UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia e Ciências- campus de Guaratinguetá

NÍCOLAS ROMEIRO KVINT

Estatística bayesiana de cronômetros cósmicos :

Análises e correções

Guaratinguetá

2026

Nícolas Romeiro Kvint

Estatística bayesiana de cronômetros cósmicos :
Análises e correções

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá, para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Teórica

Orientador: Profº Dr. Jose Fernando de Jesus

Coorientador: Profº Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2026

Kvint, Nicolas Romeiro
K97e Estatística bayesiana de cronômetros cósmicos: análises e correções / Nicolas Romeiro Kvint - Guaratinguetá, 2026
78 f : il.
Bibliografia: f. 71-76

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2026.

Orientador: Prof. Dr. José Fernando de Jesus
Coorientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

1. Cronômetros. 2. Estatística. 3. Cosmologia.
4. Astronomia. I. Título.

CDU 524.82(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

NÍCOLAS ROMEIRO KVINT

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA E ASTRONOMIA"

PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: MESTRADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

gov.br Documento assinado digitalmente
OLIVIA MARIA BERENGUE
Data: 11/08/2026 17:10:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Olívia Maria Berengue
Coordenadora

B A N C A E X A M I N A D O R A:

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE FERNANDO DE JESUS
Data: 30/07/2026 13:39:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. JOSE FERNANDO DE JESUS
Orientador - UNESP

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE ADEMIR SALES DE LIMA
Data: 05/08/2026 17:15:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. JOSÉ ADEMIR SALES DE LIMA
USP

gov.br Documento assinado digitalmente
RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA
Data: 30/07/2026 14:08:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA
UNIFESP

***JULHO* de 2026**

Dedico este trabalho à minha mãe, Janaina.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço ao meu pai, Marcelo, e à minha mãe, Janaina, que dedicaram suas vidas integralmente a mim e minhas irmãs. Sem o esforço deles, eu não teria alcançado nada do que tenho hoje.

Agradeço às minhas irmãs, Anne e Lavínia, que foram, para o azar delas, minhas primeiras alunas. Graças a elas, descobri, aos poucos, meu gosto pelo ensino.

Agradeço à minha companheira, Mylene, pelo apoio em diversas áreas da vida e pela paciência de me ouvir falando sobre física quase que diariamente há um bom tempo. Muito do que sei hoje foi fixado na minha mente devido às explicações que dei a ela.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Jose Fernando, e ao meu coorientador, Prof. Saulo, que se dispuseram a compartilhar seus conhecimentos e me guiar e ajudar nessa longa trajetória do mundo acadêmico.

Por fim, gostaria de agradecer aos demais professores e amigos que, seja com momentos de ensino ou lazer, contribuíram para eu chegar aqui.

Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A Ciência é uma vela na escuridão.
— Carl Sagan

RESUMO

O método dos cronômetros cósmicos é um dos diversos métodos de medição do parâmetro de Hubble. Embora apresente grandes vantagens, o método ainda enfrenta desafios significativos, como, principalmente, as altas incertezas associadas aos dados. Este trabalho busca mostrar que essas incertezas estão superestimadas, propondo um método bayesiano para corrigi-las. Então, com os dados corrigidos, os parâmetros dos modelos ΛCDM plano e OΛCDM são restringidos. Para o ΛCDM plano, obteve-se $H_0 = 67.1 \pm 3.8$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $\Omega_m = 0.33 \pm 0.05$. Já para o modelo OΛCDM, $H_0 = 67.0 \pm 4.6$ km s^{-1} Mpc^{-1}, $\Omega_m = 0.36 \pm 0.16$ e $\Omega_\Lambda = 0.70 \pm 0.32$. A redução nas incertezas desses resultados vão de 22% a 30% quando comparados com os resultados para os modelos sem correção.

Palavras-chave: cronômetros cósmicos; estatística bayesiana, parâmetro de Hubble.

ABSTRACT

The cosmic chronometers method is one of several methods for measuring the Hubble parameter. Although it has important advantages, it still faces significant challenges, especially the large uncertainties associated with the data. This work shows that these uncertainties are overestimated, proposing a Bayesian method to correct it. Then, with the corrected dataset, the flat ΛCDM and OΛCDM parameters are constrained. For the flat ΛCDM, it was found $H_0 = 67.1 \pm 3.8$ km s^{-1} Mpc^{-1} and $\Omega_m = 0.33 \pm 0.05$. While for OΛCDM, $H_0 = 67.0 \pm 4.6$ km s^{-1} Mpc^{-1}, $\Omega_m = 0.36 \pm 0.16$ and $\Omega_\Lambda = 0.70 \pm 0.32$. The uncertainty reduction for these results goes from 22% to 30% when compared to the uncorrected models.

Keywords: cosmic chronometers; Bayesian statistics; Hubble parameter.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Valores da constante de Hubble H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1} obtidos por diferentes métodos com nível de confiança de 68%. A barra vertical laranja representa a medida obtida pelo SH0ES, e a barra vertical roxa representa a medida obtida pelo Planck. Gráfico retirado de (Perivolaropoulos; Skara, 2022). 28

Figura 2 Melhor ajuste dos dados de CC ao modelo ΛCDM plano (linha laranja). As áreas em verde e rosa representam, respectivamente, o intervalo de 1σ dos resultados do Plank 2018 e do Pantheon+&SH0ES. 49

Figura 3 Distribuição do χ^2_ν e sua CDF para cada modelo. **Esquerda:** modelo ΛCDM plano com $\nu = 31$. **Direita:** modelo OΛCDM com $\nu = 30$. 55

Figura 4 Resultado da análise dos dados do Pantheon SNe Ia. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95% 58

Figura 5 Resultado da análise dos dados do Pantheon SNe Ia para o teste com incertezas simuladas. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95% . . . 60

Figura 6 Resultado da análise do modelo ΛCDM plano para ambos os métodos, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%. 61

Figura 7 Resultado da análise do modelo ΛCDM plano para diferentes combinações para a matriz de covariância, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%. 63

Figura 8 Resultado da análise do modelo ΛCDM plano, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%. 65

Figura 9 Distribuição do χ^2_ν e sua CDF para o modelo ΛCDM plano. 66

Figura 10 Resultado da análise do modelo OΛCDM, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%. 67
Figura 11 Distribuição do χ^2_ν e sua CDF para o modelo OΛCDM. 68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Os 33 dados de CC e suas respectivas incertezas, com $H(z)$ em km s^{-1} Mpc^{-1}. Os métodos de medição listados são o ajuste do espectro total (FSF), a quebra em 4000Å(D). 48
Tabela 2 – Valores médios dos parâmetros do modelo OΛCDM para os dados do Pantheon SNe Ia sem e com o fator de correção f nas incertezas. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança. 59
Tabela 3 – Valores médios dos parâmetros do modelo OΛCDM para os dados do Pantheon SNe Ia sem e com o fator de correção f nas incertezas simuladas. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança. 59
Tabela 4 – Valores médios dos parâmetros do modelo ΛCDM plano com correção para cada conjunto de dados de CC, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança. 62
Tabela 5 – Valores médios dos parâmetros do modelo ΛCDM plano com correção para cada combinação para a matriz de covariância, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança. 64
Tabela 6 – Valores médios dos parâmetros do modelo ΛCDM plano para os dados de cronômetros cósmicos sem e com o fator de correção f nas incertezas, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança. 66
Tabela 7 – Valores médios dos parâmetros do modelo OΛCDM para os dados de cronômetros cósmicos sem e com o fator de correção f nas incertezas, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança. 68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BAO	Do inglês *Baryon Acoustic Oscillations* (Oscilações Acústicas de Bárions)
CC	Cronômetros cósmicos
CDM	Do inglês *Cold Dark Matter* (Matéria Escura Fria)
CMB	Do inglês *Cosmic Microwave Background* (Radiação Cósmica de Fundo)
FSF	Do inglês *Full Spectrum Fitting* (Ajuste do Espectro Total)
IMF	Do inglês *Initial Mass Function* (Função de Massa Inicial)
SFH	Do inglês *Stellar Formation History* (História de Formação Estelar)
SNe Ia	Supernovas do tipo Ia
SPS	Do inglês *Stellar Population Synthesis* (Síntese de Populações Estelares)
SSP	Do inglês *Single Stellar Population* (População Estelar Única)
ΛCDM	Modelo Cosmológico Padrão, do inglês *Lambda Cold Dark Matter* (Lambda com Matéria Escura Fria)
	MCMC Do inglês *Markov Chain Monte Carlo* (Monte Carlo via Cadeias de Markov)

LISTA DE SÍMBOLOS

H_0	Constante de Hubble
z	*Redshift*
$H(z)$	Parâmetro de Hubble no redshift z
f	Fator de correção das incertezas
Λ	Constante Cosmológica
a	Fator de escala cósmico
k	Constante de curvatura espacial
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci
G	Constante gravitacional
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
ρ	Densidade de energia total
p	Pressão total
ρ_{crit}	Densidade crítica
Ω_r	Parâmetro de densidade de radiação
Ω_m	Parâmetro de densidade de matéria
Ω_k	Parâmetro de densidade de curvatura
Ω_Λ	Parâmetro de densidade de energia escura
$M_\odot$	Massa solar
$D4000$	Amplitude da quebra espectral em 4000 Å
Z	Metalicidade estelar

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO 18
2.1 As equações de Friedmann 18
2.1.1 O tensor e escalar de Ricci 19
2.1.2 O tensor energia-momento e as equações de Friedmann 20
2.1.3 Os parâmetros de densidade 22
2.1.4 O *redshift* cosmológico 23
2.2 O Modelo ΛCDM 24
2.2.1 Problemas do modelo ΛCDM 26

3 ESTATÍSTICA BAYESIANA 29
3.1 O Teorema de Bayes 29
3.2 Estimação de um parâmetro 31
3.3 Estimação de múltiplos parâmetros 33
3.3.1 O caso bivariado 33
3.3.2 O caso multivariado 35
3.4 Estimando a posterior via *likelihood* 36
3.4.1 A validade da *likelihood* gaussiana 38
3.5 O método de Monte Carlo via cadeias de Markov 39
3.5.1 O método de Monte Carlo 39
3.5.2 Monte Carlo via cadeias de Markov 40
3.5.3 Algoritmos de amostragem 41

4 OS CRONÔMETROS CÓSMICOS 43
4.1 O método dos cronômetros cósmicos para obtenção de $H(z)$ 43
4.1.1 Estimando a idade diferencial 45
4.1.2 Os dados de cronômetros cósmicos 47
4.2 Fontes de incertezas 47
4.2.1 Viés do progenitor 48
4.2.2 Contaminação por populações jovens 50
4.2.3 Modelos estelares astrofísicos 50
4.2.3.1 Função de massa inicial 51
4.2.3.2 Metalicidade estelar 51
4.2.3.3 Biblioteca estelar 52
4.2.3.4 Modelos de síntese de populações estelares 52

4.2.4 A matriz de covariância 53
4.3 A superestimação das incertezas 54

5 CORRIGINDO AS INCERTEZAS DE $H(z)$ 56
5.1 O método de correção 56
5.2 Teste do método 57
5.2.1 Primeiro teste: detecção de incertezas bem estimadas 57
5.2.2 Segundo teste: recuperação do fator multiplicativo 58
5.3 Aplicação aos dados de cronômetros cósmicos 60
5.3.1 Separação por método de aquisição 60
5.3.2 Diferentes combinações da matriz de covariância 62
5.3.3 Análise dos modelos ΛCDM plano e OΛCDM 64
5.4 Comparação com outras análises e resultados 66

6 CONCLUSÃO 69

REFERÊNCIAS 71

DADOS CURRICULARES 78

1 INTRODUÇÃO

O objeto de estudo da cosmologia é o próprio Universo em sua totalidade. Por ser a interação que prevalece em tais escalas, é necessário termos uma teoria de gravitação para estudá-lo. Assim, a Teoria da Relatividade Geral somada ao Princípio Cosmológico, que diz que o Universo é homogêneo e isotrópico em escalas cosmológicas, nos possibilita construir o atual Modelo Cosmológico Padrão ΛCDM. Suportado pela radiação cósmica de fundo (CMB), pela abundância de hidrogênio, hélio e deutério, pelas estruturas em larga escala e pela expansão acelerada observada por meio de supernovas, este modelo é o que melhor explica a evolução do Universo.

Existem cinco ingredientes que formam o modelo ΛCDM: fótons; neutrinos que, em conjunto com os fóton, constituem a matéria relativística; matéria bariônica, composta por quarks, elétrons e demais partículas elementares; matéria escura fria, uma forma desconhecida de matéria que interage somente gravitacionalmente; e a energia escura, outra componente desconhecida do modelo, que seria uma forma de energia responsável pela aceleração da expansão.

Apesar do sucesso e da aceitação pela comunidade científica, há alguns problemas ainda não resolvidos que desafiam o modelo. Um deles é o Problema da Coincidência, referente às densidades de matéria e de energia escura que, atualmente, possuem valores muito próximos (Steinhardt, 1997; Zlatev; Wang; Steinhardt, 1999; Velten; Marttens; Zimdahl, 2014). Como ambas as densidades exibem comportamentos diferentes e possuíram valores distintos no passado, surge a dúvida do porquê elas são tão próximas no presente. Outro enigma é o Problema da Constante Cosmológica, que aponta para uma grande discrepância (de dezenas de ordens de grandeza) entre o valor previsto para a densidade de energia do vácuo pela Teoria Quântica de Campos e o valor observado (Zel'dovich, 1968; Weinberg, 1989; Martin, 2012). Um terceiro problema que vem recebendo grande atenção nos últimos anos é a tensão de Hubble (para uma revisão, ver Valentino et al. (2021b), Perivolaropoulos & Skara (2022)).

O parâmetro de Hubble H é uma das grandezas mais relevantes para a cosmologia, já que fornece informações sobre a taxa de expansão do Universo, sendo, portanto, essencial para estudar sua história. Devido a isso, muitos são os esforços para obter uma medida do seu atual valor, a chamada constante de Hubble H_0. Pode-se dividir os métodos de medição em dois grandes grupos: os que utilizam objetos distantes (altos *redshifts*), baseando-se, portanto, em um Universo jovem; e os que utilizam objetos mais próximos (baixos *redshifts*), baseando-se no Universo mais recente. A tensão de Hubble surge dos resultados das medidas desses dois grupos. Enquanto missões que utilizam altos *redshifts* tendem a valores mais baixos para H_0, medições em baixos *redshifts* apontam para valores mais elevados. Os dados indicam uma tensão entre 4σ e 5σ (Perivolaropoulos; Skara, 2022), podendo exceder os 5σ dependendo do conjunto de dados usado (Wong et al., 2019; Valentino et al., 2021b).

Com medidas cada vez mais precisas ampliando a tensão, inúmeras hipóteses surgem visando

solucionar a tensão de Hubble: modelos com graus de liberdade extras, modelos de interações extras, gravitação modificada, energia escura primordial ou tardia e uma série de modelos alternativos (Valentino et al., 2021b). Diante de tantas possíveis soluções, novas medidas e métodos de medição do parâmetro de Hubble são essenciais para distinguir entre bons modelos em meio a tantas possibilidades. Um método que se mostra interessante, embora ainda enfrente dificuldades, é o método dos cronômetros cósmicos (CC) (Jimenez; Loeb, 2002).

O método dos CC é fundamentado em uma relação entre um intervalo de tempo e um intervalo de *redshift* que permite obter o parâmetro de Hubble em função do *redshift* z. Enquanto a medição de z é trivial e feita com boa precisão, medir o intervalo de tempo é um desafio. Essa medida é feita por meio da datação de populações de galáxias massivas e passivas, sendo estas as melhores candidatas para cronômetros cósmicos. Como nesse tipo de galáxia não há mais síntese estelar em quantidades significativas, comparar a idade de populações em diferentes *redshifts* possibilita estimar quanto tempo passou no Universo. Finalmente, a partir da relação entre as duas medidas, obtém-se o parâmetro de Hubble $H(z)$.

O maior benefício do uso dos CC é a independência do modelo cosmológico assumido. Como há uma relação direta entre $H(z)$ e z, a dinâmica do modelo não afeta a estimativa do parâmetro de Hubble. Assim, este método é um forte candidato para restringir parâmetros cosmológicos e testar modelos alternativos. Apesar disso, as dificuldades para seu uso ainda são grandes. A maior barreira enfrentada é a falta de dados. Como é necessário um conjunto de galáxias passivas ao longo de um intervalo de z, a seleção de galáxias candidatas é uma tarefa complexa que exige grande rigor, resultando em baixa quantidade de dados. Além disso, os dados de CC possuem incertezas elevadas, diminuindo seu poder estatístico.

As fontes de erros sistemáticos foram estudadas e, como resultado, estimou-se toda a matriz de covariância dos dados de CC (Moresco et al., 2020). As origens desses erros são diversas. As principais investigações foram sobre quatro fontes: a contaminação por possíveis populações jovens em galáxias selecionadas, o modelo de síntese de população estelar, o modelo de história de formação estelar e, também, a metalicidade estelar.

Podemos resumir, então, os problemas dos CC em falta de dados e grandes incertezas. O primeiro pode ser resolvido com *surveys* dedicadas a buscar galáxias passivas e com melhorias nas formas de seleção de candidatos a cronômetros cósmicos. Como essas soluções não se mostram possíveis a curto prazo, uma alternativa é realizar uma análise estatística das incertezas a fim de verificar se é possível melhorar suas estimações.

Por meio de um teste de χ^2, nota-se uma possível superestimação das incertezas. Com essa motivação, inserimos um fator de correção multiplicativo f nas incertezas dos dados, deixando-o como parâmetro livre. Ajustando esse novo modelo aos dados, espera-se determinar um valor para f de modo a determinar se uma correção de fato é necessária (Jesus et al., 2018; Kvint; Jesus; Pereira, 2025).

Os próximos capítulos foram organizados como se segue. No capítulo 2 é feita uma breve revisão do modelo ΛCDM, deduzindo as equações de Friedmann na seção 2.1 e construindo o

modelo de fato na seção 2.2. O capítulo 3 é reservado para desenvolver o ferramental estatístico necessário para realizar as análises de dados, com as seções de 3.1 a 3.4 voltadas à estimação de parâmetros por meio do teorema de Bayes, e a seção 3.5 dedicada ao método de Monte Carlo via cadeias de Markov. No capítulo 4, é apresentado o método dos cronômetros cósmicos, com a seção 4.1 mostrando como $H(z)$ é obtido a partir desses dados, e a seção 4.2 introduz as principais fontes de erros sistemáticos, para, na seção 4.3, motivar a correção nas incertezas devido a uma superestimação. No capítulo 5, passamos para o método de correção, com a seção 5.1 apresentando-o, seguida por testes de validação na seção 5.2, com o capítulo sendo finalizado com a aplicação do método nos dados de cronômetros cósmicos na seção 5.3 e uma breve comparação com outros resultados na seção 5.4. Finalmente, no capítulo 6, compilamos os resultados obtidos e são feitos os comentários finais.

2 O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

Poucos anos após a publicação da Teoria da Relatividade Geral, Albert Einstein propôs um primeiro modelo cosmológico: um universo estático e com uma distribuição uniforme de matéria (Einstein, 1917; O'Raifeartaigh et al., 2017). Foi durante a construção deste modelo que ele introduziu sua famosa constante cosmológica Λ, que dá nome ao modelo atual. Porém, em 1929, Edwin Hubble divulga sua grande descoberta: a distância até uma galáxia é proporcional à sua velocidade radial (Hubble, 1929). Poucos anos antes, em 1927, Georges Lemaître havia publicado um estudo em que não só previa a relação entre distância e velocidade como também estimava seu valor com os dados disponíveis na época (Lemaître, 1927). Devido a isso, a expressão matemática que relaciona a taxa de expansão com a distância e velocidade leva o nome de lei de Hubble-Lemaître, como sugere a União Astronômica Internacional depois de uma votação em 2018. Após a publicação de Hubble em 1929, estudos que tratavam de um Universo em expansão publicados alguns anos antes por Alexander Friedmann (e o próprio estudo de Lemaître) começaram a ganhar atenção (Friedmann, 1922; Friedmann, 1924). Esses modelos baseiam-se no princípio cosmológico, que supõe um Universo homogêneo e isotrópico em larga escala. Foi então que, também de forma independente, Howard Robertson e Arthur Walker concluíram haver somente uma métrica capaz de criar um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão (Robertson, 1935; Walker, 1937). Essa é a métrica fundamental do Modelo Cosmológico Padrão e é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ou, simplesmente, métrica FLRW (para uma revisão histórica mais completa, ver Longair (2006)).

2.1 AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Para chegar às equações fundamentais da cosmologia moderna, devemos assumir o princípio cosmológico: o Universo deve ser homogêneo, ou seja, o conteúdo é o mesmo independente da região observada; e deve ser isotrópico, ou seja, observações são as mesmas, independente da direção observada (Weinberg, 2008).

Finalmente, iniciamos a dedução das equações de Friedmann partindo da definição da métrica FLRW em coordenadas esféricas, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2\right]. \tag{2.1}$$

O termo $a(t)$, chamado fator de escala, contém a informação de como distâncias se alteram ao longo da história do Universo. Já o termo k, a constante de curvatura, carrega a informação sobre a geometria do Universo: se é esférico, plano ou hiperbólico. Essa constante pode assumir os

valores

$$k = \begin{cases} -1, & \text{Universo hiperbólico} \\ 0, & \text{Universo plano} \\ +1, & \text{Universo esférico} \end{cases} . \tag{2.2}$$

Como demonstrado por Robertson e Walker, a métrica FLRW é a única capaz de descrever um Universo homogêneo e isotrópico. Assim, vemos que o princípio cosmológico simplifica muito a descrição do Universo em sua totalidade, basta conhecermos o valor de k e a função $a(t)$ para conseguirmos reconstruir a evolução do Universo. Atualmente, dados observacionais reforçam essa suposição (inicialmente tomada como um postulado) indicando que, em escalas suficientemente grandes, o Universo é homogêneo (Yadav et al., 2005; Hogg et al., 2005; Sarkar et al., 2009).

Tomando a Relatividade Geral como formulação da gravidade, podemos aplicar as equações de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

para a métrica FLRW. Para isso, precisaremos, primeiro, determinar o tensor e escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ e R, respectivamente, e o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$.

