiram concluir que o processo de moldagem influi na ductilidade global (séries “X” e “Y”), onde vigas concretadas de uma só vez tenderam possuir maior ductilidade em relação à vigas concretadas em etapas. Observou-se também que a ductilidade diminuiu com a diminuição do abatimento (séries “Y” e “Z”).

Naaman *et al.* (1986) desenvolveram uma pesquisa que compreendia um estudo teórico e experimental a respeito da ductilidade local de vigas de concreto com protensão.

Estudaram-se a influência da resistência à compressão do concreto, da geometria da seção transversal, das tensões nas armaduras ativa e passiva, do nível de protensão parcial “ $\gamma_{pp}$ ” definido segundo a Equação (4) e da taxa de armadura mista “ $\omega$ ” definido pela Equação (5).

$$\gamma_{pp} = \frac{A_{ps} \cdot f_{ps}}{A_{ps} \cdot f_{ps} + A_s \cdot f_s} \quad (4)$$

sendo que “ $A_{ps}$ ” representa a área da armadura ativa, “ $f_{ps}$ ” representa a tensão na armadura ativa na ocorrência do máximo momento nominal, “ $A_s$ ” representa a área da armadura passiva e “ $f_s$ ” representa a tensão na armadura passiva na ocorrência do máximo momento nominal.

$$\omega = \frac{A_{ps} \cdot f_{ps} + A_s \cdot f_s - A'_s \cdot f'_s}{b \cdot D \cdot f_c} \quad (5)$$

sendo que “ $A'_s$ ” representa a área da armadura passiva de compressão, “ $f'_s$ ” representa a tensão na armadura passiva de compressão na ocorrência do máximo momento nominal, “ $b$ ” representa a largura da seção transversal e “ $f_c$ ” representa a resistência à compressão do concreto.

A grandeza “ $D$ ” apresentada na Equação (5), que diz respeito a altura efetiva total da peça em relação às armaduras ativa e passiva, foi calculada segundo a Equação (6).

$$D = \gamma_{pp} \cdot d_p + (1 - \gamma_{pp}) \cdot d_s \quad (6)$$

sendo “ $d_p$ ” a altura efetiva em relação à armadura ativa e “ $d_s$ ” a altura efetiva em relação à armadura passiva.

As Figuras 2.12 e 2.13 mostram respectivamente a evolução da ductilidade local em função da taxa de armadura mista e a evolução da ductilidade local em função da resistência à compressão do concreto.

A partir da Figura 2.12 pôde-se concluir que a diminuição do nível de protensão efetiva “ $f_{pe}$ ” ocasionou efeitos negativos sobre a ductilidade local das vigas e que a diminuição do nível de protensão parcial “ $\gamma_{pp}$ ” provocou uma ampliação nos índices de ductilidade, porém não significativamente. Percebeu-se também que o aumento da taxa de armadura mista “ $\omega$ ” acarretou em uma diminuição da ductilidade local.

Com relação ao estudo dos efeitos da resistência à compressão do concreto, notou-se a partir da Figura 2.13 que a variação de “ $f_c$ ” não implicou em variações nas taxas de ductilidade principalmente para valores de “ $\omega$ ” mais elevados, sendo esta influência mais pronunciada em vigas com “ $\gamma_{pp}$ ” menor.

Pendyala *et al.* (1996) realizaram uma pesquisa com o intuito de avaliar a influência da resistência à compressão do concreto sobre a ductilidade local de vigas de concreto armado.

O programa experimental compreendeu o ensaio de onze vigas biapoiadas, com seção transversal de 8cm de base por 16cm de altura, cuja resistência à compressão do concreto variou entre 55MPa e 79MPa. As armaduras longitudinais de tração e compressão possuíam tensão de escoamento de 420MPa ao passo que as armaduras de cisalhamento possuíam tensão de escoamento de 370MPa.

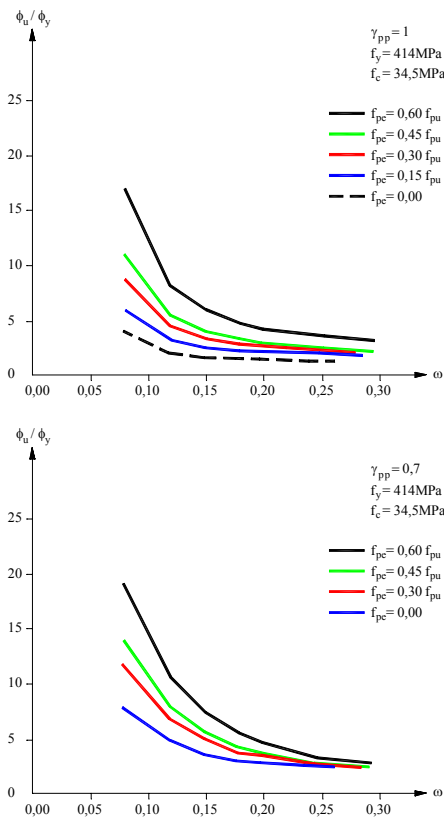


Figura 2.12 – Curvas de evolução da ductilidade local em relação a “ $f_{pe}$ ”, “ $\gamma_{pp}$ ” e “ $\omega$ ” (modificado de Naaman *et al.*, 1986)

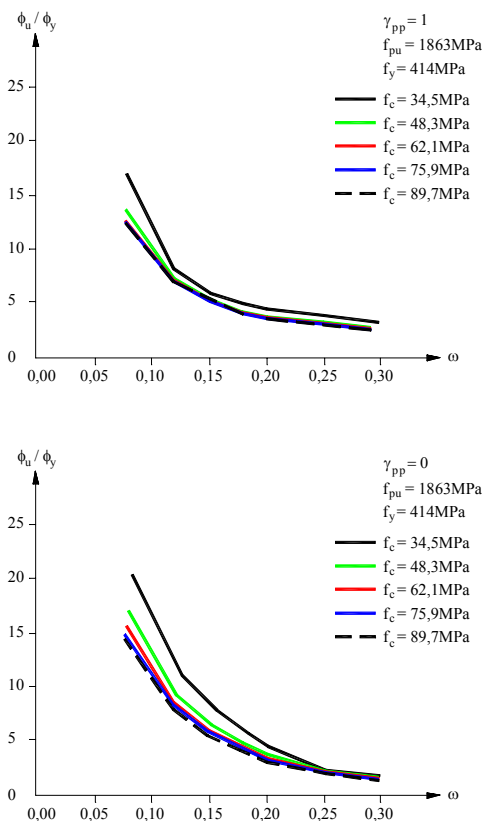


Figura 2.13 – Curvas de evolução da ductilidade local em relação a “ $f_c$ ”, “ $\gamma_{pp}$ ” e “ $\omega$ ” (modificado de Naaman *et al.*, 1986)

Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 2.8 sendo que os dados foram organizados da seguinte maneira: a primeira letra referente ao nome das vigas representa o tipo de carregamento e vão total utilizados;

A: força concentrada no meio do vão; comprimento total da viga de 1,26m.

B: força concentrada no meio do vão; comprimento total da viga de 1,00m.

C: força concentrada no meio do vão; comprimento total da viga de 1,50m.

D: força concentrada dupla, com distância entre as mesmas de 45cm; comprimento total da viga de 1,50m.

Os três números posteriores representam respectivamente a quantidade de barras utilizadas no banzo tracionado, comprimido e o espaçamento entre estribos.

**Tabela 2.8** – Resultados obtidos por Pendyala *et al.* (1996)

Viga	$f_c$ (MPa)	$\mu_c$
A3-2/50	58	33
A3-2/75	58	25
A4-2/50	55	12
A4-2/75	55	13
A4-2/150	78	-
A4-3/150	74	5
B4-2/75	79	7
A4-0/75	78	6
A4-2/30	66	32
C4-2/75	65	8
D4-2/75	65	17

Pendyala *et al.* (1996) concluíram que vigas confeccionadas com concreto de alto desempenho apresentaram maior ductilidade frente à vigas de concreto armado convencional para taxas de armadura longitudinal de tração semelhantes conforme comentado anteriormente na pesquisa de Tognon *et al.* (1980).

Pode-se observar também a influência positiva sobre a ductilidade da utilização de um menor espaçamento entre estribos (vigas A3-2/50 e A3-2/75).

Vale ainda ressaltar que o aumento da quantidade de barras para a armadura longitudinal de tração acarretou em uma diminuição na ductilidade local das vigas estudadas (vigas A3-2/50 e A4-2/50).

Borges (2002) analisou a influência do efeito escala sobre a ductilidade global em vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo I por meio da ampliação da esbelteza da região de momento constante. Foram ensaiadas onze vigas variando-se o vão (séries S, M e L) e a taxa

geométrica de armadura longitudinal de tração, trabalhando-se com vigas subarmadas (série LR) e superarmadas (série HR).

A Tabela 2.9 ilustra as características das vigas em questão utilizadas nos ensaios de flexão simples tipo I.

**Tabela 2.9** – Características físicas das vigas ensaiadas por Borges (2002)

Viga	Dimensões(mm)					Taxas de Armadura	
	b	h	d	a	L	$\rho(\%)$	$\rho/\rho_b$
HR-L1	100	200	125,2	650	2000	6,67	0,96
HR-L2	100	200	125,2	650	2000	6,67	0,96
HR-M1	100	200	125,2	650	1800	6,67	0,96
HR-M2	100	200	125,2	650	1800	6,67	0,96
HR-S2	100	200	125,2	650	1600	6,67	0,96
LR-L1	100	200	172,3	650	2000	1,42	0,21
LR-L2	100	200	172,3	650	2000	1,42	0,21
LR-M1	100	200	172,3	650	1800	1,42	0,21
LR-M2	100	200	172,3	650	1800	1,42	0,21
LR-S1	100	200	172,3	650	1600	1,42	0,21
LR-S2	100	200	172,3	650	1600	1,42	0,21

sendo “b” a base, “h” a altura, “d” a altura útil, “a” a distância do apoio ao ponto de aplicação da força e “L” o vão. Em todas as vigas utilizaram-se concreto com resistência à compressão de 107,5MPa e aço do tipo CA-50A.

A Tabela 2.10 mostra os resultados obtidos nos ensaios.

**Tabela 2.10** – Resultados obtidos por Borges (2002)

Viga	$\delta_v(\text{mm})$	$\delta_u(\text{mm})$	$\delta_{80}(\text{mm})$	$\mu_{LR}$	$\mu_{HR}$
HR-L1	19,58	-	26,65	-	1,361
HR-L2	15,74	-	18,90	-	1,201
HR-M1	12,52	-	17,87	-	1,427
HR-M2	12,05	-	17,04	-	1,414
HR-S2	10,54	-	15,10	-	1,433
LR-L1	11,86	30,29	-	2,554	-
LR-L2	12,24	30,04	-	2,454	-
LR-M1	8,65	-	-	-	-
LR-M2	9,60	27,83	-	2,899	-
LR-S1	8,60	30,58	-	3,556	-
LR-S2	7,88	24,85	-	3,154	-

sendo “ $\delta_{80}$ ” o deslocamento correspondente à 80% da força de ruína.

A partir dos resultados obtidos, Borges (2002) concluiu que a diminuição da esbelteza da região de momento constante provocou acréscimos nos índices de ductilidade global.

## 2.6 NORMAS RELACIONADAS À DUCTILIDADE

A norma **CEB – FIP MC 90** recomenda a utilização de limites para a relação “**x/d**”, uma vez que “**x**” diz respeito à altura da linha neutra e “**d**” representa a altura útil ou efetiva da peça, para que seja alcançada ductilidade suficiente para vigas de concreto armado. Tais limites são:

- ✓ Aço classe A ( $\frac{f_{stk}}{f_{yk}} \geq 1,08$  e  $\varepsilon_{uk} \geq 5\%$ )
- ✓ Aço classe S ( $\frac{f_{stk}}{f_{yk}} \geq 1,15$  e  $\varepsilon_{uk} \geq 6\%$ )
- ✓ Concreto das classes C12 a C35:  $x / d \leq 0,45$
- ✓ Concreto das classes C40 a C80:  $x / d \leq 0,35$
- ✓ Aço classe B ( $\frac{f_{stk}}{f_{yk}} \geq 1,05$  e  $\varepsilon_{uk} \geq 2,5\%$ )
- ✓ Concreto das classes C12 a C80:  $x / d \leq 0,25$

Quando for realizado a redistribuição de momentos fletores, devem-se adotar algumas relações entre o coeficiente de redistribuição “ **$\delta$** ” e a relação “**x/d**”:

Para aços das classes A e S:

- ✓ Concreto das classes C12 a C35:  $\delta \geq 0,44 + 1,25x / d$
- ✓ Concreto das classes C40 a C80:  $\delta \geq 0,56 + 1,25x / d$

Para aços da classe B:

- ✓ Concreto das classes C12 a C80:  $\delta \geq 0,75 + 1,25x / d$

A norma impõe alguns limites para “ **$\delta$** ”:

Para aços das classes A e S:

- ✓  $0,75 \leq \delta \leq 1,00$  para vigas contínuas e pórticos não deslocáveis
- ✓  $0,90 \leq \delta \leq 1,00$  para pórticos deslocáveis

Para aços da classe B:

- ✓  $0,90 \leq \delta \leq 1,00$  para qualquer caso

Também é dito que podem-se obter índices de ductilidade superiores utilizando-se estribos e que a relação “**x/d**” pode ser diminuída através da armadura de compressão.

A norma **ACI 363 R92** menciona a pesquisa de Pastor *et al.* (1984) que analisaram a influência das armaduras de compressão e do espaçamento entre estribos sobre a ductilidade global de vigas de alta resistência cujos resultados já foram apresentados e comentados anteriormente.

A mesma norma indica um valor máximo da armadura longitudinal de tração igual a 75% da taxa de armadura balanceada para que se garanta uma ruptura dúctil.

A norma **Eurocode 2** apresenta as características mecânicas dos aços para estruturas de concreto armado a saber:

- ✓ Aço de ductilidade alta ( $\frac{f_{tk}}{f_{yk}} > 1,08$  e  $\epsilon_{uk} > 5\%$ )
- ✓ Aço de ductilidade normal ( $\frac{f_{tk}}{f_{yk}} > 1,05$  e  $\epsilon_{uk} > 2,5\%$ )

Para garantir uma ruptura dúctil em vigas de concreto armado, a norma restringe a relação “**x/d**” em função da tensão de escoamento de cálculo da armadura utilizada:

- ✓ Ruptura dúctil:  $\frac{x}{d} \leq \frac{1}{\frac{f_{yd}}{700} + 1}$

A norma **Eurocode 2** ainda prevê limites para “**x/d**” caso seja feita redistribuição de esforços, segundo a resistência à compressão do concreto:

- ✓ Para  $f_{cu} \leq 35\text{MPa}$   $\left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}} = \frac{(\delta - 0,44)}{1,25}$
- ✓ Para  $f_{cu} > 35\text{MPa}$   $\left(\frac{x}{d}\right)_{\text{lim}} = \frac{(\delta - 0,56)}{1,25}$

O projeto de revisão da norma **NBR 6118:2001**, que está em processo de consulta pública, indica alguns critérios de ductilidade em vigas.

É dito que principalmente nas regiões de apoio das vigas ou de vinculações com outros elementos estruturais, quando não for feito redistribuição de esforços solicitantes, devem-se obedecer aos seguintes limites para a relação “**x/d**” a saber:

- ✓ Concreto com  $f_{ck} \leq 35\text{MPa}$  :  $x / d \leq 0,50$
- ✓ Concreto com  $f_{ck} > 35\text{MPa}$  :  $x / d \leq 0,40$

É também colocado que quando for realizada a redistribuição de esforços efetuando-se uma redução no momento fletor em uma seção qualquer, a relação entre o coeficiente de redistribuição “ $\delta$ ” e a relação “ $x/d$ ” será dada por:

$$\checkmark \delta \geq 0,44 + 1,25x / d \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 35\text{MPa}$$

$$\checkmark \delta \geq 0,56 + 1,25x / d \text{ para concretos com } f_{ck} > 35\text{MPa}$$

O coeficiente de redistribuição deverá obedecer aos seguintes limites:

$$\checkmark \delta \geq 0,90 \text{ para estruturas com nós móveis}$$

$$\checkmark \delta \geq 0,75 \text{ para os demais casos}$$

## CAPÍTULO 3: ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

### 3.1 REOLOGIA

A reologia pode ser definida como sendo o estudo de relações constitutivas entre tensões, deformações e o tempo. Segundo Zagottis (1986) a macro reologia é o ramo da reologia que interessa à engenharia de estruturas. Nela procuram-se retratar as equações constitutivas para cada material, não levando em consideração os fenômenos físico-químicos que ocorrem no interior da matéria.

Vários são os modelos reológicos desenvolvidos, fundamentados na teoria da plasticidade, a fim de analisar o processo fenomenológico tensão – deformação para os diversos materiais existentes.

O modelo reológico mais simples é o elástico linear. Ele é representado através de uma mola cuja rigidez é equivalente ao módulo de elasticidade longitudinal do material sendo válidas as quinze equações da formulação geral da teoria da elasticidade linear, sendo três equações gerais de equilíbrio (Equação 7), seis equações das relações deformação – deslocamento e distorção – deslocamento (Equação 8) e seis equações das relações tensão – deformação obtidas pela lei de Hooke denominadas relações constitutivas (Equação 9).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (9)$$

sendo “ $\sigma$ ” as tensões normais, “ $\tau$ ” as tensões de cisalhamento, “ $\mathbf{f}$ ” as forças que atuam em um ponto genérico de um corpo, “ $\varepsilon$ ” as deformações longitudinais, “ $\mathbf{u}$ ”, “ $\mathbf{v}$ ”, “ $\mathbf{w}$ ” os deslocamentos

nas direções “x”, “y” e “z” respectivamente, “ $\gamma$ ” as distorções, “ $\nu$ ” o coeficiente de Poisson, “E” e “G” respectivamente os módulos de elasticidade longitudinal e transversal.

É importante observar que o fenômeno da elasticidade não está vinculado à relação linear entre tensão – deformação, podendo o material assumir um comportamento elástico não linear.

Neste caso não é mais válida a relação entre tensão e deformação proposta por Hooke conforme a Equação (10), podendo-se representar genericamente a tensão normal “ $\sigma$ ” como uma função não linear das deformações longitudinais “ $\varepsilon$ ” segundo a Equação (11).

$$\sigma = E\varepsilon \tag{10}$$

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \tag{11}$$

sendo “E” o módulo de elasticidade longitudinal do material.

### 3.1.1 MODELOS REOLÓGICOS SEGUNDO A TEORIA DA PLASTICIDADE

O modelo elastoplástico perfeito pode ser representado por um corpo associado em série com uma mola de rigidez igual ao módulo de elasticidade longitudinal do material que desliza sobre uma superfície, onde a força de atrito entre o corpo e a superfície será a tensão de escoamento do material conforme ilustra a Figura 3.1.

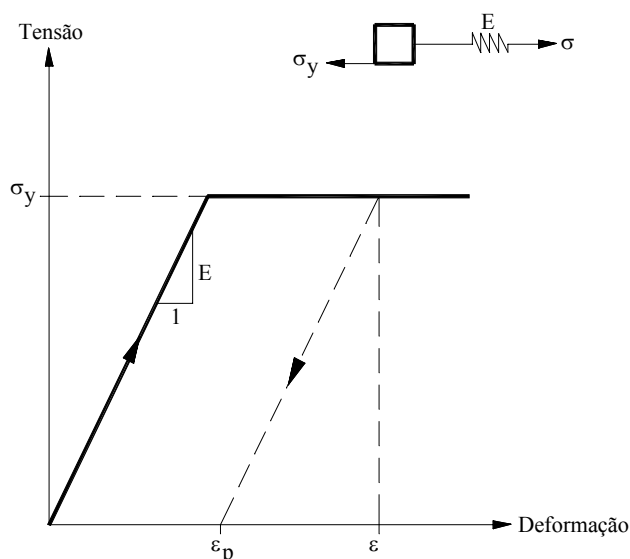


Figura 3.1 – Modelo reológico elastoplástico perfeito (modificado de Proença, 1988)

Pode-se observar a partir da Figura 3.1 que para todo campo de tensão normal “ $\sigma$ ” cujo módulo seja inferior à tensão de escoamento “ $\sigma_y$ ”, o correspondente campo de deformação “ $\varepsilon$ ” será igual à deformação elástica “ $\varepsilon_e$ ” que pode ser obtida através da Equação (10).

Por outro lado, se o módulo de “ $\sigma$ ” for maior que “ $\sigma_y$ ” então a deformação correspondente “ $\epsilon$ ” será a soma entre a deformação elástica “ $\epsilon_e$ ” e a deformação plástica “ $\epsilon_p$ ”.

O modelo reológico rígido com encruamento linear pode ser representado conforme ilustra a Figura 3.2 por um corpo associado em paralelo com uma mola de rigidez “ $H$ ” que representa o parâmetro de endurecimento do material.

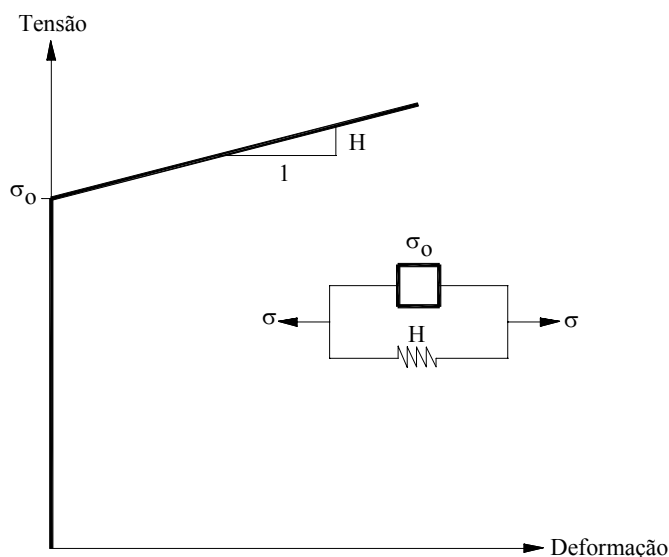


Figura 3.2 – Modelo reológico rígido com encruamento linear (modificado de Proença, 1988)

Neste caso, as deformações no corpo e na mola serão iguais e a tensão total será igual à soma das tensões que ocorrem em cada elemento.

Tais deformações serão de natureza plástica “ $\epsilon_p$ ” e ocorrerão somente quando a tensão total “ $\sigma$ ” exceder o valor da tensão crítica “ $\sigma_0$ ”. O parâmetro de encruamento “ $H$ ” será dado segundo a Equação (12).

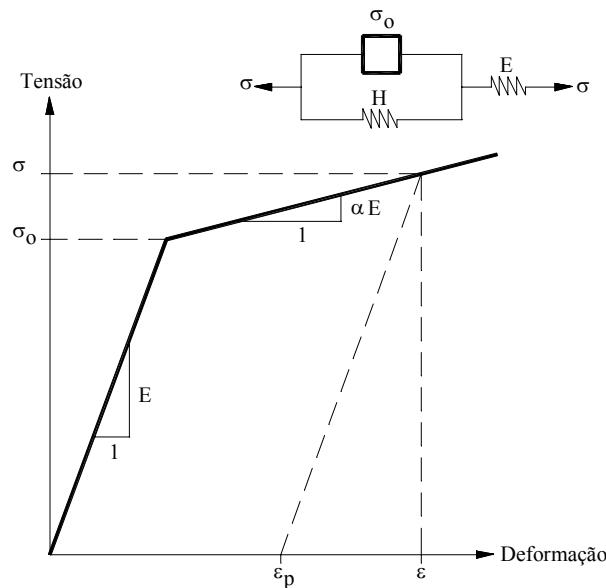
$$H = \frac{(\sigma - \sigma_0)}{\epsilon_p} \quad (12)$$

O modelo reológico bilinear pode ser representado por um corpo associado em paralelo com uma mola e a esta associação ser vinculada uma outra mola em série conforme a Figura 3.3.

Neste caso, para valores de “ $\sigma$ ” inferiores a “ $\sigma_0$ ” a deformação total “ $\epsilon$ ” correspondente será igual a “ $\epsilon_e$ ” conforme a Equação (13) e para valores de “ $\sigma$ ” superiores a “ $\sigma_0$ ” a deformação total será a soma entre as deformações elásticas “ $\epsilon_e$ ” e plásticas “ $\epsilon_p$ ” segundo a Equação (14).

$$\begin{aligned} &\text{para } \sigma < \sigma_0 \\ &\varepsilon = \varepsilon_e \\ &\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\text{para } \sigma > \sigma_0 \\ &\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ &\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_0)}{H} \end{aligned} \quad (14)$$



**Figura 3.3** – Modelo reológico bilinear (modificado de Proença, 1988)

Conforme visto, vários são os modelos que permitem retratar a reologia dos materiais, cabendo adotar o modelo que melhor se adequa ao material em que se deseja efetuar simulações numéricas.

Os modelos reológicos aqui citados são baseados na teoria da plasticidade que fora inicialmente desenvolvida para a análise estrutural do material aço, portanto podem retratar satisfatoriamente a evolução tensão – deformação para este tipo de material.

Para o concreto, existem modelos reológicos mais específicos que serão apresentados a seguir.

### 3.1.2 MODELOS REOLÓGICOS DO CONCRETO

Os modelos reológicos existentes para retratar o processo comportamental do material concreto são: os modelos elásticos não lineares, os modelos incrementais, os modelos elastoplásticos, os modelos de ruptura e os modelos de dano.

Existem três leis de aproximação aos modelos elásticos não lineares. São elas: as leis hiperelásticas, as leis hipoelásticas e as leis elásticas com ruína.

As leis hiperelásticas são aquelas onde as tensões e deformações totais são expressas em função dos módulos secantes “ $K_s$ ” e “ $G_s$ ” que introduzem o efeito de não linearidade física do material. Dentro deste campo, pode-se citar o modelo isotrópico de Ottosen que é representado em função de tensões e deformações octaédricas, expressas pela Equação (15).

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{oct}} &= 3K_s \varepsilon_{\text{oct}} \\ \tau_{\text{oct}} &= 3G_s \gamma_{\text{oct}}\end{aligned}\quad (15)$$

As leis hipoelásticas utilizam o conceito de deformação uniaxial equivalente “ $\varepsilon_{iu}$ ” segundo a Equação (16). Tais expressões traduzem os valores máximos de tensão e deformação, daí utilizarem os critérios de ruptura.

$$\varepsilon_{iu} = \frac{\varepsilon_i}{1 - \nu \frac{\sigma_j + \sigma_k}{\sigma_i}} \quad (16)$$

sendo “ $\varepsilon_i$ ” a deformação principal na direção “ $i$ ”, “ $\sigma_i$ ”, “ $\sigma_j$ ” e “ $\sigma_k$ ” as tensões principais nas direções “ $i$ ”, “ $j$ ” e “ $k$ ” respectivamente e “ $\nu$ ” o coeficiente de Poison.

Uma relação entre as tensões e deformações uniaxiais foi desenvolvida por Saenz *apud* Merabet (1990) conforme a Equação (17).

$$\sigma_i = \frac{E_o \varepsilon_{iu}}{1 + \left( \frac{E_o}{E} - 2 \right) \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right) + \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2} \quad (17)$$

sendo “ $\sigma_i$ ” a tensão principal na direção “ $i$ ”, “ $E_o$ ” o módulo de elasticidade longitudinal inicial, “ $\varepsilon_{ic}$ ” e “ $\sigma_{ic}$ ” respectivamente as deformações e tensões máximas.

O módulo de elasticidade longitudinal descrito pelo parâmetro “ $E$ ” é calculado segundo a Equação (18).

$$E = \frac{\sigma_{ic}}{\varepsilon_{ic}} \quad (18)$$

As leis hipoelásticas utilizam modelos elastoplásticos e não são dissociadas das etapas de carregamento e descarregamento. Normalmente este tipo de lei é utilizada para simular estruturas submetidas à carregamentos cíclicos e não monotônicos.

Nos modelos incrementais, a lei comportamental desenvolve-se em função de uma formulação variacional cinemática entre deformação e tensão. Desta forma, alguns autores como Torrenti *apud* Barbosa (1992) propuseram uma lei incremental não linear de 2ª ordem, escrita conforme a Equação (19).

$$d\varepsilon = A d\sigma + B d \frac{\sigma^2}{\|d\sigma\|} \quad (19)$$

sendo “A” e “B” os tensores de 2ª ordem, com dependência do estado de tensões no passo atual.

Os modelos elastoplásticos são modelos combinados que procuram retratar o comportamento de um dado material quando solicitado, definindo dois trechos distintos na curva tensão – deformação, um elástico e outro plástico, ocorrendo portanto deformações elásticas e inelásticas (residuais).

Várias teorias foram concebidas por diversos pesquisadores tais como Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, entre outros, que desenvolveram analiticamente superfícies de plastificação que procuram delimitar através de uma fronteira os regimes elástico e plástico.

Segundo Medrano (2000) o critério de Drucker-Prager foi formulado em 1952 e pode ser visto como uma simples modificação do critério de von Mises, incluindo-se a influência da pressão hidrostática, representado pela seguinte equação:

$$f(\sigma) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k_{dp} = 0 \quad (20)$$

sendo “ $\alpha$ ” e “ $k_{dp}$ ” as constantes do material, “ $I_1$ ” e “ $J_2$ ” os invariantes que dependem das tensões normais que agem sobre um corpo.

A Figura 3.4 mostra representação do critério de Drucker-Prager na seção anti-esférica e a Figura 3.5 mostra a representação do critério na seção meridiana.

De uma outra maneira o critério de elastoplasticidade de Drucker-Prager pode ser expresso em função de uma inequação que correlaciona os invariantes correspondentes às tensões principais que ocorrem no material e sua resistência à compressão segundo a Equação (21).

$$\begin{aligned} \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 &\leq f_c \\ I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= 1/6 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (21)$$

sendo “ $I_1$ ” e “ $J_2$ ” os invariantes, “ $\sigma_1$ ”, “ $\sigma_2$ ” e “ $\sigma_3$ ” as tensões principais e “ $f_c$ ” a tensão de ruptura do concreto em compressão simples.

A Figura 3.6 traz a representação gráfica da superfície de plasticidade no plano  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  onde “ $f_t$ ” é a tensão limite de tração, “ $f_c$ ” é a tensão limite de compressão e “ $f_{bc}$ ” é a tensão limite de bicompressão.

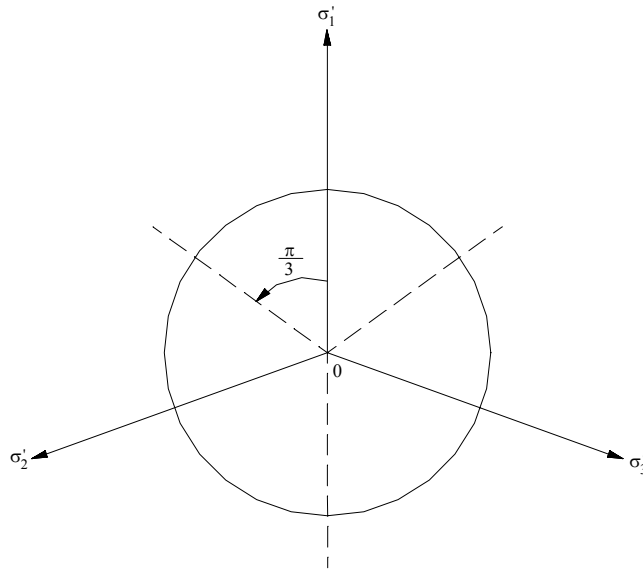


Figura 3.4 – Representação do critério de Drucker-Prager no plano desviador (Medrano, 2000)

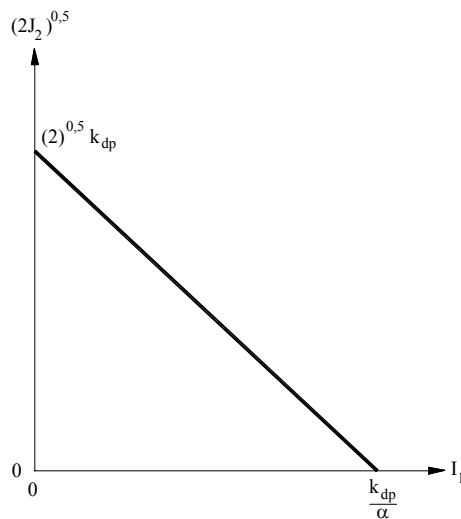


Figura 3.5 – Representação do critério de Drucker-Prager na seção meridiana (Medrano, 2000)

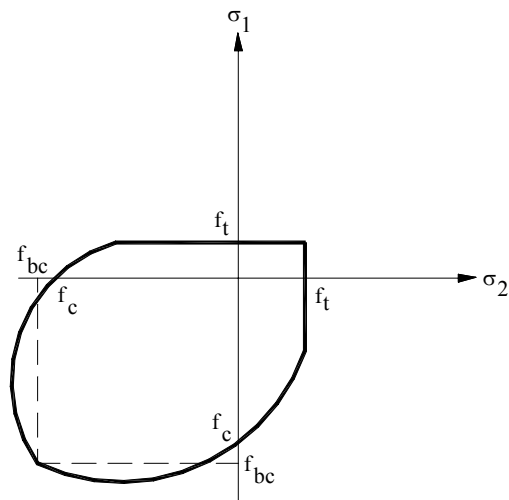


Figura 3.6 – Superfície de plastificação segundo o critério de Drucker-Prager (Gamino e Barbosa, 2002a)

Nos modelos de ruptura procura-se retratar a evolução da fissuração em um corpo sólido, estabelecendo superfícies de ruptura segundo a teoria clássica da mecânica da fratura. Merecem destaque neste campo as superfícies de ruína de Rankine, Mohr-Coulomb, Chen-Chen, Willam-Warnke, entre outros. O modelo de Chen-Chen, por exemplo, é definido por duas superfícies de ruptura sendo uma em tração biaxial segundo a Equação (22) e outra em compressão biaxial conforme a Equação (23), cujas funções de tensão são expressas em função dos invariantes “ $I_1$ ” e “ $J_2$ ”.

$$F_u(\sigma) = J_2 - \frac{1}{6}I_1^2 + \frac{1}{3}A_u I_1 - \tau_u^2 = 0 \quad (22)$$

$$F_u(\sigma) = J_2 + \frac{1}{3}A'_u I_1 - \tau'_u{}^2 = 0 \quad (23)$$

onde “ $A'_u$ ”, “ $\tau'_u$ ”, “ $A_u$ ” e “ $\tau_u$ ” são constantes características do material e funções das tensões limites de tração, compressão e bicompressão.

A Figura 3.7 mostra a representação da superfície de ruptura de Chen-Chen no plano  $\sigma_1$ - $\sigma_2$

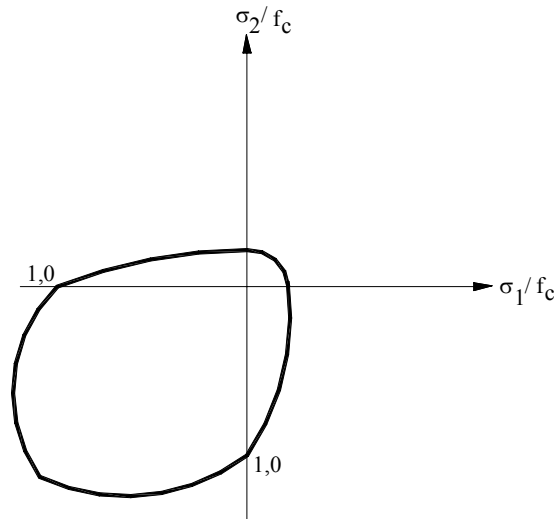


Figura 3.7 – Superfície de ruptura de Chen-Chen (modificado de Proença, 1988)

Os modelos de dano são caracterizados pela existência de variáveis explícitas que afetam diretamente a integridade do material. Pode-se citar a pesquisa de Mazars *apud* Barbosa (1992), que desenvolveu um modelo de dano caracterizado por um operador escalar “ $D^*$ ” que modifica diretamente a rigidez do material conforme a Equação (24).

$$\sigma = E(1 - D^*)\epsilon \quad (24)$$

O parâmetro “ $D^*$ ” é dependente de uma parcela de compressão “ $D_c^*$ ” e outra de tração “ $D_t^*$ ” segundo a Equação (25).

$$D^* = \alpha^\beta D_t^* + (1 - \alpha^*)^\beta D_c^* \quad (25)$$

O parâmetro “ $\beta$ ” permite representar o processo de cisalhamento em vigas de concreto armado, cujo valor é geralmente adotado da ordem de 1,05. O escalar “ $\alpha^*$ ” é compreendido entre 0 e 1.

### 3.2 COMPORTAMENTO DO CONCRETO SOB AÇÕES DE BICOMPRESSÃO

O concreto quando solicitado por ações biaxiais de compressão apresenta um aumento considerável de sua resistência à compressão. Segundo Proença (1988) e Buchaim (2001) esta ampliação se processa da ordem de 25% quando aplica-se uma tensão de confinamento “ $\sigma_2$ ” igual à metade do valor da tensão principal “ $\sigma_1$ ” ao passo que ocorre um acréscimo de 16% quando aplica-se uma tensão de confinamento igual à tensão principal, conforme ilustra a Figura 3.8.

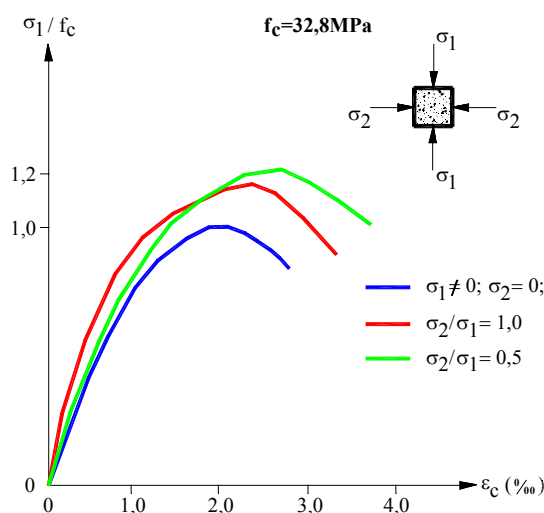


Figura 3.8 – Curvas tensão – deformação (modificado de Proença, 1988)

Resumindo:

✓ Para  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,5$  tem-se  $f_{bc} = 1,25f_c$

✓ Para  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1,0$  tem-se  $f_{bc} = 1,16f_c$

sendo “ $f_{bc}$ ” a resistência à bicompressão do concreto.

