

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**LUCAS SOARES PEREIRA**

**Identificação de Caos Confinado em Sistemas Tridimensionais :** Uma Aplicação do Método para  
Tempos de Lyapunov Relativamente Curtos

Guaratinguetá  
2024

**Lucas Soares Pereira**

**Identificação de Caos Confinado em Sistemas Tridimensionais : Uma Aplicação do Método para  
Tempos de Lyapunov Relativamente Curtos**

Trabalho de Pós-Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestrado em Física e Astronomia.

Orientador: Prof Dr. Othon Cabo Winter

Coorientadora: Profa Dra. Daniela Cardozo Mourão

Guaratinguetá

2024

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P436i | <p>Pereira, Lucas Soares</p> <p>Identificação de caos confinado em sistemas tridimensionais : uma aplicação do método para tempos de lyapunov relativamente curtos / Lucas Soares Pereira - Guaratinguetá, 2024.</p> <p>55 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 53-54</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter<br/>Coorientadora: Profa. Dra. Daniela Cardozo Mourão</p> <p>1. Mecânica celeste 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3. Estabilidade. 3. Dinâmica I. Título.</p> <p>CDU 521.1 (043)</p> |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Pâmella Benevides Gonçalves  
Bibliotecária/CRB-8 9203

**LUCAS SOARES PEREIRA**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA  
CURSO: MESTRADO**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. OTHON CABO WINTER**  
Orientador - UNESP



**Profa. Dra. ROSANA APARECIDA NOGUEIRA DE ARAUJO**  
UNESP



**Prof. Dr. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU**  
UNIFESP

**NOVEMBRO de 2024**

## **DADOS CURRICULARES**

### **LUCAS SOARES PEREIRA**

**NASCIMENTO** 29/03/1996 - São Lourenço / MG

**FILIAÇÃO** Carlos Henrique Pereira  
Sidneia Soares de Lima Pereira

**2018 / 2022** Bacharelado em Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Itajubá

À minha eterna avó Maria.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Sidneia e Carlos, por todo suporte, incentivo e por sempre acreditarem em mim, até quando eu mesmo não acreditava.

Agradeço ao meu irmão Jonas, pela eterna amizade e suporte.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Othon Cabo Winter, por toda paciência e cuidado ao me guiar pelo caminho da ciência e também da vida.

Agradeço à minha coorientadora, professora Dra. Daniela Cardozo Mourão, por todas as conversas e ensinamentos que enriqueceram a minha vida.

Agradeço aos professores que se dedicaram para transmitir os seus valiosos conhecimentos durante a graduação e a pós-graduação.

Agradeço as bancas examinadoras de qualificação e defesa por aceitarem o convite de participação da avaliação deste trabalho.

Agradeço a todos os funcionários da FEG-UNESP, UNIFEI E INPE.

Agradeço a CAPES, FAPESP e CNPq por todo apoio financeiro.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

*“Nada a temer, senão o correr da luta. Nada a fazer, senão esquecer o medo”  
(Milton "Bituca" Nascimento)*

## RESUMO

A dinâmica do Sistema Solar exhibe caos e instabilidade inerentes. Ferramentas matemáticas, como o máximo Expoente Característico de Lyapunov (ECL) e o Tempo de Lyapunov ( $T_L$ ), desempenham um papel crucial no fornecimento de uma compreensão do caos na dinâmica de objetos celestes, como asteroides e luas. Corpos celestes com tempos de Lyapunov relativamente curtos atraíram interesse de pesquisa significativo devido a suas órbitas estáveis, um fenômeno conhecido como caos estável ou caos confinado. Exemplos notáveis incluem os satélites de Saturno: Atlas, com tempo de Lyapunov da ordem de 10 anos, Prometeu e Pandora. Trabalhos recentes calcularam o tempo de Lyapunov para o cometa 1P/Halley, e há resultados onde essa escala de tempo é curta e aproximadamente um período orbital do objeto. Mesmo assim o cometa ainda permanece em sua órbita e ainda não foi ejetado mesmo transcorrido tal faixa de tempo. Este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento caótico do satélite Atlas e do cometa 1P/Halley e seus tempos de Lyapunov relativamente curtos. Apresentamos uma abordagem do modelo tridimensional para isolar a contribuição radial do máximo ECL e avaliar a sua contribuição no máximo ECL. Nossa investigação se concentra no sistema de Saturno, que compreende o próprio Saturno, juntamente com seus satélites Atlas, Prometeu, Pandora e Mimas, e no Sistema Solar, contendo todos os planetas, exceto Mercúrio, e alguns corpos menores. Para estimar a contribuição radial do máximo ECL de Atlas, encontramos a projeção do vetor radial de um Atlas fantasma (um Atlas ligeiramente deslocado) no vetor radial do Atlas, que nos permite calcular a diferença entre os vetores radiais. O mesmo foi feito para o cometa Halley, levando em conta os planetas do sistema solar, exceto Mercúrio. Esta metodologia nos permite estimar a contribuição radial do máximo ECL e o valor do tempo de Lyapunov. Notavelmente, os nossos resultados demonstram que, para Atlas, as órbitas permanecem confinadas mesmo para tempos de integração com duração superiores ao  $T_L$ . Além disso, investigamos o comportamento temporal da posição angular satélite em sua órbita, potencialmente lançando luz sobre a dinâmica angular caótica. Para o cometa, um estudo inicial foi realizado para tentar expandir o método para um caso que apresenta elevada inclinação e excentricidade. Com isso, as componentes do máximo ECL foram utilizadas para tentar entender a dinâmica caótica do cometa, além do mais. Por fim, iniciamos um estudo sobre os encontros próximos entre Halley e Júpiter, a fim de relacioná-los com o caos radial e angular apresentados nas simulações para o cometa.

**PALAVRAS-CHAVE:** caos. mecânica celeste. evolução dinâmica. estabilidade.

## ABSTRACT

The dynamics of the Solar System exhibit inherent chaos and instability. Mathematical tools, such as the maximum Lyapunov Characteristic Exponent (LCE), and Lyapunov Time ( $T_L$ ), play a crucial role in providing an understanding of chaos in dynamics of celestial objects, such as asteroids and moonlets. Celestial bodies with relatively small Lyapunov times have garnered significant research interest due to their stable orbits, a phenomenon referred to as stable or confined chaos. Notable examples include the Saturn's satellites: Atlas, with a Lyapunov time on the order of 10 years, Prometheus and Pandora. This work aims to study the chaotic behavior of the Atlas satellite and its relatively small  $T_L$ . Recent work has calculated the Lyapunov time for the comet 1P/Halley, and there are results where this time scale is short and approximately a period orbital of the object. Even so, the comet still remains in its orbit and has not yet been ejected. even after such a period of time. This work aims to study the behavior chaos of the Atlas satellite and comet 1P/Halley and their relatively short Lyapunov times. We present a three-dimensional model approach to isolate the radial contribution of the maximum LCE and evaluate your contribution to the maximum LCE. Our investigation focuses on the Saturn system, which comprises Saturn itself, together with its satellites Atlas, Prometheus, Pandora and Mimas, and in Solar System, containing all the planets except Mercury and some minor bodies. To estimate the radial contribution from the maximum LCE of Atlas, we find the radial vector projection of a phantom Atlas (a slightly displaced Atlas) in the Atlas radial vector, which allows us to calculate the difference between the radial vectors. The same was done for Comet Halley, taking into account the planets in the system solar, except Mercury.. This methodology enables us to estimate the radial contribution of the maximum LCE and calculate the Lyapunov time. Remarkably, our results demonstrate that, for Atlas, its orbits remain confined even for integration times exceeding  $T_L$ . Furthermore, we investigate the temporal behavior of Atlas's angular position in its orbit, potentially shedding light on chaotic angular dynamics. For the comet, an initial study was carried out to try to expand the method to a case that has high inclination and eccentricity. With this, the components of the maximum ECL were used to try to understand the chaotic dynamics of the comet, in addition. Finally, we began a study of the close encounters between Halley and Jupiter, in order to relate them to the radial and angular chaos presented in the simulations for the comet.

**KEYWORDS:** chaos. celestial mechanics. dynamical evolution. stability.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1  | Altas, um dos satélites de Saturno, e o seu formato peculiar. Fotografia retirada durante a missão Cassini-Huygens. . . . .                                                                                                                                                                                                                | 19 |
| Figura 2  | Fotografia retirada durante a missão Cassini-Huygens que mostra o satélite Atlas na borda do anel A de Saturno. . . . .                                                                                                                                                                                                                    | 20 |
| Figura 3  | Fotografia do cometa Halley feita pela nave espacial europeia Giotto. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | 21 |
| Figura 4  | Esquema da órbita do cometa Halley no Sistema Solar. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                               | 22 |
| Figura 5  | Esquema para o cálculo do máximo ECL. A partícula em preto é a original do sistema, ou o corpos de interesse do estudo. Em branco, a partícula fantasma, que é inicialmente vizinha da original. A reposição da partícula fantasma é feita em cada passo de tempo da integração. . . . .                                                   | 25 |
| Figura 6  | Gráfico do $\log \gamma$ em função de $\log t$ para dois tipos de trajetórias: regular e caótica. Para a trajetória regular, o comportamento de $\log(\gamma)$ decai com o tempo, enquanto que para o caótico há uma estabilização. . . . .                                                                                                | 26 |
| Figura 7  | Referencial girante bidimensional. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 27 |
| Figura 8  | Asteroide perturbado por Jupiter retirados de Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010). Esse caso mostra um asteroide que não cruza a órbita do seu perturbador. Os ponto em vermelho no gráfico do máximo ECL mostram os resultados para $\gamma$ , em azul os resultados para $\gamma_*$ e em vermelho para $\gamma_r$ . . . . .         | 29 |
| Figura 9  | Asteroide perturbado por Júpiter retirados de Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010). Esse caso mostra um asteroide que cruza a órbita do seu perturbador e é ejetado. Os ponto em vermelho no gráfico do máximo ECL mostram os resultados para $\gamma$ , em azul os resultados para $\gamma_*$ e em vermelho para $\gamma_r$ . . . . . | 29 |
| Figura 10 | Esquema para representar os vetores $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_F$ e as suas respectivas trajetórias. . . . .                                                                                                                                                                                                                             | 32 |
| Figura 11 | Projeção de $\mathbf{r}_F$ em $\mathbf{r}_A$ para separar a contribuição radial do máximo ECL. . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 33 |
| Figura 12 | Expoente de Lyapunov para o sistema de 3 corpos. Os pontos em amarelo representam o ECL de Atlas, dados por $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial, dados por $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por $\gamma_r$ . . . . .                                              | 38 |
| Figura 13 | Expoente de Lyapunov para o sistema de 3 corpos. Os pontos em amarelo representam o ECL de Atlas, dados por $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial, dados por $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por $\gamma_r$ . . . . .                                              | 38 |
| Figura 14 | Evolução temporal da variação radial da órbita de Atlas e Prometeu, com relação ao centro de massa do sistema de 3 corpos. A distância neste gráfico é normalizada pelo semieixo maior de Prometeu. A curva em azul corresponde a distância radial de Atlas, e em verde, a distância radial de Prometeu. . . . .                           | 39 |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 15 | Evolução temporal da variação radial da órbita de Atlas, Prometeu, Pandora e Mimas com relação ao centro de massa do sistema de 5 corpos. A distância neste gráfico é normalizada pelo semieixo maior de Prometeu. A curva em azul corresponde a distância radial de Atlas, em verde a distância radial de Prometeu, em vermelho a distância radial de Pandora e em amarelo a distância radial de Mimas. Um zoom foi inserido no gráfico para uma melhor visualização. . . . . | 40 |
| Figura 16 | Evolução do (a) semieixo maior e (b) excentricidade de Atlas no sistema de 3 corpos, a partir de 1 de Janeiro de 2000, usando as condições iniciais correspondentes aos da tabela 1. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 40 |
| Figura 17 | Evolução do (a) semieixo maior e (b) excentricidade de Atlas no sistema de 3 corpos, a partir de 1 de Janeiro de 2000, usando as condições iniciais da tabela 1. As curvas apresentadas são muito similares com as curvas apresentadas por Cooper et al. (2015). . . . .                                                                                                                                                                                                       | 41 |
| Figura 18 | Diferença da evolução angular no tempo de Atlas no sistema de 3 corpos. (a) O gráfico mostra a diferença angular de Atlas entre a evolução angular original e a evolução angular alterada. (b) Zoom do gráfico (a) em um intervalo de tempo. . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 42 |
| Figura 19 | Diferença da evolução angular no tempo de Atlas no sistema de 5 corpos. (a) O gráfico mostra a diferença angular de Atlas entre a evolução angular original e a evolução angular alterada. (b) Zoom do gráfico (a) em um intervalo de tempo. . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 43 |
| Figura 20 | Gráfico do $\log \gamma$ em função de $\log t$ para seis tipos de variações nas condições iniciais. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 44 |
| Figura 21 | Expoente de Lyapunov para o cometa Halley para $X + d_0$ . Os pontos em amarelo representam o ECL do Halley, dados por $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial (ou resto), dados por $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por $\gamma_r$ . . . . .                                                                                                                                                            | 46 |
| Figura 22 | Expoente de Lyapunov para o cometa Halley $Y + d_0$ . Os pontos em amarelo representam o ECL do Halley, dados por $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial (ou resto), dados por $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por $\gamma_r$ . . . . .                                                                                                                                                                 | 47 |
| Figura 23 | Expoente de Lyapunov para o cometa Halley $Z + d_0$ . Os pontos em azul representam o ECL do Halley, dados por $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial (ou resto), dados por $\gamma_*$ , e em laranja a contribuição radial do ECL, dados por $\gamma_r$ . . . . .                                                                                                                                                                     | 48 |
| Figura 24 | Evolução temporal da variação radial da órbita do cometa Halley e dos planetas Júpiter e Terra com o Sol na origem. A distância neste gráfico é normalizada pelo semieixo maior de Halley. A curva em preto corresponde a distância radial de Halley, em azul a distância radial de Júpiter, em vermelho a distância radial da Terra. . . . .                                                                                                                                  | 49 |
| Figura 25 | Evolução temporal da distância entre o cometa Halley e o planeta Júpiter e a sua comparação com o raio de Hill de Júpiter. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 49 |

Figura 26 Zoom da evolução temporal da distância entre o cometa Halley e o planeta Júpiter e a sua comparação com o raio de Hill de Júpiter. . . . . 50

Figura 27 Evolução temporal do pericentro e do apocentro da órbita de Halley. Em preto representa a evolução do apocentro e em vermelho a evolução do pericentro. . . 50

Figura 28 Diferença da evolução angular no tempo do Halley. O gráfico mostra a diferença angular de Halley entre a evolução angular original e a evolução angular alterada. Os pontos em preto representam onde ocorreram os encontros próximos entre Halley e Júpiter. . . . . 51

## LISTA DE TABELAS

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 | – Posições retiradas do JPL Horizons para a época 2454252.50075446 JD TDB (1 de Junho de 2007 às 00:00:00.0 UTC), onde o centro de coordenadas está localizado no centro de Saturno, com o plano x-y ao longo do equador do planeta, e o eixo z na mesma direção do polo norte. . . . . | 34 |
| Tabela 2 | – Velocidades retiradas do JPL Horizons em 2454252.50075446 JD TDB (1 de Junho de 2007 às 00:00:00.0 UTC), onde o centro de coordenadas está localizado no centro de Saturno, com o plano x-y ao longo do equador do planeta, e o eixo z na mesma direção do polo norte. . . . .        | 35 |
| Tabela 3 | – Constantes de Saturno usadas nas integrações numéricas. . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 36 |

## SUMÁRIO

|          |                                                                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>                                                                                       | <b>15</b> |
| <b>2</b> | <b>MOTIVAÇÃO . . . . .</b>                                                                                        | <b>19</b> |
| 2.1      | Atlas . . . . .                                                                                                   | 19        |
| 2.2      | Halley . . . . .                                                                                                  | 20        |
| <b>3</b> | <b>FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA . . . . .</b>                                                                         | <b>23</b> |
| 3.1      | Contribuição Radial do Máximo Expoente de Lyapunov em Duas Dimensões . . .                                        | 26        |
| 3.2      | Método Tridimensional . . . . .                                                                                   | 30        |
| <b>4</b> | <b>METODOLOGIA . . . . .</b>                                                                                      | <b>34</b> |
| <b>5</b> | <b>RESULTADOS . . . . .</b>                                                                                       | <b>37</b> |
| 5.1      | Atlas . . . . .                                                                                                   | 37        |
| 5.2      | Halley . . . . .                                                                                                  | 44        |
| <b>6</b> | <b>CONCLUSÕES . . . . .</b>                                                                                       | <b>52</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                                                                      | <b>53</b> |
|          | <b>ANEXO A – CONFINED CHAOS AND THE CHAOTIC ANGULAR MO-<br/>TION OF ATLAS, A SATURN’S INNER SATELLITE . . . .</b> | <b>55</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Entender a dinâmica das coisas e como sua evolução ocorre ao longo do tempo sempre foi um interesse da Física. De Galileu Galilei, passando por Isaac Newton e Henri Poincaré, o movimento e as suas causas ganharam um elegante tratamento matemático, o qual extrapolou as fronteiras de uma área de conhecimento e se difundiu ao longo de todas as outras (DEVANEY, 2021).

Quando pensamos nas palavras dinâmica, mecânica ou movimento, logo vem a ideia algo que está se movendo sob a ação de alguma força, tal como uma maçã caindo a partir de uma certa altura, um satélite natural orbitando o seu planeta ou bloquinhos deslizando em um plano inclinado com atrito. Entretanto, o terreno fértil da Matemática permitiu o estudo de outros sistemas que também evoluem com o tempo, tal como as oscilações de um pêndulo duplo, do escoamento de um fluido ao redor da asa de um avião ou do espalhamento de um vírus em uma pandemia. A essa área foi dado o nome de Sistemas Dinâmicos.

Após o desenvolvimento da Mecânica Newtoniana, acreditava-se que, dado um instante inicial, passado e futuro estariam determinados. Ou seja, a evolução temporal do sistema já seria pré-definida, isso é, previsível. Foi aí que Pierre-Simon Laplace concebeu a ideia de que o presente é uma consequência das ações do passado e o futuro seria completamente determinado pelo presente (HUTCHINS; ADLER, 1963).

Porém, no final do século XIX, uma importante descoberta dentro de Sistemas Dinâmicos aconteceu. Estudando a estabilidade do Sistema Solar, Poincaré investigou o problema de três corpos e percebeu que as órbitas mudavam drasticamente quando as condições iniciais sofriam pequenas alterações (MURRAY; DERMOTT, 2000). Mais tarde, o meteorologista Edward Lorentz percebeu que, com pequenas mudanças nas condições iniciais, as suas previsões meteorológicas variavam drasticamente. Lorentz acabou criando a famosa analogia de que um bater de asas no Brasil seria suficiente para causar um tornado no Texas depois de um certo tempo (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 2000).

Com isso surgiu um novo campo de pesquisas dentro dos Sistemas Dinâmicos: a teoria do Caos. Um sistema é dito caótico se o mesmo apresenta uma sensibilidade às condições iniciais, isso é, dois resultados finais de um mesmo sistema são completamente diferentes se houver uma pequena variação nas condições iniciais. Tendo as suas origens na Mecânica Celeste, o caos ainda permanece sendo estudado na dinâmica de corpos celestes. Novos estudos sobre a evolução do Sistema Solar, movidos pelo interesse de saber sobre a sua estabilidade abriu portas para diversas outras pesquisas (MURRAY; DERMOTT, 2000), (LASKAR, 1996).

Os planetas internos do sistema solar possuem um comportamento caótico em larga escala (LASKAR, 1996). Esse comportamento é caracterizado por uma forte variação em suas órbitas. Um exemplo dado é o de Mercúrio, o qual pode ser ejetado para além de sua órbita ou colidir com um planeta próximo, como Vênus.

Para estudar o caos, diversas ferramentas matemáticas foram desenvolvidas ao longo do tempo. Tais ferramentas matemáticas foram criadas para dar uma noção qualitativa e quantitativa do comportamento de um sistema dinâmico. Dentre todas, podemos citar algumas como o máximo Expoente Característico

de Lyapunov (ECL), o Indicador Rápido de Lyapunov, ou Fast Lyapunov Indicator (FLI), Seção de Poincaré, Análise de Frequência e outros (DEVANEY, 2021) (MURRAY; DERMOTT, 2000) (GUZZO; LEGA, 2021). O máximo Expoente Característico de Lyapunov mede a divergência entre duas órbitas inicialmente próximas no espaço de fase.

Se o valor retornado pelo máximo ECL é positivo, o sistema estudado é caótico, ou seja, as órbitas no espaço de fase divergem exponencialmente. Caso contrário, o sistema é dito regular, ou não caótico. Além de saber se um sistema é caótico, também é possível saber a escala de tempo que o sistema passa a mostrar o comportamento caótico. Essa escala de tempo é conhecida por Tempo de Lyapunov,  $T_L$ , o qual é o inverso do máximo ECL. Para tempos menores do que  $T_L$ , o sistema se comporta de forma regular, mesmo sendo caótico. Após atingir  $T_L$ , as órbitas passam a divergir exponencialmente e tomam evoluções completamente diferentes (GREINER, 2010). Um tempo relativamente curto de Lyapunov indica que o sistema caótico possui uma rápida difusão no espaço. Em Dinâmica Orbital, isso sugere que o comportamento radial das órbitas dos corpos celestes passam a sofrer variações significativas em um tempo relativamente curto. O tempo de Lyapunov relativamente curto possui uma relação com o tempo de cruzamento, isso é, o tempo que um corpo leva para cruzar a órbita do maior perturbador (SOPER; FRANKLIN; LECAR, 1990).

O tempo de Lyapunov também está relacionado com o tempo de instabilidade macroscópica  $T_E$  (MORBIDELLI; FROESCHLÉ, 1996). Morbidelli e Froeschelé (1996) mostraram uma análise de dois regimes diferentes que relacionam os dois tempos: o regime de Nekhoroshev e o regime de sobreposição ressonante. O primeiro regime mostra que o tempo de instabilidade macroscópica é exponencialmente relacionado com o tempo de Lyapunov, ou seja,  $T_E \sim \exp(T_L)$ . No segundo regime, a relação entre os dois regimes é dada na forma polinomial, isso é,  $T_E \sim T_L^\beta$ , onde  $\beta$  é um coeficiente positivo.

Ao contrário da expectativa de variações radiais significativas na órbita de um corpo que possui tempo de Lyapunov relativamente curto, existem corpos no Sistema Solar que possuem uma órbita estável, mas os indicadores de caos mostram que o sistema é caótico. Alguns corpos menores do Sistema Solar mostram um tempo de Lyapunov relativamente curto, na ordem de dezenas até milhares de anos.

O fenômeno onde o corpo possui comportamento caótico, mas não demonstra variações radiais significativas, é chamado caos estável, ou caos confinado (MILANI; NOBILI, 1992). Esse tipo de comportamento foi observado pela primeira vez por Milani e Nobili (1992), onde foi mostrado que o asteroide 522 Helga possui um comportamento caótico, com  $T_L$  próximo de 6900 anos, porém possui a sua órbita estável ao longo do tempo. Esse trabalho chama atenção devido ao fato de mostrar um tempo de Lyapunov relativamente curto para a dinâmica do asteroide, mas os resultados não mostram nenhum cruzamento de órbita.

Também foi feito um estudo sobre a presença de caos confinado em asteroides troianos (MILANI; NOBILI; KNEŽEVIĆ, 1997). Os autores apresentaram diversos asteroides que possuem tempo de Lyapunov relativamente curto, onde  $T_L \leq 10000$  anos, mas onde não há evidências de variações significativas em suas órbitas.

O primeiro modelo analítico desenvolvido para testar a aparição de caos estável em sistemas

dinâmicos foi aplicado ao caso do asteroide 490 Veritas, e outros asteroides como o 564 Duda (LEMAITRE, 1997).

Foram realizados estudos sobre os satélites de Saturno Prometeu e Pandora. Os dados do estudo mostraram que Prometeu possui um atraso de  $18.82^\circ \pm 0.04^\circ$  em sua longitude. Já Pandora foi encontrado em uma posição avançada relativa a efemérides geradas pela Voyager (MCGHEE et al., 2001).

Prometeu e Pandora possuem um comportamento caótico (GOLDREICH; RAPPAPORT, 2003). Os autores mostraram que o máximo Expoente Característico de Lyapunov para o sistema Prometeu-Pandora é da ordem de 0.3, e o comportamento caótico é devido a ressonância de movimento médio entre os dois satélites.

