

Julio Cezar Uzinski

**Momentos nulos e regularidade wavelet na detecção
de falhas em sinais**

Ilha Solteira - SP
2013



Momentos nulos e regularidade wavelet na detecção de falhas em sinais

Julio Cezar Uzinski

Orientador: Dr. Francisco Villarreal Alvarado

Coorientador: Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira - SP

2013



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

U99m	<p>Uzinski, Julio Cezar. Momentos nulos e regularidade wavelet na detecção de falhas em sinais / Julio Cezar Uzinski. – Ilha Solteira : [s.n.], 2013 103 f. : il.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2013</p> <p>Orientador: Francisco Villarreal Alvarado Coorientador: Marco Aparecido Queiroz Duarte Inclui bibliografia</p> <p>1. Transformada Wavelet. 2. Parametrização angular. 3. Banco de filtros ortonormais. 4. Detecção de falhas. 5. Sinais elétricos. 6. Teoria dos sinais (Telecomunicações).</p>
------	--

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

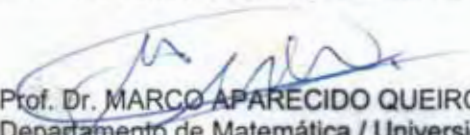
TÍTULO: Momentos nulos e regularidade wavelet na detecção de falhas em sinais

AUTOR: JULIO CEZAR UZINSKI

ORIENTADOR: Prof. Dr. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCO APARECIDO QUEIROZ DUARTE

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. MARCO APARECIDO QUEIROZ DUARTE
Departamento de Matemática / Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul


Prof. Dr. JOZUE VIEIRA FILHO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. EDIVALDO ROMANINI
Departamento de Ciências Exatas / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Data da realização: 23 de agosto de 2013.

*Aos meus pais: Julio e Maria,
os grandes heróis de minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Ao término deste trabalho deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

- a Deus, por tudo;
- aos professores, Dr. Francisco Villarreal e Dr. Marco A.Q. Duarte, pela confiança e dedicação em suas orientações;
- à minha família, pelo apoio e incentivo, especialmente meus pais, Julio e Maria, e meus irmãos, Tarcisio, Henrique e Rafael;
- a todos professores e funcionários do PPGEE e da biblioteca da FEIS;
- aos colegas peruanos que me acolheram em Ilha Solteira, bem como todos companheiros de mestrado, pelo convívio e colaboração;
- ao Dr. Henrique Mohallem Paiva e ao Dr. Roberto Kawakami Haroop Galvão, pelas contribuições;
- aos professores, Dr. Jozué V. Filho, Dr. Luis A. F. de Oliveira e Dr. Edivaldo Romanini, pelas valiosas sugestões;
- à prof^a Helen Gomes, pela colaboração indispensável à finalização do texto escrito;
- a todos os meus companheiros e professores da graduação e, de maneira especial, aos professores Emivan e Edineia, por todo incentivo;
- a todos os amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização deste trabalho. Independente de seus nomes terem sido citados nele, minha sincera gratidão;
- aos grupos *latex-br*, *abnTEX2* e à comunidade Linux em geral;
- à CAPES, pelo auxílio financeiro;
- a todos os brasileiros que, ao exercerem sua cidadania, contribuem com o progresso deste país.

*“Eu estudei lealmente e reparto sem inveja
e não escondo a riqueza que ela (sabedoria) encerra,
porque ela é para os homens um tesouro inesgotável;
e os que a adquirem preparam-se para se tornar amigos de Deus,
recomendados a ele pela educação que ela lhes dá.
(Bíblia Sagrada, Sabedoria 12, 13-14)*

RESUMO

Geralmente, em processamento digital de sinais, quando um sinal vai ser analisado usando a transformada wavelet, algumas ou várias funções wavelets são testadas e aquela que melhor se adapta no tempo e na frequência com o dado sinal é a escolhida. Entretanto, sabe-se que propriedades, como regularidade, suavidade e suporte compacto são determinantes na escolha da função wavelet a ser usada. Funções com suporte maior aumentam a resolução em frequência, mas diminuem a resolução temporal do sinal transformado. Assim, deve-se escolher uma função wavelet cujo suporte não comprometa nenhuma das resoluções. Momentos nulos e suavidade estão matematicamente relacionados, pois quanto maior o número de momentos nulos de uma wavelet, mais suave ela é. Quanto maior a suavidade da wavelet, maior a probabilidade de reconstrução perfeita do sinal decomposto pela transformada wavelet. Segundo a formulação de Sherlock & Monro o espaço de wavelets ortonormais é parametrizado por um conjunto de parâmetros angulares, adaptando o trabalho com matrizes paraunitárias. Esta parametrização pode ser usada para ajustar a wavelet, a fim de melhorar o índice de desempenho de algumas aplicações relacionadas ao processamento de sinais em questão. A formulação de Sherlock & Monro fora estendida para até dois momentos nulos em trabalhos anteriores e, respectivamente, para três momentos nulos neste trabalho. Além da extensão dessa formulação, este texto apresenta uma aplicação da mesma em relação ao diagnóstico de falhas em sinais elétricos.

Palavras-chaves: Transformada Wavelet. Parametrização Angular. Banco de Filtros Ortonormais. Detecção de Falhas. Sinais Elétricos.

ABSTRACT

Generally, in digital signal processing when a signal is to be analyzed using the wavelet transform, some or several wavelet functions are tested and the one that best matches in time and frequency with the given signal is chosen. However, it is known that properties such as regularity, smoothness and compact support are decisive in the choice of the wavelet function to be used. Functions with greater support increase frequency resolution, on the other hand decrease the temporal resolution of the transformed signal. Thus, one should pick a wavelet function which support does not compromise any of the resolutions. Vanishing Moments and smoothness are closely connected, since the greater is the number of vanishing moments the smoother is the wavelet. And how much smoother is the wavelet, the greater is the probability of perfect reconstruction of the signal decomposed by wavelet transform. According to the formulation of Sherlock and Monro the space of orthonormal wavelets is parameterized by a set of angular parameters, adapting the work of factorization of paraunitary matrices. That parameterization could be used to adjust the wavelet in order to improve the performance index of some applications related to signal processing. The formulation of Sherlock and Monro was extended for up to two vanishing moments in previous papers and, respectively, and to up to three vanishing moments in this work. Beyond the extent of this formulation, this text presents an application of the constructed wavelets for the diagnosis of faults in electrical signals.

Keywords: Wavelet Transform. Angular parameterization. Orthonormal filter banks. Fault Detection. Electrical Signals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Sinal estacionário e sinal não estacionário	19
Figura 2 – Análise local no tempo: o uso de janelas	20
Figura 3 – Sinal e sua transformada de Fourier	20
Figura 4 – O gráfico de uma wavelet (Wavelet de Morlet)	21
Figura 5 – Diferentes valores de a para (8), $a < 1$, $a = 1$ e $a > 1$	22
Figura 6 – Variação do parâmetro b	22
Figura 7 – Transformada wavelet rápida (Árvore de Análise)	24
Figura 8 – Transformada wavelet rápida Inversa (Árvore de Síntese)	25
Figura 9 – Procedimento para a parametrização do banco de filtros wavelet	27
Figura 10 – Geração recursiva dos pesos dos filtros passa-baixas $h_i^{(N+1)}$ em função de $h_i^{(N)}$	27
Figura 11 – Região de valores admissíveis para α_1 e α_2 pela restrição (42)	35
Figura 12 – Região de valores admissíveis para \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 pela restrição (44)	35
Figura 13 – Sinal com singularidades	43
Figura 14 – Sinal y no domínio da frequência	43
Figura 15 – Identificação de singularidades com db1	44
Figura 16 – Escalograma do sinal analisado com db1	44
Figura 17 – Identificação de singularidades com db2	45
Figura 18 – Escalograma do sinal analisado com db2	45
Figura 19 – Identificação de singularidades com db4	46
Figura 20 – Escalograma do sinal analisado com db4	46
Figura 21 – Sinal com falhas	47
Figura 22 – Sinal y no domínio da frequência	48
Figura 23 – Tentativa de identificação de falhas com db1	48
Figura 24 – Identificação de falhas com db2	49
Figura 25 – Identificação de falhas com db4	49
Figura 26 – Parametrização inicial $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, -0.2618, -1.0472\}$	50
Figura 27 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 0$	51
Figura 28 – Parametrização com $p = 1$, $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, -0.2618, 2.5482\}$	51
Figura 29 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 1$	52
Figura 30 – Parametrização com $p = 2$, $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, 1.3160, 0.9704\}$	52
Figura 31 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 2$	53
Figura 32 – Parametrização com $p = 3$, $\alpha = \{-1.5708, 0.8631, 0.9625, 0.5306\}$	53
Figura 33 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 3$	54
Figura 34 – Wavelet $\alpha_{p=1} = \{-1.4223, 0.4882, 1.7195\}$	55
Figura 35 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=1}$	55

Figura 36	–Wavelet $\alpha_{p=2} = \{-1.4223, 1.3177, 0.8899\}$	56
Figura 37	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=2}$	56
Figura 38	–Wavelet $\alpha_{p=3} = \{-1.3233, 1.3107, 0.7980\}$	57
Figura 39	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=3}$	57
Figura 40	–Wavelet $\alpha_{p=1} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, 0.0325, 0.5524, 0.3976\}$.	58
Figura 41	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=1}$	58
Figura 42	–Wavelet $\alpha_{p=2} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, 0.0325, -0.0052, 0.9552\}$	59
Figura 43	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=2}$	59
Figura 44	–Wavelet $\alpha_{p=3} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, -0.5035, 0.8681, 0.6178\}$	60
Figura 45	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=3}$	60
Figura 46	–Parametrização inicial $\alpha_{p=0} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, -1.0999\}$.	61
Figura 47	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 46	62
Figura 48	–Tentativa de identificação de singularidade com $\alpha_{p=0}$	62
Figura 49	–Wavelet $\alpha_{p=1} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, 1.5821\}$	63
Figura 50	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 49	64
Figura 51	–Tentativa de identificação de singularidade com $\alpha_{p=1}$	64
Figura 52	–Wavelet $\alpha_{p=2} = \{-0.3033, 0.2937, 0.0545, 0.7405\}$	65
Figura 53	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 52	65
Figura 54	–Identificação de singularidade com $\alpha_{p=2}$	66
Figura 55	–Wavelet $\alpha_{p=3} = \{-0.3033, -0.8243, 1.6308, 0.2822\}$	66
Figura 56	–Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 55	67
Figura 57	–Identificação de singularidade com $\alpha_{p=3}$	67
Figura 58	–Aeronave Boeing 747	69
Figura 59	–Sinais de controle e saídas da planta para uma das simulações de falhas do Boeing 747	70
Figura 60	–Decomposição do sinal sem falhas usando $\alpha_{p=1}$	71
Figura 61	–Decomposição do sinal sem falhas usando $\alpha_{p=2}$	71
Figura 62	–Decomposição do sinal sem falhas usando $\alpha_{p=3}$	72
Figura 63	–Decomposição do sinal com redução de 50% usando $\alpha_{p=1}$	72
Figura 64	–Decomposição do sinal com redução de 50% usando $\alpha_{p=2}$	73
Figura 65	–Decomposição do sinal com redução de 50% usando $\alpha_{p=3}$	73
Figura 66	–Decomposição do sinal com redução de 30% usando $\alpha_{p=1}$	74
Figura 67	–Decomposição do sinal com redução de 30% usando $\alpha_{p=2}$	74
Figura 68	–Decomposição do sinal com redução de 30% usando $\alpha_{p=3}$	75
Figura 69	– $\alpha_{p=3}$ na <i>Toolbox</i> do Matlab	102
Figura 70	–Análise de um sinal usando $\alpha_{p=3}$ na <i>Toolbox</i> do Matlab	103

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CWT	Transformada Wavelet Contínua
DWT	Transformada Wavelet Discreta
FIR	Filtros digitais de resposta finita ao impulso
FT	Transformada de Fourier
FWT	Transformada Rápida Wavelet
ICWT	Transformada Wavelet Contínua Inversa
IDWT	Transformada Wavelet Discreta Inversa
IFWT	Transformada Rápida Wavelet Inversa
MRA	Análise de Multirresolução
PDS	Processamento digital de sinais
QMF	Filtros de quadratura espelhada
STFT	Transformada de Fourier de tempo curto
WT	Transformada Wavelet

LISTA DE SÍMBOLOS

h_i^N	Coeficientes do filtro passa-baixas
g_i^N	Coeficientes do filtro passa-altas
N	Comprimento do conjunto de parâmetros angulares
α	Conjunto de parâmetros angulares “ Wavelet de Sherlock & Monro ”
$\alpha_{p=0}$	Conjunto de parâmetros angulares que não satisfaz a condição (30)
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\dot{x}	Derivada de x
$L^1(\mathbb{R})$	Espaço das funções integráveis em \mathbb{R}
$L^2(\mathbb{R})$	Espaço das funções de quadrado integrável em \mathbb{R}
$\psi_{a,b}$	Família Wavelet associada a ψ
G	Filtro Passa-altas
H	Filtro passa-baixas
ψ	Função wavelet
db1	Função wavelet Daubechies nível 1
db2	Função wavelet Daubechies nível 2
db4	Função wavelet Daubechies nível 4
dbN	Função wavelet Daubechies nível N
sym4	Função wavelet Symlet nível 4
N	Índice da wavelet de Daubechies
j	Nível de resolução em Análise de Multirresolução
p	Número de momentos nulos
$\uparrow 2$	Operador de sobreamostragem
$\downarrow 2$	Operador de subamostragem
α_i	Parâmetro angular relativo a h_i^N e g_i^N
a	Parâmetro de escala da função wavelet
b	Parâmetro de translação da função wavelet
\langle, \rangle	Produto Interno
s	Segundos
d₁	Sinal decomposto no primeiro nível
d₂	Sinal decomposto no segundo nível
$ Y(f) $	Sinal no domínio da frequência
y ou $f(t)$	Sinal no domínio do tempo
$\hat{\psi}(\omega)$	Transformada de Fourier de ψ

Hz	Unidade de medida hertz
$\alpha_{p=1}$	Wavelet de Sherlock & Monro com um momento nulo garantido
$\alpha_{p=2}$	Wavelet de Sherlock & Monro com dois momentos nulos garantidos
$\alpha_{p=3}$	Wavelet de Sherlock & Monro com três momentos nulos garantidos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	TEORIA WAVELET	18
2.1	PROCESSAMENTO DE SINAIS	18
2.2	TRANSFORMADA DE FOURIER E TRANSFORMADA WAVELET	18
2.3	TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA	23
2.4	TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA	23
2.5	TRANSFORMADA WAVELET RÁPIDA	24
2.6	REGULARIDADE E MOMENTOS NULOS	27
3	RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR TRÊS MOMENTOS NULOS	31
3.1	RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR UM MOMENTO NULO	31
3.2	RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR DOIS MOMENTOS NULOS	33
3.3	RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR TRÊS MOMENTOS NULOS	36
3.4	DISCUSSÕES ADICIONAIS SOBRE A OBTENÇÃO DE MOMENTOS NULOS	40
4	APLICAÇÕES	42
4.1	WAVELETS DE DAUBECHIES PARA ANALISAR UM SINAL COM SINGULARIDADES	42
4.2	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DE WAVELETS SEGUNDO A PARAMETRIZAÇÃO DE SHERLOCK & MONRO, (PAIVA et al., 2009)	50
4.3	OUTROS EXEMPLOS DE WAVELETS SEGUNDO A PARAMETRIZAÇÃO DE SHERLOCK & MONRO	54
4.4	IDENTIFICAÇÃO DE FALHAS COM WAVELETS PARAMETRIZADAS	61
4.5	DETECÇÃO DE FALHAS NA SIMULAÇÃO DE UM SINAL REAL	68
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO DA VALIDADE DE (17) E (18) PARA (16)	83
	APÊNDICE B - DEMONSTRAÇÃO DE (27)	88
	APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÃO DE (35) E (36)	90
	APÊNDICE D - DEMONSTRAÇÃO DE (50)-(51)	95

APÊNDICE E - INCLUINDO NA *TOOLBOX* DO MATLAB® UMA SUBFAMÍLIA WAVELET SEGUNDO A PARAMETRIZAÇÃO DE SHERLOCK & MONRO

1 INTRODUÇÃO

Em pesquisas nas engenharias e na matemática, uma área com uma gama de aplicações é o processamento de sinais, em especial o PDS (processamento digital de sinais), que consiste na elaboração e melhoramento de técnicas para analisar ou modificar sinais que, por sua vez, são de interesse em diversas aplicações, tais como o som, imagens e dados de sensores, sinais de eletrocardiogramas, sinais de transmissão de telecomunicações, entre outros (MISITI et al., 2007; OLIVEIRA, 2007; OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Entre as ferramentas utilizadas para o estudo e processamento de sinais se encontra a transformada wavelet que pode ser utilizada em uma infinidade de aplicações. Além disso, é um assunto muito estudado e pesquisado, mas que continua a aumentar e ser explorado teoricamente (BLATTER, 1998; DAUBECHIES, 1990, 1992; HERNANDEZ; WEISS, 1996; MALLAT, 1989, 1998; MEYER, 1993). A transformada wavelet surgiu e continua sendo discutida por muitos autores como uma alternativa à transformada de Fourier (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997; OLIVEIRA, 2007; VELHO; CARVALHO, 2000).

Na análise de um dado sinal, ainda não foi suficientemente explorada a discussão sobre a wavelet que deve ser usada. Propriedades como regularidade, suavidade e suporte compacto são determinantes nesta decisão, o que é constatado por diversos teóricos (BURRUS; GOPINATH; GUO, 1998; DAUBECHIES, 1992; HELLER, 1995; TIAN; WELLS, 1996; VETTERLI; KOVAČEVIĆ, 1995).

Uma parametrização angular para bancos de filtros ortonormais foi desenvolvida por Sherlock e Monro (1998) e expandida por Paiva et al. (2009), também foi aproveitada e recebeu contribuições de Paiva et al. (2008), Froese et al. (2006), Hadjiloucas et al. (2004) e Galvão et al. (2004). Esta parametrização pode ser usada para ajustar a wavelet, a fim de melhorar o índice de desempenho de algumas aplicações relacionadas ao processamento de sinais em questão.

O objetivo deste trabalho é contribuir com o estudo da regularidade wavelet, mais especificamente sobre a obtenção de momentos nulos, seguindo a formulação proposta por Sherlock e Monro (1998). Paiva et al. (2009) obtiveram resultados para garantir dois momentos nulos, seguindo a parametrização de Sherlock & Monro. Neste texto são obtidos resultados que asseguram o terceiro momento nulo. Uma aplicação se faz necessária para ilustrar a utilidade e funcionalidade dos resultados matemáticos obtidos, essa aplicação também é apresentada.

O segundo capítulo consiste em um resumo da teoria wavelet, que tem por objetivo esclarecer o intuito deste trabalho e indicar fontes que possam levar a um estudo mais aprofundado do assunto. No entanto, esse resumo é direcionado inicialmente para o estudo

da regularidade wavelet, logo apresenta-se brevemente conceitos sobre DWT, FWT e, de forma mais ampla, sobre a formulação proposta por Sherlock e Monro (1998). Na última seção apresenta-se uma discussão sobre o interesse no que concerne ao estudo de suavidade e momentos nulos. Esse estudo, porém, não é matematicamente aprofundado, contudo, várias fontes são indicadas para isto.

No terceiro capítulo é apresentada a obtenção de resultados para assegurar pelo menos três momentos nulos. Para um e dois momentos, são extensões de Sherlock e Monro (1998) e Paiva et al. (2009), e para o terceiro todos os passos da obtenção são apresentados, pois não há outra fonte a ser indicada para isto. Este capítulo está organizado de forma didática: cada seção para o estudo das restrições que garantem um, dois e três momentos nulos, respectivamente. Há ainda uma seção para discussão geral sobre essas restrições, que facilitará o entendimento das seções anteriores ao concluir o capítulo.

No capítulo 4 são apresentados subsídios no sentido de reforçar a discussão e a obtenção de resultados anteriores. Traz algumas aplicações dos resultados obtidos a respeito da detecção de falhas em sinais. Assim, para estas aplicações é usada a formulação de Sherlock & Monro com a extensão realizada neste trabalho.

Após o capítulo 4 são apresentadas as considerações finais do trabalho, que contemplam, além das principais ideias propostas e dos resultados alcançados, a importância do referido estudo, entre outras observações pertinentes. Também são apontadas as possibilidades de trabalhos futuros utilizando ou melhorando a metodologia apresentada.

Após as referências que norteiam a pesquisa e o texto apontadas nas referências bibliográficas, nos apêndices se encontram algumas demonstrações que foram evitadas durante a redação do texto propriamente dito. O intuito de que as mesmas apresentem-se separadas reside no fato de tentar tornar a redação mais didática possível, facilitando a leitura e deixando-a mais agradável. No apêndice E discute-se como incluir wavelets de Sherlock & Monro na caixa de ferramentas do Matlab.

2 TEORIA WAVELET

2.1 PROCESSAMENTO DE SINAIS

O processamento de sinais é um campo de estudo, muito explorado em engenharia, matemática, e outras áreas, sendo voltado para a elaboração e aperfeiçoamento de técnicas de análise ou modificação de sinais para aplicações. Trata-se de sinais como: o som, imagens, dados de sensores, sinais de eletrocardiogramas, sinais de transmissão de telecomunicações, entre outros (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989).

Fazem parte dos objetivos do processamento de sinais a análise ou modificação dos mesmos, tais como, aquisição e reconstrução de um sinal, melhoria do mesmo (redução de ruído, por exemplo), compressão e extração de características de sinais. O estudo deste campo da ciência é de muita utilidade no controle e análise de sistemas físicos para engenheiros eletricitas, engenheiros mecânicos, químicos e físicos. Atualmente profissionais de outras áreas têm sido atraídos pelo estudo de técnicas de processamento de sinais, entre eles estão, profissionais de economia, biologia e saúde (MISITI et al., 2007; OLIVEIRA, 2007).

O estudo de sinais e métodos para sua análise não é recente, porém, nas últimas décadas tem-se tornado muito mais explorado, bem como as ferramentas para tal. Toda a teoria de processamento digital de sinais (PDS) foi desenvolvida ao longo de anos, mas pode ser apreciada sem perda de informações em uma seleta e efetiva lista de referências, sendo algumas das principais: Oppenheim e Schaffer (1975, 1989), Proakis e Manolakis (1996) e Hayes (1999).

2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER E TRANSFORMADA WAVELET

No estudo para análise de sinais é bastante comum iniciar a tratativa utilizando a transformada de Fourier (FT), (HAYES, 1999; OPPENHEIM; SCHAFER, 1975, 1989). A análise de sinais via FT é uma ferramenta antiga, mas muito eficiente e apresenta um grande número de trabalhos relativos aos estudos de sinais digitais.

A transformada de Fourier, cujo nome homenageia Jean-Baptiste Joseph Fourier (França, 1768-1830), pode ser vista como um caso particular da transformada Z . Ambas são técnicas utilizadas em larga escala em processamentos de sinais, além de serem poderosas ferramentas, já conhecidas e utilizadas há um longo tempo, continuam a desempenhar um papel importante nos dias atuais (OPPENHEIM; SCHAFER, 1975, 1989).

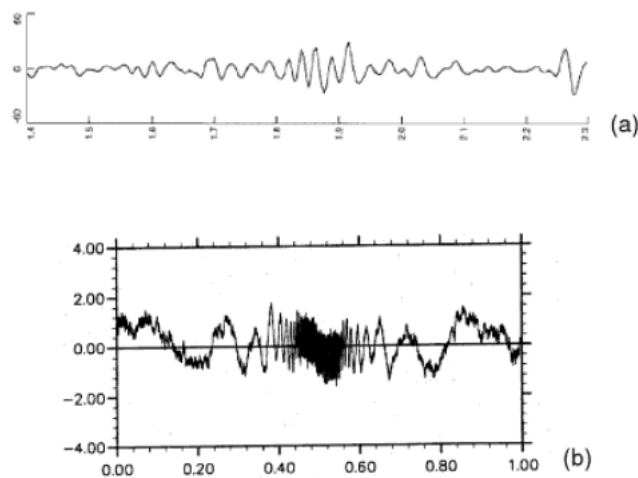
A FT de uma função $f(t)$, satisfazendo condições adequadas, é definida, (DAU-

BECHIES, 1992; RIOUL; VETTERLI, 1991), como:

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

A análise de sinais com a transformada de Fourier se limita, basicamente a sinais estacionários, Figura 1. Todo o sinal durante $-\infty < t < \infty$ é levado em consideração, isto significa que, embora seja eficiente para determinar o conteúdo de frequências em um sinal não é muito eficiente para determinar a localização no intervalo de tempo em que elas ocorrem, (OLIVEIRA, 2007).

Figura 1 – **a)** sinal possivelmente estacionário e **b)** possível sinal não estacionário



Fonte: Oliveira (2007).

Uma forma encontrada para contornar este inconveniente é o uso da transformada janelada de Fourier (STFT), (ALLEN; RABINER, 1977; GOMES; VELHO, 2000; OPPENHEIM; SCHAFER, 1989), que ‘observa’ o sinal através de uma pequena faixa de tempo dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário,

$$(T^{WIN}f)(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(s-t)e^{-i\omega s} ds \quad (2)$$

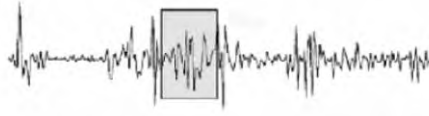
que é a transformada de Fourier com janela (STFT), uma técnica padrão para localização tempo-frequência. Para a versão discretizada, t e ω são atribuídos a valores regularmente espaçados: $t = nt_0$, $\omega = m\omega_0$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, e $t_0, \omega_0 > 0$ são fixos. Logo (2) torna-se

$$T_{m,n}^{WIN}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(s - nt_0)e^{-im\omega_0 s} ds, \quad (3)$$

(DAUBECHIES, 1992).

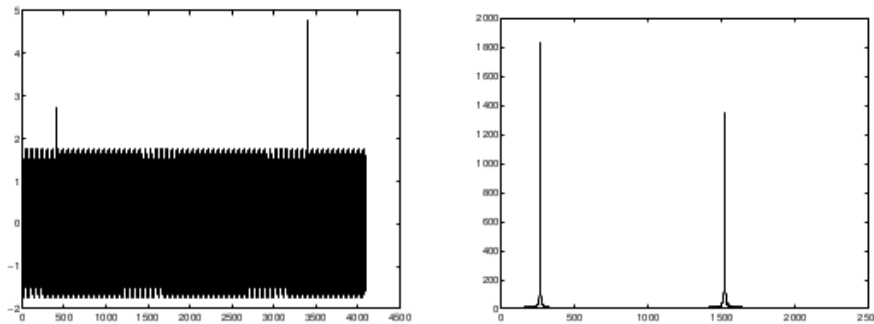
Na Figura 2 exemplifica-se como é feita a análise do sinal através de janelas, isto é, usando a STFT. Enquanto na Figura 3 exibe-se um sinal, como exemplo, e sua transformada de Fourier.

Figura 2 – Análise local no tempo: o uso de janelas



Fonte: Oliveira (2007).

Figura 3 – Sinal à esquerda e sua transformada de Fourier à direita



Fonte: Gomes e Velho (2000).

A STFT usa escala fixa que, uma vez determinada, não pode ser alterada. A relação entre tempo e informação de frequência é útil. A desvantagem é que, uma vez escolhido um tamanho particular para a janela de tempo, esta mesma janela estará fixada para todas as frequências. Muitos sinais requerem uma abordagem mais flexível, aquela em que podemos variar o tamanho da janela para determinar com mais precisão o tempo ou frequência, (OLIVEIRA, 2007).

De acordo com Paiva (2003), ideias para contornar esta deficiência surgiram ao longo do século XX e podem ser apontadas em Haar (1910), Franklin (1928), Littlewood e Paley (1937) e Calderón (1964). A análise wavelet representa o próximo passo lógico, no sentido de que usa uma técnica de janelas variáveis ao longo da região de análise. Essa técnica permite o uso de longos intervalos de tempo, onde se queira informação de frequência mais baixa, e intervalos mais curtos onde se queira informação de alta frequência (DAUBECHIES, 1990; GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997; VELHO; CARVALHO, 2000).

Define-se como wavelet uma função $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que a família de funções

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k),$$

onde j e k são inteiros arbitrários, seja uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Se $\psi(t)$ é uma wavelet então $\psi_{j,k}(t)$ também é, para quaisquer $j, k \in \mathbb{Z}$. Dizer que $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é equivalente a afirmar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (4)$$

Se a função $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é uma wavelet então sua FT, denotada por $\hat{\psi}(\omega)$ satisfaz

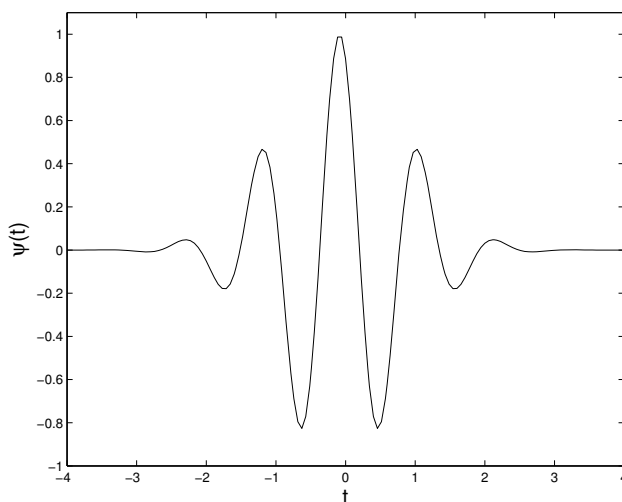
$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (5)$$

que é conhecida como condição de admissibilidade (DAUBECHIES, 1992), a qual implica que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\psi}(\omega) = 0$. Assim, sendo $\hat{\psi}(\omega)$ contínua, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (6)$$

O resultado (6) estabelece que $\psi(t)$ deve oscilar de modo a cancelar as áreas positivas e negativas a fim de anular a integral. Isto sugere que o gráfico de $\psi(t)$ tem a forma de uma onda de curta duração. A Figura 4 ilustra este fato.

