

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Ilha Solteira

GABRIEL FRANDULICE PALAZZINI

PROJETO E ANÁLISE DE PERFORMANCE DE SISTEMAS DE CONTROLE
***GAIN-SCHEDULING* COM ALOCAÇÃO DE AUTOVALORES: APLICAÇÃO EM**
SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Ilha Solteira - SP
2025



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Ilha Solteira

GABRIEL FRANDULICE PALAZZINI

PROJETO E ANÁLISE DE PERFORMANCE DE SISTEMAS DE CONTROLE
***GAIN-SCHEDULING* COM ALOCAÇÃO DE AUTOVALORES: APLICAÇÃO EM**
SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Trabalho de Graduação apresentado à
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho” campus de Ilha Solteira,
como parte dos requisitos para obtenção
do grau de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cardim

Ilha Solteira - SP
2025

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvida pela Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

P155p Palazzini, Gabriel Frandulice.
Projeto e análise de performance de sistemas de controle gain-scheduling com alocação de autovalores: aplicação em sistema de suspensão ativa / Gabriel Frandulice Palazzini. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2025
49 f. : il.

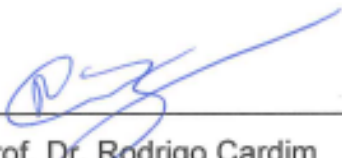
Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2025

Orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

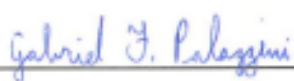
1. Controle gain-scheduling. 2. Alocação de autovalores. 3. Suspensão ativa.

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos vinte e quatro dias do mês de outubro do ano de dois mil e vinte e cinco, o discente **Gabriel Frandulice Palazzini**, matriculado sob o nº 181050102, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Rodrigo Cardim*, o *Doutorando Kariston Dias Alves* e o *Doutorando Hugo Fernando Yamanaka*, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "**Projeto e Análise de Performance de Sistemas de Controle Gain-Scheduling com Alocação de Autovalores: Aplicação em Sistema de Suspensão Ativa**" obtendo a nota 10,0 (Dez) e conceito Aprovado.



Prof. Dr. Rodrigo Cardim
- orientador -



Gabriel Frandulice Palazzini
- discente -

Documento assinado digitalmente
gov.br KARISTON DIAS ALVES
Data: 24/10/2025 12:41:46-0300
Verifique em <https://validar.ti.gov.br>

Doutorando Kariston Dias Alves
- Membro da Banca -



Doutorando Hugo Fernando Yamanaka
- Membro da Banca -

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram durante meu período de graduação e de elaboração do presente trabalho.

À minha família, em especial meus pais Luzia Frandulice Palazzini e Sergio Palazzini, e minha irmã Vanessa Frandulice Palazzini, que nunca deixaram de me apoiar e acreditar no meu potencial. À minha namorada, Monique Balbino dos Santos, que, mesmo à distância me amparou com cumplicidade, apoio incondicional e compreensão pela ausência.

Aos professores, em especial meu orientador do Trabalho de Graduação Prof. Dr. Rodrigo Cardim e meus orientadores de Iniciação Científica, Prof. Dr. Edvaldo Assunção e Prof. Dr. Bruno Sereni, pela paciência e contribuição na elaboração do presente trabalho. À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Campus de Ilha Solteira, ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) e ao CNPq por proporcionar os meios e fomentar a Iniciação Científica que são base desse trabalho.

Especiais agradecimentos aos amigos Erick Gustavo Cunha Xisto, Luiz Gustavo Vilela dos Reis e Vinícius Fantinato de Oliveira pelos momentos alegres, de estudo e de companheirismo.

RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo de um sistema de suspensão ativa, um equipamento didático da Quanser®, com foco na modelagem dinâmica e no projeto de controladores. Inicialmente, são deduzidas as equações dinâmicas do sistema, resultando em um modelo matemático em espaço de estados. A estabilidade assintótica do sistema duplo massa-mola amortecido é verificada com base no Teorema da Estabilidade de Lyapunov. Em seguida, são empregadas e comparadas técnicas de controle robusto e controle *gain-scheduling*, visando avaliar e otimizar critérios de performance em sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (do inglês, *Linear Parameter Varying* - LPV), considerando uma falha de 30% no atuador do sistema. As condições de D-estabilidade são aplicadas para a alocação de autovalores, utilizando desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs), com o objetivo de garantir características de desempenho dinâmico desejáveis. Os resultados demonstram a eficácia dos controladores propostos na atenuação de vibrações e na melhoria da resposta do sistema de suspensão ativa.

Palavras-chave: Controle *gain-scheduling*, Alocação de autovalores, Suspensão ativa.

ABSTRACT

This work presents the study of an active suspension system, a didactic equipment from Quanser®, focusing on dynamic modeling and controller design. Initially, the system's dynamic equations are derived, resulting in a mathematical model in state space. The asymptotic stability of the double spring-mass damped system is verified based on Lyapunov's Stability Theorem. Subsequently, robust control and gain-scheduling control techniques are employed and compared, aiming to evaluate and optimize performance criteria in Linear Parameter Varying (LPV) systems, considering a 30% fault in the system actuator. D-stability conditions are applied for eigenvalue allocation, utilizing Linear Matrix Inequalities (LMIs), with the objective of ensuring desirable dynamic performance characteristics. The results demonstrate the effectiveness of the proposed controllers in attenuating vibrations and improving the active suspension system's response.

Keywords: Gain-scheduling control, Eigenvalue allocation, Active suspension

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Curva de resposta em degrau unitário que mostra especificações de resposta transitória para um sistema de 2 ^a ordem.	14
Figura 2 – Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.	15
Figura 3 – Modelo real do Sistema de Suspensão Ativa Quanser®.	17
Figura 4 – Motor CC de suspensão ativa.	18
Figura 5 – Motor CC da placa inferior.	18
Figura 6 – Sistema de movimento da placa inferior.	19
Figura 7 – Modelo esquemático do sistema duplo massa-mola amortecido.	20
Figura 8 – Diagrama de corpo-livre para M_s	21
Figura 9 – Diagrama de corpo-livre para M_{us}	22
Figura 10 – Alocação dos Autovalores e Região de D-estabilidade.	26
Figura 11 – Resposta do sistema de massas ao deslocamento vertical do perfil da pista com atenuação do sinal de controle.	28
Figura 12 – Visão comparativa de performance utilizando controladores robusto e <i>gain-scheduled</i>	29
Figura 13 – Comportamento da variável ρ	30
Figura 14 – Comportamento das variáveis α	30
Figura 15 – Sinal de controle do atuador para controladores robusto e <i>gain-scheduled</i>	31
Figura 16 – Resposta no tempo do deslocamento da massa suspensa (z_s) para a entrada de perturbação do tipo <i>chirp</i>	32
Figura 17 – Detalhamento da resposta dos controladores no intervalo de 4 a 5 segundos.	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Objetivo	11
1.1.1	Objetivos Específicos	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	Espaço de Estados	12
2.2	Estabilidade de <i>Lyapunov</i>	13
2.3	Definição das especificações da resposta transitória	13
2.4	Alocação de autovalores utilizando D-estabilidade	14
3	MODELAGEM DO SISTEMA	17
3.1	Sistema de Suspensão Ativa Quanser®	17
3.2	Dedução das Equações Dinâmicas	19
3.3	Modelo Matemático em Espaço de Estados	23
4	PROJETO E ANÁLISE DOS CONTROLADORES	25
4.1	Análise de Estabilidade do Sistema	25
4.2	Projeto dos Controladores	26
4.3	Resultados e Análise de Desempenho	28
4.4	Simulação com Frequência Variável (Entrada <i>chirp</i>)	31
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	34
	Referências	35
	Anexos	36
	ANEXO A CONTROLE ROBUSTO	37
	ANEXO B CONTROLE GS	41
	ANEXO C SIMULAÇÃO COM FREQUÊNCIA VARIÁVEL	46

1 INTRODUÇÃO

Observa-se um constante aumento da complexidade nos sistemas de engenharia modernos, associado à necessidade de realizar tarefas cada vez mais complexas e que exigem maior precisão (Ogata, 2010). Como solução para o controle de sistemas não lineares, é atrativo o uso da técnica *gain-scheduling*, que explora métodos de projeto de controle linear que envolvem procedimentos de síntese computacionalmente eficientes (Bett, 2005).

Essa demanda por precisão e eficiência torna-se crítica em aplicações que envolvem a interação humana, como nos sistemas de transporte. A esse respeito, a norma ISO2631-1 estabelece efeitos da exposição contínua de vibrações entre 0,5 e 80 Hz para o ser humano, como lesões de vértebras na região lombar e, conseqüentemente, perdas no funcionamento de seus nervos (Rizvi et al., 2018). Tendo em vista a proeminência de diversos meios de transporte para a locomoção coletiva diária, torna-se evidente a necessidade de conduções mais cômodas e meios de minimizar possíveis vibrações originadas de irregularidades nas pistas. Além dos problemas relacionados à saúde, a vibração é considerada um problema de engenharia, visto que afeta tanto a estrutura dos veículos como as cargas transportadas, interferindo na estabilidade e segurança do transporte. Este fato indica a crescente demanda de conforto em todos os segmentos de veículos e a propensão a direções cada vez mais automatizadas para a área de controle (Theunissen et al., 2021).

Nesse contexto, o sistema de suspensão do veículo se mostra indispensável, sendo responsável por interligar a carroceria do veículo aos pneus e transmitir as forças entre a carroceria e a estrada (Rizvi et al., 2018). Dentre suas variações, o sistema de suspensão ativa se sobressai como uma opção para garantir a aderência à estrada e o conforto de condução (Viadeiro-Monasterio et al., 2022), sendo composto por atuadores que adicionam ou dissipam energia ao sistema de modo controlado (Rizvi et al., 2018), suprimindo as vibrações mecânicas oriundas das irregularidades da estrada.

O Sistema de Suspensão Ativa no qual pretende-se aplicar as técnicas de controle é um equipamento em escala de bancada que representa o modelo de um quarto de carro. Em uma suspensão convencional, as molas e amortecedores constituem de elementos passivos de amortecimento, isto é, apenas reagem a compressão de forma autônoma. Em contrapartida, ao incluir um motor de corrente contínua (CC), é possível construir um elemento ativo, que atua a partir de um controle externo para minimizar as oscilações. O sistema consiste em duas massas, sendo cada uma sustentada por uma mola e um amortecedor. A massa suspensa representa um quarto da massa do corpo do veículo e a massa não suspensa constitui a massa de um dos quatro pneus. Uma mola e um amortecedor suportam o peso da carroceria sobre o pneu. Outra mola e outro amortecedor modelam a rigidez resultante do contato do pneu com a estrada.

O intuito do projeto em questão é o de estudar técnicas de controle para sistemas lineares cujos parâmetros são variantes no tempo, usualmente referidos na língua inglesa como *Linear*

Parameter-Varying (LPV) systems. Considerando a variação das condições as quais o sistema é submetido, busca-se implementar um controlador *gain scheduled* dependente de parâmetro para estabilizar o sistema, uma vez que estejam disponíveis as medidas em tempo real dos parâmetros. Em particular, a abordagem de projeto de controle a ser empregada ao longo dos estudos propostos neste plano é baseada na teoria de desigualdades matriciais lineares, do termo em inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), que tem se consolidado ao longo das últimas décadas, como pode ser constatado em uma extensa variedade de problemas na teoria de controle (Boyd et al., 1994).

