UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Densidade de Estados para o Modelo de Anderson Discreto

Yino Beto Cueva Carranza

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Presidente Prudente - SP
Fevereiro de 2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Densidade de Estados para o Modelo de Anderson Discreto

Yino Beto Cueva Carranza

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente - SP

Fevereiro de 2019

C312d

Carranza, Yino Beto Cueva
Densidade de Estados para o Modelo de Anderson Discreto / Yino Beto Cueva Carranza. -- Presidente Prudente, 2019
73 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Roberto de Almeida Prado

1. Modelo de Anderson discreto. 2. Densidade de estados. 3. Ergodicidade. 4. Lifshitz tails. 5. Fórmula de Thouless. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Densidade de Estados para o Modelo de Anderson Discreto

AUTOR: YINO BETO CUEVA CARRANZA
ORIENTADOR: ROBERTO DE ALMEIDA PRADO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Roberto de Almeida Prado
Prof. Dr. ROBERTO DE ALMEIDA PRADO
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente

Gastão de Almeida Braga
Prof. Dr. GASTÃO DE ALMEIDA BRAGA
Departamento de Matemática / Universidade Federal de Minas Gerais

Presidente Prudente, 22 de fevereiro de 2019

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua imensa compaixão, dando-me força e saúde para superar todos os obstáculos.

Aos meus pais Manuel e Bertila e aos meus irmãos Sonia, Lidia e Higor pelo amor, apoio, incentivo e compreensão.

Ao Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado pela paciência, dedicação, incentivo e excelente orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da UNESP pelos conhecimentos transmitidos.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, em especial à Cinthia, pela atenção e apoio oferecido.

A todos os meus colegas da Pós-Graduação que me ajudaram.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Zero, esse nada que é tudo.
Laisant

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar a densidade de estados para o modelo de Anderson discreto multidimensional. Tal modelo constitui uma família de operadores de Schrödinger aleatórios e ergódicos. Primeiramente estudamos propriedades espectrais, ergódicas e determinamos explicitamente o espectro do modelo de Anderson, o qual é um conjunto não aleatório q.t.p.. Abordamos também condições de fronteira simples, de Neumann e de Dirichlet para tais operadores atuando no espaço l^2 restrito a cubos finitos. Em seguida discutimos a medida densidade de estados com duas abordagens diferentes e a sua conexão com o espectro do modelo de Anderson, mais geralmente com o espectro de um operador ergódico. Além disso, estudamos o fenômeno chamado Lifshitz tails para o modelo de Anderson discreto, que descreve o comportamento assintótico da densidade integrada de estados próximo ao ínfimo (ou supremo) do espectro. Por fim estudamos a subarmonicidade do expoente de Lyapunov, a fórmula de Thouless e a log-Hölder continuidade da densidade integrada de estados.

Palavras-Chave: *Modelo de Anderson discreto, Densidade de estados, Ergodicidade, Lifshitz tails, Fórmula de Thouless.*

Abstract

The present work have as main objective to study the density of states for the discrete multidimensional Anderson model. Such model constitutes a family of ergodic and random Schrödinger operators. First we study ergodic and spectral properties, and explicitly determine the spectrum of the Anderson model, which is a non-random set almost surely. We also deal with simple boundary conditions, Neumann and Dirichlet for such operators acting in the space l^2 restricted to finite cubes. Later we discuss the density of state measure with two different approaches and the connection between the spectrum of an ergodic operator and this measure. In addition, we study the phenomenon called Lifshitz tails for the discrete Anderson model, which describes the asymptotic behavior of the integrated density of states near the infimum (or supreme) of the spectrum. Finally we study the subharmonicity of the Lyapunov exponent, Thouless formula and log-Hölder continuity of the integrated density of states.

Keywords: *Discrete Anderson model, Density of states, Ergodicity, Lifshitz tails, Thouless formula.*

Sumário

Capítulo

1

Introdução

Os operadores de Schrödinger têm sido um assunto importante em várias pesquisas na área de Física-Matemática. Tais operadores são usados para descrever a evolução temporal do estado quântico de um sistema físico. A equação de Schrödinger dependente do tempo, dada por $i\partial_t \psi = H\psi$, determina uma evolução dinâmica do sistema dada por $\psi(t) = e^{itH}\psi(0)$ (ou seja, a evolução temporal do vetor $\psi(t)$ no espaço de Hilbert descreve o movimento do elétron), onde $H = H_0 + V$ é um operador de Schrödinger sobre o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ ou $l^2(\mathbb{Z}^d)$, em que H_0 é o Laplaciano e V um potencial.

Algumas classes de potenciais têm interesse particular, tais como potenciais periódicos, quase-periódicos ou aleatórios. Os operadores de Schrödinger com potenciais periódicos são modelos quânticos adequados para o estudo de cristais sólidos perfeitos e com potenciais quase-periódicos para o estudo de quase-cristais. Por outro lado, os operadores de Schrödinger com potenciais aleatórios são usados como modelos para sistemas mecânicos quânticos desordenados, como ocorrem em ligas de metais desordenadas, sólidos amorfos ou líquidos.

Os operadores de Schrödinger podem ser classificados, do ponto de vista espectral ou dinâmico, de acordo com a natureza do potencial V. O caso estudado nesta dissertação aborda uma classe de operadores de Schrödinger aleatórios sobre $l^2(\mathbb{Z}^d)$ denominada modelo de Anderson discreto.

A maior parte dos modelos referentes a sólidos levam em conta que os mesmos possuem uma estrutura ordenada dos átomos e que possuem uma estrutura periódica perfeita. Porém, todos os materiais, estejam eles na natureza ou sejam fabricados em laboratório, possuem algum tipo de desordem, seja ela pela presença de átomos diferentes dos átomos da rede principal, ou até mesmo devido a uma distorção.

O problema de localização de estados quânticos tem atraído muita atenção nas últimas décadas na tentativa de explicar a propriedade de transporte de um elétron em um sólido amorfo. O modelo básico para o estudo dessa propriedade é o modelo proposto pelo físico Anderson em 1958, que descreve os efeitos da mecânica quântica de desordem como os presentes em ligas de metais e meios cuja estrutura não tem uma ordenação, ou seja, não possuem estruturas atômicas definidas. Tal modelo ficou conhecido como modelo de Anderson, sendo apresentado pela primeira vez em [2]. Anderson percebeu que o transporte de um elétron era suprimido devido a desordem, e assim impurezas aleatórias poderiam transformar os condutores em isolantes; em termos matemáticos significa que certas partes do espectro do operador energia potencial consiste de espectro pontual puro (para mais detalhes veja [39]). A partir deste modelo, foi possível iniciar um estudo mais aprofundado sobre os estados eletrônicos de sólidos amorfos, ou seja, sólidos que não possuem uma periodicidade na rede $\mathbb{Z}^d$.

Agora vamos introduzir o modelo de Anderson que estamos interessados em estudar nesta dissertação (ver [19]).

Definição 1 *O modelo de Anderson discreto d-dimensional, $d \geq 1$, é a família de operadores de Schrödinger aleatórios*

$$H_\omega = H_0 + V_\omega \tag{1.1}$$

atuando sobre o espaço de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}^d)$, em que H_0 é o Laplaciano discreto dado por

$$(H_0 u)(n) := -\sum_{m:\|m-n\|_1=1} (u(m) - u(n)), \tag{1.2}$$

onde $\|.\|_1$ é a norma da soma definida na Seção 3.1 e cada V_ω é um potencial aleatório atuando sobre $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ como operador de multiplicação, isto é, $(V_\omega u)(n) = v_\omega(n)u(n)$, em que $\{v_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ é uma sequência a valores reais de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com uma medida de probabilidade comum $\mathbb{P}_0$ definida por

$$\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}\left(\{\omega : v_\omega(n) \in A\}\right)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^d$ e para qualquer conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, onde $\mathbb{P}$ é a medida de probabilidade sobre conjuntos borelianos cilíndricos de $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

Daremos uma atenção especial para o espectro desses operadores H_ω, uma vez que, fisicamente, este representa as possíveis energias de um elétron movendo-se na rede $\mathbb{Z}^d$ e governado pelo operador H_ω.

O teorema seguinte, cuja demonstração encontra-se no Capítulo 3, descreve explicitamente o espectro do modelo de Anderson, o qual é um conjunto não aleatório $\mathbb{P}$-q.t.p..

Teorema 1 *O espectro do modelo de Anderson H_ω é $\mathbb{P}$-q.t.p. dado por*

$$\sigma(H_\omega) = [0, 4d] + supp\ \mathbb{P}_0. \tag{1.3}$$

No Capítulo 4 estudaremos alguns conceitos e resultados envolvendo teoria ergódica, os quais serão usados no Capítulo 5. Essa teoria estuda o comportamento de sistemas dinâmicos com medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. As raízes da teoria ergódica iniciam-se na primeira metade do século XIX. De fato, em 1838 o matemático francês Joseph Liouville observou que todo sistema da Mecânica Newtoniana (com conservação de energia) admite uma medida invariante natural no seu espaço de configurações. Além disso, em 1845 o matemático e físico alemão Carl Friedrich Gauss observou que uma certa transformação no intervalo admite uma medida invariante que é equivalente à medida de Lebesgue. Três teoremas bastante importantes desta teoria são o teorema ergódico subaditivo de Kingman, o teorema multiplicativo de Osceledec e o teorema de Birkhoff. No Capítulo 5 usaremos o teorema ergódico de Birkhoff (Teorema 9) para demonstrar a existência da densidade de estados, que é o nosso principal objeto de estudo. Também usaremos no Capítulo 7 o teorema ergódico subaditivo de Kingman (Teorema 16) no estudo do expoente de Lyapunov.

No Capítulo 5 estudaremos a medida densidade de estados (veja [14, 16, 18, 20, 44]) que é uma quantidade de fundamental importância para certos modelos físicos da matéria condensada. A medida densidade de estados $\nu([E_1, E_2])$, definida abaixo (Definição 2), fornece o número de estados por unidade de volume com energia entre E_1 e E_2. A primeira demonstração da existência da densidade de estados foi apresentada em 1973 por Pastur [33] e a demonstração via limite termodinâmico foi feita por Avron e Simon [3] para operadores quase-periódicos.

Como sistemas típicos que surgem na física do estado sólido têm potenciais periódicos ou ergódicos, então o espectro do Hamiltoniano correspondente não é discreto, logo não podemos apenas contar os autovalores dentro de um intervalo $[E_1, E_2]$, o que é o mesmo que tomar a dimensão da projeção espectral correspondente, já que a dimensão de qualquer projeção espectral de H_ω é zero ou infinito (Veja Lema 1). Por outro lado, o número de elétrons em tal sistema é infinito. Por essas duas razões, o princípio de exclusão de Pauli não faz sentido imediato, pois ele estabelece que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado energético do sistema. No entanto, há uma possibilidade que esse princípio faz sentido, que é quando restringe-se o sistema a um cubo finito Λ_L.

Devido aos fatos mencionados acima tomamos a projeção espectral de H_ω no cubo finito Λ_L, em seguida tomamos a dimensão de $Ran\chi_{\Lambda_L}(H_\omega)$ e dividimos por $|\Lambda_L| = (2L+1)^d$. Finalmente, tomamos o limite quando $L \longrightarrow \infty$. Este procedimento é chamado limite termodinâmico (veja detalhes na Seção 5.1 e a Proposição 8).

Definição 2 *A medida ν definida por*

$$\nu(A) = \mathbb{E}(\langle \delta_0, \chi_A(H_\omega)\delta_0 \rangle) \ , \qquad \textit{para conjuntos de Borel}\, A \subset \mathbb{R} \ , \tag{1.4}$$

é chamada densidade de estados para H_ω. A função distribuição N de ν dada por

$$N(E) = \nu((-\infty, E]) \tag{1.5}$$

é chamada densidade integrada de estados para H_ω.

Na definição acima, os vetores δ_i constituem a base ortonormal canônica do espaço $l^2(\mathbb{Z}^d)$, a qual está definida no Capítulo 3 e $\mathbb{E}(X) := \displaystyle\int X d\mathbb{P}$ denota o valor esperado da variável aleatória X. Notemos que a medida densidade de estados ν é não-aleatória e é uma medida de probabilidade, pois $\nu(\mathbb{R}) = 1$.

Um fato interessante é a conexão que existe entre o espectro do operador H_ω (mais geralmente, de um operador ergódico) e a sua medida densidade de estados ν. Tal conexão é descrita no resultado a seguir, cuja demonstração encontra-se no Capítulo 5.

Proposição 1 *Para o modelo de Anderson H_ω definido acima tem-se que*

$$supp(\nu) = \sigma(H_\omega)$$

onde $supp(\nu)$ denota o suporte da medida ν.

Outro tópico que abordaremos neste trabalho são as condições de fronteira para operadores de Schrödinger atuando no espaço l^2 restrito a cubos finitos (veja Seção 5.2). O principal motivo para estudar tais condições é porque usaremos como ferramenta na demonstração do Teorema 2 abaixo, o qual descreve o fenômeno Lifshitz tails para o modelo de Anderson H_ω.

O intervalo previsível dos espectros de operadores aleatórios com potenciais i.i.d. muitas vezes não é compatível com o calculado via método numérico. A razão está no interessante fenômeno chamado Lifshitz tails, que foi descoberto na década de 1960 pelo físico I. Lifshitz (veja [30]). Ele observou que a densidade integrada de estados $N(E)$ decai exponencialmente quando a energia E está muito próximo do ínfimo do espectro, o que significa que operadores de Schrödinger com potenciais aleatórios têm estados (autofunções) com energias baixas em regiões onde os potenciais alcançam valores extremamente baixos (veja [1]). Esse fenômeno pode ser descrito matematicamente da seguinte forma, para um sistema ordenado (ou seja, para operadores de Schrödinger H com potenciais periódicos):

$$N(E) \sim C(E - E_0)^{-\frac{d}{2}} \quad \text{quando} \;\; E \searrow E_0 \tag{1.6}$$

onde $E_0 = \inf \sigma(H)$ e para um sistema desordenado (ou seja, para operadores de Schrödinger H com potenciais aleatórios) como

$$N(E) \sim C_1 e^{C(E-E_0)^{-\frac{d}{2}}} \quad \text{quando} \;\; E \searrow E_0. \tag{1.7}$$

Neste trabalho apresentamos uma forma mais fraca de (1.7) para o modelo de Anderson discreto dada pelo teorema a seguir, cuja demonstração encontra-se no Capítulo 6. Para resultados sobre Lifshitz tails para outros modelos aleatórios veja, por exemplo, [41].

Teorema 2 (Lifshitz tails). *Para o modelo de Anderson H_ω definido acima com a medida $\mathbb{P}_0$ não-trivial e tendo suporte limitado inferiormente, a densidade integrada de estados $N(E)$ satisfaz*

$$\lim_{E \searrow E_0} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E - E_0)} = -\frac{d}{2}\ . \tag{1.8}$$

É importante notar que na relação (1.8) a energia converge para o ínfimo E_0 do espectro $\sigma(H_\omega)$ ($E \searrow E_0$). É possível obter um comportamento similar para $N(E)$ quando a energia converge para o supremo do espectro de H_ω (veja detalhes em [40]).

Finalmente, no Capítulo 7 estudamos alguns resultados relacionados ao expoente de Lyapunov do modelo de Anderson unidimensional, sendo nosso objetivo principal mostrar a fórmula de Thouless (relação do expoente de Lyapunov com a densidade integrada de estados) e a log-Hölder continuidade da densidade integrada de estados.

Capítulo

2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional, que serão utilizados nos próximos capítulos, os quais podem ser encontrados nas referências [7, 12, 13, 21, 23, 37, 38, 43].

2.1 Resultados de Análise Funcional

Definição 3 (**i**) *Sejam X e Y espaços vetoriais. Um operador linear é uma aplicação $A : D(A) \subset X \to Y$, em que seu domínio $D(A)$ é um subespaço vetorial e $A(\xi + \alpha\eta) = A(\xi) + \alpha A(\eta)$ para quaisquer $\xi, \eta \in D(A)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.*

(**ii**) *Dizemos que um operador linear A é limitado se existe $C > 0$ de modo que $\|A(\xi)\| \leq C\|\xi\|$ para todo $\xi \in D(A)$.*

Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ operador linear num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador resolvente de A em λ, dado por

$$R_\lambda(A) : \mathcal{H} \longrightarrow D(A) \ , \quad R_\lambda(A) := (A - \lambda\mathbf{1})^{-1},$$

existe e é limitado. Por simplicidade usaremos a notação $A - \lambda\mathbf{1} = A - \lambda$.

O operador resolvente satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Se $z_1, z_2 \in \rho(A)$ então

$$\begin{aligned}(A - z_1)^{-1} - (A - z_2)^{-1} &= (z_1 - z_2)(A - z_1)^{-1}(A - z_2)^{-1} \\ &= (z_1 - z_2)(A - z_2)^{-1}(A - z_1)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

(ii) Se $D(A) = D(B)$ e $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$, então

$$\begin{aligned}(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1} &= (A - z)^{-1}(B - A)(B - z)^{-1} \\ &= (B - z)^{-1}(B - A)(A - z)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definição 4 *O espectro de um operador linear A é o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Para $z \in \mathbb{C}$ e $M \subset \mathbb{C}$, definimos a distância do ponto z ao conjunto M como

$$\mathrm{dist}(z, M) := \inf\{|z - \zeta| : \zeta \in M\}.$$

Seja A um operador auto-adjunto e $z \in \rho(A)$. Tem-se que

$$\|(A-z)^{-1}\| = \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))} \ .$$

Em particular, para o operador auto-adjunto A e $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\|(A-z)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\text{Im} z|} \ .$$

Seja P um polinômio complexo em uma variável real. Se $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_n \lambda^j$, então

$$P(A) = \sum_{j=0}^{n} a_n A^j.$$

Proposição 2 *Seja A um operador auto-adjunto. Então*

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|P(A)\|^2 &= \|P(A)^* P(A)\| \\ &= \|(\overline{P}P)(A)\| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{P}P(A))} |\lambda| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{P}P(\lambda)| \\ &= \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| \right)^2 . \end{aligned}$$

■

Seja A um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Denotemos por $C(\sigma(A))$ o conjunto de todas as funções contínuas $f : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ e por $B(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores lineares limitados de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$. Existe uma única aplicação $\phi : C(\sigma(A)) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ satisfazendo as seguintes propriedades para $f, g \in C(\sigma(A))$ (veja [37]):

(a) $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$, $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$, $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{I}$, $\phi(\overline{f}) = (\phi(f))^*$;

(b) ϕ é contínua, ou seja, $\|\phi(f)\|_{B(\mathcal{H})} \leqslant C\|f\|_\infty$ para alguma constante $0 < C < \infty$;

(c) Se f é a função tal que $f(x) = x$, então $\phi(f) = A$;

(d) Se $A(\psi) = \lambda\psi$, então $\phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$;

(e) $\sigma[\phi(f)] = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$;

(f) Se $f \geq 0$, então $\phi(f) \geq 0$.