2.1.1 O tensor e escalar de Ricci

O tensor de Ricci é definido como uma contração do tensor de Riemann $R^{\alpha}{}_{\mu\rho\nu}$,

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\rho\nu} g_{\alpha\rho}, \tag{2.4}$$

que, por sua vez, pode ser definido como

$$R^{\alpha}{}_{\mu\rho\nu} g_{\alpha\rho} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}. \tag{2.5}$$

Juntando a (2.4) com a (2.5) e separando a componente temporal das espaciais, temos

$$R_{00} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{00} - \partial_0 \Gamma^\rho_{\rho 0} + \Gamma^\rho_{00}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\rho} \tag{2.6}$$

$$R_{ij} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{ij} - \partial_j \Gamma^\rho_{\rho i} + \Gamma^\rho_{ij}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{j\rho} \tag{2.7}$$

Os símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ são definidos como

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right). \tag{2.8}$$

Utilizando essas definições em conjunto com a métrica FLRW, obtemos que

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{2.9}$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + 2\dot{a}\tilde{g}_{ij} + \ddot{a}a\tilde{g}_{ij} \tag{2.10}$$

$$R_{i0} = 0 \tag{2.11}$$

$$R_{ij} = \tilde{g}_{ij}(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k), \tag{2.12}$$

com $\tilde{g}_{ij}$ sendo dado por

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{bmatrix} (1-kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Com o tensor de Ricci em mãos, podemos calcular o escalar de Ricci. Para isso, basta fazer a contração dos dois índices do tensor de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \tag{2.14}$$

2.1.2 O tensor energia-momento e as equações de Friedmann

O próximo ingrediente que precisamos é o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Ele é definido por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{2.15}$$

em que ρ representa a densidade total, p, a pressão total e

$$U_\mu = (-1, 0, 0, 0). \tag{2.16}$$

As contribuições consideradas para a densidade e pressão totais são devido à radiação (ρ_r e p_r) e matéria bariônica e escura (ρ_m e p_m) somente, de modo que

$$\rho = \rho_r + \rho_m \tag{2.17}$$

$$p = p_r + p_m. \tag{2.18}$$

Calculando então as componentes de $T_{\mu\nu}$, temos

$$T_{00} = \rho \tag{2.19}$$

$$T_{i0} = 0 \tag{2.20}$$

$$T_{ij} = pg_{ij}. \tag{2.21}$$

Voltando, agora, para a equação (2.3) e substituindo os resultados considerando somente a componente temporal, temos

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + g_{00}\Lambda = 8\pi G T_{00}$$
$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}\right) - \frac{k}{a^2}. \tag{2.22}$$

Podemos, ainda, definir um novo termo de densidade ρ_Λ como

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{2.23}$$

e adicioná-lo ao termo já existente de densidade para redefinir a densidade total como

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda. \tag{2.24}$$

Com essa mudança, obtemos

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}. \tag{2.25}$$

Resultando na primeira das duas equações de Friedmann.

Para obter a segunda, consideramos a parte espacial da equação (2.3):

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R + g_{ij}\Lambda = \frac{8\pi G}{3}T_{ij}, \tag{2.26}$$

resultando em

$$-\frac{\ddot{a}}{a^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = 4\pi G\left(p - \frac{\Lambda}{8\pi G}\right). \tag{2.27}$$

Podemos redefinir aqui a pressão total para incluir a contribuição da constante cosmológica definindo um termo p_Λ como

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{2.28}$$

de modo que

$$p = p_r + p_m + p_\Lambda. \tag{2.29}$$

Fazendo essa substituição e usando o resultado em (2.25), chegamos a

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)) \tag{2.30}$$

Também conhecida como equação da desaceleração, esse resultado é a segunda equação das chamadas equações de Friedmann.

Podemos obter ainda uma terceira equação a partir das duas já obtidas. Multiplicando a

(2.25) por a^2 e então derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho\right). \tag{2.31}$$

Usando, agora, a (2.30), obtemos a equação de continuidade:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{2.32}$$

Considerando uma equação de estado da forma $p = w\rho$, com w sendo uma constante definida pelo tipo de fonte de energia, podemos resolver a equação (2.32) para obter ρ em função de a. Assim, a evolução da componente ρ_i da densidade de energia evolui como

$$\rho_i = \rho_{i,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}, \tag{2.33}$$

com $\rho_{i,0}$ sendo a densidade atual da componente i, e a_0 sendo o fator de escala $a(t)$ calculado no instante t_0 atual.

Os valores de w para cada componente é

$$w = \begin{cases} 0, & \text{para matéria não-relativística} \\ \frac{1}{3}, & \text{para radiação} \\ -1, & \text{para a constante } \Lambda. \end{cases} \tag{2.34}$$

Como resultado, temos que $\rho_m \propto a^{-3}$, $\rho_r \propto a^{-4}$, e ρ_Λ é constante.

2.1.3 Os parâmetros de densidade

Definindo o parâmetro de Hubble H como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{2.35}$$

podemos reescrever a equação (2.25) de outra forma:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}. \tag{2.36}$$

Essa versão da equação de Friedmann, como será visto adiante, é mais útil já que a grandeza que conseguimos medir é justamente o parâmetro de Hubble, não o fator de escala.

Um questionamento interessante pode ser feito sobre valor da densidade de energia total ρ: qual deve ser seu valor para termos um Universo plano? Isso pode ser facilmente respondido resolvendo a equação (2.36) para ρ com $k = 0$. Esse resultado é chamado de densidade crítica

ρ_{crit}:

$$\rho_{crit}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \tag{2.37}$$

Sendo assim, a densidade crítica torna-se um valor comparativo para determinar a geometria do Universo. Dado um instante t da história, haverá uma densidade crítica especificada por (2.37). Caso a densidade total $\rho(t)$ dessa época seja maior, menor ou igual à ρ_{crit}, a geometria será esférica, hiperbólica ou plana, respectivamente.

É conveniente usar a densidade crítica $\rho_{crit,0}$ do instante t_0 atual,

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H^2(t_0)}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \tag{2.38}$$

para reescrever a equação (2.36) em termos de parâmetros adimensionais. Separando a densidade total em suas diversas contribuições e usando o resultado em (2.33), temos

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}(\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \\ H^2(t) &= H_0^2 \left[\Omega_r a^{-4}(t) + \Omega_m a^{-3}(t) + \Omega_k a^{-2}(t) + \Omega_\Lambda\right], \end{aligned} \tag{2.39}$$

em que se tomou $a_0 = 1$ e definiu-se

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{crit,0}} \quad \text{e} \tag{2.40}$$

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H_0^2}. \tag{2.41}$$

Ao resolver a equação (2.39) em $t = t_0$, obtém-se a seguinte restrição:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1. \tag{2.42}$$

2.1.4 O *redshift* cosmológico

O desvio para o vermelho, comumente chamado de *redshift*, é uma alteração que ocorre na frequência da luz devido à perda de energia dos fótons. Há três formas desse fenômeno ocorrer: efeito Doppler simples, quando há movimento relativo entre a fonte emissora e o observador; efeito de um potencial gravitacional; ou então devido à expansão do Universo que, em outras palavras, acaba gerando um movimento relativo entre a fonte e o observador.

A luz é a fonte de toda informação observacional astronômica. Sendo assim, é essencial que conheçamos o quão desviada a frequência de uma fonte está para podermos analisá-la corretamente. Com esse objetivo, definiu-se o *redshift* z como

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \tag{2.43}$$

que pode ser reescrito em função do fator de escala

$$\frac{a(t_e)}{a(t_o)} = \frac{1}{1+z}, \tag{2.44}$$

que, para a normalização $a(t_o) = 1$ e para um instante t qualquer, reduz-se a

$$a(t) = \frac{1}{1+z}. \tag{2.45}$$

Com essa relação em mãos, podemos retornar para a equação (2.39) e reescrevê-la como uma função do *redshift* z:

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}. \tag{2.46}$$

A expressão dada por (2.46) nos fornece a possibilidade de extrair informações sobre a evolução do Universo a partir de dados astronômicos e, desses dados, determinar o valor dos parâmetros de densidade e da constante de Hubble.

2.2 O MODELO ΛCDM

Faremos agora uma breve revisão do Modelo Padrão ΛCDM, passando pelas principais evidências que o sustentam para, na próxima seção, revisitar seus principais problemas.

Como já mencionado antes, algumas suposições são necessárias para a construção do modelo. Algumas das mais essenciais são o princípio cosmológico e o conteúdo de energia existente. Atualmente temos três componentes:

- Matéria relativística (radiação): constituída de fótons e neutrinos, essa componente foi predominante no Universo primordial, contribuindo mais significativamente que as outras duas (Ryden, 2016). No cenário atual, no entanto, sua densidade é muito menor que qualquer outra, tornando-a desprezível.

- Matéria não-relativística: divide-se em bariônica e escura, sendo responsáveis pela formação de estruturas. A matéria escura (CDM, do inglês *Cold Dark Matter*) é de grande importância para o modelo por ser fundamental na formação de estruturas em grande escala (Peebles, 1982; Blumenthal et al., 1984; Popolo, 2007). Um primeiro indício de sua existência foi a análise das massas de galáxias por Fritz Zwicky (Zwicky, 1933; Zwicky, 1937) que, décadas depois, foi corroborado por observações de rotação de galáxias feitas por Vera Rubin (Rubin; Ford Jr.; Thonnard, 1980).

- Energia escura: uma forma desconhecida de energia que é responsável pela atual expansão acelerada do Universo. Sua densidade é constante ao longo de toda a história. É implementada no modelo por meio da constante cosmológica Λ.

A força do modelo ΛCDM está na simplicidade. Com poucas suposições foi capaz não só de fornecer explicação para fenômenos observados como também foi capaz de realizar previsões. Dentre as diversas evidências que o sustentam, as mais relevantes são a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB, do inglês *Cosmic Microwave Background*), a expansão acelerada, as estruturas em larga escala (Bernardeau et al., 2002) e a abundância de elementos leves (Cyburt et al., 2016).

A radiação cósmica de fundo é um sinal na região de micro-ondas que permeia todo o espaço, sendo detectado independente da direção observada. Foi prevista teoricamente por Ralph Alpher, Robert Herman e George Gamow (Alpher; Herman, 1948; Gamow, 1948) e detectada por Arno Penzias e Robert Wilson (Penzias; Wilson, 1965; Dicke et al., 1965). É uma das evidências que consolidou o modelo do *Hot Big Bang*, que prevê um Universo quente e denso no passado. Devido à grande uniformidade da CMB, mesmo ao medir em duas direções opostas, espera-se que essas regiões estivessem em contato no passado e, com o tempo, foram distanciando-se, indicando uma expansão.

Descoberta por meio de supernovas do tipo Ia (SNe Ia) (Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999), a expansão acelerada do Universo foi facilmente inserida no modelo por meio da já existente constante cosmológica. Embora a natureza de sua causa seja desconhecida, é comumente atribuída à energia do vácuo ou a algum tipo ainda desconhecido de energia (energia escura).

Outra informação obtida por meio de observações introduzida no modelo é a geometria do Universo. Dados observacionais indicam uma geometria plana (Bernardis et al., 2000; Efstathiou; Gratton, 2020; Aghanim et al., 2020) e, portanto, na equação em (2.46) toma-se $\Omega_k = 0$.

Ao longo deste trabalho, serão usados dois modelos: o modelo padrão (ΛCDM plano) e o modelo ΛCDM com curvatura (OΛCDM). Em ambos os modelos desconsideraremos a contribuição da radiação, com a distinção entre os modelos sendo a presença ou não do termo de curvatura Ω_k na equação (2.46). Matematicamente, então, o modelo plano é

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}, \tag{2.47}$$

que, com a relação em (2.42) para $\Omega_r = \Omega_k = 0$, torna-se

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 - \Omega_m + 1}. \tag{2.48}$$

Já para o modelo com curvatura, temos

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}, \tag{2.49}$$

que, novamente, por meio da relação em (2.42) para $\Omega_r = 0$, adquire a forma

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}. \tag{2.50}$$

2.2.1 Problemas do modelo ΛCDM

Como todo modelo físico não passa de uma mera aproximação da realidade, espera-se que todos eles (ou, pelo menos, a grande maioria) eventualmente falhem em explicar novos fenômenos. Com o modelo cosmológico padrão não foi diferente. Dentre seus problemas mais antigos, estão os problemas da constante cosmológica e o da coincidência.

Resumidamente, o problema da constante cosmológica diz respeito à discrepância entre os valores observado e teórico para a energia do vácuo, cuja diferença é de 60 ordens de grandeza (Zel'dovich, 1968; Weinberg, 1989; Waga, 2000; Solà, 2013; Burgess, 2015; Lima; Basilakos; Solà, 2013; Perivolaropoulos; Skara, 2022; Martin, 2012). Já o problema da coincidência está relacionado com as densidades de matéria e energia escura tendo valores próximos na época atual, embora tenham propriedades de evolução distintas (Steinhardt, 1997; Zlatev; Wang; Steinhardt, 1999; Perico et al., 2013; Perivolaropoulos; Skara, 2022; Velten; Marttens; Zimdahl, 2014).

Mais recentemente, grandes problemas observacionais têm se intensificado. As chamadas tensões cosmológicas referem-se à discrepância dos dados cosmológicos e astrofísicos obtidos com os resultados do experimento Planck CMB (Aghanim et al., 2020), que assume a validade do modelo ΛCDM. Em outras palavras, diversos dados observacionais estão em conflito com o modelo padrão. Para uma revisão sobre as principais tensões, ver Perivolaropoulos & Skara (2022), Valentino et al. (2021a), Abdalla et al. (2022). Dentre as atuais tensões, a que mais se destaca é a tensão de Hubble: uma divergência no valor da constante de Hubble H_0 medida em altos e baixos *redshifts*.

Medidas a altos *redshifts* implicam no uso de objetos de um Universo jovem. Devido a isso, esses métodos apresentam alta dependência de uma série de suposições relacionadas à evolução do Universo. No meio dessas suposições, está justamente aceitar o modelo ΛCDM plano como adequado para descrever essa época. Portanto, uma das possíveis explicações para desacordos com essas medições é alguma falha no modelo cosmológico padrão. Em geral, os resultados obtidos por esses métodos tendem a apontar valores mais baixos para a constante de Hubble, com um dos mais notáveis sendo o resultado $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km s^{-1} Mpc^{-1} do experimento Planck (Aghanim et al., 2020) baseado em observações de anisotropias na CMB.

Já as medidas em baixos *redshifts* são, logicamente, o contrário: baseiam-se em objetos de um Universo mais recente. Diferentemente do caso anterior, esses métodos não dependem de suposições acerca do modelo cosmológico, mas podem depender, eventualmente, de modelos astrofísicos. O método da escada de distâncias cósmicas é bastante utilizado nessa categoria. Ele consiste em utilizar diferentes métodos de medição de distância sucessivamente, com um método sendo usado para calibrar o próximo. Isso possibilita a medição de distâncias cada vez maiores. Finalmente, por meio da relação entre distância e *redshift* estima-se o valor da constante de Hubble. Um resultado notável pertencente a essa categoria é $H_0 = 73.04 \pm 1.04$ km s^{-1} Mpc^{-1} (Riess et al., 2022), obtido por meio de SNe Ia calibradas por cefeidas pelo SH0ES.

Considerando as duas medidas citadas anteriormente, a tensão está por volta de 5σ. Porém,

esse valor pode ser superado dependendo da combinação de dados locais usada (Wong et al., 2019; Valentino, 2021). A figura Figura 1 mostra os valores de H_0 para diversos métodos de medição, evidenciando a tendência geral: valores mais baixos para métodos usando o Universo jovem (representado na figura por *early*), enquanto os métodos tardios (na figura, *late*), tendem a valores mais altos. Também torna-se notável a incompatibilidade entre diversas medidas, com várias barras de erro não estando no alcance de alguns resultados.

Esses resultados evidenciam a crise que afeta o atual modelo cosmológico. Há muitas propostas de modificações nas suposições sobre o Universo jovem, uma das categorias são modelos alternativos (ou modificações) ao modelo ΛCDM. É importante, então, que tenhamos boas maneiras para distinguir os modelos promissores diante de todas as possibilidades.

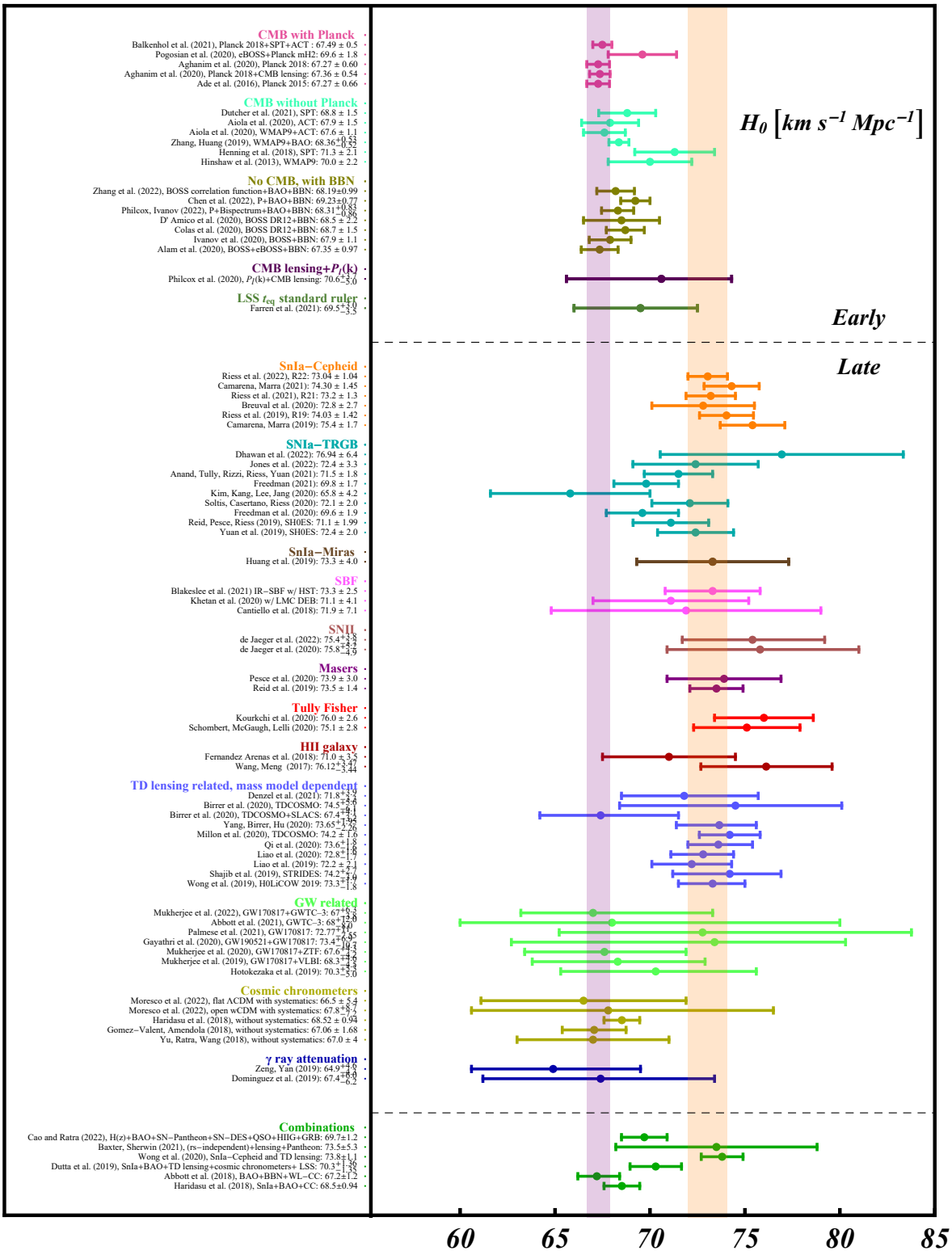

Figura 1 – Valores da constante de Hubble H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1} obtidos por diferentes métodos com nível de confiança de 68%. A barra vertical laranja representa a medida obtida pelo SH0ES, e a barra vertical roxa representa a medida obtida pelo Planck. Gráfico retirado de (Perivolaropoulos; Skara, 2022).

3 ESTATÍSTICA BAYESIANA

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento do ferramental estatístico utilizados nas análises de dados. Essas ferramentas são essenciais para conectarmos os dados observacionais coletados com as teorias físicas que conhecemos. O objetivo central deste capítulo é mostrar como o teorema de Bayes nos permite obter informações de um modelo matemático a partir dos dados e, como a partir disso, podemos estimar os valores mais prováveis para seus parâmetros.

3.1 O TEOREMA DE BAYES

O físico Richard Cox, em 1946, derivou as regras da teoria de probabilidade utilizando lógica booleana a partir de axiomas básicos (Cox, 1946a; Cox, 1946b). Primeiro, ele define probabilidade como sendo quanto acredita-se que determinada proposição seja verdadeira. A partir disso, ele conclui que probabilidades devem possuir propriedade transitiva, isto é, se a probabilidade de A é maior que a de B, e a de B é maior que a de C, então a probabilidade de A deve ser maior que a de C. Em seguida, ele conclui que a maneira mais fácil de garantir que probabilidades tenham essa propriedade é se elas forem associadas a números reais. Desse modo, podemos associar o valor 1 à certeza de que uma proposição é válida, e o número 0 à certeza de que ela é falsa, fazendo com que a probabilidade de uma proposição sempre seja um número entre 0 e 1.

Cox, então, percebe que ao especificarmos quanto cremos que determinada proposição é verdadeira, implicitamente especificamos também quanto *não* cremos que ela seja verdadeira. Disso, e usando o ferramental da lógica booleana, ele formula que

$$\mathcal{P}(X) + \mathcal{P}(\bar{X}) = 1, \tag{3.1}$$

em que $\mathcal{P}(X)$ é a probabilidade da proposição X ser verdadeira, e $\mathcal{P}(\bar{X})$ é a probabilidade de X ser falsa. Essa relação é conhecida como a regra da soma que, essencialmente, diz que temos certeza que a proposição X ou é verdadeira ou é falsa.

Seguindo essa lógica, ao especificarmos a probabilidade de uma proposição Y e também especificarmos a probabilidade de uma proposição X dado que Y é verdadeira, implicitamente especificamos a probabilidade de que ambos X e Y sejam verdadeiras. Novamente, usando a lógica booleana, Cox formula a relação

$$\mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(X|Y) \cdot \mathcal{P}(Y), \tag{3.2}$$

em que $\mathcal{P}(X, Y)$ é a probabilidade de ambas X e Y serem verdadeiras, $\mathcal{P}(X|Y)$ é a probabilidade de X ser verdadeira dado que Y é verdadeira. Essa é a chamada regra do produto.