Ainda segundo Proença (1988) quando o concreto é solicitado por ações de tração biaxiais praticamente não existe variações na resistência à tração, sendo portanto neste caso a resistência à tração biaxial idêntica à uniaxial.

### 3.3 MÉTODOS NUMÉRICOS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Uma vez apresentados os modelos reológicos que descrevem o comportamento não linear para os materiais aço e concreto, é de total importância salientar que estruturas que manifestam comportamento não linear geram sistemas de equação também não lineares cuja estratégia de solução possível é a aplicação de procedimentos incrementais e iterativos.

Os métodos numéricos de resolução de problemas não lineares são geralmente baseados em processos incrementais que consistem em dividir a força total em incrementos aplicados na estrutura, obtendo-se assim segundo Barbosa (1992) os deslocamentos calculados a partir de uma linearização sobre a força incremental das equações de equilíbrio.

Segundo Rubert (1993) a solução de problemas que envolvem não linearidades, sejam elas de natureza física ou geométrica, é realizada por algoritmos que envolvem duas etapas a saber: a primeira que gera uma aproximação para o vetor de deslocamentos, utiliza a matriz de rigidez global da estrutura e o vetor de forças nodais equivalentes calculado segundo um determinado nível de força externa (solução clássica do método dos elementos finitos) segundo a Equação (26); a segunda consiste na determinação das forças residuais (diferença entre as forças internas e externas) que deverão ser reduzidas por um procedimento iterativo adotado segundo a Equação (27).

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}' = \mathbf{F}_e \quad (26)$$

sendo “ $\mathbf{k}$ ” a matriz de rigidez global da estrutura, “ $\mathbf{D}'$ ” o vetor de deslocamentos e “ $\mathbf{F}_e$ ” o vetor de forças nodais equivalentes.

$$\psi = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega - \mathbf{F}_e = 0 \quad (27)$$

sendo “ $\psi$ ” o vetor de forças residuais, “ $\mathbf{B}^T$ ” a matriz deformação – deslocamento na sua forma transposta e “ $\mathbf{F}_e$ ” o vetor de forças nodais equivalentes.

#### 3.3.1 MÉTODOS INCREMENTAIS ITERATIVOS

Nos métodos incrementais iterativos, uma correção de equilíbrio é introduzida sobre a força incremental utilizando procedimentos iterativos onde essa correção é feita por uma matriz de rigidez. O método de Newton-Raphson ilustrado na Figura 3.9, um dos métodos iterativos mais difundidos, utiliza para a correção do equilíbrio uma matriz de rigidez tangente “[ $\mathbf{k}$ ]<sub>T</sub>” calculada para cada força incremental.

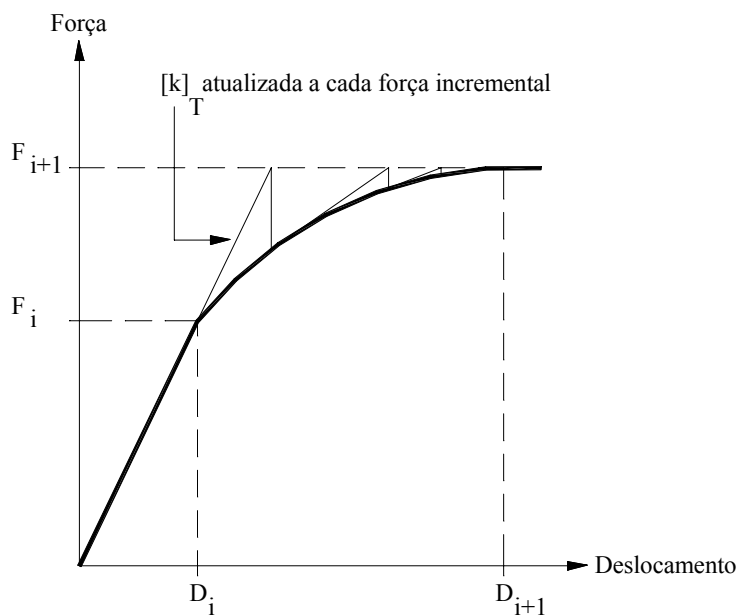


Figura 3.9 – Método de Newton-Raphson (Gamino e Barbosa, 2002b)

O método de Newton-Raphson modificado utiliza uma matriz de rigidez tangente constante para todas as iterações, conforme a Figura 3.10.

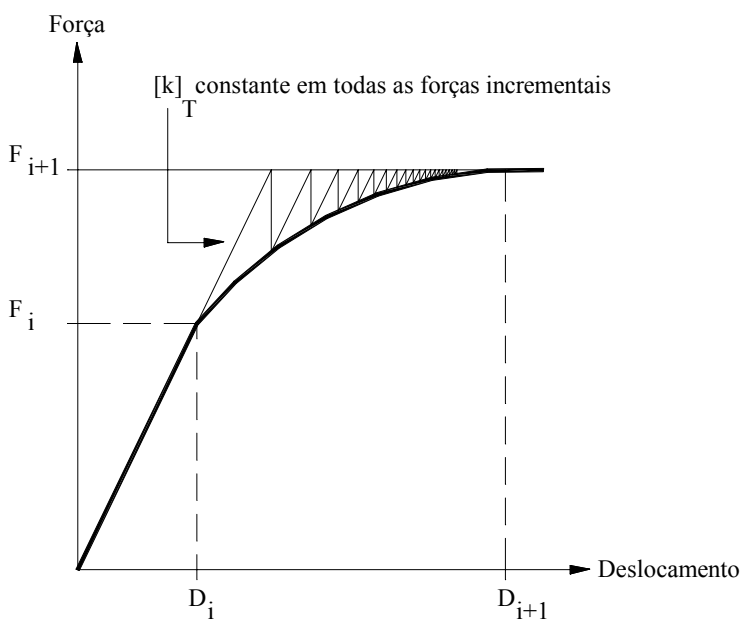


Figura 3.10 – Método de Newton-Raphson modificado

O trabalho de Rubert (1993) mostra que utilizando-se valores maiores da força incremental “ $\Delta F_i$ ” o método de Newton-Raphson proporcionou uma convergência mais rápida com relação ao método de Newton-Raphson modificado. Para valores menores de “ $\Delta F_i$ ” obteve-se, em alguns casos, uma convergência mais rápida ao se utilizar o método de Newton-Raphson modificado.

Segundo Cabral (1992) a estratégia de solução de sistemas de equações não lineares via método incremental iterativo do tipo Newton-Raphson pode ser resumida da seguinte forma:

Sendo:

$$H'(D') = F - S(D') \quad (28)$$

onde “**F**” é o vetor de forças nodais externas, “**S**” é o vetor de forças nodais internas, “**D**” é o vetor de deslocamentos nodais e “**H**” é o vetor resultante da diferença entre esforços externos e internos.

O primeiro passo consiste em dividir o carregamento total atuante em “**n**” partes calculando-se desta forma a força incremental “ $\Delta F_i$ ” de tal forma que se possa obter o campo de tensões e de deformações em qualquer ponto da estrutura analisada, segundo a força incremental atuante.

O segundo passo consiste em realizar uma iteração com a força incremental onde:

$$F_{i+1} = F_i + \Delta F_i \quad (29)$$

O terceiro passo consiste em aplicar o processo de Newton-Raphson em “**H'(D')**” resultando:

$$D'^{j+1} = D'^j - \left[ \frac{\partial H'}{\partial D'} \right]_{D'=D'^j}^{-1} \cdot H'(D'^j) \quad (30)$$

Aplicando-se a derivada parcial no vetor de esforços residuais “**H**”:

$$\frac{\partial H'}{\partial D'} = \frac{\partial F}{\partial D'} - \frac{\partial S}{\partial D'} = \frac{\partial S}{\partial D'} = k_T \quad (31)$$

uma vez que os esforços externos “**F**” não são dependentes dos deslocamentos “**D**” e “**k<sub>T</sub>**” é a matriz de rigidez tangente.

Assim:

$$D'^{j+1} = D'^j - \left[ \frac{\partial S}{\partial D'} \right]_{D'=D'^j}^{-1} \cdot H'(D'^j) \quad (32)$$

O quarto passo consiste em recalcular a matriz de rigidez tangente para cada iteração.

O quinto passo consiste em detectar a convergência de “**D<sup>j</sup>**”: caso ocorra a convergência retorna-se ao segundo passo com novo incremento de carregamento; caso não ocorra convergência segundo um número de iterações pré-determinado retorna-se ao segundo passo recalculando “**F<sub>i</sub>**” com “ $\Delta F_i$ ” modificado.

O método pode finalizar através do uso do carregamento total atuante sobre a estrutura, através da comparação de diminuição de “ $\Delta F_i$ ” até um limite pré-estabelecido ou através da comparação entre “**H**” e o nível de precisão desejado, significando que a estrutura entrou em colapso ou, em alguns casos, que o nível de precisão desejado não fora possível obter com o número máximo de iterações requerido.

A Figura 3.11 apresenta o diagrama de blocos comumente utilizado para análises não lineares física e geométrica de estruturas.

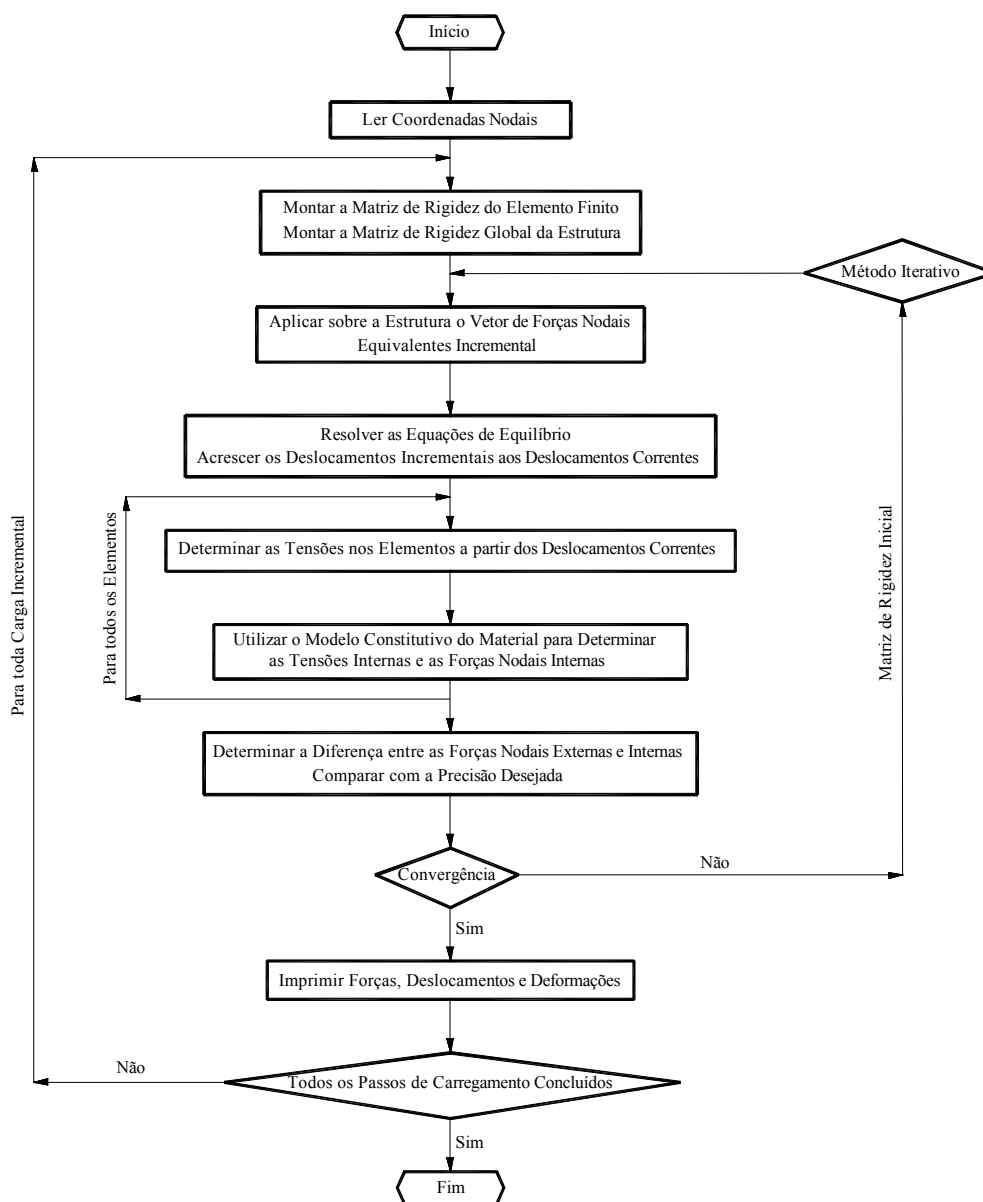


Figura 3.11 – Diagrama de blocos utilizado em análises não lineares de estruturas (modificado de Kwak, 1997)

### 3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM MÉTODOS ITERATIVOS

O Método dos Elementos Finitos, dentro da teoria clássica da mecânica das estruturas, possibilita a solução de problemas relacionados à elasticidade linear ou mesmo ligados à não

linearidade física, onde pode-se retratar o espectro de deformações e tensões em materiais com comportamentos reológicos distintos.

Assim, admitindo um material com comportamento reológico elástico linear, podem-se calcular os deslocamentos na estrutura decorrentes da aplicação de um carregamento segundo a Equação (26).

Neste caso, a matriz de rigidez é constante dentro do problema físico a ser solucionado e os deslocamentos são calculados de maneira direta.

Para a solução de problemas com a consideração de não linearidade física, deve-se discretizar o carregamento aplicando-o através de incrementos sobre a estrutura, onde este procedimento gera uma variância na matriz de rigidez global.

Segundo Proença (1988) a solução de problemas não lineares solucionados via método dos elementos finitos deve seguir alguns procedimentos abaixo descritos.

Uma vez adotada uma lei de plasticidade que retrata a não linearidade física do material concreto, uma correção sobre a força incremental é introduzida utilizando procedimentos iterativos.

Assim, para um estado de carregamento, calculam-se via Método dos Elementos Finitos os deslocamentos e, aplicando equações de compatibilidade, as deformações e as tensões.

Utilizando a lei de plasticidade adotada corrigem-se as tensões calculadas, provocando um estado de tensão não compatível ao ocasionado pelo carregamento.

Desta forma, irá existir uma diferença entre a força aplicada e a força necessária para restabelecer o equilíbrio, devendo esta diferença ser correspondente ao grau de precisão desejado.

### **3.5 O CÓDIGO DE CÁLCULO CASTEM 2000**

CASTEM 2000 é um código de cálculo para análise de estruturas via método dos elementos finitos. O código foi desenvolvido pelo “*Département de Mécanique et de Technologie (DMT) du Commissariat Français à l’Energie Atomique (CEA)*”.

Sua atuação dentro do contexto de uma atividade de pesquisa na área de mecânica das estruturas é o de servir como instrumento de alto nível, sendo uma ferramenta válida para a concepção, dimensionamento e análise de estruturas e de seus componentes, quer seja dentro do domínio nuclear, quer seja dentro do setor industrial.

O código apresenta um sistema completo que integra não somente as funções de cálculo propriamente ditas, mas igualmente as funções de construção do modelo e do tratamento de resultados.

Ele permite trabalhar ou tratar os problemas de elasticidade linear dentro do domínio estático e dinâmico, além de permitir resolver os problemas de condução de calor e os problemas envolvendo não linearidade física e geométrica com análise estática ou dinâmica.

A grande vantagem do código CASTEM 2000 está no fato do mesmo permitir que o usuário possa adaptar ou definir a seqüência de resolução da estrutura a qualquer tipo de problemática sem necessariamente seguir um roteiro pré-definido. Enfim, ele oferece a possibilidade de personalizar e de completar o sistema proposto, adaptando às exigências do usuário, permitindo uma flexibilização do problema a ser resolvido.

Uma outra particularidade do código CASTEM 2000 é possibilitar o desenvolvimento de novos operadores de cálculo permitindo a resolução de outros tipos de problemas, definindo, em certos casos, operadores diferentes daqueles já existentes.

Esses novos operadores podem ser desenvolvidos, testados e verificados independentes daqueles já existentes no programa. Para isto, é necessário conhecer a estrutura dos dados contidos nos objetos a serem tratados pelos novos operadores, assim como nos objetos comuns a todo o programa.

O código CASTEM 2000 é um sistema que foi desenvolvido sobre a óptica de ultrapassar os limites de adaptabilidade oferecidos pelos códigos convencionais.

Assim, sua utilização é efetuada através de uma macrolinguagem, a GIBIANE, que permite predefinir as operações das diversas fases de uma análise, com instruções extremamente simples.

GIBIANE é uma linguagem que oferece uma nova forma de utilizar a comunicação diretamente com o programa. Todas as operações executadas com GIBIANE constituem em uma manipulação dos objetos existentes, podendo-se modificá-los ou mesmo criar um novo objeto.

O código CASTEM 2000 utiliza os critérios de plasticidade de Drucker-Prager para o concreto, o modelo elastoplástico perfeito para o aço e o método incremental iterativo de Newton-Raphson já apresentados anteriormente.

Entre os trabalhos científicos desenvolvidos com o auxílio do código de cálculo CASTEM 2000 podem-se citar as teses de doutorado de Barbosa (1992) e Boukari (2000), entre outros.

## CAPÍTULO 4: SIMULAÇÕES EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

### 4.1 ESTUDO DA DISCRETIZAÇÃO DAS VIGAS

Apresentam-se neste capítulo as simulações efetuadas em vigas de concreto armado convencional e de alto desempenho submetidas à flexão simples tipo I.

Sabe-se que a ductilidade global é avaliada a partir de uma curva do tipo força – deslocamento, podendo esta ser obtida experimentalmente ou numericamente. Em se tratando de caráter numérico, faz-se necessário julgar o grau de confiabilidade dos índices de ductilidade global a serem obtidos, sendo esta precisão proporcional à proximidade entre as curvas força – deslocamento experimentais e numéricas.

Assim, primeiramente fez-se um estudo a fim de avaliar a malha de discretização do elemento estrutural que ocasionaria em resultados numéricos de forças de fissuração, plastificação das armaduras e ruína das vigas mais próximos em relação aos obtidos em ensaios experimentais. Para tanto, utilizou-se o elemento finito quadrangular com quatro nós (CSQ) para a discretização do material concreto e o elemento finito de barra com dois nós para a discretização do material aço.

O estudo numérico de avaliação da malha ideal foi realizado segundo os dados experimentais obtidos por Barbosa (1998) para uma viga de concreto armado submetida à flexão simples tipo I, cujas características mecânicas dos materiais aço e concreto encontram-se na Tabela 4.1. O detalhamento desta viga encontra-se na Figura 4.1.

**Tabela 4.1** – Características mecânicas dos materiais utilizados na confecção da viga ensaiada por Barbosa (1998)

Pesquisador	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$E_s$ (GPa)
Barbosa (1998)	40	620	38,2	210

Utilizaram-se três malhas de diferentes densidades: a malha M1 com um número total de 180 nós, a malha M2 com 276 nós e a malha M3 com 336 nós. A Figura 4.2 mostra o esquema de discretização da viga para as malhas M1, M2 e M3. Nota-se nesta fase a importância do planejamento das malhas em elementos de concreto armado pois a ligação aço-concreto possuiu um único nó comum. Caso esta medida não fosse tomada, ocorreriam incongruências no cálculo dos deslocamentos e o processo iterativo tornaria-se instável e impossível de ser realizado. Outra medida tomada para sanar este problema e recomendada por outros pesquisadores como Boukari (2000) foi a eliminação de nós com proximidade igual ou inferior a 0,1mm.

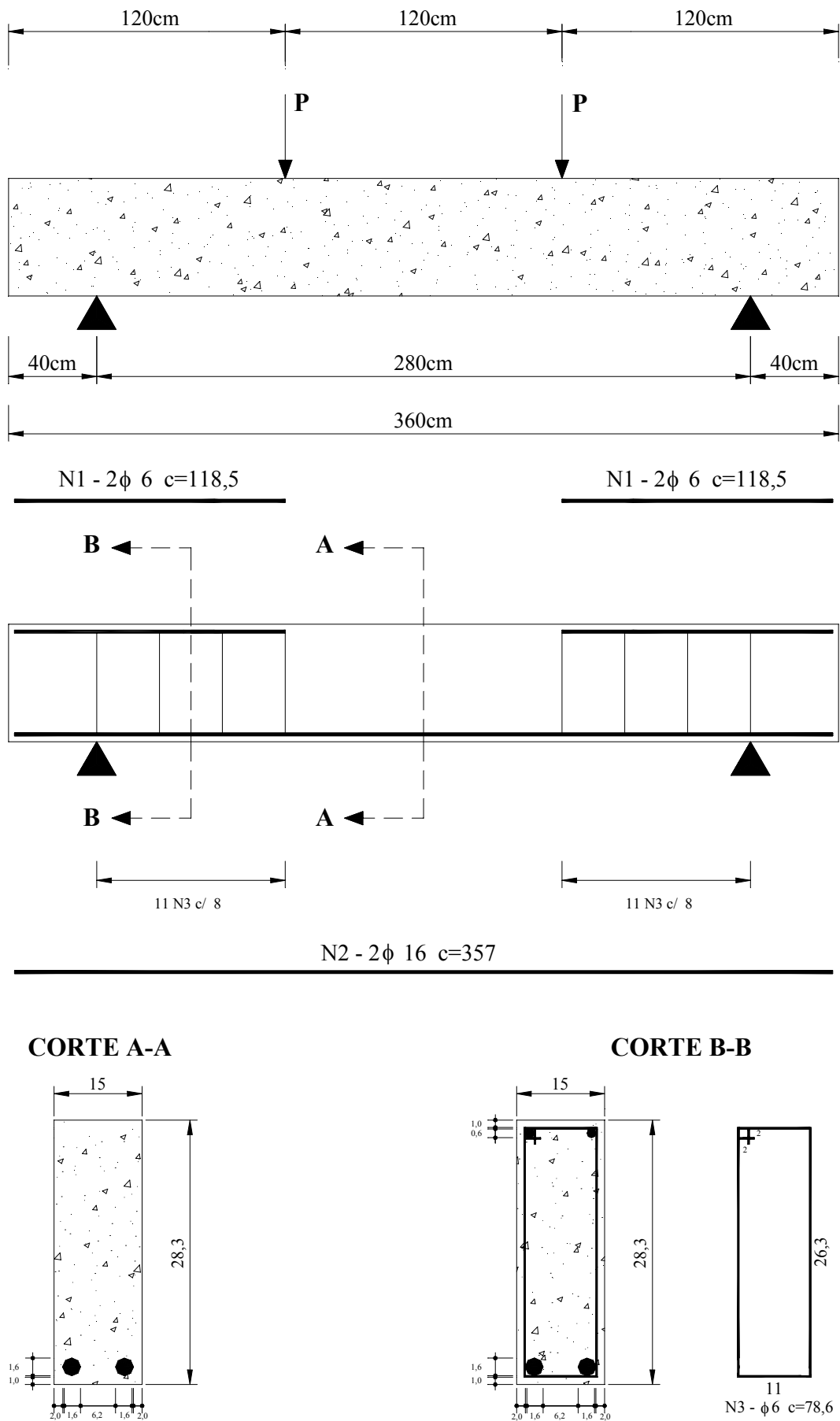


Figura 4.1 – Detalhamento da viga ensaiada por Barbosa (1998)

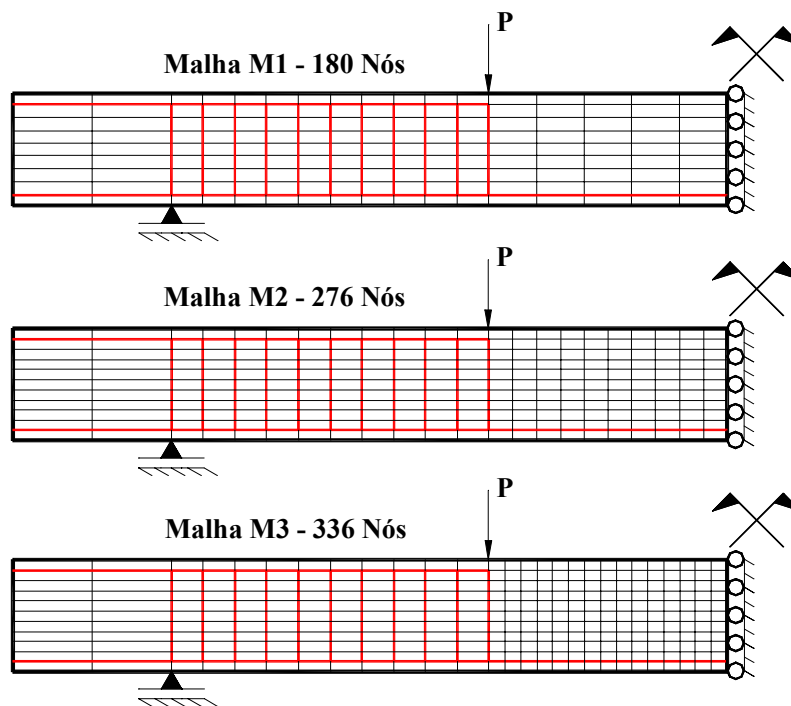


Figura 4.2 – Malhas utilizadas para a discretização da viga

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram as curvas força – deslocamento obtidas utilizando-se as malhas M1, M2 e M3 respectivamente, quando comparadas com a curva força – deslocamento obtida experimentalmente para a viga descrita.

Em seguida apresentam-se nas Tabelas 4.2 e 4.3 os valores experimentais e numéricos das forças de fissuração, plastificação e ruína bem como os deslocamentos correspondentes à força de plastificação ( $\delta_y$ ) e à força de ruína ( $\delta_u$ ), valores estes necessários para o cálculo dos índices de ductilidade global “ $\mu_d$ ”.

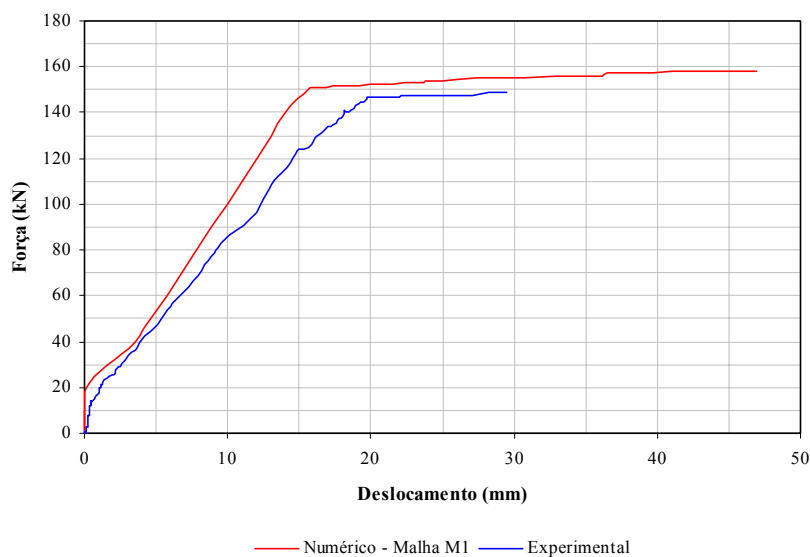


Figura 4.3 – Curvas força – deslocamento experimental e numérica para a malha M1

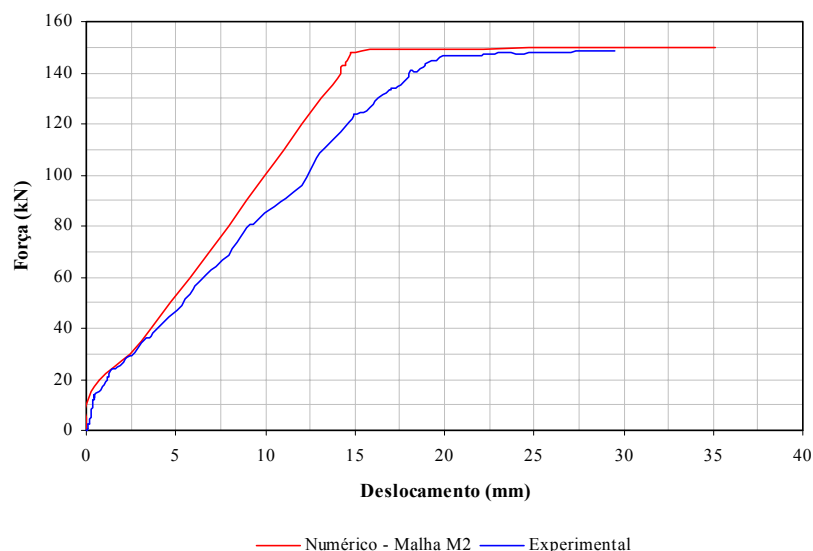


Figura 4.4 – Curvas força – deslocamento experimental e numérica para a malha M2

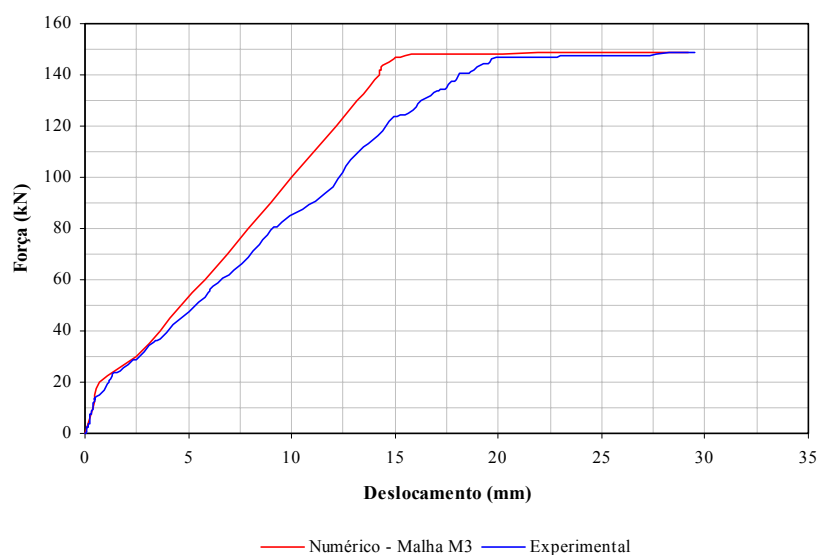


Figura 4.5 – Curvas força – deslocamento experimental e numérica para a malha M3

Tabela 4.2 – Valores de força obtidos experimentalmente e numericamente para a viga ensaiada por Barbosa (1998)

Malha		M1	M2	M3
Força de Fissuração(kN)	Experimental	15	15	15
	Numérico	22	19	18
	Experimental/Numérico	0,68	0,79	0,83
Força de Plastificação(kN)	Experimental	147	147	147
	Numérico	150	149	148
	Experimental/Numérico	0,98	0,99	0,99
Força de Ruína(kN)	Experimental	149	149	149
	Numérico	158	150	149
	Experimental/Numérico	0,94	0,99	1,00

**Tabela 4.3** – Valores de deslocamento obtidos experimentalmente e numericamente para a viga ensaiada por Barbosa (1998)

	<b>Malha</b>	<b>M1</b>	<b>M2</b>	<b>M3</b>
$\delta_y$ (mm)	Experimental	19,69	19,69	19,69
	Numérico	14,90	15,34	15,63
	Experimental/Numérico	1,32	1,28	1,26
$\delta_u$ (mm)	Experimental	29,69	29,69	29,69
	Numérico	46,93	35,15	29,18
	Experimental/Numérico	0,63	0,84	1,02

Analisando os resultados numéricos obtidos percebe-se que a malha M1 conduziu a resultados satisfatórios quanto às forças de plastificação e ruína porém apresentou resultados ruins quanto à força de fissuração e deslocamentos.

A malha M2 apresentou melhor desempenho em relação à malha M1, sobretudo no que diz respeito à força de fissuração e deslocamento último “ $\delta_u$ ”. Com a utilização desta malha alcançou-se também uma melhor convergência quanto às forças de plastificação e ruína.

A malha M3 foi a que proporcionou uma maior proximidade entre resultados numéricos e experimentais.

Para esta malha houve excelente convergência de resultados de força de plastificação, força de ruína e deslocamento último. Bons resultados foram alcançados no que tange à força de fissuração e deslocamento no momento de plastificação das armaduras “ $\delta_y$ ”.

Assim, através do presente estudo, chegou-se à conclusão que a malha M3 seria a malha ideal para a simulação subsequente de todas as demais vigas de concreto armado ensaiadas por Barbosa (1998) e Ribeiro (1996), por proporcionar bons índices de proximidade entre o modelo numérico e os ensaios experimentais.

## 4.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Uma vez escolhida a malha de discretização M3 procedeu-se a simulação numérica do comportamento global (curvas força – deslocamento) e local (curvas força – deformação no concreto e força – deformação no aço) de outras vigas ensaiadas por Barbosa (1998) e de vigas ensaiadas por Ribeiro (1996).

O detalhamento das vigas ensaiadas por Barbosa (1998) segue o esquema apresentado na Figura 4.1 ao passo que o detalhamento das vigas ensaiadas por Ribeiro (1996) está representado nas Figuras 4.6, 4.7 e 4.8.

