



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Um estudo sobre a classificação topológica das superfícies.

Ana Flávia Mariano de Sousa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Matemática como requisito
parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Prof^a. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis

2016

514 Sousa, Ana Flávia Mariano de
S725e Um estudo sobre a classificação topológica das superfícies
/ Ana Flávia Mariano de Sousa. - Rio Claro, 2016
83 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Topologia. 2. Classificação das superfícies compactas.
3. Espaço topológico. 4. Soma conexa de superfícies. I.
Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Flávia Mariano de Sousa

UM ESTUDO SOBRE A CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DAS
SUPERFÍCIES.

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
Orientadora

Prof. Dr. Nelson Antônio Silva
UFLA - Lavras(MG)

Prof. Dr. Sérgio Tsuyoshi Ura
Autônomo - Rio Claro(SP)

Rio Claro, 10 de Outubro de 2016

A Deus, por me conceder a sabedoria, a coragem e a força para persistir e alcançar meus objetivos.

À minha família, por ser meu exemplo de honestidade, luta e persistência. Por todo amor e motivação, sempre me impulsionando em direção às minhas vitórias.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por estar sempre ao meu lado, me guiando e me protegendo pelos meus caminhos.

Aos meus pais, Maria e José, meu infinito agradecimento. Por todo amor e tempo da vida de vocês dedicado a mim. Por acreditarem na minha capacidade, por todo apoio nos momentos que precisei. Obrigada por todo amor.

Aos meus queridos irmãos Alex Sandro, Lucinéia e João Paulo, por serem meus eternos companheiros no caminho da vida e por sempre estarem prontos para me ajudar.

Aos meus sobrinhos, por tornarem meus dias mais alegres, mesmo em meio as dificuldades.

Ao meu namorado Rubens, por estar sempre ao meu lado, por todo amor, apoio e companherismo.

À minha orientadora e exemplo profissional Thaís Fernanda Mendes Monis, por toda dedicação e ensinamentos.

A todos os professores, que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Aos meus amigos, que estiveram presentes em toda minha formação, me ajudando nas atividades acadêmicas e dividindo os momentos bons e ruins. Em especial, a Taísa e ao Éverton (Cebola), que tornaram possível minha frequência nas aulas.

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.

Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."

Madre Teresa de Calcuta.

Resumo

Nesse trabalho, consideramos o conceito de variedades topológicas. Porém, nos especializamos nas variedades conexas de dimensão 2, as chamadas superfícies.

Nosso objetivo é o estudo da classificação topológica das superfícies compactas. Para isto, enunciamos e demonstramos o Teorema de classificação das superfícies compactas. Desta maneira, mostramos que toda superfície compacta orientável é homeomorfa à esfera ou a uma soma conexa de toros, e que toda superfície compacta não-orientável é homeomorfa a uma soma conexa de planos projetivos.

Palavras-chave: Espaço topológico compacto, Superfície, Soma conexa de superfícies.

Abstract

In this work, we consider the concept of a topological manifold. However, we focus on the connected 2-dimensional manifolds, the so-called surfaces.

Our goal is the study of the topological classification of the compact surfaces. In this direction, we state and prove the classification Theorem of compact surfaces. That is, we show that every orientable compact surface is homeomorphic to the sphere or to a connected sum of torus, and every non-orientable compact surface is homeomorphic to a connected sum of projective planes.

Keywords: Compact topological space, Surface, Connected sum of surfaces.

Lista de Figuras

4.1	Faixa de Möbius.	30
5.1	Toro.	32
5.2	Plano projetivo.	35
5.3	Plano Projetivo contém uma faixa de Möbius.	36
6.1	Soma Conexa de dois toros.	38
6.2	Soma Conexa de três toros.	38
6.3	Construção do plano projetivo como espaço quociente de um polígono de dois lados.	39
6.4	Soma Conexa de dois planos projetivos.	40
6.5	Construção da soma conexa de três planos projetivos.	40
6.6	Soma Conexa de M e a esfera.	41
6.7	Construção da esfera.	42
6.8	Garrafa de Klein.	42
6.9	O complemento do interior de D_i em S_i é homeomorfo a uma faixa de Möbius.	43
6.10	Corte da Garrafa de Klein para obter duas faixas de Möbius.	43
6.11	A soma conexa de dois planos projetivos é a garrafa de Klein.	44
8.1	Tipos inadmissíveis de intersecção de triângulos.	47
8.2	Triangularização do plano projetivo.	48
8.3	Triangularização do toro.	49
9.1	Eliminação de Arestas Adjacentes de Primeira Espécie.	54
9.2	Transformação em um polígono com todos os vértices numa mesma classe de equivalência.	55
9.3	Como fazer adjacentes todo par de segunda espécie.	56
9.4	Polígono em que as arestas de primeira espécie não estão separadas por nenhum outro par de arestas de primeira espécie.	57

9.5	Processo de corte e colagem para obter um polígono com pares de primeira espécie adjacentes.	57
9.6	Polígono com todos os pares de primeira espécie adjacentes.	58
9.7	Toro e a Garrafa de Klein.	59
9.8	Soma Conexa da Faixa de Möbius com o Toro.	59
9.9	Soma Conexa da Faixa de Möbius com a Garrafa de Klein.	60
9.10	Soma Conexa de um Retângulo com o Toro.	60
9.11	Triangularização da superfície 1.	62
9.12	Aplicação dos passos 2 e 3, obtendo o toro.	66
9.13	Triangularização da superfície 2.	67
9.14	Aplicação do passo 2, obtendo a esfera.	67
9.15	Triangularização da superfície 3.	68
9.16	Aplicação dos passos 2 e 3, obtendo o plano projetivo.	70
10.1	Esfera: arestas 126, vértices 44, triângulos 84	73
10.2	Esfera: arestas 168, vértices 58, triângulos 112	74
10.3	Toro: arestas 12, vértices 4, triângulos 8	74
10.4	Toro: arestas 27, vértices 9, triângulos 18	75
10.5	Plano Projetivo: arestas 18, vértices 7, triângulos 12	75
10.6	Plano Projetivo: arestas 84, vértices 29, triângulos 56	76
10.7	Garrafa de Klein: arestas 27, vértices 9, triângulos 18	76
10.8	Garrafa de Klein: arestas 84, vértices 28, triângulos 56	77

Sumário

1	Introdução	19
2	Preliminares	21
3	Variedades topológicas	25
4	Variedades bidimensionais - orientáveis e não-orientáveis.	29
5	Exemplos de superfícies compactas.	31
6	Soma conexa	37
7	Para cada superfície compacta, uma “palavra”.	45
8	Triangularização de Superfícies Compactas.	47
9	Teorema da Classificação de Superfícies Compactas.	51
10	A Característica de Euler de uma Superfície.	73
	Referências	83

1 Introdução

O conceito formal de superfície (ou variedade conexa bidimensional) pode ser visto como uma abstração para a nossa experiência familiar com superfícies feitas de papel, folha metálica, plástico, ou qualquer outro material fino e moldável.

Uma variedade bidimensional é um espaço topológico com as mesmas propriedades locais do plano euclidiano. E a generalização para dimensões superiores são as variedades de dimensão n , que são espaços topológicos com as mesmas propriedades locais do espaço euclidiano de dimensão n .

A formalização do conceito de variedade topológica de dimensão n é apresentada no Capítulo 3. Nos demais capítulos, nos especializamos no caso $n = 2$, com especial atenção ao teorema de classificação das superfícies compactas. Como consequência desse resultado, mais o conceito de característica de Euler de uma superfície, chega-se a um procedimento algébrico simples para decidir quando duas superfícies compactas dadas são homeomorfas ou não. Tal situação não ocorre em dimensões superiores.

2 Preliminares

Esse capítulo é baseado na referência [4], e tem o intuito de estabelecer a nomenclatura, definições e resultados básicos da Topologia Geral que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Definição 2.1. *Seja A um conjunto. Dizemos que uma função $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica sobre A se satisfaz:*

1. $d(a, b) \geq 0, \forall a, b \in A$ e
 $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2. $d(a, b) = d(b, a), \forall a, b \in A$;
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c), \forall a, b, c \in A$.

Nessas condições, o par (A, d) é chamado espaço métrico.

Definição 2.2. *Sejam (A, d_A) e (B, d_B) espaços métricos. Uma função $f : A \rightarrow B$, entre os espaços métricos (A, d_A) e (B, d_B) , é dita ser uma função contínua em $x_0 \in A$ se: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $d_A(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_B(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

Se f é contínua em todo $x_0 \in A$, dizemos que f é contínua.

Definição 2.3. *Seja (A, d_A) um espaço métrico. Sejam $x_0 \in A$ e $r > 0$. A bola aberta de centro x_0 e raio $r > 0$, $B_r(x_0)$, é definida por*

$$B_r(x_0) = \{x \in A \mid d_A(x, x_0) < r\}.$$

Definição 2.4. *Seja (A, d_A) um espaço métrico e seja $U \subset A$. Dizemos que U é um subconjunto aberto do espaço métrico (A, d_A) se:*

$$\forall x \in U, \exists r_x > 0 \text{ tal que } B_{r_x}(x) \subset U$$

Teorema 2.1. *Sejam (A, d_A) e (B, d_B) espaços métricos. Dada $f : A \rightarrow B$, f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de A para todo subconjunto aberto U de B .*

Demostração: Ver [4], página 9.

Definição 2.5. *Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma família de subconjuntos de X que possui as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ então $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau$;
3. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de elementos de τ então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um elemento de τ .

Os elementos de τ são chamados conjuntos abertos do espaço topológico (X, τ)

Definição 2.6. *Um subconjunto C de um espaço topológico X é chamado conjunto fechado se, e somente se, $X - C$ é um conjunto aberto.*

Definição 2.7. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $N \subseteq X$ com $x \in N$ é chamado uma vizinhança de x se existe um conjunto aberto U tal que $x \in U \subseteq N$.*

Definição 2.8. *Uma função $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos, X e Y , é dita ser contínua se, para cada conjunto aberto U de Y , a imagem inversa $f^{-1}(U)$ é aberto em X .*

Definição 2.9. *Uma função que leva conjunto aberto em conjunto aberto é chamada função aberta.*

Definição 2.10. *Uma função que leva conjunto fechado em conjunto fechado é chamada função fechada.*

Teorema 2.2. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.*

Demostração: Ver [4], página 18.

Definição 2.11. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y são homeomorfos se existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g = 1_Y$ e $g \circ f = 1_X$. Neste caso, escrevemos $X \sim Y$ e dizemos que f e g são homeomorfismos entre X e Y .*

Definição 2.12. *Seja X um espaço topológico e seja $S \subset X$. A topologia sobre S induzida pela topologia de X é a família dos conjuntos da forma $U \cap S$, onde U é um conjunto aberto em X .*

Definição 2.13. *Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é uma função sobrejetiva de um espaço topológico X sobre um conjunto Y . A topologia quociente sobre Y com respeito a f é a topologia que tem como abertos a família*

$$\tau_f = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}.$$

Teorema 2.3. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva e suponha que Y possui a topologia quociente com respeito a X . Então, uma função $g : Y \rightarrow Z$ de Y num espaço topológico Z é contínua se, e somente se $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.*

Demonstração: Ver [4], página 28.

Definição 2.14. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e considere o produto cartesiano*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

A topologia produto nesse conjunto consiste do seguinte: os conjuntos abertos são todos os conjuntos da forma $\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$, onde A_i é aberto em X e B_i é aberto em Y .

Teorema 2.4. *Sejam A, X e Y espaços topológicos e sejam $f : A \rightarrow X$ e $g : A \rightarrow Y$ funções. Defina $h = (f, g) : A \rightarrow X \times Y$ por $h(a) = (f(a), g(a))$. Então, h é contínua se, e somente se, f e g são contínuas.*

Demonstração: Ver [4], página 41.

Definição 2.15. *Dado um espaço topológico X e um subconjunto S de X , uma cobertura de S é uma família $\{U_j\}_{j \in J}$ de subconjuntos de X tal que $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.*

No caso que J é finito, dizemos que essa cobertura é finita.

Definição 2.16. *Dadas coberturas $\{U_j\}_{j \in J}$ e $\{V_k\}_{k \in K}$, dizemos que $\{U_j\}_{j \in J}$ é uma subcobertura de $\{V_k\}_{k \in K}$ se para todo $j \in J$ existe um $k \in K$ tal que $U_j = V_k$.*

Definição 2.17. *Dados X espaço topológico, $S \subseteq X$ e $\{U_j\}_{j \in J}$ cobertura de S , dizemos que essa é uma cobertura aberta de S se U_j é aberto em X , $\forall j \in J$.*

Definição 2.18. *Um subconjunto S de X é chamado compacto se toda cobertura aberta de S possui subcobertura finita que cobre S .*

Teorema 2.5. *Todo intervalo da forma $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, é um subconjunto compacto de \mathbb{R} .*

Demonstração: Ver [4], página 46.

Teorema 2.6. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se $S \subset X$ é um espaço compacto então $f(S)$ é compacto em Y .*

Demonstração: Ver [4], página 46.

Teorema 2.7. *Um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração: Ver [4], página 47.

Teorema 2.8. *Sejam X e Y espaços topológicos. Então, X e Y são compactos se, e somente se, $X \times Y$ é compacto.*

Demonstração: Ver [4], página 47.

Definição 2.19. *Um subconjunto S de \mathbb{R}^n é dito limitado se existe um número real $k > 0$ tal que para cada ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$, $|x_i| \leq k$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Em outras palavras, S "vive" dentro do cubo de dimensão n , $[-k, k] \times \dots \times [-k, k]$.*

Teorema 2.9. *Um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^n é compacto.*

Demonstração: Ver [4], página 48.

Definição 2.20. *Um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se para todo $x, y \in X, x \neq y$, existem abertos U_x, U_y de X tais que $x \in U_x, y \in U_y$ e $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Teorema 2.10. *Se X é um espaço de Hausdorff e $Y \subseteq X$ é um espaço compacto, então Y é fechado em X .*

Demonstração: Ver [4], página 52.

Teorema 2.11. *Suponha $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, com X espaço compacto e Y espaço de Hausdorff. Então, f é um homeomorfismo se, e somente se, f é bijetora.*

Demonstração: Ver [4], página 52.

Definição 2.21. *Um espaço topológico X é um espaço conexo se seus únicos subconjuntos simultaneamente aberto e fechado são apenas o \emptyset e X .*

Teorema 2.12. *X é conexo se, e somente se, X não pode ser escrito como a reunião disjunta de dois abertos não vazios.*

Demonstração: Ver [4], página 58.

3 Variedades topológicas

Definição 3.1. *Seja n um inteiro positivo. Uma variedade topológica de dimensão n (ou n -variedade) é um espaço de Hausdorff onde cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto de dimensão n , $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$.*

Usaremos somente o termo variedade para referenciar a uma variedade topológica.

Observação 3.1. Por definição, se U é aberto em \mathbb{R}^n e $x \in U$ então existe uma bola aberta em \mathbb{R}^n com centro em x e que está contida em U . Portanto, podemos enfraquecer a condição na definição pondo: “cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^n .”

Exemplo 3.1. O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é obviamente uma variedade de dimensão n . Basta verificar que a função identidade é um homeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre um aberto de \mathbb{R}^n , a saber, ele mesmo.

Exemplo 3.2. A esfera

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

é uma variedade de dimensão n . Para a prova de tal fato, note primeiramente que

$$S^n = S^n \setminus \{P\} \cup S^n \setminus \{Q\},$$

onde $P = (0, \dots, 0, 1)$ e $Q = (0, \dots, 0, -1)$. (No caso $n = 2$, P e Q são os pólos norte e sul, respectivamente). Provaremos agora que $S^n \setminus \{Q\}$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n . (Analogamente, prova-se que $S^n \setminus \{P\}$ é homeomorfo a \mathbb{R}^n , de modo a concluirmos que S^n é uma n -variedade).

Defina $f : S^n \setminus \{Q\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

A interpretação para o ponto $f(x) \in \mathbb{R}^n$ é que o ponto $Y = (f(x), 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é exatamente o ponto de interseção entre a reta r determinada pelos pontos x e Q e o hiperespaço $x_{n+1} = 0$. De fato, dado $x \in S^n \setminus \{Q\}$, considere a reta r determinada pelos pontos x e Q , i.e.,

$$r : Y = x + t(Q - x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Temos que a reta r atravessa o hiperespaço $x_{n+1} = 0$ num único ponto Y . Para determinarmos as coordenadas de Y , seja $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Então

$$Y = ((1 - t)x_1, \dots, (1 - t)x_n, x_{n+1} + t(-1 - x_{n+1}))$$

e devemos então resolver a equação em t :

$$x_{n+1} + t(-1 - x_{n+1}) = 0,$$

a qual nos fornece $t = \frac{x_{n+1}}{1 + x_{n+1}}$.

