Sabrina Saito

Alguns Aspectos da Teoria de Ends



1910001343

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Alguns Aspectos da Teoria de Ends

Sabrina Saito

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade

Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP
BIBLIOTECA
S. J. Rio Preto
T. 1343/05

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Dezembro - 2004

513.831
S158a

10103023

04/03/2005
Doação
R$ 24,00
Autor(a)
076/2005
57/05

Saito, Sabrina.
Alguns aspectos da teoria de Ends / Sabrina Saito – São José do Rio Preto : [s.n.], 2004
102 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maria Gorete Carreira Andrade
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Cohomologia de grupos. 3. Teoria de Ends. 4. Decomposição de grupos. I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 515.14

"Aceita o conselho dos outros,
mas nunca desistas da tua própria opinião."

William Shakespeare

unesp

Aos meus pais,

Fernando e Carmen

dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que este sonho se concretizasse. Em especial agradeço:

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade que projetou este trabalho, pela completa disponibilidade no atendimento de minhas dúvidas e principalmente pelo carinho e amizade dispensados.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP- S.J.R. Preto, em particular à Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campelo Fanti, pela formação, estímulo e amizade.

À Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins Brito por valiosas sugestões durante o Exame Geral de Qualificação.

À amiga Ciléia por compartilhar as alegrias e dificuldades ao longo de todos esses anos.

Aos amigos da graduação, dos quais mesmo longe sempre estiveram presentes nesta jornada, em especial ao Márcio por sua indispensável ajuda sempre. E ainda, aos amigos André e Fabiano pela inestimável colaboração na parte computacional-gráfica final deste trabalho.

À amiga Cristiane por várias discussões importantes durante esse período, enriquecendo nossos trabalhos. E também, aos demais alunos da pós-graduação, pelo agradável convívio.

Ao Alexandre pelo carinho, compreensão e apoio em muitos dos momentos desta caminhada.

Aos meus pais, principalmente por compreenderem minha ausência durante as horas de estudo, pelo apoio e incentivo inestimado que sempre me transmitiram.

À toda minha família pelo estímulo e torcida dispensados em todos os momentos.

À CAPES por parte do auxílio financeiro.

A Deus por tudo.

Resumo

A teoria de ends de espaços topológicos foi introduzida por Freudenthal (1931) como uma compactificação de certos tipos de espaços. Simplesmente falando, um end é uma maneira de ir para o infinito.

Mais tarde, Hopf (1943) aplicou a teoria de ends para a teoria de grupos considerando G um grupo finitamente gerado.

Em 1949, Specker trabalha com uma definição puramente algébrica para $e(G)$, com a vantagem de estender toda a teoria anteriormente estudada para grupos não finitamente gerados.

Posteriormente, Scott (1977) estende a definição de $e(G)$ para $e(G, S)$ onde (G, S) é um par grupo, ou seja, G é um grupo e S um subgrupo de G.

O presente trabalho aborda alguns aspectos gerais da teoria de ends de grupos, pares de grupos e espaços topológicos e a relação entre eles. Apresentamos também algumas aplicações da teoria de ends à teoria de grupos.

Palavras-chave: Cohomologia de Grupos, Ends, Decomposição de Grupos.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Abstract

The theory of ends of topological spaces was introduced by Freudenthal (1931) as a compactification for certain types of spaces. Simply speaking, an end is a way of going to infinity.

Later, Hopf (1943) applied the theory of ends to group theory, $e(G)$, considering G a finitely generated group.

In 1949, Specker worked with a purely algebraic definition of $e(G)$, with the advantage of extending all the theory previously studied to non finitely generated groups.

Subsequently, Scott (1977) extended the definition of $e(G)$ to $e(G, S)$, where (G, S) is a group pair, in other words, G is a group and S is a subgroup of G.

The present work is concerned with many general aspects of the theory of ends of groups, pairs of groups and topological spaces, and a relation among them. We present many applications of the theory of ends of groups to the theory of groups.

Keywords: Cohomology of Groups, Ends, Splitting of Groups.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Sumário

Introdução iii

1 Tópicos de Álgebra Homológica 1

1.1 RG-Módulos 1

1.2 Resoluções Livres e Projetivas 5

1.3 CW-Complexos e Resoluções de R sobre RG via Topologia 6

1.4 Coinvariantes e Invariantes 17

1.5 Módulos Induzidos e Coinduzidos 19

1.6 A (Co)homologia de um Grupo G 24

1.7 O Lema de Shapiro 33

1.8 Interpretação Topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ 35

2 O End Clássico de Grupos 41

2.1 O End de um Grupo 41

2.2 Ends e Cohomologia de Grupos 48

3 Uma Relação entre Ends de Grupos e Ends de Espaços 55

3.1 Número de Ends de um Complexo Simplicial 55

3.2 Número de Ends de um CW-complexo 64

3.3 Número de Ends de um Espaço Topológico 65

3.4 Uma Relação entre Ends de Grupos e Ends de Espaços 69

4 Ends de Pares de Grupos 79

4.1 Definições e Propriedades Básicas 79

4.2 Relação do End do Par (G, S) com Espaços Topológicos 83

5 Algumas Considerações sobre Aplicações da Teoria de Ends **89**

5.1 Produtos Livres Amalgamados e HNN-Grupos 89

5.2 Algumas Aplicações da Teoria de Ends à Teoria de Grupos 92

Referências Bibliográficas **100**

Introdução

A teoria de ends de espaços topológicos foi introduzida em 1931 por Freudenthal [10] como uma compactificação para certos tipos de espaços. Simplesmente falando, um end é uma maneira de ir para o infinito. Entretanto, ao considerarmos um grupo G temos que o número de ends de G, denotado $e(G)$, mede o número de subconjuntos quase invariantes de G, e analogamente, se (G, S) representa um par grupo, ou seja, um par (G, S) onde G é um grupo e S um subgrupo de G, o número de ends do par grupo, denotado $e(G, S)$, mede o número de subconjuntos quase invariantes em G/S sobre a ação de G.

O presente trabalho, dividido em cinco capítulos, aborda alguns aspectos gerais da teoria de ends de grupos, pares de grupos e espaços topológicos e a relação entre eles. Apresentamos também algumas aplicações da teoria de ends à teoria de grupos.

A seguir relatamos o objetivo de estudo em cada capítulo.

No Capítulo 1 serão apresentados resultados de fundamental importância para os capítulos posteriores. Introduzimos, inicialmente, o conceito de RG-módulos, onde R é um anel comutativo com unidade e G um grupo denotado multiplicativamente. Em seguida, apresentamos um estudo sobre resoluções livres (portanto projetivas) $\varepsilon : F \longrightarrow R$ de R sobre RG.

Na seção seguinte apresentamos um estudo sobre CW-complexos ilustrando a teoria com alguns exemplos e introduzindo os conceitos de resoluções de R sobre RG via topologia.

Ainda neste capítulo, definimos os n-ésimos grupos de homologia e cohomologia do grupo G, com coeficientes no RG-módulo M, ou seja,

$$H_n(G, M) = H_n(F \otimes_{RG} M) \quad \text{e} \quad H^n(G, M) = H^n(Hom_{RG}(F, M)),$$

onde $\varepsilon : F \longrightarrow R$ é uma resolução projetiva de R sobre RG. Como exemplos, calculamos $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ para os casos em que G é um grupo cíclico infinito e cíclico finito de ordem n com gerador t.

Na próxima seção, apresentamos o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia do grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H, e através de resultados sobre $Ind_H^G(Res_H^G M)$ e $Coind_H^G(Res_H^G M)$, enunciamos uma outra versão do mesmo lema.

Para finalizar este capítulo apresentamos também uma interpretação topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$, ou seja, relacionamos a (co)homologia do grupo G com a (co)homologia do espaço $K(G, 1)$ introduzido.

No Capítulo 2 introduzimos a definição e alguns resultados sobre end de um grupo G. Dentre eles se destacam:

(1) *Se G é o grupo cíclico infinito, ou seja, $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, então $e(G) = 2$.*

(2) *Se H é um subgrupo normal finito de G, então $e(G) = e(G/H)$.*

A seção posterior mostra que também é possível interpretar $e(G)$ em termos de cohomologia de grupos, ou seja, $e(G) = dim H^0(G, PG/FG)$, onde PG é o conjunto das partes de G e $FG = \{A \in PG; A \text{ é finito }\}$.

Com isso, podemos citar alguns dos resultados principais, demonstrados:

(3) *Se G é infinito, então $e(G) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$.*

(4) *Se H é um subgrupo de um grupo G tal que $(G : H) < \infty$, então $e(G) = e(H)$.*

No Capítulo 3, o objetivo é relacionar o número de ends de um grupo com o número de ends de um espaço topológico. Para isso, inicialmente, introduzimos o conceito de número de ends de um complexo simplicial $\mathcal{X}$ localmente finito. Ainda nesta seção, provamos em detalhes que: *Se $\mathcal{X}$ é um complexo simplicial localmente finito, então $e(\mathcal{X}) = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.*

Na seção seguinte, observamos (conforme [29]) que este conceito se estende para CW-complexos localmente finitos.

Em seguida é apresentada a definição de número de ends para espaços topológicos mais gerais, ou seja, $\mathcal{X}$ um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto, conexo e localmente conexo. Dentre os vários resultados apresentados, encontra-se o importante fato de que o número de ends de um espaço topológico é um invariante topológico. Observamos, no entanto, que o número de ends de $\mathcal{X}$ não é um invariante homotópico, mas é um invariante sob homotopias próprias.

Para encerrar o capítulo é apresentada a definição de grafo de Cayley de um grupo G, denotado Γ_U, para obtermos dois resultados importantes, a saber:

(5) *Se G é um grupo finitamente gerado, com um conjunto finito U de geradores, então $e(G) = e(\Gamma_U)$.*



(6) *Se G é um grupo finitamente gerado então $e(G) = 0, 1, 2$ ou ∞.*

No Capítulo 4 introduzimos o conceito de número de ends, $e(G, S)$, de um par grupo, que é uma generalização de número de ends, $e(G)$, de um grupo G e sua definição é devida a Houghton em [14] e Scott [28].

Como resultados principais segue uma extensão de (5), enunciada da seguinte maneira:

(7) *Sejam G um grupo finitamente gerado, S um subgrupo de G e $\Gamma = \Gamma(G, U)$ o grafo de Cayley de G associado a U, um conjunto finito de geradores de G. Se Γ/S denota o quociente de Γ pela ação (à direita) de S em G, então $e(G, S) = e(\Gamma/S)$.*

Finalizando o capítulo, apresentamos sem demonstração, dois resultados envolvendo a teoria de número de ends do par grupo com a teoria de número de ends de espaços, os quais são:

(8) *Seja G o grupo fundamental de uma superfície fechada F e seja S o grupo fundamental de uma subsuperfície compacta incompressível $\mathcal{X}$ de F. Então $e(G, S)$ é igual ao número de componentes de bordo de $\mathcal{X}$.*

(9) *Consideremos $\mathcal{X}$ um CW-complexo finito com espaço de recobrimento conexo regular $\widetilde{\mathcal{X}}$ e seja G o grupo das transformações de recobrimento. Então, se S é um subgrupo de G e $\widetilde{\mathcal{X}}/S$ denota o quociente de $\widetilde{\mathcal{X}}$ pela ação de S, então $e(\widetilde{\mathcal{X}}/S) = e(G, S)$.*

Para encerrar o trabalho, o Capítulo 5 apresenta algumas aplicações da teoria de ends à teoria de grupos. Dentre vários resultados apresentados, podemos considerar os seguintes:

(10) *Seja G um grupo finitamente gerado. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $e(G) = 2$;

(ii) G *tem um subgrupo cíclico de índice finito;*

(iii) G *em um subgrupo normal finito com quociente* $\mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$;

(iv) $G = F *_F$ *com* F *finito, ou* $G = A *_F B$ *com* F *finito e* $(A : F) = (B : F) = 2$.

(11) *Seja G um grupo. Se G se decompõe sobre um subgrupo finito então $e(G) \geq 2$. Reciprocamente, se G é finitamente gerado e $e(G) \geq 2$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito.*

(12) *Se G e S são grupos finitamente gerados e G é S-residualmente finito, então $e(G, S) \geq 2$ se, e somente se, G possui um subgrupo G_1 de índice finito tal que G_1 contém S e G_1 se decompõe sobre S.*

Como o estudo da teoria de ends demanda muitos preliminares algébricos e topológicos e diversas ferramentas poderosas em Álgebra e Topologia, tais como Álgebra Combinatória e

Teoria de Grafos, as demonstrações de alguns resultados apresentados serão apenas referidas.

Capítulo 1

Tópicos de Álgebra Homológica

Neste capítulo faremos uma revisão sobre alguns conceitos de Álgebra Homológica e resultados básicos de cohomologia de grupos que serão de grande utilidade para o desenvolvimento do conteúdo, tendo como objetivo propiciar ao leitor uma melhor compreensão de nosso trabalho.

Usualmente a cohomologia de um grupo G é definida sobre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo, mas pode ser definida analogamente sobre qualquer anel R com coeficientes em um RG-módulo.

Neste capítulo estaremos trabalhando com um anel R qualquer. No entanto, nos próximos capítulos apresentaremos esta teoria, usando, por conveniência o corpo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ de dois elementos.

1.1 RG-Módulos

Anel Grupo

Definição 1.1.1. *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente, com elemento neutro 1. Seja RG o R-módulo livre gerado pelos elementos de G. Assim, um elemento de RG é expresso unicamente na forma $\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)$, onde $r_g \in R$ e $r_g = 0$, para quase todo g em G (isto é, exceto para um número finito de elementos g em G).*

Em RG, as operações de adição e multiplicação são dadas por

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} s_g g\right) = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g$$

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\cdot\left(\sum_{h\in G} s_h h\right) = \sum_{g,h\in G}(r_g s_h)(gh).$$

Tais operações fazem de RG um anel comutativo com unidade 1 (1 representa a multiplicação da unidade de R pelo elemento neutro de G), chamado **anel grupo** *de G sobre R.*

Ação de um grupo sobre um conjunto

Definição 1.1.2. *Sejam G um grupo e $\mathcal{X}$ um conjunto não vazio. Uma* **ação (à esquerda)** *de G sobre $\mathcal{X}$* **(ou uma G-ação sobre $\mathcal{X}$)** *é uma aplicação:*

$$\begin{aligned}\phi : G\times\mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X}\\ (g,x) &\longmapsto \phi(g,x) = g\cdot x,\end{aligned}$$

satisfazendo, para todo x em $\mathcal{X}$, as condições:

(a) $1\cdot x = x$ *(1: elemento neutro de G)*

(b) $(g_1g_2)\cdot x = g_1\cdot(g_2\cdot x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Equivalentemente, uma ação de G sobre $\mathcal{X}$ é um homomorfismo:

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow Bij(\mathcal{X})\\ g &\longmapsto \varphi(g) = \varphi_g; \varphi_g(x) = g\cdot x,\end{aligned}$$

onde $Bij(\mathcal{X})$ é o grupo das bijeções de $\mathcal{X}$.

Nota: Para simplificar a notação, vamos escrever $g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ no lugar de $\varphi_g : \mathcal{X}\longrightarrow \mathcal{X}$.

Observação 1.1.1. *Analogamente, define-se* **G-ação (à direita)**. *É importante notar que, a partir de uma G-ação (à esquerda) sobre $\mathcal{X}$, podemos sempre definir uma ação (à direita) sobre $\mathcal{X}$ por considerar: $x * g := g^{-1}\cdot x$.*

Observação 1.1.2. *Se $\mathcal{X}$ tiver estrutura de grupo (aditivo) e quisermos preservar esta estrutura através da G-ação, exigiremos que a aplicação $g : \mathcal{X}\longrightarrow \mathcal{X}$ seja um homomorfismo de grupos, isto é, que ϕ satisfaça a condição adicional:*

(c) $g\cdot(x_1 + x_2) = g\cdot x_1 + g\cdot x_2, \forall g \in G$ *e* $x_1, x_2 \in X$.

Assim, uma ação de G em um grupo aditivo é um homomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow Aut(\mathcal{X})$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

onde $Aut(\mathcal{X})$ denota o grupo dos automorfismos de $\mathcal{X}$.

Observação 1.1.3. *Se $\mathcal{X}$ é um espaço topológico, exigiremos que a aplicação $g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ seja contínua, para todo g em G, a fim de que a estrutura topológica de $\mathcal{X}$ seja preservada.*

Desta forma, uma ação de um grupo G em um espaço topológico $\mathcal{X}$ é um homomorfismo

$$\varphi : G \longrightarrow Homeo(\mathcal{X})$$

onde $Homeo(\mathcal{X})$ denota o grupo dos homeomorfismos de $\mathcal{X}$.

Neste caso, se considerarmos em G a topologia discreta, a ação $\phi : G \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ é uma aplicação contínua.

Definição 1.1.3. *Se um grupo G atua em um conjunto $\mathcal{X}$, este é chamado* **G-conjunto**.

Definição 1.1.4. *Dizemos que $\mathcal{X}$ é um* **G-conjunto livre** *se a ação de G em $\mathcal{X}$ é livre, isto é, $g \cdot x = x$ para algum x em $\mathcal{X}$ se, e somente se, $g = 1$.*

Definição 1.1.5. *Dizemos que $\mathcal{X}$ é um* **G-conjunto trivial** *se a ação de G em $\mathcal{X}$ é trivial, isto é, $g \cdot x = x$ para todo x em $\mathcal{X}$ e para todo g em G.*

Proposição 1.1.1. *M é um RG-módulo se, e somente se, M é um R-módulo munido de uma ação de G sobre M.*

Demonstração: Suponhamos M um RG-módulo então M é um R-módulo com $r \cdot m := (r \cdot 1) \cdot m$ (onde 1 é elemento neutro de G) e a G-ação é dada por:

$$g \cdot m := (1_R g) \cdot m \text{ (onde } 1_R \text{ é a unidade de } R).$$

Reciprocamente, se M é um R-módulo e existe uma G-ação sobre M, então podemos dar a M uma estrutura de RG-módulo da seguinte forma $(\sum r_g g) \cdot m = \sum r_g (g \cdot m)$

■

Observação 1.1.4. *Segue da proposição anterior que:*

(i) M é um $\mathbb{Z}G$-módulo $\iff$ M é um grupo abeliano munido de uma G-ação;

(ii) M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo $\iff$ M é um $\mathbb{Z}_2$-módulo (equivalentemente, grupo abeliano em que todo elemento tem ordem 2) munido de uma G-ação.

Logo, todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo é claramente um $\mathbb{Z}G$-módulo.

Exemplo 1.1.1. *Todo R-módulo M admite uma estrutura de RG-módulo trivial. Basta considerar a G-ação trivial* $\varphi : G \longrightarrow AutM$ *tal que* $\varphi(g) = id_M$, $\forall g \in G$, *ou seja,* $g \cdot m = m$, $\forall m \in M$ *e* $\forall g \in G$. *Note que neste caso,*

$$(r_1g_1 + r_2g_2 + \ldots + r_kg_k) \cdot m = (r_1 + r_2 + \cdot + r_k)m,$$

onde $r_i \in R$ *e* $g_i \in G$, $i = 1, \ldots, k$ *e* $m \in M$. *Em particular, o anel R admite esta estrutura.*

Exemplo 1.1.2. *Sejam* $\mathcal{X}$ *um G-conjunto e* $R\mathcal{X}$ *o R-módulo livre gerado pelos elementos de* $\mathcal{X}$. *Podemos estender a ação de G sobre* $\mathcal{X}$ *a uma ação de G sobre* $R\mathcal{X}$ *por definir:*

$$g \cdot \left(\sum r_x x\right) := \sum r_x (g \cdot x),$$

onde $x \in \mathcal{X}$, $r_x \in R$ *e* $g \in G$.

Em particular, temos o R-módulo livre $R(G/H)$ *para todo subgrupo H de G, onde* G/H *é o conjunto das classes laterais gH e G atua sobre* G/H *por translação à esquerda.*

Definição 1.1.6. *O homomorfismo* $\varepsilon : RG \longrightarrow R$ *definido por* $\varepsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$, *e estendido linearmente, é denominado* **aplicação aumentação** *(note que* ε *é sobrejetor).*

Definição 1.1.7. *Consideremos a aplicação aumentação definida acima. O Kernel de tal aplicação é chamado* **ideal aumentação** *de RG, o qual denota-se por I ou IG.*

Observação 1.1.5. *Sejam* $\varepsilon : RG \longrightarrow R$, *a aplicação aumentação definida anteriormente, e* $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in RG$. *Assim,*

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) = \sum_{g \in G} r_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} r_g.$$

Se A é um RG-módulo trivial, temos

$$\alpha m = \left(\sum_{g \in G} r_g g\right) m = \sum_{g \in G} r_g (g \cdot m) = \sum_{g \in G} r_g m = \varepsilon(\alpha) m.$$

Definição 1.1.8. *Sejam* $\mathcal{X}$ *um G-conjunto e x um elemento de* $\mathcal{X}$. *Definimos a* **G-órbita** *de x como sendo o conjunto* $G(x) := \{g \cdot x; g \in G\}$.

Observação 1.1.6. *O conjunto de todas as órbitas de* $\mathcal{X}$ *forma uma partição de* $\mathcal{X}$, *isto é,*

(i) $\mathcal{X} = \bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)$;

(ii) $G(x_i) \cap G(x_j) = \emptyset$, *para* $x_i, x_j \in E$ *com* $x_i \neq x_j$;

onde E é um conjunto de representantes para as G-órbitas de $\mathcal{X}$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Proposição 1.1.2. *Sejam $\mathcal{X}$ um G-conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G-órbitas em $\mathcal{X}$. Então, $R\mathcal{X}$ é um RG-módulo livre com base E.*

Demonstração: Seja $E = \{x_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em $\mathcal{X}$. Deste modo,

$$R\mathcal{X} = R\left(\bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)\right) = \bigoplus_{x_\lambda \in E} R(G(x_\lambda)).$$

Agora, como a G-ação é livre, para cada x_λ temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : G &\longrightarrow G(x_\lambda) \\ g &\longmapsto \varphi_\lambda(g) = g \cdot x_\lambda \end{aligned}$$

é uma bijeção, ou seja, assim, G é equipotente à $G(x_\lambda)$.

Logo, $R(G(x_\lambda)) \simeq RG$, como queríamos.

■

Corolário 1.1.1. *Se H é um subgrupo de G, então RG é um RH-módulo livre com base num conjunto E de representantes para as H-órbitas em G (que são as classes laterais à esquerda de H em G), isto é, $RG = \bigoplus_{g \in E} gRH$.*

■

1.2 Resoluções Livres e Projetivas

Definição 1.2.1. *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e M um R-módulo. Uma* **resolução de M sobre R**, *ou uma* **R-resolução** *de M, é uma seqüência exata de R-módulos*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0,$$

onde $\varepsilon : F_0 \longrightarrow M$ é chamada **aplicação aumentação**.

Se cada F_i é R-módulo livre (projetivo), dizemos que a resolução é **livre (projetiva)**.

Notação: $\varepsilon : F \longrightarrow M$ denotará uma resolução de M sobre R.

Lema 1.2.1. *Dado um R-módulo M, sempre podemos construir uma resolução livre (e portanto, projetiva) de M sobre R.*

Demonstração: Teorema I.1.4 [15].

■

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Lema 1.2.2. *Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG, e H é um subgrupo de G, então F também é uma resolução projetiva de R sobre RH.*

Demonstração: Lema 1.2.2 [19].

■

1.3 CW-Complexos e Resoluções de R sobre RG via Topologia

Nesta seção trabalharemos com a definição de um espaço topológico denominado CW-complexo e alguns exemplos deste espaço. Além disso, vamos ver como obter resoluções livres de R sobre RG através do mesmo.

Definição 1.3.1. *Dado um espaço $\mathcal{X}$ de Hausdorff, dizemos que $\mathcal{X}$ admite uma estrutura de CW-**complexo** se possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q, chamados **células** ($q \geq 0$ representando a dimensão e j variando sobre um conjunto de índices J_q), junto com uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^q \subset \ldots$, sendo $X^q = \bigcup_{p \leq q;\, j \in J_p} \sigma_j^p$ (por definição $X^{-1} = \emptyset$), e fronteira dada por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\sigma_i^p - f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q - f_j^q$ somente quando $p = q$ e $i = j$.

(ii) $\mathcal{X} = \bigcup_q X^q$.

*(iii) Para cada σ_j^q, existe uma **aplicação característica** $\phi_j^q : D^q \longrightarrow \sigma_j^q$ (onde D^q é o disco fechado de dimensão q) que leva S^{q-1} (esfera de dimensão $q-1$) sobre f_j^q, e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$ (S^{-1} é o conjunto vazio).*

(iv) f_j^q intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.

(v) Um subconjunto $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ é fechado se $\mathcal{Y} \cup \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q, $\forall q$ e $\forall j \in J_q$, onde σ_j^q possui a topologia quociente de D^q coinduzida por ϕ_j^q.

*O subconjunto X^n de $\mathcal{X}$ é chamado n-**esqueleto**. Os pontos de X^0 são chamados de **vértices** ou 0-**células**.*

*Um CW-complexo é dito ser **finito** ou **infinito** se o número de células é finito ou infinito, respectivamente. Se $\mathcal{X} = X^n$ para algum n o CW-complexo é dito de dimensão finita e o menor inteiro n para o qual isso ocorre é chamado a **dimensão de** $\mathcal{X}$.*

Observação 1.3.1. (*a*) *Em um CW-complexo* $\mathcal{X}$, e^q *denotará a célula aberta de dimensão* q :

$$e^q = \sigma^q - f^q.$$

(*b*) *Para CW-complexos finitos as condições* (*iv*) *e* (*v*) *(também denotadas por* C *e* W*) são supérfluas. Este fato simplifica a teoria no caso finito.*

Exemplo 1.3.1. *Seja* $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. *Podemos dar a* $\mathbb{R}$ *uma estrutura natural de CW-complexo, onde as* 0*-células e* 1*-células são dadas , respectivamente, por* $e^0_n = \{n\}$ *e* $e^1_n = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

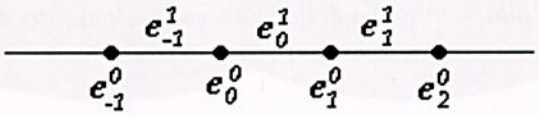


Figura 1.1: Decomposição celular de $\mathbb{R}$

Exemplo 1.3.2. *Seja* $\mathcal{X} = S^n$ *(n-esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre* S^n *pode ser dada por uma* 0*-célula e uma n-célula* ($S^n = e^0 \cup e^n$).

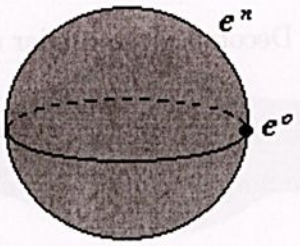


Figura 1.2: Decomposição celular de S^n

Exemplo 1.3.3. *Consideremos* $\mathcal{X}$ *a figura oito. É possível dar a* $\mathcal{X}$ *uma estrutura de CW-complexo* 1*-dimensional, com uma única* 0*-célula e duas* 1*-células* ($\mathcal{X} = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2$).

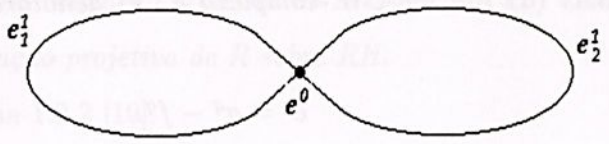


Figura 1.3: Decomposição celular da figura oito.

Exemplo 1.3.4. *Como um caso mais geral, consideremos* $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$, *o bouquet de círculos indexado por um conjunto* S. *Podemos dar a* $\mathcal{X}$ *uma estrutura de CW-complexo* 1*-dimensional, com uma única* 0*-célula e uma* 1*-célula para cada elemento de* S $\left(X = e^0 \cup \left(\bigcup_{s \in S} e_s^1 \right) \right)$.

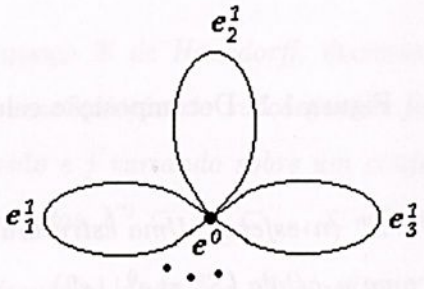


Figura 1.4: Decomposição celular do bouquet de círculos.

Exemplo 1.3.5. *O toro* (T^2) *admite uma estrutura de CW-complexo* 2*-dimensional, com uma* 0*-célula, duas* 1*-células e uma* 2*-célula* $(T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2)$.

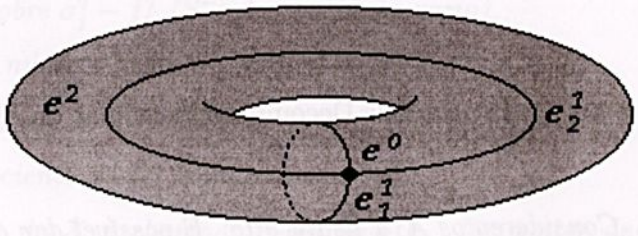


Figura 1.5: Decomposição celular do toro

Observação 1.3.2. *É também usual denotar uma* n*-célula por* σ^n *ou, simplesmente por* σ, *caso a dimensão esteja clara no contexto.*

Exemplo 1.3.6. *Consideremos $\mathcal{X} = T_2\# \ldots \#T_2$ a soma conexa de n toros. Podemos dar a $\mathcal{X}$ uma estrutura de CW-complexo do seguinte modo: uma 0-célula, $2n$ 1-células e 1 2-células, ou seja,*

$$\mathcal{X} = \sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \sigma_2^1 \cup \ldots \cup \sigma_{2n-1}^1 \cup \sigma_{2n}^1 \cup \sigma^2.$$

Ilustrando para $\mathcal{X} = T_2\#T_2$ (bitoro) temos

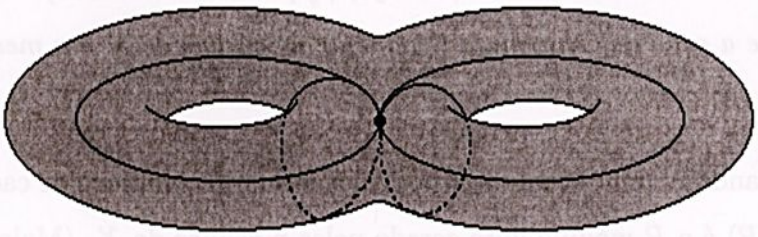


Figura 1.6: Decomposição celular da soma conexa de dois toros.