No campo de sistemas automotivos, o controle de suspensão ativa representa um desafio significativo devido à sua natureza inerentemente não linear e às variações paramétricas em tempo real, como mudanças na massa do veículo e nas condições da pista. Sistemas de controle lineares tradicionais, projetados para um ponto de operação específico, perdem eficiência diante dessas variações. Nesse contexto, a abordagem de sistemas LPV surge como uma solução poderosa. Este trabalho explora essa fronteira ao projetar e analisar um controlador *gain-scheduled*, que ajusta dinamicamente seus ganhos com base em parâmetros variáveis. Utilizando uma metodologia baseada em LMIs para a alocação de autovalores, busca-se não apenas garantir a estabilidade, mas também otimizar o desempenho dinâmico, comparando diretamente essa abordagem adaptativa com uma estratégia de controle robusto de ganho fixo.

1.1 Objetivo

O objetivo geral deste trabalho é projetar e simular controladores *gain-scheduled* utilizando realimentação de estados com alocação de autovalores.

1.1.1 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são propostos:

- Investigar a abordagem de alocação de autovalores para o caso de sistemas LPV (*Linear Parameter-Varying*);
- Avaliar como a inclusão desta restrição no projeto de controle contribui para a melhoria da performance dinâmica do sistema de controle *gain-scheduling*.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, serão apresentados os conceitos teóricos fundamentais que servem de base para o desenvolvimento e análise dos controladores de sistema de suspensão ativa, com ênfase nas técnicas de controle robusto e *gain-scheduling*. Inicialmente é apresentado o conceito de modelagem em espaço de estados, seguido pela estabilidade segundo *Lyapunov* e especificações de desempenho da resposta transitória. Por fim, são apresentados os teoremas com base em LMIs, que permitem uma formulação convexa do problema de controle, garantindo a obtenção de uma solução ótima de forma computacionalmente eficiente e permitindo a inclusão simultânea de múltiplas especificações de desempenho.

2.1 Espaço de Estados

O modelo em Espaço de Estados é o pilar da teoria de controle moderna, oferecendo uma descrição robusta e completa dos sistemas dinâmicos.

Um sistema dinâmico de n -ésima ordem é transformado em um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem, que definem a evolução do vetor de estados $x(t)$. Segundo Ogata (2010), essa representação matricial de forma compacta é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo,

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ são, respectivamente, o vetor de estados e sua derivada. Neles estão contidas as variáveis que descrevem completamente o estado interno do sistema, como posições e velocidades.
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, ou sinal de controle.
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída, com as variáveis medidas.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times m}$ são matrizes que contêm os parâmetros do sistema, definindo sua dinâmica, a forma como a entrada afeta os estados e como os estados são transformados nas saídas.

Em uma representação expandida, teremos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} u(t)\tag{2.2}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qm} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.3)$$

2.2 Estabilidade de Lyapunov

O teorema de Lyapunov nos diz que um sistema é assintoticamente estável se a função energia for positiva definida e se sua derivada tende a diminuir até o ponto de equilíbrio, como enunciado:

Teorema 1 (Teorema de Lyapunov) (Boyd et al., 1994) *Considere o sistema descrito por:*

$$\dot{x} = Ax(t) \quad (2.4)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz constante não-singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x_e = 0$ seja assintoticamente estável é que exista uma matriz simétrica:

$$P > 0 \quad (2.5)$$

e que:

$$A^T P + PA < 0 \quad (2.6)$$

2.3 Definição das especificações da resposta transitória

Para caracterizar o comportamento dinâmico e a eficácia de um sistema de controle, é essencial analisar suas métricas de desempenho em regime transitório. Um método padrão para essa análise consiste em submeter o sistema a uma entrada em degrau unitário, que simula uma variação súbita na entrada de referência (Ogata, 2010). A resposta resultante, que geralmente manifesta oscilações amortecidas antes de se estabilizar em seu valor final, é avaliada quantitativamente por um conjunto de parâmetros bem definidos que descrevem sua velocidade, estabilidade relativa e precisão.

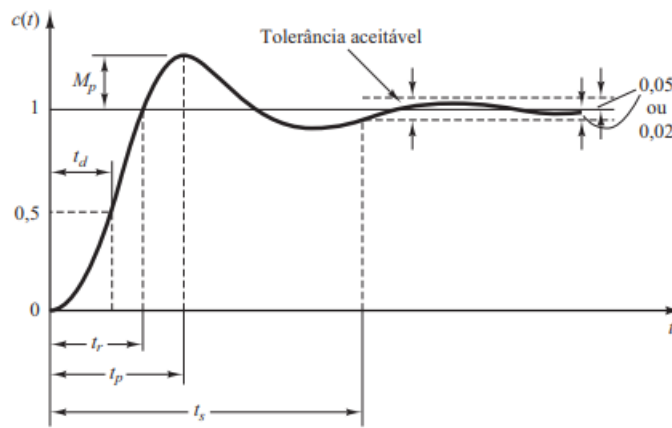
As principais métricas utilizadas para especificar as características da resposta transitória a uma entrada degrau são (Ogata, 2010):

1. Tempo de atraso (t_d): O tempo necessário para a resposta atingir 50% do seu valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida (t_r): O tempo que a resposta leva para ir de 10% a 90% de seu valor final.

3. Tempo de pico (t_p): O tempo necessário para a resposta atingir o primeiro pico do sobressinal.
4. Máximo sobressinal (M_p): O valor de pico máximo da curva de resposta medido a partir do valor final. Geralmente é expresso em porcentagem.
5. Tempo de acomodação (t_s): O tempo necessário para que a curva de resposta permaneça dentro de uma faixa específica (geralmente 2% ou 5%) do valor final.

Essas especificações são mostradas graficamente na Figura 1.

Figura 1 – Curva de resposta em degrau unitário que mostra especificações de resposta transitória para um sistema de 2ª ordem.

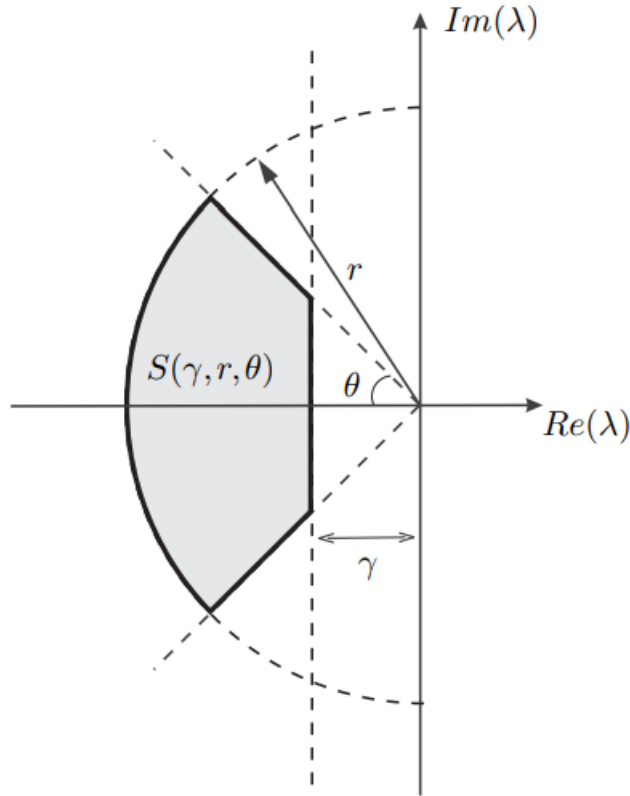


Fonte: Ogata (2010).

2.4 Alocação de autovalores utilizando D-estabilidade

Visando garantir características de performance na resposta transitória, tais como o tempo de acomodação e sobressinal, utiliza-se o conceito de D-estabilidade, com as restrições em (2.7) ilustradas no plano complexo na Figura 2.

$$S(\gamma, r, \theta) = \begin{cases} a < -\gamma < 0, \\ |a + jb| < r, \\ \tan(\theta) * a < -|b|. \end{cases} \quad (2.7)$$

Figura 2 – Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.

Fonte: Silva et al. (2012).

A formulação LMI que garante a alocação na região de interesse é apresentada nos Teoremas 2, 3 e 4, baseados em (Lins, 2015) e (Montagner; Peres, 2004), sendo compilados de forma estruturada em (Cadalso, 2016). As matrizes do controlador obtidos através das LMIs podem ser dadas por:

$$K(\alpha(t)) = Z(\alpha(t))W^{-1} \quad (2.8)$$

É importante ressaltar que esta alocação de autovalores na região especificada nos Teoremas 2, 3 e 4 são válidas no sentido *frozen*, ou seja, a cada valor congelado, fixo, de α .

Teorema 2 (Restrição de Taxa de Decaimento) (Cadalso, 2016) *Dado que $\gamma > 0$, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma constante real $\gamma \geq 0$ com $j = 1, 2, \dots, N$, tais que:*

$$WA_j^T + A_jW - Z_j^T B_j^T - B_j Z_j + 2\gamma W < 0, \quad (2.9)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$WA_i^T + A_iW + WA_j^T + A_jW - Z_i^T B_j^T - Z_j^T B_i^T - B_i Z_j - B_j Z_i + 4\gamma W < 0, \quad (2.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N$$

então o sistema é estabilizável, com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ , para todo $\alpha(t)$.

Teorema 3 (Restrição de Raio) (Cadalso, 2016) Dado $r > 0$, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma constante real $r \geq 0$ com $j = 1, 2, \dots, N$, tais que:

$$\begin{bmatrix} -rW & A_j W - B_j Z_j \\ * & -rW \end{bmatrix} < 0, \quad (2.11)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} -2rW & A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i \\ * & -2rW \end{bmatrix} < 0, \quad (2.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N$$

então o sistema é estabilizável com autovalores, dentro do círculo de raio r , para todo $\alpha(t)$.

Teorema 4 (Restrição de Ângulo) (Cadalso, 2016) Dado $0 < \theta < 90$, se existirem uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $Z_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma constante real θ com

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T - Z_j^T B_j^T) & \cos(\theta)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T + Z_j^T B_j^T) \\ * & \text{sen}(\theta)(A_j W - B_j Z_j + W A_j^T - Z_j^T B_j^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.13)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T - Z_i^T B_j^T) - Z_j^T B_i^T \\ * \\ \cos(\theta)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i - W A_i^T - W A_j^T + Z_i^T B_j^T) + Z_j^T B_i^T \\ \text{sen}(\theta)(A_i W + A_j W - B_i Z_j - B_j Z_i + W A_i^T + W A_j^T - Z_i^T B_j^T) - Z_j^T B_i^T \end{bmatrix} < 0, \quad (2.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; j = i+1, \dots, N$$

então o sistema é estabilizável com autovalores, dentro de uma região limitada por θ , para todo $\alpha(t)$.

3 MODELAGEM DO SISTEMA

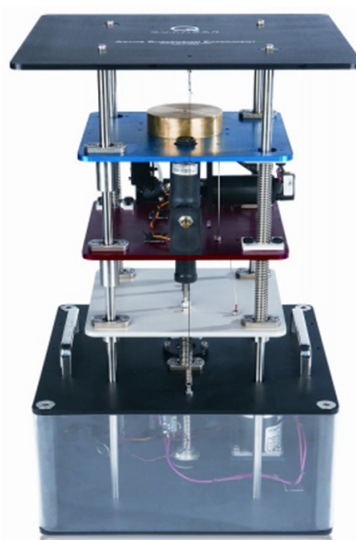
Nesta seção é apresentado o sistema de suspensão ativa, sua estrutura e modo de funcionamento, assim como a dedução das equações que regem sua dinâmica, utilizadas para obter o modelo em espaço de estados do equipamento. Também é realizada a análise da estabilidade assintótica do sistema de massas, e são apresentadas as LMIs utilizadas para projetar os controladores robusto e *gain-scheduled*.