Conhecendo agora o valor de t , temos que o ponto Y de interseção entre o hiperespaço $x_{n+1} = 0$ e a reta determinada pelos pontos x e Q é escrito em coordenadas cartesianas como

$$Y = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}, 0 \right).$$

Nesse ponto, definida a função f e explicitada a sua interpretação, provaremos que f é um homeomorfismo. A verificação de que f é contínua é imediata, pois cada uma de suas funções coordenadas o são. Para concluirmos que f é homeomorfismo, definiremos uma função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{Q\}$ de tal sorte que g seja contínua, $g \circ f = id_{S^n \setminus \{Q\}}$ e $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$. A função g é definida por:

$$g(a) = \left(\frac{2a_1}{a_1^2 + \dots + a_n^2 + 1}, \dots, \frac{2a_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2 + 1}, \frac{1 - (a_1^2 + \dots + a_n^2)}{a_1^2 + \dots + a_n^2 + 1} \right),$$

onde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. A função g é contínua pois cada uma de suas funções coordenadas o são. Ademais, verifica-se que g está bem definida, i.e., que $g(a) \in S^n$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$. Também não é difícil verificar as igualdades $g \circ f = id_{S^n \setminus \{Q\}}$ e $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$. Logo, f é um homeomorfismo.

Portanto, a esfera S^n é uma variedade de dimensão n .

Exemplo 3.3. Se M^n é uma variedade de dimensão n , então qualquer subconjunto aberto de M^n é também uma variedade de dimensão n . A prova é imediata.

Exemplo 3.4. Se M é uma variedade de dimensão m e N é uma variedade de dimensão n , então o produto $M \times N$ é uma variedade de dimensão $(m + n)$. De fato, mostraremos

que dado um ponto $z \in M \times N$, existe um aberto $U_p \times U_q \subset M \times N$ homeomorfo a um aberto em \mathbb{R}^{m+n} . Seja $z = (p, q) \in M \times N$. Como M é uma variedade de dimensão m , existe um homeomorfismo $\Psi_1 : U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$, sendo U_p uma vizinhança aberta de p em M . Analogamente, existe um homeomorfismo $\Psi_2 : U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo U_q uma vizinhança aberta de q em N .

O conjunto $U_p \times U_q$ é uma vizinhança aberta de $z = (p, q)$ em $M \times N$ e a função $f : U_p \times U_q \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ definida por $f(a, b) = (\Psi_1(a), \Psi_2(b))$ é um homeomorfismo de $U_p \times U_q$ sobre \mathbb{R}^{m+n} .

4 Variedades bidimensionais - orientáveis e não-orientáveis.

Uma definição formal de orientação em variedades bidimensionais não está no nosso alcance nesse momento. Assim, nos renderemos a um tratamento intuitivo. Para definir o conceito de variedade bidimensional não-orientável, começaremos com o exemplo clássico: a faixa de Möbius.

A faixa de Möbius é construída a partir de uma tira de papel colando-se suas extremidades depois de realizar uma torção de 180° em uma delas. Como espaço topológico, ela é obtida por topologia quociente do seguinte modo:

Seja X o retângulo

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -10 \leq x \leq 10, -1 < y < 1\}.$$

Formamos agora um espaço quociente de X identificando os pontos $(10, y)$ e $(-10, -y)$ para cada y no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Observe que a linha central da faixa retangular X torna-se um círculo após a identificação das duas extremidades. Um ser imaginário que começou um percurso em qualquer ponto neste círculo com uma escolha de orientação definida e carregou esta orientação com ele em torno do círculo, volta para seu ponto inicial com sua orientação invertida. Este tipo de percurso fechado recebe a classificação de inversor de orientação. Um percurso que não possua essa propriedade é denominado preservador de orientação.

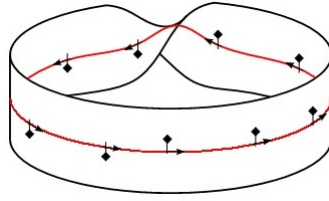


Figura 4.1: Faixa de Möbius.

A figura 4.1 foi retirada de [1], página 17.

De modo geral, uma variedade bidimensional que contenha um percurso fechado inversor de orientação é denominada uma variedade bidimensional não-orientável. Caso contrário, é chamada orientável.

Assim, a faixa de Möbius é um exemplo de variedade bidimensional não-orientável.

5 Exemplos de superfícies compactas.

Chamaremos uma 2-variedade conexa abreviadamente de superfície.

Um exemplo de uma superfície compacta é a 2-esfera S^2 . A esfera S^2 é orientável.

Outro exemplo é o 2-toro T^2 . O toro T^2 pode ser descrito como sendo a superfície de uma câmara de pneu cheia de ar. E pode ser definido com o rigor matemático de uma das seguintes maneiras:

- (a) Qualquer espaço topológico homeomorfo ao produto de dois círculos, $S^1 \times S^1$.
- (b) Qualquer espaço topológico homeomorfo ao seguinte subconjunto do \mathbb{R}^3 :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

(este conjunto é obtido pela rotação do círculo $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, situado no plano xz , em torno do eixo y).

- (c) Seja X o quadrado unitário no plano \mathbb{R}^2

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Um toro é qualquer espaço homeomorfo ao espaço quociente de X obtido pela identificação dos lados opostos do quadrado X de acordo com as seguintes regras:

1. Para cada y no intervalo $[0, 1]$, os pontos $(0, y)$ e $(1, y)$ se identificam.
2. Para cada x no intervalo $[0, 1]$, os pontos $(x, 0)$ e $(x, 1)$ se identificam.

Essas identificações estão representadas no diagrama abaixo:

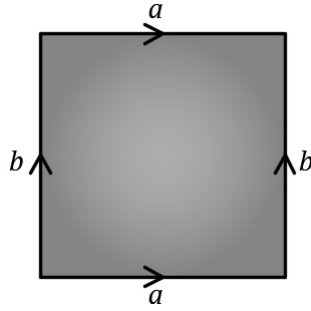


Figura 5.1: Toro.

Lados identificados são rotulados com a mesma letra do alfabeto, e as identificações devem ser feitas segundo as setas.

Provaremos agora que os espaços topológicos descritos em (a), (b) e (c) são homeomorfos.

Primeiro, tome $I = [0, 1]$ e considere o espaço quociente $\frac{I \times I}{\sim}$, onde \sim denota a identificação dada no item (c). Definimos um homeomorfismo

$$g : \frac{I \times I}{\sim} \rightarrow \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

por

$$g(\overline{(u, v)}) = (\sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \cos(2\pi v), \sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \sin(2\pi v), \sin(2\pi u)).$$

Pode-se provar que a função g está bem definida. Para isso, deve-se provar que $g(\overline{(u, v)})$ independe do representante $(u, v) \in I \times I$ da classe $\overline{(u, v)}$, o que obviamente é verdade, e que $g(\overline{(u, v)})$ pertence de fato ao subconjunto

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

de \mathbb{R}^3 . Para essa última afirmação, temos que verificar a seguinte igualdade:

$$(\sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \cos^2(2\pi v) + \sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \sin^2(2\pi v) - 2)^2 + \sin^2(2\pi u) = 1$$

De fato,

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \cos^2(2\pi v) + \sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \sin^2(2\pi v) - 2)^2 + \sin^2(2\pi u) = \\ & = ((2 + \cos(2\pi u)) \cos^2(2\pi v) + (2 + \cos(2\pi u)) \sin^2(2\pi v) - 2)^2 + \sin^2(2\pi u) = \\ & = [(2 + \cos(2\pi u))(\cos^2(2\pi v) + \sin^2(2\pi v)) - 2]^2 + \sin^2(2\pi u) = \end{aligned}$$

$$= (2 + \cos(2\pi u) - 2)^2 + \sin^2(2\pi u) = \cos^2(2\pi u) + \sin^2(2\pi u) = 1$$

Prova-se também que g é injetora. De fato, sejam $(\overline{u, v}), (\overline{u', v'}) \in \frac{I \times I}{\sim}$ tais que

$$g(\overline{(u, v)}) = g(\overline{(u', v')}).$$

Então,

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2 + \cos(2\pi u)}\cos(2\pi v), \sqrt{2 + \cos(2\pi u)}\sin(2\pi v), \sin(2\pi u)) = \\ & = (\sqrt{2 + \cos(2\pi u')} \cos(2\pi v'), \sqrt{2 + \cos(2\pi u')} \sin(2\pi v'), \sin(2\pi u')). \end{aligned}$$

Olhando para a igualdade das duas primeiras coordenadas temos:

$$\begin{cases} \sqrt{2 + \cos(2\pi u)}\cos(2\pi v) = \sqrt{2 + \cos(2\pi u')} \cos(2\pi v'), \\ \sqrt{2 + \cos(2\pi u)}\sin(2\pi v) = \sqrt{2 + \cos(2\pi u')} \sin(2\pi v'). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que:

$$\begin{aligned} & [\sqrt{2 + \cos(2\pi u)}\cos(2\pi v)]^2 + [\sqrt{2 + \cos(2\pi u)}\sin(2\pi v)]^2 = \\ & = [\sqrt{2 + \cos(2\pi u')} \cos(2\pi v')]^2 + [\sqrt{2 + \cos(2\pi u')} \sin(2\pi v')]^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow [2 + \cos(2\pi u)][\cos^2(2\pi v) + \sin^2(2\pi v)] = [2 + \cos(2\pi u')][\cos^2(2\pi v') + \sin^2(2\pi v')] \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 + \cos(2\pi u) = 2 + \cos(2\pi u') \Rightarrow \cos(2\pi u) = \cos(2\pi u'). \end{aligned}$$

Isso, unido a igualdade das últimas coordenadas, $\sin(2\pi u) = \sin(2\pi u')$, nos dá que $u = u'$ ou $\{u, u'\} = \{0, 1\}$. Agora, sabido que $\cos(2\pi u) = \cos(2\pi u')$, retornamos a igualdade das duas primeiras coordenadas e obtemos que $\cos(2\pi v) = \cos(2\pi v')$ e $\sin(2\pi v) = \sin(2\pi v')$, seguindo que $v = v'$ ou $\{v, v'\} = \{0, 1\}$.

Portanto, $(\overline{u, v}) = (\overline{u', v'})$.

Para provar que g é sobrejetora, seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1$. Então, $z \in [-1, 1]$. Como a função seno assume todos os valores entre -1 e 1 no intervalo $[0, 2\pi]$, existe $\varphi \in [0, 2\pi]$ tal que $z = \sin \varphi$. Assim,

$$x^2 + y^2 - 2 = \cos \varphi$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 = 2 + \cos \varphi.$$

Fazendo uso de coordenadas polares, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \theta, \sin \theta).$$

Portanto,

$$x = \sqrt{2 + \cos \varphi} \cos \theta \quad , \quad y = \sqrt{2 + \cos \varphi} \sin \theta \quad \text{e} \quad z = \sin \varphi.$$

Logo, tomando $u = \frac{\varphi}{2\pi} \in I$ e $v = \frac{\theta}{2\pi} \in I$ tem-se $g(\overline{(u, v)}) = (x, y, z)$.

Portanto, g é sobrejetora.

Mostremos agora que g é contínua.

Seja $\pi : I \times I \rightarrow \frac{I \times I}{\sim}$ definida por $\pi(u, v) = \overline{(u, v)}$ a projeção natural. O espaço $\frac{I \times I}{\sim}$ possui a topologia quociente determinada por π .

Veja que $g \circ \pi : I \times I \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1\}$ é dada por

$$(u, v) \mapsto (\sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \cos(2\pi v), \sqrt{2 + \cos(2\pi u)} \sin(2\pi v), \sin(2\pi u)),$$

que é contínua, pois cada função coordenada o é. Logo, pela propriedade universal de topologia quociente, conclui-se que g é contínua.

Para concluirmos que g é um homeomorfismo, basta notarmos que $\frac{I \times I}{\sim}$ é compacto (pois é imagem de compacto por função contínua) e que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

é de Hausdorff (pois é um subconjunto do \mathbb{R}^3) e aplicar o resultado de topologia geral que diz que toda bijeção contínua de um espaço compacto sobre um espaço de Hausdorff é homeomorfismo, (Ver Teorema 2).

Portanto, provamos que os espaços $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1\}$ e $\frac{I \times I}{\sim}$ são homeomorfos.

Agora, iremos provar que $S^1 \times S^1$ e $\frac{I \times I}{\sim}$ são homeomorfos. Para tal, definimos a função $h : \frac{I \times I}{\sim} \rightarrow S^1 \times S^1$ por

$$h(\overline{(u, v)}) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), \cos(2\pi v), \sin(2\pi v)).$$

A função h é obviamente bem definida e sobrejetora.

Também, mostra-se sem dificuldades que h é injetora.

A continuidade de h é, como no caso anterior, uma aplicação da propriedade universal de topologia quociente.

Para concluirmos que h é um homeomorfismo, novamente, basta observarmos que $\frac{I \times I}{\sim}$ é compacto e que $S^1 \times S^1$ é de Hausdorff.

Portanto, os espaços $S^1 \times S^1$ e $\frac{I \times I}{\sim}$ são homeomorfos.

Um toro T^2 é uma superfície orientável.

O próximo exemplo de uma superfície compacta, mas não orientável, que apresentaremos é o plano projetivo real, ou simplesmente plano projetivo.

Definição 5.1. *O espaço quociente da 2-esfera S^2 obtido através da identificação de cada par de pontos diametralmente opostos é chamado de plano projetivo. Todo espaço homeomorfo a este espaço quociente também é chamado de plano projetivo.*

Seja $H = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ o hemisfério superior fechado de S^2 . É claro que, de cada par de pontos diametralmente opostos em S^2 , pelo menos um ponto está em H . Se os dois pontos estão em H , então eles estão no equador, que é o bordo de H . Assim, poderíamos também definir o plano projetivo como o espaço quociente de H obtido pela identificação dos pontos diametralmente opostos que estão no bordo de H . Como H é homeomorfo ao disco unitário fechado E^2 do plano,

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

o espaço quociente de E^2 obtido pela identificação dos pontos de S^1 que são diametralmente opostos é um plano projetivo. Por E^2 , podemos substituir qualquer espaço homeomorfo, por exemplo, um quadrado.

Seja X o quadrado unitário no plano \mathbb{R}^2

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

O plano projetivo é qualquer espaço homeomorfo ao espaço quociente de X obtido pela identificação dos lados opostos do quadrado X de acordo com as seguintes regras:

1. Para cada y no intervalo $[0, 1]$, os pontos $(0, y)$ e $(1, 1 - y)$ se identificam.
2. Para cada x no intervalo $[0, 1]$, os pontos $(x, 0)$ e $(1 - x, 1)$ se identificam.

Essas identificações estão representadas no diagrama abaixo:

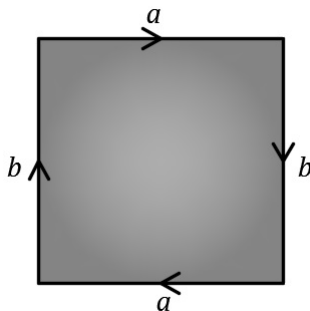


Figura 5.2: Plano projetivo.

Podemos ver que o plano projetivo é não-orientável pela observação feita na figura 5.3, de que ele contém uma faixa de Möbius.

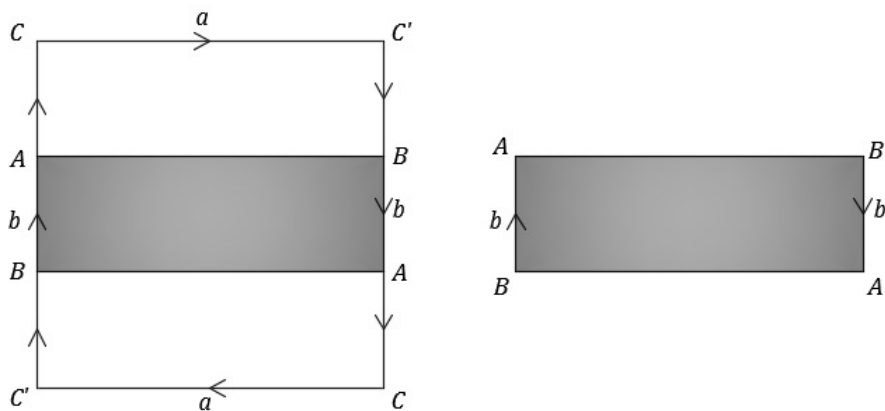


Figura 5.3: Plano Projetivo contém uma faixa de Möbius.

6 Soma conexa

Descreveremos como dar outros exemplos de superfícies compactas ao formar o que são chamadas somas conexas.