Exemplo 1.3.7. *Seja $\mathcal{X} = P^2\# \ldots \#P^2$ a soma conexa de n-planos projetivos. Então $\mathcal{X}$ é um CW-complexo 2-dimensional contendo uma 0-célula, n 1-células e uma 2-célula, ou seja,*

$$\mathcal{X} = \sigma_0 \cup \sigma_1^1 \cup \ldots \cup \sigma_n^1 \cup \sigma^2.$$

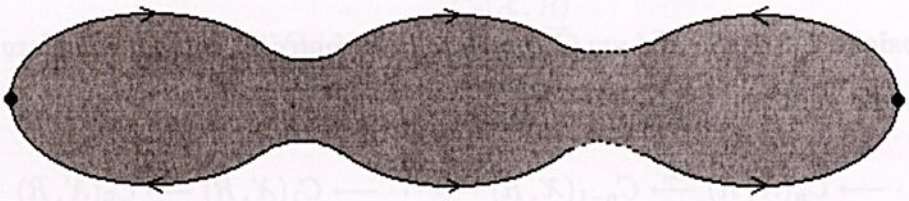


Figura 1.7: Soma conexa de n-toros.

Definição 1.3.2. *Se $\mathcal{X}$ é um CW-complexo com células $\{\sigma_i^k\}$ então um subconjunto A de $\mathcal{X}$ é um* **subcomplexo de $\mathcal{X}$** *se sempre que $A \cap \sigma_i^k \neq \emptyset$ então $\sigma_i^k \subseteq A$.*

Definição 1.3.3. *Um* **G-complexo** *é um CW-complexo $\mathcal{X}$ munido de uma ação de G em $\mathcal{X}$ que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de $\mathcal{X}$, então $gS = S$, para todo g em G. Se a ação de G em $\mathcal{X}$ permuta livremente as células, dizemos que $\mathcal{X}$ é um* **G-complexo livre**.

unesp

Observação 1.3.3. *(a) É importante notar que, pelo fato da ação de G em $\mathcal{X}$ induzir um homomorfismo dado por*

$$\varphi : G \longrightarrow Homeo(\mathcal{X})$$
$$g \longmapsto \varphi_g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$, temos que, se σ é uma célula de $\mathcal{X}$, então $g \cdot \sigma$ também é uma célula de $\mathcal{X}$ cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva dimensão).
(b) Dizer que a ação de G permuta livremente as células de $\mathcal{X}$ é o mesmo que $g\sigma \neq \sigma$, $\forall \sigma$ se $g \neq 1$.

Considerando $\mathcal{X}$ um G-complexo podemos formar o complexo de cadeias celular $C_*(\mathcal{X}, R)$, onde $C_n(\mathcal{X}, R)$ é o R-módulo livre gerado pelas n-células de $\mathcal{X}$. (Maiores detalhes em [21])

A ação de G em $\mathcal{X}$ induz uma ação em $C_*(\mathcal{X}, R)$ da seguinte forma:

$$g \cdot (a_1\sigma_1 + \ldots + a_n\sigma_n) := a_1 g \cdot \sigma_1 + \ldots + a_n g \cdot \sigma_n.$$

Assim, $C_*(\mathcal{X}, R)$ torna-se um complexo de cadeias de RG-módulos.

Definimos a aplicação $\varepsilon : C_0(\mathcal{X}, R) \longrightarrow R$ por $\varepsilon(\sigma^0) = 1$, nas 0-células σ^0 de $\mathcal{X}$, e a estendemos por linearidade. Temos que ε é uma aplicação de RG-módulos, pois, $g \cdot \sigma^0$ também é 0-célula e, a ação de G em R é trivial.

Proposição 1.3.1. *Se $\mathcal{X}$ é um G-complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de $\mathcal{X}$:*

$$\cdots \longrightarrow C_n(\mathcal{X}, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\mathcal{X}, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(\mathcal{X}, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathcal{X}, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG.

Demonstração: Seja $\mathcal{X}_n = \{\sigma \in \mathcal{X}; \sigma \text{ é uma } n\text{-célula }\}$.

Temos que $C_n(\mathcal{X}, R) = R\mathcal{X}_n$ (R-módulo livre gerado pelas n-células).

Agora, como $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ é um G-complexo livre, temos que $\mathcal{X}_n$ é um G-conjunto livre, logo, pela Proposição 1.1.2, $C_n(\mathcal{X}, R)$ é um RG-módulo livre com base E, onde E é um conjunto de representantes para as G-órbitas em $\mathcal{X}_n$.

Sabemos que, se $\mathcal{X}$ é contrátil, então tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e, deste modo temos

$$H_n(\mathcal{X}, R) \simeq H_n(\{x_0\}, R) = \begin{cases} R, \text{ se } n = 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Mas,

$$0 = H_n(\mathcal{X}\ , R) = \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}} \Longrightarrow Ker\partial_n = Im\partial_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Resta mostrar que $Im\partial_1 = Ker\varepsilon$.

Consideremos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow C_1(\mathcal{X}\ , R) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\mathcal{X}\ , R) & \xrightarrow{\varepsilon} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial_0} & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Então,

$$R = H_0(\mathcal{X}, R) = \frac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} = \frac{C_0(\mathcal{X}, \mathcal{R})}{Im\partial_1}$$

Como ε é sobrejetora, pelo teorema do homomorfismo, temos

$$\frac{C_0(\mathcal{X}, \mathcal{R})}{Ker\varepsilon} \simeq Im\varepsilon = R.$$

Portanto,

$$R \simeq \frac{C_0(\mathcal{X}, R)}{Ker\varepsilon} = \frac{\frac{C_0(\mathcal{X}, R)}{Im\partial_1}}{\frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1}} \simeq \frac{R}{\frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1}}.$$

Logo,

$$\frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1} \simeq 0.$$

E, como $Im\partial_1 \subset Ker\varepsilon$, temos $Im\partial_1 = Ker\varepsilon$.

Assim, o complexo

$$\cdots \longrightarrow C_n(\mathcal{X}, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\mathcal{X}, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(\mathcal{X}, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathcal{X}, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é exato e, então, temos uma resolução livre de R sobre RG.

■

O exemplo a seguir ilustra uma aplicação da Proposição 1.3.1.

Exemplo 1.3.8. *Sejam* $R = \mathbb{Z}$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ *e* $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Temos que $\mathcal{X}$ é contrátil e é um G -complexo livre, pois

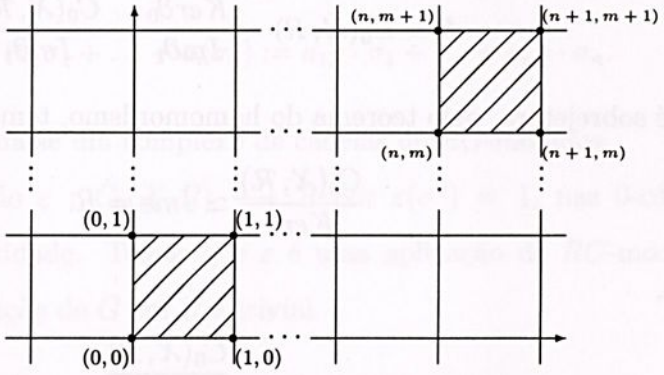
$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$((n_1, n_2), (x, y)) \longmapsto (n_1 + x, n_2 + y)$$

é uma ação de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}^2$, que leva célula em célula livremente. Assim, pela Proposição anterior, temos que o complexo

$$\cdots \longrightarrow C_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Como $\mathbb{R}^2$ não tem células de dimensão maior que 2, temos que $C_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) = 0$, para $n > 2$. Agora vamos calcular as órbitas das células, a fim de determinarmos $C_i(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z})$, para $i = 0, 1, 2$.



- $G(0,0) := \{(n_1, n_2) \cdot (0,0); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} = \{(n_1, n_2); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$.

Logo, temos uma única G-órbita de 0-células. Deste modo, $C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}G$.

- $G([(0,0),(1,0)]) := \{(n_1, n_2) \cdot [(0,0),(1,0)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} = \{[(n_1, n_2), (n_1+1, n_2)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$.

- $G([(0,0),(0,1)]) := \{(n_1, n_2) \cdot [(0,0),(0,1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} = \{[(n_1, n_2), (n_1, n_2+1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$.

Assim, temos duas órbitas de 1-células: $G([(0,0),(1,0)])$ e $G([(0,0),(0,1)])$.

Portanto, $C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G$.

E, finalmente,

- $G([(0,0),(1,0)] \times [(0,0),(0,1)]) := \{(n_1, n_2) \cdot ([(0,0),(1,0)] \times [(0,0),(0,1)]); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} =$

$= \{[(n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)] \times [(n_1, n_2), (n_1, n_2 + 1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$.

Então, temos uma única órbita de 2-células. Daí, $C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}G$.

Deste modo,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

CW-Complexos e Espaços de Recobrimento

Consideremos Y um CW-complexo e $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$, um recobrimento de Y. Em [27], III.6.9.2, temos que $\widetilde{Y}$ também é um CW-complexo (as n-células $\widetilde{\sigma}$ de $\widetilde{Y}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n-célula de Y, e $p|_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \longrightarrow \sigma$ é um homeomorfismo). Além disso, G permuta as células de $\widetilde{Y}$.

Agora, G atua livremente em $\widetilde{Y}$, pois $g \cdot \widetilde{y} = \widetilde{y}$ se, e somente se, $g = 1$ ([21], 5.3.2). Conseqüentemente, G atua livremente nas células de $\widetilde{Y}$.

Deste modo, $\widetilde{Y}$ é um G-complexo livre.

Observação 1.3.4. *(a) Podemos concluir, pela Proposição 1.3.1 que, se $\widetilde{Y}$ for contrátil, o complexo celular aumentado de $\widetilde{Y}$ é uma resolução livre de R sobre RG, onde $C_n(\widetilde{Y}, R)$ é um RG-módulo livre com um elemento básico para cada órbita de n-célula em $\widetilde{Y}$.*
(b) Considerando o caso em que $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ é um recobrimento regular, temos que G opera transitivamente em $p^{-1}(y)$, isto é, $G(\widetilde{y}) = p^{-1}(y)$ para todo $\widetilde{y}$ em $p^{-1}(y)$ ([5]). Daí concluímos que cada n-célula de Y nos fornece uma órbita de n-células em $\widetilde{Y}$. Desta forma, se $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ é um recobrimento regular contrátil, então $C_n(\widetilde{Y}, R)$ é um RG-módulo livre com um elemento básico para cada n-célula de Y.

Agora definiremos um CW-complexo particular satisfazendo todas as condições citadas anteriormente.

Definição 1.3.4. *Seja Y um CW-complexo tal que:*
(i) Y é conexo;
(ii) $\pi_1(Y) = G$;
(iii) O recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de Y é contrátil (é fato conhecido que, para CW-complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular). ([5] III.6.9.1)

Nestas condições, Y é dito um **complexo de Eilenberg-Maclane do tipo** $(G, 1)$ *ou simplesmente,* $K(G, 1)$**-complexo**.



Observação 1.3.5. *Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo:*

$(iii)'$ $H_i(\widetilde{Y}) = 0$ *para* $i \geq 2$;

$(iii)''$ $\pi_i(Y) = 0$ *para* $i \geq 2$;

para maiores detalhes ver [5]I.4.

Observação 1.3.6. (a) *Se* $\widetilde{Y}$ *é recobrimento universal de um CW-complexo* Y*, temos que* $\widetilde{Y}$ *é um* G*-complexo, onde* $G = \pi_1(Y)$.

(b) *Dado um grupo* G*, sempre existe um* $K(G,1)$*-complexo ([5], VIII.7.1).*

Exemplo 1.3.9. *Sejam* $G =< \alpha >\simeq \mathbb{Z}$ *e* $Y = S^1$.

Temos que Y é um $K(G,1)$-complexo, pois é um CW-complexo conexo, com $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\widetilde{Y} = \mathbb{R}$, que é contrátil.

Exemplo 1.3.10. *Sejam* $G = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ *(grupo abeliano livre de posto n) e* $Y = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ *(toro n-dimensional).*

Temos que Y é um CW-complexo conexo, $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\widetilde{Y} = \mathbb{R}^n$, que é contrátil. Logo, Y é um $K(G,1)$-complexo.

Exemplo 1.3.11. *Sejam* $G = F(S)$ *(grupo livre gerado por um conjunto* S*) e* $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ *(bouquet de círculos indexados por um conjunto* S*).*

Temos que Y é um CW-complexo conexo de dimensão 1 (pelo Exemplo 1.3.4), com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de S e, $\pi_1(Y) = G$ ([21], IV.3.4).

Além disso, Y é conexo e, se $\widetilde{Y}$ é recobrimento universal de Y, temos que $\widetilde{Y}$ tem dimensão 1 (pois $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ é homeomorfismo local). Assim, $H_i(\widetilde{Y}) = 0$ para $i \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(G,1)$-complexo.

Lema 1.3.1. *Se* $\mathcal{X}$ *é um* G*-complexo livre compacto, então* G *é finito.*

Demonstração: Seja X/G o espaço das órbitas de X. Temos que

$$p : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}/G$$
$$x \longmapsto \overline{x}$$

é recobrimento regular, e G atua livremente em $\mathcal{X}$ como o grupo das transformações de recobrimento ([5], p.17).

Agora, dado $\overline{x}_0 \in \mathcal{X}/G$, temos

$$p^{-1}(\overline{x}_0) = \{x \in \mathcal{X}; p(x) = \overline{x}_0\} = \{x \in \mathcal{X}; \overline{x} = \overline{x}_0\} = \{x \in \mathcal{X}; x \in G(x_0)\}$$

Como a ação de G em $\mathcal{X}$ é livre, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ está em correspondência $1-1$ com G. Além disso, a fibra $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta e fechada ([21] p.165).

Suponhamos que $p^{-1}(\overline{x}_0)$ seja infinita. Como esta é compacta, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação que está em $p^{-1}(\overline{x}_0)$, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta. Deste modo, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é finita e, portanto, G é finito.

■

Exemplo 1.3.12. *Sejam* $G = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g; od_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1\rangle$ *onde* g *é um inteiro maior ou igual a* 1 *e* $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Temos que G é infinito por 6.4.3 [24]. Além disso, G é o grupo fundamental da superfície orientada Y de genus g (soma conexa de g toros) ([21] *IV*.5. Exemplo 5.3).

Agora, vamos mostrar que Y é um $K(G,1)$-complexo.

Seja $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ o recobrimento universal de Y. Como G é infinito, temos, pelo Lema 1.3.1, que $\widetilde{Y}$ não é compacto, assim, $\widetilde{Y}$ é uma superfície não compacta e conexa. Daí, temos que $H_2(\widetilde{Y}) = 0$. Como $H_k(\widetilde{Y}) = 0$ para $k > 2$, pois $\widetilde{Y}$ tem dimensão 2, temos que $H_k(\widetilde{Y}) = 0$ para $k \geq 2$. Portanto, Y é um $K(G,1)$-complexo.

Exemplo 1.3.13. *Seja* $G = \langle c_1, \ldots, c_k; od_{i=1}^{k} c_i^2\rangle$.

Temos que G é o grupo fundamental de uma superfície Y fechada não orientável de genus k, $k \geq 2$ (soma conexa de k planos projetivos).

Analogamente ao exemplo anterior, temos que Y é um $K(G,1)$-complexo.

Como conseqüência imediata desses resultados, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.3.2. *Se* Y *é um* $K(G,1)$*-complexo, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal* $\widetilde{Y}$ *de* Y*:*

$$\cdots \longrightarrow C_2(\widetilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\widetilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\widetilde{Y}, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R *sobre* RG.

Demonstração: Como Y é um $K(G,1)$, então $\widetilde{Y}$ é um G-complexo livre contrátil. Logo, pela Proposição 1.3.1, temos que o complexo acima é uma resolução livre de R sobre RG.

■

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Exemplo 1.3.14. *Já vimos no Exemplo 1.3.11 que* $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ *é um* $K(F(S), 1)$*-complexo, onde* $F(S)$ *é o grupo livre gerado por* S.

Sabemos que $C_n(\widetilde{Y}, R)$ tem um elemento básico para cada n-célula de Y (pois, $\widetilde{Y}$ é recobrimento universal de Y, logo, regular).

Tomemos um ponto base $\widetilde{y_0}$ em $\widetilde{Y}$ ($\widetilde{y_0}$: vértice em $\widetilde{Y}$). Temos que $\widetilde{y_0}$ representa a única G-órbita de vértices de $\widetilde{Y}$ (existe uma 0-órbita de vértices em $\widetilde{Y}$ para cada vértice em Y). Daí, $\widetilde{y_0}$ gera o RG-módulo livre $C_0(\widetilde{Y}, R)$, e assim, $C_0(\widetilde{Y}, R) \simeq RG$.

Como base para $C_1(\widetilde{Y}, R)$, tomamos para cada $s \in S$ uma 1-célula orientada e_s de $\widetilde{Y}$, que é projetada sobre S^1_s (orientada no sentido positivo). Temos uma 1-órbita em $\widetilde{Y}$ para cada 1-célula em Y.

Podemos supor que e_s tem $\widetilde{y_0}$ como ponto inicial e, caso isto não ocorra, tomamos outro representante e_r com ponto inicial $\widetilde{y_0}$ (isto é, se e_r tem um ponto inicial $\widetilde{y_0}$, então, existe g em G tal que $g \cdot e_s = e_r$, pois G atua livremente e transitivamente, permutando as células de $\widetilde{Y}$), onde o ponto final de e_s será $s \cdot \widetilde{y_0}$.

De fato: Note que podemos identificar o grupo das transformações de recobrimento $G(\widetilde{Y})$ com $\pi_1(Y, y_0)$ da seguinte maneira: seja $\omega : I \longrightarrow Y$ um laço em Y ($[\omega] \in \pi_1(Y, y_0)$). Temos que existe um único levantamento $\widetilde{\omega}$ de ω, começando em $\widetilde{y_0}$. Mais ainda, seja

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(Y, y_0) &\longrightarrow G(\widetilde{Y}) \\ [\omega] &\longmapsto f_\omega \end{aligned}$$

onde f_ω é a única transformação de recobrimento tal que $f_\omega(\widetilde{y_0}) = \widetilde{\omega}(1)$.

Temos que φ é isomorfismo e, daí, $G(\widetilde{Y}) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Além disso, $G(\widetilde{Y})$ atua livremente em $\widetilde{Y}$, com ação:

$$\begin{aligned} G(\widetilde{Y}) \times \widetilde{Y} &\longrightarrow \widetilde{Y} \\ (f_\omega, \widetilde{y}) &\longmapsto f_\omega(\widetilde{y}) \end{aligned}$$

Olhando esta ação como uma ação de $\pi_1(Y)$ em $\widetilde{Y}$, temos $[\omega]\widetilde{y} = f_\omega(\widetilde{y}) = \widetilde{\omega}(1)$.

Como cada S^1_s representa um gerador em $\pi_1(Y, y_0) \simeq F(S)$, identificamos S^1_s com s através deste isomorfismo. Assim, temos que existe um único levantamento $\widetilde{s}$ de s, começando em $\widetilde{y_0}$ e o ponto final deste levantamento é $\widetilde{s}(1) = f_s(\widetilde{y_0}) = s \cdot \widetilde{y_0}$.

Tal levantamento é a 1-célula e_s, onde $p(e_s) = S^1_s \equiv s$ (a célula e_s é aplicada homeomorficamente em S^1_s).

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Note que $G = F(S) \simeq G(\widetilde{Y})$, com $s \simeq f_s$.

Agora, voltando ao exemplo, temos $\partial(e_s) = s \cdot \widetilde{y_0} - \widetilde{y_0} = (s-1) \cdot \widetilde{y_0}$. Daí,

$$0 \longrightarrow RG^{(S)} \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0,$$

é uma resolução livre de R sobre RG, onde $\oplus_{s \in S}(RG)_s$ é um RG-módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$.

Exemplo 1.3.15. *Se $S = \{t\}$, então, $G = F(S)$ é cíclico infinito. Nesse caso, a resolução do exemplo anterior se reduz à*

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

1.4 Coinvariantes e Invariantes

Nesta seção consideraremos R um anel, G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda).

Definição 1.4.1. *O* **grupo dos coinvariantes** *de M, o qual denotamos por M_G, é dado por $M_G = M/A$, onde A é o subgrupo aditivo tal que $A = \langle g \cdot m - m; g \in G em \in M \rangle$.*

Nota: O nome coinvariantes vem do fato de M_G ser o maior quociente de M no qual G atua trivialmente.

Proposição 1.4.1. *$M_G \simeq R \otimes_{RG} M$, onde R é visto como um RG-módulo (à direita) com G-ação trivial.*

Demonstração: Temos $1 \otimes g \cdot m = 1 \cdot g \otimes m = 1 \otimes m$. Seja

$$\varphi : M_g \longrightarrow R \otimes_{RG} M$$
$$\overline{m} \longmapsto \varphi(\overline{m}) = \varphi(m + A) = 1 \otimes m$$

É fácil ver que φ está bem definida, e é homomorfismo de grupos.

Por outro lado, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \xrightarrow{f} & M_G \\ \downarrow & \nearrow & \\ R \otimes_{RG} M & & \end{array}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

onde $f : R \times M \longrightarrow M_G$, definida por $f(z,m) := z\overline{m} = (\overline{m} + \ldots + \overline{m})$ (z vezes), é bilinear.

Assim, pela propriedade universal do produto tensorial ([20] V.1.1), temos que existe um único homomorfismo

$$\psi : R \otimes_{RG} M \longrightarrow M_G$$
$$z \otimes m \longmapsto \psi(z \otimes m) := f(z,m) = z\overline{m}$$

As aplicações φ e ψ são tais que uma é inversa da outra.

Logo, $M_G \simeq R \otimes_{RG} M$.

■

Lema 1.4.1. *Se F é um RG módulo livre com base $\{e_i\}_{i\in I}$, então F_G é um RG módulo livre com base $\{\overline{e_i}\}_{i\in I}$.*

■

Observação 1.4.1. *Todo RG-módulo (à esquerda) M pode ser considerado como um RG-módulo (à direita), definindo a seguinte G-ação em M:*

$$\varphi : M \times G \longrightarrow M$$
$$(m,g) \longmapsto m * g = g^{-1} \cdot m,\ \forall g \in G,\ \forall m \in M$$

Definição 1.4.2. *O funtor $-_G = R \otimes_{RG} -$, definido da categoria dos RG-módulos (à esquerda) para a categoria dos grupos abelianos é chamado* **funtor de coinvariantes.**

Observação 1.4.2. *Se $C : \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ é um complexo de cadeias, denotaremos por C_G o complexo $C_G : \cdots \longrightarrow R \otimes_{RG} C_1 \longrightarrow R \otimes_{RG} C_0 \longrightarrow 0$.*

Vimos que, para qualquer grupo G, podemos sempre tomar F como sendo a resolução padrão. Neste caso, denotaremos F_G por $C_*(G)$.

Para finalizar esta seção, vamos introduzir um conceito dual ao conceito de coinvariantes.

Definição 1.4.3. *Seja M um RG-módulo (à esquerda). O* **grupo dos invariantes** *de M, denotado por M^G, é dado por:*

$$M^G = \{m \in M; g \cdot m = m, \forall g \in G\}.$$

Nota: M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.



Proposição 1.4.2. *$Hom_{RG}(R, M) \simeq M^G$, onde R é um RG-módulo com G-ação trivial.*

Demonstração: Definindo $\psi : Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \longrightarrow M^G$ por $\psi(f) := f(1)$, temos que ψ é um isomorfismo.

■

1.5 Módulos Induzidos e Coinduzidos

$Ind_H^G M$ e $Coind_H^G M$

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Consideremos a aplicação inclusão $\alpha : RH \hookrightarrow RG$. Assim, se M é um RG-módulo, podemos vê-lo como um RH-módulo através da inclusão e neste caso, denotamos o RH-módulo M por $Res_H^G M$ (módulo restrição).

Dessa maneira, considerando M um RH-módulo e o grupo abeliano

$$Ind_H^G M := RG \otimes_{RH} M,$$

em $Ind_H^G M$ definimos a seguinte ação

$$\begin{aligned} G \times Ind_H^G M &\longrightarrow Ind_H^G M \\ (g, \alpha \otimes m) &\longmapsto g\alpha \otimes m \end{aligned}$$

Com esta ação, $Ind_H^G M$ torna-se um RG-módulo.

Nas mesmas hipóteses dadas anteriormente, o grupo abeliano (com a operação de adição) $Hom_{RH}(RG, M)$ tem uma estrutura de RG-módulo com a G-ação dada por

$$(g \cdot f)(x) = f(xg), \forall g \in G, x \in RG$$

e denotamos por $Coind_H^G M$ o RG-módulo $Hom_{RH}(RG, M)$.

Observação 1.5.1. *(a) Se $H = \{1\}$, temos $RH \simeq R$. Deste modo*

$$Ind_{\{1\}}^G M = RG \otimes_R M \quad e \quad Coind_{\{1\}}^G M = Hom_R(RG, M).$$

Tais RG-módulos são chamados, respectivamente, **módulo induzido** *e* **módulo coinduzido**.

(b) Pode-se mostrar que as funções

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$i : M \longrightarrow Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M$$
$$m \longmapsto i(m) = 1 \otimes m,$$

$$\pi : Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M) \longrightarrow M$$
$$f \longmapsto \pi(f) = f(1),$$

são, respectivamente, RH-monomorfismo e RH-epimorfismo.

Proposição 1.5.1. *O RG-módulo $Ind_H^G M$ contém M como um RH-submódulo. Além disso, considerando E um conjunto de representantes para as classes laterais (à esquerda) de H em G, e denotando por gm o conjunto obtido de M (visto como RH-submódulo de $Ind_H^G M$) sob a ação de G, temos*

$$Ind_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

Demonstração: Ver Proposição 1.6.3 [19]. ■

Proposição 1.5.2. *De modo análogo à indução, se considerarmos o mergulho $\rho : M \longrightarrow Coind_H^G M$, dado por*

$$\rho(m)(g) = \begin{cases} g \cdot m, \text{ se } g \in H, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

temos que M é um RH-módulo de $Coind_H^G M$ e, além disso, $Coind_H^G M = od_{g \in E} gM$. ■

Observação 1.5.2. *Pode-se mostrar que a aplicação ρ se estende a um RG-homomorfismo $\varphi : RG \otimes_{RH} M \longrightarrow Hom_{RH}(RG, M)$. Tal aplicação pode ser identificada com a inclusão canônica da soma direta no produto direto ([5], p.70), e assim, podemos ver $Ind_H^G M$ como um RG-submódulo de $Coind_H^G M$.*

Proposição 1.5.3. *Se $(G : H) < \infty$, então $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$.*

Demonstração: Se $(G : H) < \infty$, temos que a soma direita e o produto direto coincidem e, portanto, segue o resultado.

Podemos também, alternativamente, demonstrar essa proposição do modo a seguir.

Existe uma H-aplicação $\varphi_0 : M \longrightarrow Hom_{RH}(RG, M)$, dada por

$$\varphi(m)(g) = \begin{cases} gm, \text{ se } g \in H, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que φ_0 se estende a uma G-aplicação $\varphi : RG \otimes_{RH} M \longrightarrow Hom_H(RG, M)$ (Lema 1.6.2 [19]). Como, por hipótese, $(G : H) < \infty$, temos que φ é isomorfismo, com inversa dada por

$$\psi(f) = \sum_{g \in G/H} g \otimes f(g^{-1}).$$

■

Definição 1.5.1. *Sejam M e N RG-módulos. Então, M e N são naturalmente R-módulos. A* **G-ação diagonal**, *definida em $M \otimes_R N$, é dada por:*

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Proposição 1.5.4. *Seja M um RG-módulo. Existem RG-isomorfismos naturais:*
(i) $Ind_H^G \left(Res_H^G M\right) \simeq R(G/H) \otimes_R M$ (com G-ação diagonal).
(ii) $Coind_H^G \left(Res_H^G M\right) \simeq Hom_R(R(G/H), M)$ (com G-ação diagonal).

Demonstração:

(i) Vamos definir

$$\begin{aligned} f : RG \times M &\longrightarrow R(G/H) \otimes_R M \\ (g, m) &\longmapsto f(g, m) = gH \otimes g \cdot m \end{aligned}$$

Deste modo, temos que f está bem definida e é biaditiva. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : RG \otimes_{RH} M &\longrightarrow R(G/H) \otimes_R M \\ g \otimes m &\longmapsto \psi(g \otimes m) = gH \otimes g \cdot m \end{aligned}$$

Além disso, ψ é aplicação de RG-módulos.

Agora, vamos definir:

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : R(G/H) \times M &\longrightarrow RG \otimes_{RH} M \\ (gH, m) &\longmapsto \widetilde{g} \cdot (gH, m) = g \otimes g^{-1} \cdot m \end{aligned}$$



nos geradores, e estendê-la por linearidade.

Verifica-se facilmente que $\widetilde{g}$ está bem definida e é biaditiva. Novamente, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo

$$\phi : R(G/H) \otimes_R M \longrightarrow RG \otimes_{RH} M$$
$$gH \otimes m \longmapsto \phi(gH \otimes m) = g \otimes g^{-1} \cdot m$$

Temos que ϕ também é aplicação de RG-módulos, e é inversa de ψ.

Logo,

$$Ind_H^G \left(Res_H^G M\right) \simeq R(G/H) \otimes_R M.$$

(ii) Vamos definir:

$$\varphi : Hom_{RH}(RG, M) \longrightarrow Hom_R(R(G/H), M)$$
$$f \longmapsto \varphi(f); \varphi(f)(gH) := gf(g^{-1})$$

Assim, φ é homomorfismo de grupos, e

$$\nu : Hom_R(R(G/H), M) \longrightarrow Hom_{RH}(RG, M)$$
$$f \longmapsto \nu(f); \nu(f)(x) = xf(x^{-1}H)$$

é inversa para φ.