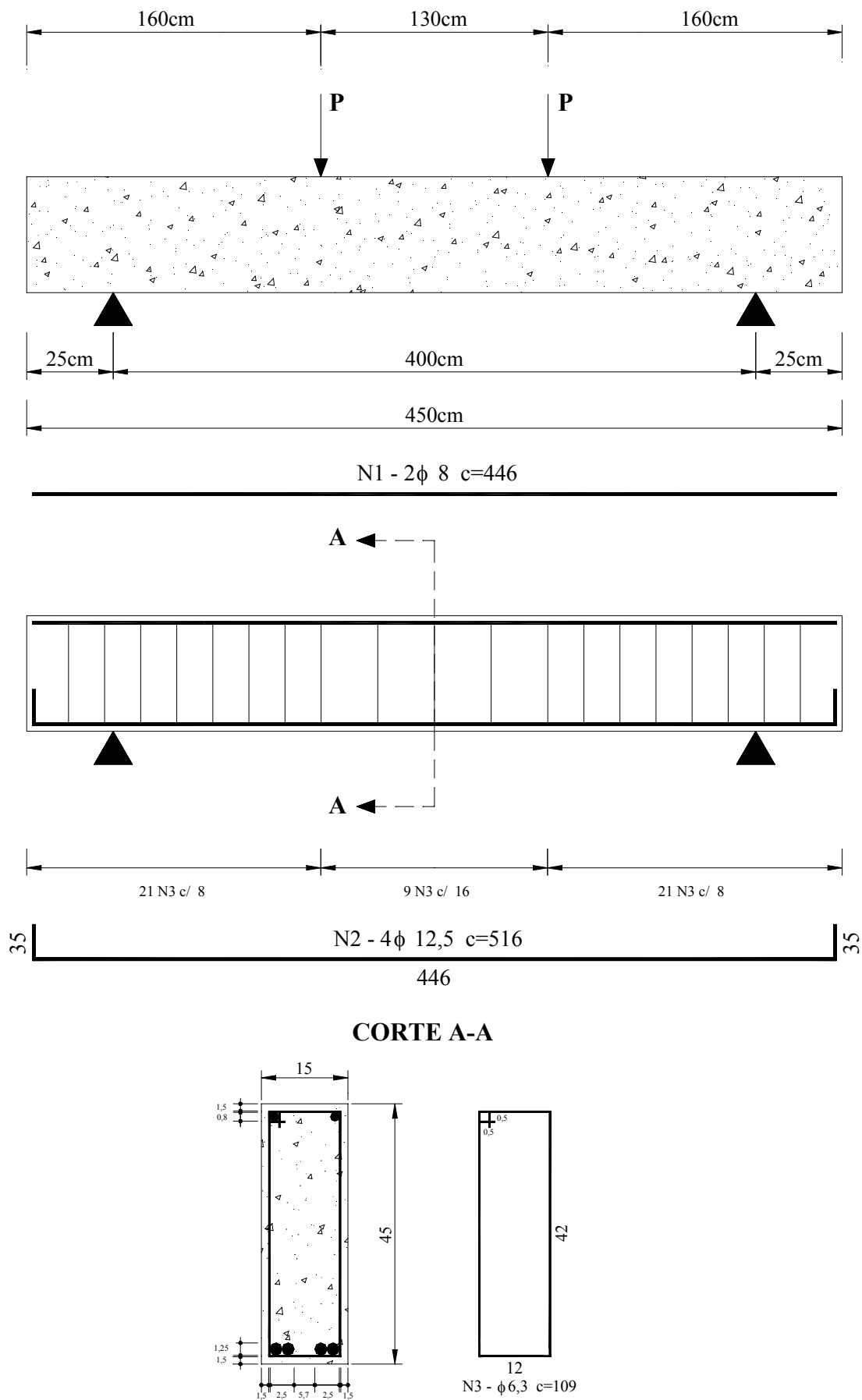


Figura 4.6 – Detalhamento da viga 04 ensaiada por Ribeiro (1996)

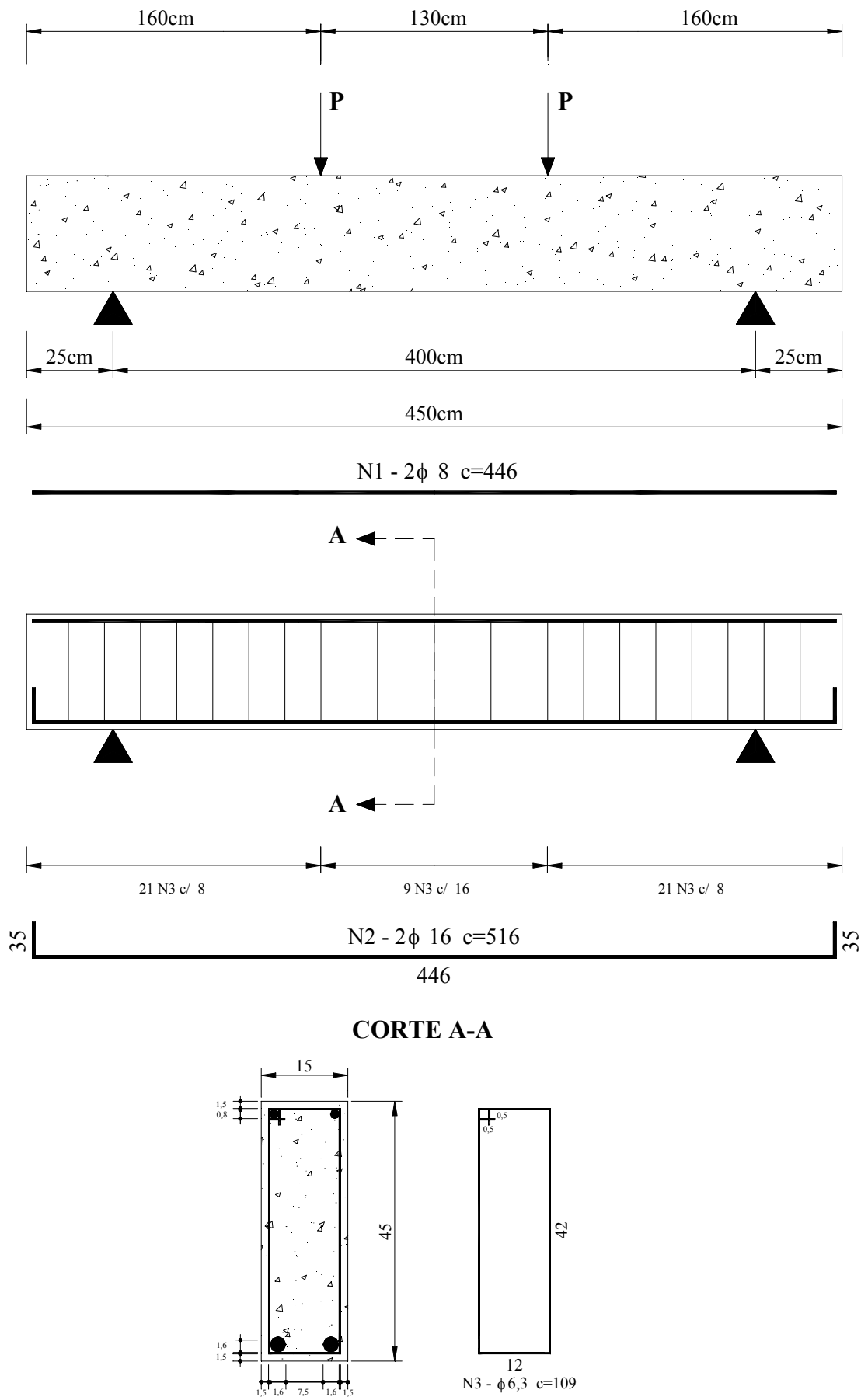


Figura 4.7 – Detalhamento da viga 05 ensaiada por Ribeiro (1996)

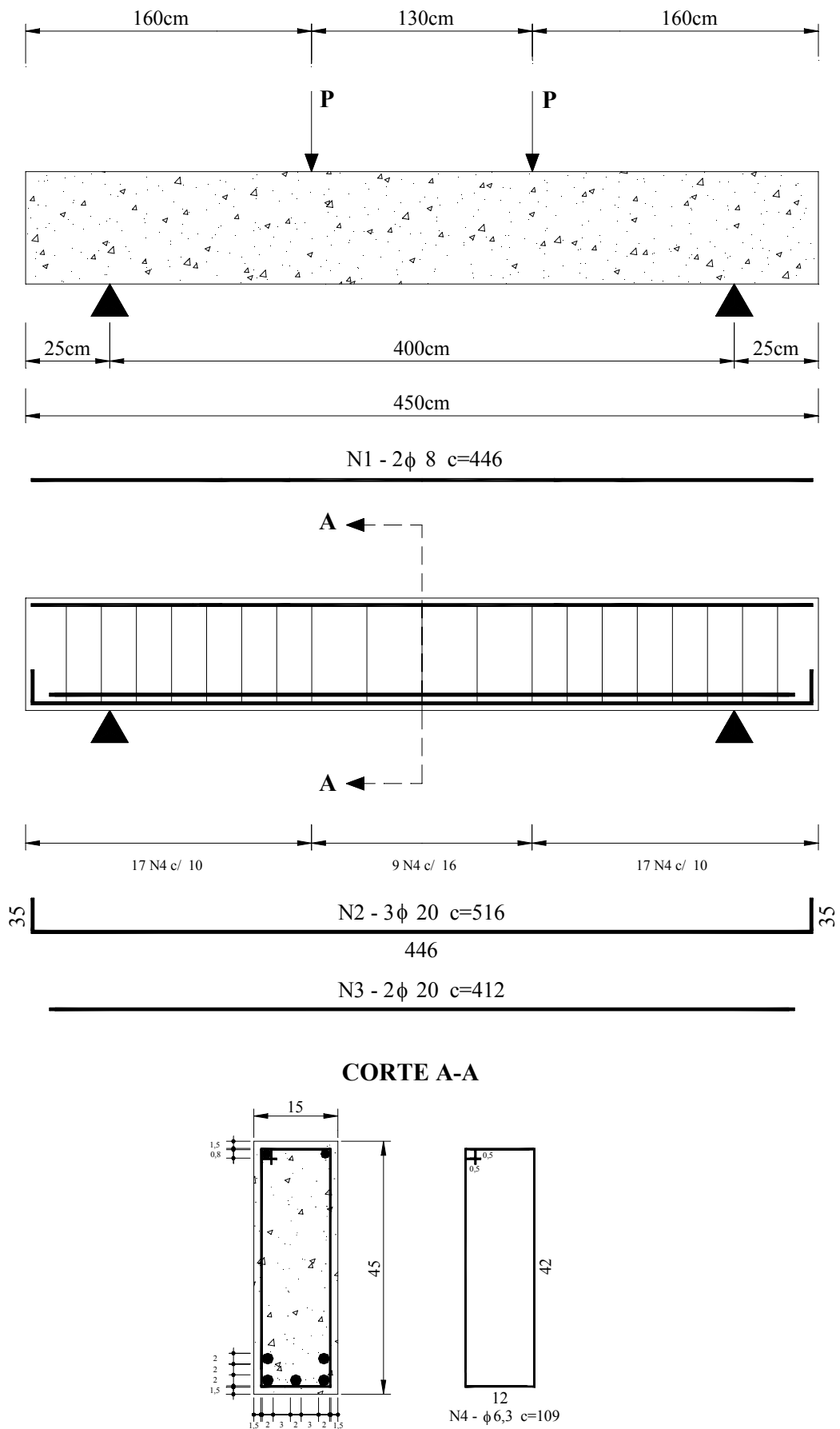
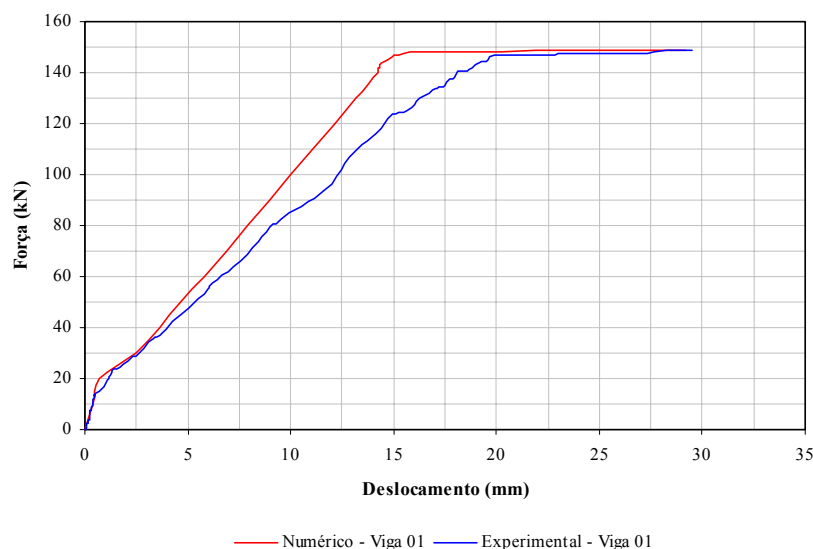


Figura 4.8 – Detalhamento da viga 06 ensaiada por Ribeiro (1996)

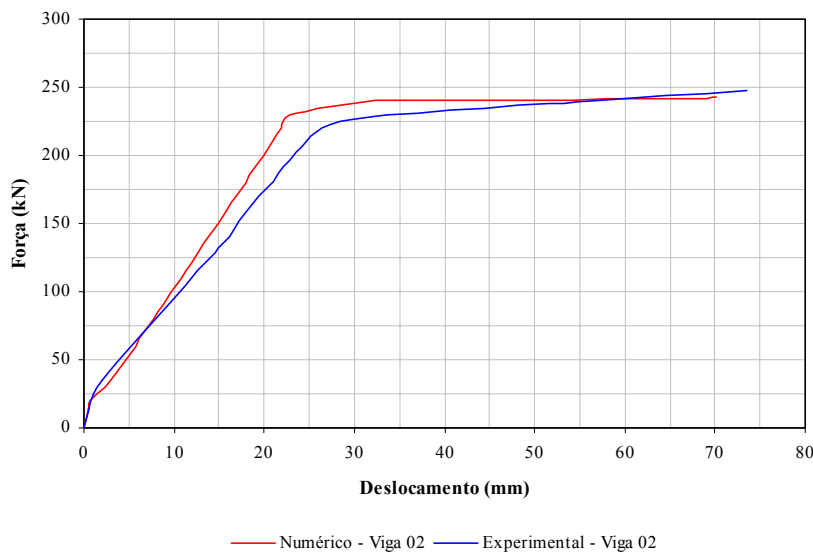
As propriedades mecânicas dos materiais aço e concreto componentes de cada viga encontram-se na Tabela 4.4. As Figuras 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 mostram respectivamente as curvas força – deslocamento numéricas e experimentais obtidas para as vigas 01, 02, 03, 04, 05 e 06.

**Tabela 4.4** – Características mecânicas dos materiais aço e concreto utilizados na confecção das vigas ensaiadas por Barbosa (1998) e Ribeiro (1996)

Pesquisador	Viga	$f_c$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$E_s$ (GPa)
Barbosa (1998)	01	40	620	38,2	210
	02	75	830	42	210
	03	100	830	51,2	210
Ribeiro (1996)	04	28,3	560	-	210
	05	65,5	540	-	210
	06	68	540	-	210



**Figura 4.9** – Curvas força – deslocamento da viga 01



**Figura 4.10** – Curvas força – deslocamento da viga 02

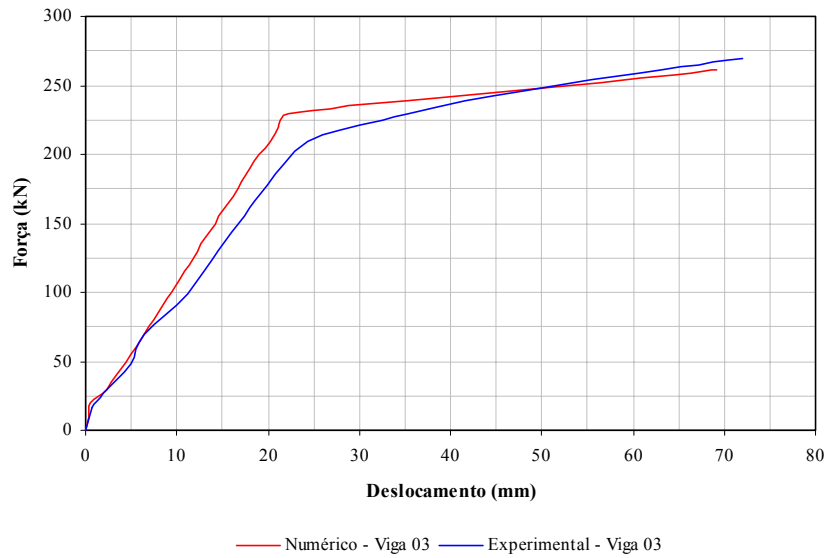


Figura 4.11 – Curvas força – deslocamento da viga 03

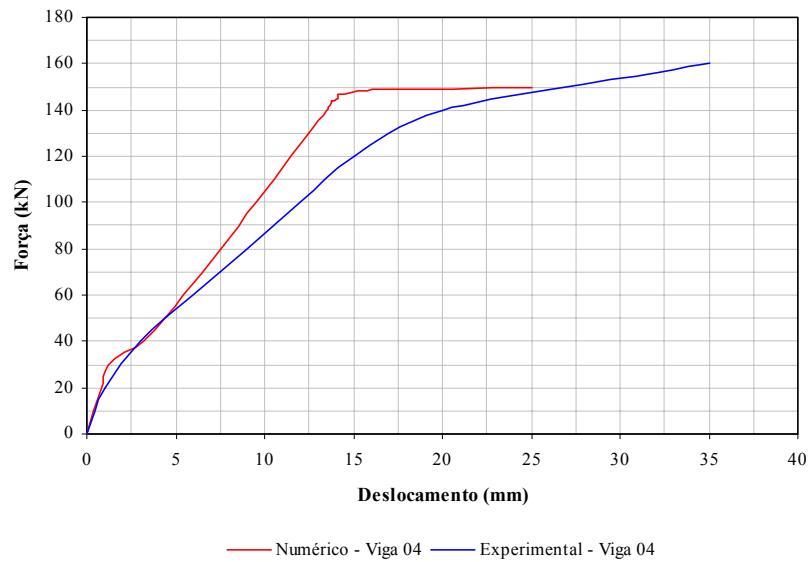


Figura 4.12 – Curvas força – deslocamento da viga 04

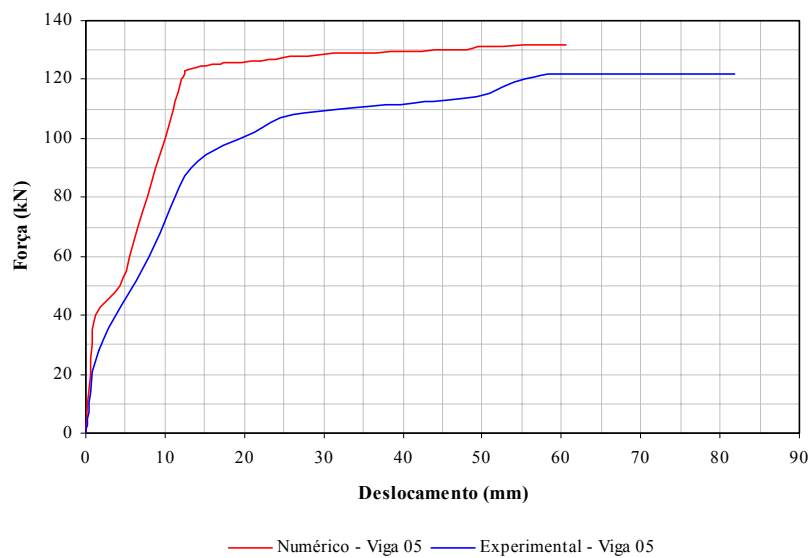
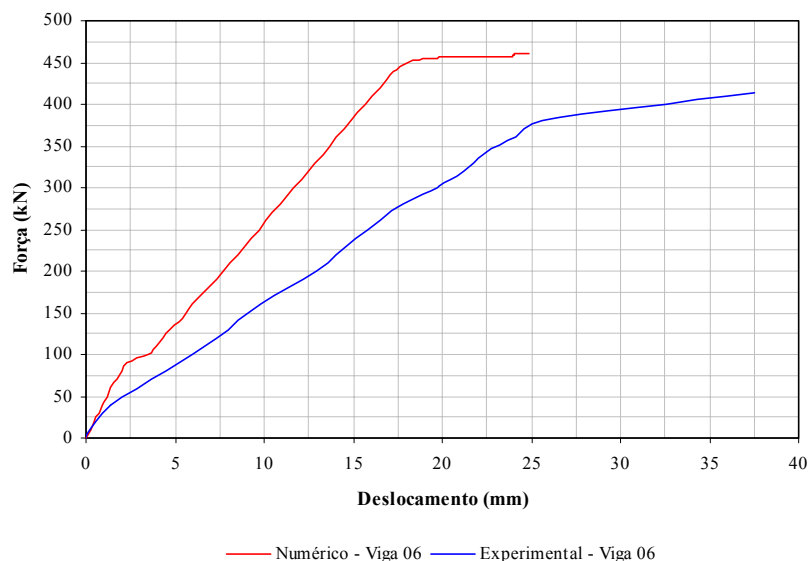


Figura 4.13 – Curvas força – deslocamento da viga 05



**Figura 4.14** – Curvas força – deslocamento da viga 06

A Tabela 4.5 apresenta os valores experimentais e numéricos das forças de fissuração, plastificação e ruína, bem como dos deslocamentos “ $\delta_y$ ” e “ $\delta_u$ ”.

**Tabela 4.5** – Valores de força e deslocamento obtidos numericamente e experimentalmente para as vigas ensaiadas por Barbosa (1998) e Ribeiro (1996)

Viga		01	02	03	04	05	06
Força de Fissuração(kN)	Experimental	15	25	22	31	29	43
	Numérico	18	26	20	34	41	89
	Experimental/Numérico	0,83	0,96	1,10	0,91	0,71	0,48
Força de Plastificação(kN)	Experimental	147	224	210	136	106	378
	Numérico	148	230	230	148	124	454
	Experimental/Numérico	0,99	0,97	0,91	0,92	0,85	0,83
Força de Ruína(kN)	Experimental	149	248	270	160	122	414
	Numérico	149	243	261	150	132	461
	Experimental/Numérico	1,00	1,02	1,03	1,07	0,92	0,90
$\delta_y$ (mm)	Experimental	19,69	26,74	24,07	17,04	16,86	24,69
	Numérico	15,63	22,68	22,16	14,21	12,47	17,84
	Experimental/Numérico	1,26	1,18	1,09	1,20	1,35	1,38
$\delta_u$ (mm)	Experimental	29,69	73,53	71,94	35,00	81,9	37,5
	Numérico	29,18	70,15	69,23	25,08	60,51	24,84
	Experimental/Numérico	1,01	1,05	1,04	1,39	1,35	1,51

A partir da Tabela 4.5 pode-se concluir que no contexto geral os resultados de forças de fissuração, plastificação e ruína numéricos alcançados com a utilização da malha M3 foram próximos aos resultados obtidos experimentalmente para as seis vigas. Entretanto, notam-se algumas discrepâncias de resultados sobretudo quanto aos deslocamentos “ $\delta_y$ ” e “ $\delta_u$ ” obtidos para as vigas 04, 05 e 06 ensaiadas por Ribeiro (1996).

A mesma linha de tendência é observada para os valores de força de fissuração obtidos para as vigas 05 e 06, cujos resultados numéricos apresentam-se minorados com relação aos valores alcançados nos ensaios experimentais.

De uma forma geral nota-se uma maior convergência numérica em relação às vigas ensaiadas por Barbosa (1998) em detrimento às vigas ensaiadas por Ribeiro (1996) devido à própria heterogeneidade do material concreto que pode acarretar, em alguns casos, uma menor proximidade entre as respostas numéricas e os resultados experimentais.

Outro fato que acarretou problemas de convergência com relação aos resultados de Ribeiro (1996) foi a adoção nas simulações de um módulo de elasticidade longitudinal uma vez que não realizaram-se ensaios experimentais para a determinação desta grandeza.

Menciona-se também que a mesma densidade de malha adotada para as vigas de Barbosa (1998) no item 4.1 (malha ideal M3) foi mantida para as vigas de Ribeiro (1996) para que não houvesse diferenças nas discretizações das vigas. As vigas de Ribeiro (1996) por possuírem maior altura e maior vão com relação às vigas de Barbosa (1998) foram discretizadas com um número maior de nós para obter-se a mesma densidade de malha.

Cabe aqui ressaltar que uma vez atingida a confiabilidade adequada em relação aos índices de ductilidade global, a mesma propriedade será conferida aos índices de ductilidade local avaliados através de curvas momento – curvatura, uma vez que os momentos fletores são calculados a partir do carregamento aplicado e as curvaturas são calculadas em função das deformações ocorridas nos materiais aço e concreto.

As Figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20 mostram respectivamente as curvas força – deformação no concreto numéricas e experimentais obtidas para as vigas 01, 02, 03, 04, 05 e 06.

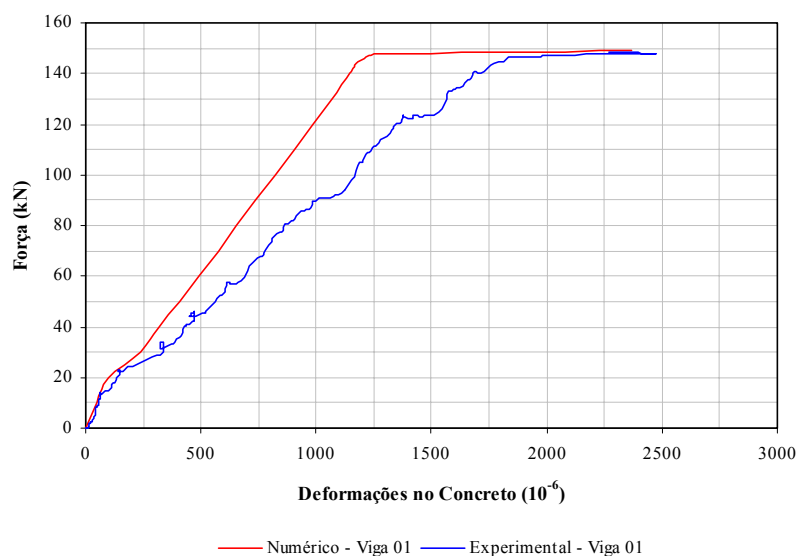


Figura 4.15 – Curvas força – deformação no concreto da viga 01

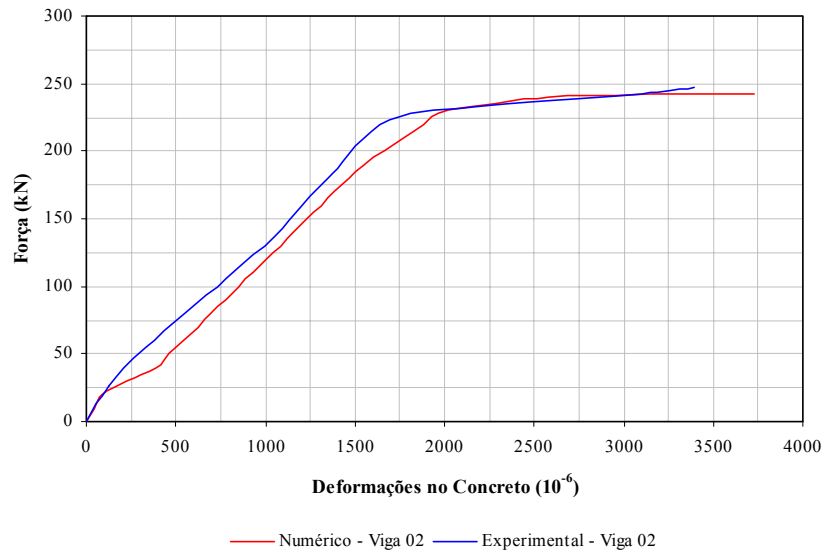


Figura 4.16 – Curvas força – deformação no concreto da viga 02

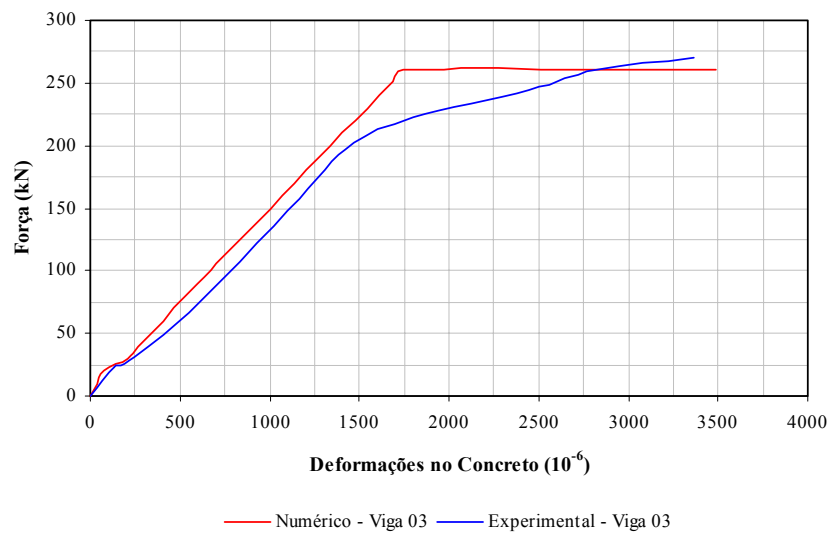


Figura 4.17 – Curvas força – deformação no concreto da viga 03

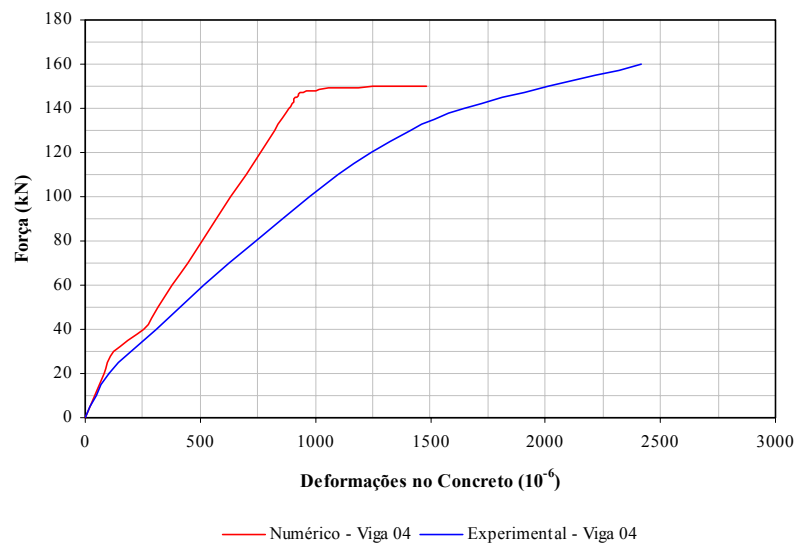


Figura 4.18 – Curvas força – deformação no concreto da viga 04

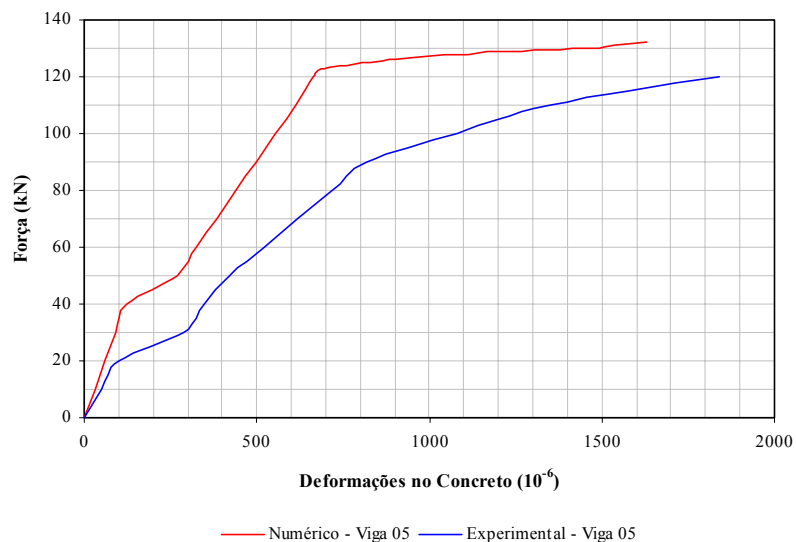


Figura 4.19 – Curvas força – deformação no concreto da viga 05

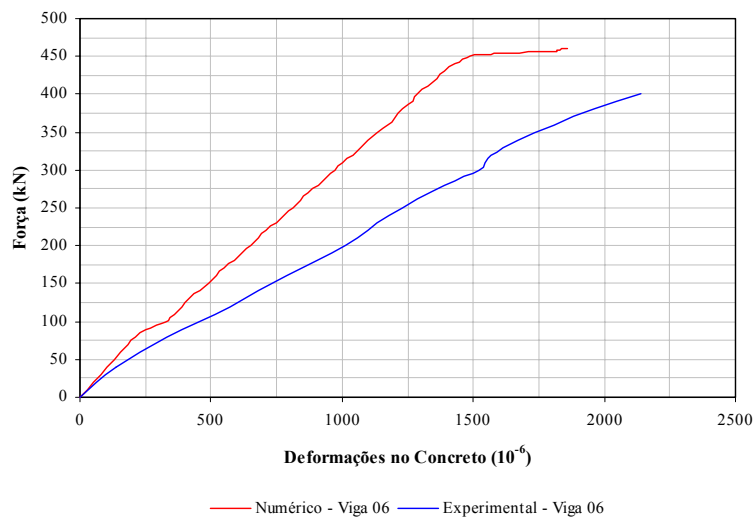


Figura 4.20 – Curvas força – deformação no concreto da viga 06

As Figuras 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26 mostram respectivamente as curvas força – deformação no aço numéricas e experimentais obtidas para as vigas 01, 02, 03, 04, 05 e 06.

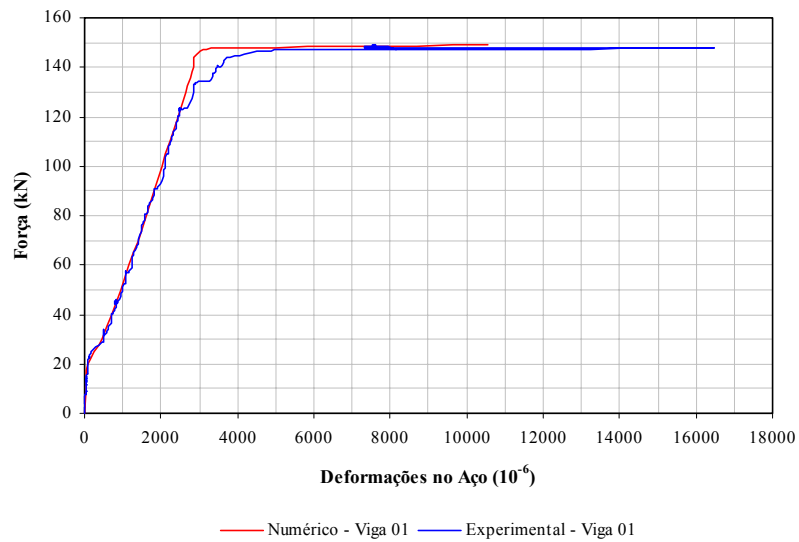


Figura 4.21 – Curvas força – deformação no aço da viga 01

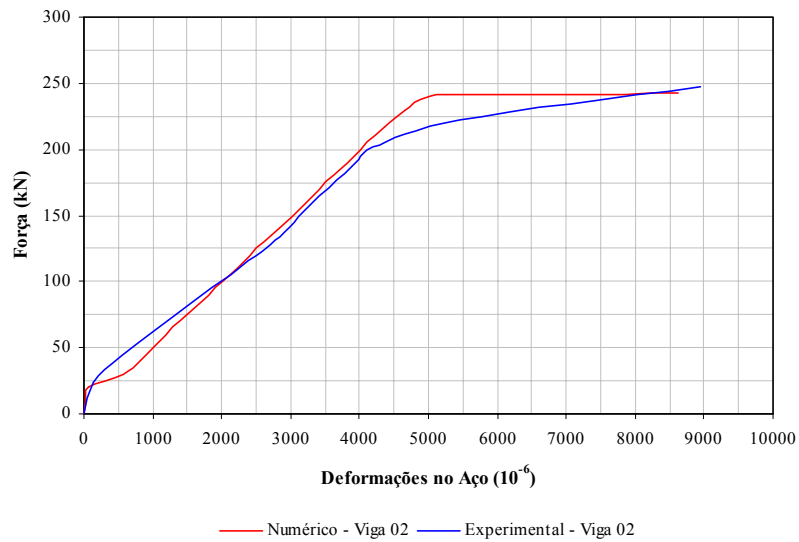


Figura 4.22 – Curvas força – deformação no aço da viga 02

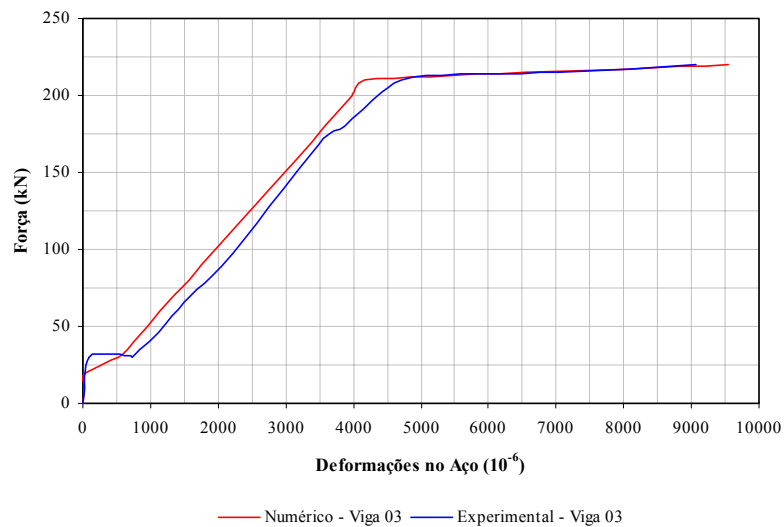


Figura 4.23 – Curvas força – deformação no aço da viga 03

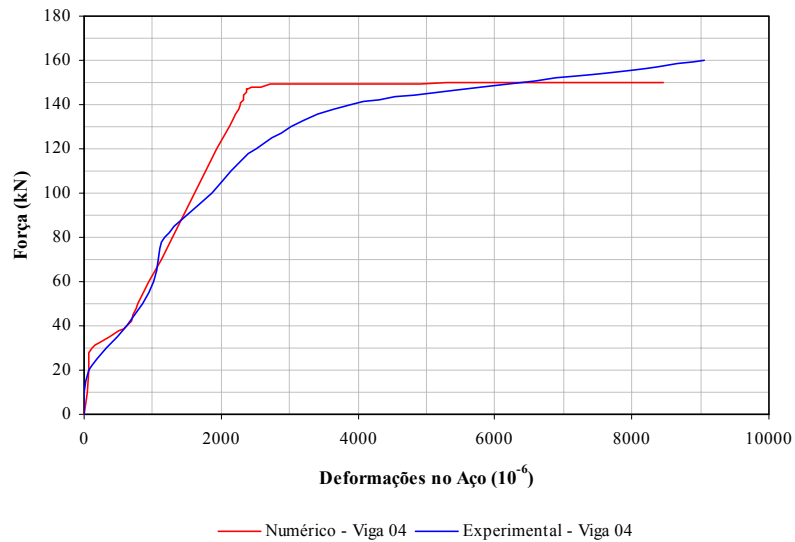


Figura 4.24 – Curvas força – deformação no aço da viga 04

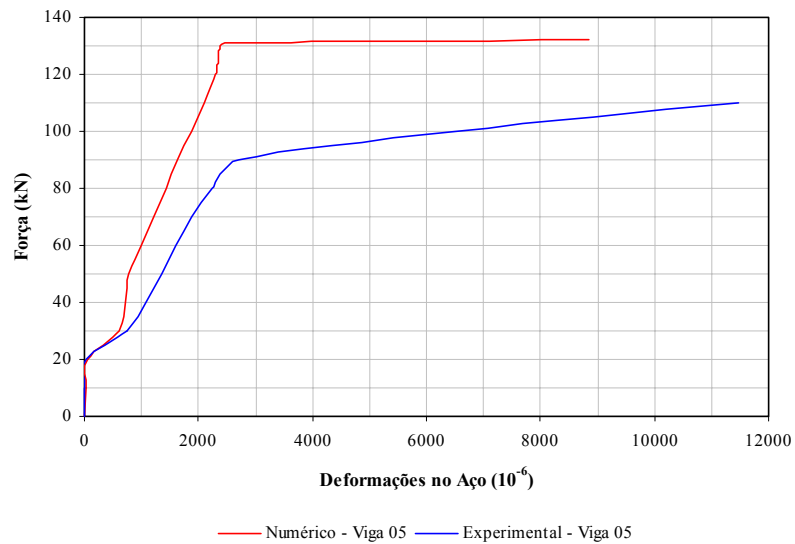


Figura 4.25 – Curvas força – deformação no aço da viga 05

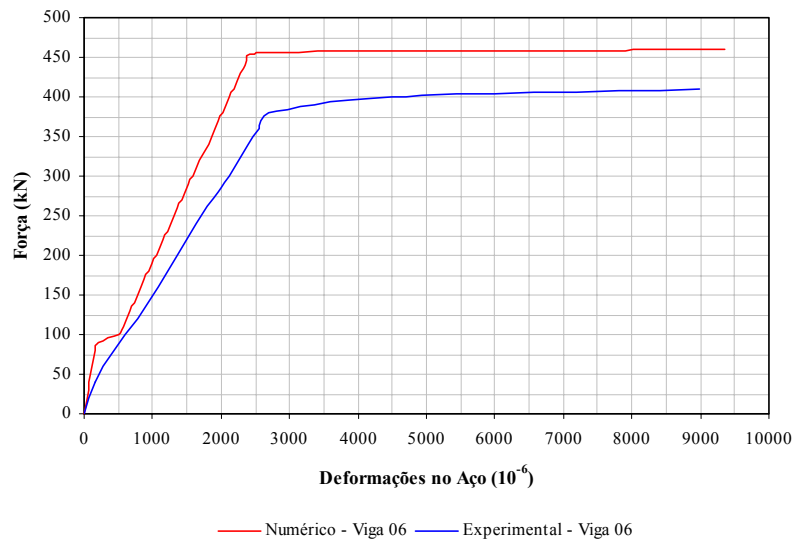


Figura 4.26 – Curvas força – deformação no aço da viga 06

Com relação aos resultados numéricos de curvas força – deformação no concreto pode-se notar que alcançaram-se bons índices de convergência sobretudo para a deformação última do concreto que ocorreu à taxa de 2,5‰ para a viga 01, da ordem de 3,5‰ para as vigas 02 e 03, da ordem de 1,8‰ para a viga 05 e da ordem de 2,1‰ para a viga 06.

