



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

Instituto de Ciências e Engenharia – Câmpus de Itapeva

DEIVISON LEONARDO POTYRALA

**Fenomenologia da transparência eletromagneticamente induzida em osciladores  
harmônicos acoplados parametricamente**

Itapeva - SP  
2023

DEIVISON LEONARDO POTYRALA

**Fenomenologia da transparência eletromagneticamente induzida em osciladores harmônicos acoplados parametricamente**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Conselho de Curso de Engenharia de Produção, da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Ciências e Engenharia, Câmpus de Itapeva, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Zini Rossatto

Itapeva - SP  
2023

P871f Potyrala, Deivison Leonardo  
Fenomenologia da transparência eletromagneticamente induzida em osciladores harmônicos acoplados parametricamente / Deivison Leonardo Potyrala. -- Itapeva, 2023  
37 p. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia de Produção) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Ciências e Engenharia, Itapeva  
Orientador: Daniel Zini Rossatto

1. Transparência eletromagneticamente induzida. 2. Acoplamento paramétrico. 3. Eletrodinâmica quântica de cavidades. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Ciências e Engenharia, Itapeva. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**DEIVISON LEONARDO POTYRALA**

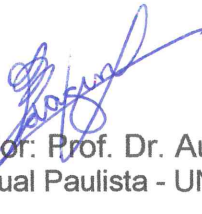
**FENOMENOLOGIA DA TRANSPARÊNCIA  
ELETROMAGNETICAMENTE INDUZIDA EM OSCILADORES  
HARMÔNICOS ACOPLADOS PARAMETRICAMENTE**

Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção, da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Câmpus de Itapeva.

**BANCA EXAMINADORA**



Orientador: Prof. Dr. Daniel Zini Rossatto  
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Câmpus de Itapeva.



2º Examinador: Prof. Dr. Augusto Batagin Neto  
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Câmpus de Itapeva.



3º Examinador: Prof. Dr. Higor Rogério Favarim  
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Câmpus de Itapeva.

Itapeva, 30/01/2023.

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas  
que, quando pequenas, sonharam em se tornar  
cientistas.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Professor Dr. Daniel Zini Rossatto por ser meu orientador e ajudar no desenvolvimento dessa pesquisa, e além de ser orientador ser amigo por ajudar nas dificuldades.

Agradeço a meus pais que me apoiaram nas minhas escolhas e me deram suporte em minha caminhada.

Agradeço à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), por proporcionar ensino de qualidade gratuito.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito”.

(Bíblia Sagrada, Romanos 12,2).

## RESUMO

A transparência eletromagneticamente induzida (EIT) é um fenômeno no qual um meio opaco se torna transparente devido a uma interferência quântica. Este efeito é candidato promissor ao bloco fundamental de várias operações no âmbito da ciência da computação e informação quântica, como, por exemplo, implementação de transístor ópto-quântico, filtros quânticos, memórias quânticas, entre outros. Embora a EIT seja um fenômeno genuinamente quântico, há na literatura trabalhos que mostram que essa fenomenologia pode ser analogamente descrita por dois osciladores harmônicos (OHs) clássicos acoplados. Entretanto, essa analogia apresenta duas inconsistências, a primeira de que o campo de controle (agente externo no fenômeno original) é mapeado na constante de acoplamento entre os OHs (agente interno do sistema análogo); já a segunda é que se torna necessário que ambos OHs clássicos possuam mesma frequência natural quando se tem a ressonância do campo de controle, imposição inexistente no fenômeno original. Neste trabalho de conclusão de curso foi investigado como contornar tais inconsistências de modo a obter uma analogia mais fiel da EIT em sistemas clássicos. Isso foi alcançado assumindo que os OHs fossem acoplados parametricamente, uma vez que a temporalidade na intensidade do acoplamento pode ser vista como indiretamente oriunda da aplicação de uma força externa sobre o sistema. Além disso, nesse caso não se é mais imposto igualdade entre as frequências naturais dos OHs no regime de ressonância do campo de controle. Adicionalmente, também se investigou aqui a fenomenologia da EIT na versão quântica do sistema, isto é, dois OHs quânticos parametricamente acoplados, verificando essa possibilidade não só quando o acoplamento se dá através de uma interação do tipo Jaynes-Cummings, mas também quando é do tipo anti-Jaynes-Cummings. Até onde sabemos, não há relato nem estudos na literatura sobre esse contexto, de modo que nosso trabalho abre caminho para novas investigações sobre EIT em sistemas com acoplamento anti-Jaynes-Cummings.

Palavras-chave: transparência eletromagneticamente induzida; osciladores harmônicos acoplados; acoplamento paramétrico; eletrodinâmica quântica de cavidades.

## ABSTRACT

Electromagnetically induced transparency (EIT) is a phenomenon in which an opaque medium becomes transparent due to a quantum interference. This effect is a candidate to be a building block of several applications in the field of quantum computer science, such as quantum-optical transistor, quantum filters, quantum memories etc. Although it is a genuine quantum effect, such phenomenology can be mapped into a classical system composed of two coupled harmonic oscillators (HOs). However, this analogy has two inconsistencies, firstly the control field (external agent in the original EIT) is mapped into the coupling strength between the HOs (internal agent in the classical analogue); secondly it is required that both HOs have the same natural frequency when the control field is resonant, constraint which is absent in the original phenomenon. In this work we investigated how to circumvent these inconsistencies to achieve a more accurate analogy of EIT in classical systems. We did that by assuming a parametric coupling between the HOs, since the time-dependent coupling strength indirectly arises from the application of an external force on the system. Moreover, the same natural frequency for both HOs when the control field is resonant is no longer required. Finally, we investigated the quantum version of the system composed of two parametrically coupled HOs, for which we have shown that the phenomenology of EIT is present not only when the coupling occurs through a Jaynes-Cummings-like interaction, but also through an anti-Jaynes-Cummings-like one. As far as we know the literatures lacks studies on this subject, thus our work can pave the way for future investigations concerning EIT in systems with anti-Jaynes-Cummings coupling.

**Keywords:** electromagnetically induced transparency; coupled harmonic oscillators; parametric coupling; cavity quantum electrodynamics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esfera de Bloch . . . . .	12
Figura 2 – Interior de um computador quântico da IBM . . . . .	13
Figura 3 – Ilustração pictórica do fenômeno da EIT . . . . .	13
Figura 4 – Padrão de absorção e dispersão da EIT . . . . .	16
Figura 5 – Sistemas de osciladores harmônicos acoplados que reproduzem a fenomenologia da EIT . . . . .	17
Figura 6 – Sistemas acoplados parametricamente . . . . .	25
Figura 7 – Osciladores quânticos acoplados . . . . .	29

## **SIGLAS**

**AJC** Anti-Jaynes-Cummings.

**EIT** Electromagnetically Induced Transparency.

**JC** Jaynes-Cummings.

**OH** Oscilador Harmônico.

**RWA** Rotating Wave Approximation.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODOS</b>	<b>21</b>
3.1	Mecânica hamiltoniana . . . . .	21
3.1.1	Clássica . . . . .	21
3.1.2	Quântica . . . . .	23
3.2	Aproximação de onda girante . . . . .	24
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>25</b>
4.1	Sistema clássico com acoplamento paramétrico . . . . .	25
4.2	Eletrodinâmica quântica de cavidades . . . . .	29
4.2.1	Cenário 1 . . . . .	31
4.2.2	Cenário 2 . . . . .	32
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>34</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>35</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A computação quântica é um ramo de pesquisa e de desenvolvimento tecnológico que busca fazer a utilização e manipulação de sistemas físicos que obedecem às leis da mecânica quântica para o processamento, armazenamento e transmissão de informação (BENIOFF, 1980). A principal diferença entre um computador clássico e um computador quântico consiste na capacidade do último de se favorecer das propriedades quânticas, como a superposição, interferência e emaranhamento de estados, para que dessa forma busque uma maior eficiência computacional.

Na computação clássica se utiliza como unidade de informação o *bit*, que é uma variável clássica que só pode assumir, de maneira mutuamente exclusiva, dois valores discretos, sendo eles 0 ou 1. Tais valores podem codificar, entre outros, presença ou ausência de corrente elétrica ou a magnetização de um dado elemento em um circuito. Já na computação quântica, utiliza-se o *q-bit* como unidade de informação (análogo quântico do *bit*), que é uma variável de algum sistema quântico, o qual, ao ser testado/medido, apresenta também duas respostas possíveis. A diferença para o *bit* clássico vem da dualidade onda-partícula prevista pela física quântica, ou seja, enquanto o *bit* (sistema clássico) pode ser estar ou no estado 0 ou no estado 1 (mutuamente exclusivo), o *q-bit* (sistema quântico) pode estar também em um estado dado por uma superposição de 0 e 1. A codificação dos rótulos 0 e 1 do *q-bit* pode ser realizada em diversos sistemas físicos, como, por exemplo, circuitos supercondutores, polarização de fótons, níveis de energia de um átomo, entre outros (BULUTA; ASHHAB; NORI, 2011).

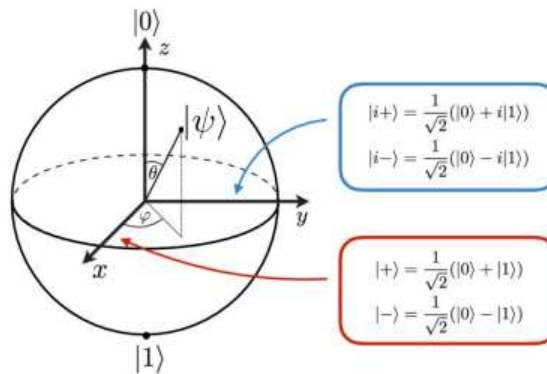
É possível fazer a representação do *q-bit* como um ponto pertencente à superfície de uma esfera de raio unitário, cujo polo norte e sul representam os estados quânticos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Esta representação é chamada de esfera de Bloch, e as operações realizadas em um *q-bit* são rotações nesta esfera (NIELSEN; CHUANG, 2000), como apresentado na Figura 1.