Portanto,

$$Coind_H^G \left(Res_H^G M\right) \simeq Hom_R(R(G/H), M).$$

■

Corolário 1.5.1. $Ind_H^G R \simeq R(G/H)$.

■

Lema 1.5.1. *Se G é infinito, então* $(Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z})^G = 0$.

Demonstração: Pela Proposição 1.5.1 temos:

$$Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z} = \bigoplus_{g \in E} g\mathbb{Z},$$

ou seja,

$$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} g\mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Seja $\alpha \in (\mathbb{Z}G)^G$, $\alpha \neq 0$. Então, $g \cdot \alpha = \alpha$, $\forall g \in G$.

Temos:

$$\alpha = \sum_{g \in G} n_g g \text{ com } n_g \text{ quase todos nulos.}$$

Vamos escrever:

$$\alpha = g_1 m_1 + \ldots + g_k m_k,\ g_i m_i \in g_i\mathbb{Z},\ g_i m_i \neq 0,\ \forall i = 1, \ldots, k.$$

Como $g \cdot \alpha = \alpha$, temos

$$g \cdot g_1 m_1 + \ldots + g \cdot g_k m_k = g_1 m_1 + \ldots + g_k m_k, \forall g \in G. \tag{1.2}$$

Afirmação: Se $I = \{g_1 m_1, \ldots, g_k m_k\}$, então $gI = I$, $\forall g \in G$.

De fato, a aplicação

$$\varphi_g : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}G$$
$$\alpha \longmapsto \varphi_g(\alpha) = g \cdot \alpha$$

é isomorfismo, com inversa φ_g^{-1}.

Além disso,

$$g \cdot g_i m_i = g_j m_j,\ 1 \leq i, j \leq k.$$

Isto segue do fato que $g \cdot g_i m_i \neq g \cdot g_j m_j$, $\forall i \neq j$, pois φ_g é injetora e $g_i m_i \neq g_j m_j$.

Se $g \cdot g_i m_i \neq g_j m_j$, $1 \leq j \leq k$, como a soma em (1.2) é direta, teríamos $g \cdot g_i m_i = 0$, o que nos dá $g_i m_i = 0$ (contradição, pois estamos considerando $g_i m_i \neq 0$).

Deste modo, $\varphi_g(I) \subset I$ e, como I é finito e φ_g é injetora, temos $\varphi_g(I) = I$, isto é, $gI = I$, o que prova a afirmação.

Consideremos, agora, o conjunto $X = \{g_i,\ i = 1, \ldots, k\}$

Podemos definir uma ação de G em X da seguinte forma:

$$\psi : G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, g_i) \longmapsto g \cdot g_i$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Temos que ψ está bem definida, pois se $g_i \in X$, então $g \cdot g_i \in X$.

De fato: Seja $g_i m_i \in I$. Então, $g \cdot g_i m_i \in I$ $(gI = I)$.

Temos que $g \cdot g_i m_i = g_j m_j \in I$ e $g_j \in X$. Para ver isso, vamos considerar $g_i m_i \in I$, assim, $g \cdot g_i m_i = g_j m_j \in I$ e $g_j \in X$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por g_j^{-1}, temos

$$g_j^{-1}(g \cdot g_i m_i) = g_j^{-1}(g_j m_j)$$
$$g_j^{-1}(g \cdot g_i m_i) = (g_j^{-1} g_j) m_j = 1;\ m_j \neq 0$$

onde $g_j^{-1}(g \cdot g_i m_i) \in x\mathbb{Z}$ e $1 m_j \in 1\mathbb{Z}$.

Se $x = g_j^{-1}(g \cdot g_i) \neq 1$, então $x\mathbb{Z} \cap 1\mathbb{Z} \neq \{0\}$ (o que é um absurdo, pois a soma em (1.1) é direta.

Portanto, $x = g_j^{-1}(g \cdot g_i) = 1$, ou seja, $g \cdot g_i = g_j \in X$.

Além disso, a ação de G em X é transitiva.

De fato: Se $g_i \in X$, então $G(g_i) = \{g \cdot g_i;\ g \in G\} = X$, pois se $g_j \in X$, temos que $g_j = (g_j g_i^{-1}) g_i \in G(g_i)$.

Consideremos o subgrupo de isotropia de g_i:

$$G_{g_i} = \{g \in G; g \cdot g_i = g_i\} = \{1\}.$$

Sabemos que existe a correspondência biunívoca:

$$G(g_i) = X = G/G_{g_i} = G.$$

Assim, X está em correspondência $1-1$ com G e, como X é finito, temos que G é finito, o que é um absurdo.

Logo, para todo $\alpha \in (Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z})^G$, temos $\alpha = 0$. Portanto, $(Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z})^G = 0$.

■

1.6 A (Co)homologia de um Grupo G

Seja R um anel comutativo com unidade. Antes de definirmos (co)homologia, vamos considerar alguns resultados importantes sobre $\otimes_{RG}$ e Hom_{RG}.

Proposição 1.6.1. *Sejam M e N RG-módulos (à esquerda). Temos*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

onde $A = \langle g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n; \forall m \otimes n \in M \otimes_R N, \forall g \in G \rangle$.

Demonstração: Inicialmente veremos como obter $M \otimes_{RG} N$ de $M \otimes_R N$.

Consideremos a seguinte relação em $M \otimes_R N$:

$$(m * g) \otimes n \sim m \otimes g \cdot n, \ \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Vendo M como um RG-módulo (à direita), temos pela Observação 1.4.1, que

$$m * g = g^{-1} \cdot m, \ \forall m \in M, \ \forall g \in G.$$

Assim,

$$(m * g) \otimes n = (g^{-1} \cdot m) \otimes n.$$

Logo,

$$\overline{(g^{-1} \cdot m) \otimes n} = \overline{m \otimes g \cdot n}. \tag{1.3}$$

Portanto,

$$M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}.$$

Trocando m por $g \cdot m$ em (1.3), temos

$$\overline{m \otimes n} = \overline{g \cdot m \otimes g \cdot n}. \tag{1.4}$$

Definimos, então a G-ação diagonal de G em $M \otimes_R N$:

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Consideremos em $M \otimes_R N$ tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos

$$g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n.$$

Assim, em

$$(M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

estamos identificando elementos da forma $g \cdot m \otimes g \cdot n$ com $m \otimes n$, $\forall m \in M, \forall n \in N, \forall g \in G$. Isto é o mesmo que identificar $(g^{-1} \cdot m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por (1.3) e (1.4)).

Deste modo,

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N.$$

■

Corolário 1.6.1. $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

■

Agora, consideremos M e N RG-módulos (à esquerda), e $Hom_R(M, N)$. A ação de G em M e N induz uma ação de G em $Hom_R(M, N)$, dada por

$$\begin{aligned} G \times Hom_R(M, N) &\longrightarrow Hom_R(M, N) \\ (g, f) &\longmapsto g \cdot f \end{aligned}$$

tal que $g \cdot f(x) = gf(g^{-1} \cdot x)$; $g \in G, f \in Hom_R(M, N)$ e $x \in M$.

Observação 1.6.1. *O uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido à contravariância de Hom na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um RG-módulo à direita, considerando $m * g = g^{-1} \cdot m$.*

Assim, a ação fica

$$(g \cdot f)(m) = gf(g^{-1} \cdot m) = gf(m * g).$$

e dessa maneira, $Hom_R(M, N)$ será um RG-módulo (à esquerda).

Proposição 1.6.2. $Hom_{RG}(M, N) = Hom_R(M, N)^G$.

■

Agora, veremos a definição de (co)homologia de um grupo G, onde muitas vezes trabalharemos com os casos $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$.

Definição 1.6.1. *Sejam*

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG e M um RG-módulo (à esquerda).

Podemos formar os **complexos de cadeia** *e* **cocadeia**, *respectivamente:*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \longrightarrow F_n \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{RG} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \longrightarrow 0$$

$$Hom_{RG}(F, M) : 0 \longrightarrow Hom_{RG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow Hom_{RG}(F_n, M) \longrightarrow$$

$$\cdots$$

O **operador bordo** *é dado por* $\overline{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ *e, o* **operador cobordo**, *por*

$$\delta^n : Hom_{RG}(F_n, M) \longrightarrow Hom_{RG}(F_{n+1}, M)$$
$$f \longmapsto \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}$$

(*a*) *O n-ésimo* **grupo de homologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{RG} M).$$

(*b*) *O n-ésimo* **grupo de cohomologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H^n(G, M) := H^n(Hom_{RG}(F, M)).$$

Observação 1.6.2. (*a*) *As definições de* $H_*(G, M)$ *e* $H^*(G, M)$ *independem da resolução projetiva* $\varepsilon : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ *escolhida (a menos de isomorfismo canônico). Ver II.1 [5] .*

(*b*) *Tomando* $M = \mathbb{Z}$, *com G-ação trivial, temos*

$$H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{ZG} \mathbb{Z}) \overset{\text{Prop.1.6.1}}{=} H_*((F \otimes_Z \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 1.6.3. *Dado um RG-módulo M, temos o isomorfismo:*

$$H_0(G, M) \simeq M_G$$

Demonstração: Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{RG} M$, obtemos o complexo

$$\cdots \longrightarrow F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} R \otimes_{RG} M \longrightarrow 0$$
$$\downarrow \overline{\partial}_0$$
$$0$$

Como tal funtor é exato à direita ([15], I.7.9), temos que $Im\overline{\partial}_1 = Ker\overline{\varepsilon}$ e $\overline{\varepsilon}$ é sobrejetora. Assim,

$$H_0(G,M) = \frac{Ker\overline{\partial}_0}{Im\,\overline{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{RG} M}{Ker\overline{\varepsilon}} \simeq R \otimes_{RG} M \overset{\text{Prop.1.4.1}}{\simeq} M_G.$$

Logo, $H_0(G,M) \simeq M_G$, como queríamos.

■

Proposição 1.6.4. *Dado um RG-módulo M, temos o isomorfismo:*

$$H^0(G,M) \simeq M^G.$$

Demonstração: Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $Hom_{RG}(-,M)$, obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow Hom_{RG}(R,M) \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}} Hom_{RG}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1,M) \longrightarrow \cdots$$

$$\uparrow_{\delta^{-1}}$$

$$0$$

Como tal funtor é exato à esquerda ([15], I.8.7), temos que $Im\widetilde{\varepsilon} = Ker\delta^0$ e $\widetilde{\varepsilon}$ é injetora. Assim,

$$H^0(G,M) = \frac{Ker\delta^0}{Im\delta^{-1}} = Ker\delta^0 = Im\widetilde{\varepsilon} \simeq Hom_{RG}(R,M) \overset{\text{Prop.1.4.2}}{\simeq} M^G.$$

Dessa maneira, $H^0(G,M) \simeq M^G$, obtendo o resultado desejado.

■

Exemplo 1.6.1. *Vamos calcular $H_*(G,\mathbb{Z})$, onde $G = F(S)$ é o grupo livre gerado por um conjunto S.*

O Exemplo 1.3.14 nos fornece uma resolução livre (portanto, projetiva) de R sobre RG. Para o caso $R = \mathbb{Z}$, temos

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Z}G)_s \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Z}G)_s$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $(e_s)_{s\in S}$, $\partial(e_s) = s-1$ e $\varepsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$.

Pela Definição 1.6.1, temos que a homologia do grupo G é a homologia do complexo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Z}G)_s \xrightarrow{id\otimes\partial} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \longrightarrow 0$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Além disso,

- $\mathbb{Z} \otimes_{ZG} \bigoplus_{s\in S} (\mathbb{Z}G)_s = \mathbb{Z} \otimes_{ZG} \left(\bigoplus_{s\in S} (\mathbb{Z}G)_s \right) = \bigoplus_{s\in S} (\mathbb{Z} \otimes_{ZG} (\mathbb{Z}G)_s) = \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}.$
- $\mathbb{Z} \otimes_{ZG} \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}.$

Vamos calcular $id \otimes \partial$, lembrando que $\mathbb{Z}$ é visto como $\mathbb{Z}G$-módulo trivial

$$(id \otimes \partial)(z \otimes \sum \alpha_{s_i} e_{s_i}) = z \otimes \sum \alpha_{s_i} \partial(e_{s_i}) = z \otimes \sum \alpha_{s_i}(s_i - 1) = \sum z\alpha_{s_i} \otimes (s_i - 1) =$$
$$= \sum z\alpha_{s_i} \otimes s_i - \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 = \sum z\alpha_{s_i} \cdot s_i \otimes 1 - \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 = \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 - \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 = 0.$$

Assim, $id \otimes \partial$ é a função nula e, deste modo, temos o complexo:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Logo,

$$\begin{cases} H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ H_1(G, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z} \\ H_i(G, \mathbb{Z}) = 0 \ \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 1.6.2. *Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo e G o grupo cíclico infinito com gerador t. Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$.*

Vimos no Exemplo 1.3.15 que

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\partial_1 = t - 1$, é uma resolução livre (portanto, projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

- Calculemos $H_*(G, M)$

Aplicando o funtor $- \otimes_{ZG} M$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\overline{\partial}_2 = 0} \mathbb{Z}G \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} \mathbb{Z}G \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_0 = 0} 0$$

onde $\overline{\partial}_1 = \partial_1 \otimes id$.

Agora, temos os seguintes isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \simeq & \mathbb{Z}G \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{\overline{\partial}_1} & \mathbb{Z}G \otimes_{ZG} M & \simeq & M \\ m & \longmapsto & 1 \otimes m & \longmapsto & (t-1) \otimes m & \longmapsto & (t-1) \cdot m \end{array}$$

Deste modo, podemos considerar

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_1 : \ M &\longrightarrow M \\ m &\longrightarrow (t-1)\cdot m \end{aligned}$$

Portanto, $H_*(G,M)$ é a homologia do complexo:

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\partial_1} M \xrightarrow{0} 0$$

Assim,

$$H_1(G,M) = \frac{Ker\partial_1}{\{0\}} = Ker\partial_1.$$

Mas,

$$Ker\partial_1 = Ker(t-1) = \{m \in M; (t-1)\cdot m = 0\} = \{m \in M; t\cdot m = m\} = M^G$$

Portanto,

$$\begin{cases} H_0(G,M) = M_G \\ H_1(G,M) = M^G \\ H_i(G,M) = 0 \ \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que

$$H_1(G,M) = M^G \overset{\text{Prop.1.6.4}}{=} H^0(G,M).$$

- Calculemos $H^*(G,M)$

Aplicando o funtor $Hom_{\mathbb{Z}G}(-,M)$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,M) \xrightarrow{\delta^1=0} 0,$$

onde

$$\delta^0(f)(x) = (f\circ\partial_1)(x) = (f\circ(t-1))(x) = f((t-1)\cdot(x)) = (t-1)f(x).$$

Logo, δ^0 é a multiplicação por $(t-1)$.

E, ainda

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,M) &\simeq M \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned}$$

Assim, $H^*(G,M)$ é a cohomologia do complexo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0$$

Agora,

$$H^1(G,M) = \frac{Ker\delta^1}{Im\delta^0} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G.$$

Portanto,

$$\begin{cases} H^0(G,M) = M^G \\ H^1(G,M) = M_G \\ H^i(G,M) = 0 \ \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que

$$H^1(G,M) = M_G \overset{\text{Prop.1.6.3}}{=} H_0(G,M).$$

Exemplo 1.6.3. *Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t. Vamos calcular $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$.*

Em [5] exemplo p.20, temos a seguinte resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$.

• Calculemos $H_*(G,M)$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos o complexo:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{N}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$, temos

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0.$$

Portanto,

$$H_i(G,M) = \begin{cases} M_G, \text{ se } i = 0, \\ \dfrac{Ker(t-1)}{ImN} = \dfrac{M^G}{NM}, \text{ se } i \text{ é ímpar}, \\ \dfrac{KerN}{Im(t-1)} = \dfrac{KerN}{(t-1)M}, \text{ se } i \text{ é par}. \end{cases}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

• Calculemos $H^*(G, M)$

Aplicando o funtor $Hom_{ZG}(-, M)$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} Hom_{ZG}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{ZG}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^1} Hom_{ZG}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

onde $\delta^n(f)(x) := (f \circ \partial_{n+1})(x)$.

Via o isomorfismo $Hom_{ZG}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$, temos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

onde $\delta^{2k} = t - 1$ e $\delta^{2k+1} = N$, $k \geq 0$.

Logo,

$$H_i(G, M) = \begin{cases} M^G, \text{ se } i = 0, \\ \dfrac{N}{Im(t-1)} = \dfrac{KerN}{(t-1)M}, \text{ se } i \text{ é ímpar}, \\ \dfrac{Ker(t-1)}{ImN} = \dfrac{M^G}{NM}, \text{ se } i \text{ é par}. \end{cases}$$

Em particular, para o caso $M = \mathbb{Z}$ (com G-ação trivial), temos que $t - 1$ é a função nula, pois

$$(t-1) \cdot m = t \cdot m - m = 0, \ \forall\, m \in M,$$

e N é a multiplicação por n, pois

$$(1 + t + \ldots + t^{n-1}) \cdot m = m + t \cdot m + \ldots + t^{n-1} \cdot m = nm$$

Assim, $Ker(t-1) = \mathbb{Z}$, $Im(t-1) = \{0\} = Ker\, N$ e $Im\, N = n\mathbb{Z}$.

Deste modo,

$$H_i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } i = 0, \\ \mathbb{Z}_n, \text{ se } i \text{ é ímpar}, \\ 0, \text{ se } i \text{ é par}. \end{cases} \quad \text{e} \quad H^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } i = 0, \\ 0 \text{ se } i \text{ é ímpar}, \\ \mathbb{Z}_n, , \text{ se } i \text{ é par}. \end{cases}$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

1.7 O Lema de Shapiro

Nesta seção, vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H.

Proposição 1.7.1 (Lema de Shapiro). *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um RH-módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*

(a) $H_*(H, M) \simeq H_*(G, Ind_H^G M)$

(b) $H^*(H, M) \simeq H^*(G, Coind_H^G M)$.

Demonstração: Consideremos $\varepsilon : F \to R$ uma resolução projetiva de R sobre RG. Pelo Lema 1.2.1, esta também é uma resolução projetiva de R sobre RH e assim temos:

(a) $F \otimes_{RH} M \simeq (F \otimes_{RG} RG) \otimes_{RH} M = F \otimes_{RG} (RG \otimes_{RH} M) = F \otimes_{RG} Ind_H^G M$.

Assim,

$$H_*(H, M) = H_*(F \otimes_{RH} M) \simeq H_*(F \otimes_{RG} Ind_H^G M) = H_*(G, Ind_H^G M).$$

Portanto, $H_*(H, M) \simeq H_*(G, Ind_H^G M)$.

(b) Pela Proposição 1.6.2 [19] temos

$$Hom_{RH}(F_n, M) \simeq Hom_{RG}(F_n, Hom_{RH}(RG, M)),\ \forall\, n.$$

Deste modo, $Hom_{RH}(F, M) \simeq Hom_{RG}(F, Coind_H^G M)$, ou seja,

$$H^*(H, M) = H^*(Hom_{RH}(F, M)) \simeq H^*(Hom_{RG}(F, Coind_H^G M)) = H^*(G, Coind_H^G M).$$

Portanto, $H^*(H, M) \simeq H^*(G, Coind_H^G M)$.

■

Exemplo 1.7.1. *Se $M = R$, então $H_*(H, R) \simeq H_*(G, R(G/H))$.*

De fato,

$$H_*(H, R) \overset{\text{Shapiro}}{\simeq} H_*(G, Ind_H^G R) \overset{\text{Corol.1.5.1}}{\simeq} H_*(G, R(G/H)),$$

obtendo o resultado desejado.

Exemplo 1.7.2. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G, com $(G : H) < \infty$. Então,*

(i) $H^*(H, R) \simeq H^*(G, R(G/H))$

(ii) $H^*(H, RH) \simeq H^*(G, RG)$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

De fato,

(i) $H^*(H,R) \overset{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, Coind_H^G R) \overset{\text{Prop.1.5.3}}{\simeq} H^*(G, Ind_H^G R) \overset{\text{Corol.1.5.1}}{\simeq} H^*(G, R(G/H))$.

Logo,

$$H^*(H,R) \simeq H^*(G, R(G/H)).$$

(ii) $H^*(H,RH) \overset{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, Coind_H^G RH) \overset{\text{Prop.1.5.3}}{\simeq} H^*(G, Ind_H^G RH) \simeq H^*(G, RG \otimes_{RH} RH) \simeq$
$\simeq H^*(G, RG)$.

Portanto, $H^*(H,RH) \simeq H^*(G,RG)$.

Nota: Usando a Proposição 1.5.4, podemos enunciar o Lema de Shapiro da seguinte maneira:

Proposição 1.7.2 (Lema de Shapiro - outra versão). *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um RG-módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*

(i) $H_*(H, Res_H^G M) \simeq H_*(G, R(G/H) \otimes_R M)$

(ii) $H^*(H, Res_H^G M) \simeq H^*(G, Hom_R(R(G/H), M))$.

Demonstração:

(i) Pela Proposição 1.7.1 (a) temos

$$H_*(H, Res_H^G M) \simeq H_*(G, Ind_H^G(Res_H^G M)).$$

Agora da Proposição 1.5.4 (i), temos

$$Ind_H^G(Res_H^G M) \simeq R(G/H) \otimes_R M.$$

Assim, $H_*(G, Ind_H^G(Res_H^G M)) \simeq H_*(G, R(G/H) \otimes_R M)$.

Logo, $H_*(H, Res_H^G M) \simeq H_*(G, R(G/H) \otimes_R M)$.

(ii) Pela Proposição 1.7.1 (b) temos

$$H^*(H, Res_H^G M) \simeq H^*(G, Coind_H^G(Res_H^G M)).$$

E a Proposição 1.5.4 (ii), nos afirma que

$$Coind_H^G(Res_H^G M) \simeq Hom_R(R(G/H), M).$$

Assim,

$$H^*(G, Coind_H^G(Res_H^G M)) \simeq H^*(G, Hom_R(R(G/H), M)).$$

Logo, $H^*(H, Res_H^G M) \simeq H^*(G, Hom_R(R(G/H), M))$.

■

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Agora consideremos $\mathcal{M}$ a categoria dos RG-módulos (à esquerda).

Como $F \otimes_{RG} -$ e $Hom_{RG}(F,-)$ são funtores covariantes em $\mathcal{M}$, temos que $H_*(G,-)$ e $H^*(G,-)$ também são funtores covariantes em $\mathcal{M}$.

Proposição 1.7.3. *Seja* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$ *uma seqüência exata de RG-módulos. Temos:*

(i) Para todo inteiro n, existe uma aplicação natural $\partial_n : H_n(G,M'') \longrightarrow H_{n-1}(G,M')$, *tal que a seqüência:*

$$\cdots \longrightarrow H_1(G,M) \xrightarrow{j_1} H_1(G,M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G,M') \xrightarrow{i_0} H_0(G,M) \xrightarrow{j_0} H_0(G,M'') \longrightarrow 0$$

é exata, onde as aplicações i_k *e* j_k *são as induzidas em homologia, isto é,*

$$i_k = H_k(G,i) : H_k(G,M') \longrightarrow H_k(G,M)$$
$$j_k = H_k(G,j) : H_k(G,M) \longrightarrow H_k(G,M'').$$

(ii) Para todo inteiro n, existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G,M'') \longrightarrow H^{n+1}(G,M')$, *tal que a seqüência:*

$$0 \longrightarrow H^0(G,M') \xrightarrow{i^0} H^0(G,M) \xrightarrow{j^0} H^0(G,M'') \xrightarrow{\delta^0} H_1(G,M') \xrightarrow{i^1} H^1(G,M) \xrightarrow{j^1} \cdots$$

é exata, onde as aplicações i^k *e* j^k *são as induzidas em cohomologia, isto é,*

$$i^k = H^k(G,i) : H^k(G,M') \longrightarrow H^k(G,M)$$
$$j^k = H^k(G,j) : H^k(G,M) \longrightarrow H^k(G,M'').$$

Demonstração: Proposição $III.6.1$ [5].

■

1.8 Interpretação Topológica para $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$

Nesta seção, vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia do espaço $K(G,1)$, definido anteriormente.

Vamos denotar $C_*(-,\mathbb{Z})$ por $C_*(-)$, e proceder do mesmo modo para a (co)homologia.

Proposição 1.8.1. *Sejam* X *um* G*-complexo livre e* Y *o complexo de órbitas* X/G. *Então*

$$C_*(Y) \simeq C_*(X)_G.$$

Demonstração: Consideremos a projeção canônica

$$\begin{aligned} p: \ X &\longrightarrow X/G \\ x &\longmapsto p(x) = G(x) = \{g \cdot x;\ g \in G\} \end{aligned}$$

Em nível de complexo de cadeias, temos a aplicação induzida

$$\begin{aligned} p_{\#}: \ C_n(X) &\longrightarrow C_n(X/G) \\ \sum a_i\sigma_i &\longmapsto \sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

onde σ_i são n-células de X.

Agora, seja

$$\begin{aligned} \gamma: \ C_n(X) &\longrightarrow C_n(X)_G = C_n(X)/A \\ \alpha &\longmapsto \overline{\alpha} = \alpha + A \end{aligned}$$

onde $A = \langle g \cdot \alpha - \alpha;\ g \in G, \alpha \in C_n(X)\rangle$.

Vamos definir

$$\begin{aligned} \varphi: \ C_n(X)_G &\longrightarrow C_n(X/G) \\ \overline{\alpha} &\longmapsto \varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{\textstyle\sum a_i\sigma_i}) = p_{\#}(\alpha) = \textstyle\sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

- φ está bem definida.

De fato, $A \subset Kerp_{\#}$, pois, se σ_i é uma n-célula e $g \in G$, temos

$$p_{\#}(g \cdot \sigma_i - \sigma_i) = p_{\#}(g \cdot \sigma_i) - p_{\#}(\sigma_i) = G(g \cdot \sigma_i) - G(\sigma_i) = 0.$$

Então,

$$x \in A \Rightarrow x = \sum_i (g_i \cdot \alpha_i - \alpha_i)\,,\ \alpha_i \in C_n(X)$$

$$\Rightarrow x = \sum_i \left(g_i \sum_j \sigma_j^i - \sum_j \sigma_j^i \right) = \sum_{i,j} (g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i).$$

Assim, $p_{\#}(x) = p_{\#}\left(\sum_{i,j}(g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i)\right) = 0.$

Deste modo,

$$\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2} \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \in A \subset Kerp_{\#} \Rightarrow p_{\#}(\alpha_1) = p_{\#}(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\overline{\alpha_1}) = \varphi(\overline{\alpha_2}).$$



Temos que φ é homomorfismo de grupos.

Além disso,

- φ é sobrejetora.

De fato,

$$\forall x = \sum a_i G(\sigma_i) \in C_n(X/G),\ \exists y = \sum a_i \overline{\sigma_i} \in C_n(X)_G \text{ tal que } \varphi(y) = x.$$

- φ é injetora.

De fato,

$$\varphi(\overline{\sum a_i \sigma_i}) = 0 \Rightarrow \sum a_i G(\sigma_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0.$$

Logo,

$$\sum a_i \sigma_i = 0 \Rightarrow \overline{\sum a_i \sigma_i} = 0.$$

Portanto, φ é isomorfismo.

■

Proposição 1.8.2. *Se Y é um $K(G,1)$-complexo, então $H_*(G) \simeq H_*(Y)$.*

Demonstração: Como Y é um $K(G,1)$, pela Proposição 1.3.2, temos que o complexo celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de Y, $\varepsilon : C_*(\widetilde{Y}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Deste modo, $H_*(G) \simeq H_*(C_*(\widetilde{Y})_G)$.

Além disso, $\widetilde{Y}$ é um G-complexo livre, e por [18], 5.5.14, temos que o complexo de órbitas é dado por $\widetilde{Y}/G \simeq Y$.

Assim, pela Proposição 1.8.1, $C_*(\widetilde{Y})_G \simeq C_*(Y)$.

Logo,

$$H_*(G) \simeq H_*(C_*(\widetilde{Y})_G) \simeq H_*(C_*(Y)) \simeq H_*(Y).$$

■

Exemplo 1.8.1. *Consideremos o bouquet de círculos $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$.*

Pelo Exemplo 1.3.11, temos que Y é um $K(F(S),1)$, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado pelo conjunto S.

Assim, pela proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } i = 0, \\ \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}, \text{ se } i = 1, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.8.2. *Seja Y a soma conexa de n toros.*

Pelo Exemplo 1.3.12, *Y é um $K(G,1)$, onde* $G = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, o d_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \rangle$.

Portanto, pela Proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \textit{ se } i = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \ (2g \textit{ vezes}), \textit{ se } i = 1, \\ \mathbb{Z}, \textit{ se } i = 2, \\ 0, \textit{ se } i \geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 1.8.3. *Sejam $G \simeq \mathbb{Z}^{(n)} \simeq \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ e $Y = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (toro n-dimensional).*

Pelo Exemplo 1.3.10, *T^n é um $K(G,1)$.*

Logo,

$$H_i(G) = H_i(T^n) = \mathbb{Z}^{k_i}, k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Proposição 1.8.3. *Se Y é um $K(G,1)$-complexo, então $H^*(G) \simeq H^*(Y)$.*

Demonstração: Seja $X \xrightarrow{p} Y$ recobrimento universal de Y.

Já vimos que $\varepsilon : C_*(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Vamos mostrar que $Hom_{ZG}(C_*(X), \mathbb{Z}) \simeq Hom_Z(C_*(X)_G, \mathbb{Z})$.

De fato, consideremos as aplicações:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & Hom_{ZG}(C_*(X), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & Hom_Z(C_*(X)_G, \mathbb{Z}) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f);\ \varphi(f)(1 \otimes u) = f(u) \\ \psi & Hom_Z(C_*(X)_G, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & Hom_{ZG}(C_*(X), \mathbb{Z}) \\ & g & \longmapsto & \psi(g);\ \psi(g)(u) = g(1 \otimes u) \end{array}$$

Temos que φ e ψ são homomorfismos e $\varphi^{-1} = \psi$.