3.1 Sistema de Suspensão Ativa Quanser®

O Sistema de Suspensão Ativa é um equipamento em escala de bancada que representa o modelo de um quarto de carro controlado por um mecanismo de Suspensão Ativa. Em uma suspensão convencional, as molas e amortecedores constituem de elementos passivos de amortecimento, isto é, apenas reagem a compressão de forma autônoma. Em contrapartida, ao incluir um motor CC, é possível construir um elemento ativo, que atua a partir de um controle externo para minimizar as oscilações.

Identificam-se na Figura 3 as placas azul, vermelha e branca, representando a massa suspensa para a superior (chassi do automóvel e assento do motorista) e a massa não suspensa para a intermediária (conjunto do pneu), enquanto que a excitação causada pela estrada é caracterizada pelo deslocamento vertical da placa inferior (representando, assim, o perfil da pista). As três placas que compõem o modelo, são apoiadas por quatro hastes de aço, através das quais podem deslizar suavemente na direção vertical por meio de rolamentos lineares (Quanser, 2013b).

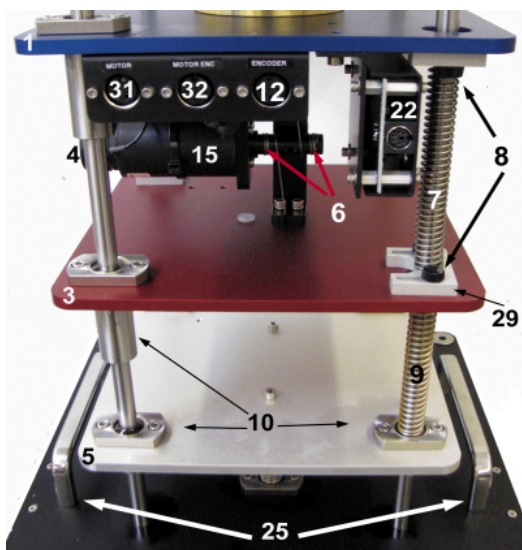
Figura 3 – Modelo real do Sistema de Suspensão Ativa Quanser®.



Fonte: Quanser (2013b).

O sistema modelado consiste em duas massas, sendo cada uma sustentada por uma mola e um amortecedor. Entre estas massas é posicionado um motor CC (numerado como "15"), conforme apresentado na Figura 4, e ao redor do seu eixo são enrolados dois cabos (numerados como "6") que são conectados às placas azul e vermelha. Este motor é um componente de alta qualidade cuja corrente de acionamento é controlada eletronicamente, utilizado para emular um mecanismo de suspensão ativa através do controle da distância entre as placas superior e intermediária à ele conectadas (Quanser, 2013b). A placa superior é equipada com um acelerômetro, posicionado para medir a aceleração da carroceria do veículo em relação à base da planta.

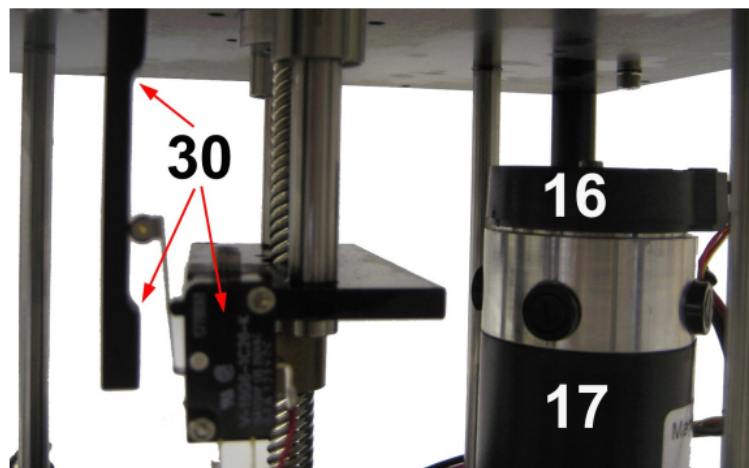
Figura 4 – Motor CC de suspensão ativa.



Fonte: Quanser (2013b).

A placa inferior é conectada a um outro motor CC de resposta rápida (numerado como 17), apresentado na Figura 5, possibilitando ao projetista simular diferentes perfis de pista (Quanser, 2013b).

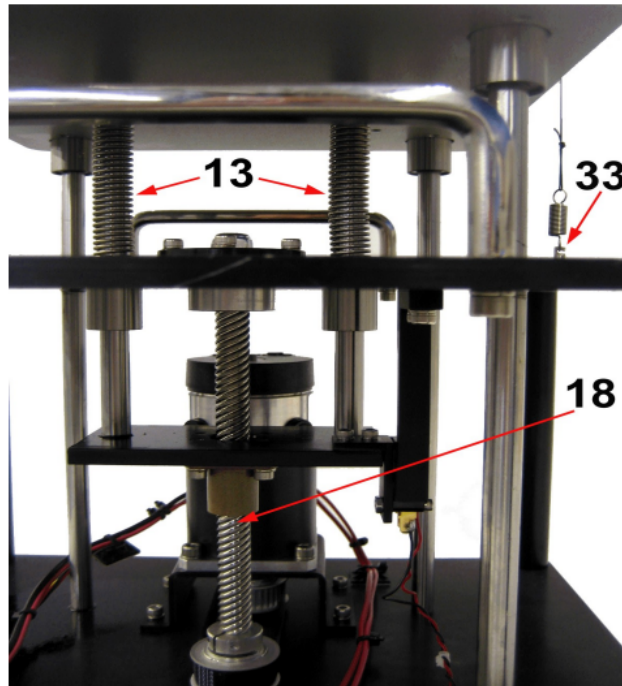
Figura 5 – Motor CC da placa inferior.



Fonte: Quanser (2013b).

O movimento vertical da placa inferior é produzido através do giro do motor conectado a ela, cujo torque no eixo de saída é convertido, através do parafuso de avanço (numerado como "18") e mecanismo de engrenagem ilustrados na Figura 6, para uma força linear (Quanser, 2013b). O movimento das duas placas inferiores é rastreado diretamente por dois codificadores ópticos de alta resolução, enquanto um terceiro codificador mede o movimento da placa superior em relação à placa do meio (Quanser, 2013b).

Figura 6 – Sistema de movimento da placa inferior.



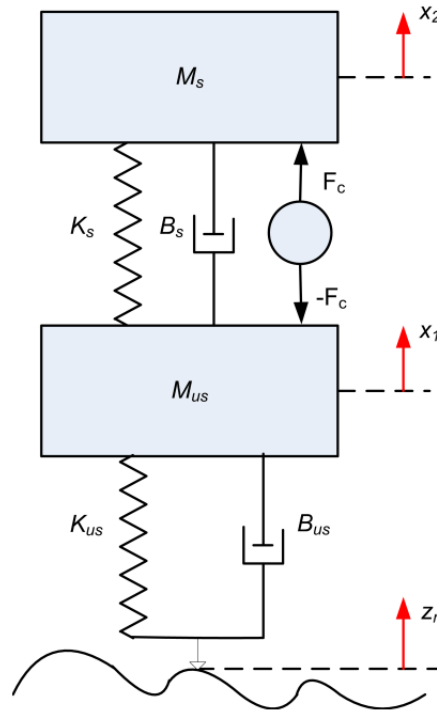
Fonte: Quanser (2013b).

3.2 Dedução das Equações Dinâmicas

Nesta seção serão deduzidas as equações dinâmicas gerais para o Sistema de Suspensão Ativa, objetivando a obtenção de um modelo dinâmico que torne possível representar o sistema real e aplicar estratégias de controle com a finalidade de melhorar a performance do sistema. Serão considerados como índices de performance o conforto sentido pelo motorista e passageiros, o deslocamento relativo entre a carroceria do veículo e a roda, e as forças de contato entre a estrada e o pneu (Quanser, 2013b).

Na Figura 7 é apresentado o Diagrama de Corpo Livre utilizado para obtenção das equações dinâmicas gerais do Sistema de Suspensão Ativa, modelado como um duplo massa-mola amortecido. A massa suspensa M_s (*sprung mass*) representa um quarto da massa do corpo do veículo e a massa não suspensa M_{us} (*unsprung mass*) constitui a massa de um dos quatro pneus. A mola K_s e o amortecedor B_s suportam o peso da carroceria sobre o pneu. A mola K_{us} e o amortecedor B_{us} modelam a rigidez resultante do contato do pneu com a estrada (Quanser, 2013a).

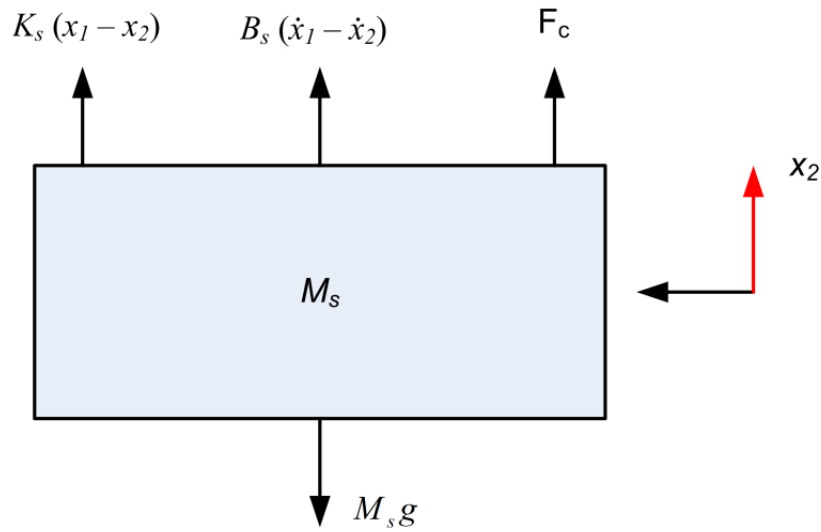
Figura 7 – Modelo esquemático do sistema duplo massa-mola amortecido.



Fonte: Apkarian e Abdossalami (2013).

Nesta abordagem, as duas entradas do sistema consideradas são o comando de controle F_c e a posição da superfície da estrada $z_r(t)$, definidas pelo projetista por meio da atuação sobre os dois motores CC já mencionados. Não obstante, em uma situação prática, a entrada $z_r(t)$ caracteriza o perfil da pista, uma entrada exógena sobre a qual o usuário não tem controle. A coordenada $x_1(t)$ representa o deslocamento do pneu (massa não suspensa) e $x_2(t)$ representa o deslocamento da carroceria do veículo (massa suspensa), ambos com relação ao solo. Para encontrar as equações de movimento do sistema, que regem a dinâmica do equipamento, serão determinados os diagramas de corpo-livre para as duas massas do modelo de dupla massa-mola amortecido. São assumidas condições iniciais nulas.

Além do comando de controle F_c , outras forças atuam sobre as massas do sistema. A força elástica exercida pela mola é variável, formulada pela Lei de Hooke e resultante do produto da constante elástica com a posição relativa; a força exercida pelo amortecedor é resultante do produto da constante de amortecimento com a velocidade relativa; por fim, tem-se a força gravitacional (g), constante desde que a massa do veículo não seja alterada, pois depende apenas do produto desta com aceleração gravitacional. Considerando-se inicialmente a massa suspensa (M_s), tem-se o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Diagrama de corpo-livre para M_s .

Fonte: Apkarian e Abdossalami (2013).