Sejam S_1 e S_2 superfícies disjuntas. Sua soma conexa, denotada por $S_1 \# S_2$, é formada cortando e removendo uma pequena região circular de cada uma das duas superfícies. Isto criará um pequeno bordo circular em cada uma delas e então cola-se as duas superfícies ao longo dos bordos circulares.

Para ser mais preciso, escolhemos subconjuntos $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ tal que D_1 e D_2 são discos fechados (isto é, homeomorfo a E^2). Seja S'_i o complemento do interior de D_i em S_i para $i = 1$ e 2 .

Escolha um homeomorfismo h da fronteira de D_1 sobre a fronteira de D_2 .

Então $S_1 \# S_2$ é o espaço quociente de $S'_1 \cup S'_2$ obtido pela identificação dos pontos x e $h(x)$, para todos os pontos x da fronteira de D_1 , com $S_1 \# S_2$ resultando uma nova superfície.

Exemplo 6.1. Soma Conexa de Toros.

Sejam T_1 e T_2 toros, representados cada um por um quadrado com os lados opostos identificados como mostra a figura 6.1(a), sendo os quatro vértices de cada quadrado identificados em um só ponto no toro correspondente.

Para formar a sua soma conexa, devemos primeiramente recortar um buraco circular em cada toro, nomeando de c_1 e c_2 as fronteiras destes buracos, e eles são identificados como indicado pelas setas. Podemos também representar o complemento dos buracos nos dois toros por pentágonos mostrados na figura 6.1(b).

Identificamos os segmentos c_1 e c_2 , obtendo o octógono da figura 6.1(c), no qual os lados estão identificados aos pares, segundo as orientações das arestas.

Note que todos os oito vértices deste octógono são identificados num único ponto em $T_1 \# T_2$.

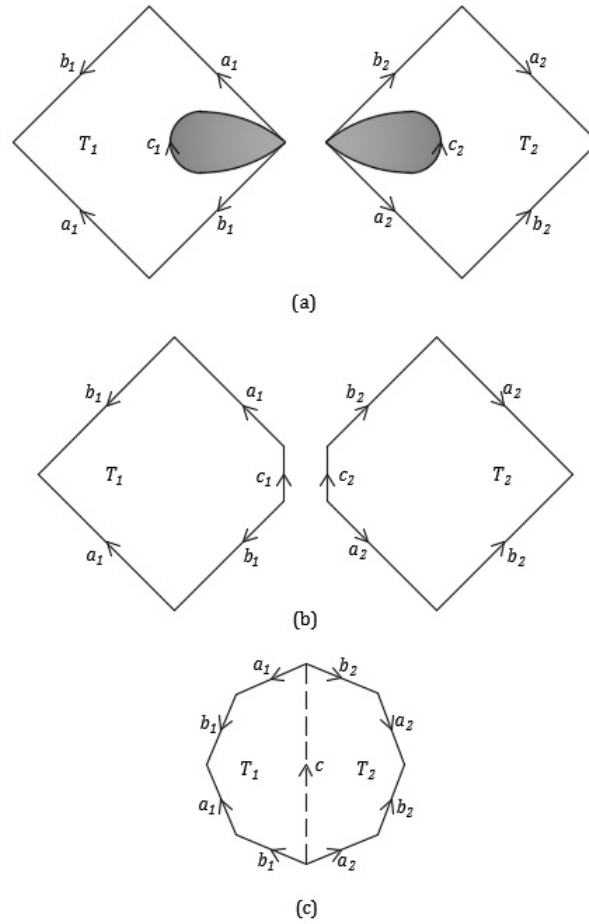


Figura 6.1: Soma Conexa de dois toros.

Repetindo esse processo, podemos mostrar que a soma conexa de três toros é o espaço quociente do dodecágono, quando as arestas são identificadas aos pares como indicado na figura 6.2

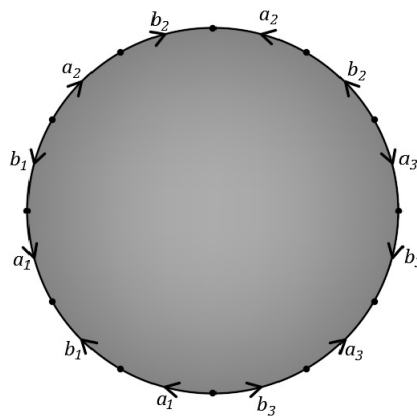


Figura 6.2: Soma Conexa de três toros.

Por indução finita, provaremos que, para qualquer inteiro positivo n , a soma conexa de n -toros é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $4n$ lados, cujas arestas estão identificadas aos pares, obedecendo certa orientação das arestas nos polígonos.

Consideremos $S = T^2 \# \dots \# T^2$ a soma conexa de n toros, $n \geq 2$.

Se $n = 2$, sabemos pela figura 6.1, que a soma conexa de dois toros é homeomorfa ao espaço quociente do octógono, ou seja, é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de 4×2 lados.

Suponhamos que a afirmação seja válida para um certo n . A soma conexa de n toros é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $4n$ lados.

Seja $S = T^2 \# \dots \# T^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ toros, que pode ser vista como $S = (T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2$, a soma conexa de n -toros com um toro.

Pela hipótese de indução, temos que a soma conexa de n -toros é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $4n$ lados. Fazendo a soma conexa do polígono de $4n$ lados com um toro obtemos um polígono de $(4n + 4)$ lados, ou seja, a soma conexa de $(n + 1)$ toros é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $4(n + 1)$ lados.

Portanto, por indução finita, a soma conexa de n toros é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $4n$ lados.

Exemplo 6.2. Soma Conexa de Planos Projetivos.

O plano projetivo é definido como sendo o espaço quociente de um disco circular, identificando os pontos diametralmente opostos na fronteira. Ao escolher um par de pontos diametralmente opostos na fronteira como vértices, a circunferência do disco circular é dividida em dois segmentos. Assim, podemos considerar o plano projetivo como obtido de um polígono pela identificação de seus lados opostos como mostra a figura 6.3

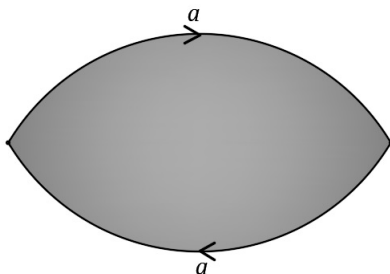


Figura 6.3: Construção do plano projetivo como espaço quociente de um polígono de dois lados.

O método para obter a soma conexa de dois planos projetivos P_1 e P_2 é basicamente

o mesmo usado para obter a representação da soma conexa de dois toros como um espaço quociente de um octógono.

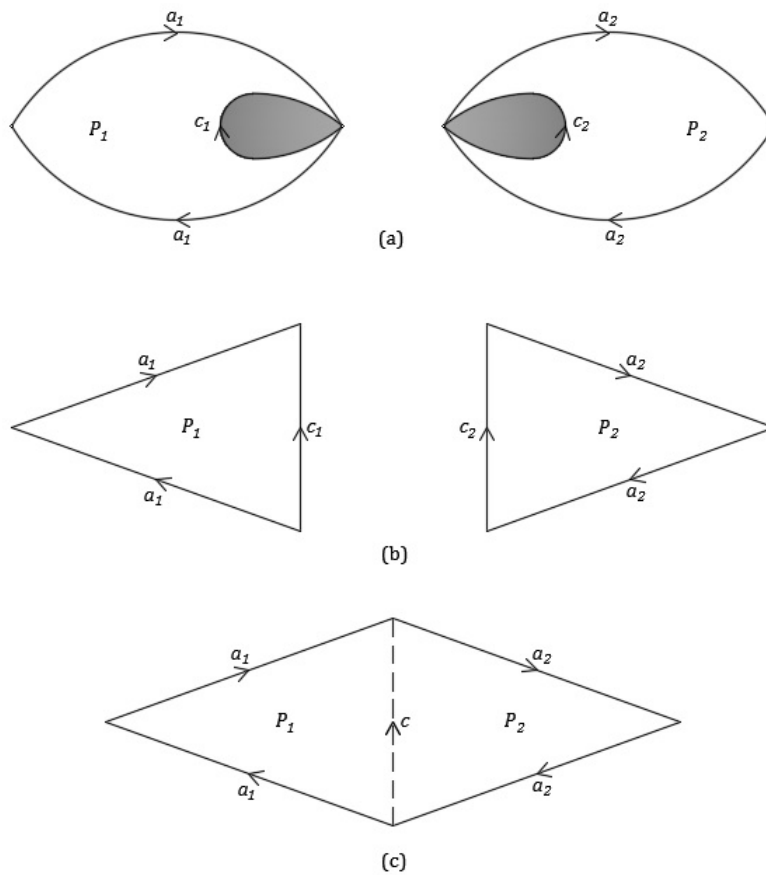


Figura 6.4: Soma Conexa de dois planos projetivos.

Ao repetir este processo, vemos que a soma conexa de três planos projetivos é o espaço quociente de um hexágono com os lados identificados aos pares, como mostra a figura 6.5

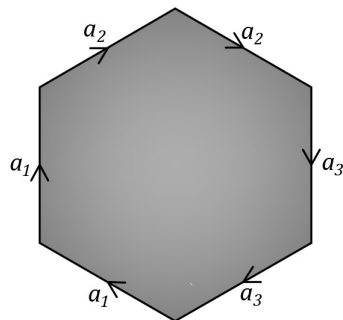


Figura 6.5: Construção da soma conexa de três planos projetivos.

Por indução finita, provaremos que, para qualquer inteiro positivo n , a soma conexa de n -planos projetivos é o espaço quociente de um polígono de $2n$ lados, com os lados identificados aos pares, obedecendo a orientação das arestas do polígono. Onde todos os vértices deste polígono são identificados em um único ponto.

Consideremos $S = P^2 \# \dots \# P^2$ a soma conexa de n planos projetivos, $n \geq 2$.

Se $n = 2$, sabemos pela figura 6.4 que a soma conexa de dois planos projetivos é homeomorfa ao espaço quociente do quadrilátero, ou seja, é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de 2×2 lados.

Suponhamos que a afirmação seja válida para um certo n . A soma conexa de n planos projetivos é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $2n$ lados.

Seja $S = P^2 \# \dots \# P^2$ a soma conexa de $(n+1)$ planos projetivos, que pode ser vista como $S = (P^2 \# \dots \# P^2) \# P^2$, a soma conexa de n planos projetivos com um plano projetivo.

Pela hipótese de indução, temos que a soma conexa de n planos projetivos é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $2n$ lados. Fazendo a soma conexa do polígono de $2n$ lados com um plano projetivo obtemos um polígono de $(2n+2)$ lados, ou seja, a soma conexa de $(n+1)$ planos projetivos é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $2(n+1)$ lados.

Portanto, por indução finita, a soma conexa de n planos projetivos é homeomorfa ao espaço quociente de um polígono de $2n$ lados.

Exemplo 6.3. Soma Conexa de uma Superfície com uma Esfera.

Sejam S^2 a esfera bidimensional e M uma superfície qualquer. Então $M \# S^2$ é homeomorfa a M .

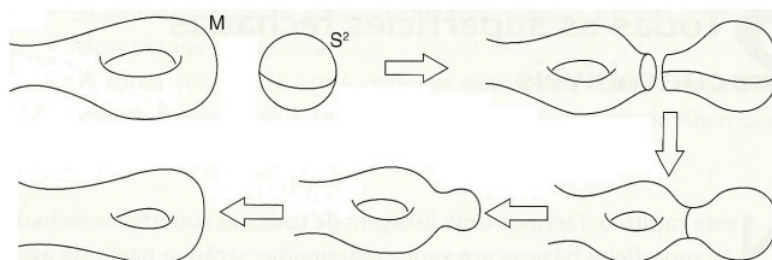


Figura 6.6: Soma Conexa de M e a esfera.

A figura 6.6 foi retirada de [1], página 18.

Representaremos a esfera como o espaço quociente de um polígono com dois lados identificados aos pares como mostra a figura 6.7.

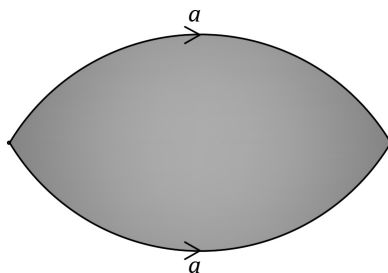


Figura 6.7: Construção da esfera.

Podemos imaginar uma esfera com um zíper sobre ela, como uma bolsa, quando o zíper é aberto a bolsa pode tornar-se plana.

Exemplo 6.4. Se S_1 e S_2 são planos projetivos então $S_1 \# S_2$ é uma "Garrafa de Klein", isto é, homeomorfa a superfície obtida pela identificação dos lados opostos de um quadrado como na figura 6.8.

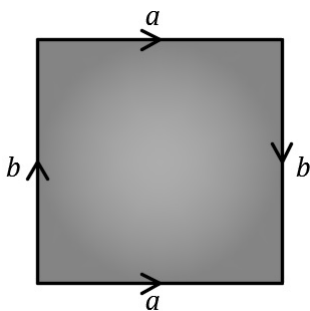


Figura 6.8: Garrafa de Klein.

1. Para cada y no intervalo $[0, 1]$, os pontos $(0, y)$ e $(1, 1 - y)$ se identificam.
2. Para cada x no intervalo $[0, 1]$, os pontos $(x, 0)$ e $(x, 1)$ se identificam.

Podemos provar isto pela técnica do "cortar" e "colar", como segue. Se S_i é o plano projetivo, e D_i é um disco fechado tal que $D_i \subset S_i$, então S'_i , o complemento do interior de D_i em S_i , é homeomorfo a uma faixa de Möbius (incluindo o bordo), $i = 1, 2$.

De fato, se pensarmos S_i como o espaço obtido pela identificação dos pontos diametralmente opostos na borda do disco unitário E^2 em \mathbb{R}^2 , então podemos escolher D_i para ser a imagem do conjunto $\{(x, y) \in E^2 : |y| \geq \frac{1}{2}\}$.

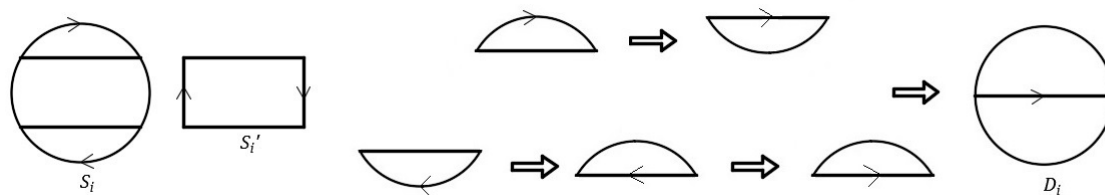


Figura 6.9: O complemento do interior de D_i em S_i é homeomorfo a uma faixa de Möbius.

Disto segue que $S_1 \# S_2$ é obtido colando as duas faixas de Möbius juntas ao longo de seus bordos.

Por outro lado, a figura a seguir mostra como cortar a garrafa de Klein para obter duas faixas de Möbius.

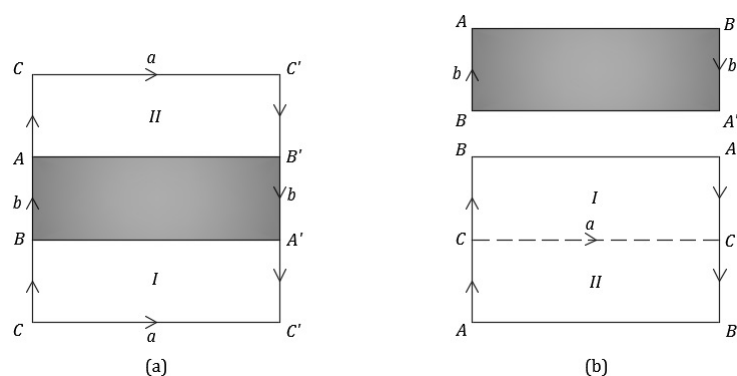


Figura 6.10: Corte da Garrafa de Klein para obter duas faixas de Möbius.

Outra maneira de mostrar que a soma conexa de dois planos projetivos é homeomorfa a garrafa de Klein é pela técnica de "cortar" e "colar", como segue:

Devemos primeiramente recortar um buraco circular em cada plano projetivo, nomeando de c as fronteiras destes buracos. Representamos o complemento dos buracos nos dois planos projetivos por triângulos.

Identificamos os segmentos c obtendo um quadrilátero, no qual podemos fazer um corte ao longo de d e então identificamos os segmentos b , obtendo a representação poligonal da Garrafa de Klein.