Assim, φ é isomorfismo. Deste modo, temos

$$H^*(G) \overset{\text{not.}}{=} H^*(G, \mathbb{Z}) = H^*(Hom_{ZG}(C_*(X), \mathbb{Z})) \overset{\text{Prop.1.6.1}}{\simeq} H^*(Hom_Z(C_*(X)_G, \mathbb{Z})) \overset{\text{Prop.1.6.4}}{\simeq}$$
$$\overset{\text{Prop.1.6.4}}{\simeq} H^*(Hom_Z(C_*(X/G), \mathbb{Z})) \simeq H^*(Hom_Z(C_*(Y), \mathbb{Z})) = H^*(Y, \mathbb{Z}) \overset{\text{not.}}{=} H^*(Y).$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Logo, $H*(G) \simeq H^*(Y)$.

■

O exemplo a seguir nos mostra que, em geral, a homologia do espaço X é diferente da homologia do grupo X.

Exemplo 1.8.4. *Seja $X = \mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{R}$ é um CW-complexo de dimensão 1 e $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo. Consideremos dois casos:*

• $\mathbb{R}$ *como um espaço:*

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\mathbb{R})_{ab} = \{0\}_{ab} = \{0\}.$$

• $\mathbb{R}$ *como um grupo:*

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = H_1(K(\mathbb{R}, 1), \mathbb{Z}) = \pi_1(K(\mathbb{R}, 1))_{ab} = \mathbb{R}_{ab} = \mathbb{R}.$$

Assim, a homologia do CW-complexo $\mathbb{R}$ é diferente da homologia do grupo $\mathbb{R}$.

Lema 1.8.1. *Seja A um grupo abeliano com G-ação trivial. Temos*

(a) $F \otimes_{ZG} A \simeq F_G \otimes_Z A$.

(b) $Hom_{ZG}(F, A) \simeq Hom_Z(F_G, A)$.

Demonstração: *(a)* Vamos definir:

$$\begin{aligned} f: \ F \times A &\longrightarrow F_G \otimes_Z A \\ (x, a) &\longmapsto f(x, a) := \overline{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que f é biaditiva e, assim, pela propriedade universal do produto tensorial ([20], V.1.1), existe um homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi: \ F \otimes_{ZG} A &\longrightarrow F_G \otimes_Z A \\ x \otimes a &\longmapsto \varphi(x \otimes a) = \overline{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Consideremos, agora

$$\begin{aligned} g: \ F_G \times A &\longrightarrow F \otimes_{ZG} A \\ (\overline{x}, a) &\longmapsto g(\overline{x}, a) := x \otimes a. \end{aligned}$$

Mostra-se facilmente que g está bem definida e é biaditiva. Novamente por [20], *V*.1.1, temos um homomorfismo bem definido:



$$\begin{aligned} \psi: \ F_G \otimes_Z A &\longrightarrow F \otimes_{ZG} A \\ \overline{x} \otimes a &\longmapsto \psi(\overline{x} \otimes a) = x \otimes a. \end{aligned}$$

As aplicações φ e ψ são tais que uma é inversa da outra.

Logo,

$$F \otimes_{ZG} A \simeq F_G \otimes_Z A.$$

(b) Consideremos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} \theta: \ Hom_{ZG}(F,A) &\longrightarrow Hom_Z(F_G,A) \\ f &\longmapsto \theta(f);\ \theta(f)(\overline{x}) = f(x) \\ \rho: \ Hom_Z(F_G,A) &\longrightarrow Hom_{ZG}(F,A) \\ g &\longmapsto \rho(g);\ \rho(g)(x) = g(\overline{x}). \end{aligned}$$

Tais aplicações são homomorfismos e, $\theta = \rho^{-1}$.

Portanto,

$$Hom_{ZG}(F,A) \simeq Hom_Z(F_G,A).$$

■

Proposição 1.8.4. *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então*

(a) $H_*(G,M) \simeq H_*(K(G,1),M)$

(b) $H^*(G,M) \simeq H^*(K(G,1),M)$.

Demonstração: Seja $Y = K(G,1)$ e X o recobrimento universal de Y. Temos

(a) $H_*(G,M) = H_*(C_*(X,\mathbb{Z}) \otimes_{ZG} M) \overset{\text{Lema1.8.1(a)}}{\simeq} H_*(C_*(X,\mathbb{Z})_G \otimes_Z M) \overset{\text{not.}}{=}$
$\overset{\text{not.}}{=} H_*(C_*(X)_G \otimes_Z M) \overset{\text{Prop.1.6.4}}{\simeq} H_*(C_*(Y) \otimes_Z M) = H_*(Y,M).$

(b) $H^*(G,M) = H^*(Hom_{ZG}(C_*(X,\mathbb{Z}),M)) \overset{\text{Lema1.8.1(b)}}{\simeq} H^*(Hom_Z(C_*(X,\mathbb{Z})_G,M)) \overset{\text{not.}}{=}$
$\overset{\text{not.}}{=} H^*(Hom_Z(C_*(X)_G,M)) \overset{\text{Prop.1.6.4}}{\simeq} H^*(Hom_Z(C_*(Y),M)) = H^*(Y,M).$

■

Observação 1.8.1. *Existe, também, uma interpretação topológica para $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$, considerando-se M como um $\mathbb{Z}G$-módulo não trivial:*

- $H_*(G,M) \simeq H_*(K(G,1),\mathcal{M})$
- $H^*(G,M) \simeq H^*(K(G,1),\mathcal{M})$

onde $\mathcal{M}$ é o **sistema de coeficientes locais associado ao RG-módulo M.**

Capítulo 2

O End Clássico de Grupos

A definição clássica de ends de gupos foi introduzida por Hopf e Freudental para grupos finitamente gerados e foi totalmente amparada na definição de ends de espaços.

A definição algébrica de número de ends de um grupo G qualquer, foi dada por Specker em [32]. Neste capítulo vamos introduzir a definição e alguns resultados sobre end de um grupo G.

2.1 O End de um Grupo

Antes de introduzirmos a definição de número de ends de um grupo, façamos algumas considerações:

Sejam G um grupo e considere o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $PG = \{A; A \subset G\}$, o conjunto das partes de G. Aqui $(PG, +)$ é visto como um grupo abeliano (em que todo elemento tem ordem 2), com a operação diferença simétrica

$$A + B := (A^C \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

e a G-ação dada por:

$$\begin{aligned} G \times PG &\longrightarrow PG \\ (g, A) &\longmapsto g.A := \{g.a; a \in A\}. \end{aligned}$$

Consideremos ainda os seguintes subespaços de PG:

$$FG = \{A \in PG; A \text{ é finito }\} \quad \text{e} \quad QG = \{A \in PG; \forall g \in G, A + gA \in FG\},$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Os elementos de QG são ditos **quase invariantes pela ação de** G.

Dessa maneira temos que PG/FG é um $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial e QG/FG é um $\mathbb{Z}_2$-subespaço vetorial de PG/FG.

Observação 2.1.1. *Denotaremos um elemento $A + FG$ (de PG/FG ou QG/FG) por $\overline{A}$.*

Com os conceitos introduzidos anteriormente temos a seguinte definição

Definição 2.1.1. *Dado um grupo G, o* **número de ends de** *G, denotado por $e(G)$ é definido por*

$$e(G) := dim(QG/FG).$$

Observação 2.1.2. *$e(G)$ mede o número de subconjuntos quase invariantes de G.*

Lema 2.1.1. *Considerando G um grupo temos:*

(i) Se G é infinito, então $\overline{\emptyset}$ e $\overline{G}$ são elementos distintos em QG/FG e portanto $e(G) \geq 1$;

(ii) G é finito se, e somente se, $e(G) = 0$;

(iii) $e(G) \geq 2$ se, e somente se, existe $\overline{A} \in QG/FG$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$. Neste caso, $\overline{\emptyset}, \overline{A}, \overline{A^C}$ e $\overline{G}$ são elementos distintos em QG/FG;

(iv) $e(G) = 2$ se, e somente se, existe $\overline{A}$ como em (iii) tal que para qualquer $\overline{B} \in QG/FG$, $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^C}$.

Demonstração:

(*i*) Dado um grupo G, temos que $G \in QG$, pois para $\forall g \in G$ temos que

$$G + gG = G + G = (G \cap G^C) \cup (G^C \cap G) = \emptyset \in FG.$$

Logo, $\overline{G} \in QG/FG$.

Agora, como G é infinito temos que $G \notin FG$ e assim $\overline{G} \neq \overline{\emptyset}$, ou seja,

$$\mathbb{Z}_2 \simeq \{\overline{\emptyset}, \overline{G}\} \subset QG/FG.$$

Logo, $e(G) = dim(QG/FG) \geq dim_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_2 = 1$, como queríamos.

(*ii*) Consideremos G um grupo finito. Logo, temos que $PG = FG$ é finito, ou seja, $QG = FG$. Assim, temos

$$e(G) = dim(QG/FG) = 0.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Reciprocamente, consideremos $e(G) = 0$ e suponhamos que G seja infinito. Logo, por (i) teríamos que $e(G) \geq 1$ (contrariando a hipótese). Portanto, G é finito.

(iii) Considerando $e(G) \geq 2$ temos que $dim(QG/FG) \geq 2$, ou seja, QG/FG é isomorfo a pelo menos duas cópias de $\mathbb{Z}_2$.

Logo, existem pelo menos $2^2 - 1 = 3$ conjuntos infinitos quase invariantes de G, ou seja, deve existir $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$.

Reciprocamente, suponhamos que exista $\overline{A} \in QG/FG$ tal que $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A} \neq \overline{G}$.

Inicialmente notemos que $\overline{A^C} \in QG/FG$, pois para todo $g \in G$ tem-se

$$A^C + gA^C = (A \cap gA^C) \cup (A^C \cap gA) = A + gA \in FG,$$

pois $\overline{A} \in QG/FG$.

Ainda temos:

- $\overline{A^C} \neq \overline{A}$, pois $A^C + A = (A \cap A) \cup (A^C \cap A^C) = A \cup A^C = G \notin FG$.
- $\overline{A^C} \neq \overline{\emptyset}$, pois se $\overline{A^C} = \overline{\emptyset}$ teríamos $\overline{G} = \overline{A^C} + \overline{A} = \overline{A}$, ou seja, $\overline{G} = \overline{A}$ (contrariando o fato de $\overline{A} \neq \overline{G}$).
- $\overline{A^C} \neq \overline{G}$, pois se $A^C = \overline{G}$ teríamos $\overline{A^C} = \overline{G} = \overline{A^C} + \overline{A}$, ou seja, $\overline{A} = \overline{\emptyset}$ (contrariando o fato de $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$).

Dessa maneira $\{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{A}, \overline{A^C}\}$ são elementos distintos em QG/FG e ainda $\{\overline{\emptyset}, \overline{G}, \overline{A}, \overline{A^C}\} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Logo,

$$e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2}(QG/FG) \geq dim_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = 2.$$

(iv) Conseqüência imediata de (iii).

■

Proposição 2.1.1. *Se G é o grupo cíclico infinito, ou seja, $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, então $e(G) = 2$.*

Demonstração: Seja $A = \{a^n; n > 0\} \subset G$. Logo $A^C = \{a^n; n \leq 0\}$ e temos

- $\overline{A} \in QG/FG$, pois para todo $g = a^k \in G$; $gA = \{a^{k+n}; n > 0\}$, $gA^C = \{a^{k+n}; n \leq 0\}$ e assim $A + gA = (A^C \cap gA) \cup (A \cap (gA^C))$ é finito, ou seja, $A + gA \in FG$ implicando em $\overline{A} \in QG/FG$.
- $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ (pois $A \notin FG$) e $\overline{A} \neq \overline{G}$ (pois $A^C \notin FG$).

Agora, vamos provar que qualquer $\overline{B} \in QG/FG$ tal que $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se que $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^C}$. Com este propósito provaremos inicialmente a seguinte:



Afirmação: *Seja* $\overline{B} \in QG/FG$, *se para quase todo* n *(isto é, exceto um número finito* $n_1, ..., n_r$*),* $a^n \in B$, *então* $a^{n+1} \in B$ *e* $a^{n-1} \in B$.

De fato, como $\overline{B} \in QG/FG$ então $g\overline{B} = \overline{B}$ para qualquer $g \in G$. Em particular para $g = a$. Suponhamos que existam infinitos $n's$ tais que

(i) $a^n \in B$ e $a^{n+1} \notin B$; ou

(ii) $a^n \in B$ e $a^{n-1} \notin B$(equivalentemente $a^n \notin aB$)

Então existiriam infinitos $n's$ tais que

(i) $a^{n+1} = a.a^n \in aB$ e $a^{n+1} \notin B \Rightarrow a^{n+1} \in (aB) \cap B^C$ ou

(ii) $a^n \in B$ e $a^n = a.a^{n-1} \notin aB \Rightarrow a^n \in (aB)^C \cap B$.

Assim, $aB + B = ((aB) \cap B^C) \cup ((aB)^C \cap B)$ seria infinto, ou seja, $\overline{B} \notin QG/FG$ (o que é uma contradição, pois $\overline{B} \in QG/FG$).

Logo, para quase todo n, $a^n \in B$ implica que $a^{n+1} \in B$ e $a^{n-1} \in B$, demonstrando a afirmação.

Agora, dados $\overline{B} \in QG/FG$ e $A = \{a^n; n > 0\} \subset G$ como anteriormente, temos as seguintes possibilidades:

(1) $B \cap A$ finito e $B \cap A^C$ finito.

Temos

$$B = B \cap (A \cup A^C) = (B \cap A) \cup (B \cap A^C) \text{ é finito, ou seja, } B \in FG.$$

Portanto, $\overline{B} = \overline{\emptyset}$.

(2) $B \cap A$ infinito e $B \cap A^C$ infinito

Do fato de $B \cap A$ ser infinito e da afirmação anterior segue que existe um inteiro positivo m_1 tal que $a^n \in B \cap A, \forall n > m_1$. Logo, $A \cap B^C \subset \{a^k; 0 \leq k \leq m_1\}$ e portanto é finito.

Analogamente, usando que $B \cap A^C$ é infinito e a afirmação anterior temos que existe um inteiro m_2 tal que $a^n \in B \cap A^C, \forall n < m_2$. Logo $A^C \cap B^C \subset \{a^k; m_2 \leq k \leq 0\}$ e portanto é finito.

Dessa maneira temos que

$$B^C = B^C \cap (A \cup A^C) = (B^C \cap A) \cup (B^C \cap A^C) \text{ é finito, ou seja, } B^C \in FG.$$

Portanto, $\overline{B^C} = \overline{\emptyset}$, ou seja, $\overline{B} = \overline{G}$.

(3) $B \cap A$ finito e $B \cap A^C$ infinito

Como vimos em (2) $B \cap A^C$ infinito implica em $A^C \cap B^C$ finito. Logo, temos

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$B + A^C = (B \cap A) \cup (B^C \cap A^C) \text{ é finito, ou seja, } B + A^C \in FG.$$

Portanto, $\overline{B} = \overline{A^C}$.

(4) $B \cap A$ infinito e $B \cap A^C$ finito

Conforme vimos em (2), $B \cap A^C$ infinito implica em $A \cap B^C$ finito. Logo, temos

$$B + A = (B \cap A^C) \cup (B^C \cap A) \text{ é finito, ou seja, } B + A \in FG.$$

Portanto, $\overline{B} = \overline{A}$.

Dessa maneira, dado qualquer elemento $\overline{B} \in QG/FG$ com $\overline{B} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{B} \neq \overline{G}$ tem-se que $\overline{B} = \overline{A}$ ou $\overline{B} = \overline{A^C}$.

Portanto pelo *Lema* 2.1.1 (iv) segue que $e(G) = 2$.

■

Teorema 2.1.1. *Se H é um subgrupo normal finito de G, então $e(G) = e(G/H)$.*

Demonstração: Consideremos o grupo quociente $G/H = \{Hg; g \in G\}$ e

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$
$$g \longmapsto Hg$$

o homomorfismo quociente.

Notemos que considerando π^{-1} a imagem inversa de π temos:

(i) $\pi(\pi^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subset G/H$ (pois π é sobrejetora).

(ii) $\pi^{-1}(\pi(A)) = HA$, para todo $A \subset G$.

De fato,

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \{g \in G; \pi(g) \in \pi(A)\} = \{g \in G; Hg = Ha, \text{ para algum } a \in A\} =$$
$$= \{g \in G; ga^{-1} \in H; a \in A\} = \{g \in G; ga^{-1} = h; h \in H; a \in A\} =$$
$$= \{g \in G; g = ha; h \in H; a \in A\} = HA,$$

ou seja, $\pi^{-1}(\pi(A)) = HA$.

(iii) $\pi^{-1}(B_1 + B_2) = \pi^{-1}(B_1) + \pi^{-1}(B_2), \forall B_1, B_2 \subset G/H$, onde $+$ denota a operação diferença simétrica.

De fato,



$$\pi^{-1}(B_1 + B_2) = \pi^{-1}\left((B_1 \cap B_2^C) \cup (B_1^C \cap B_2)\right) = \pi^{-1}(B_1 \cap B_2^C) \cup \pi^{-1}(B_1^C \cap B_2) =$$
$$= \left(\pi^{-1}(B_1) \cap \pi^{-1}(B_2^C)\right) \cup \left(\pi^{-1}(B_1^C) \cap \pi^{-1}(B_2)\right) =$$
$$= \left(\pi^{-1}(B_1) \cap (\pi^{-1}(B_2))^C\right) \cup \left(\pi^{-1}(B_1))^C \cap \pi^{-1}(B_2)\right) = \pi^{-1}(B_1) + \pi^{-1}(B_2),$$

como queríamos.

(iv) $\pi^{-1}(\pi(g)B) = g\pi^{-1}(B)$, $\forall g \in G$, $B \subset G/H$

De fato, seja $x \in \pi^{-1}(\pi(g)B)$. Logo temos

$$x \in \pi^{-1}(\pi(g)B) \Rightarrow \pi(x) \in \pi(g)B \Rightarrow \pi(x) = \pi(g)b; b \in B \Rightarrow \pi(x) = \pi(g) \cdot \pi(a),$$

pois π é sobrejetora.

Assim,

$$\pi(x) = \pi(g).\pi(a) \overset{\pi homom.}{\Longrightarrow} \pi(x) = \pi(g.a) \Longrightarrow Hx = Hga \Longrightarrow gax^{-1} \in H \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow gax^{-1} = h_1; h_1 \in H \Longrightarrow ga = h_1x = xh_2; h_1, h_2 \in H,$$

pois H é normal em G.

Dessa maneira,

$$x = gah_2^{-1} \in g\pi^{-1}(B), \text{ pois } \pi(ah_2^{-1}) = \pi(a) \in B.$$

Portanto, $\pi^{-1}(\pi(g)B) \subset g\pi^{-1}(B)$.

Reciprocamente, considerando $x \in g\pi^{-1}(B)$ temos

$$x \in g\pi^{-1}(B) \Longrightarrow x = gy; y \in \pi^{-1}(B) \Longrightarrow x = gy; \pi(y) \in B.$$

Logo,

$$\pi(x) = \pi(g).\pi(y) \in \pi(g).B \Longrightarrow x \in \pi^{-1}(\pi(g)B).$$

Portanto, $g\pi^{-1}(B) \subset \pi^{-1}(\pi(g)B)$, ou seja, $\pi^{-1}(\pi(g)B) = g\pi^{-1}(B)$.

(v) $\pi^{-1}(B + \pi(g)B) = \pi^{-1}(B) + g\pi^{-1}(B), \forall B \subset G/H$ (isto segue imediatamente das duas afirmações anteriores).

(vi) $B \in Q(G/H) \Longleftrightarrow \pi^{-1}(B) \in QG$.

Inicialmente notemos que $Q(G/H) = \{A \in P(G/H); \forall \overline{g} \in G/H; A + \overline{g}A \in F(G/H)\}$. No entanto, temos que $\overline{g} \in G/H \Longrightarrow \overline{g} = gH = \pi(g)$, ou seja,

$$Q(G/H) = \{A \in P(G/H); \forall g \in G; A + \pi(g)A \in F(G/H)\}.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Assim, considerando $B \in Q(G/H)$ temos $B + \pi(g)B \in F(G/H), \forall g \in G$, ou seja,

$$B + \pi(g)B = \{Hg_1, \ldots, Hg_k\} \text{ (finito).}$$

Logo, considerando $S = B + \pi(g)B = \{Hg_1, \ldots, Hg_k\}$ temos

$$\pi^{-1}(B) + g\pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(B + \pi(g)B) = \pi^{-1}(S) = \{x \in G; \pi(x) \in S\} =$$
$$= \{x \in G; Hx \in S\} = \{x \in G; Hx = Hg_i; i = 1 \ldots, k\} = \{x \in G; xg_i^{-1} \in H; i = 1, \ldots, k\} =$$
$$= \{x \in G; x \in Hg_i; i = 1, \ldots, k\} = Hg_1 \cup \ldots \cup Hg_k \in FG,$$

pois H é finito.

Reciprocamente, se $\pi^{-1}(B) \in QG$ temos que $\forall g \in G$

$$\pi^{-1}(B) + g\pi^{-1}(B) = F_g \in FG \Longrightarrow \pi^{-1}(B + \pi(g)B) = F_g \in FG \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \pi(\pi^{-1}(B + \pi(g)B)) = \pi(F_g) \in F(G/H) \overset{(i)}{\Longrightarrow} B + \pi(g)B \in F(G/H).$$

Portanto, $B \in Q(G/H)$.

(vii) $A \in QG \Longrightarrow \pi^{-1}(\pi(A)) + FG = A + FG$.

Considerando $A \in QG$ queremos mostrar que $\pi^{-1}(\pi(A)) + FG = A + FG$, ou seja, $A + \pi^{-1}(\pi(A)) \in FG$. Para este propósito, suponhamos $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$. Então, temos

$$A + \pi^{-1}(\pi(A)) \overset{(ii)}{=} A + HA = A + (h_1A \cup \ldots \cup h_nA) \subset (A + h_1A) \cup \ldots \cup (A + h_nA)$$

Agora note que $A + h_iA \in FG$, $\forall i = 1, \ldots, n$, pois $A \in QG$. Logo, temos $(A + h_1A) \cup \ldots \cup (A + h_nA) \in FG$, ou seja, $A + \pi^{-1}(\pi(A)) \in FG$. Assim

$$\pi^{-1}(\pi(A)) + FG = A + FG.$$

(viii) $A \in QG \Longrightarrow \pi^{-1}(\pi(A)) \in QG \Longrightarrow \pi(A) \in Q(G/H)$.

De fato, para todo $g \in G$ temos

$$\pi^{-1}(\pi(A)) + g\pi^{-1}(\pi(A)) \overset{(ii)}{=} HA + gHA = H(A + gA) \in FG,$$

pois H é finito e $A \in QG$.

Portanto $\pi^{-1}(\pi(A)) + g\pi^{-1}(\pi(A)) \in FG$, ou seja, $\pi^{-1}(\pi(A)) \in QG$.

Assim temos bem definida uma aplicação induzida

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} : QG/FG &\longrightarrow \frac{Q(G/H)}{F(G/H)} \\ A + FG &\longmapsto \pi(A) + F(G/H) \end{aligned}$$



• $\widetilde{\pi}$ é homomorfimo.

De fato,

$$\widetilde{\pi}(A_1 + FG + A_2 + FG) = \widetilde{\pi}(\pi^{-1}(\pi(A_1)) + FG + \pi^{-1}(\pi(A_2)) + FG) =$$
$$= \widetilde{\pi}(\pi^{-1}(\pi(A_1)) + \pi^{-1}(\pi(A_2)) + FG) = \widetilde{\pi}(\pi^{-1}(\pi(A_1) + \pi(A_2)) + FG) =$$
$$= \pi(A_1)+\pi(A_2)+F(G/H) = \pi(A_1)+F(G/H)+\pi(A_2)+F(G/H) = \widetilde{\pi}(A_1+FG)+\widetilde{\pi}(A_2+FG).$$

• $\widetilde{\pi}$ é injetora.

De fato,

$$\widetilde{\pi}(A + FG) = 0 \Longrightarrow \pi(A) + F(G/H) = 0 \Longrightarrow \pi(A) \in F(G/H) \Longrightarrow \pi(A) =$$
$$\{Hg_1, \ldots, Hg_k\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \pi^{-1}(\pi(A)) = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \ldots Hg_k \in FG \text{ (pois } H \text{ é finito).}$$

Logo, $A + FG = \pi^{-1}(\pi(A)) + FG = 0$.

• $\widetilde{\pi}$ é sobrejetora, pela sua própria definição.

Portanto, $\widetilde{\pi}$ é um isomorfismo e assim

$$e(G) = dim(QG/FG) = dim\frac{Q(G/H)}{F(G/H)} = e(G/H),$$

obtendo assim o resultado desejado.

■

Exemplo 2.1.1. $e(\mathbb{Z} \oplus G) = 2$, *para qualquer grupo finito* G.

2.2 Ends e Cohomologia de Grupos

Podemos também interpretar $e(G)$ em termos de cohomologia de grupos. Considerando G um grupo e a mesma terminologia usada na seção anterior temos que PG/FG é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação induzida $g.\overline{A} = \overline{gA}$ e assim temos o seguinte resultado:

Lema 2.2.1. $e(G) = dimH^0(G, PG/FG)$.

Demonstração: Inicialmente notemos que o grupo dos invariantes de (PG/FG), denotado $(PG/FG)^G$ é QG/FG.

De fato,

$$(PG/FG)^G = \{\overline{A} \in PG/FG; g.\overline{A} = \overline{A}, \forall g \in G\} =$$
$$= \{\overline{A} \in PG/FG; \overline{g.A} = \overline{A}, \forall g \in G\} = \{\overline{A} \in PG/FG; g.A + FG = A + FG; \forall g \in G\} =$$
$$= \{\overline{A} \in PG/FG; A + g.A \in FG; \forall g \in G\} = QG/FG.$$

Portanto, $(PG/FG)^G = QG/FG$, ou seja

$$e(G) = dim(QG/FG) = dim(PG/FG)^G.$$

Agora, pela Proposição 1.6.4 temos que $(PG/FG)^G = H^0(G, PG/FG)$.

Dessa maneira,

$$e(G) = dim(PG/FG)^G = dimH^0(G, PG/FG).$$

■

Lema 2.2.2. *Dado um grupo G temos um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo entre PG/FG e $\overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G$, onde $\overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) = Coind_{\{1\}}^G\mathbb{Z}_2$ e conseqüentemente $e(G) = dimH^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G)$.*

Demonstração: Iniciemos a demonstração com a seguinte:

Afirmação: $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2G} \longrightarrow PG$

$$f \longmapsto \rho(f) := A_f = \{g \in G; f(g^{-1}) = 1\}$$

é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo.

De fato, temos que

(*i*) $\rho(g_0 \cdot f) = \{g \in G; (g_0f)(g^{-1}) = 1\} = \{g \in G; f(g^{-1}g_0) = 1\} = \{g \in G; f((g_0^{-1}g)^{-1}) = 1\} =$

$= \{g_1 = g_0^{-1}g \in G; f(g_1^{-1}) = 1\} = \{g_0g_1 \in G; f(g_1^{-1}) = 1\} = g_0\{g_1 \in G; f(g_1^{-1}) = 1\} =$

$g_0 \cdot \rho(f)$

Logo, $\rho(g_0 \cdot f) = g_0 \cdot \rho(f)$.

(*ii*) $\rho(f + h) = \{g \in G; (f + h)(g^{-1}) = 1\} = \{g \in G; f(g^{-1}) + h(g^{-1}) = 1\} =$

$= \{g \in G; (f(g^{-1}) = 0 \text{ e } h(g^{-1}) = 1) \text{ ou } (f(g^{-1}) = 1 \text{ e } h(g^{-1}) = 0)\} =$

$= \{g \in G; f(g^{-1}) = 0 \text{ e } h(g^{-1}) = 1\} \cup \{g \in G; f(g^{-1}) = 1 \text{ e } h(g^{-1}) = 0\} =$

$= [\{g \in G; f(g^{-1}) = 0\} \cap \{g \in G; h(g^{-1}) = 1\}] \cup [\{g \in G; f(g^{-1}) = 1\} \cap \{g \in G; h(g^{-1}) = 0\}] =$

$= \left[(\rho(f))^C \cap \rho(h)\right] \cup \left[\rho(f) \cap (\rho(h))^C\right] = \rho(f) + \rho(h).$

(*iii*) ρ é bijetora, pois

$$\rho : PG \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2)$$
$$A \longmapsto f_A; f_A(g) = \begin{cases} 1, \text{ se } g^{-1} \in A \\ 0, \text{ se } g^{-1} \notin A \end{cases}$$

unesp

BIBLIOTECA
Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP - S. J. Rio Preto

é tal que $\rho \circ \varphi = id$ e $\varphi \circ \rho = id$.

Portanto, de (i), (ii) e (iii) temos que ρ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo. Assim, ρ induz um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo

$$\overline{\rho} : \overline{\mathbb{Z}_2G}/\rho^{-1}(FG) \longrightarrow PG/FG$$

Agora vamos identificar $\rho^{-1}(FG)$ com $\mathbb{Z}_2G$.

Para isso, definamos:

$$\psi : \mathbb{Z}_2G \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2)$$

$$g_0 \longmapsto \psi(g_0) : \mathbb{Z}_2G \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$x \longmapsto \psi(g_0)(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = g_0^{-1} \\ 0, \text{ se } x \neq g_0^{-1} \end{cases}$$

e estendemos por linearidade, tanto $\psi(g_0)$ como ψ. Ainda temos

$(i)'$ $\psi(\mathbb{Z}_2G) = \rho^{-1}(FG)$

De fato, seja $A \in \rho(\psi(\mathbb{Z}_2G))$, ou seja, $A = \rho(\psi(u)); u \in \mathbb{Z}_2G$. Logo, se $u \in \mathbb{Z}_2G$ temos

$$u = 1g_1 + ... + 1g_t, \text{ com } g_i \in G; g_i \neq g_j.$$

Assim,

$$\psi(u) = 1\psi(g_1) + \ldots + 1\psi(g_t), \text{ onde } \begin{cases} \psi(g_i)(g_i^{-1}) = 1, \\ \psi(g_i)(g) = 0, \text{ se } g \neq g_i^{-1} \end{cases}$$

Logo,

$$\rho(\psi(u)) = A_{\psi(u)} = \{g \in G; \psi(u)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \ldots, g_t\} \in FG.$$

Portanto, $A = \rho(\psi(u)) \in FG$, ou seja $\rho(\psi(\mathbb{Z}_2)) \subset FG$.