Atlas, um satélite de Saturno, é significativamente perturbado por Prometeu e também por Pandora, este com uma intensidade menor (SPITALE et al., 2006). Esses dois satélites possuem comportamento caótico, o que motivou a busca pelo mesmo comportamento orbital de Atlas.

Atlas tem um tempo de Lyapunov relativamente curto de  $\sim 10$  anos, quando está sob a influência gravitacional em sistemas diferentes: Saturno, Atlas e Prometeu; Saturno, Atlas, Prometeu, Pandora e Mimas (COOPER et al., 2015). Os autores mostraram que o comportamento caótico é uma consequência direta da interação ressonante com Prometeu.

A origem do caos de Atlas é devido ao acoplamento ressonante, Corotation Eccentricity Resonance (CER) e Eccentricity Resonance (LER), com Prometeu (RENNER; SICARDY, 2006). Os autores usaram análise de frequência para entender os efeitos do acoplamento entre as duas ressonâncias 54:53.

O cometa Halley possui um comportamento caótico (MUÑOZ-GUTIÉRREZ; REYES-RUIZ; PICHARDO, 2015), (BOEKHOLT et al., 2016). Entretanto o tempo de Lyapunov para estudos envolvendo o cometa são variados. Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015) encontraram um tempo de Lyapunov próximo de 70 anos, já Boekholt et al. (2016) encontraram um tempo próximo de 300 anos. É notável que no primeiro caso o tempo de Lyapunov é muito próximo do seu período orbital, que é próximo de 76 anos, o que caracteriza um  $T_L$  curto. Os trabalhos mostraram que o planeta Júpiter exerce uma perturbação significativa no movimento de Halley. Além disso, Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015) fizeram um teste com 10 mil partículas simulando o cometa Halley em um problema de n-corpos por 100 mil anos. Cada uma delas com diferentes condições iniciais. Os autores mostraram que, das 10 mil partículas, 90% delas permaneceram confinadas no sistema solar, enquanto que o resto foi ejetado ou sofreu colisão.

O primeiro estudo da contribuição radial do Expoente de Lyapunov para caos confinado apresenta um estudo sobre as luas perturbadas por Prometeu e Pandora (WINTER et al., 2007). A contribuição radial do ECL, para  $T_L \sim 10^6 T$ , é menor do que a contribuição azimutal, com  $T_L \sim 100 T$ , o que sugere que o caos está presente no movimento angular dos pequenos satélites.

O primeiro modelo bidimensional para analisar a contribuição radial do ECL foi aplicado para pequenas luas do anel F de Saturno, perturbadas por Prometeu e Pandora (WINTER; MOURÃO; GIULIATTI WINTER, 2010). Os autores também fizeram o caso para asteroides perturbados por Júpiter, os quais possuem tempos de Lyapunov na ordem de 10 períodos orbitais do perturbador principal do sistema.

Casos onde o comportamento do corpo do sistema é caótico, com tempo de Lyapunov relativamente curto, e a contribuição radial do ECL é insignificante, indicam que o caos é confinado, ou estável.

Nos casos onde a componente radial possui uma contribuição significativa no ECL, e o tempo de Lyapunov é relativamente curto, o corpo estudado pode cruzar a órbita vizinha e deixar o sistema.

No presente trabalho, nós propomos uma extensão do modelo de Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010) para estimar a contribuição radial do máximo ECL para sistemas tridimensionais que exibem caos confinado. Adicionalmente, pretendemos mostrar que o movimento angular dos corpos é caótico, ou seja, embora as variações radiais não sejam significativas a ponto de ejetá-los, torna-se difícil prever a posição angular dos mesmos em suas respectivas órbitas.

Para estudar o comportamento caótico de Atlas, é apresentada a integração dos sistemas baseados no trabalho de Cooper et al. (2015). O primeiro sistema contém Saturno, Atlas e Prometeu (sistema de 3 corpos), e o segundo contém Saturno, Atlas, Prometeu, Pandora e Mimas (sistema de 5 corpos). Embora a inclinação de Atlas seja pequena, esse caso é relevante para a aplicação do método tridimensional pois Mimas e Pandora estão em ressonância do tipo inclinação. E como Pandora afeta Prometeu, e Prometeu afeta Atlas, é importante levar em consideração a presença do satélite Mimas, que possui uma inclinação que não é desprezível (aproximadamente  $1.5^\circ$ ). Para expandir o método, aplicamos um caso onde a inclinação do objeto estudado não pode ser desconsiderada e a sua órbita possui uma elevada excentricidade. Para isso, escolhemos o cometa Halley. Nesse caso queremos aplicar o método tridimensional para tentar entender o caos do cometa. Para estudar o comportamento caótico do cometa Halley, é apresentada a integração do sistema baseado no trabalho de Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015).

No capítulo 2 apresentamos a fundamentação matemática do trabalho. No capítulo 3 são apresentados alguns dados e informações sobre os dois corpos de interesse, a fim de motivar os próximos passos. No capítulo 4 é apresentado o método bidimensional e alguns comentários sobre alguns resultados obtidos por Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010) antes de entrar no método tridimensional. E no capítulo 5 finalmente apresentamos o método tridimensional para então apresentar a metodologia no capítulo 6. Os resultados obtidos para Atlas e Halley são expostos no capítulo 7. E, por fim, as conclusões são discutidas no capítulo 8.

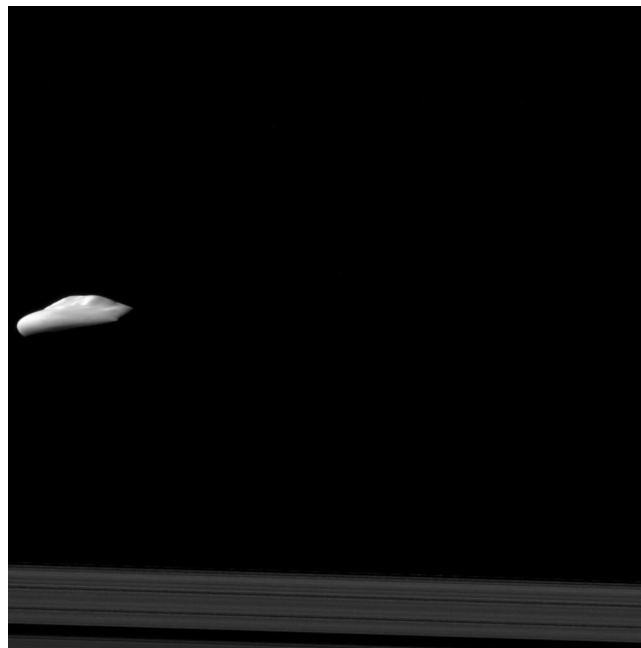
## 2 MOTIVAÇÃO

Neste capítulo vamos fazer uma rápida apresentação dos corpos que temos interesse em estudar. O primeiro é Atlas, um dos satélites de Saturno, e o segundo é o cometa 1P/Halley, que possui a sua órbita ao longo do nosso sistema solar. São objetos distintos, com órbitas completamente diferentes, mas que possuem algo em comum. Há trabalhos na bibliografia que mostram que esses dois corpos possuem uma dinâmica caótica e que passariam a demonstrar esse tipo de comportamento após um determinado tempo (um tempo relativamente curto). Porém, mesmo após transcorrido esse tempo, os objetos ainda permanecem em suas órbitas.

### 2.1 ATLAS

Atlas é uma das luas de Saturno e que chama atenção para além do seu formato peculiar, como mostrado na Figura 1. Com uma massa de, aproximadamente,  $5.75 \times 10^{15}$  kg, a qual é, aproximadamente, 27 vezes menor do que a massa da lua vizinha, Prometeu. Embora a massa de Atlas seja relativamente pequena, ela não pode ser desconsiderada.

Figura 1 – Atlas, um dos satélites de Saturno, e o seu formato peculiar. Fotografia retirada durante a missão Cassini-Huygens.

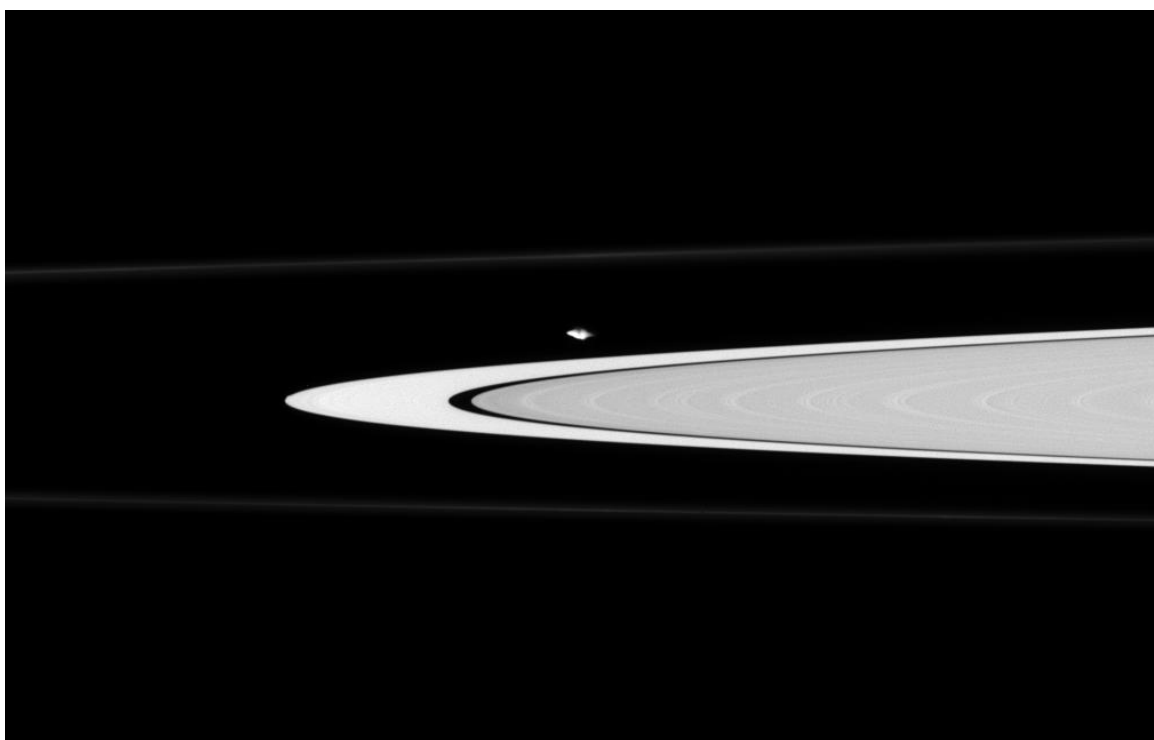


Fonte: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/target/atlas>

A inclinação do plano orbital de Atlas é relativamente pequena, próxima de  $0.001^\circ$ . Então, Atlas caminha sempre muito próximo do plano equatorial de Saturno, nas bordas do anel A, como visto na Figura 2. Além disso, o seu período orbital é de aproximadamente 0.6 dia.

Conforme foi estudado por Cooper et al. (2015), a lua de Saturno, Atlas, tem um comportamento caótico e o seu tempo de Lyapunov é aproximadamente 10 anos. A missão Cassini-Huygens, durante 2004 a 2017, monitorou o planeta Saturno e suas luas. Durante esse período não foi observado grandes

Figura 2 – Fotografia retirada durante a missão Cassini-Huygens que mostra o satélite Atlas na borda do anel A de Saturno.



Fonte: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/target/atlas>

variações radiais na órbita de Atlas, ou seja, embora caótica, o movimento da lua ainda é confinado em uma determinada região da borda do anel A de Saturno.

Atlas, então, possui uma dinâmica de caos confinado. Além disso, é válido ressaltar que Atlas sofre uma perturbação de Prometeu, o qual é afetado por Pandora. Pandora e Mimas estão em uma ressonância de movimento médio (GOLDREICH; RAPPAPORT, 2003). Por isso que é importante levar em conta a influência gravitacional desses satélites ao analisar a dinâmica de Atlas.

## 2.2 HALLEY

O cometa 1P/Halley, que chamaremos de cometa Halley ao longo deste trabalho, é um cometa que possui um diâmetro próximo de 11 km, e que pode ser visível a olho nu a partir da Terra e que possui um período orbital relativamente curto, isso é, aproximadamente 76 anos. A Figura 3 mostra uma fotografia feita pela nave espacial europeia Giotto, a qual mostra o núcleo do cometa Halley durante o seu afastamento do Sol. A última aparição do cometa foi no ano de 1986, e tem o seu retorno previsto para acontecer em 2061, onde voltará a ser visível a partir do nosso planeta.

Esse cometa possui uma órbita extremamente excêntrica, com excentricidade por volta de 0.9. Além disso, a sua órbita possui uma elevada inclinação, ultrapassando os  $160^\circ$ . O periélio de sua órbita é de aproximadamente 0.5 unidades astronômicas, enquanto o seu afélio é por volta de 35 unidades astronômicas. Na sua última passagem visível a partir da Terra, a distância atingida pelo cometa foi de aproximadamente 0.4 unidades astronômicas. Vale destacar que o cometa é perturbado por planetas do sistema solar, como o caso de Júpiter em um encontro próximo (COWELL; CROMMELIN, 1908).

Figura 3 – Fotografia do cometa Halley feita pela nave espacial europeia Giotto.

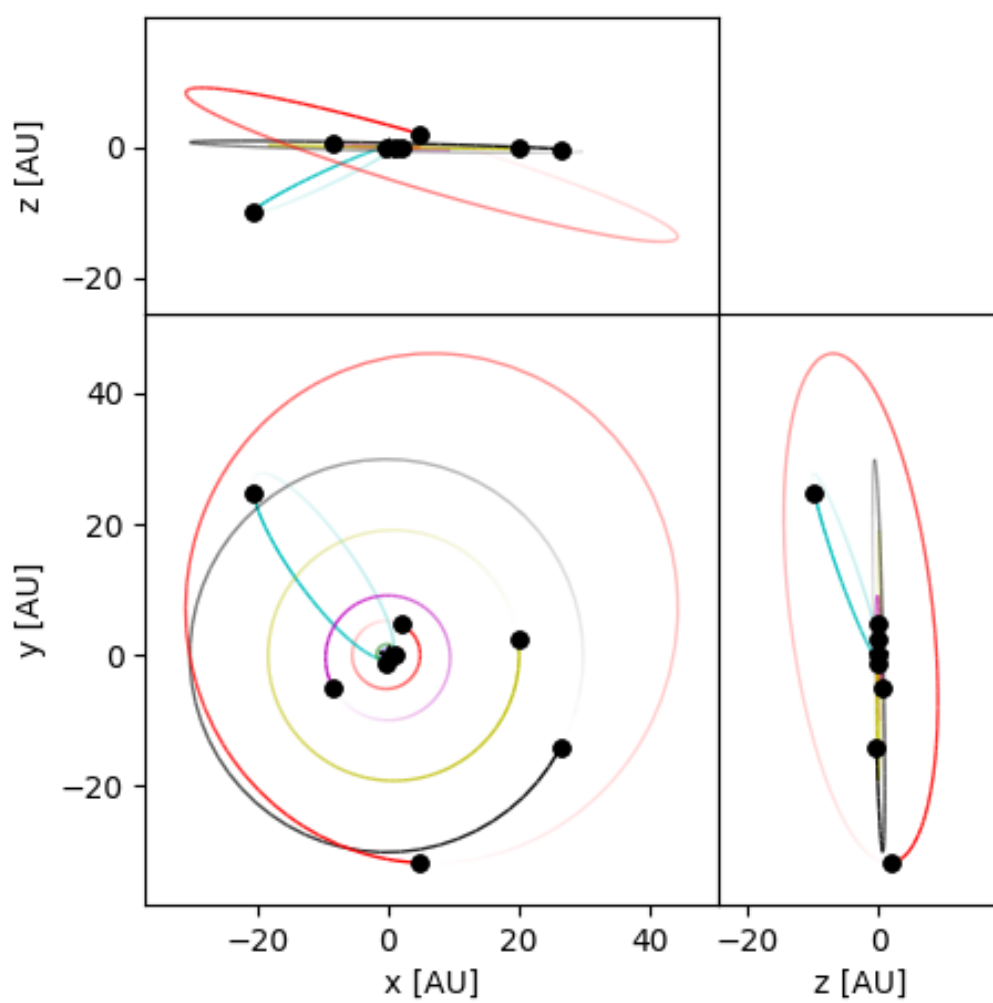


Fonte: <https://science.nasa.gov/solar-system/comets/1p-halley/>

Em cada órbita ao redor do sol, estima-se que o cometa perde cerca de 1 a 3 metros de seu material. A medida que o cometa envelhece, esse pode perder a sua aparência brilhante e o gelo de seu núcleo. O cometa Halley está em sua órbita por pelo menos 16 mil anos e, até então, não apresentou fortes sinais de envelhecimento em cada aparição (NASA, 2024).

Além disso, os trabalhos apresentados na bibliografia indicam que o cometa tem um comportamento caótico, com alguns resultados diferentes sobre o seu tempo de Lyapunov. O menor deles encontrado até agora foi de aproximadamente 70 anos por Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015). Na Figura 4 é possível ver a órbita do cometa Halley em Azul, a qual é a mais inclinada e excêntrica de todas. As outras representam as órbitas dos planetas do sistema solar, exceto Mercúrio.

Figura 4 – Esquema da órbita do cometa Halley no Sistema Solar.



Fonte: Produção do próprio autor.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Estudar a evolução temporal de sistemas de forma matemática é do interesse de diversas áreas da ciência, tais como a Física, Biologia, Química e Astronomia. A descrição desses sistemas baseada em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) dá origem a um ramo de extrema importância dentro das ciências matemáticas: os sistemas dinâmicos. Um sistema dinâmico, que é descrito por  $n$  EDOs, é chamado de sistema dinâmico de ordem  $n$ , e aparecem em diversos problemas da ciência. A ideia básica por trás dos problemas de sistemas dinâmicos é: dada uma condição inicial, faça a integração desse sistema de EDOs e encontre a solução que forneça a evolução temporal do sistema estudado (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 2000).

Um sistema que tem o seu passado ou futuro univocamente determinado pelas condições iniciais do presente é chamado de sistema determinístico. A mecânica clássica apresenta diversos problemas determinísticos, tal como a queda de uma massa sob efeito do arrasto atmosférico. Porém, se não é possível determinar o estado em que se encontra o sistema no futuro, ou em qual se encontrava no passado, então esse sistema é chamado de sistema não determinístico. Um sistema dinâmico também pode ser caracterizado a partir da forma que ocorre a evolução temporal. Os sistemas que evoluem de forma discreta no tempo são chamados de sistemas dinâmicos discretos. Esse tipo de comportamento aparece quando queremos estudar a evolução do sistema em tempos específicos e de forma pontual. Quando o tempo evolui de forma contínua, dizemos que o sistema dinâmico é contínuo, sobre o qual manteremos o foco neste trabalho.

Especificamente, um sistema dinâmico contínuo pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais no qual a solução é uma função do tempo, e o domínio, ou seja, o tempo, varre tempos dentro do conjunto dos números reais. O número de graus de liberdade do sistema é igual ao número mínimo de variáveis independentes, as quais descrevem, de forma independente, o sistema por completo.

De forma geral, um sistema dinâmico contínuo com  $l$  grau de liberdade é descrito pelo conjunto de equações diferenciais do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$  e  $f = (f_1, \dots, f_l)$  é uma função de  $\mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ . Esse sistema dinâmico é dito autônomo, por  $f$  não depende explicitamente do tempo. Um sistema dinâmico não-autônomo é aquele que depende do tempo explicitamente, e é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

onde  $g = (g_1, \dots, g_l)$  e é uma função  $\mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$ . A solução da Eq.(1), para um dado tempo  $t$  e uma condição inicial  $\mathbf{x}_0$  é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), \quad (3)$$

com  $t \in \mathbb{R}$ . Para sistemas que são descritos por equações diferenciais de ordem superiores, uma

estratégia para resolvê-los é decompor todo o sistema em equações diferenciais de primeira ordem (CELLETTI, 2010).

Já uma órbita de um fluxo contínuo refere-se à trajetória que uma partícula segue ao longo do tempo sob ação de um sistema dinâmico que também é contínuo. O que gera esse fluxo é uma equação diferencial autônoma e que descreve o estado do sistema de forma contínua no tempo. Uma definição matemática de órbita é dada por: uma órbita começando a partir de  $x_0$  é o conjunto de todos os pontos que o sistema atinge ao evoluir a partir do ponto inicial. Seja  $\phi_t$  é o nosso fluxo contínuo, e  $\phi_t : X \rightarrow X$ , onde  $X$  é o nosso espaço de fases e  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $x_0$  o ponto inicial da órbita, então a órbita de  $x_0 \in X$  é representada pelo conjunto  $\mathcal{O}(x_0) = \{\phi_t(x_0) | t \in \mathbb{R}\}$  (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004).

Uma importante ferramenta para detectar se um sistema dinâmico é caótico ou não está baseada na divergência exponencial de trajetórias no espaço de fase. O máximo Expoente Característico de Lyapunov (ECL) faz o cálculo dessa divergência exponencial com relação a uma separação inicial entre as trajetória, ou seja, isso nada mais é do que a verificação da sensibilidade às condições iniciais do sistema dinâmico (MURRAY; DERMOTT, 2000), (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). Há outras importantes ferramentas para estudar o caos em sistemas dinâmicos, como o Fast Lyapunov Indicator, o Mapa de Poincaré e as séries temporais. Como o objetivo do presente trabalho está centrado na utilização do máximo ECL, não vamos entrar em detalhes dos outros métodos, ficando apenas com a menção a cada um deles.

Um método numérico para o cálculo do máximo Expoente de Lyapunov foi desenvolvido por Benettin et al. (1980), onde  $\gamma$  é dado por

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d(i\tau)}{d_0} \right), \quad (4)$$

onde  $\tau$  é o passo de tempo fixo usado em cada integração,  $d_0$  é a distância inicial que separa as trajetórias,  $d(i\tau)$  é a distância que separa as duas trajetórias no espaço de fase após  $i\tau$  passos de tempo, e  $k$  é o número de iterações realizadas na simulação. Para tempos finitos, podemos reescrever a Eq.(4) na seguinte forma

$$\gamma = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d(i\tau)}{d_0} \right). \quad (5)$$

É possível notar que, se  $d(i\tau)$  é maior do que  $d_0$  em cada integração, então as órbitas estão distanciando-se exponencialmente, e  $\gamma$  tende a um valor para um dado tempo de integração.

Porém, se  $d(i\tau)$  é menor do que  $d_0$  em cada passo de tempo, então as órbitas estão se aproximando e o valor de  $\gamma$  vai decaindo com o passar do tempo.

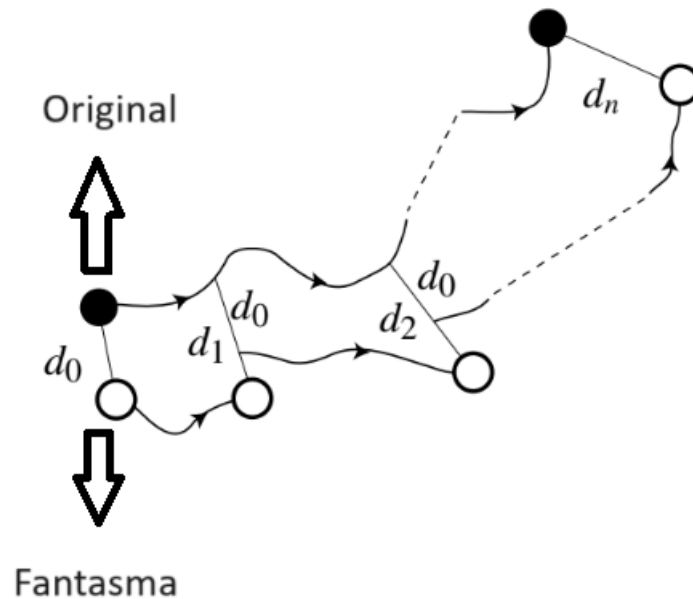
Ao tomar o inverso do máximo ECL, temos o tempo de Lyapunov ( $T_L$ ). Esta quantidade é dada por

$$T_L = \frac{1}{\gamma}, \quad (6)$$

e é a escala de tempo para que um sistema caótico ainda exiba comportamento regular, ou seja, para tempos maiores do que  $T_L$ , o sistema exibe o seu comportamento caótico.