Quanto à viga 04 os resultados de deformação última obtidos numericamente (1,48‰) foram ligeiramente menores com relação aos obtidos experimentalmente (2,4‰).

De uma forma geral, obteve-se maior proximidade entre as trajetórias de deformações no concreto com a ampliação da força para as vigas ensaiadas por Barbosa (1998).

No que diz respeito às curvas força – deformação no aço percebe-se que a proximidade entre as curvas experimentais e numéricas foi mais acentuada em relação às curvas anteriores (força – deslocamento e força – deformação no concreto) mostrando que o modelo reológico elastoplástico perfeito adotado para as armaduras retrata com fidelidade as deformações ocorridas no material mediante a aplicação de um estado de tensões.

As deformações últimas neste material obtidas experimentalmente foram muito próximas das calculadas via processo numérico para as vigas 02, 03, 04 e 06 (da ordem de 9‰).

Para a viga 01, a deformação última numérica foi da ordem de 10‰ enquanto que a experimental alcançou um valor próximo a 17‰.

Este valor elevado pode ter sido obtido em função de erros de leitura ou mesmo por uma disfunção do extensômetro elétrico colado nas armaduras a fim de se medir as deformações.

Para a viga 05 os valores numéricos de deformação última no material aço (9‰) ficaram aquém dos resultados obtidos experimentalmente (11,5‰).

Seguindo a mesma linha de tendência dos resultados apresentados de curvas força – deslocamento e força – deformação no concreto, obtiveram-se maior proximidade entre os resultados numéricos e experimentais das trajetórias de deformações no material aço com a ampliação da força para as vigas ensaiadas por Barbosa (1998).

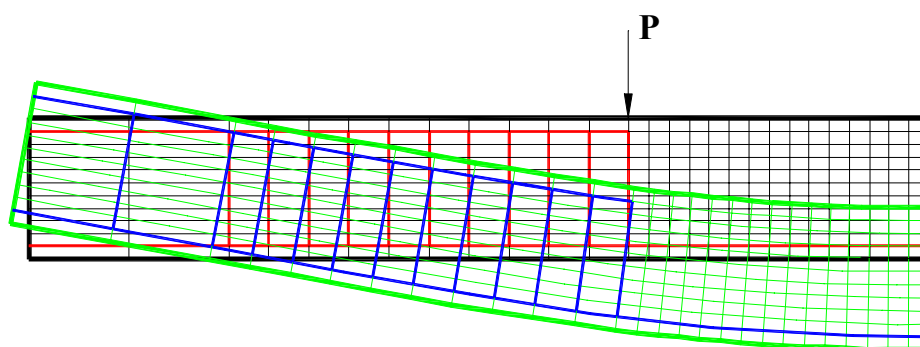
Conforme já mencionado, tais erros podem ocorrer devido à própria heterogeneidade do material concreto que por muitas vezes acarreta em uma ineficiência do modelo reológico adotado ou mesmo erros ligados à disfunção de equipamentos utilizados nas medições de deformações e deslocamentos. Aliado a isto, metodologias de ensaio ineficientes podem conduzir à resultados que podem não retratar com fidelidade a deformabilidade dos materiais ou mesmo do elemento estrutural como um todo por meio da ampliação da força externa aplicada.

Todavia a adoção de um módulo de elasticidade longitudinal para as vigas de Ribeiro (1996) tenha contribuído para a não convergência sobretudo com relação aos deslocamentos obtidos.

O presente estudo forneceu indicações quanto à densidade da malha de elementos finitos a ser utilizada para a análise não linear de vigas de concreto armado com o intuito de obter resultados numéricos próximos aos experimentais.

Assim proporciona-se confiabilidade aos índices de ductilidade obtidos na avaliação dos parâmetros que possam influir na ductilidade das vigas, cujos resultados alcançados encontram-se nos capítulos subseqüentes.

Para finalizar este capítulo, explicita-se abaixo a deformada da viga de concreto armado obtida no código de cálculo CASTEM 2000, notadamente à viga 01 ensaiada por Barbosa (1998), com relação à estrutura equivalente utilizada nas simulações, segundo o esquema estrutural ilustrado na Figura 4.27.



**Figura 4.27** – Deformada da viga 01 ensaiada por Barbosa (1998) para a força de ruptura (fator de escala igual a 8)

## CAPÍTULO 5: ESTUDO DOS PARÂMETROS QUE AFETAM A DUCTILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO: FLEXÃO SIMPLES TIPO I

### 5.1 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

Para avaliação da influência da resistência à compressão do concreto “ $f_c$ ” sobre a ductilidade global e local, realizaram-se simulações numéricas em vigas de concreto armado biapoiadas sujeitas à flexão simples tipo I, cujo detalhamento encontra-se na Figura 5.1. Nessas simulações, utilizaram-se para as armaduras as características mecânicas do aço CA-50A, cuja tensão de escoamento “ $f_y$ ” possui o valor de 500MPa.

Neste estudo variou-se somente o valor de “ $f_c$ ” de 40MPa, 55MPa, 70MPa e 100MPa, mantendo-se constante todas as demais características físicas e mecânicas das vigas analisadas. Na Tabela 5.1 estão dispostos os valores obtidos através da simulação numérica efetuada, utilizando-se o código de cálculo CASTEM 2000.

**Tabela 5.1** – Valores numéricos obtidos na avaliação da influência da resistência à compressão do concreto

$f_c$ (MPa)	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
40	37,02	12,35	3,0	2,45	0,70	3,50
55	50,33	12,23	4,11	2,86	0,69	4,14
70	56,74	12,62	4,49	3,33	0,67	4,97
100	60,34	11,34	5,32	3,91	0,63	6,21

A evolução de “ $\mu_d$ ” em função de “ $f_c$ ” é apresentado na Figura 5.2 e a evolução de “ $\mu_c$ ” em função de “ $f_c$ ” é apresentado na Figura 5.3, onde observa-se que “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” crescem em regime exponencial à medida que “ $f_c$ ” aumenta.

A partir dos resultados obtidos nas simulações numéricas, pode-se afirmar que o aumento da resistência à compressão do concreto ocasionou acréscimos nos índices de ductilidade global e local (Figuras 5.2 e 5.3).

Segundo Pinto Júnior (1992) tal fato pode ser explicado da seguinte forma: ainda que as deformações na borda comprimida sejam menores para vigas de concreto armado de alto desempenho, a linha neutra apresenta-se em uma posição mais elevada sendo que a curvatura da seção transversal não diminui, provocando assim o aumento da ductilidade.

Em uma próxima etapa, procurou-se quantificar a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração balanceada “ $\rho_b$ ” para as quatro vigas analisadas anteriormente.

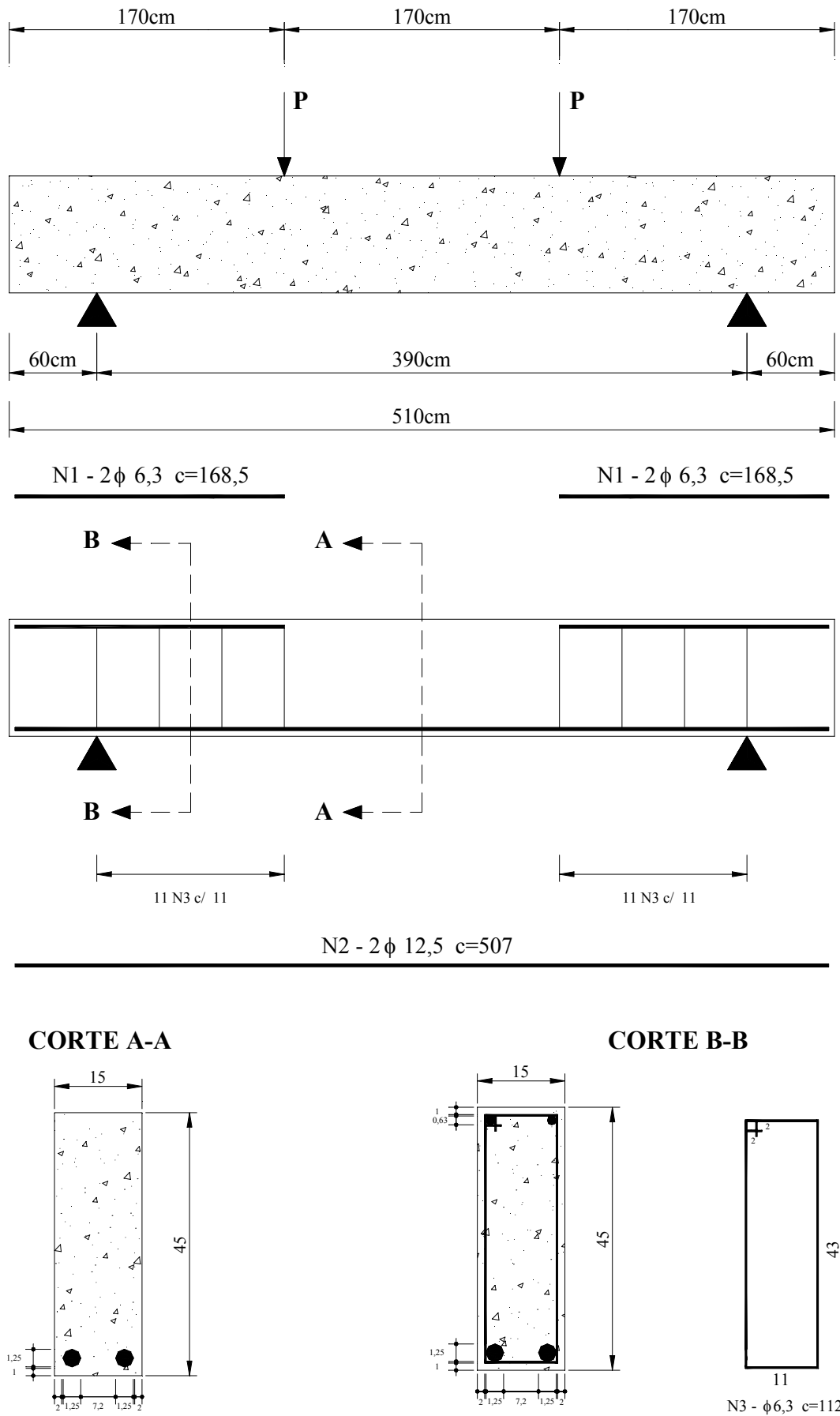


Figura 5.1 – Detalhamento da viga de concreto armado utilizada nas simulações

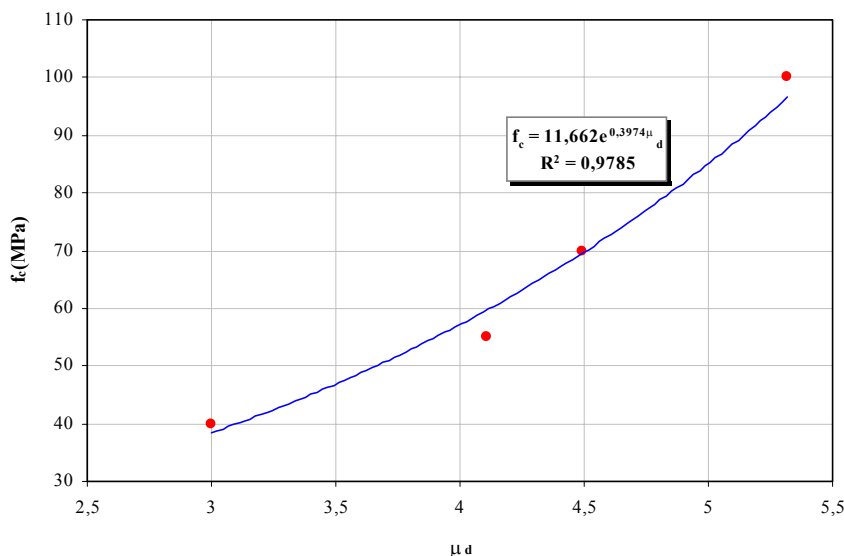


Figura 5.2 – Evolução de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ”

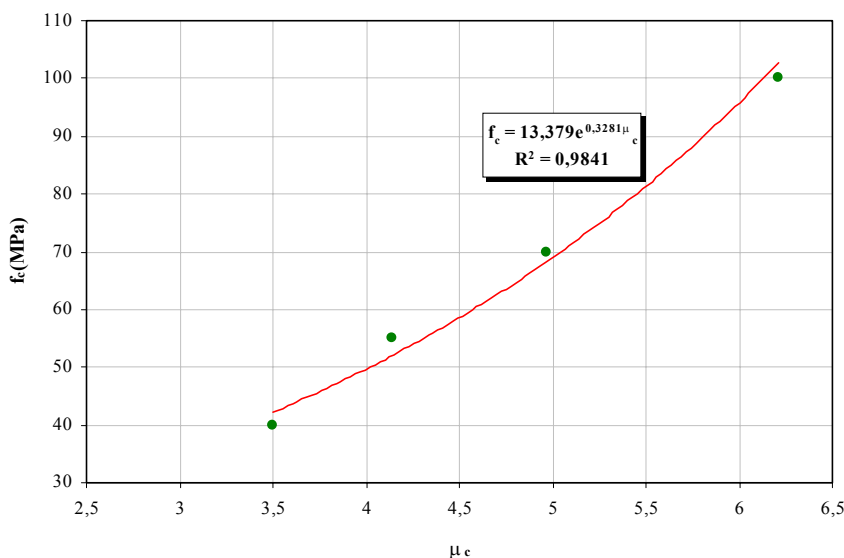


Figura 5.3 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ”

O parâmetro “ $\rho_b$ ” retrata a armadura a ser utilizada nas vigas de tal forma que os estágios de plastificação do aço e ruptura do concreto ocorram simultaneamente, proporcionando desta forma que os materiais sejam aproveitados ao máximo. Admitindo uma distribuição linear de tensões de compressão nas vigas, pode-se calcular “ $\rho_b$ ” através da Equação (33).

$$\rho_b = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{cu}}{(\epsilon_{cu} + \epsilon_y)} \frac{f_c}{f_y} \quad (33)$$

sendo que “ $\epsilon_{cu}$ ” representa a deformação última do concreto, “ $\epsilon_y$ ” representa a deformação da armadura longitudinal de tração no momento do escoamento, “ $f_c$ ” representa a tensão de ruptura do concreto e “ $f_y$ ” representa a tensão de escoamento do aço.

Os valores de “ $\epsilon_{cu}$ ”, de “ $\epsilon_y$ ”, da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração – “ $\rho$ ”, de “ $\rho_b$ ”, da relação “ $\rho/\rho_b$ ” e da armadura longitudinal de tração “ $A_s$ ”, para cada valor de “ $f_c$ ” simulado estão relacionados na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2** – Valores de “ $\epsilon_{cu}$ ”, “ $\epsilon_y$ ”, “ $\rho$ ”, “ $\rho_b$ ”, “ $\rho/\rho_b$ ” e “ $A_s$ ”

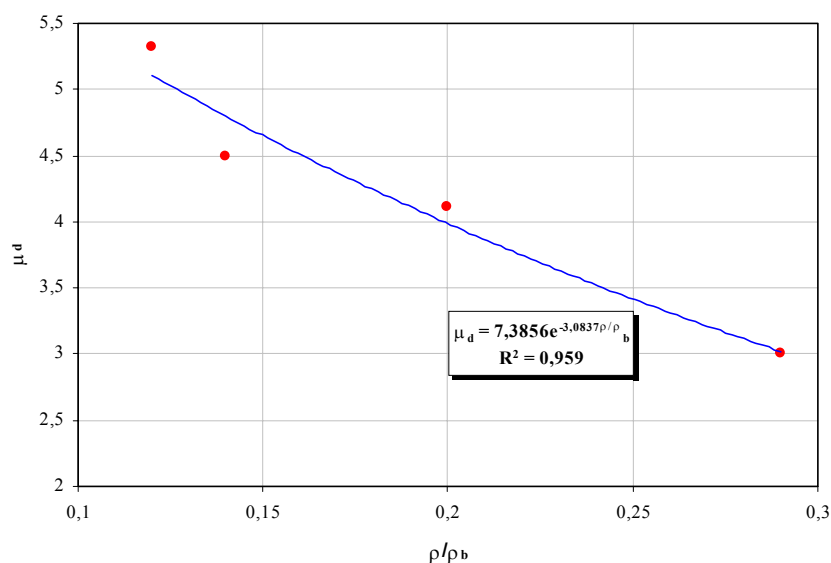
$f_c$ (MPa)	$\epsilon_{cu}$ (‰)	$\epsilon_y$ (‰)	$\rho$ (%)	$\rho_b$ (%)	$\rho/\rho_b$	$A_s$
40	1,06	2,35	0,36	1,24	0,29	2 $\phi$ 12,5mm
55	1,18	2,46	0,36	1,78	0,20	2 $\phi$ 12,5mm
70	1,48	2,56	0,36	2,56	0,14	2 $\phi$ 12,5mm
100	1,25	2,86	0,36	3,04	0,12	2 $\phi$ 12,5mm

Percebe-se a partir dos resultados obtidos na Tabela 5.2 que o aumento do valor da resistência à compressão do concreto “ $f_c$ ”, levou a uma diminuição na relação “ $\rho/\rho_b$ ”.

As Figuras 5.4 e 5.5 mostram respectivamente a evolução dos índices de ductilidade global “ $\mu_d$ ” e local “ $\mu_c$ ” em função da variação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”, através de uma curva de regressão exponencial.

Nota-se a partir destas figuras que houve decréscimo nos índices de ductilidade global e local das vigas analisadas quando ampliaram-se os valores de “ $\rho/\rho_b$ ”.

Desta forma pode-se afirmar que o fenômeno de aumento da ductilidade das vigas por meio da ampliação da resistência à compressão do concreto, mantendo-se invariantes todas as demais características físicas e mecânicas, é ocasionado pela diminuição do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”, sendo este inversamente proporcional aos índices de ductilidade local e global.



**Figura 5.4** – Evolução de “ $\mu_d$ ” em relação à variação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”

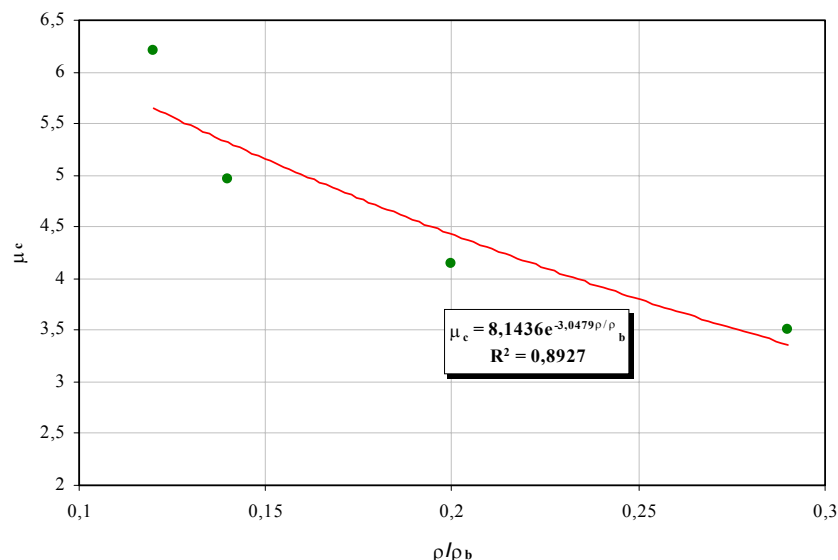


Figura 5.5 – Evolução de “ $\mu_c$ ” em relação à variação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”

Em outras palavras, ainda que concretos de alto desempenho possuam características mais frágeis em relação à concretos convencionais, é possível obter vigas de concreto armado de alto desempenho com propriedades dúcteis suficientes, bastando para isso utilizar a relação “ $\rho/\rho_b$ ” mais adequada para que se atinja a ductilidade desejada.

Com o aumento de “ $f_c$ ” diminui a área necessária para suportar a resultante das tensões de compressão provocada pela flexão do elemento estrutural, diminui-se a relação “ $x/d$ ” sendo que a posição da linha neutra estará mais próxima à região comprimida, provocando maiores deformações na armadura tracionada e, em consequência disso, amplia-se a ductilidade.

Em uma etapa seguinte, optou-se por manter constante o valor de  $\rho/\rho_b=0,29$  obtido para  $f_c=40\text{MPa}$ .

Para as simulações efetuadas anteriormente (com  $f_c=55\text{MPa}$ ,  $f_c=70\text{MPa}$  e  $f_c=100\text{MPa}$ ), calcularam-se novos valores de “ $\rho$ ”, denominados agora de “ $\rho^*$ ”, com a finalidade de manter constante a relação “ $\rho/\rho_b$ ”. A nova relação “ $\rho^*/\rho_b$ ” obtida manteve-se invariante e igual a 0,29 – Tabela 5.3 – para cada valor de “ $f_c$ ”.

Tabela 5.3 – Valores obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

$f_c(\text{MPa})$	$\rho(\%)$	$\rho_b(\%)$	$\rho^*(\%)$	$\rho^*/\rho_b$	$A_s$
40	0,36	1,24	0,36	0,29	2 $\phi$ 12,5mm
55	0,36	1,78	0,54	0,30	3 $\phi$ 12,5mm
70	0,36	2,56	0,73	0,29	4 $\phi$ 12,5mm
100	0,36	3,04	0,88	0,29	3 $\phi$ 16,0mm

Em seguida realizou-se nova simulação para as vigas com  $f_c=55\text{MPa}$  e  $A_s=3\phi\ 12,5\text{mm}$ , com  $f_c=70\text{MPa}$  e  $A_s=4\phi\ 12,5\text{mm}$ , com  $f_c=100\text{MPa}$  e  $A_s=3\phi\ 16,0\text{mm}$  sendo os resultados numéricos obtidos dispostos na Tabela 5.4. A evolução das novas taxas de “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” em função de “ $f_c$ ”, está representada respectivamente nas Figuras 5.6 e 5.7.

Tabela 5.4 – Valores numéricos obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

$f_c$ (MPa)	$\rho^*/\rho_b$	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}\text{rad/mm}$ )	$\phi_y$ ( $10^{-5}\text{rad/mm}$ )	$\mu_c$
40	0,29	37,02	12,35	3,0	2,45	0,70	3,50
55	0,30	42,40	14,81	2,86	2,42	0,74	3,27
70	0,29	34,27	13,35	2,57	2,09	0,74	2,82
100	0,29	28,12	12,61	2,23	1,79	0,73	2,45

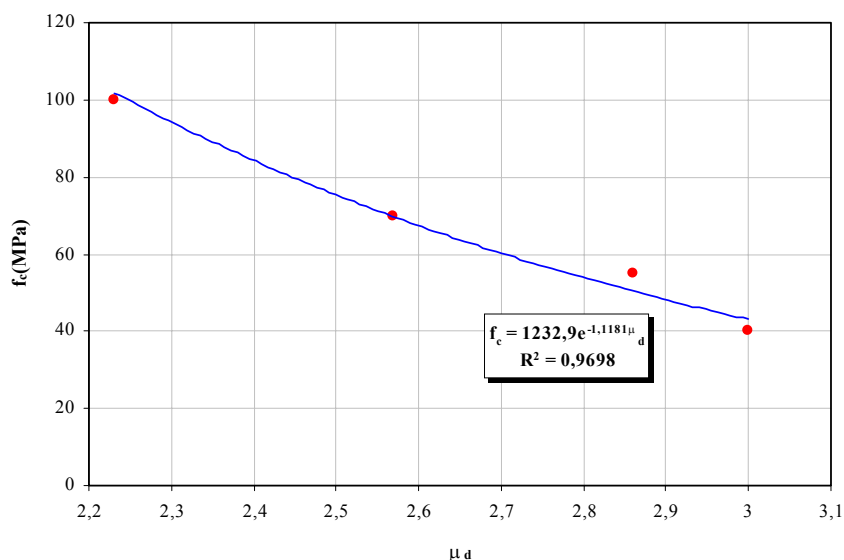


Figura 5.6 – Evolução de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

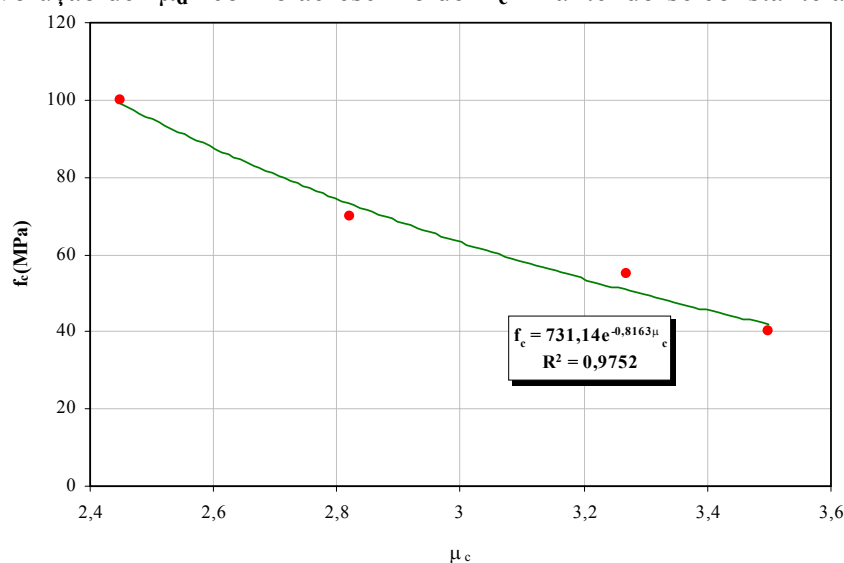


Figura 5.7 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

Analisando as Figuras 5.6 e 5.7 pode-se observar que houve uma diminuição dos valores de “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” em função do aumento de “ $f_c$ ” quando manteve-se constante a relação “ $\rho/\rho_b$ ”.

## 5.2 TAXA GEOMÉTRICA DE ARMADURA LONGITUDINAL DE TRAÇÃO

Para avaliação da influência da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração “ $\rho$ ” sobre a ductilidade global e local de vigas de concreto armado, realizaram-se simulações numéricas em três vigas a saber: a viga 01 obedeceu ao detalhamento exposto na Figura 5.1; o detalhamento da viga 02 encontra-se na Figura 5.8; o detalhamento da viga 03 encontra-se na Figura 5.9.

Nessas simulações, utilizaram-se nas três vigas as características mecânicas do aço CA-50A para as armaduras e para o concreto um valor de resistência à compressão “ $f_c$ ” de 50MPa.

Neste estudo variou-se somente o valor de “ $\rho$ ” de 0,36%, 0,89% e 0,93%, mantendo-se constante todas as demais características físicas e mecânicas das vigas analisadas.

Na Tabela 5.5 estão apresentados os valores obtidos numericamente através das simulações no código CASTEM 2000 para as três vigas.

**Tabela 5.5** – Valores numéricos obtidos no estudo de variação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração

<b>Vigas</b>	$\rho$ (%)	$\rho_b$ (%)	$\rho/\rho_b$	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
01	0,36	1,60	0,23	50,33	12,23	4,11	2,79	0,69	4,04
02	0,89	2,12	0,42	41,41	13,88	2,98	2,21	0,77	2,87
03	0,93	2,04	0,45	38,66	14,47	2,67	2,01	0,78	2,58

A Figura 5.10 apresenta as curvas força – deslocamento das três vigas simuladas. Observa-se que a viga 01 apresenta valores de deslocamento último – “ $\delta_u$ ” mais elevados que as demais vigas ao mesmo tempo em que os deslocamentos no ponto de escoamento das armaduras – “ $\delta_y$ ” mantiveram-se próximos para as três vigas.

Assim, para a viga 01, o valor do índice de ductilidade global – “ $\mu_d$ ”, foi mais elevado em virtude do maior deslocamento último alcançado.

Segundo os dados obtidos na Tabela 5.5, percebe-se também a diminuição nos índices de ductilidade local provocada pelo aumento de “ $\rho$ ”.

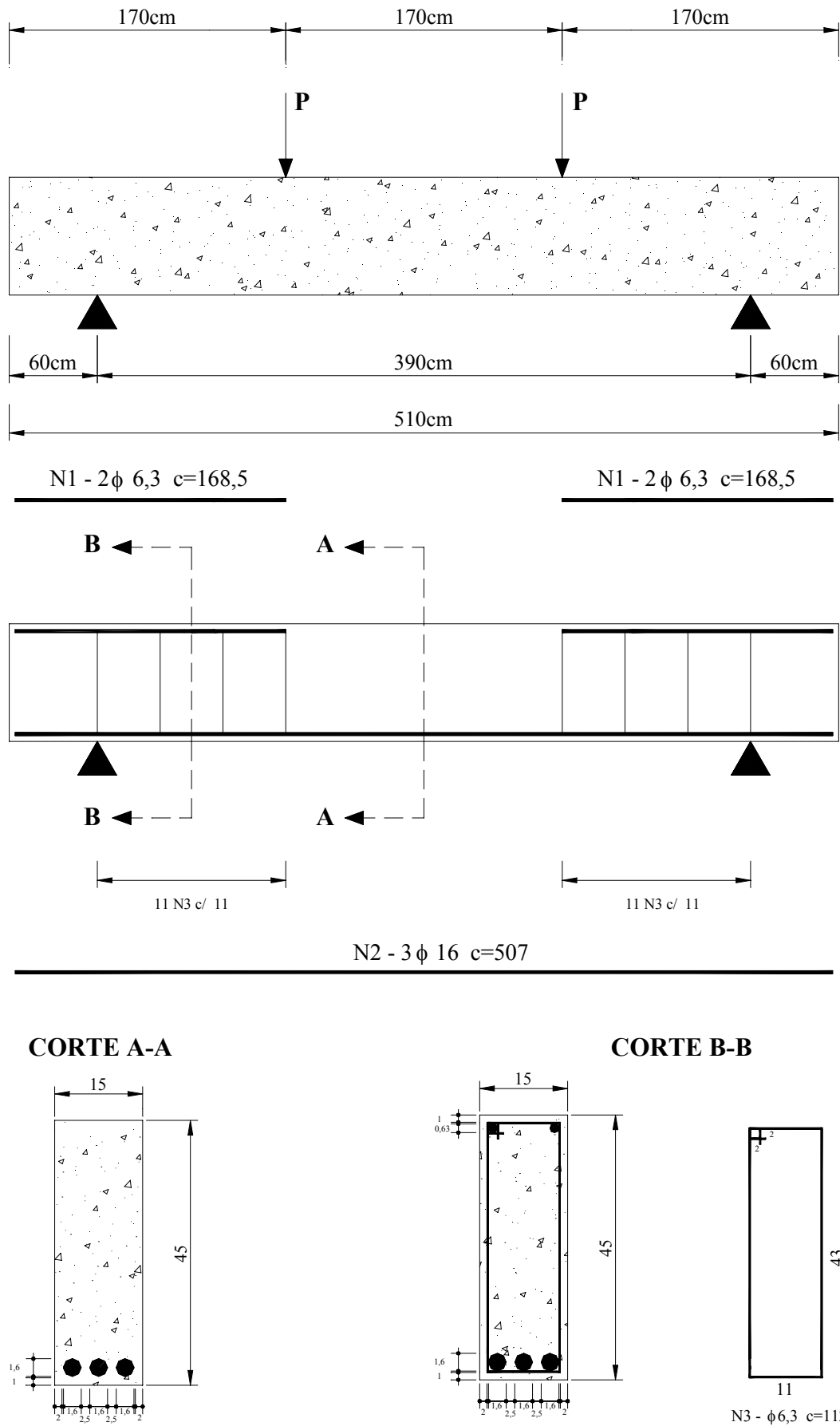


Figura 5.8 – Detalhamento da viga 02

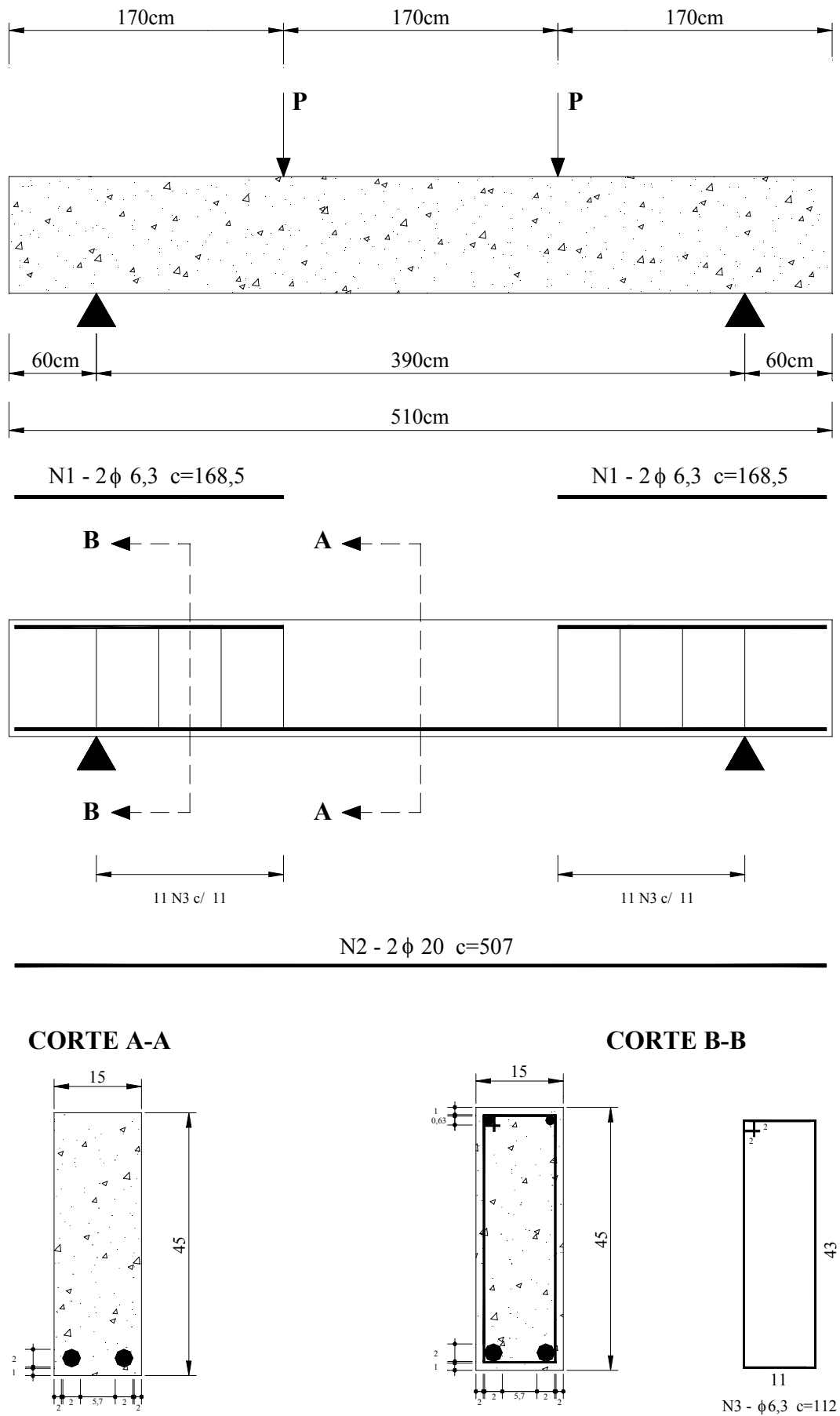
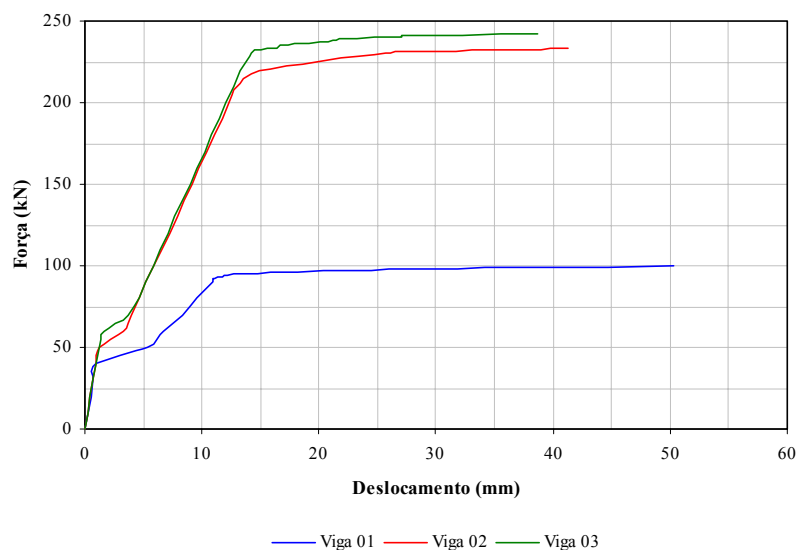
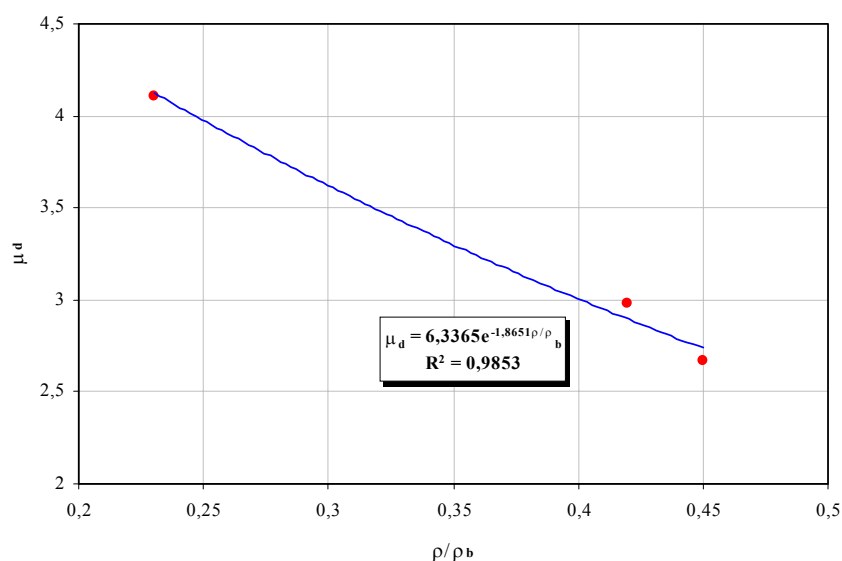


Figura 5.9 – Detalhamento da viga 03



**Figura 5.10** – Curvas força – deslocamento obtidas para as vigas variando-se a taxa de armadura longitudinal de tração

As Figuras 5.11 e 5.12 apresentam respectivamente a evolução dos índices de ductilidade global “ $\mu_d$ ” e local “ $\mu_c$ ” em relação à evolução do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ” onde nota-se que quanto maior o valor da relação “ $\rho/\rho_b$ ”, menor será o valor da ductilidade, sendo esta linha de tendência análoga à obtida na avaliação da influência da resistência à compressão do concreto. O aumento da taxa de armadura longitudinal de tração acarreta em uma elevação no valor da relação “ $x/d$ ”, onde a linha neutra situar-se-á em uma posição mais próxima da armadura tracionada proporcionando menores deformações nesta e maiores deformações no concreto comprimido. Em outras palavras, a ampliação de “ $\rho$ ” ocasiona um comportamento mais frágil à vigas de concreto armado.



