UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira - SP

JARBAS ANTÔNIO GUEDES

NOVAS CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY

Ilha Solteira
2015

JARBAS ANTÔNIO GUEDES

NOVAS CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

G924n

Guedes, Jarbas Antônio.
Novas condições de estabilidade de sistemas não lineares utilizando funções de Lyapunov fuzzy / Jarbas Antônio Guedes. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
96 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2015

Orientador: Marcelo Minhoto Carvalho Teixeira
Inclui bibliografia

1. Hiper-retângulo. 2. Politopo. 3. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. 4. Funções de Lyapunov fuzzy. 5. Desigualdades matriciais lineares (LMIs).

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Novas Condições de Estabilidade de Sistemas Não Lineares Utilizando Funções de Lyapunov Fuzzy

AUTOR: JARBAS ANTONIO GUEDES

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA , Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Profa. Dra. VILMA ALVES DE OLIVEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade de São Paulo

Prof. Dr. LEONARDO AMARAL MOZELLI
Departamento Das Engenharias de Telecomunicações e Mecatronica / Universidade Federal de São João Del Rei

Edson Ítalo Mainardi Jr

Prof. Dr. EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnológica do Mato Grosso do Sul

Data da realização: 27 de novembro de 2015.

Dedicatória

Para minha mãe,
Nadyr Rodrigues da Luz (*in memoriam*),
e para minhas filhas,
Heloisa, Luciana, Maira e Ana Luiza.

Agradecimentos

- Ao Prof. Marcelo C. M. Teixeira, pela orientação sólida, segura e competente, e também à sua esposa Vera pelo carinho e compreensão, quando sua casa tornava-se extensão da UNESP.
- Ao Prof. Edvaldo Assunção, por oportunizar ferramentas básicas para o desenvolvimento do trabalho e pelos aconselhamentos sempre oportunos.
- Ao Prof. Rodrigo Cardim pelo companheirismo, sempre disponível para solucionar detalhes técnicos que pareciam intransponíveis.
- A Talita Esteves, que desenvolveu um trabalho no qual o nosso se baseou.
- Ao Colégio Militar de Campo Grande (CMCG), pelo apoio logístico durante parte deste trabalho.
- A todos os alunos do grupo de Controle e Automação, pelas ajudas sempre bem vindas.

Resumo

Neste trabalho são apresentadas duas novas propostas de condições de estabilidade para sistemas não lineares descritos através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) baseadas em funções de Lyapunov fuzzy (FLF). A primeira proposta é baseada na determinação algébrica do hiper-retângulo composto pelo conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência de sistemas fuzzy TS e é formulada em termos de desigualdades matriciais lineares, em inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs). A segunda proposta é baseada na obtenção também algébrica, de um politopo formado pela interseção do hiper-plano das derivadas temporais das funções de pertinência com o hiper-retângulo. São propostos dois teoremas que fornecem condições necessárias e suficientes para esse problema de estabilidade. Exemplos, utilizando o software MATLAB, ilustram os resultados numéricos, mostrando que o hiper-retângulo fornece resultados mais relaxados, no sentido de reduzir o conservadorismo, em relação aos da literatura e a estrutura proposta através de politopos apresenta os mesmos resultados com tempos de execução computacionais consideravelmente menores. Portanto, as propostas apresentadas generalizam as já existentes na literatura, para o estudo da estabilidade assintótica de sistemas não lineares baseados em FLF, para sistemas fuzzy TS.

Palavras chave: Hiper-retângulo. Politopo. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Funções de Lyapunov fuzzy. Desigualdades matriciais lineares (LMIs).

Abstract

This thesis proposes two new stability conditions regarding nonlinear systems described by Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models, based on Fuzzy Lyapunov Functions (FLF). The first result is based on the hyper-rectangle defined by the closed set of the time derivatives of the membership functions of TS fuzzy systems, and is described by a set of Linear Matrix Inequalities (LMIs). The second result is based on the obtention of a polytope composed by the intersection of the hyperplane of the time derivatives of the membership functions with the hyper-rectangle. Two proposed theorems offer necessary and sufficient conditions for this stability problem. Examples, using the MATLAB software, illustrate the numerical results and show that the hyper-rectangle allows the reduction of the conservatism of the stability analysis considering similar results available in the literature and with the polytope it is possible to obtain the same results with a smaller computational time. Therefore, the proposed methods generalize previous results about asymptotic stability available in the literature, for nonlinear systems described by TS fuzzy models, based on FLF.

Keywords: Hyper-rectangle. Polytope. Takagi-Sugeno fuzzy models. Fuzzy Lyapunov functions, Linear matrix inequalities (LMIs).

Lista de Figuras

1 Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS. 13

2 Hiper-retângulo assimétrico com três regras. 26

3 Hiper-retângulo e politopo assimétricos com três regras. 28

4 Hiper-retângulo e politopo assimétricos com três regras. 31

5 Áreas de estabilidade ϕ's assimétricos para $r = 3$ Teorema 3 (x), Teorema 5 (o). 65

6 Áreas de estabilidade ϕ's assimétricos para $r = 4$ Teorema 3 (x), Teorema 4 (o). 68

7 Áreas de estabilidade ϕ's simétricos para $r = 3$ Teorema 3 (x), Teorema 5 (o). 72

8 Áreas de estabilidade ϕ's simétricos para $r = 4$ Teorema 3 (x), Teorema 4 (o). 75

9 Áreas de estabilidade ϕ's iguais para $r = 2$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 (.,o,x). 79

10 Áreas de estabilidade ϕ's iguais para $r = 3$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 (.,o,x). 81

11 Áreas de estabilidade ϕ's iguais para $r = 4$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 (.,o,x). 82

12 Análise da estabilidade para $0,4 \leq \phi \leq 3$, utilizando o Teorema 1 (- -), o Teorema 2 (- .) e o Teorema 3 (-). 83

Lista de Tabelas

1 Número de LMIs de acordo com o número de regras nos politopos para ϕ's assimétricos. 63

2 Tempos de execução dos processamentos para ϕ's assimétricos em minutos. . . . 68

3 Número de LMIs de acordo com o número de regras nos politopos para ϕ's simétricos. 71

4 Tempos de execução dos processamentos para ϕ's simétricos em minutos. 76

5 Número de LMIs de acordo com o número de regras nos politopos para ϕ's iguais. 78

6 Tempos de execução dos processamentos para ϕ's iguais em minutos. 84

Sumário

1 Introdução **7**

2 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno **11**

2.1 Funções Lyapunov 14

2.1.1 Função Lyapunov Quadrática 14

2.1.2 Função Lyapunov Fuzzy 14

3 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno via hiper-retângulos e politopos para intervalos de $\dot{h}_i$ assimétricos **16**

3.1 Introdução 16

3.1.1 Teoremas para comparações numéricas 17

3.2 Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Hiper-retângulos 19

3.3 Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Politopos 25

3.3.1 Casos particulares de politopos ϕ's assimétricos 25

3.3.2 Condições de existência para os termos compostos 45

3.3.3 Soluções particulares para um número qualquer de regras 53

3.3.4 Teoremas para número par e ímpar de regras 58

3.4 Quantidade de LMIs nos politopos 63

3.5 Exemplos Numéricos 63

3.5.1 Exemplo 1.3 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais) 63

3.5.2 Exemplo 2.3 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais) 64

3.6 Tempos de execução dos processamentos 67

3.7 Conclusões parciais 68

4 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno via hiper-retângulos e politopos para intervalos de $\dot{h}_i$ simétricos 70

4.1 Introdução 70

4.2 Quantidade de LMIs nos politopos 70

4.3 Exemplos Numéricos 71

4.3.1 Exemplo 1.4 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais) 71

4.3.2 Exemplo 2.4 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais) 72

4.4 Tempos de execução dos processamentos 75

4.5 Conclusões parciais 76

5 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno via hiper-retângulos e politopos para intervalos de $\dot{h}_i$ iguais 77

5.1 Introdução 77

5.2 Quantidade de LMIs nos politopos 77

5.3 Exemplos numéricos 78

5.3.1 Exemplo 1.5 - Para $r = 2$ (duas regras ou modelos locais) 78

5.3.2 Exemplo 2.5 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais) 79

5.3.3 Exemplo 3.5 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais) 80

5.3.4 Exemplo 4.5 82

5.4 Tempos de execução dos processamentos 83

6 Conclusões e trabalhos futuros 85

REFERÊNCIAS 87

1 Introdução

A maioria dos sistemas físicos são inerentemente não lineares, significando que são muito mais ricos e complexos do que os sistemas lineares, o que dificulta sua análise. Matematicamente, isto se reflete em dois aspectos. Primeiro, as equações não lineares não podem em geral ser resolvidas analiticamente e portanto um completo entendimento do comportamento do sistema não linear é muito difícil. Segundo, ferramentas poderosas da matemática como as transformadas de Laplace e Fourier não se aplicam a sistemas não lineares. Como resultado, não há ferramentas sistemáticas para predizer o comportamento de sistemas não lineares, nem há procedimentos sistemáticos para projetar sistemas de controle não lineares. Em vez disso, há um vasto inventário de poderosas ferramentas de análise e projeto, cada uma aplicada a uma determinada classe particular de problemas não lineares (SLOTINE; LI, 1991). A classe de problemas não lineares discutida neste trabalho é a estabilidade de sistemas dinâmicos.

A mais poderosa metodologia para o estudo da estabilidade de sistemas não lineares foi desenvolvida pelo matemático Russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov em sua tese de doutorado, cuja primeira publicação ocorreu em 1892 (LYAPUNOV, 1992). Lyapunov desenvolveu dois métodos para a análise da estabilidade: o método indireto e o método direto.

O chamado método indireto, ou método da linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através de seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos autovalores. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno do ponto de operação nominal.

O segundo método de Lyapunov, chamado de método direto, é baseado em uma generalização do conceito de energia associado a sistemas mecânicos. O uso do método direto requer a obtenção de uma função energia (chamada de função de Lyapunov) para o sistema em estudo e então analisar o seu comportamento, isto é, se decresce ao longo do

tempo. A importância deste método vem de sua generalidade, pode ser aplicado a todos os tipos de sistemas e sua limitação consiste na obtenção da função de Lyapunov, o que nem sempre é uma tarefa trivial.

Nas últimas décadas, uma abordagem que vem ganhando a atenção da comunidade científica da área de controle é a descrição de sistemas não lineares por meio de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985) ou Takagi-Sugeno-Kang (TSK) (SUGENO; KANG, 1988), baseados na lógica fuzzy. A lógica fuzzy foi primeiramente introduzida no artigo seminal de Lofti A. Zadeh (ZADEH, 1965) na Universidade da Califórnia em Berkeley. A lógica fuzzy é uma poderosa metodologia de resolução de problemas com uma miríade de aplicações em controle e no processamento de informações desde os anos 70, quando Mamdani utiliza pela primeira vez este método para realizar um controle fuzzy em uma aplicação industrial (MAMDANI, 1974). Assim, diferentemente da lógica clássica, que requer uma profunda compreensão dos sistemas, equações exatas e valores numéricos precisos, a lógica fuzzy incorpora uma forma alternativa de pensar, que permite o modelamento de sistemas complexos utilizando um alto nível de abstração originários de nosso conhecimento e experiência. A experiência humana é usada para construir um conjunto de regras fuzzy da forma *se-então*, permitindo a construção de modelos fuzzy, especialmente para sistemas que são difíceis de modelar e, consequentemente, o número de aplicações baseadas em lógica fuzzy tem aumentado consideravelmente nos últimos anos, tais como, modelagem, controle, processamento de sinais, reconhecimento de padrões e de sistemas especialistas. A lista de aplicações é longa e inclui fornos de cimento, trens de metrô, helicópteros não tripulados, robôs, permutadores de energia térmica, alto-fornos, na análise de novos sistemas de controle para automóveis e controle de elevadores de alta velocidade (ABDELMALEK, 2009; KING; KARONIS, 1988; MAMDANI, 1977; OSTERGAARD; HOLMBLAD, 1982; TANAKA; NISHIMURA; WANG, 1998; TSOUKALAS; UHRIG, 1996; YASUNOBU; MIYAMOTO, 1985; WILL; TEIXEIRA; ŻAK, 1997).

Mais recentemente, com o advento dos microprocessadores fuzzy, um crescente número de aplicações em controle fuzzy tem emergido através de produtos de eletrônicos e equipamentos domésticos, tais como, câmeras fotográficas manuais, aspiradores de pó, aparelhos de ar condicionado e máquinas de lavar roupas (HIROTA, 1993; SCHWARTZ; KLIR, 1992; TERANO; SUGENO; ASAI, 1992; YAMAKAWA, 1989) (TSOUKALAS; UHRIG, 1996).

A principal vantagem dos sistemas de lógica fuzzy é a sua aptidão para representar aproximadamente uma grande classe de funções não lineares, pois eles são aproximadores universais (WANG; MENDEL, 1992). Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas para de-

monstrar este conceito (CASTRO, 1995; KOSKO, 1994; YING, 1998; ZENG; ZHANG; XU, 2000). O ponto comum destas pesquisas é a capacidade de um modelo fuzzy para aproximar e portanto para representar uma grande classe de funções reais. A justificativa teórica de modelos fuzzy como aproximadores universais foi dada por (WANG; MENDEL, 1992) para sistemas fuzzy padrão com funções de pertinência gaussianas, implicação produto, conjunção e centro de gravidade como método de defuzzificação.

Existem basicamente dois tipos de modelos fuzzy: modelos Mamdani e modelos fuzzy TS. A vantagem dos modelos TS é a sua poderosa capacidade para representar uma relação não linear complexa, apesar de um pequeno número de regras fuzzy *se-então*, do que a do modelo Mamdani. Além disso, neste tipo de modelo, a passagem de uma regra para outra é feita por uma transição suave, ou seja, uma interpolação entre as regras (ABDELMALEK, 2009). Os modelos TS são de grande importância na solução de problemas de controle, quando há um aumento da complexidade dos sistemas, os critérios de desempenho são restritivos e as técnicas tradicionais de projeto não oferecem uma solução adequada. Os sistemas TS são capazes de representar, de forma aproximada ou exata, certas classes de dinâmicas não lineares como combinação de modelos lineares locais invariantes no tempo, descrevendo aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos no seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy TS, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto é menos complexas do que outras classes de modelos fuzzy (JOHANSEN; SHORTEN; MURRAY-SMITH, 2000) e permite que o projetista utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos. O modelo global do sistema é obtido através da combinação destes modelos lineares locais. A ideia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é não linear em geral, é uma combinação de cada regulador linear individual.

A partir dos anos 90, em diversas áreas de controle, novas metodologias foram concebidas para tratarem de problemas da análise da estabilidade e do projeto de sistemas de controle. Estes problemas podem ser resolvidos através de desigualdades matriciais lineares, também conhecida por LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (BOYD et al., 1994; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996). Essas ferramentas são muito eficientes e poderosas na literatura de programação matemática (GAHINET et al., 1995; PEAUCELLE et al., 2002) sendo que uma solução encontrada para problemas que envolvem

LMIs é muitas vezes equivalente a encontrar soluções para o problema original. Em certas classes de sistemas não lineares, os modelos fuzzy TS permitem uma modelagem exata e assim os projetos baseados em LMIs são rigorosos, também aprimorados, ampliando as propostas de condições feitas em (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996) como pode ser visto em (JOHANSSON, 2003; TANAKA; HORI; WANG, 2003; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003).

Muitos esforços tem sido feitos na área de análise da estabilidade (CAMPOS et al., 2013; CAO; REES; FENG, 1997a, 1997b; KIM; LEE, 2000; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998a; TANAKA; SANO, 1994; TANAKA; SUGENO, 1992), já que esta, é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle fuzzy sendo possível projetar um regulador fuzzy se for disponível um bom critério de análise da estabilidade.

Os principais resultados deste trabalho, adotando as taxas de variações temporais das funções de pertinência como pertencentes a intervalos assimétricos no Capítulo 3 são: a formulação de um teorema baseado no hiper-retângulo do conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS), que generaliza os resultados anteriores disponíveis na literatura e a obtenção algébrica de um politopo formado pela intersecção do hiper-plano das taxas de variações temporais das funções de pertinência com o hiper-retângulo, para atingir este objetivo foram formulados dois teoremas que oferecem condições necessárias e suficientes para este problema de estabilidade. Em seguida no Capítulo 4 particularizamos o domínio das taxas de variações para o caso em que as derivadas temporais das funções de pertinência pertençam a intervalos simétricos, porém diferentes de uma taxa para outra e finalmente no Capítulo 5 restringimos as taxas de variações como pertencentes a intervalos simétricos porém iguais. A notação utilizada é a usual, por exemplo, para matrizes ou vetores tais como $x^T(t)$, (T) indica o seu transposto. O conjunto dos r primeiros números naturais, isto é, {1,2, ..., r}, é denotado por $\mathbb{K}_r$.

2 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

O sistema fuzzy Takagi-Sugeno, (TANIGUCHI et al., 2001; TAKAGI; SUGENO, 1985) consiste em representar um modelo de uma planta não linear através de combinações de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, que representam o comportamento de forma aproximada ou exata desse sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Na maioria dos casos o modelo é descrito de forma aproximada e o erro de aproximação em relação ao sistema real depende do número de modelos locais utilizados, determinado pelo projetista, que analisa as necessidades dependendo do custo-benefício, ou seja, uma grande quantidade de modelos locais podem exigir um grande custo computacional no projeto ou dificultar a implementação. Um modelo fuzzy é um método de modelagem simples, sua principal característica é a descrição das dinâmicas locais de cada regra fuzzy por um modelo de sistema linear. Mais especificamente, é um conjunto de regras *se-então* que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema (ESTEVES, 2011).

Tem-se o seguinte modelo linear local

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t),$$

e considerando o sistema não forçado ($u(t) = 0$) o modelo linear local será

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$ (r é o número de modelos lineares), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado. Estas informações são fundidas com as regras *se-então* disponíveis, sendo que a i-ésima regra tem a forma:

$$\textit{Regra } i: \begin{cases} \text{Se} & z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e} \cdots \text{e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{então} & \dot{x}(t) = A_i x(t). \end{cases} \tag{1}$$

Tem-se que M_j^i, com $j = 1, 2, \cdots, p$, é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\cdots$, $z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o "peso" do conjunto fuzzy $M_j{}^i$ associado à va-

riável premissa $z_j(t)$, e seja

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t)\, z_2(t)\, \ldots\, z_p(t)].$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i \in \mathbb{K}_r$,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{r} w^i(z(t)) > 0,\ i \in \mathbb{K}_r.$$

Uma escolha conveniente para a obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não lineares é adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não linear. Defina

$$h = [h_1\ \ h_2\ \ \ldots\ \ h_r]^T.$$

Desta forma, dados $[x(t), u(t), z(t)]$, o modelo matemático final do sistema fuzzy é inferido utilizando o método do centro de gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI et al., 2001), e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(z(t))(A_i x(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(A_i x(t)), \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) A_i \right) x(t), \\ &= A(h)x(t), \end{aligned} \tag{2}$$

sendo que,

$$h_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(z(t))}, \qquad i \in \mathbb{K}_r. \tag{3}$$

Em (3), $h_i(z(t))$ é o peso normalizado de cada modelo de regra, também conhecido como função de pertinência do modelo local $i,\ i \in \mathbb{K}_r$ (CARDIM, 2009).

É importante observar que, para $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1,\ i \in \mathbb{K}_r. \tag{4}$$

Então, o sistema (2) e (4) pode ser descrito pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno abaixo:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{r} h_j(x(t)) A_j x(t), \tag{5}$$

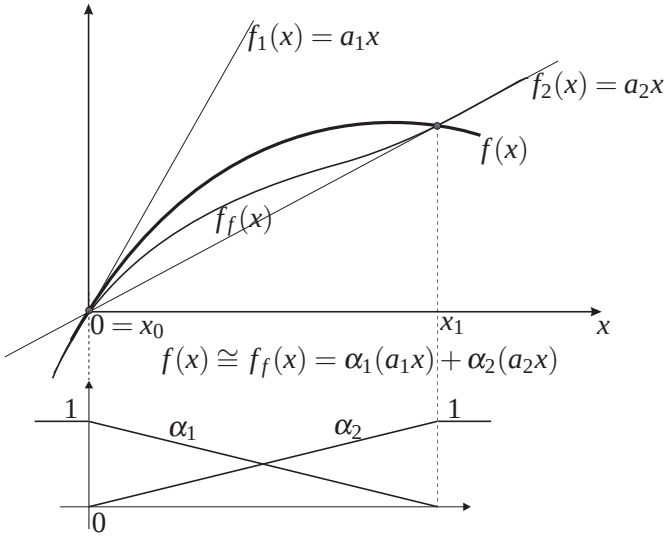
sendo que, $j \in \mathbb{K}_r$ (r é o número de modelos lineares), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $h_j(x(t))$ é o peso normalizado de cada modelo local dos sistema A_j que satisfaz as seguintes propriedades:

$$h_j(x(t)) \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{r} h_j(x(t)) = 1,\ \sum_{j=1}^{r} \dot{h}_j(x(t)) = 0,\quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{K}_r. \tag{6}$$

Exemplo

O exemplo a seguir ilustra a aproximação obtida pelos modelos fuzzy TS (MACHADO, 2003).

Figura 1 - Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.



Fonte: Machado (2003), Cardim (2009) e Esteves (2011)

Considerando a função não linear $f(x)$ mostrada na Figura 1, nota-se que esta pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 1 (observe que $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ são positivas ou nulas e que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifica-se que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de opera-

ção) ou $f_2(x)$, por exemplo para $x_0 \leq x \leq x_1$. Obviamente, se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não lineares. Para obter melhores aproximações, é necessário escolher funções $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ de modo a conseguir uma aproximação exata da função $f(x)$ utilizando $f_f(x)$ (CARDIM, 2009; ESTEVES, 2011; MACHADO, 2003).

Em (TANIGUCHI et al., 2001) foi proposto um procedimento sistemático que permite representar exatamente uma ampla classe de sistemas não lineares através de modelos fuzzy TS. Por exemplo, considere que a função $f(x)$ citada anteriormente, possa ser descrita na forma $f(x) = f_0(x)x$ e que no intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$, $f_0(x) \in [f_{0min}, f_{0max}]$. Então, este procedimento representa exatamente $f(x)$ no intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$, como $f(x) = \alpha_1(x) f_{0min} + \alpha_2(x) f_{0max}$, sendo que $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x) \geq 0$ e $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$.

2.1 Funções Lyapunov

Em geral, não há uma maneira sistemática para encontrar funções Lyapunov candidatas. O grau de conservadorismo das condições de estabilidade dependem da forma da função Lyapunov e da estrutura do sistema. Diferentes funções Lyapunov são utilizadas por diferentes autores na literatura (BERNAL; HUSEK, 2005; CHADLI; MAQUIN; RAGOT, 2000; JADBABAIE, 1999; JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999; OHTAKE; TANAKA; WANG, 2003; TANAKA; HORI; WANG, 2003; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998a; TANAKA; SANO, 1994; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996), dependendo da natureza do sistema e de sua complexidade (ABDELMALEK, 2009).

2.1.1 Função Lyapunov Quadrática

A função Lyapunov quadrática (FLQ) é dada por:

$$V(x(t)) = x^T(t) P\, x(t),\ P > 0,\ P^T = P. \tag{7}$$

2.1.2 Função Lyapunov Fuzzy

As funções de Lyapunov fuzzy (FLF) para a análise da estabilidade do sistema fuzzy Takagi-Sugeno (5) e (6) são definidas por, (JADBABAIE, 1999; LEE; PARK; JOO, 2012;

LEE; JOO; TAK, 2014; TANAKA; HORI; WANG, 2003).

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) x^T(t) P_i \, x(t), \tag{8}$$

sendo que, P_i, $i \in \mathbb{K}_r$, são matrizes simétricas positivas definidas.

3 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno via hiper-retângulos e politopos para intervalos de $\dot{h}_i$ assimétricos

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é propor novas condições para reduzir o conservadorismo na análise da estabilidade, no sentido de Lyapunov, de sistemas fuzzy TS. Entende-se por conservadorismo a imposição de restrições mais exigentes, durante análise de estabilidade ou projeto de controlador para um certo sistema, do que o conjunto necessário e suficiente que assegura uma determinada condição de projeto.

Uma das fontes de conservadorismo deve-se ao caráter suficiente do método direto de Lyapunov, também conhecido como segundo método de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992). Caso um teste de análise de estabilidade, baseado em uma condição necessária e suficiente, falhe para uma determinada função candidata nada pode ser concluído com relação à instabilidade, pois outra função de Lyapunov não testada pode existir, fornecendo o certificado de estabilidade (MOZELLI, 2011).

Outro fator está relacionado ao conservadorismo das condições de estabilidade e a capacidade computacional para verificá-las. Os métodos disponíveis para solução de LMIs são muito eficientes, sendo capazes de resolver um conjunto de restrições acopladas em um tempo não muito superior ao gasto para verificar a mesma quantidade de restrições isoladamente (VANDENBERGHE; BALAKRISHNAN, 1997). Contudo, mostra-se em alguns problemas que existe uma parametrização para a função de Lyapunov candidata que assegura estabilidade mas, mesmo assim, a verificação computacional falha, sem que uma das possíveis soluções seja encontrada (TANAKA; WANG, 2001). Nesse caso, o que se observa é um grau de conservadorismo nas condições de estabilidade. Para um pequeno número de regras, é possível que tais condições de estabilidade sejam bem sucedidas, mas

à medida em que um modelo com mais regras é testado, aumenta-se o acoplamento entre as várias restrições, pode-se não obter êxito na busca de uma solução factível. Portanto, não se requer, necessariamente, a troca da função candidata, mas apenas que as condições de estabilidade sejam mais brandas (ditas também mais relaxadas ou ainda menos conservadoras)(MOZELLI, 2011).