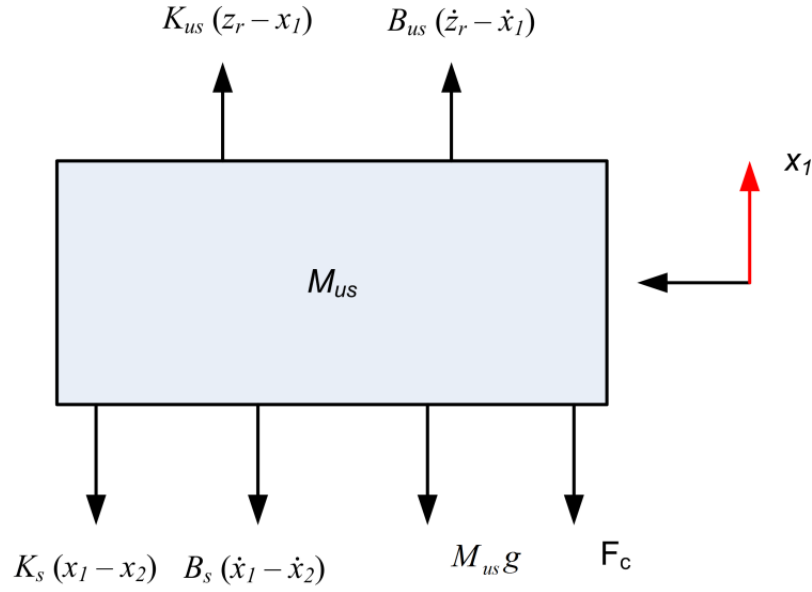
De acordo com o Princípio Fundamental da Dinâmica, enunciado pela Segunda Lei de Newton, a força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração. Igualando esse produto ao somatório das forças atuantes sobre M_s , tem-se:

$$M_s \ddot{x}_2 = -gM_s + F_c + B_s \dot{x}_1 - B_s \dot{x}_2 + K_s x_1 - K_s x_2 \quad (3.1)$$

Evidenciando a aceleração, tem-se a equação de movimento em (3.2).

$$\ddot{x}_2 = -g + \frac{F_c}{M_s} + \frac{B_s \dot{x}_1}{M_s} - \frac{B_s \dot{x}_2}{M_s} + \frac{K_s x_1}{M_s} - \frac{K_s x_2}{M_s} \quad (3.2)$$

Posteriormente, considera-se a massa não suspensa (M_{us}), cujo diagrama de corpo livre é apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Diagrama de corpo-livre para M_{us} .

Fonte: Apkarian e Abdossalami (2013).

Realizando um procedimento matemático análogo ao caso anterior, tem-se:

$$M_{us}\ddot{x}_1 = -gM_{us} - F_c - (B_s + B_{us})\dot{x}_1 + B_s\dot{x}_2 + B_{us}\dot{z}_r - (K_s + K_{us})x_1 + K_sx_2 + K_{us}z_r \quad (3.3)$$

Portanto, tem-se a equação de movimento para M_s em (3.4).

$$\ddot{x}_1 = -g - \frac{F_c}{M_{us}} - \frac{(B_s + B_{us})\dot{x}_1}{M_{us}} + \frac{B_s\dot{x}_2}{M_{us}} + \frac{B_{us}\dot{z}_r}{M_{us}} - \frac{(K_s + K_{us})x_1}{M_{us}} + \frac{K_sx_2}{M_{us}} + \frac{K_{us}z_r}{M_{us}} \quad (3.4)$$

A força gravitacional muda apenas o ponto de equilíbrio para o Sistema de Suspensão Ativa, não afetando a dinâmica do sistema (Quanser, 2013a). No ponto de equilíbrio estático ($x_1 = x_{eq1}$ e $x_2 = x_{eq2}$), todas as derivadas de x_1 e x_2 de qualquer ordem são zero. Ainda, a superfície da pista z_r e suas derivadas, assim como a força de controle F_c , são zero. Considerando-se o ponto de equilíbrio e anulando esses termos em (3.2) e (3.4), tem-se:

$$-g + \frac{K_sx_{eq1}}{M_s} - \frac{K_sx_{eq2}}{M_s} = 0 \Rightarrow M_sg - K_sx_{eq1} + K_sx_{eq2} = 0 \quad (3.5)$$

$$-g - \frac{(K_s + K_{us})x_{eq1}}{M_{us}} + \frac{K_sx_{eq2}}{M_{us}} = 0 \Rightarrow M_{us}g + K_sx_{eq1} + K_{us}x_{eq1} - K_sx_{eq2} = 0 \quad (3.6)$$

Como resultado do sistema linear composto por (3.5) e (3.6), os pontos de equilíbrio devido à gravidade serão:

$$x_{eq1} = -\frac{g(M_s + M_{us})}{K_{us}} \quad (3.7)$$

$$x_{eq2} = -\frac{g(K_s M_s + K_s M_{us} + K_{us} M_s)}{K_s K_{us}} \quad (3.8)$$

A fim de remover as forças de gravidade das equações de movimento, aplica-se a mudança de variáveis em (3.9) nas equações de movimento (3.2) e (3.4) :

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{us} - \frac{g(M_s + M_{us})}{K_{us}}, & x_2 &= z_s - \frac{M_s g}{K_s} - \frac{g(M_s + M_{us})}{K_{us}} \\ \dot{x}_1 &= \dot{z}_{us}, & \dot{x}_2 &= \dot{z}_s \\ \ddot{x}_1 &= \ddot{z}_{us}, & \ddot{x}_2 &= \ddot{z}_s \end{aligned} \quad (3.9)$$

Desse modo, obtêm-se as relações (3.10) e (3.11), que descrevem a dinâmica do Sistema de Suspensão Ativa sem o efeito da gravidade (Apkarian; Abdossalami, 2013).

$$M_s \ddot{z}_s = B_s \dot{z}_{us} + F_c - B_s \dot{z}_s - (z_s - z_{us}) K_s \quad (3.10)$$

$$M_{us} \ddot{z}_{us} = -B_s \dot{z}_{us} - B_{us} \dot{z}_{us} - F_c + B_s \dot{z}_s + B_{us} \dot{z}_r - (z_{us} - z_s) K_s - (z_{us} - z_r) K_{us} \quad (3.11)$$

Têm-se o ponto de equilíbrio do sistema na posição em que as molas estão relaxadas, ou seja, $z_s = 0$ e $z_{us} = 0$. Ainda, as duas entradas são a força de controle F_c e o perfil da pista z_r .

3.3 Modelo Matemático em Espaço de Estados

Partindo do sistema de suspensão ativa descrito em suas variáveis de estado, as duas equações diferenciais lineares e invariantes no tempo foram representadas na forma matricial em espaço de estados conforme (3.12).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.12)$$

Os vetores de estados (x), de entrada (u) e de saída (y) são apresentados em (3.13).

$$x = \begin{bmatrix} z_s - z_{us} \\ \dot{z}_s \\ z_{us} - z_r \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \dot{z}_r \\ F_c \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} z_s - z_{us} \\ \ddot{z}_s \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Os estados refletem os parâmetros de desempenho do sistema que devem ser otimizados, sendo eles deflexão/deslocamento da suspensão, velocidade vertical da carroceria do veículo, deflexão e velocidade vertical do pneu. As entradas são a velocidade da superfície da estrada e força de controle, enquanto as saídas medidas são o curso da suspensão e aceleração da carroceria.

As matrizes com parâmetros do sistema são apresentadas em 3.14.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & -\frac{K_{us}}{M_{us}} & -\frac{B_s + B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \\ -1 & 0 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} & -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Os valores desses parâmetros são constantes e encontram-se especificados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema de suspensão ativa.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de ¼ do corpo total do veículo	M_s	2,45 kg
Massa do conjunto do pneu	M_{us}	1 kg
Constante de rigidez da suspensão	K_s	900 N/m
Constante de rigidez do pneu	K_{us}	1250 N/m
Coefficiente de amortecimento da suspensão	B_s	7,5 Ns/m
Coefficiente de amortecimento do pneu	B_{us}	5 Ns/m

Fonte: Adaptado de Apkarian e Abdossalami (2013).

4 PROJETO E ANÁLISE DOS CONTROLADORES

Neste capítulo, o foco é o projeto e a análise de desempenho dos controladores que atuarão no sistema de suspensão ativa, dando continuidade à modelagem do sistema apresentada no Capítulo 3. O objetivo principal é sintetizar e comparar as técnicas de Controle Robusto e Controlador *Gain-Scheduled* (GS), aplicando a alocação de autovalores para garantir características de desempenho dinâmico desejáveis e implementando-as no módulo didático em laboratório. A abordagem de projeto é baseada na teoria das LMIs apresentada na fundamentação teórica. O desenvolvimento deste capítulo está estruturado iniciando-se com a análise de estabilidade do sistema, aplicação dos conceitos de controle para projeto dos controladores robusto e *gain-scheduled*, apresentação e análise dos resultados obtidos. Por fim, é realizada simulação com frequência variável, visando obter uma visualização gráfica do comportamento do sistema mesmo sem aplicação no modelo didático de laboratório.

4.1 Análise de Estabilidade do Sistema

Avaliou-se a estabilidade assintótica do sistema utilizando-se dois métodos distintos, com uso do *software* Matlab®. Considera-se em ambos os casos um sistema linear contínuo no tempo descrito na equação 4.1, no qual foram desconsideradas entradas exógenas.

$$\dot{x} = Ax(t), A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.1)$$

O cálculo dos autovalores da matriz A resultou em (4.2). Sendo que a parte real de todos é negativa, conclui-se que o sistema é assintoticamente estável.

$$\lambda_i(A) = \begin{cases} \lambda_1(A) = -6,9453 + 58,7246j \\ \lambda_2(A) = -6,9453 - 58,7246j \\ \lambda_3(A) = -0,8353 + 16,1843j \\ \lambda_4(A) = -0,8353 - 16,1843j \end{cases} \quad (4.2)$$

Utilizando o método de solução de LMIs, com uso do pacote Sedumi, verificou-se a existência de uma matriz simétrica P tal que:

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A'P + PA &< 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Portanto, segundo o Teorema da Estabilidade de Lyapunov, chegou-se a mesma conclusão de que o sistema é assintoticamente estável.

4.2 Projeto dos Controladores

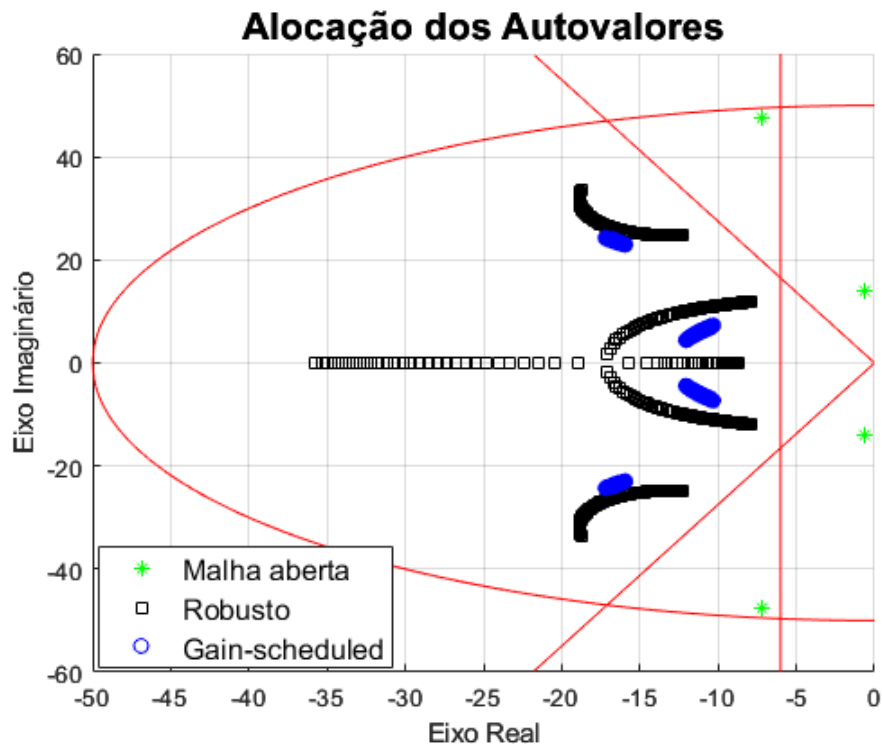
Ainda que o sistema seja estável para parâmetros fixos, é necessário que este também se estabilize considerando incertezas no modelo da planta, mesmo quando submetido a entradas que perturbem seu equilíbrio. É criado um sinal variante no tempo $\rho(t) = 0,85 + 0,15\text{sen}(2\pi * 0,05t)$, que modifica o ganho do amplificador, ilustrando um sistema LPV. Ele foi projetado para considerar uma atenuação de até 30%, resultando em um modelo de espaço de estados descrito em termos de um politopo com dois vértices, atribuídos aos valores máximo e mínimo da matriz B .