**Figura 5.11** – Evolução de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo da relação “ $\rho/\rho_b$ ”

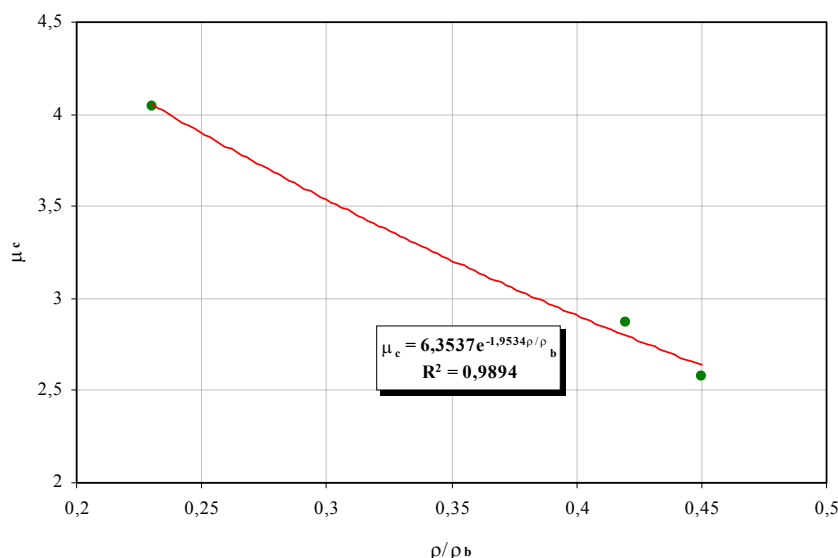


Figura 5.12 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo da relação “ $\rho/\rho_b$ ”

### 5.3 TENSÃO DE ESCOAMENTO DAS ARMADURAS

Para este estudo, manteve-se constante o valor de “ $f_c$ ” em 70MPa e variou-se somente o valor limite da tensão de escoamento das armaduras “ $f_y$ ”. Para tanto, trabalharam-se nas simulações com os aços CA 50-A e CA 60-B com tensões de escoamento características de 500MPa e 600MPa respectivamente.

As Figuras 5.13 e 5.14 mostram respectivamente as curvas de evolução força – deslocamento e momento – curvatura para as duas vigas analisadas: viga 04 -  $f_c=70\text{MPa}$  e  $f_y=500\text{MPa}$ ; viga 05 -  $f_c=70\text{MPa}$  e  $f_y=600\text{MPa}$ . Os valores numéricos dos índices de ductilidade global e local obtidos nesta simulação estão dispostos na Tabela 5.6. O detalhamento das vigas 04 e 05 analisadas está apresentado na Figura 5.15.

Tabela 5.6 – Valores numéricos obtidos na avaliação da influência da tensão de escoamento das armaduras

<b>Viga</b>	$f_y$ (MPa)	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}\text{rad/mm}$ )	$\phi_y$ ( $10^{-5}\text{rad/mm}$ )	$\mu_c$
04	500	79,39	10,27	7,73	3,11	0,70	4,44
05	600	65,30	15,88	4,11	2,47	0,81	3,05

Nota-se, por este estudo, que o aumento da tensão de escoamento das armaduras não provocou mudanças na rigidez ou mesmo da força de fissuração das vigas. Neste contexto, conclui-se que vigas que utilizam armaduras com tensão de escoamento mais elevadas tenderão

possuir menor ductilidade em relação à vigas com armaduras dotadas de tensão de escoamento inferiores.

Vale ressaltar que o aço CA 50-A é classificado segundo a norma **NBR 6118:2001** como aço de alta ductilidade ao passo que o aço CA 60-B é classificado como aço de ductilidade normal. Assim, a capacidade de deformação inelástica do elemento estrutural, neste caso, é determinado a partir do tipo de armadura utilizada.

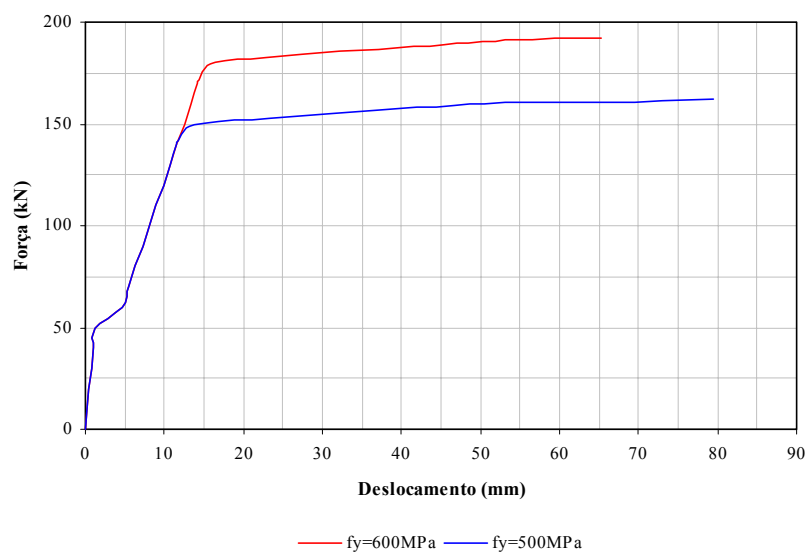


Figura 5.13 – Curvas força – deslocamento obtidas para as vigas variando-se o valor limite da tensão de escoamento das armaduras

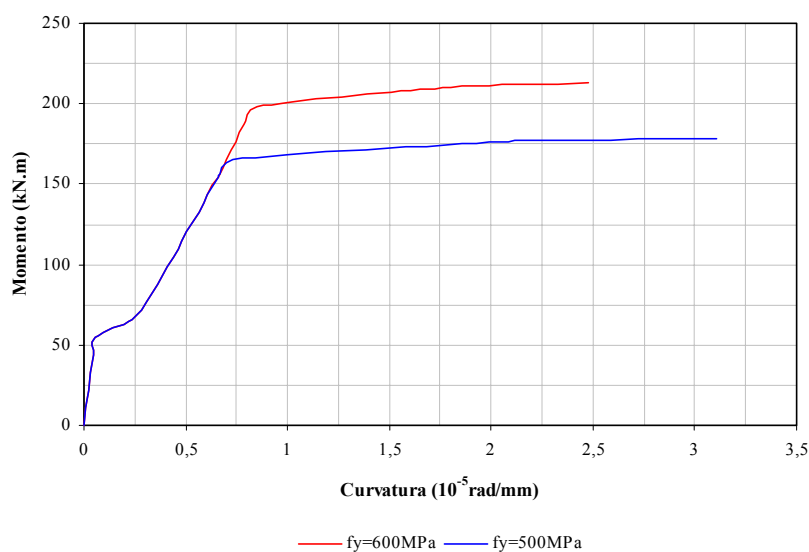


Figura 5.14 – Curvas momento – curvatura obtidas para as vigas variando-se o valor limite da tensão de escoamento das armaduras

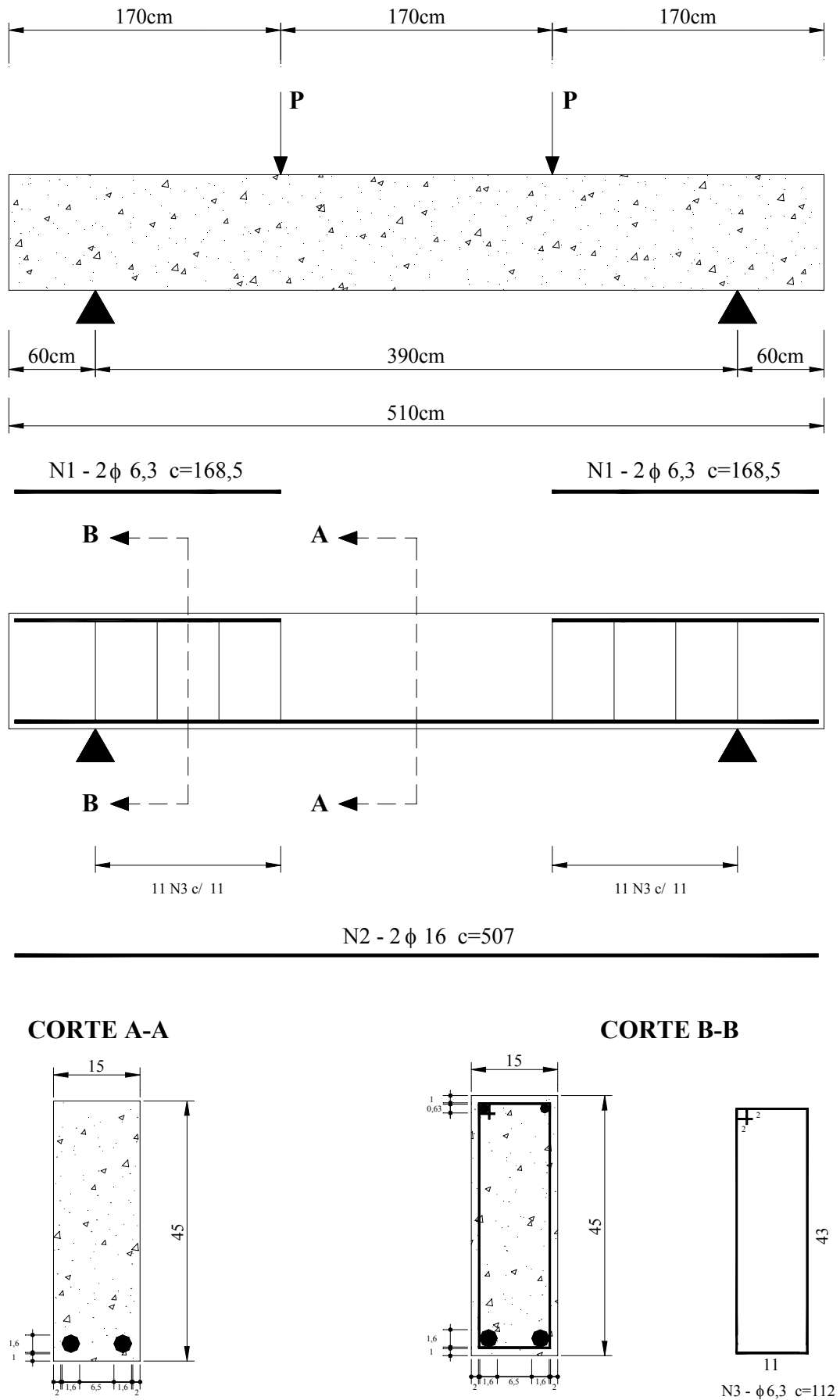


Figura 5.15 – Detalhamento das vigas 04 e 05

## 5.4 ESPAÇAMENTO ENTRE ESTRIBOS

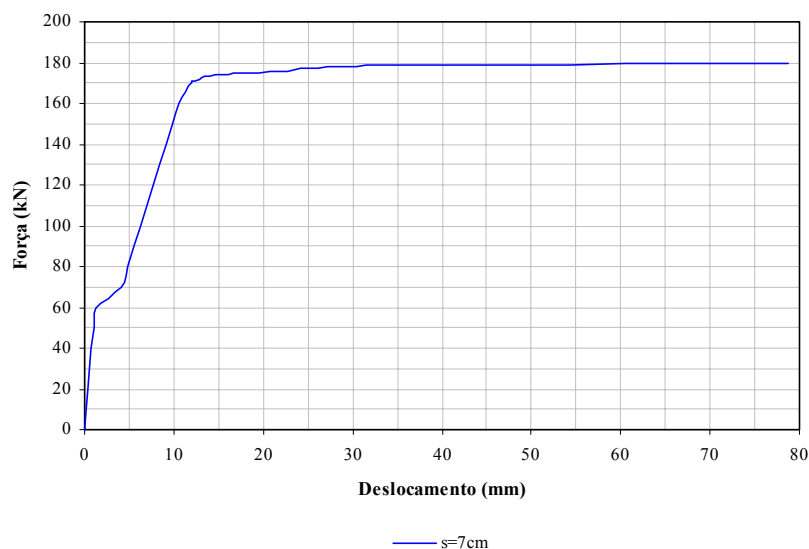
Neste estudo, manteve-se constante o valor de “ $f_c$ ” em 70MPa, variando-se somente o espaçamento entre estribos, adotando-se para as armaduras as características mecânicas do aço CA-50A.

Optou-se por trabalhar com espaçamentos entre estribos da ordem de 7, 10 e 20 cm. Nas Figuras 5.16, 5.17 e 5.18 apresentam-se respectivamente as curvas força – deslocamento obtidas para os espaçamentos estudados.

A Tabela 5.7 mostra os valores numéricos obtidos nas simulações. O detalhamento das vigas 06, 07 e 08 encontram-se respectivamente nas Figuras 5.19, 5.20 e 5.21.

**Tabela 5.7** – Valores numéricos obtidos na avaliação da influência do espaçamento entre estribos

<b>Viga</b>	<b>s (cm)</b>	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
06	7	78,75	12,10	6,51	3,50	0,75	4,67
07	10	56,66	10,68	5,31	2,44	0,77	3,17
08	20	46,42	10,55	4,40	2,14	0,76	2,81



**Figura 5.16** – Curva força – deslocamento obtida para a viga 06

Percebe-se a partir das curvas força – deslocamento obtidas que o aumento no espaçamento entre os estribos causou uma diminuição no deslocamento último alcançado pelas vigas.

Vale ainda salientar que os deslocamentos no escoamento das armaduras sofreram pouca variação e, portanto, o índice de ductilidade global apresentou valor mais elevado para a viga com menor espaçamento, ou seja,  $s=7\text{cm}$ . Esta mesma observação pode ser notada quanto aos índices de ductilidade local: a curvatura “ $\phi_y$ ” manteve-se praticamente invariante ao passo que a curvatura “ $\phi_u$ ” sofreu decréscimos com o aumento de “ $s$ ”.

Isto está ligado ao fato de que o confinamento do concreto mostra-se mais eficiente com a diminuição da distância entre as armaduras de cisalhamento, provocando uma maior rigidez do conjunto de armaduras e proporcionando maiores deslocamentos e curvaturas no regime próximo à ruptura do elemento estrutural.

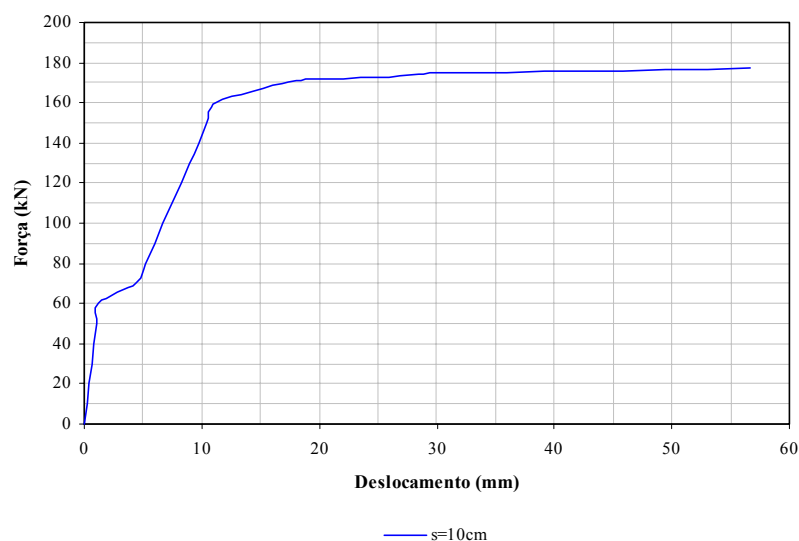


Figura 5.17 – Curva força – deslocamento obtida para a viga 07

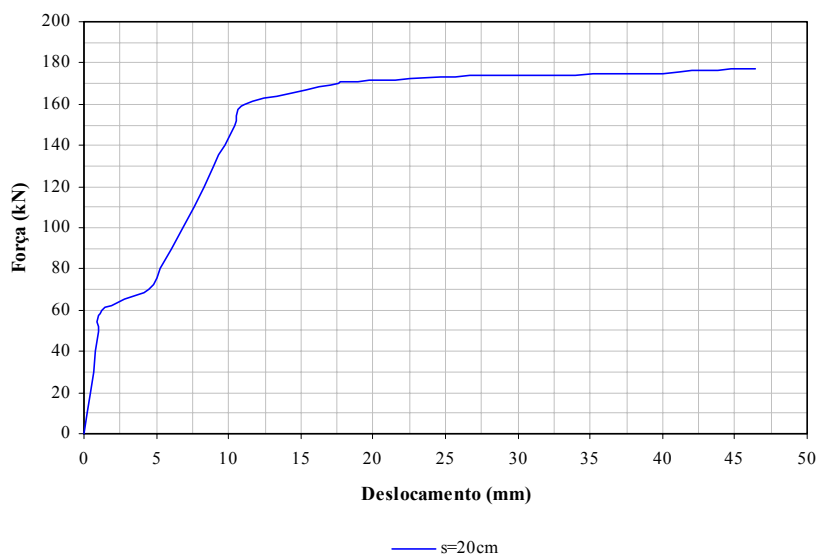


Figura 5.18 – Curva força – deslocamento obtida para a viga 08

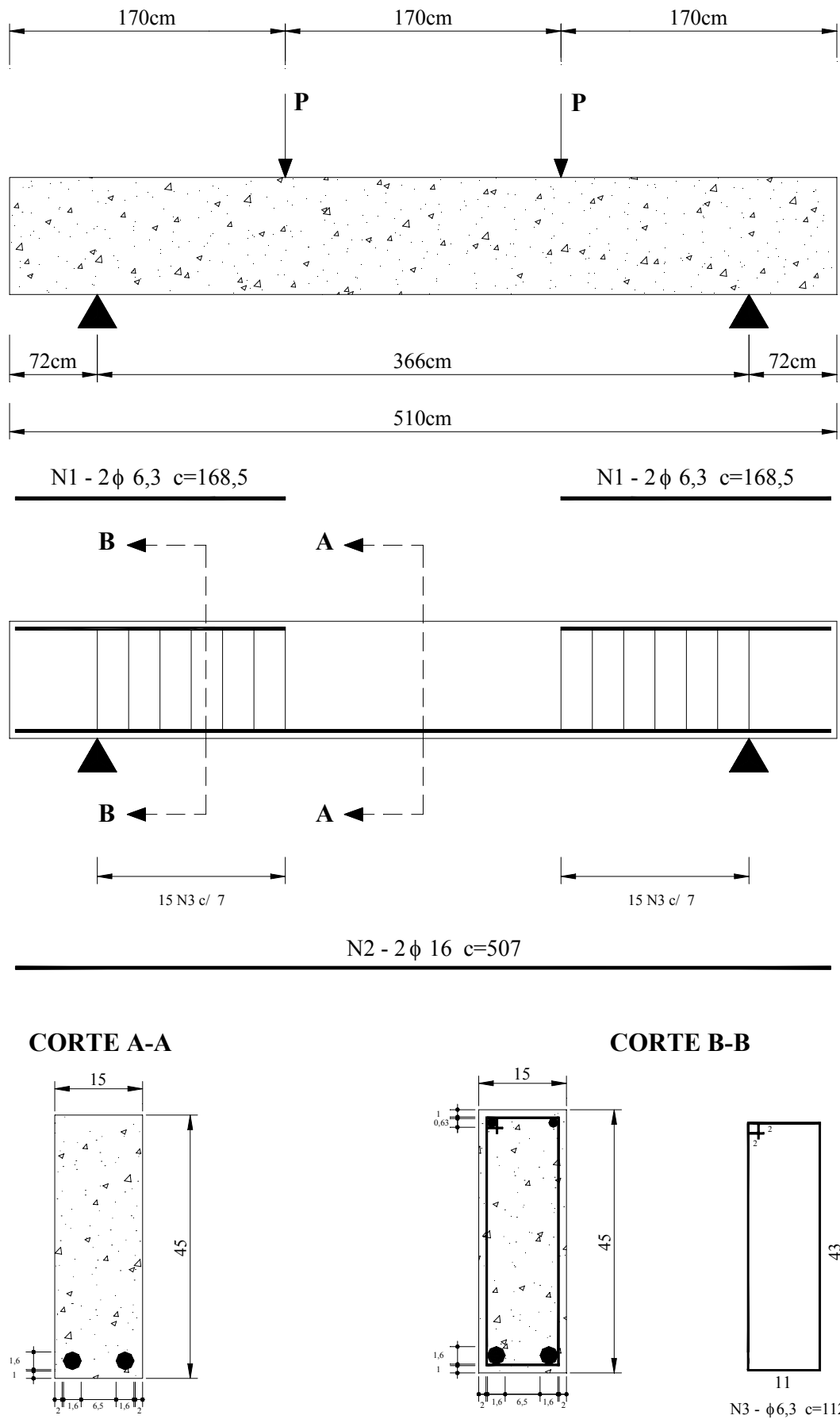
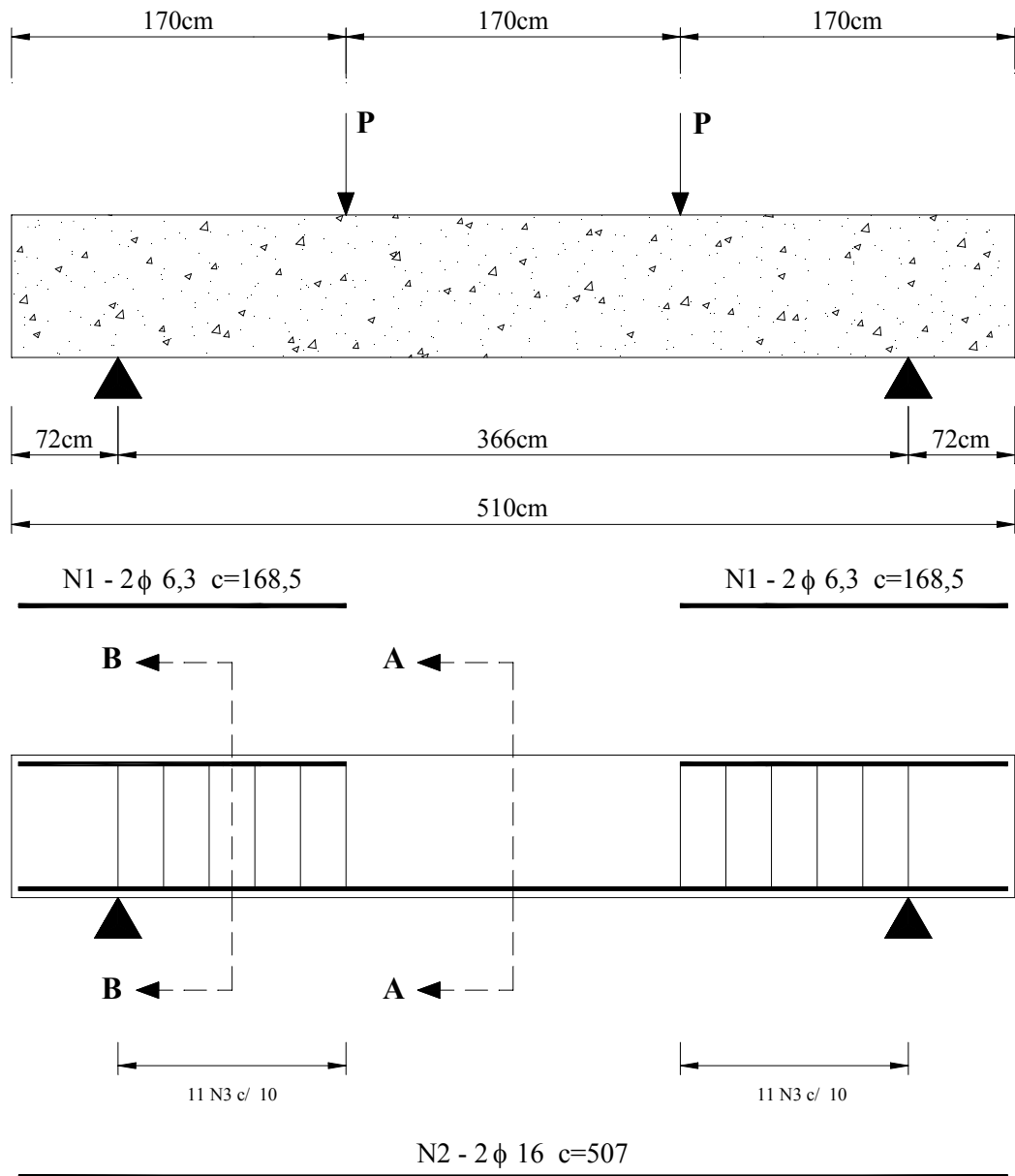
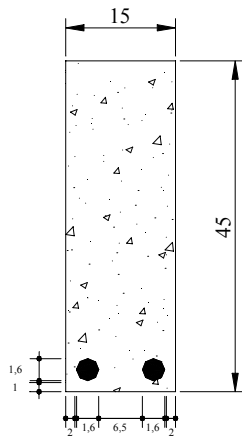


Figura 5.19 – Detalhamento da viga 06



**CORTE A-A**



**CORTE B-B**

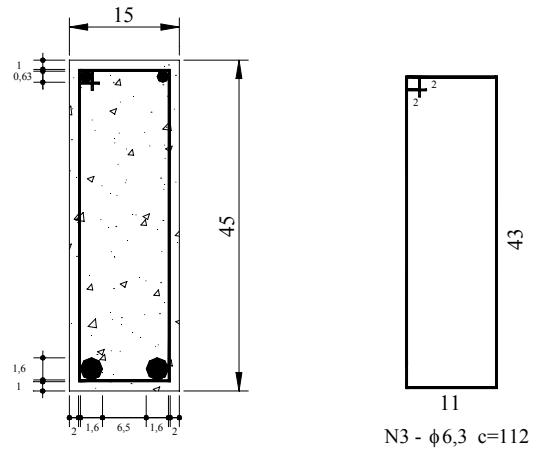


Figura 5.20 – Detalhamento da viga 07

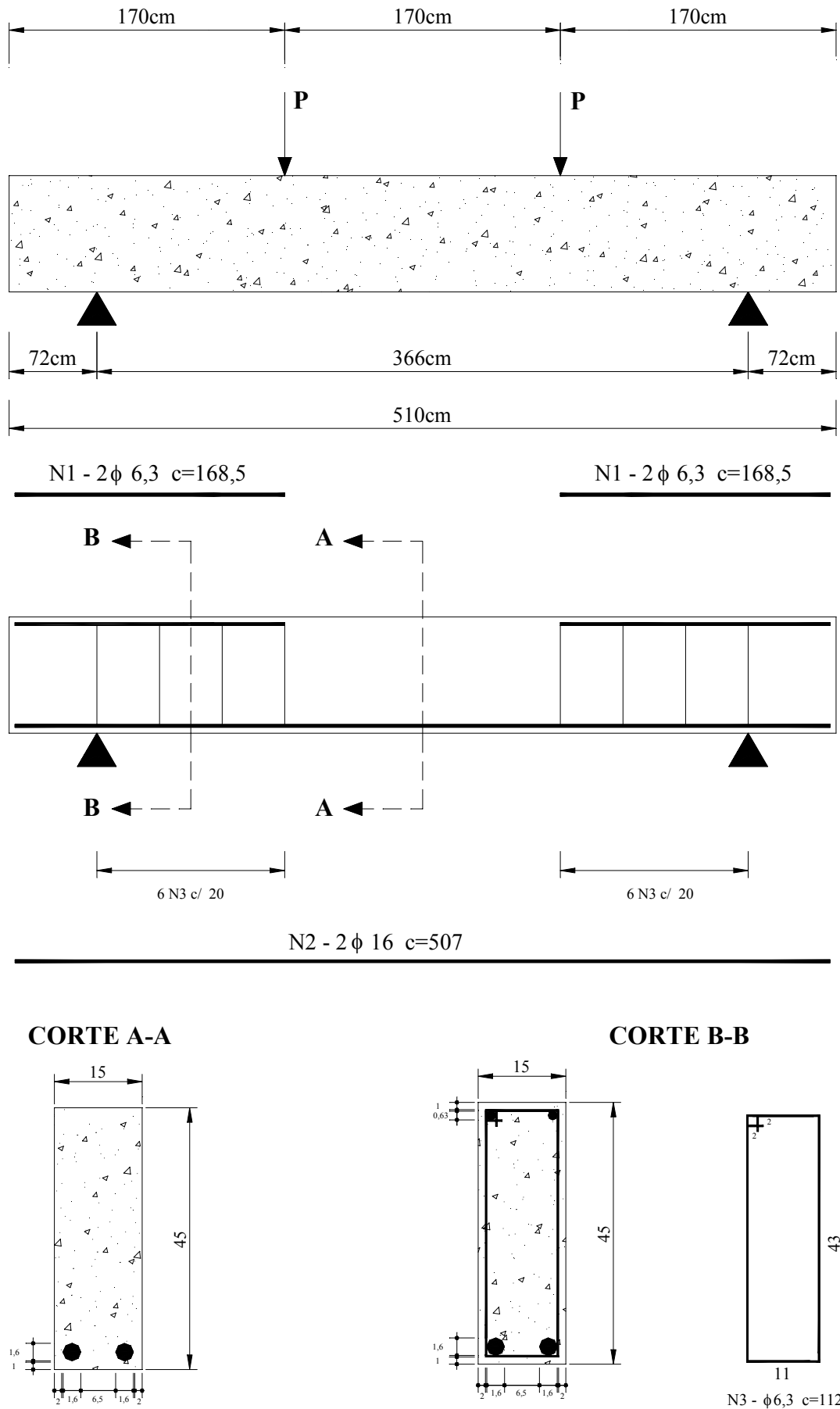


Figura 5.21 – Detalhamento da viga 08

As Figuras 5.22 e 5.23 ilustram respectivamente a evolução do índice de ductilidade global “ $\mu_d$ ” e local “ $\mu_c$ ” em relação à variação dos espaçamentos entre estribos.

Observa-se que os índices de ductilidade sofreram decréscimos em regimes de proporcionalidade distintos: a inclinação da curva é mais acentuada entre os valores de espaçamento  $s=7\text{cm}$  e  $s=10\text{cm}$  e menos acentuada entre  $s=10\text{cm}$  e  $s=20\text{cm}$ .

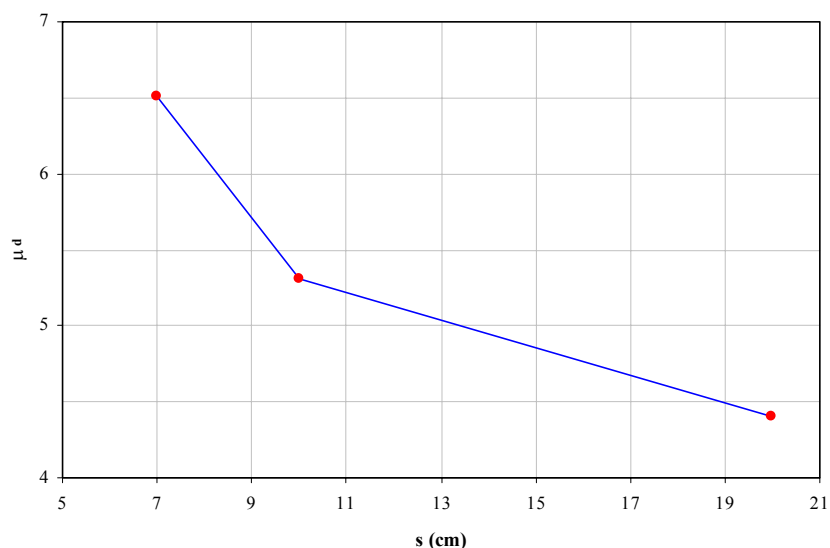


Figura 5.22 – Evolução de “ $\mu_d$ ” com o aumento dos espaçamentos entre estribos

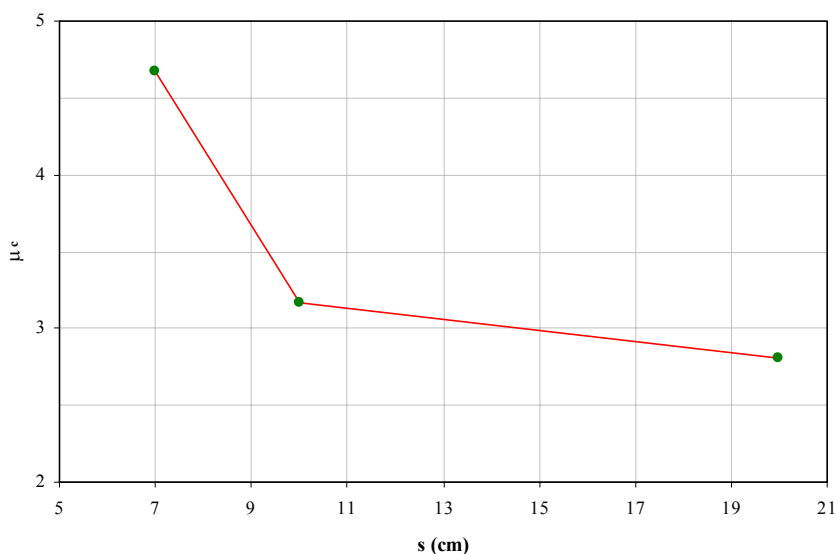


Figura 5.23 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com o aumento dos espaçamentos entre estribos

## 5.5 VARIAÇÃO DA BASE DO ELEMENTO ESTRUTURAL

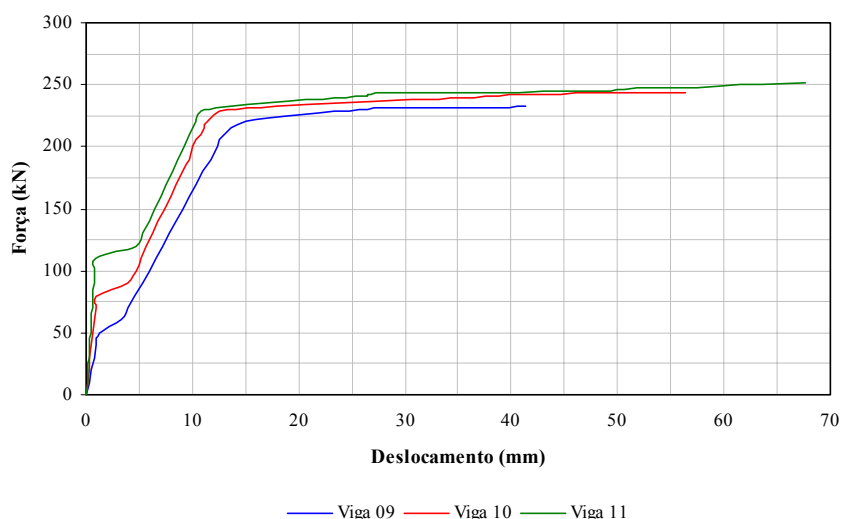
Nesta avaliação, trabalhou-se com concreto de “ $f_c$ ” igual a 50MPa e armaduras do tipo CA-50A, variando-se somente o valor da relação “ $b/h$ ”.

Assim, utilizaram-se vigas de seção transversal diversas de tal forma que as dimensões, valores de relação “ $b/h$ ” e valores numéricos obtidos nas simulações encontram-se relacionados na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8** – Valores numéricos obtidos na avaliação da ampliação da base do elemento estrutural

Vigas	$b/h$	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
09	0,33	41,41	13,88	2,98	2,12	0,80	2,65
10	0,55	56,34	13,21	4,26	2,44	0,72	3,39
11	1,00	67,72	11,14	6,08	3,03	0,65	4,66

As Figuras 5.24 e 5.25 apresentam respectivamente as curvas de evolução força – deslocamento e momento – curvatura para as três vigas analisadas onde observa-se um aumento substancial na rigidez proporcionalmente ao acréscimo nas dimensões da base das vigas.



**Figura 5.24** – Curvas força – deslocamento obtidas variando-se a base das vigas

Nas Figuras 5.26 e 5.27 encontram-se respectivamente as curvas de evolução de “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” em relação à variação da base do elemento estrutural. Observa-se que vigas com geometria quadrada apresentaram rigidez e forças de fissuração mais elevadas (Figuras 5.24 e 5.25).