Definição 5 *(a) Seja X um conjunto não vazio. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra se satisfaz:*

1. *Se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$;*

2. *Se $E \in \mathcal{A}$, então $E^c \in \mathcal{A}$.*

(b) Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra. Dizemos que a função

$$u : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

é uma medida se

1. *$u(\emptyset) = 0$;*

2. *para toda sequência $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$ tem-se*

$$u\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} u(E_i).$$

O teorema a seguir garante a existência da medida espectral, cuja demonstração desse importante resultado pode ser encontrada em [6].

Teorema 3 (Representação de Riesz) *Seja X um espaço compacto de Hausdorff e $C(X)$ o espaço de funções contínuas de X em R. Para qualquer funcional linear positivo ϕ em $C(X)$, existe uma única medida μ em X tal que*

$$\phi(f) = \int_X f(x)d\mu(x). \tag{2.3}$$

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto limitado e $\psi \in \mathcal{H}$. Existe uma única medida positiva $\mu_{\psi,\psi}$ em $\sigma(A)$ dependendo de A e ψ tal que para todo $f \in C(\sigma(A))$,

$$\langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)d\mu_{\psi,\psi}(\lambda).$$

A medida $\mu_{\psi,\psi}$ é chamada de medida espectral associada ao vetor ψ. Usando a identidade de polarização obtemos

$$\langle \psi, f(A)\varphi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)d\mu_{\psi,\varphi}(\lambda).$$

Para um conjunto de Borel $M \subset \mathbb{R}$, χ_M denota a função característica definida por

$$\chi_M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \lambda \in M, \\ 0 & \text{se} \quad \lambda \notin M. \end{cases}$$

Definição 6 *Seja A um operador auto-adjunto limitado e $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Borel. $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(A)$ é chamado projeção espectral de A, onde $\chi_\Omega(A)$ é a função característica de $\sigma(A)$ no conjunto Ω.*

A família $\{P_\Omega\}$ de projeções espectrais de um operador auto-adjunto limitado A satisfaz as seguintes propriedades:
(a) Cada P_Ω é uma projeção ortogonal;
(b) $P_\varnothing = 0$;
(c) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$;
(d) Se $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ com $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ para todo $n \neq m$, então

$$P_\Omega = \lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}.$$

A família de projeções ortogonais satisfazendo (a)-(d) é chamada projeção a valor de medida do operador A.

Proposição 3 $\lambda \in \sigma(A)$ *se, e somente se,* $P_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} \neq 0$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [12].

O operador A chama-se positivo se $\langle \phi, A\phi \rangle \geqslant 0, \ \forall\, \phi \in D(A)$, e é dito limitado inferiormente se $\langle \phi, A\phi \rangle \geqslant -M\langle \phi, \phi \rangle$, $\forall\, \phi \in D(A)$ e para algum $M \in \mathbb{R}$.

Definição 7 *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma base ortonormal de* $\mathcal{H}$. *Para um operador positivo* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *define-se o traço de* A *por*

$$trA = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi_n, A\xi_n \rangle.$$

O traço é linear, ou seja, $tr(A + B) = trA + trB$ e $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, $tr(AB) = tr(BA)$ e o traço independe da base ortonormal.

Teorema 4 (Identidade de Parseval) *Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert e* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma base ortonormal de* $\mathcal{H}$. *Então para todo* $\xi \in \mathcal{H}$ *tem-se*

$$\xi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \xi_n, \xi \rangle \xi_n \tag{2.4}$$

e

$$\|\xi\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \xi_n, \xi \rangle|^2. \tag{2.5}$$

Se T, S são operadores lineares fechados em $\mathcal{H}$, diz-se que T é S-limitado se $D(S) \subset D(T)$ e existem $a, b \geqslant 0$ de forma que $\|T\xi\| \leqslant a\|S\xi\| + b\|\xi\|$, para todo $\xi \in D(S)$; o ínfimo dos valores de $a \geqslant 0$ que tal relação vale é chamado de S-limite de T.

Teorema 5 (Kato-Rellich) *Sejam* $\mathcal{H}$ *um espaço de Hilbert,* T *um operador linear auto-adjunto em* $D(T) \subset \mathcal{H}$ *e* B *um operador linear simétrico e fechado em* $D(B) \subset \mathcal{H}$ *que é* T*-limitado com* T*-limite* < 1. *Então* $T + B$ *é auto-adjunto em* $D(T)$ *e é essencialmente auto-adjunto em todo cerne de* T.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [35].

Para um operador A sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com domínio $D(A)$, o conjunto dos autovalores de A é dado por

$$\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A\varphi = \lambda\varphi \ \text{ para } \ \varphi \in D(A)\backslash\{0\}\}.$$

A multiplicidade de um autovalor λ de A é a dimensão do auto-espaço $\{\varphi \in D(A) : A\varphi = \lambda\varphi\}$ associado a λ. Se μ é uma projeção a valor de medida do operador A, então a multiplicidade de λ é igual ao $\mathrm{tr}\mu(\{\lambda\})$. Um autovalor de A chama-se simples ou não degenerado se tem multiplicidade 1, e é finitamente gerado se seu auto-espaço tem dimensão finita. Um autovalor λ é chamado isolado se existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sigma(A) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = \{\lambda\}.$$

Definição 8 *Seja A um operador auto-adjunto.*
(a) O espectro discreto de A é o conjunto $\sigma_{dis}(A)$ de todos os autovalores de multiplicidade finita.
(b) O espectro essencial de A é o conjunto $\sigma_{ess}(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_{dis}(A)$.

Para um operador A definimos

$$\mu_0(A) = \inf\{\langle \phi, A\phi \rangle : \phi \in D(A), \|\phi\| = 1\}$$

e para $k \geqslant 1$,

$$\mu_k(A) = \sup_{\psi_1,\ldots,\psi_k \in \mathcal{H}} \inf\{\langle \phi, A\phi \rangle : \phi \in D(A), \|\phi\| = 1, \phi \perp \psi_1, ..., \psi_k\}.$$

O operador A é limitado inferiormente se, somente se, $\mu_0(A) > -\infty$ e $\mu_0(A)$ é o ínfimo do espectro de A. Se A é limitado inferiormente e tem espectro puramente discreto (ou seja, $\sigma_{ess}(A) = \varnothing$), podemos ordenar os seus autovalores $E_n(A)$ em ordem crescente, repetindo-os de acordo com suas multiplicidades, como

$$E_0(A) \leqslant E_1(A) \leqslant E_2(A) \leqslant \ldots .$$

Teorema 6 (Princípio Min-max) *Se o operador auto-adjunto A tem espectro puramente discreto e é limitado inferiormente, então*

$$E_k(A) = \mu_k(A), \quad \textit{para todo } k \geqslant 0.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [36].

Sejam A e B dois operadores lineares. A notação $A \leqslant B$ significa que $D(A) \subset D(B)$ e $\langle \phi, A\phi \rangle \leqslant \langle \phi, B\phi \rangle, \quad \forall\, \phi \in D(B)$.

Corolário 1 *Sejam A e B dois operadores auto-adjuntos, limitados inferiormente e que têm espectro puramente discreto. Se $A \leqslant B$, então $E_k(A) \leqslant E_k(B)$ para todo $k \geq 0$.*

Seja $C_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0 \right\}$. Um subconjunto $\mathcal{D}$ é chamado subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ se $f, g \in \mathcal{D}$ então $f \cdot g \in \mathcal{D}$ e $\overline{f} \in \mathcal{D}$. Dizemos que $\mathcal{D}$ separa pontos se para $x, y \in \mathbb{R}$ existe uma função $f \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e $f(x), f(y) \neq 0$.

O próximo teorema, cuja demonstração encontra-se em [37], é um dos resultados importantes deste capítulo.

Teorema 7 (Stone-Weierstrass) *Se $\mathcal{D}$ é uma subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa pontos, então $\mathcal{D}$ é denso em $C_\infty(\mathbb{R})$ com a topologia da convergência uniforme.*

Exemplo 1 *O conjunto das combinações lineares das funções $f_z(x) = \frac{1}{x-z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, formam uma subalgebra involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa pontos. Logo, pelo teorema acima, este conjunto é denso em $C_\infty(\mathbb{R})$.*

Capítulo

3

Espectro do Modelo de Anderson

Neste capítulo estudaremos o espectro do Laplaciano discreto, algumas propriedades de potenciais aleatórios, em especial sobre os potenciais do modelo de Anderson, e apresentaremos a demonstração do Teorema 1 da Introdução.

3.1 Laplaciano Discreto

Nesta seção estudaremos o Laplaciano discreto, que é um operador de Schrödinger livre (modela uma partícula livre sem ação de potenciais) atuando sobre o espaço de Hilbert $l^2(\mathbb{Z}^d)$, $d \geq 1$. Os resultados aqui estudados podem ser encontrados em [5, 10, 19, 41].

O espaço $l^2(\mathbb{Z}^d)$ é definido por

$$l^2(\mathbb{Z}^d) = \left\{ u : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty \right\}$$

e a norma de um vetor u nesse espaço é dada por

$$\|u\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 \right)^{1/2},$$

a qual é induzida pelo produto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi(n)} \psi(n) , \quad \text{para} \ \ \varphi, \psi \in l^2(\mathbb{Z}^d).$$

Dado $n = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, define-se a norma do supremo

$$\|n\|_\infty := \sup_{\nu=1,\ldots,d} |n_\nu|$$

e a norma da soma

$$\|n\|_1 := \sum_{\nu=1}^{d} |n_\nu| \ .$$

Definição 9 *O operador $H_0 : l^2(\mathbb{Z}^d) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}^d)$ definido por*

$$(H_0 u)(n) := -\sum_{m : \|m-n\|_1 = 1} (u(m) - u(n)) \tag{3.1}$$

é chamado Laplaciano discreto.

É importante notar que o operador H_0 está bem definido, é linear e limitado. De fato, para todo $u \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|H_0 u\| &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |(H_0u)(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\sum_{\|j\|_1=1} (u(n+j)-u(n))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{\|j\|_1=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (|u(n+j)|+|u(n)|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{\|j\|_1=1} \left(\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n+j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |u(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\leqslant 4d\|u\|.
\end{aligned}$$

A forma quadrática do operador H_0 é dada por

$$\langle u, H_0 v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\|j-i\|_1=1} \overline{(u(i)-u(j))}(v(i)-v(j)). \tag{3.2}$$

Mostraremos isto para dimensão $d = 1$; os argumentos podem ser generalizados para $d > 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
2\langle u, H_0 v\rangle &= 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}(H_0 v)(i) \\
&= 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}(-v(i-1)-v(i+1)+2v(i)) \\
&= -2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i-1) - 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i+1) + 4\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{\|j-i\|_1=1} \overline{(u(i)-u(j))}(v(i)-v(j)) \\
=& \sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{(u(i)-u(i-1))}(v(i)-v(i-1)) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{(u(i)-u(i+1))}(v(i)-v(i+1)) \\
=& \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\overline{u(i)}v(i) - \overline{u(i-1)}v(i) - \overline{u(i)}v(i-1) + \overline{u(i-1)}v(i-1)\right) \\
&+ \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\overline{u(i)}v(i) - \overline{u(i+1)}v(i) - \overline{u(i)}v(i+1) + \overline{u(i+1)}v(i+1)\right) \\
=& -2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i-1) - 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i+1) + 4\sum_{i\in\mathbb{Z}} \overline{u(i)}v(i).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\langle u, H_0 v\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{\|j-i\|_1=1} \overline{(u(i)-u(j))}(v(i)-v(j)).$$

Deste último resultado concluímos que o operador H_0 é auto-adjunto.

Usando a transformada de Fourier

$$\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2([0,2\pi]^d), \quad (\mathcal{F}u)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} u(n)e^{-in\cdot k},$$

mostra-se que o espectro do operador H_0 é o intervalo $[0, 4d]$. De fato, considerando inicialmente $d = 1$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(H_0u)(k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-u(n-1) - u(n+1) + 2u(n))e^{-in\cdot k} \\
&= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n-1)e^{-in\cdot k} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n+1)e^{-in\cdot k} + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-in\cdot k} \\
&= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-i(n+1)\cdot k} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-i(n-1)\cdot k} + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-in\cdot k} \\
&= -e^{-i\cdot k}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-in\cdot k} - e^{i\cdot k}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-in\cdot k} + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)e^{-in\cdot k} \\
&= -e^{-i\cdot k}\mathcal{F}(u(k)) - e^{i\cdot k}\mathcal{F}(u(k)) + 2\mathcal{F}(u(k)) \\
&= (-2\cos(k) + 2)\mathcal{F}(u(k)).
\end{aligned}$$

Generalizando este resultado para $d \geq 1$ obtemos que

$$\left(\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}\psi\right)(k) = (\mathcal{M}_g\psi)(k),$$

onde $\mathcal{M}_g$ denota o operador de multiplicação em $L^2([0,2\pi]^d)$ pela função $g(k) = 2\sum_{i=1}^d(1-\cos k_i)$ para $k = (k_1, \ldots, k_d) \in [0, 2\pi]^d$. Assim, H_0 é unitariamente equivalente a $\mathcal{M}_g$, o que implica que seu espectro é dado por

$$\sigma(H_0) = \sigma(\mathcal{M}_g) = \overline{Im(g)} = [0, 4d]$$

e que H_0 tem espectro absolutamente contínuo puro.

Sejam $i, j \in \mathbb{Z}^d$. Define-se a base ortonormal canônica $\{\delta_i\}$ do espaço $l^2(\mathbb{Z}^d)$ por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j, \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dado um operador $A : l^2(\mathbb{Z}^d) \to l^2(\mathbb{Z}^d)$ define-se seus elementos de matriz por

$$A(i,j) = \langle \delta_i, A\delta_j \rangle. \tag{3.3}$$

A partir dos elementos de matriz, recupera-se o operador de forma única como

$$(Au)(i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} A(i,j)u(j). \tag{3.4}$$

Os elementos de matriz do Laplaciano discreto são

$$H_0(i,j) = \begin{cases} 2d & \text{se} \quad i = j, \\ -1 & \text{se} \quad \|i-j\|_1 = 1, \\ 0 & \text{se} \quad \|i-j\|_1 > 1. \end{cases}$$

3.2 Potenciais Aleatórios e Espectro do Modelo

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades importantes da teoria de probabilidade, as quais serão usadas nos potenciais do modelo de Anderson e demonstraremos o Teorema 1, o qual determina explicitamente o espectro deste modelo. Tais resultados podem ser encontrados em [4, 18, 26].

Definição 10 *Uma variável aleatória é uma função real mensurável num espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Se X é uma variável aleatória e A um conjunto de Borel, chama-se distribuição de X a medida de probabilidade $\mathbb{P}_0$ de A dada por

$$\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(\{w|X(w) \in A\}).$$

Sejam X, Y variáveis aleatórias. Se a distribuição de X e Y são iguais, dizemos que elas são identicamente distribuídas.

Uma família $\{X_i\}_{i\in I}$ de variáveis aleatórias é dita independente se para qualquer subconjunto finito $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de I,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{\omega|X_{i_1}(\omega) \in [a_1, b_1], X_{i_2}(\omega) \in [a_2, b_2], \ldots, X_{i_n}(\omega) \in [a_n, b_n]\}\right)\\ &= \mathbb{P}(\{\omega|X_{i_1}(\omega) \in [a_1, b_1]\}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\{\omega|X_{i_n}(\omega) \in [a_n, b_n]\}).\end{aligned}$$

Se X_i são variáveis aleatórias identicamente distribuídas com uma medida de probabilidade comum $\mathbb{P}_0$, então

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\{\omega|X_{i_1}(\omega) \in [a_1, b_1], X_{i_2}(\omega) \in [a_2, b_2], \ldots, X_{i_n}(\omega) \in [a_n, b_n]\}\right)\\ &= \mathbb{P}_0([a_1, b_1]) \cdot \mathbb{P}_0([a_2, b_2]) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_0([a_n, b_n]).\end{aligned}$$

A seguir apresentaremos um teorema importante da teoria de probabilidade, cuja demonstração pode ser encontrada em [26].

Teorema 8 (Lema de Borel-Cantelli) *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos em* $\mathcal{F}$. *Denotamos por* A_∞ *o conjunto*

$$A_\infty = \{\omega \in \Omega | \omega \in A_n \textit{ exceto para um número finito de pontos } n\}.$$

(1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, *então* $\mathbb{P}(A_\infty) = 0$;
(2) Se $\{A_n\}$ *são independentes e* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, *então* $\mathbb{P}(A_\infty) = 1$.

Consideremos agora o modelo de Anderson $H_\omega = H_0 + V_\omega$ definido na Introdução, conforme a Definição 1.

O suporte da medida $\mathbb{P}_0$ (medida de probabilidade da sequência $\{v_\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ de potenciais) é, por definição, o conjunto

$$\operatorname{supp} \mathbb{P}_0 = \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}_0\big((x - \varepsilon, x + \varepsilon)\big) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}. \tag{3.5}$$

Se $\operatorname{supp} \mathbb{P}_0$ é compacto, então cada operador H_ω é limitado ω $\mathbb{P}-$ q.t.p. e auto-adjunto em $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Por outro lado, se $\operatorname{supp} \mathbb{P}_0$ não é compacto, o operador de multiplicação V_ω é auto-adjunto no domínio $D_\omega = \{\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d) : V_\omega\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d)\}$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle V_\omega\varphi, \varphi\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \overline{v_\omega(n)\varphi(n)}\varphi(n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} v_\omega(n)\overline{\varphi(n)}\varphi(n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} v_\omega(n)|\varphi(n)|^2.\end{aligned}$$

Como a função v_ω assume valores reais, então $\langle V_\omega\varphi, \varphi\rangle \in \mathbb{R}$, logo V_ω é auto-adjunto em D_ω. Além disso, H_0 é V_ω-limitado pois

$$\|H_0\varphi\| \leqslant a\|V_\omega\varphi\| + 4d\|\varphi\|, \qquad \text{para todo } 0 \leqslant a < 1. \tag{3.6}$$

Daí, pelo Teorema de Kato-Rellich (Teorema 5), H_ω é auto-adjunto em D_ω, e essencialmente auto-adjunto sobre o espaço

$$l_0^2(\mathbb{Z}^d) = \{\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d) : \varphi(n) = 0 \text{ exceto para um número finito de pontos } n\}.$$

O próximo resultado será usado na demonstração do Teorema 1.