A Figura 5 mostra o esquema de como são feitos os cálculos para obter o máximo ECL. A partícula original representa o corpo que temos interesse em estudar e saber sobre o seu comportamento. A partícula fantasma é o mesmo corpo que estamos estudando, porém há, em suas condições iniciais, uma pequena alteração, que na figura é denotada por  $d_0$ . A ideia é medir a divergência exponencial de duas trajetórias que iniciam de forma razoavelmente próximas. Após cada passo de tempo, reaproximamos a partícula fantasma da original de uma distância  $d_0$  novamente, e assim seguimos fazendo a integração até atingir o tempo final desejado.

Figura 5 – Esquema para o cálculo do máximo ECL. A partícula em preto é a original do sistema, ou o corpos de interesse do estudo. Em branco, a partícula fantasma, que é inicialmente vizinha da original. A reposição da partícula fantasma é feita em cada passo de tempo da integração.



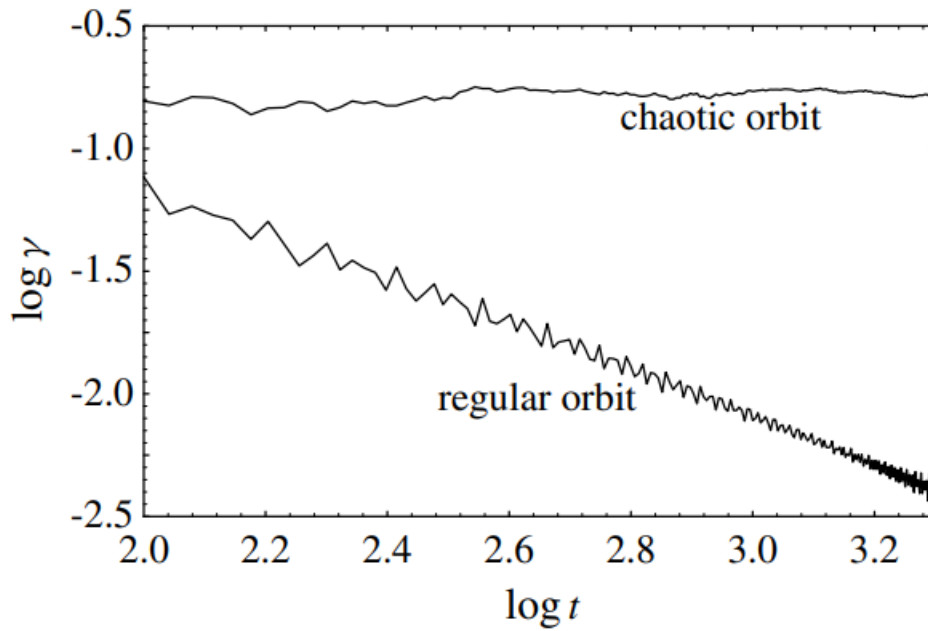
Fonte: Adaptado de (MURRAY; DERMOTT, 2000)

A Figura 6 mostra o comportamento do  $\log(\gamma)$  ao longo do tempo. É possível ver que, para órbitas caóticas, o  $\log(\gamma)$  parece estabilizar ao longo de  $\log(t)$ , enquanto que, para órbitas regulares, tem um comportamento decrescente.

Em dinâmica orbital, há casos onde os corpos apresentam um  $T_L$  relativamente curto, mas as suas órbitas não apresentam variações radiais expressivas. Mesmo após a passagem do tempo de Lyapunov, o corpo ainda continua confinado em uma região bem determinada do espaço. A isso se dá o nome de caos confinado.

Possuir uma variação radial pouco expressiva nos motiva a buscar o entendimento do comportamento radial da órbita a partir da análise do máximo ECL. Uma ideia é reescrever o máximo ECL usando a distância radial da órbita, ou contribuição radial do máximo ECL, e ver o quão próximo está do máximo ECL "completo". Se a contribuição radial estiver muito próxima do máximo ECL, podemos concluir que o caos da órbita se expressa radialmente, ou seja, após o  $T_L$ , o comportamento da órbita passa a apresentar variações radiais expressivas. Caso contrário, se a contribuição radial é tratada como irrelevante perto do máximo ECL, podemos concluir que o caos radial é fraco e, mesmo após passar o  $T_L$ , a órbita apresentará um comportamento radial regular.

Figura 6 – Gráfico do  $\log \gamma$  em função de  $\log t$  para dois tipos de trajetórias: regular e caótica. Para a trajetória regular, o comportamento de  $\log(\gamma)$  decai com o tempo, enquanto que para o caótico há uma estabilização.



Fonte: (MURRAY; DERMOTT, 2000)

Nos dois próximos capítulos serão mostrados os métodos bi e tridimensionais para entender a contribuição radial do máximo ECL para casos de caos confinado.

### 3.1 CONTRIBUIÇÃO RADIAL DO MÁXIMO EXPOENTE DE LYAPUNOV EM DUAS DIMENSÕES

Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010) mostraram uma aproximação para extrair a contribuição radial do Expoente de Lyapunov em casos bidimensionais onde há caos confinado.

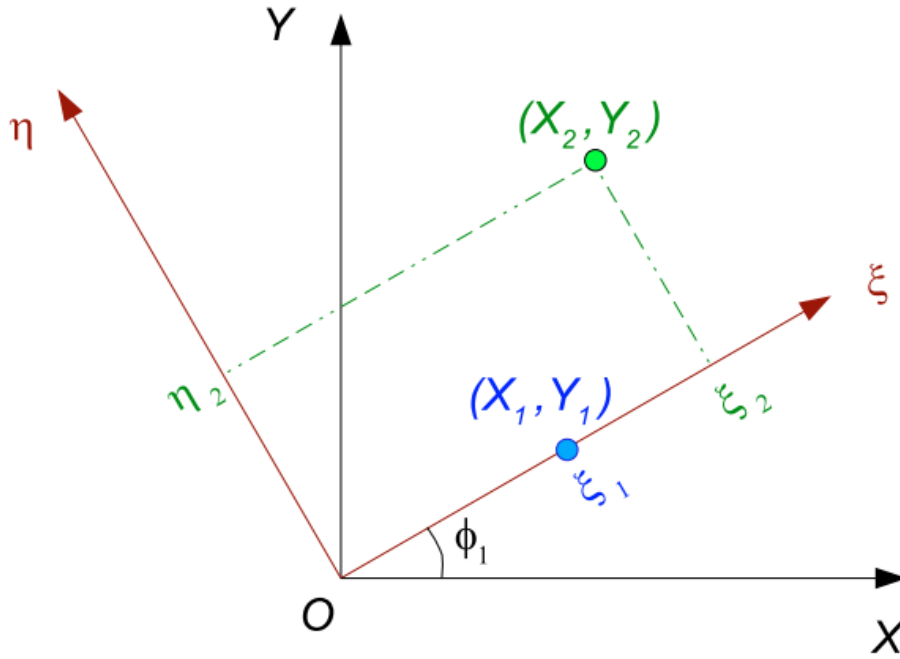
A Figura 7 mostra o sistema de coordenadas do espaço de fase utilizado pelos autores para encontrar o máximo ECL. O referencial XOY é chamado de referencial inercial, enquanto o referencial  $\xi O \eta$  é chamado de referencial girante. A ideia do método bidimensional é fazer as conversões das posições e velocidades das coordenadas inerciais para coordenadas girantes e escrever o máximo ECL nessas novas coordenadas e, a partir daí, extrair a contribuição radial do mesmo.

Considere que o objeto que temos o interesse de estudar a sua dinâmica tenha as coordenadas iniciais de posição em  $(X_1, Y_1)$  e velocidade em  $(V_{X1}, V_{Y1})$ . O objeto de interesse no nosso estudo percorre uma trajetória que chamaremos de trajetória original. O eixo  $\xi$  sempre estará acompanhando o objeto de interesse, e será considerado que esse eixo sempre estará na direção radial do movimento do mesmo. Agora considere que as coordenadas  $(X_2, Y_2)$  e  $(V_{X2}, V_{Y2})$  sejam as coordenadas iniciais da trajetória inicialmente espaçada de  $d_0$  da trajetória original do objeto que estamos estudando. A trajetória inicialmente espaçada será chamada de trajetória alterada.

O cálculo da distância entre as duas trajetórias no espaço de fase é dada por

$$d = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (V_{X1} - V_{X2})^2 + (V_{Y1} - V_{Y2})^2}. \quad (7)$$

Figura 7 – Referencial girante bidimensional.



Fonte: Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010).

A Figura 7 mostra que o eixo  $\xi$  faz um ângulo  $\phi_1$  com o eixo  $X$ . Para converter as coordenadas do referencial inercial nas coordenadas do referencial girante, basta tomar a matriz de rotação levando em conta o ângulo  $\phi_1$ , ou seja

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}, \quad (8)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de rotação entre os sistemas de referência

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) & \sin(\phi_1) \\ -\sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

O mesmo acontece para as velocidades no novo referencial

$$\begin{pmatrix} V_{\xi_i} \\ V_{\eta_i} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} V_{X_i} \\ V_{Y_i} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Portanto, é possível calcular a distância entre as trajetórias no espaço de fases para o sistema de referência girante na seguinte forma

$$d = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (V_{\xi_1} - V_{\xi_2})^2 + (V_{\eta_1} - V_{\eta_2})^2}. \quad (11)$$

De acordo com a Figura 7, as coordenadas do objeto estão sempre sobre o eixo  $\xi$  do referencial girante, então o movimento do objeto é seguido pela rotação do referencial girante. A diferença entre  $\xi_1$  e  $\xi_2$  é chamada de variação radial. Com isso, é possível saber quanto a trajetória alterada difere da trajetória original radialmente. Matematicamente, temos

$$d_{\text{rad}}(i\tau) = |\xi_1 - \xi_2|, \quad (12)$$

que indica a variação radial entre as duas trajetórias em cada passo de tempo. Com isso, é possível escrever o cálculo do máximo ECL para a diferença da distância radial na seguinte forma

$$\gamma_r = \frac{1}{k\tau} \sum \ln \left( \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{d_0} \right). \quad (13)$$

O máximo ECL sem a contribuição radial é dado por

$$\gamma_* = \frac{1}{k\tau} \sum \ln \left( \frac{\sqrt{(\eta_1 - \eta_2)^2 + (V_{\xi_1} - V_{\xi_2})^2 + (V_{\eta_1} - V_{\eta_2})^2}}{d_0} \right). \quad (14)$$

A ideia desse método é decompor as coordenadas de posição em componentes radial do movimento e ver o quão forte é a contribuição do caos radial no máximo ECL. Se o caos radial é fraco, então a Eq.(14) deve assumir valores próximos daquelas produzidos pela Eq.(??).

Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010) aplicaram o método bidimensional para pequenos corpos do sistema solar, tal como asteróides perturbados por Júpiter e luas de Saturno. A Figura 8 mostra a variação radial e a aplicação do método bidimensional para o caso de um asteroide perturbado por Júpiter. É possível ver que a órbita do asteroide, em vermelho, tem uma variação radial irregular, porém permanece confinada dentro de uma região limitada pelo semieixo maior de Júpiter. Embora tenha variações irregulares, a diferença na amplitude da variação radial apresenta pouca diferença, indicando que o caos é confinado.

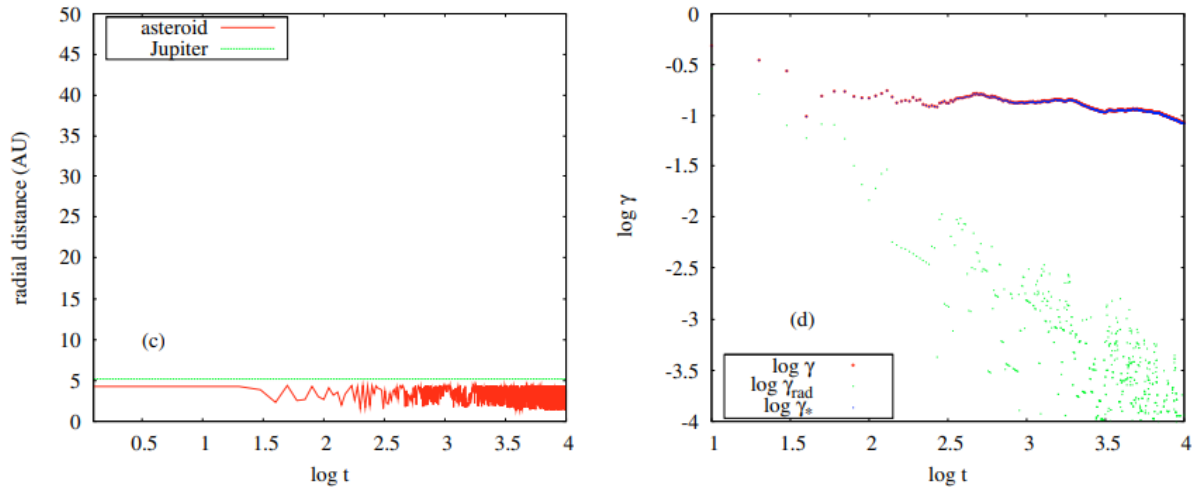
Para confirmar isso, os autores aplicaram o método bidimensional para o asteroide. Os pontos vermelhos e azuis representam, respectivamente, o máximo ECL e o máximo ECL sem a contribuição radial. É possível perceber que os pontos caminham muito próximos ao longo do tempo, o que torna quase imperceptível a diferença entre um e outro. Os pontos em verde representam a contribuição radial do máximo ECL, e podemos perceber que os pontos em verde são ordens de grandezas menores do que os outros, indicando que as variações do movimento radial do asteroide não possuem elevadas amplitudes.

A Figura 9 mostra o caso em que o asteroide apresenta grandes variações radiais e cruza com a órbita de Júpiter. Da aplicação do método bidimensional é possível ver que os pontos em verde, dessa vez, enquanto a órbita estava confinada, os pontos azuis permaneceram próximos dos pontos vermelhos, mas, quando o asteroide cruza a órbita, temos que os pontos verdes se aproximam e os pontos azuis se afastam. Ou seja, quando o asteroide passou a ter um movimento radial caótico, a contribuição radial do máximo ECL se aproximou do máximo ECL, indicando que o caos era, de fato, radial, e não confinado.

A vantagem de se utilizar esse método é que podemos entender os casos onde o tempo de Lyapunov é relativamente curto, mas a órbita do objeto não apresenta variações radiais significativas, ou seja, embora tenha uma dinâmica caótica, o objeto permanece confinado em uma região bem determinada do sistema.

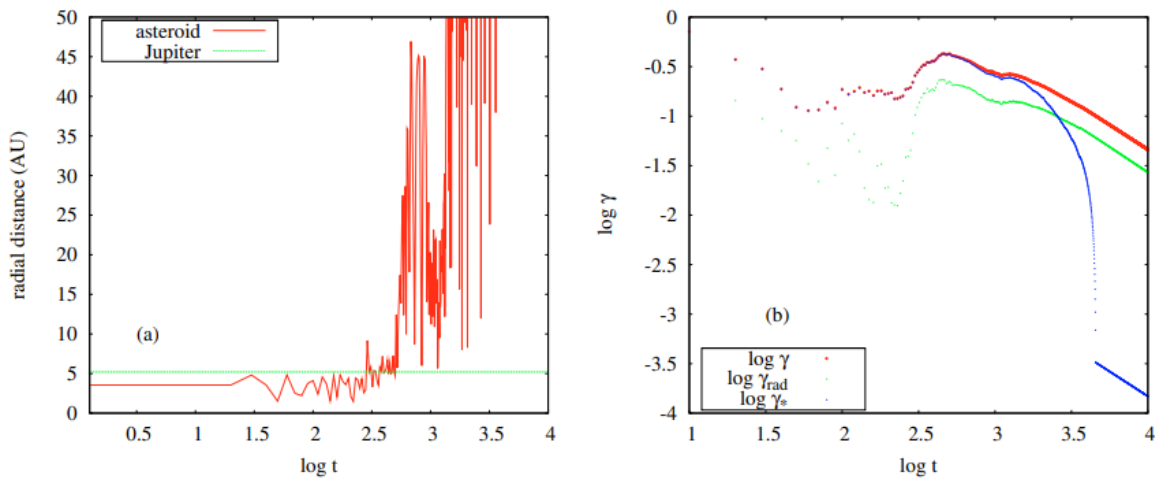
Porém, o método bidimensional não cobre todos os casos do sistema solar, o que torna necessário

Figura 8 – Asteroide perturbado por Jupiter retirados de Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010). Esse caso mostra um asteroide que não cruza a órbita do seu perturbador. Os ponto em vermelho no gráfico do máximo ECL mostram os resultados para  $\gamma$ , em azul os resultados para  $\gamma_*$  e em vermelho para  $\gamma_r$ .



Fonte: Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010).

Figura 9 – Asteroide perturbado por Júpiter retirados de Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010). Esse caso mostra um asteroide que cruza a órbita do seu perturbador e é ejetado. Os ponto em vermelho no gráfico do máximo ECL mostram os resultados para  $\gamma$ , em azul os resultados para  $\gamma_*$  e em vermelho para  $\gamma_r$ .



Fonte: Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010).

expandir a formulação matemática para o caso tridimensional, o qual será visto no próximo capítulo.

### 3.2 MÉTODO TRIDIMENSIONAL

Ao estudar a dinâmica de corpos do sistema solar, nem sempre temos sistemas que são planares, ou seja, há muitos casos em que a inclinação da órbita de tais objetos não podem ser aproximadas para zero. A formulação matemática anterior trata de sistemas bidimensionais. Embora seja uma ferramenta extremamente útil para encontrar a contribuição radial do máximo ECL, ela não abrange todos os casos do sistema solar. Para isso, neste capítulo será apresentada a formulação tridimensional para encontrar a contribuição radial do máximo ECL em casos onde o tempo de Lyapunov é relativamente curto.

Sejam  $(X_A, Y_A, Z_A, V_{XA}, V_{YA}, V_{ZA})$  as posições e velocidades do corpo original e  $(X_F, Y_F, Z_F, V_{XF}, V_{YF}, V_{ZF})$  as posições e velocidades do corpo fantasma que percorre a trajetória vizinha. Os vetores de posição do corpo original e do fantasma, em coordenadas cartesianas, são dados por  $\mathbf{r}_A = (X_A, Y_A, Z_A)$  e  $\mathbf{r}_F = (X_F, Y_F, Z_F)$ . Lembrando que o máximo ECL pode ser calculado na seguinte forma

$$\gamma = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=1}^k \ln \left( \frac{d(i\tau)}{d_0} \right), \quad (15)$$

onde a distância no espaço de fase é escrita como

$$d(i\tau) = \left[ (X_A - X_F)^2 + (Y_A - Y_F)^2 + (Z_A - Z_F)^2 + (V_{XA} - V_{XF})^2 + (V_{YA} - V_{YF})^2 + (V_{ZA} - V_{ZF})^2 \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Expandindo os seguintes termos

$$(X_A - X_F)^2 = X_A^2 - 2X_AX_F + X_F^2,$$

$$(Y_A - Y_F)^2 = Y_A^2 - 2Y_AY_F + Y_F^2,$$

$$(Z_A - Z_F)^2 = Z_A^2 - 2Z_AZ_F + Z_F^2.$$

e lembrando que os módulos dos vetores distância do corpo original ( $\mathbf{r}_A$ ) e do corpo fantasma ( $\mathbf{r}_F$ ) em relação a origem são dados por

$$|\mathbf{r}_A| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad (17)$$

$$|\mathbf{r}_F| = \sqrt{X_F^2 + Y_F^2 + Z_F^2}, \quad (18)$$

podemos somar as expansões e reescrever como

$$\begin{aligned} & (X_A - X_F)^2 + (Y_A - Y_F)^2 + (Z_A - Z_F)^2 \\ &= X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2 + X_F^2 + Y_F^2 + Z_F^2 - 2(X_AX_F + Y_AY_F + Z_AZ_F) \\ &= |\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_F|^2 - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F. \end{aligned} \quad (19)$$

Lembrando que o produto vetorial entre dois vetores pode ser escrito como

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F = |\mathbf{r}_A| |\mathbf{r}_F| \cos(\theta), \quad (20)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_F$ .

Então, a distância no espaço de fase pode ser reescrita como

$$d(i\tau) = \sqrt{|\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_F|^2 - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F \cos(\theta) + (V_{XA} - V_{XF})^2 + (V_{YA} - V_{YF})^2 + (V_{ZA} - V_{ZF})^2}. \quad (21)$$

Vamos reescrever a Eq.21 na seguinte forma

$$d(i\tau) = \left[ |\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_F|^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F \cos(\theta) + (V_{XA} - V_{XF})^2 + (V_{YA} - V_{YF})^2 + (V_{ZA} - V_{ZF})^2 \right]^{1/2}, \quad (22)$$

que pode ser desenvolvida de acordo com os seguintes passos

$$d(i\tau) = \left[ |\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_F|^2 \sin^2(\theta) + |\mathbf{r}_F|^2 \cos^2(\theta) - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F \cos(\theta) + (V_{XA} - V_{XF})^2 + (V_{YA} - V_{YF})^2 + (V_{ZA} - V_{ZF})^2 \right]^{1/2}, \quad (23)$$

$$d(i\tau) = \left[ |\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_F|^2 \cos^2(\theta) - 2\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F \cos(\theta) + |\mathbf{r}_F| |\sin(\theta)| + (V_{XA} - V_{XF})^2 + (V_{YA} - V_{YF})^2 + (V_{ZA} - V_{ZF})^2 \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$d(i\tau) = \sqrt{||\mathbf{r}_A| - |\mathbf{r}_F|| \cos(\theta)| + |\mathbf{r}_F| |\sin(\theta)| + (V_{XA} - V_{XF})^2 + (V_{YA} - V_{YF})^2 + (V_{ZA} - V_{ZF})^2}, \quad (25)$$

A Eq.25 mostra algo interessante. Os dois primeiros termos da soma que há dentro da raiz quadrada mostram a soma do que parece ser a decomposição do vetor  $\mathbf{r}_F$  no vetor  $\mathbf{r}_A$  e a componente perpendicular do vetor  $\mathbf{r}_F$ . Com isso, podemos partir para o passo onde extraímos a componente radial do máximo ECL. A ideia central deste desenvolvimento é escrever o máximo ECL usando apenas a distância radial, a qual deverá ser extraída da distância no espaço de fase.

Agora vamos mostrar os passos para obter a componente radial do máximo ECL. Como foi visto, podemos encontrar os módulos das distâncias do corpo original e do corpo fantasma, com relação a origem do sistema de coordenadas, respectivamente, na seguinte forma

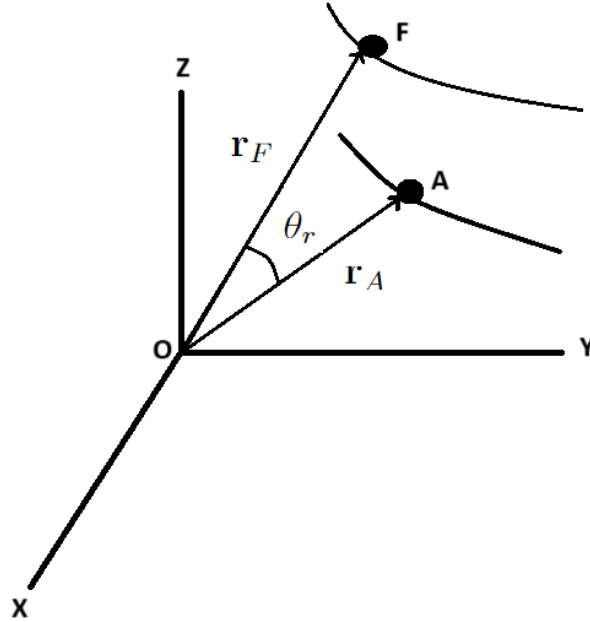
$$|\mathbf{r}_A| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad (26)$$

$$|\mathbf{r}_F| = \sqrt{X_F^2 + Y_F^2 + Z_F^2}. \quad (27)$$

Vamos adotar o vetor  $\mathbf{r}_A$  como o vetor radial de referência. A ideia é avaliar o quanto  $\mathbf{r}_F$  vai variar,

em módulo, em relação ao vetor  $\mathbf{r}_A$ , mas como  $\mathbf{r}_A$  é o vetor radial de referência, então poderemos comparar a variação do corpo fantasma em relação ao original. Para encontrar a contribuição radial do máximo ECL, precisamos decompor  $\mathbf{r}_F$  em  $\mathbf{r}_A$  e ver quanto o vetor radial do corpo fantasma variou em relação ao vetor radial do corpo original. A Figura 10 mostra o esquema gráfico.

Figura 10 – Esquema para representar os vetores  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_F$  e as suas respectivas trajetórias.



Fonte: Produção do próprio autor.