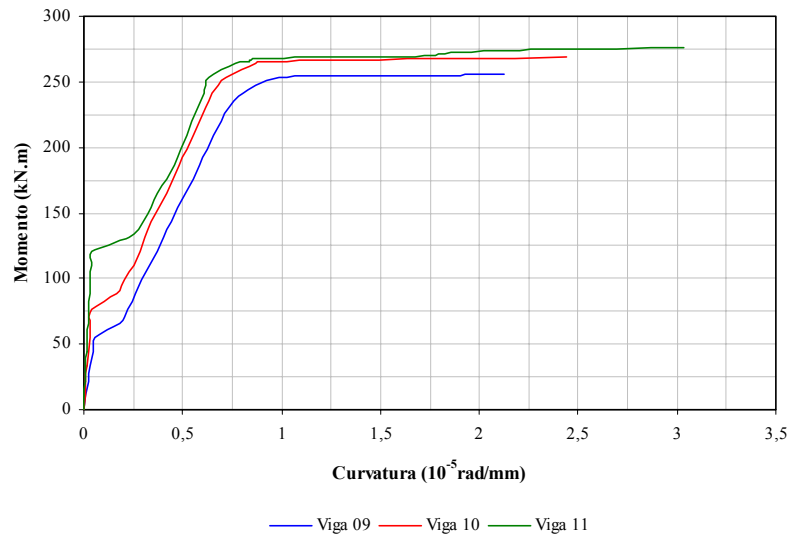


Figura 5.25 – Curvas momento – curvatura obtidas variando-se a base das vigas

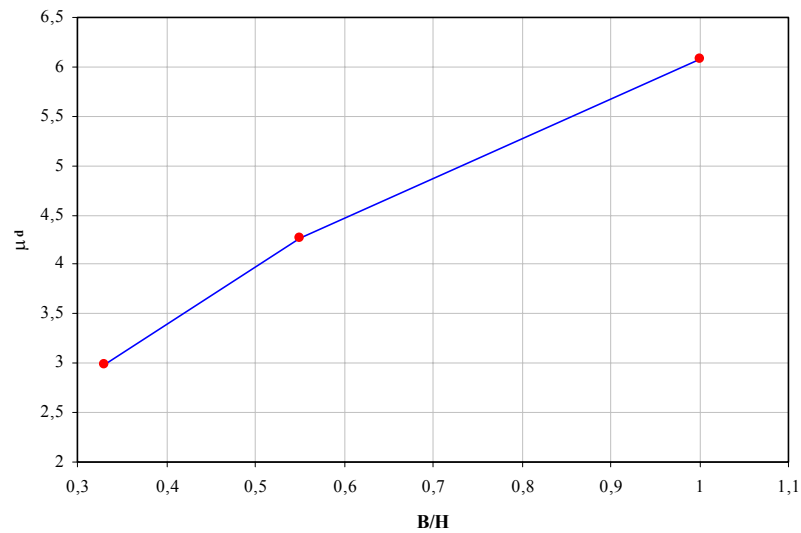


Figura 5.26 – Evolução de “ $\mu_d$ ” com o aumento da base das vigas

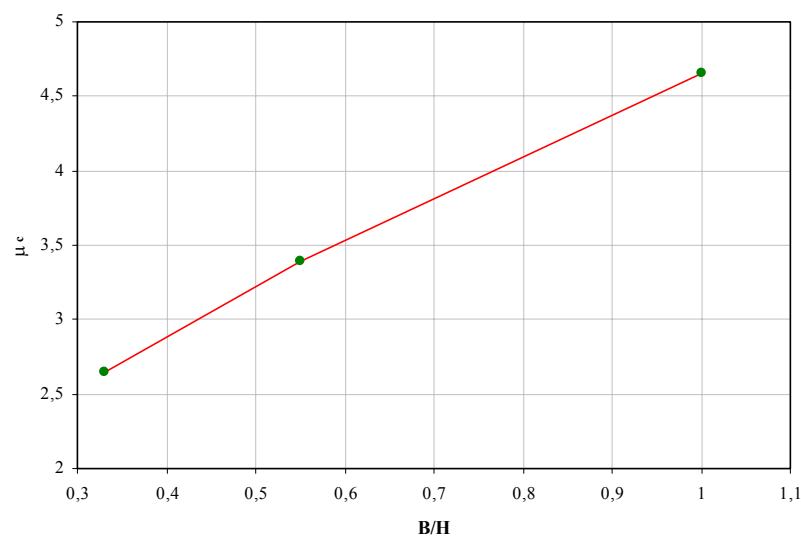


Figura 5.27 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com o aumento da base das vigas

Dentro deste contexto, ampliam-se também os valores dos deslocamentos e curvaturas últimos e, conseqüentemente, dos índices de ductilidade global e local.

A ampliação da dimensão da base do elemento estrutural acarreta em uma ascensão da linha neutra na direção do banzo comprimido.

Este fato pode ser explicado conforme a Figura 5.28 abaixo: a área “A” de concreto suporta a resultante das tensões de compressão “ $R_c$ ” oriundas da aplicação do carregamento sobre o elemento estrutural (situação I); com o aumento da base (situação II), ocorre uma diminuição da altura da linha neutra “x” a fim de se compatibilizar as áreas “A” para as duas situações, que são idênticas, uma vez que foram mantidas todas as demais características mecânicas dos materiais aço e concreto.

Com a ascensão da linha neutra, aumentam-se as deformações na armadura tracionada, diminui-se a relação “ $x/d$ ” e conseqüentemente amplia-se a ductilidade.

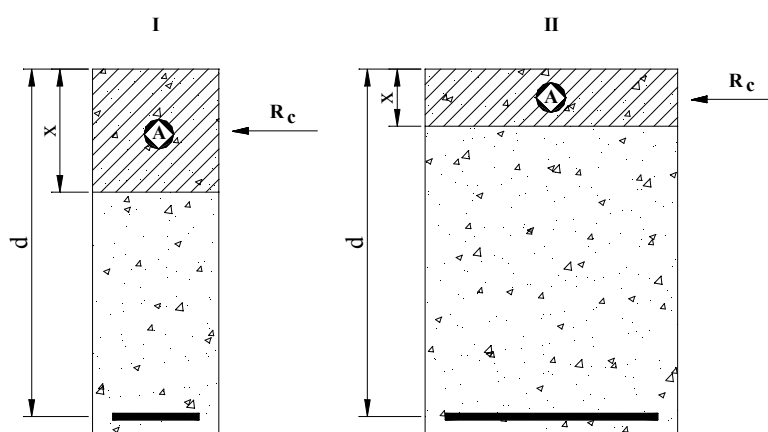


Figura 5.28 – Diminuição da relação “ $x/d$ ” com o aumento da base das vigas

O presente estudo retratou o processo de ruína em vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo I enfocando-se somente o aumento da rigidez do elemento estrutural.

Entretanto pesquisas realizadas como Borges (2002), cujos resultados foram apresentados no capítulo 2, apontam para o efeito de escala (relação entre o vão e a altura da viga) um parâmetro muito significativo que pode acarretar em variações na ductilidade de vigas de concreto armado.

Em vista disto, apresenta-se no item 5.6 um estudo detalhado a respeito da influência do efeito escala sobre a ductilidade global e local.

O detalhamento da viga 09 analisada é idêntico ao apresentado na Figura 5.8. As Figuras 5.29 e 5.30 mostram respectivamente o detalhamento das vigas 10 e 11.

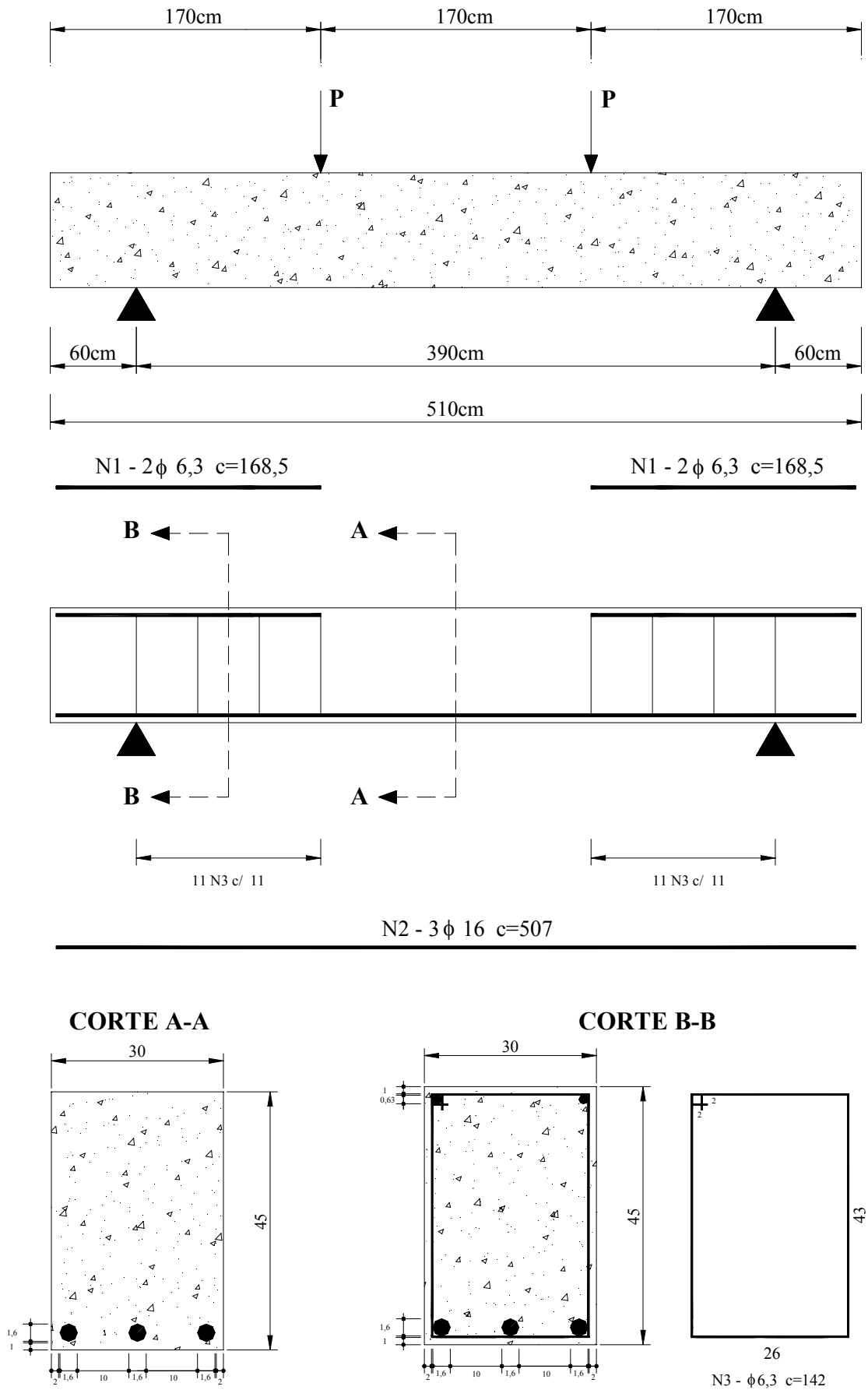


Figura 5.29 – Detalhamento da viga 10

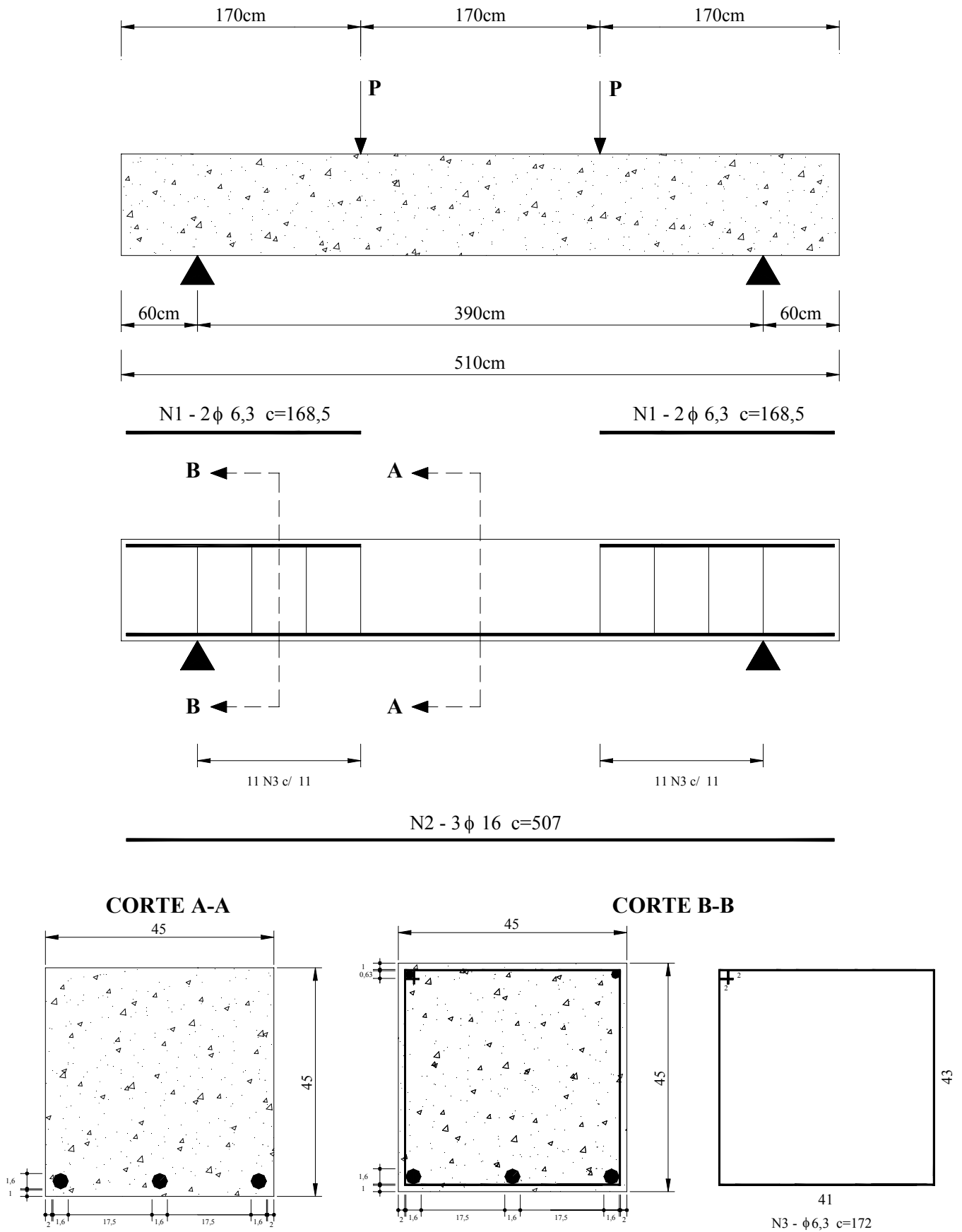


Figura 5.30 – Detalhamento da viga 11

## 5.6 EFEITO ESCALA LONGITUDINAL

Para a avaliação da influência do efeito escala sobre a ductilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo I, simularam-se três vigas com relações entre o vão e a altura distintas.

Tais vigas possuíam armaduras com as características mecânicas do aço CA-50A e concreto com um valor de resistência à compressão “ $f_c$ ” de 50MPa.

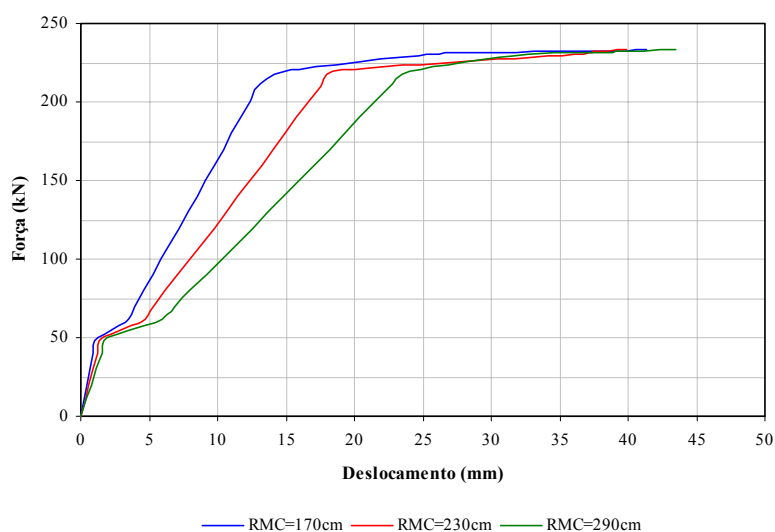
A variação do efeito escala nessas vigas foi denotada através do aumento da esbelteza da região de momento fletor constante (RMC), mantendo-se invariável a altura das vigas e aumentando-se o comprimento da RMC situada entre os dois pontos de carregamento.

A Tabela 5.9 apresenta os valores numéricos obtidos nas simulações das três vigas em questão.

**Tabela 5.9** – Valores numéricos obtidos na avaliação do efeito escala

Viga	H (cm)	L <sub>RMC</sub> (cm)	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
12	45	170	41,41	13,88	2,98	2,12	0,80	2,65
13	45	230	39,86	18,37	2,17	2,05	1,08	1,90
14	45	290	43,44	23,72	1,83	2,05	1,41	1,45

As Figuras 5.31 e 5.32 apresentam respectivamente as curvas força – deslocamento e momento – curvatura obtidas para as vigas 12, 13 e 14.



**Figura 5.31** – Curvas força – deslocamento obtidas na avaliação do efeito escala

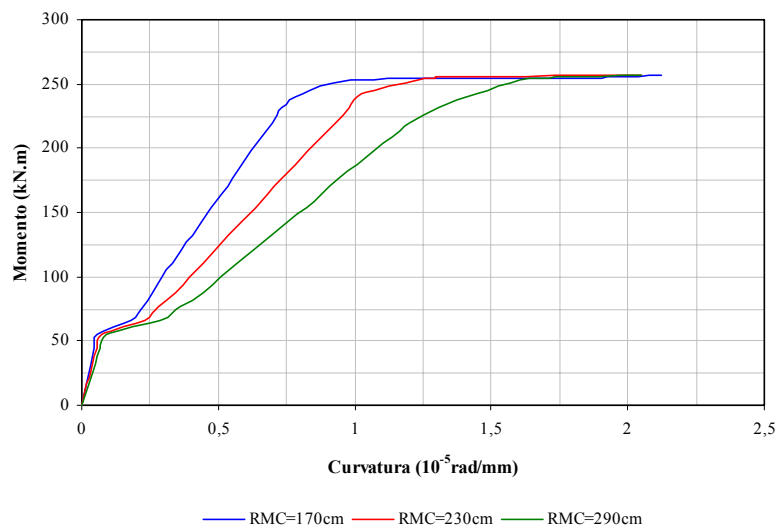


Figura 5.32 – Curvas momento – curvatura obtidas na avaliação do efeito escala

O detalhamento da viga 12 segue ao apresentado na Figura 5.8 ao passo que os detalhamentos das vigas 13 e 14 encontram-se respectivamente nas Figuras 5.33 e 5.34.

A partir dos resultados obtidos nas simulações nota-se que o aumento na esbeltez da **RMC** proporciona um comportamento mais frágil às vigas de concreto armado. Paralelamente a isto, percebe-se a partir das Figuras 5.31 e 5.32 que os deslocamentos e as curvaturas últimas permanecem praticamente invariantes, ampliando-se pois os deslocamentos e as curvaturas correspondentes ao início do escoamento das armaduras longitudinais de tração o que provoca quedas nos índices de ductilidade global e local.

Cabe ainda ressaltar que as forças de fissuração bem como as forças de ruína permanecem inalteradas com a ampliação do comprimento da **RMC**.

Toda simulação numérica quanto aos parâmetros que influem na ductilidade de vigas de concreto armado até aqui tratada, diz respeito à solicitações do tipo flexão simples tipo I.

Partindo-se da revisão bibliográfica realizada, nota-se que existe uma tendência das vigas possuírem maior ductilidade ao serem solicitadas à flexão simples tipo II em detrimento às solicitadas à flexão simples tipo I.

Em função disto, o capítulo posterior trata da obtenção dos índices de ductilidade global e local para vigas semelhantes do ponto de vista físico e mecânico às simuladas sob flexão simples tipo I, com a finalidade de detectar possíveis ganhos ou perdas de capacidade resistente por meio da modificação do tipo de solicitação.

Desta forma poder-se-ão detectar possíveis variações de comportamento estrutural ao se modificar os parâmetros que influenciam o processo de ruína de vigas de concreto armado, até agora estudados.

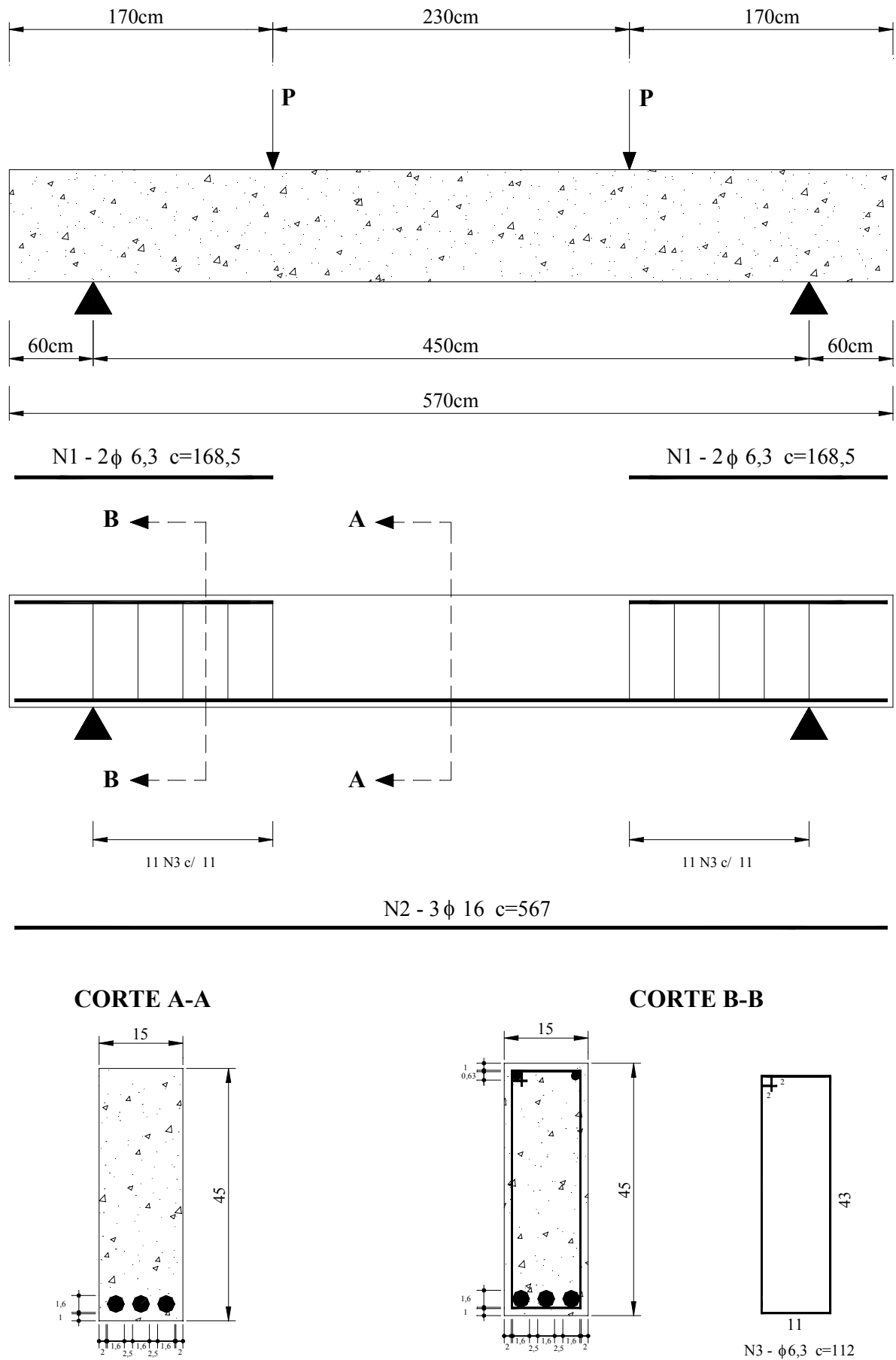


Figura 5.33 – Detalhamento da viga 13

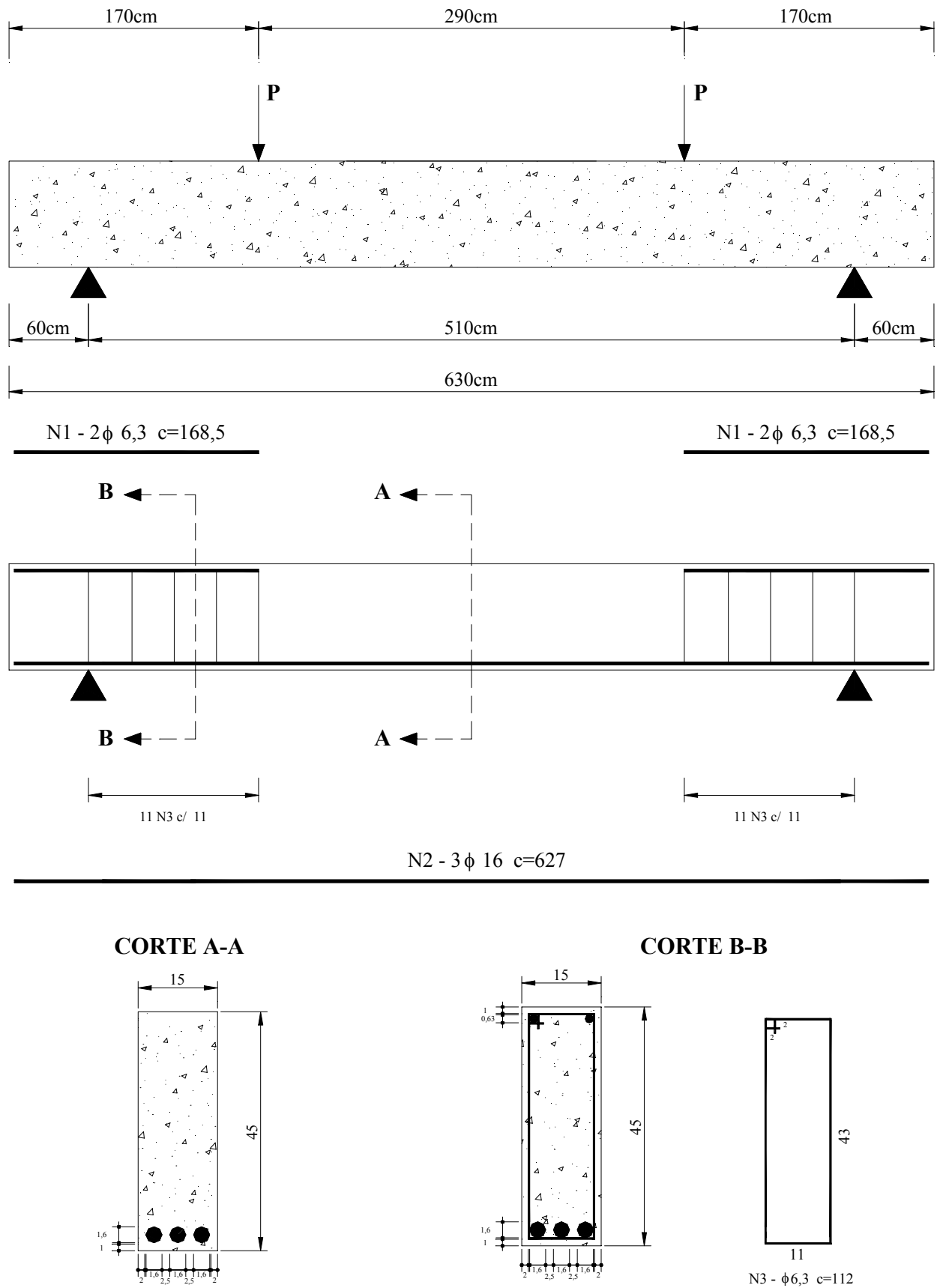


Figura 5.34 – Detalhamento da viga 14

## CAPÍTULO 6: ESTUDO DOS PARÂMETROS QUE AFETAM A DUCTILIDADE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO: FLEXÃO SIMPLES TIPO II

### 6.1 ESTUDO DA RUPTURA DO ELEMENTO ESTRUTURAL

Uma vez fundamentados os estudos acerca da influência dos parâmetros resistência à compressão do concreto, taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, tensão de escoamento das armaduras, espaçamento entre estribos, variação da base do elemento estrutural e efeito escala sobre a ductilidade global e local em vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo I, partiu-se para o estudo da influência de tais parâmetros sobre a ductilidade das vigas sujeitas à flexão simples tipo II.

O objetivo deste capítulo é de detectar possíveis ganhos ou perdas em termos de capacidade de deformação inelástica por parte do elemento estrutural no momento em que agir sobre o concreto tensões normais e de cisalhamento simultaneamente.

Vale ressaltar que no estudo anterior (flexão simples tipo I) na região central do vão, onde foram medidos os índices de ductilidade global e local, agiam somente tensões normais sobre o concreto, inexistindo tensões cisalhantes.

Primeiramente partiu-se para o estudo acerca da ruptura do elemento estrutural. Para tanto, realizaram-se simulações numéricas em três vigas de concreto armado, sendo duas delas sujeitas à flexão simples tipo I e outra sujeita à flexão simples tipo II.

Tais vigas possuíam as mesmas características físicas e mecânicas a saber: resistência à compressão do concreto de 40MPa e armaduras com tensão de escoamento de 500MPa (aço CA 50-A); o detalhamento da estática das vigas encontra-se na Figura 6.1.

A Tabela 6.1 apresenta os valores das forças de ruptura para cada viga bem como do valor da relação “ $a/d$ ” utilizada, sendo “ $a$ ” a distância da força aplicada ao apoio e “ $d$ ” a altura útil ou efetiva da peça.

**Tabela 6.1** – Valores de força de ruptura obtidos

Viga	Tipo de Flexão	$a/d$	Força de Ruptura (kN)
15	Simple tipo I	2,77	45,5
16	Simple tipo I	2,31	55
17	Simple tipo II	4,84	57

A Figura 6.2 mostra as curvas força – deslocamento obtidas nas simulações.

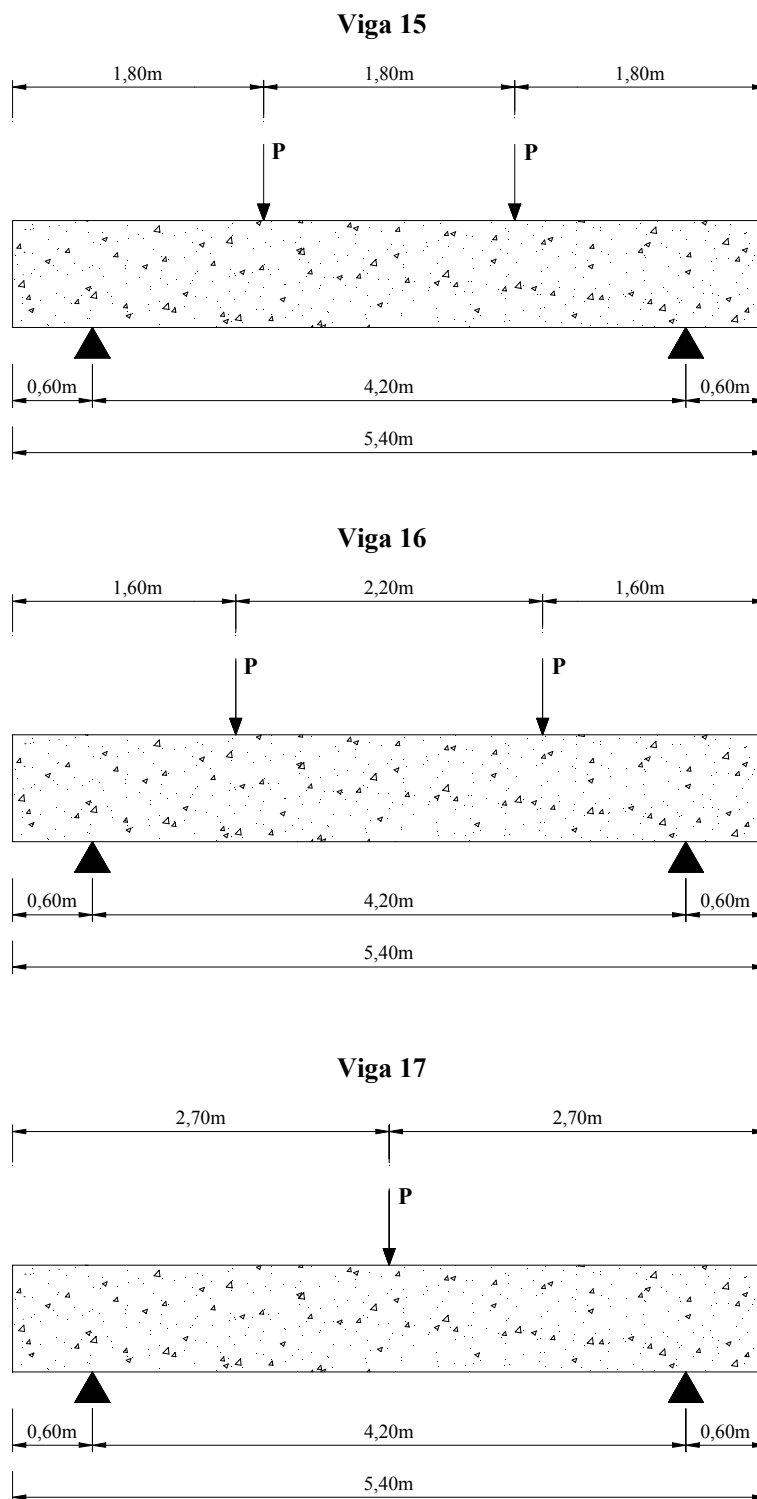


Figura 6.1 – Posição relativa das forças para cada viga

Vale ressaltar que todas as vigas possuíram estribos de diâmetro igual a 6,3mm espaçados entre si em 10cm. As armaduras longitudinais de compressão foram dotadas de duas barras de diâmetro igual a 6,3mm Nas armaduras longitudinais de tração utilizaram-se duas barras de diâmetro igual a 12,5mm.

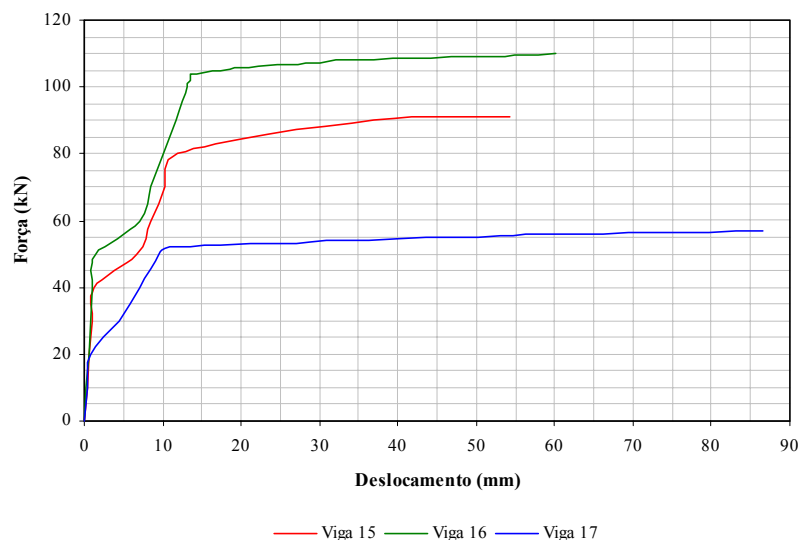


Figura 6.2 – Curvas força – deslocamento obtidas no estudo de ruptura das vigas

É interessante notar que a viga 17 rompeu com força inferior com relação às duas outras vigas solicitadas à flexão simples tipo I, porém os momentos de ruptura obtidos foram próximos para os dois casos de solicitação. Em outras palavras, necessita-se aplicar uma força maior no caso de flexão simples tipo I para obter o mesmo momento de ruptura atuante no caso da flexão simples tipo II.

O trabalho de Fernandes (1992) mostra que a tensão de cisalhamento medida em estribos situados na mesma posição em vigas semelhantes, do ponto de vista físico e mecânico, e a tensão normal de tração nas armaduras longitudinais obtida na mesma seção do elemento estrutural, foi maior para o caso de solicitação à flexão simples tipo II em relação à solicitação à flexão simples tipo I para um mesmo valor de esforço cortante atuante e, desta forma, explica-se o motivo pelo qual a viga 17 rompeu com força inferior.

Outra observação proposta por Fernandes (1992) foi que a tensão de cisalhamento nos estribos e a tensão normal nas armaduras longitudinais de tração em uma seção arbitrária do elemento estrutural estão diretamente relacionadas à relação “ $a/d$ ”.

Sobre as vigas que apresentarem uma elevação de tal relação atuarão necessariamente maiores tensões de cisalhamento nos estribos e maiores tensões normais de tração nas armaduras longitudinais.

## 6.2 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO

Apresenta-se neste item o estudo da influência da resistência à compressão do concreto sobre a ductilidade de vigas de concreto armado solicitadas por flexão simples tipo II.

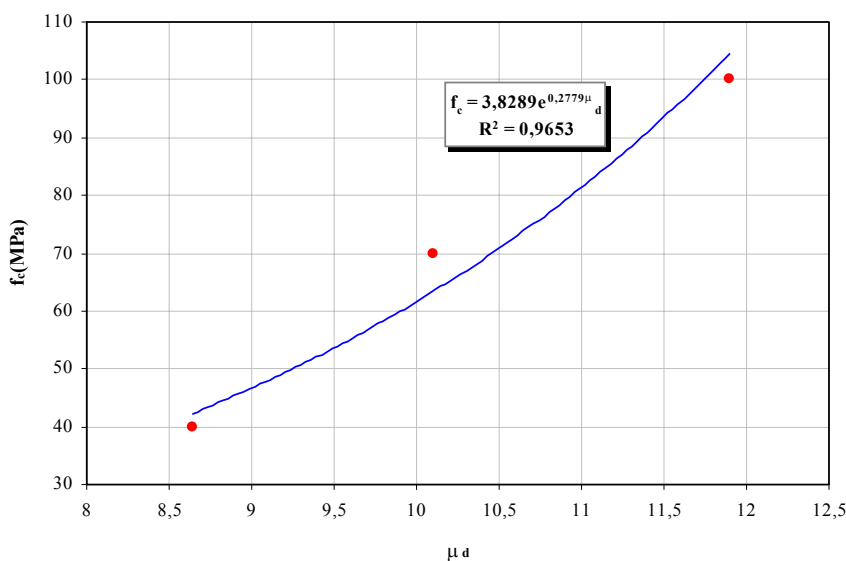
Nessas simulações, utilizaram-se para as armaduras as características mecânicas do aço CA-50A variando-se somente o valor de “ $f_c$ ” de 40MPa, 70MPa e 100MPa, mantendo-se constante todas as demais características físicas e mecânicas das vigas analisadas. O detalhamento dessas vigas encontra-se na Figura 6.4.