Como supracitado, com os *q-bits* é possível formar uma combinação linear de estados conhecidos como superposição,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . O conjunto dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  é conhecido como base computacional. Dessa forma, ao medir o *q-bit* nos retorna 0 com probabilidade  $|\alpha|^2$  ou 1 com probabilidade  $|\beta|^2$ . Reescrevendo a Eq. (1) obtemos

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (2)$$

**Figura 1** – Esfera de Bloch

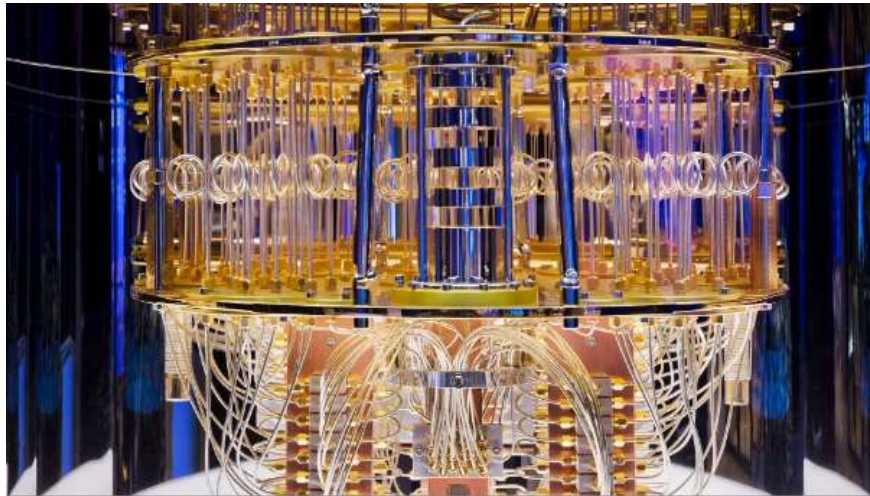
Fonte: Ketterer et al. (2016)

com  $\theta$  e  $\varphi$  descrevendo a latitude e longitude do estado na esfera de Bloch, conforme ilustrado na Figura 1.

Existem diversas plataformas candidatas para implementar computação quântica, cada uma apresenta vantagens e desvantagens e métodos específicos para a manipulação do hamiltoniano, preparação de estados iniciais, portas lógicas, medições e criações de emaranhamento; a saber atualmente existe computadores à base de armadilhas iônicas (OLIVEIRA; WALBORN; MONKEN, 2005), circuitos supercondutores (SANTOS, 2016), ressonância magnética (XIN et al., 2020), cavidades ópticas (DIVINCENZO, 2000; REISERER; REMPE, 2015) e osciladores harmônicos (JUN, 2012), sendo que os computadores mais robustos atualmente são os de armadilhas iônicas e de circuitos supercondutores.

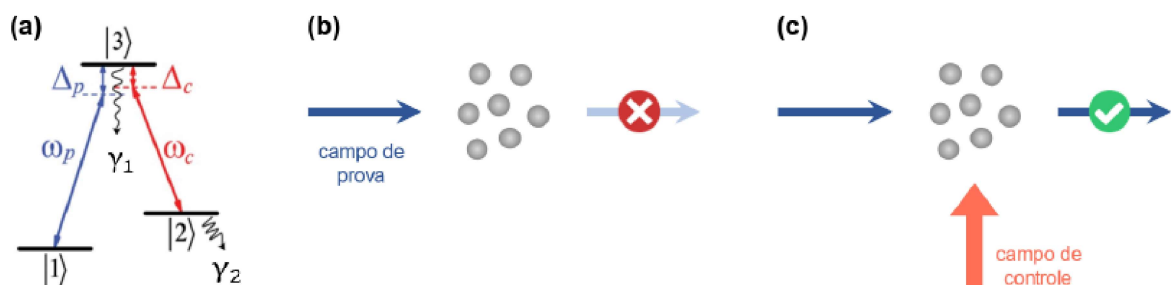
Entretanto, atualmente ainda existem alguns entraves para realizar computação quântica (ou construir computadores quânticos) em larga escala. Quando pensamos na computação clássica temos que é possível clonar *bits*, enquanto *q-bits* não podem ser clonados segundo o teorema da não clonagem (NIELSEN; CHUANG, 2000). Além disso, há restrições quanto ao tempo necessário para se efetuar as operações lógicas quânticas devido à decoerência quântica devido à presença de ruídos, que acaba distorcendo os estados quânticos e leva à perda da informação quântica. Um exemplo de computador quântico é ilustrado na Figura 2.

Um fenômeno quântico promissor a ser aplicado em computação quântica é a transparência eletromagneticamente induzida (EIT – do inglês *electromagnetically induced transparency*) (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005). Tal fenômeno consiste na anulação da absorção de um feixe de luz (campo de prova) por um meio atômico, onde sobre esse meio fazemos incidir outro feixe de luz (campo de controle). Imagine uma amostra atô-

**Figura 2** – Interior de um computador quântico da IBM

Fonte: Galileu (2021)

mica que absorve um feixe luminoso em uma dada frequência, incidindo sobre a amostra um segundo feixe, com uma frequência que também seria absorvida, faz com que a amostra se torne transparente perante o primeiro feixe, conforme pictoricamente ilustrado na Figura 3.

**Figura 3** – Ilustração pictórica do fenômeno da EIT

Legenda: (a) Diagrama de níveis de energia de um átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$  para a EIT. Ambos estados fundamentais,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , são acoplados ao estado excitado,  $|3\rangle$ , porém o primeiro através de um campo de prova (amplitude  $\Omega_p$  e frequência  $\omega_p$ ) enquanto o segundo através de um campo de controle (amplitude  $\Omega_c$  e frequência  $\omega_c$ ). Aqui,  $\gamma_1$  representa a taxa total de emissão espontânea do estado excitado enquanto  $\gamma_2$  representa a taxa de dephasagem (perda de coerência de fase quântica) relativa ao estado  $|2\rangle$ . (b) Ilustração da absorção do campo de prova pela amostra quando próximo da ressonância ( $\Delta_p \approx 0$ ) na ausência de campo de controle. (c) Após aplicação de um campo de controle sobre a amostra atômica, esta pode deixar de absorver o campo de prova (fenômeno da EIT).

Fonte: (a) Modificado de Souza, Cabral et al. (2015); (b) e (c) autoria própria.

Do ponto de vista microscópico, a EIT é decorrente de uma coerência entre dois estados quânticos fundamentais da matéria [estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ ] da Figura 3(a), associada a uma interferência quântica entre dois canais de absorção indistinguíveis (associados aos estados vestidos do sistema), tornando transparente um meio opaco (matéria ocupa um “*dark state*”, ou seja,

quando nesse estado a matéria não se acopla ao feixe eletromagnético de prova). Conforme ilustrado na Figura 3(a), sobre átomos de três níveis na configuração  $\Lambda$  (dois estados fundamentais,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , e um excitado,  $|3\rangle$ ), incide um feixe de luz nomeado como campo de prova (amplitude  $\Omega_p$  e frequência  $\omega_p$ ) que acopla a transição atômica  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ . Se o campo de prova for ressonante com a frequência dessa transição ( $\Delta_p = 0$ ), então esse feixe de luz será totalmente absorvido pela amostra [Figura 3(b)]. Ao introduzirmos outro feixe de luz sobre a mesma amostra, denominado campo de controle (amplitude  $\Omega_c$  e frequência  $\omega_c$ ), mas que acopla a transição  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  com uma dessintonia  $\Delta_c$ , temos que o meio pode se tornar transparente perante o campo de prova [Figura 3(c)] sob certas condições introduzidas mais adiante (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005). Isso ocorre porque o campo de controle é capaz de modificar a susceptibilidade elétrica do meio associada à transição atômica estimulada pelo campo de prova. Como essa susceptibilidade determina a absorção e dispersão do meio perante o campo de prova, temos que o campo de controle é capaz de manipular a transparência do meio e seu índice de refração.

Aplicações da EIT e de seus fenômenos correlatos estão associadas, entre outras, à proposição de transistores opto-quânticos (MÜCKE et al., 2010; SOUZA; FIGUEROA et al., 2013), portas lógicas quânticas (BORGES; VILLAS-BÔAS, 2016), filtros quânticos (VILLAS-BOAS; ROSSATTO, 2019), método para geração anunciada de emaranhamento atômico (VILLAS-BOAS; ROSSATTO, 2019) e dispositivos quânticos para armazenamento e recuperação de informação (memórias quânticas) (KIMBLE, 2008; LVOVSKY; SANDERS; TITTEL, 2009; PHILLIPS et al., 2001; CHANELIÈRE et al., 2005; EISAMAN et al., 2005), os últimos baseados na impressionante possibilidade de redução da velocidade da luz em um meio sob EIT [17 m/s (HAU et al., 1999)]. Tais aplicações estão diretamente associadas aos blocos fundamentais de redes e computadores quânticos (KIMBLE, 2008; REISERER; REMPE, 2015).