O ângulo entre  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_F$  é dado por

$$\Delta\theta_r = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_F}{|\mathbf{r}_A||\mathbf{r}_F|} \right). \quad (28)$$

Com isso, podemos encontrar a projeção de  $\mathbf{r}_F$  em  $\mathbf{r}_A$  fazendo

$$d_{proj} = |\mathbf{r}_F| \cos(\Delta\theta_r). \quad (29)$$

A Figura 11 mostra, em vermelho, a representação de  $d_{proj}$ . Sendo assim, a distância radial é dada pela diferença entre  $\mathbf{r}_A$  e  $d_{proj}$ , ou seja

$$d_{rad} = ||\mathbf{r}_A| - |\mathbf{r}_F| \cos(\Delta\theta_r)|. \quad (30)$$

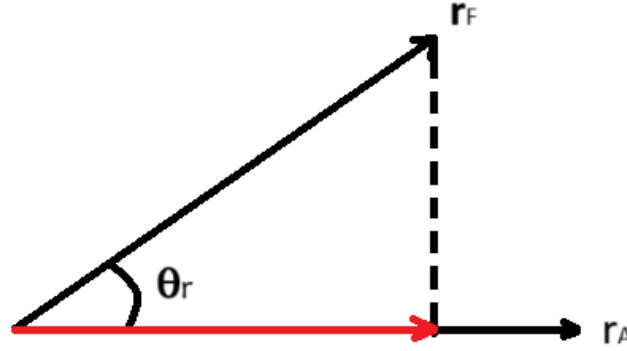
Consequentemente, podemos encontrar a distância perpendicular entre  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}_F$  na seguinte forma

$$d_{\perp} = |\mathbf{r}_F| \sin(\Delta\theta_r). \quad (31)$$

Lembrando que

$$\gamma = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d(i\tau)}{d_0} \right). \quad (32)$$

Figura 11 – Projeção de  $r_F$  em  $r_A$  para separar a contribuição radial do máximo ECL.



Fonte: Produção do próprio autor.

Finalmente, a contribuição radial do máximo ECL, que também poderá ser chamado de "Lyapunov Radial", é dada por

$$\gamma_{rad} = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=1}^k \ln \left( \frac{d_{rad}(i\tau)}{d_0} \right). \quad (33)$$

Percebemos que a distância radial já está inserida na distância no espaço de fase de acordo com a Eq.25. A ideia até aqui é avaliar somente essa componente separada do resto, e ver o quanto ela se aproxima do valor real do máximo ECL, ou o máximo ECL completo. Para encontrar o máximo ECL sem a contribuição radial, que também poderá ser chamado de "Lyapunov Resto" ou apenas "Resto", basta excluir a distância radial da Eq.(25), ou seja,

$$\gamma_* = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=1}^k \ln \left( \frac{d_*(i\tau)}{d_0} \right), \quad (34)$$

onde  $d_0$  é a distância inicial que separa as órbitas de Atlas e Atlas fantasma e

$$d_*(i\tau) = [(d_{\perp}(i\tau))^2 + (V_{xA} - V_{xG})^2 + (V_{yA} - V_{yG})^2 + (V_{zA} - V_{zG})^2]^{1/2}. \quad (35)$$

Com isso, espera-se que, se o sistema apresenta um regime de caos confinado, a Eq.(33) seja muito menor do que os valores obtidos pela Eq.(32), e que a Eq.(34) apresente valores mais próximos do máximo ECL.

#### 4 METODOLOGIA

Para realizar as integrações numéricas para o caso Atlas, foi utilizado o integrador GAUSS-RADAU, desenvolvido por Everhart (1985). O trabalho de Cooper et al. (2015) trouxe um estudo sobre o caos de Atlas, onde foram adotadas as condições iniciais das integrações na seguinte época: 2454252.50075446 JD TDB (1 de Junho de 2007, às 00:00:00.0 UTC). A fim de comparar os nossos resultados com os resultados encontrados por eles, e de avaliar a contribuição radial no movimento caótico de Atlas, todas as condições iniciais usadas nesse trabalho também foram tomadas em 1 de Junho de 2007, às 00:00:00.0 UTC. As posições e velocidades das condições iniciais foram extraídas do JPL Horizons para essa época. Para extrair todas as coordenadas, nós consideramos o centro do sistema de coordenadas cartesiano no centro de Saturno, com o plano x-y localizado ao longo do seu equador, e o eixo z ao longo do polo norte de Saturno.

As tabelas 1 e 2 mostram todas as condições iniciais para cada satélite envolvido nesse estudo. Assim como Cooper et al. (2015), foram realizadas integrações no sistema de 3 corpos, contendo Saturno, Atlas e Prometeu, porém neste trabalho foram feitas integrações usando o sistema de 5 corpos, contendo Saturno, Atlas, Prometeu, Pandora e Mimas.

Tabela 1 – Posições retiradas do JPL Horizons para a época 2454252.50075446 JD TDB (1 de Junho de 2007 às 00:00:00.0 UTC), onde o centro de coordenadas está localizado no centro de Saturno, com o plano x-y ao longo do equador do planeta, e o eixo z na mesma direção do polo norte.

|          | Posição (km)                    |
|----------|---------------------------------|
| Atlas    |                                 |
| $X$      | $8.906558866712821 \cdot 10^4$  |
| $Y$      | $-1.047730525162559 \cdot 10^5$ |
| $Z$      | $-5.232363527045891$            |
| Prometeu |                                 |
| $X$      | $8.819608548135853 \cdot 10^4$  |
| $Y$      | $1.082601236696416 \cdot 10^5$  |
| $Z$      | $-1.005150868315468 \cdot 10^1$ |
| Pandora  |                                 |
| $X$      | $2.628002001934099 \cdot 10^4$  |
| $Y$      | $-1.396503290056520 \cdot 10^5$ |
| $Z$      | $-1.052551033149084 \cdot 10^2$ |
| Mimas    |                                 |
| $X$      | $-1.281298230245274 \cdot 10^5$ |
| $Y$      | $1.387520241317965 \cdot 10^5$  |
| $Z$      | $2.889491311051997 \cdot 10^3$  |

Fonte: Produção do Próprio Autor.

As integrações numéricas do problema de 3 corpos realizadas por Cooper et al. (2015) foram suficientes para mostrar a caoticidade de Atlas. Logo, a perturbação causada por Prometeu em Atlas já é suficiente para causar irregularidades em sua órbita. Para ser consistente com o trabalho desenvolvido por Winter, Mourão e Giuliatti Winter (2010), o tempo escolhido para cada passo de integração foi de

Tabela 2 – Velocidades retiradas do JPL Horizons em 2454252.50075446 JD TDB (1 de Junho de 2007 às 00:00:00.0 UTC), onde o centro de coordenadas está localizado no centro de Saturno, com o plano x-y ao longo do equador do planeta, e o eixo z na mesma direção do polo norte.

|          | Velocidade (km·s <sup>-1</sup> )   |
|----------|------------------------------------|
| Atlas    |                                    |
| $V_X$    | $1.268791452210001 \cdot 10^1$     |
| $V_Y$    | $1.079208341123546 \cdot 10^1$     |
| $V_Z$    | $2.399153952759026 \cdot 10^{-4}$  |
| Prometeu |                                    |
| $V_X$    | $-1.278314052022474 \cdot 10^1$    |
| $V_Y$    | $1.043946959628510 \cdot 10^1$     |
| $V_Z$    | $1.689500778111253 \cdot 10^{-3}$  |
| Pandora  |                                    |
| $V_X$    | $1.606042898477623 \cdot 10^1$     |
| $V_Y$    | $3.074416688732564$                |
| $V_Z$    | $7.509997929307122 \cdot 10^{-3}$  |
| Mimas    |                                    |
| $V_X$    | $-1.040629135325750 \cdot 10^1$    |
| $V_Y$    | $-9.450700257680051$               |
| $V_Z$    | $-3.165819028912453 \cdot 10^{-1}$ |

Fonte: Produção do Próprio Autor.

10 períodos orbitais de Prometeu. O tempo total de integração para avaliar o Expoente de Lyapunov foi de  $10^7$  períodos orbitais de Prometeu, o que é aproximadamente 16 mil anos. Para poder calcular as distâncias no espaço de fase, todas as coordenadas de posição e velocidade foram normalizadas pelo semieixo maior (139350 km) de Prometeu e o seu período orbital (0.6 dias). A distância da separação inicial entre Atlas e o Atlas fantasma, ou seja, o  $d_0$  que aparece nas equações descritas anteriormente, foi de  $10^{-7}$  vezes o semieixo maior de Prometeu.

Para realizar a integração numérica, os efeitos originados da forma não esférica de Saturno foram considerados. Levamos em conta os harmônicos esféricos  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$ . As componentes da força gravitacional que um corpo experimenta ao orbitar um corpo oblato em cada uma das componentes considerando  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  é dada por:

$$F_x = -\frac{GM}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143z^6}{5r^6} \right) \right] x,$$

$$F_y = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{15}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 1 - 14 \frac{z^2}{r^2} + 21 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{1}{3} + 9 \frac{z^2}{r^2} - 33 \frac{z^4}{r^4} + \frac{143z^6}{5r^6} \right) \right] y,$$

$$F_z = -\frac{GM_p}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left( 3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{5}{8} J_4 \frac{R_p^4}{r^4} \left( 25 - 70 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) + \frac{105}{16} J_6 \frac{R_p^6}{r^6} \left( \frac{7}{3} + 21 \frac{z^2}{r^2} - \frac{231 z^4}{5 r^4} + \frac{143 z^6}{5 r^6} \right) \right] z.$$

A tabela 3 mostra os dados utilizados para Saturno em todas as integrações. Vale ressaltar que, para simplificar os cálculos, as massas dos satélites foram normalizadas pela massa de Saturno, portanto, a massa de Saturno nas integrações é igual a 1.

Tabela 3 – Constantes de Saturno usadas nas integrações numéricas.

| Constantes de Saturno                 |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| GM(km <sup>3</sup> ·s <sup>-2</sup> ) | 3.793120706585872·10 <sup>7</sup>   |
| Raio (km)                             | 60330                               |
| J <sub>2</sub>                        | 1.629084747205768·10 <sup>-2</sup>  |
| J <sub>4</sub>                        | -9.336977208718450·10 <sup>-4</sup> |
| J <sub>6</sub>                        | 9.643662444877887·10 <sup>-5</sup>  |

Fonte: Extraídos de Cooper et al. (2015).

Por fim, para realizar a conversão dos vetores de estado em elementos geométricos é necessário levar em conta os harmônicos esféricos (RENNER; SICARDY, 2006). Esse passo foi feito para realizar a comparação dos nossos resultados com os resultados obtidos por Cooper et al. (2015).

Para realizar as integrações numéricas para o caso Halley foi utilizado o pacote REBOUND e o integrador ias15. A mudança de pacote e integrador foi feita devido a facilidade que o REBOUND traz para adicionar e trabalhar com uma quantidade elevada de corpos. As condições iniciais adotadas nessa etapa foram tomadas do JPL Horizons, na mesma data em que Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015) tomaram, ou seja, no dia 1 de Outubro de 2012. O sistema adotado pelos autores é formado pelo Sol e pelos planetas do sistema solar, exceto o planeta Mercúrio, ou seja: Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Levou-se em conta também: Eris, Ceres, Orcus, Quaoar, Varuna e Ixion.

O caso do cometa 1P/Halley é relativamente mais simples do que o caso Atlas por não foram levados em conta os efeitos de achatamento planetário. Todos os corpos foram considerados como massas pontuais.

O tempo escolhido para cada passo de integração nesse caso foi de 100 anos, assim como fizeram Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015), e o tempo total de integração foi de 1 milhão de anos. Para encontrar as distâncias no espaço de fase e para poder calcular o máximo ECL, fizemos a normalização das coordenadas de posição pelo semieixo maior do cometa, que é de aproximadamente  $2.66 \times 10^9$  km. A distância de separação inicial entre Halley e o Halley fantasma foi de  $10^{-6}$  unidades astronômicas. Essa separação inicial foi aplicada em cada uma das coordenadas de posição das condições iniciais do cometa Halley.

Com isso, temos os dados para prosseguir com as simulações e os resultados, que serão mostrados no próximo capítulo.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo vamos apresentar os resultados obtidos nesta dissertação para os sistemas estudados envolvendo o satélite de Saturno Atlas e o cometa Halley.

### 5.1 ATLAS

Como mencionado anteriormente, vamos realizar as integrações de dois sistemas, um com três e outro com cinco corpos. Para saber se um sistema é caótico ou não, precisamos computar o ECL para os dois sistemas e analisar a contribuição radial em cada caso.

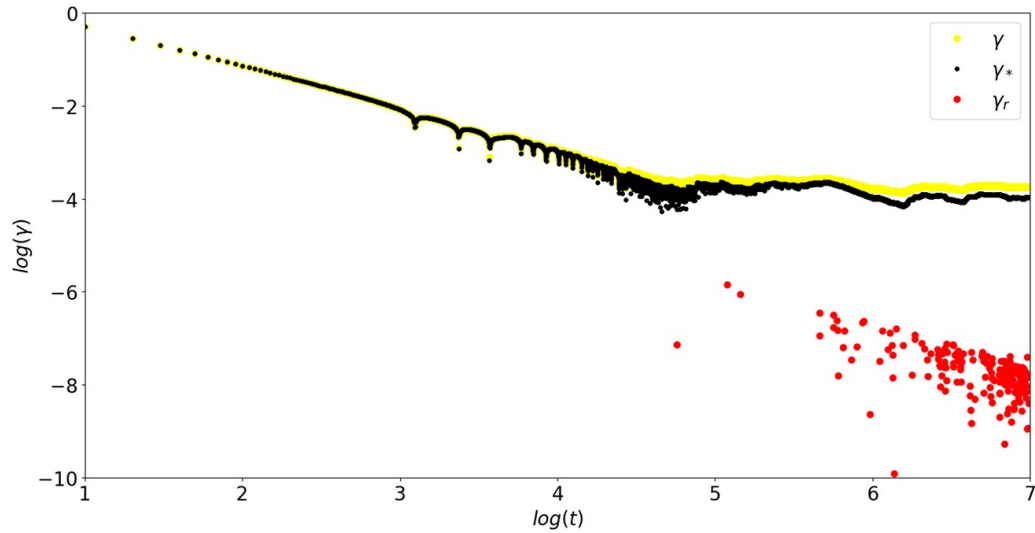
Vamos considerar o sistema de três corpos. Na Figura 12, é mostrado o gráfico obtido a partir das Eqs.(32), (33) e (34), todas do capítulo 4. Os pontos em amarelo representam o máximo ECL de Atlas, ou  $\gamma$  dado pela Eq.(32). Os pontos em preto representam o máximo ECL sem levar em conta a contribuição radial, que são dados pela Eq.(34). Analisando os dois resultados, podemos ver que  $\gamma$  e  $\gamma_*$  são muito próximos, e isso indica que, mesmo retirando a contribuição radial do Expoente de Lyapunov, o sistema ainda permanece caótico, ou seja, as irregularidades no movimento radial de Atlas pode ser desprezado. Para melhor visualizar isso, mostramos os pontos em vermelho que representam  $\gamma_r$  dado pela Eq.(33). Com isso é possível ver que a contribuição radial do ECL para Atlas no sistema com 3 corpos é ordens de magnitude menores do que o ECL completo. No início da integração não é possível ver os outros pontos vermelhos devido ao fato de que seus valores são menores do que  $10^{-10}$ . Mesmo aparecendo algumas vezes durante a integração, esses pontos indicam que o movimento radial de Atlas ainda permanece sem irregularidades significativas.

O tempo de Lyapunov do Atlas para o problema de 3 corpos, depois de integrar por  $10^7$  períodos orbitais, é de aproximadamente 8.9 anos, o qual é da mesma ordem do tempo de Lyapunov encontrado por Cooper et al. (2015) é de aproximadamente 10 anos. Para esse sistema, Renner et al. (2016) explicaram que o caos do movimento de Atlas é causado por um acoplamento ressonante (CER/LER) com Prometeu.

O problema de 5 corpos também foi integrado, e os mesmos passos foram feitos para esse caso. A Figura 13 mostra o máximo ECL, também representado pelos pontos amarelos, e os pontos pretos que também representam o ECL sem a contribuição radial. Assim como anteriormente, os pontos amarelos e pretos estão muito próximos, mostrando que, mesmo retirando a contribuição radial, o ECL permanece praticamente inalterado. Neste caso, alguns pontos em vermelho, que representam o contribuição radial do ECL, aparecem ao longo da integração, e também possuem ordens de magnitude menores do que o ECL completo. Para esse segundo caso, o tempo de Lyapunov encontrado foi de aproximadamente 9,4 anos, da mesma ordem do tempo encontrado por Cooper et al. (2015).

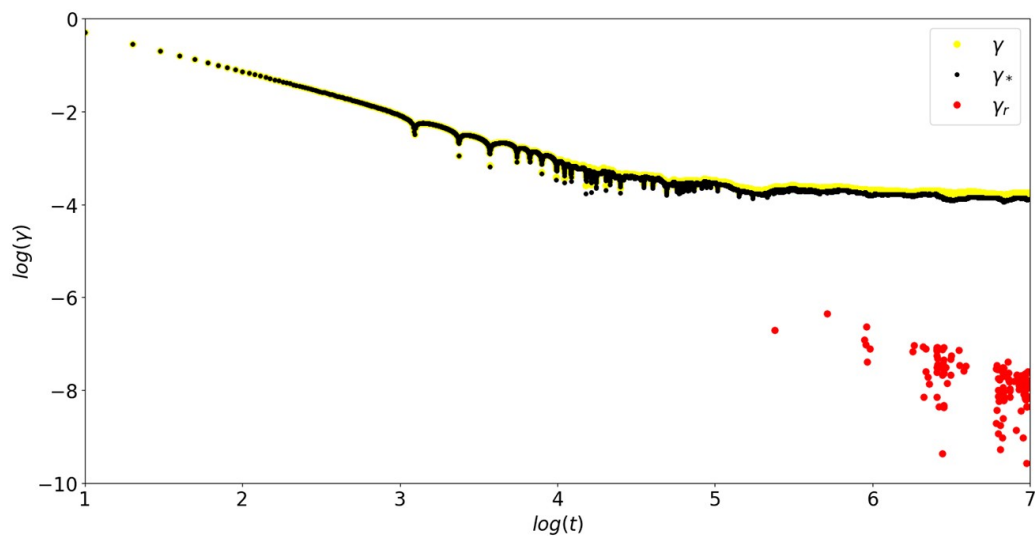
O máximo ECL dos dois sistemas que foram integrados anteriormente e o ECL sem a contribuição radial assumiram valores muito próximos uns dos outros, enquanto os valores do ECL do movimento radial ficou ordens de magnitudes menor. Isso é uma indicação de que o caos de Atlas pode ser confinado. Para confirmar isso, devemos analisar a evolução do raio orbital de cada satélite ao longo do tempo de integração. Na Figura 14, temos a variação radial das órbitas de Atlas e Prometeu,

Figura 12 – Expoente de Lyapunov para o sistema de 3 corpos. Os pontos em amarelo representam o ECL de Atlas, dados por  $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial, dados por  $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por  $\gamma_r$ .



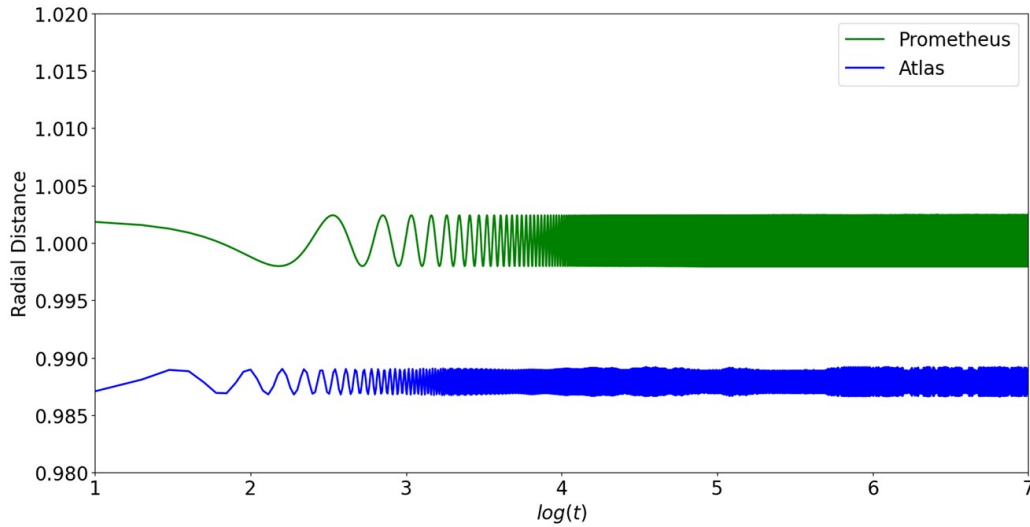
Fonte: Produção do Próprio Autor.

Figura 13 – Expoente de Lyapunov para o sistema de 3 corpos. Os pontos em amarelo representam o ECL de Atlas, dados por  $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial, dados por  $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por  $\gamma_r$ .



Fonte: Produção do Próprio Autor.

Figura 14 – Evolução temporal da variação radial da órbita de Atlas e Prometeu, com relação ao centro de massa do sistema de 3 corpos. A distância neste gráfico é normalizada pelo semieixo maior de Prometeu. A curva em azul corresponde a distância radial de Atlas, e em verde, a distância radial de Prometeu.



Fonte: Produção do próprio autor.

normalizadas pelo semieixo maior de Prometeu, no sistema de três corpos. Nesse caso, o tempo de Lyapunov é próximo de 8.9 anos, ou 5.4 mil períodos orbitais de Prometeu. Podemos notar na figura que, entre  $10^4$  e  $10^6$  períodos orbitais, diversas protuberâncias ocorreram na evolução radial de Atlas, e elas ocorreram de forma aperiódica, caracterizando um comportamento caótico do satélite, assim como foi mostrado por Cooper et al. (2015) e Renner et al. (2016). É válido notar que as variações radiais apresentadas possuem amplitudes relativamente pequenas, e são aproximadamente  $3 \times 10^3$  vezes menor do que o semieixo maior de Prometeu.

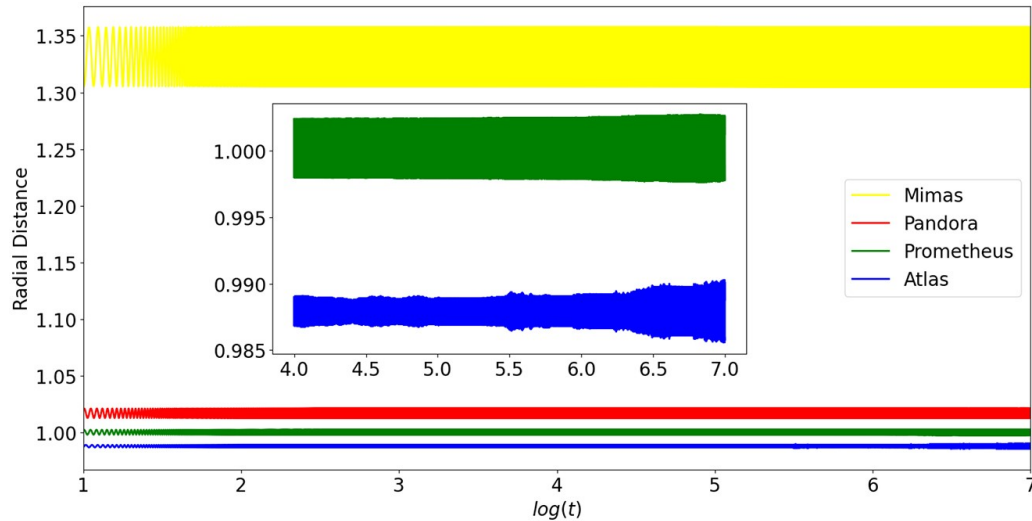
Entre  $10^6$  e  $10^7$  períodos orbitais, é possível ver um acréscimo da ocorrência de tais protuberâncias na variação radial de Atlas. Essas pequenas irregularidades estão de acordo com o aparecimento dos pontos em vermelho na Figura 12. Entretanto, mesmo com a presença desses pontos em vermelho, as amplitudes da distância radial de Atlas não possuem variações significativas. Mesmo apresentando essas irregularidades, Atlas possui a sua órbita confinada entre  $137.5 \times 10^3$  km e  $137.8 \times 10^3$  km. Além disso, a órbita de Atlas ficou confinada após o tempo da integração ultrapassar o tempo de Lyapunov.