Diante disto, projetou-se via LMIs um controlador robusto de vetor de ganhos fixos K e um controlador de ganhos variáveis *gain-scheduled* $K(\alpha)$, ambos com base na Lei de Controle que está associada à realimentação de estados:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.4)$$

A alocação dos autovalores dos controladores foi de acordo com o uso das LMIs apresentadas nos Teoremas 2, 3 e 4. A alocação dos autovalores em malha aberta, do controlador robusto e do controlador *gain-scheduled* é apresentada na Figura 10. Nela também está ilustrada a região que visa distanciar os autovalores do eixo imaginário (melhorar tempo de resposta) e aproximar do eixo real (diminuir amplitude de oscilação), objetivando a melhora dinâmica do sistema. Para ambos os controladores foram consideradas as restrições $\gamma = 6$, $r = 50$ e $\theta = 70$.

Figura 10 – Alocação dos Autovalores e Região de D-estabilidade.



Fonte: Próprio Autor.

O controlador robusto obtido a partir da alocação de valores é apresentado em (4.5) e o código do programa desenvolvido consta no Anexo A.

$$K_R = [-436, 1479 \quad 72, 4263 \quad -101, 3476 \quad -24, 1008] \quad (4.5)$$

O controlador *gain-scheduled* K_{GS} em (4.6) é obtido a partir da combinação convexa dos controladores de ganhos fixos K_1 e K_2 apresentados em (4.7). O código do programa desenvolvido para o cálculo dos ganhos é apresentado no Anexo B.

$$K_{GS} = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \quad (4.6)$$

onde $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, α_1 e α_2 são não negativos e:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-634, 5670 \quad 36, 9823 \quad -5, 0514 \quad -23, 7468] \\ K_2 &= [-888, 5560 \quad 54, 1414 \quad -30, 5427 \quad -34, 1916] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Os controladores K_1 e K_2 foram projetados para os vértices do politopo que descreve a incerteza do sistema. A lei de controle adapta-se dinamicamente às variações do parâmetro $\rho(t)$, que representa o ganho do amplificador, através dos pesos de interpolação $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$. Dessa forma, tem-se para os extremos da variação de ganho:

- **Controlador K_1 :** Projetado para o sistema com ganho nominal, para $\rho_{max} = 1, 0$.
- **Controlador K_2 :** Projetado para o sistema com o ganho máximo atenuado, para $\rho_{min} = 0, 7$.

Os pesos α_1 e α_2 são calculados em tempo real, garantindo que sua soma seja sempre unitária ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$). A interpolação linear entre os valores extremos de $\rho(t)$ define o valor de cada peso. A expressão para α_1 , associado ao controlador K_1 , é dada por:

$$\alpha_1(t) = \frac{\rho(t) - \rho_{min}}{\rho_{max} - \rho_{min}} \quad (4.8)$$

Consequentemente, o peso α_2 é calculado como:

$$\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t) \quad (4.9)$$

Substituindo os valores de $\rho_{min} = 0, 7$ e $\rho_{max} = 1, 0$ utilizados na simulação, obtêm-se as expressões exatas para os pesos de interpolação:

$$\alpha_1(t) = \frac{\rho(t) - 0, 7}{1, 0 - 0, 7} = \frac{\rho(t) - 0, 7}{0, 3} \quad (4.10)$$

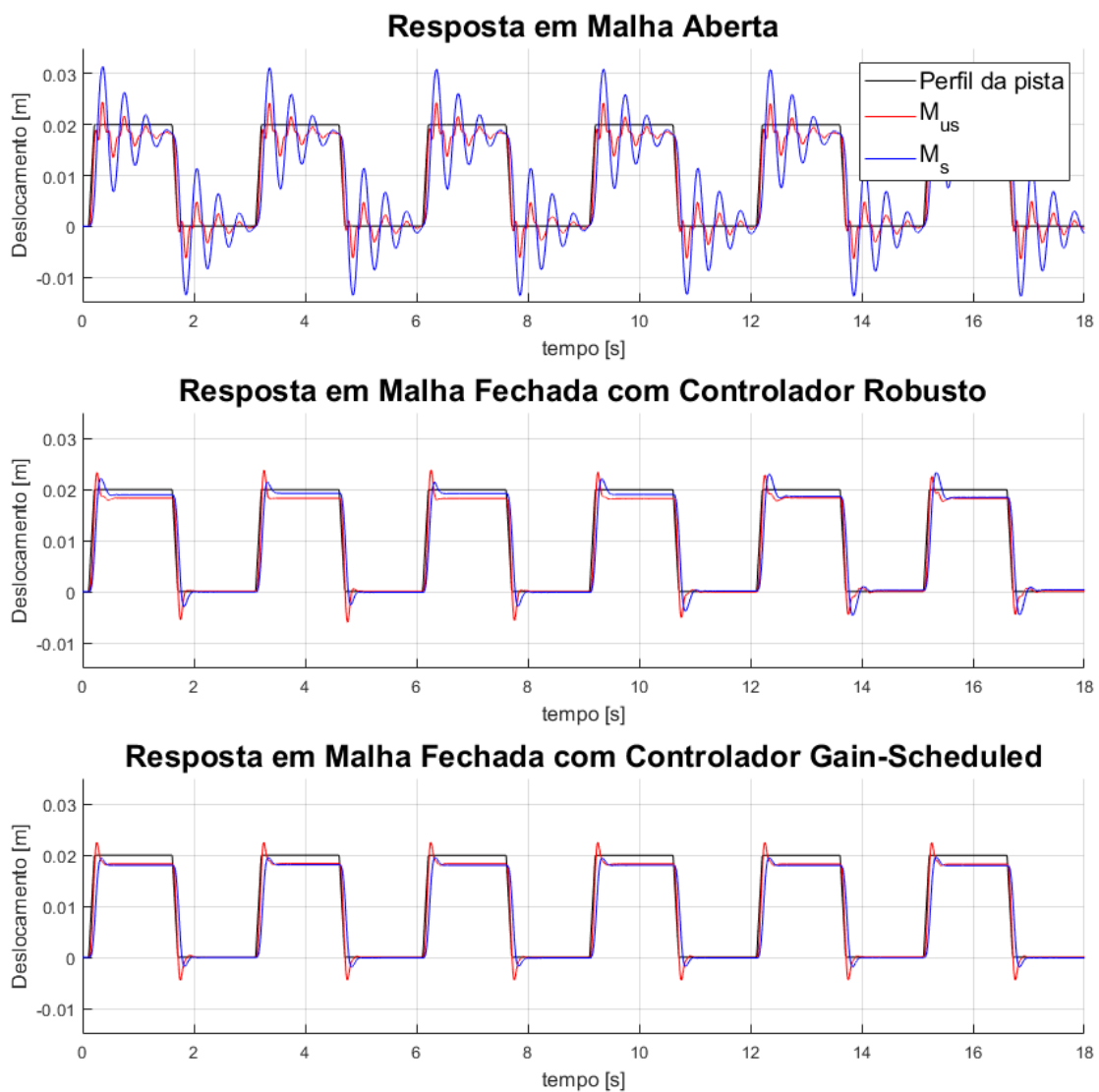
A implementação prática desta lógica assegura uma transição suave e adaptativa do controle. Quando $\rho(t)$ atinge seu valor mínimo de 0, 7, os pesos tornam-se $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$, fazendo com que o controlador ativo seja $K_{GS} = K_2$. Inversamente, quando $\rho(t)$ está em seu valor máximo de 1, os pesos são $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$, e o controlador ativo passa a ser $K_{GS} = K_1$. Para

qualquer valor intermediário de $\rho(t)$, o controlador K_{GS} será uma mistura ponderada de K_1 e K_2 , otimizando a resposta do sistema para a condição operacional corrente.

4.3 Resultados e Análise de Desempenho

Na Figura 11 são apresentadas as respostas dinâmicas do sistema à uma série de deslocamentos verticais de $0,02\text{ m}$ no perfil da pista, intercalando o sentido para cima e para baixo. As posições foram medidas no sistema de suspensão ativa da fabricante Quanser®, operando em malha aberta e em duas situações em malha fechada, utilizando-se os controladores apresentados em (4.5) e (4.6).

Figura 11 – Resposta do sistema de massas ao deslocamento vertical do perfil da pista com atenuação do sinal de controle.

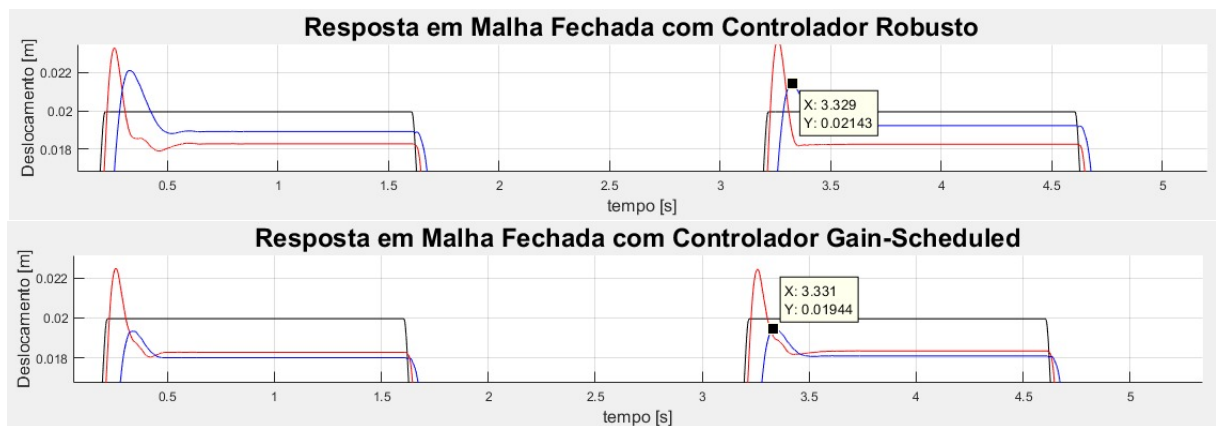


Fonte: Próprio Autor.

Na Figura 12 são destacados valores de pico com a utilização do controlador robusto e *gain-scheduled*, cujos deslocamentos no eixo y foram de $0,02143\text{ m}$ e $0,01944\text{ m}$ respectivamente.

Isso mostra que, para o caso analisado, o deslocamento máximo vertical utilizando controle *gain-scheduled* foi 9,29% menor quando comparado ao controle robusto. Isso se deve ao fato de que o controlador robusto, por precisar garantir estabilidade para toda a faixa de incerteza com um ganho fixo, resulta em um projeto mais conservador. Em contraste, o controlador adaptativo ajusta seus ganhos, permitindo uma resposta menos conservadora e mais otimizada para cada ponto de operação.