Figura 4 – O gráfico de uma wavelet (Wavelet de Morlet)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para a transformada wavelet temos uma forma análoga a (2),

$$(T^{WAV} f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad a \neq 0. \quad (7)$$

Em (7) restringido-se os valores de a e b para os valores discretos $a = a_0^m$ e $b = nb_0 a_0^m$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ são fixos, tem-se

$$T_{m,n}^{WAV}(f) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(a_0^{-m}t - nb_0) dt. \quad (8)$$

Em ambos os casos, (DAUBECHIES, 1992),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (9)$$

A função $\psi(t)$ que equivale a $\psi_{1,0}(t)$ é chamada de ‘Wavelet Mãe’ enquanto as outras funções $\psi_{a,b}(t)$ são chamadas de ‘Wavelets Filhas’. A transformada wavelet pode ser vista como o produto interno das funções $f(t)$ e $\psi_{a,b}(t)$

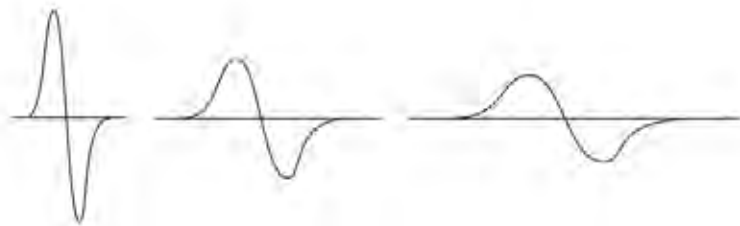
$$(T^{WAV} f)(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt. \quad (10)$$

O parâmetro b indica a translação de comprimento b no eixo t , conclui-se que (7) fornece uma descrição tempo-frequência para $f(t)$. O parâmetro a é conhecido como parâmetro de escala. O termo $|a|^{-1/2}$ é um fator de normalização que garante que a energia de $\psi_{a,b}(t)$ é independente de a e b , ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt.$$

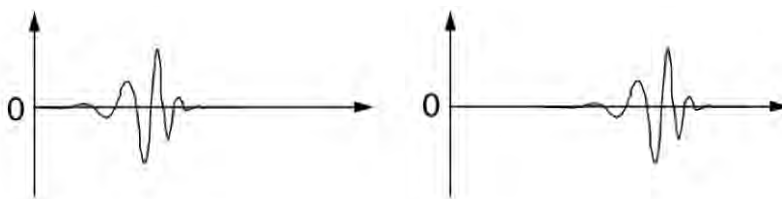
Na Figura 5 é ilustrado como se comporta o gráfico de uma wavelet quando se varia o parâmetro a . E na Figura 6 é mostrado o comportamento do parâmetro b . Conforme se observa nas figuras 5 e 6, respectivamente, o parâmetro a causa a compressão ou dilatação da wavelet enquanto o parâmetro b causa o deslocamento ao longo do eixo horizontal.

Figura 5 – Diferentes valores de a para (8), $a < 1$, $a = 1$ e $a > 1$, respectivamente



Fonte: Gomes e Velho (2000).

Figura 6 – Variação do parâmetro b



Fonte: Misiti et al. (2004).

Na STFT as funções $g_{\omega,t}(t)$, equação (3), são transladadas para uma localização no tempo apropriada e preenchidas com oscilações de altas frequências e, independente de ω , têm a mesma largura. Já para as funções $\psi_{a,b}(t)$ tem-se tempo e largura adaptados à sua frequência: $\psi_{a,b}(t)$ de altas frequências são mais ‘estretas’, enquanto para baixas frequências são mais amplas. Isso faz com que a transformada wavelet seja mais eficiente que a transformada janelada de Fourier para análise local em fenômenos de curta duração com alta frequência, que não caracterizam sinais estacionários, tais como transitórios em sinais, (DAUBECHIES, 1992).

2.3 TRANSFORMADA WAVELET CONTÍNUA

Sejam, por hora, os parâmetros a e b de dilatação e de translação, respectivamente, variando continuamente sobre \mathbb{R} sendo $a \neq 0$. A transformada wavelet contínua (CWT) é dada pela fórmula (7). Uma função pode ser reconstruída a partir da CWT por meio da chamada ‘resolução de identidade’

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} da db, \quad (11)$$

onde $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ e $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$ denota o produto interno sobre $L^2(\mathbb{R})$. A constante $C_{\psi} < \infty$ depende apenas de $\psi(t)$ e é dada por (5). Se $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R})$ então $\hat{\psi}(\omega)$ é contínua, de modo que C_{ψ} só pode ser finito se $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\psi}(\omega) = 0$, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.

A equação (11) pode ser vista aqui como uma forma de reconstruir $f(t)$ uma vez que conhecemos a transformada wavelet, $T^{WAV} f(a, b)$, mas também pode ser vista como uma forma de escrever $f(t)$ como uma superposição de wavelets $\psi_{a,b}(t)$, onde os coeficientes são dados exatamente pela transformada wavelet de $f(t)$. Conclui-se então que a equação (11) representa a transformada wavelet contínua inversa (ICWT), (DAUBECHIES, 1992).

2.4 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

A forma proposta em (7) requer grande esforço computacional por ser altamente redundante, pois os parâmetros de rotação e translação variam continuamente em \mathbb{R} . Uma maneira de evitar este esforço computacional é utilizar transformada wavelet discreta (DWT) que refere-se à discretização dos parâmetros de escala e translação.

Neste caso, os valores dos parâmetros a , dilatação, e b , translação, são discretos, conforme a equação (8). De modo que $a = a_0^m$, para diferentes valores de m temos diferentes larguras. O parâmetro b depende de m : wavelets estreitas (altas frequências) são transladadas por pequenos passos a fim de cobrir todo intervalo de tempo, enquanto

wavelets mais largas (baixa frequência) são transladadas por grandes passos. Uma vez que a largura de $\psi(a_0^{-m}x)$ é proporcional a a_0^m , b é discretizado como $b = nb_0a_0^m$, com $b_0 > 0$ fixo, $n \in \mathbb{Z}$. Assim

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(t) &= a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}(t - nb_0a_0^m)) \\ &= a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}t - nb_0). \end{aligned} \tag{12}$$

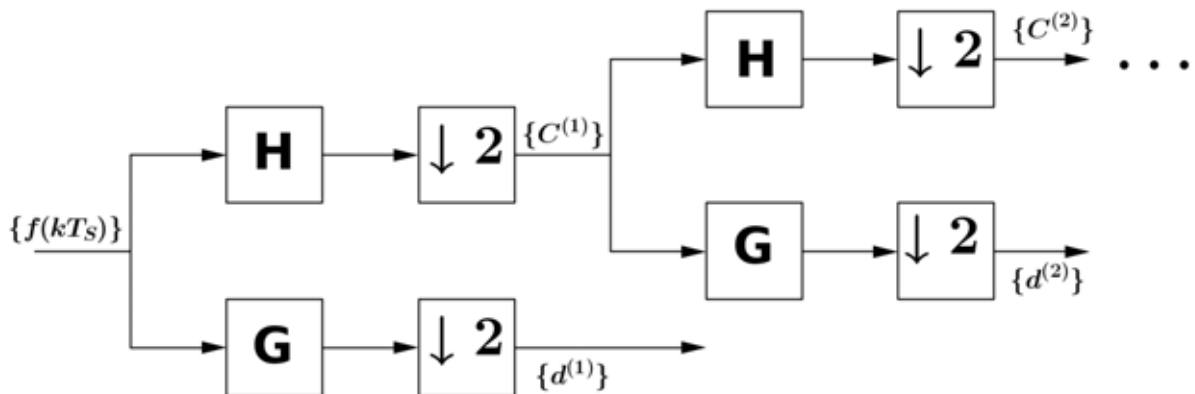
Para uma dada função $f(t)$, o produto interno $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$ nos dá exatamente a transformada wavelet $T_{m,n}^{WAV}(f)$, (DAUBECHIES, 1992) .

2.5 TRANSFORMADA WAVELET RÁPIDA

A transformada rápida wavelet (FWT) é o instrumento básico para o cálculo computacional com wavelets. O sinal no domínio do tempo é convertido para uma representação na base wavelets. Por outro lado, a transformação inversa (IFWT) reconstrói o sinal da sua representação wavelet para o domínio do tempo. Estas duas operações a serem realizadas são chamadas análise e síntese do sinal que é processado em aplicações com wavelet, (VELHO; CARVALHO, 2000).

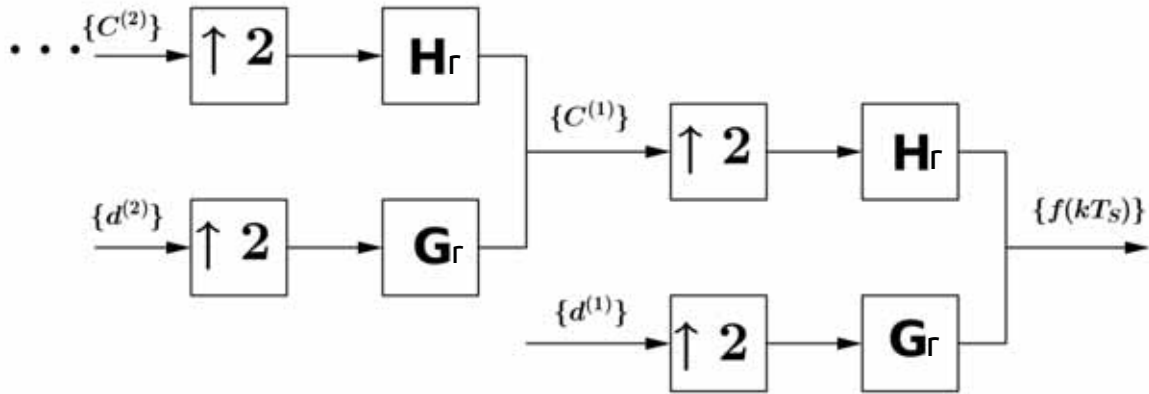
O algoritmo para trabalhar com a DWT foi desenvolvido por Mallat (1989,1998), método que utiliza bancos de filtros digitais em estrutura de árvore, Figura 7 (DAUBECHIES, 1992; STRANG; NGUYEN, 1996; VETTERLI; KOVAČEVIĆ, 1995). Na Figura 8 é apresentada a estrutura inversa (IDWT).

Figura 7 – Transformada wavelet rápida (Árvore de Análise)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 8 – Transformada wavelet rápida Inversa (Árvore de Síntese)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As figuras 7 e 8 mostram a árvore de decomposição wavelet, onde \mathbf{G} e \mathbf{H} são, respectivamente, filtros passa-altas e passa-baixas. T_S é o período de amostragem, $C^{(j)}$ e $d^{(j)}$ representam a aproximação e o detalhe em um nível j . Na Figura 7 tem-se o fator ($\downarrow 2$) e em 8 tem-se ($\uparrow 2$), que representam, respectivamente, o operador de subamostragem (*downsampling*) e de sobreamostragem (*upsampling*). Esses operadores consistem em remover uma em cada duas amostras sequenciais do sinal e inserir um zero entre cada duas amostras sequenciais, respectivamente, para evitar o fenômeno de ‘aliasing’ (OPPENHEIM; SCHAFER, 1989; STRANG; NGUYEN, 1996). Os filtros \mathbf{G} e \mathbf{H} , nem sempre são os mesmos para a decomposição e para a reconstrução, neste caso na síntese \mathbf{G}_r e \mathbf{H}_r . Isso só acontece quando o banco de filtros é ortogonal, além disso, mesmo sendo os mesmos, na reconstrução eles são aplicados em ordem inversa (NIEVERGELT, 1999).

A reconstrução através de filtros de quadratura espelhada (QMF) iniciou-se com o trabalho de Croisier, Esteban e Galand (1976), mas as condições necessárias e suficientes para obter a reconstrução perfeita de bancos de filtros ortogonais com resposta finita ao impulso (FIR), chamadas filtros de quadratura espelhada, foram encontradas pioneiramente nos trabalhos de Smith e Barnwell (1984) e Mintzer (1985). A teoria ficou completa com as equações biortogonais de Vetterli (1985) e Vetterli (1986) e a teoria geral de matriz paraunitária de Vaidyanathan (1987).

Os pesos do filtro passa-baixas \mathbf{H} e do filtro passa-altas \mathbf{G} do banco de filtros apresentado na Figura 7 são $h_i^{(N)}$ e $g_i^{(N)}$, e as funções de transferência desses filtros são dadas respectivamente por

$$H^{(N)}(z) = \sum_{i=0}^{2N-1} h_i^{(N)} z^{-i}, \quad (13)$$

$$G^{(N)}(z) = \sum_{i=0}^{2N-1} g_i^{(N)} z^{-i}, \quad (14)$$

sendo que o banco de filtros tem comprimento $2N$.

Os pesos dos $g_i^{(N)}$ são obtidos a partir de $h_i^{(N)}$ por meio de um método chamado de ‘*Alternate Flip*’ em Strang e Nguyen (1996),

$$g_i^{(N)} = (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)} \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (15)$$

para garantir a condição de complementaridade entre H e G, de forma que a FWT seja invertível.

Segue-se que os pares ortogonais de filtros pode ser completamente parametrizados por N ângulos α_i , $1 \leq i \leq N$, que pode assumir qualquer valor no conjunto de números reais, (PAIVA et al., 2009).

Na formulação de Sherlock e Monro (1998), a partir de Vaidyanathan (1993), Strang e Nguyen (1996) são apresentadas fórmulas recursivas para expressar os coeficientes $h_i^{(N)}$:

$$\begin{aligned} h_0^{(1)} &= \cos(\alpha_1) \\ h_1^{(1)} &= \sin(\alpha_1) \\ \\ h_0^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_0^{(N)} \\ h_{2i}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \sin(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N}^{(N+1)} &= -\sin(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (16) \\ \\ h_1^{(N+1)} &= \sin(\alpha_{N+1}) h_0^{(N)} \\ h_{2i+1}^{(N+1)} &= \sin(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} + \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N+1}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned}$$

A parametrização baseada em (16) satisfaz as condições de ortonormalidade apresentadas em Strang e Nguyen (1996),

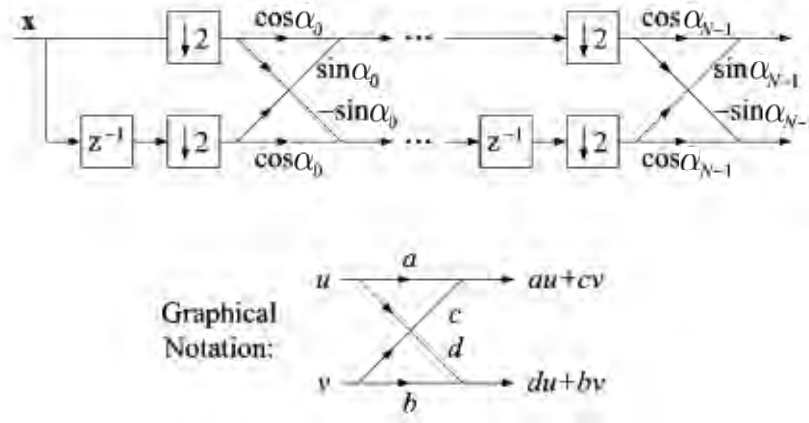
$$\sum_{i=0}^{2N-1} [h_i^{(N)}]^2 = 1, \quad N \geq 1, \quad (17)$$

$$\sum_{i=0}^{2N-1-2m} h_i^{(N)} h_{i+2m}^{(N)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad N \geq 2. \quad (18)$$

A demonstração deste fato está no Apêndice A.

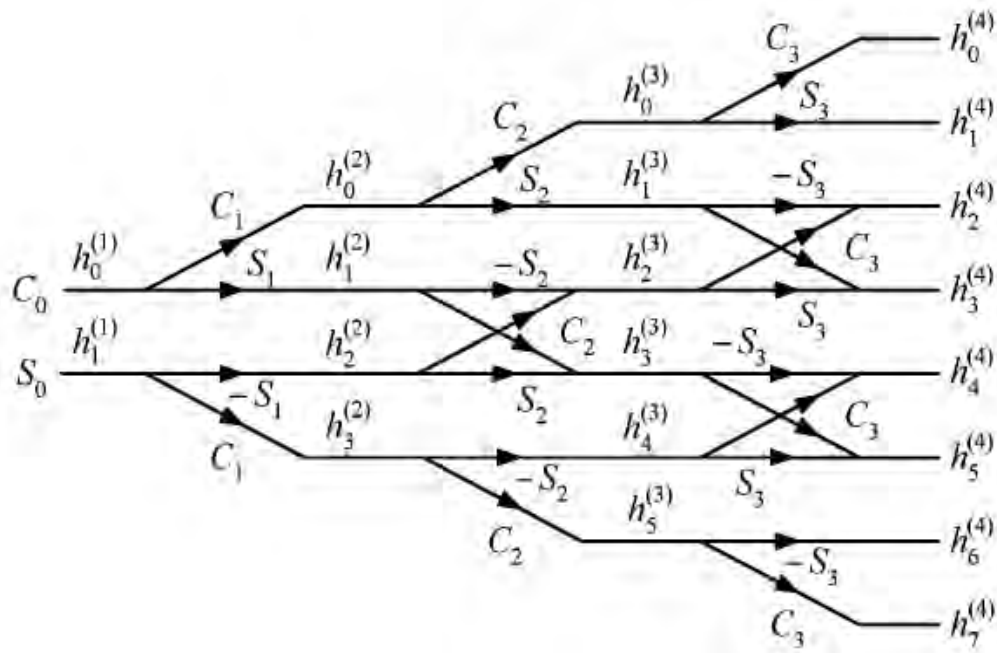
Nas figuras 9 e 10, têm-se o procedimento e a geração recursiva dos pesos dos filtros passa-baixas $h_i^{(N+1)}$ em função de $h_i^{(N)}$ pela adição de um parâmetro angular adicional de cada vez. S_i e C_i representam o seno e o cosseno do parâmetro angular α_i , respectivamente.

Figura 9 – Procedimento para a parametrização do banco de filtros wavelet



Fonte: Adaptado de Froese et al. (2006).

Figura 10 – Geração recursiva dos pesos dos filtros passa-baixas $h_i^{(N+1)}$ em função de $h_i^{(N)}$



Fonte: Froese et al. (2006).

2.6 REGULARIDADE E MOMENTOS NULOS

A gama de aplicações da WT é um assunto muito estudado, mas continua a aumentar. Por outro lado, toda a teoria do ponto de vista matemático, já foi estudada exaustivamente (BLATTER, 1998; DAUBECHIES, 1990; DAUBECHIES, 1992; HERNANDEZ;

WEISS, 1996; MALLAT, 1989; MALLAT, 1998), em muitos casos apontando a WT como alternativa à FT (GOMES; VELHO; GOLDENSTEIN, 1997; OLIVEIRA, 2007; VELHO; CARVALHO, 2000). Com base nos estudos realizados por esses autores pode-se observar que propriedades de análise de multirresolução e de análise tempo-frequência tornam a WT superior a FT quando se trata de detectar e localizar transitórios e falhas em sinais elétricos ou sistemas dinâmicos.

Um fator importante a ser considerado é a escolha da wavelet que deve ser usada na análise de um determinado sinal. Estudos neste sentido podem ser úteis para que a determinação de uma função nessas condições seja mais formal e menos trabalhosa. Em outras palavras, propriedades das wavelets podem tornar sua escolha para análise de um sinal mais intuitiva, deixando de lado métodos que incluam esta escolha por exaustivos testes. Mas, na decomposição de um sinal pela WT, propriedades como regularidade, suavidade e suporte compacto são determinantes na escolha da wavelet a ser usada. Wavelets com suporte maior aumentam a resolução em frequência, mas diminuem a resolução temporal do sinal transformado, por isso deve-se escolher uma wavelet que tenha um suporte que não comprometa nenhuma das resoluções. Momentos nulos e suavidade estão matematicamente relacionados, pois quanto maior o número de momentos nulos de uma wavelet, mais suave ela é. E quanto maior a suavidade da wavelet, maior é a probabilidade de reconstrução perfeita do sinal decomposto pela WT.

O estudo da regularidade requer conhecimento sobre análise de multirresolução (MRA) e das propriedades que garantem a ortogonalidade ou existência da função escala ou wavelet (DAUBECHIES, 1988, 1992, 1993). Importantes discussões que relacionam a quantidade de momentos nulos com a regularidade são encontradas em Steffen et al. (1993), Heller (1995).

Um elevado número de momentos nulos permite melhor compressão das partes regulares do sinal, entretanto, o aumento do número de momentos nulos aumenta também o tamanho do suporte das wavelets, o que pode ser, em partes, problemático, quando o sinal é singular (por exemplo, descontínuo). De acordo com Mallat (1998), para medir a regularidade local de um sinal, não é muito importante utilizar uma wavelet com um suporte de frequências baixas, mas momentos nulos são cruciais. Se a wavelet tem um dado número de momentos nulos então a transformada wavelet pode ser interpretada como um operador diferencial multiescala de ordem igual ao número de momentos nulos.

Uma função wavelet com decaimento rápido tem p momentos nulos se, e somente se, existe uma função $\theta(t)$ diferenciável que satisfaz (MALLAT, 1998)

$$\psi(t) = (-1)^p \frac{d^p \theta(t)}{dt^p}. \quad (19)$$

Assim

$$(T^{WAV} f)(a, b) = a^p \frac{d^p}{db^p} (f * \overline{\theta}_a)(b) \quad (20)$$

onde $\overline{\theta}_a(t) = a^{-1/2} \theta(-t/a)$. A função $\psi(t)$ é dito ter no máximo p momentos nulos se, e somente se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) dt \neq 0. \quad (21)$$

Disto segue que, quando a wavelet tem p momentos nulos, ela corresponde a um operador diferencial multi escala de ordem p . Desta forma a wavelet com p momentos nulos pode ser escrita como uma função $\theta(t)$ com derivada de p -ésima ordem.

Por outro lado, de acordo com Mallat (1998), seja p um inteiro positivo e $\beta \leq p$, se $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ é Lipschitz β em b_0 , então existe uma constante A tal que, para todo ponto b em uma vizinhança de b_0 e para qualquer escala a ,

$$|(T^{WAV} f)(a, b)| \leq A(a^\beta + |b - b_0|^\beta). \quad (22)$$

Ou ainda, seja $\beta \leq p$ um valor não inteiro. A função $f(t)$ é Lipschitz β em b_0 , se existe um $\epsilon > 0$ e duas constantes A e B de tal modo que, para todos os pontos b numa vizinhança de b_0 e para qualquer escala a ,

$$|(T^{WAV} f)(a, b)| \leq Aa^\epsilon \quad (23)$$

$$|(T^{WAV} f)(a, b)| \leq B \left(a^\beta \frac{|b - b_0|^\beta}{|\log |b - b_0||} \right). \quad (24)$$

Disto segue que se $\psi(t)$ tem apenas p momentos nulos para a função $f(t)$ cujo Lipschitz $\beta > p$, a WT não pode dar alguma informação sobre regularidade Lipschitz de $f(t)$. Neste caso, para a detecção de sinal com a singularidade de forma eficaz, é necessário momentos nulos suficientes, contudo, muitos deles resultarão em equações mais complexas e computação mais lenta. Logo, é por este motivo que a wavelet deve ser escolhida adequadamente (TAO et al., 2007).

De acordo com Tao et al. (2007), geralmente a singularidade de um sinal pode ser dividida em dois tipos. Em um caso, a amplitude do sinal ‘salta’ de uma só vez, o que resulta na interrupção do fluxo do sinal, em outro caso, a amplitude do sinal é suave, mas é descontínua na primeira ordem de diferenciabilidade. Para o segundo caso, se a wavelet escolhida não é regular, o ponto de descontinuidade não pode ser detectado. Nas aplicações, a função wavelet deve ser escolhida em função da singularidade do sinal. E geralmente a wavelet de Haar é suficiente para detectar a descontinuidade do sinal, e para a detecção de descontinuidade do p -ésimo diferencial é necessário uma wavelet regular com pelo menos p momentos nulos.

Neste trabalho é estudada a regularidade através da obtenção de restrições que garantem um certo número de momentos nulos seguindo a formulação proposta em Sherlock e Monro (1998), Paiva et al. (2009).

3 RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR TRÊS MOMENTOS NULOS

Neste capítulo são apresentadas as restrições que asseguram um, dois e três momentos nulos, respectivamente. Desta forma, cada seção tem um resultado como o mais importante. Esses resultados combinados e aplicados à formulação de Sherlock e Monro (1998) dão opção para escolher wavelets para análise de um dado sinal. Algumas demonstrações podem ser longas e trabalhosas então, para facilitar a leitura do texto, elas são apresentadas nos apêndices. O referido apêndice é indicado após cada resultado em questão.

3.1 RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR UM MOMENTO NULO

Para o banco de filtros caracterizar uma WT, a seguinte condição de regularidade

$$G^{(N)}(z)|_{z=1} = 0 \quad (25)$$

deve ser satisfeita, (PAIVA et al., 2009).

Fazendo $z = 1$ em (14) tem-se

$$G^{(N)}(z)|_{z=1} = \sum_{i=0}^{2N-1} g_i^{(N)},$$

e substituindo (15) nesse resultado se obtém

$$G^{(N)}(z)|_{z=1} = \sum_{i=0}^{2N-1} (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)}. \quad (26)$$

Para o banco de filtros caracterizar a transformada wavelet, a condição de regularidade (25) leva a seguinte fórmula

$$G^{(N)}(z)|_{z=1} = \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] - \text{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right]. \quad (27)$$

A demonstração de (27) está no Apêndice B.

De (25) e (27) tem-se

$$\begin{aligned} \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] - \text{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] &= 0 \\ \text{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] &= \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] &= \arcsen \left\{ \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \right\} \\ \alpha_N &= \arcsen \left\{ \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \right\} - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i. \end{aligned} \quad (29)$$

O único sentido da equação (29), neste momento, é para que se note nas seções seguintes que os valores de α_N , α_{N-1} e α_{N-2} , serão dados por uma função *arcsen*. Neste caso, para que (29) tenha solução real é necessário que

$$-1 \leq \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \leq 1.$$

Logo esta restrição define um região não convexa em \mathbb{R}^{N-1} . Isto pode levar a dificuldades na programação de uma função dependente de $\{\alpha_i\}$.

Para obter o valor de α_N de outra forma, pode-se a partir de (28) realizar os cálculos seguintes

$$\begin{aligned} \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] - \sin \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] &= 0 \\ \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) &= 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) &= 0 \\ \frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^N \alpha_i &= \arcsen(0) \\ \frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i - \alpha_N &= 0 \\ \alpha_N &= \frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Esta formulação garante apenas um momento nulo (PAIVA et al., 2009), e (30) reduz o número de parâmetros livres para $N-1$. Entretanto, para garantir dois momentos nulos é necessário que $\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0$, (DAUBECHIES, 1992; MALLAT, 1998).

Pode-se notar que (30) define uma região convexa e por isso não necessita de mais adaptações para melhorar sua possível programação.

3.2 RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR DOIS MOMENTOS NULOS

Para garantir um segundo momento nulo é preciso que a condição

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \quad (31)$$

seja satisfeita.

Derivando (14) tem-se

$$\frac{dG^{(N)}(z)}{dz} = \sum_{i=1}^{2N-1} g_i^{(N)}(-i)z^{-i-1}. \quad (32)$$

E daí segue

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{2N-1} g_i^{(N)}(-i), \quad (33)$$

e substituindo (15) em (33) vem

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{2N-1} (-1)^{i+2} i h_{2N-1-i}^{(N)}. \quad (34)$$

Usando as equações (16), (34) e as propriedades trigonométricas necessárias obtém-se

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -N \cos \beta_N + (N-1) \operatorname{sen} \beta_N - \sum_{i=1}^{N-1} (\cos \beta_k + \operatorname{sen} \beta_k), \quad (35)$$

onde

$$\begin{cases} \beta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \beta_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i. \end{cases} \quad (36)$$

As demonstrações de (35)-(36) estão no Apêndice C.

A partir de (30) tem-se

$$\alpha_N = \frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad (37)$$

então, usando (35)-(36) segue

$$\begin{aligned} \left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} &= -N \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + N \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \sum_{k=1}^{N-1} (\cos \beta_k + \operatorname{sen} \beta_k) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\beta_k + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sum_{k=1}^{N-1} \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i + \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{sen} \left(\sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Das condições (31) e (38) segue que

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] = -\frac{1}{2}, \quad (39)$$

donde, pode-se obter uma fórmula para α_{N-1} :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] + \text{sen} \sum_{i=1}^{N-1} 2\alpha_i \\ \text{sen} \sum_{i=1}^{N-1} 2\alpha_i &= -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \\ \sum_{i=1}^{N-1} 2\alpha_i &= \arcsen \left\{ -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \right\} \\ \sum_{i=1}^{N-2} 2\alpha_i + 2\alpha_{N-1} &= \arcsen \left\{ -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \right\} \\ \alpha_{N-1} &= \frac{1}{2} \arcsen \left\{ -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \right\} - \sum_{i=1}^{N-2} \alpha_i. \end{aligned} \quad (41)$$

É importante notar que (41) tem solução real, se e somente se, os ângulos α_i , $1 \leq i \leq N-2$ satisfazem

$$-1 \leq -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \leq 1$$

que implica a seguinte condição

$$-\frac{3}{2} \leq \sum_{k=1}^{N-2} \left[\text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \leq \frac{1}{2}. \quad (42)$$

De acordo com Paiva et al. (2009), as restrições expressas em (42) definem uma região não convexa em \mathbb{R}^{N-2} , Figura 11. Se há um interesse em otimizar a função, no que diz respeito aos parâmetros α_i , a não convexidade pode ser um inconveniente, então Paiva et al. (2009) propõem a mudança de variáveis apresentada a seguir.

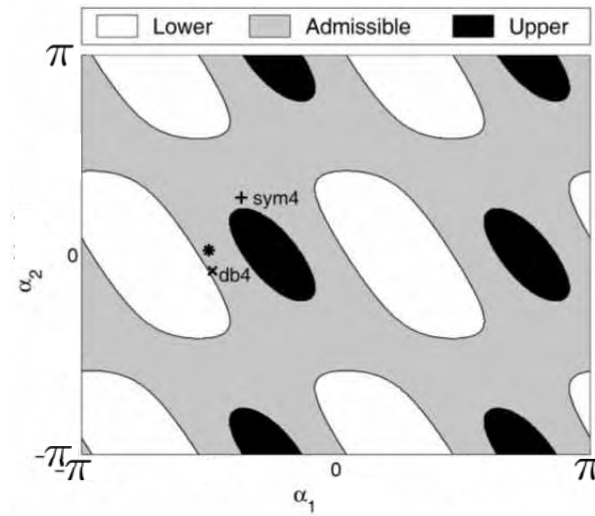
Fazendo

$$\mathcal{X}_k = \text{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i, \quad 1 \leq k \leq N-2, \quad (43)$$

e usando essa mudança de variáveis, (42) pode ser escrita como

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \leq \sum_{i=1}^{N-2} \mathcal{X}_k \leq \frac{1}{2} \\ -1 \leq \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_{N-2} \leq 1. \end{cases} \quad (44)$$

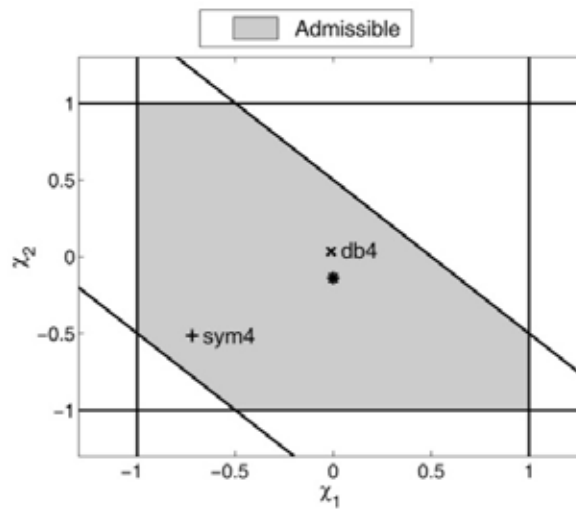
Figura 11 – Região de valores admissíveis para α_1 e α_2 pela restrição (42) para $N = 4$.