Na Figura 15, a mesma análise foi realizada para o sistema de cinco corpos. As órbitas de todos os satélites permanecem bem comportadas e confinadas durante toda a integração numérica, mesmo após um tempo muito além do que o tempo de Lyapunov para esse caso, ou seja, 9.4 anos. Assim como na Figura 14, a distância radial de Atlas apresentou pequenas variações em sua amplitude, as quais ficaram em torno de  $10^3$  vezes menor do que o semieixo maior de Prometeu. Além disso, a sua órbita ficou confinada numa região de aproximadamente  $0.6 \times 10^3$  km de comprimento.

A Figura 16 é apresentada no trabalho de Cooper et al. (2015) e mostra evolução temporal do semieixo maior de Atlas e de sua excentricidade.

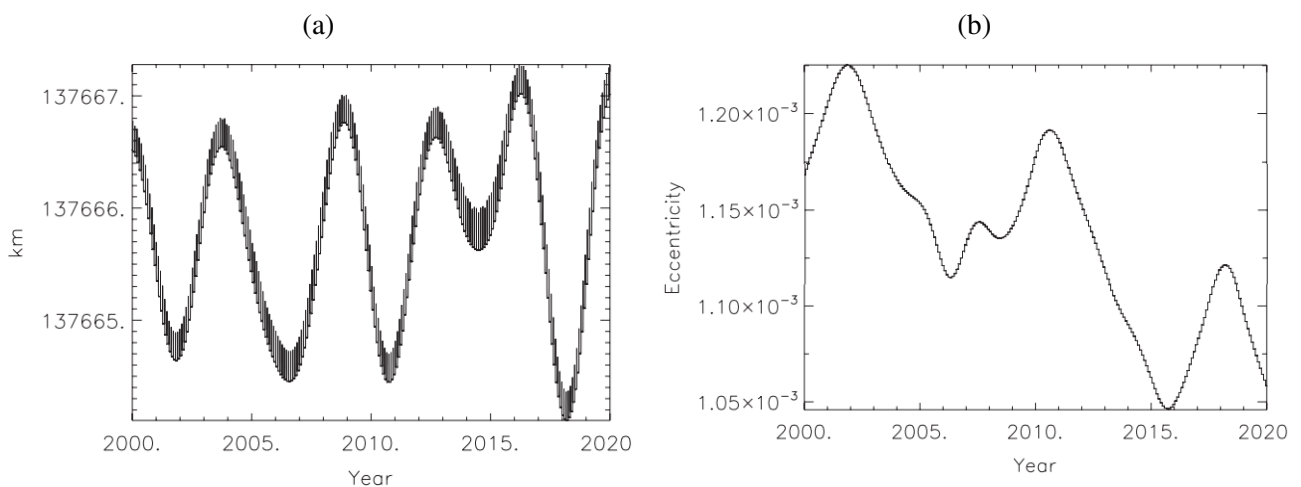
Os autores fizeram a integração numérica partindo de 1 de Janeiro de 2000 até 1 de Janeiro de 2020. Para encontrar a variação do semieixo maior e excentricidade, os autores usaram o método desenvolvido por Renner e Sicardy (2006), que leva em consideração as perturbações devido a não

Figura 15 – Evolução temporal da variação radial da órbita de Atlas, Prometeu, Pandora e Mimas com relação ao centro de massa do sistema de 5 corpos. A distância neste gráfico é normalizada pelo semieixo maior de Prometeu. A curva em azul corresponde a distância radial de Atlas, em verde a distância radial de Prometeu, em vermelho a distância radial de Pandora e em amarelo a distância radial de Mimas. Um zoom foi inserido no gráfico para uma melhor visualização.



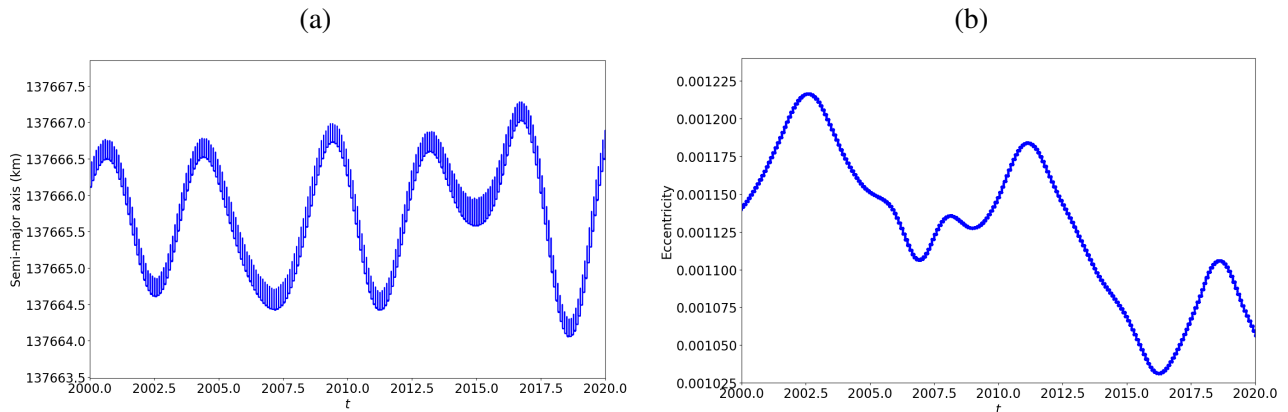
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 16 – Evolução do (a) semieixo maior e (b) excentricidade de Atlas no sistema de 3 corpos, a partir de 1 de Janeiro de 2000, usando as condições iniciais correspondentes aos da tabela 1.



Fonte: extraído de Cooper et al. (2015)

Figura 17 – Evolução do (a) semieixo maior e (b) excentricidade de Atlas no sistema de 3 corpos, a partir de 1 de Janeiro de 2000, usando as condições iniciais da tabela 1. As curvas apresentadas são muito similares com as curvas apresentadas por Cooper et al. (2015).



Fonte: Produção do próprio autor.

esfericidade de Saturno. Os dois elementos geométricos apresentaram variações aperiódicas no sistema de 3 corpos. No presente trabalho também foi feita a evolução temporal desses elementos geométricos para o sistema de 3 corpos, também utilizando o algoritmo de Renner e Sicardy (2006). As Figuras 17a e 17b mostram a evolução dos dois elementos geométricos ao longo do tempo. A reprodução possui boa aproximação com os resultados encontrados na Figura 16.

O comportamento irregular dos elementos orbitais estão de acordo com a variação das amplitudes encontradas na evolução temporal da distância radial de Atlas. Portanto, com base nos resultados obtidos na Figura 12, é possível concluir que, mesmo que os elementos geométricos apresentem irregularidades em sua evolução temporal, a sua contribuição no movimento caótico de Atlas é muito pequena, vide resultados envolvendo o ECL.

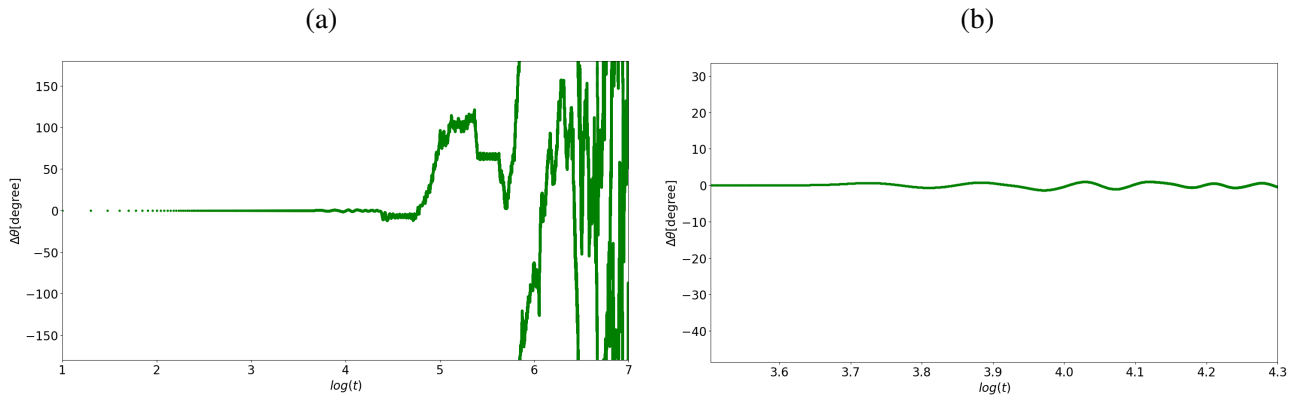
Após todas as análises envolvendo o ECL e a evolução do raio orbital, finalmente podemos concluir que o comportamento de Atlas se encaixa na definição de caos estável lançada por Milani e Nobili (1992). O tempo relativamente curto de Lyapunov e as pequenas variações nas amplitudes da distância radial motivaram o estudo do movimento angular de Atlas, o qual será apresentado abaixo.

Como o plano orbital de Atlas possui uma inclinação pequena, é possível calcular sua posição angular aproximada na órbita usando a relação trigonométrica

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{Y_A}{X_A} \right) \quad (1)$$

em cada passo de integração. Esse resultado é chamado de evolução angular original, pois ela parte das condições iniciais mostradas na tabela 1. Agora, uma pequena variação  $\delta = 10^{-2}$  km (ou equivalente a  $10^{-7}$  vezes o semieixo de Prometeu) é introduzida na coordenada x das condições iniciais de Atlas. Esse passo é realizado para detectar a sensibilidade às condições iniciais do movimento angular. Esse caso será chamado de evolução angular alterada. Como já foi visto, uma das definições de sistemas caóticos é baseada na sensibilidade às condições iniciais. Então, se o movimento angular é caótico, é esperado que os valores dos ângulos  $\theta$  da evolução original e da evolução alterada sofram uma

Figura 18 – Diferença da evolução angular no tempo de Atlas no sistema de 3 copos. (a) O gráfico mostra a diferença angular de Atlas entre a evolução angular original e a evolução angular alterada. (b) Zoom do gráfico (a) em um intervalo de tempo.



Fonte: Produção do próprio autor.

divergência entre si, e passem a assumir valores completamente distintos ao longo do tempo.

Para detectar essa divergência entre as posições angulares, foram realizadas as integrações numéricas e, em cada passo de tempo, foram medidas as diferenças entre os valores angulares da evolução angular original e da evolução angular alterada. Caso o sistema não seja caótico angularmente, é esperado que a diferença entre os dois valores angulares seja relativamente pequena.

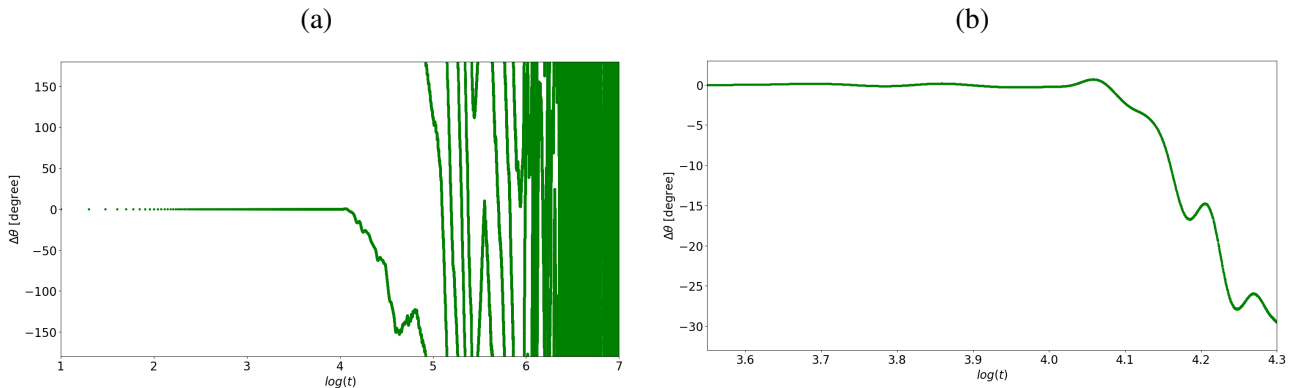
Na Figura 18a é apresentada a diferença entre a posição angular da evolução original e da evolução alterada para o sistema com 3 corpos. Para tempos de integração menores do que o tempo de Lyapunov para esse caso, ou seja, tempos menores do que  $\log(t) \approx 3.37$ , a diferença entre as posições angulares é relativamente pequena e possui pouca variação durante a integração. Isso quer dizer que mesmo com uma pequena variação nas condições iniciais, e para tempos de integração menores do que o tempo de Lyapunov, o sistema permanece regular. Porém, para tempos de integração maiores do que o tempo de Lyapunov, a diferença entre as posições angulares passa a crescer, e essa divergência dos resultados indica que Atlas passa a ter uma imprevisibilidade na sua posição angular, ou seja, o sistema passa a ser caótico. Com isso, podemos inferir que o caos indicado pelo máximo ECL é principalmente constituído pelo caos angular do satélite, e, após um determinado tempo, o sistema perde a memória, e com isso não podemos saber onde Atlas estará em sua própria órbita.

Para  $\log(t) \approx 6.0$ , a posição angular do caso original, ou sem a pequena mudança nas condições iniciais, foi de aproximadamente  $-109^\circ$ , enquanto que, para o caso alterado, com a variação nas condições iniciais, a posição angular encontrada foi de aproximadamente  $-173^\circ$ . A diferença angular nesse instante de tempo foi de aproximadamente  $-64^\circ$ .

Na Figura 18b, as oscilações em  $\Delta\theta$  começam a ocorrer, ainda que em pequenas amplitudes, após  $\log(t) \approx 3.7$ , que é próximo do tempo de Lyapunov encontrado para esse sistema.

A Figura 19a mostra que o mesmo ocorre para o sistema com cinco corpos. Porém, nesse caso, a diferença angular começa a divergir, mesmo que em pequenas amplitudes, a partir de  $\log(t) \approx 3.75$ , também próximo do tempo de Lyapunov para esse caso, o qual foi encontrado a partir da Figura 13. Antes da integração atingir o tempo de Lyapunov, a diferença entre as duas posições angulares é da

Figura 19 – Diferença da evolução angular no tempo de Atlas no sistema de 5 corpos. (a) O gráfico mostra a diferença angular de Atlas entre a evolução angular original e a evolução angular alterada. (b) Zoom do gráfico (a) em um intervalo de tempo.



Fonte: Produção do próprio autor.

ordem de  $10^{-2}$ . A diferença expressiva entre os dois valores angulares passa a ocorrer por volta de  $\log(t) \approx 4.0$ . Em  $\log(t) \approx 4.7$ , a posição angular para a evolução original é de aproximadamente  $46^\circ$ , enquanto que, para a evolução alterada, a posição angular é de aproximadamente  $-92^\circ$ , e a diferença angular entre esses dois casos é de aproximadamente  $-138^\circ$ .

Na Figura 19b, as oscilações em  $\Delta\theta$  começam a ocorrer após  $\log(t) \approx 3.7$ , e assim como foi no sistema de três corpos, esse tempo também é próximo do tempo de Lyapunov encontrado na Figura 13.

É interessante notar as subidas e descidas na evolução do comportamento angular no sistema de três corpos entre  $\log(t) = 5.0$  e  $\log(t) = 7.0$ . O aumento de  $\Delta\theta$  indica que a evolução angular alterada assume valores maiores do que a evolução angular original. Quando  $\Delta\theta$  decresce, o inverso acontece.

Esse tipo de comportamento ocorre de forma irregular, sem um padrão periódico de repetição para as amplitudes da variação angular. E de acordo com os resultados obtidos anteriormente, podemos ver que o caos radial existe, porém a sua contribuição no ECL é desprezível. A principal contribuição do caos medido vem do movimento angular de Atlas, como mostrado pela sensibilidade às condições iniciais. Portanto, o caos angular está inserido em  $\gamma_*$ , mas ainda segue sendo um desafio encontrar uma forma explícita para calcular apenas a contribuição angular do ECL tal como foi feito com a contribuição radial.

Como foi mostrado em Renner et al. (2016), para o problema de três corpos contendo Saturno, Atlas e Prometeu, a evolução dos argumentos ressonantes apresentam um comportamento caótico. A partir das Figuras 18a e 19a do presente trabalho, nós podemos ter uma noção do movimento caótico dos argumentos ressonantes, pois como as longitudes apresentam um comportamento caótico, é esperado que os ângulos ressonantes para esse mesmo sistema também apresentem um comportamento caótico.

A relevância desses primeiros resultados da dissertação estão no fato de que, assim como o comportamento de Prometeu e Pandora descrito por Goldreich e Rappaport (2003), Atlas também apresenta uma diferença em sua posição angular quando há uma pequena variação em suas condições iniciais. Os resultados apresentados aqui mostram que esse tipo de diferença aparece mesmo quando o

problema é relativamente simples, como foi o caso do problema com apenas três corpos. O método tridimensional funcionou para esse estudo, mostrando que o caos apresentado é confinado.

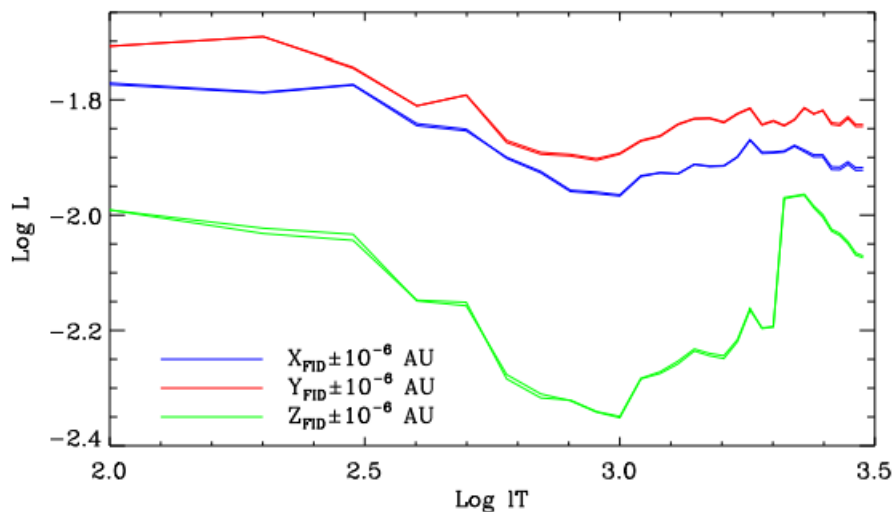
O anexo A contém a publicação dos resultados obtidos para o satélite Atlas no periódico *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*.

## 5.2 HALLEY

Como já foi visto, o cometa Halley tem uma dinâmica caótica e, como foi apresentado no trabalho de Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015), tem um tempo de Lyapunov relativamente curto. Nesta seção vamos mostrar os resultados obtidos para o cometa levando em conta que, ao contrário do satélite Atlas, a órbita do Halley possui uma elevada excentricidade e inclinação. Além disso, devemos levar em consideração que o cometa cruza as órbitas dos planetas do sistema solar diversas vezes. Com isso, pretendemos verificar como o método vai responder quando aplicado em casos mais extremos como do Halley, além disso buscamos tentar entender o caos do cometa analisando as componentes separadas do máximo ECL.

Para este caso, o sistema que vamos utilizar é o mesmo utilizado por Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015), o qual contém o Sol, os planetas do sistema solar, exceto Mercúrio, e os planetas anões. Primeiramente, precisamos calcular o máximo ECL, para poder fazer a comparação com os resultados obtidos por Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015). A Figura 20 mostra os resultados para o comportamento do máximo ECL ao longo do tempo obtido pelos autores. O tempo de integração utilizado por eles é de aproximadamente 3100 anos, o que é um pouco mais do que 40 períodos orbitais do cometa Halley. O tempo de Lyapunov encontrado por eles é de aproximadamente 70 anos. O tempo de Lyapunov encontrado é relativamente curto para esse período de integração. Para obter uma visão mais detalhada de como se comporta o máximo ECL ao longo do tempo, neste trabalho vamos fazer as integrações por 1 milhão de anos.

Figura 20 – Gráfico do  $\log \gamma$  em função de  $\log t$  para seis tipos de variações nas condições iniciais.



Fonte: (MUÑOZ-GUTIÉRREZ; REYES-RUIZ; PICHARDO, 2015)

Para isso, seguiremos o mesmo método adotado por Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015) para calcular o máximo ECL: aplicar uma pequena variação em uma condição inicial por vez em cada integração, ou seja, primeiro somamos somente  $d_0$  na condição inicial  $X$  e deixamos as outras variáveis na forma original para depois integrarmos. Depois somamos  $d_0$  na condição inicial  $Y$ , e matemos as outras condições iniciais sem alteração para a integração. O mesmo é feito com a coordenada  $Z$  somando  $d_0$  e integrando.

Com isso, obtivemos três resultados distintos para a evolução do máximo ECL no tempo. Em cada uma delas, aplicamos a aproximação matemática para separa a parte radial do máximo ECL completo e avaliamos o quão próximo uma está da outra.

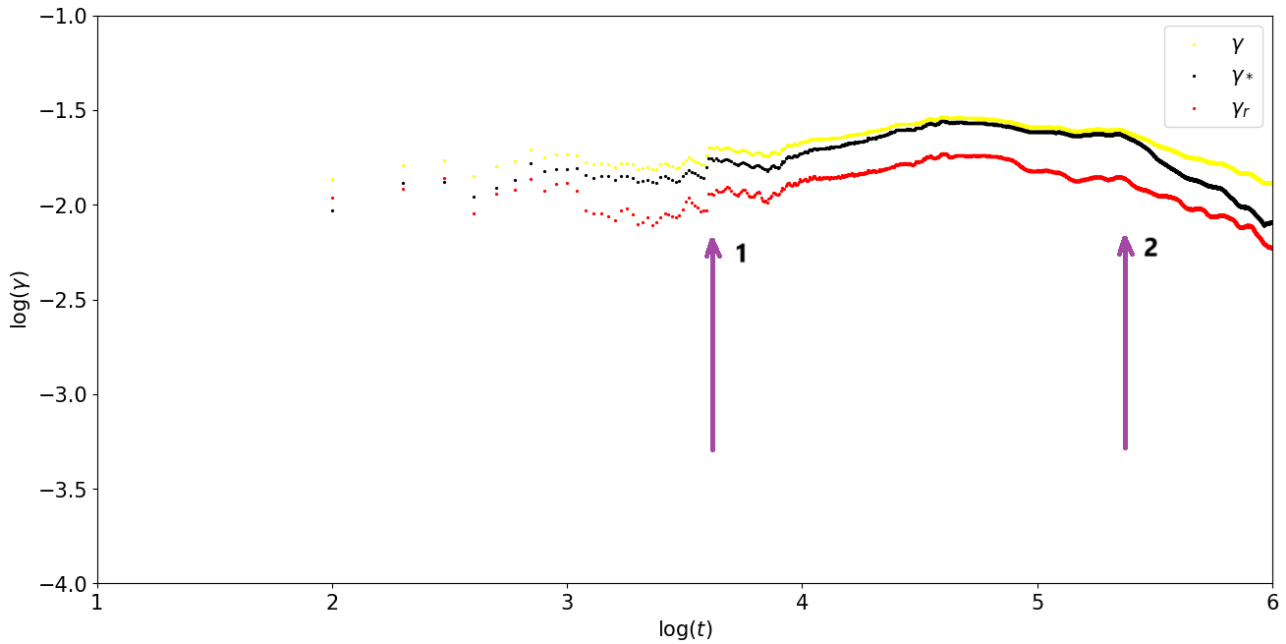
As Figuras 21, 22 e 23 mostram a evolução do máximo ECL ao longo do tempo para os três casos comentados. Como podemos ver nessas três figuras, há regiões onde  $\gamma_*$  (pontos em preto) se aproxima de  $\gamma$  (pontos em amarelo), assim como ocorreu no caso Atlas, mas é possível ver um descolamento entre os dois resultados após um determinado tempo. Mesmo ocorrendo esses descolamentos, ainda percebemos que  $\gamma_*$  está próximo de  $\gamma$ . Isso pode estar indicando que há contribuição do caos angular, assim como ocorreu com Atlas. Além do mais, podemos ver que, ao contrário do que foi estudado com Atlas, nessas figuras temos que a contribuição radial do máximo ECL não é desprezível. Porém, não estamos trabalhando com um caso circular, como foi com Atlas. Como já foi dito, a órbita do cometa Halley é altamente excêntrica, então naturalmente o movimento sobre esse tipo de órbita apresenta maior variação radial do que no caso circular. Porém, ter uma variação radial grande não significa ter um caos radial. Esse é um problema que precisa ser trabalhado nesse novo estudo.