Dessas duas regras, podemos deduzir outras relações muito úteis. Por exemplo, partindo da regra do produto, podemos dizer que

$$\mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(X|Y) \cdot \mathcal{P}(Y) \tag{3.3}$$

$$\mathcal{P}(Y, X) = \mathcal{P}(Y|X) \cdot \mathcal{P}(X). \tag{3.4}$$

Obviamente, a probabilidade de X e Y serem verdadeiras é a mesma que a probabilidade de Y e X serem verdadeiras, ou seja, $\mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(Y, X)$. Assim,

$$\mathcal{P}(X|Y) \cdot \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(Y|X) \cdot \mathcal{P}(X). \tag{3.5}$$

Isolando $\mathcal{P}(X|Y)$, chegamos ao teorema de Bayes, dado por

$$\mathcal{P}(X|Y) = \frac{\mathcal{P}(Y|X) \cdot \mathcal{P}(X)}{\mathcal{P}(Y)}. \tag{3.6}$$

Os termos nessa expressão possuem nomes e interpretações específicas.

- $\mathcal{P}(X|Y)$ recebe o nome *posterior* e representa a probabilidade de X ser verdadeira dado que Y é verdadeira.
- $\mathcal{P}(Y|X)$ recebe o nome de *verossimilhança* (ou em inglês, como é mais conhecida, *likelihood*) e representa a probabilidade de Y ser verdadeira dado que X é verdadeira.
- $\mathcal{P}(X)$ é chamado *prior* e representa a probabilidade de X ser verdadeira antes de observarmos Y, em outras palavras, representa todo o conhecimento prévio sobre X.
- $\mathcal{P}(Y)$ recebe o nome de *evidência* e representa a probabilidade de Y ser verdadeira. Muitas vezes este termo é ignorado, pois é constante em relação a X, sendo apenas uma fator de normalização.

A grande vantagem do teorema de Bayes é possibilitar que troquemos as probabilidades condicionais, isto é, nos permite relacionar $\mathcal{P}(X|Y)$ com $\mathcal{P}(Y|X)$. No contexto de análise de dados, a utilidade torna-se evidente quando X é um modelo e Y é um conjunto de dados. Nesse caso, nosso objetivo seria determinar a probabilidade (*posterior*) de um modelo X ser verdadeiro dado que certo conjunto de dados Y foi observado. Fazemos isso utilizando o *prior* e a *likelihood*, que nada mais é do que a probabilidade de observarmos aquele conjunto de dados se assumirmos o modelo X. De forma simplista, usamos a *likelihood* para atualizar o *prior* conforme novos dados são observados.

Podemos obter uma segunda expressão bastante útil partindo da regra da soma. Podemos escrevê-la de outra maneira. Seja X e Y duas proposições quaisquer, então

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X, Y) + \mathcal{P}(X, \bar{Y}). \tag{3.7}$$

A equação (3.7) acima admite apenas o caso em que há duas possibilidades para Y. Podemos generalizar facilmente para qualquer número de possibilidades por meio da expressão

$$\mathcal{P}(X) = \sum_i \mathcal{P}(X, Y_i). \tag{3.8}$$

Podemos substituir o termo $\mathcal{P}(X, Y_i)$ usando a regra do produto, obtendo

$$\mathcal{P}(X) = \sum_i \mathcal{P}(Y_i|X) \cdot \mathcal{P}(X) \Rightarrow \sum_i \mathcal{P}(Y_i|X) = 1. \tag{3.9}$$

O resultado em (3.9) é a chamada condição de normalização. Para que ela seja válida, é necessário que o conjunto de possibilidades $\{Y_i\}$ seja exaustivo, isto é, contém todas as possibilidades possíveis para Y, e exclusivo, os elementos do conjunto são mutuamente excludentes.

Até agora, lidamos apenas para o caso de possibilidades discretas. Para generalizar para o caso contínuo, basta promover a soma para uma integral:

$$\mathcal{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(X, Y)\mathrm{d}Y. \tag{3.10}$$

A expressão (3.10) é conhecida como marginalização sobre Y. No contexto de análise de dados, ela é útil para eliminar a dependência de parâmetros que não são de interesse, os chamados parâmetros de *nuisance* (ou parâmetros de ruído). Vale reiterar que a marginalização é válida apenas se a condição de normalização for satisfeita.

3.2 ESTIMAÇÃO DE UM PARÂMETRO

Como mencionado anteriormente, o teorema de Bayes nos dá uma relação entre duas probabilidades condicionais. No contexto de análise de dados, essa vantagem é evidenciada ao tratarmos nossas proposições como sendo modelos e dados. Dessa forma, conseguimos usar estatística bayesiana para extrair informações sobre um modelo a partir dos dados. Mais especificamente, podemos obter os valores para os parâmetros de um modelo que são mais prováveis de gerar os dados observados.

Considere um modelo X que depende de um único parâmetro θ. Considere também que temos um conjunto de dados Y. Nosso objetivo é usar o teorema de Bayes para obter o melhor valor para θ , isto é, qual é seu valor mais provável dado Y. Como a posterior é uma distribuição de probabilidades, ela nos informa a probabilidade de cada valor de θ ser o valor correto. Sendo assim, se buscamos o valor mais provável, estamos interessados no valor de θ que maximiza a posterior, ou seja,

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta_0} = 0 \tag{3.11}$$

em que a distribuição posterior é $P = \mathcal{P}(\theta|Y)$, e θ_0 é o valor de θ que maximiza a posterior.

Além da condição da primeira derivada, que garante um extremo da função, precisamos também verificar a segunda derivada para garantir que o extremo seja um máximo. Logo, precisamos que

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_0} < 0. \tag{3.12}$$

Tratando-se de uma dentre várias possibilidades, o valor θ_0, por si só, não é tão útil como resultado. Junto ao melhor valor, precisamos também de alguma medida de sua confiança. Sendo θ_0 o valor que resulta no pico da posterior, uma forma de medir sua confiabilidade é quantificando a largura da posterior, de modo que quanto mais estreita for, mais confiável é o valor obtido. Podemos obter uma expressão para isso por meio da expansão da posterior em série de Taylor. Devido ao seu formato, é mais fácil trabalhar com o logaritmo da posterior, que definimos como $L(\theta) = \ln[P(\theta|Y)]$. Assim, expandindo em torno de θ_0, temos

$$L(\theta) = L(\theta_0) + \left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta_0} (\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 + \cdots . \tag{3.13}$$

Usando a regra da cadeia na definição de $L(\theta)$, nota-se que o termo de primeira ordem é nulo devido à condição de extremo da primeira derivada. O termo de ordem zero é uma constante, ou seja, não possui influência na forma da distribuição posterior. Assim, desconsiderando os termos de ordem maior que dois, podemos dizer que

$$L(\theta) \propto \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_0} (\theta - \theta_0)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\theta|Y) \approx A \cdot \exp\left[\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_0} (\theta - \theta_0)^2\right], \tag{3.14}$$

em que A é uma constante de normalização.

O resultado obtido na expressão (3.14) significa que podemos aproximar a forma da distribuição posterior por uma distribuição gaussiana, cuja forma é dada por

$$\mathcal{P}(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right], \tag{3.15}$$

em que μ é o valor médio (pico da distribuição) e σ é o desvio padrão, que é uma medida de sua largura. Comparando com a expressão (3.14), podemos identificar que

$$\mu = \theta_0 \quad \text{e} \quad \sigma = \left(-\left.\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_0}\right)^{-1/2}. \tag{3.16}$$

Com isso, conseguimos definir uma medida para a confiança do valor θ_0, sendo este dado por σ. Finalmente, podemos expressar o resultado final da estimação do parâmetro θ dada a observação

dos dados Y como $\theta = \theta_0 \pm \sigma$.

3.3 ESTIMAÇÃO DE MÚLTIPLOS PARÂMETROS

Em essência, a estimação de uma posterior multivariada, isto é, dependente de mais de um parâmetro, é análoga à estimação de uma posterior univariada. O processo é o mesmo: minimizar o χ^2 a fim de maximizar a posterior e determinar os valores mais prováveis para os parâmetros. A principal diferença no caso multivariado é que, como serão obtidas distribuições de probabilidade para cada parâmetro, precisamos também determinar a correlação entre os parâmetros, ou seja, como a variação de um parâmetro influencia a variação do outro.

3.3.1 O caso bivariado

Inicialmente, trataremos do caso com apenas dois parâmetros, a generalização para múltiplos parâmetros será direta após isso. Então, sejam α e β os dois parâmetros de interesse, sabemos que a condição

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0\right|_{\alpha_0,\beta_0} \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0\right|_{\alpha_0,\beta_0}, \tag{3.17}$$

em que α_0 e β_0 são os valores de α e β que maximizam a posterior, e $L(\alpha,\beta) = \ln[\mathcal{P}(\alpha,\beta|Y)]$, com Y sendo o conjunto de dados. Expandindo $L(\alpha,\beta)$ em série de Taylor em torno de (α_0,β_0), temos

$$L(\alpha,\beta) = L(\alpha_0,\beta_0) + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0}(\alpha-\alpha_0)^2 + \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0}(\beta-\beta_0)^2 + \right.$$
$$\left. +2\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0}(\alpha-\alpha_0)(\beta-\beta_0)\right], \tag{3.18}$$

em que já desconsideramos os termos de primeira ordem e de ordens maiores que dois.

Como pode ser visto na expressão (3.18), a expansão de Taylor de $L(\alpha,\beta)$ torna-se cada vez maior conforme o número de parâmetros aumenta. Por este motivo, é muito útil utilizarmos a notação matricial para lidar com o caso multivariado. Então, reescrevendo a expressão (3.18), temos (Sivia; Skilling, 2006)

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0]^T \mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0}[\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0], \tag{3.19}$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha,\beta)$ é o vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\theta}_0 = (\alpha_0,\beta_0)$ é o vetor de parâmetros que maximiza a posterior, e $\mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0}$ é a matriz hessiana de $L(\boldsymbol{\theta})$ avaliada em $\boldsymbol{\theta}_0$, que é dada por

$$\mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

em que

$$A = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0} \quad \text{e} \quad C = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0}.$$

Para o caso multivariado, além de obtermos a posterior de cada parâmetro, obtemos também as distribuições conjuntas dos parâmetros. Essa distribuição é representada por uma elipse no plano $\alpha - \beta$ centrada no ponto (α_0, β_0) cujas características (excentricidade, orientação etc) são determinadas pela matriz hessiana. Mais especificamente, se $\mathbf{e} = (e_x, e_y)$ é o vetor que define a direção dos eixos da elipse, então ele deve satisfazer uma equação de autovalores dada por

$$\mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}, \tag{3.21}$$

em que os autovalores λ são inversamente proporcionais à largura de cada eixo da elipse. Além disso, como o ponto (α_0, β_0) é um ponto de máximo, os autovalores necessariamente serão negativos, implicando que $A < 0$, $B < 0$ e $AB > C^2$ (Sivia; Skilling, 2006).

Encontrado o ponto de máximo da posterior, precisamos medir, agora, a confiabilidade deste resultado. Para isso, precisamos determinar a largura da posterior para cada um dos parâmetros. Como a posterior é multivariada, para determinar a largura referente a cada parâmetro, precisamos marginalizar sobre os outros. No caso, se estivermos interessados em determinar a confiabilidade do parâmetro α, precisamos marginalizar sobre β. Logo,

$$\mathcal{P}(\alpha|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(\alpha, \beta|Y)\mathrm{d}\beta. \tag{3.22}$$

Considerando a aproximação gaussiana para a posterior, a integral resulta em (Sivia; Skilling, 2006)

$$\mathcal{P}(\alpha|Y) \propto \exp\left[\frac{1}{2}\frac{B}{AB - C^2}(\alpha - \alpha_0)^2\right]. \tag{3.23}$$

Comparando com a forma original da distribuição gaussiana em (3.15), podemos identificar σ_x como

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{-B}{AB - C^2}}. \tag{3.24}$$

Analogamente, podemos repetir o processo para o parâmetro β, obtendo

$$\sigma_\beta = \sqrt{\frac{-A}{AB - C^2}}. \tag{3.25}$$

Estes mesmos resultados poderiam ser obtidos através do cálculo da variância da posterior em relação a cada parâmetro pela expressão

$$\sigma_\alpha^2 = \langle(\alpha - \alpha_0)^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \alpha_0)^2 \mathcal{P}(\alpha, \beta|Y)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \tag{3.26}$$

Esta abordagem para o cálculo do desvio padrão é interessante quando queremos analisar a

correlação entre os parâmetros, isto é, como a variação de um influencia a variação do outro. Nesse caso, queremos calcular $\sigma_{\alpha\beta}$, que é dado por

$$\sigma_{\alpha\beta} = \langle(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)\mathcal{P}(\alpha, \beta|Y)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \tag{3.27}$$

A integral acima nos fornece um resultado semelhante às anteriores:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{C}{AB - C^2}. \tag{3.28}$$

Com os resultados de (3.24), (3.25) e (3.28), podemos resumi-los a uma matriz dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{AB - C^2}\begin{bmatrix} -B & C \\ C & -A \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Essa matriz recebe o nome de matriz de covariância, sendo não só uma medida da confiabilidade das estimativas dos parâmetros, mas também de sua correlação. Notando que o termo mais à direita na expressão (3.29) é a inversa da matriz hessiana, podemos escrever a matriz de covariância como

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0})^{-1}. \tag{3.30}$$

3.3.2 O caso multivariado

Como mencionado no início desta seção, a generalização para o caso multivariado é imediata. Considere um modelo com M parâmetros contidos no vetor coluna $\boldsymbol{\theta}$ cujos valores de melhor estimação estão contidos no vetor coluna $\boldsymbol{\theta}_0$. Repetindo os processos anteriores, a condição da primeira derivada nos diz que

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\right|_{\boldsymbol{\theta}_0} = 0, \quad \text{para } \theta_i \in \{\theta_i\}. \tag{3.31}$$

Expandindo em série de Taylor, temos

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left.\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_i\partial\theta_j^2}\right|_{\boldsymbol{\theta}_0}(\theta_i - \theta_{0,i})(\theta_j - \theta_{0,j}) + \cdots. \tag{3.32}$$

Ignorando os termos de ordem maior que dois e reescrevendo em notação matricial, ficamos com

$$L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}_0) + \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0\right], \tag{3.33}$$

expressão idêntica àquela obtida em (3.19), mas com a suposição de um número arbitrário de parâmetros. Novamente, como o termo $L(\boldsymbol{\theta}_0)$ é constante, ele não influencia a forma da posterior.

Assim, podemos aproximar a posterior pela expressão

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}|Y) \propto \exp\left(\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{H}|_{\boldsymbol{\theta}_0}\left[\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0\right]\right). \tag{3.34}$$

Para que a equação (3.34) seja análoga a uma distribuição gaussiana multivariada, podemos usar a relação entre a matriz de covariância $\mathbf{C}$ e a matriz hessiana $\mathbf{H}$ dada por (3.30). Finalmente, temos que

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}|Y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}\left[\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}_0\right]\right). \tag{3.35}$$

Para finalizar, podemos integrar a expressão (3.35) e aplicar a condição de normalização a fim de obtermos a constante de normalização A. Fazendo isso, obtemos que (Sivia; Skilling, 2006)

$$A = (2\pi)^{-M/2}\det(\mathbf{C}^{-1})^{1/2}. \tag{3.36}$$

Assim, a forma final e mais geral da posterior é dada por

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}|Y) = (2\pi)^{-M/2}\det(\mathbf{C}^{-1})^{1/2}e^{-\chi^2/2}. \tag{3.37}$$

3.4 ESTIMANDO A POSTERIOR VIA *LIKELIHOOD*

As seções anteriores foram dedicadas a mostrar que é possível aproximar uma posterior com um número arbitrário de parâmetros por uma distribuição gaussiana. Como consequência disso, conseguimos obter estimativas para os valores dos parâmetros de um modelo e qual o nível de confiabilidade dessas estimativas. No entanto, o que temos em mãos para estimar a posterior é, usualmente, um conjunto de dados. Com esses dados, calculamos a *likelihood* e, usando o teorema de Bayes, estimamos a posterior.

Antes de tratarmos da *likelihood* em si, precisamos falar sobre o *prior*, que é um dos desafios da inferência bayesiana. Como já foi dito, ele serve para refletir o que nós sabemos sobre os parâmetros antes de observarmos os dados. Em outras palavras, ele é a distribuição de probabilidades dos possíveis valores dos parâmetros levando em consideração o que sabemos antes de olharmos para os dados. Um dos *priors* mais comuns é o uniforme (também chamado de plano), que associa a mesma probabilidade para todos os valores possíveis para os parâmetros. A escolha desse *prior* representa o maior grau de desconhecimento sobre os parâmetros, ou seja, é uma escolha neutra e conservadora. Uma forma de definir este *prior* é por meio de uma função do tipo (Sivia; Skilling, 2006; Gregory, 2005)

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_{\mathrm{max},i}-\theta_{\mathrm{min},i}}, & \text{se } \theta_{\mathrm{min},i} < \theta_i < \theta_{\mathrm{max},i} \quad \forall \quad i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{3.38}$$

em que $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{min}}$ e $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{max}}$ são vetores que contêm, respectivamente, os limites inferiores e superiores para cada parâmetro contido no vetor $\boldsymbol{\theta}$.

Apesar de ser a escolha mais conservadora e, aparentemente, segura, o *prior* uniforme nem sempre é a melhor opção. Dependendo da situação outro *prior* pode ser mais adequado, como, por exemplo, o *prior* de Jeffreys. Para os objetivos deste apêndice, a suposição de um *prior* uniforme é suficiente, para mais detalhes sobre a escolha do *prior*, consulte as referências Sivia & Skilling (2006), Gregory (2005) e Trotta (2008). Portanto, supondo um *prior* uniforme, pelo teorema de Bayes, temos que

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) \propto \mathcal{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}), \tag{3.39}$$

sendo $\mathbf{Y}$ o vetor do conjunto de dados. Considerando a aproximação da posterior dada por (3.35), a expressão (3.39) nos diz que

$$\mathcal{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}) \propto (2\pi)^{-N/2} \det(\mathbf{C}_{\text{dados}}^{-1})^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\theta})\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\text{dados}}^{-1}\left[\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\theta})\right]\right), \tag{3.40}$$

em que $\mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\theta})$ é o vetor dos dados previstos pelo modelo para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{C}_{\text{dados}}$ é, agora, a matriz de covariância dos dados, e N é a quantidade de dados.

O termo entre parênteses pode ser mais facilmente entendido se olharmos para o caso em que a matriz de covariância é diagonal, isto é, a covariância entre os dados é nula. Nesse cenário, podemos escrever que

$$\mathcal{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}) \propto \prod_i \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y_{0,i}(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_i}\right)^2\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{y_i - y_{0,i}(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_i}\right)^2\right], \tag{3.41}$$

em que y_i e $y_{0,i}$ são os i-ésimos elementos de $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}_0$ respectivamente, e σ_i é o desvio padrão do dado y_i. É importante notar que, aqui, foi considerado que as probabilidades $\mathcal{P}(y_i|\boldsymbol{\theta})$ são independentes, ou seja, que a medição de um dado não influencia a próxima medida. Para casos em que há correlação entre as medidas, deve-se usar a forma não-diagonal dada por (3.40). O somatório da equação (3.41) é a soma dos quadrados dos resíduos dos dados. Isso nos permite escrever a *likelihood* como

$$\mathcal{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}) \propto \exp\left(-\frac{\chi^2(\boldsymbol{\theta})}{2}\right), \tag{3.42}$$

em que

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_i \left(\frac{y_i - y_{0,i}}{\sigma_i}\right)^2. \tag{3.43}$$

Com este resultado, podemos voltar para a expressão (3.39). A multiplicação matricial nada mais é do que uma generalização do χ^2 dado por (3.43), ou seja, podemos escrever que

$$\mathcal{P}(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-N/2} \det(\mathbf{C}_{\text{dados}}^{-1})^{1/2} \exp\left(-\frac{\chi^2(\boldsymbol{\theta})}{2}\right), \tag{3.44}$$

em que

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \left[\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\theta})\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\text{dados}}^{-1}\left[\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_0(\boldsymbol{\theta})\right] \tag{3.45}$$

Sendo assim, podemos estimar a posterior calculando a *likelihood* por meio da estatística de χ^2. Desde que as medições dos dados sejam independentes entre si, para maximizar a posterior, basta maximizar a *likelihood* através da minimização do χ^2 dos dados.

3.4.1 A validade da *likelihood* gaussiana

Sobre a suposição de um *prior* plano, vimos que, como a posterior pode ser aproximada por uma gaussiana, a *likelihood* também pode. Porém, há um problema neste raciocínio. Como a *likelihood* diz respeito à distribuição dos dados, não podemos simplesmente aproximar seu formato e supor que é válido. Para que a *likelihood* possa ser aproximada por uma gaussiana, é necessário que os dados estejam associados a ruídos gaussianos.

A suposição de que os dados podem ser associados a ruídos gaussianos está fundamentada no Teorema Central do Limite. De forma resumida e simplificada, se as incertezas de nossas medições forem compostas por diferentes fontes de erros independentes entre si, a sobreposição dessas fontes tende a uma distribuição gaussiana (Hogg; Bovy; Lang, 2010; Jaynes, 2003).

Outra característica da distribuição gaussiana é ser a distribuição de maior entropia, que é uma consequência do Princípio de Máxima Entropia (Jaynes, 2003; Sivia; Skilling, 2006; Gregory, 2005). Ser a distribuição de maior entropia significa que é a distribuição que representa a menor quantidade de conhecimento sobre o objeto em questão. Em outras palavras, a distribuição gaussiana exige que façamos a menor quantidade de suposições possível, tornando-a a distribuição que representa o maior grau de desconhecimento.

A união dessas duas características suportam a aproximação gaussiana da *likelihood*. Como dito, nossas medições, usualmente, possuem diversas fontes de incertezas independentes. Além disso, associá-las a uma distribuição gaussiana exige menos suposições sobre os valores medidos. A aproximação gaussiana, então, torna-se válida e aceitável em uma vasta quantidade de situações diferentes.

Em resumo, temos três diferentes frentes que reforçam a validade da aproximação gaussiana: uma analítica, uma com bases experimentais, e uma relacionada ao nosso conhecimento e suposições. A primeira refere-se à aproximação da posterior que, sobre um *prior* uniforme, é proporcional à *likelihood*. A segunda, ao Teorema Central do Limite e aos procedimentos experimentais de medição e suas diversas fontes de incerteza. E a terceira diz respeito ao grau de conhecimento e quantidade de suposições necessárias para adotar a distribuição, estando fundamentada no Princípio de Máxima Entropia.

Concluímos, então, que a adoção de uma *likelihood* gaussiana e, portanto, com a forma dada por (3.39), é bem fundamentada e válida em muitas situações. É importante ressaltar, porém, que mesmo diante dessas diferentes validações, a aproximação por uma gaussiana não é universalmente adequada, isto é, existem casos que exigem outra forma para a distribuição, seja porque os dados estão associados a uma distribuição não-gaussiana ou porque a suposição de um *prior* plano não é válida. No caso tratado neste trabalho, a suposição é válida, principalmente,

por usar dados cujas incertezas são provenientes de diferentes fontes independentes (Moresco et al., 2022).