Reciprocamente, seja $A = \{g_1, \ldots, g_t\} \in FG$. Então podemos considerar

$$u = 1g_1 + \ldots + 1g_t \in \mathbb{Z}_2G \quad \text{e} \quad \psi(u) \in \psi(\mathbb{Z}_2G).$$

Temos $\rho(\psi(u)) = \{g \in G; \psi(u)(g^{-1}) = 1\} = \{g_1, \ldots, g_t\} = A$.

Dessa maneira, $A \in \rho(\psi(\mathbb{Z}_2G))$, ou seja, $FG \subset \rho(\psi(\mathbb{Z}_2G))$.

Portanto, $\rho(\psi(\mathbb{Z}_2G)) = FG$ e $\rho^{-1}(FG) = \psi(\mathbb{Z}_2G)$.

$(ii)'$ ψ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos

ψ é homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$-módulos e ainda $\psi(g \cdot g_0) = g \cdot \psi(g_0)$.

De fato,

T. 13/3/05

$$\psi(g \cdot g_0) : \mathbb{Z}_2G \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$x \longmapsto \psi(g \cdot g_0)(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = (g \cdot g_0)^{-1} = g_0^{-1} \cdot g^{-1} \\ 0, \text{ se } x \neq (g \cdot g_0)^{-1} \end{cases}$$

$$(g \cdot \psi(g_0))(x) = \psi(g_0)(xg) = \begin{cases} 1, \text{ se } x.g = g_0^{-1} (\Longleftrightarrow x = g_0^{-1}g^{-1}) \\ 0, \text{ se } x \neq g_0^{-1}g^{-1} \end{cases}$$

Portanto, ψ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

$(iii)'$ ψ é monomorfismo

De fato, sejam $u = 1.g_1 + ... + 1.g_t$ e $v = 1.h_1 + 1.h_r \in \mathbb{Z}_2G$ tais que $u \neq v$. Então existe pelo menos algum i tal que $g_i \neq h_j, \forall j$ (ou $h_i \neq g_j, \forall j$). Logo, temos

$$\psi(u)(g_i^{-1}) = (1\psi(g_1)+...+1\psi(g_t))(g_i^{-1}) = 1\psi(g_1)(g_i^{-1})+...+1\psi(g_i)(g_i^{-1})+...+1\psi(g_t)(g_i^{-1}) = 1$$

e

$$\psi(v)(g_i^{-1}) = 1\psi(h_1)(g_i^{-1}) + ... + 1\psi(h_r)(g_i^{-1}) = 0.$$

Dessa maneira, $\psi(u) \neq \psi(v)$.

Analogamente, se $h_i \neq g_j, \forall j$ obtemos $\psi(u) \neq \psi(v)$. Logo, ψ é injetora.

Portanto, usando $(i)', (ii)'$ e $(iii)'$ podemos identificar $\mathbb{Z}_2G$ com $\rho^{-1}(FG)$ (e assim $\mathbb{Z}_2G$ pode ser considerado um submódulo de $\overline{\mathbb{Z}_2G}$).

Assim, temos o $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo: $PG/FG \simeq \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G$.

Portanto, pelo Lema 2.2.1 temos

$$e(G) = dim H^0(G, PG/FG) = dim H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G)$$

■

Teorema 2.2.1. *Se G é infinito, então $e(G) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2G)$.*

Demonstração: Consideremos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2G \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbb{Z}_2G} \xrightarrow{p} \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Logo, temos induzida uma seqüência exata longa em cohomologia:

$$0 \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2G}) \longrightarrow H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^1(G, \overline{\mathbb{Z}_2G}) \longrightarrow \cdots$$

Agora, pelo Lema 2.2.2 mostramos que ρ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo, ou seja ,

$$PG \simeq \overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) = Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2.$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Assim, temos

$$H^n(G, PG) \simeq H^n(G, Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \overset{LemadeShapiro}{\simeq} H^n(\{1\}, \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, \text{ se } n = 0, \\ \{0\}, \text{ caso contário.} \end{cases}$$

Portanto, $H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}) \simeq \mathbb{Z}_2$ e $H^1(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}) = 0$.

Além disso, $H^0(G, \mathbb{Z}_2 G) \simeq H^0(G, FG) \overset{Prop1.6.4}{\simeq} (FG)^G$.

Ainda temos a seguinte

Afirmação: Como G é infinito temos que $(FG)^G = \{\emptyset\}$.

De fato, suponhamos que $A \in (FG)^G$ e $A \neq \emptyset$. Então, $A \in FG$ e $\forall g \in G$ tem-se $A = gA$, ou seja, $\forall g \in G$, temos que

$$a_i = g a_j, \text{ com } a_i, a_j \in A.$$

Logo, $g = a_i . a_j^{-1}$ e portanto $G \subset A.A^{-1}$, o que implica em G ser finito (pois $A \cdot A^{-1}$ é finito), contradizendo a hipótese. Logo, $A = \emptyset$, ou seja, $(FG)^G = \{\emptyset\}$.

Dessa maneira, a seqüência exata se reduz a

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}/\mathbb{Z}_2 G) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Portanto, $dim H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}/\mathbb{Z}_2 G) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$.

Logo, pelo Lema 2.2.2 temos que

$$e(G) = dim H^0(G, \overline{\mathbb{Z}_2 G}/\mathbb{Z}_2 G) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2 G).$$

■

Proposição 2.2.1. *Se H é um subgrupo de um grupo G tal que $(G : H) < \infty$, então*

$$e(G) = e(H).$$

Demonstração: Se G é um grupo finito, então H também é finito. Assim, pelo Lema 2.1.1(ii) temos que $e(G) = 0$ e $e(H) = 0$, ou seja, $e(G) = e(H)$.

Agora, se G é infinito, temos pelo Teorema 2.2.1 que $e(G) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$.

Além disso, H também é infinito (pois $(G : H) < \infty$) e portanto, $e(H) = 1 + dim H^1(H, \mathbb{Z}_2 H)$.

Ainda temos que se $(G : H) < \infty$ então $H^*(H, RH) \simeq H^*(G, RG)$, onde H é subgrupo de G e R anel comutativo com unidade, pois como $(G : H) < \infty$ temos pela Proposição 1.5.3 que $Ind_H^G RH \simeq Coind_H^G RH$. Assim,

$$H^*(H,RH) \overset{Lema de Shapiro}{\simeq} H^*(G, Coind_H^G RH) \simeq H^*(G, Ind_H^G RH) \simeq$$
$$\simeq H^*(G, RG \otimes_{RH} RH) \simeq H^*(G, RG).$$

Dessa maneira, considerando $R = \mathbb{Z}_2$, temos $H^*(H, \mathbb{Z}_2 H) = H^*(G, \mathbb{Z}_2 G)$, ou seja,

$$e(H) = 1 + dim H^1(H, \mathbb{Z}_2 H) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) = e(G).$$

Portanto, $e(H) = e(G)$, como queríamos.

■

Corolário 2.2.1. *Seja G um grupo infinito. Se existe H subgrupo de G tal que $H \simeq \mathbb{Z}$ e $(G : H) < \infty$, então $e(G) = 2$.*

Demonstração: Temos que $e(\mathbb{Z}) = 2$ (Proposição 2.1.1). Assim, como $H \simeq \mathbb{Z}$ tem-se $e(H) = 2$. Agora, do fato de $(G : H) < \infty$ segue da Proposição 2.2.1 que $e(G) = 2$.

■

O seguinte resultado pode ser encontrado em [7] Proposição 3.1.5. Neste trabalho omitiremos a demonstração.

Proposição 2.2.2. *Se G é um grupo abeliano não enumerável então $e(G) = 1$.*

■

Exemplo 2.2.1. *Um grupo G é chamado* **Grupo de Dualidade de Poincaré** *de dimensão n (sobre $\mathbb{Z}_2$) se existir, para todo módulo M e todo inteiro $k \geq 0$, isomorfismos naturais*

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, M).$$

Se G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão $n > 1$ então $e(G) = 1$.

De fato, pelo Teorema 2.2.1 temos $e(G) = 1 + dim H^1(G, \mathbb{Z}_2 G)$. Mas

$$H^1(G, \mathbb{Z}_2 G) \simeq H^1(G, Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \overset{Prop.1.7.1}{=} H_{n-1}(\{1\}, \mathbb{Z}_2) = \{0\} \text{ (pois } n > 1).$$

Assim, $e(G) = 1 + 0 = 1$.

Dessa maneira, concluímos que $e(G)$ fornece uma condição necessária para um grupo G ser grupo de dualidade de Poincaré de dimensão $n > 1$.



Exemplo 2.2.2. *É conhecido que, se M é uma superfície fechada (ou seja, uma variedade 2-dimensional sem bordo), tal que $M \neq S^2$ e $M \neq P^2$, então $\pi_1(M)$ é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 2 (Ver VIII [5]).*

Dessa maneira se considerarmos uma superfície fechada $G = \pi_1(M)$, tal que $M \neq S^2$ e $M \neq P^2$, temos, pelo Exemplo anterior, que $e(G) = 1$.

Exemplo 2.2.3. *Segue do Exemplo 2.2.2 que, se $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ então $e(G) = 1$, pois $G = \pi_1(T^2)$. Da Proposição 2.2.1 temos que, se $H = n\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$ é subgrupo de G então $e(H) = e(G) = 1$ pois $(G : H) = n \cdot m < \infty$.*

Exemplo 2.2.4. *Pode ocorrer de um grupo G ter $e(G) = 1$ e não ser grupo de dualidade de Poincaré. Por exemplo, temos $e(\mathbb{R}) = 1$ pois $\mathbb{R}$ é um grupo abeliano não enumerável (Proposição 2.2.2) e $\mathbb{R}$ não é grupo de dualidade de Poincaré pois todo grupo de dualidade de Poincaré é finitamente gerado (Ver VIII [5]) e $\mathbb{R}$ não é.*

Capítulo 3

Uma Relação entre Ends de Grupos e Ends de Espaços

Neste capítulo, o objetivo é relacionar o número de ends de um grupo finitamente gerado G com o número de ends de um certo espaço. A partir daí mostraremos que se G é um grupo finitamente gerado, então $e(G) = 0, 1, 2$ ou ∞. Inicialmente consideremos o caso em que $\mathcal{X}$ é um complexo simplicial e em seguida passaremos a espaços um pouco mais gerais.

3.1 Número de Ends de um Complexo Simplicial

Antes de definirmos número de ends, recordemos algumas definições e resultados a respeito de um complexo simplicial $\mathcal{X}$. (Para maiores detalhes ver [22])

(1) $\mathcal{X}$ é dito localmente finito se todo vértice de $\mathcal{X}$ é vértice de somente um número finito de simplexos de $\mathcal{X}$.

(2) $\mathcal{X}$ é finito se, e somente se, o espaço adjacente $|\mathcal{X}|$ é compacto.

(3) $\mathcal{X}$ é localmente finito se, e somente se, o espaço adjacente $|\mathcal{X}|$ é localmente compacto.

(4) Se $\mathcal{X}$ é localmente finito, então $\mathcal{X} - K$ tem um número finito de componentes conexas, onde K denota um subcomplexo finito de $\mathcal{X}$.

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{X}$ um complexo simplicial localmente finito. Para cada subcomplexo finito K de $\mathcal{X}$, seja $n(\mathcal{X}, K)$, ou simplesmente $n(K)$, o número de componentes conexas infinitas (equivalentemente, cujo fecho é não compacto em $|\mathcal{X}|$), de $\mathcal{X} - K$. Então o* **número de ends de $\mathcal{X}$**, *é definido como:*

$$e(\mathcal{X}) = sup\ \{n(K); K\ é\ subcomplexo\ finito\ de\ \mathcal{X}\}.$$

Observação 3.1.1. *(i) Quando nos referirmos a uma propriedade topológica de $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ (por exemplo, conexidade) estamos nos referindo à propriedade topológica do espaço adjacente $|\mathcal{Y}|$. Muitas vezes não faremos distinção entre o complexo simplicial e o espaço adjacente correspondente. Vamos supor em geral, que o espaço adjacente correspondente a $\mathcal{X}$ seja conexo.*

(ii) $e(\mathcal{X}) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{X}$ é finito. Caso contrário, $e(\mathcal{X})$ é inteiro positivo ou infinito.

Exemplo 3.1.1. *Consideremos $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ com a decomposição simplicial*

$$\mathcal{X} = \{\ \sigma_n^0 = n; \sigma_n^1 = [n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$$

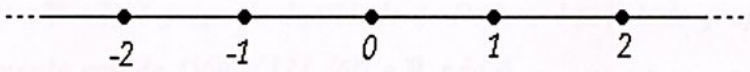


Figura 3.1: Decomposição simplicial de $\mathcal{X} = \mathbb{R}$.

Se K é um ponto (vértice) então $n(K) = 2$, pois $\mathcal{X} - K$ tem duas componentes conexas infinitas.

Se K é um subcomplexo finito qualquer, existe um intervalo fechado J tal que $|K| \subset J$. Claramente $\mathbb{R} - J$ tem somente duas componentes infinitas, e toda componente $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R} - |K|$ que não intercepta $\mathbb{R} - J$ está contida em J e assim é finita.

Logo, $n(K) = 2$ para todo subcomplexo finito K em $\mathbb{R}$. Portanto, $e(\mathbb{R}) = 2$.

Exemplo 3.1.2. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n; n \geq 2$.

Se K é um ponto, então $n(K) = 1$ pois $\mathcal{X} - K$ tem somente uma componente conexa e esta é infinita.

Agora, se K é um subcomplexo finito qualquer em $\mathbb{R}^n$, existem $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$ tal que $K \subset J = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Se $\mathcal{C}$ é uma componente qualquer de $\mathcal{X} - K$ que não intercepta $\mathcal{X} - J$, então $\mathcal{C} \subset J$ e portanto $\overline{\mathcal{C}}$ é compacto. Logo, $\mathcal{X} - K$ tem apenas uma componente conexa infinita e assim $n(K) = 1$.

Portanto, $e(\mathbb{R}^n) = 1$, se $n \geq 2$.

Observação 3.1.2. *Considerando $\mathcal{X}$ um complexo simplicial localmente finito para calcularmos $e(\mathcal{X})$ podemos sempre considerar somente subcomplexos finitos K de $\mathcal{X}$ tal que todas as componentes conexas de $\mathcal{X} - K$ são infinitas.*

De fato, como $\mathcal{X}$ é localmente finito, existe um número finito de componentes conexas em $\mathcal{X} - K$, onde K é subcomplexo finito. No entanto, essas componentes podem ser finitas ou infinitas. Assim temos,

$$\mathcal{X} - K = \left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i^F\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{C}_j^I\right),$$

onde $\mathcal{C}^F$ e $\mathcal{C}^I$ denotam as componentes conexas finitas e infinitas repectivamente.

Assim, tomando $K_1 = K \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{C}_i^F\right)$ subcomplexo finito, temos $\mathcal{X} - K_1 = \bigcup_{j=1}^{s} \mathcal{C}_j^I$, ou seja, todas as componentes conexas de $\mathcal{X} - K_1$ são infinitas.

Antes de enunciarmos alguns resultados, vamos introduzir alguns conceitos e notações. (Para maiores detalhes novamente aconselhamos [22])

Definição 3.1.2. *Seja $\mathcal{X}$ um complexo simplicial. Uma* **p-cadeia** *sobre $\mathcal{X}$ é uma função $c : \mathcal{X}_p \longrightarrow \mathbb{Z}$ (onde $\mathcal{X}_p$ indica o conjunto dos p-simplexos orientados σ de $\mathcal{X}$), tal que*
(i) $c(\sigma) = -c(\sigma')$, onde σ e σ' indicam o mesmo simplexo com orientações opostas;
(ii) $c(\sigma) = 0$ para todo, exceto um número finito de p-simplexos.

Somamos p-cadeias por adicionar seus valores, ou seja, $c_1 + c_2$ é tal que

$$(c_1 + c_2)(\sigma) = c_1(\sigma) + c_2(\sigma).$$

O grupo resultante é denotado por $C_p(\mathcal{X})$ e é chamado **grupo das p-cadeias orientadas de $\mathcal{X}$**. *Se $p \leq 0$ ou $p > dim\mathcal{X}$, $C_p(\mathcal{X})$ é o grupo trivial.*

Uma p-cadeia c_i é chamada **p-cadeia elementar** *se existir um p-simplexo orientado σ tal que $c_i(\sigma) = 1$, $c_i(\sigma') = -1$, onde σ' é o simplexo com orientação oposta de σ e $c_i(\tau) = 0$ para todos os outros simplexos orientados τ.*

Por abuso de notação muitas vezes usamos o símbolo σ para denotar a p-cadeia elementar correspondente a σ. Com esta convenção, se σ e σ' são orientações opostas de mesmo simplexo, podemos escrever $\sigma' = -\sigma$ pois esta igualdade ocorre quando σ e σ' são interpretadas como cadeias elementares.

Uma vez que todos os p-simplexos de $\mathcal{X}$ são orientados (arbitrariamente), cada p-cadeia pode ser escrita unicamente como uma combinação linear finita $c = \sum_i n_i\sigma_i$ das cadeias elementares correspondentes σ_i's. A cadeia c associa o valor n_i para o p-simplexo orientado σ_i, o valor $-n_i$ para o simplexo de orientação oposta a σ_i, e o valor 0 para todos os outros

simplexos que não aparecem no somando. Assim, $C_p(\mathcal{X})$ é um grupo abeliano livre onde uma base pode ser obtida orientando cada p-simplexo e usando as p-cadeias elementares correspondentes como uma base.

Considere o homomorfismo $\partial_p : C_p(\mathcal{X}) \longrightarrow C_{p-1}(\mathcal{X})$ tal que se $\sigma = \langle v_0, \ldots, v_p \rangle$ é um p-simplexo orientado de $\mathcal{X}$, com $p > 0$, então

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p \rangle,$$

e ∂_p é estendido por linearidade. Para $p \leq 0$, consideremos ∂_p o homomorfismo trivial. ∂_p é chamado **operador bordo**.

Observação 3.1.3. *Pode-se verificar que* $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Assim, temos que $\{C_p(\mathcal{X}); \partial_p\}_p$ é um complexo de cadeias e os **grupos de homologia de** $\mathcal{X}$ são definidos por

$$H_p(\mathcal{X}) := \frac{Ker\partial_p}{Im\partial_{p+1}}.$$

Definição 3.1.3. *Seja* $\mathcal{X}$ *um complexo simplicial. O* **grupo das** p**-cocadeias de** $\mathcal{X}$ *com coeficientes em* $\mathbb{Z}_2$ *é o grupo*

$$C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := \{f : C_p(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2; f \text{ é homomorfismo }\}.$$

Note que, como estamos trabalhando em $\mathbb{Z}_2$, $f(-\sigma) = -f(\sigma) = f(\sigma), \forall \sigma \in C_p(\mathcal{X})$.

Considere o homomorfismo $\delta^p : C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ *tal que* $\delta^p(f) := f \circ \partial_{p+1}$. *Este homomorfismo é denominado* **operador cobordo**.

Observação 3.1.4. *Pode-se verificar que* $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$.

Assim, $\{C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \delta^p\}_p$ é um complexo de cocadeias e os **grupos de cohomologia** com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ são definidos por

$$H^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := \frac{Ker\delta^p}{Im\delta^{p-1}}.$$

Definição 3.1.4. *Seja* $\mathcal{X}$ *um complexo simplicial. Considere o grupo*

$C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := \{f \in C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2); f$ *se anula sobre todos, exceto um número finito de simplexos orientados de* $\mathcal{X}\}$.



$C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ *é dito* **grupo das cocadeias com suporte compacto** *(ou* **finito***).*

Lema 3.1.1. *Se $\mathcal{X}$ é um complexo simplicial localmente finito, então δ^p aplica $C_c^p(\mathcal{X},\mathbb{Z}_2)$ em $C_c^{p+1}(\mathcal{X},\mathbb{Z}_2)$.*

Demonstração: Seja $f \in C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$, ou seja, $f : C_p(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é um homomorfismo tal que f se anula sobre todos, exceto um número finito de p-simplexos orientados de $\mathcal{X}$, sejam eles: $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_r^p$. Agora, como $\mathcal{X}$ é localmente finito, cada σ_i^p é face de um número finito de $(p+1)$-simplexos (pois se σ_i^p fosse face de um número infinito de $(p+1)$-simplexos, então os vértices de σ_i^p pertenceriam a um número infinito de simplexos, o que implicaria em $\mathcal{X}$ não ser localmente finito).

Para $i = 1, \ldots, r$, consideremos $L_i = \{\sigma_{i_1}^{p+1}, \sigma_{i_2}^{p+1}, \ldots, \sigma_{i_{n_i}}^{p+1}\}$ o conjunto dos $(p+1)$-simplexos de $\mathcal{X}$ que tem σ_i^p como uma face, e seja $L = \bigcup_{i=1}^{r} L_i$.

Para qualquer $(p+1)$-simplexo σ^{p+1} tal que $\sigma^{p+1} \notin L$, temos para f, inicialmente dada que

$$(\delta^p(f))(\sigma^{p+1}) := (f \circ \partial_{p+1})(\sigma^{p+1}) = f\left(\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \widetilde{\sigma}_j^p\right),$$

onde $\widetilde{\sigma}_j^p$ são as faces de σ^{p+1}.

Como $\sigma^{p+1} \notin L$ temos que $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_r^p$ não são as faces de σ^{p+1}. Logo, $f(\widetilde{\sigma}_j^p) = 0, \forall j$.

Portanto, $(\delta^p(f))(\sigma^{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j f(\widetilde{\sigma}_j^p) = 0$.

Logo, $(\delta^p(f))$ se anula, exceto para um número finito de $p+1$-simplexos orientados (pois tais simplexos deverão estar em L que é finito).

Assim, $\delta^p(f) \in C_c^{p+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

■

Dessa maneira, obtemos um complexo de cocadeias $\{C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \delta^p\}_p$ onde estamos denotando também por δ^p a aplicação restrição.

Visto que $\{C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \delta^p\}_p$ é subcomplexo de $\{C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \delta^p\}_p$ podemos formar o complexo quociente $\{C_e^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \widetilde{\delta^p}\}_p$, onde

$$C_e^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := \frac{C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)}{C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)}$$

e

$$\widetilde{\delta} \text{ é tal que } \widetilde{\delta}(\sigma + C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)) := \delta^p(\sigma) + C_c^{p+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2).$$

unesp

Vamos denotar por $H_c^*(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ e $H_e^*(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ os grupos de cohomologia dos complexos $C_c^*(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ e $C_e^*(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ respectivamente.

Lema 3.1.2. *Se $\mathcal{X}$ é um complexo simplicial localmente finito, então*

$$H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = \frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2))}{C_c(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)},$$

onde δ^0, $C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ e $C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ foram definidos anteriormente.

Demonstração: Consideremos o seguinte complexo

$$0 \xrightarrow{\widetilde{\delta}^{-1}} \frac{C^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)}{C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)} \xrightarrow{\widetilde{\delta}^0} \frac{C^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)}{C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)} \xrightarrow{\widetilde{\delta}^1} \cdots$$

Dessa maneira,

$$H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := \frac{Ker\widetilde{\delta}^0}{Im\widetilde{\delta}^{-1}} = Ker\widetilde{\delta}^0 =$$

$$= \{\overline{u} = u + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)\};\ \widetilde{\delta}^0(\overline{u}) = 0 + C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \text{ onde } u \in C^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)\} =$$

$$= \{u + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2);\ \delta^0(u) \in C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)\} =$$

$$= \{u + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2); u \in (\delta^0)^{-1}(C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2))\} = \frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2))}{C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)},$$

como queríamos.

■

Observação 3.1.5. *Como estamos considerando os complexos de cocadeia com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, segue que $H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$.*

Com os resultados anteriores temos o seguinte Teorema:

Teorema 3.1.1. *Se $\mathcal{X}$ é um complexo simplicial localmente finito, então*

$$e(\mathcal{X}) = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração: Inicialmente provemos a seguinte

Afirmação: Se $n \in \mathbb{N}^*$ é tal que $dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \geq n$ então existe um subcomplexo finito K de $\mathcal{X}$ tal que $n(K) \geq n$.

De fato, se $n \leq dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$, existem pelo menos n 0-cocadeias

$$c_1 + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \ldots, c_n + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2),\ c_i \in C^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2),$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

que são elementos linearmente independentes de $H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

Mas como $c_i + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \in H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ temos pelo Lema 3.1.2 que $\delta^0(c_i) \in C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$, $\forall i = 1, \ldots, n$, ou seja, $\forall i = 1, \ldots, n$, $(\delta^0 c_i)$ é um homomorfismo diferente do nulo apenas num número finito de 1-simplexos em $\mathcal{X}$.

Assim, podemos escolher um subcomplexo finito K de $\mathcal{X}$ contendo todos os 1-simplexos σ tais que $(\delta^0 c_i)(\sigma) \neq 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ com $\mathcal{X} - K$ tendo somente componentes infinitas.

Conseqüentemente, para toda componente conexa $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X} - K$, cada c_i assume um valor constante $c_i(\mathcal{A})$ sobre os vértices de $\mathcal{A}$, poi notemos que para cada 1-simplexo $\sigma^1 = \langle v_0, v_1 \rangle$ de $\mathcal{A}$, c_i toma o mesmo valor em ambos os vértices de σ^1 pois, se $\sigma^1 \in \mathcal{A}$ então $\sigma^1 \notin K$, ou seja, $(\delta^0 c_i)(\sigma^1) = 0$. Assim,

$$(\delta^0 c_i)(\sigma^1) = 0 \Longleftrightarrow (c_i \circ \partial_1)(\sigma^1) = 0 \Longleftrightarrow c_i(v_1 - v_0) = 0.$$

Logo, $c_i(v_1) = c_i(v_0)$.

Agora, dados v e w vértices em $\mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ é uma componente conexa, existe um caminho de arestas $\sigma_1^1, \ldots, \sigma_s^1$ ligando v a w. Sejam v e v_1 vértices de σ_1^1, v_1 e v_2 vértices de $\sigma_2^1, \ldots, v_{s-1}$ e w vértices de σ_s^1. Então,

$$c_i(v) = c_i(v_1) = \ldots = c_i(v_{s-1}) = c_i(w),$$

ou seja, $c_i(v) = c_i(w) = c_i(\mathcal{A})$, um valor constante.

Suponhamos por absurdo que $n(K) < n$, ou seja, que existam exatamente $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r$ componentes infinitas de $\mathcal{X} - K$ com $r < n$. Para cada $\mathcal{A}_j$ escolhamos um vértice $v_j \in \mathcal{A}_j$ e consideremos a matriz:

$$\begin{bmatrix} c_1(v_1) & c_1(v_2) & \ldots & c_1(v_r) \\ c_2(v_1) & c_2(v_2) & \ldots & c_2(v_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n(v_1) & c_n(v_2) & \ldots & c_n(v_r) \end{bmatrix}_{n \times r}$$

Como $r < n$, $posto(M) \leq r$, ou seja os n-vetores linhas

$$(c_1(v_1), c_1(v_2), \ldots, c_1(v_r)), \ldots, (c_n(v_1), c_n(v_2), \ldots, c_n(v_r)),$$

formam um conjunto linearmente dependente. Portanto, existem escalares não todos nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$\lambda_1(c_1(v_1), c_1(v_2), \ldots, c_1(v_r)) + \ldots + \lambda_n(c_n(v_1), c_n(v_2), \ldots, c_n(v_r)) = 0,$$

o que implica que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i(v_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, r$. Ou ainda, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i(\mathcal{A}_j) = 0$, uma vez que c_i é constante igual a $c_i(\mathcal{A}_j)$ sobre os vértices de $\mathcal{A}_j$ para cada j. Daí temos que

$$d := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \in C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2).$$

De fato, seja v um vértice de $\mathcal{X}$, temos

- Se $v \in \mathcal{A}_j$ para algum j, então $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right)(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i(\mathcal{A}_j) = 0$.
- Se $v \notin \mathcal{A}_j$ para todo j, então $v \in K$ (que é finito).

Logo, $d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$ se anula exceto em um número finito de vértices, e assim, $d \in C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$. Assim, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (c_i + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right) + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = 0 \in H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2),$$

com λ_i' s não todos nulos, gerando um absurdo pois os elementos inicialmente considerados:

$$c_1 + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \ldots, c_n + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2),$$

formam um conjunto linearmente independente de $H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

Assim, necessariamente, $n(K) \geq n$ provando a afirmação.

Agora, usando tal afirmação e o fato que $e(\mathcal{X}) \geq n(K)$, $\forall K$ subcomplexo finito de $\mathcal{X}$, temos que:

- se $dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = m < \infty$, então $e(\mathcal{X}) \geq n(K) \geq m = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$
- se $dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = \infty$, então $e(\mathcal{X}) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ e portanto $e(\mathcal{X}) = \infty = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

Assim, para completar a demonstração da Proposição, resta mostrar que $e(\mathcal{X}) = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ no caso em que $dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = m < \infty$.

Para isso, suponhamos por absurdo que $e(\mathcal{X}) > dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = m$. Então existe um subcomplexo finito K de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} - K$ tem exatamente $L_1, \ldots, L_r$ componentes infinitas, onde $r > m$. Definamos então $c_i \in C^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ por:

$$c_i(v) = \begin{cases} 1, \text{ se } v \in L_i, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Os elementos $c_1 + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \ldots, c_r + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ pertencem a $H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

De fato, se $\sigma^1 = \langle v_0, v_1 \rangle$ é um 1-simplexo de $\mathcal{X} - K$ então

$$(\delta^0 c_i)(\sigma^1) = (c_i \circ \partial_1)(\sigma^1) = c_i(v_1 - v_0) = c_i(v_1) + c_i(v_0) \in \mathbb{Z}_2,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Logo, segue da definição de c_i, que $(\delta^0 c_i)(\sigma^1) \neq 0$ se, e somente se, σ^1 tem um vértice em L_i e outro não. Como os conjuntos L_j são componentes conexas, este outro vértice também não pertence a L_j para $j \neq i$. Assim, necessariamente σ^1 tem um vértece em Li e o outro em K. Suponhamos que o conjunto dos vértices de K seja $\{w_1, \ldots, w_t\}$. Como $\mathcal{X}$ é localmente finito, cada um destes vértices é vértice de no máximo um número finito de 1-simplexos e portanto existe um número finito de 1-simplexos σ^1 nas condições acima, ou seja, $P_i := \{\sigma^1; (\delta^0 c_i)(\sigma^1) \neq 0\}$ é finito, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$.