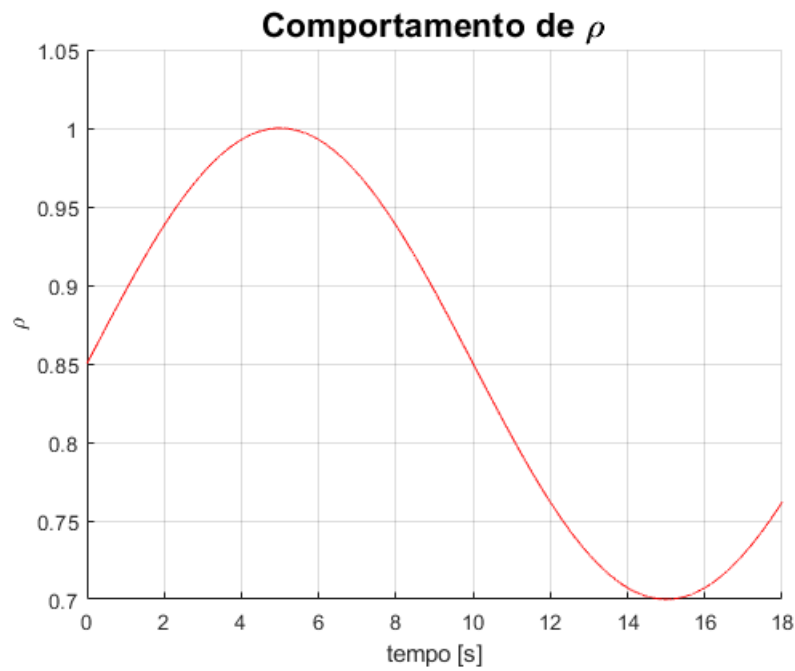
Figura 12 – Visão comparativa de performance utilizando controladores robusto e *gain-scheduled*.



Fonte: Próprio Autor.

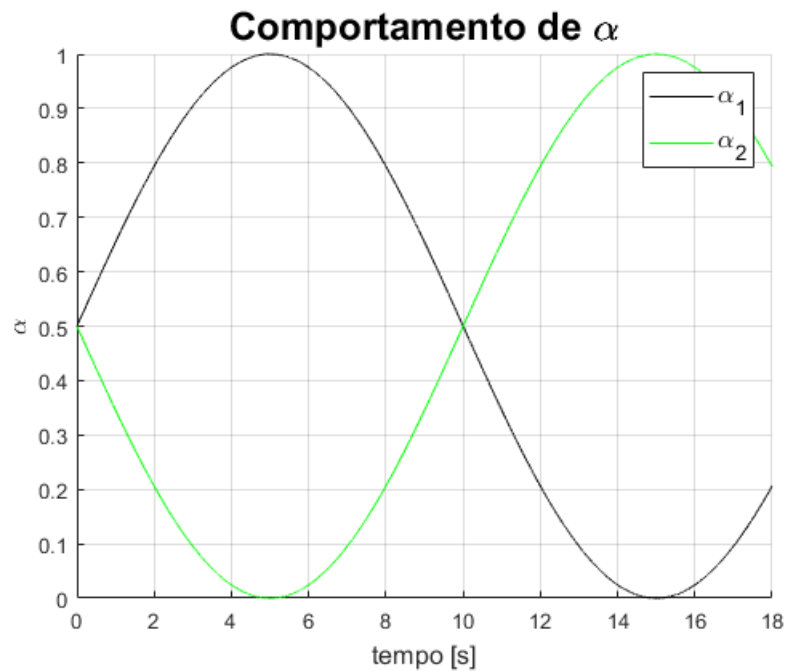
O sinal variante no tempo, que multiplica o ganho do amplificador, é descrito em 4.11 e identificado por $\rho(t)$ na Figura 13.

$$\rho(t) = 0,85 + 0,15\text{sen}(2\pi * 0,05t) \quad (4.11)$$

Figura 13 – Comportamento da variável ρ .

Fonte: Próprio Autor.

Os valores que α_1 e α_2 assumem ao longo do tempo amostrado para a simulação, para que o controlador *gain-scheduled* tenha ganho variável, são apresentados na Figura 14.

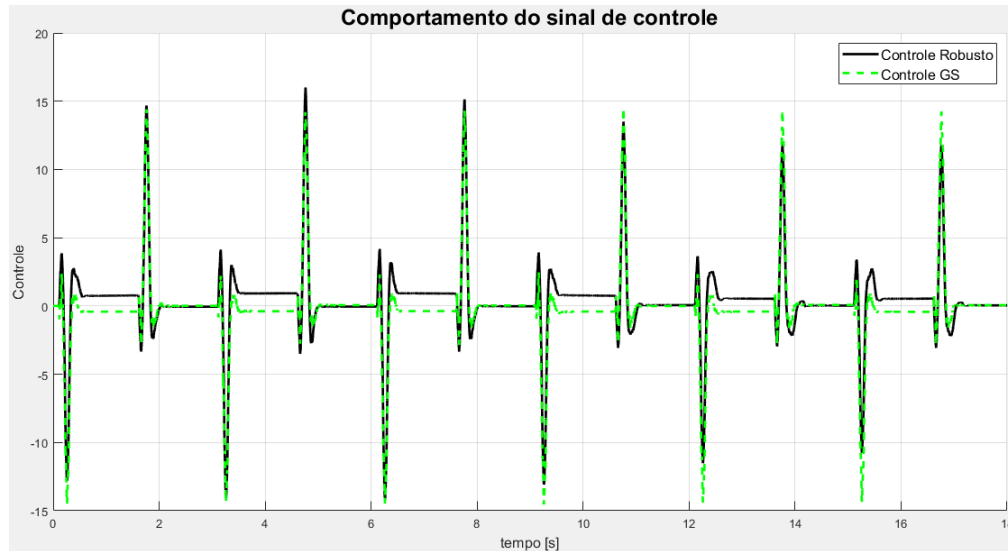
Figura 14 – Comportamento das variáveis α .

Fonte: Próprio Autor.

O sinal de controle em *volts* [V] é apresentado na Figura 15. É possível notar que no período entre 10 e 18 segundos, onde $\rho(t)$ é menor, o sinal de controle robusto também dimi-

nui, enquanto o sinal de controle *gain-scheduling* se mantém próximo aos valores do início da simulação.

Figura 15 – Sinal de controle do atuador para controladores robusto e *gain-scheduled*.



Fonte: Próprio Autor.

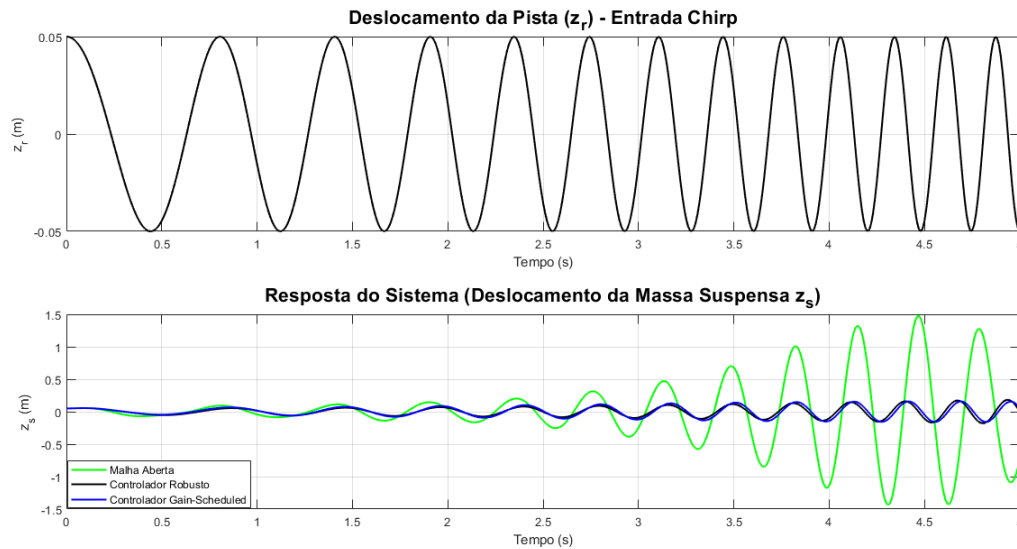
4.4 Simulação com Frequência Variável (Entrada *chirp*)

A fim de avaliar e comparar a eficácia dos controladores projetados, o sistema foi submetido a uma entrada de perturbação na forma de um perfil de pista senoidal com frequência variável, conhecida como entrada *chirp*. Esta simulação não foi implementada no módulo didático, estando seus resultados condicionados à simulação.

Conforme explicitado no código apresentado no Anexo C, a entrada (z_r) possui uma amplitude de $0,05\text{ m}$ e sua frequência aumenta linearmente de 1 Hz para 4 Hz ao longo de 5 segundos de simulação. Este tipo de sinal é particularmente útil para analisar o comportamento do sistema em uma ampla faixa de frequências de operação. A perturbação efetiva que atua sobre o sistema é a velocidade da pista ($\dot{z}_r$), que é numericamente derivada do perfil de deslocamento.

A Figura 16 apresenta os resultados comparativos do deslocamento vertical da massa suspensa (z_s) para três cenários: o sistema em malha aberta (sem controle), o sistema com o controlador robusto e o sistema com o controlador *gain-scheduled*.

Figura 16 – Resposta no tempo do deslocamento da massa suspensa (z_s) para a entrada de perturbação do tipo *chirp*



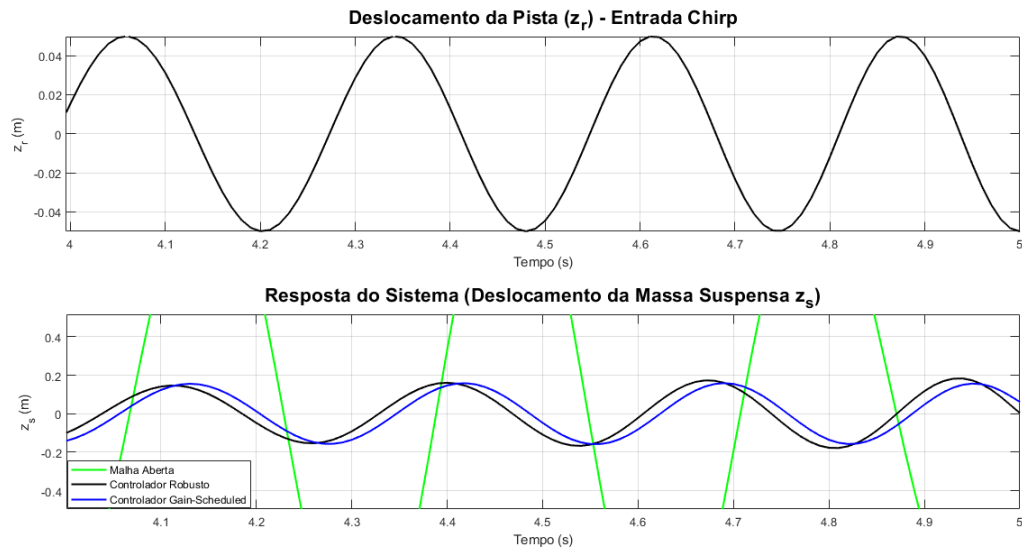
Fonte: Próprio Autor.

A análise do sistema em malha aberta revela um comportamento instável e divergente, com o deslocamento da massa suspensa atingindo amplitudes da ordem de $1,5\text{ m}$. Tal oscilação é fisicamente inadmissível, pois levaria ao colapso completo da suspensão, ressaltando a necessidade fundamental de um sistema de controle ativo para garantir a estabilidade e a segurança.