3.5 O MÉTODO DE MONTE CARLO VIA CADEIAS DE MARKOV

Nas seções anteriores vimos como usar o teorema de Bayes para estimar a distribuição posterior de um modelo a partir de um conjunto de dados. No entanto, a inferência bayesiana por si só, pode não ser suficiente para obter a posterior. Dependendo do número de parâmetros e da complexidade do modelo, buscar o ponto de máximo e a forma da posterior pode ser uma tarefa difícil. Uma das formas de contornar essa dificuldade é usando o método de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC, do inglês *Markov Chain Monte Carlo*).

3.5.1 O método de Monte Carlo

A forma mais intuitiva de buscar os parâmetros que maximizam a posterior (e, consequentemente, estimar sua forma) é por meio de tentativa e erro. Poderíamos criar uma grade de valores para os parâmetros, calcular a *likelihood* para cada ponto da grade, e, em conjunto com o *prior*, obter a posterior. Obteríamos os valores mais prováveis para os parâmetros a partir do ponto que resultasse no maior valor para a posterior e montaríamos sua forma a partir dos valores obtidos para cada ponto da grade. O problema surge quando o número de parâmetros do modelo é grande, pois isso aumentaria drasticamente a quantidade de pontos na grade.

O método de Monte Carlo surge para resolver o problema que a alta dimensionalidade de parâmetros traz. Ele consiste em sortear valores aleatórios para os parâmetros, calcular a *likelihood* para cada ponto sorteado, e, juntamente com o *prior*, obter a posterior. Como resultado, obtemos uma amostra representativa da posterior e, isto é, um conjunto de pontos que representam o padrão da posterior. É a partir dessa amostra que obtemos os valores mais prováveis para os parâmetros e também a forma da posterior. A grande vantagem em relação ao método da grade de pontos é que podemos obter uma amostra de qualquer posterior sem precisar calcular a *likelihood* para uma quantidade enorme de pontos. Isso o torna um método eficiente para realizar a amostragem da posterior mesmo para grande quantidades de parâmetros (Sivia; Skilling, 2006).

Apesar disso, o método de Monte Carlo ainda possui uma grande ineficiência. Como os pontos são sorteados aleatoriamente, muitos desses pontos estarão em regiões cujo valor da posterior é muito baixo e, portanto, não são regiões de interesse. Consequentemente, o custo computacional para obter a amostra representativa será maior. Somado a isso, como muitos pontos estarão em regiões de baixo valor, a amostra obtida não representará a posterior e os resultados obtidos a partir dela terão um alto nível de incerteza (Press et al., 2007; MacKay, 2003).

3.5.2 Monte Carlo via cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov nada mais é do que uma sequência de variáveis aleatórias em que a próxima variável na sequência depende apenas da variável atual. Em outras palavras, a probabilidade de transição de um estado x_n para qualquer outro estado possível depende apenas de x_n e não dos estados anteriores (Sivia; Skilling, 2006). Assim,

$$\mathcal{P}(x_{n+1}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = \mathcal{P}(x_{n+1}|x_n). \tag{3.46}$$

O objetivo é usar cadeias de Markov para guiar o processo de amostragem, evitando que os pontos sorteados deixem de ser completamente aleatórios. Para que isso seja possível, é necessário que a cadeia de Markov convirja para um estado de equilíbrio, isto é, que os próximos elementos da cadeia percorram o espaço de parâmetros com frequência proporcional à probabilidade de cada região. Portanto, é preciso que a cadeia de Markov tenha uma distribuição estacionária. Uma distribuição π é estacionária se satisfizer

$$\pi(x) = \int \mathcal{P}(x|x')\pi(x')\mathrm{d}x'. \tag{3.47}$$

Podemos entender essa relação intuitivamente: o termo $\mathcal{P}(x|x')$ representa a probabilidade de transição de uma variável x' para uma variável x. Ao multiplicar essa probabilidade pela distribuição $\pi(x')$, o que fazemos nada mais é do que calcular a probabilidade de obtermos a variável x' e que ela transicione para a variável x. Ao integrar sobre todas as possibilidades de x', obtemos a distribuição de x a partir da distribuição de x'. Se x seguir a mesma distribuição π de x', então π é uma distribuição estacionária (Sharma, 2017; Press et al., 2007).

Uma última propriedade importante que uma cadeia de Markov precisa ter para que seja possível usar o método de Monte Carlo é ser irredutível, isto é, a partir de um estado inicial qualquer é possível alcançar qualquer outro estado em um número finito de passos. Se a cadeia de Markov for irredutível, não-periódia e tiver uma distribuição estacionária, essa distribuição é a distribuição de equilíbrio (Sharma, 2017). Isso significa que, independente do ponto inicial da cadeia, para um número suficiente de passos, a distribuição dos pontos da cadeia irão convergir para a distribuição estacionária.

Cadeias de Markov podem ser, também, reversíveis. Isso significa que a probabilidade de transicionar de um estado x para outro x' é igual à probabilidade de transicionar de x' para x. Matematicamente,

$$\pi(x)\mathcal{P}(x'|x) = \pi(x')\mathcal{P}(x|x'). \tag{3.48}$$

Essa é a chamada condição de equilíbrio detalhado, e a existência dela garante que a distribuição de equilíbrio existe e é a distribuição dada por π (Sharma, 2017). Embora cadeias de Markov não-reversíveis possam ter uma distribuição de equilíbrio, impor a condição de equilíbrio detalhado é uma forma simples de garantir que tal distribuição de fato exista e que, eventualmente, a cadeia

convergirá para ela.

Finalmente, pela lei dos grandes números, o valor esperado de uma função f qualquer em relação à distribuição de equilíbrio se aproxima ao valor médio da função calculada em cada ponto da cadeia (Sharma, 2017):

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)\pi(x)\mathrm{d}x \approx \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{3.49}$$

Essa é a propriedade que nos permite usar o método de Monte Carlo via cadeias de Markov. Primeiro, criamos uma cadeia de Markov que satisfaça as condições necessárias para que a distribuição de equilíbrio exista e seja a posterior. Depois de realizada a amostragem, podemos usar a lei dos grandes números para obter os valores de interesse (como os parâmetros mais prováveis) a partir dos pontos da cadeia obtida.

3.5.3 Algoritmos de amostragem

Uma vez que a cadeia de Markov é construída, para que o realizar o processo de amostragem, é preciso um algoritmo que defina as regras de transição entre os elementos da cadeia. Um dos algoritmos mais usados e simples é o algoritmo de Metropolis-Hastings, proposto por Metropolis et al. (1953) e generalizado por Hastings (1970). Primeiro, propões-se uma distribuição $q(x'|x)$, da qual será amostrada a variável x' dado que a variável atual é x. Uma forma comumente adotada para a distribuição q é uma gaussiana centrada em x. A nova variável x' será aceita como próximo passo da cadeia com uma probabilidade dada por

$$\alpha = \min\left(1, \frac{\pi(x')q(x|x')}{\pi(x)q(x'|x)}\right). \tag{3.50}$$

Após uma quantidade suficiente de passos, a distribuição da cadeia convergirá para a distribuição de equilíbrio π. Dessa forma, conseguimos realizar a amostragem da posterior e, pela lei de grandes números, calcular os valores de interessa a partir da cadeia de Markov retornada (MacKay, 2003; Press et al., 2007; Foreman-Mackey et al., 2013; Sharma, 2017).

O algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser ineficiente para amostrar distribuições com formas complexas, como, por exemplo, quando há forte correlação entre os parâmetros. O algoritmo de MCMC invatiante afim, proposto por Goodman & Weare (2010), surge para resolver esse problema. Seu grande diferencial é usar várias cadeias de Markov (chamados *walkers*) para percorrer o espaço de parâmetros. O próximo passo de cada *walker* é proposto a partir da posição atual dos outros *walkers*. Isso torna o processo de amostragem mais eficiente, tendo em vista que *walkers* em diferentes regiões da distribuição tenham acesso às diferentes informações sobre a distribuição que os outros *walkers* obteram. Dessa maneira, mesmo tendo uma forma complexa, o MCMC invariante afim consegue amostrar a posterior de forma eficiente e convergir para a distribuição de equilíbrio (Goodman; Weare, 2010; Foreman-Mackey et

al., 2013; Sharma, 2017). As análises feitas neste trabalho utilizaram este algoritmo, que foi implementado em `Python` através *software* `emcee` implementado por (Foreman-Mackey et al., 2013).

4 OS CRONÔMETROS CÓSMICOS

4.1 O MÉTODO DOS CRONÔMETROS CÓSMICOS PARA OBTENÇÃO DE $H(z)$

A equação (2.46) nos fornece o parâmetro de Hubble como uma função do *redshift*. No entanto, podemos obter outra relação entre H e z. Derivando a equação (2.45) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{a} = -\frac{1}{(1+z)^2}\frac{dz}{dt}. \tag{4.1}$$

Pela própria relação (2.45), podemos chegar em

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{1+z}\frac{dz}{dt}, \tag{4.2}$$

que, pela definição do parâmetro de Hubble em (2.35), torna-se

$$H(z) = -\frac{1}{1+z}\frac{dz}{dt}. \tag{4.3}$$

A expressão em (4.3) é ainda mais interessante que a (2.46), tendo em vista que estabelece uma relação direta entre o parâmetro de Hubble e dados observacionais.

Para obter-se o parâmetro de Hubble por meio da expressão (4.3), precisamos medir o termo dz/dt, em outras palavras, a variação do *redshift* em relação ao tempo. Quando o método foi proposto pela primeira vez, sugeriu-se "inverter" essa medida, isto é, medir quanto a idade do Universo variou entre dois *redshifts* próximos (Jimenez; Loeb, 2002). Para estimar esse valor, basta conhecermos a idade de alguns objetos ao longo de um pequeno intervalo Δz e, então, compararmos suas idades para obtermos o intervalo de tempo Δt. As medidas atuais de *redshift* por meio de espectroscopia são extremamente precisas, com erros relativos da ordem de 0.1%, não sendo, portanto, um desafio para este método (Moresco, 2024b). Estimar as diferenças nas idades, por outro lado, é o grande desafio. Idealmente, precisaríamos de objetos astronômicos ao longo de diferentes *redshifts* que se formaram simultaneamente, de modo que, ao comparar suas idades, saberíamos quanto a idade do Universo variou (Δt) ao longo desse intervalo de *redshift* Δz, sendo este o motivo do nome "cronômetros cósmicos".

Para que o método seja aplicável de fato, ainda é preciso determinar quais tipos de objetos astronômicos são válidos como CC. Vale lembrar que a ideia dos cronômetros cósmicos é medir quanto tempo passou ao longe de um intervalo de *redshift*. Para isso, é necessário que sejamos capazes de datar objetos que estejam nos *redshifts* que definem os extremos desse intervalo. Além disso, esses objetos devem envelhecer "juntos"com o Universo, isto é, a diferença de idade entre esses objetos deve refletir quanto o Universo envelheceu. Atualmente, os melhores candidatos são galáxias massivas e passivas.

Galáxias passivas são aquelas em que não há mais síntese estelar expressiva. Essa carac-

terística é essencial, pois, se não há mais formação de estrelas, a população estelar da galáxia envelhece juntamente com o Universo. Isso permite que, ao datar duas populações em diferentes *redshifts*, possamos comparar suas idades e estimar quanto tempo passou nesse intervalo. Idealmente, o único requisito é que a galáxia seja passiva e, embora populações estelares velhas sejam bem caraceterizadas pela ausência de linhas de emissão fortes de determinados gases ionizados, utilizar apenas esse critério para a seleção dessas galáxias não é suficiente.

Há evidências que indicam que galáxias massivas, com $\log_{10}(M/M_{\odot}) > 10.5 \sim 11$, formaram-se em altos *redshifts* ($z > 2 - 3$) e em um curto intervalo de tempo (menor que $0.3 \cdot 10^9$ anos) (Moresco, 2024b). A rápida formação implica que a maioria das estrelas dessas galáxias formaram-se, aproximadamente, ao mesmo tempo. Como consequência, espera-se que tais galáxias tenham consumido a maioria de seu gás logo no início de sua evolução, ou seja, o gás será escasso demais para que novos eventos de síntese estelar ocorram em quantidade significativa. Isso faz com que o espectro galáctico seja dominado por traços de populações velhas. Há ainda uma segunda implicação: com a maioria das estrelas tendo sido formadas ao mesmo tempo, a idade da galáxia pode ser bem definida a partir da idade dessas populações estelares. A formação em altos *redshifts* também é relevante, pois isso garante que a galáxia está evoluindo passivamente (sem novas populações estelares) há algum tempo e, consequentemente, que seu espectro seja dominado por estrelas velhas de fato.

Portanto, a galáxia ser massiva pode ser encarado como um primeiro critério, tornando mais provável que a galáxia tenha sido formada rapidamente em altos *redshits* que, por sua vez, torna provável tal galáxia evoluir passivamente. Selecionadas essas galáxias massivas, deve-se proceder para o segundo critério: a passividade. Deve-se verificar, dentre as massivas, quais são aquelas que apresentam um espectro velho e passivo. Satifeitos tais requisitos, a galáxia pode ser considerada uma amostra de cronômetro cósmico.

Este método apresenta algumas vantagens significativas quando comparado aos outros. Primeiro, sua simplicidade teórica: a única suposição que devemos tomar como verdadeira é a validade da métrica FLRW, ou seja, independe de modelos cosmológicos. Além disso, baseia-se nas diferenças de idade, fazendo com que erros sistemáticos associados à estimação das idades absolutas desapareçam no processo. No entanto, suas desvantagens ainda são grandes desafios para uso mais disseminado. Embora não dependa de modelos cosmológicos, depende fortemente de modelos astrofísicos, mais especificamente, de modelos de síntese de populações estelares, contribuindo para o aumento da incerteza associada ao método. Outro grande desafio é a quantidade de dados disponíveis, que não são muitos. Isso se deve à dificuldade em selecionar amostras adequadas, como será discutido em seguida, e à falta de levantamentos de dados especificamente voltados para cronômetros cósmicos. A soma desses dois problemas resulta em incertezas consideravelmente altas na estimativa final de $H(z)$.

Há dois grandes problemas provenientes da etapa de seleção. O primeiro é o viés do progenitor, referindo-se ao fato de que galáxias selecionadas em baixos *redshifts* podem não ser as "descendentes" das galáxias selecionadas em altos *redshifts*. Este problema surge da suposição

de que as galáxias de uma população em determinado *redshift* formou-se simultaneamente, evoluindo em conjunto desde então. Obviamente isso não retrata a realidade, uma galáxia passiva em baixo *redshift* pode ser o resultado da evolução de uma galáxia que, em alto *redshift*, ainda não havia tornado-se passiva. O outro problema relaciona-se com a evolução da massa da galáxia por meio de fusões. Nesse caso, galáxias menores e passivas em alto *redhift*, que não seriam selecionadas devido ao critério de massa, podem, ao longo do tempo, sofrer fusões com outras galáxias menores, tornando-se massivas em baixo *redshift*. Em ambos os casos, a essência do problema está na diferença entre as amostras em baixo e alto *redshifts*, isto é, as populações não são representativas uma da outra em diferentes épocas (Moresco et al., 2012).

Para que o método dos cronômetros cósmicos seja efetivo, precisamos que a amostra de galáxias passivas seja o mais pura possível. Portanto, é de extrema importância termos formas rigorosas de determinar se uma população de galáxias é passiva ou não. Existem diversos critérios de seleção, indo desde aspectos morfológicos até espectroscópicos. Um pequeno resumo desses critérios pode ser encontrado em Moresco (2024a). A fim de maximizar a qualidade da seleção, a melhor estratégia consiste em usar uma combinação desses diversos critérios, pois eles não são, em geral, equivalentes entre si(Moresco, 2024a). Esses critérios, no entanto, por si só não evitam os dois problemas mencionados anteriormente. Para mitigá-los, o ideal é comparar populações galácticas separadas por um intervalo de *redshift* que seja suficientemente pequeno para que o tempo transcorrido seja curto demais para que qualquer um dos dois efeitos ocorra.

Uma vez selecionada a amostra, podemos estimar a idade diferencial. Como mencionado anteriormente, fazer essa estimativa é bem mais complicado que estimar o intervalo de *redshift*. O maior obstáculo está na degenerescência de alguns parâmetros em relação ao espectro galáctico, isto é, vários parâmetros podem influenciar o formato do espectro. A mais significativa dessas degenerescências é entre a idade e a metalicidade (Moresco, 2024b), já que o espectro de uma galáxia pode ser avermelhado tanto por ser velha quanto por apresentar alta metalicidade. Portanto, é importante que as técnicas de estimação do intervalo Δt busquem quebrar tais degenerescências a fim de obter uma estimativa mais precisa. Atualmente, há duas técnicas principais para estimar o intervalo dt.

4.1.1 Estimando a idade diferencial

Uma das técnicas mais usadas é o ajuste do espectro total (FSF, do inglês *full spectrum fitting*), que, basicamente, consiste em comparar o espectro observado de uma galáxia com uma biblioteca de modelos de espectros. Primeiro, é criado um espectro galáctico simulado a partir da soma de diferentes modelos de populações estelares únicas (SSP, do inglês *single stellar population*) ponderados por um peso associado à taxa de formação estelar. Após isso, é feita uma análise estatística comparando esses modelos com o espectro observado para estimar o valor do peso de cada modelo de SSP. Com os valores dos pesos, pode-se reconstruir a taxa de formação estelar e, disso, estimar as propriedades astrofísicas das estrelas, como a idade, metalicidade, entre outras (Cappellari, 2017). A grande vantagem dessa técnica está no uso de toda a informação disponível

sobre o espectro da galáxia, possibilitando que diversas propriedades sejam restringidas em conjunto. Além disso, dependendo das características dos dados (razão sinal-ruído, bandas de frequência observadas etc.), é possível quebrar a degenerescência entre os parâmetros (Moresco, 2024b).

Outra técnica bastante utilizada é analisar uma característica específica do espectro galáctico: a quebra de 4000 Å. Esse efeito surge devido à presença de íons metálicos em atmosferas de estrelas velhas. Por terem uma temperatura atmosférica mais baixa, o espectro dessas estrelas apresenta uma concentração de linhas de absorção em um estreito intervalo de comprimentos de onda em torno de 4000 Å. Como consequência, observa-se uma queda abrupta na intensidade do fluxo nessa região do espectro. Essa característica espectral é especialmente interessante devido à sensibilidade em relação à idade e metalicidade estelares, sendo um bom indicativo dessas duas propriedades (Bruzual, 1983). Foi mostrado por Moresco et al. (2011) que, a uma metalicidade fixa, uma relação linear entre a amplitude $D4000$ da quebra e a idade t é uma ótima aproximação, podendo ser escrita como

$$D4000(Z, SFH) = A(Z, SFH) \cdot t + B(Z, SFH), \tag{4.4}$$

em que Z é a metalicidade, SFH representa a dependência da história de formação estelar, e A e B são coeficientes constantes para dada metalicidade Z e SFH.

Para relacionar com $H(z)$, basta derivarmos a equação (4.4),

$$dD4000 = A(Z, SFH) \cdot dt, \tag{4.5}$$

e substituir dt na equação (4.3),

$$H(z) = -\frac{A(Z, SFH)}{1+z}\frac{dz}{dD4000}. \tag{4.6}$$

Assim, para estimar $H(z)$, basta medirmos a evolução da amplitude $D4000$ ao longo de um intervalo de redshift dz. Quanto ao coeficiente $A(Z, SFH)$, ele é obtido a partir de modelos de síntese de populações estelares (Moresco, 2024a; Moresco et al., 2012).

O método $D4000$ possui vantagens quando comparado ao ajuste do espectro total. Primeiro, esse método baseia-se em duas quantidades observáveis, dz e $dD4000$, enquanto o ajuste do espectro total precisa estimar dt a partir dos dados, tornando a medida de dt dependente dos modelos astrofísicos. Apesar disso, é importante ressaltar que a dependência dos modelos astrofísicos ainda existe no método $D4000$, ela apenas foi desacoplada dos erros estatísticos dos dados. Portanto, uma outra vantagem é justamente essa: na equação (4.4), o termo $dD4000$ contém as incertezas estatísticas, enquanto o termo $A(Z, SFH)$ contém as incertezas sistemáticas. Ou seja, a dependência dos modelos astrofísicos surge devido à necessidade de calibrar o parâmetro $A(Z, SFH)$.

Há ainda dois outros métodos, por meio dos índices de Lick e por meio de *machine learning*.

Eles não serão discutidos aqui, pois nenhum dos dados utilizados foi obtido por meio dessas técnicas. Um breve resumo de cada um deles pode ser encontrado em Moresco (2024a).

4.1.2 Os dados de cronômetros cósmicos

Este trabalho utilizou um conjunto de dados levemente distinto daquele usado em Kvint, Jesus & Pereira (2025). Uma das diferenças é a inclusão do dado mais recente de Tomasetti et al. (2023). Além disso, optou-se por usar o dado de Jiao et al. (2023) ($z = 0.8$, $H(z) = 113.1$ e $\sigma_{H(z)} = 25.22$) no lugar do dado de Borghi, Moresco & Cimatti (2022) ($z = 0.75$, $H(z) = 98.8$ e $\sigma_{H(z)} = 33.6$). A substituição de um dado pelo outro é válida, pois ambos foram obtidos a partir da mesma amostra de galáxias, com a diferença sendo somente o método de obtenção de $H(z)$ (Borghi, Moresco & Cimatti (2022) utilizou o método dos índices de Lick), e foi motivada devido à maior robustez do método usado por Jiao et al. (2023). Além disso, fazendo essa substituição, o conjunto de dados pode ser separado em dois grupos com base no método de estimação, possibilitando estudar qual o impacto de cada método nas incertezas. O conjunto de 33 dados de cronômetros cósmicos usados podem ser encontrados em Moresco (2024a) e estão apresentados na tabela 1. A Figura 2 mostra o melhor ajuste (curva laranja) dos dados ao modelo ΛCDM plano. A figura mostra também o intervalo de 1σ dos resultados da missão Planck 2018, $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$, em verde (Aghanim et al., 2020) e dos resultados da análise do Pantheon+&SH0ES, $H_0 = 73.6 \pm 1.1$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $\Omega_m = 0.334 \pm 0.018$, em rosa (Brout et al., 2022).