Na Figura 21 temos a marcação de duas setas em roxo com a marcação dos números 1 e 2. Essas marcações foram feitas para destacar dois instantes importantes na evolução do máximo ECL e suas componentes ao longo do tempo. A seta número 1 está apontando para um salto que ocorre nos três resultados mostrados. Adiante será mostrado um breve estudo sobre encontros próximos do cometa Halley com o planeta Júpiter, o que pode explicar a ocorrência dos saltos. A seta número 2 aponta para o início do descolamento entre  $\gamma$  e  $\gamma_*$ . Após a seta número 2,  $\gamma$  e  $\gamma_r$  parecem decair de modo semelhante, enquanto que  $\gamma_*$  decai mais rápido e se aproxima cada vez mais de  $\gamma_r$ . Assim como foi dito anteriormente, mais adiante será mostrado que alguns encontros próximos ocorrem aproximadamente no mesmo tempo em que o descolamento começou a ocorrer, podendo ser um dos motivos para esse comportamento acontecer.

Além disso, chama atenção a divergência do comportamento de  $\gamma_r$  nos três resultados. Para fins de comparação, o tempo de Lyapunov para a condição inicial  $Y + d_0$  é de aproximadamente 97 anos, da mesma ordem daquele encontrado por Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015). Para  $X + d_0$  temos que  $T_L \approx 77$  anos e para  $Z + d_0 \approx 68$  anos. Percebemos, então, que os tempos de Lyapunov são menores do que duas vezes o período orbital do cometa Halley.

A Figura 24 mostra a variação radial do cometa, considerando o Sol na origem do sistema de coordenadas. Os valores de distância foram normalizados pelo semieixo maior da órbita do Halley. Primeiramente é válido observar que por volta de  $\log(t) \approx 3.5$  temos o início de variações radiais consideráveis da órbita do cometa Halley. A partir daí, a variação radial passa a oscilar de forma irregular durante todo o resto da integração, com a amplitude do movimento chegando em um pouco

Figura 21 – Expoente de Lyapunov para o cometa Halley para  $X + d_0$ . Os pontos em amarelo representam o ECL do Halley, dados por  $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial (ou resto), dados por  $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por  $\gamma_r$ .



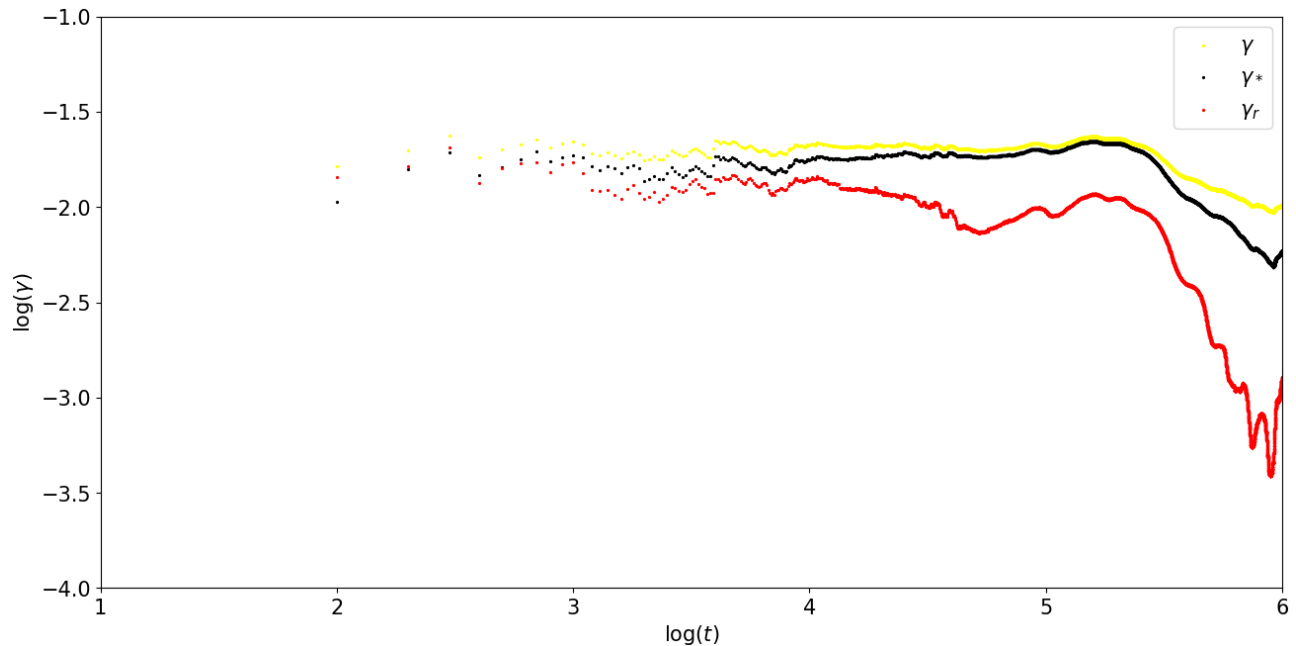
Fonte: Produção do Próprio Autor.

mais de duas vezes a amplitude inicial do seu movimento. Por fim, podemos ver os cruzamentos da órbita de Halley com as órbitas de Júpiter acontecendo em diversos instantes de tempo.

Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015) e Boekholt et al. (2016) mostraram que Júpiter possui uma grande influência perturbativa no movimento caótico do cometa Halley. A Figura 25 mostra a distância entre Halley e Júpiter, em preto, e o raio de Hill de Júpiter em azul (aproximadamente 53 milhões de quilômetros). A ideia desse passo é ver quando ocorrem os encontros próximos entre Halley e Júpiter usando o raio de Hill como referência. A Figura 26 apresenta um zoom próximo ao raio de Hill para mostrar quando que a distância entre os dois corpos são iguais ou menores do que esse valor. A partir daí, podemos ver que, em aproximadamente  $\log(t) \approx 3.5$ , ocorrem encontros próximos entre os dois corpos. Entre  $\log(t) = 4.0$  e  $\log(t) = 5.0$  os encontros são menos frequentes, mas ainda ocorrem. A partir de  $\log(t) = 5.0$ , os encontros ocorrem com mais frequência. Esses resultados podem indicar que os saltos e os descolamentos ocorridos nas Figuras 21, 22 e 23 podem ser ocasionadas por encontros próximos entre Halley e Júpiter. Essa foi uma análise preliminar, e por questões de custo computacional, o tempo de saída das integrações foi de uma semana e apenas procuramos por encontros próximos entre Halley e Júpiter. Para completar a análise, será necessário reduzir o passo de saída e ver os encontros com outros planetas, como Saturno, Terra e Vênus. Essa etapa será futuramente realizada.

A Figura 27 mostra a variação do pericentro e do apocentro da órbita. Podemos perceber que a variação do pericentro é relativamente pequena ao longo do tempo. Na figura foi assinalado um ponto que chama atenção, que é indicado pela seta e mostra um salto na evolução do apocentro. Se compararmos o tempo em que a seta indica esse salto com o que é mostrado na Figura 26, percebemos

Figura 22 – Expoente de Lyapunov para o cometa Halley  $Y + d_0$ . Os pontos em amarelo representam o ECL do Halley, dados por  $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial (ou resto), dados por  $\gamma_*$ , e em vermelho a contribuição radial do ECL, dados por  $\gamma_r$ .



Fonte: Produção do Próprio Autor.

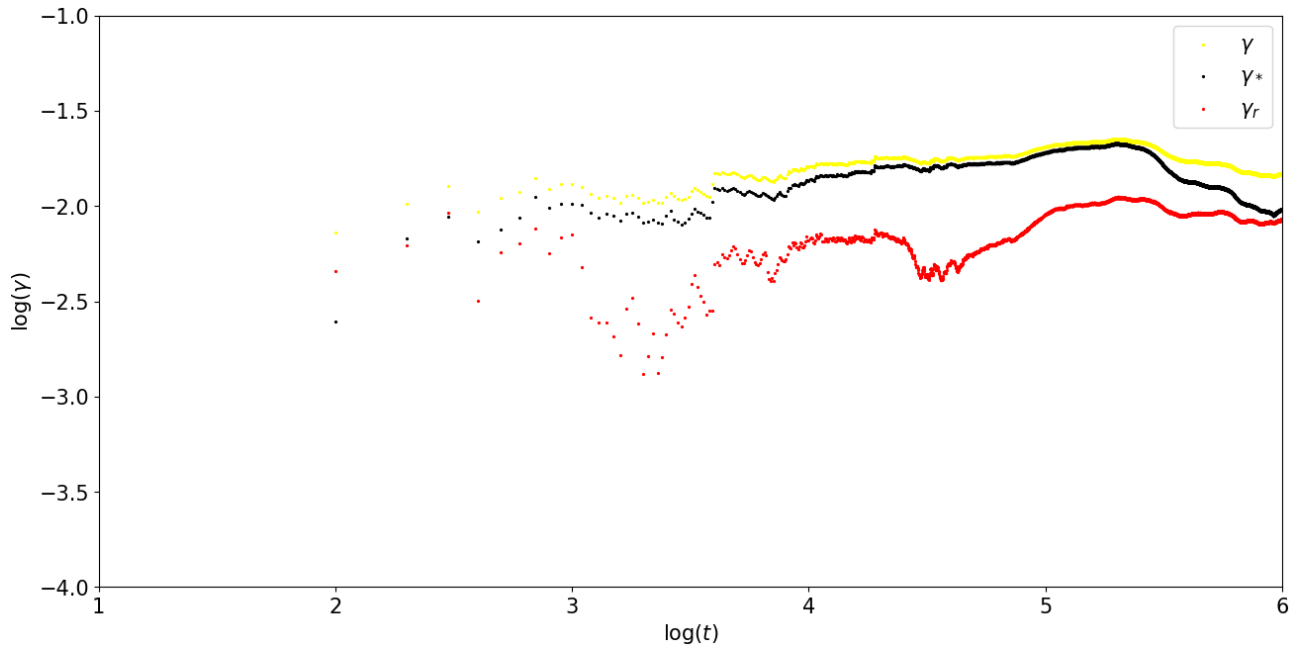
que possivelmente a grande variação do apocentro é ocasionado por um encontro próximo do cometa com o planeta Júpiter.

Agora, precisamos avaliar a evolução angular do cometa. O procedimento adotado é um pouco diferente daquele que foi usado no caso do Atlas, pois agora temos que a inclinação orbital é bem mais elevada. Fizemos, então, a integração do sistema original a cada 100 anos. Em paralelo, fizemos a integração do mesmo sistema, mantendo as mesmas condições iniciais, variando somente a condição inicial em  $Y$ , ou seja,  $Y + d_0$ . Queremos saber a diferença angular entre a primeira e a segunda integração, também com o intuito de saber a divergência da posição angular após aplicar uma pequena diferença nas condições iniciais. Aplicando a Eq.28, encontramos a diferença angular entre o Halley dos dois sistemas, onde o sub-índice  $A$  representa os dados do sistema original e o sub-índice  $F$  representa os dados do sistema com a variação nas condições iniciais.

Em cada passo de integração, calculamos a diferença entre as posições angulares do Halley e do Halley fantasma. Se essa diferença for relativamente pequena, próximo de  $d_0$ , então podemos concluir que uma pequena alteração nas condições iniciais não produz defasagens angulares, logo, há boa previsibilidade de onde e quando o corpo vai estar em sua órbita no futuro. O contrário ocorre quando a diferença angular passa a ser considerável. Ou seja, produzir grandes diferenças angulares para uma pequena diferença nas condições iniciais mostra que o movimento angular também é caótico.

A Figura 28 mostra  $\Delta\theta$  em função do tempo a cada 100 anos. Podemos perceber que até perto de  $\log(t) \approx 3.2$ , a variação angular é próxima de zero, logo depois há o crescimento da variação até atingir aproximadamente  $180^\circ$  de diferença perto de  $\log(t) \approx 5.5$ . Isso quer dizer que, em determinado momento, os corpos estarão em lados opostos da mesma órbita. A figura nos mostra que

Figura 23 – Expoente de Lyapunov para o cometa Halley  $Z + d_0$ . Os pontos em azul representam o ECL do Halley, dados por  $\gamma$ , em preto representam o ECL sem levar em conta a contribuição radial (ou resto), dados por  $\gamma_*$ , e em laranja a contribuição radial do ECL, dados por  $\gamma_r$ .

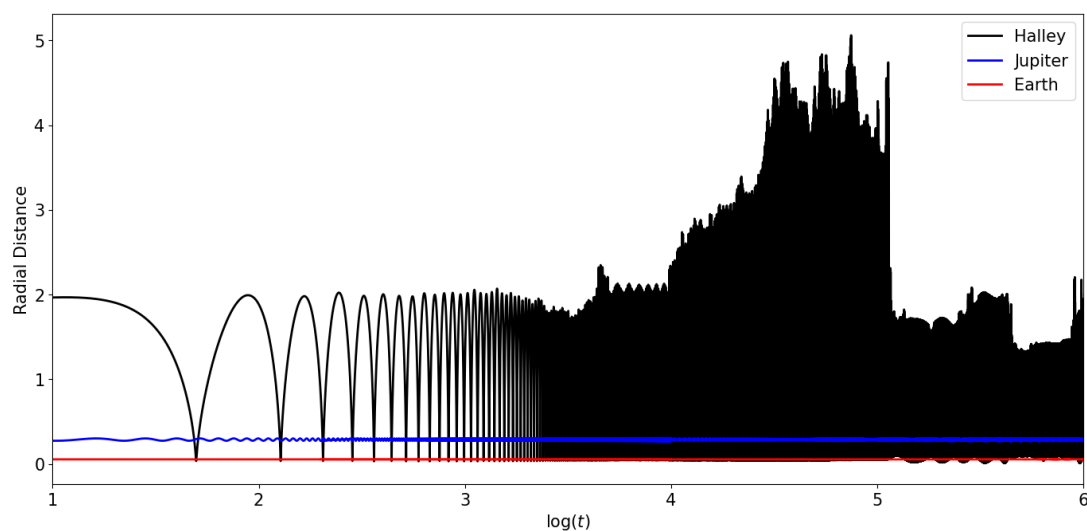


Fonte: Produção do Próprio Autor.

o comportamento angular do cometa Halley é caótico, tal como ocorreu com Atlas. A figura também mostra os tempos em que ocorreram os encontros próximos entre o cometa Halley e o planeta Júpiter e que estão representados pelos pontos em preto. Podemos observar que próximo de  $\log(t) = 3.5$  temos um salto em  $\Delta\theta$ . Nesse mesmo tempo ocorre o encontro próximo com Júpiter, que afeta significativamente a órbita do cometa, assim como foi visto na variação radial. Logo, ao contrário do que ocorreu com Atlas, a variação angular não tem o crescimento suave até atingir a evolução irregular, ela tem saltos pois está sendo influenciada pela ocorrência do encontro próximo.

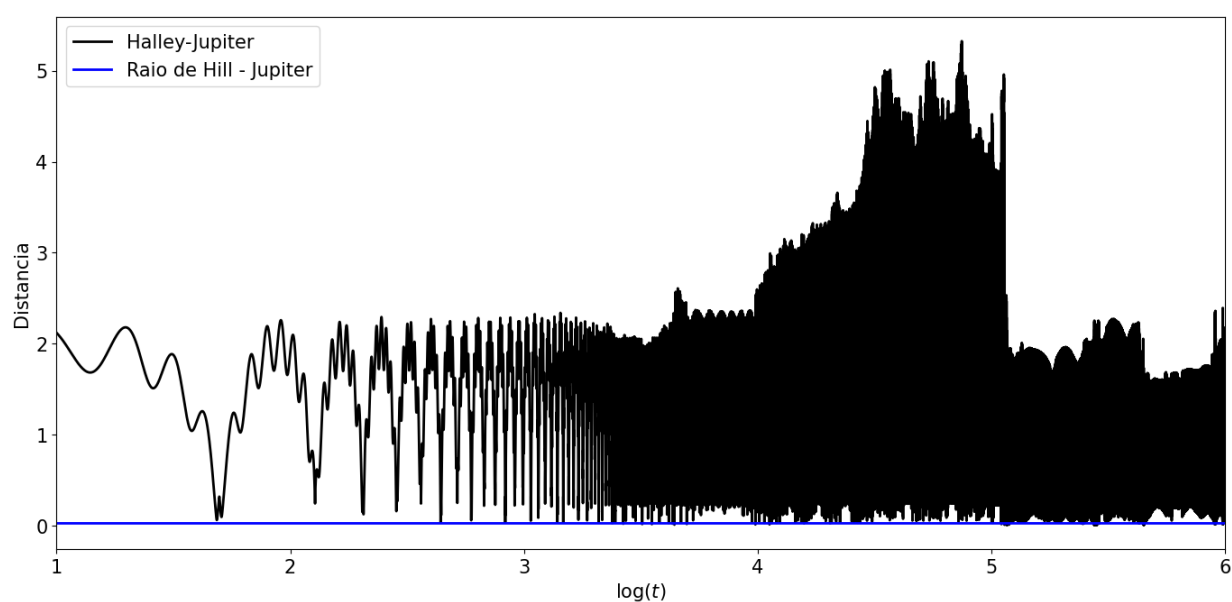
Como foi citado anteriormente, faz-se necessário a realização de mais simulações para encontrar os outros encontros próximos com Vênus, Terra e Saturno. Uma vez feita esse levantamento de quando ocorrem os encontros próximos, vamos poder ter uma visão mais precisa se são esses encontros que estão causando os outros saltos na variação angular.

Figura 24 – Evolução temporal da variação radial da órbita do cometa Halley e dos planetas Júpiter e Terra com o Sol na origem. A distância neste gráfico é normalizada pelo semieixo maior de Halley. A curva em preto corresponde a distância radial de Halley, em azul a distância radial de Júpiter, em vermelho a distância radial da Terra.



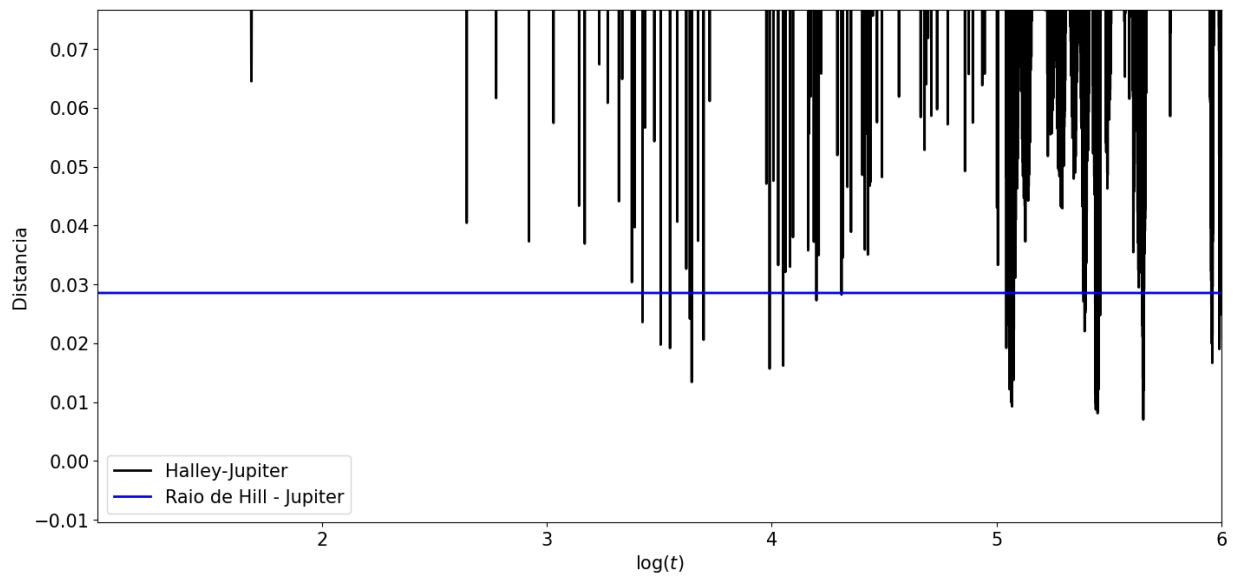
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 25 – Evolução temporal da distância entre o cometa Halley e o planeta Júpiter e a sua comparação com o raio de Hill de Júpiter.



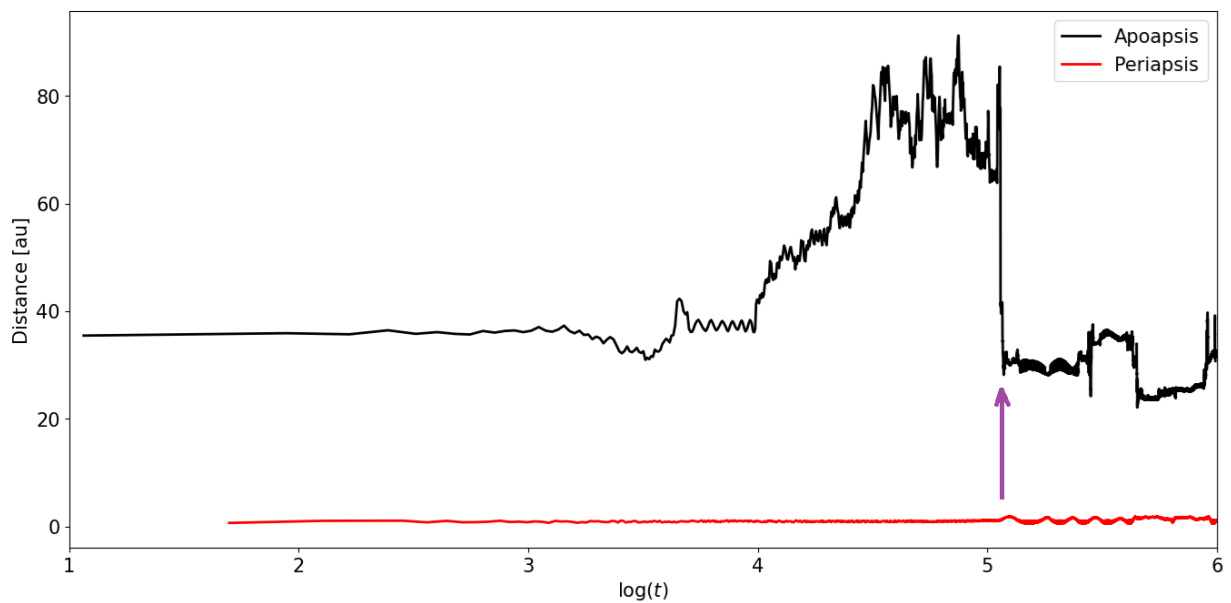
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 26 – Zoom da evolução temporal da distância entre o cometa Halley e o planeta Júpiter e a sua comparação com o raio de Hill de Júpiter.



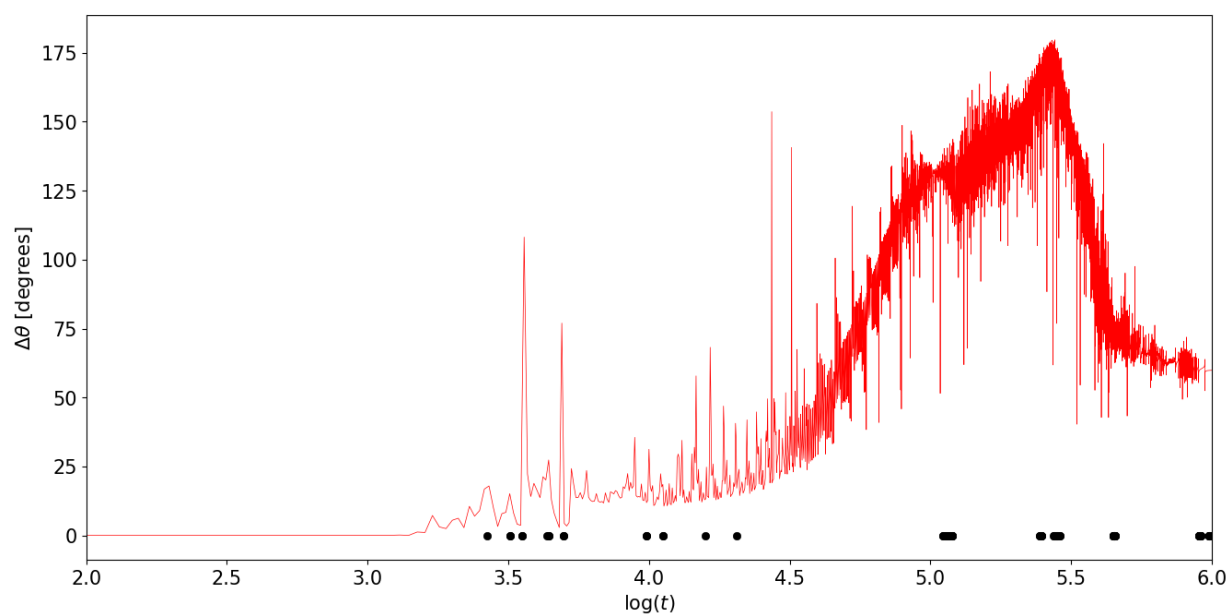
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 27 – Evolução temporal do pericentro e do apocentro da órbita de Halley. Em preto representa a evolução do apocentro e em vermelho a evolução do pericentro.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 28 – Diferença da evolução angular no tempo do Halley. O gráfico mostra a diferença angular de Halley entre a evolução angular original e a evolução angular alterada. Os pontos em preto representam onde ocorreram os encontros próximos entre Halley e Júpiter.