Em contrapartida, ambos os controladores, robusto e *gain-scheduled*, demonstram excelente capacidade de atenuação da perturbação. Eles mantêm o deslocamento da massa suspensa em níveis muito baixos e controlados ao longo de toda a simulação, validando a eficácia de ambas as estratégias de controle.

Para uma análise mais detalhada do desempenho em altas frequências — a condição mais desafiadora da simulação —, a Figura 17 apresenta um detalhamento da resposta dos sistemas controlados no intervalo entre 4 e 5 segundos.

Figura 17 – Detalhamento da resposta dos controladores no intervalo de 4 a 5 segundos.



Fonte: Próprio Autor.

Neste intervalo, onde a frequência de excitação se aproxima de 4 Hz , observa-se que os dois controladores continuam a apresentar um desempenho muito semelhante e eficiente. A capacidade de ambos em limitar as oscilações, mesmo sob a perturbação de maior frequência, confirma sua robustez e adequação para a aplicação. A similaridade nos resultados sugere que, para a trajetória de perturbação testada, a estratégia robusta de ganho fixo e a estratégia adaptativa do *gain-scheduling* (que neste caso varia seus ganhos em função do tempo, acompanhando a variação da frequência da entrada) convergem para uma solução de controle com eficácia equivalente.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho de graduação se propôs a projetar, simular e analisar controladores para um sistema de suspensão ativa Quanser®, com o objetivo de comparar o desempenho de uma abordagem robusta de ganho fixo com uma estratégia adaptativa *gain-scheduling*. A metodologia foi fundamentada na modelagem do sistema em espaço de estados e no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para a alocação de autovalores em regiões pré-definidas do plano complexo, conhecidas como regiões de D-estabilidade.

Os resultados demonstraram a superioridade do controlador *gain-scheduled* em cenários de resposta a degrau, com uma redução de 9,29% na amplitude máxima de oscilação em comparação ao controlador robusto]. Nas simulações com perturbação do tipo *chirp*, ambas as estratégias de controle em malha fechada foram eficazes em atenuar as vibrações, contrastando com a instabilidade do sistema em malha aberta e validando a eficácia dos métodos projetados.

Como continuação e aprofundamento desta pesquisa, sugerem-se as seguintes frentes de trabalho:

- **Validação Experimental na Plataforma Didática:** Sugere-se a utilização de múltiplos perfis de pista (degrau, senoidal com varredura de frequência e perfis estocásticos) para uma análise completa da robustez.
- **Projeto de Controladores com Realimentação de Saída:** Investigar o projeto de controladores baseados em realimentação estática e dinâmica de saída. Esta abordagem elimina a necessidade de medir todos os vetores de estado — uma condição muitas vezes impraticável em sistemas reais —, utilizando apenas as saídas disponíveis dos sensores. Isso representa um avanço significativo em direção a uma implementação mais realista e economicamente viável.
- **Expansão do Modelo LPV e da Estratégia *Gain-Scheduling*:** Explorar a inclusão de outros parâmetros variantes no projeto do controlador, como a variação da massa suspensa (M_s), que simula diferentes condições de carga do veículo (passageiros e bagagem). Isso permitiria explorar ainda mais o potencial da abordagem adaptativa, ajustando o controle a uma gama mais ampla de pontos de operação.
- **Análise Comparativa com Outras Técnicas de Controle:** Estender a análise de desempenho para incluir outras estratégias de controle avançado, como o Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control*), conhecido por sua robustez a incertezas, e o Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model Predictive Control* - MPC), que pode otimizar o desempenho futuro do sistema considerando restrições de atuadores e estados.

REFERÊNCIAS

- APKARIAN, J.; ABDOSALAMI, A. **Laboratory Guide**. Markham: Quanser, 2013. 21 p. Disponível em: <<https://share.google/Svzkvail4mIilrhFk>>.
- BETT, C. J. 9 - gain-scheduled controllers. In: CHEN, W.-K. (Ed.). **The Electrical Engineering Handbook**. Burlington: Academic Press, 2005. p. 1107–1114. ISBN 978-0-12-170960-0. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780121709600500864>>.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. ISBN 089871334X.
- CADALSO, M. R. R. **Projeto via LMI de controladores gain scheduling com restrição de D-estabilidade**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Engenharia, Campus de Ilha Solteira, Ilha Solteira, 2016. Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção.
- LLINS, L. I. H. **Projeto de controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI**. 61 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira- SP, 2015.
- MONTAGNER, V.; PERES, P. State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In: **Proceedings of the 2004 American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 3, p. 2004–2009 vol.3.
- OGATA, K. **Modern control engineering**. [S.l.]: Prentice hall, 2010.
- QUANSER. **Active Suspension - Instructor Manual**. Markham: Quanser, 2013. 47 p.
- _____. **Active Suspension System - User Manual**. Markham: Quanser, 2013. 24 p.
- RIZVI, S. M. H.; ABID, M.; KHAN, A. Q.; SATTI, S. G.; LATIF, J. H control of 8 degrees of freedom vehicle active suspension system. **Journal of King Saud University - Engineering Sciences**, v. 30, n. 2, p. 161–169, 2018. ISSN 1018-3639. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1018363916000167>>.
- SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. **Math. Probl. Eng.**, Hindawi Limited, v. 2012, p. 1–21, 2012.
- THEUNISSEN, J.; TOTA, A.; GRUBER, P.; DHAENS, M.; SORNIOTTI, A. Preview-based techniques for vehicle suspension control: a state-of-the-art review. **Annual Reviews in Control**, v. 51, p. 206–235, 2021. ISSN 1367-5788. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578821000183>>.
- VIADERO-MONASTERIO, F.; BOADA, B.; BOADA, M.; DÍAZ, V. H dynamic output feedback control for a networked control active suspension system under actuator faults. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 162, p. 108050, 2022. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327021004398>>.

Anexos

ANEXO A – CONTROLE ROBUSTO

```

clear all
clc
disp('Controlador Robusto')
%% Definição do Sistema

%Parâmetros fixos

ms=2.450; %kg
mus=1; %kg
ks=900; %N/m
kus=1250; %N/m
bs=7.5; %Ns/m
bus=5; %Ns/m

%Incertezas

r=1; %número de incertezas
N=2^r; %número de vértices do politopo

rho_min=0.7; %kg
rho_max=1; %kg

%Matrizes do sistema

A{1}=[0 1 0 -1;
      -ks/ms -bs/ms 0 bs/ms;
      0 0 0 1;
      ks/mus bs/mus -kus/mus -(bs+bus)/mus];

A{2}=A{1};

B{1}=[0;
      1/ms;
      0;
      -1/mus];

B{2}=B{1}*0.7;

%Parâmetros do Modelo

n=size(A{1},1); %função que captura o número de estados
m=size(B{1},2); %função que captura o número de entradas

%% Declaração de variáveis

```

```

Z=sdpvar(m,n);
W=sdpvar(n,n,'symmetric');

gama=6;      %taxa de decaimento
r=50;        %raio
theta=70;    %ângulo

fprintf('gama: %d\n',gama);
fprintf('raio: %d\n',r);
fprintf('theta: %d°\n',theta);

%% LMIs do Torema 2 (Restrição de taxa de decaimento)

LMIs = [W>=0];

for j=1:N
    LMIs = [LMIs, [A{j}*W+W*A{j}'-B{j}*Z-Z'*B{j}'+2*gama*W] <=0];
end

%% LMIs do Torema 3 (Restrição de raio)

for j=1:N
    LMIs = [LMIs, [-r*W                      A{j}*W-B{j}*Z;
                  (A{j}*W-B{j}*Z)'          -r*W] <=0];
end

%% LMIs do Teorema 4 (Restrição de ângulo)

for j=1:N
    LMIs = [LMIs, [sind(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z+W*A{j}'+Z'*B{j}') ✓
cosd(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z-W*A{j}'+Z'*B{j}')];
              (cosd(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z-W*A{j}'+Z'*B{j}'))' ✓
sind(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z+W*A{j}'+Z'*B{j}')] <=0];
end

%%LMIs no Command Window para verificar se há N+1 condições

options = sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi'); %lmilab onde ✓
está sedumi também
optimize(LMIs,[],options); %soluciona, ✓
mas sem compatibilidade
primal=check(LMIs);

```

```

if sum(primal<0) == 0                                     %verificar os ✓
menores principais da matriz
    disp('Solução Encontrada: Problema Factível')
    Z=double(Z);
    W=double(W);
    K=Z/W;        %K=Z*inv(W)
    K
    fprintf('Norma de K: %f\n',norm(K));
else
    disp('Solução Não Encontrada: Problema Não Factível')
end

save Robusto K
%% Nuvem de autovalores

fh = figure;
ah = axes(fh);
hold(ah,'on');

%Robusto com D-estabilidade com realimentação
for i=1:100
    nuvem{i+1}=eig((i/100*A{1}+(1-i/100)*A{2})-(i/100*B{1}+(1-i/100)*B{2})*K);
    nuvem_real{i+1}=real(nuvem{i});
    nuvem_imag{i+1}=imag(nuvem{i});
    plot(nuvem_real{i+1},nuvem_imag{i+1},'b*')
end
save Robusto5 nuvem_real nuvem_imag

hold on

%Malha aberta (Apenas Matriz A)
for i=1:100
    nuvem{i+1}=eig(i/100*A{1}+(1-i/100)*A{2});
    nuvem_real{i+1}=real(nuvem{i});
    nuvem_imag{i+1}=imag(nuvem{i});
    plot(nuvem_real{i+1},nuvem_imag{i+1},'go')
end

%% Região de D-estabilidade
%semicírculo (r)
hold on
x = -r: 0.1: 0;

```

```
y = sqrt (r^2-x.^2);  
plot (x, y,'r', x, -y, 'r')  
  
%reta vertical (gama)  
hold on  
y = ylim; % current y-axis limits  
plot([-gama -gama],[y(1) y(2)], 'r')  
  
%reta inclinada (theta)  
hold on  
x = -r: 0.1: 0;  
y = x*tand(theta);  
plot (x, -y,'r', x, y, 'r')
```

ANEXO B – CONTROLE GS

```

clear all
clc
disp('Controlador gain-scheduled')
% D-Estabilidade
% Projeto do controlador mudou mas o sistema de controle permanece
%% Definição do Sistema

%Parâmetros fixos

ms=2.450; %kg
mus=1; %kg
ks=900; %N/m
kus=1250; %N/m
bs=7.5; %Ns/m
bus=5; %Ns/m

%Incertezas

ni=1; %número de incertezas
N=2^ni; %número de vértices do politopo

%Matrizes do sistema

A{1}=[0 1 0 -1;
      -ks/ms -bs/ms 0 bs/ms;
      0 0 0 1;
      ks/mus bs/mus -kus/mus -(bs+bus)/mus];

A{2}=A{1};

B{1}=[0;
      1/ms;
      0;
      -1/mus];

B{2}=B{1}*0.7;

%Parâmetros do Modelo

n=size(A{1},1); %função que captura o número de estados
m=size(B{1},2); %função que captura o número de entradas

%% Declaração de variáveis