Portanto, $\delta^0 c_i \in C_c^1(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ ou equivalentemente, pela Lema 3.1.2,

$$c_i + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \in H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, r.$$

Queremos mostrar que tais elementos formam um conjunto linearmente independente de $H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$. Suponhamos por absurdo que existam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ não todos nulos tais que

$$\lambda_1(c_1 + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)) + \ldots + \lambda_r(c_r + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)) = 0 \in H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2),$$

ou seja,

$$d := \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_r c_r \in C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2).$$

Sejam $\lambda_{r_1}, \ldots, \lambda_{r_s}$ os escalares não nulos. Como L_{r_1} é uma componente infinita, ela contém um conjunto infinito de vértices, isto é, existe $\{v_\alpha^{r_1}, \alpha \in I\} \subset L_{r_1}$ onde I é um conjunto infinito. Daí, para todo $\alpha \in I$, visto que

$$c_j(v_\alpha^{r_1}) = \begin{cases} 1, \text{ se } j = r_1, \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

tem-se

$$d(v_\alpha^{r_1}) = \lambda_{r_1} c_{r_1}(v_\alpha^{r_1}) + \ldots + \lambda_{r_s} c_{r_s}(v_\alpha^{r_1}) = \lambda_{r_1} \neq 0.$$



Logo, $d(v_\alpha^{r_1}) \neq 0$, $\forall \alpha \in I$ o que é absurdo pois estamos supondo $d \in C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

Assim, $\{c_1 + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2), \ldots, c_r + C_c^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)\}$ é um conjunto l.i. de $H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ e então $r \leq dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$, o que contradiz a suposição inicial de que $r > m = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$. Logo, $e(\mathcal{X}) \leq m = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

Portanto, temos que $e(\mathcal{X}) = dim H_e^0(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$.

■

Corolário 3.1.1. *$e(\mathcal{X})$ depende somente do 1-esqueleto de $\mathcal{X}$.*

■

3.2 Número de Ends de um CW-complexo

Podemos estender a Definição 3.1.1 considerando espaços um pouco mais gerais, ou seja, se $\mathcal{X}$ é um CW-complexo localmente finito (isto é, para todo ponto $x \in \mathcal{X}$ existe um aberto V em $\mathcal{X}$ tal que $V \cap e \neq \emptyset$ somente para um número finito de células e).

$$e(\mathcal{X}) := \sup \{n(K); K \text{ é subcomplexo finito de } \mathcal{X}\},$$

onde $n(K)$ é o número de componentes conexas infinitas de $\mathcal{X} - K$ (ou seja, tendo infinitas células, ou equivalentemente, cujo fecho é não compacto).

Pela seção anterior temos que o complexo de cadeia (celular) $C(\mathcal{X})$= $\{C_p(\mathcal{X}), \partial_p\}$ é tal que $C_p(\mathcal{X})$ é um grupo abeliano livre com uma base em correspondência 1 a 1 com o conjunto das p-células.

Como no caso simplicial, consideremos:

$C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = Hom(C_p(\mathcal{X}), \mathbb{Z}_2)$: grupo das p-cocadeias (celulares) de $\mathcal{X}$ com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$,

$$\delta^p : C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \text{ tal que } \delta^p(f) = f \circ \partial_{p+1} \quad \text{e}$$

$$C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = \{f \in C^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2); f(\sigma) = 0, \text{ para todo, exceto um } n^o \text{ finito de } p\text{-células } \sigma\}$$

Como $\mathcal{X}$ é localmente finito pode-se mostrar que

$$\delta^p(C_c^p(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)) \subset C_c^{p+1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$$

e de modo análogo ao Lema 3.1.2 e pelo Teorema 3.1.1 obtém-se trabalhando com células ao invés de simplexos, o seguinte resultado:

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Teorema 3.2.1. *Se $\mathcal{X}$ é um CW-complexo localmente finito, então*

$$e(\mathcal{X}) = dim\frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^1(\mathcal{X},\mathbb{Z}_2))}{C_c^0(\mathcal{X},\mathbb{Z}_2)} = dim H_e^0(\mathcal{X},\mathbb{Z}_2).$$

■

Exemplo 3.2.1. *Consideremos $\mathcal{X} = S^1 \times \mathbb{R}$ o cilindro infinito, com a seguinte decomposição celular*

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(e_0^n \cup e_{1_1}^n \cup e_{1_2}^n \cup e_2^n\right),$$

onde $e_0^n = \{(1,0,n); n \in \mathbb{Z}\}$ são as 0-células,

$e_{1_0}^n = \{(x,y,z) \in \mathcal{X}; x^2+y^2 = 1; x \leq 0$, $e_{1_1}^n = \{(x,y,z) \in \mathcal{X}; x^2+y^2 = 1; x \geq 0$ *e* $z = n; n \in \mathbb{Z}\}$ *e* $e_{1_2}^n = \{(1,0,z); n \leq z \leq n+1; \in \mathbb{Z}\}$ *as 1-células, e*

$e_2^n = S^1 \times [n, n+1]; n \in \mathbb{Z}$ *as 2-células.*

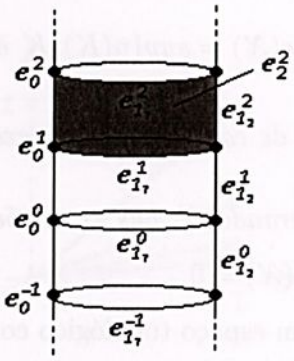


Figura 3.2: Decomposição celular do cilindro infinito

Para qualquer subcomplexo finito K de $\mathcal{X}$ temos no máximo 2 componentes conexas infinitas em $\mathcal{X} - K$ e, portanto, $e(\mathcal{X}) = 2$.

3.3 Número de Ends de um Espaço Topológico

Nesta seção veremos a definição de número de ends para espaços mais gerais que os considerados nas seções anteriores.

Necessitamos do seguinte resultado:

Lema 3.3.1. *Se $\mathcal{X}$ é um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto, conexo e localmente conexo e $U \subset \mathcal{X}$ um subconjunto aberto de $\mathcal{X}$ tal que $\overline{U}$ é compacto, então $\mathcal{X} - U$ tem um número finito de componentes conexas.*

Demonstração: Ver [12].

■

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto, conexo e localmente conexo. Considerando U um aberto de $\mathcal{X}$, definimos o* **número de ends de $\mathcal{X}$**, *denotado por $e(\mathcal{X})$, como:*

$$e(\mathcal{X}) = sup\{n(U); \overline{U} \text{ é compacto}\},$$

onde $n(U)$ denota o número de componentes conexas não compactas de $\mathcal{X} - U$.

Observação 3.3.1. *Alguns autores definem o número de ends de $\mathcal{X}$ como:*

$$e(\mathcal{X}) = sup\{n(K); K \text{ é compacto}\},$$

onde $n(K)$ denota o número de componentes conexas de $\mathcal{X} - K$ cujo fecho é não compacto.

Proposição 3.3.1. *Considerando $\mathcal{X}$ nas condições da definição anterior temos que $\mathcal{X}$ é compacto se, e somente se, $e(\mathcal{X}) = 0$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico compacto e $U \subset \mathcal{X}$ um subconjunto aberto de $\mathcal{X}$ tal que $\overline{U}$ é compacto. Notemos que como U é aberto temos que $\mathcal{X} - U$ é fechado. Assim, temos

$$\mathcal{X} - U \subset \mathcal{X}, \text{ onde } \mathcal{X} - U \text{ é fechado e } \mathcal{X} \text{ é compacto,}$$

ou seja, $\mathcal{X} - U$ é compacto.

Assim, considerando $\mathcal{C}$ uma componente conexa de $\mathcal{X} - U$ temos que $\mathcal{C}$ é fechada, mas como $\mathcal{C} \subset \mathcal{X} - U$ que é compacto, concluímos que $\mathcal{C}$ é compacto. Logo, não existem componentes conexas não compactas em $\mathcal{X} - U$, ou seja, $n(U) = 0$ e portanto $e(\mathcal{X}) = 0$.

Reciprocamente, considerando $e(\mathcal{X}) = 0$, seja U um aberto de $\mathcal{X}$ tal que $\overline{U}$ é compacto.

Como $e(\mathcal{X}) = 0$, temos que $n(U) = 0$, ou seja, todas as componentes conexas de $\mathcal{X} - U$ são compactas.

Dessa maneira, pelo Lema anterior temos

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$\mathcal{X} - U = \bigcup_{i=1}^{n} C_i; \quad C_i\text{: componente compacta.}$$

Logo, $\mathcal{X} - U$ é compacto.

Portanto, $\mathcal{X} = (\mathcal{X} - U) \cup U = (\mathcal{X} - U) \cup \overline{U}$, onde $\mathcal{X} - U$ e $\overline{U}$ são compactos, ou seja, $\mathcal{X}$ é compacto.

■

Observação 3.3.2. *Alguns autores trabalham com conjuntos de ends de um espaço topológico $\mathcal{X}$ e não com o número de ends de $\mathcal{X}$ (ver [30] ou [12]). Neste caso, não há a exigência de $\mathcal{X}$ ser localmente compacto.*

No entanto, em nosso contexto se $\mathcal{X}$ não fosse localmente compacto, a recíproca da proposição anterior não seria válida, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $X_n = \{t(1, 1/n); t \in [0, 1]\}$ e considere $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$. Com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$ temos que $e(\mathcal{X}) = 0$, e no entanto, $\mathcal{X}$ não é compacto. (Observe que $\mathcal{X}$ não é localmente compacto).

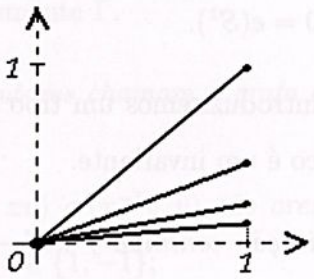


Figura 3.3: $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$, onde $X_n = \{t(1, 1/n); t \in [0, 1]\}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

O próximo resultado mostra que o end de um espaço topológico é invariante por homeomorfismos.

Teorema 3.3.1. *O número de ends de um espaço topológico é um invariante topológico, ou seja, se $\mathcal{X}$ é homeomorfo a $\mathcal{Y}$ então $e(\mathcal{X}) = e(\mathcal{Y})$.*

Demonstração: Consideremos $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ um homeomorfismo, ou seja φ é contínua, bijetora, com inversa φ^{-1} contínua. Assim, considerando K um compacto em $\mathcal{X}$, como φ é contínua temos que $\varphi(K)$ é compacto em $\mathcal{Y}$.

Dessa maneira, a restrição $\varphi' : \mathcal{X} - K \longrightarrow \mathcal{Y} - \varphi(K)$ é um homeomorfismo, ou seja $n(K) = n(\varphi(K))$. Portanto, $e(\mathcal{X}) = e(\mathcal{Y})$.

■

Observação 3.3.3. *Apesar do número de ends de um espaço topológico $\mathcal{X}$ ser um invariante topológico como nos garante o Teorema* 3.3.1*, o mesmo não acontece para homotopia, ou seja, $e(\mathcal{X})$ não é um invariante homotópico.*

De fato, se considerarmos $\mathcal{X}=\{(x,y,z); x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$ o cilindro infinito e $\mathcal{Y}=S^1$, temos que $\mathcal{X}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathcal{Y}$, ou seja, $\mathcal{X}\equiv\mathcal{Y}$.

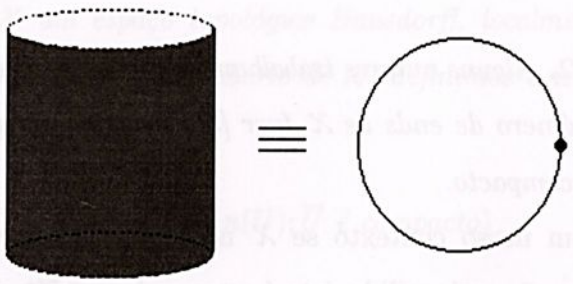


Figura 3.4: Cilindro e S^1.

No entanto, $e(\mathcal{X})=2\neq 0=e(S^1)$.

Finalizando esta seção, introduziremos um tipo de homotopia sobre a qual o número de ends de um espaço topológico é um invariante.

Definição 3.3.2. *Uma aplicação contínua $f:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ é* **própria** *se para todo compacto $K\subset\mathcal{Y}$ tem-se $f^{-1}(K)$ é compacto, ou seja, imagem inversa de compacto é compacto.*

Definição 3.3.3. *Duas aplicações próprias $f,g:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ são ditas* **propriamente homotópicas** *se existir $F:\mathcal{X}\times I\longrightarrow\mathcal{Y}$ aplicação própria (chamada* **homotopia própria***) tal que para todo $x\in\mathcal{X}$ tem-se*

$$F(x,0)=f(x) \quad e \quad F(x,1)=g(x).$$

Notação: $f\sim_p g$.

Definição 3.3.4. *Dois espaços $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ têm o mesmo tipo de homotopia própria se existirem aplicações próprias $f:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ e $g:\mathcal{Y}\longrightarrow\mathcal{X}$ tais que $f\circ g\sim_p id_{\mathcal{Y}}$ e $g\circ f\sim_p id_{\mathcal{X}}$.*

Notação: $\mathcal{X}\equiv_p\mathcal{Y}$.

Dessa maneira, com as definições dadas anteriormente temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.2. *Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ têm o mesmo tipo de homotopia própria, então eles têm o mesmo número de ends, ou seja, $e(\mathcal{X}) = e(\mathcal{Y})$.*

Demonstração: Lema 1 [23].

■

3.4 Uma Relação entre Ends de Grupos e Ends de Espaços

Iniciamos a seção apresentando um conceito a ser utilizado no primeiro resultado envolvendo ends de grupos e espaços.

Definição 3.4.1. *Sejam G um grupo e U um conjunto de geradores de G. O* **grafo de** *G (associado a U) é um grafo (ou seja, um CW-complexo 1-dimensional) com conjunto de vértices G e 1-células (arestas) orientadas (v, xv) ligando v a xv uma para cada $v \in G$ e $x \in U$.*

Notação: $\Gamma(G, U)$, Γ_U ou simplesmente Γ.

Observação 3.4.1. *(a) Alguns autores chamam o grafo de G (com relação a U) de* **Grafo** *(ou* **diagrama***)* **de Cayley de** *G.*

(b) Para todo $v \in G$ e $x \in U$, (v, xv) e $(x^{-1}v, v)$ são arestas (orientadas) de Γ_U. Assim, v está conectado com $x^{\epsilon}v, \forall x \in U$ e $\epsilon \in \{1, -1\}$;

(c) Se $x^2 = 1$, com $x \in U$, então não identificamos as arestas (v, xv) e (xv, v);

(d) A multiplicação à direita pelos elementos de G define uma ação de G sobre Γ_U que preserva orientação. Além disso, G atua livremente sobre os vértices e arestas.

Proposição 3.4.1. *Dados um grupo G e U um conjunto de geradores de G tem-se:*

(i) Γ_U é conexo por caminhos;

(ii) Γ_U é regular, ou seja, não contém laço (aresta com mesmo vértice inicial e final) se, e somente se, $1 \notin U$;

(iii) Γ_U é um complexo simplicial se, e somente se, $U \cap U^{-1} = \emptyset$;

(iv) Γ_U é localmente finito se, e somente se, U é finito.

Demonstração:

(i) Seja $v \in G$. Como G é gerado por U, $v = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, onde $x_i \in U$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Agora por (i) da observação 3.4.1, o elemento neutro 1 de G está conectado

com $x_n^{\varepsilon_n}$, o elemento $x_n^{\varepsilon_n}$ está conectado com $x_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} x_n^{\varepsilon_n}$, e assim sucessivamente, o elemento $x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ está conectado com $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} = v$.

Assim, todo elemento $v \in G$ está conectado com 1. Portanto, Γ_U é conexo por caminhos.

(ii) Notemos que existe um laço quando dado $v \in G; v = xv; x \in U$. Assim, temos

$$xv = v \iff x = 1,$$

ou seja, Γ_U não contém laço $\iff 1 \notin U$

(iii) Consideremos Γ_U um complexo simplicial tal que $U \cap U^{-1} \neq \emptyset$, ou seja, existe $y \in U \cap U^{-1}$, logo, $y \in U$ e $y \in U^{-1} \Longrightarrow y \in U$ e $y = x^{-1}$ para algum $x \in U$.

Dessa maneira, $\exists x \in U$ tal que $x^{-1} \in U$, ou seja, $x, x^{-1} \in U$ (contrariando o fato de Γ_U ser complexo simplicial). Portanto, $U \cap U^{-1} = \emptyset$.

Reciprocamente, considerando $U \cap U^{-1} = \emptyset$ suponhamos que Γ_U não seja um complexo simplicial, ou seja, para $v \in G, x \in U$ tomemos $(v, xv) \in \Gamma_U$ tal que $(xv, v) \in \Gamma_U$. Assim, como $(xv, v) \in \Gamma_U$ temos que existe $g \in U$ tal que $gxv = v$. Logo,

$$gxv = v \Longrightarrow gx = 1 \Longrightarrow g = x^{-1} \Longrightarrow x^{-1} \in U \Longrightarrow x \in U^{-1}$$

Portanto, $x \in U \cap U^{-1}$. (contrariando o fato de $U \cap U^{-1} = \emptyset$).

Logo, $\forall (v, xv) \in \Gamma_U; (xv, v) \notin \Gamma_U$, ou seja, Γ_U é um complexo simplicial.

(iv) Observemos que como Γ_U é um CW-complexo 1-dimensional, dizer que Γ_U é localmente finito (ou seja, todo ponto é ponto interior de um subcomplexo finito) equivale a dizer que para cada vértice v de Γ_U existe apenas um número finito de arestas que tem v como vértice. Assim, dado um vértice v de Γ_U, temos que qualquer vizinhança V de v intercepta todas as arestas que tem v como vértice e assim, se um subcomplexo contém uma tal vizinhança então tem que conter todas tais arestas e portanto existe um número finito de arestas que tem v como vértice. Reciprocamente, dado $v \in V$, $(x^{-1}v, v)$, (v, xv) são arestas que tem v como vértice. Assim segue claramente que v é vértice de um número finito de arestas se, e somente se, U é finito, pois dados $x_1, x_2 \in U$ temos que $x_1 \neq x_2 \iff$ as arestas $(v, x_1 v)$ e $(v, x_2 v)$ são distintas.

■

Observação 3.4.2. *Nosso interesse é no caso em que G é finitamente gerado e U é um conjunto finito de geradores de G. Note que podemos sempre supor que $1 \notin U$ e assim tomar Γ_U regular (ou seja, sem laço).*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Teorema 3.4.1. *Se G é um grupo finitamente gerado, com um conjunto finito U de geradores, então $e(G) = e(\Gamma_U)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que os $\mathbb{Z}_2$-espaços vetoriais $H^0(G, PG/FG)$ e $H^0_e(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$ são isomorfos, mais precisamente, que $\dfrac{QG}{FG}$ e $\dfrac{(\delta^0)^{-1}(C^1_c(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))}{C^0_c(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)}$ são isomorfos, onde $\delta^0 : C^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação de cocadeias anteriormente definida.

Inicialmente, mostremos que:

$$\varphi : PG \longrightarrow C^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2) = Hom(C^0(\Gamma_U), \mathbb{Z}_2)$$

$$A \longmapsto c_A \text{ onde } c_A(v) = \begin{cases} 1, \text{ se } v \in A \\ 0, \text{ se } v \notin A \end{cases}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

De fato, temos que

(i) φ está bem definida, pois $C^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$ e $C_0(\Gamma_U)$ é gerado pelos vértices de Γ_U que são exatamente os elementos de G. Assim, para definir φ num elemento de $C^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$ é suficiente definir nos elementos de G e estender linearmente.

(ii) φ é homomorfismo de grupos, pois

$$(c_A + c_B)(v) = c_A(v) + c_B(v) = 1 \iff \begin{cases} c_A(v) = 1, \text{ e } c_B(v) = 0 \\ \text{ou} \\ c_A(v) = 0, \text{ e } c_B(v) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v \in A \text{ e } v \notin B \\ \text{ou} \\ v \notin A \text{ e } v \in B \end{cases} \iff \begin{cases} v \in A \cap B^C \\ \text{ou} \\ v \in A^C \cap B \end{cases} \iff v \in (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \iff v \in A + B.$$

Assim, temos que

$$(c_A + c_B)(v) = \begin{cases} 1, \text{ se } v \in A + B \\ 0, \text{ se } v \notin A + B \end{cases}$$

ou seja, $c_A + c_B = c_{A+B}$.

Também temos que $c_{\lambda_A} = \lambda c_A$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{Z}_2$

Portanto, φ é homomorfismo de grupos.

(iii) φ é injetora, pois se A, B são elementos de PG tais que $A \neq B$ então existe $v \in A$ tal que $v \notin B$ (ou $v \notin A$ e $v \in B$). Logo, $c_A(v) \neq c_B(v)$ e portanto $c_A \neq c_B$.

(iv) φ é sobrejetora, pois dado $c \in C^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$, seja $A = \{v \in G; c(v) = 1\}$. Então claramente $c = c_A$ e portanto φ é sobrejetora.



Dessa maneira de (i) a (iv) temos que φ é isomorfismo.

Agora, notemos que φ satisfaz as duas condições seguintes:

(1) $\varphi(FG) = C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$.

(2) $\varphi(QG) = (\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))$.

De fato:

(1) $\varphi^{-1}(C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)) = \{A \in PG; c_A \in C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)\} = \{A \in PG; c_A(v) \neq 0$ para um número finito de vértices $v\} = \{A \in PG; A$ é finito$\}$ (pois $c_A(v) \neq 0 \iff v \in A) = FG$.

Logo, como φ é injetora, $\varphi(FG) = C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$.

(2) Primeiramente, observemos que se $e = (v, xv)$ é uma aresta de Γ_U, onde $x \in U$, $v \in G$ e $A \in PG$, então: $(\delta^0 c_A)(e) \neq 0 \iff v \in A + x^{-1}A$. Com efeito:

$$(\delta^0 c_A)(e) = c_A(\partial_1(e)) = c_A(xv - v) = c_A(xv) + c_A(v).$$

Assim, temos:

$$(\delta^0 c_A)(e) \neq 0 \iff \begin{cases} c_A(xv) = 1, \text{ e } c_A(v) = 0 \\ \text{ou} \\ c_A(xv) = 0, \text{ e } c_A(v) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} xv \in A \text{ e } v \notin A \\ \text{ou} \\ xv \notin A \text{ e } v \in A \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v \in x^{-1}A \text{ e } v \notin A \\ \text{ou} \\ v \notin x^{-1}A \text{ e } v \in A \end{cases} \iff \begin{cases} v \in x^{-1}A \cap A^C \\ \text{ou} \\ v \in (x^{-1}A)^C \cap A \end{cases} \iff$$

$\iff v \in (x^{-1}A \cap A^C) \cup ((x^{-1}A)^C \cap A) \iff v \in x^{-1}A + A = A + x^{-1}A$.

Vejamos agora que: $A \in QG \iff c_A \in (\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))$.

($\Longrightarrow$) Como $A \in QG$ temos que para qualquer $g \in G$, $A + gA$ é finito, em particular $A + x^{-1}A$ é finito, para qualquer $x \in U$, portanto para cada $x \in U$ fixado, existe somente um número finito de arestas $e = (v, xv)$, $v \in A + x^{-1}A$ tal que $(\delta^0 c_A)(e) \neq 0$. Como U é finito, segue que o conjunto de arestas: $\{e; (\delta^0 c_A)(e) \neq 0\} = \{(v, xv); x \in U, v \in A + x^{-1}A\}$ é finito.

Portanto $\delta^0 c_A \in C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)$, ou seja, $c_A \in (\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))$.

($\Longleftarrow$) Seja $c_A \in (\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))$.

Note que neste caso $A + x^{-1}A \in FG$, $\forall x \in U$, pois se existisse $x_0 \in U$ tal que $A + x_0^{-1}A \notin FG$ então $A + x_0^{-1}A$ seria infinito, daí, existiriam infinitas arestas $e = (v, x_0 v)$, $v \in A + x_0^{-1}A$ tais que $(\delta^0 c_A)(e) \neq 0$, o que contradiz a hipótese.



Provemos agora que $A + gA \in FG$, $\forall g \in G$.

$$A + x^{-1}A \in FG, \forall x \in U \Longrightarrow x(A + x^{-1}A) \in FG, \forall x \in U.$$

Mas, $x(A + x^{-1}A) = xA + xx^{-1}A = xA + A = A + xA$.

Portanto também $A + xA \in FG$, $\forall x \in U$.

Como $g \in G$, temos que $g = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k}$ onde $x_i \in U$ e $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Assim:

(i) $A + x_k^{\varepsilon_k}A \in FG \Longrightarrow x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}(A + x_k^{\varepsilon_k}A) \in FG \Longrightarrow x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}A \in FG$.

(ii) $(A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}A \in FG)$ e $(x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}A \in FG) \Rightarrow A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}A \in FG \Longrightarrow A + x_{k-1}^{\varepsilon_{k-1}}x_k^{\varepsilon_k}A \in FG$.

Aplicando indutivamente este processo obremos que $A + x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}A \in FG$.

Portanto, $A + gA \in FG, \forall g \in G$. Logo, $A \in QG$.

Finalmente, para concluirmos a demonstração da proposição basta observarmos que o isomorfismo φ induz por (1) e (2) uma aplicação bem definida $\overline{\varphi}$:

$$\overline{\varphi} : \frac{QG}{FG} \longrightarrow \frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))}{C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)}, \text{ tal que } A + FG \longmapsto c_A + C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2),$$

e que tal aplicação é isomorfismo de espaços vetoriais.

Logo,

$$e(\Gamma_U) = dim H_e^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2) = dim \frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2))}{C_c^0(\Gamma_U, \mathbb{Z}_2)} = dim \frac{QG}{FG} = e(G).$$

■

Observação 3.4.3. (a) *O Teorema anterior é óbvio no caso em que G é finito, pois se G é finito e U é um conjunto de geradores de G, então Γ_U é finito, e portanto $e(\Gamma_U) = 0 = e(G)$.*
(b) *Segue do Teorema que $e(\Gamma_U)$ independe do conjunto finito U de geradores de G.*

Exemplo 3.4.1. (a) *Seja $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ o grupo cíclico infinito e considere $U = \{a\}$.*
Γ_U é homeomorfo a $\mathbb{R}$:

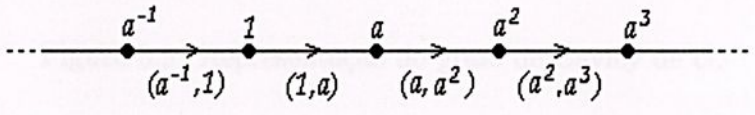


Figura 3.5: A reta real é homeomorfa ao grafo Γ_U.

Portanto, pelo Teorema 3.4.1 temos $e(G) = e(\Gamma_U) = e(\mathbb{R}) = 2$.

(*b*) $G = \langle a; a^2 = 1 \rangle$ *o grupo cíclico de ordem* 2 *e* $U = \{a\}$.

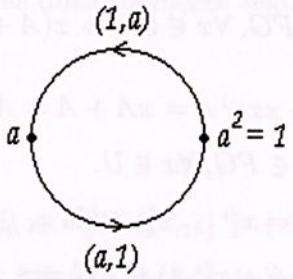


Figura 3.6: Γ_U é homeomorfo a S^1.

e temos $e(G) = e(\Gamma_U) = e(S^1) = 0$.

(*c*) $G = \langle a, b; ab = ba \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *e* $U = \{a, b\}$.

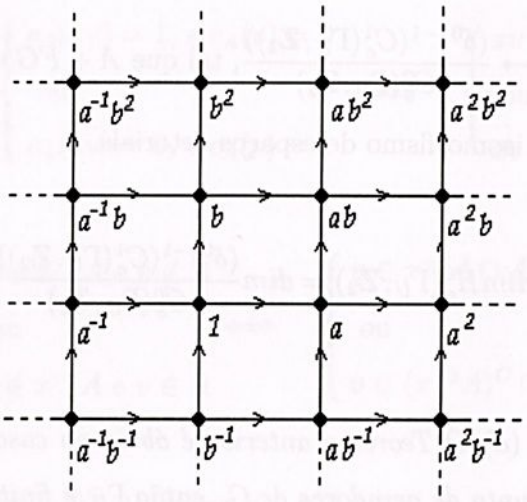


Figura 3.7: Representação de Γ_U.

Temos $e(\Gamma_U) = 1$ *e portanto* $e(G) = 1$.

(d) $G = \langle a, b; a^2 = b^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ *e* $U = \{a, b\}$.

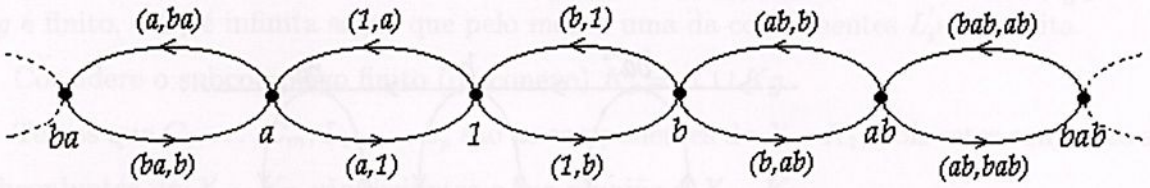


Figura 3.8: Representação de Γ_U.

Temos que $e(\Gamma_U) = 2$ *e portanto* $e(G) = 2$.

(e) $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ *e* $U = \{a, b\}$.