Fonte: Adaptado de Paiva et al. (2009).

Na Figura 11 “upper” and “lower” indicam que a soma expressa em (42) excede o máximo e o mínimo valor permitido, respectivamente.

Figura 12 – Região de valores admissíveis para \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 pela restrição (44) para $N = 4$.



Fonte: Paiva et al. (2009).

Usando a mudança de variáveis dada em (43), se obtêm as restrições descritas em (44), que são mostradas na Figura 12, neste caso o banco de filtros é parametrizado por \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 . Para a ilustração de α_1 e α_2 ou de \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , os pontos associados a Daubechies (db4) e Symlet (sym4), são mostrados nas imagens das figuras 11 e 12.

Sejam os $N - 2$ parâmetros \mathcal{X}_i dados em (43) satisfazendo (44). Os valores de α_i , $1 \leq i \leq N - 2$, podem ser obtidos de (43):

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_i &= \operatorname{sen} \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \\ \sum_{i=1}^k 2\alpha_i &= \operatorname{arcsen} \{\mathcal{X}_i\} \\ \alpha_i &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \{\mathcal{X}_i\} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k.\end{aligned}\quad (45)$$

3.3 RESTRIÇÕES ADICIONAIS PARA GARANTIR TRÊS MOMENTOS NULOS

Seguindo a metodologia apresentada por Daubechies (1992), Mallat (1998), para garantir o terceiro momento nulo é preciso que esteja satisfeita a seguinte condição:

$$\left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = 0. \quad (46)$$

Derivando (32) tem-se

$$\frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} = \sum_{i=1}^{2N-1} g_i^{(N)}(-i)(-i-1)z^{-i-2}. \quad (47)$$

E daí:

$$\left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{2N-1} g_i^{(N)}(-i)(-i-1). \quad (48)$$

Por (15) sabe-se que $g_i^{(N)} = (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)}$, então, (48) pode ser escrita assim

$$\left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{2N-1} (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)}(i^2 + i). \quad (49)$$

Usando o diagrama de fluxo, Figura 10 e/ou equação (16), da equação (49) obtém-se

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} &= (N^2 + 2N - 1) \cos \beta - (N^2 - 1) \operatorname{sen} \beta + \\ &\sum_{j=1}^{N-1} \left\{ (2N + 1) \cos \beta_j + (2N - 1) \operatorname{sen} \beta_j \right\} + \\ &\sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} (2 \cos \beta_{j,k} - 2 \operatorname{sen} \beta_{j,k}) \right\}\end{aligned}\quad (50)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \sum_{i=1}^N \alpha_i \\ \beta_j = \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq N-1 \\ \beta_{j,k} = \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq N-1 \text{ e } 1 \leq k \leq N-1. \end{array} \right. \quad (51)$$

A demonstração de (50)-(51) se encontra no Apêndice D.

Sabe-se que $\beta = \sum_{i=1}^N \alpha_i = \frac{\pi}{4}$ (PAIVA et al., 2009). Logo,

$$(N^2 + 2N - 1) \cos \beta - (N^2 - 1) \sin \beta = 2N \cos \frac{\pi}{4}. \quad (52)$$

E então β_j e $\beta_{j,k}$ podem ser escritos como

$$\beta_j = \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \quad (53)$$

e

$$\beta_{j,k} = \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i. \quad (54)$$

Usando (53) e a seguinte propriedade trigonométrica:

$$\cos \left[\frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] + \sin \left[\frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left[2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right]$$

tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ (2N+1) \cos \beta_j + (2N-1) \sin \beta_j \right\} &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ 2 \cos \beta_j + (2N-1)(\cos \beta_j + \sin \beta_j) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ 2 \cos \beta_j + 2(2N-1) \cos \frac{\pi}{4} \cos \lambda_j \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\text{onde } \lambda_j = \left[2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right].$$

Considerando (54) e a seguinte propriedade trigonométrica:

$$\cos \left[\frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right] - \sin \left[\frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right] = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \left[2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right],$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} (2 \cos \beta_{j,k} - 2 \sin \beta_{j,k}) \right\} = \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \left(4 \cos \frac{\pi}{4} \sin \lambda_k \right) \right\}, \quad (56)$$

onde $\lambda_k = \sum_{i=k+1}^{k+j} 2\alpha_i$.

Com as manipulações feitas em (52), (55) e (56), a equação (50) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=1} &= 2N \cos \frac{\pi}{4} + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ 2 \cos \beta_j + 2(2N-1) \cos \frac{\pi}{4} \cos \lambda_j \right\} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \left(4 \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \lambda_k \right) \right\}, \end{aligned} \quad (57)$$

onde $\lambda_j = \left[2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right]$ e $\lambda_k = \left[2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right]$.

Aplicando a restrição (46) em (57) tem-se

$$0 = 2N \cos \frac{\pi}{4} + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ 2 \cos \beta_j + 2(2N-1) \cos \frac{\pi}{4} \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \left(4 \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \lambda_k \right) \right\}, \quad (58)$$

e considerando que

$$\cos \left[\frac{\pi}{4} - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] = \cos \frac{\pi}{4} \left(\cos \left[2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] + \operatorname{sen} \left[2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] \right),$$

pode-se continuar com a simplificação de (58):

$$\begin{aligned} 0 &= 2N \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ 2 \cos \beta_j + 2(2N-1) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \left(4 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \lambda_k \right) \right\} \\ 0 &= N \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} [\cos \lambda_j + \operatorname{sen} \lambda_j] + (2N-1) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \lambda_k \right) \right\} \\ 0 &= N + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ [\cos \lambda_j + \operatorname{sen} \lambda_j] + (2N-1) \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} (2 \operatorname{sen} \lambda_k) \right\} \\ 0 &= N + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \operatorname{sen} \lambda_j + 2N \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} (2 \operatorname{sen} \lambda_k) \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Observe que (59) foi obtido a partir de (50)-(51). Agora a partir de (59) será obtida uma fórmula para α_{N-2} . Primeiramente é necessário reescrever a equação (59) substituindo λ_k por $\left[\sum_{i=k+1}^{k+j} 2\alpha_i \right]$:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \operatorname{sen} \lambda_j + 2N \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \operatorname{sen} \left[\sum_{i=k+1}^{k+j} 2\alpha_i \right] \right\} + N = 0. \quad (60)$$

Decompondo a segunda parcela de (60) tem-se

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \text{sen } \lambda_j + 2N \cos \lambda_j \right\} + 2 \text{sen} \left[\sum_{i=2}^{N-1} 2\alpha_i \right] + \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \text{sen} \left[\sum_{i=k+1}^{k+j} 2\alpha_i \right] \right\} = -N \quad (61)$$

e seguindo o raciocínio obtém-se:

$$\begin{aligned} 2 \text{sen} \left[\sum_{i=2}^{N-1} 2\alpha_i \right] &= - \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \text{sen } \lambda_j + 2N \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \text{sen } \lambda_k \right\} + N \right\} \\ \text{sen} \left[\sum_{i=2}^{N-1} 2\alpha_i \right] &= - \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} + \frac{N}{2} \right\} \\ \sum_{i=2}^{N-1} 2\alpha_i &= \arcsen \left\{ - \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} - \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} - \frac{N}{2} \right\} \\ \sum_{i=2, i \neq N-2}^{N-1} 2\alpha_i + 2\alpha_{N-2} &= \arcsen \left\{ - \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} - \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} - \frac{N}{2} \right\} \\ 2\alpha_{N-2} &= \arcsen \left\{ - \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} - \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} - \frac{N}{2} \right\} - \sum_{i=2, i \neq N-2}^{N-1} 2\alpha_i \\ \alpha_{N-2} &= \frac{1}{2} \arcsen \left\{ - \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} - \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} - \frac{N}{2} \right\} - \sum_{i=2, i \neq N-2}^{N-1} \alpha_i. \end{aligned} \quad (62)$$

A equação (62) tem solução real se, e somente se, os ângulos α_i satisfizerem a condição

$$-1 \leq \left\{ - \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} - \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} - \frac{N}{2} \right\} \leq 1$$

que pode ser reescrita como

$$-1 \leq \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} + \frac{N}{2} \right\} \leq 1,$$

ou ainda

$$-1 - \frac{N}{2} \leq \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{sen } \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} + \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \text{sen } \lambda_k \right\} \right\} \leq 1 - \frac{N}{2}, \quad (63)$$

lembrando que $\lambda_j = \left[2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right]$ e $\lambda_k = \left[2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right]$.

3.4 DISCUSSÕES ADICIONAIS SOBRE A OBTENÇÃO DE MOMENTOS NULOS

A condição de ortonormalidade para os bancos de filtros foi satisfeita pela formulação de Sherlock & Monro, cuja discussão se encontra no capítulo 2, e um estudo mais aprofundado sobre condições de ortonormalidade de banco de filtros e sobre a formulação proposta pode ser visto em Vaidyanathan (1993), Strang e Nguyen (1996).

As principais equações do ponto de vista da formulação de Sherlock & Monro e suas importâncias são discutidas nesta seção, com o intuito de concluir a ideia deste capítulo.

Para a obtenção do primeiro momento nulo foram obtidas as equações (27) e (30). Na verdade, esta segunda é uma implicação da primeira e é por ela que o conjunto de ângulos $\{\alpha_i\}$ deve ser parametrizado.

Grosso modo pode-se dizer que dado um conjunto de ângulos que parametrizam um banco de filtros ortonormais segundo a formulação de Sherlock & Monro, a restrição (30),

$$\alpha_N = \frac{\pi}{4} - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i$$

garante um momento nulo.

Como pode ser visto, a restrição que garante o primeiro momento nulo, o faz usando o ângulo α_N , assim, para um segundo momento nulo, é feito usando o α_{N-1} . Seguindo a metodologia proposta em Daubechies (1992), Mallat (1998) obtém-se a equação (35)-(36) e a partir da mesma (41),

$$\alpha_{N-1} = \frac{1}{2} \arcsen \left\{ -\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{N-2} \left[\sen \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \right] \right\} - \sum_{i=1}^{N-2} \alpha_i,$$

esta última é a restrição que garante o segundo momento nulo.

Para assegurar o terceiro momento nulo foi obtida a equação (62),

$$\alpha_{N-2} = \frac{1}{2} \arcsen \left\{ -\sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \sen \lambda_j + N \cos \lambda_j \right\} - \sum_{j=1}^{N-3} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} \sen \lambda_k \right\} - \frac{N}{2} \right\} - \sum_{i=2, i \neq N-2}^{N-1} \alpha_i,$$

que é escrita usando o ângulo α_{N-2} . Assim, dado um conjunto de ângulos que parametrizam um banco de filtros ortonormal, para se garantir, seguindo esta metodologia, três momentos nulos, aplica-se primeiro (62), ao conjunto de parâmetros obtidos aplica-se (41) e depois (30).

É importante ressaltar que, no texto, quando é mencionado que a restrição garante um dois ou três momentos nulos, pode ser que uma wavelet gerada usando esta restrição tenha mais momentos nulos. Em outras palavras, estas restrições garantem pelo menos

este número de momentos, mas nada impede que mais regularidade seja alcançada quando se gera aleatoriamente uma wavelet obedecendo estas restrições.

4 APLICAÇÕES

Antes de serem feitas as aplicações dos resultados do capítulo 3 para detecção de falhas, é interessante retomar a discussão feita no final do capítulo 2, que discorre sobre propriedades como: regularidade, suavidade e suporte compacto. É bom lembrar que wavelets que tenham suporte maior aumentam a resolução em frequência, porém, diminuem a resolução temporal do sinal transformado. Assim, deve-se escolher uma função wavelet cujo suporte não comprometa nenhuma das resoluções.

Há uma ligação matemática entre a suavidade de uma função wavelet e o número de momentos nulos da mesma, pois a função será mais suave quanto maior for o número de momentos nulos. Para a reconstrução perfeita do sinal é muito importante a suavidade da função. Desta forma, se a wavelet tem um alto número de momentos nulos, as partes regulares do sinal são melhor comprimidas, entretanto, há que se cuidar com o aumento do número de momentos nulos, pois isso aumenta o tamanho do suporte das funções wavelets (TAO et al., 2007).

4.1 WAVELETS DE DAUBECHIES PARA ANALISAR UM SINAL COM SINGULARIDADES

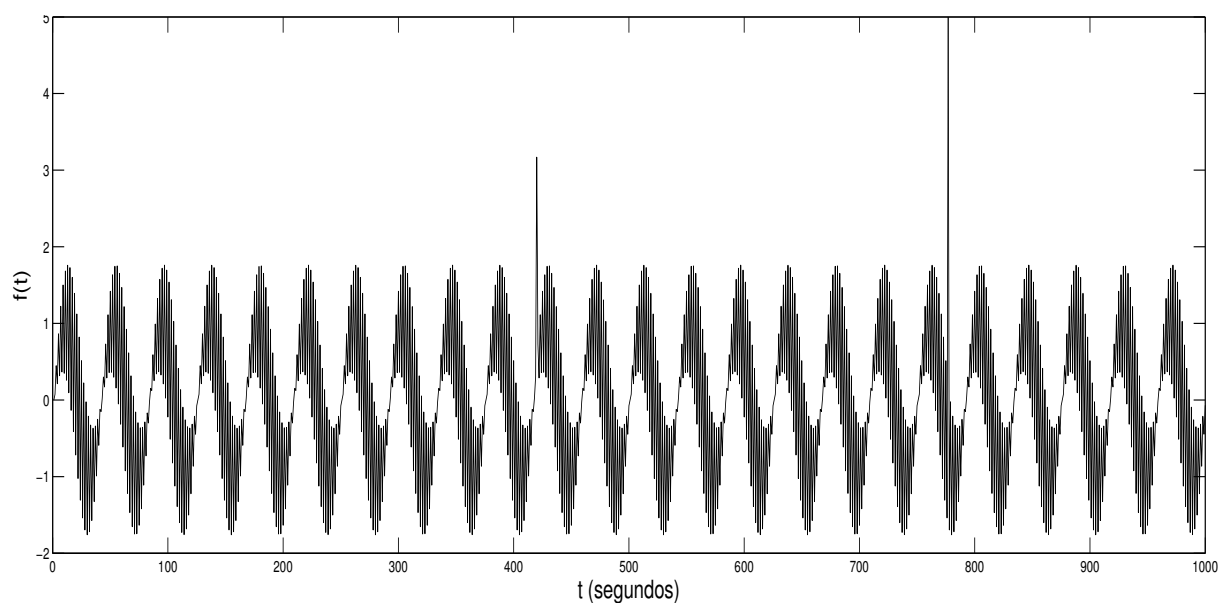
Uma análise de sinais com singularidades, usando as wavelets da família de Daubechies, precede a análise de sinal com falha usando a parametrização de Sherlock & Monro. Desse modo, esta parte do texto desempenha um papel didático e mostra resultados que podem ser comparados com aqueles da formulação de Sherlock & Monro.

Os nomes das wavelets das famílias de Daubechies são escritos como dbN , onde N^1 é a ordem, e db o ‘sobrenome’ da wavelet (MISITI et al., 2004). A wavelet db1 é a mesma wavelet de Haar. Esta é uma família de wavelets de grande importância, pois, como principal característica, elas são ortogonais e tem suporte compacto. A regularidade das wavelets de Daubechies aumentam com seu índice N , sendo necessário aumentar o comprimento do suporte para tal. O suporte das wavelets $\psi_{2N}^{(D)} = \text{dbN}$ é o intervalo $[1 - N, N]$, (DAUBECHIES, 1992).

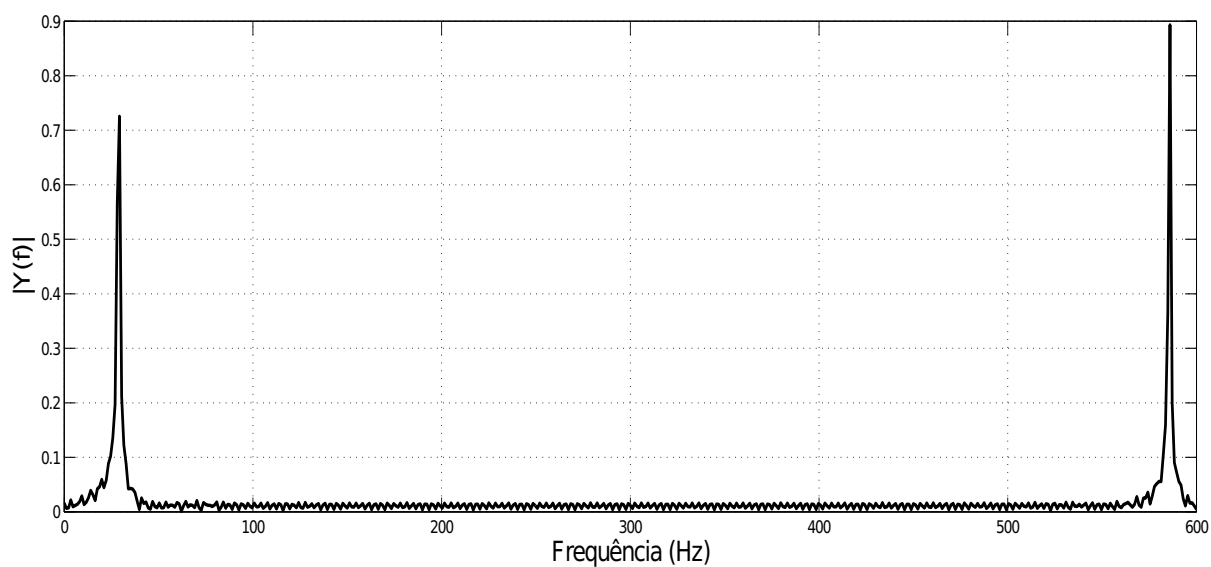
Seja um sinal, $y = f(t)$ com duas singularidades, nos instantes $t = 420s$ e $t = 777s$. Este sinal é a soma de duas senoides com dois impulsos acrescidos, conforme a Figura 13, sua representação tem 1000 amostras. A representação deste sinal no domínio da frequência é mostrada na Figura 14.

¹ Note que N se refere ao índice de uma wavelet dbN e N se refere ao comprimento do conjunto de parâmetros angulares de uma wavelet de Sherlock & Monro

Figura 13 – Sinal com singularidades



Fonte: Elaboração do próprio autor.

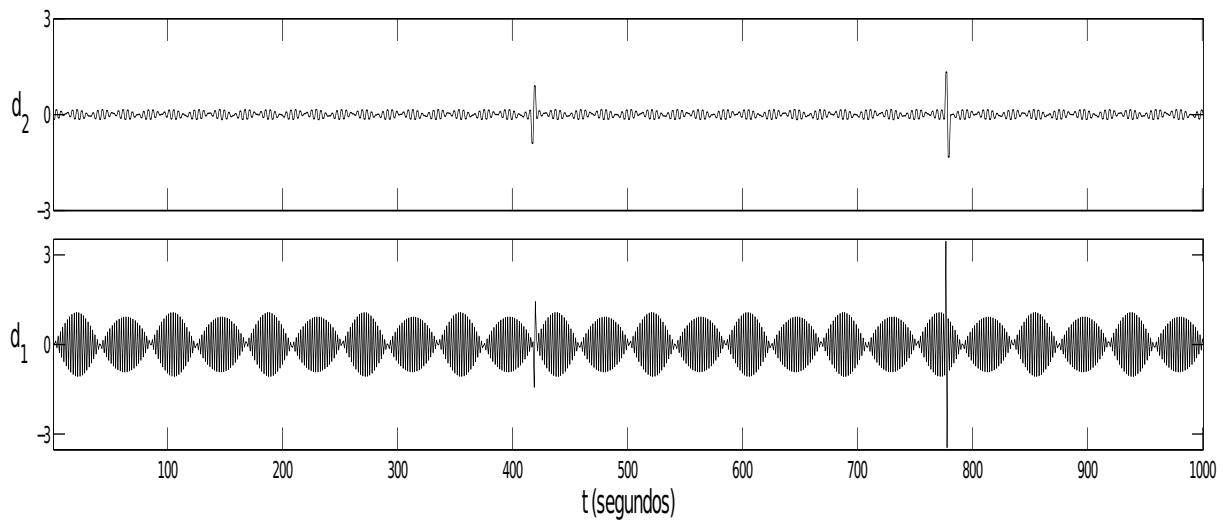
Figura 14 – Sinal y no domínio da frequência

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Usando a *db1* equivalente à wavelet de Haar, que é a wavelet com menor regularidade na família de Daubechies, os impulsos podem ser detectados, embora a decomposição do sinal no primeiro e segundo níveis ainda preserve coeficientes de detalhes com

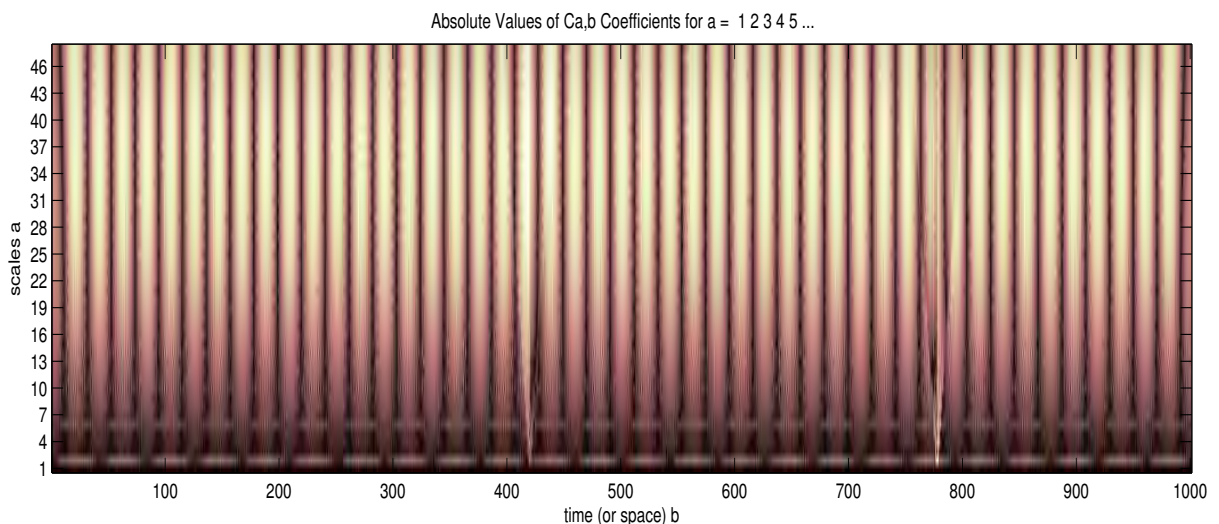
alta magnitude além das singularidades. Na Figura 15, pode-se ver a análise do sinal usando a wavelet **db1** no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente. O escalograma do sinal analisado usando a **db1** é mostrado na Figura 16.

Figura 15 – Identificação de singularidades com **db1**, no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 16 – Escalograma do sinal analisado com **db1**

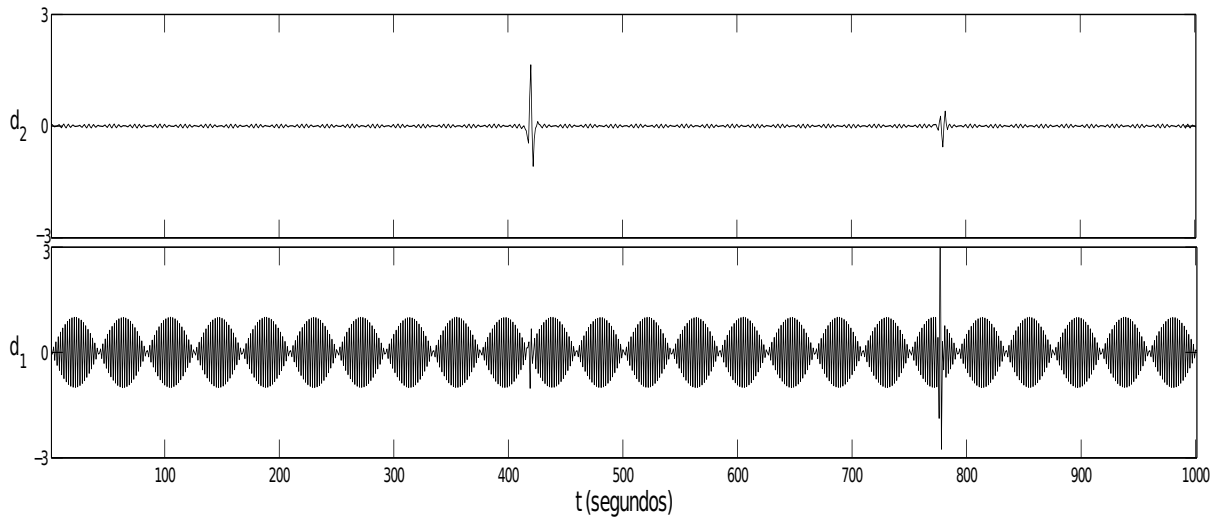


Fonte: Elaboração do próprio autor.

O mesmo sinal foi decomposto usando a **db2** que é mais regular que a **db1**, porém ainda é uma das wavelets da família de Daubechies menos regular. A análise do sinal

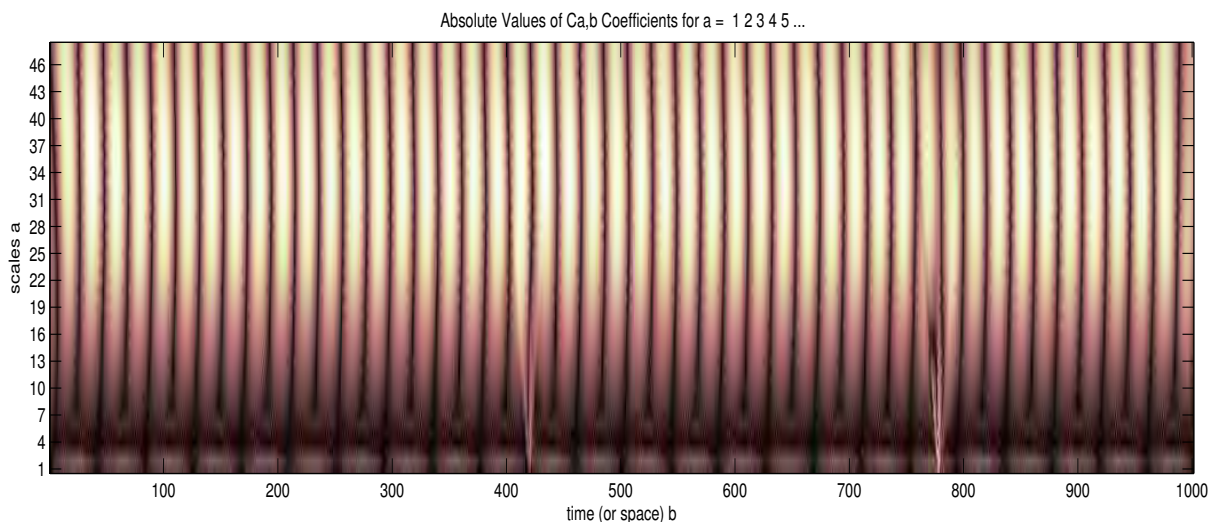
com a *db2* está na Figura 17, a decomposição está feita para o segundo e primeiro nível, respectivamente. Na Figura 18 tem-se o escalograma do sinal decomposto.

Figura 17 – Identificação de singularidades com *db2*, no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 18 – Escalograma do sinal analisado com *db2*

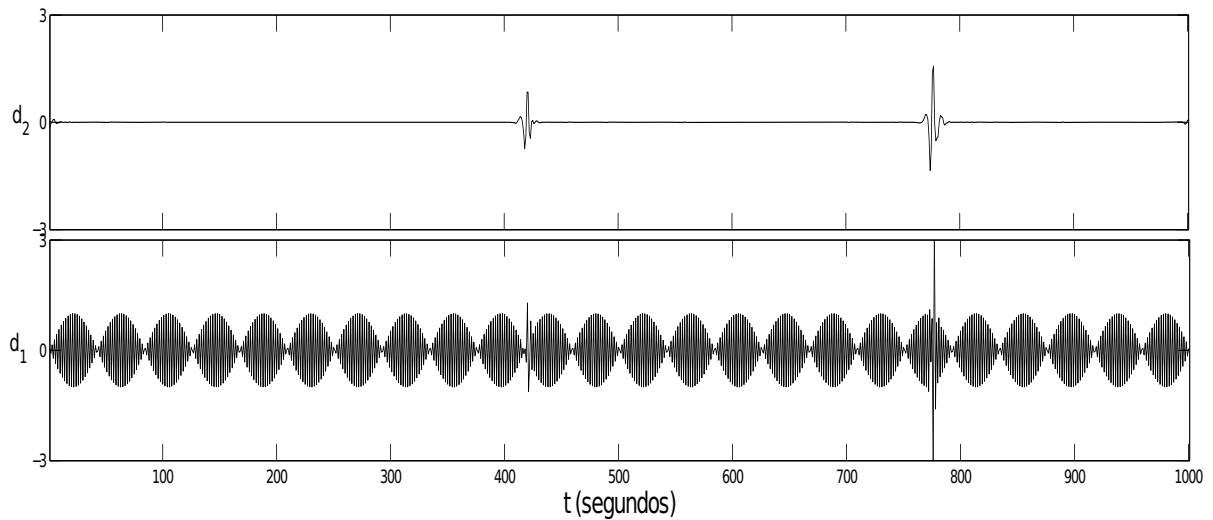


Fonte: Elaboração do próprio autor.