Como pode ser visto na Figura 2, o alcance das barras de erros são amplos. Os erros relativos vão de 5.3% a 63.9%, com a maioria estando entre 10 e 25%. Outra característica notável, especialmente para $z < 1$, é que as medidas por FSF apresentam incertezas consideravelmente maiores que as medidas por $D4000$, ilustrando que a separação dos erros estatísticos e sistemáticos do método $D4000$ ajuda levemente a melhorar a precisão dos dados. Apesar disso, as barras de erro são grandes o suficiente para que 23 dos 33 dados contenham as curvas do Planck e do Pantheon+&SH0ES em 1σ. Sendo assim, apesar da vantagem de ser uma medida independente do modelo, esses dados não possuem poder estatístico o suficiente para distinguir os dois resultados. Essa ampla concordância estatística dos cronômetros cósmicos é o que motiva uma investigação mais profunda acerca de suas incertezas.

4.2 FONTES DE INCERTEZAS

A força do método dos cronômetros cósmicos reside na sua independência de modelos cosmológicos. No entanto, isso é compensado por uma intensa dependência de modelos astrofísicos. Para que sejamos capazes de estimar as idades das galáxias, é essencial que conheçamos tanto os processos de evolução galáctica quanto os processos de evolução estelar. A escolha de como modelar esses processos traz uma série de erros sitemáticos que influenciarão o valor

z	$H(z)$	σ_H	método	referência
0.07	69.0	19.6	FSF	(Zhang et al., 2014)
0.09	69	12	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
0.12	68.6	26.2	FSF	(Zhang et al., 2014)
0.17	83	8	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
0.179	75	4	D	(Moresco et al., 2012)
0.199	75	5	D	(Moresco et al., 2012)
0.20	72.9	29.6	FSF	(Zhang et al., 2014)
0.27	77	14	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
0.28	88.8	36.6	FSF	(Zhang et al., 2014)
0.352	83	14	D	(Moresco et al., 2012)
0.38	83	13.5	D	(Moresco et al., 2016)
0.4	95	17	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
0.4004	77	10.2	D	(Moresco et al., 2016)
0.425	87.1	11.2	D	(Moresco et al., 2016)
0.445	92.8	12.9	D	(Moresco et al., 2016)
0.47	89.0	49.6	FSF	(Ratsimbazafy et al., 2017)
0.4783	80.9	9	D	(Moresco et al., 2016)
0.48	97	62	FSF	(Stern et al., 2010)
0.593	104	13	D	(Moresco et al., 2012)
0.68	92	8	D	(Moresco et al., 2012)
0.80	113.1	25.22	FSF	(Jiao et al., 2023)
0.781	105	12	D	(Moresco et al., 2012)
0.875	125	17	D	(Moresco et al., 2012)
0.88	90	40	FSF	(Stern et al., 2010)
0.9	117	23	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
1.037	154	20	D	(Moresco et al., 2012)
1.26	135	65	FSF	(Tomasetti et al., 2023)
1.3	168	17	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
1.363	160	33.6	D	(Moresco, 2015)
1.43	177	18	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
1.53	140	14	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
1.75	202	40	FSF	(Simon; Verde; Jimenez, 2005)
1.965	186.5	50.4	D	(Moresco, 2015)

Tabela 1 – Os 33 dados de CC e suas respectivas incertezas, com $H(z)$ em km s^{-1} Mpc^{-1}. Os métodos de medição listados são o ajuste do espectro total (FSF), a quebra em 4000Å(D).

final das incertezas de $H(z)$. A seguir, exploraremos quais são as principais fontes de incertezas sistemáticas e como mitigar seus efeitos.

4.2.1 Viés do progenitor

O principal objetivo da etapa de seleção de cronômetros cósmicos é obter amostras que sejam, na média, representativas uma da outra. Em outras palavras, dado um intervalo de *redshift*, é necessário que a população em *redshift* mais baixo (amostra 1) represente o resultado da evolução

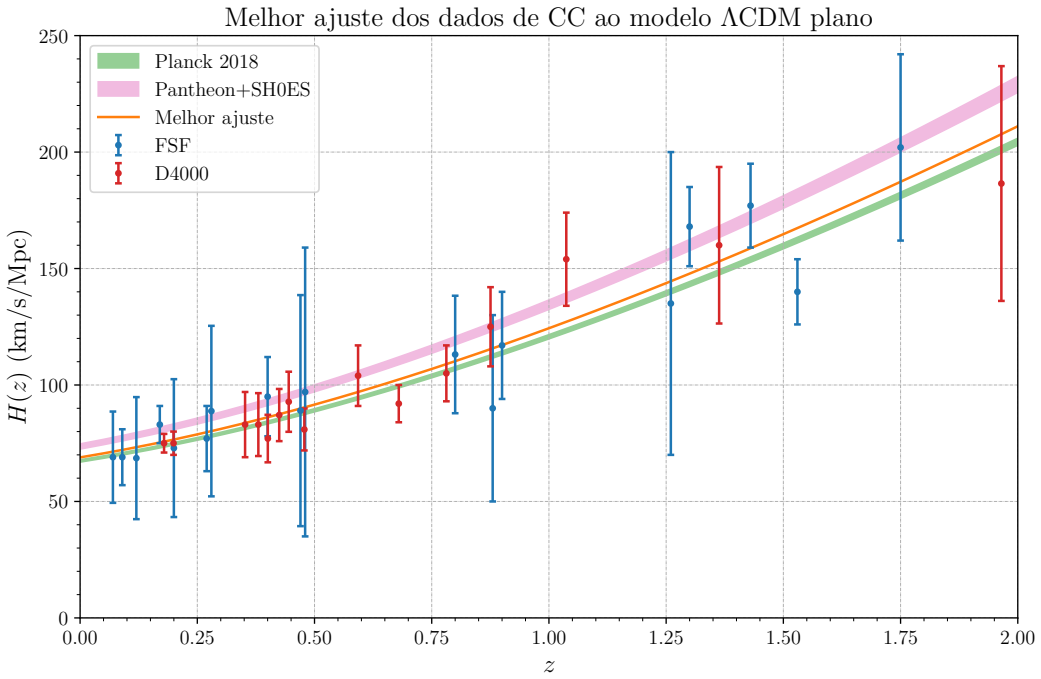

Figura 2 – Melhor ajuste dos dados de CC ao modelo ΛCDM plano (linha laranja). As áreas em verde e rosa representam, respectivamente, o intervalo de 1σ dos resultados do Plank 2018 e do Pantheon+&SH0ES.

da população em *redshift* mais alto (amostra 2) após passar um intervalo Δt correspondente a Δz. Desse modo, poderíamos comparar as idades de cada população justamente por uma representar o que a outra se tornará (Moresco et al., 2012).

Para que a amostragem atinja o padrão exigido, precisa-se de cuidado para selecionar, para a amostra 1, apenas aquelas galáxias que são representantes da evolução da amostra 2. Sem critérios de seleção rígidos, a tendência é pegar o máximo de galáxias passivas em cada *redshift* a fim de ter grandes amostras. No entanto, ao fazer isso, podemos incluir na amostra 1 galáxias que tornaram-se passivas mais recentemente, isto é, na época do *redshift* da amostra 2, a galáxia da amostra 1 ainda não teria tornado-se passiva. Desse modo, essa galáxia não representaria nenhum elemento da amostra 2. O impacto disso está na estimativa das idades de cada população: a estimativa para a idade da amostra 2 seria artificialmente maior que a idade da amostra 1, sendo este o viés do progenitor (Dokkum et al., 2000; Moresco, 2024a).

Esse efeito pode ser mitigado considerando apenas as galáxias mais antigas de cada amostra (o chamado *red envelope*). Isso garante que tais galáxias terão um *redshift* de formação alto e representarão uma à outra. Junto a isso, é ideal que o intervalo de *redshift* entre as amostras seja consideravelmente pequeno, pois isso assegura que pouco tempo terá passado, garantindo que as amostras irão representar-se de forma adequada.

Moresco et al. (2012) estimou o impacto do viés do progenitor nas medidas de $H(z)$, mostrando que o aumento no erro total pode ir de 0.8% a 2.5%. A influência é, portanto, mínima.

O baixo impacto no erro total somado às duas principais estratégias de mitigação citadas acima tornam o viés do progenitor desprezível.

4.2.2 Contaminação por populações jovens

O ponto central do método dos cronômetros cósmicos é estimar a idade das galáxias. No entanto, como já mencionado, realizar esta medida de maneira precisa é um de seus grandes desafios. Dentre as inúmeras dificuldades, está a contaminação da amostra por populações estelares jovens. Por menor que seja essa contaminação, seu impacto na estimativa das idades pode enviesar sua interpretação (Moresco et al., 2018). É de extrema importância, portanto, que saibamos identificar a presença de tais populações.

Em Moresco et al. (2018) é feito um estudo rigoroso sobre a influência e o impacto de possíveis populações jovens em amostras de cronômetros cósmicos. Como resultado, foi elaborado um processo de seleção rigoroso para que a amostra final seja a melhor possível. Também foi calculado qual a contribuição dessa fonte de incerteza para o erro total da medida de $H(z)$. Abaixo é descrito, resumidamente, o processo de seleção para mitigar esse efeito.

Primeiramente, faz-se uma seleção baseada na emissão na região do ultravioleta, que são sensíveis à populações indo de algumas centenas de milhões até cerca de um bilhão de anos. O segundo passo é uma análise espectroscópia a fim de determinar se há presença de linhas de emissão Hα e [O II]. Essas linhas são provenientes de populações estelares com idade de 10 a 100 milhões de anos e, portanto, são um indicativo de formação estelar. Após selecionar apenas galáxias que não possuem as linhas de emissão Hα e [O II], deve-se buscar pela linha de absorção Hδ. Se há presença dessa linha de absorção for acentuada, trata-se de um forte indício de que a galáxia em questão passou por um processo de formação estelar recente. A última análise espectroscópica consiste em calcular a razão entre as linhas Ca II H e Ca II K. Em populações velhas, a linha K é mais profunda que a linha H. Quando há a presença de população jovem, a linha Hϵ sobrepõe-se à linha Ca II H. Portanto, H/K< 1 é um indicativo de contaminação. Como última etapa, seleciona-se as galáxias mais massivas dentre aquelas que sobreviveram a todo o processo de seleção.

Ao fim da análise, Moresco et al. (2018) conclui que a contaminação por populações jovens poderia, no máximo, impactar o valor estimado de $H(z)$ de 0.4% a 1% em 1σ. Como as barras de erro desconsiderando esse efeito são muito maiores que isso, o impacto da contaminação é desprezível. O rigoroso processo de seleção garante que apenas as amostras mais puras de cronômetros cósmicos entrem na determinação de $H(z)$, explicando o baixo impacto.

4.2.3 Modelos estelares astrofísicos

Os modelos estelares são o ingrediente fundamental para estimar a idade das galáxias. Neles estão contidas todas as informações e suposições necessárias sobre a formação e evolução estelar que são usadas para estimar suas idades. Em geral, podemos separar os modelos astrofísicos

usados nos cronômetros cósmicos em quatro componentes: a função de massa inicial (IMF), a metalicidade estelar, a biblioteca estelar e o modelo de síntese de populações estelares (SPS).

4.2.3.1 Função de massa inicial

A IMF é um dos elementos fundamentais para modelar populações estelares. A formação de estrelas dá-se pelo colapso gravitacional de gigantescas nuvens de gás. Por meio de dados observacionais, foi descoberto que a quantidade de estrelas formadas por intervalo de massa e por unidade de volume da nuvem de gás depende fortemente de sua massa (Carroll; Ostlie, 2014). É essa relação entre o "tamanho"da nuvem e quantidade de estrelas formadas que recebe o nome de função de massa inicial.

Há diferentes formas funcionais para a IMF e, em Moresco et al. (2020), foi analisado o impacto dessa escolha nos dados de CC. O resultado obtido é uma contribuição média de 0.4% para a incerteza total dos dados, o menor impacto dentre as outras componentes dos modelos. Apesar de ser o menor valor, os autores não recomendam ignorá-lo, pois é uma fonte de incerteza que, pelo menos por agora, não é possível mitigar mais que isso. Portanto, devemos considerá-la ao montar a matriz de covariância.

4.2.3.2 Metalicidade estelar

A metalicidade de uma estrela representa a fração de sua massa que é composta por elementos mais pesados que o hélio, que são todos chamados de metais nesse contexto. A presença de metais na atmosfera estelar serve como uma fonte de elétrons livres. Esses elétrons livres, por sua vez, recombinam-se com íons de hidrogênio, formando hidrogênio neutro ou até mesmo o íon negativo H^{-1}. Isso faz com que fótons vindos do interior da estrela, ao atingirem a atmosfera, sejam absorvidos, ionizando novamente os átomos. Em outras palavras, a opacidade da estrela aumenta, implicando que é mais difícil para fótons escaparem de seu interior. Consequentemente, a pressão da radiação aumenta no interior da estrela, fazendo seu raio aumentar levemente e sua temperatura superficial diminuir. O resfriamento causa um "avermelhamento"no espectro da estrela. Além disso, os elementos metálicos possuem alta densidade de linhas de absorção na região do azul e ultravioleta do espectro eletromagnético, intensificando o "avermelhamento"(Carroll; Ostlie, 2014).

A metalicidade trás um desafio adicional. Como discutido acima, a presença de metais em uma estrela deixa seu espectro mais vermelho. Esse é o mesmo efeito que ocorre quando um estrela envelhece, ou seja, um espectro vermelho pode ser tanto devido a uma estrela antiga quanto a uma estrela rica em metais. A degenerescência idade-metalicidade representa, portanto, um grande desafio na modelagem estelar e galáctica. Uma das maneiras de quebrar a degenerescência é buscar por índices específicos no espectro estelar (ou galáctico) (Carroll; Ostlie, 2014; Moresco, 2024a).

O estudo sobre o impacto da escolha da metalicidade estelar foi feito em Moresco et al. (2020). A contribuição dessa componente para a matriz de covariância varia conforme a incerteza da metalicidade considerada. Um dos resultados encontrados, por exemplo, foi que há um erro de 9% nos dados para incertezas de 10% na metalicidade. Essa sistemática, no entanto, é mais controlável que a anterior, bastando que a observação possua alta qualidade para reduzir seu impacto. É importante mencionar que o erro associado à metalicidade é contabilizado no erro estatístico, não sendo possível isolar essa contribuição das outras.

4.2.3.3 Biblioteca estelar

As bibliotecas estelares são o que nos permite associar determinados valores de parâmetros a espectros específicos. Há dois tipos de bibliotecas: as teóricas e as empíricas. As teóricas recebem valores que definem o espectro estelar (a gravidade superficial e temperatura efetiva em função da metalicidade) e, por meio de simulações, retornam o espectro previsto para uma estrela com tais características. A vantagem é que nos permite criar espectros para valores arbitrários dos parâmetros, mas a precisão dos espectros previstos dependem das incertezas dos valores usados nos parâmetros que, muitas vezes, são elevadas. As bibliotecas empíricas são baseadas em observações reais e, a partir deles, estima-se quais devem ser os parâmetros e características daquela estrela. O benefício deste tipo é ser baseado em dados reais e, justamente por isso, sua fraqueza está em ser difícil estimar uma variedade de parâmetros para o mesmo espectro (Conroy, 2013). Assim, em resumo, usamos as bibliotecas para comparar com espectros reais observados e, a partir dos espectros da biblioteca, estimar o valor de seus parâmetros.

Moresco et al. (2020) estimou que o impacto das bibliotecas estelares é de aproximadamente 6.5% independentemente do *redshift*. A contribuição dessa sistemática já é bem maior do que as outras tratadas até agora, mas, apesar disso, os autores sugerem que os efeitos podem ser fortemente mitigados usando bibliotecas estelares mais modernas.

4.2.3.4 Modelos de síntese de populações estelares

A última componente são os modelos SPS, que une as três sistemáticas discutidas anteriormente para fornecer o modelo final do espectro. Primeiro, é necessário um modelo de população estelar simples (SSP), isto é, um modelo do espectro de uma população estelar cujas estrelas nasceram todas ao mesmo tempo e com mesma metalicidade. Para construir um modelo SSP, precisamos justamente de uma IMF, bibliotecas estelares e uma teoria para a evolução estelar (Conroy, 2013).

Como uma galáxia possui um espectro complexo, precisamos usar os modelos SSP para construir modelos de populações estelares compostas (CSP). A diferença entre essas duas populações é evidente: nas CSPs, há estrelas com diferentes idades e metalicidades, além de incluir, também, a presença de poeira. O espectro de uma CSP é apenas o espectro integrado de várias SSPs ponderadas pela taxa de formação estelar da galáxia (chamada de histórico de

formação estelar) em conjunto com o espectro devido à poeira. Com isso, somos capazes de gerar espectros galácticos e compará-los com os espectros observados a fim de estimar seus parâmetros.

Os modelos SPS são os maiores contribuintes para o erro final dos dados de CC, podendo chegar ao valor médio de 9%. Diferente do caso das bibliotecas estelares, a contribuição dos modelos SPS apresentam uma tendência a diminuir com o *redshift* (Moresco et al., 2020). O alto valor do erro associado a esses modelos, muitas vezes, resulta da inclusão de modelos discrepantes na análise. Em Moresco et al. (2020), foi identificado a presença de alguns poucos desses modelos e, ao retirá-los da análise, foi possível reduzir a contribuição do erro para 4.5%. Como também não há formas de mitigar ou reduzir drasticamente os erros associados aos modelos, a inclusão dessa componente na matriz de covariância é essencial.

4.2.4 A matriz de covariância

Uma vez conhecido os impactos de cada fonte de incerteza, pode-se estimar a matriz de covariância total para os cronômetros cósmicos. Para isso, é necessário decidir quais contribuições incluir, tendo em vista que há diferentes níveis de contribuições. Há três abordagens possíveis:

- Combinação 1: considerar as sistemáticas vindas da metalicidade, da IMF e dos modelos SPS retirando os modelos discrepantes. Essas são as maiores contribuições e que não podem ser evitadas por outras maneiras. Aqui, a contribuição por contaminação por populações jovens e pelo viés do progenitor são desconsideradas, pois podem ser evitadas por uma seleção de amostras rigorosa. A escolha das bibliotecas estelares também é desconsiderada com base no argumento de que bibliotecas modernas reduzem a contribuição dessa sistemática.

- Combinação 2: considerar as sistemáticas vindas da metalicidade, da IMF, dos modelos SPS retirando os modelos discrepantes e das bibliotecas estelares. Apesar do argumento sobre as bibliotecas modernas, a contribuição estimada para essa sistemática é equiparável aos outros resultados.

- Combinação 3: considerar as sistemáticas vindas da metalicidade, da IMF, dos modelos SPS e das bibliotecas estelares. Essa é a escolha mais conservadora, pois leva em consideração todos os modelos SPS, mesmo aqueles discrepantes.

Neste trabalho, todas as três combinações foram analisadas a fim de estudar o impacto da escolha das sistemáticas no valor do fator de correção f. Apesar disso, a principal combinação sugerida na literatura e adotada em Kvint, Jesus & Pereira (2025) é a combinação 1.

4.3 A SUPERESTIMAÇÃO DAS INCERTEZAS

Para determinarmos se a correção das incertezas é necessária, precisamos, primeiro, analisar a qualidade do ajuste dos dados. Isso é feito por meio da estatística de χ^2 que, devido à matriz de covariância não-diagonal, nos fornece a expressão

$$\chi^2 = \sum_{i,j}^{33} \left[H_{obs,i} - H_{mod}(z_i, \vec{\theta}) \right] C_{ij}^{-1} \left[H_{obs,j} - H_{mod}(z_j, \vec{\theta}) \right], \tag{4.7}$$

em que $\vec{\theta} \equiv (H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda)$ é o vetor de parâmetros cosmológicos, $H_{obs,i}$ representa os dados de $H(z)$, $H_{mod}(z_i, \vec{\theta})$ representa o valor previsto pelo modelo no *redshift* z_i dado o vetor de parâmetros $\vec{\theta}$.

Uma das maneiras de avaliar quão bem é o ajuste é analisando a função de densidade de probabilidade (PDF) do χ^2 reduzido, definido como

$$\chi^2_\nu = \frac{\chi^2_{min}}{\nu}, \tag{4.8}$$

em que χ^2_{min} representa o menor valor de χ^2, e $\nu = n - p$ representa o número de graus de liberdade, com n sendo o número de dados, e p o número de parâmetros livres. A distribuição do χ^2_ν é dada por

$$h_\nu(\chi^2_\nu) = \frac{\nu^{\frac{\nu}{2}} (\chi^2_\nu)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} e^{-\frac{\nu}{2}\chi^2_\nu}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \tag{4.9}$$

em que Γ é a função gama completa (Vuolo, 1996; Bevington; Robinson, 2003). Disso, podemos definir, também, a função distribuição acumulada (CDF) como

$$P(\chi^2_\nu < Q) \equiv \int_0^Q h_\nu(Q')dQ'. \tag{4.10}$$

Ou seja, a CDF nos fornece a probabilidade de obter um valor de χ^2_ν menor que dado valor Q.

Como o valor esperado para o χ^2_ν é 1 (Vuolo, 1996; Bevington; Robinson, 2003), valores muito distantes disso são considerados improváveis. No entanto, podemos ser mais precisos se usarmos a expressão

$$(\chi^2_\nu)_{\text{mp}} = 1 - \frac{2}{\nu}, \tag{4.11}$$

em que $(\chi^2_\nu)_{\text{mp}}$ é o valor mais provável para o χ^2_ν (Vuolo, 1996). Portanto, para averiguarmos a qualidade do ajuste dos dados, analisaremos o χ^2_ν dos modelos ajustados. O conjunto de dados possui 33 pontos, e os modelos ΛCDM plano e OΛCDM possuem dois e três parâmetros livres, respectivamente, de modo que os graus de liberdade serão, seguindo a mesma ordem,

$\nu = 33 - 2 = 31$ e $\nu = 33 - 3 = 30$. Assim, obtemos que

$$\chi^2_\nu = \begin{cases} \frac{14.6185}{31} = 0.4716, & \text{para } \Lambda\text{CDM plano} \\ \frac{14.7080}{30} = 0.4903, & \text{para O}\Lambda\text{CDM.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Calculando a CDF de cada um dos modelos, obtemos que $P(\chi^2_\nu < 0.4716) = 0.55\%$ e $P(\chi^2_\nu < 0.4903) = 0.87\%$. É evidente, então, que ambos os valores de χ^2_ν são altamente improváveis. A Figura 3 mostra os gráficos das distribuições do χ^2_ν de cada modelo juntamente com sua CDF correspondente. Nos gráficos, é vísivel que os valores obtidos encontram-se muito próximos à cauda da distribuição, ilustrando a improbabilidade desses valores.