Outra fonte de conservadorismo se encontra no método quadrático de Lyapunov que leva em conta apenas a característica politópica do sistema e não sua natureza variante no tempo, isto é, não utiliza a taxa de variação temporal das funções de pertinência, como afirma (TOGNETTI, 2011): a abordagem com função de Lyapunov quadrática ainda é utilizada para garantir a estabilidade global do modelo nebuloso sem demandar informações referentes à taxa de variação das funções de pertinência, ao preço de um alto conservadorismo. A abordagem quadrática requer encontrar uma matriz definida positiva P comum para os r sub-modelos, o que faz com que seja muito conservadora e, portanto, nos leva a procurar condições menos conservadoras de estabilidade. Por consequência, com o objetivo de obter resultados menos conservadores, novas formulações foram propostas com o objetivo de relaxar a formulação original. Dentre estas proposições podemos citar o emprego de funções de Lyapunov por partes (ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006; CAO; REES; FENG, 1996, 1997b; JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999; RANTZER; JOHANSSON, 2000; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998a; TOGNETTI; OLIVEIRA, 2010) e de funções de Lyapunov fuzzy (CAO; REES; FENG, 1997a; CHADLI; MAQUIN; RAGOT, 2000; HADJILI, 2002; JADBABAIE, 1999; TANAKA; HORI; WANG, 2001b, 2003; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; TANAKA et al., 2007), que possibilitam um aumento da aplicabilidade e o surgimento de procedimentos de projeto menos conservadores. Na mesma linha de Tanaka, Hori e Wang (2003), podemos citar outras contribuições significativas apresentadas em Mozelli et al. (2009), Mozelli (2011) e Esteves et al. (2011).

3.1.1 Teoremas para comparações numéricas

Os teoremas listados serão utilizados com o objetivo de comparações numéricas com as relaxações desenvolvidas neste trabalho. O teorema a seguir, baseado na inclusão de uma variável de folga matricial X simétrica e constante para todos os modelos locais, originalmente apresentado em Mozelli et al. (2009), Teorema 6, garante a estabilidade de (5) e (6), considerando a FLF dada em (8).

Teorema 1. *Considere que* $\left|\dot{h}_k(x(t))\right| \leq \phi_k$, $k \in \mathbb{K}_r$, *sendo que as constantes* ϕ_k *são co-*

nhecidas. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy TS (5) e (6) é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas P_i, $i \in \mathbb{K}_r$ e X tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas,

$$\begin{aligned} &P_i > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \\ &P_i + X \geqslant 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \\ &\tilde{P}_\phi + \frac{1}{2}\left(A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j\right) < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i \leqslant j, \end{aligned} \tag{9}$$

sendo que $\tilde{P}_\phi = \sum_{k=1}^{r} \phi_k (P_k + X)$.

Demonstração. (MOZELLI et al., 2009). □

O Teorema 1 oferece condições, para a estabilidade, mais relaxadas do que as propostas em Tanaka, Hori e Wang (2003).

O teorema que segue, baseado na inclusão de variáveis de folga X_{ij} simétricas e constantes para cada um dos modelos locais, originalmente apresentado em Esteves (2011), Teorema 1.3, garante a estabilidade de (5) e (6), considerando a FLF dada em (8), com condições mais relaxadas do que aquelas propostas em Mozelli et al. (2009).

Teorema 2. *Considere que* $\left|\dot{h}_\rho(x(t))\right| \leqslant \phi_\rho$, $t \geq 0$ *e* $\rho \in \mathbb{K}_r$, *sendo que as constantes* ϕ_ρ *são conhecidas. O ponto de equilíbrio* $x = 0$ *do sistema fuzzy TS (5) e (6) é assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas* P_i *e* X_{ij}, $i, j \in \mathbb{K}_r$, *tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\begin{aligned} &P_i > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \\ &P_k + X_{ij} \geqslant 0, \quad i, j, k \in \mathbb{K}_r, \quad i \leqslant j, \\ &\tilde{P}_{\phi_{ij}} + \frac{1}{2}\left(A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j\right) < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i \leqslant j, \end{aligned} \tag{10}$$

sendo que $\tilde{P}_{\phi_{ij}} = \sum_{\rho=1}^{r} \phi_\rho \left(P_\rho + X_{ij}\right)$, $i, j \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. (ESTEVES, 2011). □

O Teorema 3 a seguir apresenta um conjunto de condições, baseadas no hiper-retângulo do conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência, que garantem a estabilidade de (5) e (6), considerando a FLF dada em (8). Esta é uma das contribuições desta tese.

3.2 Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Hiper-retângulos

Teorema 3. *Considere que* $-\phi_{\rho 1} \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leqslant \phi_{\rho 2}$, $t \geq 0$ *e* $\rho \in \mathbb{K}_r$, *sendo que as constantes* $\phi_{\rho 1}$ *e* $\phi_{\rho 2}$ *são conhecidas. O ponto de equilíbrio* $x = 0$ *do sistema fuzzy TS (5) e (6) é assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas* P_i *e* X_{ij}, $i, j \in \mathbb{K}_r$, *tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas,*

$$P_i > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_{11}(P_1 + X_{ij}) - \phi_{21}(P_2 + X_{ij}) - \phi_{31}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots - \phi_{r-2,1}(P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1}(P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_{11}(P_1 + X_{ij}) - \phi_{21}(P_2 + X_{ij}) - \phi_{31}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots - \phi_{r-2,1}(P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1}(P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_{11}(P_1 + X_{ij}) - \phi_{21}(P_2 + X_{ij}) - \phi_{31}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots - \phi_{r-2,1}(P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2}(P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_{11}(P_1 + X_{ij}) - \phi_{21}(P_2 + X_{ij}) - \phi_{31}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots - \phi_{r-2,1}(P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2}(P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&\vdots \\
&F_{ij} + \phi_{12}(P_1 + X_{ij}) + \phi_{22}(P_2 + X_{ij}) + \phi_{32}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots + \phi_{r-2,2}(P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1}(P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_{12}(P_1 + X_{ij}) + \phi_{22}(P_2 + X_{ij}) + \phi_{32}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots + \phi_{r-2,2}(P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1}(P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_{12}(P_1 + X_{ij}) + \phi_{22}(P_2 + X_{ij}) + \phi_{32}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots + \phi_{r-2,2}(P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2}(P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1}(P_r + X_{ij}) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_{12}(P_1 + X_{ij}) + \phi_{22}(P_2 + X_{ij}) + \phi_{32}(P_3 + X_{ij}) \\
&\qquad \cdots + \phi_{r-2,2}(P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2}(P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2}(P_r + X_{ij}) < 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

sendo que o termo F_{ij} *é definido por,*

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j\right), \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i \leq j. \tag{13}$$

Demonstração. Considerando a candidata a função de Lyapunov fuzzy (8), então

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{r} \dot{h}_i(x(t)) x^T(t) P_i\, x(t) + \sum_{i=1}^{r} h_i(x(t)) \left[\dot{x}^T(t) P_i\, x(t) + x^T(t) P_i\, \dot{x}(t)\right].$$

Usando (5) e sua transposta, note que

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) x^T(t) P_\rho \; x(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) \left[A_j^T P_i + P_i A_j\right] x(t)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) x^T(t) P_\rho \; x(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) \left[A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j\right] x(t).$$

Multiplicando o termo $\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) x^T(t) P_\rho \; x(t)$ por $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t))$, que é igual a 1 devido à equação $\sum_{j=1}^{r} h_j(x(t)) = 1$ de (6) e tendo em vista (13), tem-se que

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) \left[\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) P_\rho + F_{ij}\right] x(t). \tag{14}$$

Da terceira relação de (6), sendo $X_{ij} = X_{ij}^T$ matriz simétrica arbitrária, vem

$$\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) X_{ij} = 0. \tag{15}$$

Adicionando a igualdade (15) na primeira parcela de (14), resulta

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) \left[\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) \left(P_\rho + X_{ij}\right) + F_{ij}\right] x(t). \tag{16}$$

Defina um hiper-retângulo em um espaço real de dimensão r (LARA; FLORES; CALDERON, 2009) como o produto cartesiano de r intervalos, dado por,

$$B = [-\phi_{11}, \phi_{12}] \times [-\phi_{21}, \phi_{22}] \times \ldots \times [-\phi_{r1}, \phi_{r2}], \tag{17}$$

sendo que, cada intervalo é formado, considerando a relação $-\phi_{\rho 1} \leqslant \dot{h}_\rho(x(t)) \leqslant \phi_{\rho 2}$, para $\rho \in \mathbb{K}_r$. É conhecido que é possível obter o valor de $\dot{h_\rho}(x(t))$ através de uma combinação convexa dos vértices do hiper-retângulo (17), ou seja,

$$\dot{h}_\rho(x(t)) = \beta_{\rho 1}\left(-\phi_{\rho 1}\right) + \beta_{\rho 2}\left(\phi_{\rho 2}\right), \tag{18}$$

sendo que, para $\rho \in \mathbb{K}_r$, $\beta_{\rho 1} \geqslant 0$, $\beta_{\rho 2} \geqslant 0$ e $\beta_{\rho 1} + \beta_{\rho 2} = 1$. Substituindo (18) em (16), e desenvolvendo apenas a expressão entre colchetes de (16), vem

$$F_{ij} + \sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho(x(t)) \left(P_\rho + X_{ij}\right) = F_{ij} + \sum_{\rho=1}^{r} \left(\beta_{\rho 1}\left(-\phi_{\rho 1}\right) + \beta_{\rho 2}\left(\phi_{\rho 2}\right)\right) \left(P_\rho + X_{ij}\right). \tag{19}$$

Defina

$$\prod_{\substack{m=1\\m\neq\rho}}^{r}(\beta_{m1}+\beta_{m2})=(\beta_{11}+\beta_{12})(\beta_{21}+\beta_{22})\cdots\left(\beta_{\rho-1,1}+\beta_{\rho-1,2}\right)\left(\beta_{\rho+1,1}+\beta_{\rho+1,2}\right)$$
$$\cdots(\beta_{r-1,1}+\beta_{r-1,2})(\beta_{r,1}+\beta_{r,2}), \qquad (20)$$

sendo que, para $m\in\mathbb{K}_r$, $\beta_{m1}\geqslant 0$, $\beta_{m2}\geqslant 0$ e $\beta_{m1}+\beta_{m2}=1$. Multiplicando cada parcela do somatório em (19) por (20), resulta

$$F_{ij}+\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho\left(x(t)\right)\left(P_\rho+X_{ij}\right)=F_{ij}+\sum_{\rho=1}^{r}\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq\rho}}^{r}(\beta_{m1}+\beta_{m2})\right)$$
$$\times\left(\beta_{\rho1}\left(-\phi_{\rho1}\right)+\beta_{\rho2}\left(\phi_{\rho2}\right)\right)\left(P_\rho+X_{ij}\right). \qquad (21)$$

Observe que podemos desenvolver a expressão (20) da seguinte forma:

$$\prod_{\substack{m=1\\m\neq\rho}}^{r}(\beta_{m1}+\beta_{m2})=\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}$$
$$\cdots\sum_{i_{\rho-1}=1}^{2}\sum_{i_{\rho+1}=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2}\left(\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{\rho-2i_{\rho-2}}\beta_{\rho-1i_{\rho-1}}\beta_{\rho+1i_{\rho+1}}\beta_{\rho+2i_{\rho+2}}\cdots\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{ri_r}\right). \qquad (22)$$

Substituindo (22) em (21),

$$F_{ij}+\sum_{\rho=1}^{r}\left(\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_{\rho-1}=1}^{2}\sum_{i_{\rho+1}=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2}\left(\beta_{1i_1}\cdots\beta_{\rho-2i_{\rho-2}}\beta_{\rho-1i_{\rho-1}}\beta_{\rho+1i_{\rho+1}}\beta_{\rho+2i_{\rho+2}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{ri_r}\right)\right)\times\left(\beta_{\rho1}\left(-\phi_{\rho1}\right)+\beta_{\rho2}\left(\phi_{\rho2}\right)\right)\left(P_\rho+X_{ij}\right). \qquad (23)$$

Desenvolvendo o somatório em ρ, segue de (23) a expressão

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} + \sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2} \beta_{2i_2}\beta_{3i_3}\cdots\beta_{ri_r}\left(\beta_{11}\left(-\phi_{11}\right)+\beta_{12}\left(\phi_{12}\right)\right)\left(P_1+X_{ij}\right)\\
&+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2} \beta_{1i_1}\beta_{3i_3}\beta_{4i_4}\cdots\beta_{ri_r}\left(\beta_{21}\left(-\phi_{21}\right)+\beta_{22}\left(\phi_{22}\right)\right)\left(P_2+X_{ij}\right)\\
&+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\sum_{i_5=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2} \beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\beta_{4i_4}\beta_{5i_5}\cdots\beta_{ri_r}\left(\beta_{31}\left(-\phi_{31}\right)+\beta_{32}\left(\phi_{32}\right)\right)\left(P_3+X_{ij}\right)\\
&+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\sum_{i_5=1}^{2}\sum_{i_6=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2} \beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\beta_{3i_3}\beta_{5i_5}\beta_{6i_6}\cdots\beta_{ri_r}\left(\beta_{41}\left(-\phi_{41}\right)+\beta_{42}\left(\phi_{42}\right)\right)\left(P_4+X_{ij}\right)\\
&\vdots\\
&+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2} \beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-3i_{r-3}}\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{ri_r}\\
&\qquad\qquad\times\left(\beta_{r-2,1}\left(-\phi_{r-2,1}\right)+\beta_{r-2,2}\left(\phi_{r-2,2}\right)\right)\left(P_{r-2}+X_{ij}\right)\\
&+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-2}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2} \beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-3i_{r-3}}\beta_{r-2i_{r-2}}\beta_{ri_r}\\
&\qquad\qquad\times\left(\beta_{r-1,1}\left(-\phi_{r-1,1}\right)+\beta_{r-1,2}\left(\phi_{r-1,2}\right)\right)\left(P_{r-1}+X_{ij}\right)\\
&\quad+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-2}=1}^{2}\sum_{i_{r-1}=1}^{2} \beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-3i_{r-3}}\beta_{r-2i_{r-2}}\beta_{r-1i_{r-1}}\\
&\qquad\qquad\times\left(\beta_{r1}\left(-\phi_{r1}\right)+\beta_{r2}\left(\phi_{r2}\right)\right)\left(P_r+X_{ij}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Efetuando as distributivas,

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} + \left(\left(-\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{11}\beta_{2i_2}\beta_{3i_3}\cdots\beta_{ri_r}\right)\phi_{11}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{12}\beta_{2i_2}\beta_{3i_3}\cdots\beta_{ri_r}\right)\phi_{12}\right)\left(P_1+X_{ij}\right)\\
&+\left(\left(-\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{21}\beta_{3i_3}\beta_{4i_4}\cdots\beta_{ri_r}\right)\phi_{21}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_3=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{22}\beta_{3i_3}\beta_{4i_4}\cdots\beta_{ri_r}\right)\phi_{22}\right)\left(P_2+X_{ij}\right)\\
&+\left(\left(-\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\sum_{i_5=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\beta_{31}\beta_{4i_4}\beta_{5i_5}\cdots\beta_{ri_r}\right)\phi_{31}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_4=1}^{2}\sum_{i_5=1}^{2}\cdots\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\beta_{32}\beta_{4i_4}\beta_{5i_5}\cdots\beta_{ri_r}\right)\phi_{32}\right)\left(P_3+X_{ij}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&+\left(\left(-\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-4}=1}^{2}\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-4i_{r-4}}\beta_{r-3i_{r-3}}\,\beta_{r-2,1}\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{ri_r}\right)\phi_{r-2,1}\right. \\
&\left.+\left(\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-4}=1}^{2}\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-4i_{r-4}}\beta_{r-3i_{r-3}}\beta_{r-2,2}\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{ri_r}\right)\phi_{r-2,2}\right) \\
&\times\left(P_{r-2}+X_{ij}\right) \\
&+\left(\left(-\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-2}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\ldots\beta_{r-3i_{r-3}}\,\beta_{r-2i_{r-2}}\beta_{r-1,1}\beta_{ri_r}\right)\phi_{r-1,1}\right. \\
&\left.+\left(\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-2}=1}^{2}\sum_{i_r=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-3i_{r-3}}\beta_{r-2i_{r-2}}\beta_{r-1,2}\beta_{ri_r}\right)\phi_{r-1,2}\right)\left(P_{r-1}+X_{ij}\right) \\
&+\left(\left(-\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-2}=1}^{2}\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-3i_{r-3}}\,\beta_{r-2i_{r-2}}\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{r1}\right)\phi_{r1}\right. \\
&\left.+\left(\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\cdots\sum_{i_{r-3}=1}^{2}\sum_{i_{r-2}=1}^{2}\sum_{i_{r-1}=1}^{2}\beta_{1i_1}\beta_{2i_2}\cdots\beta_{r-3i_{r-3}}\beta_{r-2i_{r-2}}\beta_{r-1i_{r-1}}\beta_{r2}\right)\phi_{r2}\right)\left(P_r+X_{ij}\right).
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo os somatórios dos produtos e efetuando as distributivas, finalmente vem,

$$
\begin{aligned}
&F_{ij}+ \\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{r-2,1}\beta_{r-1,1}\beta_{r1}\left[-\phi_{11}\left(P_1+X_{ij}\right)-\phi_{21}\left(P_2+X_{ij}\right)-\phi_{31}\left(P_3+X_{ij}\right)-\cdots\right. \\
&\qquad\left.-\phi_{r-2,1}\left(P_{r-2}+X_{ij}\right)-\phi_{r-1,1}\left(P_{r-1}+X_{ij}\right)-\phi_{r1}\left(P_r+X_{ij}\right)\right] \\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{r-2,1}\beta_{r-1,1}\beta_{r2}\left[-\phi_{11}\left(P_1+X_{ij}\right)-\phi_{21}\left(P_2+X_{ij}\right)-\phi_{31}\left(P_3+X_{ij}\right)-\cdots\right. \\
&\qquad\left.-\phi_{r-2,1}\left(P_{r-2}+X_{ij}\right)-\phi_{r-1,1}\left(P_{r-1}+X_{ij}\right)+\phi_{r2}\left(P_r+X_{ij}\right)\right] \\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{r-2,1}\beta_{r-1,2}\beta_{r1}\left[-\phi_{11}\left(P_1+X_{ij}\right)-\phi_{21}\left(P_2+X_{ij}\right)-\phi_{31}\left(P_3+X_{ij}\right)-\cdots\right. \\
&\qquad\left.-\phi_{r-2,1}\left(P_{r-2}+X_{ij}\right)+\phi_{r-1,2}\left(P_{r-1}+X_{ij}\right)-\phi_{r1}\left(P_r+X_{ij}\right)\right] \\
&+\beta_{11}\beta_{21}\beta_{31}\cdots\beta_{r-2,1}\beta_{r-1,2}\beta_{r2}\left[-\phi_{11}\left(P_1+X_{ij}\right)-\phi_{21}\left(P_2+X_{ij}\right)-\phi_{31}\left(P_3+X_{ij}\right)-\cdots\right. \\
&\qquad\left.-\phi_{r-2,1}\left(P_{r-2}+X_{ij}\right)+\phi_{r-1,2}\left(P_{r-1}+X_{ij}\right)+\phi_{r2}\left(P_r+X_{ij}\right)\right] \\
&\vdots \\
&+\beta_{12}\beta_{22}\beta_{32}\cdots\beta_{r-2,2}\beta_{r-1,2}\beta_{r2}\left[+\phi_{12}\left(P_1+X_{ij}\right)+\phi_{22}\left(P_2+X_{ij}\right)+\phi_{32}\left(P_3+X_{ij}\right)+\cdots\right. \\
&\qquad\left.+\phi_{r-2,2}\left(P_{r-2}+X_{ij}\right)+\phi_{r-1,2}\left(P_{r-1}+X_{ij}\right)+\phi_{r2}\left(P_r+X_{ij}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Observe que, (21), (23)-(26) são equivalentes a (19). Então, como $\beta_{m1}\geqslant 0$, $\beta_{m2}\geqslant 0$ e $\beta_{m1}+\beta_{m2}=1$, para todo $m\in\mathbb{K}_r$, segue de (19) e (26) que a matriz entre colchetes de (16)

é negativa definida se as LMIs dadas em (27) forem satisfeitas.

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \cdots \\
&\qquad\qquad - \phi_{r-2,1}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) - \phi_{r-1,1}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) - \phi_{r1}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \cdots \\
&\qquad\qquad - \phi_{r-2,1}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) - \phi_{r-1,1}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) + \phi_{r2}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \cdots \\
&\qquad\qquad - \phi_{r-2,1}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) + \phi_{r-1,2}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) - \phi_{r1}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \cdots \\
&\qquad\qquad - \phi_{r-2,1}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) + \phi_{r-1,2}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) + \phi_{r2}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&\vdots \\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad + \phi_{r-2,2}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) - \phi_{r-1,1}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) - \phi_{r1}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad + \phi_{r-2,2}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) - \phi_{r-1,1}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) + \phi_{r2}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad + \phi_{r-2,2}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) + \phi_{r-1,2}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) - \phi_{r1}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad + \phi_{r-2,2}\left(P_{r-2} + X_{ij}\right) + \phi_{r-1,2}\left(P_{r-1} + X_{ij}\right) + \phi_{r2}\left(P_r + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Agora, considerando (6), note que as condições dadas em (27) implicam de (16) que $\dot{V}(x(t)) < 0$ para $x(t) \neq 0$. Então, este sistema (27) composto de 2^r LMIs (sendo que r é o número de regras ou modelos locais), juntamente com as condições de positividade dos P_ρ ($\rho \in \mathbb{K}_r$), demonstram o teorema proposto, pois com estas condições $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x(t) \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0$. □

Observação 1. *Um ponto relevante do Teorema 3 foi a eliminação da LMI* $P_k + X_{ij} \geq 0$, $i, j, k \in \mathbb{K}_r$, $i \leq j$, *do Teorema 2 (e sua análoga no Teorema 1). Este fato criou uma relaxação nas condições para a estabilidade, demonstrada no Corolário 1 e comprovada nos exemplos numéricos, descritos no Capítulo 5.*

Corolário 1. *Se as condições do Teorema 2 são factíveis, então as condições do Teorema 3 são também factíveis.*

Demonstração. Considere que as LMIs dadas em (10) são factíveis. Assim, para todo

$i, j, k \in \mathbb{K}_r$, $i \leq j$, note que $P_i = P_i^T > 0$, $\left(P_k + X_{ij}\right) \geq 0$, e

$$\frac{1}{2}\left(A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j\right) + \sum_{\rho=1}^{r} \phi_\rho \left(P_\rho + X_{ij}\right) < 0. \tag{28}$$

Agora, observe que, como $\phi_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{K}_r$, então se a última LMI dada em (12):

$$F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \cdots + \phi_{r-1} \left(P_{r-1} + X_{ij}\right) + \phi_r \left(P_r + X_{ij}\right) < 0, \tag{29}$$

for factível, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, $i \leq j$, então todas as outras LMIs dadas em (12) também serão factíveis. Mas, tendo em vista (13), note que as condições dadas em (28) e (29) são idênticas.
Logo, o corolário está demonstrado. □

No Capítulo 5 são apresentados exemplos que mostram que as condições do Teorema 3 podem ser mais gerais do que as condições do Teorema 2, em termos de áreas factíveis. Os resultados desta subseção foram divulgados no artigo (GUEDES et al., 2013).

3.3 Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Politopos

Os principais objetivos desta seção são, a apresentação de dois teoremas que fornecem condições necessárias e suficientes para a estabilidade de (5) e (6), e que, possibilitam a determinação algébrica dos vértices dos politopos formados pela interseção dos hiper-retângulos com os hiper-planos das variações das derivadas temporais das funções de pertinência, no estudo da estabilidade de sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O fato de apresentar-se dois teoremas, deve-se à possibilidade das regras ou modelos locais serem pares ou ímpares. Ressalte-se que os politopos obtidos ficam independentes de qualquer variável matricial arbitrária adicionada, tal como X (MOZELLI et al., 2009) ou X_{ij} (ESTEVES, 2011; GUEDES et al., 2013), e continuam fornecendo exatamente os mesmos resultados encontrados em Guedes et al. (2013). Esta é outra contribuição desta tese.

3.3.1 Casos particulares de politopos ϕ's assimétricos

A seguir são apresentados alguns casos particulares para obtenção de politopos, para um número de regras ímpar ou par, com o objetivo de auxiliar a compreensão do leitor

sobre as ideias básicas propostas que em seguida serão generalizadas.

Politopos para $\phi's$ assimétricos com número ímpar de regras

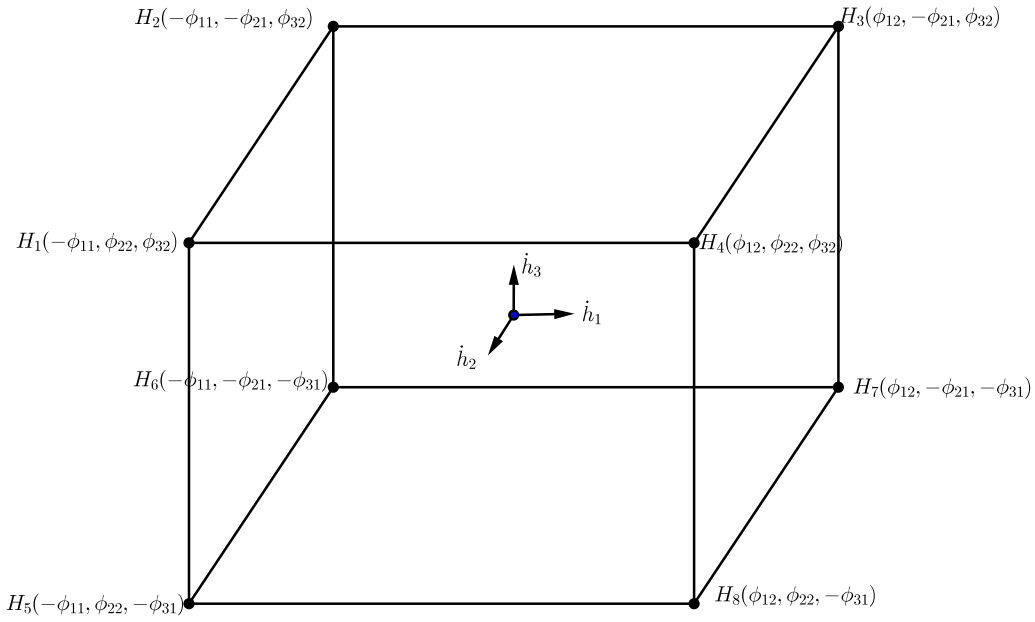
Politopos para $\phi's$ assimétricos com $r = 3$ (três regras)

Dadas as matrizes simétricas e positivas definidas P_1, P_2, $P_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, suponha que para um certo vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T P_3 x \geqslant x^T P_2 x \geqslant x^T P_1 x$. Então $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$ e $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$.