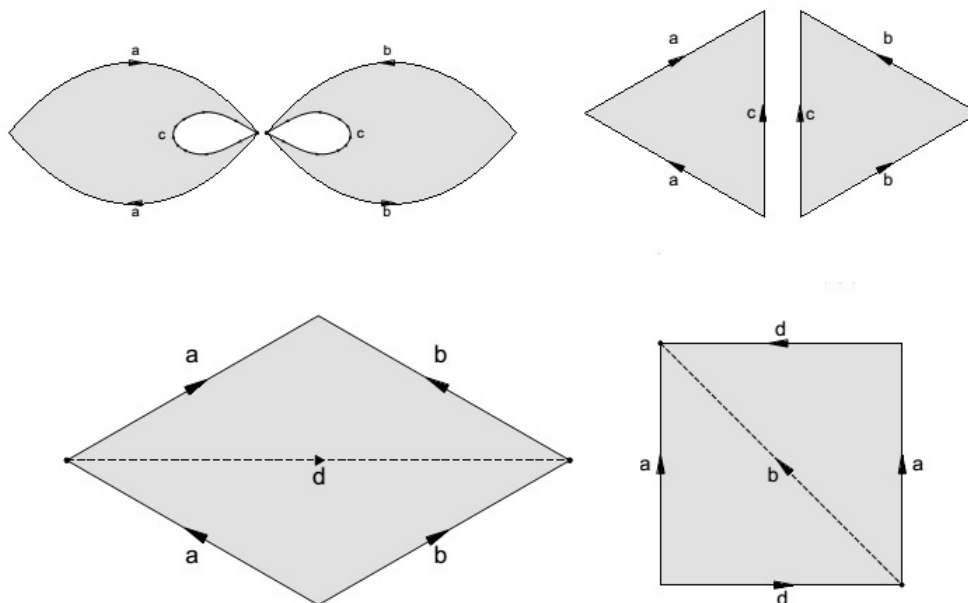


Figura 6.11: A soma conexa de dois planos projetivos é a garrafa de Klein.

A figura 6.11 foi retirada de [1], página 18.

Propriedades da Soma Conexa

Consideremos agora algumas propriedades dessa operação de formar somas conexas.

- Não existe distinção entre $S_1 \# S_2$ e $S_2 \# S_1$, isto é, a operação é comutativa.
- $(S_1 \# S_2) \# S_3$ e $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ são homeomorfos.
- O exemplo 6.3 mostra que a esfera é um elemento neutro ou unitário para a operação de formar somas conexas.

Assim, vemos que a soma conexa é uma operação comutativa, associativa e que possui elemento neutro no conjunto das classes de homeomorfismos de superfícies compactas. Não devemos saltar para a conclusão que o conjunto de classes de homeomorfismo formam um grupo sobre esta operação. Não existem os elementos inversos.

A soma conexa de duas variedades orientáveis é também orientável. Por outro lado, se S_1 ou S_2 é não orientável, então $S_1 \# S_2$ é não orientável.

7 Para cada superfície compacta, uma “palavra”.

No capítulo 9, provaremos que toda superfície compacta é homeomorfa a um polígono com as arestas identificadas aos pares. A cada representação poligonal de uma superfície compacta, podemos associar uma "senha" ou "palavra" que guarda toda informação acerca dessa configuração poligonal plana, bem como das letras e setas etiquetando suas arestas. Tal senha é chamada de palavra representação da superfície.

Seja um polígono no qual esteja indicado como se identificam as arestas. Partindo de um determinado vértice, percorremos a fronteira deste polígono, anotando em sequência uma a uma, as letras que aparecem no polígono. Se a seta aponta em alguns pontos para mesma direção que estamos percorrendo em torno da fronteira, então escrevemos a letra correspondente a aresta sem expoente, se a seta indicar direção contrária, a letra correspondente a esta aresta será representada com expoente menos um.

Observando os exemplos anteriores, podemos escrever:

a) Esfera: aa^{-1} ;

b) Soma conexa de n toros: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$;

c) Soma conexa de n planos projetivos: $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$.

O Teorema da Classificação de Superfícies Compactas que enunciaremos e provaremos no capítulo 9 nos garante que, com estes exemplos, esgotam-se todas as possibilidades de construir novas superfícies.

8 Triangularização de Superfícies Compactas.

Para provar o Teorema de Classificação de Superfícies Compactas, assumiremos que a superfície dada é triangularizável, isto é, dividida em triângulos que se encaixam muito bem.

Definição 8.1. *A triangularização de uma superfície compacta S consiste de uma família finita de subconjuntos fechados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cobrem S , e uma família de homeomorfismos $\psi_i : T_i' \rightarrow T_i$, $i = 1, \dots, n$, onde cada T_i' é um triângulo no plano \mathbb{R}^2 (isto é, um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 limitado por três retas distintas). Os subconjuntos T_i são chamados "triângulos". Os subconjuntos de T_i que, segundo o homeomorfismo ψ_i , são as imagens dos vértices e arestas do triângulo T_i' , são chamados de "vértices" e "arestas", respectivamente. Por fim, é necessário que quaisquer dois triângulos distintos, T_1 e T_2 , ou sejam disjuntos, ou possuam apenas um vértice em comum, ou tenham uma das arestas inteiramente em comum.*

A figura 8.1 mostra três tipos inadmissíveis de intersecção de triângulos

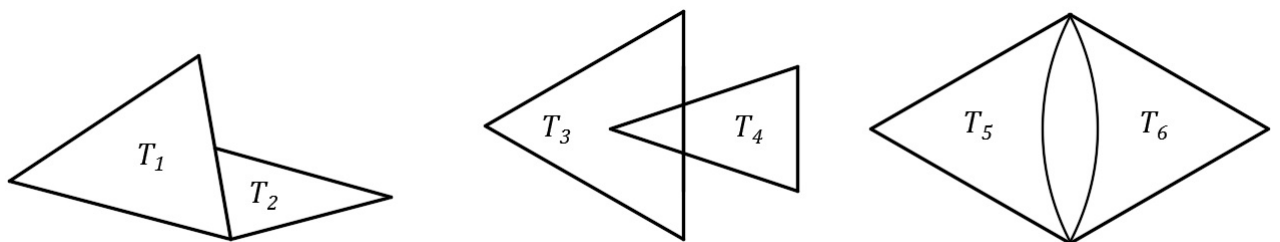


Figura 8.1: Tipos inadmissíveis de intersecção de triângulos.

O fato de dois triângulos distintos não possuírem os mesmos vértices permite que a triangularização completa de uma superfície seja determinada pela simples enumeração dos vértices, e pela associação de cada tripla de vértices a apenas um triângulo.

Exemplos de triangularizações:

1. A superfície de um tetraedro ordinário no espaço tridimensional Euclidiano é homeomorfa a esfera S^2 e os quatro triângulos satisfazem todas as condições para uma triangularização de S^2 . Neste caso, existem quatro vértices e cada tripla de vértices é o conjunto de vértices de um triângulo.
2. Uma triangularização de um plano projetivo, considerado como o espaço quociente obtido pela identificação de pontos diametralmente opostos na borda de um disco, está representada na figura 8.2, onde os vértices estão enumerados de 1 a 6, e os dez triângulos são: 124, 245, 235, 135, 156, 126, 236, 346, 134, 456.

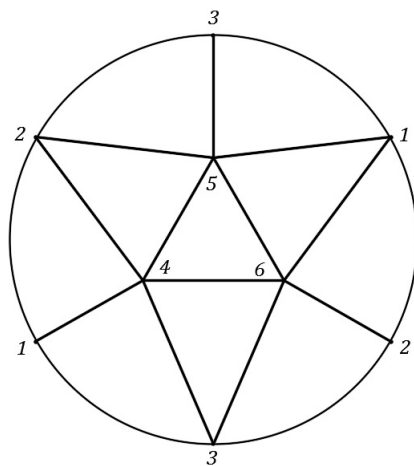


Figura 8.2: Triangularização do plano projetivo.

3. Uma triangularização de um toro, considerado como um quadrado com os lados opostos identificados, está representada na figura 8.3, onde os vértices estão numerados de 1 a 9, e os 18 triângulos são:
124, 245, 235, 356, 361, 146, 457, 578, 658, 689, 649, 479, 187, 128, 289, 239, 379, 137.

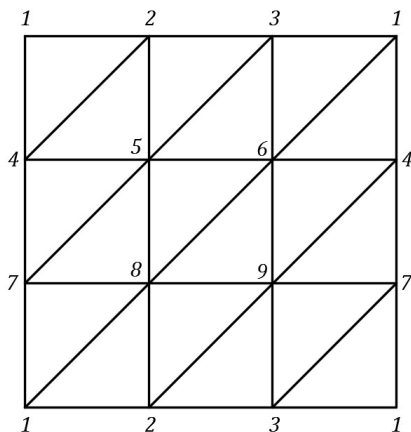


Figura 8.3: Triangularização do toro.

Concluimos essa discussão com as seguintes observações:

1. Cada aresta é uma aresta de exatamente dois triângulos.
2. Seja v um vértice de uma triangularização. Podemos então organizar o conjunto de todos os triângulos que tem v como vértice em ordem cíclica, $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n = T_0$, tal que T_i e T_{i+1} tem um aresta em comum para $0 \leq i \leq n - 1$.

A afirmação 1 segue do fato que cada ponto na aresta em questão deve ter uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto U^2 . Se uma aresta fosse aresta de apenas um triângulo ou de mais de dois triângulos isso não seria possível.

A afirmação 2 segue da afirmação 1 e do fato de que cada vértice possui uma vizinhança homeomorfa ao disco D^2 .

9 Teorema da Classificação de Superfícies Compactas.

Teorema 9.1. *Toda superfície compacta é homeomorfa a uma esfera, a soma conexa de toros, ou a soma conexa de planos projetivos.*

Demonstração. Demonstraremos o teorema em partes, provando que toda superfície compacta S é homeomorfa a um polígono com as arestas identificadas aos pares, segundo alguns dos símbolos:

$$\begin{aligned} &aa^{-1}; \\ &a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}; \\ &a_1a_1a_2a_2 \dots a_na_n. \end{aligned}$$

Passo 1

Seja K uma triangularização de uma superfície compacta S . Enumeramos os triângulos $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de modo que o triângulo T_i tenha uma aresta e_i comum com ao menos um dos triângulos T_1, T_2, \dots, T_{i-1} , $2 \leq i \leq n$.

Para demonstrar isto, escolhemos um triângulo qualquer do conjunto acima a ser T_1 , escolhemos como T_2 qualquer triângulo que tenha alguma aresta em comum e_1 com T_1 , T_3 qualquer triângulo que tenha uma aresta em comum e_2 com T_1 ou T_2 , e assim por diante. Suponhamos que, em algum momento não fosse possível continuar esse processo. Logo teríamos dois conjuntos de triângulos $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ e $\{T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_n\}$, tal que nenhum triângulo do primeiro conjunto teria uma aresta ou vértice em comum com nenhum triângulo do segundo conjunto, com isto teríamos uma partição de S em dois conjuntos fechados disjuntos e não vazios, contrariando a hipótese de que S é conexa. Utilizaremos a ordenação dos triângulos T_1, T_2, \dots, T_n junto com a escolha das arestas e_2, e_3, \dots, e_n para construir um modelo da superfície S no plano cartesiano. Este modelo será um polígono cujos lados estão identificados aos pares.

Sabemos que, para cada triângulo T_i , existe um triângulo ordinário T_i' em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo ψ_i de T_i' sobre T_i . Suponhamos que os triângulos T_1', T_2', \dots, T_n' são disjuntos dois a dois, se não forem podemos transladar alguns deles para outras partes do plano \mathbb{R}^2 . Seja $T' = \bigcup_{i=1}^n T_i'$, T' é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Definimos a aplicação $\psi : T' \rightarrow S$ como sendo $\psi_{T_i'} = \psi_i$. A aplicação ψ é contínua e sobrejetora. Como T' é compacto e S é um espaço de Hausdorff, ψ é uma aplicação fechada.

De fato, seja $F \subset T'$ um subconjunto fechado qualquer de T' . Como T' é compacto, temos que F é também compacto. Como ψ é contínua, temos que $\psi(F)$ é um subconjunto compacto de S . Como S é de Hausdorff conclui-se que $\psi(F)$ é fechado em S . Portanto, ψ é uma aplicação fechada.

S tem a topologia quociente determinada por ψ . Isto é, $A \subset S$ é aberto se, e somente se, $\psi^{-1}(A)$ é aberto em T' .

De fato, suponhamos que $A \subset S$ é aberto. Como ψ é contínua, então $\psi^{-1}(A)$ é aberto em T' .

Reciprocamente, se $\psi^{-1}(A)$ é aberto em T' , temos $[T' - \psi^{-1}(A)]$ fechado em T' .

Como ψ é uma aplicação fechada, então $\psi[T' - \psi^{-1}(A)]$ é fechado em S . Logo, $S - \psi[T' - \psi^{-1}(A)]$ é aberto em S .

Seja $x \in S - \psi[T' - \psi^{-1}(A)]$, qualquer
 $x = \psi(y)$, para algum $y \in T'$.

Então,

$$\psi(y) \notin \psi[T' - \psi^{-1}(A)] \Rightarrow y \notin [T' - \psi^{-1}(A)] \Rightarrow y \in \psi^{-1}(A) \Rightarrow \psi(y) \in A \Rightarrow x \in A.$$

Portanto, $S - \psi[T' - \psi^{-1}(A)] \subset A$

Seja $x \in A$.

$x = \psi(y)$ para algum $y \in T'$.

Suponha que $x \in \psi[T' - \psi^{-1}(A)]$.

Então,

$$y \in [T' - \psi^{-1}(A)] \Rightarrow y \notin \psi^{-1}(A) \Rightarrow \psi(y) \notin A \Rightarrow x \notin A$$

o que é uma contradição, pois $x \in A$ por hipótese.

Logo, $x \notin \psi[T' - \psi^{-1}(A)] \Rightarrow x \in S - \psi[T' - \psi^{-1}(A)]$.

Portanto, $A \subset S - \psi[T' - \psi^{-1}(A)]$

Concluimos que, $A = S - \psi[T' - \psi^{-1}(A)]$.

Logo, A é aberto.

O polígono desejado será construído como um espaço quociente de T' . Para cada i , $2 \leq i \leq n$, escolha uma aresta e_i de T_i , que é também aresta de algum T_j , $1 \leq j \leq n$. Então $\psi^{-1}(e_i)$ consta de duas arestas, uma de T_i' e outra de T_j' .

Identificamos estas duas arestas dos triângulos T_i' e T_j' do seguinte modo: identificamos aqueles pontos que se aplicam por ψ em um mesmo ponto de e_i . Intuitivamente, colamos os triângulos T_i' e T_j' .

Fazendo estas identificações para cada uma das arestas e_2, e_3, \dots, e_n , obtemos o espaço quociente de T' que representaremos por D .

Como D é o espaço quociente de T' , $\psi : T' \rightarrow S$ induz uma aplicação α de D em S . Como D é compacto e S é de Hausdorff, α é uma aplicação fechada. Concluimos que S tem a topologia quociente induzida por α .

O espaço D é topologicamente equivalente a um disco fechado. A demonstração desta afirmação depende de duas considerações:

a) Tomamos dois espaços disjuntos E_1 e E_2 , topologicamente equivalentes a um disco fechado

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sejam A_1 e A_2 , subconjuntos da fronteira de E_1 e E_2 , respectivamente, homeomorfos ao intervalo $[0, 1]$ e $h : A_1 \rightarrow A_2$ um homeomorfismo.

Identificando os pontos de E_1 e E_2 através de h , obtemos o espaço quociente de $E_1 \cup E_2$. Então o espaço quociente também é topologicamente equivalente a um disco. Isto significa que se colarmos dois discos ao longo de um segmento comum em suas fronteiras, obtemos um novo disco.

b) Ao formar o espaço quociente D de T' , podemos fazer as identificações de uma só vez, ou primeiro a identificação correspondente a e_2 , em seguida a e_3 , etc.

Após estas considerações provaremos que D é um disco da seguinte maneira:

T_1' e T_2' são topologicamente equivalentes a um disco fechado, portanto o espaço quociente $T_1' \cup T_2'$ obtido ao identificar os pontos $\psi^{-1}(e_2)$ é novamente um disco segundo a).

Formamos um espaço quociente da união deste disco com T_3' fazendo as identificações correspondentes a aresta e_3 , e assim por diante. Naturalmente S é obtido de D identificando certos pares de arestas da fronteira de D .

Passo 2: Eliminação das arestas adjacentes de primeira espécie.

Faremos a identificação das arestas de um polígono D , que dá origem a uma superfície, por meio de letras. Se a letra que indica um par de arestas aparece no símbolo com os dois expoentes $+1$ e -1 dizemos que este par de arestas é de primeira espécie, caso contrário de segunda espécie.