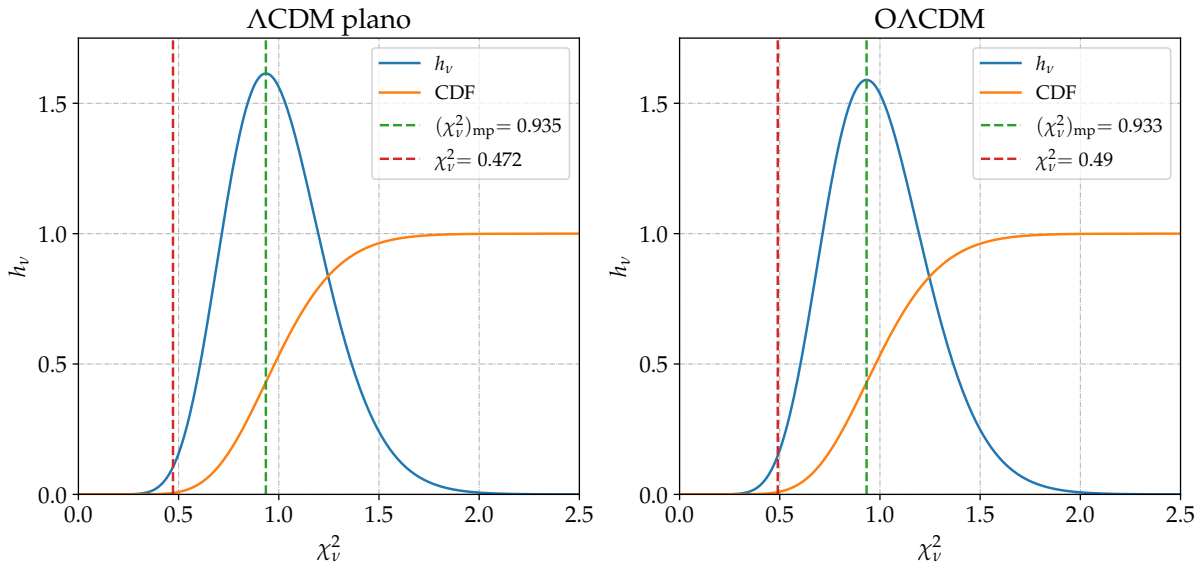

Figura 3 – Distribuição do χ^2_ν e sua CDF para cada modelo. **Esquerda:** modelo ΛCDM plano com $\nu = 31$. **Direita:** modelo OΛCDM com $\nu = 30$.

Um χ^2_ν menor que o valor mais provável implica em um χ^2_{min} menor que o esperado. Este, por sua vez, implica que as incertezas são maiores que seus valores reais. O resultado dessa análise nos fornece uma evidência de que as incertezas dos dados estão superestimadas.

5 CORRIGINDO AS INCERTEZAS DE $H(z)$

5.1 O MÉTODO DE CORREÇÃO

Com a suspeita de uma superestimação nas incertezas, o método de correção proposto consiste em inserir um fator de correção cuja função é multiplicar a matriz de covariância, ou seja, cada incerteza será multiplicada por esse novo fator. A fim de obter um método agnóstico, o fator de correção será introduzido no modelo como um novo parâmetro livre a ser estimado juntamente com os parâmetros cosmológicos. Rigorosamente, deveria haver um fator de correção individual para cada um dos 33 dados. Como isso resultaria em mais parâmetros que dados, a possibilidade de haver um sobreajuste seria elevada. Tomaremos isso como uma motivação inicial para supor que todas as incertezas devem ser corrigidas pelo mesmo fator de correção.

Este método foi primeiramente introduzido por Jesus et al. (2018), com a diferença que, na época, a matriz de covariância total dos cronômetros cósmicos ainda não havia sido estimada. Além disso, em Jesus et al. (2018), o conjunto de dados usado foi uma combinação de cronômetros cósmicos e oscilações acústicas de bárions (BAO).

O método consiste em modificar a matriz de covariância inserindo um parâmetro multiplicativo. Como a *likelihood* que buscamos maximizar depende da matriz de covariância, é esperado que sua forma seja levemente diferente da forma usual apresentada na expressão (3.44). Então, considerando que, agora, cada incerteza está sendo multiplicada por um fator de correção f, podemos definir a matriz de covariância corrigida $C_{\text{cor.}}$ como

$$C_{\text{cor.}} = f^2 C. \tag{5.1}$$

Disso, obtemos facilmente a inversa da matriz de covariância corrigida:

$$C_{\text{cor.}}^{-1} = f^{-2} C^{-1}. \tag{5.2}$$

Com a inversa da matriz de covariância corrigida em mãos, podemos definir o χ^2 corrigido a partir da equação (4.7) como

$$\chi^2_{\text{cor.}} = \sum_{i,j}^{33} \left[H_{obs,i} - H_{mod}(z_i, \vec{\theta}) \right] (C_{\text{cor.}}^{-1})_{ij} \left[H_{obs,j} - H_{mod}(z_j, \vec{\theta}) \right] = f^{-2} \chi^2. \tag{5.3}$$

Usando a expressão (5.3) em conjunto com a forma gaussiana multivariada da *likelihood* dada por (3.44), podemos obter sua versão corrigida. Então, representando a *likelihood* por $\mathcal{L}$ por simplicidade, temos que

$$\mathcal{L}_{\text{cor.}} = (2\pi)^{-N/2} \det(C_{\text{cor.}})^{-1/2} e^{-\chi^2_{\text{cor.}}/2} = (2\pi)^{-N/2} \det(f^2 C)^{-1/2} e^{-f^{-2}\chi^2/2}. \tag{5.4}$$

Como a matriz de covariância possui dimensão N, o determinante da matriz corrigida será dado por

$$\det(f^2 C) = f^{2N} \det(C), \tag{5.5}$$

e, portanto,

$$\mathcal{L}_{\text{cor.}} = (2\pi)^{-N/2} f^{-N} \det(C)^{-1/2} e^{-f^{-2}\chi^2/2}. \tag{5.6}$$

Tomando o logaritmo de $\mathcal{L}_{\text{cor.}}$, obtemos

$$\ln(\mathcal{L}_{\text{cor.}}) = -\frac{1}{2} \ln\left[(2\pi)^N \det(C)\right] - N \ln(f) - f^{-2}\frac{\chi^2}{2}. \tag{5.7}$$

Maximizar a *likelihood* com base na equação (5.7) nos possibilita determinar os parâmetros cosmológicos de melhor ajuste em conjunto com o fator de correção f, nos fornecendo o modelo que melhor descreve os dados. Obtida a expressão para a *likelihood* corrigida, podemos realizar sua amostragem via emcee.

5.2 TESTE DO MÉTODO

Antes de aplicar o método de correção aos dados de cronômetros cósmicos, é importante verificarmos se o método terá o comportamento esperado. Para isso, serão feitos dois testes utilizando o conjunto de dados de supernovas Ia do Pantheon. Como os dados do Pantheon possui uma matriz de covariância muito bem estudada, espera-se que o ajuste aos dados seja muito bom, isto é, que seu χ^2_ν seja próximo de 1. Nesse contexto, a ideia do primeiro teste é analisar se o método de correção é capaz de retornar $f \approx 1$ caso o conjunto de dados tenha incertezas bem estimadas. Feito este teste, o próximo consiste em multiplicar a matriz de covariância por um valor arbitrário e, depois, aplicar o método de correção a esse conjunto de dados simulados a fim de recuperar o valor pelo qual a matriz foi multiplicada.

Para ambos os testes, o modelo ajustado foi o OΛCDM e, como é comum em conjuntos de dados de supernovas, o parâmetro de Hubble e a magnitude não são restringidos.

5.2.1 Primeiro teste: detecção de incertezas bem estimadas

Como dito brevemente, um dos motivos so conjunto de dados do Pantheon ter sido escolhido para o teste é suas incertezas muito bem estudadas e estimadas. Isso significa que é esperado que o χ^2_ν resulte em um valor muito próximo de 1. Nesse cenário, se aplicarmos o método, esperamos encontrar um valor também próximo de 1 para o fator de correção f, implicando que as incertezas não estão nem subestimadas nem superestimadas. Resumidamente, buscamos investigar se o método é capaz de identificar incertezas que estejam bem estimadas, evitando que o método insira algum viés nos dados.

A Figura 4 mostra os resultados da análise. É visível que os contornos e as posteriores marginalizadas de ambos os modelos, com e sem correção, são praticamente idênticos. Isso

mostra que este conjunto de dados não precisa ter as incertezas corrigidas, como era esperado.

A Tabela 2 mostra os resultados numéricos obtidos para cada parâmetro livre. Novamente, podemos ver que não há diferença significativa entre os valores (tanto para os valores médios quanto para as incertezas) obtidos de cada modelo, indicando, mais uma vez, que os dados não necessitam de uma correção. Olhando para o parâmetro de correção, seu valor médio é $f = 0.99 \pm 0.02$ com 68% de nível de confiança, evidenciando a validade do método.

Em resumo, o resultado final é o esperado: ao aplicar o método a um conjunto de dados com $\chi^2_\nu \approx 1$, obtemos que $f \approx 1$. Sendo assim, o método passou no teste e é funcional, podendo ser usado para corrigir o valor das incertezas em outros conjuntos de dados.

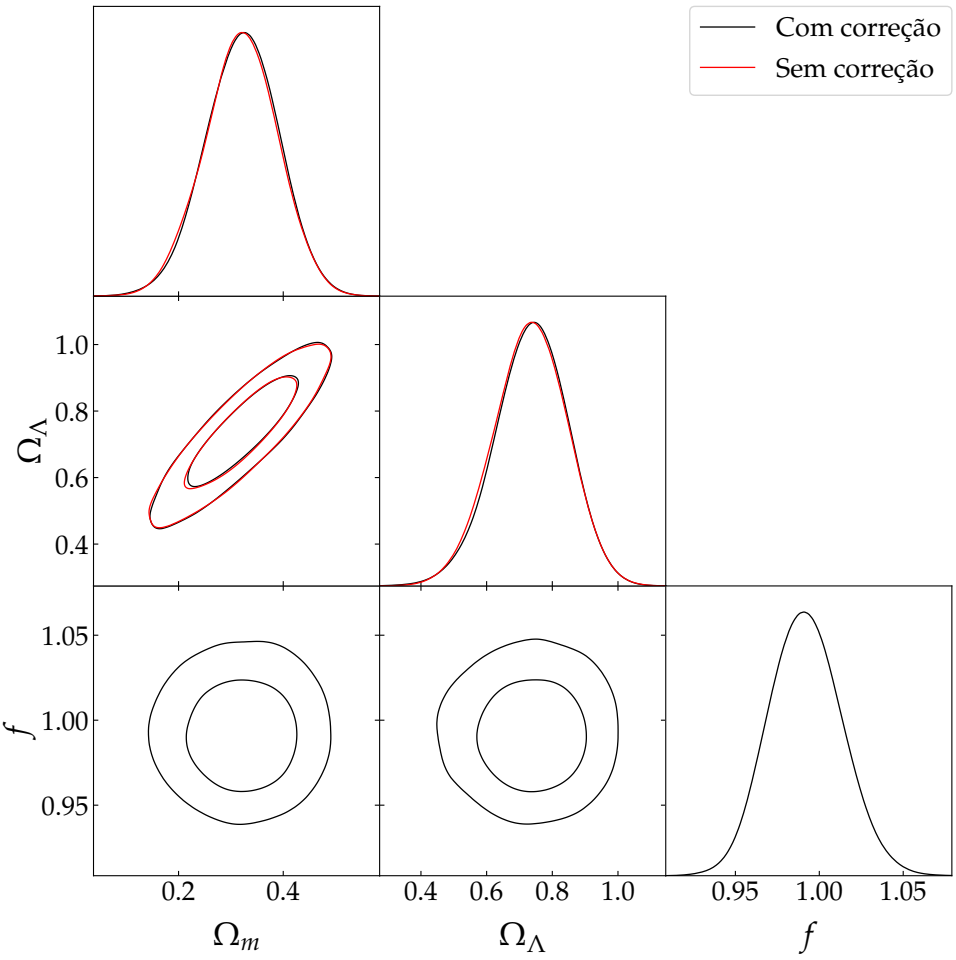

Figura 4 – Resultado da análise dos dados do Pantheon SNe Ia. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%

5.2.2 Segundo teste: recuperação do fator multiplicativo

Para o segundo teste, iremos multiplicar cada incerteza dos dados por um fator multiplicativo arbitrário, isto é, iremos simular incertezas mal estimadas. Assim, multiplicou-se cada incerteza por um fator $f_0 = 1.25$, implicando que, agora, as incertezas dos dados do Pantheon estão

Pantheon SNe Ia		
Parâmetro	Sem correção	Com correção
Ω_m	$0.32 \pm 0.07 \pm 0.14$	$0.32 \pm 0.07 \pm 0.14$
Ω_Λ	$0.73 \pm 0.1 \pm 0.2$	$0.74 \pm 0.1 \pm 0.2$
f	—	$0.99 \pm 0.02 \pm 0.04$

Tabela 2 – Valores médios dos parâmetros do modelo OΛCDM para os dados do Pantheon SNe Ia sem e com o fator de correção f nas incertezas. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança.

superestimadas em 25%. O objetivo deste teste é investigar se o método de correção realmente tem a capacidade de recuperar uma suposta superestimação (ou subestimação) nas incertezas. Além disso, o resultado também nos permitirá investigar o impacto do método de correção na qualidade do ajuste, isto é, no valor do χ^2_ν.

A Figura 5 mostra os contornos dos resultados obtidos. De imediato, podemos notar que os contornos sem correção, em preto, são mais largos que os contornos com correção, em vermelho. Isso é um indicativo de que o método cumpriu seu objetivo de reduzir as incertezas. Além disso, percebe-se que os picos das distribuições marginalizadas não apresentaram um deslocamento significativo, ou seja, o método não afeta significativamente os valores médios dos parâmetros.

Os resultados numéricos são mostrados na Tabela 3. O valor obtido para o parâmetro de correção foi $f = 0.79 \pm 0.02$, o que resultada no valor $f_0 = 1.26 \pm 0.03$ para o fator multiplicativo inserido na matriz de covariância, ambos em 1σ. Esse resultado mostra que o método de correção é capaz de recuperar o valor do fator multiplicativo, com a possibilidade de $f = 1$ sendo fortemente desfavorecida em 2σ. Isso indica que o método funciona e possui a capacidade de identificar e quantificar potenciais superestimações ou subestimações nas incertezas dos dados.

Pantheon SNe Ia		
Parâmetro	Sem correção	Com correção
Ω_m	$0.32^{+0.9+0.17}_{-0.09-0.18}$	$0.32 \pm 0.07 \pm 0.14$
Ω_Λ	$0.73^{+0.14+0.27}_{-0.14-0.30}$	$0.73^{+0.11+0.21}_{-0.11-0.23}$
f	—	$0.79^{+0.02+0.04}_{-0.02-0.03}$
$\boldsymbol{f_0}$	—	$1.26^{+0.03+0.06}_{-0.03-0.05}$

Tabela 3 – Valores médios dos parâmetros do modelo OΛCDM para os dados do Pantheon SNe Ia sem e com o fator de correção f nas incertezas simuladas. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança.

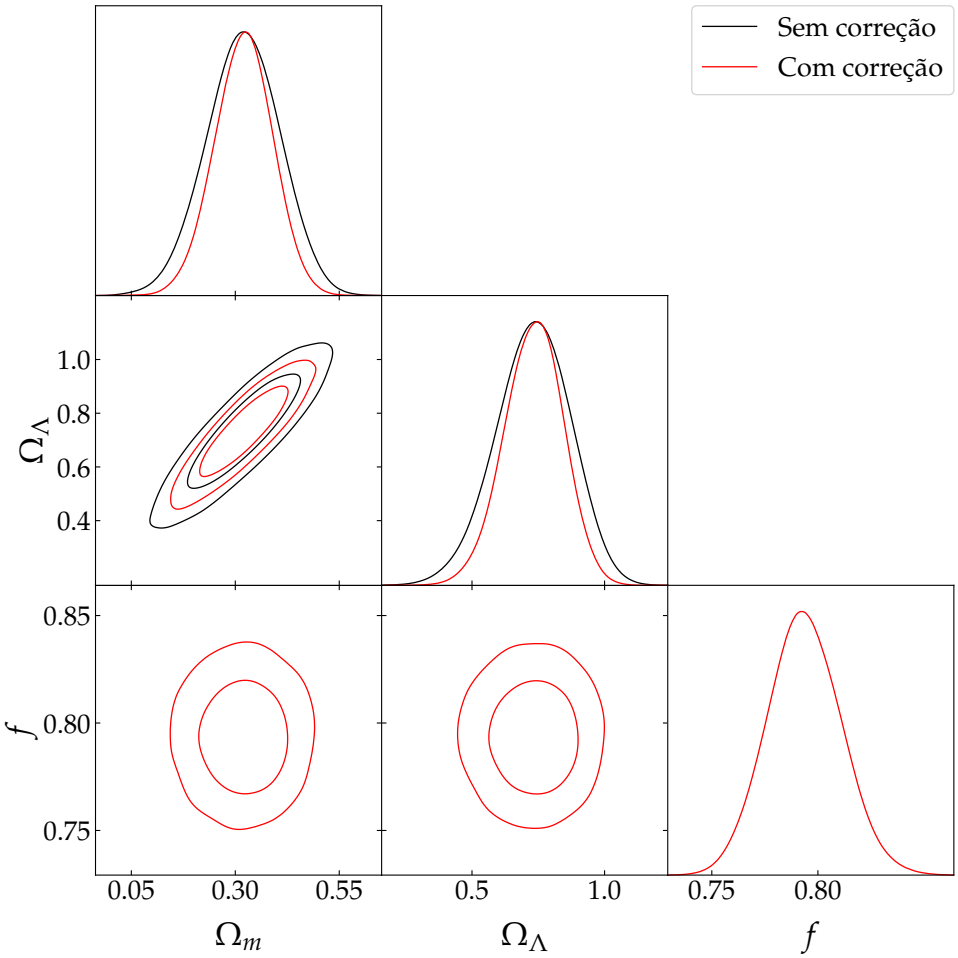

Figura 5 – Resultado da análise dos dados do Pantheon SNe Ia para o teste com incertezas simuladas. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%

5.3 APLICAÇÃO AOS DADOS DE CRONÔMETROS CÓSMICOS

Com o método tendo sido validado pelos teste feitos no conjunto de dados Pantheon, podemos aplicá-lo aos dados de CC. Foram realizados dois tipos de análises: uma separando os dados com base no método de aquisição e ajustando cada grupo separadamente; e outra usando cada uma das três combinações de matriz de covariância.

5.3.1 Separação por método de aquisição

Primeiro, vejamos os resultados obtidos para cada método de medição dos dados. O objetivo deste teste é estudar o impacto de cada método no valor de f. Como visto seção 4.1, o método FSF apresenta incertezas consideravelmente maiores que o método D4000, levantando a possibilidade de cada conjunto de dados exigir um fator de correção distinto. Portanto, além de estudar o impacto do método no valor de f, essa análise também nos fornecerá evidências a respeito da suposição de um mesmo fator de correção para todos os 33 dados. Como a quantidade de dados

é pequena (18 para FSF e 15 para D4000), esta análise foi realizada assumindo o modelo ΛCDM plano (já que possui um parâmetro a menos) e a matriz de covariância adotada foi a combinação 1.

A Figura 6 mostra os resultados obtido para o modelo ΛCDM com correção para cada conjunto de dados, com os contornos em preto representando os resultados obtidos com o conjunto FSF, e os contornos em vermelho, aqueles obtidos com o conjunto D4000. Olhando diretamente para o parâmetro f, vemos que as distribuições marginalizadas quase estão sobrepostas. Além disso, podemos notar também como as incertezas menores do método D4000 em relação ao método FSF impactam a estimativa de H_0: a distribuição da constante de Hubble obtida do conjunto de D4000 possui menor largura que a distribuição obtidas do conjunto FSF.

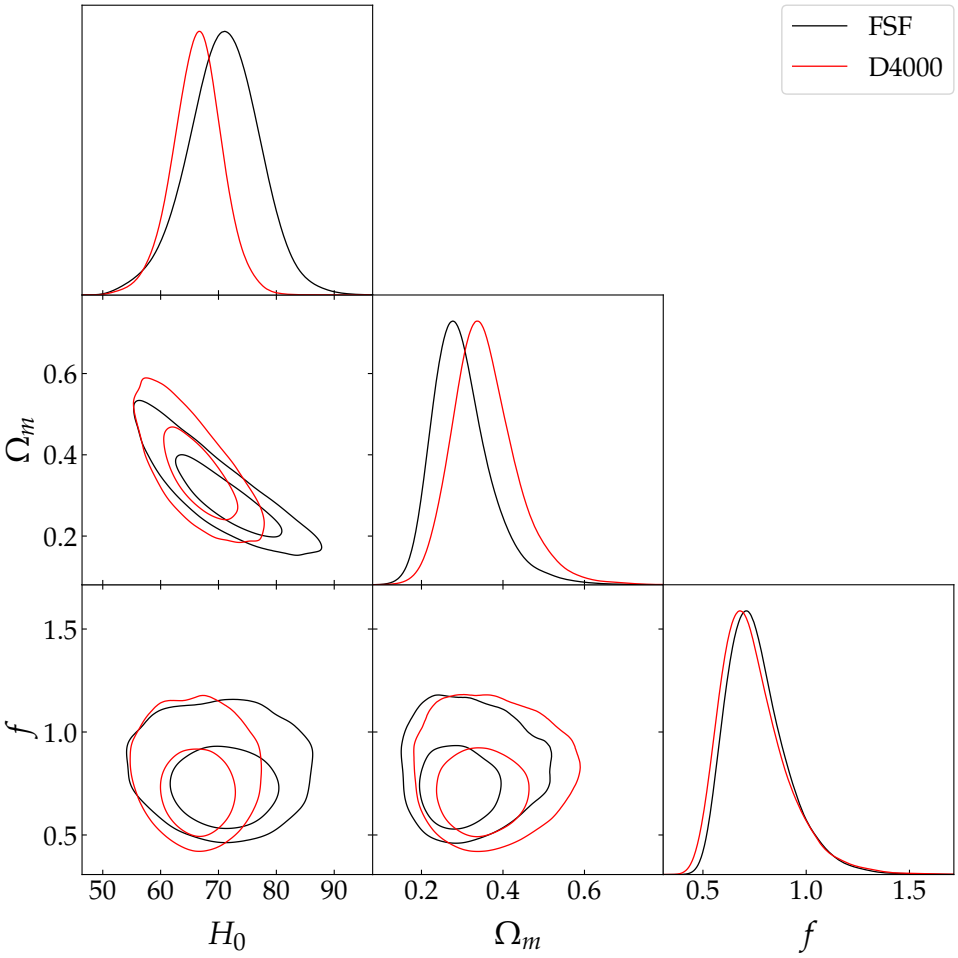

Figura 6 – Resultado da análise do modelo ΛCDM plano para ambos os métodos, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%.