Adote os intervalos $-\phi_{\rho 1} \leqslant \dot{h}_\rho \leqslant \phi_{\rho 2}$ para $1 \leqslant \rho \leqslant 3$, ou seja, $\begin{cases} -\phi_{11} \leqslant \dot{h}_1 \leqslant \phi_{12}, \\ -\phi_{21} \leqslant \dot{h}_2 \leqslant \phi_{22}, \\ -\phi_{31} \leqslant \dot{h}_3 \leqslant \phi_{32}. \end{cases}$

Realizando o produto cartesiano destes três intervalos dos $\dot{h}_\rho$, para $1 \leqslant \rho \leqslant 3$, ou seja, $B = [-\phi_{11}, \phi_{12}] \times [-\phi_{21}, \phi_{22}] \times [-\phi_{31}, \phi_{32}]$, define-se fisicamente o hiper-retângulo dado pela Figura 2.

Figura 2 - Hiper-retângulo assimétrico com três regras.



Fonte: Do próprio autor.

Defina $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3\right] x$.

Observe que é possível escrever a expressão acima como:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2)\right] x$.

Lembrando que $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 = 0 \Rightarrow \dot{h}_3 = -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, podemos escrever a relação anterior como:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) + \dot{h}_3 (P_3 - P_2)\right] x = x^T F_{ij} x - \dot{h}_1 x^T (P_2 - P_1) x + \dot{h}_3 x^T (P_3 - P_2) x.$
Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$ e $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:
$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,
$\left(\dot{h}_3\right)_{\text{máx}} = \phi_{32}$.
Retornando estes valores na expressão anterior, teremos que o segundo membro dessa expressão formará um limitante superior para $J_{ij}(x)$. Desta forma, teremos que $J_{ij}(x)$ será sempre menor ou igual a esse limitante, logo

$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} + \phi_{11} (P_2 - P_1) + \phi_{32} (P_3 - P_2)\right] x.$$

Desenvolvendo as distributivas e reorganizando os termos, vem

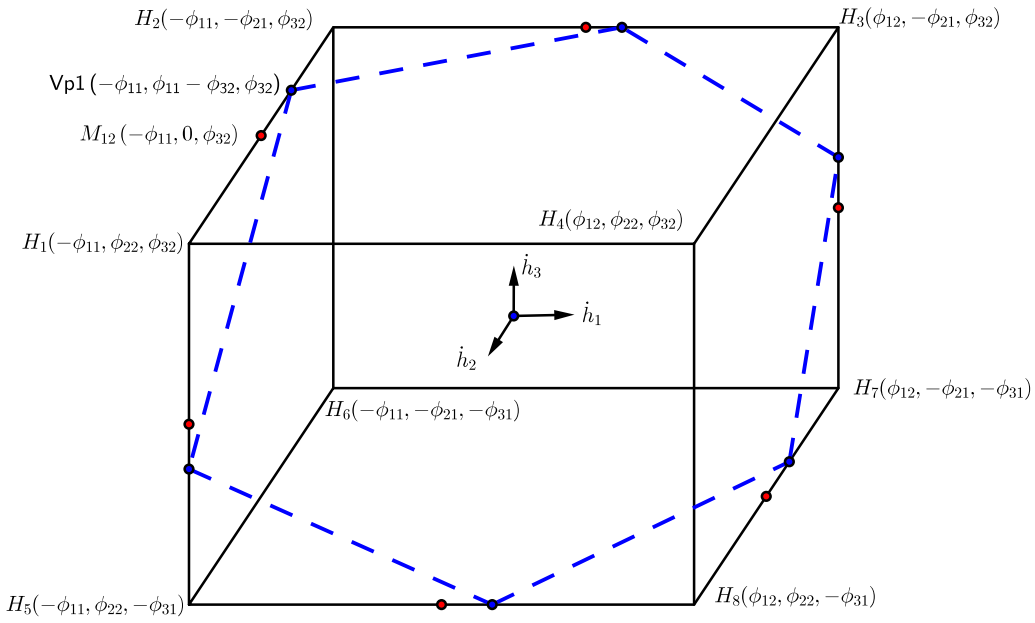
$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} - \phi_{11} P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32}) P_2 + \phi_{32} P_3\right] x.$$

Note que a condição abaixo é suficiente:

$$F_{ij} - \phi_{11} P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32}) P_2 + \phi_{32} P_3 < 0, \tag{30}$$

ou seja ela garante que $J_{ij}(x) \leqslant 0$. Comparando o termo acima com a parte entre colchetes de $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3\right] x$, lembrando que $-\phi_{21} \leq \dot{h}_2 \leq \phi_{22}$, nesse caso teríamos $\dot{h}_2 = \phi_{11} - \phi_{32}$. Defina a dupla desigualdade $-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} \leqslant \phi_{22}$, como condição de existência para o vértice do politopo, gerado pelo ponto $(-\phi_{11}, \phi_{11} - \phi_{32}, \phi_{32})$ no espaço $\mathbb{R}^3$, chamado de *Vp1* na Figura 3. Esta condição de existência possui uma interpretação física muito simples, qual seja, ela garante que o vértice *Vp1* do politopo está entre os extremos da aresta do hiper-retângulo dada pela distância entre os vértices H_1 e H_2 do hiper-retângulo. Outra interpretação pode ser dada ao termo $\phi_{11} - \phi_{32}$, que definiremos como termo composto do $\left(J_{ij}(x)\right)_{\text{máx}}$. Observe que o termo composto representa um valor numérico de $\dot{h}_2$, que é coeficiente do termo P_2, ou seja, esse coeficiente deve representar uma quantidade que respeite a variação do $\dot{h}_2$. Nesta tese é suposto que esse termo composto está entre $-\phi_{21}$ e ϕ_{22}. Da Figura 3, verifica-se que o ponto M_{12} é o ponto médio da aresta do hiper-retângulo formada pelos vértices H_1 e H_2, então o termo composto $\phi_{11} - \phi_{32}$ representa uma métrica, que mede o afastamento do vértice do politopo do centro da aresta do hiper-retângulo. Considerando que $-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} \leqslant \phi_{22}$, observe que para o limitante superior de J_{ij} dado em (30), $\dot{h}_1 = -\phi_{11}$, $\dot{h}_2 = \phi_{11} - \phi_{32}$ e $\dot{h}_3 = \phi_{32}$ estão nos intervalos especificados de $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$ e $\dot{h}_3$ e ainda satisfazem a condição $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 = 0$. Assim, esse limitante superior corresponde ao J_{ij} máximo.

Figura 3 - Hiper-retângulo e politopo assimétricos com três regras.



Fonte: Do próprio autor.

Importante observar que, a condição de existência dada acima, juntamente com a condição do $\left(J_{ij}(x)\right)_{\text{máx}}$ ser negativo definido, ou seja, Se $-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} \leqslant \phi_{22}$ e $F_{ij} - \phi_{11}P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32})P_2 + \phi_{32}P_3 < 0$, formam apenas uma LMI, correspondente ao vértice *Vp1* do politopo, chamada de solução particular para este vértice *Vp1*. Como o politopo para três regras é formado por seis vértices, tendo uma aparência hexagonal (observe, que neste caso o hexágono não é regular, sendo regular apenas quando os termos compostos se anularem, no caso em que todos os $\phi's$ forem iguais), precisamos encontrar as soluções particulares (ou seja as LMIs) para os outros cinco vértices do politopo.

Para isso, defina $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ e $\omega_3(x) \in \mathbb{K}_3$, sendo que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x) \neq \omega_3(x)$, tais que dadas as matrizes $P_1 = {P_1}^T > 0$, $P_2 = {P_2}^T > 0$,$P_3 = {P_3}^T > 0$ e um vetor x, então
$x^T P_{\omega_3} x \geqslant x^T P_{\omega_2} x \geqslant x^T P_{\omega_1} x$.

Note que, para um dado x, sempre existem $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ e $\omega_3(x)$ que satisfazem as condições citadas. Substituindo na solução particular obtida anteriormente para o vértice *Vp1* da Figura 3, 3 por ω_3, 2 por ω_2 e 1 por ω_1, vem:
Se $-\phi_{\omega_2,1} \leqslant \phi_{\omega_1,1} - \phi_{\omega_3,2} \leqslant \phi_{\omega_2,2}$, e $F_{ij} - \phi_{\omega_1,1}P_{\omega_1} + (\phi_{\omega_1,1} - \phi_{\omega_3,2})P_{\omega_2} + \phi_{\omega_3,2}P_{\omega_3} < 0$,
representa a solução geral para todos os vértices do politopo obtido com três regras.

Então, tem-se que $J_{ij}(x) \leqslant 0$, para todo $x \neq 0$, se estas duas condições forem satisfeitas

para toda permutação dos índices ω_1, ω_2 e ω_3.

$$\begin{array}{cccccccc} \omega_1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ \omega_2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \omega_3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}.$$

Considerando que os valores $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$ e $\omega_3 = 3$, estão na primeira coluna da tabela acima, pode-se afirmar pela análise anterior, que estes valores formam a solução particular:

Se $-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} \leqslant \phi_{22}$ e $F_{ij} - \phi_{11}P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32})P_2 + \phi_{32}P_3 < 0$,

ou seja, a LMI correspondente ao vértice *Vp1* da Figura 3, que também aparece na Figura 4.

Agora, adotando os valores da segunda coluna da tabela, ou seja, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$ e $\omega_3 = 2$, obtém-se a solução particular, dada por:

Se $-\phi_{31} \leqslant \phi_{11} - \phi_{22} \leqslant \phi_{32}$ e $F_{ij} - \phi_{11}P_1 + \phi_{22}P_2 + (\phi_{11} - \phi_{22})P_3 < 0$,

sendo que esta solução particular forma o vértice *Vp2* do politopo contido na aresta do hiper-retângulo formada pelos vértices H_1 e H_5, representados na Figura 4. Observe que neste caso, o termo composto, formado por $(\phi_{11} - \phi_{22})$, representa uma métrica que mede a distância que o vértice *Vp2* do politopo se afastou de M_{15} que é o centro da aresta formada pelos vértices H_1 e H_5 do hiper-retângulo.

Agora, adotando os valores da terceira coluna da tabela, ou seja, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$ e $\omega_3 = 2$, obtém-se a solução particular, dada por:

Se $-\phi_{11} \leqslant \phi_{31} - \phi_{22} \leqslant \phi_{12}$ e $F_{ij} + (\phi_{31} - \phi_{22})P_1 + \phi_{22}P_2 - \phi_{31}P_3 < 0$,

sendo que esta solução particular forma o vértice *Vp3* do politopo contido na aresta do hiper-retângulo formada pelos vértices H_5 e H_8, representados na Figura 4. Observe que neste caso, o termo composto, formado por $(\phi_{31} - \phi_{22})$, representa uma métrica que mede a distância que o vértice *Vp3* do politopo se afastou de M_{58} que é o centro da aresta formada pelos vértices H_5 e H_8 do hiper-retângulo.

Agora, adotando os valores da quarta coluna da tabela, ou seja, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 2$ e $\omega_3 = 1$, obtém-se a solução particular, dada por:

Se $-\phi_{21} \leqslant \phi_{31} - \phi_{12} \leqslant \phi_{22}$ e $F_{ij} + \phi_{12}P_1 + (\phi_{31} - \phi_{12})P_2 - \phi_{31}P_3 < 0$,

sendo que esta solução particular forma o vértice *Vp4* do politopo contido na aresta do hiper-retângulo formada pelos vértices H_7 e H_8, representados na Figura 4. Observe que neste caso, o termo composto, formado por $(\phi_{31} - \phi_{12})$, representa uma métrica que mede a distância que o vértice *Vp4* do politopo se afastou de M_{78} que é o centro da aresta formada pelos vértices H_7 e H_8 do hiper-retângulo.

Agora, adotando os valores da quinta coluna da tabela, ou seja, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$ e $\omega_3 = 1$, obtém-se a solução particular, dada por:

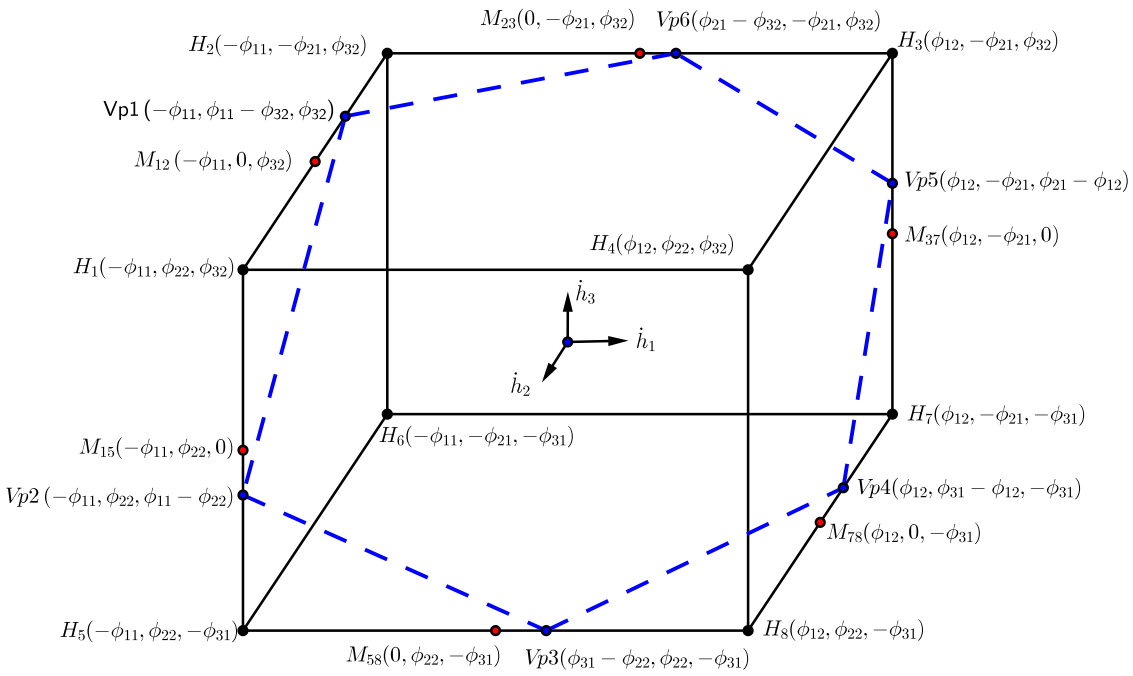
Se $-\phi_{31} \leqslant \phi_{21} - \phi_{12} \leqslant \phi_{32}$ e $F_{ij} + \phi_{12}P_1 - \phi_{21}P_2 + (\phi_{21} - \phi_{12})P_3 < 0$,
seno que esta solução particular forma o vértice *Vp5* do politopo contido na aresta do hiper-retângulo formada pelos vértices H_3 e H_7, representados na Figura 4. Observe que neste caso, o termo composto, formado por $(\phi_{21} - \phi_{12})$, representa uma métrica que mede a distância que o vértice *Vp5* do politopo se afastou de M_{37} que é o centro da aresta formada pelos vértices H_3 e H_7 do hiper-retângulo.

Finalmente, adotando os valores da sexta coluna da tabela, ou seja, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ e $\omega_3 = 3$, obtém-se a solução particular, dada por:
Se $-\phi_{11} \leqslant \phi_{21} - \phi_{32} \leqslant \phi_{12}$ e $F_{ij} + (\phi_{21} - \phi_{32})P_1 - \phi_{21}P_2 + \phi_{32}P_3 < 0$,
sendo que esta solução particular forma o vértice *Vp6* do politopo contido na aresta do hiper-retângulo formada pelos vértices H_2 e H_3, representados na Figura 4. Observe que neste caso, o termo composto, formado por $(\phi_{21} - \phi_{32})$, representa uma métrica que mede a distância que o vértice *Vp6* do politopo se afastou de M_{23} que é o centro da aresta formada pelos vértices H_2 e H_3 do hiper-retângulo.

Resumindo, as condições de existência e os $\left(J_{ij}(x)\right)_{\text{máx}}$, que formam uma solução particular em cada um dos seis vértices do politopo, são:
Para o vértice *Vp1*: Se $-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} \leqslant \phi_{22}$ e $F_{ij} - \phi_{11}P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32})P_2 + \phi_{32}P_3 < 0$,
para o vértice *Vp2*: Se $-\phi_{31} \leqslant \phi_{11} - \phi_{22} \leqslant \phi_{32}$ e $F_{ij} - \phi_{11}P_1 + \phi_{22}P_2 + (\phi_{11} - \phi_{22})P_3 < 0$,
para o vértice *Vp3*: Se $-\phi_{11} \leqslant \phi_{31} - \phi_{22} \leqslant \phi_{12}$ e $F_{ij} + (\phi_{31} - \phi_{22})P_1 + \phi_{22}P_2 - \phi_{31}P_3 < 0$,
para o vértice *Vp4*: Se $-\phi_{21} \leqslant \phi_{31} - \phi_{12} \leqslant \phi_{22}$ e $F_{ij} + \phi_{12}P_1 + (\phi_{31} - \phi_{12})P_2 - \phi_{31}P_3 < 0$,
para o vértice *Vp5*: Se $-\phi_{31} \leqslant \phi_{21} - \phi_{12} \leqslant \phi_{32}$ e $F_{ij} + \phi_{12}P_1 - \phi_{21}P_2 + (\phi_{21} - \phi_{12})P_3 < 0$,
para o vértice *Vp6*: Se $-\phi_{11} \leqslant \phi_{21} - \phi_{32} \leqslant \phi_{12}$ e $F_{ij} + (\phi_{21} - \phi_{32})P_1 - \phi_{21}P_2 + \phi_{32}P_3 < 0$.

Desta forma são obtidas todas as LMIs que são geradas pelos vértices do politopo para $\phi's$ assimétricos com três regras.

Figura 4 - Hiper-retângulo e politopo assimétricos com três regras.



Fonte: Do próprio autor.

Podemos também obter os coeficientes do limitante superior para $J_{ij}(x)$, correspondente à solução particular do vértice *Vp1* do politopo da Figura 4, matricialmente. A principal motivação para a obtenção da solução particular, matricialmente, para um determinado vértice do politopo, se justifica, perante o fato, de que esta forma é mais apropriada para politopos com número muito grande de vértices.

Note que, $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3\right] x$.

Já vimos que é possível escrever a expressão acima como:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2)\right] x$.

Agora, observe apenas os coeficientes $-\dot{h}_1$ e $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$ da igualdade acima e note que é possível estabelecer uma relação matricial com eles da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -(\dot{h}_1 + \dot{h}_2) \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 = 0 \Rightarrow \dot{h}_3 = -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, podemos escrever a relação anterior como:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}.$$

Sendo que:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) + \dot{h}_3 (P_3 - P_2)\right] x = x^T F_{ij} x - \dot{h}_1 x^T (P_2 - P_1) x + \dot{h}_3 x^T (P_3 - P_2) x.$

Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$ e $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:

$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,

$\left(\dot{h}_3\right)_{\text{máx}} = \phi_{32}$.

Retornando estes valores na expressão matricial acima, teremos os valores de $\dot{h}_1$ e $\dot{h}_3$, que formarão um limitante superior para $J_{ij}(x)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{32} \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor dos $\dot{h}_i$, para $i = 1, 2$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ \phi_{11} - \phi_{32} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\dot{h}_1 = -\phi_{11},$$
$$\dot{h}_2 = \phi_{11} - \phi_{32}.$$

Finalmente, através da expressão $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_2 = 0$, podemos obter o valor de $\dot{h}_3$, através da substituição dos valores encontrados de $\dot{h}_1 = -\phi_{11}$ e $\dot{h}_2 = \phi_{11} - \phi_{32}$, assim: $-\phi_{11} + \phi_{11} - \phi_{32} + \dot{h}_3 = 0$, ou ainda, $\dot{h}_3 = \phi_{32}$.

A condição de existência do termo composto, será dada por:

$$-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} \leqslant \phi_{22}.$$

Observe com especial atenção, o fato do termo composto recair sobre o termo médio de $\sum_{\rho=1}^{3} \dot{h}_\rho = \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes de $\dot{h}_2$.

Politopos para $\phi's$ assimétricos com $r = 5$ (cinco regras)

Dadas as matrizes simétricas e positivas definidas $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, suponha que para um certo vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T P_5 x \geqslant x^T P_4 x \geqslant x^T P_3 x \geqslant x^T P_2 x \geqslant x^T P_1 x$. Então $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$, $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$ e $x^T (P_5 - P_4) x \geqslant 0$.

Adote os intervalos $-\phi_{\rho 1} \leqslant \dot{h}_\rho \leqslant \phi_{\rho 2}$ para $1 \leqslant \rho \leqslant 5$, ou seja, $\begin{cases} -\phi_{11} \leqslant \dot{h}_1 \leqslant \phi_{12}, \\ -\phi_{21} \leqslant \dot{h}_2 \leqslant \phi_{22}, \\ -\phi_{31} \leqslant \dot{h}_3 \leqslant \phi_{32}. \\ -\phi_{41} \leqslant \dot{h}_4 \leqslant \phi_{42}. \\ -\phi_{51} \leqslant \dot{h}_5 \leqslant \phi_{52}. \end{cases}$

Realizando o produto cartesiano destes cinco intervalos dos $\dot{h}_\rho$, para $1 \leqslant \rho \leqslant 5$, ou seja, $B = [-\phi_{11}, \phi_{12}] \times [-\phi_{21}, \phi_{22}] \times [-\phi_{31}, \phi_{32}] \times [-\phi_{41}, \phi_{42}] \times [-\phi_{51}, \phi_{52}]$, define-se fisicamente o hiper-retângulo.

Note que, $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4 + \dot{h}_5 P_5\right] x$.

Observe que é possível escrever a expressão acima como:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3)\right.$

$\left. - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)(P_5 - P_4)\right] x.$

Agora, observe apenas os coeficientes $-\dot{h}_1$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)$ e $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)$ da igualdade acima e note que é possível estabelecer uma relação matricial com eles da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 - \dot{h}_4 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que, $\sum_{\rho=1}^{5} \dot{h}_\rho = 0$, ou seja, $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{h}_5 = 0$, desta relação pode-se obter que: $\dot{h}_4 + \dot{h}_5 = -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3$ e $\dot{h}_5 = -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 - \dot{h}_4$, substituindo estas duas últimas relações na expressão matricial acima, vem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ \dot{h}_4 + \dot{h}_5 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix}.$$

Sendo que:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) + \left(\dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)(P_4 - P_3) + \dot{h}_5 (P_5 - P_4)\right] x.$

Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$, $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$ e $x^T (P_5 - P_4) x \geqslant 0$ um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:

$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,

$\left(-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21}$,
$\left(\dot{h}_3+\dot{h}_4\right)_{\text{máx}} = \phi_{32}+\phi_{42}$,
$\left(\dot{h}_5\right)_{\text{máx}} = \phi_{52}$.

Retornando estes valores na expressão matricial acima, teremos os valores de $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$, $\dot{h}_3$ e $\dot{h}_4$ que formarão um limitante superior para $J_{ij}(x)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{42}+\phi_{52} \\ \phi_{52} \end{bmatrix},$$

Isolando o vetor dos $\dot{h}_i$, para $i = 1,2,3,4$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{42}+\phi_{52} \\ \phi_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ -\phi_{21} \\ \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52} \\ \phi_{42} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -\phi_{11}, \\ \dot{h}_2 &= -\phi_{21}, \\ \dot{h}_3 &= \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52}, \\ \dot{h}_4 &= -\phi_{42}. \end{aligned}$$

Finalmente, através da expressão $\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5 = 0$, podemos obter o valor de $\dot{h}_5$, através da substituição dos valores encontrados de $\dot{h}_1 = -\phi_{11}$, $\dot{h}_2 = -\phi_{21}$, $\dot{h}_3 = \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52}$ e $\dot{h}_4 = -\phi_{42}$.
assim, $\dot{h}_5 = \phi_{52}$.

A condição de existência do termo composto, será dada por:

$$-\phi_{31} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52} \leqslant \phi_{32}.$$

Observe novamente com especial atenção, o fato do termo composto recair sobre o termo médio de $\sum_{\rho=1}^{5} \dot{h}_\rho = \dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes de $\dot{h}_3$.

Politopos para $\phi's$ assimétricos com $r = 7$ (sete regras)

De forma completamente análoga, pode-se obter a condição de existência do termo

composto, de um determinado vértice, do politopo gerado com sete regras, conjecturando que como no caso em que $r=3$ ou no caso em que $r=5$, o termo composto recairá entre os limitantes do termo médio de $\sum_{\rho=1}^{7}\dot{h}_\rho = \dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5+\dot{h}_6+\dot{h}_7$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes de $\dot{h}_4$.

$$-\phi_{41} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{52}-\phi_{62}-\phi_{72} \leqslant \phi_{42}.$$

Observe que, intuitivamente podemos generalizar estes resultados, para a obtenção da condição de existência, de um determinado vértice de um politopo, gerado com um número qualquer $r \geq 3$ (ímpar) de regras, da seguinte forma:

$$-\phi_{\frac{r+1}{2},1} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r-1}{2},1}-\phi_{\frac{r+3}{2},2}-\phi_{\frac{r+5}{2},2}-\cdots-\phi_{r2} \leqslant \phi_{\frac{r+1}{2},2}.$$

Note que termo composto ficou compreendido entre os limitantes do termo médio do desenvolvimento de $\sum_{\rho=1}^{r}\dot{h}_\rho$, para r ímpar, ou seja, entre os limitantes de $\dot{h}_{\frac{r+1}{2}}$.