O mesmo sinal foi analisado também utilizando a *db4*, que é mais regular que as duas wavelets utilizadas anteriormente. O resultado desta análise está na Figura 19, para

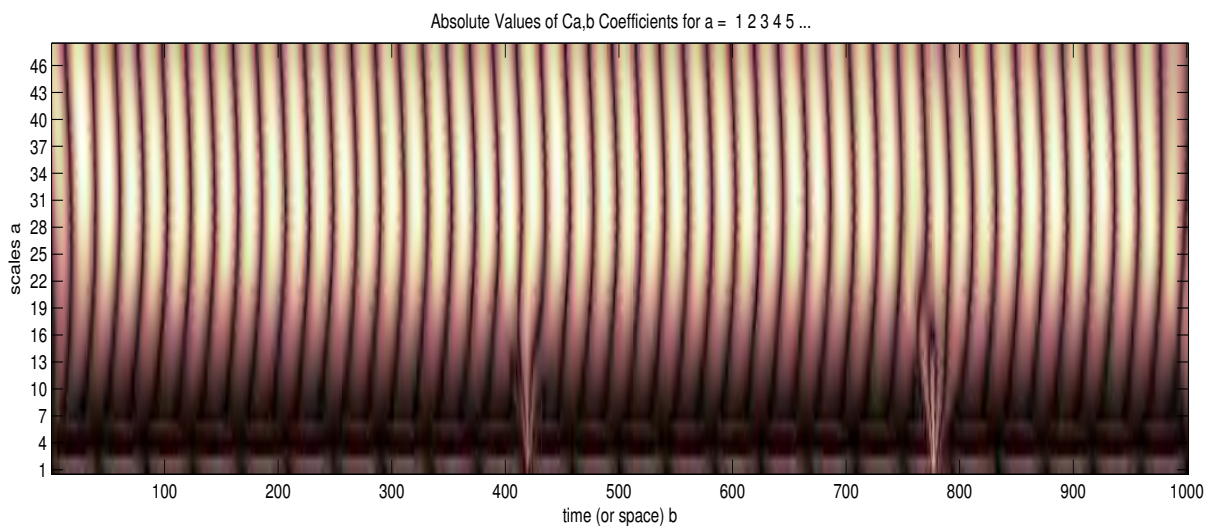
o segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente. Na Figura 20 é mostrado o escalograma do sinal decomposto com a db4.

Figura 19 – Identificação de singularidades com db4, no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 20 – Escalograma do sinal analisado com db4



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Este sinal (Figura 13) tem suas singularidades bem detectadas para todas wavelets testadas, porém essa detecção fica mais clara quanto maior é a regularidade da função. Este fato é evidenciado pelas figuras 15, 17 e 19. Em todos os casos a melhor representação do sinal para a detecção dos impulsos é no segundo nível de decomposição, no qual

a amplitude dos coeficientes de detalhes é menor e se tem boa representação do sinal. Nota-se também que o suporte da onda que evidencia a singularidade aumenta conforme mudamos da **db1** para **db2** e para **db4**, isto causa perda de informação no domínio temporal. Deve se levar em consideração que a boa detecção feita pela **db4** e o tamanho do suporte naquele caso, ainda fornece uma boa localização do transitório em domínio temporal.

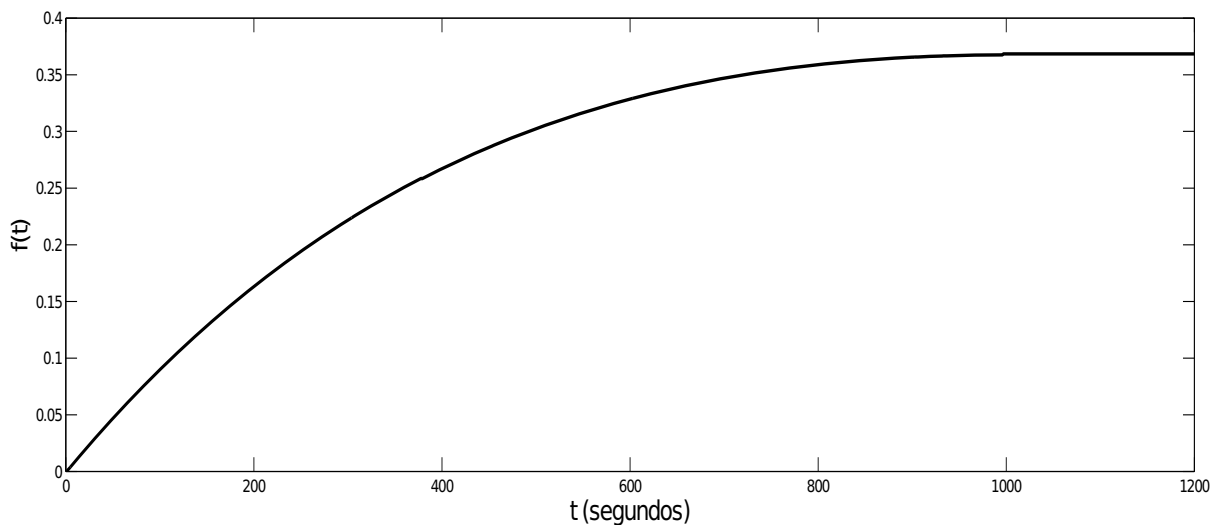
Até agora foi feita uma explanação sobre o uso de wavelets de Daubechies segundo sua regularidade para detectar os impulsos em um sinal. No próximo exemplo é feita a análise de um sinal com falhas, onde serão testadas wavelets com diferentes regularidades. Isto dará uma ideia do papel da regularidade na escolha de uma wavelet para a detecção de falhas.

Seja um sinal $y = f(t)$

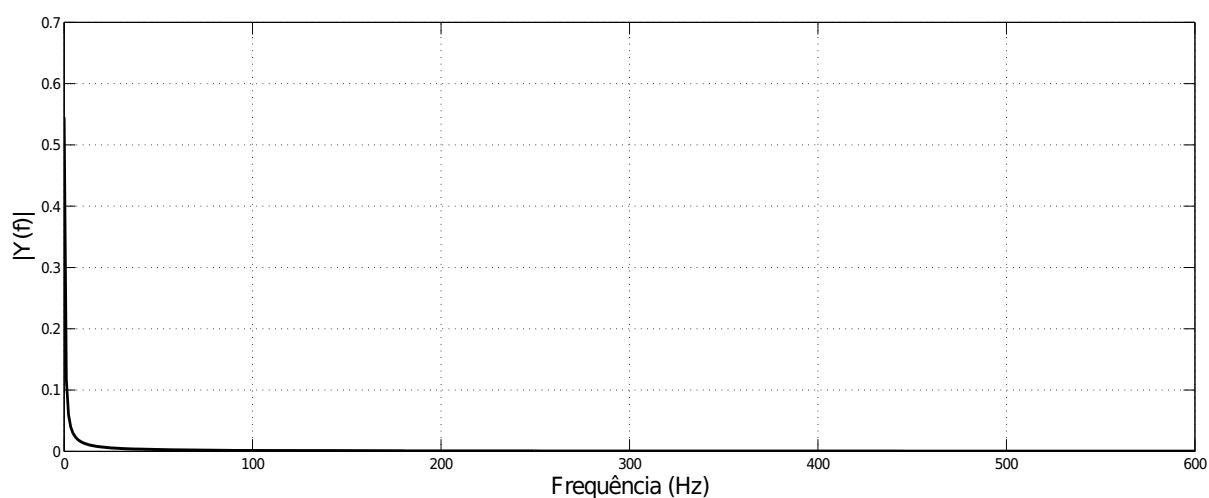
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t} & \text{se } 0 \leq t \leq 377 \\ \frac{e^t}{(t - 0.001)} & \text{se } 378 \leq t \leq 995 \\ 0.3683 & \text{se } 996 \leq t \leq 1200 \end{cases} \quad (64)$$

representado por 1201 amostras com duas falhas, em $t = 377s$ e $t = 995s$. Este sinal aparenta ser uma curva suave, mas não é contínua. Pois além das falhas é descrito por uma função exponencial até $t = 377s$, e por outra exponencial até $t = 995s$, a partir daí é descrito por uma função constante até $t = 1200s$. A Figura 21 ilustra o sinal no domínio do tempo e a Figura 22 no domínio da frequência.

Figura 21 – Sinal com falhas



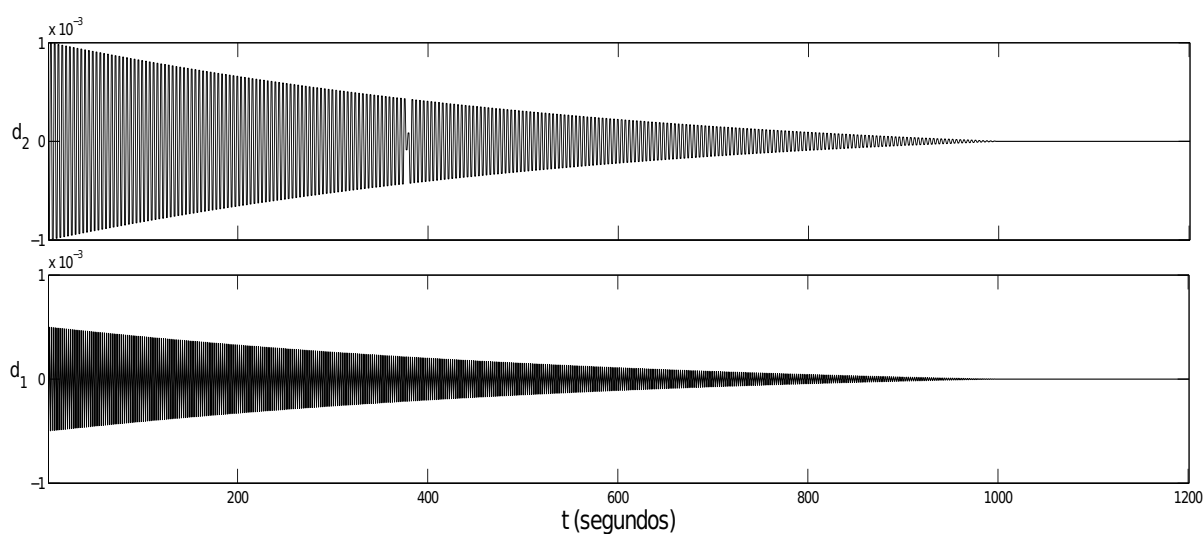
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 22 – Sinal y no domínio da frequência

Fonte: Elaboração do próprio autor.

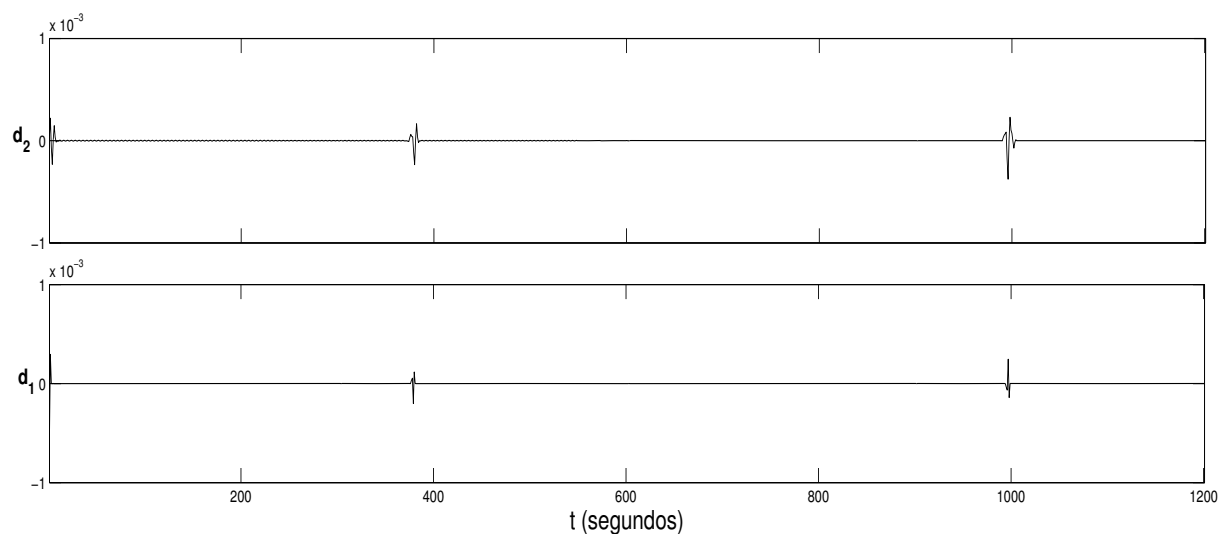
Da mesma forma que no exemplo anterior o sinal com falhas é analisado com db1, db2 e db4. Nas figuras que ilustram estas análises (23, 24 e 25) é mostrada a decomposição no segundo e primeiro nível, respectivamente.

Figura 23 – Tentativa de identificação de falhas com db1, no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente



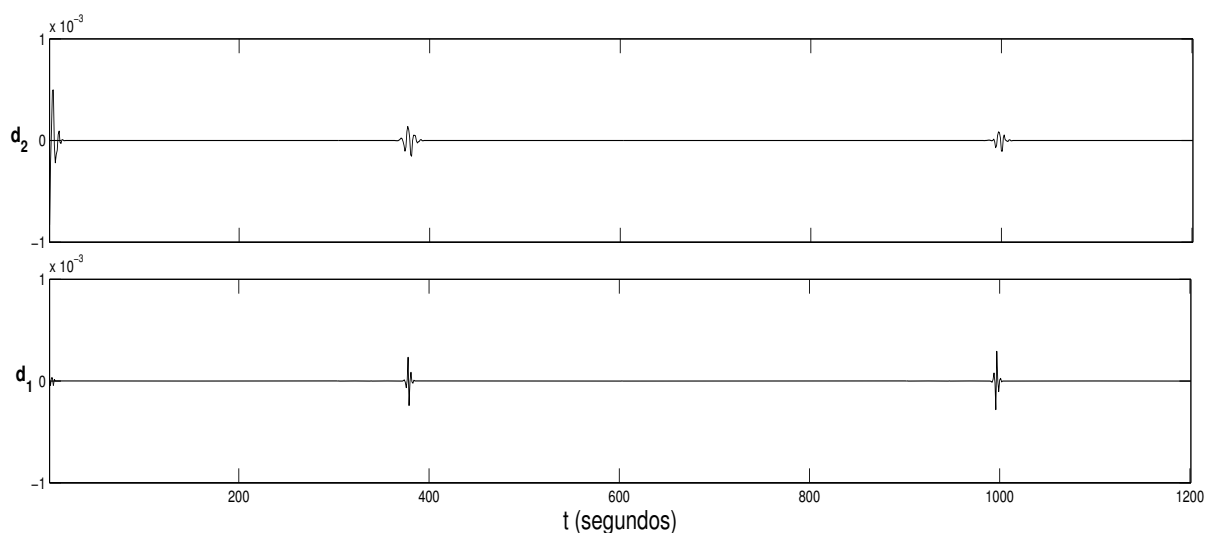
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 24 – Identificação de falhas com **db2**, no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 25 – Identificação de falhas com **db4**, no segundo e primeiro nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em detecção de falhas percebe-se que quanto mais regular, melhor é a detecção da falha. Por exemplo, na Figura 23 onde a análise utilizou a **db1**, que é a wavelet menos regular da família de Daubechies, a falha não é bem detectada. Para este sinal, é possível

determinar a falha a partir da **db2**, sendo que a detecção melhora enquanto o índice N aumenta, pois aumenta a regularidade.

Outro fato interessante que é evidenciado na análise desta falha, é que conforme aumenta N , aumenta-se o suporte da onda, logo na análise utilizando a **db4**, percebe-se uma pequena imprecisão na detecção da segunda falha no segundo nível de decomposição. Na verdade, mesmo na **db2** observa-se que para níveis de decomposição mais elevados, o suporte da onda vai aumentando e, conseqüentemente, a imprecisão no domínio do tempo. Assim, conforme aumenta-se N , mesmo os primeiros níveis começam a apresentar uma pequena perda de informação no domínio temporal.

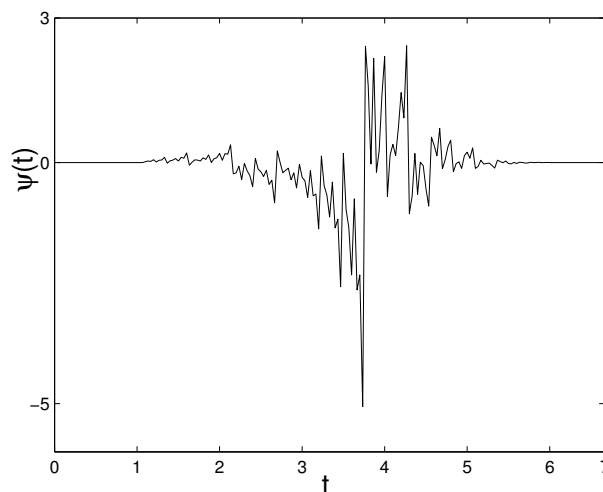
Após estes exemplos de identificação de singularidades usando wavelets da família de Daubechies, devido ao fato de sua regularidade aumentar com seu índice N , o texto volta-se para as wavelets parametrizadas segundo o capítulo 3, na próxima seção.

4.2 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DE WAVELETS SEGUNDO A PARAMETRIZAÇÃO DE SHERLOCK & MONRO, (PAIVA et al., 2009)

Paiva et al. (2009) mostram alguns exemplos de wavelets parametrizadas seguindo a formulação de Sherlock & Monro, explicitando como essas wavelets se comportam com a imposição de nenhum, um ou dois momentos nulos. Nesta seção vamos explorar um daqueles exemplos e estender para três momentos nulos.

Seja um banco de filtros ortonormal com comprimento 8 ($N = 4$), com parametrização inicial $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, -0.2618, -1.0472\}$, esta parametrização não satisfaz nenhum momento nulo. Esta wavelet pode ser vista na Figura 26.

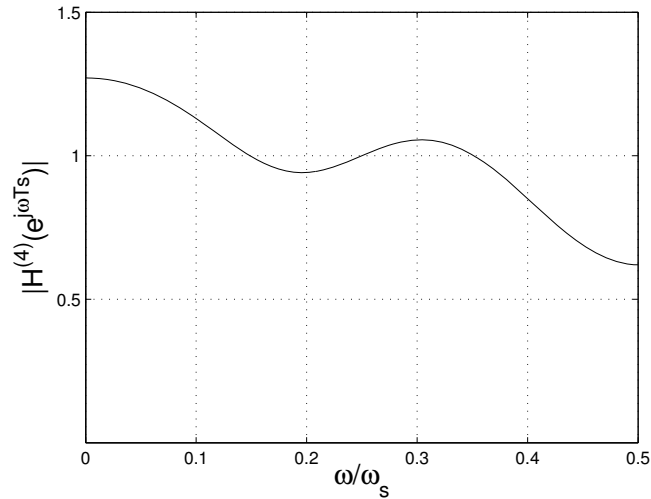
Figura 26 – Parametrização inicial $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, -0.2618, -1.0472\}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 27 pode-se ver a resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 0$. A frequência de amostragem é denotada por $\omega_s = 2\pi/Ts$. Note que o ganho não chega a zero em $\omega = 0.5\omega_s$ porque a condição de regularidade (30) não foi satisfeita. Desta forma uma função wavelet associada não pode ser definida.

Figura 27 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 0$



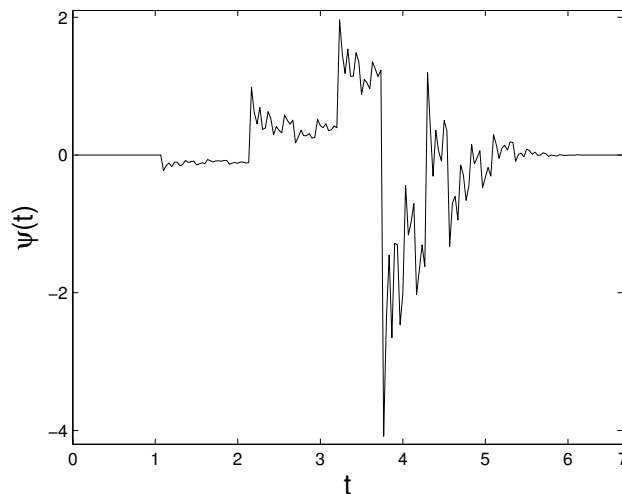
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para que o banco de filtros caracterize uma wavelet e também para assegurar um momento nulo, $p = 1$, α_4 deve satisfazer (30), o que implica em

$$\alpha = \{-1.5708, 0.0698, -0.2618, 2.5482\},$$

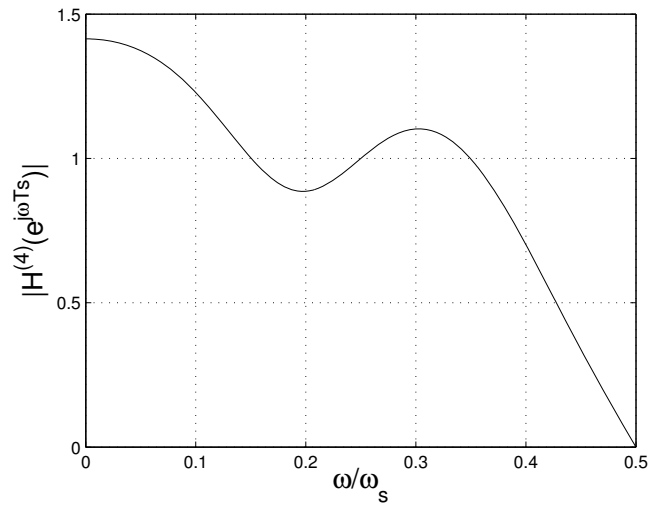
Figura 28. A resposta em frequência do filtro passa-baixas é mostrada na Figura 29.

Figura 28 – Parametrização com $p = 1$, $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, -0.2618, 2.5482\}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 29 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 1$



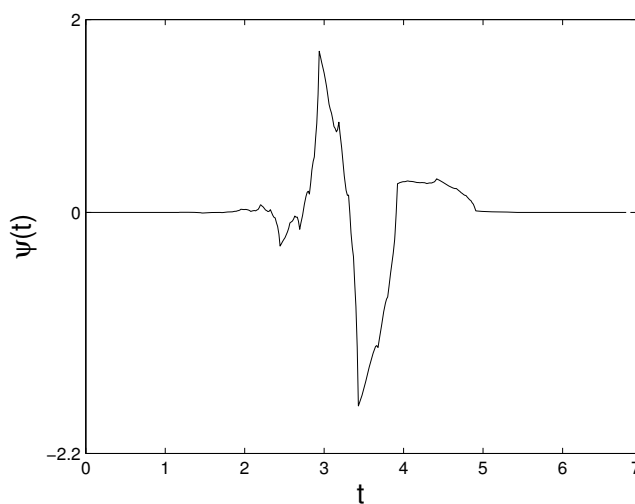
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para assegurar dois momentos nulos, $p = 2$, α_3 deve satisfazer (41) e α_4 satisfazer (30), além disso α_3 tem de cumprir a restrição (42). Assim

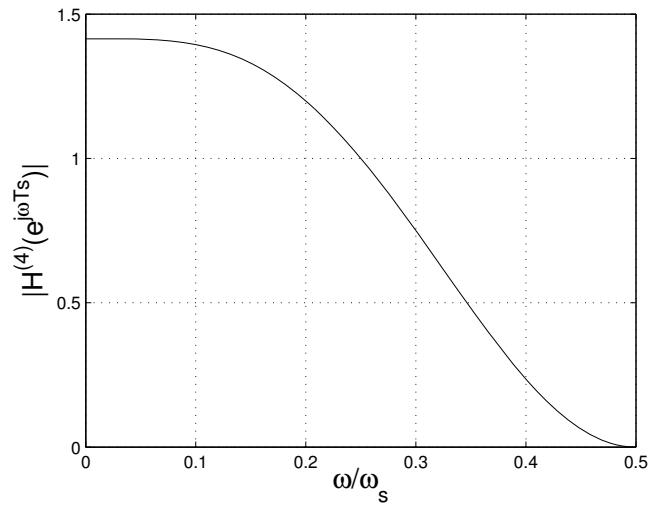
$$\alpha = \{-1.5708, 0.0698, 1.3160, 0.9704\},$$

Figura 30. A resposta em frequência do filtro passa-baixas é mostrada na Figura 31.

Figura 30 – Parametrização com $p = 2$, $\alpha = \{-1.5708, 0.0698, 1.3160, 0.9704\}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

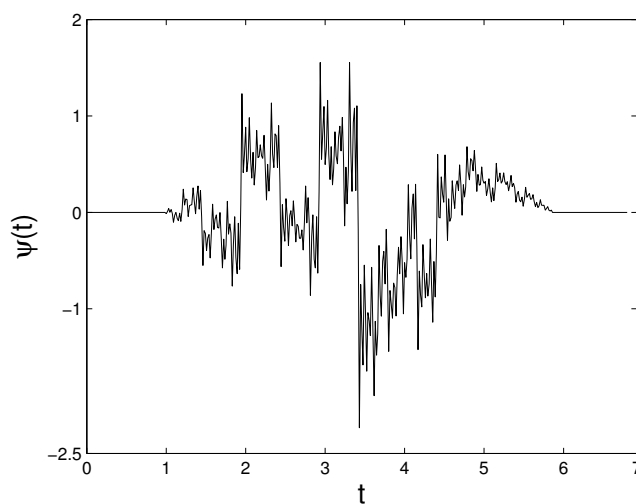
Figura 31 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 2$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

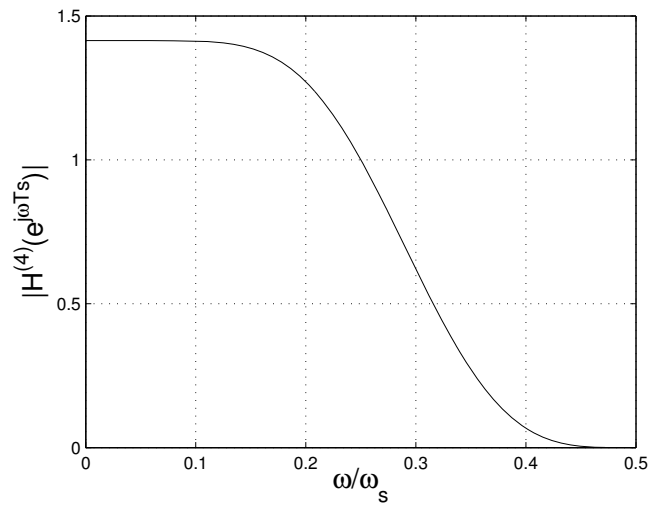
Por fim, para assegurar três momentos nulos, $p = 3$, α_2 deve satisfazer (62), α_3 deve satisfazer (41) e α_4 cumprir a condição (30), assim

$$\alpha = \{-1.5708, 0.8631, 0.9625, 0.5306\},$$

Figura 32. A resposta em frequência do filtro passa-baixas é mostrada na Figura 33.

Figura 32 – Parametrização com $p = 3$, $\alpha = \{-1.5708, 0.8631, 0.9625, 0.5306\}$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 33 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $p = 3$ 

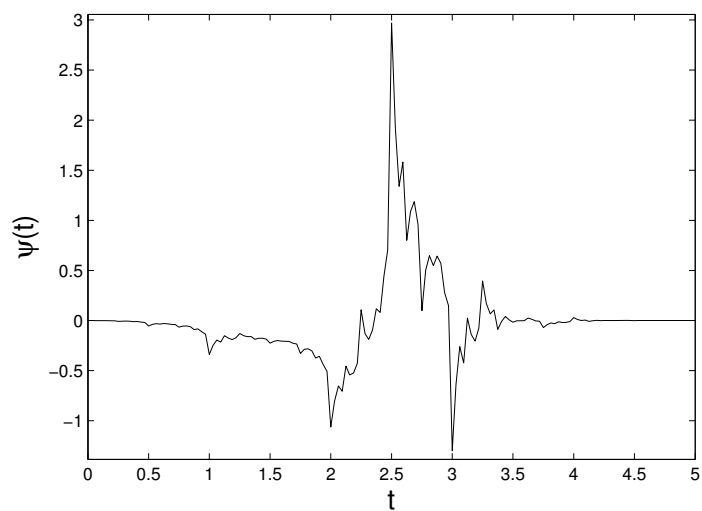
Fonte: Elaboração do próprio autor.

4.3 OUTROS EXEMPLOS DE WAVELETS SEGUNDO A PARAMETRIZAÇÃO DE SHERLOCK & MONRO

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de wavelets parametrizadas de acordo com a formulação de Sherlock & Monro. Os bancos de filtros caracterizam wavelets com $p = 1$ e serão estendidos para $p = 2$ e $p = 3$, também serão mostrados os gráficos para essas wavelets.

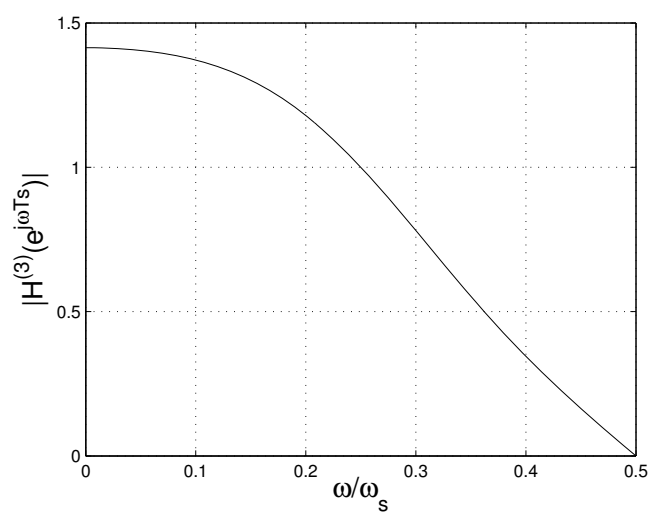
No primeiro exemplo, seja um banco de filtros com comprimento 6 ($N = 3$), para $p = 1$ o conjunto de parâmetros angulares é $\alpha_{p=1} = \{-1.4223, 0.4882, 1.7195\}$, Figura 34. Para $p = 2$ e $p = 3$ tem-se, respectivamente, $\alpha_{p=2} = \{-1.4223, 1.3177, 0.8899\}$ e $\alpha_{p=3} = \{-1.3233, 1.3107, 0.7980\}$, figuras 36 e 38. A resposta em frequência do filtro passa-baixas é indicada nas figuras 35, 37 e 39, respectivamente. A frequência de amostragem é denotada por $\omega_s = 2\pi/Ts$.