Os resultados numéricos são mostrados na Tabela 4. Como podemos ver, do ponto de vista estatístico, ambos os valores obtidos para f são equivalentes. Inicialmente, a escolha de aplicar um único fator f para toda a matriz de covariância foi motivada para evitar um sobreajuste.

Agora, com o resultado desta análise, podemos concluir que, para o atual conjunto de 33 dados, aplicar um único fator de correção é uma ação válida.

ΛCDM plano		
Parâmetro	FSF	D4000
H_0	$70.9^{+6.1+12.4}_{-6.1-13.4}$	$66.4^{+4.2+8.9}_{-4.2-9.2}$
Ω_m	$0.30^{+0.07+0.19}_{-0.07-0.12}$	$0.36^{+0.08+0.19}_{-0.08-0.14}$
f	$0.77^{+0.14+0.37}_{-0.14-0.23}$	$0.75^{+0.15+0.42}_{-0.15-0.25}$

Tabela 4 – Valores médios dos parâmetros do modelo ΛCDM plano com correção para cada conjunto de dados de CC, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança.

5.3.2 Diferentes combinações da matriz de covariância

Seguimos agora para uma análise de como a combinação da matriz de covariância afeta o valor estimado para o parâmetro f. Mais que isso, buscamos estudar se existe alguma sistemática que contribui de maneira mais significativa para a superestimação. Como já discutido, há três combinações sugeridas para a matriz de covariância, a relembrar:

- Combinação 1 (C_1): contribuições estatística (stat), IMF e modelos SPS retirando os discrepantes (spsooo)
- Combinação 2 (C_2): contribuições estatística, IMF, bibliotecas estelares (slib) e modelos SPS retirando os discrepantes.
- Combinação 3 (C_3): contribuições estatística, IMF, bibliotecas estelares e modelos SPS completo (sps).

A Figura 7 mostra os resultados obtidos para cada combinação. Podemos ver que o maior impacto da escolha das sistemáticas está no valor de H_0, com cada combinação fornecendo um valor médio consideravelmente diferente dos outros. É perceptível, também, que a inclusão dos modelos SPS discrepantes (contornos vermelhos, matriz C_3) gera instabilidades na distribuição da constante de Hubble, reiterando que a melhor escolha é, de fato, excluir os modelos discrepantes da análise. Comparando os contornos das matrizes C_1 (azul) e C_2 (preto), vemos que a inclusão das incertezas associadas às bibliotecas estelares tende a resultar em valores médios mais baixos para H_0, além, é claro, de deixar a distribuição mais larga. Finalmente, as distribuições marginalizadas para o parâmetro f, assim como no caso anterior, estão quase sobrepostas. Até mesmo a inclusão dos modelos SPS discrepantes não resultou em mudanças significativas na distribuição, nos levando a concluir que a escolha das contribuições sistemáticas possuem baixíssimo impacto no valor do fator de correção.

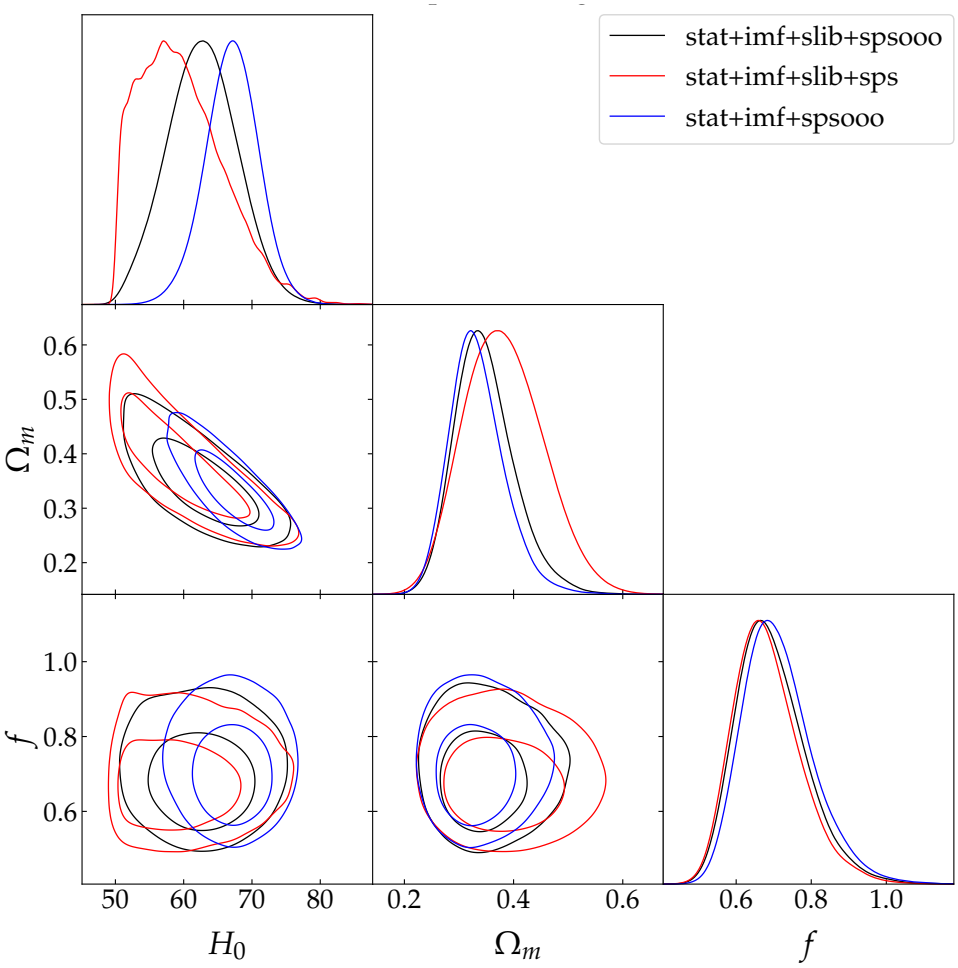

Figura 7 – Resultado da análise do modelo ΛCDM plano para diferentes combinações para a matriz de covariância, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%.

Quanto aos resultados numéricos, eles são mostrados na Tabela 5. Esses resultados reforçam as conclusões que os contornos já trouxeram. Para a matriz C_3, devido à presença de modelos discrepantes, foi obtido um valor médio para H_0 muito abaixo dos valores aceitos na literatura atual. A matriz C_2 também retornou um valor consideravelmente baixo para a constante de Hubble, mas, diferentemente da C_3, é possível chegar a valores presentes na literatura ainda em 1σ. Ainda assim, isso evidencia que a inclusão das sistemáticas das bibliotecas estelares traz grande impacto para a análise dos dados.

Quanto ao valor do fator de correção, vemos que para os três casos foram obtidos valores médios estatiscamente equivalentes. Mais do que isso, os valores obtidos nesta análise estão de acordo com os valores obtidos na análise anterior em que foi feita a separação por métodos (em que, relembrando, usou-se a matriz C_1). O resultado desta análise indica que, ao contrário do que poderia ser pensado, a superestimação reside nos erros estatísticos e não nos sistemáticos.

	ΛCDM plano		
Parâmetro	C_1	C_2	C_3
H_0	$67.1^{+3.8+7.8}_{-3.8-8.1}$	$62.7^{+5.1+10.2}_{-5.2-10.1}$	$59.7^{+6.4+13.9}_{-6.4-9.2}$
Ω_m	$0.33^{+0.05+0.12}_{-0.05-0.09}$	$0.35^{+0.05+0.13}_{-0.05-0.10}$	$0.38^{+0.07+0.15}_{-0.07-0.13}$
f	$0.71^{+0.09+0.22}_{-0.09-0.16}$	$0.70^{+0.10+0.22}_{-0.10-0.16}$	$0.68^{+0.09+0.21}_{-0.09-0.15}$

Tabela 5 – Valores médios dos parâmetros do modelo ΛCDM plano com correção para cada combinação para a matriz de covariância, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança.

5.3.3 Análise dos modelos ΛCDM plano e OΛCDM

Com essas breves análises preliminares, concluimos que, para este conjunto de dados, é válido aplicar um único fator de correção para toda a matriz de covariância e que as sistemáticas não influenciam significativamente a intensidade da superestimação. As análises seguintes, então, consistem no uso total dos 33 dados de cronômetros cósmicos com a matriz de covariância dada pela combinação 1. Essa escolha para a matriz de covariância é motiva, principalmente, por ser a sugerida por Moresco et al. (2020).

Primeiro, aplicou-se ao modelo ΛCDM plano. A Figura 8 mostra que a introdução do parâmetro de correção f diminui o intervalo de valores possíveis para os parâmetros cosmológicos, com os contornos do modelo corrigido (em preto) sendo mais fechados. Além disso, não houve mudança significativa no valor médio de cada parâmetro, indicando que o efeito do parâmetro de correção afetou apenas as incertezas. Olhando para os contornos do parâmetro f, vemos que eles são consideravelmente circulares, indicando baixa correlação com os parâmetros cosmológicos.

A Tabela 6 resume os resultados numéricos obtidos. Novamente, é visível que os valores médios dos parâmetros mantiveram-se inalterados após a correção. Já as incertezas, por outro lado, diminuíram. Em 1σ, para H_0, a incerteza foi de 5.4 km s^{-1} Mpc^{-1} para 3.8 km s^{-1} Mpc^{-1}, uma redução de 30%, e, para Ω_m, de 0.07 para 0.05, uma redução de 29%. Aqui, o parâmetro Ω_Λ foi derivado a partir da normalização dada pela equação (2.42). Quanto ao parâmetro de correção, obteve-se $f = 0.71 \pm 0.09$, sugerindo que as incertezas estão superestimadas em 41%. Outro resultado importante é que a possibilidade de $f = 1$ é fortemente desfavorecida em 2σ, reforçando a hipótese de que as incertezas estão superestimadas.

A Figura 9 mostra o valor corrigido para o χ^2 reduzido, sendo este $\chi^2_\nu = 0.95$. Como o novo valor é muito mais próximo de 1, a introdução do parâmetro de correção de fato melhorou o valor das incertezas. Olhando para a CDF, espera-se que, conforme χ^2_ν aproxima-se de 1, a probabilidade $P(\chi^2_\nu < Q)$ se aproxime de 50%. Para o valor em questão, foi obtida a probabilidade $P(\chi^2_\nu < 0.953) \approx 46.1\%$, validando novamente a melhoria nas incertezas.

Partindo para o modelo OΛCDM, vemos resultados muito similares. A Figura 10 mostra um gráfico com aparência muito semelhante àquele visto na Figura 8. Os contornos do modelo

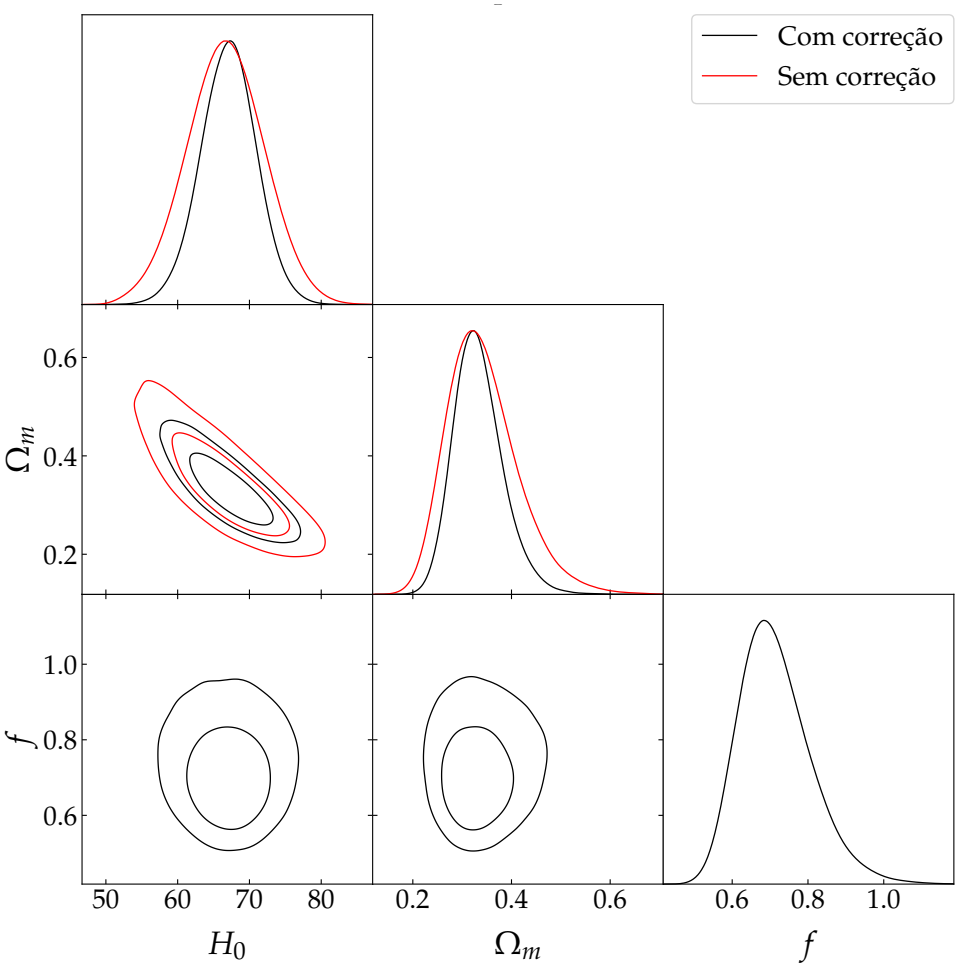

Figura 8 – Resultado da análise do modelo ΛCDM plano, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%.

corrigido (em preto) mostram, mais uma vez, que os parâmetros são mais restringidos, com o centro dos contornos praticamente na mesma posição. Assim como no caso anterior, os contornos do parâmetro de correção apresentam formato circular, indicando baixa correlação com os parâmetros cosmológicos.

A Tabela 7 mostra os resultados numéricos. Como já visto na Figura 10, os valores médios dos parâmetros não apresentam alterações significativas. Quanto às incertezas em 1σ, H_0 apresentou uma redução de 28%, indo de 6.4 km s^{-1} Mpc^{-1} para 4.6 km s^{-1} Mpc^{-1}; Ω_m teve uma redução de 22%, indo de uma incerteza média de 0.205 para 0.16; e Ω_Λ, uma redução também de 22%, com a incerteza indo de um valor médio de 0.405 para 0.325. O parâmetro Ω_k foi derivado a partir da normalização dada pela equação (2.42). O valor médio para o parâmetro de correção obtido aqui, $f = 0.72 \pm 0.10$, foi muito similar ao resultado anterior, com a possibilidade de $f = 1$ também sendo desfavorecida em até 2σ. Este valor sugere uma superestimação de 39% nas incertezas dos dados.

Já na Figura 11, vemos que o novo valor para o χ^2 reduzido é $\chi^2_\nu = 0.956$, estando, agora,

ΛCDM plano		
Parâmetro	Sem correção	Com correção
H_0	$66.7 \pm 5.4 \pm 10.8$	$67.1^{+3.8+7.8}_{-3.8-8.0}$
Ω_m	$0.34^{+0.07+0.17}_{-0.07-0.12}$	$0.33^{+0.05+0.12}_{-0.05-0.09}$
Ω_Λ	$0.66^{+0.07+0.12}_{-0.07-0.17}$	$0.67^{+0.05+0.09}_{-0.05-0.12}$
f	——	$0.71^{+0.09+0.22}_{-0.09-0.16}$

Tabela 6 – Valores médios dos parâmetros do modelo ΛCDM plano para os dados de cronômetros cósmicos sem e com o fator de correção f nas incertezas, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança.

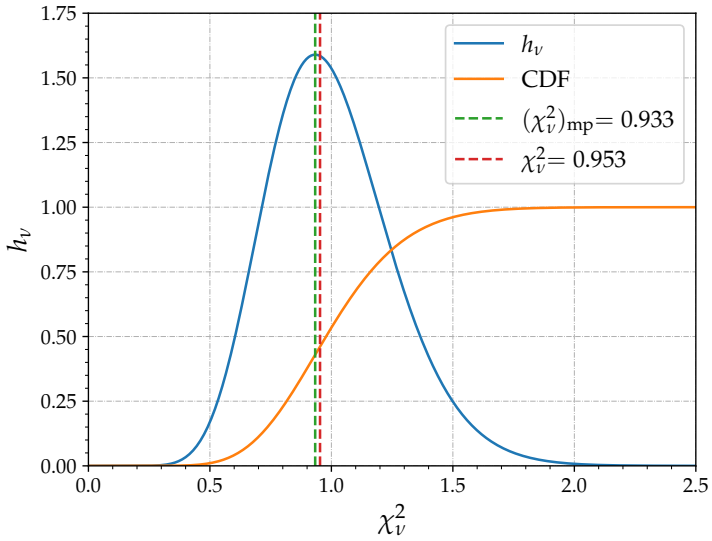

Figura 9 – Distribuição do χ^2_ν e sua CDF para o modelo ΛCDM plano.

próximo de 1. A CDF para esse caso fornece que $P(\chi^2_\nu < 0.956) \approx 46.7\%$. Estes resultados, assim como os do modelo ΛCDM plano, indicam fortemente que as incertezas dos dados de cronômetros cósmicos estão superestimadas e sugerem também que o método de correção não só é válido como melhora consideravelmente as incertezas dos parâmetros cosmológicos.

5.4 COMPARAÇÃO COM OUTRAS ANÁLISES E RESULTADOS

A comparação mais direta a se fazer é com o trabalho de Jesus et al. (2018), já que a análise feita é análoga apesar do conjunto de dados ser diferente. Para o modelo ΛCDM plano, eles obtiveram um parâmetro de correção $f = 0.714 \pm 0.082$, e $f = 0.723^{+0.084}_{-0.085}$ para o modelo OΛCDM. Como esses valores foram obtidos sem considerar os erros sistemáticos e ambos são consistentes com os resultados obtidos neste trabalho, há fortes indícios de que a superestimação nas incertezas vêm, principalmente, dos erros estatísticos, com baixa ou até nenhuma contribuição vinda dos erros sistemáticos.

Quanto ao valor dos parâmetros cosmológicos, os resultados de Jesus et al. (2018) também

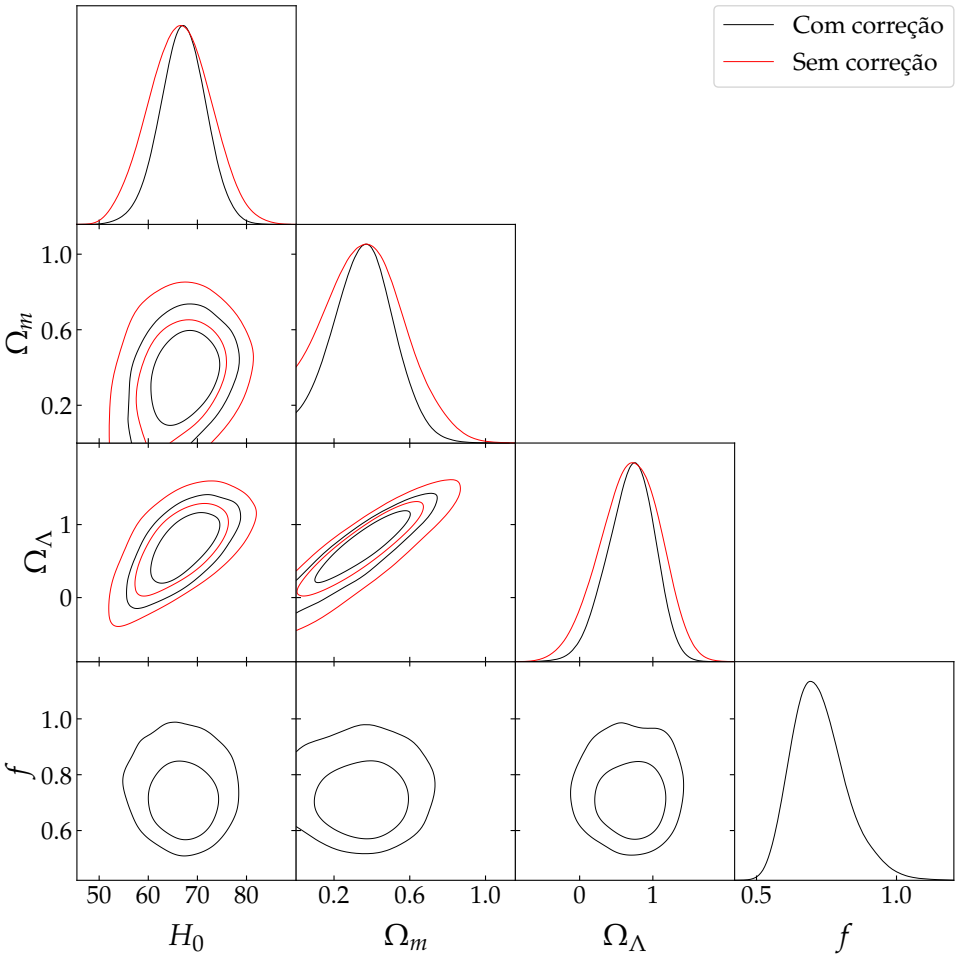

Figura 10 – Resultado da análise do modelo OΛCDM, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. A diagonal contém as posteriores marginalizadas para cada parâmetro. Abaixo da diagonal estão os contornos marginalizados para cada par de parâmetros para níveis de confiança de 68% e 95%.

estão, em geral, de acordo com os obtidos aqui. Para o modelo ΛCDM plano, eles obtiveram $H_0 = 70.4 \pm 1.2$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $\Omega_m = 0.256 \pm 0.014$. O valor de Ω_m está em desacordo por aproximadamente 1.43σ, não apresentando diferença muito significativa. Para o modelo OΛCDM, eles obtiveram $H_0 = 69.5 \pm 2.5$ km s^{-1} Mpc^{-1}, $\Omega_m = 0.242 \pm 0.036$, e $\Omega_\Lambda = 0.66 \pm 0.14$, com todos os resultados estando de acordo com os obtidos neste trabalho.