A EIT vem sendo estudada há mais de duas décadas e, como dito, consiste na interferência de dois campos clássicos incidentes em uma amostra de átomos causando a anulação da absorção e modificando o índice de refração do meio, ou seja, causando modificações nas propriedades ópticas do meio, descritas pela sua susceptibilidade elétrica  $\chi_e$ . A EIT é usualmente estudada com a utilização dos conceitos de mecânica quântica e empregada em sistemas atômicos de três níveis na configuração  $\Lambda$ ,  $V$  ou *cascata* [na Figura 3(a) foi apresentada a configuração  $\Lambda$ ]. O hamiltoniano, em uma representação independente do tempo, que descreve a interação do sistema, com a utilização da aproximação de dipolo elétrico e a aproximação de onda girante

(RWA), é dado por

$$H = \delta\sigma_{22} + \Delta_p\sigma_{33} - (\Omega_p\sigma_{31} + \Omega_c\sigma_{32} + h.c.), \quad (3)$$

onde  $\delta = \Delta_p - \Delta_c$  e  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) são os operadores de abaixamento e levantamento ( $i \neq j$ ). As dessintonias são dadas por  $\Delta_p = \omega_{31} - \omega_p$  e  $\Delta_c = \omega_{32} - \omega_c$ , em que  $\omega_{31}$  é a frequência da transição atômica  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  e  $\omega_p$  é a frequência do campo de prova,  $\omega_{32}$  é a frequência da transição atômica  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  e  $\omega_c$  é a frequência do campo de controle, já h.c. significa hermitiano conjugado. Uma vez que temos um sistema quântico aberto, sua dinâmica pode ser descrita pela equação mestra para o operador densidade  $\rho$  (BREUER; PETRUCCIONE, 2007)

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_{m=1,2} \Gamma_{3m}(2\sigma_{3m}\rho\sigma_{3m} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) + \sum_{n=2,3} \gamma_n(2\sigma_{nn}\rho\sigma_{nn} - \sigma_{nn}\rho - \rho\sigma_{nn}), \quad (4)$$

onde  $\Gamma_{31}$  e  $\Gamma_{32}$  são as taxas de decaimento do nível excitado  $|3\rangle$  para os níveis  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , respectivamente, enquanto  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  são as taxas de perda de coerência de fase (defasagem) do estado fundamental  $|2\rangle$  e do estado excitado  $|3\rangle$ .

Se assumimos que os  $N$  átomos da amostra contidos em um volume  $V$  se acoplam de forma idêntica aos campos eletromagnéticos, e considerando que não há interação direta entre os átomos, a resposta óptica do meio para o campo de prova aplicado,  $E_p(t) = E_p e^{-i\omega_p t} + E_p^* e^{i\omega_p t}$ , é obtida através do valor esperado da polarização atômica

$$\mathbf{P}(t) = \chi_e \mathbf{E}(t). \quad (5)$$

A polarização pode ser escrita em termos do valor do momento de dipolo  $\mu$  por unidade de volume

$$\mathbf{P}(t) = \frac{N}{V} \text{Tr}(\mu\rho). \quad (6)$$

Mostra-se que a resposta linear do feixe de prova na amostra atômica está relacionado com o elemento da matriz densidade  $\rho_{31}$  da seguinte forma (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARRANGOS, 2005)

$$\chi_e(\Delta_p) = \frac{N}{V E_p} |\mu_{13}| \rho_{31}, \quad (7)$$

com  $\mu_{13} = \langle 1|\mu|3\rangle$ .

Das Eqs. (3) e (4), temos

$$\dot{\rho}_{31} = -i(\Delta_p - i\gamma_1)\rho_{31} - \Omega_p(\rho_{11} - \rho_{33}) + i\Omega_c\rho_{21}, \quad (8)$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i(\delta - i\gamma_2)\rho_{21} + \Omega_p\rho_{23} + i\Omega_c\rho_{31}, \quad (9)$$

$$\dot{\rho}_{23} = -i[(-\Delta_c - i(\gamma_1 - \gamma_2))\rho_{23} + \Omega_p\rho_{21} + i\Omega_c(\rho_{33} - \rho_{22})], \quad (10)$$

onde  $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$  e  $\gamma_1 = \Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3$ . O estado de absorção nulo, nomeado de estado escuro, é dado pelo estado  $|1\rangle$  quando  $\Omega_p \ll \Omega_c$  e  $\gamma_2 \ll \gamma_1$ ; resultando em  $\rho_{11} \approx 1$  e  $\rho_{22} \approx 0$ , o que leva a  $\rho_{33} = 0$ . Aplicando essas condições nas equações acima, podemos determinar  $\rho_{21}$  e  $\rho_{31}$  no regime estacionário ( $\dot{\rho}_{ij} = 0$ ) através de

$$(\Delta_p - i\gamma_1)\rho_{31} - \Omega_c\rho_{21} = \Omega_p, \quad (11)$$

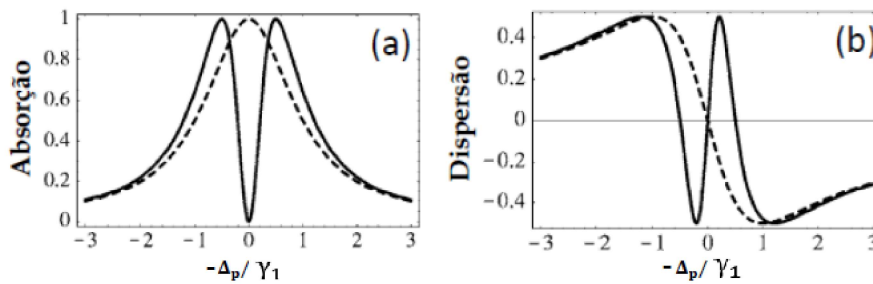
$$(\delta - i\gamma_2)\rho_{21} - \Omega_c\rho_{31} = 0. \quad (12)$$

Desse modo obtemos

$$\rho_{31} = \frac{\Omega_p(\delta - i\gamma_2)}{(\Delta_p - i\gamma_1)(\delta - i\gamma_2) - \Omega_c^2}, \quad (13)$$

que representa a susceptibilidade elétrica reduzida associada à Eq. (7), tal que a absorção relativa do meio será dada pela parte imaginária de  $\rho_{31}$  enquanto que a dispersão do meio será dado pela parte real (associado ao índice de refração do meio), características as quais são apresentadas na Figura 4. As linhas tracejadas correspondem ao caso de  $\Omega_c = 0$ , enquanto as linhas cheias  $\Omega_c \neq 0$  com  $\Delta_c = 0$ . É importante reforçar que para ocorrer o fenômeno da EIT é necessário respeitar a restrição  $\gamma_1 \gg \Omega_c \gg \gamma_2, \Omega_p$ .

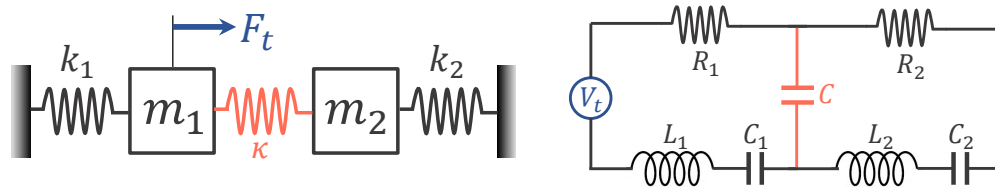
**Figura 4** – Padrão de absorção e dispersão da EIT



Legenda: Linhas tracejadas correspondem à resposta do meio perante ao campo de prova no caso em que o campo de controle está desligado, enquanto as linhas cheias são quando o campo de controle está presente e ressonante à transição  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ .

Fonte: Modificado de Fleischhauer, Imamoglu e Marangos (2005)

**Figura 5** – Sistemas de osciladores harmônicos acoplados que reproduzem a fenomenologia da EIT



Fonte: Autoria própria.

Além de se ter fenômenos tipo EIT em outros sistemas quânticos (SOUZA; CABRAL et al., 2015), é possível também obter um análogo clássico de tal fenomenologia, pelo menos em primeira ordem, em sistemas constituídos por um conjunto de osciladores harmônicos (OHs) clássicos acoplados (ALZAR; MARTINEZ; NUSSENZVEIG, 2002; AGARWAL; HUANG, 2010; SOUZA; CABRAL et al., 2015), como nas configurações ilustradas na Figura 5. Nesse caso, os OHs na forma de sistema massa-mola ou circuito RLC (cinzas) simulam as transições do átomo de três níveis da amostra atômica, já a mola/capacitor central (coral) e a força/fonte externa (azul) simulam os campos de controle e de prova, respectivamente. É importante frisar que a fenomenologia análoga provém não de uma interferência quântica, obviamente, mas daquela entre os modos de vibração do sistema (SOUZA; CABRAL et al., 2015).

Ao analisar o sistema mecânico análogo<sup>1</sup>, tem-se que os papéis dos dois campos eletromagnéticos externos presentes na EIT, de prova e de controle, são feitos por uma força externa e pelo acoplamento (mola central) entre os dois osciladores, respectivamente. Assim, enquanto que no sistema real temos um agente externo (campo de controle) interferindo na ação de outro agente externo (campo de prova), no sistema análogo é um parâmetro interno (acoplamento via mola central) que afeta a ação da força externa sobre um dos osciladores. Além disso, no regime de interesse onde se tem a ressonância do campo de controle ( $\Delta_c = 0 \Rightarrow \delta = \Delta_p$ ), para os sistemas clássicos análogos representados na Figura 5, tem-se que as frequências naturais de oscilação de ambos osciladores devem necessariamente ser iguais, sendo que essa condição não existe no fenômeno quântico original.