Figura 34 – Wavelet $\alpha_{p=1} = \{-1.4223, 0.4882, 1.7195\}$



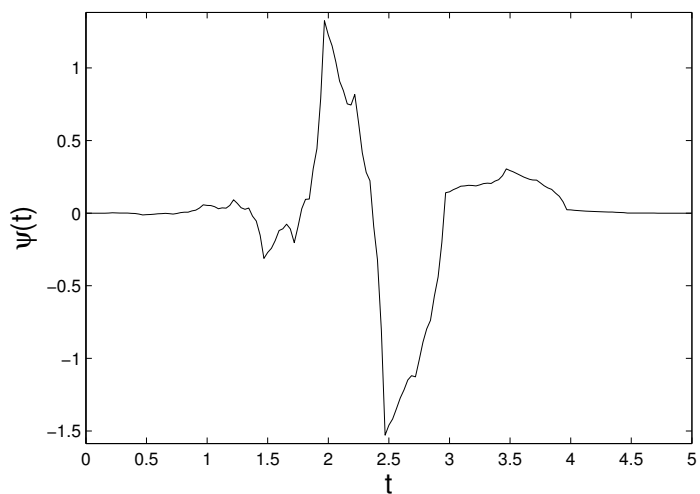
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 35 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=1}$



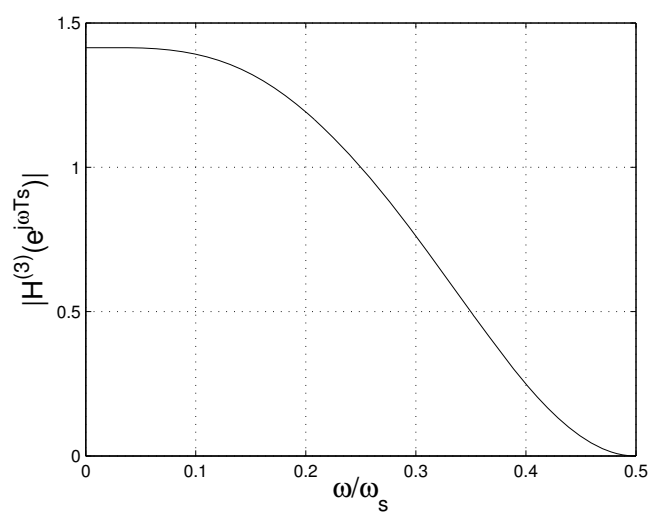
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 36 – Wavelet $\alpha_{p=2} = \{-1.4223, 1.3177, 0.8899\}$

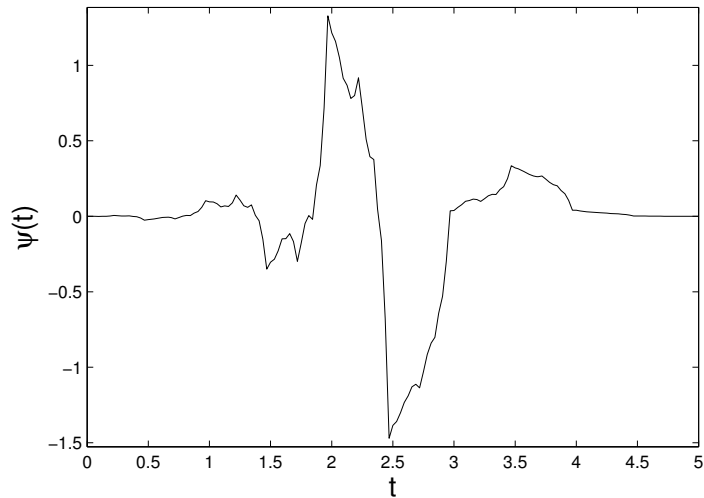


Fonte: Elaboração do próprio autor.

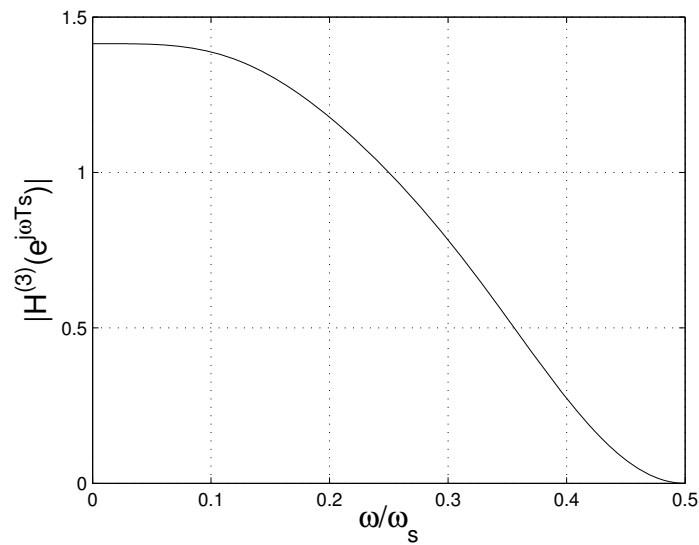
Figura 37 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=2}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 38 – Wavelet $\alpha_{p=3} = \{-1.3233, 1.3107, 0.7980\}$ 

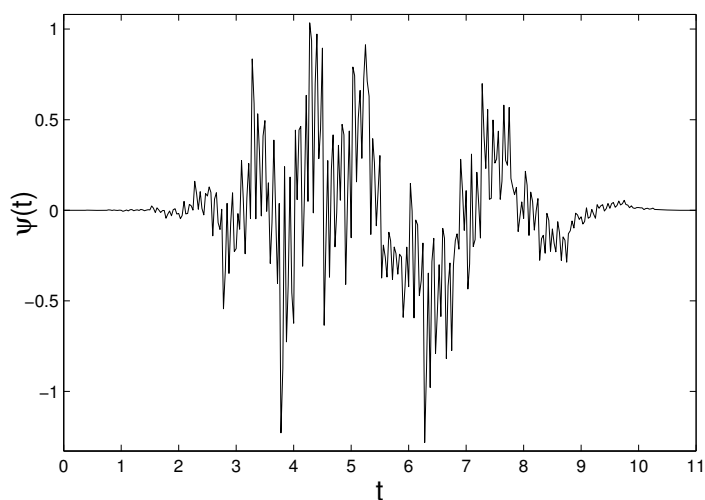
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 39 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=3}$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

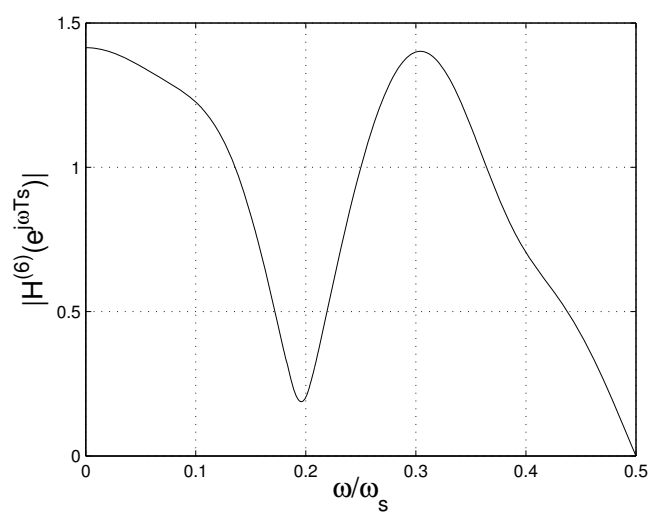
Em um segundo exemplo, seja um banco de filtros com comprimento 12 ($N = 6$), onde a parametrização com $p = 1$ é $\alpha_{p=1} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, 0.0325, 0.5524, 0.3976\}$, Figura 40, com $p = 2$ é $\alpha_{p=2} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, 0.0325, -0.0052, 0.9552\}$, Figura 42, e para $p = 3$, $\alpha_{p=3} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, -0.5035, 0.8681, 0.6178\}$, Figura 44. A resposta em frequência do filtro passa-baixas é indicada nas figuras 41, 43 e 45, respectivamente.

Figura 40 – Wavelet $\alpha_{p=1} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, 0.0325, 0.5524, 0.3976\}$



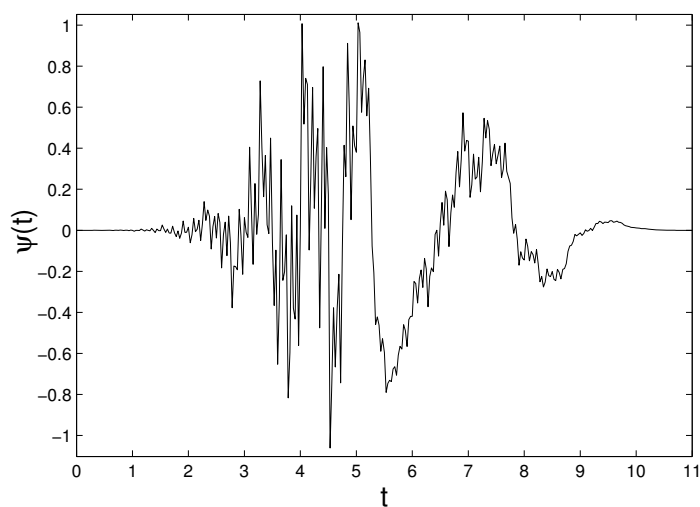
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 41 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=1}$



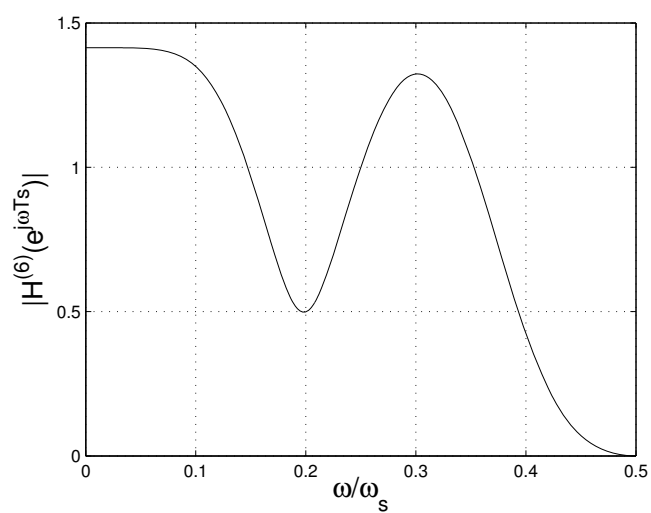
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 42 – Wavelet $\alpha_{p=2} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, 0.0325, -0.0052, 0.9552\}$

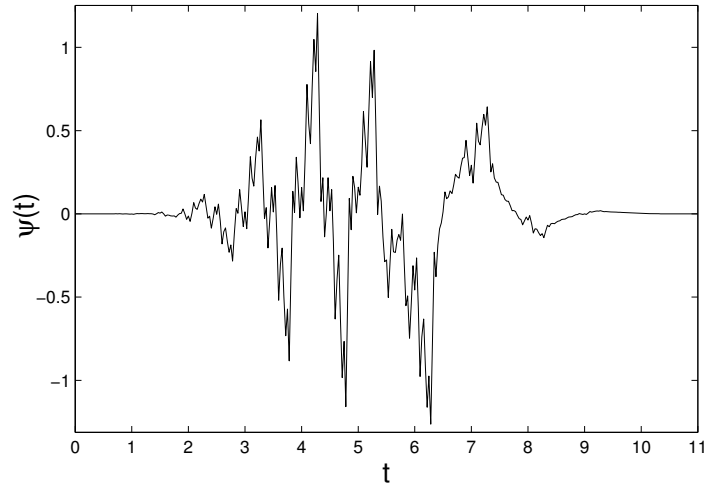


Fonte: Elaboração do próprio autor.

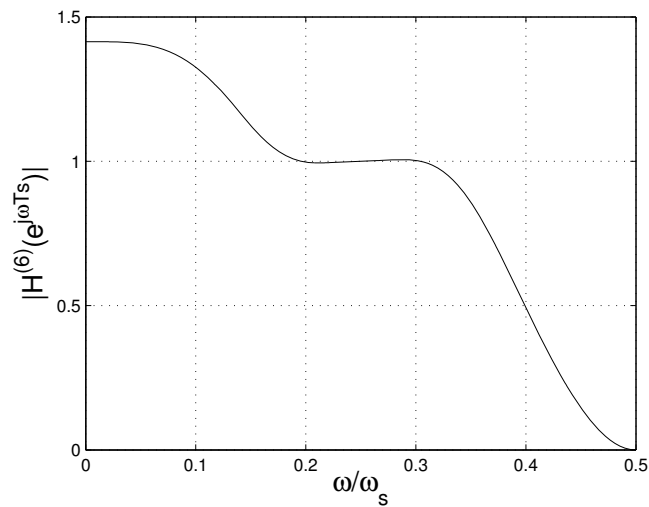
Figura 43 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=2}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 44 – Wavelet $\alpha_{p=3} = \{-0.2255, 1.1174, -1.0889, -0.5035, 0.8681, 0.6178\}$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 45 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas com $\alpha_{p=3}$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

O que os exemplos anteriores ilustram é a construção de wavelets seguindo a formulação proposta por Sherlock e Monro (1998), expandida em Paiva et al. (2009) e também neste trabalho, visando a obtenção de um terceiro momento nulo. O próximo passo consiste em utilizar esta formulação para detectar falhas de um sinal.

4.4 IDENTIFICAÇÃO DE FALHAS COM WAVELETS PARAMETRIZADAS

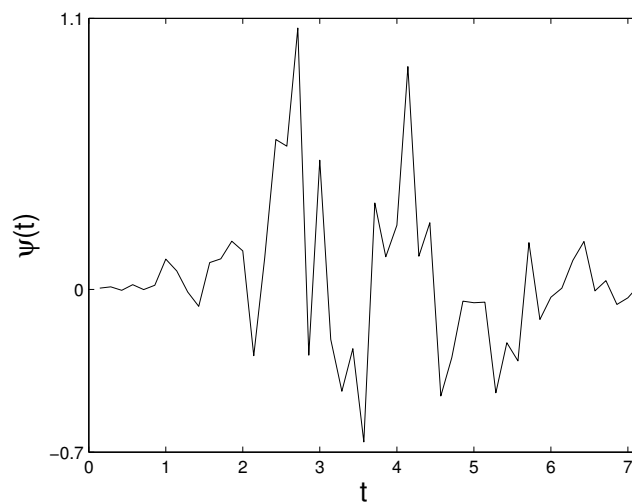
Para este exemplo vamos usar o mesmo sinal, cuja análise foi feita com a `db4` na seção 4.1. O sinal é dado por (64) e é ilustrado na Figura 21. O sinal é representado por 1201 amostras com duas falhas, em $t = 377s$ e $t = 995s$. Este sinal é descrito por uma função exponencial até $t = 377s$, e por outra exponencial até $t = 995s$, a partir daí é descrito por uma função constante até $t = 1200s$. A Figura 22 ilustra o sinal no domínio da frequência

Considere um banco de filtros com comprimento 8 ($N = 4$), sendo inicialmente um conjunto de parâmetros angulares que não satisfaça a condição que define uma wavelet, isto é, a restrição (30) não está satisfeita. Seja

$$\alpha_{p=0} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, -1.0999\}.$$

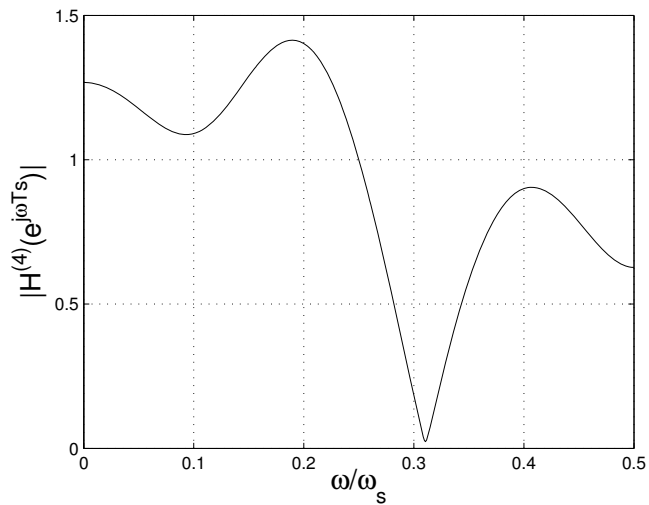
Cabe lembrar que, desta forma, uma wavelet não pode ser definida. Veja que o ganho não chega a zero em $\omega = 0.5\omega_s$ porque a condição de regularidade (30) não foi satisfeita (Figura 47). A frequência de amostragem é denotada por $\omega_s = 2\pi/Ts$. O resultado da parametrização é mostrado na Figura 46.

Figura 46 – Parametrização inicial $\alpha_{p=0} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, -1.0999\}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

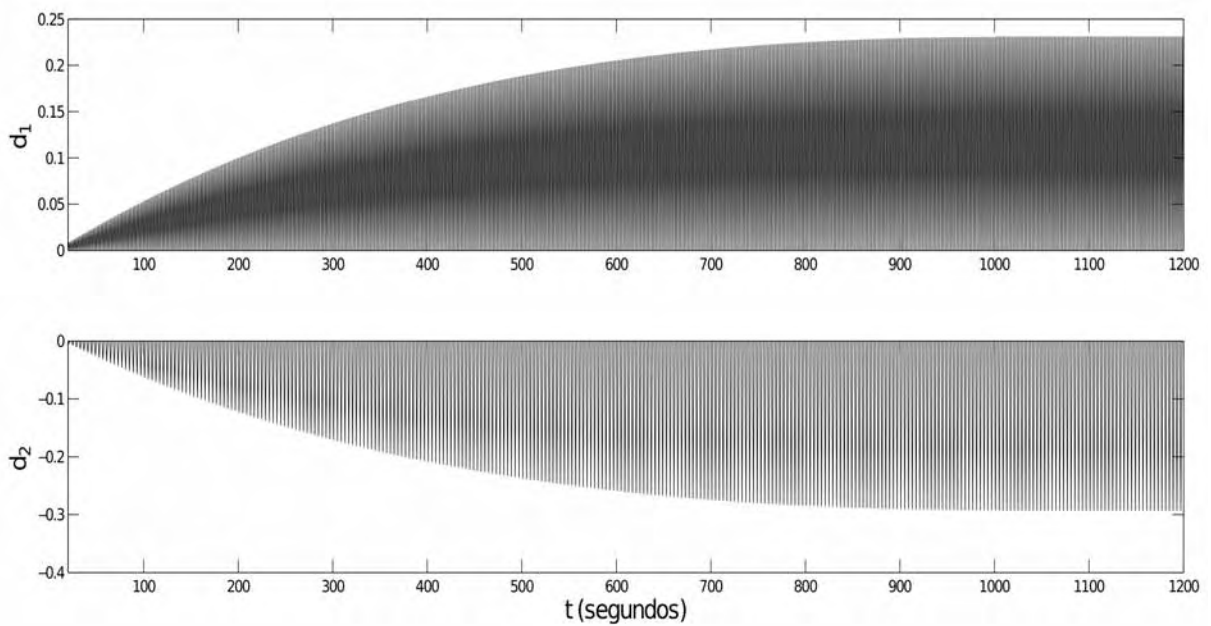
Figura 47 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 46



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Se o sinal for analisado usando esta parametrização é impossível localizar as falhas, na verdade nenhuma outra informação importante será evidenciada, Figura 48.

Figura 48 – Tentativa de identificação de singularidade com $\alpha_{p=0}$, no primeiro e segundo nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Como fora mencionado, é possível que uma wavelet escolhida de forma aleatória tenha um ou mais momentos nulos, e que as restrições obtidas neste trabalho e em seus precursores garantam que pelo menos um certo número de momentos nulos sejam satisfeitos. Porém, no caso do conjunto de parâmetros angulares escolhido na Figura 46, sequer a condição para que o mesmo seja uma wavelet foi satisfeita.

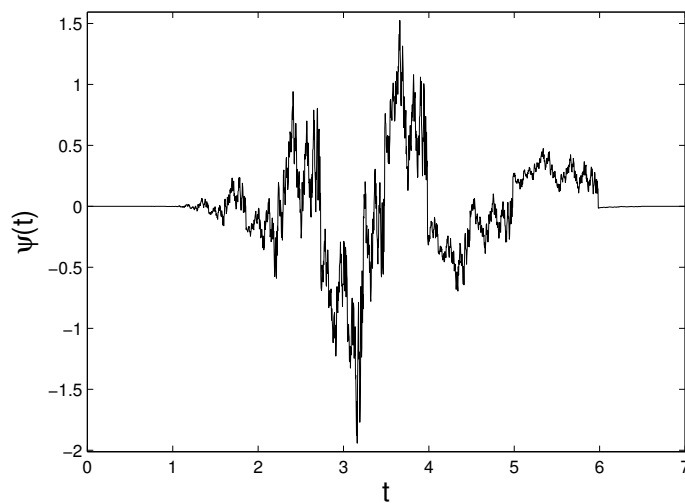
Levando em consideração que $\alpha_{p=0}$ não caracteriza uma wavelet, então o exemplo de tentativa de detecção de singularidades feito na Figura 48, tem apenas um propósito didático e de comparação com $\alpha_{p=1}$, $\alpha_{p=2}$ e $\alpha_{p=3}$. Percebe-se, na Figura 48, que nenhuma informação no sentido de detectar singularidades pode ser extraída no primeiro e segundo nível de detecção. Mais do que isso, se for decomposto em mais níveis, estes também não apontarão qualquer informação importante neste sentido.

Aplicando a restrição (30), a parametrização terá pelo menos um momento nulo. Desta forma

$$\alpha_{p=1} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, 1.5821\},$$

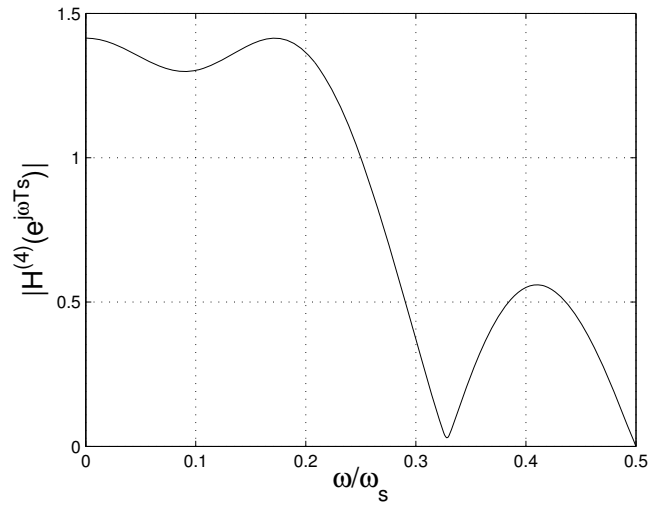
Figura 49. A resposta em frequência do filtro passa-baixas pode ser vista na Figura 50.

Figura 49 – Wavelet $\alpha_{p=1} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, 1.5821\}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

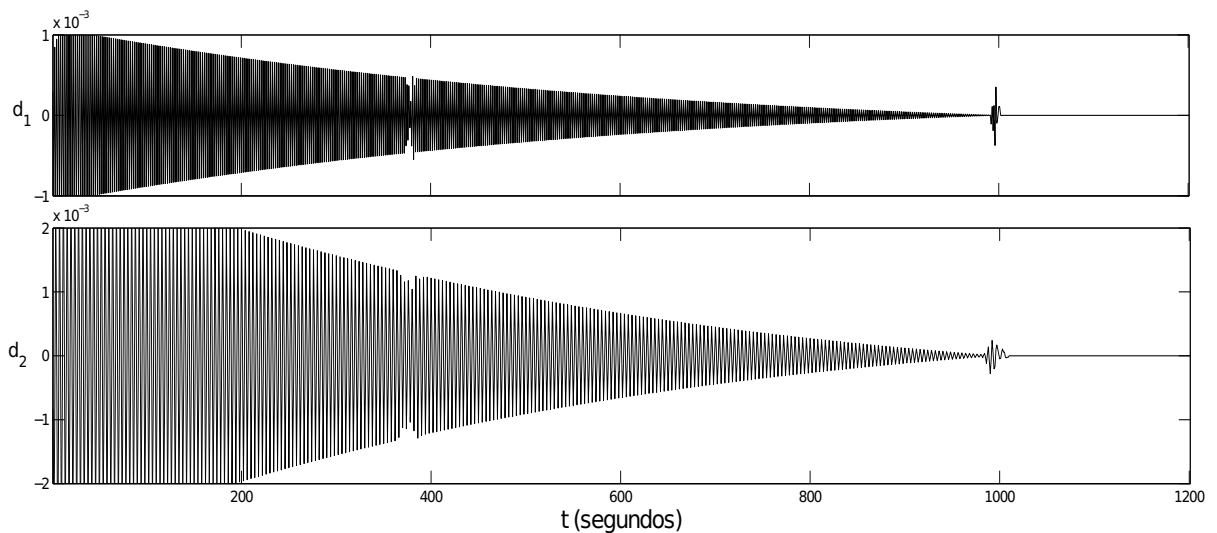
Figura 50 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 49



Fonte: Elaboração do próprio autor.

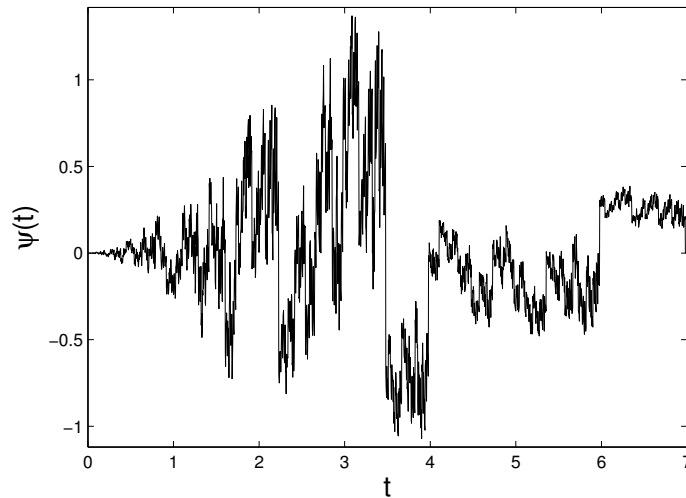
Na Figura 51 pode-se ver a análise do sinal y utilizando a wavelet $\alpha_{p=1}$. A presença de singularidades não está bem clara.

Figura 51 – Tentativa de identificação de singularidade com $\alpha_{p=1}$, no primeiro e segundo nível de decomposição, respectivamente



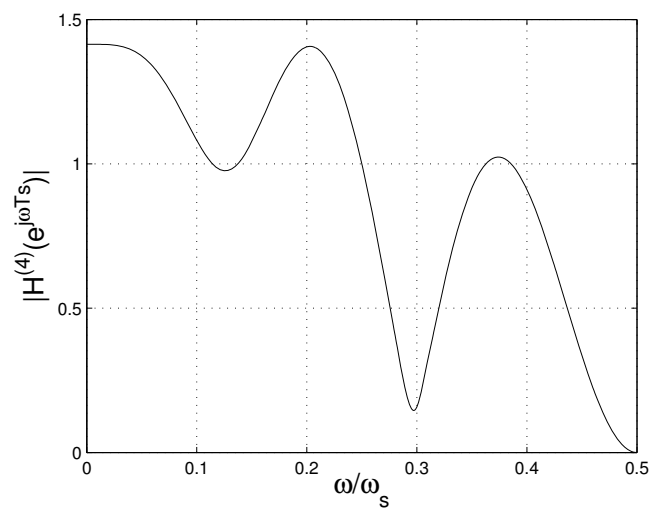
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Aplicando a restrição (41) ao conjunto de parâmetros angulares, a parametrização terá pelo menos dois momentos nulos $\alpha_{p=2} = \{-0.3033, 0.2937, 0.0545, 0.7405\}$, Figura 52.

Figura 52 – Wavelet $\alpha_{p=2} = \{-0.3033, 0.2937, 0.0545, 0.7405\}$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

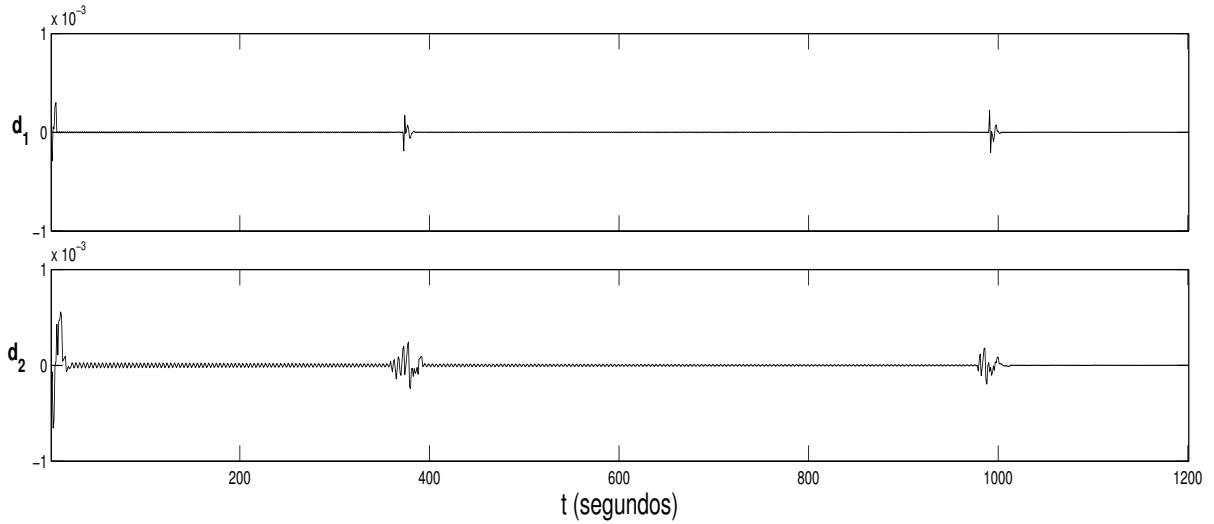
Figura 53 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 49



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 53 é mostrada a resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 52, e a análise do sinal y usando $\alpha_{p=2}$ é mostrada na figura 54.

Figura 54 – Identificação de singularidade com $\alpha_{p=2}$, no primeiro e segundo nível de decomposição, respectivamente



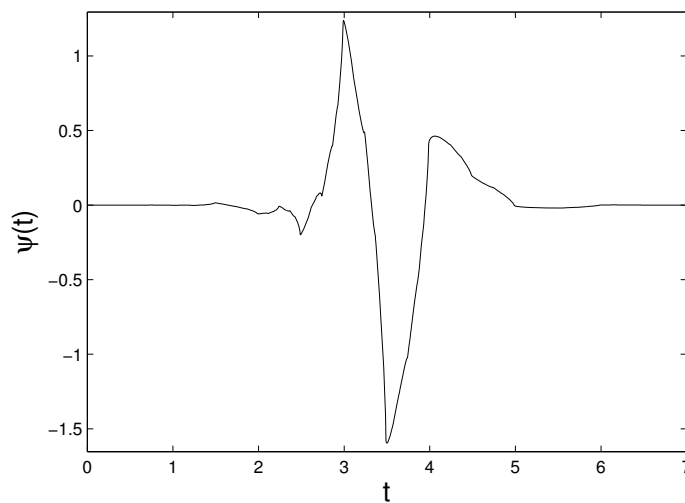
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A detecção das falhas é boa para o sinal y analisado com a wavelet $\alpha_{p=2}$. Mas ainda pode-se aumentar a regularidade da onda aplicando (62) à wavelet inicial e obtendo o conjunto de parâmetros angulares

$$\alpha_{p=3} = \{-0.3033, -0.8243, 1.6308, 0.2822\},$$

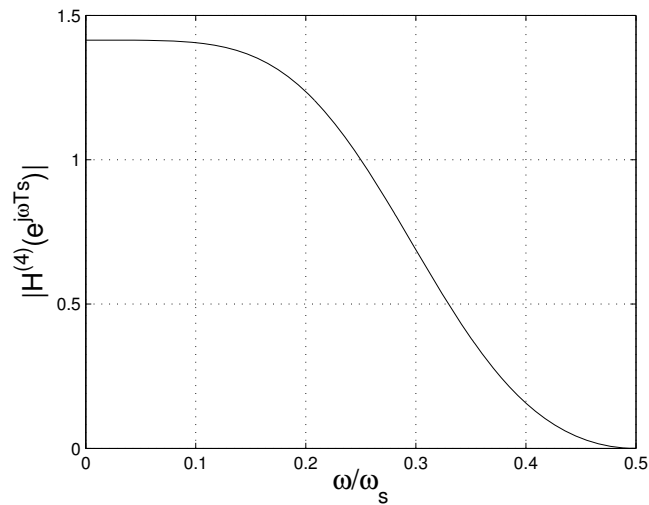
Figura 55.