Proposição 4 *Existe um conjunto Ω_0 com probabilidade 1 tal que a seguinte afirmação é verdadeira: para qualquer $\omega \in \Omega_0$, qualquer conjunto finito $\Lambda \subset l^2(\mathbb{Z}^d)$, qualquer sequência $\{q_i\}_{i\in\Lambda}$ com $q_i \in$ supp $\mathbb{P}_0$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $\{j_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ com $\|j_n\|_\infty \longrightarrow \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in\Lambda} |q_i - v_\omega(i + j_n)| < \varepsilon.$$

Demonstração. Fixemos um conjunto finito Λ, uma sequência $\{q_i\}_{i\in\Lambda}$, com $q_i \in \operatorname{supp} \mathbb{P}_0$ e $\varepsilon > 0$. Defina o conjunto

$$A = \left\{\omega : \sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i) - q_i| < \varepsilon\right\}.$$

Como $v_\omega(n)$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\{\omega : |v_\omega(i) - q_i| < \varepsilon \quad \forall i \in \Lambda\} \\ &= (\mathbb{P}_0\,(q_i - \varepsilon, q_i + \varepsilon))^{|\Lambda|} > 0. \end{aligned}$$

Agora tomamos a sequência $\{j_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ tal que a distância entre quaisquer j_n, j_m, com $m \neq n$, seja maior que o dobro do diâmetro de Λ. Então os eventos

$$A_n = A_n(\Lambda, \{q_i\}_{i\in\Lambda}, \varepsilon) = A = \left\{\omega : \sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i + j_n) - q_i| < \varepsilon\right\}$$

são independentes e $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) > 0$. Além disso, A_n é invariante pela família de operadores shift $\{T_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$. De fato, mostremos que $T_m^{-1}A_n = A_n$.

(i) Seja $\omega \in T_m^{-1}A_n$. Então $T_m\omega \in A_n$, donde

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_{T_m\omega}(i + j_n) - q_i| < \varepsilon.$$

Como $v_{T_m\omega}(n) = v_\omega(n - m)$, então

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i + j_n - m) - q_i| < \varepsilon,$$

logo $\omega \in A_n$. Portanto, $T_m^{-1}A_n \subset A_n$.

(ii) Seja $\omega \in A_n$. Então

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_\omega(i + j_n) - q_i| < \varepsilon,$$

o que implica

$$\sup_{i\in\Lambda} |v_{T_m\omega}(i + j_n + m) - q_i| < \varepsilon.$$

Então $T_m\omega \in A_n$. Assim, $\omega \in T_m^{-1}A_n$ e portanto, $A_n \subset T_m^{-1}A_n$.

De (i) e (ii) obtém-se $T_m^{-1}A_n = A_n$. Como A_n é invariante por T_m, então $\mathbb{P}(A_n) = 1$, o que implica $\sum_1^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Pelo Lema de Borel-Cantelli (Teorema 8) o conjunto

$$\Omega_{\Lambda,\{q_1\},\varepsilon} = \{\omega \,|\, \omega \in A_n \text{ exceto para um número finito de pontos } n\}$$

tem probabilidade 1. O conjunto supp $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{R}$ é separável, consequentemente contém um conjunto denso e enumerável R_0. Além disso, a coleção Ξ de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ é enumerável. Assim, o conjunto

$$\Omega_0 := \bigcap_{\substack{\Lambda\in\Xi \\ \{q_i\}\in R_0, n\in\mathbb{N}}} \Omega_{\Lambda,\{q_i\},\frac{1}{n}}$$

tem probabilidade 1. Este é uma interseção enumerável de conjuntos de probabilidade 1. O conjunto Ω_0 satisfaz os requerimentos da afirmação da Proposição.

$\blacksquare$

Finalizamos esta seção apresentando a demonstração do Teorema 1 enunciado na Introdução (para informações adicionais veja também as referências [1, 25, 41]).

Demonstração. (Teorema 1). O espectro $\sigma(V_\omega)$ do operador de multiplicação V_ω pela função $v_\omega(n)$ é dado por $\overline{Im(v_\omega)}$, portanto $\sigma(V_\omega) = \text{supp } \mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}$- q.t.p.. Por outro lado, para operadores $A, B : D(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tem-se

$$\text{dist}(\sigma(A), \sigma(B)) \leq \|A - B\|. \tag{3.7}$$

Considere $A = H_\omega$ e $B = V_\omega + 2d$. Então $\|A - B\| \leq 2d$ e como $\sigma(B) = \text{supp } \mathbb{P}_0 + 2d$ temos

$$\sigma(H_\omega) \subset \text{supp } \mathbb{P}_0 + [0, 4d].$$

Para demonstrar a inclusão contrária usaremos o seguinte critério de Weyl (veja [1]):

$$\lambda \in \sigma(H_\omega) \iff \exists\, \varphi_n \in D_0,\ \|\varphi_n\| = 1 \text{ tal que } \|(H_\omega - \lambda)\varphi_n\| \longrightarrow 0,$$

onde D_0 é um espaço vetorial em que H_ω é essencialmente auto-adjunto. A sequência φ_n é chamada sequência de Weyl.

Seja $\lambda \in [0, 4d] + \text{supp } \mathbb{P}_0$. Então $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$ com $\lambda_0 \in \sigma(H_0) = [0, 4d]$ e $\lambda_1 \in \text{supp } \mathbb{P}_0$. Tomemos uma sequência de Weyl φ_n para H_0 e λ_0, isto é, $\|(H_0 - \lambda_0)\varphi_n\| \longrightarrow 0$ com $\|\varphi_n\| = 1$. Como H_0 é essencialmente auto-adjunto sobre o espaço $D_0 = l_0^2(\mathbb{Z}^d)$ podemos supor $\varphi_n \in D_0$.

Seja $\varphi^{(j)}(i) = \varphi(i - j)$. Então

$$H_0\varphi^{(j)} = (H_0\varphi)^{(j)}. \tag{3.8}$$

De fato,

$$\begin{aligned} H_0\varphi^{(j)}(n) &= -\sum_{\|m-n\|_1=1} (\varphi^{(j)}(m) - \varphi^{(j)}(n)) \\ &= -\sum_{\|m-n\|_1=1} (\varphi(m-j) - \varphi(n-j)) \\ &= -\sum_{\|(m-j)-(n-j)\|_1=1} (\varphi(m-j) - \varphi(n-j)) \\ &= -\sum_{\|i-k\|_1=1} (\varphi(i) - \varphi(k)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde usamos a mudança de variáveis $i = m - j$ e $k = n - j$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(H_0\varphi)^{(j)}(n) &= (H_0\varphi)(n-j) \\
&= -\sum_{\|m-(n-j)\|_1=1} (\varphi(m) - \varphi(n-j)) \\
&= -\sum_{\|m-k\|_1=1} (\varphi(m) - \varphi(k)).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10) obtemos que

$$H_0\varphi^{(j)} = (H_0\varphi)^{(j)}. \tag{3.11}$$

Usando a Proposição 4, para $\Lambda = \mathrm{supp}\varphi_n$ e $q_i = \lambda_1$ existe uma sequência $\{j_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ com $\|j_n\|_\infty \longrightarrow \infty$ tal que

$$\sup_{i \in \mathrm{supp}\,\varphi_n} |v_\omega(i + j_n) - \lambda_1| < \frac{1}{n}\ .$$

Definindo $\psi_n = \varphi_n^{j_n}$, temos

$$\begin{aligned}
\|(H_0 - \lambda_0)\psi_n\| &= \|(H_0 - \lambda_0)\varphi_n^{j_n}\| \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |(H_0\varphi_n^{j_n})(i) - (\lambda_0\varphi_n^{j_n})(i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |(H_0\varphi_n)(i - j_n) - (\lambda_0\varphi_n)(i - j_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |(H_0 - \lambda_0)\varphi_n(i - j_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(H_0 - \lambda_0)\varphi_n\|.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(V_\omega - \lambda_1)\psi_n\| &= \|V_\omega\varphi_n^{j_n} - \lambda_1\varphi_n^{j_n}\| \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |v_\omega\varphi_n^{j_n}(i) - \lambda_1\varphi_n^{j_n}(i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |v_\omega(i)\varphi_n(i - j_n) - \lambda_1\varphi_n(i - j_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |(v_\omega(i) - \lambda_1)\varphi_n(i - j_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |v_\omega(i) - \lambda_1|^2 |\varphi_n(i - j_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{m \in \mathrm{supp}\varphi_n} |v_\omega(m + j_n) - \lambda_1| \|\varphi_n\|
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde usamos a mudança de variável $m = k - j_n$.

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\|(H_0 + V_\omega - (\lambda_0 + \lambda_1))\psi_n\| &\leqslant \|(H_0 - \lambda_0)\psi_n\| + \|(V_\omega - \lambda_1)\psi_n\| \\
&\leqslant \|(H_0 - \lambda_0)\varphi_n\| + \sup_{i \in \operatorname{supp} \varphi_n} |v_\omega(i + j_n) - \lambda_1|. \quad (3.14)
\end{aligned}
$$

Usando as relações (3.12) e (3.13) concluímos que $\|(H_\omega - \lambda)\psi_n\| \longrightarrow 0$, logo ψ_n é uma sequência de Weyl para H_ω. Portanto, $\lambda \in \sigma(H_\omega)$ e assim

$$\operatorname{supp} \mathbb{P}_0 + [0, 4d] \subset \sigma(H_\omega).$$

■

Capítulo

4

Propriedades Ergódicas

A teoria ergódica é uma área da Matemática que estuda sistemas dinâmicos munidos de medidas invariantes. Neste capítulo estudaremos alguns conceitos e resultados importantes para uma família de operadores ergódicos, em particular mostraremos que o modelo de Anderson é ergódico. Usaremos tais resultados nos próximos capítulos. Para mais detalhes veja [10, 22, 27, 31].

4.1 Variáveis Aleatórias Ergódicas

Uma família $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variáveis aleatórias é chamada de processo estocástico. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma função mensurável $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ é dita ser uma transformação que preserva medida se

$$\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A), \ \text{para todo}\, A \in \mathcal{F}. \tag{4.1}$$

Dado uma família de transformações $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ que preservam medida, um conjunto A é invariante por $\{T_i\}$ se

$$T_i^{-1}A = A, \ \ \forall\, i \in \mathbb{Z}^d.$$

Definição 11 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma família $\{T_i\}$ de transformações que preservam medida é chamada ergódica se todo conjunto invariante $A \in \mathcal{F}$ tem probabilidade $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$. Isto equivale a dizer que o sistema é dinamicamente indivisível.*

Definição 12 *Uma família $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variáveis aleatórias é chamada ergódica se existe uma família ergódica de transformações que preservam medida $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ tais que $X_i(T_j\omega) = X_{i-j}(\omega)$.*

Um exemplo importante disso é a família de operadores shift $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ definidos por $(T_i\omega)_j = \omega_{j-i}$. Uma variável aleatória Y é dita invariante por T_i se $Y(T_i\omega) = Y(\omega)$, para todo $i \in \mathbb{Z}^d$.

Proposição 5 *Seja $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$ uma família de transformações que preservam medida num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se uma variável aleatória $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante por $\{T_i\}$, então f é constante $\mathbb{P}$-q.t.p..*

Demonstração. Mostraremos que $\mathbb{P}(\{\omega|f(\omega) = M_0\}) = 1$ para alguma constante M_0. Seja $\Omega_M = \{\omega|f(\omega) \leq M\} = f^{-1}\{(-\infty, M]\}$. Como f é invariante por $\{T_i\}$, então $f(T_i\omega) = f(\omega)$.

Vejamos que Ω_M é invariante por $\{T_i\}$.

(i) Seja $x \in T_i^{-1}\Omega_M$. Então $T_i(x) \in \Omega_M$. Por definição, $f(T_i x) \leq M$. Como $f(T_i\omega) = f(\omega)$, então $f(x) \leq M$, donde $x \in \Omega_M$. Portanto, $T_i^{-1}\Omega_M \subset \Omega_M$.

(ii) Seja $y \in \Omega_M$. Então $f(y) \leq M$. Como $f \circ T_i = f$ segue que $f \circ T_i(y) \leq M$, logo $T_i y \in \Omega_M$. Consequentemente, $y \in T_i^{-1}\Omega_M$ e portanto, $\Omega_M \subset T_i^{-1}\Omega_M$.

De (i) e (ii) obtemos que $T_i^{-1}\Omega_M = \Omega_M$. Assim, o conjunto Ω_M é invariante por $\{T_i\}$. Como os operadores $\{T_i\}$ são ergódicos e Ω_M é invariante, então $\mathbb{P}(\Omega_M) = 1$ ou $\mathbb{P}(\Omega_M) = 0$.

Consideremos $M_1 < M_2$. Então $\{\omega|f(\omega) \leq M_1\} \subset \{\omega|f(\omega) \leq M_2\}$, o que implica que $\Omega_{M_1} \subset \Omega_{M_2}$.

Agora vejamos que $\cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M = \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

(a) Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ temos que $\cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M \subset \cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M$.

(b) Seja $x \in \cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M$. Então existe um $M' \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \Omega_{M'}$. Logo existe um inteiro $M'' > M'$, então $\Omega_{M''} \in \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$. Como $\Omega_{M'} \subset \Omega_{M''}$, então $\Omega_{M'} \in \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$. Assim, $x \in \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

De (a) e (b) segue que $\cup_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M = \cup_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

Analogamente obtém-se $\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M = \cap_{M\in\mathbb{Z}}\Omega_M$.

Mostremos que $\mathbb{P}(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M) = 0$. De fato, suponha que $\mathbb{P}(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M) = \alpha \neq 0$. Como $\Omega_M \supset \cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M$ para qualquer M, $\mathbb{P}(\Omega_M) > \mathbb{P}(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M)$, então $\mathbb{P}(\Omega_M) > \alpha > 0$ para qualquer M. Como $\mathbb{P}(\Omega_M) = 1$ ou $\mathbb{P}(\Omega_M) = 0$, implica que $\mathbb{P}(\Omega_M) = 1$ para qualquer M, o que contradiz o fato que $f(\omega)$ é finito. De fato, se $\mathbb{P}(\Omega_M) = 1$, então $\mathbb{P}(\{\omega|f(\omega) \leq M\}) = 1$ para qualquer M, o que implica que $f(\omega) \leq M$ para qualquer M, consequentemente, $f(\omega) = -\infty$ $\mathbb{P} - q.t.p.$. Portanto, concluímos que $\mathbb{P}(\cap_{M\in\mathbb{R}}\Omega_M) = 0$.

Definamos $M_0 = \inf\limits_{\mathbb{P}(\Omega_M)=1} M$. Vejamos que M_0 é finito. De fato, suponhamos que M_0 é infinito. Então $M_0 = \infty$ ou $M_0 = -\infty$. Suponhamos que $M_0 = \infty$. Então $\mathbb{P}(\Omega_M) \neq 1$ para todo M. Como $\mathbb{P}(\Omega_M) = 1$ ou $\mathbb{P}(\Omega_M) = 0$, implica que $\mathbb{P}(\Omega_M) = 0$. para todo M. Então $\{\omega|\, f(\omega) \leq M\}$ tem medida 0 para todo M, o qual implica $f = \infty\, \mathbb{P} - q.t.p.$, que é uma contradição. Portanto, $M_0 \neq \infty$. Agora supondo que $M_0 = -\infty$, então $\mathbb{P}(\Omega_M) = 1$ para todo M, o que é uma contradição com o fato que $f(\omega)$ é finito como no caso anterior. Portanto, M_0 é finito.

Notemos que

$$\Omega_{M_0} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{M_0+(\frac{1}{n})}.$$

Definimos

$$\tilde{\Omega}_{M_0} = \{\omega|f(\omega) < M_0\}.$$

Notemos também que

$$\tilde{\Omega}_{M_0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{M_0-\frac{1}{n}}.$$

Como $M_0 = \inf\limits_{\mathbb{P}(\Omega_M)=1} M$, temos que $\mathbb{P}(\Omega_{M_0+\frac{1}{n}}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $M_0 + \frac{1}{n} > M_0$. Além disso, $\mathbb{P}(\Omega_{M_0-\frac{1}{n}}) = 0$ pois $\mathbb{P}(\Omega_{M_0-\frac{1}{n}}) \neq 1$. Assim,

$$\mathbb{P}(\Omega_{M_0}) = \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{M_0+(\frac{1}{n})})$$

e

$$\mathbb{P}(\tilde{\Omega}_{M_0}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{M_0-\frac{1}{n}}).$$

Temos $\Omega_{M_0} = \{\omega | f(\omega) \leq M_0\}$ e $\tilde{\Omega}_{M_0} = \{\omega | f(\omega) < M_0\}$. Notamos que $\{\omega | f(\omega) = M_0\} = \Omega_{M_0} \setminus \tilde{\Omega}_{M_0}$ e como $\Omega_{M_0} \supset \tilde{\Omega}_{M_0}$ temos

$$\mathbb{P}(\{\omega | f(\omega) = M_0\}) = \mathbb{P}(\Omega_{M_0} \setminus \tilde{\Omega}_{M_0}) = \mathbb{P}(\Omega_{M_0}) - \mathbb{P}(\tilde{\Omega}_{M_0}) = 1 - 0 = 1.$$

Portanto f é constante $\mathbb{P} - q.t.p.$.

■

A seguir será enunciado o teorema de Birkhoff, cuja demonstração pode ser encontrada em [26]. Tal resultado será usado no próximo capítulo.

Teorema 9 (Teorema ergódico de Birkhoff) *Se $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ é uma família de variáveis aleatórias ergódicas e $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$, então*

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} X_i \longrightarrow \mathbb{E}(X_0) \ , \quad \mathbb{P} - q.t.p. \tag{4.2}$$

onde $\mathbb{E}(X_0) := \displaystyle\int X_0 \ d\mathbb{P}$.

4.2 Operadores Ergódicos

Seja $\{v_\omega(n)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$ um processo estocástico ergódico. Então existe uma transformação que preserva medida $\{T_i\}$ em Ω tal que

$$v_{T_i\omega(n)} = v_\omega(n-i) \tag{4.3}$$

e qualquer subconjunto A de Ω invariante por $\{T_i\}$ tem probabilidade $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

A seguir daremos uma definição que é a noção natural de isomorfismos entre espaços com produto interno.

Definição 13 *Um operador linear $U : (X, \langle .,. \rangle_X) \longrightarrow (Y, \langle .,. \rangle_Y)$, entre dois espaços produto interno, é unitário se for sobrejetor em Y e $\langle \xi, \eta \rangle_X = \langle U\xi, U\eta \rangle_Y$ para todos $\xi, \eta \in X$. Se existe tal operador unitário, então os espaços X e Y são chamados de unitariamente equivalentes.*

Proposição 6 *Se A é um operador positivo e U um operador unitário, então*

$$tr(UAU^{-1}) = tr(A). \tag{4.4}$$

A seguir daremos uma importante definição que foi introduzida pela primeira vez por Pastur.