Para se verificar a fenomenologia da EIT na forma mais trivial encontrada na literatura de um conjunto de OHs acoplados (Figura 5), tomando como exemplo o sistema elétrico, é necessário encontrar a potência complexa  $\bar{P}$  fornecida ao circuito  $RLC_1$  (ALZAR; MARTINEZ; NUSSENZVEIG, 2002)

$$\bar{P}(\omega_p) = \bar{V}_{\text{rms}}^{(1)} \bar{I}_{\text{rms}}^{*(1)}, \quad (14)$$

<sup>1</sup> Mesmo raciocínio para o circuito elétrico uma vez que possuem equações dinâmicas equivalentes.

uma vez que o circuito  $\text{RLC}_1$  simula a transição atômica responsável por absorver o campo de prova, o qual é simulado pela fonte de tensão que alimenta o circuito  $\text{RLC}_1$ . Aqui, a barra sobre as variáveis representa que estamos trabalhando com a amplitude complexa dos fasores, enquanto o subíndice rms está relacionado à média quadrática da grandeza. A potência ativa (parte real de  $\bar{P}$ ) nos dirá a taxa de energia absorvida pelo circuito  $\text{RLC}_1$ .

A solução da dinâmica do sistema elétrico da Figura 5 está associada ao *ansatz* para a carga armazenada no capacitor do sistema 1,  $Q_1(t) = A_1(\omega_p)e^{-i\omega_p t}$ , com  $A_1$  sendo uma amplitude complexa (iremos suprimir a barra a partir de agora por questão de simplicidade; carga, corrente e tensão serão tratadas como grandezas complexas, a não ser que se diga ao contrário). Como  $I_1 = \dot{Q}_1 = -i\omega_p A_1 e^{-i\omega_p t}$  e considerando uma fonte com tensão harmônica  $V_t = V_p e^{-i\omega_p t}$  (com  $V_p$  real, por simplicidade), temos  $\bar{P} = \frac{i\omega_p V_p A_1}{2}$ , de modo que  $\text{Re}\{\bar{P}\} \propto \text{Im}\{A_1\}$  e  $\text{Im}\{\bar{P}\} \propto \text{Re}\{A_1\}$ . Ou seja,  $A_1(\omega_p)$  se comporta como o análogo da susceptibilidade reduzida  $\chi(\omega_p)$  para a fenomenologia da EIT no sistema clássico de circuitos RLC acoplados. Dessa forma, basta encontrarmos  $A_1$  e compará-lo com  $\chi(\omega_p)$  para analisarmos a fenomenologia da EIT.

Aplicando as Leis de Kirchhoff no circuito elétrico na Figura 5 e, por simplicidade, tomando  $L_1 = L_2 = L$  e  $C_1 = C_2$ , obtemos

$$R_1 \dot{Q}_1(t) + Q_1(t) \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right) - \frac{Q_2(t)}{C} + L \ddot{Q}_1(t) = V_t, \quad (15)$$

$$R_2 \dot{Q}_2(t) + Q_2(t) \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right) - \frac{Q_1(t)}{C} + L \ddot{Q}_2(t) = 0. \quad (16)$$

Assumindo o *ansatz*

$$Q_1(t) = A_1 e^{-i\omega_p t}, \quad (17)$$

$$Q_2(t) = A_2 e^{-i\omega_p t}, \quad (18)$$

dado  $\gamma_j = \frac{R_j}{2L}$  e  $\omega_j^2 = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_j} \right)$  para  $j = (1, 2)$ , além de  $\Omega_r^2 = \frac{1}{LC}$  e  $V_t = V_p e^{-i\omega_p t}$  ( $V_p$  real), obtém-se

$$A_1 = \frac{V_p(\omega_2^2 - \omega_p^2 - 2\gamma_2 i\omega_p)/L}{(\omega_1^2 - \omega_p^2 - 2\gamma_1 i\omega_p)(\omega_2^2 - \omega_p^2 - 2\gamma_2 i\omega_p) - \Omega_r^2}. \quad (19)$$

Assumindo que  $\omega_p$  está próximo das frequências naturais de oscilação  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , então  $\gamma_j \omega_p \approx$

$\gamma_j \omega_j$  e  $(\omega_j^2 - \omega_p^2) = (\omega_j + \omega_p)(\omega_j - \omega_p) \approx 2\omega_j \Delta_j$  com  $\Delta_j = \omega_j - \omega_p$ . Assim,

$$A_1 = \frac{\left(\frac{V_p}{2L\omega_1}\right) (\Delta_2 - i\gamma_2]}{(\Delta_1 - i\gamma_1)(\Delta_2 - i\gamma_2) - \left(\frac{\Omega_r}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right)^2}. \quad (20)$$

Através da comparação de  $A_1$  acima com a susceptibilidade reduzida da EIT dada pela Eq. (13), associando o campo de prova  $\Omega_p = \frac{V_p}{2L\omega_1}$  e o campo de controle  $\Omega_C = \frac{\Omega_r}{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}$ , verifica-se que o sistema clássico apresenta analogamente a fenomenologia da EIT. Desse resultado é possível notar que, como anteriormente mencionado, no regime similar ao de ressonância do campo de controle, teríamos aqui  $\Delta_2 = \Delta_1$  que impõe  $\omega_2 = \omega_1$ , restrição inexistente no fenômeno de EIT original.

Por fim, tem-se que o sistema apresentado na literatura para analogia clássica da fenomenologia da EIT possui, pelo menos, duas inconsistências: (1) análogo do campo de controle é realizado através de um parâmetro interno do sistema ao invés de um agente externo; (2) na condição análoga de ressonância de campo de controle é necessário que os osciladores acoplados possuam mesma frequência natural de oscilação. Este trabalho teve como objetivo contornar tais inconsistências.

## 2 OBJETIVOS

Explorar a fenomenologia da EIT em osciladores harmônicos clássicos parametricamente acoplados, empregando um agente de controle não oriundo de uma segunda força externa explicitamente aplicada sobre o sistema, mas através de um acoplamento dependente do tempo entre os osciladores, onde tal variação temporal é indiretamente resultante da aplicação de uma força externa sobre sistema, estabelecendo assim uma analogia mais próxima do sistema quântico original. Além disso, investigar a fenomenologia da EIT na extensão quântica do sistema clássico proposto aqui.

### 3 MÉTODOS

Neste capítulo são tratados os métodos utilizados para a obtenção da susceptibilidade reduzida do sistema no regime estacionário para as configurações de OHs aqui estudadas.

#### 3.1 Mecânica hamiltoniana

##### 3.1.1 Clássica

A mecânica pode ser descrita não só pelo formalismo newtoniano, mas também através dos formalismos hamiltoniano ou lagrangiano. Embora todos sejam equivalentes, os últimos têm a vantagem de serem uma mecânica analítica ao invés da mecânica vetorial presente no formalismo newtoniano (LEMOS, 2007). No presente trabalho, utilizou-se do formalismo hamiltoniano uma vez que este é o mais geralmente utilizado para descrever sistemas da mecânica quântica, que é o reino do fenômeno da EIT. Uma vez que se tem por objetivo investigar sistemas análogos (quânticos e clássicos) que apresentam essa fenomenologia da EIT, é conveniente descrever todos os sistemas a partir do mesmo formalismo.

Obtidas as coordenadas generalizadas ( $q_j$ ), e suas respectivas velocidades generalizadas ( $\dot{q}_j$ ), que descrevem completamente o estado de um sistema clássico, podemos escrever a função lagrangiana do sistema

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U, \quad (21)$$

em que  $T$  e  $U$  denotam as energias cinética e potencial, respectivamente. Aqui  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  denotam uma notação simplética para os conjuntos  $\{q_j\}$  e  $\{\dot{q}_j\}$ , respectivamente. Através de uma transformação de Legendre, a descrição do estado do sistema não mais será feita através de variáveis do espaço de configuração,  $\{q, \dot{q}\}$ , mas através de variáveis canonicamente conjugadas no espaço de fase,  $\{q, p\}$ , onde  $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  é o momento canonicamente conjugado; de modo que a evolução temporal do sistema será agora gerida pela (função) hamiltoniana do sistema

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_j q_j p_j - L. \quad (22)$$

A hamiltoniana descreve a própria energia mecânica do sistema ( $H = T + U$ ) quando  $T$  é uma função puramente quadrática das velocidades generalizadas e  $U$  independe destas velocidades (LEMOS, 2007), sendo que esse é de fato o cenário presente neste trabalho.

A dinâmica do sistema será dada pelas equações de Hamilton,

$$\dot{p}_j = \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (23)$$

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (24)$$

Genericamente, no formalismo hamiltoniano, a equação de movimento de uma variável dinâmica arbitrária do sistema,  $F(q, p, t)$ , é descrita por

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (25)$$

onde se tem o parênteses de Poisson entre duas variáveis dinâmicas definido como

$$\{F, G\} = \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right). \quad (26)$$

Daqui se pode observar que  $\dot{q}_j = \{q_j, H\}$  e  $\dot{p}_j = \{p_j, H\}$ , e também obter os *parênteses de Poisson fundamentais*:  $\{q_i, q_j\} = 0$ ,  $\{p_i, p_j\} = 0$  e  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ , em que  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e nulo caso contrário (LEMOS, 2007).

Corriqueiramente é conveniente realizar uma substituição de variáveis que simplifique as equações dinâmicas de um sistema e, conseqüentemente, facilite a obtenção de sua solução. Um caso especial é dado por uma transformação canônica (LEMOS, 2007), a qual consiste em realizar uma mudança de variáveis no espaço de fase que preserve a forma canônica das equações de movimento, ou seja, das equações de Hamilton. Especificamente, dadas as variáveis canônicas  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , cujas equações de movimento são governadas pela hamiltoniana  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  via equações de Hamilton [Equações (23)-(24)], uma transformação canônica consiste na transformação reversível  $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  e  $P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , desde que seja possível encontrar uma nova função hamiltoniana  $V(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  tal que

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial V}{\partial Q_j} = \{P_j, V\}, \quad (27)$$

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial V}{\partial P_j} = \{Q_j, V\}. \quad (28)$$

Em virtude disso, o critério básico de canonicidade para transformações no espaço de fase pode ser formulado em termos dos parênteses de Poisson, isto é, a transformação é canônica se, e somente se,  $\{Q_i, Q_j\}_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = 0$ ,  $\{P_i, P_j\}_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = 0$  e  $\{Q_i, P_j\}_{(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \delta_{ij}$  (LEMOS, 2007).