A Tabela 6.2 relata os resultados obtidos para as simulações em questão.

**Tabela 6.2** – Valores numéricos obtidos no estudo da influência de “ $f_c$ ” sobre a ductilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples tipo II

$f_c$ (MPa)	$\rho/\rho_b$	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
40	0,14	86,47	10,01	8,64	2,18	0,42	5,19
70	0,07	103,31	10,23	10,10	4,11	0,43	9,56
100	0,04	125,66	10,56	11,90	4,79	0,42	11,40

As Figuras 6.3 e 6.5 mostram respectivamente a evolução dos índices de ductilidade global e local com relação à variação da resistência à compressão do concreto ao passo que as Figuras 6.6 e 6.7 apresentam respectivamente a evolução de “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” no que diz respeito à variação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”.



**Figura 6.3** – Evolução de “ $\mu_d$ ” com a ampliação de “ $f_c$ ”

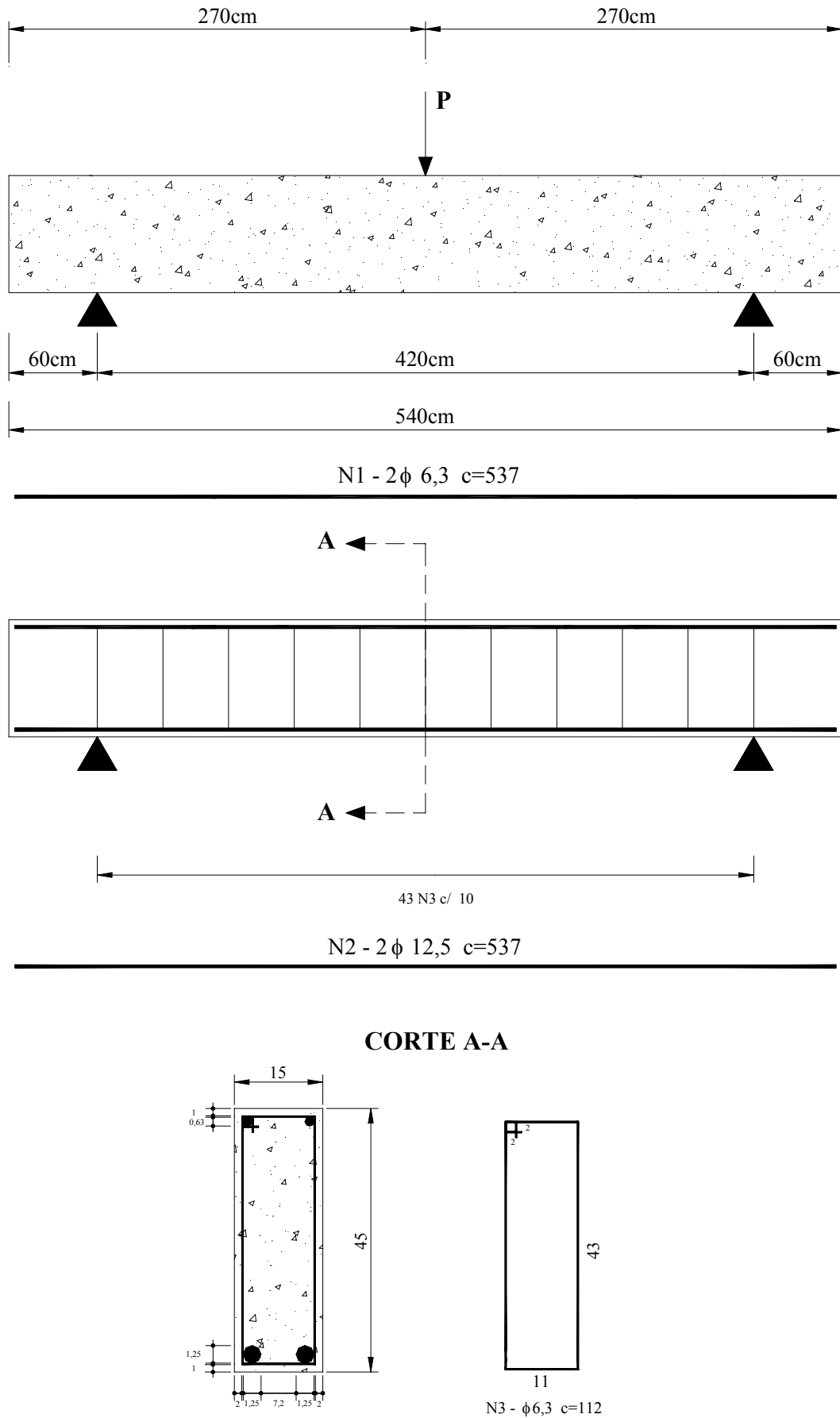


Figura 6.4 – Detalhamento das vigas simuladas submetidas à flexão simples tipo II

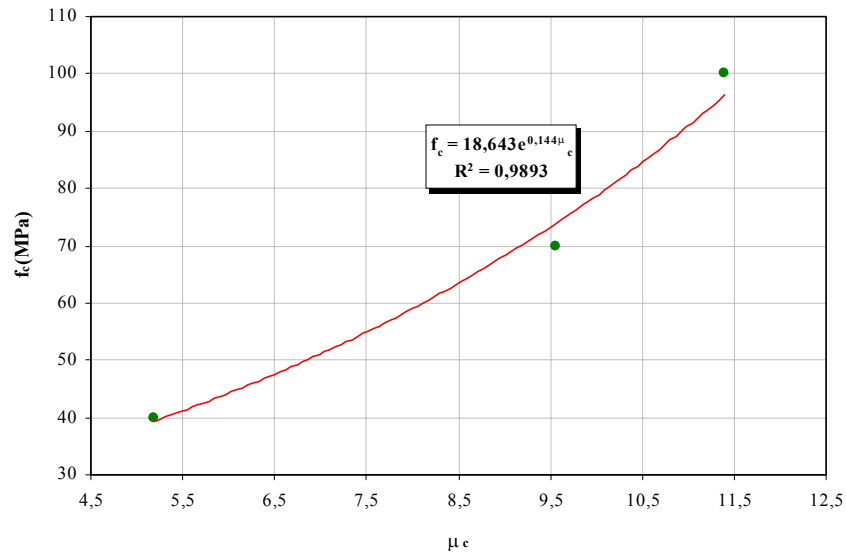


Figura 6.5 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com a ampliação de “ $f_c$ ”

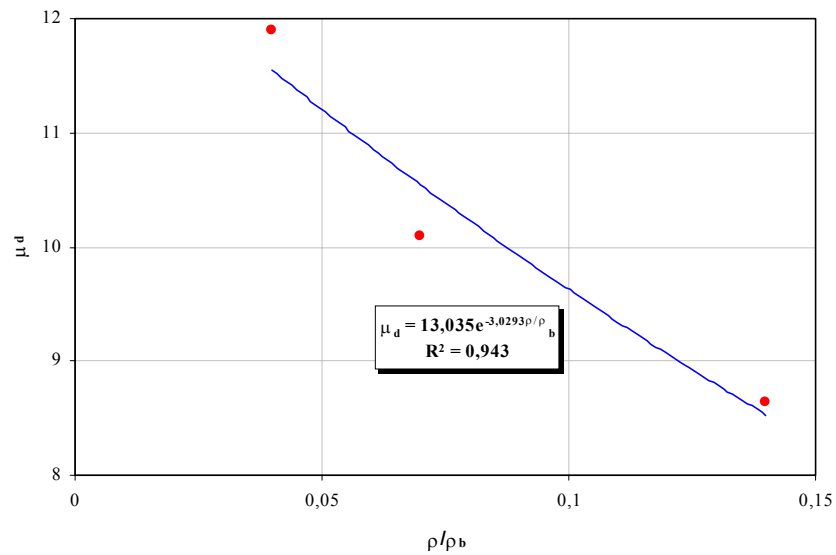


Figura 6.6 – Evolução de “ $\mu_d$ ” em função do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”

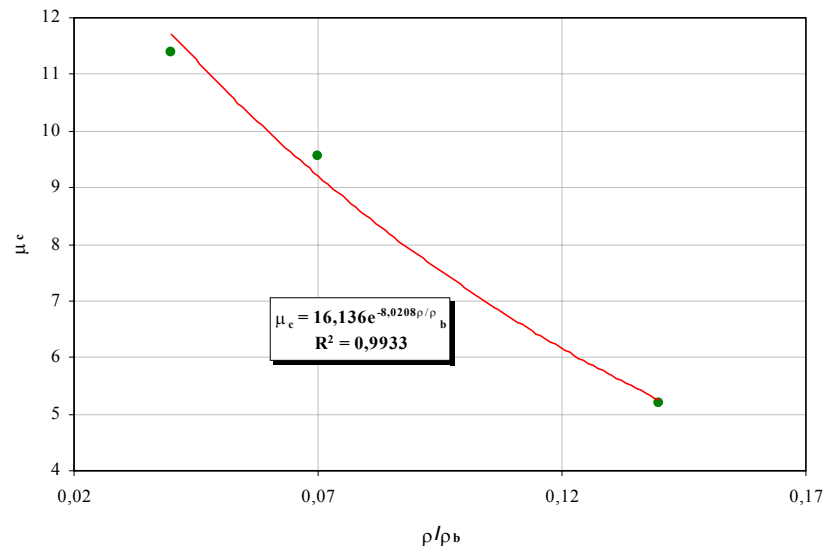


Figura 6.7 – Evolução de “ $\mu_c$ ” em função do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”

Observa-se neste estudo a mesma linha de tendência detectada no estudo de variação da resistência à compressão do concreto efetuado no capítulo 5: segundo as Figuras 6.3 e 6.5 percebe-se que a ampliação de “ $f_c$ ” provoca ampliações aos índices de ductilidade, sendo que todo o fenômeno de ganho de capacidade de deformação inelástica é regido pela diminuição do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”.

Entretanto os índices “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” aqui obtidos mostraram-se ligeiramente superiores aos obtidos para as vigas numericamente simuladas para a situação de flexão simples tipo I.

Cabe lembrar que em ambas situações de sollicitação, flexão simples tipo I e tipo II, o elemento estrutural possuiu características físicas e mecânicas semelhantes, diferindo-se apenas quanto ao comprimento do vão (6% maior para o caso de flexão simples tipo II).

Posteriormente, partiu-se para a quantificação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração “ $\rho$ ”, agora chamada de “ $\rho^*$ ”, a fim de que fosse mantida a relação “ $\rho/\rho_b$ ” em valor igual a 0,14 que fora obtida para a viga com “ $f_c$ ” igual a 40MPa.

Na Tabela 6.3 encontram-se os valores de “ $\rho^*$ ” obtidos, bem como a área da seção transversal das armaduras longitudinais de tração “ $A_s$ ” correspondentes.

**Tabela 6.3** – Valores obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

$f_c$ (MPa)	$\rho$ (%)	$\rho_b$ (%)	$\rho^*$ (%)	$\rho^*/\rho_b$	$A_s$
40	0,36	2,57	0,36	0,14	2 $\phi$ 12,5mm
70	0,36	5,14	0,73	0,14	4 $\phi$ 12,5mm
100	0,36	9,00	1,28	0,14	7 $\phi$ 12,5mm

A Tabela 6.4 apresenta os resultados obtidos para as simulações das vigas com “ $f_c$ ” igual a 70MPa e “ $A_s$ ” igual a 4 $\phi$  12,5mm e “ $f_c$ ” igual a 100MPa com “ $A_s$ ” igual a 7 $\phi$  12,5mm.

**Tabela 6.4** – Valores numéricos obtidos mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

$f_c$ (MPa)	$\rho^*/\rho_b$	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
40	0,14	86,47	10,01	8,64	2,18	0,42	5,19
70	0,14	70,94	12,05	5,89	2,04	0,49	4,16
100	0,14	52,06	11,40	4,57	1,89	0,49	3,86

As Figuras 6.8 e 6.9 apresentam respectivamente a evolução dos índices de ductilidade global e local em relação à ampliação da resistência à compressão do concreto para as simulações em questão.

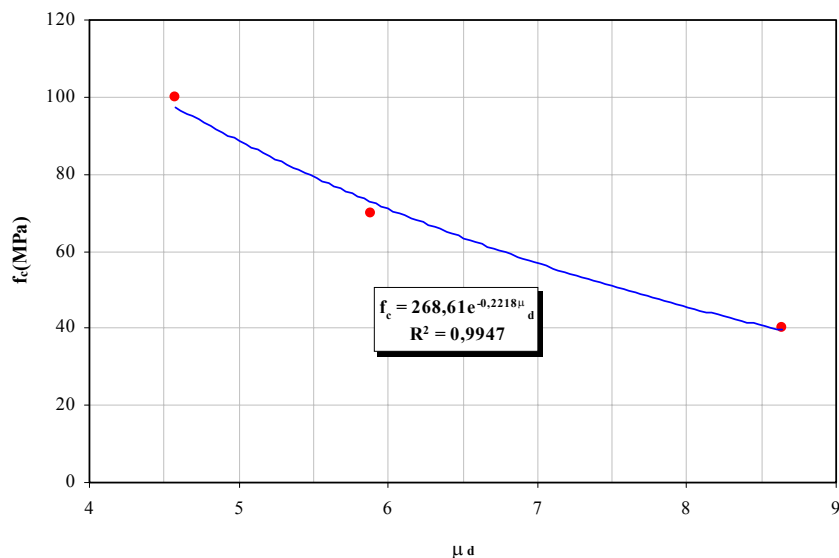


Figura 6.8 – Variação de “ $\mu_d$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

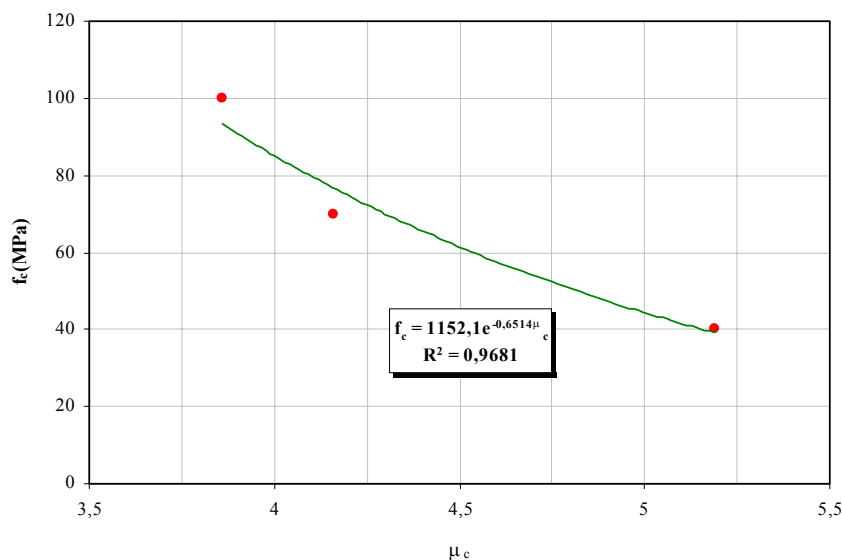


Figura 6.9 – Variação de “ $\mu_c$ ” com o acréscimo de “ $f_c$ ” mantendo-se constante a relação “ $\rho^*/\rho_b$ ”

Analisando as Figuras 6.8 e 6.9 acima expostas, nota-se que para o caso em que manteve-se constante a relação entre a taxa de armadura longitudinal de tração e a taxa de armadura longitudinal de tração balanceada, o aumento da resistência à compressão do concreto ocasionou decréscimos aos índices de ductilidade global e local.

### 6.3 TAXA GEOMÉTRICA DE ARMADURA LONGITUDINAL DE TRAÇÃO

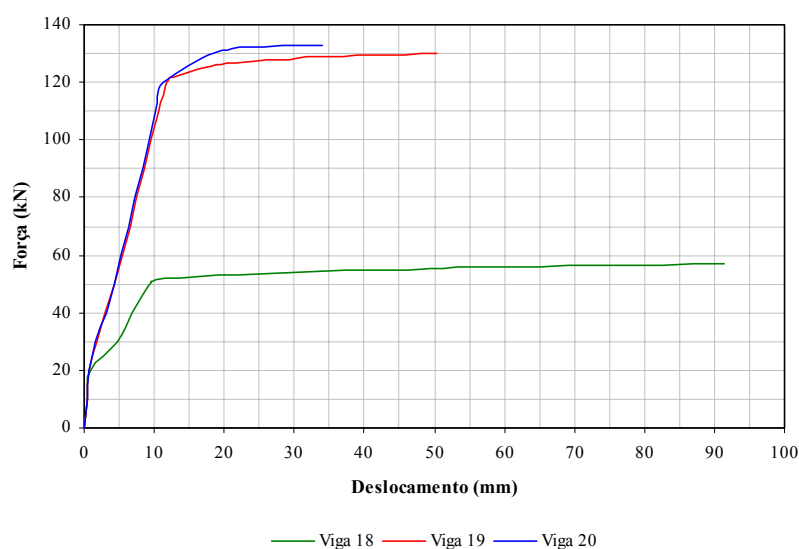
Neste estudo variou-se somente a taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, mantendo-se constante todas as demais propriedades físicas e mecânicas das vigas de concreto armado. Para isso, utilizou-se concreto com resistência à compressão de 50MPa e armaduras do tipo CA-50A.

A Tabela 6.5 enumera as vigas analisadas com os respectivos índices de ductilidade numericamente obtidos. O detalhamento da viga 18 é idêntico ao apresentado na Figura 6.4 ao passo que o detalhamento das vigas 19 e 20 encontram-se respectivamente apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12.

**Tabela 6.5** – Valores numéricos obtidos no estudo de variação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração

Vigas	$\rho$ (%)	$\rho_b$ (%)	$\rho/\rho_b$	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
18	0,36	3,48	0,10	91,30	9,66	9,45	2,82	0,40	7,05
19	0,89	3,51	0,25	50,31	11,90	4,23	2,32	0,50	4,64
20	0,93	3,57	0,26	33,93	11,72	2,90	1,97	0,45	4,38

A Figura 6.10 mostra as curvas força – deslocamento das três vigas em questão.



**Figura 6.10** – Curvas força – deslocamento obtidas no estudo da variação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração

A partir da Tabela 6.5 percebe-se que o fenômeno de aumento de fragilidade por parte das vigas fora acompanhado pela ampliação do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ” que vem a ser o efeito causador da diminuição de capacidade resistente.





Nas Figuras 6.13 e 6.14 estão representadas as evoluções dos índices de ductilidade global e local em função do parâmetro “ $\rho/\rho_b$ ”.

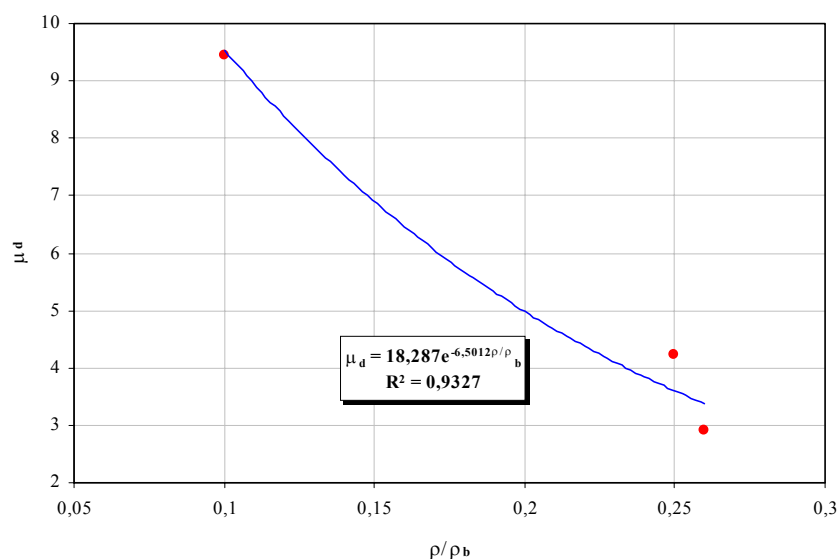


Figura 6.13 – Evolução de “ $\mu_d$ ” com relação à variação de “ $\rho/\rho_b$ ”

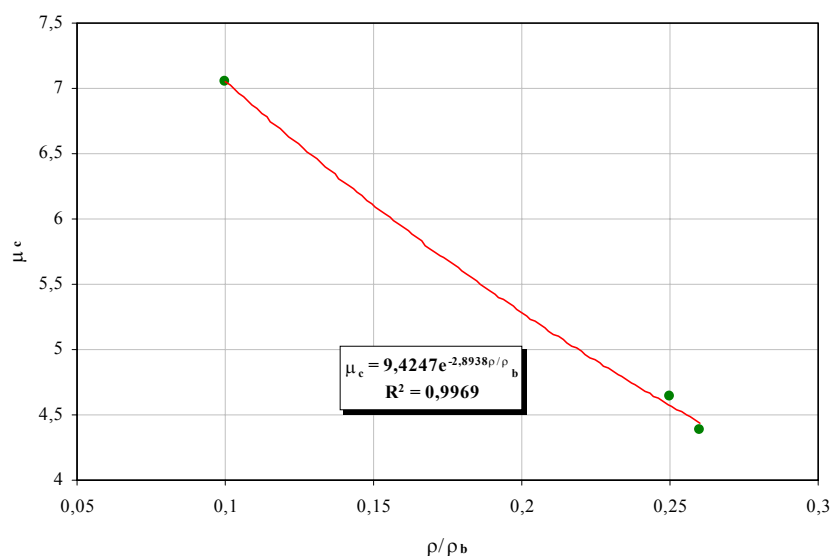


Figura 6.14 – Evolução de “ $\mu_c$ ” com relação à variação de “ $\rho/\rho_b$ ”

A partir das Figuras 6.13 e 6.14 acima vê-se um comportamento de queda do tipo exponencial dos índices de ductilidade para com a relação entre taxas geométricas de armadura longitudinal de tração.

Comparando-se os índices “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” obtidos nos estudos de flexão simples tipo I e tipo II, salienta-se que no presente estudo, analogamente ao estudo da variação da resistência à compressão do concreto, tais índices apresentam-se com valores mais elevados.

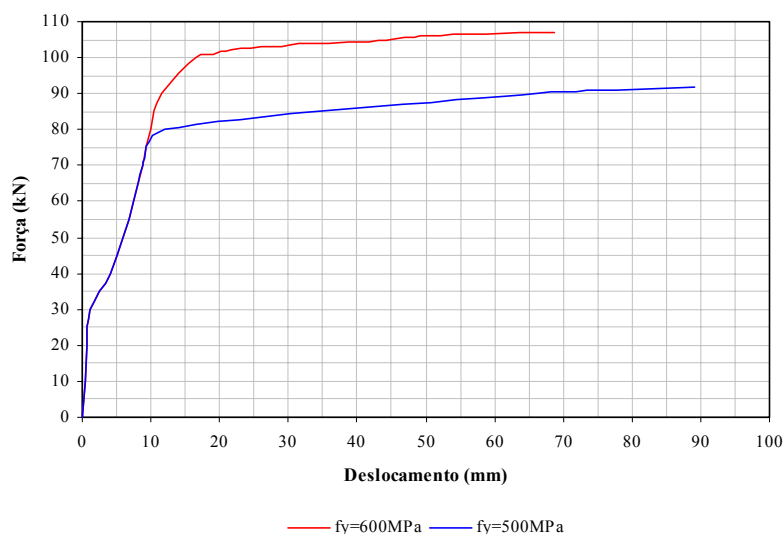
## 6.4 TENSÃO DE ESCOAMENTO DAS ARMADURAS

Este estudo trata da variação da tensão de escoamento das armaduras, mediante a utilização dos aços do tipo CA-50A e CA-60B para vigas de concreto armado submetidas à flexão simples tipo II. Simularam-se duas vigas, com “ $f_c$ ” igual a 70MPa para ambas, cujos resultados numéricos alcançados encontram-se listados na Tabela 6.6. A Figura 6.16 mostra o detalhamento das vigas analisadas.

**Tabela 6.6** – Valores numéricos obtidos na avaliação da influência da tensão de escoamento das armaduras

Viga	$f_y$ (MPa)	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
21	500	89,05	10,00	8,91	2,89	0,42	6,88
22	600	68,69	12,65	5,51	2,27	0,58	3,91

A Figura 6.15 apresenta as curvas força – deslocamento obtidas para as duas vigas em questão.



**Figura 6.15** – Curvas força – deslocamento obtidas na avaliação da influência da tensão de escoamento das armaduras

Ressalta-se que não há nenhuma mudança comportamental quanto às observações já proferidas anteriormente no estudo da influência de “ $f_y$ ” para o caso de solicitação à flexão simples tipo I em que detectou-se uma diminuição de capacidade resistente para vigas com armaduras dotadas de valores de tensão de escoamento mais elevados. Coloca-se aqui no entanto que os índices de ductilidade calculados para as vigas submetidas à flexão simples tipo II mostraram-se mais elevados.



## 6.5 ESPAÇAMENTO ENTRE ESTRIBOS

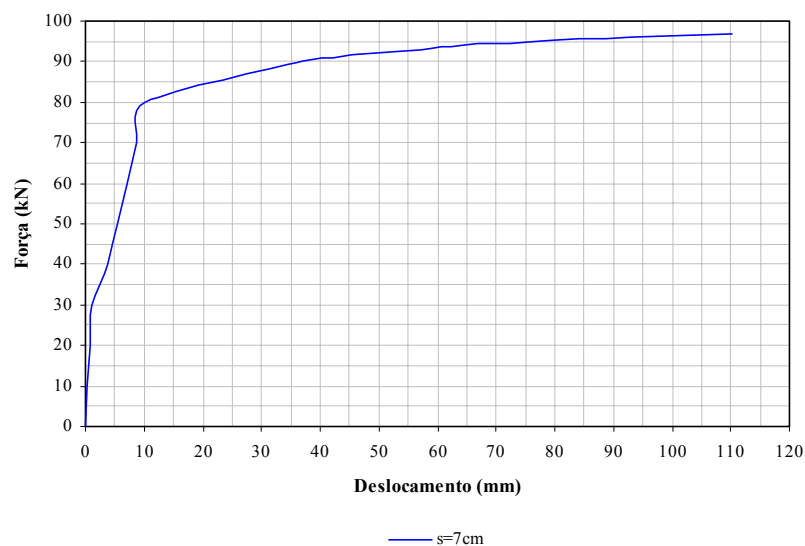
Nesta avaliação variou-se somente o espaçamento entre estribos, nos valores de 7cm, 10cm e 20cm, mantendo-se constante todas as demais características físicas e mecânicas, trabalhando-se com armaduras do tipo CA-50A e resistência à compressão do concreto no valor de 70MPa.

A Tabela 6.7 apresenta os valores numéricos relativos aos índices de ductilidade global e local obtidos nas simulações.

**Tabela 6.7** – Valores numéricos obtidos na avaliação da influência do espaçamento entre estribos

Viga	s (cm)	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
23	7	110,22	8,33	13,23	3,69	0,37	9,97
24	10	89,05	10,00	8,91	2,89	0,42	6,88
25	20	65,99	9,01	7,32	2,10	0,38	5,53

As Figuras 6.17, 6.18 e 6.19 mostram as curvas força – deslocamento obtidas respectivamente para as vigas 23, 24 e 25.



**Figura 6.17** – Curva força – deslocamento obtida para a viga 23

Percebe-se pelo exposto na Tabela 6.7 uma maior capacidade de deformação inelástica para as vigas com maior confinamento provocado pela diminuição do espaçamento entre estribos, linha de tendência esta que já havia sido obtida para o caso de flexão simples tipo I, porém com índices de ductilidade inferiores aos aqui calculados.

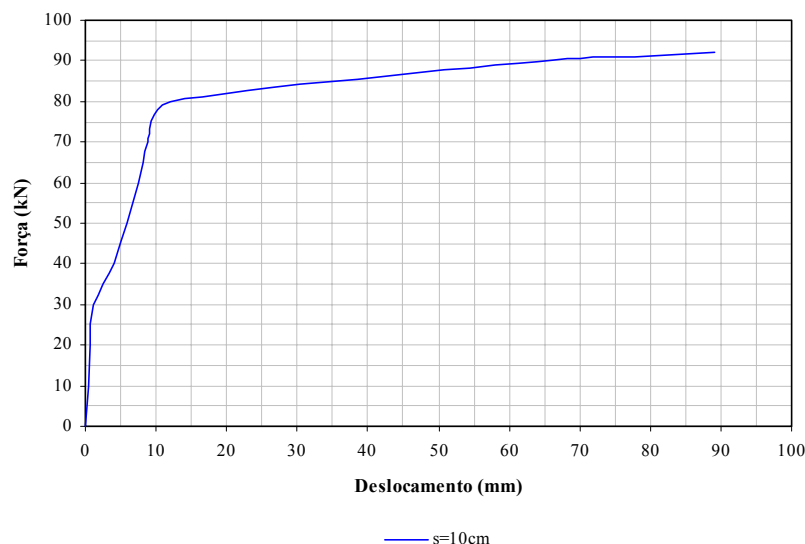


Figura 6.18 – Curva força – deslocamento obtida para a viga 24

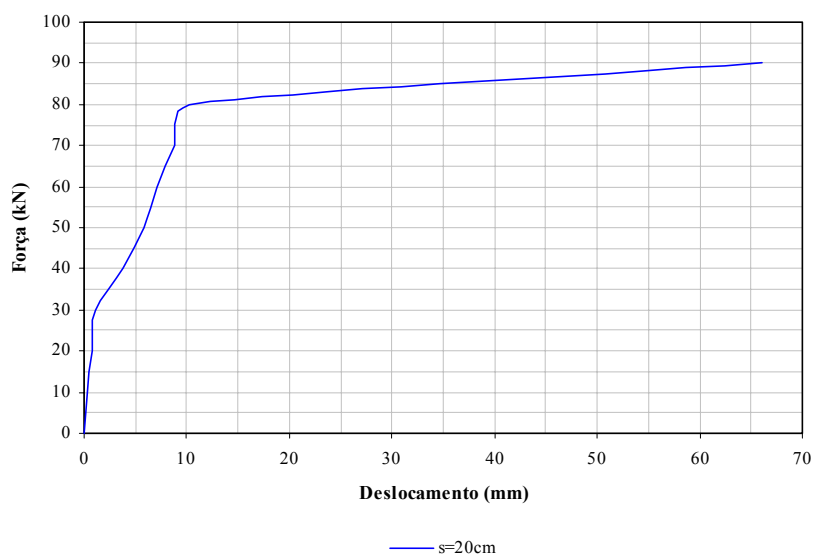
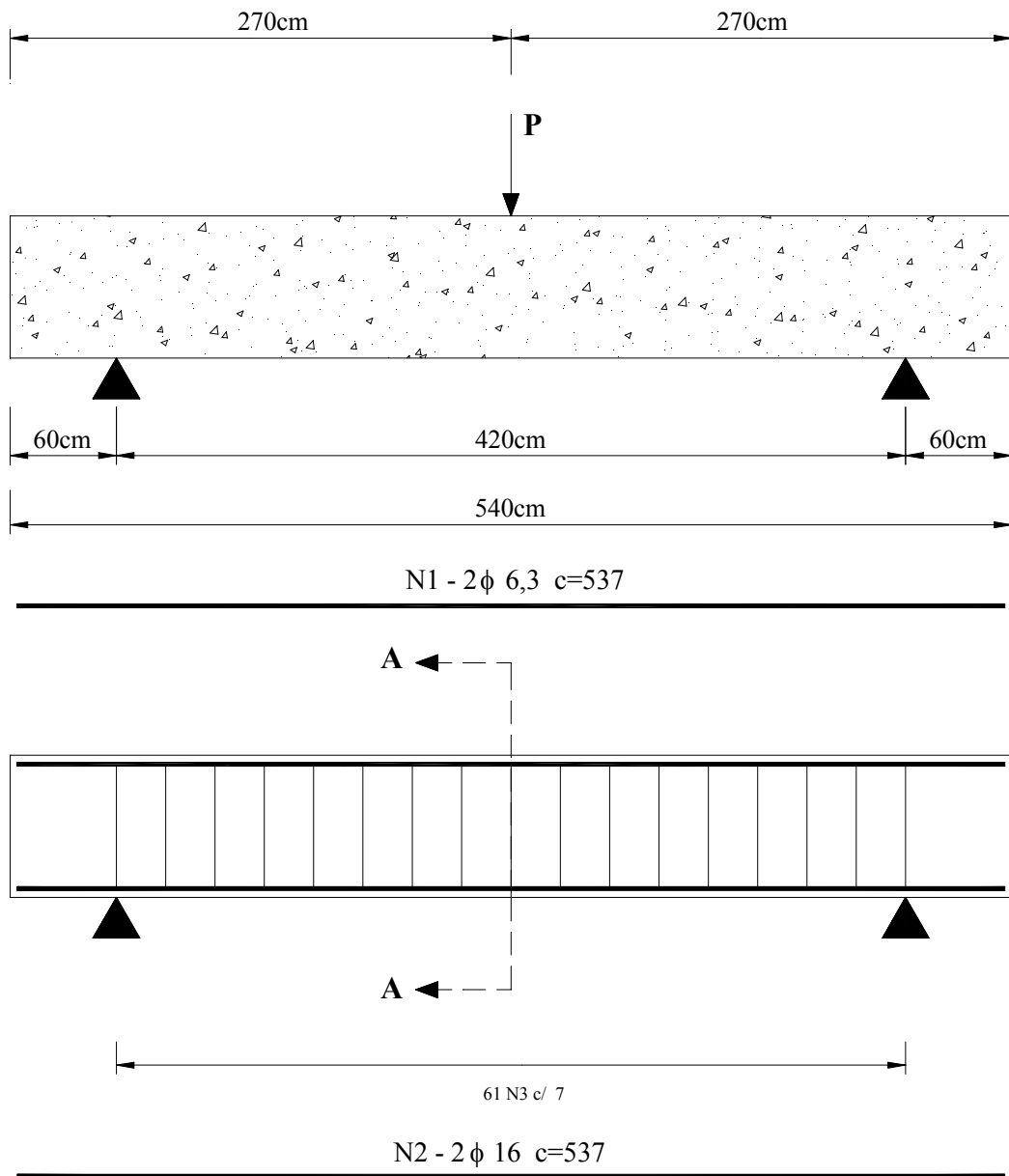


Figura 6.19 – Curva força – deslocamento obtida para a viga 25

As Figuras 6.20 e 6.21 ilustram respectivamente o detalhamento das vigas 23 e 25. O detalhamento da viga 24 é idêntico ao apresentado na Figura 6.16.

Os estudos até agora efetuados com relação às vigas de concreto armado sob solicitação do tipo flexão simples tipo II demonstraram a mesma linha de tendência detectada em vigas semelhantes sujeitas à flexão simples tipo I porém obteve-se um aumento nos índices de ductilidade global e local para a presente análise.

Na seqüência, apresentam-se as duas últimas avaliações: com relação ao aumento da base do elemento estrutural e com relação ao efeito escala. Transcorridos estes dois últimos estudos, conclusões gerais serão indagadas à respeito da ductilidade de vigas de concreto armado.



**CORTE A-A**

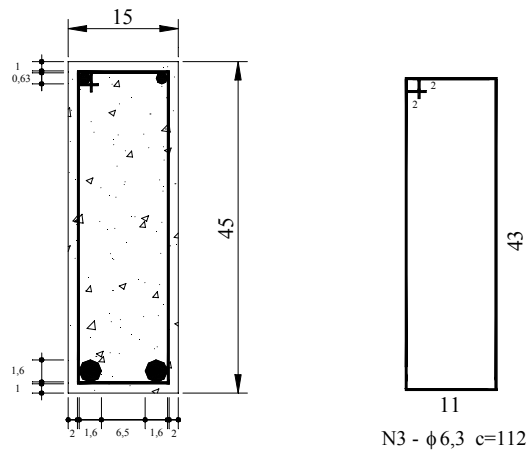


Figura 6.20 – Detalhamento da viga 23

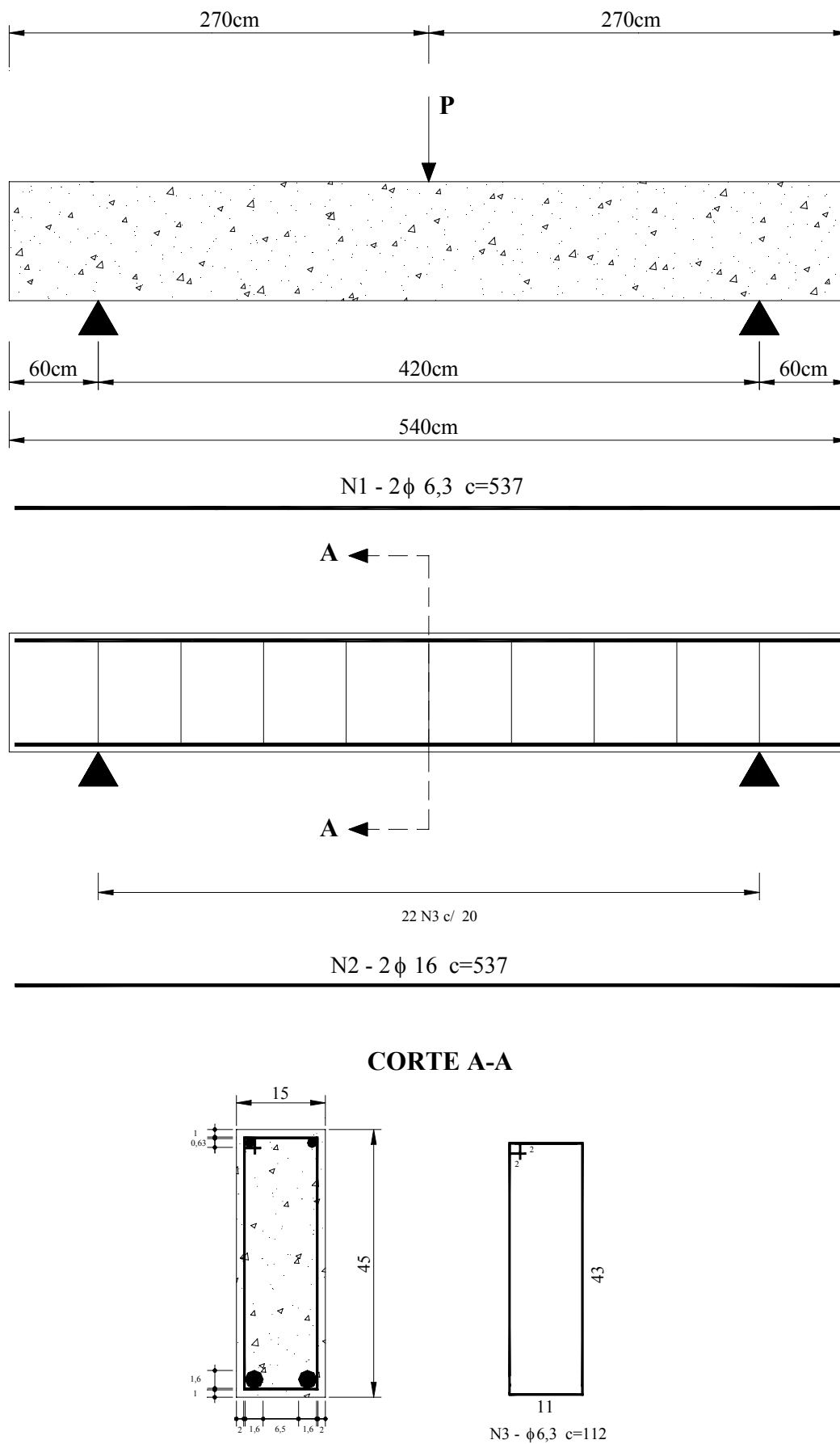


Figura 6.21 – Detalhamento da viga 25

## 6.6 VARIAÇÃO DA BASE DO ELEMENTO ESTRUTURAL

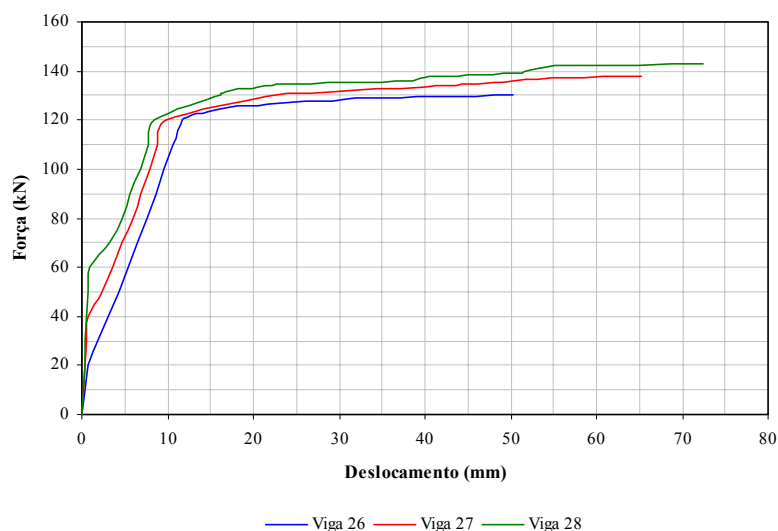
Nesta avaliação, utilizou-se para o concreto um valor de “ $f_c$ ” igual a 50MPa e para as armaduras as características mecânicas do aço CA-50A, identicamente ao que fora feito nas simulações referentes à solicitações do tipo flexão simples tipo I.