O diagrama abaixo mostra como eliminar um par de arestas adjacentes de primeira espécie, supondo que o polígono tenha pelo menos quatro arestas.

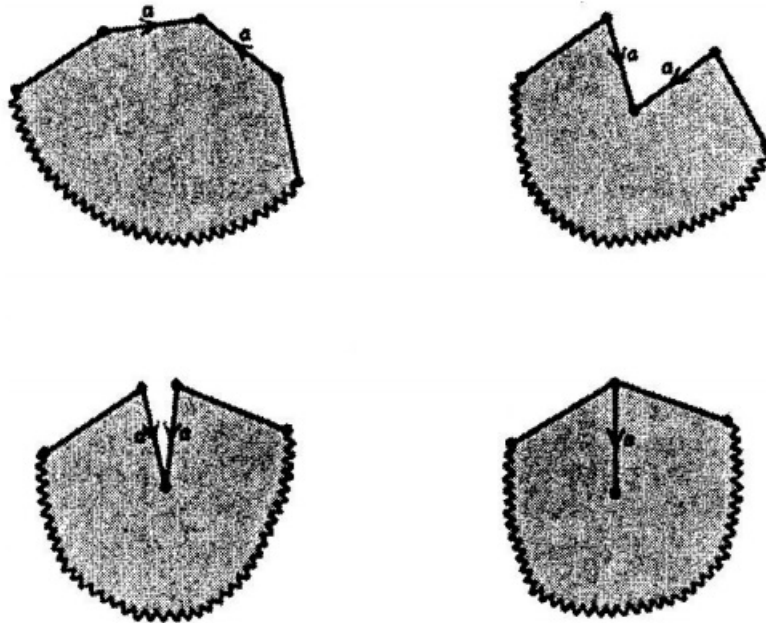


Figura 9.1: Eliminação de Arestas Adjacentes de Primeira Espécie.

A figura 9.1 foi retirada de [1], página 23.

Continuaremos este processo até que sejam eliminados todos os pares deste tipo, ou até obtermos um polígono com dois lados, cujo símbolo é aa^{-1} ou aa , sendo a esfera ou o plano projetivo.

Passo 3: Transformação em um polígono tal que todos os vértices estão identificados em um só.

Mesmo as arestas do nosso polígono estando identificadas aos pares, os vértices podem estar identificados em conjuntos de um, dois, três...

Diremos que dois vértices de um polígono são equivalentes se estão identificados. Algumas classes de equivalência podem conter um só vértice, enquanto outras conter dois ou mais vértices.

Suponhamos que realizamos a segunda parte quantas vezes foram possíveis, obtendo um polígono S' . Mostraremos que podemos transformar nosso polígono S' em outro, com todos os vértices pertencentes a uma só classe de equivalência. Admitamos que exista pelo menos duas classes de equivalência distintas, logo existe um par de vértices P e Q adjacentes que não são equivalentes.

Como por hipótese, realizamos a segunda parte e os vértices P e Q não são equivalentes, então as arestas a e b não podem ser identificadas.

Façamos um corte ao longo da linha c , desde o vértice Q até o outro vértice da aresta a , (isto é, até o outro vértice de a , distinto de P), como na figura 9.2

Colamos em seguida as arestas designadas por a , resultando um polígono com um vértice a menos na classe de equivalência de P e uma a mais na classe de equivalência de Q .

Se for possível, realizamos novamente o passo 2. Então realizamos o passo 3, para diminuir o número de vértices da classe de equivalência de P .

Desta maneira, alternando entre o passo 2 e o passo 3, a classe de equivalência de P será eliminada.

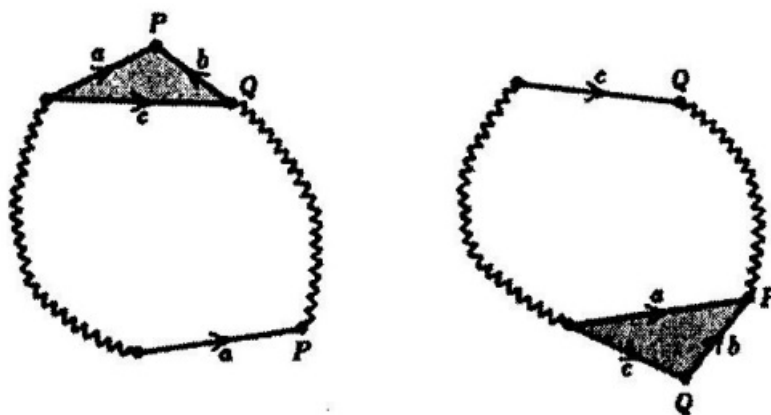


Figura 9.2: Transformação em um polígono com todos os vértices numa mesma classe de equivalência.

A figura 9.2 foi retirada de [1], página 24.

Passo 4: Como fazer adjacentes todo par de arestas de segunda espécie.

Podemos transformar nosso polígono de maneira que todo par de arestas de segunda espécie sejam adjacentes.

Seja o par de arestas de segunda espécie não adjacentes no polígono abaixo. Cortamos ao longo da linha pontilhada a , identificamos as arestas b e então obtemos duas

arestas de segunda espécie adjacentes.

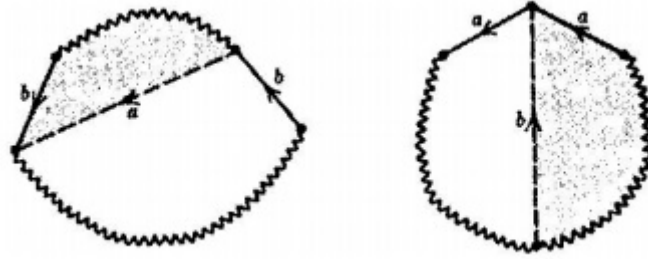


Figura 9.3: Como fazer adjacentes todo par de segunda espécie.

A figura 9.3 foi retirada de [1], página 24.

Quando todos os pares de segunda espécie estiverem adjacentes, e se não existir pares de primeira espécie, o polígono resultante terá como símbolo $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$ e, portanto, a superfície é a soma conexa de planos projetivos.

Vamos supor que existe pelo menos um par de arestas de primeira espécie, representado por c . Afirmamos que exista pelo menos outro par de arestas de primeira espécie tal que estes dois pares separem-se um do outro, isto é, ao percorrer a fronteira do polígono, as arestas destes dois pares aparecem alternadamente. O símbolo que representa o polígono será da forma $c\dots d\dots c^{-1}\dots d^{-1}\dots$

Para provar esta afirmação, suponhamos que exista um polígono, como o da figura 9.4, onde as arestas de primeira espécie não estão separadas por nenhum outro par de arestas de primeira espécie. Logo A e B só possuem arestas de segunda espécie. Mas, como por hipótese já foi realizado o passo 4, todos os pares de arestas de segunda espécie são adjacentes. Portanto, nenhuma aresta de A é identificada com uma aresta de B . Isto contradiz o fato de que os vértices inicial e final de cada uma das arestas c devem estar identificados, devido ao passo 3.

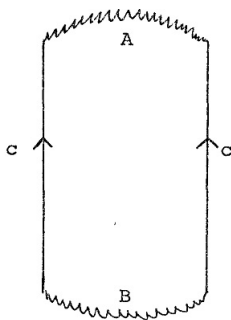


Figura 9.4: Polígono em que as arestas de primeira espécie não estão separadas por nenhum outro par de arestas de primeira espécie.

A figura 9.4 foi retirada de [3], página 58.

Passo 5: Pares de primeira espécie.

Suponhamos que em nosso polígono exista dois pares de primeira espécie que se separam um do outro. Podemos transformar o polígono de maneira que os quatro lados em questão sejam consecutivos ao longo da fronteira do polígono.

Ao longo da linha c , façamos um corte. Colamos ao longo de b , obtendo a figura 9.5

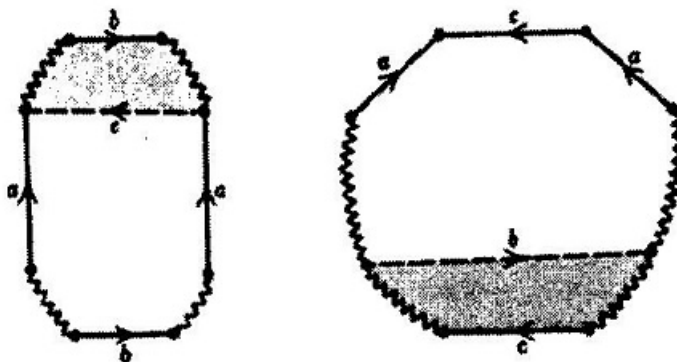


Figura 9.5: Processo de corte e colagem para obter um polígono com pares de primeira espécie adjacentes.

A figura 9.5 foi retirada de [1], página 25.

Feito isto, fazemos um corte ao longo de d e colamos ao longo de a , obtendo o polígono desejado.

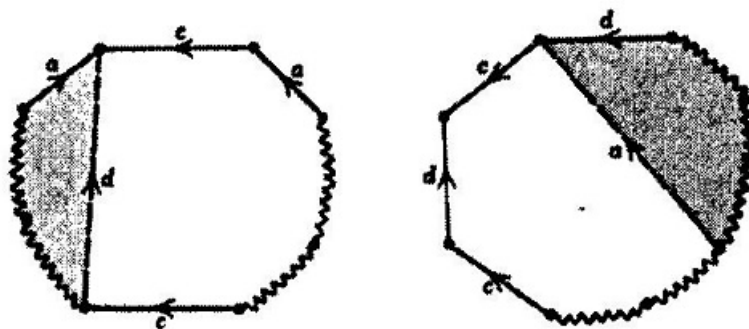


Figura 9.6: Polígono com todos os pares de primeira espécie adjacentes.

A figura 9.6 foi retirada de [1], página 25.

Continuamos este processo até que todos os pares de primeira espécie estejam em grupos adjacentes de quatro arestas, tal como $cdc^{-1}d^{-1}\dots$, que representa o resultado procurado. O símbolo será $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ e a superfície é a soma conexa de n toros.

Resta considerar o caso em que, depois de realizadas as cinco partes, tenhamos pares de arestas de primeira e de segunda espécie simultaneamente. O lema seguinte resolve a situação.

Lema 9.1. *A soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa a soma conexa de três planos projetivos.*

Já vimos no exemplo 6.4 que a soma conexa de dois planos projetivos é homeomorfa a garrafa de Klein. Assim, mostraremos que a soma conexa de um plano projetivo e um toro é homeomorfa a soma conexa de um plano projetivo e a garrafa de Klein.

Para isto, será conveniente dar uma construção alternativa para a soma conexa de qualquer superfície S com um toro ou com uma garrafa de Klein. Podemos representar o toro e a garrafa de Klein como retângulos com os lados opostos identificados como mostra a figura 9.7.

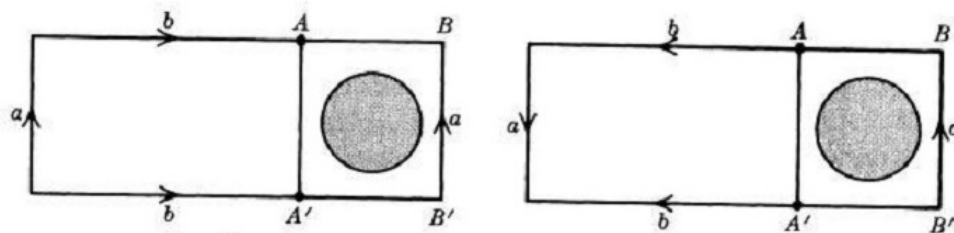


Figura 9.7: Toro e a Garrafa de Klein.

A figura 9.7 foi retirada de [2], página 2.

Para formar a soma conexa, primeiro cortamos o disco sombreado nos diagramas, depois cortamos um buraco similar em S e colamos a borda do buraco do toro ou da garrafa de Klein na borda do buraco de S . Contudo, em vez de fazer a colagem sobre o toro ou sobre a garrafa de Klein em uma etapa, podemos fazer em duas etapas: primeiro, colamos a superfície na parte do toro ou da garrafa de Klein que é a imagem do retângulo $ABB'A'$ sobre a identificação, (que será um tubo com dois furos) e depois cole o resto do toro ou da garrafa de Klein. Na primeira etapa, formamos a soma conexa de S com um tubo aberto ou cilindro. Tal tubo aberto ou cilindro é homeomorfo a uma esfera com dois furos e, formando a soma conexa de S com uma esfera, obtemos a superfície S . Assim, o espaço resultante no primeiro estágio é homeomorfo a superfície original S com dois furos. Na segunda etapa, conectamos as bordas destes dois buracos com um tubo que é o restante do toro ou da garrafa de Klein. A diferença entre os dois casos depende se conectamos as bordas para que eles tenham a mesma orientação ou orientação opostas. Isto é ilustrado nas figuras 9.8 e 9.9, onde S é uma faixa de Möbius.

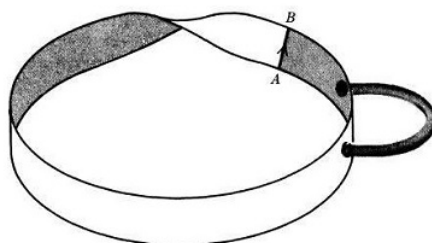


Figura 9.8: Soma Conexa da Faixa de Möbius com o Toro.

A figura 9.8 foi retirada de [2], página 3.

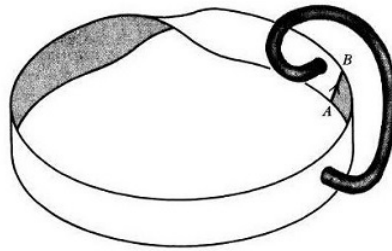


Figura 9.9: Soma Conexa da Faixa de Möbius com a Garrafa de Klein.

A figura 9.9 foi retirada de [2], página 3.

Agora, afirmamos que os dois espaços mostrados nas Figuras 9.8 e 9.9, isto é, a soma conexa de uma faixa de Möbius com um toro e a soma conexa de uma faixa de Möbius com uma garrafa de Klein, são homeomorfos. Para ver isto, imagine que cortamos cada um destes espaços topológicos ao longo da linha AB . Em cada caso, o resultado é a soma conexa de um retângulo com um toro, com as duas extremidades do retângulo identificadas com uma torção, como mostra a figura 9.10. Portanto, os dois espaços são homeomorfos.

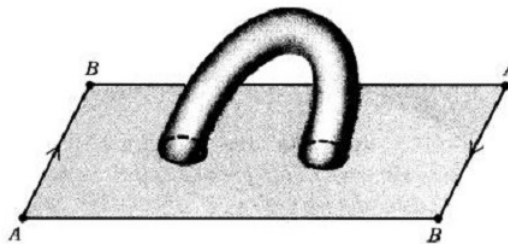


Figura 9.10: Soma Conexa de um Retângulo com o Toro.

A figura 9.10 foi retirada de [2], página 3.

A soma conexa do plano projetivo com o toro e a soma conexa do plano projetivo com a garrafa de Klein também serão feitas em duas partes.

Como afirmado anteriormente, obtemos o plano projetivo colando as bordas de um disco com a borda da faixa de Möbius.

Portanto, na primeira parte da soma conexa do plano projetivo com o toro, formamos a soma conexa da faixa de Möbius com o toro e na segunda etapa colamos o disco.

Do mesmo modo, fazemos a soma conexa do plano projetivo com a garrafa de Klein. Primeiro formamos a soma conexa da faixa de Möbius com a garrafa de Klein e em

seguida colamos o disco.

Procedendo desta maneira e sabendo que a soma conexa da faixa de Möbius com o toro é homeomorfa a soma conexa da faixa de Möbius com a garrafa de Klein, concluímos que a soma conexa do plano projetivo com o toro é homeomorfa a soma conexa do plano projetivo com a garrafa de Klein.

Deve ficar claro que esse Lema cuida do caso restante. Suponha que, após o passo 5 ter sido completado, o polígono tem m pares ($m > 0$) de segunda espécie, tal que os dois lados de cada par são adjacentes, e n quádruplas ($n > 0$) de lados, cada quádrupla consiste de dois pares de primeira espécie, que são separados um do outro.

Então, a superfície é a soma conexa de m planos projetivos e n toros, que pelo Lema 9.1 é homeomorfo a soma conexa de $m + 2n$ planos projetivos.

De fato, sejam m planos projetivos e n toros. Provaremos, por indução em n , que $(\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{m\text{-vezes}}) \# (\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{n\text{-vezes}}) = (m + 2n)$ planos projetivos.

Se $n = 1$

$(\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{m\text{-vezes}}) \# T^2 = 3$ planos projetivos $+(m - 1)$ planos projetivos $= (m + 2 \times 1)$ planos projetivos $= (m + 2n)$ planos projetivos.