### 3.1.2 Quântica

No caso de um sistema quântico, denominamos de (operador) hamiltoniano  $\hat{H}$  e aplicamos a chamada quantização canônica (DIRAC, 1981), a qual consiste essencialmente em associar um operador  $\hat{\mathcal{O}}$  a cada variável dinâmica  $\mathcal{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , com o comutador<sup>2</sup> de dois operadores correspondendo ao parênteses de Poisson multiplicado por  $i\hbar$ . Um exemplo simples para ilustrar isso é ver a transição da dinâmica de  $\mathcal{O}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  na mecânica clássica para a dinâmica de  $\hat{\mathcal{O}}$  na mecânica quântica na representação de Heisenberg

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{O}, H\} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \rightarrow \frac{d\hat{\mathcal{O}}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{O}}_H, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}_H}{\partial t}. \quad (29)$$

Por questão de simplicidade e para não sobrecarregar a notação, iremos daqui para frente tomar  $\hbar = 1$  e suprimir o símbolo de acento circunflexo sobre os operadores quânticos, sendo que estes poderão ser identificados a partir do contexto.

A dinâmica de um sistema quântico isolado é determinada através da conhecida equação de Schrödinger

$$i\partial_t |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle, \quad (30)$$

em que  $|\psi_t\rangle$  descreve o vetor estado do sistema quântico no instante de tempo  $t$  na representação de Schrödinger<sup>3</sup>. Entretanto, quando o sistema é aberto, seu estado mais geral não pode ser descrito a partir de um vetor estado escrito como combinação linear dos elementos de uma dada base, ao invés disso deve ser expresso em termos de *ensembles* (misturas estatísticas) de múltiplos estados possíveis, cada um com uma probabilidade de ocorrência associada (NIELSEN; CHUANG, 2000). Nesse contexto, o estado do sistema é descrito a partir da matriz densidade<sup>4</sup> designada como  $\rho$ , que consiste no análogo quântico da densidade do espaço de fase (densidade de probabilidade de coordenada e momento) presente na mecânica estatística clássica. Sendo esse o caso, temos que a dinâmica da matriz densidade de um sistema é, analogamente à densidade do espaço de fase, governada por uma equação mestra (BREUER; PETRUCCIONE, 2007)

$$\dot{\rho}_t = -i[H, \rho_t] + \mathcal{D}[\rho_t], \quad (31)$$

<sup>2</sup>O comutador entre dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  é definido como  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .

<sup>3</sup>Existe diversas representações equivalentes da mecânica quântica. Por exemplo, na representação de Schrödinger, os operadores são independentes do tempo enquanto os vetores estado carregam a temporalidade da dinâmica. Já na representação de Heisenberg, tal relação é invertida, isto é, os operadores carregam a temporalidade da dinâmica enquanto os estados do sistema permanecem estacionários.

<sup>4</sup>A matriz densidade às vezes também é chamada de operador densidade.

em que o primeiro termo descreve a dinâmica unitária do sistema enquanto a não unitária é dada pelo operador dissipador  $\mathcal{D}[\rho_t]$ , que leva em conta o acoplamento do sistema com o meio ambiente ao seu redor.

Dado uma grandeza arbitrária do sistema associada ao operador  $\theta$ , tem-se que seu valor esperado (valor médio) é dado por  $\langle \theta \rangle = \text{Tr}(\theta \rho_t)$ , com  $\text{Tr}$  denotando a operação traço. Desse modo, uma vez que a operação traço e a operação derivada são operações lineares e, consequentemente, são comutativas, temos que a dinâmica da média desse observável é dada pela seguinte equação de movimento

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \frac{d\langle \theta \rangle}{dt} = \frac{d}{dt}[\text{Tr}(\theta \rho_t)] = \text{Tr} \left[ \frac{d}{dt}(\theta \rho_t) \right] = \text{Tr} \left[ \theta \frac{d\rho_t}{dt} \right] \Rightarrow \langle \dot{\theta} \rangle = \text{Tr}(\theta \dot{\rho}_t) \quad (32)$$

É interessante frisar que nesta monografia trabalhamos com sistemas quânticos abertos uma vez que os osciladores quânticos acoplados podem perder energia para o ambiente em seu entorno em analogia à dissipação do movimento do sistema massa-mola devido aos efeitos de atrito e à dissipação por efeito Joule nos resistores dos circuitos RLC acoplados. Nesse caso em que o sistema não é mais fechado, então o estado do sistema deve ser descrito pelo operador matriz densidade  $\rho$  cuja dinâmica é governada por uma equação mestra, conforme discutido anteriormente.

### 3.2 Aproximação de onda girante

A aproximação de onda girante, do inglês *Rotating Wave Approximation* (RWA), consiste em desprezar termos que oscilam rapidamente no(a) hamiltoniano(a) do sistema, uma vez que, na média, tais termos não contribuem significativamente para a dinâmica do sistema. Uma detalhada introdução ao assunto pode ser encontrada em Oliveira (2022).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

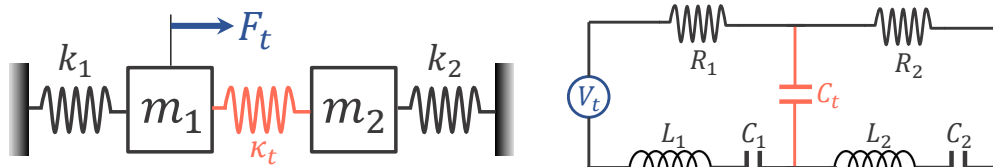
### 4.1 Sistema clássico com acoplamento paramétrico

O sistema físico proposto aqui é o apresentado na Figura 6, no qual temos dois OHs clássicos acoplados de forma paramétrica, ou seja, nossos acoplamentos se tornam dependentes do tempo e não são mais estáticos. Se considerarmos o circuito elétrico, essa variação temporal poderia estar associada a modificações da distância entre as placas do capacitor, por exemplo. Com relação ao sistema massa-mola há uma certa dificuldade em se pensar como realizar factivamente essa variação na constante da mola central; contudo, devido à equivalência dinâmica entre o sistema RLC e o sistema massa-mola, iremos aqui considerar o sistema mecânico como exemplo, assumindo o acoplamento paramétrico

$$\kappa_t = \kappa_0 + \kappa \cos(\omega t + \phi), \quad (33)$$

$x_j$  e  $p_j$  sendo, respectivamente, o deslocamento em relação à posição de equilíbrio e o momento linear do sistema massa-mola com constante de mola  $\kappa_j$ , enquanto  $F$  e  $\omega_p$  denotam a amplitude e a frequência, respectivamente, da força externa sobre a massa 1.

**Figura 6** – Sistemas acoplados parametricamente



Fonte: Autoria própria

As energias cinéticas dadas para a massa 1 e massa 2 são, respectivamente,  $T_{m1} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2$  e  $T_{m2} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$ , já as energias potenciais presentes no sistema são dadas pelas molas de constante  $\kappa_1$ ,  $\kappa_t$  e  $\kappa_2$ , que são, respectivamente,  $U_{\kappa_1} = \frac{1}{2}\kappa_1x_1^2$ ,  $U_{\kappa_t} = \frac{1}{2}\kappa_t(x_1 - x_2)^2$  e  $U_{\kappa_2} = \frac{1}{2}\kappa_2x_2^2$ , e também devido à força externa sobre a massa 1 dada por  $U_F = -F_t x_1$ . Dessa forma, a energia cinética do sistema é  $T = T_{m1} + T_{m2}$  enquanto a energia potencial é  $U = U_{\kappa_1} + U_{\kappa_t} + U_{\kappa_2} + U_F$ . Portanto, a lagrangiana ( $L = T - U$ ), considerando que a força externa seja harmônica  $F_t = F \cos(\omega_p t)$ , é

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\kappa_1x_1^2 - \frac{1}{2}\kappa_t(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}\kappa_2x_2^2 + F \cos(\omega_p t)x_1. \quad (34)$$

A hamiltoniana (desconsiderando os efeitos dissipativos *a priori*), lembrando que  $H = \sum_{j=1}^2 x_j p_j - L$  com  $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m_j \dot{x}_j$ , se reduz a

$$H = \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} \kappa_j x_j^2 \right] + \frac{1}{2} \kappa_t (x_1 - x_2)^2 - F \cos(\omega_p t) x_1. \quad (35)$$