Definição 14 *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{T_n\}_{n \in I}$ transformações que preservam medida. Uma família de operadores $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é chamada de ergódica se existem operadores unitários $\{U_n\}_{n \in I}$ sobre $\mathcal{H}$ tais que*

$$H_{T_n\omega} = U_n H_\omega U_n^*,$$

onde U_n^* denota o adjunto de U_n.

O próximo resultado nos diz que o modelo de Anderson H_ω é ergódico.

Proposição 7 *A família de operadores* $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, *onde* $H_\omega = H_0 + V_\omega$, *é ergódica.*

Demonstração. (i) Para $\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ e $n, m \in \mathbb{Z}^d$, seja $(U_n\varphi)(m) = \varphi(m+n)$ a sequência de operadores translações (unitários) sobre $l^2(\mathbb{Z}^d)$ com seus correspondentes adjuntos $(U_n^*\varphi)(m) = \varphi(m-n)$. Temos que $V_{T_n\omega} = U_n V_\omega U_n^*$. De fato, para todo $\phi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$

$$\begin{aligned}(U_nV_\omega U_n^*\phi)(m) &= U_nV_\omega U_n^*\phi(m)\\ &= U_n(V_\omega\phi)(m-n)\\ &= U_nv_\omega(m-n)\phi(m-n)\\ &= v_\omega(m-n)(U_n\phi)(m-n)\\ &= v_\omega(m-n)\phi(m)\\ &= v_{T_n\omega}(m)\phi(m)\\ &= (V_{T_n\omega}\phi)(m).\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 14, V_ω é ergódico.
(ii) Notemos que $H_0U_n = U_nH_0$. De fato, para todo $\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$ e $k \in \mathbb{Z}^d$ temos

$$(H_0U_n\varphi)(k) = \sum_{\|m-k\|_1=1} (U_n\varphi)(m) - (U_n\varphi)(k) = \sum_{\|m-k\|_1=1} (\varphi(m-n) - \varphi(k-n)).$$

Por outro lado,

$$(U_nH_0\varphi)(k) = U_n\left(\sum_{\|m-k\|_1=1} (\varphi(m) - \varphi(k))\right) = \sum_{\|m-k\|_1=1} (\varphi(m-n) - \varphi(k-n)).$$

Logo, $H_0U_n = U_nH_0$. Assim, por (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned}U_nH_\omega U_n^* &= U_nH_0U_n^* + U_nV_\omega U_n^*\\ &= H_0U_nU_n^* + U_nV_\omega U_n^*\\ &= H_0 + V_{T_n\omega}\\ &= H_{T_n\omega}\ .\end{aligned}$$

Portanto, pela Definição 14, H_ω é ergódico.

∎

Teorema 10 (Projeção Ortogonal) *Se E é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^\perp.$$

O subespaço $E^\perp$ é chamado de complemento ortogonal de E em $\mathcal{H}$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [13].

Definição 15 *Seja $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$. Define-se o operador P_E de projeção ortogonal sobre E por*

$$\begin{aligned}P_E\ :\ &\mathcal{H} \longrightarrow E\\ &\xi \longrightarrow P_E\xi = \xi_E,\end{aligned}$$

sendo $\xi = \xi_E + \xi_{E^\perp}$, com $\xi_E \in E$ e $\xi_{E^\perp} \in E^\perp$.

Definição 16 *Dizemos que uma família $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de operadores limitados sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é fracamente mensurável se a aplicação $\omega \longrightarrow \langle\varphi, P_\omega\psi\rangle$ for mensurável para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$.*

Lema 1 *Suponhamos que $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ seja uma família fracamente mensurável de projeções ortogonais satisfazendo*

$$P_{T_n\omega} = U_n P_\omega U_n^*,$$

onde U_n são operadores unitários. Então $dimRan(P_\omega) = 0$ $\mathbb{P}-q.t.p.$ ou $dimRan(P_\omega) = \infty$ $\mathbb{P}-q.t.p.$.

Demonstração. Como $\langle P_\omega\xi, \xi\rangle = \langle P_\omega^2\xi, \xi\rangle = \|P_\omega\xi\|^2 \geq 0$ para todo ξ, os operadores P_ω são positivos; segue-se que trP_ω é unicamente definido (possivelmente como $+\infty$). Fixado ω e escolhendo uma base ortonormal $a_1(\omega), a_2(\omega), \ldots$ de $\mathrm{Ran}(P_\omega)$ e uma base ortonormal $b_1(\omega), b_2(\omega), \ldots$ de $(Ran(P_\omega))^\perp$, pelo Teorema 10 temos que $l^2(\mathbb{Z}^d) = Ran(P_\omega) \oplus Ran(P_\omega)^\perp$, logo

$$\begin{aligned}
tr(P_\omega) &= \sum_i \langle a_i(\omega), P_\omega a_i(\omega)\rangle + \sum_i \langle b_i(\omega), P_\omega b_i(\omega)\rangle \\
&= \sum_i \langle a_i(\omega), P_\omega a_i(\omega)\rangle \\
&= dimRan(P_\omega).
\end{aligned}$$

Seja $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ a base ortonormal canônica de $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Como a família de operadores $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é fracamente mensurável, então $trP_\omega = \sum_i \langle e_i, P_\omega e_i\rangle$ é uma variável aleatória.

Vejamos que trP_ω é invariante por T_i. De fato, usando a Proposição 6 temos que

$$tr(P_{T_j\omega}) = tr(U_j P_\omega U_j^*) = tr(U_j P_\omega U_j^{-1}) = tr(P_\omega)$$

ou seja, trP_ω é invariante por T_i. Logo, pela Proposição 5, temos que

$$dimRan(P_\omega) = tr(P_\omega)$$

é constante $\mathbb{P}-q.t.p.$.

Por outro lado

$$\begin{aligned}
trP_\omega &= \mathbb{E}(trP_\omega) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, P_\omega e_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\langle e_i, P_\omega e_i\rangle) \\
&\geq \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_i, P_\omega e_i\rangle) \\
&= \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_i, U_i^* P_{T_i\omega} U_i e_i\rangle) \\
&= \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle U_i e_i, P_{T_i\omega} U_i e_i\rangle) \\
&\geq \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_0, P_{T_i\omega} e_0\rangle) \\
&\geq \sum_{|i|\leq N} \mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) \\
&= (2N+1)^d \mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) \ \ \mathbb{P}-q.t.p..
\end{aligned}$$

Como N pode ser tomado arbitrariamente, segue que ou $trP_\omega = 0$ se $\mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) = 0$ ou $trP_\omega = \infty$ se $\mathbb{E}(\langle e_0, P_\omega e_0\rangle) > 0$.

■

O resultado a seguir caracteriza o espectro de operadores ergódicos auto-adjuntos (em particular, aplica-se para o modelo de Anderson) como um conjunto não aleatório q.t.p.. Compare com o Teorema 1.

Teorema 11 (Pastur) *Se H_ω é uma família de operadores ergódicos auto-adjuntos, então existe um conjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que $\sigma(H_\omega) = \Sigma$, para ω $\mathbb{P}$- q.t.p..*

Demonstração. Denotemos por $E_\Delta(\omega)$ a projeção espectral de H_ω sobre um conjunto de Borel Δ. Como o operador H_ω é ergódico, então

$$H_{T_i\omega} = U_i H_\omega U_i^*.$$

Aplicando a função característica e usando o Lema 2 temos

$$\chi_\Delta(H_{T_i\omega}) = U_i \chi_\Delta H_\omega U_i^*.$$

Da definição de projeção espectral tem-se

$$E_\Delta(H_{T_i\omega}) = U_i E_\Delta H_\omega U_i^*.$$

Agora mostraremos que para um conjunto de Borel Δ fixo, $E_\Delta(\omega)$ é fracamente mensurável, ou seja, a aplicação $\omega \longrightarrow \langle\varphi, E_\Delta\psi\rangle$ é mensurável para todos $\varphi, \psi, \in \mathcal{H}$. De fato, como $\omega \longrightarrow \langle\varphi, H_\omega\psi\rangle$ é mensurável para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ e pela propriedade de bases ortonormais temos que $\langle\varphi, H_\omega^2\psi\rangle = \langle H_\omega^*\varphi, H_\omega\psi\rangle = \sum_n \langle\varphi, H_\omega\delta_n\rangle\langle\delta_n, H_\omega\psi\rangle$, (veja [13]), então a aplicação $\omega \longrightarrow \langle\varphi, H_\omega^2\psi\rangle$ é mensurável para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Logo, por indução, H_ω^n é fracamente mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, é possível aproximar $E_\Delta(\omega)$ por ω-polinômios independentes em H_ω. Assim, $E_\Delta(\omega)$ é fracamente mensurável, já que todo polinômio de H_ω o é. Como a família $\{E_\Delta(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ satisfaz as condições do lema 1, então $\dim Ran(E_\Delta(\omega)) = 0$ $\mathbb{P} - q.t.p.$ ou $\dim Ran(E_\Delta(\omega)) = \infty$ $\mathbb{P} - q.t.p.$.

Agora, para cada par (p, q) de números racionais definamos a função η por

$$\eta(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad dimRan(E_{(p,q)}(\omega)) = 0 \;\; \mathbb{P} - q.t.p. \\ \infty & \text{se} \quad dimRan(E_{(p,q)}(\omega)) = \infty \;\; \mathbb{P} - q.t.p. \end{cases}$$

Note que a função η está bem definida devido ao Lema 1.

Definamos os conjuntos

$$\Omega_{p,q} = \{\omega |\, dimRan(E_{(p,q)}(\omega)) = \eta(p,q)\}$$

e

$$\Omega_0 = \bigcap_{p,q\in\mathbb{Q}} \Omega_{p,q}.$$

Uma vez que cada $\Omega_{p,q}$ tem probabilidade 1 e a intersecção sobre $p, q \in \mathbb{Q}$ é enumerável, temos que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.

Agora mostremos que se $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$, então $\sigma(H_{\omega_1}) = \sigma(H_{\omega_2})$. De fato, se $\lambda \notin \sigma(H_{\omega_1})$, pela Proposição 3 para todo λ_1, λ_2 com $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ suficientemente próximos de λ, temos

$$E_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_1) = 0 \Longrightarrow dimRanE_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_1) = 0.$$

Como $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$, implica que $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{p,q}$, para todos $p, q \in \mathbb{Q}$. Logo para cada par $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$dimRanE_{(p,q)}(\omega_1) = \eta(p,q) = dimRanE_{(p,q)}(\omega_2) \ \ \mathbb{P} - q.t.p..$$

Em particular, para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, com $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ suficientemente próximos de λ,

$$dimRanE_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_1) = dimRanE_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_2) = 0.$$

Logo

$$E_{(\lambda_1,\lambda_2)}(\omega_2) = 0.$$

Pela Proposição 3 $\lambda \notin \sigma(H_{\omega_2})$. Portanto, $\sigma(H_{\omega_2}) \subset \sigma(H_{\omega_1})$. Invertendo-se os papéis de ω_1 e ω_2 no argumento anterior, demonstra-se que $\sigma(H_{\omega_1}) \subset \sigma(H_{\omega_2})$. Como ω_1, ω_2 são elementos arbitrários de Ω_0 com $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, segue-se que $\sigma(H_\omega)$ é constante $\mathbb{P}$-q.t.p., o que demonstra o teorema.

■

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [19], será usado no próximo capítulo.

Lema 2 *Sejam A um operador auto-adjunto e U um operador unitário. Para qualquer função mensurável f tem-se*

$$f(UAU^*) = Uf(A)U^*.$$

Capítulo

5

A Densidade de Estados

Neste capítulo estudamos a medida densidade de estados, introduzida no Capítulo 1 (veja Definição 2). Os conceitos e resultados abordados aqui podem ser encontrados nas referências [1, 10, 19, 41].

5.1 Definição e Existência

Sejam $n_0 \in \mathbb{Z}^d$ e $L \in \mathbb{N}$. Define-se o cubo de centro n_0 e raio L por

$$\Lambda_L(n_0) := \{n \in \mathbb{Z}^d : \|n - n_0\|_\infty \leqslant L\}$$

e denotamos $\Lambda_L(0) = \Lambda_L$.

Para qualquer função mensurável limitada φ define-se a quantidade

$$\xi_L(\varphi) = \frac{1}{\mid \Lambda_L \mid}\; tr(\chi_{\Lambda_L}\varphi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \frac{1}{\mid \Lambda_L \mid}\; tr(\varphi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) \tag{5.1}$$

onde χ_Λ denota a função característica do conjunto Λ e o operador $\varphi(H_\omega)$ é definido via teorema espectral. Como ξ_L é um funcional linear positivo sobre o espaço das funções contínuas limitadas, pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 3) existe uma medida ν_L tal que

$$\xi_L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\nu_L(\lambda). \tag{5.2}$$

Definição 17 *Uma sequência ν_n de medidas de Borel em $\mathbb{R}$ converge vagamente para uma medida de Borel ν se*

$$\int \varphi(x)d\nu_n(x) \longrightarrow \int \varphi(x)d\nu(x) \quad \textit{para toda } \varphi \in C_0(\mathbb{R}),$$

onde $C_0(\mathbb{R})$ denota o conjunto das funções contínuas com suporte compacto.

O teorema a seguir mostra a convergência vaga da medida ν_L para a medida densidade de estados ν (veja Definição 2 da medida ν).

Teorema 12 *A medida ν_L converge vagamente para a medida ν $\mathbb{P}-$q.t.p., isto é, existe um conjunto Ω_0 com probabilidade 1 tal que*

$$\int \varphi(\lambda)d\nu_L(\lambda) \longrightarrow \int \varphi(\lambda)d\nu(\lambda),$$

para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ e para todo $\omega \in \Omega_0$.

Demonstração. Tomemos um conjunto enumerável e denso $D_0 \subset C_0(\mathbb{R})$ com a topologia da convergência uniforme. Seja o conjunto Ω_φ com $\mathbb{P}(\Omega_\varphi) = 1$ para o qual o teorema acima é válido. Logo, o conjunto

$$\Omega_0 = \bigcap_{\varphi \in D_0} \Omega_\varphi$$

tem probabilidade 1, pois Ω_0 é interseção enumerável de conjuntos de probabilidade 1. Como D_0 é denso em $C_0(\mathbb{R})$, se $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ existe $\varphi_n \in D_0$ tal que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ uniformemente e usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
\left| \int \varphi(\lambda) d\nu(\lambda) - \int \varphi(\lambda) d\nu_L(\lambda) \right| &\leqslant \left| \int \varphi(\lambda) d\nu(\lambda) - \int \varphi_n(\lambda) d\nu(\lambda) \right| \\
&\quad + \left| \int \varphi_n(\lambda) d\nu(\lambda) - \int \varphi_n(\lambda) d\nu_L(\lambda) \right| \\
&\quad + \left| \int \varphi_n(\lambda) d\nu_L(\lambda) - \int \varphi(\lambda) d\nu_L(\lambda) \right| \\
&\leqslant \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \cdot \nu(\mathbb{R}) + \|\varphi - \varphi_n\|_\infty \cdot \nu_L(\mathbb{R}) \\
&\quad + \left| \int \varphi_n(\lambda) d\nu(\lambda) - \int \varphi_n(\lambda) d\nu_L(\lambda) \right|.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_n \in D_0$ e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ uniformemente, segue que

$$\int \varphi(\lambda) d\nu_L(\lambda) \longrightarrow \int \varphi(\lambda) d\nu(\lambda),$$

para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ e para todo $\omega \in \Omega_0$.

■

A seguir enunciamos e demonstramos um resultado que será usado posteriormente. Tal resultado pode ser usado como motivação para introduzir a medida densidade de estados (veja Capítulo 1).

Proposição 8 *Se φ é uma função mensurável limitada, então para ω $\mathbb{P}$-q.t.p.*

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{\mid \Lambda_L \mid} \, tr(\varphi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \mathbb{E}(\langle \delta_0, \varphi(H_\omega)\delta_0 \rangle).$$

Demonstração. Pela definição do traço de um operador temos

$$\frac{1}{\mid \Lambda_L \mid} \, tr(\varphi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} \langle \delta_i, \varphi(H_\omega)\delta_i \rangle.$$

Note que família de variáveis aleatórias $X_i(\omega) = \langle \delta_i, \varphi(H_\omega)\delta_i \rangle$ é ergódica, pois os operadores H_ω são ergódicos. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
X_i(T_j\omega) &= \langle \delta_i, \varphi(H_{T_j\omega})\delta_i \rangle \\
&= \langle \delta_i, U_j \varphi(H_\omega) U_j^* \delta_i \rangle \\
&= \langle U_j^* \delta_i, \varphi(H_\omega) U_j^* \delta_i \rangle \\
&= \langle \delta_{i-j}, \varphi(H_\omega)\delta_{i-j} \rangle \\
&= X_{i-j}(\omega),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a igualdade $U_j^* \delta_i(n) = \delta_i(n+j) = \delta_{i-j}(n)$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned} |X_i| &= |\langle \delta_i, \varphi(H_\omega)\delta_i\rangle| \\ &= \int_{\sigma(H_\omega)} \varphi(\lambda) d\mu_{\delta_i,\delta_i}(\lambda) \\ &\leqslant \max|\varphi(\lambda)| \left| \int_{\sigma(H_\omega)} d\mu_{\delta_i,\delta_i}(\lambda) \right| \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty, \end{aligned}$$

as variáveis aleatórias X_i são integráveis (com respeito a medida $\mathbb{P}$). Aplicando o Teorema de Birkhoff (Teorema 9) temos

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} tr(\varphi(H_\omega)\chi_{\Lambda_L}) = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{i \in \Lambda_L} X_i \longrightarrow \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(\langle \delta_0, \varphi(H_\omega)\delta_0 \rangle) \ ,$$

quando $L \to \infty$.

■

Lema 3 *Se uma função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona crescente, então F tem uma quantidade enumerável de pontos de descontinuidade.*

Demonstração. Como F é monótona existem $F(t_-) = \lim_{s \nearrow t} F(s)$ e $F(t_+) = \lim_{s \searrow t} F(s)$. Se F é descontínua em $t \in \mathbb{R}$, então $F(t_+) - F(t_-) > 0$. Seja o conjunto

$$D_n = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid F(t_+) - F(t_-) > \frac{1}{n} \right\}.$$

O conjunto D dos pontos de descontinuidade de F é dado por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Suponhamos que D é não enumerável. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que D_n é não enumerável. Como a função F é monótona e definida em todo $\mathbb{R}$, ela será limitada em qualquer intervalo. Logo, $D_n \bigcap [-M, M]$ é finito para qualquer $M \in \mathbb{R}$. Daí segue que $D_n = \bigcup_{M\in\mathbb{N}} (D_n \bigcap [-M, M])$ é enumerável, o que é uma contradição.

■

Seja $N(E) = \nu((-\infty, E])$ a densidade integrada de estados para H_ω (veja Definição 2).