Antes da correção, o resultado para H_0 do modelo ΛCDM plano apresentava uma tensão de 0.13σ com o resultado da missão Planck ($H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km s^{-1} Mpc^{-1}) e uma tensão de 1.25σ com o resultado do Pantheon+&SH0ES ($H_0 = 73.6 \pm 1.1$ km s^{-1} Mpc^{-1}). Após a correção, houve leve melhora na concordância com o resultado do Planck, com a tensão caindo para 0.08σ, enquanto a tensão com o Pantheon+&SH0ES aumentou para 1.64σ. A tensão com os dados de supernova não é alta o suficiente para ser significativa, demonstrando apenas que há uma tendência dos dados de cronômetros cósmicos concordarem mais com o resultado do Planck. Apesar disso, esse resultado é, no mínimo, curioso, tendo em vista que cronômetros cósmicos são sondas de baixo *redshift*, assim como as supernovas, enquanto a missão Planck

OΛCDM		
Parâmetro	Sem correção	Com correção
H_0	$66.5 \pm 6.4 \pm 12.4$	$67.0^{+4.6+9.3}_{-4.6-9.8}$
Ω_m	$0.37^{+0.20+0.41}_{-0.21-0.35}$	$0.36^{+0.16+0.32}_{-0.16-0.31}$
Ω_Λ	$0.69^{+0.41+0.76}_{-0.42-0.84}$	$0.70^{+0.32+0.59}_{-0.33-0.67}$
Ω_k	$-0.06^{+0.61+1.13}_{-0.59-1.14}$	$-0.05^{+0.47+0.95}_{-0.46-0.89}$
f	—	$0.72^{+0.10+0.23}_{-0.10-0.17}$

Tabela 7 – Valores médios dos parâmetros do modelo OΛCDM para os dados de cronômetros cósmicos sem e com o fator de correção f nas incertezas, com H_0 em km s^{-1} Mpc^{-1}. As incertezas correspondem a 68% e 95% de nível de confiança.

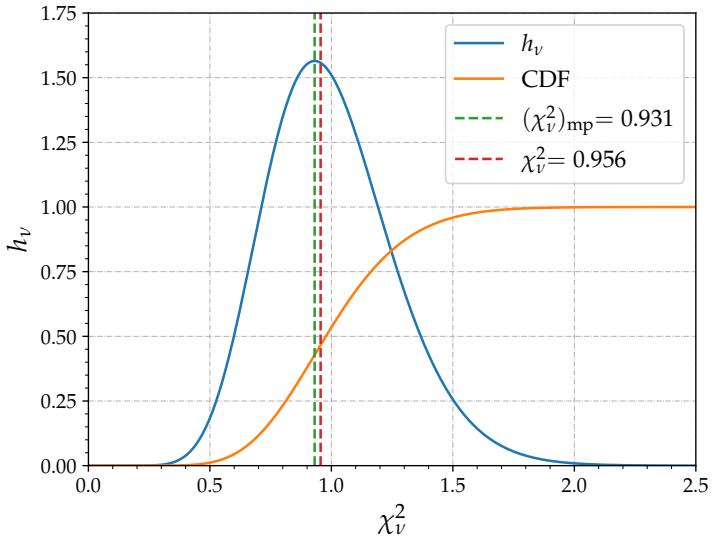

Figura 11 – Distribuição do χ^2_ν e sua CDF para o modelo OΛCDM.

trabalha em alto *redshift*.

6 CONCLUSÃO

Para entendermos a história do Universo, é fundamental que saibamos seu comportamento ao longo do tempo, isto é, conhecer como a expansão do espaço ocorre. O parâmetro de Hubble $H(z)$ nos fornece justamente a taxa de expansão. Portanto, é fundamental conhecermos seu valor atual, a constante de Hubble H_0, para que seja possível extrapolar para o passado.

Há diversos métodos para medir H_0, com os dois principais sendo por meio de supernovas Ia (SH0ES) e CMB (Planck). Ambos os métodos oferecem enorme precisão, mas, apesar disso, estão protagonizando um dos grandes problemas do modelo cosmológico padrão: a tensão de Hubble. A tensão consiste na discrepância entre os valores encontrados em cada método, chegando a uma diferença de até 5σ. Em meio aos métodos de medição alternativos que buscam resolver a tensão de Hubble, os cronômetros cósmicos destacam-se pela independência de modelos cosmológicos. Devido a isso, são fortes candidatos a um método alternativo que valide a medição do Planck ou do SH0ES. Apesar de independerem de modelos cosmológicos, eles dependem fortemente de modelos estelares astrofísicos.

A dependência dos modelos estelares é refletida na estimativa da idade das amostras de galáxias que, junto com o *redshift* compõem as duas medições necessárias para estimar $H(z)$ via cronômetros cósmicos. Enquanto o *redshift* pode ser obtido com grande precisão, a idade das galáxias oferece grande desafio. Além de exigir uma seleção criteriosa, tornando uma tarefa árdua encontrar novas amostras, sofre com grandes incertezas. As barras de erro são grandes o suficiente para ofuscar a maior qualidade do método, impedindo-o de descartar uma das duas medidas de H_0 que configuram a tensão de Hubble, estando de acordo com ambas.

A fim de melhorar o poder estatístico dos cronômetros cósmicos (que já sofrem com a baixa quantidade de dados), este trabalho buscou reduzir suas incertezas. Fez-se a suposição de que essas incertezas estão superestimadas e, por meio de uma análise do χ^2 reduzido, verificou-se tal suposição ao constatar que o χ^2 reduzido para ambos os modelos testados (ΛCDM plano e OΛCDM) eram baixos demais. Então, o método de correção aplicado em Jesus et al. (2018) foi refinado para ser aplicado aos dados de cronômetros cósmicos incluindo a matriz de covariância.

A nova versão do método foi aplicada ao conjunto de dados de supernovas Ia do Pantheon a fim de testá-lo. O primeiro teste tinha o objetivo de verificar se o método era capaz de identificar conjuntos de dados que não necessitam de correção. Como os dados do Pantheon ajustam-se bem aos modelos ($\chi^2_\nu \approx 1$), o resultado do método, um parâmetro de correção $f \approx 1$, é consistente, já que isso indicada que as incertezas estão bem estimadas e não precisam de correção. O segundo teste buscava verificar se o método seria capaz de recuperar um fator multiplicativo de 1.25 inserido na matriz de covariância para inflar artificialmente as incertezas dos dados. O valor obtido para o fator de correção, $f = 0.79 \pm 0.02$, implica que o fator multiplicativo é 1.26 ± 0.03, sendo consistente com o valor inserido. Ambos os resultados fornecem evidências de que o método é capaz de cumprir seu propósito de identificar e recuperar superestimações nas

incertezas dos dados.

Duas análises preliminares foram realizadas para verificar quais características dos dados poderiam impactar no valor estimado de f. A primeira delas consistiu em separar os 33 dados de CC em dois conjuntos: um contendo os dados obtidos via FSF, outro contendo os dados obtidos via D4000. O objetivo era verificar se algum dos métodos de obtenção dos dados era o responsável principal pela superestimação. Os resultados obtidos foram $f_{FSF} = 0.77 \pm 0.14$ e $f_{\mathrm{D4000}} = 0.75 \pm 0.15$, ambos indicando a mesma intensidade de superestimação. Esse resultado sugere que é válido, para este conjunto de dados, assumir um fator de correção f global. A segunda análise buscou analisar o impacto de diferentes combinações da matriz de covariância. Foram testadas três combinações possíveis, com os resultados sendo $f_{C1} = 0.71 \pm 0.09$, $f_{C2} = 0.70 \pm 0.10$ e $f_{C3} = 0.68 \pm 0.09$. Novamente, esses resultados mostram valores consistentes entre si, indicando que a composição da matriz de covariância não possui impacto significativo no valor de f. Isso é um indicativo de que a superestimação reside nas incertezas estatísticas e não nas sistemáticas.

Após as análises preliminares, o método foi aplicado aos modelos ΛCDM plano e OΛCDM, encontrando-se $f = 0.71 \pm 0.09$ e $f = 0.72 \pm 0.10$ em 1σ, respectivamente. Como $f < 1$ em até 2σ para ambos os modelos testados, há fortes indícios de que as incertezas estão superestimadas. Os resultados obtidos indicam uma superestimação em torno de 40% nas incertezas dos dados.

Quanto aos parâmetros cosmológicos, para o modelo ΛCDM plano, foi obtido $H_0 = 67.1 \pm 3.8$ km s^{-1} Mpc^{-1} e $\Omega_m = 0.33 \pm 0.05$ em 1σ, representando reduções nas incertezas de 30% e 29%, respectivamente. Já para o modelo OΛCDM, temos que $H_0 = 67.0 \pm 4.6$ km s^{-1} Mpc^{-1}, $\Omega_m = 0.36 \pm 0.16$ e $\Omega_\Lambda = 0.70^{+0.32}_{-0.33}$ em 1σ, representando reduções nas incertezas de 28%, 22% e 22%, respectivamente. Isso mostra que a introdução do fator de correção melhora consideravelmente a qualidade dos ajustes dos dados de cronômetros cósmicos.

Baseado no trabalho de Jesus et al. (2018) e nas análises preliminares, o melhor candidato para a superestimação são os erros estatísticos, e não os erros sistemáticos. Além disso, como o método de obtenção também não parece impactar significativamente o valor de f, é possível que a superestimação seja causada por uma etapa da estimação de incertezas que os dois métodos compartilham ou por alguma etapa da seleção das amostras de galáxias.

De todo modo, mesmo com a aplicação do método de correção e consequente melhoria nas incertezas, o poder estatístico dos cronômetros cósmicos manteve-se baixo, não sendo capaz de distinguir entre os resultados do Planck e do Pantheon+&SH0ES. Apesar disso, o resultado de H_0 para o modelo ΛCDM plano apresentou uma tendência a ser mais compatível com o valor do Planck, com a tensão entre os dois resultados diminuindo enquanto a tensão com o resultado do Pantheon+&SH0ES aumentou levemente. Isso evidencia que, mesmo se as estimativas das incertezas fossem menos conservadoras, são necessárias mais amostras de cronômetros cósmicos para que esses dados possam, sozinhos, apontar uma direção diante da tensão de Hubble.

REFERÊNCIAS

ABDALLA, E. et al. Cosmology intertwined: A review of the particle physics, astrophysics, and cosmology associated with the cosmological tensions and anomalies. **Journal of High Energy Astrophysics**, v. 34, p. 49–211, 2022.

AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, v. 641, p. A6, 2020.

ALPHER, R.; HERMAN, R. Evolution of the Universe. **Nature**, v. 162, p. 774–775, 1948.

BERNARDEAU, F. et al. Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory. **Physics Reports**, v. 367, n. 1, p. 1–248, 2002.

BERNARDIS, P. de et al. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. **Nature**, v. 404, p. 955–959, 2000.

BEVINGTON, P. R.; ROBINSON, D. K. **Data reduction and error analysis for physical sciences**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003.

BLUMENTHAL, G. R. et al. Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter. **Nature**, v. 311, p. 517–525, 1984.

BORGHI, N.; MORESCO, M.; CIMATTI, A. Toward a Better Understanding of Cosmic Chronometers: A New Measurement of H(z) at z 0.7. **The Astrophysical Journal Letters**, The American Astronomical Society, v. 928, n. 1, p. L4, mar 2022.

BROUT, D. et al. The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 938, n. 2, p. 110, oct 2022.

BRUZUAL, G. Spectral evolution of galaxies. I. Early-type systems. **The Astrophysical Journal**, v. 273, p. 105–127, oct 1983.

BURGESS, C. P. The cosmological constant problem: why it's hard to get dark energy from microphysics. In: **Post-Planck Cosmology: Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 100, July 2013**. Oxford: Oxford University Press, 2015.

CAPPELLARI, M. Improving the full spectrum fitting method: accurate convolution with Gauss–Hermite functions. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 466, n. 1, p. 798–811, apr 2017. ISSN 0035-8711, 1365-2966.

CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. **An Introduction to Modern Astrophysics**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2014.

CONROY, C. Modeling the panchromatic spectral energy distributions of galaxies. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 51, p. 393–455, 2013.

COX, R. T. Postulates of Probability. **Nature**, v. 157, n. 3990, p. 517–517, abr 1946.

COX, R. T. Probability, Frequency and Reasonable Expectation. **American Journal of Physics**, v. 14, n. 1, p. 1–13, jan 1946.

CYBURT, R. H. et al. Big bang nucleosynthesis: Present status. **Reviews of Modern Physics**, v. 88, p. 015004, 2016.

DICKE, R. H. et al. Cosmic Black-Body Radiation. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 414–419, 1965.

DOKKUM, P. G. V. et al. Hubble Space Telescope Photometry and Keck Spectroscopy of the Rich Cluster MS 1054-03: Morphologies, Butcher-Oemler Effect, and the Color-Magnitude Relation at z = 0.83. **The Astrophysical Journal**, v. 541, n. 1, p. 95–111, sept 2000. ISSN 0004-637X, 1538-4357.

EFSTATHIOU, G.; GRATTON, S. The evidence for a spatially flat Universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 496, n. 1, p. L91–L95, 2020.

EINSTEIN, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**, p. 142–152, 1917.

FOREMAN-MACKEY, D. et al. emcee: The MCMC Hammer. **Publications of the Astronomical Society of the Pacific**, University of Chicago Press, v. 125, n. 925, p. 306, feb 2013.

FRIEDMANN, A. Über die Krümmung des Raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 10, p. 377–386, 1922.

FRIEDMANN, A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 21, p. 326–332, 1924.

GAMOW, G. The Evolution of the Universe. **Nature**, v. 162, p. 680–682, 1948.

GOODMAN, J.; WEARE, J. Ensemble samplers with affine invariance. **Communications in Applied Mathematics and Computational Science**, v. 5, n. 1, p. 65–80, 2010.

GREGORY, P. **Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

HASTINGS, W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, v. 57, n. 1, p. 97–109, 04 1970.

HOGG, D. W.; BOVY, J.; LANG, D. **Data analysis recipes: Fitting a model to data**. 2010.

HOGG, D. W. et al. Cosmic Homogeneity Demonstrated with Luminous Red Galaxies. **The Astrophysical Journal**, v. 624, n. 1, p. 54, 2005.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.

JAYNES, E. T. **Probability Theory: The Logic of Science**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

JESUS, J. F. et al. Bayesian correction of H(z) data uncertainties. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 477, n. 3, p. 2867–2873, 03 2018. ISSN 0035-8711.

JIAO, K. et al. New Observational H(z) Data from Full-spectrum Fitting of Cosmic Chronometers in the LEGA-C Survey. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, The American Astronomical Society, v. 265, n. 2, p. 48, mar 2023.

JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. **The Astrophysical Journal**, v. 573, n. 1, p. 37, 2002.

KVINT, N.; JESUS, J.; PEREIRA, S. Bayesian correction of H(z) cosmic chronometers data with systematic errors. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2025, n. 10, p. 041, oct 2025.

LEMAÎTRE, G. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. **Annales de la Société Scientifique de Bruxelles**, v. 47, p. 49–59, jan 1927.

LIMA, J. A. S.; BASILAKOS, S.; SOLÀ, J. Expansion history with decaying vacuum: a complete cosmological scenario. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 431, n. 1, p. 923–929, 2013.

LONGAIR, M. S. **The Cosmic Century:** A History of Astrophysics and Cosmology. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

MACKAY, D. J. C. **Information Theory, Inference and Learning Algorithms**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

MARTIN, J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). **Comptes Rendus. Physique**, Elsevier, v. 13, n. 6-7, p. 566–665, 2012.

METROPOLIS, N. et al. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. **The Journal of Chemical Physics**, AIP Publishing, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, jun 1953.

MORESCO, M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at z 2. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 450, n. 1, p. L16–L20, 04 2015. ISSN 1745-3925.

MORESCO, M. Measuring the expansion history of the Universe with cosmic chronometers. arXiv, n. arXiv:2412.01994, dec 2024. ArXiv:2412.01994 [astro-ph].

MORESCO, M. Addressing the Hubble Tension with Cosmic Chronometers. In: VALENTINO, E. D.; BROUT, D. (Ed.). **The Hubble Constant Tension**. Singapore: Springer Nature Singapore, 2024, (Springer Series in Astrophysics and Cosmology). p. 277–293.

MORESCO, M. et al. Unveiling the Universe with emerging cosmological probes. **Living Reviews in Relativity**, v. 25, n. 1, p. 6, dec 2022.

MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to z 1.1 from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2012, n. 08, p. 006–006, aug 2012.

MORESCO, M. et al. Constraining the expansion rate of the Universe using low-redshift ellipticals as cosmic chronometers. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2011, n. 03, p. 045, mar. 2011.

MORESCO, M. et al. Setting the Stage for Cosmic Chronometers. I. Assessing the Impact of Young Stellar Populations on Hubble Parameter Measurements. **The Astrophysical Journal**, v. 868, n. 2, p. 84, dec 2018.

MORESCO, M. et al. Setting the Stage for Cosmic Chronometers. II. Impact of Stellar Population Synthesis Models Systematics and Full Covariance Matrix. **The Astrophysical Journal**, v. 898, n. 1, p. 82, july 2020.

MORESCO, M. et al. A 6% measurement of the Hubble parameter at z 0.45: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2016, n. 05, p. 014, may 2016.

O'RAIFEARTAIGH, C. et al. Einstein's 1917 static model of the universe: a centennial review. **The European Physical Journal H**, v. 42, p. 431–474, 2017.

PEEBLES, P. J. E. Large-scale background temperature and mass fluctuations due to scale-invariant primeval perturbations. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 263, p. L1–L5, 1982.

PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, 1965.

PERICO, E. L. D. et al. Complete cosmic history with a dynamical $\Lambda = \Lambda(H)$ term. **Physical Review D**, v. 88, p. 063531, 2013.

PERIVOLAROPOULOS, L.; SKARA, F. Challenges for ΛCDM: An update. **New Astronomy Reviews**, v. 95, p. 101659, 2022.

PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565, jun 1999.

POPOLO, A. D. Dark matter, density perturbations, and structure formation. **Astronomy Reports**, v. 51, p. 169–196, 2007.

PRESS, W. H. et al. **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

RATSIMBAZAFY, A. L. et al. Age-dating luminous red galaxies observed with the Southern African Large Telescope. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 467, n. 3, p. 3239–3254, 02 2017. ISSN 0035-8711.

RIESS, A. G. et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

RIESS, A. G. et al. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s^{-1} Mpc^{-1} Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 934, n. 1, p. L7, 2022.

ROBERTSON, H. P. Kinematics and World-Structure. **The Astrophysical Journal**, v. 82, p. 284, 1935.

RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K.; THONNARD, N. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). **The Astrophysical Journal**, v. 238, p. 471–487, 1980.

RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

SARKAR, P. et al. The scale of homogeneity of the galaxy distribution in SDSS DR6. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 399, n. 1, p. L128–L131, 2009.

SHARMA, S. Markov chain monte carlo methods. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 55, p. 213–259, 2017.

SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 71, p. 123001, Jun 2005.

SIVIA, D.; SKILLING, J. **Data Analysis: A Bayesian Tutorial**. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2006.

SOLÀ, J. Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 453, n. 1, p. 012015, 2013.

STEINHARDT, P. J. Cosmological challenges for the 21st century. In: FITCH, V. L.; MARLOW, D. R. (Ed.). **Critical Problems in Physics**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997. p. 123–145.

STERN, D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I: H(z) measurements. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2010, n. 02, p. 008, feb 2010.

TOMASETTI, E. et al. A new measurement of the expansion history of the Universe at z = 1.26 with cosmic chronometers in VANDELS. **Astronomy & Astrophysics**, v. 679, n. A96, p. 18, may 2023.

TROTTA, R. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. **Contemporary Physics**, v. 49, p. 71–104, jul 2008.

VALENTINO, E. D. A combined analysis of the H0 late time direct measurements and the impact on the Dark Energy sector. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 502, n. 2, p. 2065–2073, 2021.

VALENTINO, E. D. et al. Cosmology intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8. **Astroparticle Physics**, v. 131, p. 102604, 2021.

VALENTINO, E. D. et al. In the realm of the Hubble tension—a review of solutions. **Classical and Quantum Gravity**, v. 38, n. 15, p. 153001, 2021.

VELTEN, H. E. S.; MARTTENS, R. F. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological "coincidence problem". **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 11, p. 3160, 2014.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

WAGA, I. Dark energy and the accelerated expansion of the Universe. **Brazilian Journal of Physics**, v. 30, n. 2, 2000.

WALKER, A. G. On Milne's Theory of World-Structure. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. 42, p. 90–127, 1937.

WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 61, n. 1, p. 1–23, 1989.

WEINBERG, S. **Cosmology**. 1. ed. Oxford: OUP Oxford, 2008.

WONG, K. C. et al. H0LiCOW – XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3σ tension between early- and late-Universe probes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 498, n. 1, p. 1420–1439, 2019.

YADAV, J. et al. Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 364, n. 2, p. 601–606, 2005.

ZEL'DOVICH, Y. B. The cosmological constant and the theory of elementary particles. **Soviet Physics Uspekhi**, v. 11, n. 3, p. 381–393, 1968. Russian original: *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **95**, 209–230 (1968).

ZHANG, C. et al. Four new observational H(z) data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 14, n. 10, p. 1221, oct 2014.

ZLATEV, I.; WANG, L.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 82, n. 5, p. 896–899, 1999.

ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. **Helvetica Physica Acta**, v. 6, p. 110–127, 1933.

ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. **The Astrophysical Journal**, v. 86, p. 217, 1937.

DADOS CURRICULARES

IDENTIFICAÇÃO	
	Nícolas Romeiro Kvint 28/02/2000.
Nacionalidade	Brasileiro
Nome em citações bibliográficas	Kvint, Nícolas Kvint, N.
Currículo Lattes	http://lattes.cnpq.br/2349532013760072
ORCID	https://orcid.org/0009-0003-8964-2885
Outro identificador	
FORMAÇÃO ACADÊMICA	
2020/2023	Bacharelado em Física Universidade Federal de Minas Gerais
PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA	
Kvint, N.; Jesus, J.; PEREIRA, S. *Bayesian correction of $H(z)$ cosmic chronometers data with systematic errors*. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2025, n. 10, p. 041, oct 2025	
PARTICIPAÇÃO EM BANCAS E ORIENTAÇÕES	
Bancas de trabalhos de conclusão	
Orientações	
PARTICIPAÇÃO EM EVENTOS CIENTÍFICOS	
CONGRESSO "DIMAS ROBERTO VOLLET", 2, 2025, (Rio Claro). Correção bayesiana dos dados de $H(z)$ de cronômetros cósmicos com erros sistemáticos. 2025. (Congresso). CONGRESSO PAULO LEAL FERREIRA, 48, 2025, (São Paulo). Correção bayesiana dos dados de $H(z)$ de cronômetros cósmicos com erros sistemáticos. 2025. (Congresso).	