Figura 55 – Wavelet $\alpha_{p=3} = \{-0.3033, -0.8243, 1.6308, 0.2822\}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

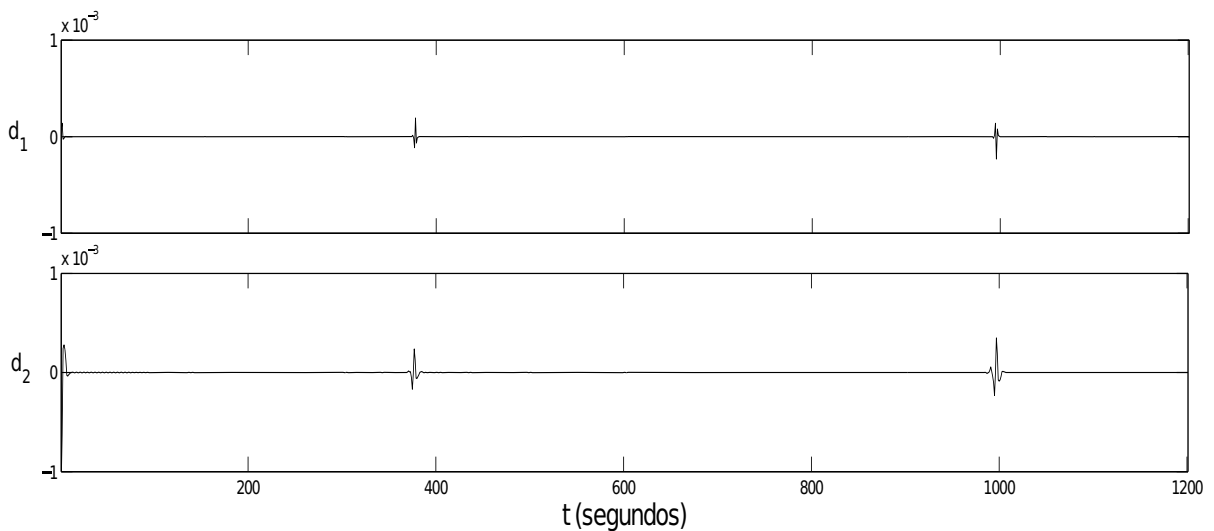
Figura 56 – Resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 55



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A resposta em frequência do filtro passa-baixas apresentado na Figura 55 é mostrada na Figura 56. Na Figura 57 tem-se a análise do sinal y utilizando a wavelet $\alpha_{p=3}$.

Figura 57 – Identificação de singularidade com $\alpha_{p=3}$, no primeiro e segundo nível de decomposição, respectivamente



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Comparando as figuras 57 e 54 percebe-se que, apesar da boa identificação das falhas utilizando $\alpha_{p=2}$, a análise com $\alpha_{p=3}$ fornece um resultado melhor. Os coeficientes de detalhes além das falhas que aparecem nos primeiros níveis de decomposição com $\alpha_{p=2}$

diminuem no caso de $\alpha_{p=3}$. A presença de coeficientes de alta frequência evidenciando as falhas são ligeiramente mais destacadas quando a análise é feita utilizando $\alpha_{p=3}$.

Através deste exemplo pode-se perceber que as wavelets de Sherlock & Monro são eficazes na detecção de falhas, principalmente quando tem uma regularidade de pelo menos dois momentos nulos.

No caso em que a parametrização satisfaz pelo menos três momentos nulos obteve-se a melhor identificação da falhas. Isto sustenta a ideia de que quanto mais regular for a wavelet melhor será a detecção das falhas de um dado sinal.

Relembrando que o mesmo sinal y foi analisado na seção 4.1 utilizando wavelets de Daubechies, que, assim como as wavelets de Sherlock & Monro tem suporte compacto, são ortonormais e altamente regulares. Os resultados daquela análise foram bons no que se refere a detectar a falha sem perda significativa de informação temporal.

A regularidade é um critério importante na escolha de uma wavelet. Tanto a **db4**, é suficientemente regular para esta análise, quanto $\alpha_{p=3} = \{-0.3033, -0.8243, 1.6308, 0.2822\}$. Percebe-se tanto naquele caso quanto usando as wavelets de Sherlock & Monro que quanto maior a regularidade da wavelet, melhor a detecção das falhas.

No caso das wavelets de Daubechies, conforme se aumenta o índice N , aumentando a regularidade, aumenta-se o comprimento do banco de filtros, aumentando também o aumento do suporte. O comprimento do banco de filtros é $2N$.

No caso das wavelets de Sherlock & Monro pode-se conseguir $p = N$ momentos nulos para uma wavelet com N parâmetros angulares, cujo banco de filtros tem comprimento $2N$, lembrando que as restrições asseguram pelo menos $p = 3$ momentos nulos.

Como casos particulares, os exemplos deste capítulo usaram wavelets formadas por 4 parâmetros angulares, cujo comprimento do banco de filtros é oito. Em relação às wavelets de Daubechies, a **db4** tem o mesmo comprimento. Em outras palavras, para que se aumente a regularidade da **dbN** para **db‘N+1’** paga-se um preço de aumentar o tamanho do suporte. No caso das wavelets de Sherlock & Monro pode-se aumentar a regularidade adicionando as devidas restrições aos parâmetros e observando apenas se $p \leq N$.

4.5 DETECÇÃO DE FALHAS NA SIMULAÇÃO DE UM SINAL REAL

Os exemplos anteriores tiveram um papel didático e de comparação entre wavelets com diferentes regularidades. Nesta seção considera-se a simulação de um sinal real para testar wavelets de Sherlock & Monro com diferentes números de momentos nulos, e compará-las de acordo com a sua regularidade.

Nesta seção utiliza-se um exemplo baseado em Paiva, Galvão e Yoneyama (2008),

Paiva, Galvão e Rodrigues (2008), que é o modelo látero-directional de um Boeing 747 (BRYSON, 1994) em configuração de aterrissagem.

De acordo com Bryson (1994) a estrutura geral do modelo é

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.089 & -2.19 & 0.328 & 0.319 \\ 0.076 & -0.217 & -0.166 & 0 \\ -0.602 & 0.327 & -0.975 & 0 \\ 0 & 0.150 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.0327 \\ 0.0264 & -0.151 \\ 0.227 & 0.0636 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.089 \\ -0.076 \\ 0.602 \\ 0 \end{bmatrix} d$$

onde

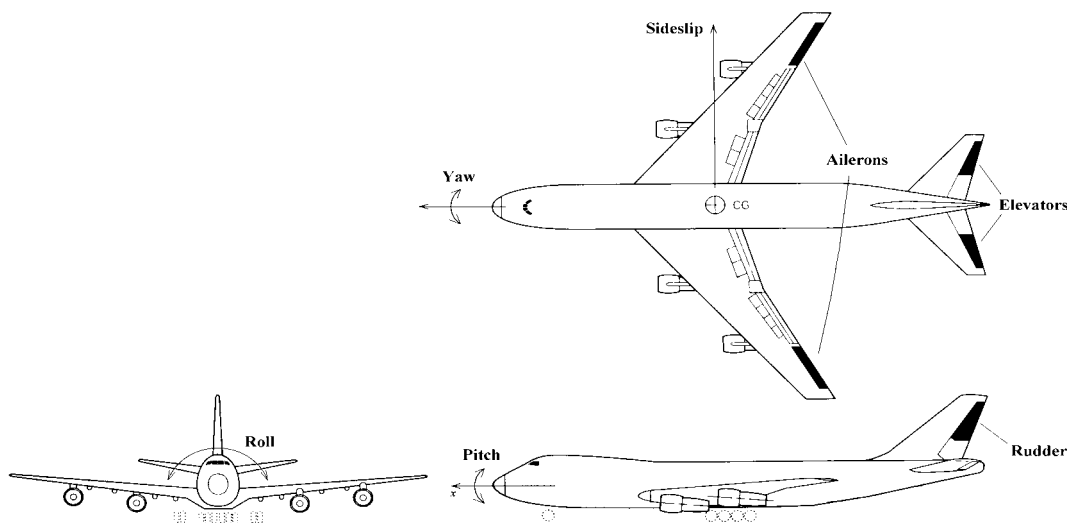
$$\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -4.15 & 7.6 & 5.36 & 5.57 \\ 3.43 & -14.24 & 0.62 & -0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ p \\ \phi \end{bmatrix}$$

que pode ser escrito de forma equivalente como

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fd, \quad u = -Kx, \quad y = x \tag{65}$$

onde x , u , y e d representam os estados, sinais de controle, saídas e turbulências externas, respectivamente. Neste modelo, v é a velocidade de escorregamento (*sideslip velocity*), r é a velocidade angular de guinada (*yaw rate*), p é a velocidade angular de rolamento (*roll rate*) e ϕ é o ângulo de rolamento (*roll angle*). Os sinais de controle são $u = [\delta_a \ \delta_r]^T$, sendo que δ_a é o ângulo do aileron (*aileron angle*) e δ_r é o ângulo do leme (*rudder angle*), Figura 58. A perturbação externa d é a velocidade do vento lateral (*lateral wind velocity*).

Figura 58 – Aeronave Boeing 747

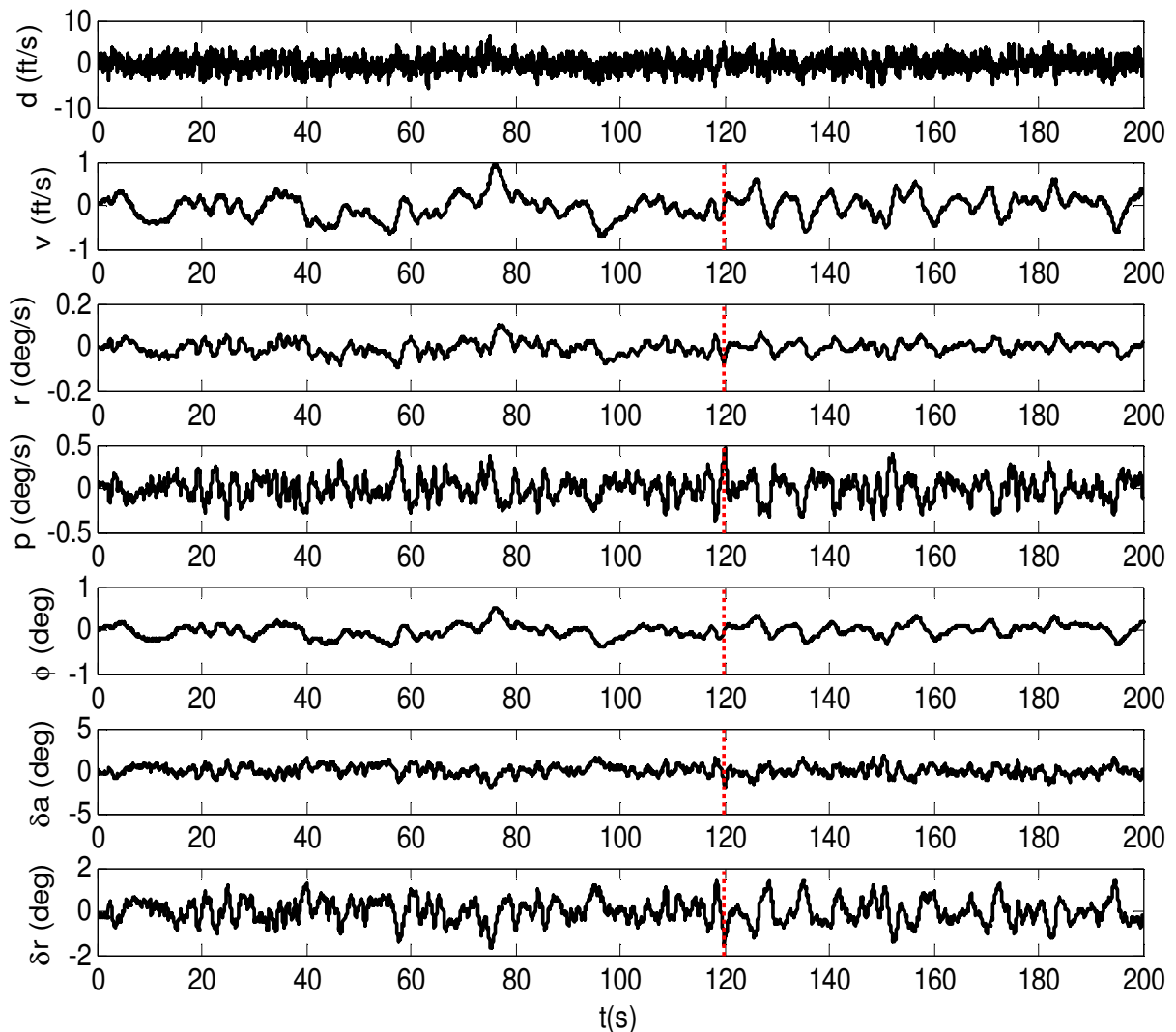


Fonte: Paiva (2005)

De acordo com Paiva, Galvão e Yoneyama (2008), Paiva, Galvão e Rodrigues (2008) os polos do sistema em malha-fechada estão localizados em -2 , -1 e $-1 \pm 2j$. Cada estado é corrompido por um ruído branco aditivo cujo desvio padrão é igual a 2% do desvio padrão da saída do sensor ideal. A perturbação externa d foi gerada como um ruído Gaussiano de desvio padrão de 10 pés/s, filtrado por um filtro passa-baixas.

O problema simulado consiste em detectar uma redução de ganho na taxa do girômetro responsável pela medição da taxa de guinada r . Os dados para os testes foram adquiridos a uma frequência de amostragem $f_s = 100\text{Hz}$. A Figura 59 apresenta um exemplo de uma falha no instante $t = 120\text{s}$.

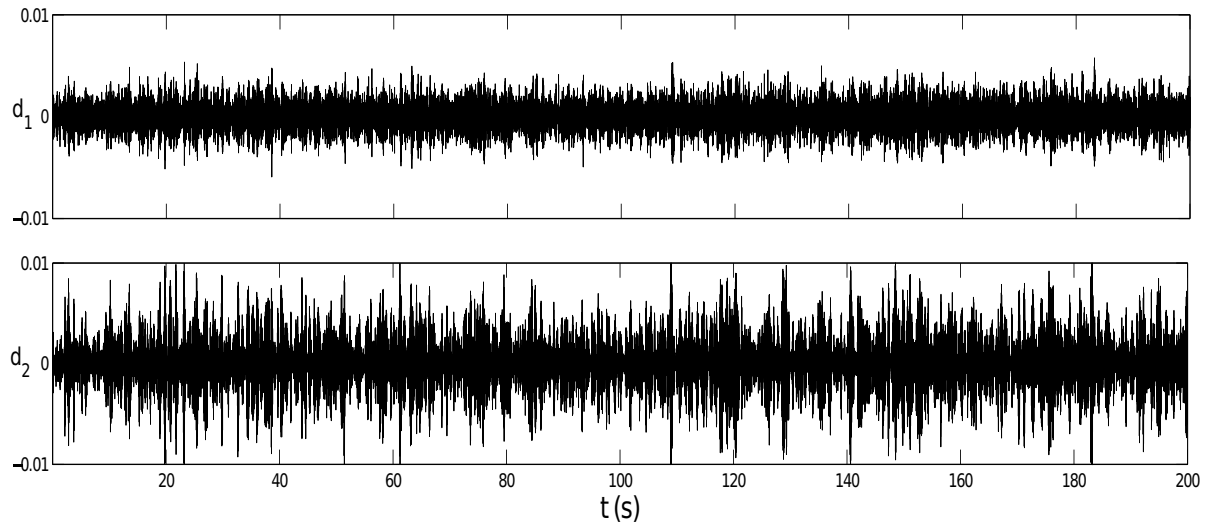
Figura 59 – Sinais de controle e saídas da planta para uma das simulações de falhas do Boeing 747. As linhas verticais tracejadas indicam a ocorrência da falha, em $t = 120\text{s}$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

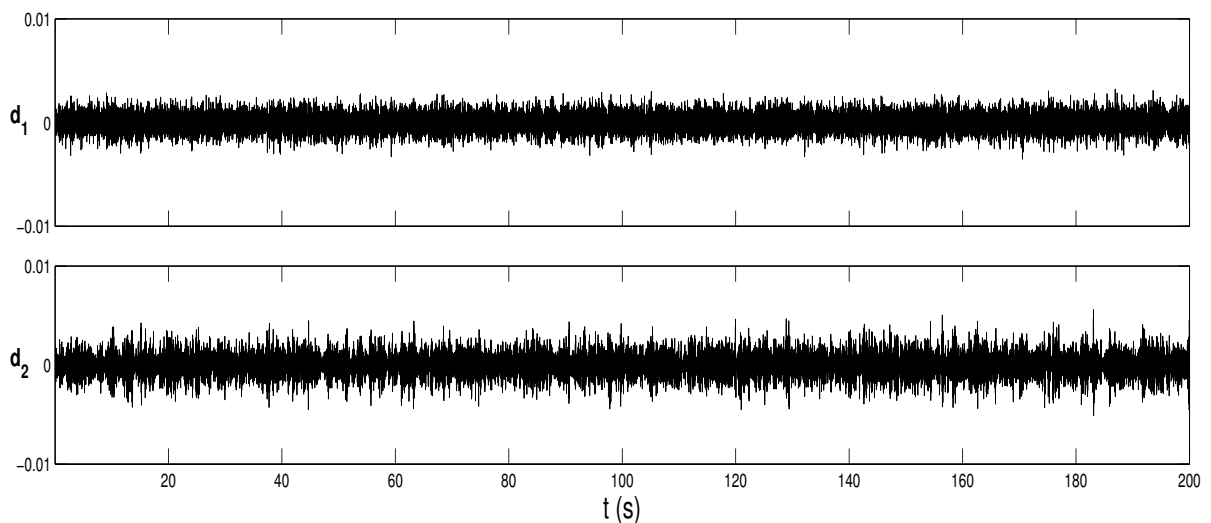
As decomposições do sinal r sem falhas mostrada na Figura 59, nos primeiro e segundo nível, utilizando a wavelet $\alpha_{p=1} = \{-0.3033, 0.2937, -0.7871, 1.5821\}$ com um momento nulo, $\alpha_{p=2} = \{-0.3033, 0.2937, 0.0545, 0.7405\}$ com dois momentos nulos e $\alpha_{p=3} = \{-0.3033, -0.8243, 1.6308, 0.2822\}$ com três momentos nulos, podem ser vistas nas figuras 60, 61 e 62.

Figura 60 – Decomposição do sinal sem falhas usando $\alpha_{p=1}$, nos dois primeiros níveis

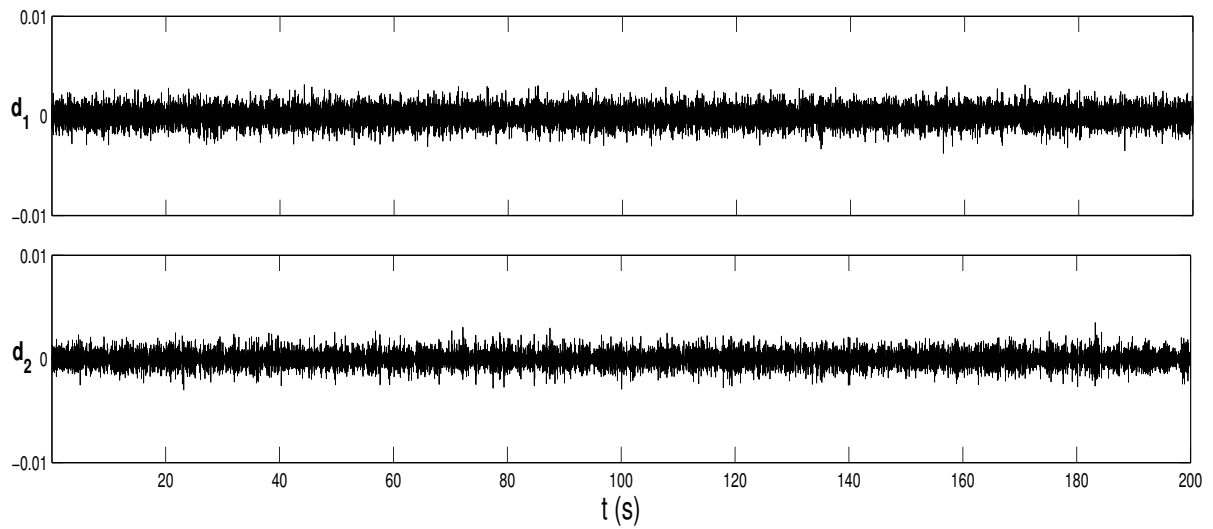


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 61 – Decomposição do sinal sem falhas usando $\alpha_{p=2}$, nos dois primeiros níveis



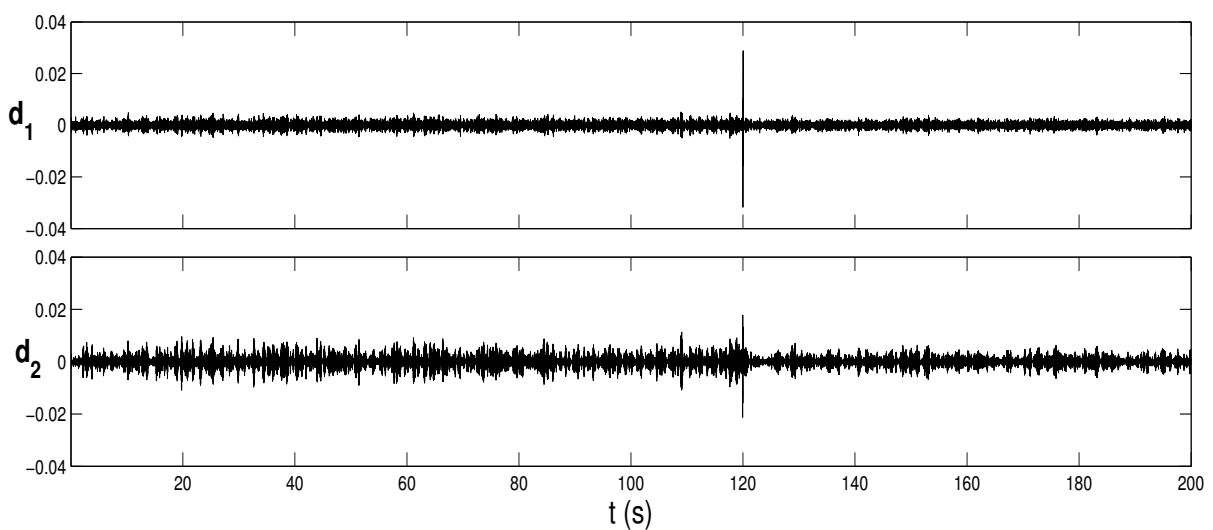
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 62 – Decomposição do sinal sem falhas usando $\alpha_{p=3}$, nos dois primeiros níveis

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nota-se diferenças nas figuras 60, 61 e 62, pois as mesmas foram decompostas utilizando diferentes filtros, todavia elas não indicam a presença de falhas, pois o sinal foi obtido em condições normais de operação.

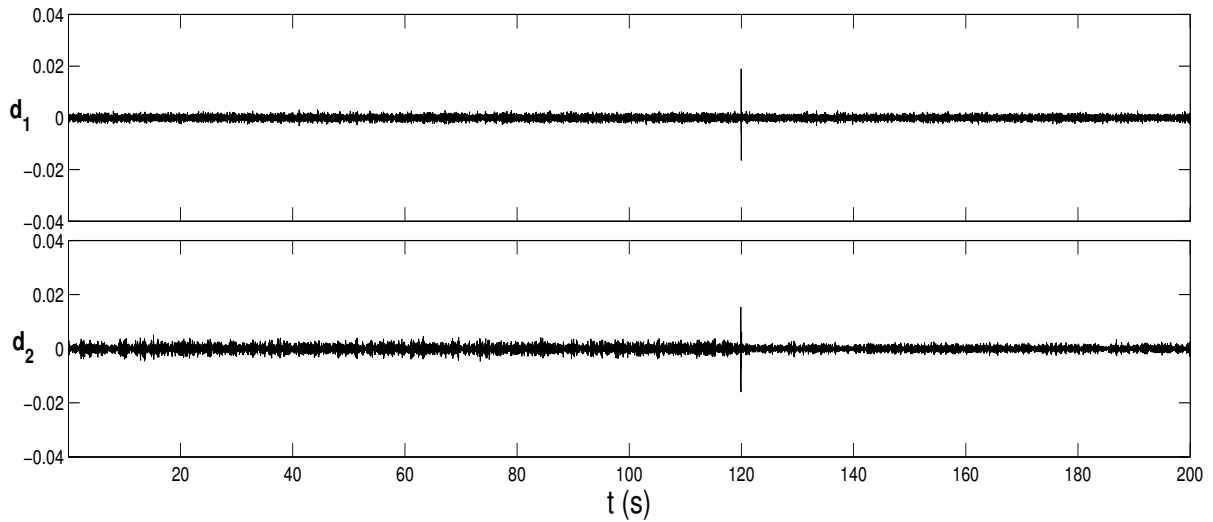
A seguir o mesmo procedimento é aplicado para o caso em que o sinal tem uma redução de 50% no ganho do sensor da taxa do girômetro responsável pela medição da taxa de guinada r . A falha ocorre em $t = 120s$ e a decomposição nos dois primeiros níveis com $\alpha_{p=1}$ é mostrada na Figura 63.

Figura 63 – Decomposição do sinal com redução de 50% usando $\alpha_{p=1}$, nos dois primeiros níveis

Fonte: Elaboração do próprio autor.

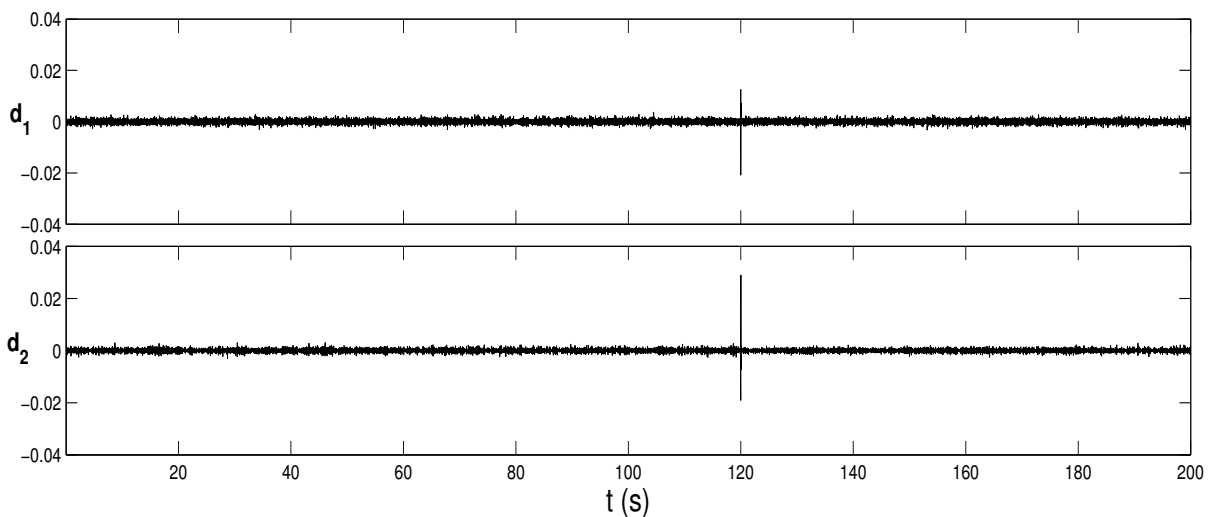
O mesmo sinal com uma redução de ganho de 50% a partir de $t = 120s$ é analisado com wavelets mais regulares. Na Figura 64 tem-se a decomposição nos dois primeiros níveis com $\alpha_{p=2}$ e na Figura 65 a decomposição nos dois primeiros níveis com $\alpha_{p=3}$.

Figura 64 – Decomposição do sinal com redução de 50% usando $\alpha_{p=2}$, nos dois primeiros níveis



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 65 – Decomposição do sinal com redução de 50% usando $\alpha_{p=3}$, nos dois primeiros níveis

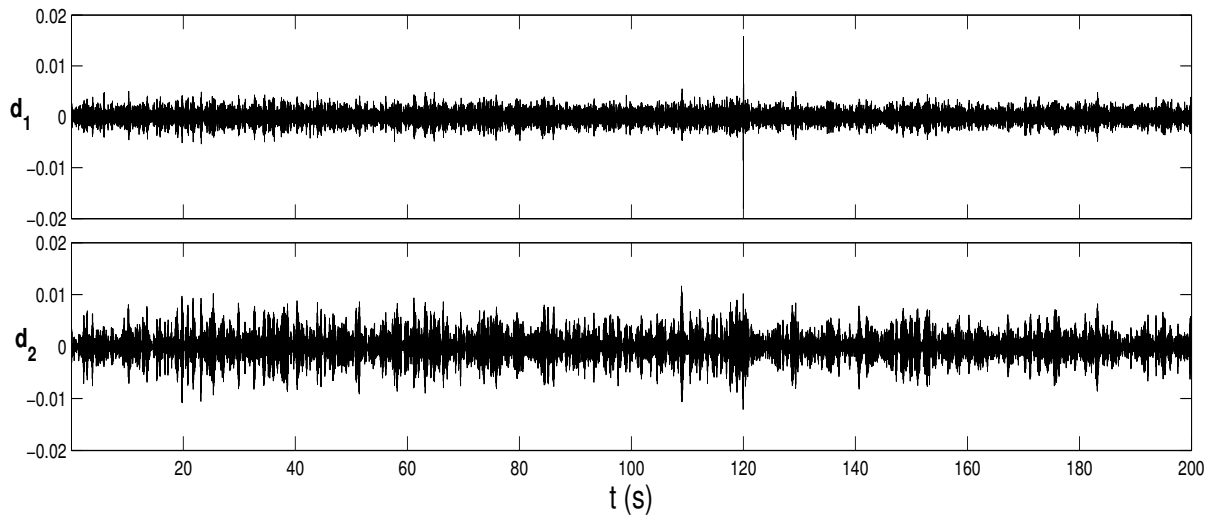


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Praticamente não há diferenças visuais quando se compara as figuras 63, 64 e 65. Para as três wavelets houve a identificação da falha. Porém, o aumento da regularidade causa maior eliminação do ruído presente no sinal.