Corolário 2 *Para ω $\mathbb{P}-$ q.t.p., o seguinte resultado é valido: para todo $E \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$N(E) = \lim_{L \longrightarrow \infty} \nu_L((-\infty, E]).$$

Demonstração. Inicialmente mostraremos o resultado para energias E em que N é contínua. Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de N. Como N é monótona crescente, pelo Lema 3 D é no máximo enumerável. Logo D é magro em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, $\mathbb{R} \setminus D$ é denso em $\mathbb{R}$, já que o complementar de todo subconjunto magro em $\mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ (veja[13]). Como $\mathbb{R}$ é separável, então $\mathbb{R} \setminus D$ é separável, logo existe um conjunto contável S de pontos de continuidade de N denso em $\mathbb{R}$. Pela Proposição 8 existe um conjunto com probabilidade 1 tal que

$$\int \chi_{(-\infty,E]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) \longrightarrow N(E) \quad \text{quando} \quad L \longrightarrow \infty,$$

para todo $E \in S$, onde usamos a relação (5.2).

Tome $\varepsilon > 0$. Seja E um ponto de continuidade arbitrário de N. Pela densidade de S em $\mathbb{R}$ e continuidade de N, existem $E_-, E_+ \in S$ com $E_- \leq E \leq E_+$ tais que $N(E_+) - N(E_-) < \varepsilon/2$. Como N é crescente temos

$$\begin{aligned} N(E) - \int \chi_{(-\infty,E]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) &\leqslant N(E_+) - \int \chi_{(-\infty,E_-]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) \\ &\leqslant N(E_+) - N(E_-) + \left| N(E_-) - \int \chi_{(-\infty,E_-]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) \right| \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} N(E) - \int \chi_{(-\infty,E]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) &\geqslant N(E_-) - \int \chi_{(-\infty,E_+]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) \\ &\geqslant N(E_-) - N(E_+) - \left| N(E_+) - \int \chi_{(-\infty,E_+]}(\lambda) d\nu_L(\lambda) \right| \\ &\geqslant -\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo o resultado é válido para todo E pertencente ao conjunto de pontos de continuidade de N. Como os pontos de descontinuidade de N são enumeráveis, pela Proposição 8 tem-se o resultado para estes pontos, portanto para todos os pontos E.

■

A seguir será demonstrada a Proposição 1 enunciada no Capítulo 1. Tal resultado relaciona o espectro $\sigma(H_\omega)$ com a densidade de estados ν.

Demonstração. (Proposição 1). (i) Seja $\lambda \notin \sigma(H_\omega)$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega) = 0$ $\mathbb{P}-$q.t.p.. Como $\nu((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)) = \mathbb{E}[\langle \delta_0, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_0\rangle] = 0$, segue da definição de supp(ν) que supp$(\nu) \subset \sigma(H_\omega)$.
(ii) Seja $\lambda \in \sigma(H_\omega)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega) \neq 0$ $\mathbb{P}-$q.t.p.. Como $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)$ é uma projeção, existe $n \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$\mathbb{E}[\langle \delta_n, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_n\rangle] \neq 0.$$

Por outro lado, como H_ω é ergódico temos

$$H_{T_n\omega} = U_n H_\omega U_n^*.$$

Além disso, $\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}$ é mensurável. Então, pelo Lema 2

$$\chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_{T_n\omega}) = U_n \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega) U_n^*.$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathbb{E}[\langle \delta_n, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_n\rangle] \\ &= \mathbb{E}[\langle \delta_n, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} U_n^*(H_{T_n\omega}) U_n \delta_n\rangle] \\ &= \mathbb{E}[\langle \delta_0, \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H_\omega)\delta_0\rangle] \\ &= \nu((\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)). \end{aligned}$$

Da definição de suporte obtemos $\sigma(H_\omega) \subset$ supp(ν). O resultado segue de (i) e (ii).

■

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [19], será fundamental na demonstração do Teorema 13.

Lema 4 *Se $\mathcal{V}_\lambda$ é o auto-espaço para H_ω associado ao autovalor λ, então*

$$dim(\chi_{\Lambda_L}(\mathcal{V}_\lambda)) \leq CL^{d-1}$$

para alguma constante $0 < C < \infty$.

Não é difícil ver que a densidade integrada de estados $N(\lambda)$ é uma função contínua, o que é equivalente a afirmação que ν não tem átomos, ou seja, $\nu(\{\lambda\}) = 0$ para todo λ (veja [10]). Isto é o resultado do próximo teorema.

Teorema 13 *Para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu(\{\lambda\}) = 0$.

Demonstração. Aplicando a Proposição 8 temos

$$\nu(\{\lambda\}) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L+1)^d} \; tr(\chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega)).$$

Se f_i é uma base ortonormal de $\chi_{\Lambda_L}(\mathcal{V}_\lambda)$ e g_i uma base ortonormal de $\chi_{\Lambda_L}(\mathcal{V}_\lambda)^\perp$, temos

$$\begin{aligned} tr(\chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega)) &= \sum_i \langle f_i, \chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega) f_i\rangle + \sum_j \langle g_j, \chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega) g_j\rangle \\ &= \sum_i \langle f_i, \chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega) f_i\rangle \\ &\leqslant \dim(\chi_{\Lambda_L}(\mathcal{V}_\lambda)) \;\leq\; CL^{d-1}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o Lema 4. Daí,

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L+1)^d} \; tr(\chi_{\Lambda_L}\chi_{\{\lambda\}}(H_\omega)) \leq \; C \lim_{L\to\infty} \frac{L^{d-1}}{(2L+1)^d} \; = \; 0.$$

Portanto, $\nu(\{\lambda\}) = 0$.

■

5.2 Condições de Fronteira

Condições de fronteira são usadas para definir operadores diferenciais sobre conjuntos M com fronteira. Denotamos por $-\triangle_M^N$ e $-\triangle_M^D$ o Laplaciano em $L^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^d$, com condição de fronteira de Neumann e Dirichlet, respectivamente.

Para nosso propósito o ponto mais importante das condições de fronteira de Neumann e Dirichlet é o chamado bracketing Dirichlet-Neumann, que é o seguinte: Se M_1, M_2 são dois subconjuntos abertos disjuntos em $\mathbb{R}^d$ e $M = \mathrm{int}(\overline{M_1 \cup M_2})$, então

$$-\triangle_{M_1}^N \oplus -\triangle_{M_2}^N \leqslant -\triangle_M^N \leqslant -\triangle_M^D \leqslant -\triangle_{M_1}^D \oplus -\triangle_{M_2}^D. \tag{5.3}$$

Nosso objetivo nesta seção é obter relações análogas a (5.3) para o Laplaciano discreto H_0, as quais serão usadas no próximo capítulo na demonstração de Lifshitz tails.

Definição 18 *O Laplaciano discreto com condição de fronteira simples sob $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ é o operador H_0 sobre o espaço $l^2(\Lambda)$ definido por*

$$(H_0)_\Lambda(n,m) = \langle \delta_n, H_0 \delta_m \rangle,$$

onde $n, m \in \Lambda$.

Dado o conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ e $H = H_0 + V$, define-se o operador $H_\Lambda = (H_0)_\Lambda + V$, onde V é o operador de multiplicação pela função v restrito a Λ.

A fronteira de Λ é o conjunto $\partial\Lambda$ definido por

$$\partial\Lambda = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \ : \ \|n-m\|_1 = 1 \ \text{ e } \ n \in \Lambda, m \notin \Lambda \ \text{ ou } \ n \notin \Lambda, m \in \Lambda\}.$$

Além disso, definem-se a fronteira interior de Λ por

$$\partial^- \Lambda = \{n \in \mathbb{Z}^d \ \mid n \in \Lambda, \ \exists \ m \notin \Lambda \ \text{ com } (n,m) \in \partial\Lambda\}$$

e a fronteira exterior de Λ por

$$\partial^+ \Lambda = \{m \in \mathbb{Z}^d \ \mid m \notin \Lambda, \ \exists \ n \in \Lambda \ \text{ com } (n,m) \in \partial\Lambda\}.$$

Das definições acima note que $\partial^+\Lambda = \partial^-(\complement\Lambda)$.

Para um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ define-se o operador de fronteira Γ_Λ por

$$\Gamma_\Lambda(n,m) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad (n,m) \in \partial\Lambda, \\ \ \ 0 & \text{se} \quad (n,m) \notin \partial\Lambda. \end{cases}$$

Assim, o operador de Schrödinger discreto $H = H_0 + V$ pode ser escrito como

$$H = H_\Lambda \oplus H_{\complement\Lambda} + \Gamma_\Lambda, \tag{5.4}$$

com $l^2(\mathbb{Z}^d) = l^2(\Lambda) \oplus l^2(\complement\Lambda)$ e

$$(H_\Lambda \oplus H_{\complement\Lambda})(n,m) = \begin{cases} H_\Lambda(n,m) & \text{se} \quad n, m \in \Lambda, \\ H_{\complement\Lambda}(n,m) & \text{se} \quad n, m \notin \Lambda, \\ 0 \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O número de pontos adjacentes a $i \in \Lambda$ é dado por

$$n_\Lambda(i) = |\{j \in \Lambda \ : \ \|j - i\|_1 = 1\}| \tag{5.5}$$

onde $|B|$ denota o número de elementos do conjunto B.

Define-se a matriz adjacência restrita a Λ por

$$A_\Lambda(n,m) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad n, m \in \Lambda, \ \|n-m\|_1 = 1 \\ \ \ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Da matriz adjacência, usando a relação (3.4), temos o operador A_Λ dado por

$$(A_\Lambda u)(i) = -\sum_{j : \|j-i\|_1 = 1} u(j) \quad \text{ para todos } i, j \in \Lambda$$

e daí o operador $(H_0)_\Lambda$ sobre $l^2(\Lambda)$ pode ser escrito como

$$(H_0)_\Lambda = 2d + A_\Lambda.$$

Definição 19 *O Laplaciano discreto com condição de fronteira de Neumann sob $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ é o operador H_0 sobre $l^2(\Lambda)$ definido por*

$$(H_0)_\Lambda^N = n_\Lambda + A_\Lambda,$$

onde n_Λ é o operador de multiplicação pela função $n_\Lambda(i)$.

Definição 20 *O Laplaciano discreto com condição de fronteira de Dirichlet sob $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ é o operador H_0 sobre $l^2(\Lambda)$ definido por*

$$(H_0)_\Lambda^D = 2d + (2d - n_\Lambda) + A_\Lambda.$$

A definição acima do Laplaciano discreto de Dirichlet garante um análogo discreto da desigualdade (5.3). A seguir apresentaremos alguns resultados sobre os três tipos de Laplaciano. Dado o conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ tem-se

$$(H_0)_\Lambda^N \leq (H_0)_\Lambda \leq (H_0)_\Lambda^D$$

e

$$\begin{aligned} H_0 &= (H_0)_\Lambda^N \oplus (H_0)_{\complement\Lambda}^N + \Gamma_\Lambda^N \\ &= (H_0)_\Lambda^D \oplus (H_0)_{\complement\Lambda}^D + \Gamma_\Lambda^D \end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_\Lambda^N(i,j) = \begin{cases} 2d - n_\Lambda(i) & \text{se } i = j,\ i \in \Lambda, \\ 2d - n_{\complement\Lambda}(i) & \text{se } i = j,\ i \in \complement\Lambda, \\ -1 & \text{se } (i,j) \in\ \partial\Lambda, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\Gamma_\Lambda^D(i,j) = \begin{cases} 2d - n_\Lambda(i) & \text{se } i = j,\ i \in \Lambda, \\ n_{\complement\Lambda}(i) - 2d & \text{se } i = j,\ i \in \complement\Lambda, \\ -1 & \text{se } (i,j) \in\ \partial\Lambda, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A forma quadrática do operador Γ_Λ^N é dada por

$$\langle u, \Gamma_\Lambda^N v\rangle = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in\partial\Lambda} \overline{(u(i) - u(j))}(v(i) - v(j))$$

e do operador Γ_Λ^D por

$$\langle u, \Gamma_\Lambda^D v\rangle = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in\partial\Lambda} \overline{(u(i) + u(j))}(v(i) + v(j)).$$

Note que o operador Γ_Λ^N é definido positivo e Γ_Λ^D é definido negativo. Como consequência imediata deste fato temos o seguinte resultado (análogo discreto de (5.3)): para um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tem-se

$$(H_0)_\Lambda^N \oplus (H_0)_{\complement\Lambda}^N \leq H_0 \leq (H_0)_\Lambda^D \oplus (H_0)_{\complement\Lambda}^D.$$

Dado o conjunto Λ e o operador $H = H_0 + V$, definimos os operadores

$$H_\Lambda^N = (H_0)_\Lambda^N + V$$

e

$$H_\Lambda^D = (H_0)_\Lambda^D + V.$$

Estes operadores satisfazem

$$H_\Lambda^N \oplus H_{\complement\Lambda}^N \leq H \leq H_\Lambda^D \oplus H_{\complement\Lambda}^D.$$

Sejam os conjuntos Λ_1, $\Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d$ com $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Definimos a fronteira relativa $\partial_{\Lambda_2}\Lambda_1$ de Λ_1 em Λ_2 por

$$\begin{aligned} \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1 &= \partial\Lambda_1 \cap (\Lambda_2 \times \Lambda_2) \\ &= \{(i,j) \ : \ \|i-j\|_1 = 1 \ e \ i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \ \text{ ou } \ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \ j \in \Lambda_1\}. \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$H_{\Lambda_2} = H_{\Lambda_1} \oplus H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1} + \Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}, \tag{5.6}$$

$$H_{\Lambda_2}^N = H_{\Lambda_1}^N \oplus H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}^N + \Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2\,N}, \tag{5.7}$$

$$H_{\Lambda_2}^D = H_{\Lambda_1}^D \oplus H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}^D + \Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2\,D}, \tag{5.8}$$

onde

$$\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j, \ i \in \Lambda_1, \\ 0 & \text{se } i = j, \ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \\ -1 & \text{se } (i,j) \in \ \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2\,N}(i,j) = \begin{cases} n_{\Lambda_2}(i) - n_{\Lambda_1}(i) & \text{se } i = j, \ i \in \Lambda_1, \\ n_{\Lambda_2}(i) - n_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}(i) & \text{se } i = j, \ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \\ -1 & \text{se } (i,j) \in \ \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda_2\,D}(i,j) = \begin{cases} n_{\Lambda_1}(i) - n_{\Lambda_2}(i) & \text{se } i = j, \ i \in \Lambda_1, \\ n_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}(i) - n_{\Lambda_2}(i) & \text{se } i = j, \ i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1, \\ -1 & \text{se } (i,j) \in \ \partial_{\Lambda_2}\Lambda_1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em particular, para $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ com Λ_1 e Λ_2 disjuntos, temos

$$H_{\Lambda_1}^N \oplus H_{\Lambda_2}^N \leqslant H_\Lambda^N \leqslant H_\Lambda^D \leqslant H_{\Lambda_1}^D \oplus H_{\Lambda_2}^D \tag{5.9}$$

pois $\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda\ N} \geq 0$ e $\Gamma_{\Lambda_1}^{\Lambda\ D} \leq 0$.

O corolário a seguir generaliza a relação (5.9).

Corolário 3 *Seja $\Lambda_L \subset \mathbb{Z}^d$ a união disjunta de conjuntos Λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Então*

$$\bigoplus_{k=1}^m H_{\Lambda_k}^N \leqslant H_{\Lambda_L}^N \leqslant H_{\Lambda_L}^D \leqslant \bigoplus_{k=1}^m H_{\Lambda_k}^D. \tag{5.10}$$

5.3 Enfoque Alternativo para a Densidade de Estados

Nesta seção apresentaremos uma definição alternativa para a medida densidade de estados. Na primeira seção deste capítulo definimos a densidade de estados iniciando com uma função φ do operador H_ω, tomando seu traço restrito a um cubo Λ_L e normalizando esse traço. Nesta segunda abordagem, primeiro restringimos o operador a Λ_L com condições de contorno apropriadas, aplicamos a função φ ao operador H_ω restrito e depois tomamos o traço normalizado.