O grafo de Cayley de G *é dado por* Γ_U :

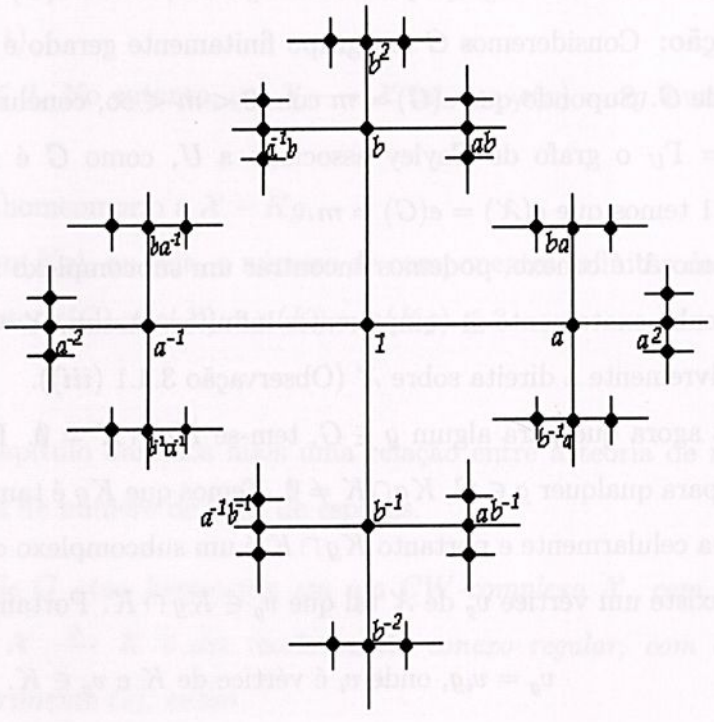


Figura 3.9: Representação do grafo de Cayley de G.

$e(\Gamma_U) = \infty$ *pois para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *é possível tomar* K *(subcomplexo finito) tal que* $\mathcal{X} - K$ *tem* $m \geq n$ *componentes infinitas. Logo,* $e(G) = \infty$.

(f) $G = \langle a, b; ab = ba, b^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ *e* $U = \{a, b\}$.

Γ_U :

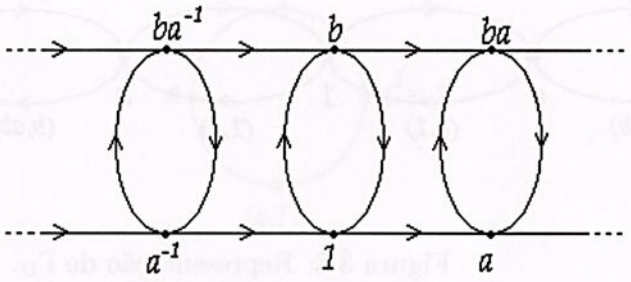


Figura 3.10: Representação do grafo.

Temos que $e(\Gamma_U) = 2$ *e portanto* $e(G) = 2$.

Teorema 3.4.2. *Se* G *é um grupo finitamente gerado, então* $e(G) = 0, 1, 2,$ *ou* ∞.

Demonstração: Consideremos G um grupo finitamente gerado e U um conjunto finito de n geradores de G. Supondo que $e(G) = m$ com $0 < m < \infty$, concluimos que G é infinito.

Seja $\mathcal{X} = \Gamma_U$ o grafo de Cayley associado a U, como G é finitamente gerado, pelo Teorema 3.4.1 temos que $e(\mathcal{X}) = e(G) = m$.

Agora, como $\mathcal{X}$ é conexo, podemos encontrar um subcomplexo finito conexo K de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} - K$ tenha exatamente m componentes infinitas. Assim, $\mathcal{X} = C_1 \cup \ldots \cup C_m$. Sabemos que G atua livremente à direita sobre $\mathcal{X}$ (Observação 3.4.1 (iii)).

Provemos agora que para algum $g \in G$, tem-se $Kg \cap K = \emptyset$. De fato, suponhamos por absurdo que para qualquer $g \in G$, $Kg \cap K \neq \emptyset$. Temos que Kg é também um subcomplexo de $\mathcal{X}$ pois G atua celularmente e portanto $Kg \cap K$ é um subcomplexo de $\mathcal{X}$. Assim $Kg \cap K \neq \emptyset$ implica que existe um vértice v_g de $\mathcal{X}$ tal que $v_g \in Kg \cap K$. Portanto,

$$v_g = v_i g, \text{ onde } v_i \text{ é vértice de } K \text{ e } v_g \in K.$$

Como os vértices de $\mathcal{X}$ são elementos de G, tem-se que $v_i g = v_g$ implica em $g = v_i^{-1} v_g$.

Logo, $G \subset (K^{(0)})^{-1} \cdot (K^{(0)})$, onde $K^{(0)}$ denota o conjunto de vértices de K. Mas, como K é finito, temos que $K^{(0)}$ é finito, logo, a inclusão acima implica em G ser finito, o que contradiz a suposição inicial.

Portanto, para algum $g \in G$ temos $Kg \cap K = \emptyset$ e assim $Kg \subset \mathcal{X} - K$.

Como Kg é conexo, Kg está contido em uma das componentes C_i's, digamos $Kg \subset C_1$.

Sejam $L_1, \ldots, L_p$ todas as componentes de $C_1 - Kg$ (finitas ou não) e ainda notemos que

$$C_1 = Kg \cup L_1 \cup \ldots \cup L_p,$$

Kg é finito, e C_1 é infinita segue que pelo menos uma da componentes L_i's é infinita.

Considere o subcomplexo finito (desconexo) $K_1 = K \cup Kg$.

Temos que $C_2, \ldots, C_m, L_1, \ldots, L_p$ são as componentes de $\mathcal{X} - K_1$, pois estes conjuntos são subconjuntos de $\mathcal{X} - K_1$, são disjuntos e sua reunião é $\mathcal{X} - K_1$.

Assim, visto que $C_2, \ldots, C_m$ são infinitas e $e(\mathcal{X}) = m$, segue que $n(K_1) \leq m$ e portanto no máximo uma das componentes L_i's é infinita. Suponhamos que L_1 seja tal componente. Assim, temos

$$\mathcal{X} - Kg = (K \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m) \cup L_1 \cup \ldots \cup L_p,$$

onde $C = K \cup C_2 \cup \ldots \cup C_m$ é conexa.

Logo, $\mathcal{X} - Kg$ tem no máximo duas componente conexas infinitas: L_1 e C (note que C é finita quando $m = 1$).

Assim, $n(Kg) \leq 2$. No entanto, $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\varphi(x) = xg$ é um homeomorfismo e $\varphi(K) = Kg$.

Logo, $\mathcal{X} - K$ é homeomorfo a $\mathcal{X} - Kg$.

Assim, $n(K) = n(Kg)$, ou seja, o número de componentes infinitas de $\mathcal{X} - K$ é o mesmo de $\mathcal{X} - Kg$. Portanto, $e(G) = e(\mathcal{X}) = n(K) = n(Kg) \leq 2$.

■

Finalizando o capítulo daremos mais uma relação entre a teoria de número de ends de grupos com a teoria de número de ends de espaços.

Teorema 3.4.3. *Se G atua livremente em um CW-complexo $\mathcal{X}$, com quociente finito K (equivalentemente, $\mathcal{X} \xrightarrow{p} K$ é um recobrimento conexo regular, com o grupo das transformações de recobrimento G), então*

$$e(\mathcal{X}) = e(G).$$

Demonstração: Ver Teorema 5.4 [29].

■

Exemplo 3.4.2. *Consideremos $G = \mathbb{Z}^n$ e $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ com a G-ação dada por*

$$g \cdot x = (x_1 + k_1, \ldots, x_n + k_n),$$

onde $g = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in G = \mathbb{Z}^n$ *e* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$

Temos que $\mathbb{Z}^n$ *atua livremente em* $\mathbb{R}^n$, *e, por [21], temos que a projeção quociente* $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *é recobrimento regular com grupo de transformação de recobrimento* $\mathbb{Z}^n$.

Portanto, pelo Teorema 3.4.3 temos

$$e(\mathbb{Z}^n) = e(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 2, \text{ se } n = 1, \\ 1, \text{ se } n > 1. \end{cases}$$

Capítulo 4

Ends de Pares de Grupos

O conceito de número de ends, $e(G,S)$, de um par grupo, ou seja, um par (G,S), onde G é um grupo e S é um subgrupo de G é uma generalização do número de ends, $e(G)$, de um grupo G.

A definição de $e(G,S)$ é devida a Houghton em [14] e Scott [28].

4.1 Definições e Propriedades Básicas

Nesta seção introduziremos a definição e alguns resultados sobre ends de Pares de Grupos.

Sejam (G,S) um par grupo, considere o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $P(G/S) = \{A; A \subset G/S\}$ e $\mathbb{Z}_2(G/S)$ o $\mathbb{Z}_2$-módulo livre gerado pelas classes gS; $g \in G$.

Consideremos ainda os seguintes subespaços de $P(G/S)$:
$F(G/S) = \{A \in P(G/S); A$ *é finito* $\}$ *e* $Q(G/S) = \{A \in P(G/S); g \cdot A + A \in F(G/S), \forall g \in G\}$.

Dessa maneira $\dfrac{P(G/S)}{F(G/S)}$ é um $\mathbb{Z}_2$-espaço vetorial e $\dfrac{Q(G/S)}{F(G/S)}$ é um $\mathbb{Z}_2$-subespaço vetorial de $\dfrac{P(G/S)}{F(G/S)}$. Assim temos a seguinte definição

Definição 4.1.1. *Dado um par grupo (G,S), o* **número de ends de** *(G,S), denotado $e(G,S)$ é dado por*

$$e(G,S) := dim\frac{Q(G/S)}{F(G/S)}.$$

Observação 4.1.1. *$e(G,S)$ mede o número de conjuntos quase invariantes em G/S sobre a ação de G.*

Exemplo 4.1.1. *Dado um grupo G temos $e(G,\{1\}) = e(G)$.*

De fato, pela definição de número de ends de um par grupo temos

$$e(G,\{1\}) := dim\frac{Q(G/\{1\})}{F(G/\{1\})} = dimQG/FG = e(G).$$

Observação 4.1.2. *Do exemplo anterior temos que se S é o subgrupo trivial então $e(G,S) = e(G)$, ou seja, a definição de $e(G,S)$ é de fato uma generalização da definição de $e(G)$.*

Da mema forma do estudo feito para ends de grupos podemos também interpretar $e(G,S)$ em termos de cohomologia de grupos.

Assim, consideremos o seguinte resultado:

Lema 4.1.1. $e(G,S) = dimH^0\left(G, \frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)$.

Demonstração: Inicialmente notemos que o grupo dos invariantes de $\frac{P(G/S)}{F(G/S)}$, denotado $\left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^G$ é $\frac{Q(G/S)}{F(G/S)}$. De fato,

$$\left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^G = \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; g.\overline{A} = \overline{A}, \forall g \in G\right\} =$$
$$= \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; \overline{gA} = \overline{A}, \forall g \in G\right\} = \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; gA + F(G/S) = A + F(G/S), \forall g \in G\right\} =$$
$$= \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; A + gA \in F(G/S); \forall g \in G\right\} = \frac{Q(G/S)}{F(G/S)}.$$

Logo, temos

$$e(G,S) := dim\frac{Q(G/S)}{F(G/S)} = dim\left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^G = dimH^0\left(G, \frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right).$$

■

Proposição 4.1.1. *Se G é um grupo e S é um subgrupo normal e G, então $e(G,S) = e(G/S)$.*

Demonstração: Considerando S um subgrupo normal de G temos que G/S é um grupo, ou seja,

$$\left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^{G/S} = \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; gS.\overline{A} = \overline{A}; \forall gS \in G/S\right\} =$$
$$= \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; \overline{gSA} = \overline{A}, \forall gS \in G/S\right\} = \left\{\overline{A} \in \frac{P(G/S)}{F(G/S)}; \overline{gA} = \overline{A}; \forall g \in G\right\} = \left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^G.$$

Dessa maneira, pelo Lema anterior temos que

$$e(G,S) := dim\left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^G = dim\left(\frac{P(G/S)}{F(G/S)}\right)^{G/S} = e(G/S)$$

■

Corolário 4.1.1. *Se S é um subgrupo normal e finito de G, então $e(G,S) = e(G)$.*

Demonstração: De fato, como S é um subgrupo normal e finito de G temos

$$e(G) \overset{Teor.2.1.1}{=} e(G/S) = e(G,S).$$

■

Exemplo 4.1.2. (a) $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = e(\mathbb{Z}) = 2$.
(b) *Se* $k > r$, $e(\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}^r) = e(\mathbb{Z}^{k-r}) = \begin{cases} 2 \text{ se } k = r+1 \\ 1 \text{ se } k > r+1. \end{cases}$
(c) $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = e(\mathbb{Z}) = 2$.
(d) $e(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = e(\mathbb{Z}_2) = 0$.

Lema 4.1.2. *Dado um par grupo (G,S) temos um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo entre $\frac{P(G/S)}{F(G/S)}$ e $\frac{\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}}{\mathbb{Z}_2(G/S)}$, onde $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} = Hom_{\mathbb{Z}_2S}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) = Coind_S^G\mathbb{Z}_2$ e conseqüentemente*

$$e(G,S) = dimH^0\left(G, \frac{\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}}{\mathbb{Z}_2(G/S)}\right)$$

Demonstração: Análoga à demonstração do Lema 2.2.2

■

Listemos agora, sem demonstração, algumas propriedades de $e(G,S)$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [29] Lemas 1.3, 1.4 e 1.5.

Lema 4.1.3. *Seja G um grupo e S um subgrupo de G. Temos*
(i) $e(G,S) = 0$ se, e somente se, S tem índice finito em G;
(ii) Se G_1 é um subgrupo de índice finito em G que contém S, então $e(G_1,S) = e(G,S)$;
(iii) Se G tem um subgrupo normal K com quociente G_1, tal que $(K : K \cap S)$ é finito, então $e(G,S) = e(G_1, \pi S)$, onde $\pi : G \longrightarrow G_1$ é a projeção natural. ■

Finalizando esta seção observamos que para o end do par $e(G,S)$ não temos uma fórmula análoga à demonstrada no Teorema 2.2.1 para end de grupo, ou seja, não é verdade que:

$$"Se\ (G : S) = \infty\ então\ e(G,S) = 1 + dimH^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S))".$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

No entanto, G. Swarup em [34], demonstrou uma fórmula deste tipo para $e(G,S)$ para tipos especiais de pares de grupos (G,S). Ao invés de trabalhar com o anel $R=\mathbb{Z}_2$, Swarup trabalha com o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ para definir $e(G,S)$. Os principais resultados apresentados são:

Proposição 4.1.2. *Sejam G um grupo finitamente gerado com um end e S um subgrupo cíclico infinito de G. Então a aplicação $i: H^1(G,\mathbb{Z}(G/S)) \longrightarrow H^1(S;\mathbb{Z})$ é trivial, e*

$$e(G,S) = 1 + rank(H^1(G;\mathbb{Z}(G/S))).$$

Demonstração: Ver Proposição 1 [34].

■

Teorema 4.1.1. *Sejam G um grupo finitamente gerado e S um subgrupo de índice infinito em G tal que para toda seqüência exata não trivial*

$$\{e\} \longrightarrow N \longrightarrow S \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\},$$

tem-se que $e(G,N)=1$. Então

$$e(G,S) = 1 + rank(H^1(G;\mathbb{Z}(G/S))).$$

Demonstração: Teorema 2 [34].

■

Como conseqüência do Teorema anterior segue o seguinte resultado:

Corolário 4.1.2. *Sejam $S \subset G$ grupos de dualidade de Poincaré de dimensões $(n-1)$ e n, respectivamente. Então $e(G,S)=2$.*

Demonstração: Corolário 3 [34].

■

Observação 4.1.3. *Ainda em [34], Swarup observa que a Proposição 4.1.2 e o Teorema* 4.1.1 *não são válidos quando se trabalha com o anel $R=\mathbb{Z}_2$. Nas hipóteses da Proposição 4.1.2, o que é válido é o seguinte resultado: "$e(G,S) = 1 + dim(H^1(G;\mathbb{Z}_2(G/S)))$ ou existe um homomorfismo $\Psi: S \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $e(G,N) \geq 2$, onde $N = Ker\Psi$".*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

4.2 Relação do End do Par (G,S) com Espaços Topológicos

Nesta seção mostraremos que o número de ends do par grupo $e(G,S)$ também está relacionado com o número de ends de espaços topológicos.

O próximo resultado é uma extensão do Teorema 3.4.1.

Teorema 4.2.1. *Sejam G um grupo finitamente gerado, S um subgrupo de G e $\Gamma = \Gamma(G,U)$ o grafo de Cayley de G associado a U, um conjunto finito de geradores de G. Se Γ/S denota o quociente de Γ pela ação (à direita) de S em G, então $e(G,S) = e(\Gamma/S)$.*

Demonstração: Inicialmente notemos que Γ/S é um CW-complexo localmente finito, onde as 0-células de Γ/S são identificadas com os elementos gS do conjunto G/S e as 1-células são do tipo (gS, xgS), onde $g \in G$, $x \in U$.

Dessa maneira, de modo análogo ao Teorema 3.4.1 mostra-se que

(i) A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : P(G/S) &\longrightarrow C^0(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2) \\ A &\longmapsto c_A, \text{ onde } c_A(g_0S) = \begin{cases} 1 \text{ se } g_0 \in A \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

e estendida linearmente, é um $\mathbb{Z}_2$-isomorfismo.

(ii) $\varphi(F(G/S)) = C_c^0(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2)$.

(iii) $\varphi(\widetilde{Q}(G/S)) = (\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2))$, onde $\delta^0 : C^0(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C^1(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação de cocadeias definido como anteriormente.

Finalmente notemos que φ induz por (2) e (3) uma aplicação bem definida:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : \frac{\widetilde{Q}(G/S)}{F(G/S)} &\longrightarrow \frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^{-1}(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2))}{C_c^0(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2)} \\ A + F(G/S) &\longmapsto c_A + C_c^0(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

e tal aplicação é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Portanto, temos:

$$e(\Gamma/S) = dim \frac{(\delta^0)^{-1}(C_c^1(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2))}{C_c^0(\Gamma/S, \mathbb{Z}_2)} = dim \left(\frac{\widetilde{Q}(G/S)}{F(G/S)} \right) = e(G/S).$$

■



Exemplo 4.2.1. *Consideremos* $G = \langle a, b; a^2 = b^2 = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $S = \langle b\rangle$ *e* $U = \{a, b\}$.

Inicialmente notemos que

$\Gamma = \Gamma(G, U)$:

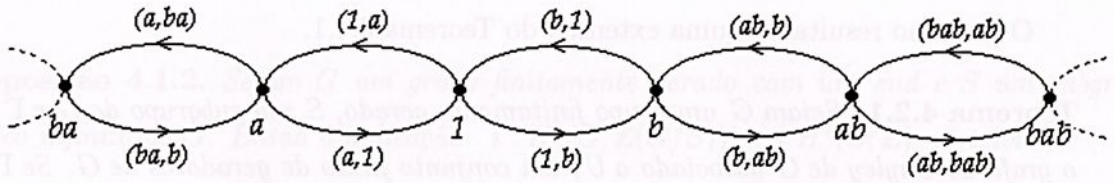


Figura 4.1: Representação do Grafo de Cayley de G.

Agora, temos as seguintes S-órbitas em Γ:

$S(b) = \{bs; s \in S\} = \{1, b\} = S$

$S(a) = \{as; s \in S\} = \{a, ab\}$

$S(ba) = \{bas; s \in S\} = \{ba, bab\}$

$\vdots$

$S((1, a)) = \{(1, a)s; s \in S\} = \{(1, a), (b, ab)\}$

$S((a, 1)) = \{(a, 1)s; s \in S\} = \{(a, 1), (ab, b)\}$

$S((1, b)) = \{(1, b)s; s \in S\} = \{(1, b), (b, 1)\}$

$S((a, ba)) = \{(a, ba)s; s \in S\} = \{(a, ba), (ab, bab)\}$

$S((ba, a)) = \{(ba, a)s; s \in S\} = \{(ba, a), (bab, ab)\}$

$\vdots$

Dessa maneira, em Γ, identificamos

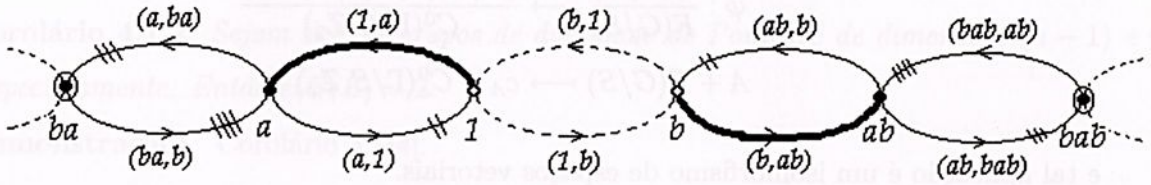


Figura 4.2: Identicações em Γ.

e assim temos:

Γ/S :

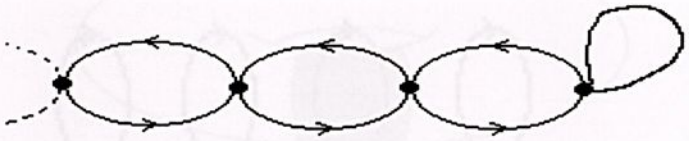


Figura 4.3: O quociente Γ/S

Portanto, pelo Teorema anterior

$$e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = e(\Gamma/S) = 1.$$

Exemplo 4.2.2. *Considerando* $G = \langle a, b; ab = ba\rangle$, $S = \langle b\rangle$ *e* $U = \{a, b\}$ *temos* $\Gamma = \Gamma(G, U)$:

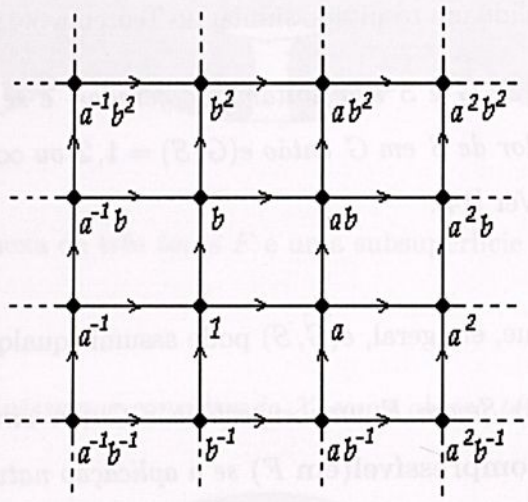


Figura 4.4: O grafo de Cayley de G.

Agora em Γ temos as S-órbitas:

$S(b) = \{bs; s \in S\} = \{b^k; k \in \mathbb{Z}\}$, onde b é visto como elemento de Γ

$S(a) = \{as; s \in S\} = \{a, ab, ab^2, \ldots\}$

$S(a^n) = \{a^n s; s \in S\} = \{a^n, a^n b, a^n b^2, \ldots\}$

$S((a^n, a^{n+1})) = \{(a^n, a^{n+1})s; s \in S\} = \{(a^n s, a^{n+1}s); s \in S\} = \{(a^n b^k, a^{n+1}b^k); k \in \mathbb{Z}\}$

$S((a, ba)) = S((a, ab)) = \{(ab^k, ab^{k+1})s; k \in \mathbb{Z}\}$

$S((b^n, b^{n+1})) = \{(b^n, b^{n+1})s; s \in S\} = \{(b^k, b^{k+1}); k \in \mathbb{Z}\}$

$S((b, ab)) = \{(b^n, ab^n); n \in \mathbb{Z}\}$

Logo, prosseguindo o raciocínio temos que

Γ/S :

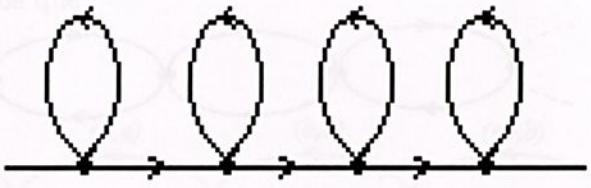


Figura 4.5: O quociente Γ/S

Portanto, pelo Teorema anterior,

$$e(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle, \langle b\rangle) = e(\Gamma/S) = 2.$$

Para $e(G, S)$ é válido um resultado similar ao Teorema 3.4.2, porém com algumas restrições

Proposição 4.2.1. *Se G e S são finitamente gerados, e se $(N_G(S) : S) = \infty$ onde $N_G(S)$ denota o normalizador de S em G então $e(G, S) = 1, 2$ ou ∞.*

Demonstração: Ver [14].

■

Agora veremos que, em geral, $e(G, S)$ pode assumir qualquer valor $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4.2.1. *(i) Sejam F uma superfície e C um circunferência mergulhada em F. Dizemos que C é* **incompressível(em F)** *se a aplicação natural $\pi_1(C) \longrightarrow \pi_1(F)$ é injetora; (ii) Seja $\mathcal{X}$ uma superfície compacta em F. Dizemos que $\mathcal{X}$* **incompressível (em F)**, *se toda componente de bordo de $\mathcal{X}$ é incompressível (em F).*

Proposição 4.2.2. *Seja G o grupo fundamental de uma superfície fechada F e seja S o grupo fundamental de uma subsuperfície compacta incompressível $\mathcal{X}$ de F. Então $e(G, S)$ é igual ao número de componentes de bordo de $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Lema 2.2 [28].

■

Exemplo 4.2.3 (Uma outra forma de ver que $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 2$). *Seja F o toro T^2 e $\mathcal{X}$ uma superfície compacta como na figura:*

Então $\mathcal{X}$ é (claramente) incompressível, $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathcal{X}) = \mathbb{Z}$ e portanto $e(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 2$ (o número de componentes de bordo de $\mathcal{X}$).

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

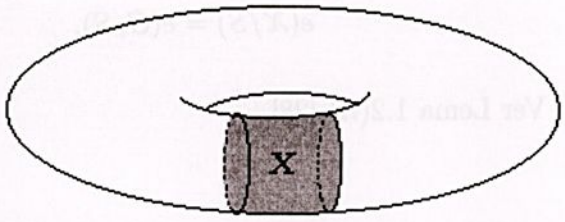


Figura 4.6: O toro F e a subsuperfície imcompressível $\mathcal{X}$ de F.

Exemplo 4.2.4. *Sejam $F = T^2\#T^2\#T^2$ (soma conexa de três toros), G o grupo fundamental de F e S o grupo fundamental da subsuperfície incompressível $\mathcal{X}$ de F como na figura abaixo. Então, $e(G, S) = 5$.*

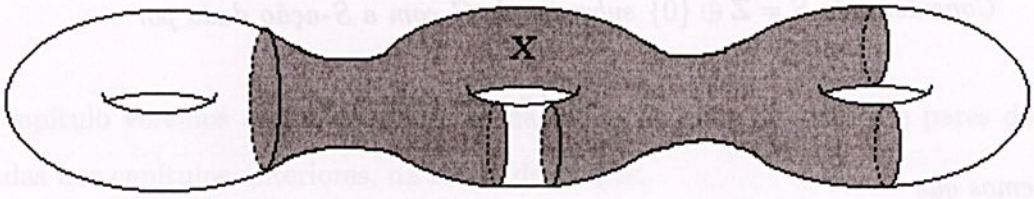


Figura 4.7: A soma conexa de três toros F e uma subsuperfície imcompressível $\mathcal{X}$ de F.

Observação 4.2.1. *Se tivéssemos considerado $\mathcal{X}$ como abaixo teríamos que $e(G, S) = 3$.*

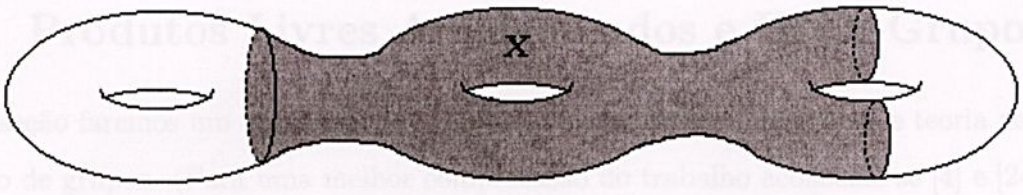


Figura 4.8: A soma conexa de três toros F e uma subsuperfície imcompressível $\mathcal{X}$ de F.

Encerramos este capítulo com outro resultado envolvendo a relação entre número de ends do par grupo com número de ends de espaços.

Teorema 4.2.2. *Consideremos $\mathcal{X}$ um CW-complexo finito com espaço de recobrimento conexo regular $\widetilde{\mathcal{X}}$ e seja G o grupo das transformações de recobrimento. Então, se S é um subgrupo de G e $\widetilde{\mathcal{X}}/S$ denota o quociente de $\widetilde{\mathcal{X}}$ pela ação de S, então*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$e(\widetilde{\mathcal{X}}/S) = e(G, S).$$

Demonstração: Ver Lema 1.2(ii) [28].

■

Exemplo 4.2.5. *Seja $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathbb{R}^2$ e $G = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Em $\mathbb{R}^2$ considere a G-ação dada por*

$$g \cdot (x, y) = (x + k_1, y + k_2),$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $(k_1, k_2) \in G$.

Seja $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. A projeção quociente $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R^2/\mathbb{Z}^2$ é uma aplicação de recobrimento regular e $G = \mathbb{Z}^2$ é o grupo das transformações de recobrimento.

Considerando $S = \mathbb{Z} \oplus \{0\}$ subgrupo de G com a S-ação dada por

$$s \cdot (x, y) = (x + k_1, y),$$

temos que

$$\widetilde{\mathcal{X}}/S = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z} \oplus \{0\}} \simeq S^1 \times \mathbb{R},$$

ou seja $\widetilde{\mathcal{X}}/S$ é homeomorfo ao cilindro infinito.

Logo, pelo Teorema 4.2.2 temos que

$$e(G, S) = e(S^1 \times \mathbb{R}) = 2.$$

Capítulo 5

Algumas Considerações sobre Aplicações da Teoria de Ends

Neste capítulo veremos algumas aplicações da teoria de ends de grupos e pares de grupos estudadas nos capítulos anteriores, na teoria de grupos.