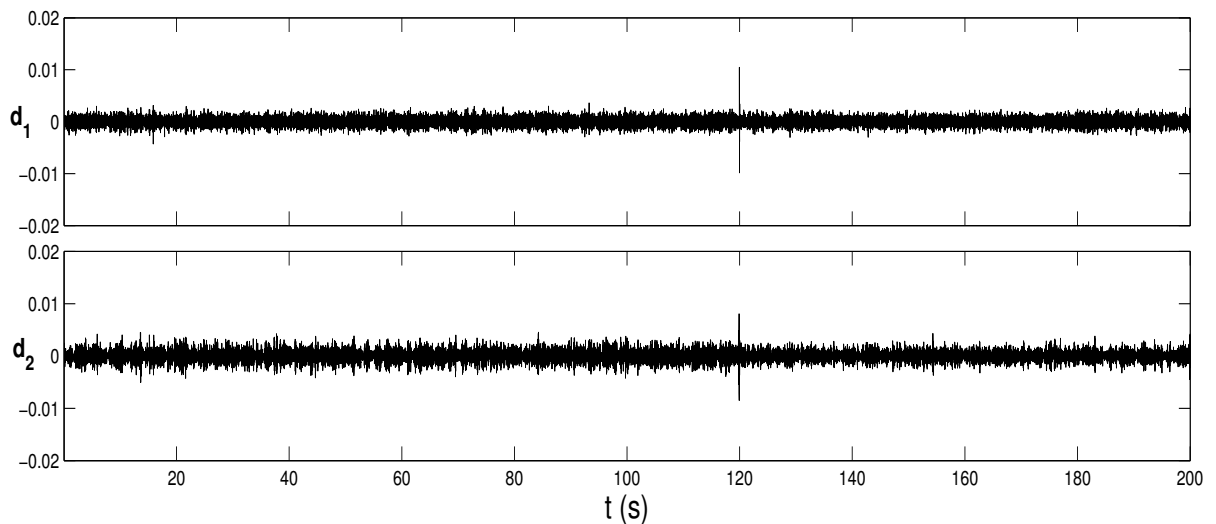
O mesmo procedimento é aplicado para o caso em que o sinal tem uma redução de 30% no ganho do sensor da taxa do girômetro responsável pela medição da taxa de guinada r . A decomposição no primeiro e segundo nível é apresentada para $\alpha_{p=1}$, $\alpha_{p=2}$ e $\alpha_{p=3}$, nas figuras 66, 67 e 68, respectivamente.

Figura 66 – Decomposição do sinal com redução de 30% usando $\alpha_{p=1}$, nos dois primeiros níveis



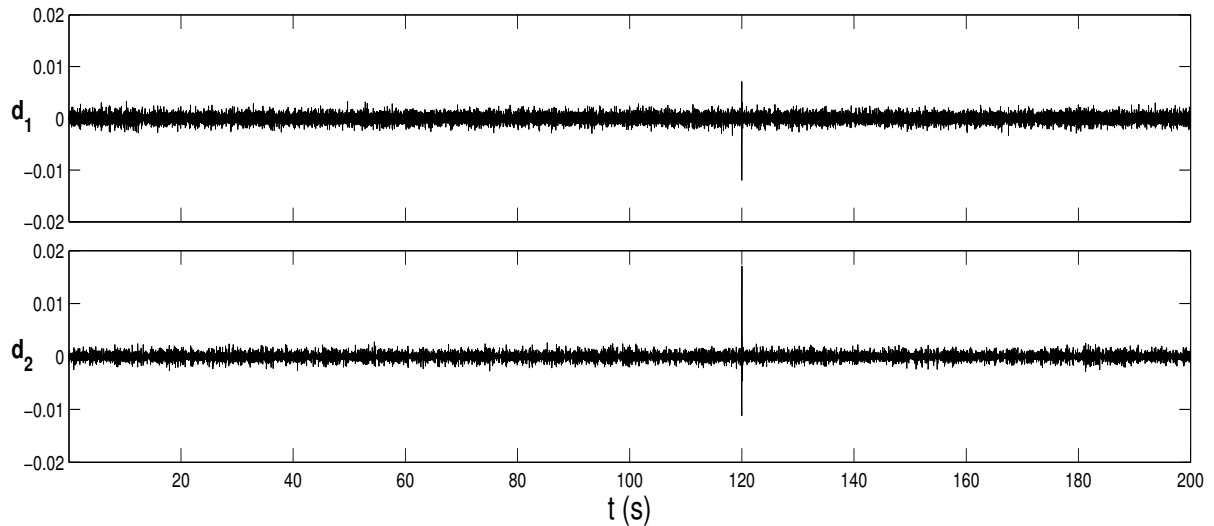
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 67 – Decomposição do sinal com redução de 30% usando $\alpha_{p=2}$, nos dois primeiros níveis



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 68 – Decomposição do sinal com redução de 30% usando $\alpha_{p=3}$, nos dois primeiros níveis



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Novamente, percebe-se que quanto maior a regularidade, ou seja, o número de momentos nulos da wavelet usada para análise do sinal, melhor é a eliminação do ruído, causando uma melhor ênfase da falha.

Este mesmo exemplo foi explorado por Paiva, Galvão e Yoneyama (2008) para detectar uma redução de ganho de 50% em $t = 100s$ no sinal r e por Paiva, Galvão e Rodrigues (2008) para detectar uma redução de ganho de 70% e 30% em $t = 100s$ no sinal r seguindo outras metodologias.

O sinal r foi analisado sem falhas, também com uma redução de ganho de 50% e com uma redução de ganho de 30%, ambas as falhas em $t = 120s$. Conforme esperado, no caso em que não há falhas nada foi identificado e as falhas nos outros dois casos foram bem detectadas. Em ambos os casos pode-se notar que conforme usa-se wavelets mais regulares melhor é evidenciada a falha.

Conforme fora explicitado na seção 4.4, as wavelets usadas nestes exemplos têm o comprimento do filtro igual a oito ($N = 4$). Assim, observa-se que o suporte da onda não aumentou para que se aumentasse a regularidade, o que evidencia que não foi preciso perder informações no domínio temporal.

Conclui-se que a metodologia apresentada é eficaz na localização de uma mudança em um sinal. Esta eficácia aumenta na medida em que aumenta o número de momentos nulos da wavelet utilizada, e para que isso se dê, não é necessário que ocorra aumento de tamanho do suporte da função wavelet. Duas falhas foram analisadas e, em ambos os

casos, os resultados foram eficientes.

Independente do número de momentos nulos da wavelet usada, a falha foi identificada. Porém, para o caso de três momentos nulos, houve uma maior redução de ruído, proporcionando uma melhor ênfase da falha.

Todos resultados ilustrados aqui podem ser verificados utilizando os dados apresentados, observando o Apêndice E e usando o Matlab[®].

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi estudar a regularidade de funções wavelets, obedecendo a parametrização angular de Sherlock & Monro, que garante a ortonormalidade do banco de filtros. A intenção de estudar sobre momentos nulos e regularidade wavelet se deve ao fato de propriedades como regularidade, suavidade e suporte compacto, serem determinantes na escolha da função wavelet.

Quando se trabalha com funções que tenham um suporte maior, elas aumentam a resolução em frequência, porém, diminuem a resolução temporal do sinal transformado.

Conclui-se que é interessante escolher uma função wavelet cujo suporte não comprometa nenhuma das resoluções. Como fora mencionado (seção 2.6), quanto maior o número de momentos nulos de uma wavelet mais suave ela é. E quanto maior a sua suavidade, maior a probabilidade de reconstrução perfeita do sinal decomposto pela transformada wavelet.

A formulação de Sherlock & Monro consiste em descrever o espaço das wavelets ortonormais por um conjunto de parâmetros para os quais a recorrência simples gera os coeficientes para todos os filtros FIR ortonormais de comprimento arbitrário e de reconstrução perfeita. Este trabalho foi estendido por Paiva et al. (2009), de forma que um e dois momentos nulos possam ser levados em conta pela parametrização, constituindo assim um aspecto importante em relação a suavidade da wavelet.

Neste trabalho, na seção 3.3, obteve-se restrições que asseguram três momentos nulos, podendo, assim, estender-se aos dois trabalhos anteriores de forma que wavelets mais suaves possam a ser testadas para análise de um sinal. Desta forma aumenta-se a probabilidade da wavelet permitir uma reconstrução perfeita do mesmo.

Além de obter resultados que asseguram três momentos nulos, foram discutidos os resultados anteriores para um e dois momentos. Além disso, alguns cálculos que estão omissos nas referências anteriores estão dispostos neste trabalho (capítulo 3). Visando construir um texto de leitura agradável e de fácil compreensão, foi feita a inclusão de algumas demonstrações nos apêndices, inseridas separadamente por questões didáticas.

Uma aplicação com a extensão feita neste trabalho é interessante para concluir a aplicabilidade do método. Partindo desse pressuposto, pode-se considerar a detecção de falhas em sinais uma maneira de testar a formulação e os resultados obtidos neste trabalho.

Os exemplos apresentados (capítulo 4) mostraram que a formulação obtida para três momentos nulos gera wavelets que obedecem as propriedades de regularidade e suavidade. Além disso, estas wavelets foram capazes de detectar singularidades nos sinais apresentados, assim como as wavelets com um ou dois momentos nulos. Porém no caso de

três momentos nulos houve uma maior redução do ruído presente no sinal, proporcionando uma maior evidencia da falha.

Cabe ressaltar que, através dos exemplos e comparações (capítulo 4), percebe-se que, além de detectar as singularidades com precisão, estas wavelets não perdem tanto em informação temporal quando se procura aumentar a regularidade. Isto porque aumentou-se o número de momentos nulos sem que fosse necessário aumentar o comprimento do banco de filtros.

Este trabalho evidencia a importância da formulação de Sherlock & Monro quando expandida para, pelo menos, três momentos nulos. Inicialmente esta formulação não garantia boa suavidade da função, porém, isto muda com as extensões de Paiva et al. (2009) e deste trabalho, conforme os resultados obtidos no capítulo 4.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos em relação as aplicações desta extensão à formulação feita neste trabalho. O estudo de aplicações também pode ser feito de forma mais geral, sem restringir-se apenas ao estudo de sinais unidimensionais.

Contribuições matemáticas também podem ser apresentadas futuramente a este trabalho, entre elas, a obtenção de restrições que assegurem mais momentos nulos ou até mesmo uma possível generalização.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, J. B.; RABINER, L. R. A unified approach to short-time fourier analysis and synthesis. *Proceedings of IEEE*, Piscataway, v. 65, n. 11, p. 1558–1564, nov. 1977.
- BLATTER, C. *Wavelets: a primer*. Natick: AK Peters, 1998.
- BRYSON, A. *Control of spacecraft and aircraft*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- BURRUS, C.; GOPINATH, R.; GUO, H. *Introduction to wavelets and wavelet transforms: a primer*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.
- CALDERÓN, A. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Mathematica*, Warszawa, v. 24, n. 2, p. 113–190, 1964.
- CROISIER, A.; ESTEBAN, D.; GALAND, C. Perfect channel splitting by use of interpolation/decimation/tree decomposition techniques. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION SYSTEMS, 1976, Patras, Greece. *Proceedings...* Patras: [s.n.], 1976. p. 443–446.
- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Hoboken, v. 41, n. 7, p. 909–996, out. 1988.
- DAUBECHIES, I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Piscataway, v. 36, n. 5, p. 961–1005, set. 1990.
- DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets ii: variations on a theme. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Philadelphia, v. 24, n. 2, p. 499–519, mar. 1993.
- FRANKLIN, P. A set of continuous orthogonal functions. *Mathematische Annalen*, Heidelberg, v. 100, p. 522–529, 1928.
- FROESE, T.; HADJILOUCAS, S.; GALVÃO, R. K.; BECERRA, V. M.; COELHO, C. J. Comparison of extrasystolic ecg signal classifiers using discrete wavelet transforms. *Journal Pattern Recognition Letters*, Amsterdam, v. 27, n. 5, p. 393–407, abr. 2006.
- GALVÃO, R. K. H.; JOSÉ, G. E.; DANTAS FILHO, H. A.; ARAÚJO, M. C. U.; SILVA, E. C. da; PAIVA, H. M.; SALDANHA, T. C. B.; SOUZA, Ê. S. O. N. de. Optimal wavelet filter construction using x and y data. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, Amsterdam, v. 70, p. 110–119, 2004.
- GOMES, J.; VELHO, L. *From fourier analysis to wavelets: First latin american congress of mathematicians*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.
- GOMES, J.; VELHO, L.; GOLDENSTEIN, S. *Wavelets: teoria, software e aplicações*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.

- HAAR, A. Zur theorie der orthognalen funktionen-systeme. *Mathematische Annalen*, Heidelberg, v. 69, p. 331–371, 1910.
- HADJILOUCAS, S.; GALVÃO, R.; BECERRA, V.; BOWEN, J.; MARTINI, R.; BRUCHERSEIFER, M.; PELLEMANS, H.; BOLIVAR, P.; KURZ, H.; CHAMBERLAIN, J. Comparison of subspace and arx models of a waveguide's terahertz transient response after optimal wavelet filtering. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Piscataway, v. 52, n. 10, p. 2409–2419, oct. 2004.
- HAYES, M. H. *Schaum's outline of digital signal processing*. New York: McGraw-Hill, 1999.
- HELLER, P. N. Rank m wavelets with n vanishing moments. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Philadelphia, v. 16, n. 2, p. 502–519, abr. 1995.
- HERNANDEZ, E.; WEISS, G. *A first course on wavelets*. Boca Raton: CRC Press, 1996.
- LITTLEWOOD, J.; PALEY, R. Theorems on fourier series and power series. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford, v. 42, p. 52–89, 1937.
- MALLAT, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Piscataway, v. 11, n. 7, p. 674–693, jul 1989.
- MALLAT, S. *A wavelet tour of signal processing*. San Diego: Academic Press, 1998.
- MEYER, Y. *Wavelets: algorithms and applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.
- MINTZER, F. Filters for distortion-free two-band multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Piscataway, v. 33, n. 3, p. 626–630, 1985.
- MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, J.-M. *Wavelet toolbox: user's guide*. Natick: Mat Works, 2004.
- MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, J.-M. *Wavelets and their applications*. London: ISTE, 2007.
- NIEVERGELT, Y. *Wavelets made easy*. Boston: Birkhäuser, 1999.
- OLIVEIRA, H. M. de. *Análise de sinais para engenheiros: uma abordagem via wavelets*. Rio de Janeiro: Brasport, 2007.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Digital signal processing*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1975.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. *Discrete-time signal processing*. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.
- PAIVA, H.; GALVÃO, R.; YONEYAMA, T. A wavelet band-limiting filter approach for fault detection in dynamic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, Piscataway, v. 38, n. 3, p. 680–687, 2008.

- PAIVA, H.; MARTINS, M.; GALVÃO, R.; PAIVA, J. On the space of orthonormal wavelets: additional constraints to ensure two vanishing moments. *IEEE Signal Processing Letters*, Piscataway, v. 16, n. 2, p. 101–104, fev. 2009.
- PAIVA, H. M. *Detecção de falhas em sistemas dinâmicos empregando Transformadas Wavelet adaptativas*. 2003. 91 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica e Computação) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2003.
- PAIVA, H. M. *Wavelet-packet identification of dynamic systems in frequency subbands*. Tese (Doutorado em Engenharia Eletrônica e Computação) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2005.
- PAIVA, H. M.; GALVÃO, R. K. H.; RODRIGUES, L. Redundância analítica multivariável em sub-bandas de frequência utilizando decomposição wavelet. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 17., 2008, Juiz de Fora. *Anais...* Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, 2008.
- PAIVA, J. P. L. M.; KELENCZ, C. A.; PAIVA, H. M.; GALVÃO, R. K. H.; MAGINI, M. Adaptive wavelet emg compression based on local optimization of filter banks. *Physiological Measurement*, Bristol, v. 29, n. 7, p. 843–856, 2008.
- PROAKIS, J.; MANOLAKIS, D. *Digital signal processing: principles, algorithms and applications*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
- RIOUL, O.; VETTERLI, M. Wavelets and signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, Piscataway, v. 8, n. 4, p. 14–38, out. 1991.
- SHERLOCK, B.; MONRO, D. On the space of orthonormal wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, v. 46, n. 6, p. 1716–1720, jun. 1998.
- SMITH, M.; BARNWELL, T. A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree-structured subband coders. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING – ICASSP, 1984, San Diego. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 1984. v. 9, p. 421–424.
- STEFFEN, P.; HELLER, P.; GOPINATH, R.; BURRUS, C. Theory of regular m-band wavelet bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, v. 41, n. 12, p. 3497–3511, 1993.
- STRANG, G.; NGUYEN, T. *Wavelets and filter banks*. Wellesley: Cambridge Press, 1996.
- TAO, J.; FENG, S.; YOU, H.; CHANGWEN, Q.; RONGJIAN, Q. Optimal wavelets vanishing moments for singular signal detection. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRONIC MEASUREMENT AND INSTRUMENTS, 8., 2007, Harbin. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 2007. p. 3.782–3.786.
- TASWELL, C. *Correction for the sherlock-monro algorithm for generating the space of real orthonormal wavelets*. Stanford: Computational Toolsmiths, 1998. 3 p. (Technical Report CT-1998-05), 1998.
- TIAN, J.; WELLS, R. O. Vanishing moments and biorthogonal wavelet systems. In: MCWHIRTER, J. G.; PROUDLER, I. K. (Eds.). *Mathematics in signal processing IV*. Oxford: Oxford University Press, 1996. (Institute of Mathematics and Its Applications Conference Series), 1996.

VAIDYANATHAN, P. Quadrature mirror filter banks, m-band extensions and perfect-reconstruction techniques. *IEEE ASSP Magazine*, Piscataway, v. 4, n. 3, p. 4–20, 1987.

VAIDYANATHAN, P. *Multirate systems and filter banks*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1993.

VELHO, L.; CARVALHO, P. C. *Image processing and wavelets*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.

VETTERLI, M. Splitting a signal into subsampled channels allowing perfect reconstruction. In: IASTED CONFERENCE ON APPLIED SIGNAL PROCESSING AND DIGITAL FILTERING, 1985, Paris. *Proceedings...* Paris: IASTED, 1985.

VETTERLI, M. Filter banks allowing perfect reconstruction. *Signal Processing*, Amsterdam, v. 10, n. 3, p. 219 – 244, 1986.

VETTERLI, M.; KOVAČEVIĆ, J. *Wavelets and subband coding*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1995.

**APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO DA VALIDADE DE (17) E (18)
PARA (16)**

Proposição 1 *A parametrização (16) satisfaz as condições de ortonormalidade, (STRANG; NGUYEN, 1996),*

$$\sum_{i=0}^{2N-1} [h_i^{(N)}]^2 = 1, \quad N \geq 1, \quad (66)$$

$$\sum_{i=0}^{2N-1-2m} h_i^{(N)} h_{i+2m}^{(N)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad N \geq 2. \quad (67)$$

Demonstração: Demonstrando (66):

Para $N = 1$ (66) pode ser verificada de imediato a partir de (16)

$$\sum_{i=0}^1 [h_i^{(1)}]^2 = [h_0^{(1)}]^2 + [h_1^{(1)}]^2 = \cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 = 1$$

Tese de indução:

Se $\sum_{i=0}^{2N-1} [h_i^{(N)}]^2 = 1$ demonstrar que $\sum_{i=0}^{2N+1} [h_i^{(N+1)}]^2 = 1$.

De (16) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2N+1} [h_i^{(N+1)}]^2 &= [\cos \alpha_N h_0^{(N)}]^2 + \sum_{i=1}^{N-1} [\cos \alpha_N h_{2i}^{(N)} - \sin \alpha_N h_{2i-1}^{(N)}]^2 + [\sin \alpha_N h_{2N-1}^{(N)}]^2 + \\ &\quad [\sin \alpha_N h_0^{(N)}]^2 + \sum_{i=1}^{N-1} [\sin \alpha_N h_{2i}^{(N)} + \cos \alpha_N h_{2i-1}^{(N)}]^2 + [\cos \alpha_N h_{2N-1}^{(N)}]^2 \\ &= (\sin^2 \alpha_N + \cos^2 \alpha_N) [h_0^{(N)}]^2 + (\sin^2 \alpha_N + \cos^2 \alpha_N) [h_{2N-1}^{(N)}]^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \cos^2 \alpha_N [h_{2i}^{(N)}]^2 - 2 \sin \alpha_N \cos \alpha_N h_{2i}^{(N)} h_{2i-1}^{(N)} + \sin^2 \alpha_N [h_{2i-1}^{(N)}]^2 + \right. \\ &\quad \left. \sin^2 \alpha_N [h_{2i}^{(N)}]^2 + 2 \sin \alpha_N \cos \alpha_N h_{2i}^{(N)} h_{2i-1}^{(N)} + \cos^2 \alpha_N [h_{2i-1}^{(N)}]^2 \right\} \\ &= [h_0^{(N)}]^2 + [h_{2N-1}^{(N)}]^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (\sin^2 \alpha_N + \cos^2 \alpha_N) [h_{2i}^{(N)}]^2 + (\sin^2 \alpha_N + \cos^2 \alpha_N) [h_{2i-1}^{(N)}]^2 \right\} \\ &= [h_0^{(N)}]^2 + [h_{2N-1}^{(N)}]^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ [h_{2i}^{(N)}]^2 + [h_{2i-1}^{(N)}]^2 \right\} \\ &= [h_0^{(N)}]^2 + [h_{2N-1}^{(N)}]^2 + \sum_{i=1}^{2N-2} [h_i^{(N)}]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2N-1} [h_i^{(N)}]^2 = 1 \end{aligned}$$

então $\sum_{i=0}^{2N+1} [h_i^{(N+1)}]^2 = 1$ conforme se queria demonstrar.

Demonstrando (67):

Para $N = 2$ (67) pode imediatamente ser verificada a partir de (16)

$$\sum_{i=0}^1 h_i^{(2)} h_{i+2}^{(2)} = h_0^{(2)} h_2^{(2)} + h_1^{(2)} h_3^{(2)} = (\cos \alpha_2 \cos \alpha_1)(-\sin \alpha_2 \sin \alpha_1) + (\sin \alpha_2 \cos \alpha_1)(\cos \alpha_2 \sin \alpha_1) = 0$$

Tese de indução:

Se

$$\sum_{i=0}^{2N-1-2m} h_i^{(N)} h_{i+2m}^{(N)} = 0 \quad (68)$$

demonstrar que

$$\sum_{i=0}^{2N+1-2m} h_i^{(N+1)} h_{i+2m}^{(N+1)} = 0 \quad (69)$$

para $N \geq 2$ $N \in \mathbb{Z}$.

A demonstração será feita em três momentos:

a) $m = N$:

A equação (69) pode ser escrita da forma

$$\sum_{i=0}^1 h_i^{N+1} h_{i+2N}^{N+1} = h_0^{(N+1)} h_{2N}^{(N+1)} + h_1^{(N+1)} h_{2N+1}^{(N+1)}. \quad (70)$$

Substituindo (16) em (70) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 h_i^{N+1} h_{i+2N}^{N+1} &= (\cos(\alpha_N) h_0^{(N)}) (-\sin(\alpha_N) h_{2N-1}^{(N)}) + (\sin(\alpha_N) h_0^{(N)}) (\cos(\alpha_N) h_{2N-1}^{(N)}) \\ &= (-\sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N) h_0^{(N)} h_{2N-1}^{(N)}) + (\sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N) h_0^{(N)} h_{2N-1}^{(N)}) = 0 \end{aligned}$$

conforme se queria demonstrar.

b) $m = N - 1$:

Neste caso a equação (69) pode ser escrita da forma

$$\sum_{i=0}^3 h_i^{(N+1)} h_{i+2N-2}^{(N+1)} = h_0^{(N+1)} h_{2N-2}^{(N+1)} + h_1^{(N+1)} h_{2N-1}^{(N+1)} + h_2^{(N+1)} h_{2N}^{(N+1)} + h_3^{(N+1)} h_{2N+1}^{(N+1)} \quad (71)$$

Substituindo (16) em (71) obtém-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^3 h_i^{(N+1)} h_{i+2N-2}^{(N+1)} &= (\cos(\alpha_N) h_0^{(N)}) (\cos(\alpha_N) h_{2N-2}^{(N)} - \sin(\alpha_N) h_{2N-3}^{(N)}) + (\sin(\alpha_N) h_0^{(N)}) \\
 &\quad (\sin(\alpha_N) h_{2N-2}^{(N)} + \cos(\alpha_N) h_{2N-3}^{(N)}) + (\cos(\alpha_N) h_2^{(N)} - \sin(\alpha_N) h_1^{(N)}) \\
 &\quad (-\sin(\alpha_N) h_{2N-1}^{(N)}) + (\sin(\alpha_N) h_2^{(N)} + \cos(\alpha_N) h_1^{(N)}) (\cos(\alpha_N) h_{2N-1}^{(N)}) \\
 &= \cos^2(\alpha_N) h_0^{(N)} h_{2N-2}^{(N)} - \sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N) h_0^{(N)} h_{2N-3}^{(N)} + \sin^2(\alpha_N) h_0^{(N)} h_{2N-2}^{(N)} + \\
 &\quad \sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N) h_0^{(N)} h_{2N-3}^{(N)} - \cos(\alpha_N) \sin(\alpha_N) h_2^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} + \\
 &\quad \sin^2(\alpha_N) h_1^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} + \cos(\alpha_N) \sin(\alpha_N) h_2^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} + \cos^2(\alpha_N) h_1^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} \\
 &= (\cos^2(\alpha_N) + \sin^2(\alpha_N)) h_0^{(N)} h_{2N-2}^{(N)} + (\sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N) - \sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N)) \\
 &\quad h_0^{(N)} h_{2N-3}^{(N)} + (\cos^2(\alpha_N) + \sin^2(\alpha_N)) h_1^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} + \\
 &\quad (\sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N) - \sin(\alpha_N) \cos(\alpha_N)) h_2^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} \\
 &= h_0^{(N)} h_{2N-2}^{(N)} + h_1^{(N)} h_{2N-1}^{(N)} = \sum_{i=0}^1 h_i^{(N)} h_{i+2N-2}^{(N)} \tag{72}
 \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução (68), no caso específico em que $m = N-1$ $\sum_{i=0}^1 h_i^{(N)} h_{i+2N-2}^{(N)} = 0$, logo

$$\sum_{i=0}^3 h_i^{(N+1)} h_{i+2N-2}^{(N+1)} = \sum_{i=0}^1 h_i^{(N)} h_{i+2N-2}^{(N)} = 0, \tag{73}$$

conforme se queria demonstrar.

c) $0 < m < N-1$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{2N+1-2m} h_i^{(N+1)} h_{i+2m}^{(N+1)} &= h_0^{(N+1)} h_{2m}^{(N+1)} + h_1^{(N+1)} h_{1+2m}^{(N+1)} + \left[\sum_{i=2}^{2N-1-2m} h_i^{(N+1)} h_{i+2m}^{(N+1)} \right] + \\
 &\quad h_{2N-2m}^{(N+1)} h_{2N}^{(N+1)} + h_{2N+1-2m}^{(N+1)} h_{2N+1}^{(N+1)} \\
 &= h_0^{(N+1)} h_{2m}^{(N+1)} + h_1^{(N+1)} h_{1+2m}^{(N+1)} + \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[h_{2i}^{(N+1)} h_{2i+2m}^{(N+1)} + h_{2i+1}^{(N+1)} h_{2i+1+2m}^{(N+1)} \right] + \\
 &\quad h_{2N-2m}^{(N+1)} h_{2N}^{(N+1)} + h_{2N+1-2m}^{(N+1)} h_{2N+1}^{(N+1)} \\
 &= h_0^{(N+1)} h_{2m}^{(N+1)} + \left[\sum_{i=1}^{N-m-1} h_{2i}^{(N+1)} h_{2i+2m}^{(N+1)} \right] + h_{2N-2m}^{(N+1)} h_{2N}^{(N+1)} + \\
 &\quad h_1^{(N+1)} h_{1+2m}^{(N+1)} + \left[\sum_{i=1}^{N-m-1} h_{2i+1}^{(N+1)} h_{2i+1+2m}^{(N+1)} \right] + h_{2N+1-2m}^{(N+1)} h_{2N+1}^{(N+1)}. \tag{74}
 \end{aligned}$$

Substituindo (16) em (74) vem

$$\sum_{i=0}^{2N+1-2m} h_i^{(N+1)} h_{i+2m}^{(N+1)} = (\cos(\alpha_N) h_0^{(N)}) (\cos(\alpha_N) h_{2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N) h_{2m-1}^{(N)}) +$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[(\cos(\alpha_N)h_{2i}^{(N)} - \sin(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)})(\cos(\alpha_N)h_{2i+2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N)h_{2i-1+2m}^{(N)}) \right] \\
 & + (\cos(\alpha_N)h_{2N-2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N)h_{2N-2m-1}^{(N)})(-\sin(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}) + \\
 & (\sin(\alpha_N)h_0^{(N)})(\sin(\alpha_N)h_{2m}^{(N)} + \cos(\alpha_N)h_{2m-1}^{(N)} + \\
 & \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[(\sin(\alpha_N)h_{2i}^{(N)} + \cos(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)})(\sin(\alpha_N)h_{2i+2m}^{(N)} + \cos(\alpha_N)h_{2i-1+2m}^{(N)}) \right] \\
 & + (\sin(\alpha_N)h_{2N-2m}^{(N)} + \cos(\alpha_N)h_{2N-2m-1}^{(N)})(\cos(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}) \\
 = & \cos^2(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m-1}^{(N)} + \\
 & \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[\cos^2(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} - \right. \\
 & \left. \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \sin^2(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} \right] - \\
 & \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m}^{(N)} + \sin^2(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} + \\
 & \sin^2(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} + \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m-1}^{(N)} + \\
 & \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[\sin^2(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} + \right. \\
 & \left. \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \cos^2(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} \right] - \\
 & \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m}^{(N)} + \cos^2(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} \\
 = & \cos^2(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m-1}^{(N)} - \\
 & \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m}^{(N)} + \sin^2(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} + \\
 & \sin^2(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} + \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_0^{(N)}h_{2m-1}^{(N)} + \\
 & \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m}^{(N)} + \cos^2(\alpha_N)h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} + \\
 & \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[\cos^2(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} - \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} - \right. \\
 & \left. \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \sin^2(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} + \right. \\
 & \left. \sin^2(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m-1}^{(N)} + \right. \\
 & \left. \sin(\alpha_N)\cos(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \cos^2(\alpha_N)h_{2i-1}^{(N)}h_{2i+2m-1}^{(N)} \right] \\
 = & (\cos^2(\alpha_N) + \sin^2(\alpha_N))h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} + (\cos^2(\alpha_N) + \sin^2(\alpha_N))h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} \\
 & + \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[(\cos^2(\alpha_N) + \sin^2(\alpha_N))h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + \right. \\
 & \left. (\cos^2(\alpha_N) + \sin^2(\alpha_N))h_{2i-1}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} \right] \\
 = & h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} + h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} + \sum_{i=1}^{N-m-1} \left[h_{2i}^{(N)}h_{2i+2m}^{(N)} + h_{2i-1}^{(N)}h_{2i-1+2m}^{(N)} \right] \\
 = & h_0^{(N)}h_{2m}^{(N)} + h_{2N-1}^{(N)}h_{2N-2m-1}^{(N)} + \sum_{i=1}^{2N-2m-2} h_i^{(N)}h_{i+2m}^{(N)} \\
 = & \sum_{i=1}^{2N-2m-1} h_i^{(N)}h_{i+2m}^{(N)} \tag{75}
 \end{aligned}$$

A partir de (75) e (68) decorre de forma direta que

$$\sum_{i=0}^{2N+1-2m} h_i^{(N+1)} h_{i+2m}^{(N+1)} = 0, \quad (76)$$

conforme se queria demonstrar.