```

```

for i=1:N
    Z{i}=sdpvar(m,n);
end

W=sdpvar(n,n,'symmetric');

gama=6;      %taxa de decaimento
r=50;        %raio
theta=70;    %ângulo

fprintf('gama: %d\n',gama);
fprintf('raio: %d\n',r);
fprintf('theta: %d°\n',theta);

%% LMIs do Torema 2 (Restrição de taxa de decaimento)

LMIs = [W>=0];

for j=1:N
    LMIs = [LMIs, [A{j}*W+W*A{j}'-B{j}*Z{j}-Z{j}'*B{j}'+2*gama*W] <=0];
end

for i=1:(N-1)
    for j=(i+1):N
        LMIs = [LMIs, [A{i}*W+A{j}*W+W*A{i}'+W*A{j}'-B{i}*Z{j}-B{j}*Z{i}-Z{i}'*B{j}'-Z{j}'*B{i}'+4*gama*W] <=0];
    end
end

%% LMIs do Torema 3 (Restrição de raio)

for j=1:N
    LMIs = [LMIs, [-r*W                                A{j}*W-B{j}*Z{j};
                  (A{j}*W-B{j}*Z{j})'                -r*W] <=0];
end

for i=1:(N-1)
    for j=(i+1):N
        LMIs=[LMIs, [-2*r*W                                A{i}*W+A{j}*W-
B{i}*Z{j}-B{j}*Z{i};                                A{i}*W+A{j}*W-B{i}*Z{j}-B{j}*Z{i})'                -2*r*W] <=0];
    end
end

```

```

%% LMIs do Teorema 4 (Restrição de ângulo)

for j=1:N
    LMIs = [LMIs, [sind(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z{j}+W*A{j}'-Z{j}'*B{j}')] ✓
cosd(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z{j}-W*A{j}'+Z{j}'*B{j}')];

    (cosd(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z{j}-W*A{j}'+Z{j}'*B{j}'))' ✓
sind(theta)*(A{j}*W-B{j}*Z{j}+W*A{j}'-Z{j}'*B{j}')] <=0];
end

for i=1:(N-1)
    for j=(i+1):N
        LMIs=[LMIs, [sind(theta)*(A{i}*W+A{j}*W-B{i}*Z{j}-B{j}*Z{i}+W*A{✓
{i}'*W*A{j}'-Z{i}'*B{j}'-Z{j}'*B{i}')      cosd(theta)*(A{i}*W+A{j}*W-B{✓
{i}*Z{j}-B{j}*Z{i}-W*A{i}'-W*A{j}'+Z{i}'*B{j}'+Z{j}'*B{i}')];

        (cosd(theta)*(A{i}*W+A{j}*W-B{i}*Z{j}-B{j}*Z{i}-W*A{✓
{i}'*W*A{j}'+Z{i}'*B{j}'+Z{j}'*B{i}'))'      sind(theta)*(A{i}*W+A{j}*W-B{✓
{i}*Z{j}-B{j}*Z{i}+W*A{i}'*W*A{j}'-Z{i}'*B{j}'-Z{j}'*B{i}')]] <=0];
    end
end

%% Solução das LMIs

%%LMIs no Command Window para verificar se há N+1 condições
options = sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi');
optimize(LMIs,[],options);
primal=check(LMIs);

for i=1:N
    if sum(primal<0) == 0
        if i==1
            disp('Solução Encontrada: Problema Factível')
        end
        Z{i}=double(Z{i});
        W=double(W);
        K{i}=Z{i}/W;      %K=Z*inv(W)
        fprintf('K{%d}:',i);
        K{i}
        fprintf('Norma de K{%d}: %f\n',i,norm(K{i}));
    else
        disp('Solução Não Encontrada: Problema Não Factível')
    end
end
end

```

```

K1 = K{1};
K2 = K{2};
save GS K1 K2

%% Nuvem de autovalores

fh = figure (1);
ah = axes(fh);
hold(ah, 'on');
grid on;

title('\fontsize{16}Alocação dos Autovalores');
xlabel('Eixo Real');
ylabel('Eixo Imaginário');

%Robusto em preto
load Robusto5
hold on

for i=1:100
    plot(nuvem_real{i+1},nuvem_imag{i+1},'ks')
end

%malha fechada em azul (Controlador GS)
for i=1:100
    nuvem{i+1}=eig((i/100*A{1}+(1-i/100)*A{2})-((i/100*B{1}+(1-i/100)*B{2}))*((i/100)*K{1}+(1-i/100)*K{2}));
    nuvem_real{i+1}=real(nuvem{i});
    nuvem_imag{i+1}=imag(nuvem{i});
    plot(nuvem_real{i+1},nuvem_imag{i+1},'bo')
end

%semicírculo (r)
hold on
x = -r: 0.1: 0;
y = sqrt (r^2-x.^2);
plot (x, y,'r', x, -y, 'r')

%reta inclinada (theta)
hold on
x = -r/2.3: 0.1: 0;
y = x*tand(theta);
plot (x, -y,'r', x, y, 'r')

```

```
%reta vertical (gama)
hold on
y = ylim; % current y-axis limits
plot([-gama -gama],[y(1) y(2)], 'r')
%plot([-10 -10],[y(1) y(2)], 'r')

%Malha aberta em verde (Apenas Matriz A)
for i=1:100
    nuvem{i+1}=eig(i/100*A{1}+(1-i/100)*A{2});
    nuvem_real{i+1}=real(nuvem{i});
    nuvem_imag{i+1}=imag(nuvem{i});
    plot(nuvem_real{i+1},nuvem_imag{i+1},'g*')
end

xlim([-r, 0]);
p(1) = plot(1,0,'g*');
p(2) = plot(1,0,'ks');
p(3) = plot(1,0,'bo');
legend(p,{'Malha aberta','Robusto','Gain-scheduled'},'FontSize',12)
```

ANEXO C – SIMULAÇÃO COM FREQUÊNCIA VARIÁVEL

```

clear all
clc
% Simulação com entrada senoidal e frequência aumetando ao longo do tempo ✓

%% Definição do Sistema

% Parâmetros fixos
Ms=2.450; %kg
Mus=1; %kg
Ks=900; %N/m
Kus=1250; %N/m
Bs=7.5; %Ns/m
Bus=5; %Ns/m

% Incertezas
ni=1; %número de incertezas
N=2^ni; %número de vértices do politopo

% x = [zs - zus; dot(zs); zus - zr; dot(zus)]
% Entrada de Controle Fc. Perturbação dot(zr) é a entrada de ✓
simulação.

% Matriz A (Fixo)
A_mat = [ 0, 1, 0, 0;
          -Ks/Ms, -Bs/Ms, 0, Bs/Ms;
          0, 0, 0, 1;
          Ks/Mus, Bs/Mus, -Kus/Mus, -(Bs+Bus)/Mus ];

% Matriz E (Perturbação dot(zr) - Coluna 1 da Matriz B)
E_nom = [ -1;
          Bs/Ms;
          -1;
          -Bus/Mus ];

% Matriz Bu (Controle Fc - Coluna 2 da Matriz B)
B_u_nom = [ 0;
            1/Ms;
            0;
            -1/Mus ];

% Definição das Matrizes do Sistema (Nominal)
A_nom = A_mat;

```

```

% Para o projeto LMI (Manter a estrutura de incerteza em B)
A{1} = A_mat;
A{2} = A_mat;

% Incerteza no atuador (B_u)
B{1} = B_u_nom;
B{2} = B_u_nom * 0.7; % 30% de incerteza em Bu

% Parâmetros do Modelo (A entrada de controle é u=Fc, m=1)
n=size(A{1},1); % 4 estados
m=size(B{1},2); % 1 entrada de controle (Fc)

%% Configuração da Simulação e Sinais de Entrada

% Define o tempo de simulação e o vetor de tempo
t_final = 5; % Tempo total de simulação em segundos
Ts = 0.01; % Passo de amostragem
t = 0:Ts:t_final;

% Cria o sinal de deslocamento da pista (z_r(t))
amplitude = 0.05; % 5 cm em metros
f0 = 1; % Frequência inicial (Hz)
f1 = 4; % Frequência final (Hz)
z_r = amplitude * chirp(t, f0, t_final, f1, 'linear');
z_r_col = z_r(:); % Garante que z_r é um vetor coluna para cálculos

% A entrada de perturbação para o sistema é a VELOCIDADE da pista (dot(z_r))
% Calculamos a derivada de z_r(t)
dot_z_r = diff(z_r) / Ts;
dot_z_r = [dot_z_r, dot_z_r(end)]; % Garante o mesmo tamanho de t
r_input = dot_z_r; % Entrada de perturbação (dot(z_r))

% --- Configurações para obter TODOS os estados na simulação com lsim
---
C_full = eye(n); % Matriz C = I (Saída = Todos os estados)
D_zeros = zeros(n, 1); % Matriz D = 0 (Entrada é escalar r_input)

% Sistema de estado (Malha Aberta) configurado para sair TODOS os estados
sys_ma_full = ss(A_nom, E_nom, C_full, D_zeros);

% Condições iniciais

```

```

x0 = zeros(4,1);

%% Carregando Controladores
% K, K1 e K2 são ganhos de realimentação de estado u = -Kx
load Robusto.mat K % K é o ganho robusto
K_robusto = K;

load GS.mat K1 K2 % K1 e K2 são os ganhos gain-scheduled

%% Cálculo das Respostas

%1. Resposta em Malha Aberta
% Sistema: \dot{x} = A x + E_nom * r_input
% Recupera todos os estados (x_ma)
[~, ~, x_ma] = lsim(sys_ma_full, r_input, t, x0);

% Cálculo do Deslocamento da Massa Suspensa (z_s)
% z_s = x1 + x3 + z_r
z_s_ma = x_ma(:, 1) + x_ma(:, 3) + z_r_col;

%2. Resposta com Controlador Robusto
% Sistema: \dot{x} = (A - B_u_nom * K_robusto) * x + E_nom * r_input
A_mf_robusto = A_nom - B_u_nom * K_robusto;
sys_cr_full = ss(A_mf_robusto, E_nom, C_full, D_zeros);

% Recupera todos os estados (x_cr)
[~, ~, x_cr] = lsim(sys_cr_full, r_input, t, x0);
z_s_cr = x_cr(:, 1) + x_cr(:, 3) + z_r_col;

%3. Resposta com Controlador Gain-Scheduled (ode45)
% dxdt = (A - B_u_nom*K(t))*x + E_nom*r_input
odefun_gs = @(t_sim, x_sim) (A_nom - B_u_nom * ( (t_sim/t_final) * K1✓
+ (1 - t_sim/t_final) * K2 ) ) * x_sim + E_nom * interp1(t, r_input,✓
t_sim, 'linear');

% Simulação usando ode45 - retorna todos os estados em x_ode
[t_ode, x_ode] = ode45(odefun_gs, t, x0);

% Cálculo do Deslocamento da Massa Suspensa (z_s) para o GS
% z_s_gs = x_ode(:, 1) + x_ode(:, 3) + z_r_col(1:size(x_ode, 1));

% Interpola o deslocamento da pista z_r para os tempos de saída do✓
ode45
z_r_interp_ode = interp1(t, z_r, t_ode);

```

```
% Cálculo CORRETO do Deslocamento da Massa Suspensa (z_s) para o GS
z_s_gs = x_ode(:, 1) + x_ode(:, 3) + z_r_interp_ode;

%% Geração dos Gráficos de Resposta

figure(2);
clf;

% Gráfico do Deslocamento da Pista (z_r) - ENTRADA REAL DO SISTEMA
subplot(2,1,1);
plot(t, z_r, 'k-', 'LineWidth', 1.5);
title('\fontsize{16}Deslocamento da Pista (z_r) - Entrada Chirp');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('z_r (m)');
grid on;

% Gráfico das Respostas (Deslocamento da Massa Suspensa z_s)
subplot(2,1,2);
plot(t, z_s_ma, 'g', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot(t, z_s_cr, 'k', 'LineWidth', 1.5);
plot(t_ode, z_s_gs, 'b', 'LineWidth', 1.5);
hold off;

title('\fontsize{16}Resposta do Sistema (Deslocamento da Massa
Suspensa z_s)');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('z_s (m)');
legend('Malha Aberta', 'Controlador Robusto', 'Controlador Gain-
Scheduled', 'Location', 'NorthEast');
grid on;
```