Para um conjunto Λ denotemos por H_Λ^X qualquer um dos seguintes operadores: H_Λ, H_Λ^N ou H_Λ^D. Define-se a medida $\tilde{\nu}_L^X$ (isto é, $\tilde{\nu}_L$, $\tilde{\nu}_L^N$, $\tilde{\nu}_L^D$) por

$$\int \varphi(\lambda) d\tilde{\nu}_L^X(\lambda) = \frac{1}{|\Lambda_L|}\, tr\varphi(H_{\Lambda_L}^X). \tag{5.11}$$

Note que o operador $H_{\Lambda_L}^X$ atua sobre o espaço de Hilbert $l^2(\Lambda_L)$ de dimensão finita, logo o espectro de $H_{\Lambda_L}^X$ é formado por seus autovalores, que podem ser enumerados em ordem crescente

$$E_0(H_{\Lambda_L}^X) \leqslant E_1(H_{\Lambda_L}^X) \leqslant \dots \ .$$

Usando esta notação na relação (5.11) temos

$$\int \varphi(\lambda) d\tilde{\nu}_L^X(\lambda) = \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_n \varphi(E_n(H_{\Lambda_L}^X)). \tag{5.12}$$

Definimos a função contagem de autovalores para o operador $H_{\Lambda_L}^X$ por

$$N(H_{\Lambda_L}^X, E) = |\{n : E_n(H_{\Lambda_L}^X) < E\}|,$$

onde $|M|$ denota o número de elementos de M. Então, $\frac{1}{|\Lambda_L|} N(H_{\Lambda_L}^X, E)$ é a função distribuição da medida $\tilde{\nu}_L^X$, ou seja,

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} N(H_{\Lambda_L}^X, E) = \int \chi_{(-\infty,E)}(\lambda) d\tilde{\nu}_L^X(\lambda).$$

Teorema 14 *As medidas $\tilde{\nu}_L$, $\tilde{\nu}_L^N$ e $\tilde{\nu}_L^D$ convergem vagamente $\mathbb{P}$-q.t.p. para a medida densidade de estados ν.*

Demonstração. Mostraremos o resultado para a medida $\tilde{\nu}_L$; para $\tilde{\nu}_L^N$ e $\tilde{\nu}_L^D$ são análogos. Para mostrar que $\tilde{\nu}_L$ converge vagamente para ν é suficiente mostrar que

$$\int \varphi(\lambda) d\tilde{\nu}_L(\lambda) \longrightarrow \int \varphi(\lambda) d\nu(\lambda) \quad \text{quando } L \longrightarrow \infty,$$

para toda φ da forma

$$\varphi(\lambda) = r_z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

uma vez que a combinação linear dessas funções é uma subalgeba involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa pontos (veja exemplo 1), consequentemente é densa em $C_\infty(\mathbb{R})$ pelo Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema 7). Note que

$$\int r_z(\lambda) d\tilde{\nu}_L(\lambda) = \frac{1}{(2L+1)^d}\, tr((H_{\Lambda_L} - z)^{-1}) = \frac{1}{(2L+1)^d} \sum_{n \in \Lambda_L} (H_{\Lambda_L} - z)^{-1}(n,n)$$

e

$$\int r_z(\lambda)d\nu(\lambda) = \frac{1}{(2L+1)^d}\ tr(\chi_{\Lambda_L}(H-z)^{-1}) = \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{n\in\Lambda_L}(H-z)^{-1}(n,n).$$

Usando a equação do resolvente (2.2) e relação (5.4), temos para $n\in\Lambda_L$:

$$\begin{aligned}
& (H_{\Lambda_L}-z)^{-1}(n,n)-(H-z)^{-1}(n,n)\\
= \ & (H_{\Lambda_L}-z)^{-1}(H-H_{\Lambda_L})(H-z)^{-1}(n,n)\\
= \ & \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,k'\in\complement\Lambda_L}} (H_{\Lambda_L}-z)^{-1}(n,k)\ \Gamma_{\Lambda_L}(k,k')\ (H-z)^{-1}(k',n)
\end{aligned}$$

com $\Gamma_{\Lambda_L}(k,k')=-1$, pois $(k,k')\in\partial\Lambda_L$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
& |\sum_{n\in\Lambda_L}(H_{\Lambda_L}-z)^{-1}(n,n)-(H-z)^{-1}(n,n)|\\
= \ & |\sum_{n\in\Lambda_L}\sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,k'\in\complement\Lambda_L}} (H_{\Lambda_L}-z)^{-1}(n,k)\ (H-z)^{-1}(k',n)|\\
\leqslant \ & \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,k'\in\complement\Lambda_L}} \left(\sum_n |(H_{\Lambda_L}-z)^{-1}(n,k)|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_n |(H-z)^{-1}(k',n)|^2\right)^{1/2}\\
= \ & \sum_{\substack{(k,k')\in\partial\Lambda_L\\ k\in\Lambda_L,k'\in\complement\Lambda_L}} \|(H_{\Lambda_L}-z)^{-1}\delta_k\|\cdot\|(H-z)^{-1}\delta_{k'}\|\\
\leqslant \ & cL^{d-1}\|(H_{\Lambda_L}-z)^{-1}\|\cdot\|(H-z)^{-1}\|\\
\leqslant \ & \frac{c}{(Im\, z)^2}L^{d-1},
\end{aligned}$$

onde usamos a identidade de Parseval (Teorema 4). Portanto,

$$\left|\int r_z(\lambda)d\tilde{\nu}_L(\lambda)-\int r_z(\lambda)d\nu(\lambda)\right|\leqslant\frac{c'}{(Im\, z)^2}\frac{1}{L}\longrightarrow 0 \qquad \text{quando } L\longrightarrow\infty.$$

Como o conjunto das funções contínuas com suporte compacto $C_0(\mathbb{R})$ é denso em $C_\infty(\mathbb{R})$ temos o resultado para toda $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$.

∎

Capítulo

6

Lifshitz Tails

Neste capítulo estudaremos o fenômeno chamado Lifshitz tails para o modelo de Anderson discreto, o qual estabelece um decaimento exponencial para a densidade integrada de estados $N(E)$ quando a energia E converge para o ínfimo (ou supremo) do espectro. Referências gerais para este capítulo são [1, 19, 20, 40, 41].

6.1 Resultados Preliminares para a Densidade Integrada de Estados

Começaremos enunciando e demonstrando alguns resultados que serão utilizados neste capítulo.

Teorema 15 *Seja H_ω uma família de operadores ergódicos em $l^2(\mathbb{Z}^d)$ e $(H_L)_{L\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores tais que para ω $\mathbb{P}$-q.t.p. tem-se*

1. $\chi_L H_L = H_L \chi_L$;
2. $tr|\chi_L H_L - \chi_L H_\omega| < \infty$ *e* $\lim\limits_{L\longrightarrow\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} tr|\chi_L H_L - \chi_L H_\omega| = 0.$

Então existe um conjunto Ω_0 com probabilidade 1 de modo que

$$\lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L f(H_L) = \int_{\mathbb{R}} f(u)d\nu(u)$$

para toda $f \in C_0(\mathbb{R})$ e $\omega \in \Omega_0$, onde ν é a medida densidade de estados.

Demonstração. Definimos a medida u_L por

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)du_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L f(H_L).$$

Para demonstrar o teorema devemos mostrar que a medida u_L converge vagamente para ν. Para isto é suficiente demonstrar que

$$\int f(u)du_L(u) \longrightarrow \int f(u)d\nu(u), \quad \text{quando } L \to \infty,$$

para toda função f da forma

$$f(u) = r_z(u) = \frac{1}{u-z} \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

uma vez que a combinação linear dessas funções é uma subalgeba involutiva de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separa pontos (veja exemplo 1), consequentemente é densa em $C_\infty(\mathbb{R})$ pelo Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema 7). Usando que

$$\int r_z(u)du_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L(r_z(H_L))$$

e

$$\int r_z(u)d\nu_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L(r_z(H_\omega))$$

temos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L(r_z(H_L)) - \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L(r_z(H_\omega)) \right| \\ = \ & \frac{1}{|\Lambda_L|} |tr\chi_L[r_z(H_L) - r_z(H_\omega)]| \\ = \ & \frac{1}{|\Lambda_L|} |tr\chi_L[r_z(H_L)(H_\omega - H_L)r_z(H_\omega)]| \\ \leqslant \ & \frac{1}{|\Lambda_L|} |Imz|^{-2} tr|\chi_L(H_\omega - H_L)| \ \longrightarrow 0 \ , \quad \text{quando } L \to \infty, \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação do resolvente e a desigualdade $\|r_z(H)\| \leqslant \frac{1}{|Imz|}$. Assim,

$$\left| \int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)d\nu_L(u) \right| \longrightarrow 0, \text{ quando } L \to \infty.$$

Mas do Teorema 12 sabemos que existe um conjunto Ω_0 com probabilidade 1 de modo que

$$\int r_z(u)d\nu_L(u) \longrightarrow \int r_z(u)d\nu(u)$$

para todo $\omega \in \Omega_0$. Logo, usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} & \left| \int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)d\nu(u) \right| \\ \leq \ & \left| \int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)d\nu_L(u) \right| + \left| \int r_z(u)d\nu_L(u) - \int r_z(u)d\nu(u) \right| \end{aligned}$$

o que implica

$$\left| \int r_z(u)du_L(u) - \int r_z(u)d\nu(u) \right| \longrightarrow 0, \text{ quando } L \to \infty.$$

Portanto, concluímos que u_L converge vagamente para ν $\mathbb{P}$-q.t.p..

■

Corolário 4 *Com as condições dadas no Teorema 15 tem-se*

$$N(E) = \lim_{L \longrightarrow \infty} u_L((-\infty, E]) = \lim_{L \longrightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} N(H_L, E)$$

para ω $\mathbb{P}$-q.t.p. e para todo $E \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos o resultado para energias E onde $N(E)$ é contínua. Como N é monótona crescente, pelo Lema 3 o conjunto dos pontos de descontinuidade de N é no máximo enumerável; daí existe um conjunto contável S de pontos de continuidade de N denso em $\mathbb{R}$. Como

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)du_L(u) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L f(H_L),$$

então

$$u_L((-\infty, E]) = \frac{1}{|\Lambda_L|} tr\chi_L \chi_{(-\infty,E]}(H_L).$$

Pelo Teorema 15 existe um conjunto com probabilidade 1 tal que

$$\int \chi_{(-\infty,E]}(u)du_L(u) \longrightarrow N(E)$$

para todo $E \in S$. Logo, prosseguindo de forma análoga como no Corolário 2, trocando a medida ν_L pela medida u_L e usando a igualdade

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} N(H_L, E) = \int \chi_{(-\infty,E]}(u)du_L(u),$$

conclui-se a demonstração do resultado.

■

Lema 5 *Considere o modelo de Anderson $H_\omega = H_0 + V_\omega$. Para todo $l > 0$ e para cada $E \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$\frac{1}{|\Lambda_l|}\mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_l}, E)] \;\leq\; N(E) \;\leq\; \frac{1}{|\Lambda_l|}\mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_l}, E)].$$

Demonstração. Para $L > l > 0$, consideremos o cubo Λ_L grande sendo a união disjunta de cubos menores $\Lambda_{l,k}$ com comprimento lateral l fixado. Pelo Corolário 3 e Corolário 1 obtemos

$$\sum_k N(H^D_{\Lambda_{l,k}}, E) \leq N(H^D_{\Lambda_L}, E) \leq N(H^N_{\Lambda_L}, E) \leq \sum_k N(H^N_{\Lambda_{l,k}}, E).$$

Tomando o valor esperado,

$$\mathbb{E}[\sum_k N(H^D_{\Lambda_{l,k}}, E)] \leq \mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \leq \mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \leq \mathbb{E}[\sum_k N(H^N_{\Lambda_{l,k}}, E)].$$

Como existem $\frac{|\Lambda_L|}{|\Lambda_l|}$ termos independentes e identicamente distribuídos em cada soma, segue que

$$\frac{|\Lambda_L|}{|\Lambda_l|}\mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_l}, E)] \leq \mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \leq \mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \leq \frac{|\Lambda_L|}{|\Lambda_l|}\mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_l}, E)].$$

Dividindo por Λ_L,

$$\frac{1}{|\Lambda_l|}\mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_l}, E)] \leq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \leq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \leq \frac{1}{|\Lambda_l|}\mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_l}, E)].$$

Tomando o limite quando $L \longrightarrow \infty$ e aplicando o Corolário 4, segue o resultado.

■

Lema 6 *Seja $H_\omega = H_0 + V_\omega$ o modelo de Anderson. Para todo $L > 0$ e para cada $E \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}[N(H^N_{\Lambda_L}, E)] \ \leq \ \mathbb{P}(E_0(H^N_{\Lambda_L}) < E)$$

e

$$\frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}[N(H^D_{\Lambda_L}, E)] \ \geq \ \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{P}(E_0(H^D_{\Lambda_L}) < E).$$

Demonstração. Pela definição de $N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)$, onde $\#$ denota as condições de fronteira, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{|\Lambda_L|-1} \chi_{(-\infty,E)}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{|\Lambda_L|-1} \mathbb{P}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E) \geq 0$ temos

$$\mathbb{E}[N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)] \geq \mathbb{P}(E_0(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).$$

Por outro lado,

$$\mathbb{P}(E_i(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E) \leq \mathbb{P}(E_0(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).$$

Daí,

$$\mathbb{E}[N(H^{\#}_{\Lambda_L}, E)] \leq |\Lambda_L|\mathbb{P}(E_0(H^{\#}_{\Lambda_L}) < E).$$

■

O próximo resultado é a desigualdade de Temple, que será usada na Seção 6.2 para obter um limite superior para a densidade integrada de estados $N(E)$.

Lema 7 (Desigualdade de Temple). *Sejam A um operador auto adjunto, $E_0 = \inf \sigma(A)$ um autovalor não degenerado e $E_1 = \inf(\sigma(A) \setminus \{E_0\})$. Se $\psi \in D(A)$ com $\|\psi\| = 1$ satisfaz*

$$\langle \psi, A\psi \rangle < E_1$$

então

$$E_0 \geq \langle \psi, A\psi \rangle - \frac{\langle \psi, A^2\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2}{E_1 - \langle \psi, A\psi \rangle} \ .$$

Demonstração. Pelo teorema espectral temos

$$(A - E_1)(A - E_0) \geq 0.$$

Daí, para qualquer $\psi \in D(A)$ com $\|\psi\| = 1$ tem-se

$$\langle \psi, A^2\psi \rangle - E_1\langle \psi, A\psi \rangle - E_0\langle \psi, A\psi \rangle + E_1E_0 \geq 0.$$

Logo,

$$E_1E_0 - E_0\langle \psi, A\psi \rangle \geq E_1\langle \psi, A\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2 - (\langle \psi, A^2\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2).$$

Como $E_1 - \langle \psi, A\psi \rangle > 0$, obtemos

$$E_0 \geq \langle \psi, A\psi \rangle - \frac{\langle \psi, A^2\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2}{E_1 - \langle \psi, A\psi \rangle} \ .$$

■

A seguir apresentaremos a demonstração do Teorema 2 (Lifshitz tails) enunciado no Capitulo 1 e para isso assumiremos as seguintes condições:

1. As variáveis aleatórias $(v_\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ são i.i.d. com distribuição comum $\mathbb{P}_0$, cujo suporte é limitado inferiormente, isto é, $a_0 := \inf\ \operatorname{supp} \mathbb{P}_0 > -\infty$. Pelo Teorema 1 temos $E_0 := \inf \sigma(H_\omega) = a_0$.

2. A distribuição $\mathbb{P}_0$ é não-trivial, ou seja, para algum $C, \kappa > 0$ e todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,
$$\mathbb{P}_0([a_0, a_0 + \varepsilon)) \geq C\varepsilon^\kappa. \tag{6.1}$$

3. Sem perda de generalidade, suponhamos que $E_0 = 0$. Então, $v_\omega(n) \geq 0$. Caso contrário, basta considerar o operador $H_\omega - a_0 I$ no lugar de H_ω.

Com estas condições mostraremos o Teorema 2 nas próximas duas seções. Primeiro estabeleceremos um limite superior para a densidade integrada de estados $N(E)$ e depois um limite inferior para $N(E)$.

6.2 Limite Superior

Nesta parte da demonstração será mostrado a seguinte desigualdade:

$$\limsup_{E\searrow 0} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} \leq -\frac{d}{2}\ . \tag{6.2}$$

Demonstração. Pelos Lemas 5 e 6 temos

$$\begin{aligned} N(E) &\leq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}(N(H^N_{\Lambda_L}, E)) \\ &\leq \mathbb{P}(E_0(H^N_{\Lambda_L}) < E). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Para estimar o último termo da desigualdade acima usaremos a desigualdade de Temple (Lema 7) com a função ψ_0 dada por

$$\psi_0(n) = \frac{1}{|\Lambda_L|^{1/2}} \quad \text{para todo } n \in \Lambda_L.$$

Note que $(H_0)^N_{\Lambda_L}\psi_0 = 0$. De fato, como $(H_0)^N_{\Lambda_L} = n_\Lambda + A_\Lambda$, temos

$$\begin{aligned} ((H_0)^N_{\Lambda_L}\psi_0)(n) &= (n_\Lambda\psi_0)(n) + (A_\Lambda\psi_0)(n) \\ &= n_\Lambda(n)\psi_0(n) - \sum_{j:\|j-n\|_1=1} \psi_0(j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle\psi_0, H^N_{\Lambda_L}\psi_0\rangle &= \langle\psi_0, V_\omega\psi_0\rangle \\ &= \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega(i). \end{aligned}$$

Pelo Teorema ergódico de Birkhoff (Teorema 9) ,

$$\lim_{L\longrightarrow\infty}\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v_\omega(i)=\mathbb{E}(v_\omega(0))>0 \quad \mathbb{P}-q.t.p..$$

Para aplicar a desigualdade de Temple precisamos que

$$\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v_\omega(i)<E_1(H^N_{\Lambda_L}),$$

o que não ocorre, pois $\lim_{L\longrightarrow\infty}E_1(H^N_{\Lambda_L})=0$. De fato, pelo Corolário 1 e um cálculo direto (veja [40]) tem-se

$$E_1(H^N_{\Lambda_L})\geq E_1((H_0)^N_{\Lambda_L})\geq cL^{-2} \tag{6.4}$$

para alguma constante $c>0$.

Definimos então uma nova sequência de potenciais

$$v^{(L)}_\omega(i)=\min\left\{v_\omega(i),\frac{c}{3}L^{-2}\right\}.$$

Para L fixo, as variáveis aleatórias $v^{(L)}_\omega(i)$ são independentes e identicamente distribuídas com sua distribuição dependendo de L.

Além disso, se

$$H^{(L)}_\omega=(H_0)^N_{\Lambda_L}+V^{(L)}_\omega,$$

com $(V^{(L)}_\omega u)(i)=v^{(L)}_\omega(i)u(i)$, então pelo Corolário 1, $E_0(H^N_{\Lambda_L})\geq E_0(H^{(L)}_\omega)$. Da definição de $V^{(L)}_\omega$ segue que

$$\langle\psi_0,H^{(L)}_\omega\psi_0\rangle=\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v^{(L)}_\omega(i)\leq\frac{c}{3}L^{-2}. \tag{6.5}$$

Das relações (6.4) e (6.5) obtemos

$$\langle\psi_0,H^{(L)}_\omega\psi_0\rangle\leq\frac{c}{3}L^{-2}<E_1((H_0)^N_{\Lambda_L})\leq E_1(H^{(L)}_\omega).$$

Agora podemos aplicar a desigualdade de Temple (Lema 7) para ψ_0 e $H^{(L)}_\omega$:

$$\begin{aligned}
E_0(H^N_{\Lambda_L}) &\geq E_0(H^{(L)}_\omega)\\
&\geq \langle\psi_0,H^{(L)}_\omega\psi_0\rangle-\frac{\langle\psi_0,(H^{(L)}_\omega)^2\psi_0\rangle}{cL^{-2}-\langle\psi_0,H^{(L)}_\omega\psi_0\rangle}\\
&\geq \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v^{(L)}_\omega(i)-\frac{\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}(v^{(L)}_\omega(i))^2}{(c-\frac{c}{3})L^{-2}}\\
&\geq \frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v^{(L)}_\omega(i)-\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v^{(L)}_\omega(i)\left(\frac{\frac{c}{3}L^{-2}}{\frac{2}{3}cL^{-2}}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v^{(L)}_\omega(i).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Das relações (6.3) e (6.6) temos

$$N(E)\leq\mathbb{P}(E_0(H^N_{\Lambda_L})<E)\leq\mathbb{P}\left(\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L}v^{(L)}_\omega(i)<2E\right).$$

Usando o Lema 8 abaixo temos

$$\begin{aligned}
N(E) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{(2L+1)^d}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) \\
&\leq e^{-\gamma|\Lambda_L|} \\
&= e^{-\gamma(2\lfloor\beta E^{-\frac{1}{2}}\rfloor+1)^d} \\
&\leq e^{-\gamma(2\lfloor\beta E^{-\frac{1}{2}}\rfloor^d+1)} \\
&\leq e^{-\gamma' E^{-\frac{d}{2}}},
\end{aligned}$$

para algum $\gamma' > 0$. Aplicando o logarítmo natural na desigualdade, tem-se

$$\begin{aligned}
\ln N(E) &\leq -\gamma' E^{-\frac{d}{2}} \\
\Longrightarrow \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} &\leq \frac{\ln\gamma' - \frac{d}{2}\ln(E)}{\ln(E)} .
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando o limite superior obtém-se

$$\limsup_{E\searrow 0} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} \leq -\frac{d}{2} .$$

■

Agora vamos mostrar o resultado usado na demonstração acima.