Politopos para $\phi's$ assimétricos com número par de regras

Politopos para $\phi's$ assimétricos com $r=4$ (quatro regras)

Dadas as matrizes simétricas e positivas definidas $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, suponha que para um certo vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T P_4 x \geqslant x^T P_3 x \geqslant x^T P_2 x \geqslant x^T P_1 x$, então $x^T(P_2-P_1)x \geqslant 0$, $x^T(P_3-P_2)x \geqslant 0$ e $x^T(P_4-P_3)x \geqslant 0$.

Adote os intervalos $-\phi_{\rho 1} \leqslant \dot{h}_\rho \leqslant \phi_{\rho 2}$ para $1 \leqslant \rho \leqslant 4$, ou seja,
$$\begin{cases} -\phi_{11} \leqslant \dot{h}_1 \leqslant \phi_{12}, \\ -\phi_{21} \leqslant \dot{h}_2 \leqslant \phi_{22}, \\ -\phi_{31} \leqslant \dot{h}_3 \leqslant \phi_{32}, \\ -\phi_{41} \leqslant \dot{h}_4 \leqslant \phi_{42}. \end{cases}$$

Realizando o produto cartesiano destes quatro intervalos dos $\dot{h}_\rho$, para $1 \leqslant \rho \leqslant 4$, ou seja,

$B = [-\phi_{11},\phi_{12}]\times[-\phi_{21},\phi_{22}]\times[-\phi_{31},\phi_{32}]\times[-\phi_{41},\phi_{42}]$, define-se fisicamente o hiper-retângulo para quatro regras. Apesar de não possuir representação geométrica, podemos aplicar as ideias definidas no caso em que $r=3$.

Defina $J_{ij}(x) = x^T\left[F_{ij}+\dot{h}_1P_1+\dot{h}_2P_2+\dot{h}_3P_3+\dot{h}_4P_4\right]x$.

Observe que é possível escrever a expressão acima como:

$J_{ij}(x) = x^T\left[F_{ij}-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)(P_4-P_3)\right]x$.

Lembrando que $\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4=0 \Rightarrow \dot{h}_4 = -\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)$, podemos escrever a relação anterior como: $J_{ij}(x) = x^T\left[F_{ij}-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)+\dot{h}_4(P_4-P_3)\right]x$.

Importante: Quando o número de regras for par (na generalização destes resultados chamamos de **Caso A**), como neste caso em que $r = 4$, temos de definir o tratamento que daremos ao termo $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$. Isto se faz necessário devido ao fato que no desenvolvimento de $\sum_{\rho=1}^{r} \dot{h}_\rho$ para um número par de regras temos dois termos médios (diferentemente do caso em que o número de regras é ímpar, quando temos um único termo médio) assim:

Caso A1: Mantemos a denominação que este coeficiente é $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, então
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) + \dot{h}_4 (P_4 - P_3)\right] x = x^T F_{ij} x - \dot{h}_1 x^T (P_2 - P_1) x$
$-(\dot{h}_1 + \dot{h}_2) x^T (P_3 - P_2) x + \dot{h}_4 x^T (P_4 - P_3) x.$
Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$ e $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:
$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,
$\left(-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{11} + \phi_{21}$,
$\left(\dot{h}_4\right)_{\text{máx}} = \phi_{42}$.

Retornando estes valores na expressão anterior, teremos que o segundo membro dessa expressão formará um limitante superior para $J_{ij}(x)$. Desta forma, teremos que $J_{ij}(x)$ será sempre menor ou igual a esse limitante, logo:

$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} + \phi_{11} (P_2 - P_1) + (\phi_{11} + \phi_{21})(P_3 - P_2) + \phi_{42} (P_4 - P_3)\right] x.$$

Desenvolvendo as distributivas indicadas e reorganizando os resultados, ficamos com

$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} - \phi_{11} P_1 - \phi_{21} P_2 + (\phi_{11} + \phi_{21} - \phi_{42}) P_3 + \phi_{42} P_4\right] x.$$

Comparando a expressão acima com a parte entre colchetes de
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4\right] x$ observe que, neste caso, o termo composto é coeficiente $\dot{h}_3$ do termo P_3, ou seja, a condição de existência deste termo indica que ele deverá estar entre $-\phi_{31}$ e ϕ_{32}, portanto:
Se $-\phi_{31} \leqslant \phi_{11} + \phi_{21} - \phi_{42} \leqslant \phi_{32}$, e

$$F_{ij} - \phi_{11} P_1 - \phi_{21} P_2 + (\phi_{11} + \phi_{21} - \phi_{42}) P_3 + \phi_{42} P_4 < 0,$$

garantimos que $J_{ij}(x) \leqslant 0$, para todo $x \neq 0$.
Esta é uma solução particular correspondente ao vértice $(-\phi_{11}, -\phi_{21}, (\phi_{11} + \phi_{21} - \phi_{42}), \phi_{42})$.

Para encontrar o total de soluções particulares que este caso possui, temos que substituir nesta solução particular, 4 por ω_4, 3 por ω_3, 2 por ω_2 e 1 por ω_1, sendo que $\omega_1(x) \neq \omega_2(x) \neq \omega_3(x) \neq \omega_4(x)$, $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x), \omega_4(x) \in \mathbb{K}_4$, tais que, dadas as matrizes simétricas e positivas definidas P_1, P_2, P_3, P_4 e um vetor x, então $x^T P_{\omega_4} x \geqslant x^T P_{\omega_3} x \geqslant$

$x^T P_{\omega_2} x \geqslant x^T P_{\omega_1} x$, ou seja:
Se $-\phi_{\omega_3,1} \leqslant \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} - \phi_{\omega_4,2} \leqslant \phi_{\omega_3,2}$, e

$$F_{ij} - \phi_{\omega_1,1} P_1 - \phi_{\omega_2,1} P_2 + (\phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} - \phi_{\omega_4,2}) P_3 + \phi_{\omega_4,2} P_4 < 0,$$

garantimos que $J_{ij}(x) \leqslant 0$.

Então, tem-se que $J_{ij}(x) \leqslant 0$, para todo $x \neq 0$, se estas duas condições forem satisfeitas para toda permutação dos índices ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, $\in \mathbb{K}_4$ ou seja, teremos em um primeiro momento um total de 24 soluções particulares (dado pela permutação simples de 4 elementos), mas se observarmos o termo composto, isto é: $(\phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} - \phi_{\omega_4,2})$,
podemos perceber que os termos $\phi_{\omega_1,1}$ e $\phi_{\omega_2,1}$, participam de uma operação de adição, ou seja, essa operação é comutativa, desta forma, a permutação que possui a adição $\phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1}$ é igual a permutação que possui a adição $\phi_{\omega_2,1} + \phi_{\omega_1,1}$, resultando LMIs redundantes duas a duas. Desta maneira o total de soluções particulares, que era 24, passa a ser apenas 12, então este subcaso é formado por 12 soluções particulares ou 12 LMIs.

Podemos também obter os coeficientes do $\left(J_{ij}(x)\right)_{\text{máx}}$ matricialmente, ou seja:
Note que, $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4\right] x$.
Observe que é possível escrever a expressão acima como:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3)\right] x$.
Agora, observe apenas os coeficientes $-\dot{h}_1$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)$ da igualdade acima e note que é possível estabelecer uma relação matricial com eles da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que, $\sum_{\rho=1}^{4} \dot{h}_\rho = 0$, ou seja, $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 = 0$, desta relação pode-se obter que:
$\dot{h}_4 = -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3$, substituindo esta relação na expressão matricial acima, vem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix}.$$

Sendo que:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) + \dot{h}_4 (P_4 - P_3)\right] x$.
Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$ e $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:

$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,
$\left(-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21}$,
$\left(\dot{h}_4\right)_{\text{máx}} = \phi_{42}$.

Retornando estes valores na expressão matricial acima, teremos os valores de $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$ e $\dot{h}_3$ que formarão um limitante superior para $J_{ij}(x)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{42} \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor dos $\dot{h}_i$, para $i = 1,2,3$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ -\phi_{21} \\ \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\dot{h}_1 = -\phi_{11},$$
$$\dot{h}_2 = -\phi_{21},$$
$$\dot{h}_3 = \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}.$$

Finalmente, através da expressão $\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4 = 0$, podemos obter o valor de $\dot{h}_4$, através da substituição dos valores encontrados de $\dot{h}_1 = -\phi_{11}$, $\dot{h}_2 = -\phi_{21}$ e $\dot{h}_3 = \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}$, assim, $\dot{h}_4 = \phi_{42}$.

A condição de existência do termo composto, será dada por:

$$-\phi_{31} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42} \leqslant \phi_{32}.$$

Observe o fato do termo composto recair sobre o segundo termo médio de $\sum_{\rho=1}^{5} \dot{h}_\rho = \dot{h}_1 + \dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes de $\dot{h}_3$.

Caso A2: Lembrando que $\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4 = 0$ podemos substituir o coeficiente $-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)$ por $\dot{h}_3+\dot{h}_4 = -\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)$, então
$J_{ij}(x) = x^T\left[F_{ij} - \dot{h}_1(P_2-P_1) + \left(\dot{h}_3+\dot{h}_4\right)(P_3-P_2) + \dot{h}_4(P_4-P_3)\right]x$.
Assim, um limitante superior para J_{ij} é obtido para:
$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,
$\left(\left(\dot{h}_3+\dot{h}_4\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{32}+\phi_{42}$,
$\left(\dot{h}_4\right)_{\text{máx}} = \phi_{42}$.

Retornando estes valores na expressão anterior, teremos que o segundo membro dessa expressão formará um limitante superior para J_{ij}, desta forma, teremos que $J_{ij}(x)$ será sempre menor ou igual a esse limitante,

$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} + \phi_{11}(P_2 - P_1) + (\phi_{32} + \phi_{42})(P_3 - P_2) + \phi_{42}(P_4 - P_3)\right] x.$$

Desenvolvendo as distributivas indicadas e reorganizando os resultados, ficamos com

$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} - \phi_{11}P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42})P_2 + \phi_{32}P_3 + \phi_{42}P_4\right] x.$$

Comparando a expressão acima com a parte entre colchetes de
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4\right] x$ observe que, neste caso, o termo composto é coeficiente $\dot{h}_2$ do termo P_2, ou seja, a condição de existência deste termo indica que ele deverá estar entre $-\phi_{21}$ e ϕ_{22}, portanto:
Se $-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42} \leqslant \phi_{22}$, e

$$F_{ij} - \phi_{11}P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42})P_2 + \phi_{32}P_3 + \phi_{42}P_4 < 0,$$

garantimos que $J_{ij}(x) \leqslant 0$.

De maneira análoga ao subcaso **A1**, este subcaso é formado por 12 soluções particulares ou 12 LMIs. Importante observar que, apesar de ambos os subcasos fornecerem cada um 12 soluções particulares (ou LMIs), o número total de soluções particulares para $r = 4$, continua sendo 12, pois estes subcasos se excluem mutuamente. Podemos também obter os coeficientes do $\left(J_{ij}(x)\right)_{\text{máx}}$ matricialmente, ou seja:
Note que, $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4\right] x$.
Observe que é possível escrever a expressão acima como:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1(P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3)\right] x.$
Agora, observe apenas os coeficientes $-\dot{h}_1$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)$ da igualdade acima e note que é possível estabelecer uma relação matricial com eles da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que, $\sum_{\rho=1}^{4} \dot{h}_\rho = 0$, ou seja, $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 = 0$, desta relação pode-se obter que:

$\dot{h}_4 = -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3$, substituindo esta relação na expressão matricial acima, vem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ \dot{h}_4 \end{bmatrix}.$$

Sendo que:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) + \dot{h}_4 (P_4 - P_3)\right] x.$
Substituindo agora $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$ por $\dot{h}_3 + \dot{h}_4 = -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, vem:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) + \left(\dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)(P_3 - P_2) + \dot{h}_4 (P_4 - P_3)\right] x.$
Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$ e $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:
$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,
$\left(\left(\dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{32} + \phi_{42}$,
$\left(\dot{h}_4\right)_{\text{máx}} = \phi_{42}$.

Retornando estes valores na expressão matricial acima, teremos os valores de $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$ e $\dot{h}_3$ que formarão um limitante superior para $J_{ij}(x)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{32} + \phi_{42} \\ \phi_{42} \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor dos $\dot{h}_i$, para $i = 1,2,3$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{32} + \phi_{42} \\ \phi_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ \phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42} \\ \phi_{32} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\dot{h}_1 = -\phi_{11},$$
$$\dot{h}_2 = \phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42}$$
$$\dot{h}_3 = \phi_{32}.$$

Finalmente, através da expressão $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 = 0$, podemos obter o valor de $\dot{h}_4$, através da substituição dos valores encontrados de $\dot{h}_1 = -\phi_{11}$, $\dot{h}_2 = \phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42}$ e $\dot{h}_3 = \phi_{32}$, assim, $\dot{h}_4 = \phi_{42}$.

A condição de existência do termo composto, será dada por:

$$-\phi_{21} \leqslant \phi_{11} - \phi_{32} - \phi_{42} \leqslant \phi_{22}.$$

Observe o fato do termo composto recair sobre o primeiro termo médio de $\sum_{\rho=1}^{5} \dot{h}_\rho = \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes de $\dot{h}_2$.

Politopos para $\phi's$ assimétricos com $r = 6$ (seis regras)

Caso A1: Podemos também obter os coeficientes do $\left(J_{ij}(x)\right)_{\text{máx}}$ matricialmente, ou seja:
Note que, $J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4 + \dot{h}_5 P_5 + \dot{h}_6 P_6\right] x$.
Observe que é possível escrever a expressão acima como:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3)\right.$
$\left. - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)(P_5 - P_4) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{h}_5\right)(P_6 - P_5)\right] x$.
Agora, observe apenas os coeficientes $-\dot{h}_1$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)$, $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4\right)$ e $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{h}_5\right)$ da igualdade acima e note que é possível estabelecer uma relação matricial com eles da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 - \dot{h}_4 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 - \dot{h}_4 - \dot{h}_5 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que, $\sum_{\rho=1}^{6} \dot{h}_\rho = 0$, ou seja, $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \dot{h}_4 + \dot{h}_5 + \dot{h}_6 = 0$, desta relação pode-se obter que: $\dot{h}_5 + \dot{h}_6 = -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 - \dot{h}_4$, e $\dot{h}_6 = -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 - \dot{h}_4 - \dot{h}_5$ substituindo estas relações na expressão matricial acima, vem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 \\ \dot{h}_5 + \dot{h}_6 \\ \dot{h}_6 \end{bmatrix}.$$

Sendo que:
$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3)\right.$
$\left. + \left(\dot{h}_5 + \dot{h}_6\right)(P_5 - P_4) + \dot{h}_6 (P_6 - P_5)\right] x$.
Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$, $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$, $x^T (P_5 - P_4) x \geqslant 0$ e $x^T (P_6 - P_5) x \geqslant 0$ um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:
$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,

$\left(-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)\right)_{\text{máx}}=\phi_{11}+\phi_{21}$,
$\left(-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)\right)_{\text{máx}}=\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31}$,
$\left(\dot{h}_5+\dot{h}_6\right)_{\text{máx}}=\phi_{52}+\phi_{62}$,
$\left(\dot{h}_6\right)_{\text{máx}}=\phi_{62}$.

Retornando estes valores na expressão matricial acima, teremos os valores de $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$, $\dot{h}_3$, $\dot{h}_4$ e $\dot{h}_5$ que formarão um limitante superior para $J_{ij}(x)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31} \\ \phi_{52}+\phi_{62} \\ \phi_{62} \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor dos $\dot{h}_i$, para $i=1,2,3,4,5$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31} \\ \phi_{52}+\phi_{62} \\ \phi_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ -\phi_{21} \\ -\phi_{31} \\ \phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{52}-\phi_{62} \\ \phi_{52} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -\phi_{11}, \\ \dot{h}_2 &= -\phi_{21}, \\ \dot{h}_3 &= -\phi_{31}, \\ \dot{h}_4 &= \phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{52}-\phi_{62}, \\ \dot{h}_5 &= \phi_{52}. \end{aligned}$$

Finalmente, através da expressão $\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5+\dot{h}_6=0$, podemos obter o valor de $\dot{h}_6$, através da substituição dos valores encontrados de $\dot{h}_1=-\phi_{11}$, $\dot{h}_2=-\phi_{21}$, $\dot{h}_3=-\phi_{31}$, $\dot{h}_4=\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{52}-\phi_{62}$ e $\dot{h}_5=\phi_{52}$ assim, $\dot{h}_6=\phi_{62}$.

A condição de existência do termo composto, será dada por:

$$-\phi_{41} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{52}-\phi_{62} \leqslant \phi_{42}.$$

Observe o fato do termo composto recair sobre o segundo termo médio de $\sum_{\rho=1}^{6}\dot{h}_\rho = \dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5+\dot{h}_6=0$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes

de $\dot{h}_4$.

Caso A2: Retomando a expressão matricial obtida anteriormente, vem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3 \\ \dot{h}_5 + \dot{h}_6 \\ \dot{h}_6 \end{bmatrix}.$$

Substituindo agora $-\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \dot{h}_3$ por $\dot{h}_4 + \dot{h}_5 + \dot{h}_6$, na expressão acima, fica:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{h}_1 \\ -\dot{h}_1 - \dot{h}_2 \\ \dot{h}_4 + \dot{h}_5 + \dot{h}_6 \\ \dot{h}_5 + \dot{h}_6 \\ \dot{h}_6 \end{bmatrix}.$$

Sendo que:

$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) + \left(\dot{h}_4 + \dot{h}_5 + \dot{h}_6\right)(P_4 - P_3)\right.$
$\left. + \left(\dot{h}_5 + \dot{h}_6\right)(P_5 - P_4) + \dot{h}_6 (P_6 - P_5)\right] x.$

Como $x^T (P_2 - P_1) x \geqslant 0$, $x^T (P_3 - P_2) x \geqslant 0$, $x^T (P_4 - P_3) x \geqslant 0$, $x^T (P_5 - P_4) x \geqslant 0$ e $x^T (P_6 - P_5) x \geqslant 0$ um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido para:

$\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}$,
$\left(-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{11} + \phi_{21}$,
$\left(\dot{h}_4 + \dot{h}_5 + \dot{h}_6\right)_{\text{máx}} = \phi_{42} + \phi_{52} + \phi_{62}$,
$\left(\dot{h}_5 + \dot{h}_6\right)_{\text{máx}} = \phi_{52} + \phi_{62}$,
$\left(\dot{h}_6\right)_{\text{máx}} = \phi_{62}$.

Retornando estes valores na expressão matricial acima, teremos os valores de $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$, $\dot{h}_3$, $\dot{h}_4$ e $\dot{h}_5$ que formarão um limitante superior para $J_{ij}(x)$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11} + \phi_{21} \\ \phi_{42} + \phi_{52} + \phi_{62} \\ \phi_{52} + \phi_{62} \\ \phi_{62} \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor dos $\dot{h}_i$, para $i = 1,2,3,4,5$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \\ \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \phi_{42}+\phi_{52}+\phi_{62} \\ \phi_{52}+\phi_{62} \\ \phi_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ -\phi_{21} \\ \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52}-\phi_{62} \\ \phi_{42} \\ \phi_{52} \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -\phi_{11}, \\ \dot{h}_2 &= -\phi_{21}, \\ \dot{h}_3 &= \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52}-\phi_{62}, \\ \dot{h}_4 &= \phi_{42}, \\ \dot{h}_5 &= \phi_{52}. \end{aligned}$$

Finalmente, através da expressão $\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5+\dot{h}_6 = 0$, podemos obter o valor de $\dot{h}_6$, através da substituição dos valores encontrados de $\dot{h}_1 = -\phi_{11}$, $\dot{h}_2 = -\phi_{21}$, $\dot{h}_3 = \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52}-\phi_{62}$, $\dot{h}_4 = \phi_{42}$ e $\dot{h}_5 = \phi_{52}$ assim, $\dot{h}_6 = \phi_{62}$.

A condição de existência do termo composto, será dada por:

$$-\phi_{31} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{52}-\phi_{62} \leqslant \phi_{32}.$$

Observe o fato do termo composto recair sobre o primeiro termo médio de $\sum_{\rho=1}^{6} \dot{h}_\rho = \dot{h}_1 + \dot{h}_2+\dot{h}_3+\dot{h}_4+\dot{h}_5+\dot{h}_6 = 0$, ou seja, o termo composto está compreendido entre os limitantes de $\dot{h}_3$.

Generalizando estes resultados para um número qualquer $r \geq 4$ (par) de regras, vem:

Caso A1:

$-\phi_{\frac{r}{2}+1,1} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2},1}-\phi_{\frac{r}{2}+2,2}-\phi_{\frac{r}{2}+3,2}-\cdots-\phi_{r2} \leqslant \phi_{\frac{r}{2}+1,2}$,

Caso A2:

$-\phi_{\frac{r}{2},1} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1}-\phi_{\frac{r}{2}+1,2}-\phi_{\frac{r}{2}+2,2}-\cdots-\phi_{r2} \leqslant \phi_{\frac{r}{2},2}$,

Na próxima seção faremos a demonstração formal destes resultados, seja para regras com número par ou ímpar de termos.

3.3.2 Condições de existência para os termos compostos

O objetivo desta seção é montar as condições de existência para os termos compostos , quer o número de regras seja par ou ímpar. Dada,

$$J_{ij}(x) = x^T \left(F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \cdots + \dot{h}_r P_r\right) x. \tag{31}$$

Sugerimos a possibilidade de escrever a (31) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \big[&F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3) - \cdots \\ &- \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \cdots + \dot{h}_{r-2}\right)(P_{r-1} - P_{r-2}) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \cdots + \dot{h}_{r-1}\right)(P_r - P_{r-1})\big] x. \end{aligned} \tag{32}$$

Como veremos a seguir, esta forma de desenvolver a (31) será fundamental para nossos propósitos. Note que a igualdade (32) é verdadeira, pois podemos, após desenvolver as distributivas indicadas colocá-la na seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \Bigg[&F_{ij} + \overbrace{\left(-\dot{h}_1\right)(-P_1)}^{\dot{h}_1 P_1} + \overbrace{\left(-\dot{h}_1 + \dot{h}_1 + \dot{h}_2\right) P_2}^{\dot{h}_2 P_2} + \overbrace{\left(-\dot{h}_1 - \dot{h}_2 + \dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right) P_3}^{\dot{h}_3 P_3} + \cdots \\ &+ \underbrace{\left(-\dot{h}_1 - \cdots - \dot{h}_{r-2} + \dot{h}_1 + \cdots + \dot{h}_{r-2} + \dot{h}_{r-1}\right) P_{r-1}}_{\dot{h}_{r-1} P_{r-1}} + \underbrace{\left(-\dot{h}_1 - \cdots - \dot{h}_{r-1}\right) P_r}_{\dot{h}_r P_r} \Bigg] x, \end{aligned} \tag{33}$$

observando que de (6), $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \cdots + \dot{h}_r = 0$.
Considere que para um dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$,

$$x^T P_r x \geqslant x^T P_{r-1} x \geqslant \cdots \geqslant x^T P_2 x \geqslant x^T P_1 x, \tag{34}$$

então

$$x^T (P_i - P_{i-1}) x \geqslant 0, \quad \forall i \in \{2, 3, \cdots, r\}. \tag{35}$$

Lembrando-se que $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \cdots + \dot{h}_r = 0$, note que $J_{ij}(x)$ dada em (32) pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \big[&F_{ij} - \dot{h}_1 (P_2 - P_1) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)(P_3 - P_2) - \left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right)(P_4 - P_3) - \cdots \\ &+ \left(\dot{h}_{r-1} + \dot{h}_r\right)(P_{r-1} - P_{r-2}) + \dot{h}_r (P_r - P_{r-1})\big] x. \end{aligned} \tag{36}$$

Desta forma, considerando (32) e (35), um limitante superior para $J_{ij}(x)$ pode ser obtido quando $-\left(\dot{h}_1\right), -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right), -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3\right), \cdots, -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \cdots + \dot{h}_{r-1}\right)$ forem máximos. Neste ponto que a forma de escrevermos a expressão (32) se justifica, pois isto facilita a obtenção dos valores dos $\dot{h}_i$ para $i \in \{1, 2, \cdots, r-1\}$, que tornam $J_{ij}(x)$ máximo. A seguir

serão analisados separadamente dois casos, considerando que o número de regras r é par (Caso **A**) e ímpar (Caso **B**). Nos dois casos, equações matriciais fornecerão os valores dos $\dot{h}_i$ para $i \in \{1,2,\cdots,r-1\}$, sendo que $-\phi_{\rho 1} \leq \dot{h_\rho} \leq \phi_{\rho 2}$ para $\rho \in \mathbb{K}_r$, que dentro de certas condições, tornam $J_{ij}(x)$ dado em (31) e (32) máximo.

(**A**) Para um número par de regras ou modelos locais (r).