Suponha que $(\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{m\text{-vezes}}) \# (\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{n\text{-vezes}})$ é homeomorfa a $(m + 2n)$ planos projetivos.

Então:

$(\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{m\text{-vezes}}) \# (\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{(n+1)\text{-vezes}}) = (\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{m\text{-vezes}}) \# (\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{n\text{-vezes}}) \# T^2 = (m + 2n)$ planos projetivos $+ 1$ toro $= 3$ planos projetivos $+(m + 2n - 1)$ planos projetivos $= (m + 2n + 2)$ planos projetivos $= m + 2(n + 1)$ planos projetivos.

Isto, completa a prova do Teorema 9.1.

□

Exemplo 9.1. Vamos realizar o processo descrito no teorema 9.1 para cada uma das superfícies cuja as triangularizações são dadas abaixo:

1. 124 236 134 246 367 347
469 459 698 678 457 259
289 578 358 125 238 135

Passo 1

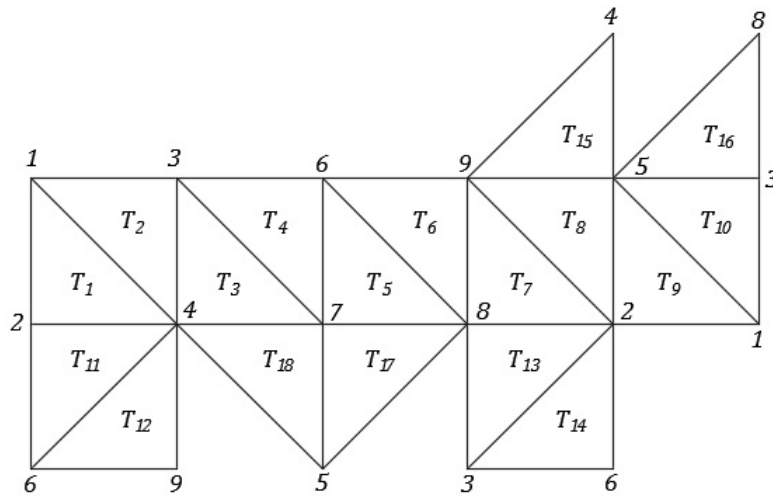
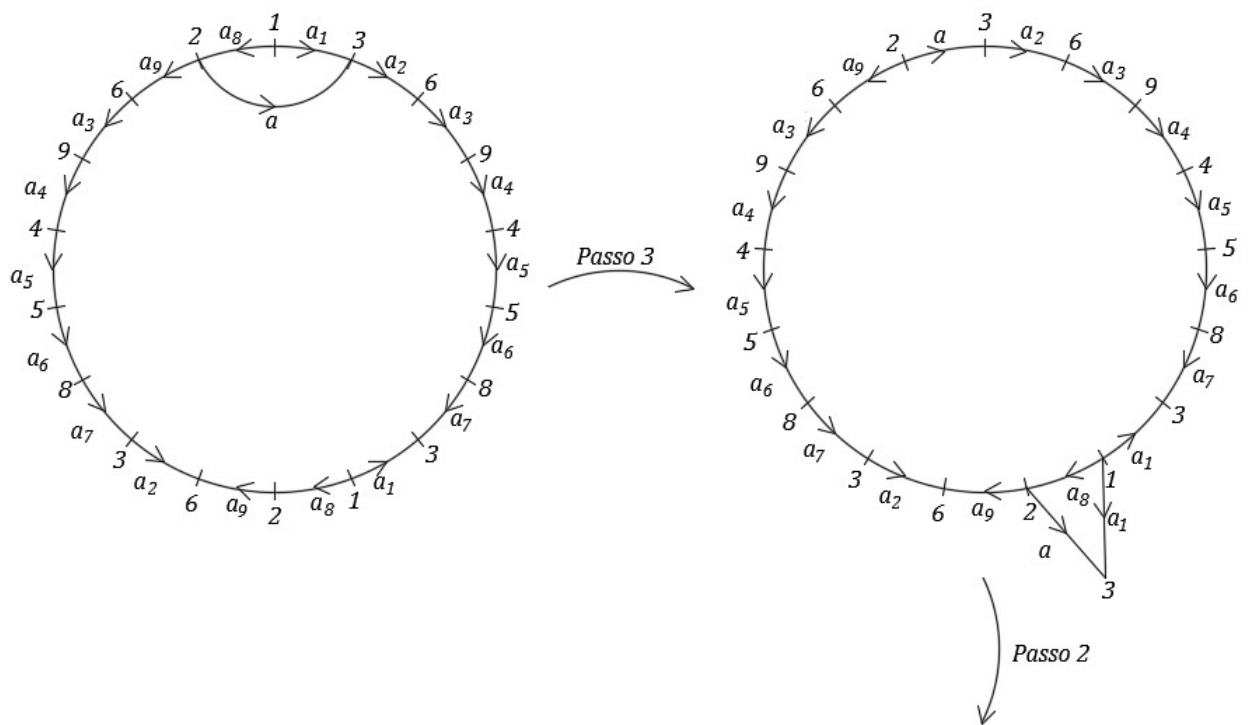
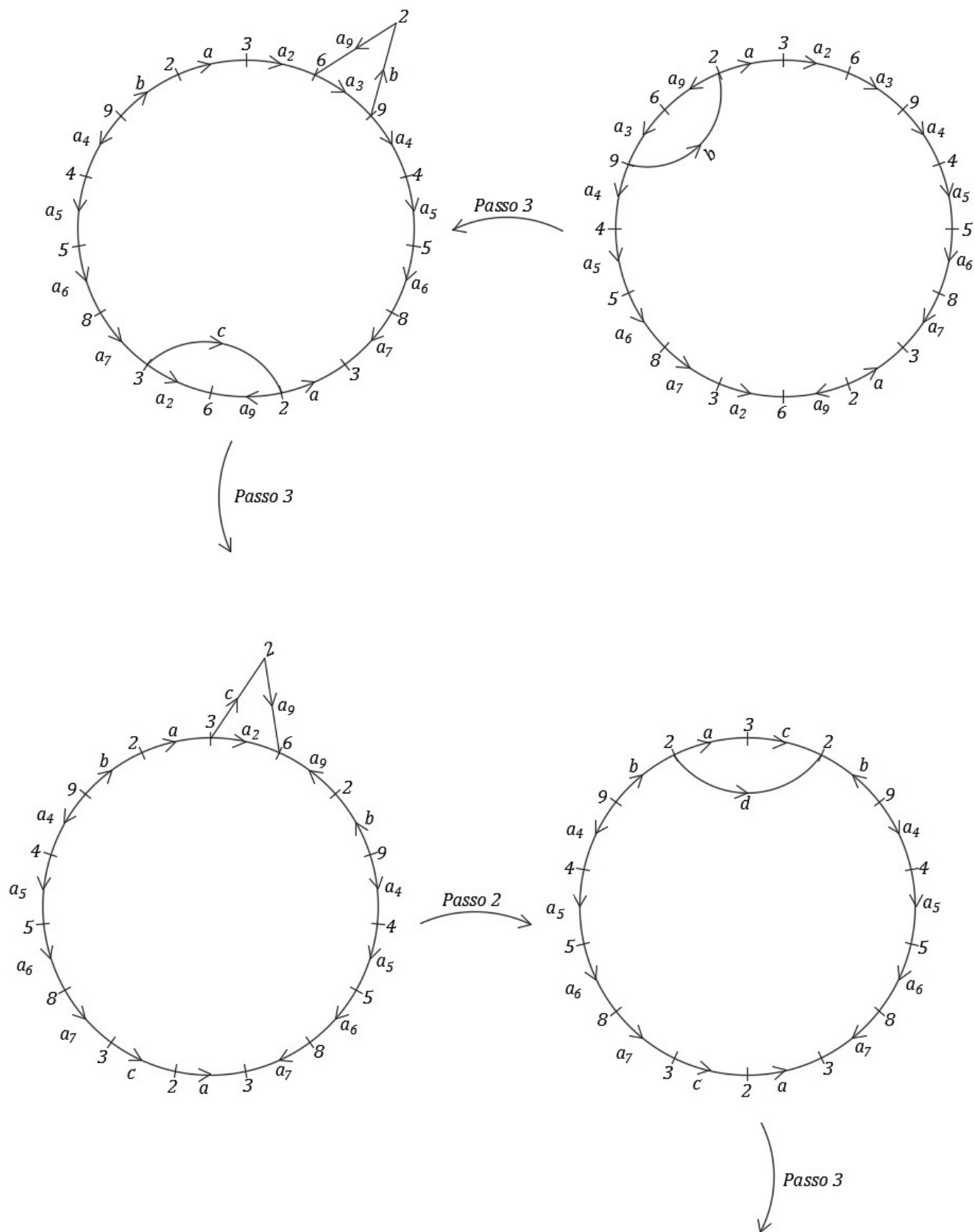
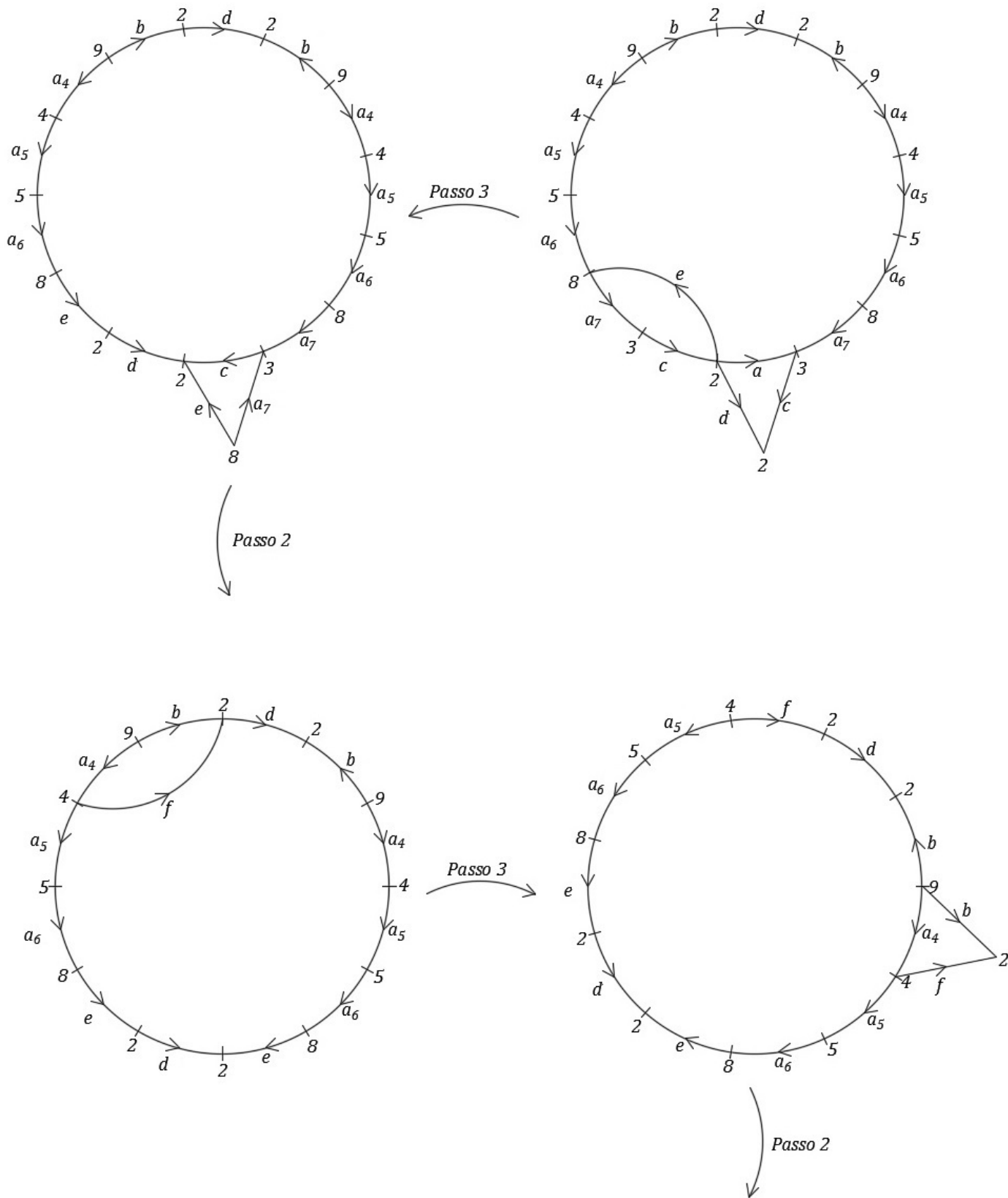


Figura 9.11: Triangularização da superfície 1.

Passos 2 e 3.







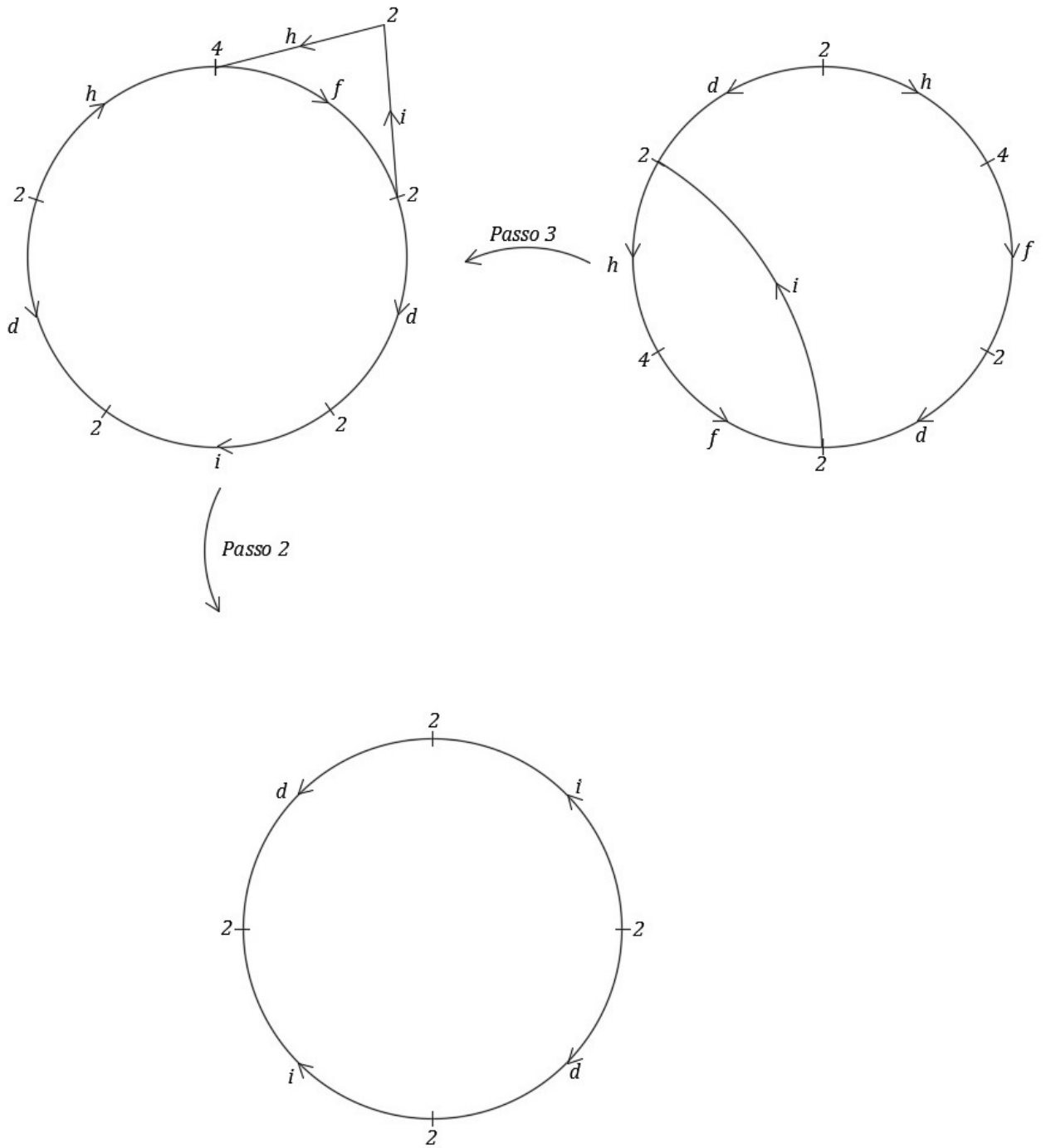


Figura 9.12: Aplicação dos passos 2 e 3, obtendo o toro.

2. 123 234 341 412

Passo 1

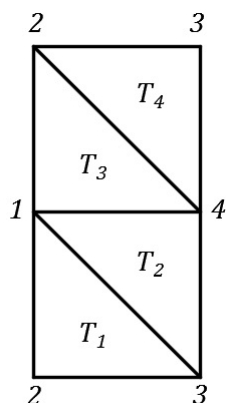


Figura 9.13: Triangularização da superfície 2.