Lema 8 *Para $L = \lfloor\beta E^{-\frac{1}{2}}\rfloor$ com β pequeno e L suficientemente grande,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) \leq e^{-\gamma|\Lambda_L|} \tag{6.7}$$

para algum $\gamma > 0$.

Demonstração. Por hipótese $L \leq \beta E^{-\frac{1}{2}}$, o que implica $2E \leq 2\beta^2 L^{-2}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2\beta^2 L^{-2}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sharp\{i|v_\omega^{(L)}(i) < \frac{c}{3}L^{-2}\} \geq \left(1-\frac{6\beta^2}{c}\right)|\Lambda_L|\right),
\end{aligned}$$

onde c é a constante da relação (6.4). Na última desigualdade usamos que

$$\sharp\left\{i|v_\omega^{(L)}(i) < \frac{c}{3}l^{-2}\right\} < \left(1-\frac{6\beta^2}{c}\right)|\Lambda_L| \Longrightarrow \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) \geq 2\beta^2 L^{-2}.$$

De fato, se $D := \{i \mid v_\omega^{(L)}(i) < \frac{c}{3}L^{-2}\}$ então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) &= \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in D} v_\omega^{(L)}(i) + \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\complement D} v_\omega^{(L)}(i) \\
&\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\complement D} v_\omega^{(L)}(i) \\
&\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\frac{6\beta^2}{c}|\Lambda_L|\frac{c}{3}L^{-2} \\
&= 2\beta^2 L^{-2}.
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(v_\omega^{(L)}(i) > 0) > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $q := \mathbb{P}(v_\omega^{(L)}(i) < \gamma) < 1$. Defina

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad v_\omega^{(L)}(i) < \gamma, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As variáveis aleatórias ξ_i são independentes e identicamente distribuídas. Além disso, $\mathbb{E}(\xi_i) = q$.

Seja $r = 1 - \frac{3\beta^2}{c}$. Tomando β suficientemente pequeno podemos garantir que $q < r < 1$. Então, para L suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sharp\{i|v_\omega^{(L)}(i) < \frac{c}{3}l^{-2}\} \geq r|\Lambda_L|\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sharp\{i|v_\omega^{(L)}(i) < \gamma\} \geq r|\Lambda_L|\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_i \xi_i \geq r\right). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Por outro lado, para uma variável aleatória X tem-se

$$\mathbb{P}(X > a) \leq e^{-ta}\,\mathbb{E}(e^{tX}) \quad \text{para } t \geq 0. \tag{6.9}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > a) &= \int \chi_{\{X>a\}}(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \int e^{-ta}e^{tX}\chi_{\{X>a\}}(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq e^{-ta}\int e^{tX}d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Logo, usando (6.9) com $X = \sum_i \xi_i$ na estimativa (6.8), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega^{(L)}(i) < 2E\right) &\leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{|\Lambda_L|}\sum_i \xi_i \geq r\right) \\ &\leq e^{-|\Lambda_L|rt}\,\mathbb{E}\left(\prod_{i\in\Lambda_L} e^{t\xi_i}\right) \\ &\leq e^{-|\Lambda_L|rt}\,\mathbb{E}(e^{|\Lambda_L|t\xi_0}) \\ &= e^{-|\Lambda_L|(rt - \ln\mathbb{E}(e^{t\xi_0}))}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Seja $f(t) = rt - \ln\mathbb{E}(e^{t\xi_0})$. Mostremos que existe $t > 0$ tal que $f(t) > 0$, donde segue o resultado. De fato,

$$f'(t) = r - \frac{\mathbb{E}(\xi_0 e^{t\xi_0})}{\mathbb{E}(e^{t\xi_0})}\ .$$

Logo $f'(0) = r - q > 0$ e como $f(0) = 0$, então existe $t > 0$ tal que $f(t) > 0$.

∎

6.3 Limite Inferior

Nesta seção mostraremos a seguinte desigualdade:

$$\liminf_{E \searrow 0} \frac{\ln |\ln N(E)|}{\ln E} \geq -\frac{d}{2} \ . \tag{6.11}$$

Demonstração. Pelos Lemas 5 e 6 temos

$$\begin{aligned} N(E) &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{E}(N(H^D_{\Lambda_L}, E)) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\mathbb{P}(E_0(H^D_{\Lambda_L}) < E). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Pelo princípio min-max (Teorema 6)

$$\begin{aligned} E_0(H^D_{\Lambda_L}) &\leq \langle \psi, H^D_{\Lambda_L}\psi\rangle \\ &= \langle \psi, (H_0)^D_{\Lambda_L}\psi\rangle + \sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega(i)|\psi(i)|^2 \end{aligned} \tag{6.13}$$

para qualquer ψ com $\|\psi\| = 1$. Agora trataremos de minimizar o lado direito de (6.13). Começaremos pelo termo

$$\langle \psi, (H_0)^D_{\Lambda_L}\psi\rangle,$$

para o qual tomamos

$$\psi(n) = \frac{1}{\|\psi_1\|}\psi_1(n), \quad \text{com} \quad \psi_1(n) = L - \|n\|_\infty, \quad n \in \Lambda_L.$$

Para $n \in \Lambda_{\frac{L}{2}}$ temos que $L - \|n\|_\infty \geq \frac{L}{2}$. Então,

$$\sum_{n\in\Lambda_L} |\psi_1(n)|^2 \geq \sum_{n\in\Lambda_{\frac{L}{2}}} |\psi_1(n)|^2 \geq |\Lambda_{\frac{L}{2}}| \left(\frac{L}{2}\right)^2 \geq cL^{d+2}, \tag{6.14}$$

para alguma constante $c > 0$.

Por outro lado, usando a forma quadrática de $(H_0)_{\Lambda_L}$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle \psi_1, (H_0)^D_{\Lambda_L}\psi_1\rangle &= \langle \psi_1, (H_0)_{\Lambda_L}\psi_1\rangle + \langle \psi_1, (2d - n_\Lambda)\psi_1\rangle \\ &\leq \sum_{\substack{(n,n')\in\Lambda_L \\ \|n-n'\|_1 = 1}} |\psi_1(n') - \psi_1(n)|^2 \\ &\leq |\{(n,n') \in \Lambda_L \times \Lambda_L : \|n - n'\|_1 = 1\}| \\ &\leq c_1 L^d, \end{aligned} \tag{6.15}$$

onde utilizamos que $|\psi_1(n) - \psi_1(n')| \leq 1$ se $\|n - n'\|_1 = 1$.

Das relações (6.14) e (6.15) obtemos

$$\begin{aligned} E_0((H_0)^D_{\Lambda_L}) &\leq \frac{\langle \psi_1, (H_0)^D_{\Lambda_L}\psi_1\rangle}{\langle \psi_1, \psi_1\rangle} \\ &\leq c_0 L^{-2}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

para a constante $c_0 = \frac{c_1}{c} > 0$. Usando (6.12), (6.13) e (6.16) segue que

$$\begin{aligned} N(E) &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}\left(\sum_{i\in\Lambda_L} v_\omega(i)|\psi(i)|^2 < E - c_0 L^{-2}\right) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}\left(\frac{c_2}{|\Lambda_L|}\sum_{i\in\Lambda_{\frac{L}{2}}} v_\omega(i) < E - c_0 L^{-2}\right) \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}\left(\text{para todo } i\in\Lambda_{\frac{L}{2}},\ \ v_\omega(i) < \frac{1}{c_2}(E - c_0 L^{-2})\right) \\ &= \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}\left(v_\omega(0) < \frac{1}{c_2}(E - c_0 L^{-2})\right)^{|\Lambda_{\frac{L}{2}}|} \\ &\geq \frac{1}{|\Lambda_L|}\,\mathbb{P}_0\left([0,E/2)\right)^{c_3 L^d}. \end{aligned}$$

Agora usando a hipótese (6.1) com $\epsilon = E/2$ tem-se

$$N(E) \geq c_4 L^{-d} E^{c_3\kappa L^d} = c_4 L^{-d} e^{(\ln E)c_3\kappa L^d}, \tag{6.17}$$

para constantes $c_3, c_4 > 0$. Tomando $L = \sqrt{\frac{2c_0}{E}}$ temos

$$N(E) \geq c_4' E^{d/2} e^{c_3'(\ln E)E^{-d/2}}, \tag{6.18}$$

com constantes $c_3', c_4' > 0$. Aplicando o logaritmo natural e usando que $0 < N(E) \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \ln N(E) &\geq \ln c_4' + \ln E^{d/2} + c_3'(\ln E)E^{-d/2} \\ \Longrightarrow\ |\ln N(E)| &\leq |\ln c_4'| + |\ln E^{d/2}| + |c_3'(\ln E)E^{-d/2}| \\ \Longrightarrow\ \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln E} &\geq \frac{\ln\left(|\ln c_4'| + |\ln E^{d/2}| + |c_3'(\ln E)E^{-d/2}|\right)}{\ln E}. \end{aligned}$$

Como $\ln(a+b) \geq \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$ para todo $a, b > 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln E} &\geq \frac{\ln(|\ln c_4'| + |\ln E^{d/2}|) + \ln(|c_3'(\ln E)E^{-d/2}|)}{2\ln E} \\ &\geq \frac{\ln|\ln c_4'|}{4\ln E} + \frac{\ln|\ln E^{d/2}|}{4\ln E} + \frac{\ln(|c_3'(\ln E)E^{-d/2}|)}{2\ln E}. \end{aligned}$$

Tomando o limite inferior temos

$$\begin{aligned} \liminf_{E\searrow 0}\frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln E} &\geq \liminf_{E\searrow 0}\left[\frac{\ln|\ln c_4'|}{4\ln E} + \frac{\ln|\ln E^{d/2}|}{4\ln E} + \frac{\ln(|c_3'(\ln E)E^{-d/2}|)}{2\ln E}\right] \\ \Longrightarrow\ \liminf_{E\searrow 0}\frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln E} &\geq -\frac{d}{2}. \end{aligned}$$

■

Dos limites superior (6.2) e inferior (6.11) obtidos nas Seções 6.2 e 6.3 concluímos que

$$-\frac{d}{2} \leq \liminf_{E\searrow 0}\frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} \leq \limsup_{E\searrow 0}\frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} \leq -\frac{d}{2},$$

o que implica

$$\lim_{E\searrow 0}\frac{\ln|\ln N(E)|}{\ln(E)} = -\frac{d}{2},$$

como queríamos demonstrar.

Capítulo

7

Expoente de Lyapunov e Densidade Integrada de Estados

Neste capítulo consideraremos o modelo de Anderson H_ω (Definição 1) unidimensional (dimensão $d = 1$) e estudaremos o expoente de Lyapunov e algumas de suas propriedades, dentre elas sua relação com a densidade integrada de estados $N(E)$, conhecida como fórmula de Thouless. Usando essa fórmula mostraremos a log-Hölder continuidade de $N(E)$. Referências gerais para este capítulo são [10, 11, 24, 25, 42].

7.1 O Expoente de Lyapunov

O modelo de Anderson H_ω em dimensão $d = 1$ é a família de operadores de Schrödinger sobre $l^2(\mathbb{Z})$ definida por

$$(H_\omega u)(n) = -u(n+1) - u(n-1) + V_\omega(n)u(n),$$

com os potenciais $V_\omega(n) = v_\omega(n) + 2$ como na Definição 1.

Para esta família de operadores H_ω escrevemos a equação de autovalores

$$-u(n+1) - u(n-1) + V_\omega(n)u(n) = Eu(n), \tag{7.1}$$

onde $E \in \mathbb{C}$ e $u \in l^2(\mathbb{Z})$.

Consideremos a função vetorial

$$\underline{u}(n) = \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix}$$

e definimos a matriz

$$S_{E,\omega}(n) = \begin{pmatrix} V_\omega(n) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação de autovalores (7.1) é equivalente a equação matricial dada por

$$\underline{u}(n) = S_{E,\omega}(n)\underline{u}(n-1), \quad \forall n \geq 1.$$

Segue desta relação de recorrência que, para todo $n \geq 1$,

$$\underline{u}(n) = S_{E,\omega}(n) \cdots S_{E,\omega}(1)\underline{u}(0). \tag{7.2}$$

Para $n = 0$ notemos que

$$\underline{u}(0) = \mathbf{I}_2 \underline{u}(0), \tag{7.3}$$

sendo $\mathbf{I}_2$ a matriz identidade de ordem 2.

Para $n \leq -1$, da equação (7.1) obtemos

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = (S_{E,\omega}(n+1))^{-1} \begin{pmatrix} u(n+2) \\ u(n+1) \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

onde

$$(S_{E,\omega}(n))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & V_\omega(n) - E \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos escrever que

$$\underline{u}(n) = (S_{E,\omega}(n+1))^{-1} \underline{u}(n+1), \ \ \forall n \leq -1.$$

Segue desta relação de recorrência que, para todo $n \leq -1$,

$$\underline{u}(n) = (S_{E,\omega}(n+1))^{-1} \cdots (S_{E,\omega}(0))^{-1} \underline{u}(0).$$

O procedimento acima motiva a seguinte definição.

Definição 21 *Dado $n \in \mathbb{Z}$, o produto matricial*

$$\Phi_{E,\omega}(n) = \begin{cases} S_{E,\omega}(n) \cdots S_{E,\omega}(1) & \text{se } n \geq 1 \\ \boldsymbol{I}_2 & \text{se } n = 0 \\ (S_{E,\omega}(n+1))^{-1} \cdots (S_{E,\omega}(0))^{-1} & \text{se } n \leq -1 \end{cases}$$

é chamado matriz de transferência associada ao operador unidimensional H_ω.

Da definição acima concluímos que a sequência $u = \{u(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma solução da equação (7.1) se, e somente se,

$$\underline{u}(n) = \Phi_{E,\omega}(n) \underline{u}(0), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{7.5}$$

É importante notar as seguintes propriedades:

1. O espaço vetorial das soluções de (7.1), para cada E fixo, possui dimensão 2.

2. $\det(\Phi_{E,\omega}(n)) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, pois essas matrizes são produtos de matrizes $S_{E,\omega}(n)$ com determinantes iguais a 1.

3. Considerando duas soluções u_1 e u_2 de (7.1), com condições iniciais

   $$u_1(0) = u_2(1) = 0, \ \ u_1(1) = u_2(0) = 1,$$

   obtemos que

   $$\Phi_{E,\omega}(n) = \begin{pmatrix} u_1(n+1) & u_2(n+1) \\ u_1(n) & u_2(n) \end{pmatrix}.$$

Devido a relação (7.5) notemos que se tivermos limitação sobre $\|\Phi_{E,\omega}(n)\|$ obteremos limitação sobre $\|\underline{u}(n)\|$ para toda solução u da equação de autovalores.

Para estudar o crescimento da norma $\|\Phi_{E,\omega}(n)\|$ define-se os expoentes de Lyapunov superior e inferior, respectivamente, por

$$\overline{\gamma}^{\pm}(\omega, E) := \limsup_{N\longrightarrow\pm\infty} \frac{1}{|N|} \ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|, \tag{7.6}$$

$$\underline{\gamma}^{\pm}(\omega, E) := \liminf_{N\longrightarrow\pm\infty} \frac{1}{|N|} \ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|, \tag{7.7}$$

sendo $E \in \mathbb{C}$ fixo e $\|\Phi_{E,\omega}(n)\|$ denota a norma da matriz $\Phi_{E,\omega}(n)$. No entanto, os limites (7.6) e (7.7) independem da norma considerada, devido as normas serem equivalentes em espaços vetoriais de dimensão finita.

Definição 22 *Uma sequência $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias é chamada um processo subaditivo se para quaisquer inteiros positivos N e M tem-se*

$$F_{N+M}(\omega) \leq F_N(\omega) + F_M(T^N\omega),$$

onde T é uma transformação que preserva medida.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [32], será usado na demonstração de um resultado da próxima seção.

Teorema 16 (Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman) *Se F_N é um processo subaditivo satisfazendo $\mathbb{E}(|F_N|) < \infty$ para cada N e $\Gamma(F) := \inf_N \dfrac{\mathbb{E}(|F_N|)}{N} > -\infty$, então $\dfrac{F_N(\omega)}{N}$ convergirá $\mathbb{P}-$q.t.p.. Se, além disso, T for ergódico, então $\lim_{N\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{N}F_N(\omega) = \Gamma(F)$.*

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], garante a existência do expoente de Lyapunov.

Teorema 17 (Furstenberg-Kesten) *Para $E \in \mathbb{C}$ fixo e ω $\mathbb{P}$-q.t.p.,*

$$\gamma^{\pm}(E) := \lim_{N\longrightarrow\pm\infty} \frac{1}{N} \ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\| \tag{7.8}$$

existe, é independente de ω e $\gamma^+(E) = \gamma^-(E)$.

Definição 23 *Para $E \in \mathbb{C}$ fixo, o número $\gamma(E) = \gamma^+(E) = \gamma^-(E)$ é chamado expoente de Lyapunov.*

7.2 Subarmonicidade do Expoente de Lyapunov e a Fórmula de Thouless

Definição 24 *Uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow [-\infty, \infty)$ é chamada*

a) submédia se, somente se, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ tem-se

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta;$$

b) superiormente semicontínua se, somente se, para cada sequência $z_n \longrightarrow z_0$ tem-se $\limsup f(z_n) \leq f(z_0)$;

c) subarmônica se, somente se, for submédia e superiormente semicontínua.

Uma consequência da definição acima é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 18 *Se f é submédia então*

$$f(z_0) \leq \liminf_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-z_0| \leq r} f(z) dz \tag{7.9}$$

e se f é subarmônica tem-se

$$f(z_0) = \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-z_0| \leq r} f(z) dz. \tag{7.10}$$

Proposição 9 *i) Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções submédias com $\sup\limits_{|z|<R} |f_n(z)| < \infty$ para todo R e $f_0(z) = \limsup f_n(z)$, então f_0 também é submédia.*
ii) Se $\{f_n\}$ é uma sequência decrescente de funções subarmônicas, então $f_0(z) = \inf\limits_n f_n(z)$ também é subarmônica.

Demonstração.

i) Para quaisquer $n, N \leq n$ e $r > 0$, como $\{f_n\}$ é submédia então

$$\begin{aligned} f_n(z_0) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{j \geq N} f_j(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \lim_{N \longrightarrow \infty} \sup_{j \geq N} f_j(z_0) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \lim_{N \longrightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sup_{j \geq N} f_j(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da convergência monótona.

ii) Segue-se de do item (i) que $f_0(z) = \inf\limits_n f_n(z)$ é submédia e o ínfimo de uma família de funções superiormente semicontínuas é uma função superiormente semicontínua (veja demonstração em [15]). Portanto, $f_0(z) = \inf\limits_n f_n(z)$ é subarmônica.