■

APÊNDICE B - DEMONSTRAÇÃO DE (27)

Proposição 2 *Seja a equação*

$$G^{(N)}(z)|_{z=1} = \sum_{i=0}^{2N-1} (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)} \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (77)$$

e

$$\begin{aligned} h_0^{(1)} &= \cos(\alpha_1) \\ h_1^{(1)} &= \text{sen}(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_0^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_0^{(N)} \\ h_{2i}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N}^{(N+1)} &= -\text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (78)$$

$$\begin{aligned} h_1^{(N+1)} &= \text{sen}(\alpha_{N+1}) h_0^{(N)} \\ h_{2i+1}^{(N+1)} &= \text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} + \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N+1}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned}$$

então

$$G^{(N)}(z)|_{z=1} = \cos \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i - \text{sen} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (79)$$

Demonstração: Por indução:

Para $N = 1$ segue que

$$\sum_{i=0}^1 (-1)^{i+1} h_{1-i}^{(1)} = -h_1^{(1)} + h_0^{(1)} = \cos \sum_{i=0}^0 \alpha_i - \text{sen} \sum_{i=0}^0 \alpha_i.$$

Assumindo a hipótese de indução

$$\sum_{i=0}^{2N-1} (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)} = \cos \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i - \text{sen} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (80)$$

mostrar que

$$\sum_{i=0}^{2N+1} (-1)^{i+1} h_{2N+1-i}^{(N+1)} = \cos \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i - \text{sen} \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i \quad i = 0, 1, \dots, 2N+1. \quad (81)$$

Então para $N > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2N+1} (-1)^{i+1} h_{2N+1-i}^{(N+1)} &= -h_{2N+1}^{(N+1)} + h_{2N}^{(N+1)} - h_{2N-1}^{(N+1)} + \dots + h_2^{(N+1)} - h_1^{(N+1)} + h_0^{(N+1)} \\ &= \text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} - \cos(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} + \sum_{i=1}^{N-1} \left[\cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N-1} \left[\text{sen}(\alpha_{N+1})h_{2i}^{(N)} + \text{cos}(\alpha_{N+1})h_{2i-1}^{(N)} \right] - \text{sen}(\alpha_{N+1})h_0^{(N)} + \text{cos}(\alpha_{N+1})h_0^{(N)} \\
 = & -(\text{sen}(\alpha_{N+1}) + \text{cos}(\alpha_{N+1}))h_{2N-1}^{(N)} + \sum_{i=1}^{N-1} \left[(\text{cos}(\alpha_{N+1})h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1})h_{2i-1}^{(N)}) - \right. \\
 & \left. (\text{sen}(\alpha_{N+1})h_{2i}^{(N)} + \text{cos}(\alpha_{N+1})h_{2i-1}^{(N)}) \right] + (\text{cos}(\alpha_{N+1}) - \text{sen}(\alpha_{N+1}))h_0^{(N)} \\
 = & -(\text{sen}(\alpha_{N+1}) + \text{cos}(\alpha_{N+1}))h_{2N-1}^{(N)} + \sum_{i=1}^{N-1} \left[(\text{cos}(\alpha_{N+1}) - \text{sen}(\alpha_{N+1}))h_{2i}^{(N)} + \right. \\
 & \left. (-\text{sen}(\alpha_{N+1}) - \text{cos}(\alpha_{N+1}))h_{2i-1}^{(N)} \right] + (\text{cos}(\alpha_{N+1}) - \text{sen}(\alpha_{N+1}))h_0^{(N)} \\
 = & -(\text{sen}(\alpha_{N+1}) + \text{cos}(\alpha_{N+1}))h_{2N-1}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} \left[(\text{cos}(\alpha_{N+1}) - \text{sen}(\alpha_{N+1}))h_{2i}^{(N)} \right] \\
 & - \sum_{i=0}^{N-2} \left[(\text{sen}(\alpha_{N+1}) + \text{cos}(\alpha_{N+1}))h_{2i+1}^{(N)} \right] \\
 = & \sum_{i=0}^{N-1} \left[(\text{cos}(\alpha_{N+1}) - \text{sen}(\alpha_{N+1}))h_{2i}^{(N)} \right] - \sum_{i=0}^{N-1} \left[(\text{sen}(\alpha_{N+1}) + \text{cos}(\alpha_{N+1}))h_{2i+1}^{(N)} \right] \\
 = & \text{cos}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i-1}^{(N)} - \\
 & \text{cos}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=1}^{N-1} h_{2i-1}^{(N)} \\
 = & \text{cos}(\alpha_{N+1}) \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} - \sum_{i=1}^{N-1} h_{2i-1}^{(N)} \right] - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} + \sum_{i=1}^{N-1} h_{2i-1}^{(N)} \right] \\
 = & \text{cos}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^{2N-1} h_{2N-1-i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^{2N-1} (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)}
 \end{aligned}$$

segue da hipótese de indução que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{2N+1} (-1)^{i+1} h_{2N+1-i}^{(N+1)} &= \text{cos}(\alpha_{N+1}) \left(\text{cos} \sum_{i=1}^N \alpha_i - \text{sen} \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \left(\text{cos} \sum_{i=1}^N \alpha_i + \text{sen} \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \\
 &= \left(\text{cos}(\alpha_{N+1}) \text{cos} \sum_{i=1}^N \alpha_i - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \text{sen} \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) - \\
 & \quad \left(\text{cos}(\alpha_{N+1}) \text{sen} \sum_{i=1}^N \alpha_i + \text{sen}(\alpha_{N+1}) \text{cos} \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \\
 &= \text{cos} \left(\alpha_{N+1} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) - \text{sen} \left(\alpha_{N+1} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \tag{82} \\
 &= \text{cos} \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i - \text{sen} \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i.
 \end{aligned}$$

Obs.: A igualdade (82) foi obtida usando as relações cosseno e seno da soma respectivamente. ■

APÊNDICE C - DEMONSTRAÇÃO DE (35) E (36)

Proposição 3 *Seja a equação*

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{2N-1} (-1)^{i+2} i h_{2N-1-i}^{(N)} \quad (83)$$

e

$$\begin{aligned} h_0^{(1)} &= \cos(\alpha_1) \\ h_1^{(1)} &= \sen(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_0^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_0^{(N)} \\ h_{2i}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \sen(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N}^{(N+1)} &= -\sen(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (84)$$

$$\begin{aligned} h_1^{(N+1)} &= \sen(\alpha_{N+1}) h_0^{(N)} \\ h_{2i+1}^{(N+1)} &= \sen(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} + \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N+1}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1}) h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned}$$

implicam em

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -N \cos \beta_N + (N-1) \sen \beta_N - \sum_{k=1}^{N-1} (\cos \beta_k + \sen \beta_k), \quad (85)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ \beta_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i. \end{array} \right. \quad (86)$$

Antes da prova da proposição 3 vamos apresentar dois lemas que serão úteis para demonstrá-la.

Lema 4 *Seja (84) então*

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} = \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \quad (87)$$

e

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} = \sen \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right]. \quad (88)$$

Demonstração:

A prova será por indução:

No caso em que $N = 1$, para (87) e (88), respectivamente tem-se:

$$h_0^{(1)} = \cos(\alpha_1),$$

$$h_1^{(1)} = \text{sen}(\alpha_1).$$

Demonstrar que se

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} = \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right], \quad (89)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i-1}^{(N)} = \text{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \quad (90)$$

então

$$\sum_{i=0}^{N+1} h_{2i}^{(N+1)} = \cos \left[\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right], \quad (91)$$

$$\sum_{i=0}^{N+1} h_{2i+1}^{(N+1)} = \text{sen} \left[\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right] \quad (92)$$

a) Demonstrar que a validade de (89) e (90) implica na validade de (91):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N+1} h_{2i}^{(N+1)} &= \sum_{i=0}^N \left[\cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] \\ &= \cos(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^N \left[h_{2i}^{(N)} \right] - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^N \left[h_{2i-1}^{(N)} \right] \\ &= \cos(\alpha_{N+1}) \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] - \text{sen}(\alpha_{N+1}) \text{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \\ &= \cos \left[\alpha_{N+1} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \right] = \cos \left[\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (93)$$

b) Demonstrar que a validade de (89) e (90) implica na validade de (92):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N+1} h_{2i+1}^{(N+1)} &= \sum_{i=0}^N \left[\text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} + \cos(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] \\ &= \text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^N \left[h_{2i}^{(N)} \right] + \cos(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^N \left[h_{2i-1}^{(N)} \right] \\ &= \text{sen}(\alpha_{N+1}) \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] + \cos(\alpha_{N+1}) \text{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] \\ &= \text{sen} \left[(\alpha_{N+1}) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \right] = \text{sen} \left[\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (94)$$

■

Lema 5 Considerando as equações de (84) seguem as expressões:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N)} - \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} \right] = \sum_{i=1}^{N-1} \cos \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i \right], \quad (95)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2+i}^{(N)} \right] = \sum_{i=1}^{N-1} \text{sen} \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i \right]. \quad (96)$$

Demonstração: Para $N = 1$ a verificação da validade de (95) e (96) é imediata.

Para $N > 1$ mostrar que se

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N)} - \sum_{i=k+1}^{N-1} h_{2i}^{(N)} \right] = \sum_{i=1}^{N-1} \cos \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i \right] \quad (97)$$

então

$$\sum_{i=1}^{N+1} \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N+1)} - \sum_{i=k+1}^{N+1} h_{2i}^{(N+1)} \right] = \sum_{i=1}^{N+1} \cos \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^{N+2} \alpha_i \right], \quad (98)$$

e se

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2+i}^{(N)} \right] = \sum_{i=1}^{N-1} \sen \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i \right] \quad (99)$$

então

$$\sum_{i=1}^{N+1} \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N+1)} + \sum_{i=0}^{N+1} h_{2+i}^{(N+1)} \right] = \sum_{i=1}^{N+1} \sen \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^{N+2} \alpha_i \right]. \quad (100)$$

Demonstrando que a validade de (97) implica na validade de (98):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N+1} \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N+1)} - \sum_{i=k+1}^{N+1} h_{2i}^{(N+1)} \right] &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[\sum_{i=0}^k \left[\cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \sen(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] - \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=k+1}^{N+1} \left[\cos(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} - \sen(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[\cos(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N)} - \sen(\alpha_{N+1}) \sum_{i=0}^k h_{2i-1}^{(N)} - \right. \\ &\quad \left. \cos(\alpha_{N+1}) \sum_{i=k+1}^{N+1} h_{2i}^{(N)} + \sen(\alpha_{N+1}) \sum_{i=k+1}^{N+1} h_{2i-1}^{(N)} \right]. \end{aligned}$$

Do lema 4 vem que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N+1} \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N+1)} - \sum_{i=k+1}^{N+1} h_{2i}^{(N+1)} \right] &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[\cos(\alpha_{N+1}) \cos \sum_{i=0}^k \alpha_i - \sen(\alpha_{N+1}) \sen \sum_{i=0}^k \alpha_i - \right. \\ &\quad \left. \cos(\alpha_{N+1}) \cos \sum_{i=k+1}^{N+1} \alpha_i + \sen(\alpha_{N+1}) \sen \sum_{i=k+1}^{N+1} \alpha_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[\cos \left(\alpha_{N+1} + \sum_{i=0}^k \alpha_i \right) - \cos \left(\alpha_{N+1} + \sum_{i=k+1}^{N+1} \alpha_i \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \cos \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^{N+2} \alpha_i \right]. \end{aligned}$$

Demonstrando que a validade de (99) implica na validade de (100):

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2+i}^{(N)} \right] &= \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\sum_{i=1}^k \left[\text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} + \text{cos}(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=k+1}^k \left[\text{sen}(\alpha_{N+1}) h_{2i}^{(N)} + \text{cos}(\alpha_{N+1}) h_{2i-1}^{(N)} \right] \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=1}^k h_{2i}^{(N)} - \text{cos}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=1}^k h_{2i-1}^{(N)} + \right. \\
 &\quad \left. \text{sen}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=k+1}^k h_{2i}^{(N)} + \text{cos}(\alpha_{N+1}) \sum_{i=k+1}^k h_{2i-1}^{(N)} \right].
 \end{aligned}$$

Do lema 4 vem que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2+i}^{(N)} \right] &= \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\text{sen}(\alpha_{N+1}) \text{cos} \sum_{i=0}^k \alpha_i - \text{cos}(\alpha_{N+1}) \text{sen} \sum_{i=0}^k \alpha_i + \right. \\
 &\quad \left. \text{sen}(\alpha_{N+1}) \text{cos} \sum_{i=k+1}^{N+1} \alpha_i + \text{cos}(\alpha_{N+1}) \text{sen} \sum_{i=k+1}^{N+1} \alpha_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{N+1} \left[-\text{sen} \left(\alpha_{N+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + \text{sen} \left(\alpha_{N+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{N+1} \text{sen} \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^{N+2} \alpha_i \right].
 \end{aligned}$$

■

Demonstração da proposição 3.

A equação (83) equivale a

$$\left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} = -h_{2N-2}^{(N)} + h_{2N-3}^{(N)} - h_{2N-4}^{(N)} + \cdots + (2N-2)h_1^{(N)} - (2N-1)h_0^{(N)}, \quad (101)$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} &= -N \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} - \sum_{i=1}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N)} - \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} \right] \\
 &\quad + (N-1) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} - \sum_{i=1}^{N-1} \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2+i}^{(N)} \right].
 \end{aligned} \quad (102)$$

Reescrevendo (102) tem-se

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \right|_{z=1} &= -N \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} + (N-1) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \left[\sum_{i=0}^k h_{2i}^{(N)} - \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} \right] + \left[-\sum_{i=0}^k h_{2+i}^{(N)} + \sum_{i=0}^{N-1} h_{2+i}^{(N)} \right] \right\},
 \end{aligned} \quad (103)$$

que pelos lemas 4 e 5 dá

$$\frac{dG^{(N)}(z)}{dz} \Big|_{z=1} = -N \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] + (N-1) \operatorname{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \cos \left[\sum_{i=0}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i \right] + \operatorname{sen} \left[\sum_{i=0}^k \alpha_i - \sum_{i=k+1}^N \alpha_i \right] \right\}, \quad (104)$$

como se queria demonstrar. ■

APÊNDICE D - DEMONSTRAÇÃO DE (50)-(51)

Proposição 6 *Sejam*

$$\begin{aligned} h_0^{(1)} &= \cos(\alpha_1) \\ h_1^{(1)} &= \text{sen}(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_0^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1})h_0^{(N)} \\ h_{2i}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1})h_{2i}^{(N)} - \text{sen}(\alpha_{N+1})h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N}^{(N+1)} &= -\text{sen}(\alpha_{N+1})h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots, 2N - 1. \quad (105)$$

$$\begin{aligned} h_1^{(N+1)} &= \text{sen}(\alpha_{N+1})h_0^{(N)} \\ h_{2i+1}^{(N+1)} &= \text{sen}(\alpha_{N+1})h_{2i}^{(N)} + \cos(\alpha_{N+1})h_{2i-1}^{(N)} \\ h_{2N+1}^{(N+1)} &= \cos(\alpha_{N+1})h_{2N-1}^{(N)} \end{aligned}$$

e

$$\left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = \sum_{i=1}^{2N-1} (-1)^{i+1} h_{2N-1-i}^{(N)} (i^2 + i) \quad (106)$$

então

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} &= (N^2 + 2N - 1) \cos \beta - (N^2 - 1) \text{sen} \beta + \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ (2N + 1) \cos \beta_j + (2N - 1) \text{sen} \beta_j \right\} + \\ &\quad \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} (2 \cos \beta_{j,k} - 2 \text{sen} \beta_{j,k}) \right\} \end{aligned} \quad (107)$$

onde

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \\ \beta_j &= \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i, & 1 \leq j \leq N - 1 \\ \beta_{j,k} &= \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i, & 1 \leq j \leq N - 1 \text{ e } 1 \leq k \leq N - 1. \end{aligned} \right. \quad (108)$$

Demonstração:

A equação (106) equivale a

$$\left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = 2h_{2N-2}^{(N)} - 6h_{2N-3}^{(N)} + \dots - ((2N-2)^2 + (2N-2))h_1^{(N)} + ((2N-1)^2 + (2N-1))h_0^{(N)}, \quad (109)$$

que com uma observação mais criteriosa pode ser vista como

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = & (N^2 + 2N - 1) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} + \\
 & \sum_{i=1}^{N-1} (2N + 1) \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} - 2 \sum_{i=N-j+1}^{N-1} h_{2i}^{(N)} \right] + \\
 & \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i}^{(N)} - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} h_{2i}^{(N)} \right] - \\
 & (N^2 - 1) \sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} + \\
 & \sum_{i=1}^{N-1} (2N - 1) \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} - 2 \sum_{i=N-j+1}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} \right] - \\
 & \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{2i+1}^{(N)} - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} h_{2i+1}^{(N)} \right].
 \end{aligned} \tag{110}$$

Dos lemas 4 e 5 do Apêndice C, decorre que (110) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = & (N^2 + 2N - 1) \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] - (N^2 - 1) \operatorname{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \right] + \\
 & \sum_{i=1}^{N-1} (2N + 1) \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] + \\
 & \sum_{i=1}^{N-1} (2N - 1) \operatorname{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i \right] + \\
 & \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \cos \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right] - \\
 & \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-j-1} 2 \operatorname{sen} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i \right],
 \end{aligned} \tag{111}$$

reescrevendo (111) temos

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 G^{(N)}(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = & (N^2 + 2N - 1) \cos \beta - (N^2 - 1) \operatorname{sen} \beta + \\
 & \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ (2N + 1) \cos \beta_j + (2N - 1) \operatorname{sen} \beta_j \right\} + \\
 & \sum_{j=1}^{N-2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-j-1} (2 \cos \beta_{j,k} - 2 \operatorname{sen} \beta_{j,k}) \right\}
 \end{aligned} \tag{112}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \sum_{i=1}^N \alpha_i, \\ \beta_j = \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=(N-j)+1}^N \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq N - 1, \\ \beta_{j,k} = \sum_{i=1}^N \alpha_i - 2 \sum_{i=k+1}^{k+j} \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq N - 1 \text{ e } 1 \leq k \leq N - 1, \end{array} \right. \tag{113}$$

conforme se queria demonstrar.



APÊNDICE E - INCLUINDO NA *TOOLBOX* DO MATLAB® UMA SUBFAMÍLIA WAVELET SEGUNDO A PARAMETRIZAÇÃO DE SHERLOCK & MONRO

Este apêndice trata de como incluir uma família wavelet na *Toolbox* do Matlab, mais especificamente sobre wavelets obtidas utilizando a parametrização de Sherlock & Monro. Neste tutorial foi incluída uma subfamília com três funções wavelets.

A subfamília wavelet é composta de três wavelets, que aparecem neste texto na seção 4.4 do capítulo 4, $\alpha_{p=1} = \{-17.38^\circ, 16.83^\circ, -45.10^\circ, 90.65^\circ\}$ que tem pelo menos um momento nulo, $\alpha_{p=2} = \{-17.38^\circ, 16.83^\circ, 3.12^\circ, 42.43^\circ\}$ com pelo menos dois momentos nulos e $\alpha_{p=3} = \{-17.38^\circ, -47.23^\circ, 93.44^\circ, 16.17^\circ\}$ com no mínimo três momentos nulos.

Antes de adicionar estas wavelets é preciso escolher um nome para a família, um nome curto para designar uma wavelet da família e também classificá-la segundo alguma propriedades. A seguir são elencados os passos a serem seguidos.

1. Escolher um nome para a família wavelet: neste caso “**Sherlock Monro BR**”;
2. Escolher um nome curto para designar uma wavelet: aqui “**smu**”;
3. Classificar a família wavelet seguindo algumas propriedades (MISITI et al., 2004, p.493): aqui ‘1’;
4. Definir a ordem N das wavelets desta família: para **Sherlock Monro BR** temos ‘1 2 3’;
5. Criar uma função com os coeficientes do filtro passa baixa, foi nomeada por **smuwavf**.

A função **smuwavf.m** foi escrita como a seguir.

```
function w = smuwavf(wname)

if nargin==0
    w = 3;
    return
end

if isequal(lower(wname(1:2)), 'ha')
    num = 1;
else
    lw = length(wname); ab = abs(wname);
    ii = lw+1;
    while (ii>1) && (47<ab(ii-1)) && (ab(ii-1)<58) , ii = ii-1; end
    num = wstr2num(wname(ii:lw));
end

switch num
    case 1
        w = wrev(-orthogen(alpha1));

    case 2
        w = wrev(-orthogen(alpha2));

    case 3
        w = wrev(-orthogen(alpha3));

    otherwise
        errargt(mfilename, 'Invalid Sherlock Monro BR', 'msg');
        error('Wavelet:Invalid_ArgVal_Or_ArgType', 'Invalid Sherlock Monro BR');

end
```

Neste código a função `orthogen` é a mesma apresentada em Sherlock e Monro (1998), Taswell (1998) e `alpha1` é $\alpha_{p=1}$, `alpha2` é $\alpha_{p=2}$ e `alpha3` corresponde a $\alpha_{p=3}$.

Usando o comando `wavemngr('read')` são mostradas as famílias wavelets presentes na *Toolbox*:

ans =

```
=====  
Haar                haar  
Daubechies         db  
Symlets            sym  
Coiflets           coif  
BiorSplines        bior  
ReverseBior        rbio  
Meyer              meyr  
DMeyer             dmey  
Gaussian           gaus  
Mexican_hat        mexh  
Morlet             morl  
Complex Gaussian   cgau  
Shannon            shan  
Frequency B-Spline fbsp  
Complex Morlet     cmor  
=====
```

Para adicionar a nova subfamília basta usar a seguinte linha de comando:

```
wavemngr('add','Sherlock Monro BR','smu',1,'1 2 3','smuwavf')
```

em seguida pode-se verificar se a subfamília foi adicionada com sucesso usando `wavemngr('read')`:

```
ans =
```

```
=====  
Haar                haar  
Daubechies         db  
Symlets            sym  
Coiflets           coif  
BiorSplines        bior  
ReverseBior        rbio  
Meyer              meyr  
DMeyer             dmey  
Gaussian           gaus  
Mexican_hat        mexh  
Morlet             morl
```

Complex Gaussian cgau
 Shannon shan
 Frequency B-Spline fbsp
 Complex Morlet cmor
 Sherlock Monro BR smu

=====

outras informações são obtidas com `wavemngr('read',1)`.

A partir deste passo esta subfamília pode ser utilizada via linha de comando ou usando a *Toolbox*. Um exemplo é usar a função `wfilter`, veja a seguir.

```
>> [h,g]=wfilters('smu3')
```

h =

```
-0.0374   -0.0108    0.5042    0.8197    0.2438   -0.1134   -0.0034    0.0117
```

g =

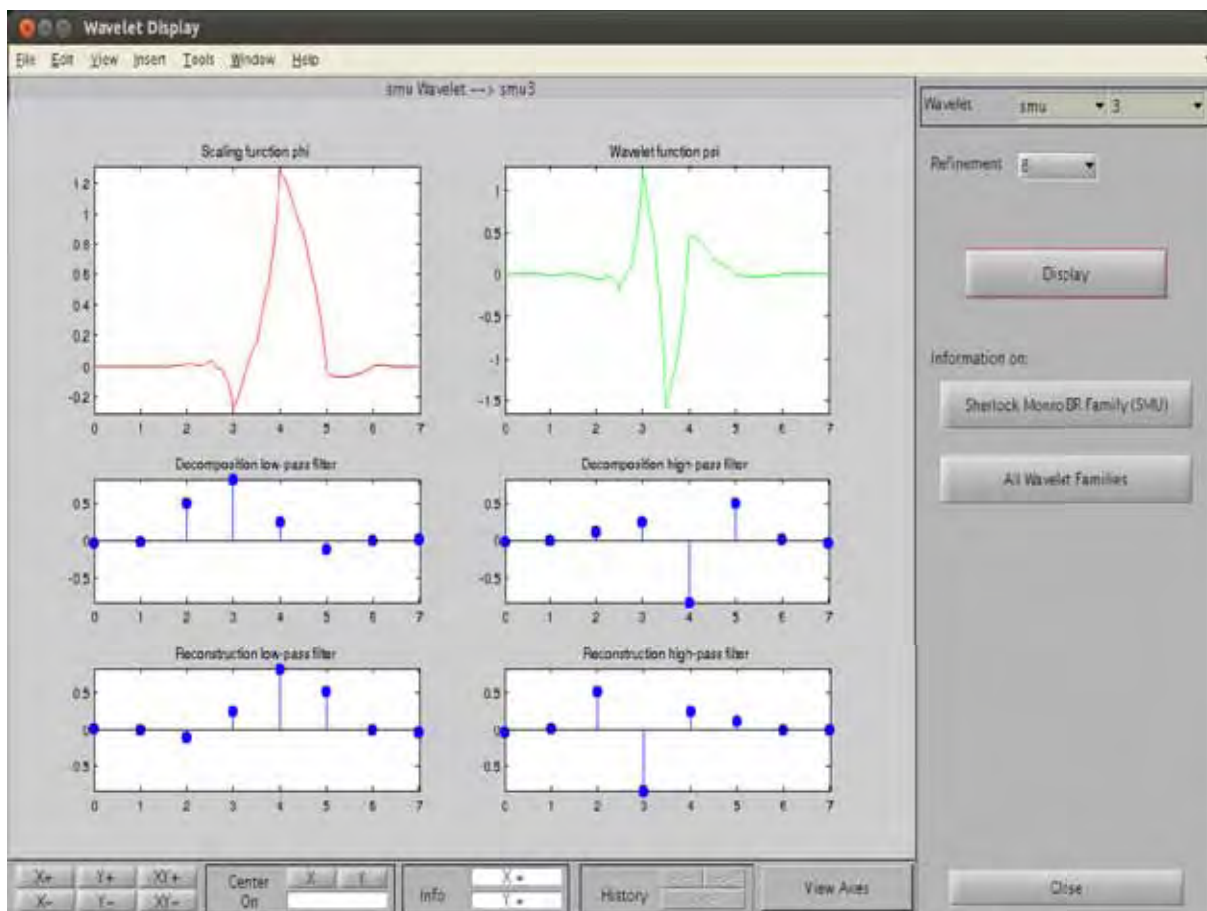
```
-0.0117   -0.0034    0.1134    0.2438   -0.8197    0.5042    0.0108   -0.0374
```

```
>>
```

Note que a função `wfilters` dá o valor de `h` equivalente a função `orthogen`.

Para acessar esta subfamília wavelet usando a *Toolbox*, basta iniciá-lo com `wavemenu`. Acesse o menu **Wavelet Display**, na janela que aparecer escolha a wavelet `smuN`, onde `N=1, 2` ou `3`. No caso em que `N=3`, terá a Figura 69.

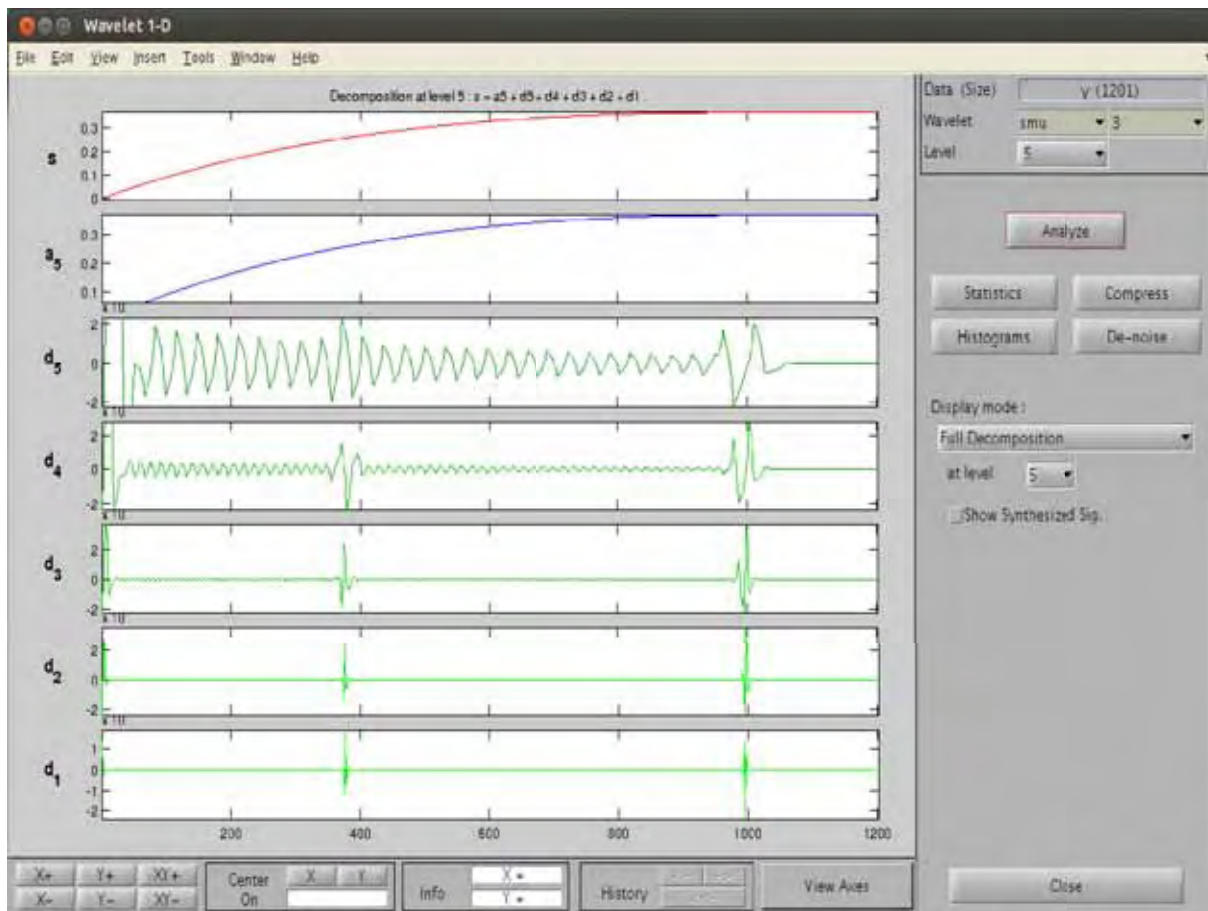
Figura 69 – $\alpha_{p=3}$ na *Toolbox* do Matlab



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 70 é mostrado a análise de um sinal via wavemenu usando a wavelet smu3.

Figura 70 – Análise de um sinal usando $\alpha_p=3$ na *Toolbox* do Matlab



Fonte: Elaboração do próprio autor.