Fonte: Produção do próprio autor.

## 6 CONCLUSÕES

O caos estável é um comportamento que já foi detectado no movimento de vários corpos menores do Sistema Solar. Este tipo de fenômeno é caracterizado por fazer com que os corpos apresentem estabilidade radial e um tempo de Lyapunov relativamente curto. Neste trabalho, foi apresentada uma abordagem tridimensional para detectar a contribuição radial do máximo ECL em sistemas que possuem caos estável.

Também foi feito um teste da abordagem usando o satélite Atlas, que tem um tempo de Lyapunov relativamente curto, em dois sistemas dinâmicos diferentes. Primeiro, a abordagem mostrou que a contribuição caótica para a direção radial do movimento do Atlas é insignificante e, portanto, o satélite deve apresentar uma distância radial confinada ao longo do tempo.

Foi mostrado também que, apesar de ter uma natureza caótica, a órbita do satélite permaneceu confinada ao longo dos  $10^7$  períodos orbitais do Prometeu. Portanto, mostramos como a posição radial do Atlas se comportou ao longo do tempo.

O comportamento angular é sensível às condições iniciais, e após passar um tempo aproximado de  $T_L$ , as posições angulares para dois casos com condições iniciais muito próximas divergiram. Este tipo de comportamento é semelhante ao movimento angular de Prometeu e Pandora.

Portanto, foi possível mostrar que mesmo com uma distância radial quase regular durante um determinado tempo, o comportamento ainda é caótico devido à influência da sensibilidade das condições iniciais na descrição da posição angular após o tempo de Lyapunov.

Os resultados para o satélite Atlas mostraram que o método tridimensional respondeu bem para situações onde a órbita do corpo possui pequenas excentricidades e inclinações.

Depois foi realizado o estudo para o cometa 1P/Halley, que apresenta um tempo de Lyapunov curto, aproximadamente um período orbital. Esse caso serve como um teste para expandir o método tridimensional para situações onde a inclinação da órbita é elevada e a sua excentricidade não pode ser considerada circular.

O objetivo, então, foi avaliar as contribuições do máximo Expoente de Lyapunov e tentar entender a dinâmica caótica do cometa.

Também foi apresentada a variação radial do cometa, mostrando que a mesma oscila de forma irregular e que pode ser devido a influência dos encontros próximos com Júpiter e/ou outros planetas.

E por fim, foi realizado o estudo do caos angular do cometa. Assim como Atlas, o cometa Halley tem um comportamento angular caótico. Entretanto, a variação angular apresenta saltos expressivos e não suave. Assim como na variação radial, espera-se que os encontros próximos tragam uma possível explicação para tal resultado.

Portanto, o próximo passo do presente trabalho é dar continuidade na busca pelos encontros próximos e ao estudo do caos da dinâmica do cometa Halley.

## REFERÊNCIAS

- ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. Springer New York, 2000. (Textbooks in Mathematical Sciences). ISBN 9780387946771. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=48YHnbHGZAgC>>.
- BOEKHOLT, T. C. N. et al. The origin of chaos in the orbit of comet 1p/halley. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 461, n. 4, p. 3576–3584, jun. 2016. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw1504>>.
- CELLETTI, A. **Stability and Chaos in Celestial Mechanics**. [S.l.: s.n.], 2010.
- COOPER, N. J. et al. Saturn's inner satellites: Orbits, masses, and the chaotic motion of atlas from new cassini imaging observations. **The Astronomical Journal**, The American Astronomical Society, v. 149, n. 1, p. 27, dec 2015.
- COWELL, P. H.; CROMMELIN, A. C. D. Table giving approximate values of the perturbations of Halley's Comet by Jupiter and Saturn in the first and fourth quadrants of the orbit. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 68, n. 6, p. 458–460, 04 1908. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/68.6.458>>.
- DEVANEY, R. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. [S.l.: s.n.], 2021. ISBN 9780429280801.
- GOLDREICH, P.; RAPPAPORT, N. Chaotic motions of prometheus and pandora. **Icarus**, v. 162, n. 2, p. 391–399, 2003. ISSN 0019-1035.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tJCuQgAACAAJ>>.
- GREINER, W. Lyapunov exponents and chaos. In: \_\_\_\_\_. **Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 503–516. ISBN 978-3-642-03434-3. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-642-03434-3\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03434-3_26)>.
- GUZZO, M.; LEGA, E. Theory and applications of Fast Lyapunov Indicators for the computation of transit orbits in the three-body problem. Working paper or preprint. 2021. Disponível em: <<https://hal.science/hal-03326476>>.
- HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. 2nd. ed. Burlington, MA: Academic Press, 2004. ISBN 978-0123497031.
- HUTCHINS, R.; ADLER, M. **Gateway to the Great Books: Mathematics**. Encyclopædia Britannica, 1963. (Gateway to the Great Books). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Wx01AAAAIAAJ>>.
- LASKAR, J. Large scale chaos and marginal stability in the solar system. **Celestial Mech Dyn Astr**, v. 64, p. 115–162, 1996.
- LEMAITRE, A. Stable chaos: A first model. In: DVORAK, R.; HENRARD, J. (Ed.). Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. p. 223–231. ISBN 978-94-011-5510-6.
- MCGHEE, C. A. et al. Hst observations of saturnian satellites during the 1995 ring plane crossings. **Icarus**, v. 152, p. 282, 2001.

MILANI, A.; NOBILI, A. An example of stable chaos in the solar system. **Nature**, v. 357, p. 569–571, 1992.

MILANI, A.; NOBILI, A. M.; KNEŽEVIĆ, Z. Stable chaos in the asteroid belt. **Icarus**, v. 125, n. 1, p. 13–31, 1997. ISSN 0019-1035.

MORBIDELLI, A.; FROESCHLÉ, C. On the relationship between lyapunov times and macroscopic instability times. **Cel. Mech. Dyn. Ast.**, v. 63, p. 227, 1996.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.

MUÑOZ-GUTIÉRREZ, M. A.; REYES-RUIZ, M.; PICHARDO, B. Chaotic dynamics of comet 1p/halley: Lyapunov exponent and survival time expectancy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press (OUP), v. 447, n. 4, p. 3775–3784, jan. 2015. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stu2639>>.

NASA. **1P/Halley**. 2024. Accessed: 2024-10-14. Disponível em: <<https://science.nasa.gov/solar-system/comets/1p-halley/>>.

RENNER, S.; SICARDY, B. Use of the geometric elements in numerical simulations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 94, 2006.

SOPER, P.; FRANKLIN, F.; LECAR, M. On the original distribution of the asteroids: Iii. orbits between jupiter and saturn. **Icarus**, v. 87, p. 265, 1990.

SPITALE, J. N. et al. The orbits of saturn's small satellites derived from combined historic and cassini imaging observations. **AJ**, v. 132, p. 692, 2006.

WINTER, O. C.; MOURÃO, D. C.; GIULIATTI WINTER, S. M. , Short lyapunov time: a method for identifying confined chaos. **A&A**, v. 523, p. A67, 2010.

WINTER, O. C. et al. Moonlets wandering on a leash-ring. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 380, n. 1, p. L54–L57, 09 2007. ISSN 1745-3925.

**ANEXO A – CONFINED CHAOS AND THE CHAOTIC ANGULAR MOTION OF ATLAS,  
A SATURN'S INNER SATELLITE**

# Confined chaos and the chaotic angular motion of Atlas, a Saturn’s inner satellite

Lucas S. Pereira ,  Daniela C. Mourão and Othon C. Winter

*Grupo de Dinâmica Orbital and Planetologia, São Paulo State University (UNESP), Guaratinguetá, 12516-410 São Paulo, Brazil*

Accepted 2024 February 7. Received 2023 December 28; in original form 2023 September 29

## ABSTRACT

The dynamics of the Solar system exhibit inherent chaos and instability. Mathematical tools, such as the maximum Lyapunov characteristic exponent (LCE) and Lyapunov time ( $T_L$ ), play a crucial role in providing a qualitative understanding of chaos within celestial objects, such as asteroids and moonlets. Celestial bodies with relatively small Lyapunov times have garnered significant research interest due to their stable orbits, a phenomenon referred to as stable or confined chaos. Notable examples include Saturn’s satellites: Atlas, with a Lyapunov time on the order of 10 yr, Prometheus, and Pandora. This work aims to study the chaotic behaviour of the Atlas satellite and its relatively small  $T_L$ . We present a three-dimensional model approach designed to isolate the radial contribution from the LCE and assess its influence within the LCE. Our investigation focuses on the Saturn system, comprising Saturn itself, along with its satellites Atlas, Prometheus, Pandora, and Mimas. To estimate the radial contribution of the LCE, we find the projection of the radial vector of a ghost Atlas (a slightly displaced Atlas) onto the Atlas radial vector, which allows us to calculate the difference between the radial vectors. This methodology enables us to estimate the radial contribution of the LCE and calculate the Lyapunov time. Remarkably, our results demonstrate that orbits remain confined even for integration times exceeding  $T_L$ . Furthermore, we investigate the temporal behaviour of Atlas’ angular position in its orbit, potentially shedding light on chaotic angular dynamics.

**Key words:** chaos – methods: numerical – celestial mechanics – planets and satellites: dynamical evolution and stability.

## 1 INTRODUCTION

Chaos is embedded in the dynamic evolution of the Solar system. Laskar (1996) showed that the inner planets experience large-scale chaotic behaviour. This behaviour is characterized by strong variations in orbits, such as the behaviour of Mercury, which can be ejected far away or even collide with a closer planet, such as Venus.

Mathematical tools have been developed over time to give a quantitative and qualitative notion of the behaviour of dynamic systems. One of them is the maximum Lyapunov characteristic exponent (LCE), which measures the exponential divergence of orbits that are initially very close together. For positive LCE values, the analysed system is chaotic. For negative values, the system has no signs of chaos, so it is regular. The inverse of the LCE results in the Lyapunov time,  $T_L$ , which provides the time-scale for the system to begin showing chaotic behaviour. A relatively short  $T_L$  indicates that the chaotic system has a quick diffusion in the space. In general, this suggests that there is a significant radial variation in the trajectory.

Soper, Franklin & Lecar (1990) showed that there is a connection between the short Lyapunov time and the event time, or crossing time  $T_E$ , i.e. the time that a body would take to cross the orbit of the system’s largest perturber.

Morbideilli & Froeschlé (1996) related the Lyapunov time,  $T_L$ , with the macroscopic instability time,  $T_E$ . The authors showed an analysis

of two different regimes that relate the two times: the Nekhoroshev regime and the resonant overlapping regime. The first regime shows that the macroscopic instability time is exponentially related to the Lyapunov time, i.e.  $T_E \sim \exp(T_L)$ . In the second regime, the relation between the two times is given in polynomial form  $T_E \sim T_L^\beta$ , where  $\beta$  is a positive coefficient.

In contrast to the expectation of significant orbital variations when Lyapunov times are small, as seen when one body crosses another’s orbit, there are bodies in the Solar system that have a stable orbit over time, but indicators of chaos, such as the maximum LCE, show that there is a presence of chaos in these movements. Some smaller bodies in the Solar system point to a relatively short Lyapunov time, on the orders of tens to thousands of years.

This type of behaviour was first observed by Milani & Nobili (1992), where it was shown that the asteroid 522 Helga has a chaotic behaviour, but has a short Lyapunov time, on the order of 6.900 yr, and a stable orbit over time. The authors called this event stable chaos.

Milani, Nobili & Knežević (1997) also carried out a study on the presence of stable chaos in asteroids. The authors presented several asteroids that have a relatively short Lyapunov time, where  $T_L \leq 10\,000$  yr, but that do not have significant variations in their orbits.

The first analytical model to test the appearance of stable chaos found by Milani et al. (1997) was developed by Lemaitre (1997). The model was applied to the case of 490 Veritas and associated asteroids, in addition to 564 Dudu.

\* E-mail: [lucas-soares.pereira@unesp.br](mailto:lucas-soares.pereira@unesp.br)

McGhee et al. (2001) presented a difference in the longitudes of Saturn’s satellites Prometheus and Pandora. The data showed that Prometheus had a delay of  $18:82 \pm 0:04$  in its longitude. Pandora was found in a forward position relative to *Voyager’s* ephemeris. Goldreich & Rappaport (2003) showed that the Prometheus and Pandora satellites have chaotic behaviour. They showed that the Lyapunov exponent for the Prometheus–Pandora system is on the order of 0.3 and the chaotic behaviour is due to a mean motion resonant interaction between the two satellites.

Spitale et al. (2006) showed that Atlas, one of Saturn’s satellites, is significantly perturbed by Prometheus, and less so by Pandora. These two satellites have chaotic behaviour, which motivated the search for the same type of orbital behaviour for Atlas. Cooper et al. (2015) showed that Atlas has a Lyapunov time of  $\sim 10$  yr for two different systems: Saturn, Atlas, and Prometheus and Saturn, Atlas, Prometheus, Pandora, and Mimas. The authors showed that the chaotic behaviour is a direct consequence of the 54:53 resonant interaction with Prometheus. Renner et al. (2016) have confirmed that the origin of the Atlas chaos is due to the coupling resonant interaction, corotation eccentricity resonance (CER) and Lindblad eccentricity resonance (LER), with Prometheus. They used frequency analysis to understand the effects of the coupling between the two 54:53 resonances. They also showed that, by virtue of Pandora, the effect of the four 70:67 overlapping apse-type mean motion resonances is much weaker in Atlas.

Winter et al. (2007) carried out a study on moonlets perturbed by Prometheus and Pandora. The authors analysed the radial contribution of the LCE separately for the cases studied. The LCE contribution from the radial part, with  $T_L \sim 10^6 T$ , is smaller than the azimuthal contribution, with  $T_L \sim 100 T$ , which suggests that chaos is present in the angular motion of the small satellites.

Winter, Mourão & Giulatti Winter (2010) showed the development of a two-dimensional model to analyse the radial contribution of the LCE in small moons in Saturn’s F ring, perturbed by Prometheus and Pandora, and asteroids perturbed by the Jupiter, which have Lyapunov times of the order of 10 orbital periods of the system perturber. For cases where the behaviour was chaotic and with a small  $T_L$ , the radial contribution of the LCE was insignificant, suggesting that the chaos is confined. In cases where the radial component made a significant contribution to the LCE, and the Lyapunov time was found to be short, the studied body would cross the orbits of neighbouring bodies and ultimately leave the system.

In this work, we propose an extension of the Winter et al. (2010) approach to estimate the radial contribution of the LCE for three-dimensional systems that exhibit confined chaos. To study the chaotic behaviour of Atlas, we integrated the systems based on the work by Cooper et al. (2015). The first of which contained only Saturn, Atlas, and Prometheus (three-body system), and the second containing Saturn, Atlas, Prometheus, Pandora, and Mimas (five-body system). Section 2 presents the mathematical formulation for calculating the radial contribution of the Lyapunov exponent. Section 3 describes the dynamical systems and presents the initial conditions used. Section 4 provides the results for each chosen dynamical system. Finally, Section 5 provides our final remarks and comments.

## 2 METHODOLOGY

The maximum LCE ( $\gamma$ ) is used in this work to detect the divergence of orbits in phase space, and, consequently, whether the system is chaotic or not.

The maximum LCE measures the exponential divergence of two trajectories that are initially close. If  $\gamma > 0$ , the system is chaotic, and if  $\gamma = 0$ , the system is regular.

A way to numerically calculate the value of  $\gamma$  was presented by Benettin et al. (1980), where the maximum LCE is approximated by the following expression:

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d(i\tau)}{d_0} \right), \quad (1)$$

where  $\tau$  is the fixed time-step,  $d_0$  is the initial distance that separates the two trajectories,  $d(i\tau)$  is the distance that separates the two trajectories after  $i\tau$  time-steps, both in phase space, and  $k$  is the number of iterations performed by the integrator. In this work, to calculate the LCE, we analyse the exponential divergence between two initially nearby trajectories of Atlas. For a finite integration time, we can rewrite equation (1) as

$$\gamma = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d(i\tau)}{d_0} \right), \quad (2)$$

and the Lyapunov time is given by

$$T_L = \frac{1}{\gamma}. \quad (3)$$

The approximation made by Winter et al. (2010) has been applied to small bodies, such as asteroids, which have much smaller masses than the masses of the system’s perturbers, Jupiter and Saturn. In that case, it is reasonable to disregard the mass of the body of interest to calculate the LCE.

In this study, it is not possible to disregard the mass of the body of interest, which is the Atlas satellite. This is due to the fact that the mass of Atlas is just about 27 times smaller than the mass of Prometheus, and only 23 times smaller than the mass of Pandora.

Therefore, to calculate the LCE of a three- or five-body system, we need to take the difference between the trajectory of an Atlas and an Atlas with a small change in its initial conditions in phase space (which we will call the ghost Atlas from now on), i.e. the value of  $d_0$  from equation (2). Then, we numerically integrate two independent equal sets of equations of motion in parallel. The initial conditions of the two sets are almost exactly the same. The only difference is the initial conditions of Atlas. In one case we have those of the nominal Atlas, while in the other we use those of the ghost Atlas (Atlas with a very small change in its initial conditions). After integrating both sets of equations for one time-step, we measure the distance  $d(i\tau)$  between the two trajectories in phase space, and the LCE is calculated using equation (2). The position of the ghost Atlas is rescaled in order to continue measuring the divergence of neighbouring trajectories. The positions and velocities of the other satellites in the ghost Atlas system receive the respective positions and velocities of the other satellites in the Atlas system, and then the integration continues and the process is repeated.

To calculate the distance between trajectories in phase space, we will consider the coordinates  $(X, Y, Z)$  and  $(V_x, V_y, V_z)$  to describe the position and velocity components in a three-dimensional Cartesian system of coordinates, where the origin is centred on the system’s centre of mass.

The distance between Saturn and Atlas is given by

$$r_A = [X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{1/2}, \quad (4)$$

and the distance between Saturn and the ghost Atlas is given by

$$r_G = [X_G^2 + Y_G^2 + Z_G^2]^{1/2}. \quad (5)$$

Then, we can calculate the distance between the trajectories of Atlas and the ghost Atlas in the phase space:

$$d(i\tau) = [(X_A - X_G)^2 + (Y_A - Y_G)^2 + (Z_A - Z_G)^2 + (V_{xA} - V_{xG})^2 + (V_{yA} - V_{yG})^2 + (V_{zA} - V_{zG})^2]^{1/2}, \quad (6)$$

where the subscript A represents the Atlas coordinates in phase space and the subscript G represents the coordinates of the ghost Atlas.

To find the radial contribution of the LCE at each time-step, it is necessary to project  $\mathbf{r}_G$  onto  $\mathbf{r}_A$  vector. With this, just find the magnitude of the difference between the two and we have how much they change radially. This distance calculated in each time interval is equivalent to  $d(i\tau)$  in the maximum LCE definition.

The angle  $\theta_r$  between the vectors  $\mathbf{r}_A$  and  $\mathbf{r}_G$  can be found using the dot product between the two vectors,

$$\cos \theta_r(i\tau) = \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_G}{|\mathbf{r}_A| |\mathbf{r}_G|}. \quad (7)$$

Therefore, the radial distance between Atlas and the ghost Atlas is given by

$$d_{\text{rad}} = |\mathbf{r}_A| - |\mathbf{r}_G| \cos \theta_r. \quad (8)$$

Since equation (8) is varying at each time-step, we can rewrite it in the following form:

$$d_{\text{rad}}(i\tau) = |\mathbf{r}_A(i\tau)| - |\mathbf{r}_G(i\tau)| \cos \theta_r(i\tau). \quad (9)$$

The magnitude of the  $\mathbf{r}_G$  component perpendicular to the orbit is given by

$$d_{\perp}(i\tau) = |\mathbf{r}_G(i\tau)| \sin \theta_r(i\tau). \quad (10)$$

Substituting equation (8) into equation (2), we find

$$\gamma_r = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d_{\text{rad}}(i\tau)}{d_0} \right). \quad (11)$$

Equation (11) computes the divergence of the radial distance between Atlas and the ghost Atlas in relation to the initial distance  $d_0$ , and this is the radial contribution of the maximum LCE. If  $\gamma_r > 0$ , then there is the occurrence of radial chaos, and if  $\gamma_r = 0$ , then the radial behaviour is regular. The LCE without the radial contribution is given by

$$\gamma_* = \frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^k \ln \left( \frac{d_*(i\tau)}{d_0} \right), \quad (12)$$

in which

$$d_*(i\tau) = [(d_{\perp}(i\tau))^2 + (V_{xA} - V_{xG})^2 + (V_{yA} - V_{yG})^2 + (V_{zA} - V_{zG})^2]^{1/2}. \quad (13)$$

If  $\gamma_r \ll \gamma$ , then Atlas is confined radially in its orbit, without presenting significant irregularities. If  $\gamma > 0$ ,  $T_L$  is relatively short and  $\gamma_r \ll \gamma$ , then we have the case known as stable chaos, or confined chaos. In case that  $\gamma_r \ll \gamma$  and short  $T_L$ , Winter et al. (2010) discussed that the orbital system is in the regime of effective stability, as well as in the Nekhoroshev regime.

### 3 DYNAMICAL SYSTEMS

In this section, the results of numerical simulations of the radial contribution in the Lyapunov exponent are shown. In addition, the radial variation and angular variation of Atlas are presented. To perform the numerical simulations, we employed the RADAU integrator developed by Everhart (1985), which is implemented within the MERCURY package (Chambers 1999). The initial conditions, which define the initial state of the satellites, are associated with the epoch

**Table 1.** State vectors taken from JPL Horizons at Epoch 245 4252.50075446 JD TDB (2007 June 1 00:00:00.0 UTC), with centre of coordinates in Saturn's body centre, with the  $x$ - $y$  plane in Saturn's equator, and  $z$ -axis along Saturn's north pole.

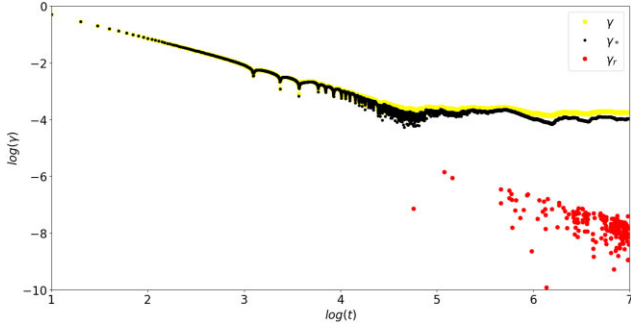
| Initial conditions             |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| <i>Atlas</i>                   |                                     |
| Position (km)                  |                                     |
| $x$                            | $8.906558866712821 \times 10^4$     |
| $y$                            | $-1.047730525162559 \times 10^5$    |
| $z$                            | $-5.232363527045891$                |
| Velocity (km s <sup>-1</sup> ) |                                     |
| $\dot{x}$                      | $1.268791452210001 \times 10^1$     |
| $\dot{y}$                      | $1.079208341123546 \times 10^1$     |
| $\dot{z}$                      | $2.399153952759026 \times 10^{-4}$  |
| <i>Prometheus</i>              |                                     |
| Position (km)                  |                                     |
| $x$                            | $8.819608548135853 \times 10^4$     |
| $y$                            | $1.082601236696416 \times 10^5$     |
| $z$                            | $-1.005150868315468 \times 10^1$    |
| Velocity (km s <sup>-1</sup> ) |                                     |
| $\dot{x}$                      | $-1.278314052022474 \times 10^1$    |
| $\dot{y}$                      | $1.043946959628510 \times 10^1$     |
| $\dot{z}$                      | $1.689500778111253 \times 10^{-3}$  |
| <i>Pandora</i>                 |                                     |
| Position (km)                  |                                     |
| $x$                            | $2.628002001934099 \times 10^4$     |
| $y$                            | $-1.396503290056520 \times 10^5$    |
| $z$                            | $-1.052551033149084 \times 10^2$    |
| Velocity (km s <sup>-1</sup> ) |                                     |
| $\dot{x}$                      | $1.606042898477623 \times 10^1$     |
| $\dot{y}$                      | $3.074416688732564$                 |
| $\dot{z}$                      | $7.509997929307122 \times 10^{-3}$  |
| <i>Mimas</i>                   |                                     |
| Position (km)                  |                                     |
| $x$                            | $-1.281298230245274 \times 10^5$    |
| $y$                            | $1.387520241317965 \times 10^5$     |
| $z$                            | $2.889491311051997 \times 10^3$     |
| Velocity (km s <sup>-1</sup> ) |                                     |
| $\dot{x}$                      | $-1.040629135325750 \times 10^1$    |
| $\dot{y}$                      | $-9.450700257680051$                |
| $\dot{z}$                      | $-3.165819028912453 \times 10^{-1}$ |

of 245 4252.50075446 JD TDB (2007 June 1 00:00:00.0 UTC), the same one used by Cooper et al. (2015), and were extracted from the JPL Horizons. However, in this work, we adopt the centre of coordinates in Saturn's body centre, with the  $x$ - $y$  plane in Saturn's equator, and  $z$ -axis along Saturn's north pole.