∎

Teorema 19 (Craig-Simon) *i) $\overline{\gamma}^{\pm}(\omega, E)$ definido em (7.6) são submédias $\forall E \in \mathbb{C}$ e $\forall \omega \in \Omega$;*
ii) O expoente de Lyapunov $\gamma(E)$ é uma função subarmônica.

Demonstração.

i) Como a função a valores matriciais $\Phi_{E,\omega}(N)$ (Definição 21) é analítica em $E \in \mathbb{C}$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega$, temos que $\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|$ é subarmônica (veja este resultado no Capítulo 7 de [29]).

Logo pela item (i) da Proposição 9 temos que

$$\overline{\gamma}^{\pm}(\omega, E) = \limsup_{N \pm \infty} \frac{1}{N} \ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|$$

são submédias $\forall E \in \mathbb{C}$ e $\forall \omega \in \Omega$.

ii) Pelo teorema ergódico subaditivo (Teorema 16) temos que

$$\gamma(E) = \inf \frac{1}{N} \mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|).$$

Vejamos que $\mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|)$ é submédia. De fato, da parte (i) temos que $\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|$ é submédia. Além disso,

$$\begin{aligned} \ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\Phi_{E+re^{i\theta},\omega}(N)\| d\theta \\ \Longrightarrow \mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\Phi_{E+re^{i\theta},\omega}(N)\| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E+re^{i\theta},\omega}(N)\|) d\theta. \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos o teorema de Fubini.

Agora mostremos que $\mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|)$ é semicontínua superiormente. Seja (E_n) uma sequência arbitrária tal que $E_n \longrightarrow E$. Então, aplicando o lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned} \limsup \mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E_n,\omega}(N)\|) &\leq \mathbb{E}(\limsup \ln \|\Phi_{E_n,\omega}(N)\|) \\ &= \mathbb{E}\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \ln \|\Phi_{E_n,\omega}(N)\| \right) \\ &= \mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|). \end{aligned}$$

Assim, como $\mathbb{E}(\ln \|\Phi_{E,\omega}(N)\|)$ é submédia e superiormente semicontínua, então é subarmônica. Pela Proposição 9 (ii) temos que $\gamma(E)$ é subarmônica.

■

Lema 9 *A função $f : \mathbb{C} \longrightarrow [-\infty, \infty)$ definida por $f(E) := \int \ln |E - E'| dN(E')$ (com $f(E) = -\infty$ se a integral diverge a $-\infty$) é subarmônica.*

Demonstração. A função $\varphi(E) = \ln |E - E'|$ é subarmônica. De fato, como $\varphi(E)$ é contínua, consequentemente é superiormente semicontínua. Usando a relação (3.2) do Capítulo III de [17] temos

$$\ln |E - E'| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |E - E' + re^{i\theta}| d\theta. \tag{7.11}$$

Logo φ é submédia, portanto subarmônica. Aplicando o teorema de Fubini em (7.11) temos

$$\int \ln |E - E'| dN(E') \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int \ln |E - E' + re^{i\theta}|\, dN(E') d\theta. \tag{7.12}$$

Portanto, f é submédia.

Por outro lado, para cada $M > 0$ a função f_M definida por

$$f_M(E) = \int \max\{\ln|E - E'|, -M\} dN(E')$$

é contínua e é monótona decrescente. Usando o teorema da convergência monótona obtemos que

$$\inf_{M>0} f_M(E) = \lim_{M\longrightarrow\infty} f_M(E) = \int \lim_{M\longrightarrow\infty} \max\{\ln|E - E'|, -M\} dN(E') = f(E).$$

Como cada f_M é superiormente semicontínua, então f é superiormente semicontínua, já que o ínfimo de uma família de funções superiormente semicontínuas é uma função superiormente semicontínua (veja demonstração em [15]) . Portanto, f é subarmônica.

■

O próximo resultado estabelece uma importante relação entre a densidade integrada de estados e o expoente de Lyapunov.

Teorema 20 (Fórmula de Thouless) *Para cada $E \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\gamma(E) = \int \ln|E - E'| dN(E'). \tag{7.13}$$

Demonstração. Mostraremos primeiro o resultado para $E \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Para esses pontos E a função $f(E') = \ln|E - E'|$ é contínua sobre $\mathrm{supp}(dN)$.

Devido a Definição 21 temos que $\Phi_{E,\omega}(L)$ é da forma (para $L > 1$ grande)

$$\Phi_{E,\omega}(L) = \begin{pmatrix} P_L(\omega, E) & Q_{L-1}(\omega, E) \\ P_{L-1}(\omega, E) & Q_{L-2}(\omega, E) \end{pmatrix}$$

em que P_L e Q_L são polinômios mônicos de grau L. Além disso, $P_L(\omega, E) = 0$ se, e somente se, a equação de autovalores (7.1) tem uma solução u satisfazendo $u(0) = 0$, $u(L + 1) = 0$ e $Q_L(\omega, E) = 0$ se, e somente se, existe uma solução u tal que $u(1) = 0$ e $u(L + 2) = 0$. Assim,

$$P_L(\omega, E) = \prod_{j=1}^{L}(E - E_j^{(L)}) \quad \text{e} \quad Q_L(\omega, E) = \prod_{j=1}^{L}(E - \tilde{E}_j^{(L)}) \tag{7.14}$$

onde $E_j^{(L)}$ são os autovalores de $H_\omega^{(1,L)}$ (operador H_ω restrito ao conjunto $\{1, \cdots, L\}$ com condições de fronteira $u(0) = u(L+1) = 0$) e $\tilde{E}_j^{(L)}$ são os autovalores de $H_\omega^{(2,L+1)}$ (operador H_ω restrito ao conjunto $\{2, \cdots, L + 1\}$ com condições de fronteira $u(1) = u(L + 2) = 0$). Segue de 7.14 que

$$\ln|P_L(\omega, E)| = \sum_{j=1}^{L} \ln|E - E_j^{(L)}| = \int \ln|E - E'| d\rho_{1,L}(E')$$

e

$$\ln|Q_L(\omega, E)| = \sum_{j=1}^{L} \ln|E - \tilde{E}_j^{(L)}| = \int \ln|E - E'| d\rho_{2,L+1}(E'),$$

onde $\rho_{1,L}(A) := \sharp\left\{\lambda \in A : \lambda \text{ é autovalor de } H_\omega^{(1,L)}\right\}$ percorre $\{1, \cdots, L\}$ e atribui peso 1 aos autovalores de $H_\omega^{(1,L)}$ (analogamente para $\rho_{2,L+1}$).

Logo, obtém-se que (veja [10])

$$\lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{1}{L} \ln |P_L(\omega, E)| = \int \ln |E - E'| dN(E')$$

e

$$\lim_{L\longrightarrow\infty} \frac{1}{L} \ln |Q_L(\omega, E)| = \int \ln |E - E'| dN(E').$$

Pela definição do expoente de Lyapunov $\gamma(E)$ e devido ao fato que $P_L(E)$ e $Q_L(E)$ são as entradas da matriz $\Phi_{E,\omega}(L)$, segue o resultado para os pontos $E \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Seja $E \in \mathbb{C}$ arbitrário. Da primeira parte da demonstração temos

$$\gamma(\tilde{E}) = \int \ln |\tilde{E} - E'| dN(E'),$$

para todo $\tilde{E} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Logo obtemos

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{|E-\tilde{E}|\leq r} \gamma(\tilde{E})\ d^2\tilde{E} \ = \ \frac{1}{\pi r^2} \int_{|E-\tilde{E}|\leq r} f(\tilde{E})\ d^2\tilde{E}\ ,$$

($d^2\tilde{E}$ denota que a integral é sobre o domínio complexo) com $f(E) = \int \ln |E - E'| dN(E')$ (lembre-se que a intersecção do domínio $D_r(E) = \{\tilde{E} : |E - \tilde{E}| \leq r\}$ e $\mathbb{R}$ tem medida nula em $\mathbb{C}$).

Tomando-se o limite $r \longrightarrow 0$ em ambos os lados da igualdade acima e usando a relação (7.10) do Teorema 18 obtemos que

$$\gamma(E) = f(E) = \int \ln |E - E'| dN(E')\ ,$$

pois γ e f sao funções subarmônicas pelo Teorema 19 e Lema 9, respectivamente.

■

7.3 Log-Hölder Continuidade da Densidade Integrada de Estados

No Capítulo 5 estudamos algumas propriedades da medida densidade integrada de estados $N(E)$, dentre elas mostramos a continuidade dessa medida (Teorema 13). Nesta seção estudaremos a log-Hölder continuidade de $N(E)$ para o modelo de Anderson H_ω unidimensional. Para mais detalhes desta seção veja [9].

Definição 25 *Uma função f é dita log-Hölder contínua se para todo $R > 0$ existe um $C > 0$ tal que se $|x| < R$, $|x - y| < \frac{1}{2}$, então*

$$|f(x) - f(y)| \leq C(\ln |x - y|^{-1})^{-1}.$$

Teorema 21 *Considere o modelo de Anderson H_ω com o potencial V_ω limitado, ou seja, $\|V_\omega\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |v_\omega(n)| < \infty$. A densidade integrada de estados $N(E)$ para H_ω é log-Hölder contínua, isto é, para $E_0, E_1 \in \mathbb{R}$ com $|E_0 - E_1| < \frac{1}{2}$ tem-se*

$$|N(E_1) - N(E_0)| \leq C(\ln |E_0 - E_1|^{-1})^{-1}$$

com a constante $C = \ln(|E_0| + \|V_\omega\|_\infty + 4)$.

Demonstração. Sem perda da generalidade, suponhamos que $E_1 > E_0$. Devido a positividade do expoente de Lyapunov e pela fórmula de Thouless (Teorema 20), temos

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & \gamma(E_0) = \int \ln|E_0 - E'| dN(E') \\ = \; & \int_{E_0}^{E_1} \ln|E_0 - E'| dN(E') \;+\; \int_{\substack{|E_0 - E'| \leq 1 \\ \{E' < E_0\} \cup \{E_1 < E'\}}} \ln|E_0 - E'| dN(E') \\ & + \int_{|E_0 - E'| \geq 1} \ln|E_0 - E'| dN(E'). \end{aligned}$$

Como a segunda integral é negativa e $\ln|E_0 - E'| \leq \ln|E_1 - E_0|$ para $E_0 \leq E' \leq E_1$, obtemos da desigualdade acima que

$$-\int_{E_0}^{E_1} \ln|E_0 - E_1| dN(E') \;\leq\; \int_{|E_0 - E'| \geq 1} \ln|E_0 - E'| dN(E').$$

Além disso, temos que $\operatorname{supp}(dN) = \sigma(H_\omega) \subset [-\|V_\omega\|_\infty, \|V_\omega\|_\infty + 4]$. Então

$$\begin{aligned} -\ln|E_1 - E_0| \int_{E_0}^{E_1} dN(E') \;&\leq\; \int_{|E_0 - E'| \geq 1} \ln|E_0 - E'| dN(E') \\ &\leq\; \ln(|E_0| + \|V_\omega\|_\infty + 4)\ , \end{aligned}$$

o que implica

$$|N(E_1) - N(E_0)| \leq \ln(|E_0| + \|V_\omega\|_\infty + 4) / \ln|E_0 - E_1|^{-1}.$$

Portanto, $N(E)$ é log-Hölder contínua.

$\blacksquare$

Capítulo

8

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos o modelo de Anderson discreto d-dimensional, o qual é uma família de operadores aleatórios que aparecem em determinados problemas da Física Matemática, e mostramos que tais operadores têm como espectro um conjunto não aleatório $\mathbb{P}$-q.t.p.. Estudamos também algumas propriedades de operadores ergódicos, a ergodicidade do modelo de Anderson e condições de fronteira simples, de Neumann e de Dirichlet para operadores de Schrödinger discretos, restritos a cubos finitos. Posteriormente estudamos a medida densidade de estados para o modelo de Anderson, onde vimos a continuidade da densidade integrada de estados (Teorema 13). Além disso, estabelecemos o fenômeno Lifshitz tails para o modelo de Anderson discreto, usando as condições de fronteira de Neumann e de Dirichlet para obter limites superior e inferior, respectivamente, para a densidade integrada de estados. Finalmente, estudamos alguns resultados e propriedades importantes para o expoente de Lyapunov associado ao modelo de Anderson unidimensional, em especial a relação entre o expoente de Lyapunov e a densidade integrada de estados dada pela fórmula de Thouless (Teorema 20). É importante comentar que a log-Hölder continuidade da densidade integrada de estados estudado neste trabalho para o caso unidimensional é válida também no caso multidimensional; neste caso a abordagem é usando a fórmula de Thouless para faixas em $\mathbb{Z}^d$ (veja [8]).

Outra propriedade importante que não foi apresentada neste trabalho e que vale a pena mencionar é o fato que para o modelo de Anderson discreto unidimensional, a densidade integrada de estados é Hölder contínua, isto é, satisfaz a desigualdade

$$|N(E_1) - N(E_2)| \leq C|E_1 - E_2|^\alpha$$

para algum $\alpha > 0$ (veja [28]).

Como trabalho futuro podemos estender os resultados estudados nesta dissertação para uma classe de operadores de Dirac aleatórios, chamada modelo de Dirac Anderson discreto, estudada recentemente pelo orientador e outros em [34].

Referências

[1] Aizenman, M., and Warzel, S. *Random Operators: Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics.* American Mathematical Society, 2015.

[2] Anderson, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review 109*, 5 (1958), 1492.

[3] Avron, J., and Simon, B. Singular continuous spectrum for a class of almost periodic Jacobi matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society 6*, 1 (1982), 81–85.

[4] Bauer, H. *Measure and Integration Theory*, vol. 26. Walter de Gruyter, 2001.

[5] Carmona, R., and Lacroix, J. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators.* Springer Science and Business Media, 2012.

[6] Cohn, D. L. *Measure Theory*, vol. 165. Springer, 1980.

[7] Conway, J. B. *A Course in Functional Analysis*, vol. 96. Springer Science and Business Media, 2013.

[8] Craig, W., and Simon, B. Log Hölder continuity of the integrated density of states for stochastic Jacobi matrices. *Communications in Mathematical Physics 90*, 2 (1983), 207–218.

[9] Craig, W., and Simon, B. Subharmonicity of the Lyapunov Index. *Duke Mathematical Journal 50*, 2 (1983), 551–560.

[10] Cycon, H. L., Froese, R. G., Kirsch, W., and Simon, B. *Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry.* Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1987.

[11] Damanik, D. Lyapunov Exponents and Spectral Analysis of Ergodic Schrödinger Operators: A survey of Kotani theory and its applications. *Spectral Theory and Mathematical Physics* (2007).

[12] de Oliveira, C. R. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics.* Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser, Basel, 2009.

[13] de Oliveira, C. R. *Introdução à Análise Funcional.* IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[14] del Rio, R. Spectra of Random Operators with Absolutely Continuous Integrated Density of States. *Journal of Mathematical Physics 55*, 4 (2014), 042105.

[15] Heywood, P. Subharmonic Functions, vol. 1. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 21*, 1 (1978), 91–91.

[16] Kaminaga, M., and Krishna, M., and Nakamura, S. A Note on the Analyticity of Density of States. *Journal of Statistical Physics 149*, 3 (2012), 496–504.

[17] Katznelson, Y. *An introduction to harmonic analysis.* Dover Publ., New York, 1976.

[18] Kirsch, W. Random Schrödinger Operators : a Course. In *Schrödinger operators.* Springer, 1989, pp. 264–370.

[19] Kirsch, W. An Invitation to Random Schrödinger Operators. *Panor. Synthèses Société Mathématique de France 25* (2008), 1–119.

[20] Kirsch, W., and Metzger, B. The Integrated Density of States for Random Schrödinger Operators. *Spectral Theory and Mathematical Physics* (2006).

[21] Kowalski, E. Spectral Theory in Hilbert Spaces. *ETH Zürich* (2009).

[22] Krengel, U. *Ergodic Theorems*, vol. 6. Walter de Gruyter, 2011.

[23] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, vol. 1. wiley New York, 1978.

[24] Krüger, H. Multiscale Analysis for Ergodic Schrödinger Operators and Positivity of Lyapunov Exponents. *Journal d'Analyse Mathématique 115*, 1 (2011), 343–387.

[25] Krüger, H., and Gan, Z. Optimality of Log Hölder Continuity of the Integrated Density of States. *Mathematische Nachrichten 284*, 14-15 (2011), 1919–1923.

[26] Lamperti, J. *Probability. A Survey of the Mathematical Theory.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York, 1996.

[27] Lamperti, J. *Stochastic Processes: A Survey of the Mathematical Theory*, vol. 23. Springer Science and Business Media, 2012.

[28] LePage, E. Empirical Distribution of the Eigenvalues of a Jacobi Matrix. *Probability measures on groups, VII, Springer Lecture Notes Series 1064* (1983), 309–367.

[29] Levin, B. Y. *Lectures on Entire Functions*, vol. 150. American Mathematical Soc., 1996.

[30] Lifshitz, I. M. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. *Physics-Uspekhi 7*, 4 (1965), 549–573.

[31] Lindgren, G. Lectures on stationary stochastic processes. *PhD course of Lunds University* (2006).

[32] Oliveira, K., and Viana, M. Fundamentos da Teoria Ergódica. *Rio de Janeiro: SBM, Vol. 90* (2014).

[33] Pastur, L. A. Spectra of random self adjoint operators. *Russian mathematical surveys 28*, 1 (1973), 1.

[34] Prado, R. A., de Oliveira, C. R., and Carvalho, S. L. Dynamical Localization for Discrete Anderson Dirac Operators. *Journal of Statistical Physics 167* (2017), 260–296.

[35] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, New York, 1975.

[36] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1978.

[37] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1980.

[38] Retherford, J. R. *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem*, vol. 27. Cambridge University Press, 1993.

[39] Schlag, W. On discrete Schrödinger Operators with Stochastic Potentials. In *XIVth International Congress on Mathematical Physics* (2006), World Scientific, pp. 206–215.

[40] Simon, B. Lifschitz Tails for the Anderson Model. *Journal of Statistical Physics 38*, 1-2 (1985), 65–76.

[41] Staffler, B. Lifshitz Tails for Random Band Matrices. Master's thesis, Ludwig Maximilian University of Munich, Munich, 2013.

[42] Sütö, A. Schrödinger Difference Equation with Deterministic Ergodic Potentials. In *Beyond Quasicrystals*. Springer, 1995, pp. 481–549.

[43] Teschl, G. Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger operators, 2009.

[44] Veselic, I. Integrated Density of States and Wegner Estimates for Random Schrödinger Operators. *Contemp. Math. 40* (2003), 97–183.