Utilizando a seguinte transformação canônica  $X_j = \alpha_j e^{i\beta_j t}$  e  $P_j = i\alpha_j^* e^{-i\beta_j t} = iX_j^*$ , em que  $\beta_j$  é um parâmetro a ser ajustado posteriormente e

$$\begin{cases} \alpha_j = \sqrt{\frac{m_j \omega_j}{2}} \left( x_j + \frac{ip_j}{m_j \omega_j} \right) \\ \alpha_j^* = \sqrt{\frac{m_j \omega_j}{2}} \left( x_j - \frac{ip_j}{m_j \omega_j} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = \frac{1}{\sqrt{2m_j \omega_j}} (X_j e^{-i\beta_j t} + X_j^* e^{i\beta_j t}) \\ p_j = -i\sqrt{\frac{m_j \omega_j}{2}} (X_j e^{-i\beta_j t} - X_j^* e^{i\beta_j t}) \end{cases}$$

com  $\omega_j^2 = \frac{\kappa_j + \kappa_0}{m_j}$ , obtém-se que  $\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 x_j^2 = \omega_j X_j^* X_j = \omega_j |X_j|^2$ . Escrevendo a função cosseno em suas forma exponencial e definindo  $\Delta_j = \omega_j - \beta_j$ ,  $g_0 = \kappa_0 \frac{1}{\sqrt{2m_1 \omega_1}} \frac{1}{\sqrt{2m_2 \omega_2}}$ ,  $\Omega_c = \frac{\kappa}{2} \frac{1}{\sqrt{2m_1 \omega_1}} \frac{1}{\sqrt{2m_2 \omega_2}}$ ,  $\xi_j = \frac{\kappa}{4} \frac{1}{2m_j \omega_j}$  e  $\Omega_p = \frac{F}{2\sqrt{2m_1 \omega_1}}$ , a nova hamiltoniana se torna

$$\begin{aligned} V = & \sum_{j=1}^2 \Delta_j |X_j|^2 - g_0 (X_1 e^{-i\beta_1 t} + X_1^* e^{i\beta_1 t}) (X_2 e^{-i\beta_2 t} + X_2^* e^{i\beta_2 t}) \\ & - \Omega_c [e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}] (X_1 e^{-i\beta_1 t} + X_1^* e^{i\beta_1 t}) (X_2 e^{-i\beta_2 t} + X_2^* e^{i\beta_2 t}) \\ & - \Omega_p (e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t}) (X_1 e^{-i\beta_1 t} + X_1^* e^{i\beta_1 t}) \\ & + [e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)}] [\xi_1 (X_1^2 e^{-i2\beta_1 t} + 2|X_1|^2 + X_1^{*2} e^{i2\beta_1 t}) \\ & \quad + \xi_2 (X_2^2 e^{-i2\beta_2 t} + 2|X_2|^2 + X_2^{*2} e^{i2\beta_2 t})]. \quad (36) \end{aligned}$$

Os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  podem ser vistos como as frequências de fasores empregados para descrever os sistemas massa-mola 1 e 2, respectivamente. Dessa maneira, escolhendo judiciosamente tais parâmetros somos capazes de discernir a escala de tempo de cada termo na Equação (36) em relação às escalas de tempo dos fasores escolhidos. Os termos altamente oscilantes podem ser desprezados invocando a aproximação de onda girante (RWA)<sup>5</sup>, restando somente os termos estacionários na hamiltoniana efetiva. Sendo assim, assumindo<sup>6</sup>  $\beta_1 = \omega_p$  e

<sup>5</sup>A partir da RWA pode-se negligenciar os termos do tipo  $Ae^{\pm iBt}$  quando  $|\frac{A}{B}| \ll 1$ .

<sup>6</sup>A escolha  $\beta_2 = \beta_1 + \omega$  também poderia ser feita, levando a um resultado análogo a menos de algumas mudanças de sinais.

$\beta_2 = \beta_1 - \omega$ , a hamiltoniana se torna

$$\begin{aligned}
V = & \sum_{j=1}^2 \Delta_j |X_j|^2 - g_0 (X_1 X_2 e^{-i(2\omega_p - \omega)t} + X_1 X_2^* e^{i\omega t} + X_1^* X_2 e^{-i\omega t} + X_1^* X_2^* e^{i(2\omega_p - \omega)t}) \\
& - \Omega_c (X_1 X_2 e^{i\phi} e^{i(2\omega - 2\omega_p)t} + X_1 X_2^* e^{i\phi} e^{2i\omega t} + X_1^* X_2 e^{1\phi} + X_1^* X_2^* e^{i\phi} e^{i(2\omega_p - 2\omega)t} + X_1 X_2 e^{-i\phi} e^{-i(2\omega_p)t} \\
& + X_1 X_2^* e^{-i\phi} + X_1^* X_2 e^{i\phi} e^{-2i\omega t} + X_1^* X_2^* e^{-i\phi} e^{i(2\omega_p - 2\omega)t}) - \Omega_p [(X_1 + X_1^* e^{2i\omega_p t} + X_1 e^{-2i\omega_p t} + X_1^*)] \\
& + \xi_1 [(X_1^2 e^{i\phi} e^{-i(2\omega_p - \omega)t} + 2|X_1|^2 e^{i(\omega t + \phi)} + X_1^{*2} e^{i\phi} e^{i(2\omega_p + \omega)t})] \\
& + \xi_2 [(X_2^2 e^{i\phi} e^{-i(2\omega_p - 3\omega)t} + 2|X_2|^2 e^{i(\omega t + \phi)} + X_2^{*2} e^{i\phi} e^{i(2\omega_p - \omega)t})] \\
& + \xi_1 [(X_1^2 e^{-i\phi} e^{-i(2\omega_p + \omega)t} + 2|X_1|^2 e^{-i(\omega t + \phi)} + X_1^{*2} e^{-i\phi} e^{i(2\omega_p - \omega)t})] \\
& + \xi_2 [(X_2^2 e^{-i\phi} e^{-i(2\omega_p - \omega)t} + 2|X_1|^2 e^{-i(\omega t + \phi)} + X_2^{*2} e^{-i\phi} e^{i(2\omega_p - 3\omega)t})]. \tag{37}
\end{aligned}$$

Considerando  $\omega \neq \{0, \omega_p, \frac{2}{3}\omega_p, 2\omega_p\}$ ,  $\phi = 0$  e impondo as restrições  $\left| \frac{g_0}{2\omega_p - \omega} \right| \ll 1$ ,  $\frac{g_0}{\omega} \ll 1$ ,  $\left| \frac{\Omega_c}{2(\omega_p - \omega)} \right| \ll 1$ ,  $\frac{\Omega_c}{2\omega} \ll 1$ ,  $\frac{\Omega_c}{2\omega_p} \ll 1$ ,  $\frac{\Omega_p}{2\omega_p} \ll 1$ ,  $\left| \frac{\xi_j}{3\omega - 2\omega_p} \right| \ll 1$ ,  $\frac{2\xi_j}{\omega} \ll 1$ ,  $\frac{\xi_j}{|2\omega_p \pm \omega|} \ll 1$ , podemos aplicar a RWA, o que leva à hamiltoniana efetiva

$$V \simeq \delta_1 |X_1|^2 + \delta_2 |X_2|^2 - \Omega_c (X_1 X_2^* + X_1^* X_2) - \Omega_p (X_1 + X_1^*). \tag{38}$$

As equações de movimento das variáveis canônicas são então dadas pelas equações de Hamilton

$$\dot{X}_j = \{X_j, V\} = \frac{\partial V}{\partial P_j}, \tag{39}$$

$$\dot{P}_j = \{P_j, V\} = -\frac{\partial V}{\partial X_j}, \tag{40}$$

as quais podem ser simplificadas dada a relação  $P_j = iX_j^*$

$$\dot{X}_j = -i \frac{\partial V}{\partial X_j^*}, \tag{41}$$

$$\dot{X}_j^* = i \frac{\partial V}{\partial X_j}. \tag{42}$$

Neste momento é necessário lembrar que ainda não levamos em consideração os efeitos dissipativos sobre os osciladores, uma vez que estes levam a interações que dependem da velocidade das massas e tal tipo de interação não é contemplada nos formalismos lagrangiano e hamiltoniano descritos na Seção 3.1.1 e utilizados até aqui. Por outro lado, sabe-se que, para osciladores harmônicos, o termo  $2\gamma\dot{x}$  que descreve a dissipação nas equações de movimento no formalismo

de Newton pode ser introduzido *ad hoc* no formalismo hamiltoniano a partir da modificação da equação de Hamilton para  $\dot{x}$  da seguinte maneira:  $\dot{x} = \{x, H\} - \gamma x$ . Levando em conta a transformação canônica realizada, isso se traduz em modificar as Equações (41)–(42) na forma

$$\dot{X}_j = -i \frac{\partial V}{\partial X_j^*} - \gamma_j X_j, \quad (43)$$

$$\dot{X}_j^* = i \frac{\partial V}{\partial X_j} - \gamma_j X_j^*, \quad (44)$$

em que  $\gamma_j$  representa o coeficiente de amortecimento do  $j$ -ésimo sistema massa-mola.

Finalmente, a dinâmica de nosso sistema é governada pelo seguinte sistema de equações diferenciais acopladas

$$\dot{X}_1 = -i [(\Delta_1 - i\gamma_1) X_1 - \Omega_c X_2 - \Omega_p] \quad (45)$$

$$\dot{X}_1^* = i [(\Delta_1 + i\gamma_1) X_1^* - \Omega_c X_2^* - \Omega_p] \quad (46)$$

$$\dot{X}_2 = -i [(\Delta_2 - i\gamma_2) X_2 - \Omega_c X_1] \quad (47)$$

$$\dot{X}_2^* = i [(\Delta_2 + i\gamma_2) X_2^* - \Omega_c X_1^*]. \quad (48)$$

No regime estacionário,  $\dot{X}_j = 0$ , nosso problema se reduz a resolver um sistema de equações algébricas com incógnitas  $X_1$  e  $X_2$ , do qual obtemos

$$X_1 = \frac{\Omega_p (\Delta_2 - i\gamma_2)}{(\Delta_1 - i\gamma_1) (\Delta_2 - i\gamma_2) - \Omega_c^2}, \quad (49)$$

que configura o mesmo resultado quando comparamos com a susceptibilidade elétrica reduzida relacionada ao fenômeno da EIT descrita pela Equação (13). Aqui,  $X_1$  faz o análogo da susceptibilidade elétrica reduzida uma vez que a potência média fornecida à massa 1 em um ciclo da força externa é  $\overline{P} = \overline{F_t \dot{x}_1} = \overline{(F_t \frac{p_1}{m_1})} \propto \text{Im}\{X_1\}$ . É importante observar que em nossas equações  $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_p$  e  $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_p + \omega$ , e que, na condição análoga de ressonância do campo de controle na EIT temos  $\Delta_2 = \Delta_1$ , de modo que para o nosso caso temos que  $\omega_1 - \omega_p = \omega_2 - \omega_p + \omega$ , ou seja,  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Dessa forma, não é nos imposto no sistema clássico análogo a restrição de  $\omega_1 = \omega_2$ , a qual é imposto na literatura (ALZAR; MARTINEZ; NUSSENZVEIG, 2002; SOUZA; CABRAL et al., 2015). Portanto, o modelo tratado aqui com acoplamento paramétrico prevê uma analogia mais fiel à fenomenologia do sistema da EIT original. Ademais, no limite em que  $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \omega = 0$  nossos resultados recuperam o sistema

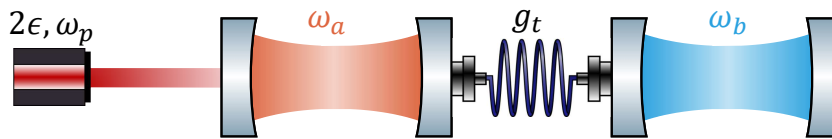
estudado na literatura (acoplamento estático).