Quando o número de regras for par temos de definir o tratamento que daremos ao termo $-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)$. Isto se faz necessário devido ao fato que no desenvolvimento do $J_{ij}(x)$ para um número par de regras temos dois termos médios (diferentemente do caso em que o número de regras é ímpar, quando temos um único termo médio) assim:

(**A1**) Mantemos a denominação que este coeficiente é $-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)$.
A partir da equação (32) considerando as equações (35) e (36) e que $-\phi_{\rho 1} \leqslant \dot{h}_\rho \leqslant \phi_{\rho 2}$, para $\rho \in \mathbb{K}_r$, podemos escrever matricialmente as condições para a obtenção de um limitante para J_{ij}:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}-1} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}+1} \\ \vdots \\ \dot{h}_{r-3} \\ \dot{h}_{r-2} \\ \dot{h}_{r-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \vdots \\ \left(\frac{r}{2}-1\right) termos \\ \frac{r}{2} termos \\ \left(\frac{r}{2}-1\right) termos \\ \vdots \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2} \\ \phi_{r2} \end{bmatrix}}_{B}.$$

Sendo que o vetor B foi obtido da seguinte maneira,

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \vdots \\ \left(\frac{r}{2}-1\right)termos \\ \frac{r}{2}termos \\ \left(\frac{r}{2}-1\right)termos \\ \vdots \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2} \\ \phi_{r2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{11} \rightarrow -\dot{h}_1/\text{máx} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \rightarrow \left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)/\text{máx} \\ \vdots \\ \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1} \rightarrow \left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}-1}\right)/\text{máx} \\ \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2},1} \rightarrow \left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}+2,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}\right)/\text{máx} \\ \vdots \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_{r-2}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2} \rightarrow \dot{h}_r/\text{máx} \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz A possui uma inversa com uma estrutura muito simples o que facilita a obtenção dos $\dot{h}_i$ para $i \in \{1,2,\cdots,r-1\}$, correspondentes a um limitante superior de $J_{ij}(x)$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}-1} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}+1} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}+2} \\ \vdots \\ \dot{h}_{r-3} \\ \dot{h}_{r-2} \\ \dot{h}_{r-1} \end{bmatrix} = A^{-1}B,$$

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ \phi_{11} - (\phi_{11} + \phi_{21}) = -\phi_{21} \\ (\phi_{11} + \phi_{21}) - (\phi_{11} + \phi_{21} + \phi_{31}) = -\phi_{31} \\ \vdots \\ \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-2,1}\right) - \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1}\right) = -\phi_{\frac{r}{2}-1,1} \\ \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1}\right) - \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1}\right) = -\phi_{\frac{r}{2},1} \\ \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2} - \cdots - \phi_{r2} \\ \left(\phi_{\frac{r}{2}+2,2} + \phi_{\frac{r}{2}+3,2} + \cdots + \phi_{r2}\right) - \left(\phi_{\frac{r}{2}+3,2} + \cdots + \phi_{r2}\right) = +\phi_{\frac{r}{2}+2,2} \\ \vdots \\ (\phi_{r-2,2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r2}) - (\phi_{r-1,2} + \phi_{r2}) = +\phi_{r-2,2} \\ (\phi_{r-1,2} + \phi_{r2}) - \phi_{r2} = +\phi_{r-1,2} \end{bmatrix}.$$

Resumo da composição do vetor $A^{-1}B$:

$$\left(\frac{r}{2}\right) termos \Rightarrow \left(-\phi_{11}, \cdots, -\phi_{\frac{r}{2},1}\right) = \left(\dot{h}_1, \cdots, \dot{h}_{\frac{r}{2}}\right),$$
$$\dot{h}_{\frac{r}{2}+1} \Rightarrow \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2} - \cdots - \phi_{r2},$$
$$\left(\frac{r}{2} - 2\right) termos = \left(+\phi_{\frac{r}{2}+2,2}, \cdots, +\phi_{r-1,2}\right) = \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}, \cdots, \dot{h}_{r-1}\right),$$
$$\left(\dot{h}_1 + \cdots + \dot{h}_{\frac{r}{2}}\right) + \dot{h}_{\frac{r}{2}+1} + \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+2} + \cdots + \dot{h}_{r-1}\right) = -\dot{h}_r,$$
$$\left(-\phi_{11} - \phi_{21} - \phi_{31} - \cdots - \phi_{\frac{r}{2},1}\right) + \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2}$$
$$\cdots - \phi_{r-1,2} - \phi_{r2} + \left(\phi_{\frac{r}{2}+2,2} \cdots + \phi_{r-1,2}\right) = -\dot{h}_r,$$
$$-\phi_{r2} = -\dot{h}_r \Rightarrow \dot{h}_r = \phi_{r2}.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_i = 0$.

Como o termo composto está associado ao termo $\dot{h}_{\frac{r}{2}+1} P_{\frac{r}{2}+1}$ em $J_{ij}(x)$ dada em (31) e como $-\phi_{\frac{r}{2}+1,1} \leq \dot{h}_{\frac{r}{2}+1} \leq \phi_{\frac{r}{2}+1,2}$, consideramos que o termo composto obedece a seguinte condição:

$$-\phi_{\frac{r}{2}+1,1} \leq \phi_{11} + \phi_{21} + \phi_{31} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2} - \cdots - \phi_{r2} \leq \phi_{\frac{r}{2}+1,2}$$

(**A2**) Lembrando que $\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \dot{h}_3 + \cdots + \dot{h}_r = 0$, podemos substituir o coeficiente $-\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \cdots + \dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)$ por $\dot{h}_{\frac{r}{2}+1} + \dot{h}_{\frac{r}{2}+2} + \cdots + \dot{h}_{r-1} + \dot{h}_r$.

Analogamente ao caso (**A1**), um limitante superior para $J_{ij}(x)$ é obtido quando:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}-1} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}+1} \\ \vdots \\ \dot{h}_{r-3} \\ \dot{h}_{r-2} \\ \dot{h}_{r-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \vdots \\ \left(\frac{r}{2}-1\right) termos \\ \frac{r}{2} termos \\ \left(\frac{r}{2}-1\right) termos \\ \vdots \\ \phi_{r,2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2} \\ \phi_{r,2}+\phi_{r-1,2} \\ \phi_{r2} \end{bmatrix}}_{B}.$$

Sendo que,

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \\ \vdots \\ \left(\frac{r}{2}-1\right) termos \\ \frac{r}{2} termos \\ \left(\frac{r}{2}-1\right) termos \\ \vdots \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2} \\ \phi_{r2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{11} \rightarrow -\dot{h}_1/\text{máx} \\ \phi_{11}+\phi_{21} \rightarrow \left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)/\text{máx} \\ \vdots \\ \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1} \rightarrow \left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}-1}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}+2,2}+\phi_{\frac{r}{2}+1,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}+\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}+2,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}\right)/\text{máx} \\ \vdots \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_{r-2}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2}+\phi_{r-1,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}\right)/\text{máx} \\ \phi_{r2} \rightarrow \dot{h}_r/\text{máx} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}-1} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r}{2}+1} \\ \vdots \\ \dot{h}_{r-3} \\ \dot{h}_{r-2} \\ \dot{h}_{r-1} \end{bmatrix} = A^{-1}B,$$

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ \phi_{11} - (\phi_{11} + \phi_{21}) = -\phi_{21} \\ (\phi_{11} + \phi_{21}) - (\phi_{11} + \phi_{21} + \phi_{31}) = -\phi_{31} \\ \vdots \\ \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \phi_{31} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-2,1}\right) - \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \phi_{31} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1}\right) = -\phi_{\frac{r}{2}-1,1} \\ \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1} - \phi_{\frac{r}{2}+1,2} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \cdots - \phi_{r2} \\ \left(\phi_{r2} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}+2,2} + \phi_{\frac{r}{2}+1,2}\right) - \left(\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}+2,2}\right) = +\phi_{\frac{r}{2}+1,2} \\ \vdots \\ (\phi_{r-2,2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r2}) - (\phi_{r-1,2} + \phi_{r2}) = +\phi_{r-2,2} \\ (\phi_{r-1,2} + \phi_{r2}) - \phi_{r2} = +\phi_{r-1,2} \end{bmatrix}.$$

Resumo da composição do vetor $A^{-1}B$:

$$\left(\frac{r}{2} - 1\right) termos = \left(-\phi_{11}, \cdots, -\phi_{\frac{r}{2}-1,1}\right) = \left(\dot{h}_1, \cdots, \dot{h}_{\frac{r}{2}-1}\right),$$

$$\dot{h}_{\frac{r}{2}} = \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1} - \phi_{\frac{r}{2}+1,2} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \cdots - \phi_{r2},$$

$$\left(\frac{r}{2} - 1\right) termos = \left(+\phi_{\frac{r}{2}+1,2}, \cdots, +\phi_{r-1,2}\right) = \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}, \cdots, \dot{h}_{r-1}\right),$$

$$\left(\dot{h}_1 + \cdots + \dot{h}_{\frac{r}{2}-1}\right) + \dot{h}_{\frac{r}{2}} + \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+1} + \cdots + \dot{h}_{r-1}\right) = -\dot{h}_r,$$

$$\left(-\phi_{11} - \phi_{21} - \phi_{31} - \cdots - \phi_{\frac{r}{2}-1,1}\right) + \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1} - \phi_{\frac{r}{2}+1,2} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2}$$

$$\cdots - \phi_{r-1,2} - \phi_{r2} + \left(\phi_{\frac{r}{2}+1,2} \cdots + \phi_{r-1,2}\right) = -\dot{h}_r,$$

$$-\phi_{r2} = -\dot{h}_r \Rightarrow \dot{h}_r = \phi_{r2}.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_i = 0$.

Como o termo composto está associado ao termo $\dot{h}_{\frac{r}{2}} P_{\frac{r}{2}}$ em $J_{ij}(x)$ dada em (31) e como $-\phi_{\frac{r}{2},1} \leq \dot{h}_{\frac{r}{2}} \leq \phi_{\frac{r}{2},2}$, consideramos que o termo composto obedece a seguinte condição:

$$-\phi_{\frac{r}{2},1} \leq \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1} - \phi_{\frac{r}{2}+1,2} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \cdots - \phi_{r2} \leq \phi_{\frac{r}{2},2}.$$

(**B**) para um número ímpar de regras ou modelos locais (r),

Neste caso o termo médio, isto é, o termo $\dot{h}_{\frac{r+1}{2}}$ que fornecerá as condições que o termo composto deverá cumprir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1
\end{bmatrix}}_{A}
\begin{bmatrix}
\dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{\frac{r-1}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r+1}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r+3}{2}} \\ \vdots \\ \dot{h}_{r-3} \\ \dot{h}_{r-2} \\ \dot{h}_{r-1}
\end{bmatrix} =
\underbrace{\begin{bmatrix}
\phi_{11} \\
\phi_{11} + \phi_{21} \\
\vdots \\
\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1} \\
\phi_{\frac{r+3}{2},2} + \phi_{\frac{r+5}{2},2} + \cdots + \phi_{r2} \\
\phi_{\frac{r+5}{2},2} + \phi_{\frac{r+7}{2},2} + \cdots + \phi_{r2} \\
\vdots \\
\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r-2,2} \\
\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} \\
\phi_{r2}
\end{bmatrix}}_{B}.$$

Sendo que,

$$\begin{bmatrix}
\phi_{11} \\
\phi_{11} + \phi_{21} \\
\vdots \\
\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1} \\
\phi_{\frac{r+3}{2},2} + \phi_{\frac{r+5}{2},2} + \cdots + \phi_{r2} \\
\phi_{\frac{r+5}{2},2} + \phi_{\frac{r+7}{2},2} + \cdots + \phi_{r2} \\
\vdots \\
\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r-2,2} \\
\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} \\
\phi_{r2}
\end{bmatrix} \Rightarrow
\begin{pmatrix}
\phi_{11} \rightarrow -\dot{h}_1/\text{máx} \\
\phi_{11} + \phi_{21} \rightarrow \left(-\dot{h}_1 - \dot{h}_2\right)/\text{máx} \\
\vdots \\
\left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1}\right) \rightarrow \left(-\dot{h}_1 - \dot{h}_2 - \cdots - \dot{h}_{\frac{r-1}{2}}\right)/\text{máx} \\
\left(\phi_{\frac{r+3}{2},2} + \phi_{\frac{r+5}{2},2} + \cdots + \phi_{r2}\right) \rightarrow \left(\dot{h}_{\frac{r+3}{2}} + \dot{h}_{\frac{r+5}{2}} + \cdots + \dot{h}_r\right)/\text{máx} \\
\left(\phi_{\frac{r+5}{2},2} + \phi_{\frac{r+3}{2},2} + \cdots + \phi_{r2}\right) \rightarrow \left(\dot{h}_{\frac{r+5}{2}} + \dot{h}_{\frac{r+3}{2}} + \cdots + \dot{h}_r\right)/\text{máx} \\
\vdots \\
\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r-2,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r + \dot{h}_{r-1} + \dot{h}_{r-2}\right)/\text{máx} \\
\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} \rightarrow \left(\dot{h}_r + \dot{h}_{r-1}\right)/\text{máx} \\
\phi_{r2} \rightarrow \dot{h}_r/\text{máx}
\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{\frac{r-1}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r+1}{2}} \\ \dot{h}_{\frac{r+3}{2}} \\ \vdots \\ \dot{h}_{r-3} \\ \dot{h}_{r-2} \\ \dot{h}_{r-1} \end{bmatrix} = A^{-1}B,$$

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\phi_{11} \\ \phi_{11} - (\phi_{11} + \phi_{21}) = -\phi_{21} \\ \vdots \\ \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-3}{2},1}\right) - \left(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1}\right) = -\phi_{\frac{r-1}{2},1} \\ \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1} - \phi_{\frac{r+3}{2},2} - \phi_{\frac{r+5}{2},2} - \cdots - \phi_{r2} \\ \left(\phi_{\frac{r+3}{2},2} + \phi_{\frac{r+5}{2},2} + \cdots + \phi_{r2}\right) - \left(\phi_{\frac{r+5}{2},2} + \phi_{\frac{r+7}{2},2} + \cdots + \phi_{r2}\right) = +\phi_{\frac{r+3}{2},2} \\ \vdots \\ (\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r-2,2} + \phi_{r-3,2}) - (\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r-2,2}) = +\phi_{r-3,2} \\ (\phi_{r2} + \phi_{r-1,2} + \phi_{r-2,2}) - (\phi_{r2} + \phi_{r-1,2}) = +\phi_{r-2,2} \\ (\phi_{r2} + \phi_{r-1,2}) - \phi_{r2} = +\phi_{r-1,2} \end{bmatrix}.$$

Resumo da composição do vetor $A^{-1}B$:

$$\left(\frac{r-1}{2}\right) termos \Rightarrow \left(-\phi_{11}, -\phi_{21}, -\cdots - \phi_{\frac{r-1}{2},1}\right) = \left(\dot{h}_1, \dot{h}_2 \cdots, \dot{h}_{\frac{r-1}{2}}\right),$$

$$\dot{h}_{\frac{r+1}{2}} = \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1} - \phi_{\frac{r+3}{2},2} - \phi_{\frac{r+5}{2},2} - \cdots - \phi_{r2}$$

$$\left(\frac{r-3}{2}\right) termos \Rightarrow \left(\phi_{\frac{r+3}{2},2}, \phi_{\frac{r+5}{2},2}, \cdots, \phi_{r-1,2}\right) = \left(\dot{h}_{\frac{r+3}{2}}, \dot{h}_{\frac{r+5}{2}}, \cdots, \dot{h}_{r-1}\right),$$

$$\left(\dot{h}_1 + \cdots + \dot{h}_{\frac{r-1}{2}}\right) + \dot{h}_{\frac{r+1}{2}} + \left(\dot{h}_{\frac{r+3}{2}} + \cdots + \dot{h}_{r-1}\right) = -\dot{h}_r,$$

$$\left(-\phi_{11} - \phi_{21} - \cdots - \phi_{\frac{r-1}{2},1}\right) + \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1} - \phi_{\frac{r+3}{2},2} - \phi_{\frac{r+5}{2},2}$$

$$\cdots - \phi_{r-1,2} - \phi_{r2} + \left(\phi_{\frac{r+3}{2},2} + \phi_{\frac{r+5}{2},2} + \cdots + \phi_{r-1,2}\right) = -\dot{h}_r,$$

$$-\phi_{r2} = -\dot{h}_r \Rightarrow \dot{h}_r = \phi_{r2}.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{r} \dot{h}_i = 0$.

Como o termo composto está associado ao termo $\dot{h}_{\frac{r+1}{2}} P_{\frac{r+1}{2}}$ em $J_{ij}(x)$ dada em (31) e como $-\phi_{\frac{r+1}{2},1} \leq \dot{h}_{\frac{r+1}{2}} \leq \phi_{\frac{r+1}{2},2}$, consideramos que o termo composto obedece a seguinte condição:

$$-\phi_{\frac{r+1}{2},1} \leq \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r-1}{2},1} - \phi_{\frac{r+3}{2},2} - \phi_{\frac{r+5}{2},2} - \cdots - \phi_{r2} \leq \phi_{\frac{r+1}{2},2}$$

3.3.3 Soluções particulares para um número qualquer de regras

O principal objetivo do lema a seguir, é montar as soluções particulares para um número qualquer de regras par ou ímpar.

Lema 3.1. *Dada,*

$$J_{ij}(x) = x^T \left(F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \cdots + \dot{h}_r P_r\right) x. \tag{37}$$

Sendo que $P_i = P_i^T > 0$, P_i *e* $F_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $-\phi_{i1} \leq \dot{h}_i \leq \phi_{i2}$ *para* $i \in \mathbb{K}_r$

$$\dot{h}_1 + \dot{h}_2 + \cdots + \dot{h}_r = 0. \tag{38}$$

Então, se para um dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

$$x^T P_r x \geqslant x^T P_{r-1} x \geqslant \cdots \geqslant x^T P_2 x \geqslant x^T P_1 x, \tag{39}$$

ou seja,

$$x^T (P_i - P_{i-1}) x \geqslant 0, \qquad \forall i \in \{2, 3, \cdots, r\}, \tag{40}$$

tem-se que

$$J_{ij}(x) \leqslant \begin{cases} \mathbf{J1}, \\ \mathbf{J2}, \\ \mathbf{J3}, \end{cases}$$

sendo que,

$$\mathbf{J1} = x^T \Big[F_{ij} - \phi_{11}P_1 - \phi_{21}P_2 - \cdots - \phi_{\frac{r}{2},1}P_{\frac{r}{2}} + \Big(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2} \cdots - \phi_{r2}\Big) P_{\frac{r}{2}+1} + \phi_{\frac{r}{2}+2,2}P_{\frac{r}{2}+2} + \cdots + \phi_{r-1,2}P_{r-1} + \phi_{r2}P_r\Big] x, \text{ se r for par e se}$$

$$\underbrace{-\phi_{\frac{r}{2}+1,1} \leqslant \phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2} - \cdots - \phi_{r2} \leqslant \phi_{\frac{r}{2}+1,2}}_{\mathbf{A1}}.$$

$$\mathbf{J2} = x^T \Big[F_{ij} - \phi_{11}P_1 - \phi_{21}P_2 - \cdots - \phi_{\frac{r}{2}-1,1}P_{\frac{r}{2}-1} + \Big(\phi_{11} + \phi_{21} + \cdots + \phi_{\frac{r}{2}-1,1} - \phi_{\frac{r}{2}+1,2} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \cdots - \phi_{r2}\Big) P_{\frac{r}{2}} + \phi_{\frac{r}{2}+1,2}P_{\frac{r}{2}+1} + \phi_{\frac{r}{2}+2,2}P_{\frac{r}{2}+2} + \cdots + \phi_{r-1,2}P_{r-1} + \phi_{r2}P_r\Big] x, \text{ se r for par e se}$$

$$\underbrace{-\phi_{\frac{r}{2},1} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1}-\phi_{\frac{r}{2}+1,2}-\phi_{\frac{r}{2}+2,2}-\cdots-\phi_{r2} \leqslant \phi_{\frac{r}{2},2}}_{\mathbf{A2}}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J3} = x^T \Big[& F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{21}P_2-\cdots-\phi_{\frac{r-1}{2},1}P_{\frac{r-1}{2}}+\Big(\phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r-1}{2},1}-\phi_{\frac{r+3}{2},2}-\phi_{\frac{r+5}{2},2} \\ & -\cdots-\phi_{r2}\Big)P_{\frac{r+1}{2}}+\phi_{\frac{r+3}{2},2}P_{\frac{r+3}{2}}+\cdots+\phi_{r-1,2}P_{r-1}+\phi_{r2}P_r\Big]\,x\,, \text{ se r for ímpar e se}\end{aligned}$$

$$\underbrace{-\phi_{\frac{r+1}{2},1} \leqslant \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r-1}{2},1}-\phi_{\frac{r+3}{2},2}-\phi_{\frac{r+5}{2},2}-\cdots-\phi_{r2} \leqslant \phi_{\frac{r+1}{2},2}}_{\mathbf{A3}}.$$

Demonstração. Note que (37) pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}J_{ij}(x) = x^T \big[& F_{ij}-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)(P_4-P_3) \\ & \cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-2}\right)(P_{r-1}-P_{r-2})-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-1}\right)(P_r-P_{r-1})\big]\,x.\end{aligned} \tag{41}$$

Agora, de (38) observe que,

$$\begin{aligned}&\dot{h}_r = -\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{r-1}, \\ &\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1} = -\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{r-2}, \\ &\vdots \\ &\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+1} = -\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}}, \text{ se r for par}, \\ &\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\cdots+\dot{h}_{\frac{r+3}{2}} = -\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r+1}{2}}, \text{ se r for ímpar.}\end{aligned} \tag{42}$$

Então, de (41),
(**I**) Se r for par e **A1** for verdadeira,

$$\begin{aligned}J_{ij}(x) = x^T \big[& F_{ij}-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)(P_4-P_3) \\ & \cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)\left(P_{\frac{r}{2}+1}-P_{\frac{r}{2}}\right)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}\right)\left(P_{\frac{r}{2}+2}-P_{\frac{r}{2}+1}\right) \\ & \cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-2}\right)(P_{r-1}-P_{r-2})-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-1}\right)(P_r-P_{r-1})\big]\,x,\end{aligned}$$

ou, usando a (42)

$$\begin{aligned}&J_{ij}(x) = \\ &x^T \Big[F_{ij}-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)-\cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)\left(P_{\frac{r}{2}+1}-P_{\frac{r}{2}}\right) \\ &+\left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}+\dot{h}_{\frac{r}{2}+3}+\cdots+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_r\right)\left(P_{\frac{r}{2}+2}-P_{\frac{r}{2}+1}\right)+\cdots+\left(\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_r\right)(P_{r-1}-P_{r-2}) \\ &+\dot{h}_r(P_r-P_{r-1})\Big]\,x.\end{aligned} \tag{43}$$

Considerando as relações (39), (40) e (42), um limitante superior para J_{ij}, poderá ser

obtido, de:

$$
\begin{aligned}
&\left(-\dot{h}_1\right)_{\text{máx}} = \phi_{11},\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21},\\
&\vdots\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}-1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1},\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2},1},\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}+2,2},\\
&\vdots\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_{r-2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2},\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2},\\
&\left(\dot{h}_r\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Retornando os valores dados em (44), na expressão (43), teremos **J1** que representa um limitante superior de $J_{ij}(x)$, para r par no primeiro subcaso, portanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J1} = x^T \Big[& F_{ij} - \phi_{11}P_1 - \phi_{21}P_2 - \cdots - \phi_{\frac{r}{2},1}P_{\frac{r}{2}} + \Big(\phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2},1} - \phi_{\frac{r}{2}+2,2} - \phi_{\frac{r}{2}+3,2}\\
& \cdots - \phi_{r2}\Big)P_{\frac{r}{2}+1} + \phi_{\frac{r}{2}+2,2}P_{\frac{r}{2}+2} + \cdots + \phi_{r-1,2}P_{r-1} + \phi_{r2}P_r \Big] x.
\end{aligned}
$$

Desta forma, teremos que $J_{ij}(x)$ será sempre menor ou igual a esse limitante, logo:
$J_{ij}(x) \leq \mathbf{J1}$, para todo $x \neq 0$.
(**II**) se r for par e **A2** for verdadeira,

$$
\begin{aligned}
J_{ij}(x) = x^T \Big[& F_{ij} - \dot{h}_1(P_2-P_1) - \left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2) - \left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)(P_4-P_3)\\
& \cdots + \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}+\cdots+\dot{h}_r\right)\left(P_{\frac{r}{2}+1}-P_{\frac{r}{2}}\right) - \left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}\right)\left(P_{\frac{r}{2}+2}-P_{\frac{r}{2}+1}\right)\\
& \cdots - \left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-2}\right)(P_{r-1}-P_{r-2}) - \left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-1}\right)(P_r-P_{r-1})\Big] x,
\end{aligned}
$$

ou, usando a (42)

$$
\begin{aligned}
& J_{ij}(x) =\\
& x^T \Big[F_{ij} - \dot{h}_1(P_2-P_1) - \left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2) - \cdots + \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}+\cdots+\dot{h}_r\right)\left(P_{\frac{r}{2}+1}-P_{\frac{r}{2}}\right)\\
& + \left(\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}+\dot{h}_{\frac{r}{2}+3}+\cdots+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_r\right)\left(P_{\frac{r}{2}+2}-P_{\frac{r}{2}+1}\right) + \cdots + \left(\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_r\right)(P_{r-1}-P_{r-2})\\
& + \dot{h}_r(P_r-P_{r-1})\Big] x.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Considerando as relações (39), (40) e (42), um limitante superior para J_{ij}, poderá ser

obtido, de:

$$
\begin{aligned}
&(-\dot{h}_1)_{\text{máx}} = \phi_{11},\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21},\\
&\vdots\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r}{2}-1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1},\\
&\left(\dot{h}_r+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}+\dot{h}_{\frac{r}{2}+1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}+2,2}+\phi_{\frac{r}{2}+1,2},\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\cdots+\dot{h}_{\frac{r}{2}+2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}+2,2},\\
&\vdots\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_{r-2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2},\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2},\\
&(\dot{h}_r)_{\text{máx}} = \phi_{r2}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Retornando os valores dados em (46), na expressão (45), teremos **J2** que representa um limitante superior de $J_{ij}(x)$, para r par no segundo subcaso, portanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J2} = x^T\Big[&F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{21}P_2-\cdots-\phi_{\frac{r}{2}-1,1}P_{\frac{r}{2}-1}+\Big(\phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r}{2}-1,1}-\phi_{\frac{r}{2}+1,2}-\phi_{\frac{r}{2}+2,2}\\
&-\cdots-\phi_{r2}\Big)P_{\frac{r}{2}}+\phi_{\frac{r}{2}+1,2}P_{\frac{r}{2}+1}+\phi_{\frac{r}{2}+2,2}P_{\frac{r}{2}+2}+\cdots+\phi_{r-1,2}P_{r-1}+\phi_{r2}P_r\Big]x.
\end{aligned}
$$