Table 1 displays the initial conditions for each of the satellites involved in our study. In Cooper et al. (2015), the three-body problem involving Saturn, Atlas, and Prometheus was sufficient to demonstrate the chaotic behaviour of Atlas. Therefore, the disturbance of just one neighbouring satellite is enough for Atlas to begin to behave irregularly. Consistent with the approach in Winter et al. (2010), we selected the integration period to be a multiple of the orbital period of the perturbing body, in this instance, the Prometheus satellite. The chosen integration time was equivalent to  $10^7$  times the orbital period of Prometheus, which is approximately 16 000 yr. The time-step used in calculating the Lyapunov exponent was 10 Prometheus orbital periods. The initial separation between Atlas and ghost Atlas in phase space is  $d_0 = 10^{-7}$ . We use the normalized initial conditions to perform the interaction. This normalization is made with respect to the semimajor axis of Prometheus

**Table 2.** Saturn constants used in numerical integrations (Cooper et al. 2015).

| Saturn constants                      |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| GM (km <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> ) | $3.793120706585872 \times 10^7$     |
| Radius (km)                           | 60 330                              |
| $J_2$                                 | $1.629084747205768 \times 10^{-2}$  |
| $J_4$                                 | $-9.336977208718450 \times 10^{-4}$ |
| $J_6$                                 | $9.643662444877887 \times 10^{-5}$  |


**Figure 1.** Lyapunov exponents for the three-body system. The dots in yellow represent the LCE of Atlas, given by  $\gamma$ , the dots in black represent the LCE without taking into account the radial contribution, given by  $\gamma_*$ , and the dots in red represent the radial contribution of the LCE, given by  $\gamma_r$ .

(139 350.0 km), as well as the orbital period of Prometheus (0.6 d).

To perform the numerical integration, we take into account the influences of the gravitational attraction force between the selected bodies. In addition, we considered perturbative effects arising from Saturn's spherical harmonics  $J_2$ ,  $J_4$ , and  $J_6$ , which affect the gravitational interactions in our simulations.

Table 2 provides a summary of the Saturn data utilized in this study. Furthermore, the mass of the Saturn is normalized to be equal to 1. To maintain consistency and facilitate simulations, we normalized the masses of the satellites by the mass of the Saturn, which simplifies calculations and comparisons.

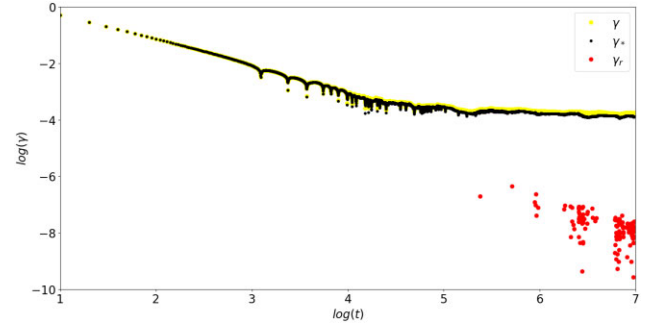
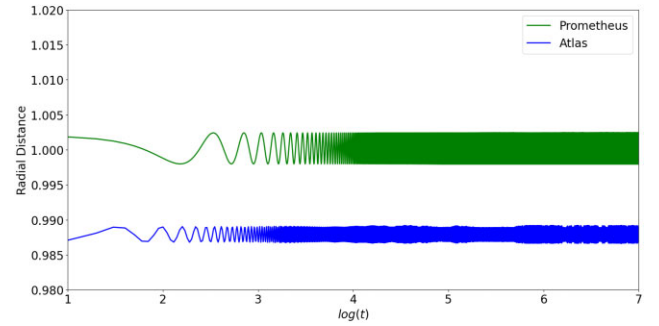
We perform integrations for the two dynamical systems. The first of these is the three-body system, which contains Saturn, Atlas, and Prometheus, and the second is the five-body system, which contains Saturn, Atlas, Prometheus, Pandora, and Mimas.

## 4 RESULTS

In this section, we present the results of our simulations for the three- and five-body system. The main goal of the analysis is to identify the radial contribution of LCE, and its connections to the radial and the angular orbital evolution of the satellite Atlas.

### 4.1 Radial component of LCE

First, let us consider the three-body system. In Fig. 1, we present a log–log plot of the results obtained from equations (2), (11), and (12). The yellow dots represent the maximum LCE of Atlas, or  $\gamma$  (equation 2). The black dots give the maximum LCE without radial contribution, or  $\gamma_*$  (equation 12). It is possible to see that yellow and black plots are close to each other, which shows us that extracting the radial contribution from the LCE provides results close to that of the LCE. In this case, some red dots of  $\gamma_r$  (equation 11) appear sporadically, but they are orders of magnitude smaller than  $\gamma$ . The


**Figure 2.** Lyapunov exponents for the five-body system. The dots in yellow represent the LCE of Atlas, given by  $\gamma$ , the dots in black represent the LCE without taking into account the radial contribution, given by  $\gamma_*$ , and the dots in red represent the radial contribution of the LCE, given by  $\gamma_r$ .

**Figure 3.** Temporal evolution of the radial variation of the orbits of Atlas and Prometheus relative to the centre of mass of the three-body system. The distance in these graphs is normalized by the semimajor axis of Prometheus. The curve in blue, corresponds to the radial distance of Atlas, and in green, the radial distance of Prometheus.

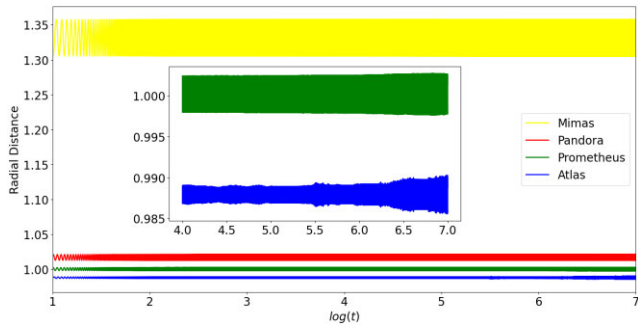
other red dots do not appear in the plot because their values are smaller than  $10^{-10}$ .

The Lyapunov time of Atlas found after integrating for  $10^7$  orbital periods of Prometheus was approximately 8.9 yr, which is of the same order as the time found by Cooper et al. (2015). For this system, as seen in Renner et al. (2016), Atlas' chaos is caused by coupling resonant interaction (CER/LER) with Prometheus.

The same was made for the five-body system. Fig. 2 shows the maximum LCE represented by the yellow dots, and the black dots represent the LCE without the radial contribution. In this case, some red dots appear too, which represent the radial contribution of the LCE, the radial contribution is also insignificant in the LCE. In this case, the Lyapunov time of Atlas was approximately 9.4 yr. In the two cases integrated in this work,  $T_L$  was close, or of the same order, to the Lyapunov times found by Cooper et al. (2015).

### 4.2 Evolution of orbital radius

The maximum LCE of the two integrated dynamical systems and the LCE without radial contribution are very close, therefore the radial contribution of LCE can be neglected, and this indicates that chaos is confined. To confirm this, we provide an analysis of the temporal evolution of orbital radius of each satellite. In Fig. 3, the graph depicts the normalized radial variation of the orbits of Atlas and Prometheus of the three-body system. In the first case, the Lyapunov time was about 8.9 yr, approximately 5.4 thousand Prometheus orbital periods. We can note that, between  $10^4$  and  $10^6$  orbital periods of Prometheus,



**Figure 4.** Temporal evolution of the radial variation of the orbits of Atlas, Prometheus, Pandora, and Mimas relative to the centre of mass of the five-body system. The distance in these graphs is normalized by the semimajor axis of Prometheus. Each colored curve represents the temporal evolution of the satellites' radial distance: in blue is for Atlas, in green is for Prometheus, in red is for Pandora and in yellow is for Mimas. A zoom is inserted for better visualization.

several protuberances occur in the radial evolution of Atlas, and they occur in an aperiodic manner, which characterizes the chaotic behaviour of Atlas as shown by Cooper et al. (2015) and Renner et al. (2016). It is noteworthy that the variations in its radial evolution have relatively small amplitudes, and are approximately  $3 \times 10^3$  times less than the normalization distance used in this work.

Between  $10^6$  and  $10^7$  Prometheus orbital periods, it is possible to see an increase in the occurrence of radial variation bulges, which is in line with the appearance of more red dots in Fig. 1. However, even with the presence of some points in red, the amplitudes of the Atlas radial distance do not have significant variations. Even though it shows irregular behaviour, Atlas has its orbit confined between approximately  $137.5 \times 10^3$  and  $137.8 \times 10^3$  km. This result is compatible with the negligible radial contribution of the LCE found in Fig. 1.

In Fig. 4, the same analysis was carried out for the five-body system. The orbits of all satellites remain well confined throughout the entire integration, even after  $T_L = 9.4$  yr. As in Fig. 3, Atlas' radial distance showed small variations in its amplitude, on the order of  $10^{-3}$  times less than the normalization distance, and its orbit was confined in a region with a thickness of  $0.6 \times 10^3$  km.

Fig. 13 by Cooper et al. (2015) showed that the temporal evolution, from 2000 January 1 to 2020 January 1, of the semimajor axis and eccentricity of Atlas behave aperiodically in the three-body system. We also perform the temporal evolution of these geometrical orbital elements for the three-body system, based on the initial conditions in Table 1, and using the algorithm of Renner & Sicardy (2006). Figs 5(a) and (b) show the evolution of the semimajor axis and eccentricity over time. They reproduce very well those shown in fig. 13 of Cooper et al. (2015).

The aperiodic behaviour of the orbital elements is in accordance with the variation in the amplitudes of the temporal evolution of the Atlas radial distance. Therefore, based on the results obtained in Fig. 1, we can conclude that, even if the orbital elements present an irregular evolution, this contribution to Atlas' chaotic behaviour, measured by its maximum LCE, is very small.

After all the analysis of the LCE, and the evolution of orbital radius, we can conclude that Atlas' behaviour fits the definition of stable chaos by Milani & Nobili (1992).

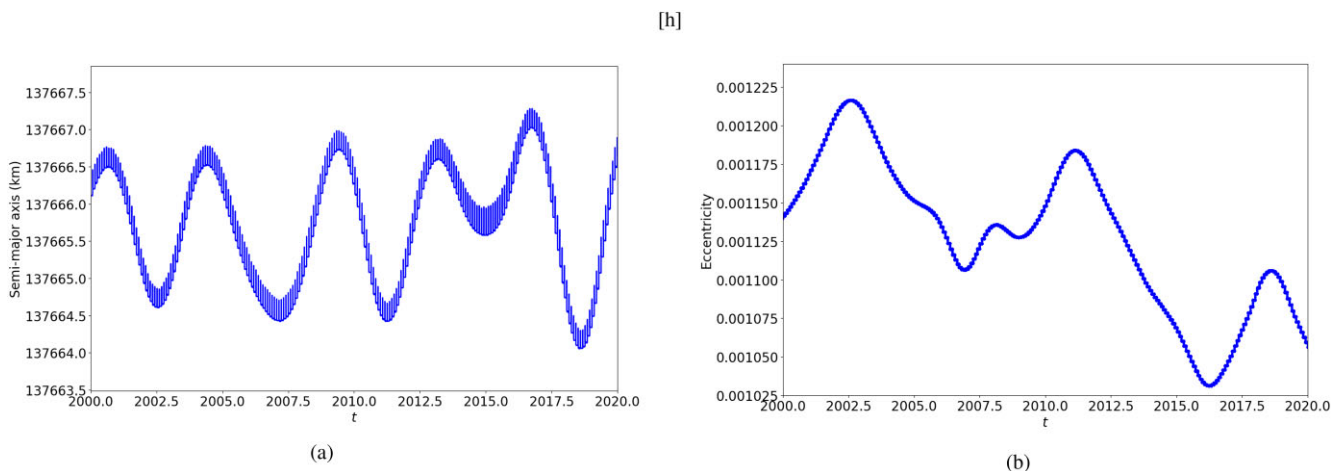
The relatively short Lyapunov time and the small variations in the amplitudes of the radial distance motivated the study of the angular evolution of Atlas, which will be presented below.

### 4.3 The angular variation

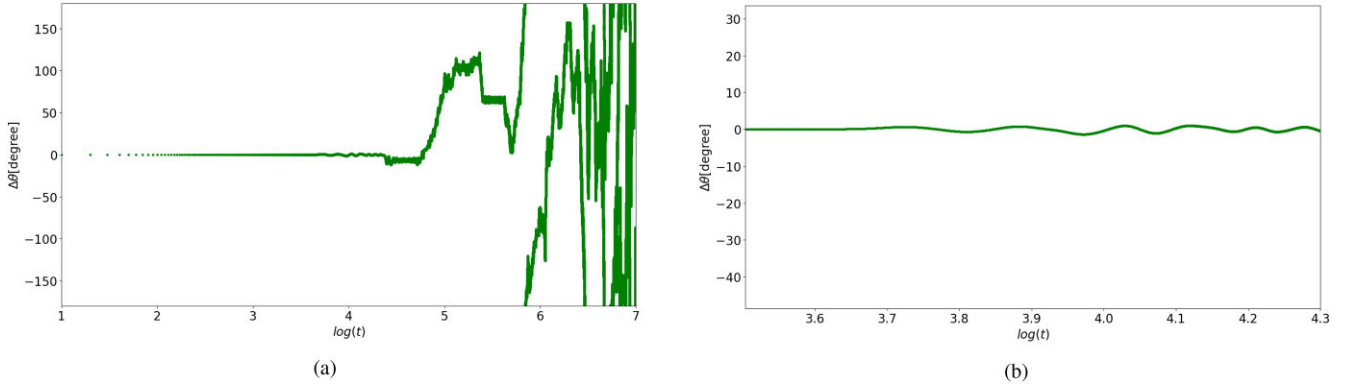
Since Atlas' orbital plane has a small inclination, we can calculate its approximate angular position using  $\theta = \arctan(Y_A/X_A)$  at each time-step throughout the integration. These results will be called original angular evolution. Now, we again introduced a small change  $\delta$ , equal to  $10^{-2}$  km (equivalent to  $10^{-7}$  when normalized), to the coordinate  $x$  of Atlas' initial conditions to assess the sensitivity of the angular movement to initial conditions. And in this case, the results will be called altered angular evolution. As chaotic systems are sensitive to initial conditions, if the angular movement is chaotic, it is expected that the angular positions will diverge and assume completely different values over time.

To detect this divergence between angular positions, we performed numerical integrations and measured the difference between the results of altered angular evolution and original angular evolution at each time-step.

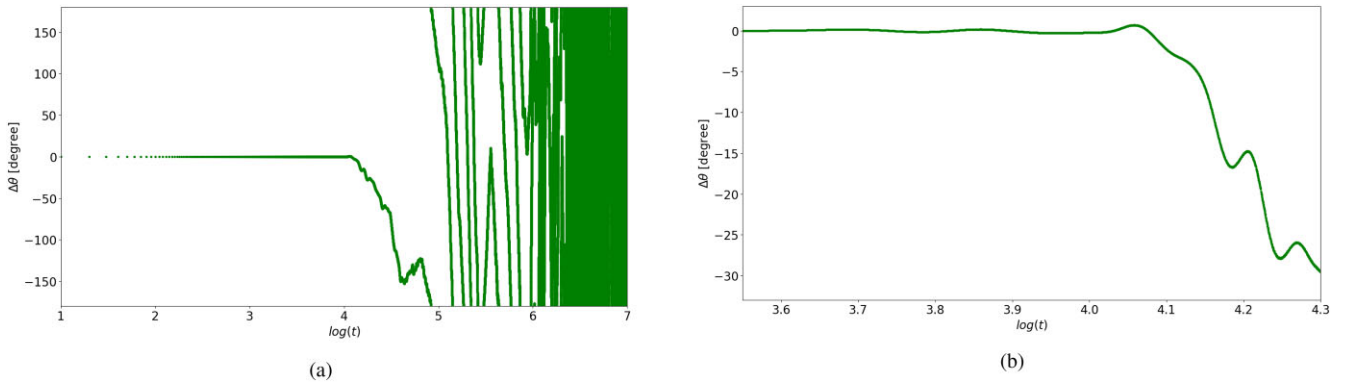
In Fig. 6(a), we present the difference between the angular positions for altered and original angular evolution for the three-body



**Figure 5.** Evolution of the (a) semimajor axis and (b) eccentricity of Atlas in the three-body system from 2000 January 1 using data from Tables 1 and 2. These plots show evolutions very similar to those generated by Cooper et al. (2015).



**Figure 6.** Difference of the temporal angular evolution for the three-body system. (a) The plot shows the Atlas angular difference between altered angular evolution and original angular evolution. (b) Zoom of plot (a).



**Figure 7.** Difference of the temporal angular evolution for the five-body system. (a) The plot shows the Atlas angular difference between altered angular evolution and original angular evolution. (b) Zoom of plot (a).

system. For integration times shorter than Lyapunov time ( $\log(t) \approx 3.73$ ), the difference between the angular positions is relatively small and varies little throughout the integration, and from that time on, the difference starts to increase. The increase in the difference between angular positions beyond  $\log(t) \approx 3.7$  shows the onset of chaotic behaviour in the angular motion of Atlas. Therefore, we can infer that the chaos indicated by the maximum LCE is mainly due to angular motion, and then, after a certain time, the system loses memory and we would not know where in its own orbit Atlas would be.

For  $\log(t) \approx 6.0$ , the angular position for the case with no change in the initial conditions was approximately  $-109^\circ$ , while for the case where there was a small difference in the initial condition  $x$ , the angular position found was larger than  $-173^\circ$ . The angular difference is approximately  $-64^\circ$ . In Fig. 6(b), the oscillations in  $\Delta\theta$  start to occur, although with small amplitudes, after  $\log(t) \approx 3.7$ , i.e. approximately the Lyapunov time.

In Fig. 7(a), the same occurs for the five-body system. However, in this case, the angular difference starts to diverge, even though the amplitude of the angular difference is relatively small, at  $\log(t) \approx 3.75$ , i.e. approximately the Lyapunov time found in Fig. 2. Before the Lyapunov time, the angular difference is of the order of  $10^{-2}$ . The expressive difference between the angular positions begins at  $\log(t) \approx 4.0$ . For  $\log(t) \approx 4.7$ , the angular position for the case with no variation in the initial conditions was approximately  $46^\circ$ , while for the case where there was a small difference in the initial condition  $x$ , the angular position found was approximately  $-92^\circ$ , and the angular difference between these two case is about  $-138^\circ$ . In Fig. 7(b), the

oscillations in  $\Delta\theta$  start to occur after  $\log(t) \approx 3.7$ , which is close to the Lyapunov time for the five-body system.

It is interesting to see the ups and downs in the evolution of the angular behaviour of the three-body system between  $\log(t) = 5$  and  $\log(t) = 7$ . The increase in  $\Delta\theta$  means that the altered angular evolution takes on greater angular values than the original evolution. However, when  $\Delta\theta$  decreases, the original angular evolution starts to assume greater angular values than in the altered evolution. This occurs irregularly, without having a periodic pattern for the repetition of the amplitudes of the angular variation.

Therefore, the radial chaos is visible, but its contribution to the LCE is of very small scale. The main contribution of the measured chaos comes from the angular motion of Atlas, as shown by the  $\gamma_*$ , and sensitivity to initial conditions.

As shown in fig. 6 by Renner et al. (2016), for the three-body problem containing Saturn, Atlas, and Prometheus, the evolution of the resonant arguments presents a chaotic behaviour, where chaos is visible in the random CER/LER separatrix crossing. From Figs 6(a) and 7(a), we can get a sense of the chaotic behaviour of the resonant arguments, because as longitude presents chaotic behaviour due to small changes in initial conditions, it is expected that the resonant angles for this same system also present irregular behaviour.

The relevance of these results lies in the fact that, just like the behaviour of Prometheus and Pandora described by Goldreich & Rappaport (2003), Atlas also presents a lag in its angular position when there is a small change in its initial conditions. The results show that this type of lag appears even when the problem is relatively

simpler, which is the case where only three bodies were taken into account.

## 5 CONCLUSIONS

Stable chaos is a behaviour that has already been detected in the movement of several smaller bodies in the Solar system. This type of phenomenon is characterized by causing bodies to present radial stability and a relatively short Lyapunov time. In this work, a three-dimensional approach was presented to detect the radial contribution of the LCE in systems that have stable chaos.

We test our approach using the Atlas satellite, which has a relatively short Lyapunov time, in two different dynamical systems. First, the approach showed that the chaotic contribution to the radial direction of Atlas' movement is negligible, and therefore the satellite must present a confined radial distance over time, even indicating the existence of chaos.

It was also shown that, despite having a chaotic nature, the orbit of the satellites remained well confined over  $10^7$  Prometheus orbital periods. Therefore, we show how Atlas' radial position behaved over time.

The angular behaviour is sensitive to the initial conditions, and after passing a time of approximately  $T_L$ , the angular positions for two cases with very close initial conditions diverged. This type of behaviour is similar to the angular movement of Prometheus and Pandora.

Therefore, it was possible to show that even with an almost regular radial distance for a certain time, the behaviour is still chaotic due to the influence of the sensitivity of the initial conditions in describing the angular position after the Lyapunov time.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001, Conselho Nacional de Desenvolvimento

Científico e Tecnológico (CNPQ) – Proc. 305210/2018-1, and Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) – Proc. 2016/24561-0. The authors would like to thank an anonymous referee for a report that helped to improve the paper.

## DATA AVAILABILITY

The data underlying this article will be shared on reasonable request to the corresponding author.

## REFERENCES

- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M., 1980, *Meccanica*, 15, 9  
 Chambers J. E., 1999, *MNRAS*, 304, 793  
 Cooper N. J., Renner S., Murray C. D., Evans M. W., 2015, *AJ*, 149, 27  
 Everhart E., 1985, in Carusi A., Valsecchi G. B., eds, *IAU Colloq. 83, Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*. Springer, Dordrecht, p. 185  
 Goldreich P., Rappaport N., 2003, *Icarus*, 162, 391  
 Laskar J., 1996, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 64, 115  
 Lemaître A., 1997, in Dvorak R., Henrad J., eds, *The Dynamical Behaviour of our Planetary System*. Springer, Dordrecht, p. 223  
 McGhee C. A., Nicholson P. D., French R. G., Hall K. J., 2001, *Icarus*, 152, 282  
 Milani A., Nobili A., 1992, *Nature*, 357, 569  
 Milani A., Nobili A. M., Knežević Z., 1997, *Icarus*, 125, 13  
 Morbidelli A., Froeschlé C., 1996, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 63, 227  
 Renner S., Sicardy B., 2006, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 94, 237  
 Renner S., Cooper N. J., Moutamid M. E., Sicardy B., Vienne A., Murray C. D., Saillenfest M., 2016, *AJ*, 151, 122  
 Soper P., Franklin F., Lecar M., 1990, *Icarus*, 87, 265  
 Spitale J. N., Jacobson R. J., Porco C. P., Owen W. M., 2006, *AJ*, 132, 692  
 Winter O. C., Mourão D. C., Giuliatti Winter S. M., Spahn F., Da Cruz C., 2007, *MNRAS*, 380, L54  
 Winter O. C., Mourão D. C., Giuliatti Winter S. M., 2010, *A&A*, 523, A67

This paper has been typeset from a  $\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.