Passo 2

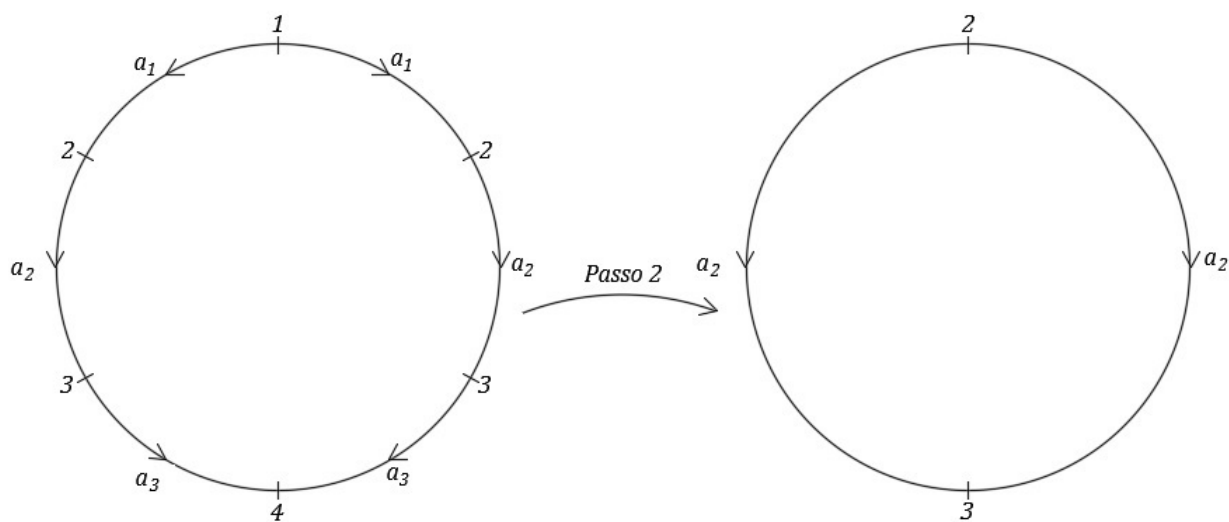


Figura 9.14: Aplicação do passo 2, obtendo a esfera.

3. 123 234 345 451 512

136 246 356 416 526

Passo 1

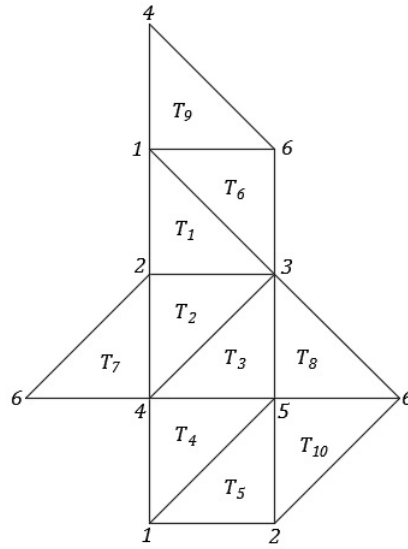
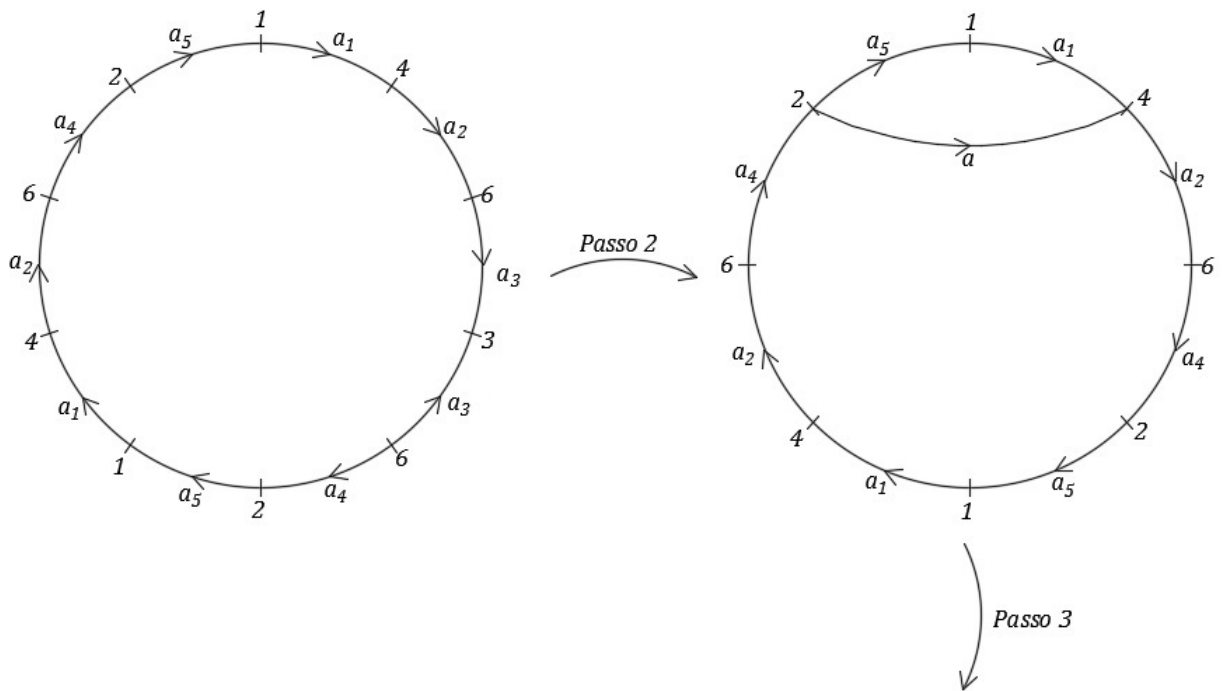
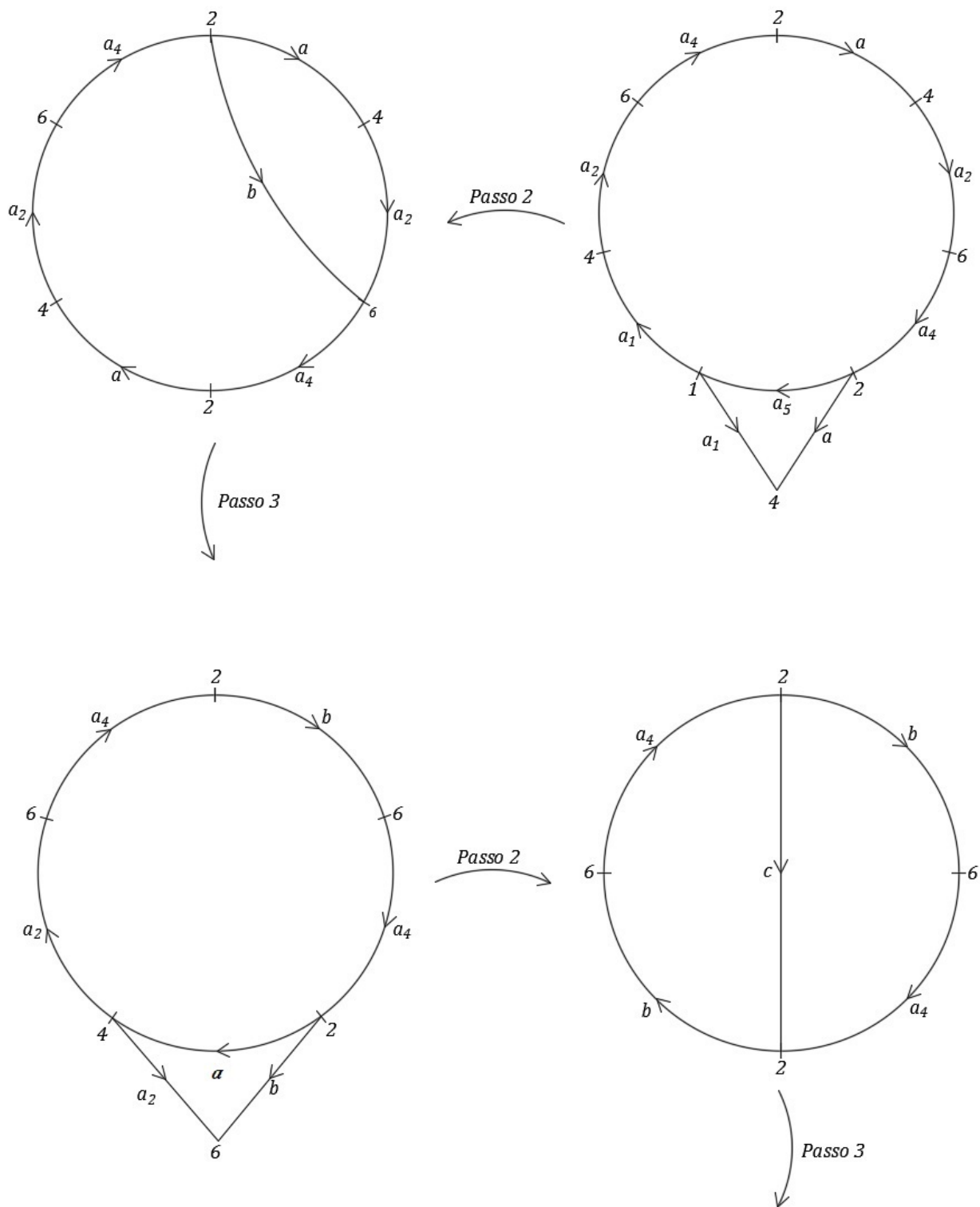


Figura 9.15: Triangularização da superfície 3.

Passos 2 e 3





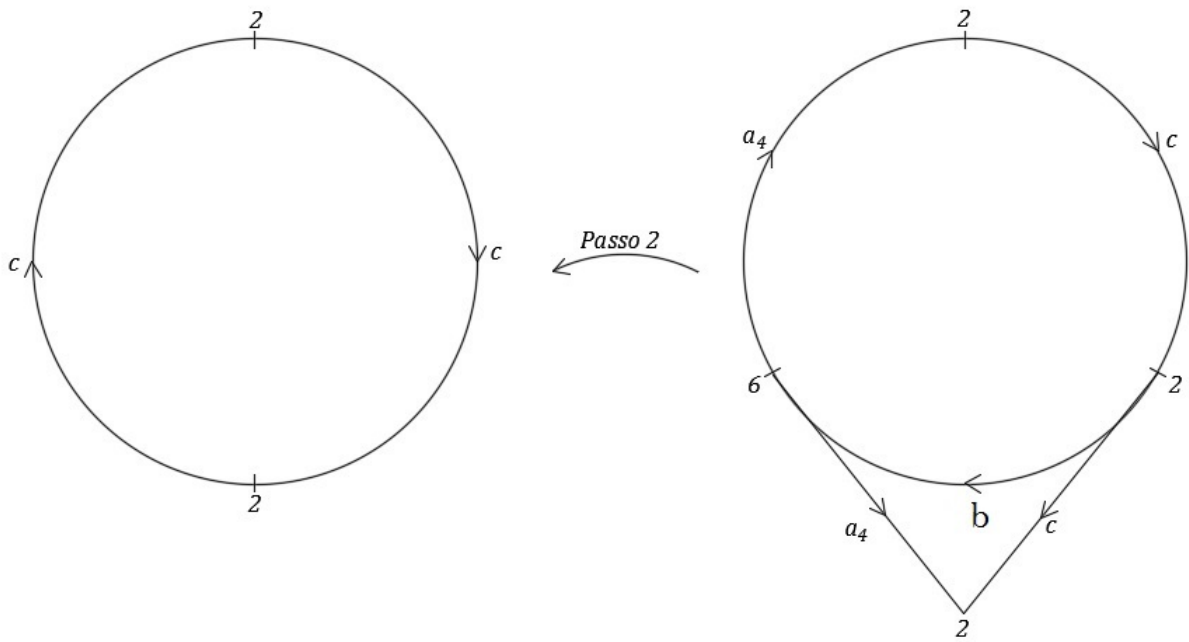


Figura 9.16: Aplicação dos passos 2 e 3, obtendo o plano projetivo.

Teorema 9.2. *Toda superfície compacta orientável é homeomorfa a uma esfera, ou a soma conexa de n toros. Toda superfície compacta não-orientável é homeomorfa a soma conexa de uma superfície compacta orientável com um plano projetivo ou com uma garrafa de Klein.*

Demonstração. Sabemos pelo Teorema 9.1 que toda superfície compacta não-orientável M é homeomorfa a soma conexa de m planos projetivos, para algum m .

Assim, provaremos, por indução, que a soma conexa de m planos projetivos é homeomorfa a soma conexa de uma superfície compacta orientável com um plano projetivo ou com a garrafa de Klein.

Se $m = 1$, então $M = P^2 \sim S^2 \# P^2$.

Suponha que $\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{n\text{-vezes}}$ é homeomorfa a $S \# N$, onde S é uma superfície orientável e N é ou o plano projetivo ou a garrafa de Klein.

Então:

$$\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{(n+1)\text{vezes}} = S \# N \# P^2.$$

1. Se N é o plano projetivo, então:

$$\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{(n+1)\text{vezes}} = S \# P^2 \# P^2 = S \# K^2.$$

2. Se N é a garrafa de Klein, então:

$$\underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{(n+1)\text{vezes}} = S \# K^2 \# P^2 = S \# P^2 \# P^2 \# P^2.$$

Vimos no Lema 9.1 que $P^2 \# P^2 \# P^2 = T^2 \# P^2$.

$$\therefore \underbrace{P^2 \# \dots \# P^2}_{(n+1)\text{vezes}} = S \# T^2 \# P^2, \text{ onde } S \# T^2 \text{ é uma superfície orientável.}$$

Logo, por indução finita, toda superfície compacta não-orientável é homeomorfa a soma conexa de uma superfície compacta orientável com um plano projetivo ou com uma garrafa de Klein.

□

10 A Característica de Euler de uma Superfície.

Embora tenhamos mostrado que qualquer superfície compacta é homeomorfa a uma esfera, a soma conexa de toros, ou a soma conexa de planos projetivos, não sabemos se todos estes são topologicamente diferentes. É concebível que existam inteiros positivos m e n , $m \neq n$, tal que a soma conexa de m toros é homeomorfa a soma conexa de n toros. Para mostrar que isto não pode acontecer, introduziremo um invariante topológico chamado característica de Euler.

Primeiro, definimos a característica de Euler de uma superfície triangularizada.

Sejam M uma superfície compacta com triangularização $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, e v o número total de vértices de M , e o número total de arestas de M e t o número total de triângulos de M .

Então, $\chi(M) = v - e + t$ é chamado a característica de Euler da superfície M .

As figuras abaixo sugerem um método uniforme de triangularização da esfera, do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein, para que possamos fazer o número de triângulos tão grande quanto nos agrada.