Desta forma, teremos que $J_{ij}(x)$ será sempre menor ou igual a esse limitante, logo:
$J_{ij}(x) \leq \mathbf{J2}$, para todo $x \neq 0$.
(**III**) se r for ímpar e **A3** for verdadeira,

$$
\begin{aligned}
J_{ij}(x) = x^T\big[&F_{ij}-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\dot{h}_3\right)(P_4-P_3)\\
&\cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r-1}{2}}\right)\left(P_{\frac{r+1}{2}}-P_{\frac{r-1}{2}}\right)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r+1}{2}}\right)\left(P_{\frac{r+3}{2}}-P_{\frac{r+1}{2}}\right)\\
&\cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-2}\right)(P_{r-1}-P_{r-2})-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{r-1}\right)(P_r-P_{r-1})\big]x,
\end{aligned}
$$

ou, usando a (42)

$$
\begin{aligned}
J_{ij}(x) = x^T\Big[&-\dot{h}_1(P_2-P_1)-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2\right)(P_3-P_2)\cdots-\left(\dot{h}_1+\dot{h}_2+\cdots+\dot{h}_{\frac{r-1}{2}}\right)\\
&\times\left(P_{\frac{r+1}{2}}-P_{\frac{r-1}{2}}\right)+\left(\dot{h}_{\frac{r+3}{2}}+\dot{h}_{\frac{r+5}{2}}+\cdots+\dot{h}_r\right)\left(P_{\frac{r+3}{2}}-P_{\frac{r+1}{2}}\right)+\cdots+\left(\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_r\right)\\
&\times(P_{r-1}-P_{r-2})+\dot{h}_r(P_r-P_{r-1})\Big]x.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Considerando as relações (39), (40) e (42), um limitante superior para J_{ij}, poderá ser

obtido, de:

$$
\begin{aligned}
&(-\dot{h}_1)_{\text{máx}} = \phi_{11},\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)_{\text{máx}} = \phi_{11}+\phi_{21},\\
&\vdots\\
&\left(-\dot{h}_1-\dot{h}_2-\cdots-\dot{h}_{\frac{r-1}{2}}\right)_{\text{máx}} = \left(\phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r-1}{2},1}\right),\\
&\left(\dot{h}_{\frac{r+3}{2}}+\dot{h}_{\frac{r+5}{2}}+\cdots+\dot{h}_r\right)_{\text{máx}} = \left(\phi_{\frac{r+3}{2},2}+\phi_{\frac{r+5}{2},2}+\cdots+\phi_{r2}\right),\\
&\left(\dot{h}_{\frac{r+5}{2}}+\dot{h}_{\frac{r+3}{2}}+\cdots+\dot{h}_r\right)_{\text{máx}} = \left(\phi_{\frac{r+5}{2},2}+\phi_{\frac{r+3}{2},2}+\cdots+\phi_{r2}\right),\\
&\vdots\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}+\dot{h}_{r-2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2}+\phi_{r-2,2},\\
&\left(\dot{h}_r+\dot{h}_{r-1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{r2}+\phi_{r-1,2},\\
&(\dot{h}_r)_{\text{máx}} = \phi_{r2}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Retornando os valores dados em (48), na expressão (47), teremos **J3** que representa um limitante superior de $J_{ij}(x)$, para r ímpar, portanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J3} = x^T \Big[F_{ij} - \phi_{11}P_1 - \phi_{21}P_2 - \cdots - \phi_{\frac{r-1}{2},1}P_{\frac{r-1}{2}} + \Big(\phi_{11}+\phi_{21}+\cdots+\phi_{\frac{r-1}{2},1} - \phi_{\frac{r+3}{2},2} - \phi_{\frac{r+5}{2},2}\\
- \cdots - \phi_{r2}\Big)P_{\frac{r+1}{2}} + \phi_{\frac{r+3}{2},2}P_{\frac{r+3}{2}} + \cdots + \phi_{r-1,2}P_{r-1} + \phi_{r2}P_r \Big]\, x\,.
\end{aligned}
$$

Desta forma, teremos que $J_{ij}(x)$ será sempre menor ou igual a esse limitante, logo: $J_{ij}(x) \leq \mathbf{J3}$, para todo $x \neq 0$. □

Defina o conjunto

$$
\psi_r = \left\{ \omega = [\omega_1\, \omega_2 \cdots \omega_r]^T \in \mathbb{R}^r / \omega_1 \neq \omega_2 \neq \cdots \neq \omega_r \text{ e } \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r \in \mathbb{K}_r \right\}. \tag{49}
$$

Suponha que são conhecidas constantes $\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r$ tais que

$$
-\phi_{\rho,1} \leqslant \dot{h}_\rho \leqslant \phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r. \tag{50}
$$

Como $h_{\omega_1} + h_{\omega_2} + \cdots + h_{\omega_r} = 1$, então

$$
\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r} = 0. \tag{51}
$$

3.3.4 Teoremas para número par e ímpar de regras

Os teoremas seguintes apresentam um conjunto de condições necessárias e suficientes que garantem a estabilidade de (5) e (6), a partir das soluções particulares montadas pelo lema anterior, ou seja, estes teoremas generalizam as soluções particulares que são válidas apenas para um vértice dos politopos, através de permutações convenientes dos índices, para todos os vértices dos referidos politopos.

Teorema 4. *Suponha que (50) e (51) são satisfeitas e que* r *é par.*
Considere ainda que para todo $\omega \in \psi_r$ *definido em (49), as seguintes condições são satisfeitas:*

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}} \leqslant \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \leqslant \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}, \tag{52}$$

ou

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} \leqslant \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \leqslant \phi_{\omega_{\frac{r}{2},2}}. \tag{53}$$

Para todo $\omega \in \psi_r$ *dado em (49), defina as LMIs abaixo:*
Se a condição (52) é satisfeita, então:

$$\begin{aligned} &F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \Big(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} \\ &- \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}\Big) P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r} < 0, \end{aligned} \tag{54}$$

Se a condição (53) é satisfeita, então:

$$\begin{aligned} &F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} P_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} + \Big(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} \\ &\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}\Big) P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r} < 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Logo,

$$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_{\omega_1} P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} P_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r} P_{\omega_r}\right] x < 0,\ \forall x \neq 0, \tag{56}$$

se e somente se, para todo $\omega \in \psi_r$ *definido em (49) as condições dadas em (52) e (54) ou (53) e (55) são factíveis.*

Demonstração.
Necessidade: Considere que (56) é verdadeira para todos $\dot{h}_\rho, \rho \in \mathbb{K}_r$, satisfazendo (50) e (51). Suponha que para um $\omega \in \psi_r$ dado em (49) a condição (52) é satisfeita. Neste caso, para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}$, $\dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_{2,1}}$, $\cdots$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}} = -\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} = \Big(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}$ $-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}\Big)$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}}$, $\cdots$, $\dot{h}_{\omega_r} = \phi_{\omega_{r,2}}$,

que é uma escolha que atende (50) e (51) tendo em vista (52), a condição (56) deve ser satisfeita. Note que nesta situação esta condição (56) é equivalente à condição (54), e assim esta é uma condição necessária.

Considere agora que para um $\omega \in \psi_r$ dado em (49) a condição (53) é satisfeita. Neste caso, para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}$, $\dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_{2,1}}$, $\cdots$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}} = \Big(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}$, $-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}\Big)$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}$, $\cdots$, $\dot{h}_{\omega_r} = \phi_{\omega_{r,2}}$,
que é uma escolha que atende (50) e (51) tendo em vista (53), a condição (56) deve ser satisfeita. Note que nesta situação esta condição (56) é equivalente à condição (55), e assim esta é uma condição necessária. Como o teorema supõe que para todos os $\omega \in \psi_r$ arbitrários, (52) ou (53) é satisfeita, a análise acima contempla todos os casos e assim a necessidade está demonstrada.

Suficiência: Observe que, dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e matrizes $P_1, P_2, \cdots, P_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétricas e positivas definidas, sempre é possível encontrar um $\omega \in \psi_r$ definido em (49), tal que:

$$x^T P_{\omega_r} x \geqslant x^T P_{\omega_{r-1}} x \geqslant \cdots \geqslant x^T P_{\omega_2} x \geqslant x^T P_{\omega_1} x. \tag{57}$$

Considerando que de (49) e (51), $\dot{h}_{\omega_r} = -\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{r-1}}$, note que (56) pode ser representada como:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \big[& F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1}(P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}\right)(P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) - \cdots \\ & - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{r-2}}\right)\left(P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}\right) - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{r-1}}\right)\left(P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}}\right)\big] x. \end{aligned} \tag{58}$$

Novamente usando (49) e (51) e substituindo em (58):

$$\begin{aligned} & -\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{r-1}}\right) = \dot{h}_{\omega_r}, \\ & -\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{r-2}}\right) = \dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}}, \\ & \vdots \\ & -\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}\right) = \dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}}. \end{aligned} \tag{59}$$

Observe que (58) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \big[& F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1}(P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}\right)(P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) \\ & - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}}\right)\left(P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} - P_{\omega_{\frac{r}{2}}}\right) + \left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}}\right) \\ & \times \left(P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} - P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}\right) + \cdots + \left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}}\right)\left(P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}\right) + \dot{h}_{\omega_r}\left(P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}}\right)\Big] x. \end{aligned} \tag{60}$$

De (57) tem-se que:

$$x^T \left(P_{\omega_{i+1}} - P_{\omega_i}\right) x \geqslant 0, \, i \in \mathbb{K}_{r-1} \tag{61}$$

e de (50), $-\phi_{\rho,1} \leqslant \dot{h}_\rho \leqslant \phi_{\rho,2}$, $\rho \in \mathbb{K}_r$.

Agora a análise será dividida em duas partes:

a) Suponha que, para um $\omega \in \psi_r$ dado em (49), a condição (52) é satisfeita. Nesse caso, de (50), (60) e (61), um limitante superior para $J_{ij}(x) < 0$ é obtido para:

$$\begin{aligned}
&\left(-\dot{h}_{\omega_1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1}, \left(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1}, \cdots, \\
&\left(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}-1}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}, \\
&\left(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}, \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \\
&\vdots \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dot{h}_{\omega_{r-2}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \phi_{\omega_{r-2,2}}, \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2} + \phi_{\omega_{r-1,2}}, \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2}.
\end{aligned} \tag{62}$$

Substituindo (62) em (60) é obtida a relação:

$$\begin{aligned}
J_{ij}(x) \leqslant x^T \Big[& F_{ij} - \phi_{\omega_1,1}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_2,1}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \left(\phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}\right. \\
& \left. - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_r,2}\right) P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} + \cdots + \phi_{\omega_r,2}P_{\omega_r} \Big] x.
\end{aligned} \tag{63}$$

Assim, da (54) e (63) tem-se que $J_{ij}(x) < 0$, para $x \neq 0$, nesse caso.

b) Suponha que para um $\omega \in \psi_r$ dado em (49), a condição (53) é satisfeita.

Nesse caso, tendo em vista que de (51),

$\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}} = -\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} - \cdots - \dot{h}_{\omega_r}$,

então substituindo em (60) $-\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}}\right)$, por $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r}$, logo de (50), (60) e (61) um limitante superior para $J_{ij}(x) < 0$ é obtido para:

$$\begin{aligned}
&\left(-\dot{h}_{\omega_1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1}, \left(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1}, \\
&\vdots \\
&\left(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}-1}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}, \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \\
&\vdots \\
&\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2} + \phi_{\omega_{r-1,2}}, \left(\dot{h}_{\omega_r}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_r,2}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Substituindo a (64) em (60) é obtida a relação:

$$J_{ij}(x) \leqslant x^T \left[F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}\right.\right.$$
$$\left.\left. -\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}\right) P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r}\right] x. \tag{65}$$

Assim, de (55) e de (65) tem-se que $J_{ij}(x) < 0$, para $x \neq 0$, nesse caso.
Como o teorema supõe que para todos os $\omega \in \psi_r$ arbitrários (52) ou (53) é satisfeita, então os casos a) e b) acima contemplam todas as situações e a suficiência está demonstrada. □

Teorema 5. *Suponha que (50) e (51) estão satisfeitas e que* r *é ímpar.*
Considere ainda que para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r]^T \in \psi_r$ *definido em (49),*

$$-\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}} \leqslant \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \leqslant \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}}. \tag{66}$$

Então,

$$J_{ij}(x) = x^T \left[F_{ij} + \dot{h}_{\omega_1}P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}P_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r}P_{\omega_r}\right] x < 0, \ \forall x \neq 0, \tag{67}$$

se e somente se,

$$\begin{aligned} &F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,2}}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}}P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} + \\ &+ \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}\right) P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} \\ &+ \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}}P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}}P_{\omega_{\frac{r+5}{2}}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r} < 0, \end{aligned} \tag{68}$$

para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r]^T \in \psi_r$ *definido em (49).*

Demonstração.
Necessidade: Considere que (67) é verdadeira para todos os $\dot{h}_\rho$, $\rho \in \mathbb{K}_r$, satisfazendo (50) e (51). Então, para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}$, $\dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_{2,1}}$, $\cdots$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} = -\phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}}$,
$\dot{h}_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} = \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}}$,
$\dot{h}_{\omega_{\frac{r+5}{2}}} = -\phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}}$, $\cdots$, $\dot{h}_{\omega_r} = -\phi_{\omega_{r,2}}$,
sendo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r]^T \in \psi_r$ arbitrário, que é uma escolha que atende (50) e (51), tendo em vista a condição (66), a condição (67) deverá ser verificada. Observando que nesta situação esta condição (67) é equivalente à condição (68), para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r]^T \in \psi_r$, então a necessidade está demonstrada.
Suficiência: Note que dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, e matrizes $P_1, P_2, \cdots, P_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então sempre

é possível encontrar $\omega = [\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r]^T \in \psi_r$ definida em (49) tal que,

$$x^T P_{\omega_r} x \geqslant x^T P_{\omega_{r-1}} x \geqslant \cdots \geqslant x^T P_{\omega_2} x \geqslant x^T P_{\omega_1} x. \tag{69}$$

Observe que (67) pode ser representada como:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \big[& F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1} (P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}\right) (P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) \\ & - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dot{h}_{\omega_3}\right) (P_{\omega_4} - P_{\omega_3}) - \cdots \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{r-2}}\right) \left(P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}\right) \\ & - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{r-1}}\right) \left(P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}}\right) \big] x. \end{aligned} \tag{70}$$

Note que, usando a (51), podemos escrever a (70), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T \big[& F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1} (P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}\right) (P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) \\ & - \cdots - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r-1}{2}}}\right) \left(P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} - P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}}\right) + \left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r+3}{2}}}\right) \\ & \times \left(P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} - P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}}\right) + \cdots + \left(\dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dot{h}_{\omega_r}\right) \left(P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}\right) + \dot{h}_{\omega_r} \left(P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}}\right) \Big] \end{aligned} \tag{71}$$

Agora, note que de (69),

$$x^T \left(P_{\omega_{i+1}} - P_{\omega_i}\right) x \geqslant 0, i \in \{1, 2, \cdots, r-1\}. \tag{72}$$

Assim, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ dada em (71), considerando (72) ocorre quando:

$$\begin{aligned} & \left(-\dot{h}_{\omega_1}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{1,1}}, \left(-\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}}, \cdots, \\ & \left(-\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r-1}{2}}}\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r=1}{2},1}}, \\ & \left(\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r+3}{2}}}\right)\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}}, \cdots, \\ & \left(\dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dot{h}_{\omega_r}\right)_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{r-1,2}} + \phi_{\omega_{r,2}}, \left(\dot{h}_{\omega_r}\right)_{mx} = \phi_{\omega_{r,2}}. \end{aligned} \tag{73}$$

Substituindo (73) em (71) é obtida a relação:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) \leqslant x^T \big[& F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\varpi_{\frac{r-1}{2},1}} P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}}\right. \\ & \left. - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \phi_{r,2}\right) P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} + \cdots + \phi_{\omega_{r-1,2}} P_{\omega_{r-1}} + \phi_{\varpi_{r,2}} P_{\omega_r} \big] x. \end{aligned} \tag{74}$$

Logo de (74), a condição (68) assegura a condição (67).

Assim, a suficiência está demonstrada. □

3.4 Quantidade de LMIs nos politopos

De acordo com o Teorema 4 a quantidade de LMIs resultantes será fornecida por:

$$\frac{r}{2}P_r^{\frac{r}{2},\frac{r}{2}} = \frac{r!\frac{r}{2}}{(\frac{r}{2})!(\frac{r}{2})!}.$$

De acordo com o Teorema 5 a quantidade de LMIs resultantes será fornecida por:

$$rP_{(r-1)}^{\frac{(r-1)}{2},\frac{(r-1)}{2}} = \frac{r(r-1)!}{(\frac{r-1}{2})!(\frac{r-1}{2})!}.$$

Sendo que o símbolo $P_r^{\alpha,\beta}$, indica permutações com repetição no sentido da análise combinatória e r indica o número de regras ou modelos locais. A Tabela 1 abaixo fornece o número de LMIs de acordo com o número de regras (MOZELLI; SOUZA; MENDES, 2014):

Tabela 1 - Número de LMIs de acordo com o número de regras nos politopos para ϕ's assimétricos.

r	3	4	5	6	7	8
LMIs	6	12	30	60	140	280

Fonte: Do próprio autor

3.5 Exemplos Numéricos

Serão apresentados exemplos numéricos com o objetivo de comparar teoremas propostos com os teoremas disponíveis na literatura sobre o assunto.

3.5.1 Exemplo 1.3 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais)

Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais). Neste exemplo consideramos o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, cujos parâmetros são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}.$$

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3,

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}
$$

LMIs resultantes com o politopo obtido pelo Teorema 5,

$$
\begin{aligned}
&\text{Se } -\phi_{21} \le (\phi_{11} - \phi_{32}) \le \phi_{22}, \text{ então } F_{ij} - \phi_{11}P_1 + (\phi_{11} - \phi_{32})P_2 + \phi_{32}P_3 < 0,\\
&\text{se } -\phi_{11} \le (\phi_{21} - \phi_{32}) \le \phi_{12}, \text{ então } F_{ij} + (\phi_{21} - \phi_{32})P_1 - \phi_{21}P_2 + \phi_{32}P_3 < 0,\\
&\text{se } -\phi_{31} \le (\phi_{21} - \phi_{12}) \le \phi_{32}, \text{ então } F_{ij} + \phi_{12}P_1 - \phi_{21}P_2 + (\phi_{21} - \phi_{12})P_3 < 0,\\
&\text{se } -\phi_{21} \le (\phi_{31} - \phi_{12}) \le \phi_{22}, \text{ então } F_{ij} + \phi_{12}P_1 + (\phi_{31} - \phi_{12})P_2 - \phi_{31}P_3 < 0,\\
&\text{se } -\phi_{11} \le (\phi_{31} - \phi_{22}) \le \phi_{12}, \text{ então } F_{ij} + (\phi_{31} - \phi_{22})P_1 + \phi_{22}P_2 - \phi_{31}P_3 < 0,\\
&\text{se } -\phi_{31} \le (\phi_{11} - \phi_{22}) \le \phi_{32}, \text{ então } F_{ij} - \phi_{11}P_1 + \phi_{22}P_2 + (\phi_{11} - \phi_{22})P_3 < 0.
\end{aligned}
$$

A Figura 5 mostra os resultados das áreas de factibilidade obtidas com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o politopo Teorema 5, para os vários valores dos pares ordenados (a,b), $a \in [-20,-5]$, $b \in [0,1350]$ e $\phi_{11} = 0,65$, $\phi_{12} = 0,85$, $\phi_{21} = 0,55$, $\phi_{22} = 0,75$, $\phi_{31} = 0,95$, $\phi_{32} = 0,45$. No caso, todas as seis condições descritas acima, relacionadas com o Teorema 5, foram satisfeitas.

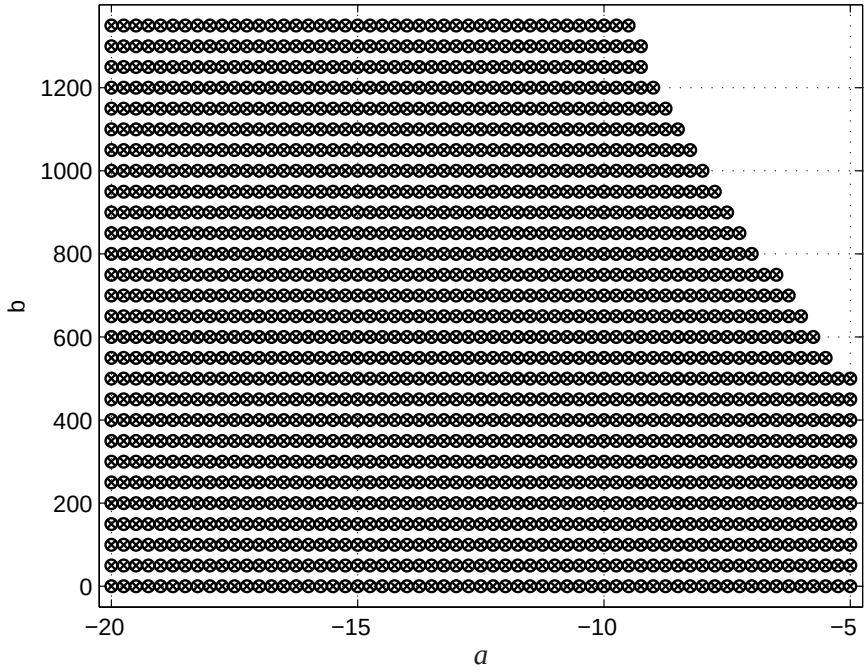
3.5.2 Exemplo 2.3 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais)

Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais). Neste exemplo consideramos o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, (TANAKA; HORI; WANG, 2003), cujos parâmetros são

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix},
$$

$$
A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix} \text{ e } A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.
$$

Figura 5 - Áreas de estabilidade ϕ's assimétricos para $r = 3$ Teorema 3 (x), Teorema 5 (o).



Fonte: Do próprio autor.