Por fim, é importante justificar a escolha de um acoplamento paramétrico ao invés da inserção de uma outra força externa atuando diretamente em alguma parte do sistema para mapear o análogo do campo de controle. A mera inserção de uma segunda força externa não é capaz de modificar os modos normais de oscilação do sistema, o que é feito pelo acoplamento tanto estático quanto paramétrico, assim como as frequências de ressonância entre o estado fundamental e os dois estados vestidos excitados no sistema original da EIT são modificadas pelo campo de controle.

## 4.2 Eletrodinâmica quântica de cavidades

Uma vez que podemos reproduzir a fenomenologia da EIT com dois osciladores clássicos acoplados parametricamente, é natural considerar a extensão quântica desse sistema. A Figura 7 ilustra pictoricamente um modelo composto por duas cavidades ópticas acopladas parametricamente, sendo que uma das cavidades é bombeada por um campo coerente (laser).

**Figura 7** – Osciladores quânticos acoplados



Legenda: Ilustração pictórica de duas cavidades ópticas, com modos de frequências  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , acopladas através de uma fibra óptica e com a uma das cavidades sendo bombeada por um laser (campo clássico externo de amplitude  $2\epsilon$  e frequência  $\omega_p$ ).

Fonte: Autoria própria.

A dinâmica de tal sistema pode ser descrita pela equação mestra

$$\dot{\rho}_t = -i [H, \rho_t] + \mathcal{D}(\rho_t), \quad (50)$$

com o hamiltoniano sendo (REISERER; REMPE, 2015)

$$H = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + 2\epsilon \cos(\omega_p t) (a + a^\dagger) + [g_0 + 2g \cos(\omega t + \phi)] (a + a^\dagger) (b + b^\dagger), \quad (51)$$

em que  $a$  ( $a^\dagger$ ) e  $b$  ( $b^\dagger$ ) expressam os operadores de aniquilação (criação) das cavidades de frequência  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , respectivamente. O campo externo de bombeio possui amplitude  $2\epsilon$  e frequência  $\omega_p$ , enquanto a intensidade de acoplamento entre as cavidades é dada por  $g_t =$

$g_0 + 2g \cos(\omega t + \phi)$ . A dinâmica não unitária descrita pelo dissipador  $\mathcal{D}(\rho)$  leva em conta a interação de cada cavidade com seu reservatório térmico, à temperatura zero em nosso caso<sup>7</sup>,

$$\mathcal{D}(\rho_t) = \kappa_a (2a\rho_t a^\dagger - a^\dagger a \rho_t - \rho_t a^\dagger a) + \kappa_b (2b\rho_t b^\dagger - b^\dagger b \rho_t - \rho_t b^\dagger b), \quad (52)$$

em que  $\kappa_a$  e  $\kappa_b$  são as taxas de decaimento da intensidade do campo eletromagnético aprisionado nas cavidades  $a$  e  $b$  respectivamente. Assim, na Equação (52) o primeiro termo descreve o escape de fótons da cavidade  $a$  e o segundo termo a perda de fótons pela cavidade  $b$ .

Analogamente a uma transformação canônica na mecânica clássica, podemos aqui aplicar uma transformação unitária,  $U = e^{-i(\alpha a^\dagger a + \beta b^\dagger b)t}$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros ajustáveis. Tal transformação resulta na troca  $a \rightarrow ae^{-i\alpha t}$ ,  $b \rightarrow be^{-i\beta t}$  e  $H \rightarrow V = U^\dagger H U - \alpha a^\dagger a - \beta b^\dagger b$ . Desse modo, a dinâmica da matriz densidade nessa nova representação ainda se dá pela Equação (50) exceto pela troca  $H \rightarrow V$ . Reescrevendo o cosseno em termos de exponenciais complexas, obtemos

$$\begin{aligned} V = & (\omega_a - \alpha) a^\dagger a + (\omega_b - \beta) b^\dagger b + \epsilon (e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t}) (ae^{-i\alpha t} + a^\dagger e^{i\alpha t}) \\ & + [g_0 + g (e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)})] (ae^{-i\alpha t} + a^\dagger e^{i\alpha t}) (be^{-i\beta t} + b^\dagger e^{i\beta t}). \end{aligned} \quad (53)$$

Com isso, podemos encontrar a “equação de movimento” da média de um observável  $\theta$  do sistema,

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \text{Tr}(\theta \dot{\rho}_t) - i\langle [\theta, V] \rangle + \kappa_a \langle [a^\dagger, \theta] a \rangle + \kappa_a \langle a^\dagger [\theta, a] \rangle + \kappa_b \langle [b^\dagger, \theta] b \rangle + \kappa_b \langle b^\dagger [\theta, b] \rangle. \quad (54)$$

A seguir, vamos analisar dois cenários para os parâmetros ajustáveis da transformação unitária,  $\alpha$  e  $\beta$ , considerando a solução estacionária de  $\langle a \rangle$ , que corresponde à susceptibilidade elétrica reduzida desse sistema análogo, já estudado por Souza, Cabral et al. (2015) quando as cavidades se acoplam com uma intensidade de acoplamento independente do tempo.

---

<sup>7</sup>No regime óptico, considerando uma frequência da ordem de  $10^{14}$ , o número médio de fótons térmicos à temperatura ambiente é da ordem de  $10^{-7}$ , o que justifica a suposição de um reservatório térmico a temperatura zero interagindo com o sistema, pois é improvável que o reservatório injete energia térmica no sistema, somente retirando-a dele.

#### 4.2.1 Cenário 1

O primeiro cenário consiste em considerar que as cavidades se acoplam através de uma interação do tipo Jaynes-Cummings<sup>8</sup> (JC). Considerando o ajuste de parâmetros  $\alpha = \omega_p$  e  $\beta = \alpha \mp \omega$  na Equação (53), aplicando a RWA, negligenciando os termos altamente oscilantes, dado  $\omega \neq \{\omega_p, 2\omega_p\}$ ,  $\frac{|\epsilon|}{2\omega_p} \ll 1$ ,  $\frac{|g|}{2\omega} \ll 1$ ,  $\frac{|g|}{2\omega_p} \ll 1$ ,  $\frac{|g|}{2|\omega \pm \omega_p|} \ll 1$ ,  $\frac{|g_0|}{\omega} \ll 1$  e  $\frac{|g_0|}{2|\omega_p \pm \omega|} \ll 1$ , obtemos

$$V \simeq \Delta_p a^\dagger a + \delta b^\dagger b + \epsilon (a + a^\dagger) + g (a^\dagger b e^{\pm i\phi} + a b^\dagger e^{\mp i\phi}), \quad (55)$$

onde  $\Delta_p = \omega_a - \omega_p$  e  $\delta = \omega_b - \omega_p \pm \omega$ . Com isso, o sistema é efetivamente descrito por cavidades acopladas via interação Jaynes-Cummings (troca coerente de um fóton entre elas), sendo uma das cavidades bombeada coerentemente.

Como nosso intuito é encontrar o valor assintótico de  $\langle a \rangle$ , devemos substituir  $a$  no lugar de  $\theta$  na Equação (54), que leva a

$$\begin{aligned} \langle \dot{a} \rangle &= -i \langle [a, V] \rangle + \kappa_a \langle [a^\dagger, a] a \rangle + \kappa_a \langle a^\dagger [a, a] \rangle + \kappa_b \langle [b^\dagger, a] b \rangle + \kappa_b \langle b^\dagger [a, b] \rangle \\ &= -i \langle [a, V] \rangle - \kappa_a \langle a \rangle \\ &= -i \Delta_p \langle a \rangle - i\epsilon - i g e^{\mp i\phi} \langle b \rangle - \kappa_a \langle a \rangle. \end{aligned} \quad (56)$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \dot{b} \rangle &= -i \langle [b, V] \rangle + \kappa_a \langle [a^\dagger, b] a \rangle + \kappa_a \langle a^\dagger [b, a] \rangle + \kappa_b \langle [b^\dagger, b] b \rangle + \kappa_b \langle b^\dagger [b, b] \rangle \\ &= -i \langle [b, V] \rangle - \kappa_b \langle b^\dagger \rangle \\ &= -i \delta \langle b \rangle - i g e^{\pm i\phi} \langle a \rangle - \kappa_b \langle b \rangle. \end{aligned} \quad (57)$$

Como o hamiltoniano efetivo nas condições propostas se torna independente do tempo, existe uma solução estacionária para a média de um operador, a qual é obtida impondo  $\langle \dot{\theta} \rangle_{ss} = 0$ . Com isso,

$$(\Delta_p - i\kappa_a) \langle a \rangle_{ss} + g e^{\pm i\phi} \langle b \rangle_{ss} + \epsilon = 0, \quad (58)$$

$$(\delta - i\kappa_b) \langle b \rangle_{ss} + g e^{\mp i\phi} \langle a \rangle_{ss} = 0, \quad (59)$$

<sup>8</sup>Uma interação do tipo Jaynes-Cummings refere-se aqui ao cenário de que, se um fóton foi criado coerentemente em uma cavidade, isso foi às custas da aniquilação de um fóton da outra cavidade.

resultando em

$$\langle a \rangle_{ss} = -\frac{\epsilon(\delta - i\kappa_b)}{(\Delta_p - i\kappa_a)(\delta - i\kappa_b) - g^2}, \quad (60)$$

onde se nota sua equivalência com a Equação (13), ou seja, o sistema apresenta analogia do fenômeno da EIT ( $\Omega_p \leftrightarrow -\epsilon$ ,  $\Omega_c \leftrightarrow g$ ,  $\kappa_a \leftrightarrow \gamma_1$  e  $\kappa_b \leftrightarrow \gamma_2$ ). Mais uma vez, na condição de ressonância do campo de controle ( $\delta = \Delta_p$ ), aqui também não existe a restrição de que os dois ressonadores necessitam ter a mesma frequência natural de oscilação, como ocorreria caso considerássemos um acoplamento estático entre as cavidades (SOUZA; CABRAL et al., 2015).