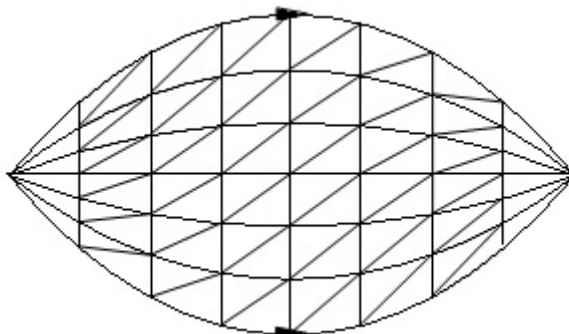


Figura 10.1: Esfera: arestas 126, vértices 44, triângulos 84

$$\chi(E^2) = v - e + t = 44 - 126 + 84 = 2$$

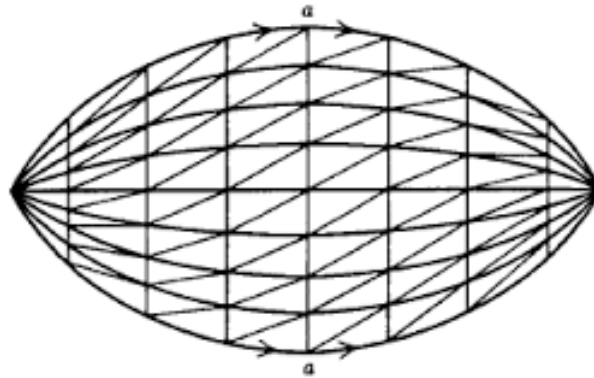


Figura 10.2: Esfera: arestas 168, vértices 58, triângulos 112

$$\chi(E^2) = v - e + t = 58 - 168 + 112 = 2$$

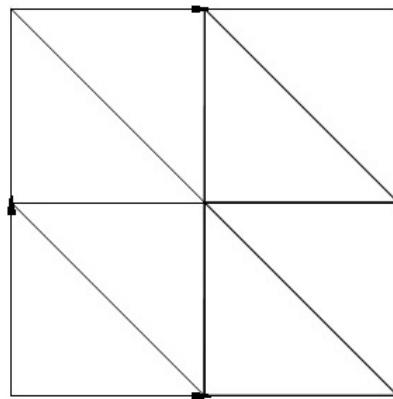


Figura 10.3: Toro: arestas 12, vértices 4, triângulos 8

$$\chi(T^2) = v - e + t = 4 - 12 + 8 = 0$$

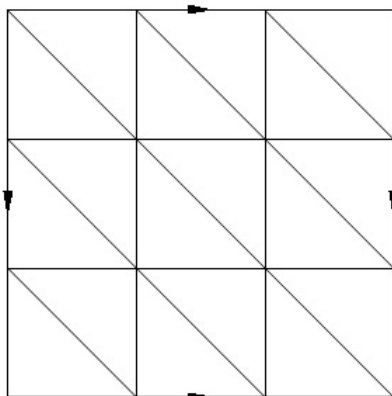


Figura 10.4: Toro: arestas 27, vértices 9, triângulos 18

$$\chi(T^2) = v - e + t = 9 - 27 + 18 = 0$$

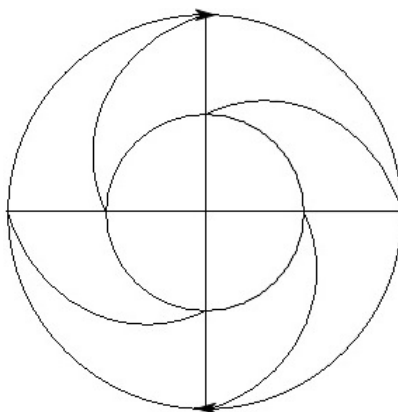


Figura 10.5: Plano Projetivo: arestas 18, vértices 7, triângulos 12

$$\chi(P^2) = v - e + t = 18 - 7 + 12 = 1$$

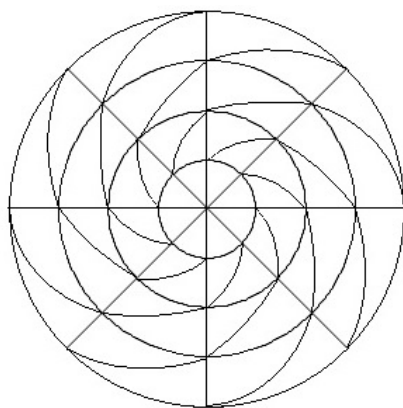


Figura 10.6: Plano Projetivo: arestas 84, vértices 29, triângulos 56

$$\chi(P^2) = v - e + t = 29 - 84 + 56 = 1$$

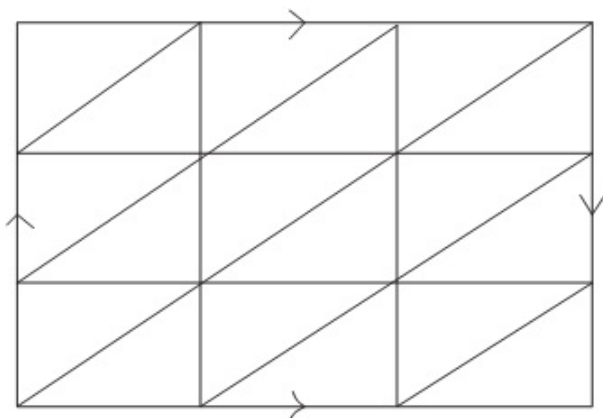


Figura 10.7: Garrafa de Klein: arestas 27, vértices 9, triângulos 18

$$\chi(K^2) = v - e + t = 9 - 27 + 18 = 0$$

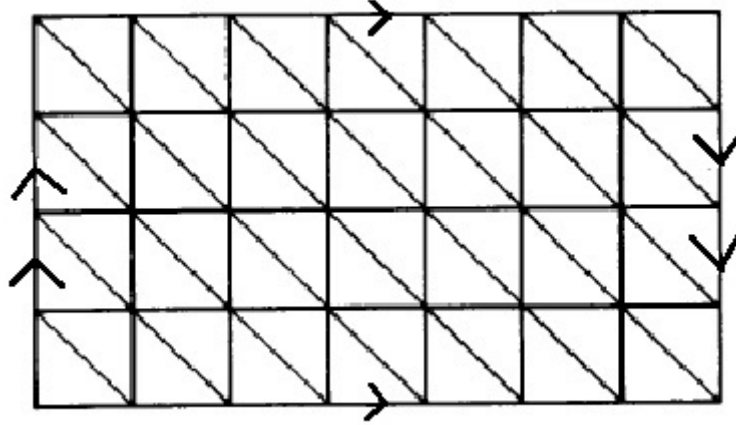


Figura 10.8: Garrafa de Klein: arestas 84, vértices 28, triângulos 56

$$\chi(K^2) = v - e + t = 28 - 84 + 56 = 0$$

Analisando tais triangularizações podemos verificar que a característica de Euler são independentes do número de linhas divisórias verticais e horizontais nos diagramas da esfera, do toro e da garrafa de Klein, ou do número de linhas radiais e dos círculos concêntricos no caso do plano projetivo. Isto é, a característica de Euler depende somente da superfície M e não da triangularização escolhida.

Além disso, verificamos também que as características de Euler da esfera, do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein são 2, 0, 1 e 0 respectivamente.

Proposição 10.1. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. As características de Euler de S_1 e S_2 e da soma conexa delas, $S_1 \# S_2$, são relacionadas pela fórmula*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demonstração. Denotemos por T_1 e T_2 triangularizações de S_1 e S_2 , respectivamente. Sejam $\chi(S_1) = v_1 - e_1 + t_1$ e $\chi(S_2) = v_2 - e_2 + t_2$ as respectivas características de Euler.

Seja $T_1' = T_1 - \Delta\{a_0, a_1, a_2\}$ é uma triangularização de $S_1 - \text{int}D^2$, onde $\{a_0, a_1, a_2\}$ são os vértices de um triângulo e $T_2' = T_2 - \Delta\{b_0, b_1, b_2\}$ é uma triangularização de $S_2 - \text{int}D^2$, onde $\{b_0, b_1, b_2\}$ são os vértices de um triângulo.

Tomemos $T = \frac{T_1' \cup T_2'}{\sim}$, onde $a_i \sim b_i$, $i = 0, 1, 2$ e $a_i a_j \sim b_i b_j$, $i, j = 0, 1, 2$.

Como T é uma triangularização para $S_1 \# S_2$, então:

$$\chi(S_1 \# S_2) = (v_1 + v_2 - 3) - (e_1 + e_2 - 3) + (t_1 + t_2 - 2) = (v_1 - e_1 + t_1) + (v_2 - e_2 + t_2) - 3 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \quad \square$$

Teorema 10.1. *A característica de Euler da esfera é 2, da soma conexa de n toros é $2 - 2n$, da soma conexa de n planos projetivos é $2 - n$, da soma conexa de um plano projetivo e n toros é $1 - 2n$ e, por fim, da soma conexa de uma garrafa de Klein e n toros é $-2n$.*

Demonstração. i) Sabemos que $\chi(S^2) = 2$.

ii) Consideremos $M = T^2 \# \dots \# T^2$ a soma conexa de n toros, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(T^2) = 2 - 2 \times 1 = 0$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n . Ou seja, se $M = T^2 \# \dots \# T^2$ é a soma conexa de n toros, então $\chi(M) = 2 - 2n$

Seja $M = T^2 \# \dots \# T^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ toros, que pode ser vista como $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2$, a soma conexa de n toros com um toro. Logo $\chi(M) = \chi((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) = \chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2 = 2 - 2n + 0 - 2 = -2n = 2 - 2(n + 1)$.

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n toros é $2 - 2n$.

iii) Consideremos $M = P^2 \# \dots \# P^2$ a soma conexa de n planos projetivos, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(P^2) = 2 - 1 = 1$

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n . Ou seja, se $M = P^2 \# \dots \# P^2$ é a soma conexa de n planos projetivos, então $\chi(M) = 2 - n$

Seja $M = P^2 \# \dots \# P^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ planos projetivos, que pode ser vista como $M = (P^2 \# \dots \# P^2) \# P^2$, a soma conexa de n planos projetivos com um plano projetivo. Logo $\chi(M) = \chi((P^2 \# \dots \# P^2) \# P^2) = \chi(P^2 \# \dots \# P^2) + \chi(P^2) - 2 = 2 - n + 1 - 2 = -n + 1 = 2 - (n + 1)$

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n planos projetivos é $2 - n$.

iv) Consideremos $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# P^2$ a soma conexa de n toros com um plano projetivo, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(T^2 \# P^2) = \chi(T^2) + \chi(P^2) - 2 = 0 + 1 - 2 = -1 = 1 - 2 \times 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n . Ou seja, se $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# P^2$ é a soma conexa de n toros com um plano projetivo, então $\chi(M) = 1 - 2n$

Seja $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# P^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ toros com um plano projetivo, que pode ser vista como $M = ((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \# P^2$.

Logo $\chi(M) = \chi(((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \# P^2) = (\chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2) + \chi(P^2) - 2 = 2 - 2n + 0 - 2 + 1 - 2 = -1 - 2n = 1 - 2(n + 1)$

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n toros com um plano projetivo é $1 - 2n$.

v) Consideremos $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# K^2$ a soma conexa de n toros com uma garrafa de Klein, $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então $\chi(M) = \chi(T^2 \# K^2) = \chi(T^2) + \chi(K^2) - 2 = 0 + 0 - 2 = -2 = (-2) \times 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para um certo n . Ou seja, se $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# K^2$ é a soma conexa de n toros com uma garrafa de Klein, então $\chi(M) = -2n$.

Seja $M = (T^2 \# \dots \# T^2) \# K^2$ a soma conexa de $(n + 1)$ toros com uma garrafa de Klein, que pode ser vista como $M = ((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \# K^2$.

Logo $\chi(M) = \chi(((T^2 \# \dots \# T^2) \# T^2) \# K^2) = (\chi(T^2 \# \dots \# T^2) + \chi(T^2) - 2) + \chi(K^2) - 2 = 2 - 2n + 0 - 2 + 0 - 2 = -2n - 2 = -2(n + 1)$.

Portanto, por indução finita, a característica de Euler da soma conexa de n toros com uma garrafa de Klein é $-2n$. \square

Observação 10.1. Podemos notar que a característica de Euler de uma superfície orientável é sempre par, enquanto que a característica de Euler de uma superfície não orientável pode ser par ou ímpar.

Assumindo que a característica de Euler é um invariante topológico e pelo teorema 9.1 temos o seguinte importante resultado.

Teorema 10.2. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. Então S_1 e S_2 são homeomorfas se, e somente se, suas características de Euler coincidem e as duas superfícies são orientáveis ou ambas são não orientáveis.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se S_1 e S_2 são homeomorfas, provar que suas características de Euler coincidem passa pelo fato de que a característica de Euler independe da triangularização da superfície.

Para a orientabilidade, veja que, segundo nossa definição, S_1 é não orientável se, e somente se, S_1 contém uma superfície homeomorfa a faixa de Möbius.

(\Leftarrow) Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas, ambas orientáveis, tais que $\chi(S_1) = \chi(S_2)$.

Suponhamos que S_1 não seja homeomorfa a S_2 , ou seja, $S_1 \not\cong S_2$.

Pelo Teorema 9.1 temos as seguintes opções para S_1 e S_2 :

1. $S_1 = T^2 \# \dots \# T^2$ sendo a soma conexa de n toros e $S_2 = S^2$ sendo a esfera. Ou, $S_1 = S^2$ sendo a esfera e $S_2 = T^2 \# \dots \# T^2$ sendo a soma conexa de n toros.

Ou ainda, podemos ter:

2. $S_1 = T^2 \# \dots \# T^2$ sendo a soma conexa de m toros e $S_2 = T^2 \# \dots \# T^2$ sendo a soma conexa de n toros, com $m \neq n$.

Analisando o caso 1, se uma delas é a esfera, por exemplo, $S_1 = S^2$, então $S_2 = T^2 \# \dots \# T^2$ é a soma conexa de n toros. Mas, por hipótese $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, logo $2 = 2 - 2n$, o que implica $n = 0$. Absurdo!

Analisando o caso 2, se uma delas é a soma conexa de m toros, $S_1 = T^2 \# \dots \# T^2$, então $S_2 = T^2 \# \dots \# T^2$ é a soma conexa de n toros, com $m \neq n$. Ora, se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, então $2 - 2m = 2 - 2n$, o que implica $m = n$. Contradição!

Agora, sejam S_1 e S_2 superfícies compactas, ambas não orientáveis, tais que $\chi(S_1) = \chi(S_2)$.

Suponhamos que S_1 não seja homeomorfa a S_2 , ou seja, $S_1 \not\cong S_2$.

Assim, segundo o teorema 9.1, podemos ter: $S_1 = P^2 \# \dots \# P^2$ sendo a soma conexa de m planos projetivos e $S_2 = P^2 \# \dots \# P^2$ sendo a soma conexa de n planos projetivos, com $m \neq n$. Como $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, então $2 - m = 2 - n$, o que implica $m = n$. Contradição!

Assim, provamos que duas superfícies compactas, ambas orientáveis ou ambas não orientáveis, que possuem a mesma característica de Euler são homeomorfas.

□

Aplicação: a característica de Euler da esfera e a classificação dos poliedros regulares.

Existem apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Considere um poliedro (convexo) regular P , com V vértices, A arestas e F faces. Denotemos por n o número de lados do polígono que forma cada face e por p o número de arestas concorrentes em cada vértice P . Temos então a relação:

$$2A = nF \text{ e } 2A = pV$$

que nos dá:

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo A e V na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow \frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Leftrightarrow \frac{2nF - pnF + 2pF}{2p} = 2 \Leftrightarrow F(2n - pn + 2p) = 4p$$

Logo,

$$F = \frac{4p}{2p - pn + 2n} \tag{10.1}$$

Uma vez que o número de faces F e o número p de arestas concorrentes em cada vértice são números naturais, devemos ter:

$$2p + 2n - pn > 0 \Leftrightarrow 2n > pn - 2p \Leftrightarrow 2n > p(n - 2) \Leftrightarrow \frac{2n}{n - 2} > p.$$

Como o número de arestas p concorrentes em cada vértice em um poliedro deve ser maior ou igual a 3, temos então:

$$\frac{2n}{n - 2} > 3 \Leftrightarrow \frac{2n}{n - 2} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{2n - 3n + 6}{n - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{6 - n}{n - 2} > 0,$$

de modo que $2 < n < 6$, ou seja o número de lados do polígono que forma cada face deve ser $n = 3, 4$ ou 5 .

Analisemos assim os possíveis valores de p e F , para n natural, satisfazendo a desigualdade acima.

(I) Observemos que quando $n = 3$ o poliedro é formado apenas por triângulos. Substituindo em 10.1, temos então

$$F = \frac{4p}{6 - p},$$

de modo que $3 \leq p < 6$.

Para $p = 3$, temos que $F = 4$, ou seja, obtemos o tetraedro.

Para $p = 4$, temos que $F = 8$, ou seja, obtemos o octaedro.

Para $p = 5$, temos que $F = 20$, ou seja, obtemos o icosaedro.

(II) Observemos que, quando $n = 4$, o poliedro é formado apenas por quadrados e temos $F = \frac{2p}{4 - p}$. Dessa forma, o único valor possível para p é 3.

Para $p = 3$, temos que $F = 6$, ou seja, o poliedro é o cubo.

(III) Observemos que quando $n = 5$ o poliedro é formado apenas por pentágonos e, de 10.1, temos $F = \frac{4p}{10 - 3p}$. Novamente, o único valor possível é $p = 3$.

Para $p = 3$, temos que $F = 12$, ou seja, obtemos o dodecaedro.

Dessa forma, tem-se então que há apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Referências

- [1] Barros, R. L.; *Classificação das superfícies compactas sem bordo*. Trabalho de Conclusão de Curso - Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos (2010).
- [2] Cardoso, O. C. V.; *Topologia da Superfície. Teorema da Soma Conexa*.
- [3] Crespi, S. E.; *Classificação de superfícies*. Dissertação - Universidade Federal de Santa Catarina (1982).
- [4] Kosniowski, C.; *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press (1980).
- [5] Massey, W. S.; *Algebraic Topology: an introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag (1977).
- [6] Sampaio, J. C. V.; *Uma introdução à Topologia Geométrica. Passeios de Euler, superfícies, e o Teorema das quatro cores*. EdUfscar (2008).