Assim, variou-se somente a base das vigas de concreto armado, nos valores de 15cm, 30cm e 45cm, mantendo-se invariáveis todas as demais características físicas e mecânicas. A Tabela 6.8 mostra os valores numéricos relativos ao levantamento dos índices de ductilidade global e local.

**Tabela 6.8** – Valores numéricos obtidos na avaliação da ampliação da base do elemento estrutural

Vigas	b/h	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
26	0,33	50,31	11,90	4,23	2,32	0,50	4,64
27	0,55	65,22	9,72	6,71	2,74	0,46	5,96
28	1,00	72,47	7,84	9,24	3,29	0,36	9,14

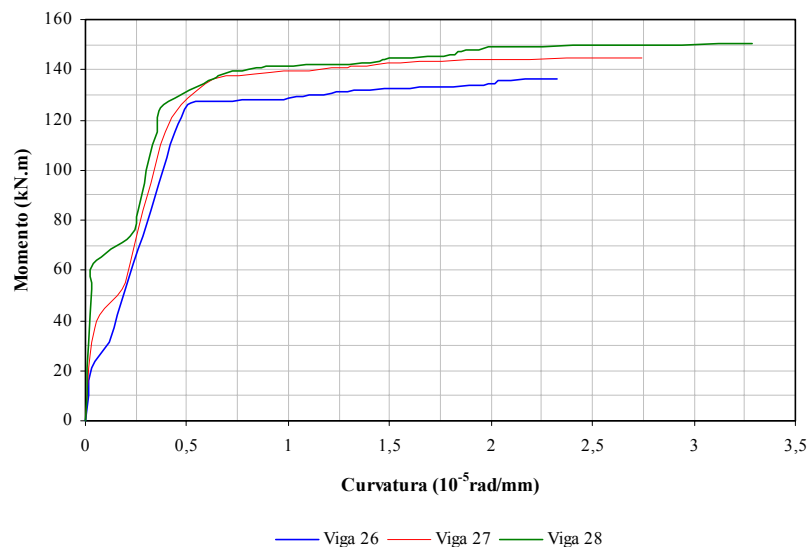
As Figuras 6.22 e 6.23 ilustram respectivamente as curvas força – deslocamento e momento – curvatura obtidas para as vigas 26, 27 e 28.



**Figura 6.22** – Curvas força – deslocamento obtidas para as vigas analisadas

Observa-se a partir das Figuras 6.22 e 6.23 e dos valores de “ $\mu_d$ ” e “ $\mu_c$ ” dispostos na Tabela 6.8 que o aumento da rigidez proporcionado pela ampliação da base das vigas acarretou em uma ampliação nas forças de fissuração, bem como da capacidade de deformação inelástica

do elemento estrutural. Todavia vale ressaltar que os índices de ductilidade global e local aqui calculados apresentam-se superiores aos obtidos no estudo da variação da base do elemento estrutural para o caso de solicitação de flexão simples tipo I.



**Figura 6.23** – Curvas momento – curvatura obtidas para as vigas analisadas

O detalhamento da viga 26 é o mesmo apresentado na Figura 6.11, ao passo que os detalhamentos das vigas 27 e 28 encontram-se respectivamente nas Figuras 6.24 e 6.25.

Salienta-se que até a presente avaliação não houve grandes mudanças comportamentais das vigas de concreto armado submetidas à flexão simples tipo I e simples tipo II, uma vez que o comportamento estrutural das mesmas diferiu-se apenas quanto aos valores dos índices de ductilidade global e local calculados.

Em seqüência, apresenta-se o último estudo referente às vigas submetidas à flexão simples tipo II que trata da questão da influência do efeito de escala sobre a ductilidade.





## 6.7 EFEITO ESCALA TRANSVERSAL

Neste estudo avaliou-se a influência do efeito escala sobre a ductilidade de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples tipo II, retratado por meio da variação da relação entre o vão e a altura do elemento estrutural.

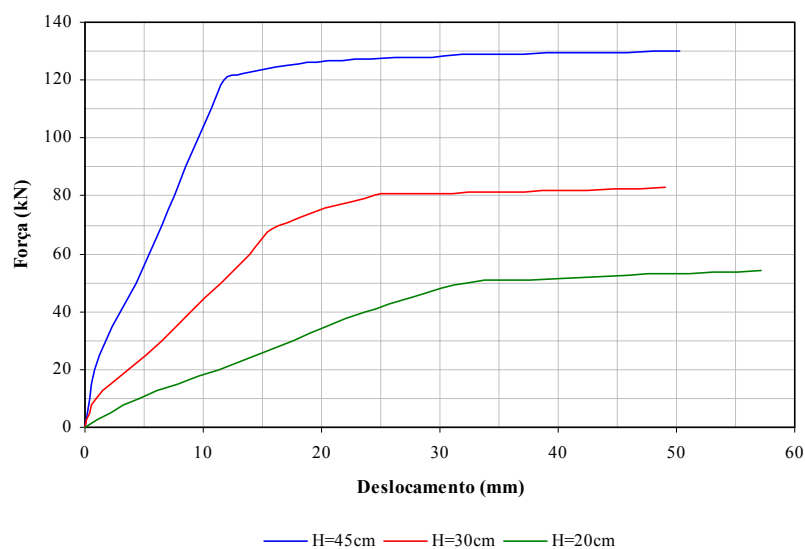
Desta forma, simularam-se três vigas com diferentes valores de altura, porém com vão constante, cuja resistência à compressão do concreto adotada fora de 50MPa e armaduras com a característica mecânica do aço tipo CA-50A. Na Tabela 6.9 estão dispostos os valores numéricos alcançados nas simulações.

**Tabela 6.9** – Valores numéricos obtidos na avaliação do efeito escala

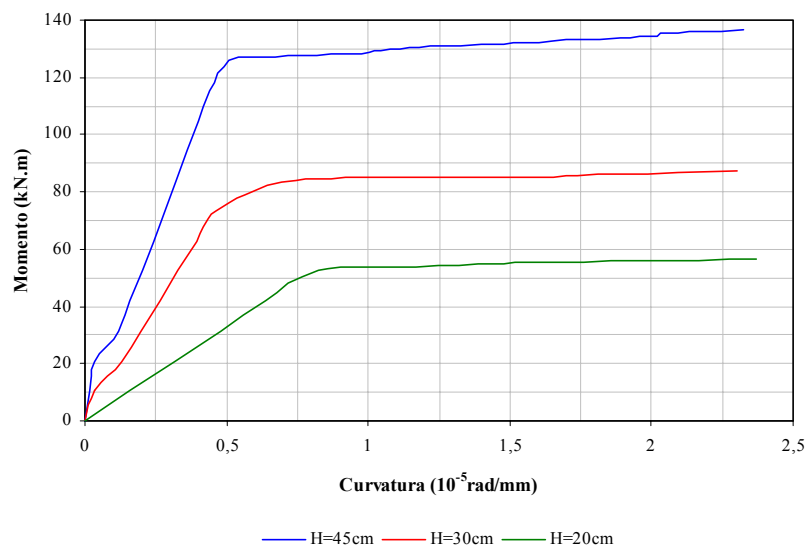
Viga	H (cm)	L (cm)	$\delta_u$ (mm)	$\delta_y$ (mm)	$\mu_d$	$\phi_u$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\phi_y$ ( $10^{-5}$ rad/mm)	$\mu_c$
29	45	540	50,31	11,90	4,23	2,32	0,50	4,64
30	30	540	49,11	18,84	2,61	2,30	0,58	3,96
31	20	540	57,22	33,60	1,70	2,37	0,81	2,92

sendo “H” a altura e “L” o vão do elemento estrutural

As Figuras 6.26 e 6.27 ilustram respectivamente as curvas força – deslocamento e momento – curvatura obtidas para as vigas 29, 30 e 31.



**Figura 6.26** – Curvas força – deslocamento obtidas na avaliação da influência do efeito escala



**Figura 6.27** – Curvas momento – curvatura obtidas na avaliação da influência do efeito escala

O detalhamento da viga 29 é idêntico ao apresentado na Figura 6.11. Os detalhamentos das vigas 30 e 31 estão apresentados respectivamente nas Figuras 6.28 e 6.29.

Com relação à análise numérica efetuada conclui-se a partir dos índices de ductilidade apresentados na Tabela 6.9 que a ductilização das vigas é inversamente proporcional à esbeltez das mesmas (o mesmo ocorrido para o caso de flexão simples tipo I).

Todavia, para o caso de solicitação do tipo flexão simples tipo I não houve mudanças no que tange às forças de ruína das vigas com a ampliação da esbeltez das mesmas.

Já para o caso de solicitação do tipo flexão simples tipo II, ocorreram depreciações significativas nas forças de ruína com o aumento da esbeltez do elemento estrutural, notificando comportamentos estruturais distintos para os dois casos de solicitação.

Assim, o presente estudo retratou a única mudança comportamental das vigas de concreto armado com relação às outras cinco avaliações realizadas para dois casos de flexão: resistência à compressão do concreto, taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, tensão de escoamento das armaduras, espaçamento entre estribos e aumento da base do elemento estrutural.

A linha de tendência geral notificada foi de uma maior ductilização das vigas sujeitas à flexão simples tipo II, em detrimento às solicitadas por flexão simples tipo I.

Conclui-se portanto que além dos seis fatores avaliados que interferem na capacidade de deformação inelástica das vigas, um outro fator mostrou-se muito significativo: o tipo de solicitação agente sobre o elemento estrutural.



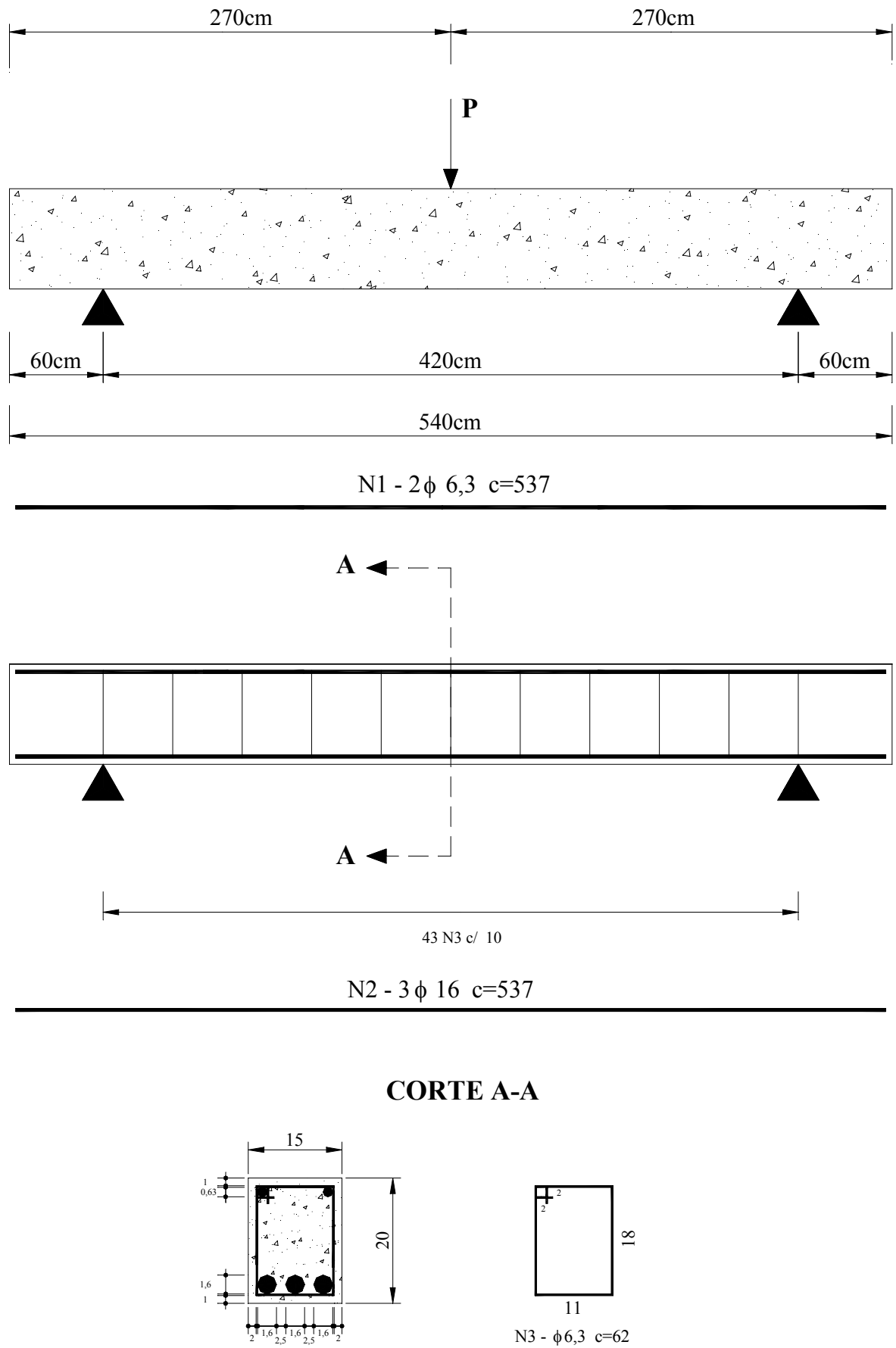


Figura 6.29 – Detalhamento da viga 31

## CAPÍTULO 7: CONCLUSÕES

---

No âmbito geral, percebeu-se boa convergência do modelo numérico em relação aos resultados experimentais no que diz respeito às forças de fissuração, plastificação e ruína bem como os deslocamentos “ $\delta_y$ ” e “ $\delta_u$ ” (análise global) que posteriormente foram utilizados no cálculo dos índices de ductilidade global.

Este estudo retratou boa proximidade entre as curvas força – deslocamento numéricas e experimentais, garantindo confiabilidade aos estudos efetuados quanto aos parâmetros que afetam a ductilidade de vigas de concreto armado.

Em termos de análise global pode-se concluir que no contexto geral os resultados de forças de fissuração, plastificação e ruína numéricos alcançados com a utilização da malha M3 foram próximos aos resultados obtidos experimentalmente para as seis vigas analisadas. Entretanto, notam-se algumas discrepâncias de resultados sobretudo quanto aos deslocamentos “ $\delta_y$ ” e “ $\delta_u$ ” obtidos para as vigas 04, 05 e 06 ensaiadas por Ribeiro (1996).

Com relação aos resultados numéricos de curvas força – deformação no concreto pode-se notar que alcançaram-se bons índices de convergência sobretudo para a deformação última do concreto que ocorreu à taxa de 2,5‰ para a viga 01, da ordem de 3,5‰ para as vigas 02 e 03, da ordem de 1,8‰ para a viga 05 e da ordem de 2,1‰ para a viga 06.

Quanto à viga 04 os resultados de deformação última obtidos numericamente (1,48‰) foram ligeiramente menores com relação aos obtidos experimentalmente (2,4‰). De uma forma geral, obteve-se maior proximidade entre as trajetórias de deformações no concreto com a ampliação da força para as vigas ensaiadas por Barbosa (1998).

No que diz respeito às curvas força – deformação no aço percebe-se que a proximidade entre as curvas experimentais e numéricas foi mais acentuada em relação às curvas anteriores (força – deslocamento e força – deformação no concreto) mostrando que o modelo reológico elastoplástico perfeito adotado para as armaduras retrata com fidelidade as deformações ocorridas no material mediante a aplicação de um estado de tensões.

As deformações últimas neste material obtidas experimentalmente foram muito próximas das calculadas via processo numérico para as vigas 02, 03, 04 e 06 (da ordem de 9‰). Para a viga 01, a deformação última numérica foi da ordem de 10‰ enquanto que a experimental alcançou um valor próximo a 17‰.

Este valor elevado pode ter sido obtido em função de erros de leitura ou mesmo por uma disfunção do extensômetro elétrico colado nas armaduras a fim de se medir as deformações.

Para a viga 05 os valores numéricos de deformação última no material aço (9‰) ficaram aquém dos resultados obtidos experimentalmente (11,5‰).

Seguindo a mesma linha de tendência dos resultados apresentados de curvas força – deslocamento e força – deformação no concreto, obteve-se maior proximidade entre os resultados numéricos e experimentais das trajetórias de deformações no material aço com a ampliação da força para as vigas ensaiadas por Barbosa (1998).

Tais erros podem ocorrer devido à própria heterogeneidade do material concreto que por muitas vezes acarreta em uma ineficiência do modelo reológico adotado ou mesmo erros ligados à disfunção de equipamentos utilizados nas medições de deformações e deslocamentos.

Aliado a isto, metodologias de ensaio ineficientes podem conduzir à resultados que podem não retratar com fidelidade a deformabilidade dos materiais ou mesmo do elemento estrutural como um todo por meio da ampliação da força externa aplicada.

Outro fato que acarretou problemas de convergência com relação aos resultados de Ribeiro (1996) foi a adoção nas simulações de um módulo de elasticidade longitudinal uma vez que não realizaram-se ensaios experimentais para a determinação desta grandeza.

No âmbito geral percebe-se que as respostas numéricas foram superiores aos resultados obtidos experimentalmente em função da adoção de uma ligação perfeita entre os materiais aço e concreto, não havendo possibilidades portanto de deslocamentos relativos entre eles.

No que diz respeito à análise dos parâmetros que afetam a ductilidade de vigas de concreto armado para solicitações do tipo flexão simples tipo I pode-se concluir que:

✓ Variando-se somente a resistência à compressão do concreto, notou-se um aumento na ductilidade global e local das vigas de concreto armado, sendo este processo influenciado pela variação da relação “ $\rho/\rho_b$ ”; Com o aumento de “ $f_c$ ” diminui a área necessária para suportar a resultante das tensões de compressão provocada pela flexão do elemento estrutural, diminui-se a relação “ $x/d$ ” onde a posição da linha neutra estará mais próxima à região comprimida, provocando maiores deformações na armadura tracionada e, em consequência disso, amplia-se a ductilidade.

✓ Mantendo-se constante a relação “ $\rho/\rho_b$ ” e ampliando-se o valor de “ $f_c$ ”, perceberam-se decréscimos nos índices de ductilidade global e local;

Ainda que concretos de alto desempenho possuam características mais frágeis em relação à concretos convencionais, é possível obter vigas de concreto armado de alto desempenho com propriedades dúcteis suficientes, bastando para isso utilizar a relação “ $\rho/\rho_b$ ” mais adequada para que se atinja a ductilidade desejada.

✓ Com relação às armaduras, percebeu-se que a ampliação da taxa geométrica de armadura longitudinal de tração ocasionou uma diminuição na ductilidade;

O aumento da taxa de armadura longitudinal de tração acarretou em uma elevação no valor da relação “ $x/d$ ”, onde a linha neutra situar-se-á em uma posição mais próxima da armadura tracionada proporcionando menores deformações nesta e maiores deformações no concreto comprimido. Em outras palavras, a ampliação de “ $\rho$ ” ocasionou um comportamento mais frágil à vigas de concreto armado.

✓ Observou-se também que as vigas de concreto armado simuladas com armaduras cujo valor da tensão de escoamento foi mais elevado possuíram menor ductilidade;

Vale ressaltar que o aço CA 50-A é classificado segundo a norma **NBR 6118:2001** como aço de alta ductilidade ao passo que o aço CA 60-B é classificado como aço de ductilidade normal. Assim, a capacidade de deformação inelástica do elemento estrutural, neste caso, foi determinada a partir do tipo de armadura utilizada.

✓ No estudo relativo ao espaçamento entre estribos percebeu-se a partir das curvas força – deslocamento obtidas que o aumento no espaçamento causou uma diminuição no deslocamento último alcançado pelas vigas.

Vale ainda salientar que os deslocamentos no escoamento das armaduras sofreram pouca variação e, portanto, o índice de ductilidade global apresentou valor mais elevado para a viga com menor espaçamento, ou seja,  $s=7\text{cm}$ .

Esta mesma observação pode ser notada quanto aos índices de ductilidade local: a curvatura “ $\phi_y$ ” manteve-se praticamente invariante ao passo que a curvatura “ $\phi_u$ ” sofreu decréscimos com o aumento de “ $s$ ”.

Isto está ligado ao fato de que o confinamento do concreto mostra-se mais eficiente com a diminuição da distância entre as armaduras de cisalhamento, provocando uma maior rigidez do conjunto de armaduras e proporcionando maiores deslocamentos e curvaturas no regime próximo à ruptura do elemento estrutural.

✓ No que tange ao estudo relativo ao aumento da base do elemento estrutural observou-se que vigas com geometria quadrada apresentaram rigidez e forças de fissuração mais elevadas. Dentro deste contexto, ampliaram-se também os valores dos deslocamentos e curvaturas últimos e, conseqüentemente, dos índices de ductilidade global e local.

A ampliação da dimensão da base do elemento estrutural acarreta em uma ascensão da linha neutra na direção do banzo comprimido proporcionando portanto um aumento da ductilização por parte das vigas.

✓No que diz respeito ao estudo do efeito escala notou-se a partir dos resultados obtidos nas simulações que o aumento na esbeltez da **RMC** proporcionou um comportamento mais frágil às vigas de concreto armado. Paralelamente a isto, percebeu-se que os deslocamentos e as curvaturas últimas permaneceram praticamente invariantes, ampliando-se pois os deslocamentos e as curvaturas correspondentes ao início do escoamento das armaduras longitudinais de tração o que provocou quedas nos índices de ductilidade global e local.

Cabe ainda ressaltar que as forças de fissuração bem como das forças de ruína permaneceram inalteradas com a ampliação do comprimento da **RMC**.

É interessante notar que a viga 17 rompeu com força inferior com relação às duas outras vigas solicitadas à flexão simples tipo I, porém os momentos de ruptura obtidos foram próximos para os dois casos de solicitação. Em outras palavras, necessita-se aplicar uma força maior no caso de flexão simples tipo I para obter o mesmo momento de ruptura atuante no caso da flexão simples tipo II.

O trabalho de Fernandes (1992) mostra que a tensão de cisalhamento medida em estribos situados na mesma posição em vigas semelhantes, do ponto de vista físico e mecânico, e a tensão normal de tração nas armaduras longitudinais obtida na mesma seção do elemento estrutural, foi maior para o caso de solicitação à flexão simples tipo II em relação à solicitação à flexão simples tipo I para um mesmo valor de esforço cortante atuante e, desta forma, explica-se o motivo pelo qual a viga 17 rompeu com força inferior.

Outra observação proposta por Fernandes (1992) foi que a tensão de cisalhamento nos estribos e a tensão normal nas armaduras longitudinais de tração em uma seção arbitrária do elemento estrutural estão diretamente relacionadas à relação “**a/d**”.

Sobre as vigas que apresentarem uma elevação de tal relação atuarão necessariamente maiores tensões de cisalhamento nos estribos e maiores tensões normais de tração nas armaduras longitudinais.

Para os estudos abaixo relacionados não perceberam-se mudanças comportamentais do ponto de vista estrutural das vigas de concreto armado com relação aos dois casos de flexão, simples tipo I e simples tipo II: resistência à compressão do concreto, taxa geométrica de armadura longitudinal de tração, tensão de escoamento das armaduras, espaçamento entre estribos e aumento da base do elemento estrutural.

A linha de tendência geral notificada foi de uma maior ductilização das vigas sujeitas à flexão simples tipo II, em detrimento às solicitadas por flexão simples tipo I.

Já com relação à análise numérica efetuada no estudo relativo ao efeito escala para vigas sujeitas à flexão simples tipo II conclui-se a partir dos índices de ductilidade apresentados que a

ductilização das vigas é inversamente proporcional à esbeltez das mesmas (o mesmo ocorrido para o caso de flexão simples tipo I).

Todavia, para o caso de solicitação do tipo flexão simples tipo I não houve mudanças no que tange às forças de ruína das vigas com a ampliação da esbeltez das mesmas. Já para o caso de solicitação do tipo flexão simples tipo II, ocorreram depreciações significativas nas forças de ruína com o aumento da esbeltez do elemento estrutural, notificando comportamentos estruturais distintos para os dois casos de solicitação.

Conclui-se portanto que além dos seis fatores avaliados que interferem na capacidade de deformação inelástica das vigas, um outro fator mostrou-se muito significativo: o tipo de solicitação agente sobre o elemento estrutural.

Resta lembrar que o presente trabalho procurou avaliar os parâmetros que interferem na ductilidade de vigas de concreto armado sendo que critérios de projeto como a determinação da relação “ $a/d$ ” mínima para obter-se uma ductilidade desejável poderá ser alvo de estudo de futuros trabalhos.

## CAPÍTULO 8: PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

---

A seguir relacionam-se algumas propostas que podem ser seguidas para a confecção de trabalhos futuros:

- ✓Estudo numérico da ductilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexo compressão e flexo tração normal e excêntrica
- ✓Estudo numérico da ductilidade de pilares de concreto armado
- ✓Estudo numérico da ductilidade de lajes de concreto armado
- ✓Estudo numérico da ductilidade de pórticos planos de concreto armado
- ✓Estudo numérico da ductilidade de pórticos espaciais de concreto armado
- ✓Estudo numérico da ductilidade de estruturas de concreto armado reforçadas com FRP (Fiber Reinforced Polymer)

## CAPÍTULO 9: BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

---

American Concrete Institute, **State of the Art Report on High Strength Concrete**. ACI 363 R 92, Detroit, USA, 55p., 1992.

Al – Haddad, M. S., **Curvature Ductility of Reinforced Concrete Beams under Low and High Strain Rates**. ACI Structural Journal, vol. 92, n° 5, pp. 526 – 534, 1995.

Alca, N., Alexander, S. D. B., MacGregor, J. G., **Effect of Size on Flexural Behavior of High-Strength Concrete Beams**. ACI Structural Journal, vol. 94, n° 1, pp. 59 – 67, 1997.

Álvares, M. S., **Estudo de um Modelo de Dano para o Concreto: Formulação, Identificação Paramétrica e Aplicação com o Emprego do Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 123 p., 1993.

Álvares, M. S., **Contribuição ao Estudo e Emprego de Modelos Simplificados de Dano e Plasticidade para a Análise de Estruturas de Barras em Concreto Armado**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 123 p., 1999.

Alves Filho, A., **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. 1ª ed. São Paulo: Érica, 292 p., 2000.

Ashour, S. A., **Effect of Compressive Strength and Tensile Reinforcement Ratio on Flexural Behavior of High Strength Concrete Beams**. Elsevier Science Ltd., Engineering Structures, pp. 413 – 423, 2000.

Associação Brasileira de Normas Técnicas, **Projeto e Execução de Obras em Concreto Armado**. Projeto de Revisão da NBR 6118, Rio de Janeiro, Brasil, 186 p., 2001.

Barbosa, M. P., **Semi-Rigité des Noeuds D'Ossatures en Béton Armé: Simulations Numeriques**. Tese de Doutorado, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, INSA, FRANÇA, 215p., 1992.

Barbosa, M. P., **Uma Contribuição Experimental e Numérica sobre Estruturas de Concreto Armado de Elevado Desempenho: Estudo da Aderência – Ancoragem e do Comportamento de Vigas Fletidas**. Tese de Livre Docência, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista, FEIS, UNESP, 174p., 1998.

Barbosa, M. P., Gamino, A. L., **Numerical Analysis of Ductility in Reinforced Concrete Beams in the CASTEM 2000**. In: The Sixth International Conference on Computational Structures Technology, 2002, Praga-República Theca. **CDROM**, 2002.

Bathe, K. J., **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 528 p., 1976.

Borges, J. U. A., **Análise do Comportamento de Vigas de Concreto de Alto Desempenho por meio da Mecânica da Fratura**. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 280p., 2002.

Borges, J. U. A., Souza, R. A., Bittencourt, T. N., **Armadura Mínima de Flexão em Vigas de Concreto: Influência das Propriedades do Material e do Tamanho da Peça**. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 2002, Brasília-DF. **CDROM**, 2002.

Boukari, S., **Contribution a L'Etude des Potentialites du Béton Armé de Hautes Performances par Simulation Numérique a L'Aide des Elements Finis**. Tese de Doutorado, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, INSA, FRANÇA, 134p., 2000.

Buchaim, R., **A Influência da Não Linearidade Física do Concreto Armado na Rigidez à Flexão e na Capacidade de Rotação Plástica**. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 260 p., 2001.

Cabral, J. P., **Sobre a Integração de Tensões na Análise de Sólidos Elastoplásticos Perfeitos em Estado Plano de Deformações**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 96 p., 1992.

Cohn, M. Z., Riva, P., **Flexural Ductility of Structural Concrete Sections**. PCI Journal, pp. 72 – 87, 1991.

Comité Euro – International du Béton, **Model Code for Concrete Structures**. CEB – FIP MC 90, 437 p., 1993.

Cunha, J. C., **Considerações sobre a Pesquisa e o Emprego do Concreto de Alta Resistência em Estruturas de Concreto Armado**. Palestra Técnica, Uberaba, 74 p., 1993.

Dawe, D. J., **Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures**. Oxford, USA: Oxford University Press, 565 p., 1983.

Delalibera, R. G., Lima Júnior, H. C., Giongo, J. S., **Avaliação da Ductilização de Vigas Superarmadas por meio de Armadura de Confinamento**. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 2002, Brasília-DF. **CDROM**, 2002.

Eurocode 2, **Design Aids for EC 2: Design of Concrete Structures**. 244 p., 1997.

Eurocode 2, **Designers' Handbook to Eurocode Two**. 250 p., 1995.

Farage, M. C. R., **Influência da Resistência do Concreto na Ductilidade de Vigas**. Dissertação de Mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, 129 p., 1995.

Fernandes, G. B., **Cisalhamento de Vigas de Concreto de Alta Resistência**. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 422 p., 1992.

Fertis, D. G., **Nonlinear Mechanics**. Boca Raton, USA: CRC, 464 p., 1993.

Gallagher, R. H., **Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 420 p., 1975.

Gamino, A. L., Barbosa, M. P., **Vigas de Concreto Armado de Alto Desempenho: Análise Numérica da Ductilidade Através do Código de Cálculo CASTEM 2000**. In: 44º Congresso Brasileiro do Concreto – Ibracon, 2002a, Belo Horizonte-MG. **CDROM**, 2002a.

Gamino, A. L., Barbosa, M. P., **Análise Numérica da Ductilidade de Vigas de Concreto Armado Através do Código de Cálculo CASTEM 2000**. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 2002b, Brasília-DF. **CDROM**, 2002b.

Kappos, A. J., Chryssanthopoulos, M. K., Dymiotis, C., **Uncertainty Analysis of Strength and Ductility of Confined Reinforced Concrete Members**. Elsevier Science Ltd., Engineering Structures, pp. 195 – 208, 1998.

Kemp, A. R., **The Achievement of Ductility in Reinforced Concrete Beams**. Magazine of Concrete Research, vol. 50, nº 2, pp. 123 – 132, 1998.

Kleiber, M., Wozniak, C., **Nonlinear Mechanics of Structures**. Warszawa, Poland: Polish Scientific Publishers, 458 p., 1991.

Kwak, H. G., Filippou, F. C., **Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads**. Computers & Structures, vol. 65, nº 1, pp. 1 – 16, 1997.

Leslie, K. E., Rajagopalan, K. S., Everard, N. J., **Flexural Behavior of High Strength Concrete Beams**. ACI Structural Journal, vol. 73, nº 9, pp. 517 – 521, 1976.

Medrano, M. S., **Sobre a Integração de Tensões na Elastoplasticidade Perfeita**. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 163p., 2000.

Merabet, O., **Modelisation des Structures Planes en Beton Arme sous Chargements Monotone et Cyclique. Construction et Validation d'un Modele Numérique**. Tese de Doutorado, Institut National des Sciences Appliquees de Lyon, INSA, FRANÇA, 267 p., 1990.

Mo, Y. L., Lai, H. C., **Effect of Casting and Slump on Ductilities of Reinforced Concrete Beams**. ACI Structural Journal, vol. 92, nº 4, pp. 419 – 424, 1995.

Naaman, A. E., Harajli, M. H., Wight, J. K., **Analysis of Ductility in Partially Prestressed Concrete Flexural Members**. PCI Journal, vol. 31, nº 3, pp. 64 – 87, 1986.

Paula, C. F., **Estudo das Descrições Lagrangiana e Euleriana da Análise Não Linear Geométrica com Emprego do Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 116 p., 1997.

Paula, C. F., **Contribuição ao Estudo das Respostas Numéricas Não Lineares Estática e Dinâmica de Estruturas Reticuladas Planas**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 118 p., 2001.

Pendyala, R., Priyan, M., Patnaikuni, I., **Full Range Behavior of High Strength Concrete Flexural Members: Comparison of Ductility Parameters of High and Normal Strength Concrete Members**. ACI Structural Journal, vol. 93, nº 1, pp. 30 – 35, 1996.

Pinto Júnior, N. O., **Flexão de Vigas de Concreto de Alta Resistência**. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 286 p., 1992.

Proença, S. P. B., **Noções Básicas de Reologia**. Notas de Aula, Curso de Especialização em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 27 p., 1986.

Proença, S. P. B., **Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 315 p., 1988.

Ribeiro, P. T. P., **Influência da Taxa de Armadura na Ductilidade de Vigas de Concreto de Alta Resistência**. Dissertação de Mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, 98 p., 1996.

Rubert, J. B., **Estudo do Desempenho de Algoritmos Numéricos na Solução de Sistemas Não Lineares de Estruturas formadas por Barra de Treliça**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, EESC, USP, 97 p., 1993.

Shin, S. W., Ghosh, S. K., Moreno, J., **Flexural Ductility of Ultra High Strength Concrete Members**. ACI Structural Journal, vol. 86, n° 4, pp. 394 – 400, 1989.

Scholz, H., **Deflection and Ductility of Continuous Reinforced Concrete Beams**. Magazine of Concrete Research, n° 164, pp. 197 – 202, 1993.

Souza, R. A., Borges, J. U. A., Bittencourt, T. N., **O Problema da Estimativa de Parâmetros em Análises Não Lineares de Peças de Concreto utilizando Programas de Elementos Finitos**. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 2002, Brasília-DF. **CDROM**, 2002.

Tholen, M. L., Darwin, D., **Effect of Reinforcing Bar Deformation Pattern on Flexural Ductility**. ACI Structural Journal, vol. 95, n° 1, pp. 37 – 42, 1998.

Thompson, K. J., Park, R., **Ductility of Prestressed and Partially Prestressed Concrete Beams Sections**. PCI Journal, pp. 46 – 69, 1980.

Tognon, G., Ursella, P., Coppetti, G., **Design and Properties of Concretes with Strength Over 1500 kgf/cm<sup>2</sup>**. ACI Structural Journal, vol. 77, n° 3, pp. 171 – 178, 1980.

Walraven, J., Lehwalter, N., **Size Effects in Short Beams Loaded in Shear**. ACI Structural Journal, vol. 91, n° 5, pp. 585 – 593, 1994.

Zagottis, D. L., **Introdução à Teoria das Estruturas**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, EPUSP, 350 p., 1986.

Ziara, M. M., Haldane, D., Kuttub, A. S., **Flexural Behavior of Beams with Confinement**. ACI Structural Journal, vol. 92, n° 1, pp. 103 – 114, 1995.