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3,

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_{11}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_{21}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_{31}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_{41}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_{12}\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_{22}\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_{32}\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_{42}\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}
$$

LMIs resultantes com o politopo obtido pelo Teorema 4,

Se $(\phi_{11}+\phi_{21}) \leq (\phi_{32}+\phi_{42})$ e $\phi_{42} \leq (\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{21}P_2+(\phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{42})P_3+\phi_{42}P_4<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{21}) \leq (\phi_{32}+\phi_{42})$ e $\phi_{32} \leq (\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{21}P_2+(\phi_{11}+\phi_{21}-\phi_{32})P_4+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{21}) > (\phi_{32}+\phi_{42})$ e $\phi_{11} \leq (\phi_{22}+\phi_{32}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1+(\phi_{11}-\phi_{32}-\phi_{42})P_2+\phi_{32}P_3+\phi_{42}P_4<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{21}) > (\phi_{32}+\phi_{42})$ e $\phi_{21} \leq (\phi_{12}+\phi_{32}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_2+(\phi_{21}-\phi_{32}-\phi_{42})P_1+\phi_{32}P_3+\phi_{42}P_4<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{41}) \leq (\phi_{22}+\phi_{32})$ e $\phi_{32} \leq (\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{41}P_4+(\phi_{11}+\phi_{41}-\phi_{32})P_2+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{41}) \leq (\phi_{22}+\phi_{32})$ e $\phi_{22} \leq (\phi_{11}+\phi_{31}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{41}P_4+(\phi_{11}+\phi_{41}-\phi_{22})P_3+\phi_{22}P_2<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{41}) > (\phi_{22}+\phi_{32})$ e $\phi_{11} \leq (\phi_{22}+\phi_{32}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1+(\phi_{11}-\phi_{22}-\phi_{32})P_4+\phi_{22}P_2+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{41}) > (\phi_{22}+\phi_{32})$ e $\phi_{41} \leq (\phi_{12}+\phi_{22}+\phi_{32})$, então $F_{ij}-\phi_{41}P_4+(\phi_{41}-\phi_{22}-\phi_{32})P_1+\phi_{22}P_2+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{31}) \leq (\phi_{22}+\phi_{42})$ e $\phi_{22} \leq (\phi_{11}+\phi_{31}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{31}P_3+(\phi_{11}+\phi_{31}-\phi_{22})P_4+\phi_{22}P_2<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{31}) \leq (\phi_{22}+\phi_{42})$ e $\phi_{42} \leq (\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1-\phi_{31}P_3+(\phi_{11}+\phi_{31}-\phi_{42})P_2+\phi_{42}P_4<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{31}) > (\phi_{22}+\phi_{42})$ e $\phi_{11} \leq (\phi_{22}+\phi_{32}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{11}P_1+(\phi_{11}-\phi_{22}-\phi_{42})P_3+\phi_{42}P_4+\phi_{22}P_2<0$,

se $(\phi_{11}+\phi_{31}) > (\phi_{22}+\phi_{42})$ e $\phi_{31} \leq (\phi_{12}+\phi_{22}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{31}P_3+(\phi_{31}-\phi_{42}-\phi_{22})P_1+\phi_{42}P_4+\phi_{22}P_2<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{41}) \leq (\phi_{12}+\phi_{32})$ e $\phi_{32} \leq (\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_2-\phi_{41}P_4+(\phi_{21}+\phi_{41}-\phi_{32})P_1+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{41}) \leq (\phi_{12}+\phi_{32})$ e $\phi_{12} \leq (\phi_{21}+\phi_{31}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_1-\phi_{41}P_4+(\phi_{21}+\phi_{41}-\phi_{12})P_3+\phi_{12}P_1<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{41}) > (\phi_{12}+\phi_{32})$ e $\phi_{21} \leq (\phi_{12}+\phi_{32}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_2+(\phi_{21}-\phi_{12}-\phi_{32})P_4+\phi_{12}P_1+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{41}) > (\phi_{12}+\phi_{32})$ e $\phi_{41} \leq (\phi_{12}+\phi_{22}+\phi_{32})$, então $F_{ij}-\phi_{41}P_4+(\phi_{41}-\phi_{12}-\phi_{32})P_2+\phi_{12}P_1+\phi_{32}P_3<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{31}) \leq (\phi_{12}+\phi_{42})$ e $\phi_{12} \leq (\phi_{21}+\phi_{31}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_2-\phi_{31}P_3+(\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{12})P_4+\phi_{12}P_1<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{31}) \leq (\phi_{12}+\phi_{42})$ e $\phi_{42} \leq (\phi_{11}+\phi_{21}+\phi_{31})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_2-\phi_{31}P_3+(\phi_{21}+\phi_{31}-\phi_{42})P_1+\phi_{42}P_4<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{31}) > (\phi_{12}+\phi_{42})$ e $\phi_{21} \leq (\phi_{12}+\phi_{32}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{21}P_2+(\phi_{21}-\phi_{42}-\phi_{12})P_3+\phi_{42}P_4+\phi_{12}P_1<0$,

se $(\phi_{21}+\phi_{31}) > (\phi_{12}+\phi_{42})$ e $\phi_{31} \leq (\phi_{12}+\phi_{22}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{31}P_3+(\phi_{31}-\phi_{42}-\phi_{12})P_2+\phi_{42}P_4+\phi_{12}P_1<0$,

se $(\phi_{31}+\phi_{41}) \leq (\phi_{12}+\phi_{22})$ e $\phi_{22} \leq (\phi_{11}+\phi_{31}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{31}P_3-\phi_{41}P_4+(\phi_{31}+\phi_{41}-\phi_{22})P_1+\phi_{22}P_2<0$,

se $(\phi_{31}+\phi_{41}) \leq (\phi_{12}+\phi_{22})$ e $\phi_{12} \leq (\phi_{21}+\phi_{31}+\phi_{41})$, então $F_{ij}-\phi_{31}P_3-\phi_{41}P_4+(\phi_{31}+\phi_{41}-\phi_{12})P_2+\phi_{12}P_1<0$,

se $(\phi_{31}+\phi_{41}) > (\phi_{12}+\phi_{22})$ e $\phi_{31} \leq (\phi_{12}+\phi_{22}+\phi_{42})$, então $F_{ij}-\phi_{31}P_3+(\phi_{31}-\phi_{12}-\phi_{22})P_4+\phi_{12}P_1+\phi_{22}P_2<0$,

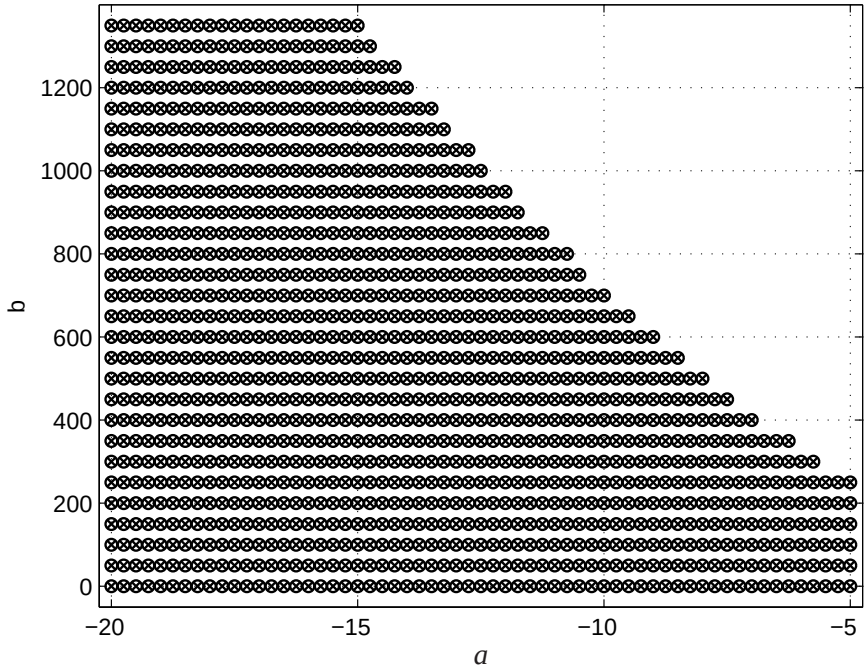
se $(\phi_{31}+\phi_{41}) > (\phi_{12}+\phi_{22})$ e $\phi_{41} \leq (\phi_{12}+\phi_{22}+\phi_{32})$, então $F_{ij}-\phi_{41}P_4+(\phi_{41}-\phi_{12}-\phi_{22})P_3+\phi_{12}P_1+\phi_{22}P_2<0$.

A Figura 6 mostra os resultados das áreas de factibilidade obtidas com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o politopo Teorema 4, para os vários valores dos pares ordenados (a,b), $a \in [-20,-5]$, $b \in [0,1350]$ e $\phi_{11}=0,65$, $\phi_{12}=0,85$, $\phi_{21}=0,55$, $\phi_{22}=0,75$, $\phi_{31}=0,95$, $\phi_{32}=0,45$, $\phi_{41}=0,70$, $\phi_{42}=0,80$. No caso, foi possível utilizar as LMIs referentes ao Teorema 4, pois as condições exigidas foram satisfeitas.

3.6 Tempos de execução dos processamentos

A tabela abaixo fornece os tempos de execução dos processamentos em minutos para ϕ's completamente assimétricos. Os resultados numéricos deste trabalho foram obtidos em um computador com processador Intel Pentium Dual de 2.00 GHz e sistema operacional Windows, utilizando o *software* MATLAB, através do *solver* "LMILab", interfaceado pelo YALMIP (Yet Another LMI Parser) (LÖFBERG, 2004). Observe que para $r=3$, no Exemplo 1.3, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $72,35$ minutos, enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em 43.14 minutos. Para $r=4$, no Exemplo 2.3, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $206,98$ minutos, enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em $112,25$ minutos. Estes exemplos demonstram que o tempo computacional gasto pelos politopos, é consideravelmente menor que o tempo gasto pelos hiper-retângulos.

Figura 6 - Áreas de estabilidade ϕ's assimétricos para $r = 4$ Teorema 3 (x), Teorema 4 (o).



Fonte: Do próprio autor.

Tabela 2 - Tempos de execução dos processamentos para ϕ's assimétricos em minutos.

r	2	3	4
Hiper-retângulo	41,36	72,35	206,98
Politopo	não existe	43,14	112,25

Fonte: Do próprio autor

3.7 Conclusões parciais

Este capítulo apresentou um novo teorema baseado no hiper-retângulo composto pelo conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS), utilizando funções de Lyapunov fuzzy, via desigualdades matriciais lineares (LMIs). Em seguida foram propostos dois teoremas que permitem a determinação algébrica dos vértices dos politopos resultantes das interseções do hiper-retângulo com o hiper-plano das variações temporais das funções de pertinência de um sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TS), usando funções Lyapunov fuzzy. A Figura 5 e a Figura 6, mostram que os resultados numéricos coincidem rigorosamente, ou seja, as condições baseadas em politopo dadas pelos Teorema 4 e Teorema 5 fornecem exatamente os mesmos valores

numéricos que os resultados fornecidos com base no hiper-retângulo dado pelo Teorema 3. Portanto, baseado nos tempos computacionais dados pela Tabela 2 pode-se afirmar a vantagem de utilizar o politopo nas aplicações numéricas. Outra contribuição que deve ser destacada é a generalização do conceito de limitantes das variações temporais das funções de pertinência como pertencentes a duplas desigualdades completamente assimétricas, que até então na literatura eram modulares, isto é, baseadas em uma dupla desigualdade com extremos conhecidos e iguais. Estes casos serão vistos nos próximos capítulos como casos particulares desta nossa contribuição.

4 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno via hiper-retângulos e politopos para intervalos de $\dot{h}_i$ simétricos

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar as LMIs que formam o hiper-retângulo fornecido pelo Teorema 3 e o politopo fornecido pelos Teorema 4 e Teorema 5, que garantem a estabilidade de (5) e (6), quando as taxas de variações temporais das funções de pertinência são diferentes entre si, mas variando agora em intervalos modulares, isto é, simétricos. Ou seja, neste capítulo teremos $-\phi_\rho \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leqslant \phi_\rho$, sendo que as constantes ϕ_ρ, $\rho \in \mathbb{K}_r$ são conhecidas. Esta é outra contribuição desta tese.

4.2 Quantidade de LMIs nos politopos

De acordo com o Teorema 4 a quantidade de LMIs resultantes será fornecida por:

$$\frac{r}{2}P_r^{\frac{r}{2},\frac{r}{2}} = \frac{r!\frac{r}{2}}{(\frac{r}{2})!(\frac{r}{2})!}.$$

De acordo com o Teorema 5 a quantidade de LMIs resultantes será fornecida por:

$$rP_{(r-1)}^{\frac{(r-1)}{2},\frac{(r-1)}{2}} = \frac{r(r-1)!}{(\frac{r-1}{2})!(\frac{r-1}{2})!}.$$

A Tabela 3 abaixo fornece o número de LMIs de acordo com o número de regras (MOZELLI; SOUZA; MENDES, 2014):

Tabela 3 - Número de LMIs de acordo com o número de regras nos politopos para ϕ's simétricos.

r	3	4	5	6	7	8
LMIs	6	12	30	60	140	280

Fonte: Do próprio autor

4.3 Exemplos Numéricos

4.3.1 Exemplo 1.4 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais)

Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais).
Neste exemplo consideramos o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, cujos parâmetros são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix} \text{ e } \; A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}.$$

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3,

$$\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0, \\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}$$

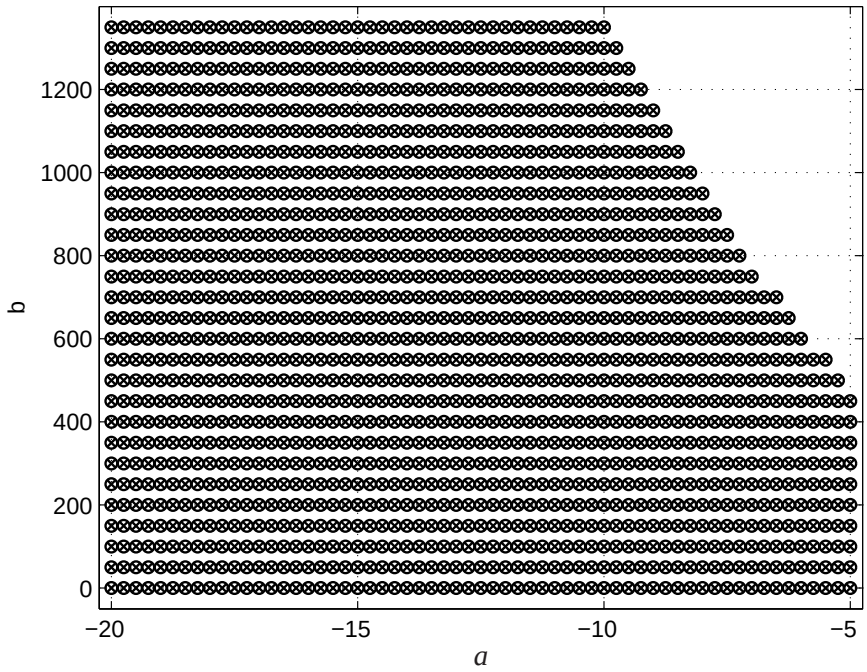
LMIs resultantes com o politopo obtido pelo Teorema 5,

$$\begin{aligned}
&\text{Se } -\phi_2 \leq \phi_1 - \phi_3 \leq \phi_2, \text{ então } F_{ij} - \phi_1 P_1 + (\phi_1 - \phi_3) P_2 + \phi_3 P_3 < 0, \\
&\text{se } -\phi_1 \leq \phi_2 - \phi_3 \leq \phi_1, \text{ então } F_{ij} + (\phi_2 - \phi_3) P_1 - \phi_2 P_2 + \phi_3 P_3 < 0, \\
&\text{se } -\phi_3 \leq \phi_2 - \phi_1 \leq \phi_3, \text{ então } F_{ij} + \phi_1 P_1 - \phi_2 P_2 + (\phi_2 - \phi_1) P_3 < 0, \\
&\text{se } -\phi_2 \leq \phi_3 - \phi_1 \leq \phi_2, \text{ então } F_{ij} + \phi_1 P_1 + (\phi_3 - \phi_1) P_2 - \phi_3 P_3 < 0, \\
&\text{se } -\phi_1 \leq \phi_3 - \phi_2 \leq \phi_1, \text{ então } F_{ij} + (\phi_3 - \phi_2) P_1 + \phi_2 P_2 - \phi_3 P_3 < 0, \\
&\text{se } -\phi_3 \leq \phi_1 - \phi_2 \leq \phi_3, \text{ então } F_{ij} - \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + (\phi_1 - \phi_2) P_3 < 0.
\end{aligned}$$

A Figura 7 mostra os resultados das áreas de factibilidade obtidas com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o politopo Teorema 5, para os vários valores dos pares ordenados (a, b),

$a \in [-20,-5]$, $b \in [0,1350]$ e $\phi_1 = 0,75$, $\phi_2 = 0,65$, $\phi_3 = 0,55$. Nesse caso as condições exigidas pelo Teorema 5 foram satisfeitas.

Figura 7 - Áreas de estabilidade ϕ's simétricos para $r = 3$ Teorema 3 (x), Teorema 5 (o).



Fonte: Do próprio autor.

4.3.2 Exemplo 2.4 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais)

Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais).
Neste exemplo consideramos o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, (TANAKA; HORI; WANG, 2003), cujos parâmetros são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}$$

e $A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$.

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3,

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}
$$

LMIs resultantes com o politopo obtido pelo Teorema 4,

Se $(\phi_1+\phi_2) \leq (\phi_3+\phi_4)$ e $\phi_4 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_3)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 - \phi_2 P_2 + (\phi_1+\phi_2-\phi_4)P_3 + \phi_4 P_4 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_2) \leq (\phi_3+\phi_4)$ e $\phi_3 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 - \phi_2 P_2 + (\phi_1+\phi_2-\phi_3)P_4 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_2) > (\phi_3+\phi_4)$ e $\phi_1 \leq (\phi_2+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 + (\phi_1-\phi_3-\phi_4)P_2 + \phi_3 P_3 + \phi_4 P_4 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_2) > (\phi_3+\phi_4)$ e $\phi_2 \leq (\phi_1+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 + (\phi_2-\phi_3-\phi_4)P_1 + \phi_3 P_3 + \phi_4 P_4 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_3) \leq (\phi_2+\phi_4)$ e $\phi_4 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_3)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 - \phi_3 P_3 + (\phi_1+\phi_3-\phi_4)P_2 + \phi_4 P_4 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_3) \leq (\phi_2+\phi_4)$ e $\phi_2 \leq (\phi_1+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 - \phi_3 P_3 + (\phi_1+\phi_3-\phi_2)P_4 + \phi_2 P_2 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_3) > (\phi_2+\phi_4)$ e $\phi_3 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_3 P_3 + (\phi_3-\phi_2-\phi_4)P_1 + \phi_4 P_4 + \phi_2 P_2 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_3) > (\phi_2+\phi_4)$ e $\phi_1 \leq (\phi_2+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 + (\phi_1 - \phi_2 - \phi_4) P_3 + \phi_4 P_4 + \phi_2 P_2 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_4) \leq (\phi_2+\phi_3)$ e $\phi_3 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 - \phi_4 P_4 + (\phi_1 + \phi_4 - \phi_3) P_2 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_4) \leq (\phi_2+\phi_3)$ e $\phi_2 \leq (\phi_1+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 - \phi_4 P_4 + (\phi_1 + \phi_4 - \phi_2) P_3 + \phi_2 P_2 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_4) > (\phi_2+\phi_3)$ e $\phi_1 \leq (\phi_2+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_1 P_1 + (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) P_4 + \phi_2 P_2 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_1+\phi_4) > (\phi_2+\phi_3)$ e $\phi_4 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_3)$, então $F_{ij} - \phi_4 P_4 + (\phi_4 - \phi_2 - \phi_3) P_1 + \phi_2 P_2 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_3) \leq (\phi_1+\phi_4)$ e $\phi_1 \leq (\phi_2+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 - \phi_3 P_3 + (\phi_2 + \phi_3 - \phi_1) P_4 + \phi_1 P_1 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_3) \leq (\phi_1+\phi_4)$ e $\phi_4 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_3)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 - \phi_3 P_3 + (\phi_2 + \phi_3 - \phi_4) P_1 + \phi_4 P_4 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_3) > (\phi_1+\phi_4)$ e $\phi_2 \leq (\phi_1+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 + (\phi_2 - \phi_1 - \phi_4) P_3 + \phi_4 P_4 + \phi_1 P_1 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_3) > (\phi_1+\phi_4)$ e $\phi_3 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_3 P_3 + (\phi_3 - \phi_1 - \phi_4) P_2 + \phi_4 P_4 + \phi_1 P_1 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_4) \leq (\phi_1+\phi_3)$ e $\phi_3 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 - \phi_4 P_4 + (\phi_2 + \phi_4 - \phi_3) P_1 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_4) \leq (\phi_1+\phi_3)$ e $\phi_1 \leq (\phi_2+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 - \phi_4 P_4 + (\phi_2 + \phi_4 - \phi_1) P_3 + \phi_1 P_1 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_4) > (\phi_1+\phi_3)$ e $\phi_2 \leq (\phi_1+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_2 P_2 + (\phi_2 - \phi_1 - \phi_3) P_4 + \phi_1 P_1 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_2+\phi_4) > (\phi_1+\phi_3)$ e $\phi_4 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_3)$, então $F_{ij} - \phi_4 P_4 + (\phi_4 - \phi_1 - \phi_3) P_2 + \phi_1 P_1 + \phi_3 P_3 < 0$,

se $(\phi_3+\phi_4) \leq (\phi_1+\phi_2)$ e $\phi_2 \leq (\phi_1+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_3 P_3 - \phi_4 P_4 + (\phi_3 + \phi_4 - \phi_2) P_1 + \phi_2 P_2 < 0$,

se $(\phi_3+\phi_4) \leq (\phi_1+\phi_2)$ e $\phi_1 \leq (\phi_2+\phi_3+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_3 P_3 - \phi_4 P_4 + (\phi_3 + \phi_4 - \phi_1) P_2 + \phi_1 P_1 < 0$,

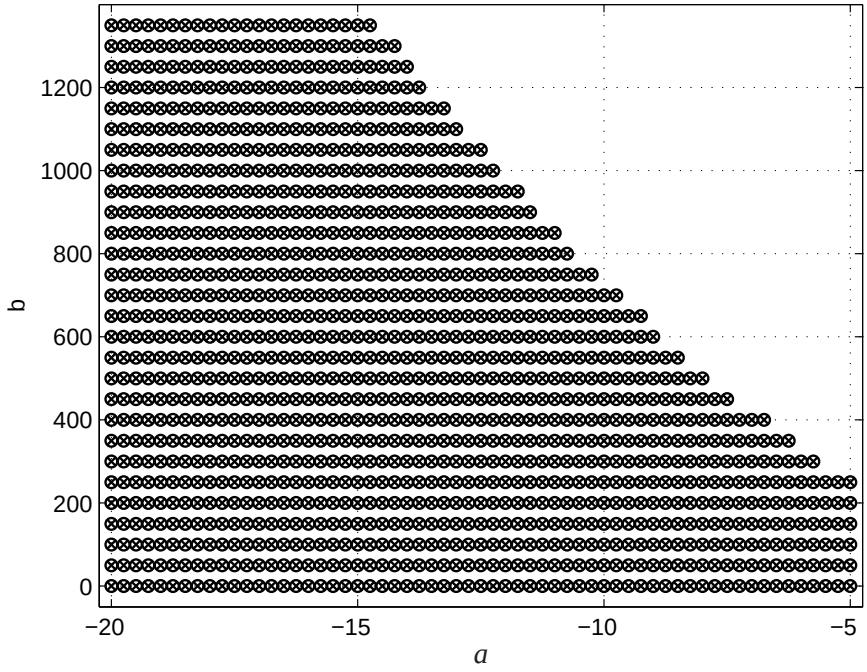
se $(\phi_3+\phi_4) > (\phi_1+\phi_2)$ e $\phi_3 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_4)$, então $F_{ij} - \phi_3 P_3 + (\phi_3 - \phi_1 - \phi_2) P_4 + \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 < 0$,

se $(\phi_3+\phi_4) > (\phi_1+\phi_2)$ e $\phi_4 \leq (\phi_1+\phi_2+\phi_3)$, então $F_{ij} - \phi_4 P_4 + (\phi_4 - \phi_1 - \phi_2) P_3 + \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 < 0$,

A Figura 8 mostra os resultados das áreas de factibilidade obtidas com o hiper-

retângulo Teorema 3 e com o politopo Teorema 4, para os vários valores dos pares ordenados (a,b), $a \in [-20,-5]$, $b \in [0,1350]$ e $\phi_1 = 0,85$, $\phi_2 = 0,75$, $\phi_3 = 0,65$, $\phi_4 = 0,55$. Nesse caso as condições exigidas pelo Teorema 4 foram satisfeitas.

Figura 8 - Áreas de estabilidade ϕ's simétricos para $r = 4$ Teorema 3 (x), Teorema 4 (o).



Fonte: Do próprio autor.

4.4 Tempos de execução dos processamentos

A tabela abaixo fornece os tempos de execução dos processamentos em minutos para ϕ's completamente simétricos, mas diferentes. Os resultados numéricos deste trabalho foram obtidos em um computador com processador Intel Pentium Dual de 2.00 GHz e sistema operacional Windows, utilizando o *software* MATLAB, através do *solver* "LMI-Lab", interfaceado pelo YALMIP (Yet Another LMI Parser) (LÖFBERG, 2004). Observe que para $r = 3$, no Exemplo 1.4, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $53,74$ minutos, enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em $32,89$ minutos. Para $r = 4$, no Exemplo 2.4, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $231,38$ minutos, enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em $97,43$ minutos. Estes exemplos demonstram que o tempo computacional gasto pelos politopos, é consideravelmente menor que o tempo gasto pelos hiper-retângulos.

Tabela 4 - Tempos de execução dos processamentos para ϕ's simétricos em minutos.

r	2	3	4
Hiper-retângulo	$17,12$	$53,74$	$231,38$
Politopo	não existe	$32,89$	$97,43$

Fonte: Do próprio autor

4.5 Conclusões parciais

As Figura 7 e Figura 8, mostram que os resultados numéricos coincidem rigorosamente, ou seja, os resultados baseados em politopo dados pelos Teorema 4 e Teorema 5 fornecem exatamente os mesmos valores numéricos do que os resultados fornecidos pelo hiper-retângulo dados pelo Teorema 3. Portanto baseado nos tempos computacionais dados pela Tabela 4 pode-se afirmar a vantagem de utilizar o politopo nas aplicações numéricas.

5 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy Takagi-Sugeno via hiper-retângulos e politopos para intervalos de $\dot{h}_i$ iguais

5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar as LMIs baeadas no hiper-retângulo fornecido pelo Teorema 3 e no politopo fornecido pelos Teoremas 4 e Teorema 5, que garantem a estabilidade de (5) e (6), quando as taxas de variações temporais das funções de pertinência são iguais entre si, variando em intervalos modulares, isto é, simétricos. Ou seja, neste capítulo teremos $-\phi \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leqslant \phi$, $\rho \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes ϕ são conhecidas. Esta é outra das contribuições desta tese. Os resultados numéricos obtidos neste capítulo serão comparados com os resultados obtidos em (MOZELLI et al., 2009) e em (ESTEVES et al., 2011). Ressalte-se que os resultados numéricos relativos aos hiper-retângulos deste capítulo foram apresentados em (GUEDES et al., 2013).

5.2 Quantidade de LMIs nos politopos

De acordo com o Teorema 4 a quantidade de LMIs resultantes será fornecida por:

$$P_r^{\frac{r}{2},\frac{r}{2}} = \frac{r!}{\left(\frac{r}{2}\right)!\left(\frac{r}{2}\right)!}.$$

De acordo com o Teorema 5 a quantidade de LMIs resultantes será fornecida por:

$$rP_{(r-1)}^{\frac{(r-1)}{2},\frac{(r-1)}{2}} = \frac{r(r-1)!}{\left(\frac{r-1}{2}\right)!\left(\frac{r-1}{2}\right)!}.$$

A Tabela 5 abaixo fornece o número de LMIs de acordo com o número de regras (MOZELLI; SOUZA; MENDES, 2014):

Tabela 5 - Número de LMIs de acordo com o número de regras nos politopos para ϕ's iguais.

r	2	3	4	5	6	7	8
LMIs	2	6	6	30	20	140	70

Fonte: Do próprio autor

Observe que Tabela 5 acima, obtida através dos Teorema 4 e Teorema 5 coincidem exatamente com Tabela 2.1 apresentada em (MOZELLI; SOUZA; MENDES, 2014), obtida com algoritmos de geometria computacional.