A maioria dos resultados apresentados serão enunciados sem demonstração, pois o objetivo deste capítulo é mostrar onde aplica-se a teoria dada, e não entrar em detalhes nas demonstrações. Na verdade, a demonstração de grande parte dos resultados aqui apresentados necessita da teoria de grafos e grupos atuando em grafos, que não foram enfocados neste trabalho.

5.1 Produtos Livres Amalgamados e HNN-Grupos

Nesta seção faremos um breve estudo sobre uma classe especial de grupos e teoria de decomposição de grupos. (Para uma melhor compreensão do trabalho aconselha-se [4] e [24]).

Definição 5.1.1. *Dizemos que um grupo G é* **definido por geradores $X = \{x_i\}$ e relações** $R = \{r_j = 1\}$ *se $G \simeq \frac{F}{H}$ onde F é um grupo livre gerado por X e H é o subgrupo normal de F gerado por $\{r_j\}$. Neste caso dizemos que $\langle X; R\rangle$ é uma* **presentação de G.**

Definição 5.1.2. *Consideremos os grupos G_1 e G_2 com presentações $G_1 = \langle X_1; R_1\rangle$ e $G_2 = \langle X_2; R_2\rangle$. Se $S_1 \subset G_1$ e $S_2 \subset G_2$ são subgrupos com um dado isomorfismo $\sigma : S_1 \longrightarrow S_2$, então o* **produto livre $G_1 *_S G_2$ de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado $S = S_1 = S_2$** *é dado por:*

$$G_1 *_S G_2 = \langle X_1, X_2; R_1, R_2, s = \sigma(s), \forall s \in S \rangle.$$

Se $S = \{1\}$ então $G_1 *_S G_2$ é chamado de produto livre de G_1 e G_2 e é denotado simplesmente por $G_1 * G_2$.

Exemplo 5.1.1. *Consideremos $G_1 = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $G_2 = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Então o produto livre de G_1 e G_2 é o grupo livre com dois geradores:*

$$G_1 * G_2 = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.1.2. *Sejam $G_1 = \langle x : x^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ e $G_2 = \langle y : y^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Então*

$$G = G_1 * G_2 = \langle x, y : x^2 = y^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

G é chamado **grupo diedral infinito**.

Exemplo 5.1.3. *Sejam $G_1 = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle = \langle a_1, b_1; \emptyset \rangle$, $G_2 = \langle a_2 \rangle * \langle b_2 \rangle = \langle a_2, b_2; \emptyset \rangle$, $S_1 = \left\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \right\rangle$ e $S_2 = \left\langle b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \right\rangle$. Então, considerando o isomorfismo $\sigma : S_1 \longrightarrow S_2$ definido por $\sigma(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$, temos que*

$$G_1 *_S G_2 = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2;\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \right\rangle = \\ = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2;\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \right\rangle.$$

$G_1 *_S G_2$ é o grupo fundamental da soma conexa de 2 toros. Isto segue do Teorema de Van-Kampen ([4], Teorema II.7.2), considerando X_1, X_2, $Y = X_1 \cap X_2$ como na figura abaixo e $G_1 = \pi_1(X_1)$, $G_2 = \pi_1(X_2)$, $S_1 = \pi_1(\partial X_1)$ e $S_2 = \pi_1(\partial X_2)$.

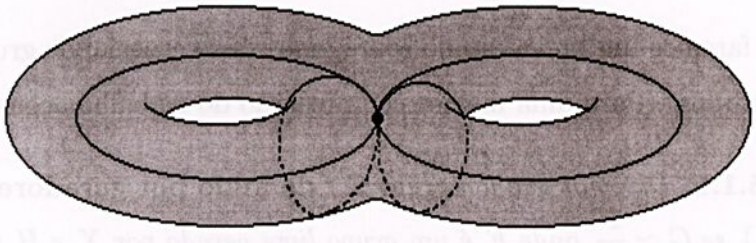


Figura 5.1: A soma conexa de dois toros.

Definição 5.1.3. *Seja G_1 um grupo com presentação $G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle$. Se S, S' são subgrupos de G_1 com um dado isomorfismo $\theta : S \longrightarrow S'$ então o HNN-**grupo** $G_1 *_{S,\theta}$ sobre o grupo base G_1, com respeito a θ e letra estável p, é dado por:*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

$$G_1 *_{S,\theta} = \langle X_1, p; R_1, p^{-1}sp = \theta(s), \forall s \in S \rangle.$$

Exemplo 5.1.4. *Se* $G_1 = \{1\}$, $S = S' = \{1\}$ *e* $\theta = id_{\{1\}}$ *então*

$$G_1 *_{S,\theta} = \langle 1, p; p^{-1}1p = 1 \rangle = \langle 1, p \rangle = \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

Exemplo 5.1.5. *Seja* $G = \langle x, y; xy = yx^2 \rangle$. *Se* $G_1 = S = \langle x \rangle$ *e* $S' = \langle x^2 \rangle$ *então* $G = S *_{S,\theta}$, *com* y *como letra estável e o isomorfismo* $\theta : S \longrightarrow S'$ *dado por* $\theta(x) = x^2$.

De fato,

$$S *_{S,\theta} = \langle x, y : y^{-1}sy = \theta(s), \forall s \in S \rangle = \langle x, y : sy = ys^2, \forall s \in S \rangle = \langle x, y : xy = yx^2 \rangle = G.$$

Exemplo 5.1.6. *Seja* $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle = \langle a, b : ab = ba \rangle$. *Sejam* $G_1 = S = S' = \langle a \rangle$, $\theta = id : S \longrightarrow S$ *e considere* b *como letra estável. Então* $G = S *_{S,\theta}$.

De fato,

$$S *_{S,\theta} = \langle a, b : b^{-1}sb = \theta(s), \forall s \in S \rangle = \langle a, b : b^{-1}ab = \theta(a) = a \rangle = \langle a, b : ab = ba \rangle = G.$$

Note que se considerarmos $\mathcal{X}$ o toro, $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ como subespaços de $\mathcal{X}$ representados na figura pelos geradores a e b de G, respectivamente, temos que $S = \pi_1(\mathcal{X}_1) = \langle a \rangle$, $\pi_1(\mathcal{X}_2) = \langle b \rangle$ e $\pi_1(\mathcal{X}) = S *_{S,\theta} = G$.



Figura 5.2: Representação dos geradores no toro.

Definição 5.1.4. *Um grupo* G **se decompõe sobre um subgrupo** S *se* G *é uma HNN-extensão* $A *_{S,\theta}$ *ou* G *é um produto livre amalgamado* $A *_S B$ *com* $A \neq S \neq B$.

Definição 5.1.5. *Sejam* G *um grupo e* S *um subgrupo de* G. *Dizemos que* S *é* S**-residualmente finito** *se dado* $g \in G - S$, *existe um subgrupo* G_1 *de índice finito em* G *tal que* G_1 *contém* S *mas não contém* g.

Observação 5.1.1. *Existem grupos que são* S*-residualmente finitos para todo subgrupo finitamente gerado* S. *Tais grupos são ditos* **localmente estendíveis residualmente finitos** *[6]. Por exemplo, grupos livres têm essa propriedade [35].*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

5.2 Algumas Aplicações da Teoria de Ends à Teoria de Grupos

Como já dito anteriormente ilustraremos algumas aplicações da teoria de ends relacionando-se com a teoria de grupos e decomposição de grupos, omitindo a maior parte das demonstrações, pois fogem do caráter enfocado neste trabalho.

Teorema 5.2.1. *Seja G um grupo finitamente gerado. São equivalentes as seguintes afirmações:*
(i) $e(G) = 2$;
(ii) G *tem um subgrupo cíclico de índice finito;*
(iii) G *tem um subgrupo normal finito com quociente* $\mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$;
(iv) $G = F*_F$ *com* F *finito, ou* $G = A *_F B$ *com* F *finito e* $(A : F) = (B : F) = 2$.

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Suponhamos $e(G) = 2$.

Pelo Lema 2.1.1(iv), existe $A \in QG$, $A \neq \emptyset$, $A \neq G$ tal que

$$QG/FG = \{\overline{\emptyset}, \overline{A}, \overline{A^C}, \overline{G}\} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Como $\overline{A} \neq \overline{\emptyset}$ e $\overline{A^C} \neq \overline{\emptyset}$ temos que A e A^C são infinitos.

Seja $H = \{h \in G/A + Ah \in FG\}$. Se definirmos em QG/FG uma G-ação à direita dada por $\overline{B} \cdot g = \overline{Bg}$ temos que o subgrupo de isotropia do elemento $\overline{A} \in QG/FG$ é

$$G_{\overline{A}} = \{g \in G/\overline{A}g = \overline{A}\} = \{g \in G/Ag + A \in FG\} = H.$$

Seja $G(\overline{A}) = \{\overline{A}g/g \in G\}$ a órbita dessa ação à direita. Então $G(\overline{A})$ está em correspondência biunívoca com $G/G_{\overline{A}} = G/H$. Como

$$G(\overline{A}) \subset QG/FG \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

temos que $[G : H] < \infty$. Assim H é infinito (pois G é infinito).

Temos então que existe $A \in QG$ tal que ambos A e A^C são infinitos e $H = \{h \in G/Ah + A \in FG\}$ é infinito. Como G é finitamente gerado, segue do Teorema 5.8 [29] que G tem um subgrupo cíclico infinito de índice finito.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Seja $H = \mathbb{Z}$ subgrupo de G com $(G : H) < \infty$. Segue do Corolário 2.2.1 que $e(G) = 2$.



$(iii) \Longrightarrow (iv)$ Seja F um subgrupo normal finito de G.

Vamos supor que $G/F \simeq \mathbb{Z}$. Do Exemplo 5.1.4, segue que $G/F = \{\overline{1}\}*_{\{\overline{1}\}}$, onde $\overline{1}$ indica o elemento neutro de G/F. Considere a projeção canônica $p : G \longrightarrow G/F = \{\overline{1}\}*_{\{\overline{1}\}}$.

Pode-se mostrar que $G = p^{-1}(\{\overline{1}\})*_{p^{-1}(\{\overline{1}\})} = F*_F$.

Suponhamos agora que $G/F = L *_{\{\overline{1}\}} K$, onde $L \simeq \mathbb{Z}_2$ e $K \simeq \mathbb{Z}_2$.

Considerando novamente a projeção canônica $p : G \longrightarrow G/F = L *_{\{\overline{1}\}} K$, pode-se mostrar que $G = A *_F B$, onde $A = p^{-1}(L)$, $B = p^{-1}(K)$ e $F = p^{-1}(\{\overline{1}\})$.

Além disso, $(A : F) = (B : F) = 2$.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$ Seja $G = H*_K$, onde $H = K = F$ com F finito. Temos que a inclusão $\theta : F \longrightarrow F = H$ é um isomorfismo.

Assim, como

$$G = F*_F = \langle X, p/R, p^{-1}\theta(s)p = p^{-1}sp = s, \forall s \in K = F\rangle,$$

onde X é o conjunto de geradores de F e R é o conjunto das relações de F, temos que F é normal em G. Além disso, $G/F = \{\overline{1}\}*_{\{\overline{1}\}} = \langle\overline{p}\rangle \simeq \mathbb{Z}$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Seja F um subgrupo normal finito de G, com $G/F \simeq K$, onde $K = \mathbb{Z}$ ou $K = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Agora, pela Proposição 2.1.1 temos que $e(G) = 2$, e pelo Exemplo 3.4.1(d) temos que $e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = 2$. Logo, pelo Teorema 2.1.1 segue que

$$e(G) = e(G/F) = 2.$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Ver Teorema 5.12 [29].

■

Observação 5.2.1. *O Teorema 5.2.1 nos diz que $e(G) = 2$ se, e somente se, $G = F*_F$ ou $G = A *_F B$, onde F é finito e $(A : F) = (B : F) = 2$. Assim, se $e(G) = 2$, G se decompõe sobre um subgrupo finito. O próximo Teorema mostra que esse resultado pode ser generalizado para grupos com infinitos ends.*

Teorema 5.2.2. *Seja G um grupo. Se G se decompõe sobre um subgrupo finito então $e(G) \geq 2$. Reciprocamente, se G é finitamente gerado e $e(G) \geq 2$ então G se decompõe sobre um subgrupo finito.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Demonstração: A primeira parte do teorema é demonstrada usando-se a definição de ends e os teoremas da forma normal para produto livre amalgamado de grupos ([29] Teorema 1.6) e HNN-grupos ([29] Teorema 1.7) (para maiores detalhes ver Lema6.3 [29]).

A demonstração da segunda parte do teorema usa teoria de grafos e árvores. (Ver [29] Lema6.4, Teorema 6.5, Lemas 6.6, 6.7 e 6.8).

■

Observação 5.2.2. *A segunda parte do Teorema* 5.2.2 *é conhecido como* **Teorema de Estrutura de Stallings** *e é um resultado muito importante da teoria de ends.*

Como conseqüência dos dois teoremas anteriores temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.3. *Seja G um grupo finitamente gerado e livre de torção. Então*

(i) $e(G) = 2$ se, e somente se, G é cíclico infinito;

(ii) $e(G) = \infty$ se, e somente se, G pode ser escrito como um produto livre não trivial $G_1 * G_2$

.

Demonstração:

(i) Se $G \simeq \mathbb{Z}$, pela Proposição 2.1.1 segue que $e(G) = 2$. Reciprocamente, se $e(G) = 2$, pelo Teorema 5.2.1, $G = F*_F$ com F finito ou $G = A *_F B$ com F finito e $(A : F) = (B : F) = 2$. Este último caso não pode ocorrer pois G é livre de torção. A única possibilidade é $F = \{1\}$ e $G = \{1\}*_{\{1\}} \simeq \mathbb{Z}$ (pelo Exemplo 5.1.4).

(ii) Se $e(G) = \infty$ então pelo Teorema 5.2.1 G se decompõe sobre um subgrupo finito F.

Como G é livre de torção temos que $F = \{1\}$. Assim temos $G = G_1 * G_2$, com $G_1 \neq \{1\} \neq G_2$, ou ainda, $G = G_1*_{\{1\}}$ (note que $G_1 \neq \{1\}$, pois se $G_1 = \{1\}$ teríamos $G = \{1\}*_{\{1\}} \simeq \mathbb{Z}$ e por (i) $e(G) = 2$). Considerando X_1 o conjunto de geradores de G_1 e R_1 suas relações temos

$$G = \langle X_1, p/R_1, p.1.p^{-1} = 1\rangle = \langle X_1, p/R_1\rangle = G_1 * \mathbb{Z},$$

ou seja, G é um produto livre não trivial.

Reciprocamente, se $G = G_1 * G_2$, $G_1 \neq \{1\}$ e $G_2 \neq \{1\}$ então G se decompõe sobre o subgrupo $F = \{1\}$. Pelo Teorema 5.2.2, $e(G) \geq 2$. Se $e(G) = 2$, então pelo Teorema 5.2.1 teríamos $(G_1 : \{1\}) = (G_2 : \{1\}) = 2$, contrariando o fato de G ser livre de torção.

Ainda, se $G = \{1\}*_{\{1\}} \simeq \mathbb{Z} \neq G_1 * G_2$.

Portanto, $e(G) = \infty$.

■

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

O próximo resultado que nos dá condições necessárias para um grupo G ter $e(G) = \infty$ ao considerar os Teoremas 5.2.1 e 5.2.2.

Teorema 5.2.4. *Se $G = G_1 *_T G_2$ onde T é um subgrupo próprio finito de G_1 e G_2, de índice maior ou igual a 3 em G_2, então $e(G) = \infty$. Também se $G = G_1 *_{T,\theta}$, onde T é um subgrupo próprio finito de G_1 então $e(G) = \infty$.*

Demonstração: Se $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ temos pelo Teorema 5.2.2 que $e(G) \geq 2$. Do Teorema 5.2.1 segue que $e(G)$ não pode ser 2 pois $(G_2 : T) \geq 3$. Logo, $e(G) = \infty$.

Agora, se $G = G_1 *_{T,\theta}$ com $G_1 \neq T$ e T finito, temos novamente pelo Teorema 5.2.2 que $e(G) \geq 2$.

Assim, se $e(G) = 2$, pelo Teorema 5.2.1, teríamos $G_1 = T = F$, contrariando o fato de $G_1 \neq T$. Portanto, $e(G) = \infty$.

■

Exemplo 5.2.1. *Sejam $F = \langle a/a^n = 1\rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ e $\theta : F \longrightarrow F$ a aplicação identidade. Então*

$$G = F *_F = \langle a, p/a^n = 1, pap^{-1} = a\rangle = \langle a, p/a^n = 1 \text{ e } pa = ap\rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n,$$

e assim $e(G) = 2$.

Exemplo 5.2.2. *Seja $G = A *_F B$ onde $A = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_2 = B$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $F = \mathbb{Z}_n \oplus \{1\}$. Pelo Teorema 5.2.1, temos que $e(G) = 2$.*

Exemplo 5.2.3. *Considere $G = (\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m) *_F (\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m)$, onde $F = \mathbb{Z}_n \oplus \{1\}$ com $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $m \geq 3$. Pelo Teorema 5.2.4, temos que $e(G) = \infty$.*

Exemplo 5.2.4. *Considerando $G = (\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})*(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$, temos pelo Teorema 5.2.3 que $e(G) = \infty$.*

O conceito de ends de pares de grupos $e(G, S)$ generaliza o conceito de ends de grupos $e(G)$. Era de se esperar então que, assim como $e(G)$ caracteriza grupos que se decompõem sobre subgrupos finitos, $e(G, S)$ caracterizasse grupos G que se decompõem sobre algum subgrupo relacionado com S.

Peter Scott (ver [29] e [28]) tinha originalmente o intuito de provar o seguinte resultado: *G se decompõe sobre um subgrupo S (ou proximamente relacionado a S) se, e somente se, $e(G, S) \geq 2$.*

unesp

Usando propriedades básicas decorrentes da definição de $e(G,S)$ e teoremas da forma normal para produtos livres amalgamados e HNN-grupos, Scott mostrou que o seguinte resultado é verdadeiro:

Teorema 5.2.5. *Se um grupo G se decompõe sobre um subgrupo S então $e(G,S) \geq 2$.*

Demonstração: Ver Lema 1.8(ii) [28].

■

A esperança de Scott era que de certa forma a recíproca desse teorema fosse verdadeira. Porém, baseado na teoria de 3-variedades, Scott conseguiu um exemplo de um grupo G que não se decompõe sobre qualquer subgrupo, mas contém um subgrupo G_1 com $(G : G_1) < \infty$ que se decompõe sobre um subgrupo S. Assim, usando Lema 4.1.3(ii) [28] e o Teorema anterior temos

$$e(G,S) = e(G_1,S) \geq 2.$$

Scott, então, percebeu que a recíproca do Teorema 5.2.5 não podia ser válida. No entanto, provou o seguinte resultado:

Teorema 5.2.6. *Se G e S são grupos finitamente gerados e G é S-residualmente finito, então $e(G,S) \geq 2$ se, e somente se, G possui um subgrupo G_1 de índice finito tal que G_1 contém S e G_1 se decompõe sobre S.*

Demonstração: Lemas 4.2, 4.3, 4.4, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e Teorema 4.5 em [28].

■

Observação 5.2.3. *É claro que se G possui um subgrupo G_1 de índice finito com $S \subset G_1$ e G_1 se decompondo sobre S então pelo Teorema 5.2.5 e Lema 4.1.3 temos que $e(G,S) \geq 2$. A força do Teorema anterior está na recíproca desse fato.*

Outros resultados envolvendo decomposição de grupos e ends foram provados em Scott [28].

Teorema 5.2.7. *Se $G = A * S$ onde A e S são grupos não triviais então ou $e(G,S) = \infty$ ou ambos A e S têm ordem 2 e $e(G,S) = 1$.*

Demonstração: A demonstração consiste em exibir conjuntos quase invariantes em G/S e usa o Teorema da forma normal para produtos livres (Teorema 1.6 [29]).

Ver [28] Lemas 1.6 e 2.6.

■



O seguinte resultado, devido a R.G.Burns, será necessário nos próximos exemplos.

Teorema 5.2.8. *Seja G um grupo livre e S um subgrupo finitamente gerado de G. Então G possui um subgrupo G_1 com $(G : G_1) < \infty$, $S \subset G_1$ e $G_1 = S * G_2$, para algum subgrupo G_2 de G.*

Demonstração: Ver [6]. ■

Exemplo 5.2.5. *Sejam $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $H = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Temos que $G = \pi_1(\mathcal{X})$, onde $\mathcal{X} = T^2 - D^2$ e $H = \pi_1(\mathcal{Y})$, onde $\mathcal{Y} = \partial D^2$. Ilustrando,*

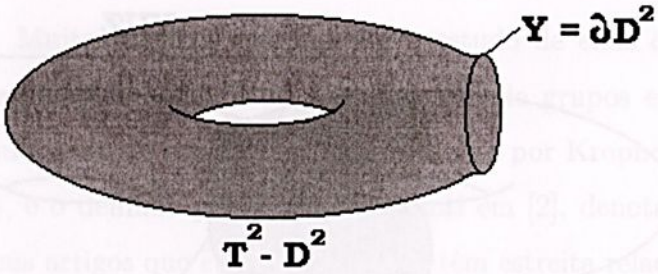


Figura 5.3: Ilustração do exemplo 5.2.5

Como G é um grupo livre e H é finitamente gerado, segue do Teorema 5.2.8 que existe um subgrupo S de G com $(G : S) < \infty$ e $S = H * L$ para algum subgrupo L.

Temos então, usando o Teorema 5.2.7, que

$$e(G, H) = e(S, H) = \infty.$$

Exemplo 5.2.6. *Generalizando o exemplo anterior, se G é um grupo livre qualquer e S é um subgrupo de G finitamente gerado de índice infinito, pelo Teorema 5.2.8, existe um subgrupo G_1 de G com $(G : G_1) < \infty$, $S \subset G_1$ e $G_1 = S * G_2$, para algum subgrupo G_2 de G. Segue então novamente que*

$$e(G, S) = e(G_1, G) = \infty.$$

Finalizando esse capítulo, veremos um resultado que nos dá uma condição necessária e suficiente para o grupo fundamental de uma superfície fechada se decompor sobre um certo subgrupo S.

Teorema 5.2.9. *Seja G o grupo fundamental de uma superfície fechada $\mathcal{X}$ e seja S o grupo fundamental de uma subsuperfície $\mathcal{Y}$ compacta e incompressível de $\mathcal{X}$. Então G se decompõe sobre S se, e somente se, $\mathcal{Y}$ tem ao menos duas componentes de bordo.*

Idéia da Demonstração: Se G se decompõe sobre S, então, pelo Teorema 5.2.5, $e(G,S) \geq 2$. Daí, pela Proposição 4.2.2, $\mathcal{Y}$ deve ter ao menos duas componentes de bordo.

Suponhamos agora que $e(G,S) \geq 2$. Novamente da Proposição 4.2.2, $\mathcal{Y}$ tem ao menos duas componentes de bordo.

Se alguma componente de bordo C de $\mathcal{Y}$ separa $\mathcal{X}$, denote por Z a componente de $\mathcal{X} - C$ que não contém $\mathcal{Y}$, como ilustra seguinte figura

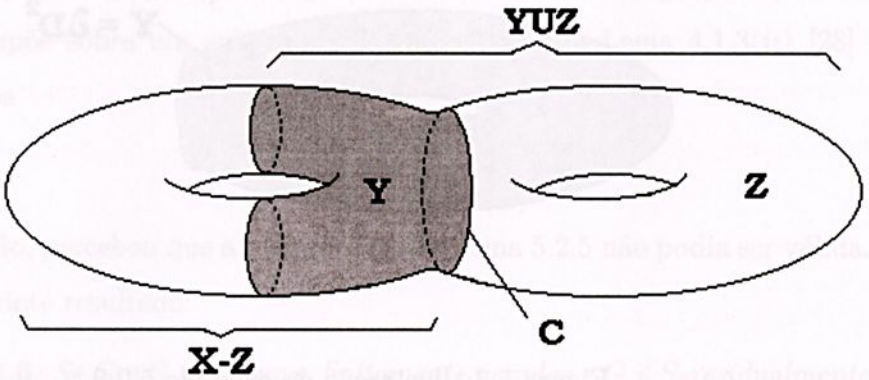


Figura 5.4: Superfície com componente bordo C que separa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$.

Usando o Teorema de Van-Kampem pode-se mostrar que

$$G = \pi_1(\mathcal{X}) = \pi_1(Z \cup \mathcal{Y}) *_S \pi_1(\mathcal{X} - Z).$$

Como $\mathcal{Y}$ tem ao menos duas componentes de bordo, temos que $\mathcal{Y}$ não é igual a $\mathcal{X} - Z$ e assim S não é igual a $\pi_1(\mathcal{X} - Z)$. Assim, G se decompõe sobre S nesse caso.

Agora, considerando o caso em que C é uma componente de bordo de $\mathcal{Y}$ que não separa $\mathcal{X}$, pode-se mostrar que $G = A*_S$ para um certo subgrupo A de G. (Ver Lema 2.4 [28])

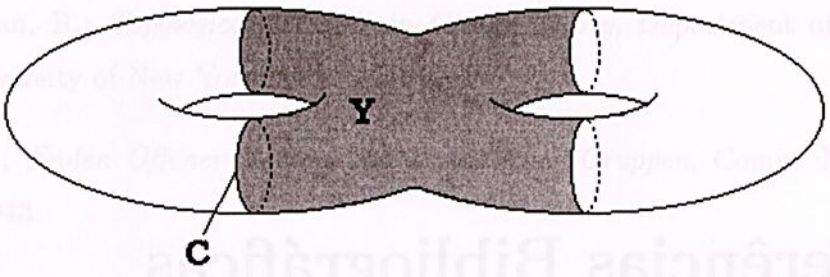


Figura 5.5: Superfície com componente bordo C que não separa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$.

■

Observação Final: Muitos autores continuaram o estudo de ends de grupos e pares de grupos, procurando aplicações à teoria de decomposição de grupos e pares de dualidade. Para isso, foram definidos outros ends tais como o definido por Kropholler e Roller em [16], denotado por $\tilde{e}(G,S)$, e o definido por Andrade e Fanti em [2], denotado por $E(G,S)$. Os autores provam em seus artigos que $\tilde{e}(G,S)$ e $E(G,S)$ têm estreita relação com $e(G,S)$, mas são diferentes e produzem outras aplicações.

A teoria de ends de espaços topológicos, vista separadamente da teoria de ends de grupos, também tem aplicações, tais como no estudo da teoria de folheações e superfícies mínimas [11].

Referências Bibliográficas

[1] Andrade, M.G.C.; *Invariantes Relativos e Dualidade*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1992.

[2] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A Relative Cohomological Invariant for Group Pais*, Manuscripta Mathematica 83, 1-18, 1984.

[3] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *Uma Nota sobre Produtos Livres Amalgamados e HNN-grupos*, Métrica - Estudos e Pesquisas em Matemática, 61, 2002.

[4] Bieri, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.

[5] Brown, K. S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, 1982.

[6] Burns, R.G.; *A Note on Free Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 14-17, 1969.

[7] Cioca, D. M.; *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, 1997.

[8] Cohen, D.E.; *Groups of Cohomological Dimension One*, Lecture Notes in Mathematicas, Springer Verlag, 245, 17-41.

[9] Croom, F.H.; *Basic Concepts of Algebraic Topology*,Undregraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[10] Freudenthal, H.; *Uber die Enden Topologischer Raume und Gruppen*, Math. Zeit. 33, 692-713, 1931.

[11] Frohman, C.; Meeks III, W.H.; *The Topological Uniqueness of Complete One-ended Minimal Surfaces and Heegard Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Journal of the American Mathematical Society, Vol.10, 3, 495-512, 1997.

[12] Geoghegan, R.; *Topological Methods in Group Theory*, Department of Mathematical, State University of New York.

[13] Hopf, H.; *Enden Offener Raüme und Unendlicher Gruppen*, Comm. Math. Helv. 16, 81-100, 1943.

[14] Houghton, C. H.; *Ends of Loccaly Compact Groups and their Coset Spaces*, J. Aust. Math. Soc. 17, 274-184, 1974.

[15] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.

[16] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Relative Ends and Duality*, Journal of Pure and Applied Algebra 61, 187-210, 1989.

[17] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Remarks on a Theorem of Swarup on Ends of Pairs of Groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, 107-110, 1996.

[18] Lima,E.L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[19] Macedo, B. L.; *Propriedades Homológicas de Finitude e Grupos de Dualidade*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, 2002.

[20] MacLane, S.; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[21] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1967.

[22] Munkres, J.R.; *Elements of Algebraic Topology*, Addinson-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

[23] Raymond, F.; Lee, R.; *Manifolds Covered by Euclidean Space.*

[24] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.

[25] Roller, M.A.; *Splitting Theorems for Poincaré Duality Groups*, University of Cambridge, 1987.

[26] Rotman, J.J.; *An Introduction to Homological Algebra* Academic Press, Inc., 1979.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

[27] Schubert, H.; *Topology*, MacKonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.

[28] Scott, G.P.; *Ends of pairs of groups*, Journal of Pure and Appl. Algebra, 11, 179-198, 1977.

[29] Scott, G.P.; Wall, C.T.C.; *Topological Methods in Group Theory*, London Math. Soc. Lect. Notes Series 36, Homological Group Theory, 137-203, 1979.

[30] Siebenmann, L.C.; *The Obstruction to Finding a Boudary for an Open Manifold of Dimension Greater than Five*, PhD Thesis, Priceton Univ. Press, 1965.

[31] Spanier, E.H.; *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, Inc., 1966.

[32] Specker, E.; *Endenverbande van Raume und Gruppen*, Math. Ann. 122, 167-174, 1950.

[33] Stallings, J.; *Group Theory and Three-dimensional Manifolds*, Lectures in Mathematics, New Haven and London, Yale University Press, 36-48, 1971.

[34] Swarup, G.A.; *On the Ends of Pairs of Groups*, Journal of Pure and Applied Algebra 87, 93-96, 1993.

[35] Vasterstein, L. N.; *On the Stabilization of the General Linear Group over a Ring*, Math. USSR Sbornik, 383-400, 1969.

[36] Vick, J.W.; *Homology Theory*, Academic Press, Inc., 1973.

[37] Whitehead, G.W.; *Elements of Homotopy Theory*, G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18