5.3 Exemplos numéricos

5.3.1 Exemplo 1.5 - Para $r = 2$ (duas regras ou modelos locais)

Para $r = 2$ (duas regras ou modelos locais).
Neste exemplo consideramos o seguinte modelo fuzzy Takagi-Sugeno, (TANAKA; HORI; WANG, 2003), cujos parâmetros são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.$$

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3.

$$\begin{aligned} F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) < 0, \\ F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) < 0, \\ F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) < 0, \\ F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) < 0. \end{aligned}$$

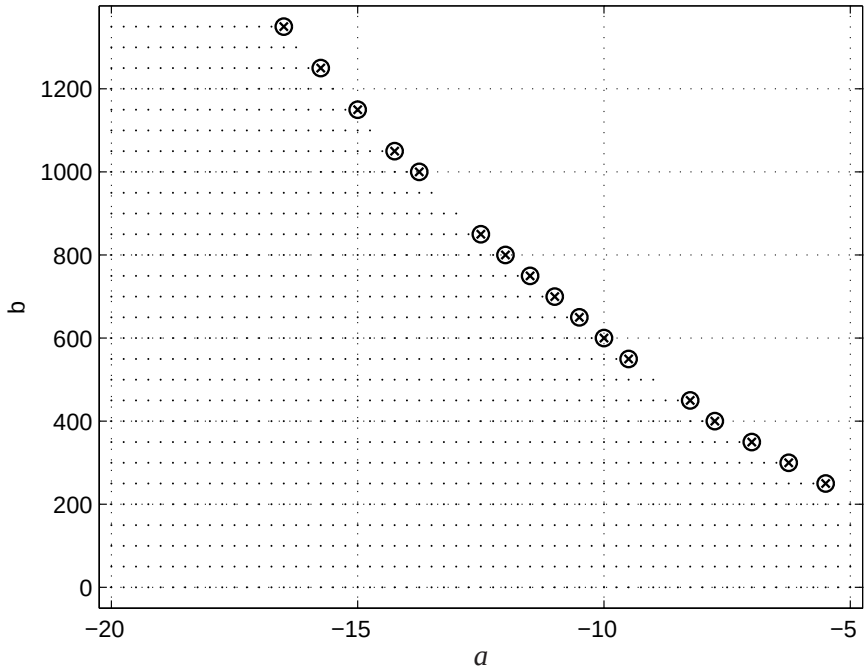
LMIs resultantes com o Politopo obtido através do Teorema 4.

$$\begin{aligned} F_{ij} + \phi \left(P_2 - P_1\right) < 0, \\ F_{ij} + \phi \left(P_1 - P_2\right) < 0. \end{aligned}$$

A Figura 9 mostra os resultados das regiões de factibilidade obtidas com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o Teorema 4, para vários valores dos pares ordenados (a, b), $a \in [-20, -5]$,

$b \in [0, 1350]$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0,85$.

Figura 9 - Áreas de estabilidade ϕ's iguais para $r = 2$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 (.,o,x).



Fonte: Do próprio autor.

5.3.2 Exemplo 2.5 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais)

Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais).

Neste exemplo consideramos o seguinte modelo fuzzy Takagi-Sugeno,cujos parâmetros são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}.$$

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3.

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1 \left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2 \left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3 \left(P_3 + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}
$$

LMIs resultantes com o Politopo obtido através do Teorema 5.

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} + \phi \left(P_2 - P_1\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi \left(P_1 - P_2\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi \left(P_3 - P_1\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi \left(P_1 - P_3\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi \left(P_3 - P_2\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi \left(P_2 - P_3\right) < 0.
\end{aligned}
$$

A Figura 10 mostra o resultado das regiões de factibilidade obtidas com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o Teorema 5, para vários valores dos pares ordenados (a,b), $a \in [-20,-5]$, $b \in [0,1350]$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi = 0,85$.

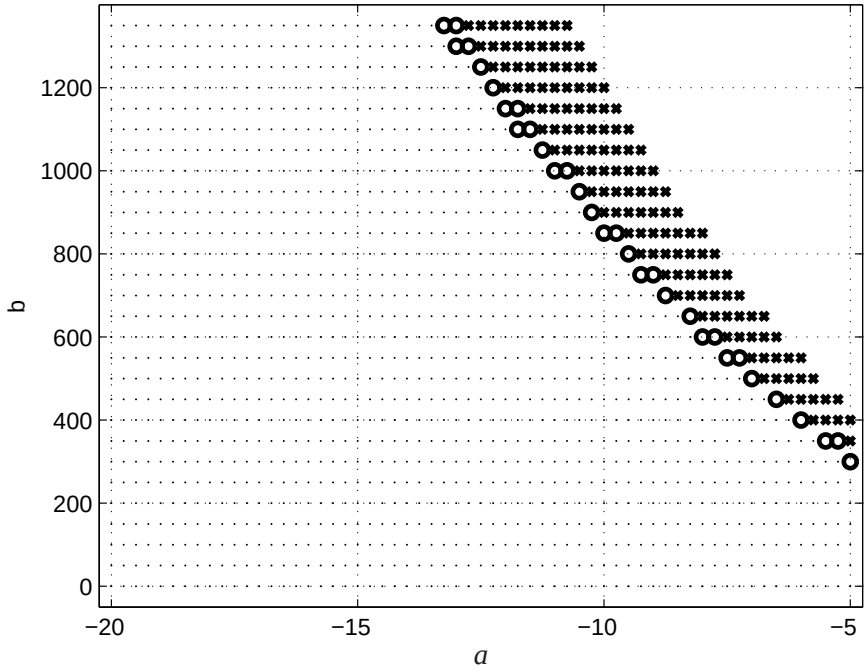
5.3.3 Exemplo 3.5 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais)

Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais).
Neste exemplo consideramos o seguinte modelo fuzzy Takagi-Sugeno, (TANAKA; HORI; WANG, 2003), cujos parâmetros são

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \; A_2 = \; , \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}
$$

$$
A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.
$$

Figura 10 - Áreas de estabilidade ϕ's iguais para $r = 3$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 (.,o,x).



Fonte: Do próprio autor.

Que resultam em,

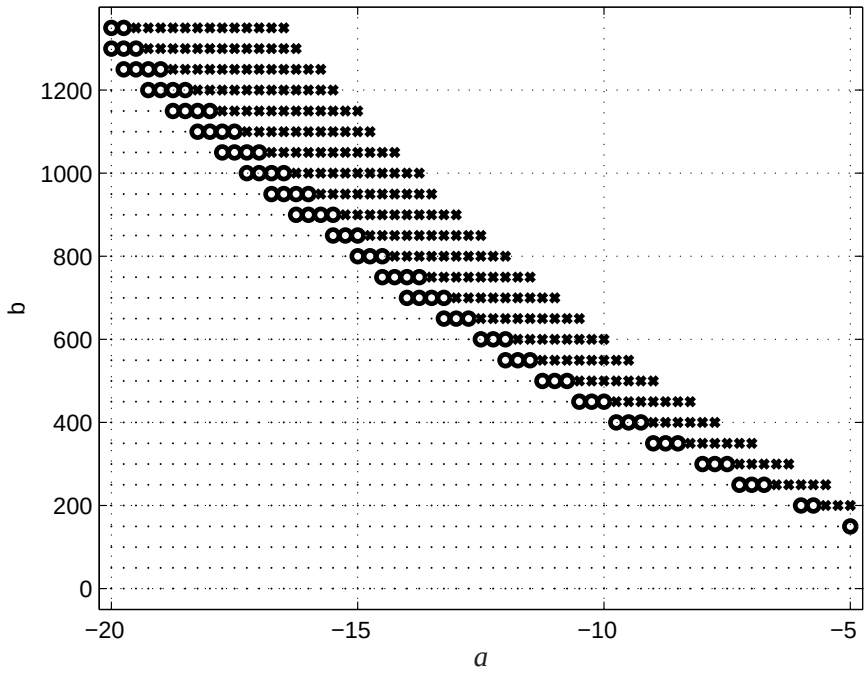
$$
\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} - \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) - \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) - \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) - \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0,\\
&F_{ij} + \phi_1\left(P_1 + X_{ij}\right) + \phi_2\left(P_2 + X_{ij}\right) + \phi_3\left(P_3 + X_{ij}\right) + \phi_4\left(P_4 + X_{ij}\right) < 0.
\end{aligned}
$$

LMIs resultantes com o Politopo obtido através do Teorema 4.

$$
\begin{aligned}
&F_{ij} + \phi\,(\ \ P_1 + P_2 - P_3 - P_4) < 0,\\
&F_{ij} + \phi\,(\ \ P_1 - P_2 - P_3 + P_4) < 0,\\
&F_{ij} + \phi\,(\ \ P_1 - P_2 + P_3 - P_4) < 0,\\
&F_{ij} + \phi\,(-P_1 - P_2 + P_3 + P_4) < 0,\\
&F_{ij} + \phi\,(-P_1 + P_2 + P_3 - P_4) < 0,\\
&F_{ij} + \phi\,(-P_1 + P_2 - P_3 + P_4) < 0.
\end{aligned}
$$

A Figura 11 mostra o resultado das regiões de factibilidade obtidas com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o Teorema 4, para vários valores dos pares ordenados (a,b), $a \in [-20,-5]$, $b \in [0,1350]$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi = 0,85$.

Figura 11 - Áreas de estabilidade ϕ's iguais para $r = 4$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 (.,o,x).



Fonte: Do próprio autor.

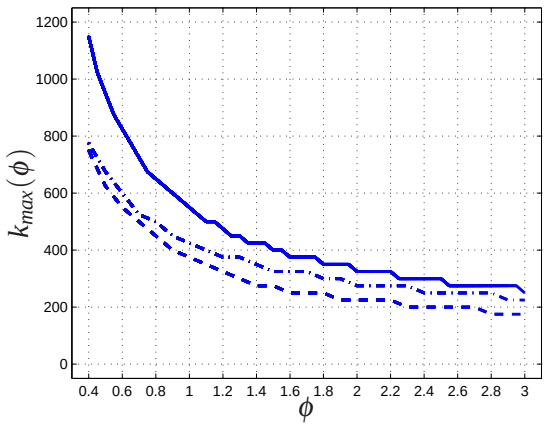
5.3.4 Exemplo 4.5

Considere o modelo fuzzy TS dado por (5) e (6), com quatro regras fuzzy, sendo as matrizes dos modelos locais:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3k-2) & \frac{1}{5}(-34) \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2k-3) & \frac{1}{5}(-26) \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ k & -2 \end{bmatrix}.$$

Adote $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi$. Então, defina $k_{max}(\phi)$ os máximos valores de k para os quais a estabilidade do sistema (5) e (6) é garantida, aplicando-se as condições do Teorema 3, Teorema 1 e Teorema 2. Estes valores foram checados para vários valores de ϕ. A Figura 12 apresenta os resultados deste sistema para os Teorema 1, Teorema 2 e Teorema 3 para $0,4 \leq \phi \leq 3$.

Figura 12 - Análise da estabilidade para $0,4 \leq \phi \leq 3$, utilizando o Teorema 1 (- -), o Teorema 2 (- .) e o Teorema 3 (-).



Fonte: Do próprio autor.

5.4 Tempos de execução dos processamentos

A tabela abaixo fornece os tempos de execução dos processamentos em minutos para ϕ's completamente simétricos e iguais. Os resultados numéricos deste trabalho foram obtidos em um computador com processador Intel Pentium Dual de 2.00 GHz e sistema operacional Windows, utilizando o *software* MATLAB, através do *solver* "LMILab", interfaceado pelo YALMIP (Yet Another LMI Parser) (LÖFBERG, 2004). Observe que para $r = 2$, no Exemplo 1.5, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $16,76$ minutos, enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em $11,17$ minutos. Para $r = 3$, no Exemplo 2.5, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $68,19$ minutos, enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em $31,17$ minutos. Para $r = 4$, no Exemplo 3.5, as LMIs que formam o hiper-retângulo rodaram em $323,22$ minutos,

enquanto que, as LMIs que formam o politopo rodaram em $60,38$ minutos. Estes exemplos demonstram que o tempo computacional gasto pelos politopos, é consideravelmente menor que o tempo gasto pelos hiper-retângulos.

Tabela 6 - Tempos de execução dos processamentos para ϕ's iguais em minutos.

r	2	3	4
Hiper-retângulo	$16,76$	$68,19$	$323,22$
Politopo	$11,17$	$31,17$	$60,38$

Fonte: Do próprio autor

6 Conclusões e trabalhos futuros

Inicialmente foi feito um breve estudo sobre os modelos fuzzy TS (TAKAGI; SUGENO, 1985), que resumidamente consistem da descrição de um sistema não linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, e o sistema global obtido através da combinação fuzzy dos modelos locais lineares.

Com o objetivo de redução do conservadorismo das relaxações baseadas em LMIs dos sistemas fuzzy TS, foi proposto no Capítulo 3, um novo teorema baseado no hiper-retângulo composto pelo conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS), utilizando funções de Lyapunov fuzzy, via desigualdades matriciais lineares (LMIs), através de uma generalização do conceito de limitantes das variações temporais das funções de pertinência como pertencentes a duplas desigualdades completamente assimétricas, isto é, $-\phi_{\rho 1} \leq \dot{h}_{\rho}(x(t)) \leqslant \phi_{\rho 2}$, $\rho \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes $\phi_{\rho 1}$ e $\phi_{\rho 2}$ são conhecidas, que até então na literatura eram modulares, isto é, baseadas em duplas desigualdades com extremos conhecidos e iguais.

A seguir foram apresentados dois teoremas, que fornecem condições necessárias e suficientes, e permitem a determinação algébrica dos vértices do politopo resultante da interseção do hiper-retângulo com o hiper-plano das variações temporais das funções de pertinência de um sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TS), usando funções Lyapunov fuzzy. O fato de apresentar dois teoremas deve-se a possibilidade de utilizar-se na formulação dos sistemas fuzzy TS, um número par ou um número ímpar de regras ou modelos locais. Através de exemplos verifica-se que, os resultados numéricos obtidos com o hiper-retângulo e com o politopo coincidem perfeitamente, sendo que a estrutura de politopo consegue reproduzir estes resultados em um tempo de execução computacional consideravelmente menor, que o tempo demandado pelos hiper-retângulos, conforme a Tabela 2.

No Capítulo 4, apresenta-se a primeira particularização da formulação geral apresentada no capítulo anterior. Neste capítulo os limitantes das variações temporais das funções de pertinência pertencem a duplas desigualdades simétricas, porém diferentes entre si, isto é, $-\phi_{\rho} \leq \dot{h}_{\rho}(x(t)) \leqslant \phi_{\rho}$, $\rho \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes ϕ_{ρ} são conhecidas. Os exemplos apresentados mostram que os resultados numéricos coincidem rigorosamente, ou

seja, as condições baseadas nos politopos dados pelos Teorema 4 e Teorema 5 fornecem exatamente os mesmos valores numéricos que as condições baseadas em hiper-retângulos, novamente, baseado nos tempos computacionais dados pela Tabela 4 pode-se afirmar a vantagem de utilizar os resultados obtidos com os politopos nas aplicações numéricas.

Finalmente, no Capítulo 5, realiza-se mais uma particularização do intervalo de domínio das derivadas temporais das funções de pertinência pertencentes agora a intervalos modulares iguais, isto é, $-\phi \leq \dot{h}_{\rho}(x(t)) \leqslant \phi$, $\rho \in \mathbb{K}_r$. Esta simplificação fornece condições para comparações com resultados numéricos da literatura, especialmente os resultados em Mozelli et al. (2009) e em Esteves et al. (2011).

Observa-se através dos exemplos numéricos que, para o caso de apenas dois modelos locais, Figura 9, os resultados atingidos pelos teoremas propostos, coincidem rigorosamente com os resultados obtidos por Esteves et al. (2011), mas fornecem alguns pontos de factibilidade adicionais aos resultados conseguidos por Mozelli et al. (2009). Para os casos com três modelos locais ou para o caso com quatro modelos locais, as Figuras 10 e Figura 11, mostram que os resultados obtidos pelos teoremas propostos conseguem uma área de factibilidade adicional em relação aos resultados de Mozelli et al. (2009) e Esteves et al. (2011). A Figura 12 mostra a influência do limitante superior das derivadas temporais das ponderações normalizadas (ϕ), sendo possível observar que o Teorema 3 apresentou resultados melhores que os Teoremas 1 e 2. Novamente baseado nos tempos computacionais dados pela Tabela 6 pode-se afirmar a vantagem de utilizar condições baseadas nos politopos nas aplicações numéricas. Portanto, os teoremas propostos conseguem reduzir o conservadorismo das formulações anteriores.

A importância das relaxações das condições de estabilidade em projetos de sistemas de controle baseados em LMIs está na possibilidade de assegurar, com maior facilidade, além da estabilidade, outros índices de desempenho tais como taxa de decaimento, restrições nas entradas e/ou saídas e robustez. Finalmente, o trabalho deixou para pesquisas futuras as possíveis relaxações adicionais referentes aos termos F_{ij} no Teorema 3 ou no Teoremas 4, bem como as aplicações destes teoremas nos projetos de reguladores e/ou observadores, por exemplo, considerando os resultados apresentados em Teixeira, Assunção e Avellar (2003).

A aplicação dos resultados desta tese no projeto de sistemas de controle de plantas não lineares descritas por modelos fuzzy TS também é um tema para outros estudos sobre o assunto. Por exemplo, seguindo as abordagens utilizadas em Lee, Park e Joo (2012), Lam e Lauber (2013), Lee, Joo e Tak (2014), Mozelli, Souza e Mendes (2014), que consideram a estabilidade local do sistema controlado.

REFERÊNCIAS

ABDELMALEK, I. *Non linear systems control: LMI fuzzy approach*. 2009. 104 f. Tese (Doutorado) — Université Hadj Lakhdar de Batna, République Algérienne Démocratique et Populaire, 2009.

ARRIFANO, N. S. D.; OLIVEIRA, V. A.; COSSI, L. A. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach. *SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 17, p. 213 – 225, 2006. ISSN 0103-1759.

BERNAL, M.; HUSEK, P. Non-quadratic performance design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Zielona Gora, v. 15, n. 3, p. 383, 2005.

BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

CAMPOS, V.; SOUZA, F.; TORRES, L.; PALHARES, R. New stability conditions based on piecewise fuzzy Lyapunov functions and tensor product transformations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 21, n. 4, p. 748–760, 2013. ISSN 1063-6706.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design of a class of continuous time fuzzy control systems. *International Journal Control*, Abingdon, v. 64, p. 1069–1087, 1996.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design for a class of complex control systems part ii: Fuzzy controller design. *Automatica*, Tarrytown, v. 33, n. 6, p. 1029–1039, 1997. ISSN 0005-1098.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design of a class of complex control systems. *International Journal Control*, Abingdon, v. 33, n. 6, p. 1029–1039, 1997.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 28, n. 4, p. 397–404, 1997a.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Lyapunov-like stability theorems for discrete-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 28, n. 3, p. 297–308, 1997b.

CARDIM, R. *Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

CASTRO, J. Fuzzy logic controllers are universal approximators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Piscataway, v. 25, n. 4, p. 629–635, 1995. ISSN 0018-9472.

CHADLI, M.; MAQUIN, D.; RAGOT, J. Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETCS, 2000, Nashville. *Proceedings...* Nashville: [s.n.], 2000. p. 3514–3519.

ESTEVES, T.; JÚNIOR, E. M.; MOREIRA, M.; CARDIM, R.; ALVES, M. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov fuzzy. In: X SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 2011, São João del-Rei. *Anais...* São João del-Rei: [s.n.], 2011. p. 885–890.

ESTEVES, T. T. *Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler*. 2011. 99 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de —, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2011.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control toolbox - for use with matlab*. [S.l.: s.n.], 1995. Disponível em: <http://www.mathworks.com/access>. Acesso em: 22 set. 2009.

GUEDES, J. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Stability of nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy models and hyper-rectangle of LMIs. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer US, Heidelberg, v. 24, n. 1-2, p. 46–53, 2013.

HADJILI, M. L. *Fuzzy logic in nonlinear modeling and control*. 2002. Tese (Doutorado) — Université Catolique de Louvain, Belgium, 2002.

HIROTA, K. *Industrial applications of fuzzy technology*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1993. ISBN 9784431701095.

JADBABAIE, A. A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. In: 14TH IFAC WORD CONGRESS, 1999, China. *Proceedings...* China: [s.n.], 1999.

JOHANSEN, T.; SHORTEN, R.; MURRAY-SMITH, R. On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 8, n. 3, p. 297–313, 2000. ISSN 1063-6706.

JOHANSSON, M. *Piecewise linear control systems*. New York: Springer Verlag, 2003. 205 p.

JOHANSSON, M.; RANTZER, A.; ARZEN, K. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 7, n. 6, p. 713–722, 1999. ISSN 1063-6706.

KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000. ISSN 1063-6706.

KING, R. E.; KARONIS, F. C. Multi-level expert control of a large-scale industrial process. In: *Fuzzy Computing Theory, Hardware and Applications*. Elsevier, Amsterdam: M. M. Gupta and T. Yamakawa, 1988. p. 323–340.

KOSKO, B. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Computers*, Piscataway, v. 43, n. 11, p. 1329–1333, 1994. ISSN 0018-9340.

LAM, H.; LAUBER, J. Membership-function-dependent stability analysis of fuzzy-model-based control systems using fuzzy Lyapunov functions. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 232, p. 253 – 266, 2013. ISSN 0020-0255.

LARA, C.; FLORES, J. J.; CALDERON, F. On the hyperbox - hyperplane intersection problem. *INFOCOMP - Journal of Computer Science*, Coimbatore, v. 8, n. 4, p. 21–27, 2009.

LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 257, p. 163 – 175, 2014. ISSN 0020-0255.

LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 185, n. 1, p. 230 – 248, 2012. ISSN 0020-0255.

LÖFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004. *Proceedings...* [S.l.= s.n.], 2004. p. 284–289.

LYAPUNOV, A. M. *General problem of the stability of motion*. [S.l.]: CRC Press, 1992.

MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

MAMDANI, E. H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, Washington, v. 121, n. 3, p. 1585–1588, 1974. ISSN 0020-3270.

MAMDANI, E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *Computers, IEEE Transactions on*, IEEE, Piscataway, v. 100, n. 12, p. 1182–1191, 1977.

MOZELLI, L.; SOUZA, F.; MENDES, E. SOFC for TS fuzzy systems: Less conservative and local stabilization conditions. In: IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE IN CONTROL AND AUTOMATION (CICA). *Proceedings...* [S.l.], 2014. p. 1–7.

MOZELLI, L. A. *Novas funções de Lyapunov e soluções numéricas para análise de estabilidade e controle de sistemas Takagi-Sugeno: Aproximando os controles fuzzy e não-linear*. 2011. 138 f. Tese (Doutorado) — UFMG-MG, Belo Horizonte, 2011.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; SOUZA, F. O.; MENDES, E. M. A. M. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, Kidlington, v. 45, n. 6, p. 1580–1583, 2009.

OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. Piecewise nonlinear control. In: 42ND IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2003. v. 5, p. 4735–4740. ISSN 0191-2216.

OSTERGAARD, J. J.; HOLMBLAD, L. P. Control of cement kiln by fuzzy logic. In: *Fuzzy Information and Decision Processes*. Amsterdam: M. M. Gupta and E. Sanches, 1982. p. 389–399.

PEAUCELLE, D.; HENRION, D.; LABIT, Y.; TAITZ, K. *User's Guide for SeDuMi Interface 1.04*. Toulouse, 2002. 37 p. Disponível em: <http://www.laas.fr/∼peaucell/software>. Acesso em: 22 set. 2009.

RANTZER, A.; JOHANSSON, M. Piecewise linear quadratic optimal control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 45, n. 4, p. 629–637, 2000. ISSN 0018-9286.

SCHWARTZ, D. G.; KLIR, G. J. Fuzzy logic flowers in Japan. *IEEE Spectr.*, Piscataway, v. 29, n. 7, p. 32–35, jul. 1992. ISSN 0018-9235.

SLOTINE, J.; LI, W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1991. ISBN 9780130408907.

SUGENO, M.; KANG, G. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 28, n. 1, p. 15 – 33, 1988. ISSN 0165-0114.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A dual design problem via multiple Lyapunov functions. In: THE 10TH IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2001b. v. 1, p. 388–391.

TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Amsterdam, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998a. ISSN 1063-6706.

TANAKA, K.; NISHIMURA, M.; WANG, H. O. Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 4., 1998, Philadelphia. *Proceedings of the...* Philadelphia: [s.n.], 1998. p. 3450–3454.

TANAKA, K.; SANO, M. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Amsterdam, v. 2, n. 2, p. 119–134, 1994. ISSN 1063-6706.

TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 135 – 156, 1992. ISSN 0165-0114.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a Linear Matrix Inequality Approach*. Canada: John Wiley Professional, 2001. 432 p.

TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. *Proceedings of the...* [S.l.]: [s.n.], 2007. p. 4071–4076. ISSN 0743-1619.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Amsterdam, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001. ISSN 1063-6706.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

TERANO, T.; SUGENO, M.; ASAI, K. Book; Book/Illustrated. *Fuzzy systems theory and its applications / Toshiro Terano, Kiyoji Asai, Michio Sugeno*. [S.l.]: Boston : Academic, 1992. ISBN 0126852456 (acid-free paper).

TOGNETTI, E. S. *Controle de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno usando relaxações LMIs*. 2011. 138 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2011.

TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, V. A. Fuzzy pole placement based on piecewise Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Chichester, v. 20, n. 5, p. 571–578, 2010.

TSOUKALAS, L. H.; UHRIG, R. E. *Fuzzy and neural approaches in engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1996. ISBN 0471160032.

VANDENBERGHE, L.; BALAKRISHNAN, V. Algorithms and software for LMI problems in control. *Control Systems, IEEE*, Sydney, v. 17, n. 5, p. 89–95, 1997. ISSN 1066-033X.

WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996. ISSN 1063-6706.

WANG, L.-X.; MENDEL, J. M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, IEEE, Piscataway, v. 3, n. 5, p. 807–814, 1992.

WILL, A. B.; TEIXEIRA, M. C. M.; ŻAK, S. H. Four whell steering control systems design using fuzzy models. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 6., 1997, Hartford. *Proceedings of the...* Hartford: IEEE, 1997. p. 73–78.

YAMAKAWA, T. Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 32, n. 2, p. 161 – 180, 1989. ISSN 0165-0114. Applications of Fuzzy Logic Control to Industry.

YASUNOBU, S.; MIYAMOTO, S. Automatic train operation system by predictive fuzzy control. In: *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Amsterdam: M. Sugeno, 1985. p. 1–18.

YING, H. General Takagi-Sugeno fuzzy systems are universal approximators. In: IEEE WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE, 1999. *Proceedings...* [S.l.= s.n.], 1998. v. 1, p. 819–823. ISSN 1098-7584.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 2, p. 338–353, 1965.

ZENG, K.; ZHANG, N.-Y.; XU, W.-L. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 8, n. 6, p. 773–780, 2000. ISSN 1063-6706.