#### 4.2.2 Cenário 2

O segundo cenário estudado se caracteriza pelo ajuste de  $\alpha = \omega_p$  e  $\beta = \omega - \omega_p$  na Equação (53). Desprezando os termos altamente oscilantes invocando a RWA, dado  $\frac{|\epsilon|}{2\omega_p} \ll 1$ ,  $\frac{|g|}{2\omega_p} \ll 1$ ,  $\frac{|g|}{2\omega}$ ,  $\frac{|g|}{2|\omega \pm \omega_p|} \ll 1$ ,  $\frac{|g_o|}{|\omega|} \ll 1$  e  $\frac{|g_o|}{|\omega - 2\omega_p|} \ll 1$ , obtemos o hamiltoniano efetivo

$$V \simeq \Delta_p a^\dagger a + \delta b^\dagger b + \epsilon(a + a^\dagger) + g(abe^{i\phi} + a^\dagger b^\dagger e^{-i\phi}), \quad (61)$$

onde  $\Delta_p = \omega_a - \omega_p$  e  $\delta = \omega_b - \omega + \omega_p$ . Nesse contexto, o sistema é efetivamente descrito por cavidades acopladas via interação anti-Jaynes-Cummings (AJC), ambas as cavidades são virtualmente excitadas ou de-excitadas simultaneamente, sendo a cavidade  $a$  também coerentemente bombeada.

Substituindo  $\theta \rightarrow a$  na Equação (54), considerando o hamiltoniano dado pela Equação (61), obtemos

$$\dot{\langle a \rangle} = -i\Delta_p \langle a \rangle - i\epsilon - ig e^{-i\phi} \langle b^\dagger \rangle - \kappa_a \langle a \rangle. \quad (62)$$

Aqui se nota que, diferentemente do *Cenário 1*,  $\dot{\langle a \rangle}$  depende não mais  $\langle b \rangle$  mas de  $\langle b^\dagger \rangle$ , cuja dinâmica é dada por

$$\dot{\langle b^\dagger \rangle} = i\delta \langle b^\dagger \rangle + ig e^{i\phi} \langle a \rangle - \kappa_b \langle b^\dagger \rangle. \quad (63)$$

No regime estacionário,  $\dot{\langle \theta \rangle} = 0$ , obtemos

$$(\Delta_p - i\kappa_a) \langle a \rangle_{ss} + g e^{-i\phi} \langle b^\dagger \rangle_{ss} + \epsilon = 0, \quad (64)$$

$$(\delta + i\kappa_b) \langle b^\dagger \rangle_{ss} + g e^{i\phi} \langle a \rangle_{ss} = 0, \quad (65)$$

resultando em

$$\langle a \rangle_{ss} = -\frac{\epsilon (\delta + i\kappa_b)}{(\Delta_p - i\kappa_a) (\delta + i\kappa_b) - g^2}. \quad (66)$$

Novamente se obtém um resultado com similaridade à susceptibilidade do sistema original da EIT [Equação (13)], exceto pelo sinal oposto no termo  $i\kappa_b$ . Verifica-se graficamente que essa mudança de sinal não altera significativamente o padrão de absorção (parte imaginária de  $\langle a \rangle_{ss}$ ) e de dispersão (parte real) quando  $\kappa_b \ll g \ll \kappa_a$  (restrição análoga para ocorrer EIT). Porém, a resposta do sistema drasticamente se altera quando não satisfazemos a restrição de parâmetros acima citada. Até onde sabemos, não existem trabalhos na literatura que relatam o fenômeno de EIT para acoplamentos AJC. Isso abre caminho para futuras investigações sobre a fenomenologia da EIT em sistema acoplados por uma interação desse tipo, e novos questionamentos surgem, como, por exemplo, se isso poderia estar ligado a uma nova física ou a respostas contraintuitivas do sistema. Como esse resultado foi obtido no período final da execução do projeto de iniciação científica do discente, não se obteve avanços nesses aspectos até a redação final desta monografia.

## 5 CONCLUSÃO

O fenômeno da EIT consiste em um agente externo (campo de controle) controlando outro agente externo (campo de prova) que age sobre um meio atômico. Na literatura se estudou a implementação dessa fenomenologia em um sistema análogo clássico composto por dois osciladores harmônicos acoplados (intensidade de acoplamento constante), sendo um dos osciladores sujeito a uma força externa. Nesse contexto análogo, enquanto a força externa faz o papel do campo de prova, a constante de acoplamento faz o papel do campo de controle. Sendo assim, essa analogia demonstra uma inconsistência uma vez que, agora, tem-se um agente interno (constante de acoplamento), e não mais externo, controlando a ação de um agente externo (força externa) sobre o sistema. Além disso, essa suposição leva a uma outra inconsistência no modelo análogo, de que, no regime equivalente de ressonância do campo de controle, é necessário que ambos osciladores clássicos possuam mesma frequência natural de oscilação, imposição a qual não existe no sistema quântico original. Neste trabalho de conclusão de curso, contornamos ambas inconsistências ao assumir que os dois osciladores são acoplados parametricamente, obtendo o análogo da fenomenologia da EIT de forma mais fiel quando comparado com o fenômeno original. Ademais, também se investigou aqui a versão quântica do sistema de osciladores acoplados parametricamente, a qual também apresenta a fenomenologia da EIT, não só quando os osciladores se acoplam através de uma interação do tipo Jaynes-Cummings, mas também de anti-Jaynes-Cummings. Para este último, não há relato na literatura até onde sabemos, o que abre caminho para novas investigações sobre EIT em sistemas com acoplamento anti-Jaynes-Cummings.

## REFERÊNCIAS

- AGARWAL, G. S.; HUANG, S. Electromagnetically induced transparency in mechanical effects of light. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 81, n. 4, abr. 2010. DOI: 10.1103/physreva.81.041803.
- ALZAR, C. L. G.; MARTINEZ, M. A. G.; NUSSENZVEIG, P. Classical analog of electromagnetically induced transparency. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 70, n. 1, p. 37–41, jan. 2002. DOI: 10.1119/1.1412644.
- BENIOFF, P. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. **Journal of Statistical Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 22, n. 5, p. 563–591, mai. 1980. DOI: 10.1007/bf01011339.
- BORGES, H. S.; VILLAS-BÔAS, C. J. Quantum phase gate based on electromagnetically induced transparency in optical cavities. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 94, n. 5, nov. 2016. DOI: 10.1103/physreva.94.052337.
- BREUER, H.; PETRUCCIONE, F. **The Theory of Open Quantum Systems**. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- BULUTA, I.; ASHHAB, S.; NORI, F. Natural and artificial atoms for quantum computation. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 74, n. 10, p. 104401, set. 2011. DOI: 10.1088/0034-4885/74/10/104401.
- CHANELIÈRE, T. et al. Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 438, n. 7069, p. 833–836, dez. 2005. DOI: 10.1038/nature04315.
- DIRAC, P. **The principles of quantum mechanics**. 4. ed. Oxford, England: Clarendon Press, jan. 1981. (International Series of Monographs on Physics).
- DIVINCENZO, D. P. The Physical Implementation of Quantum Computation. **Fortschritte der Physik**, Wiley, v. 48, n. 9-11, p. 771–783, set. 2000. DOI: 10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<771::aid-prop771>3.0.co;2-e.
- EISAMAN, M. D. et al. Electromagnetically induced transparency with tunable single-photon pulses. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 438, n. 7069, p. 837–841, dez. 2005. DOI: 10.1038/nature04327.
- FLEISCHHAUER, M.; IMAMOGLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 2, p. 633–673, jul. 2005. DOI: 10.1103/revmodphys.77.633.
- GALILEU. **Como os computadores quânticos podem mudar o mundo que conhecemos**. 2021. Disponível em:

<<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2021/12/como-os-computadores-quanticos-podem-mudar-o-mundo-que-conhecemos.html>>.

HAU, L. V. et al. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 397, n. 6720, p. 594–598, fev. 1999. DOI: 10.1038/17561.

JUN, L. Physical Realization of Harmonic Oscillator Quantum Computer. In: **LECTURE Notes in Electrical Engineering**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 29–34. DOI: 10.1007/978-3-642-27311-7\_5.

KETTERER, A. et al. Quantum information processing in phase space: A modular variables approach. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 94, n. 2, ago. 2016. DOI: 10.1103/physreva.94.022325.

KIMBLE, H. J. The quantum internet. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 453, n. 7198, p. 1023–1030, jun. 2008. DOI: 10.1038/nature07127.

LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. Livraria da Física, 2007.

LVOVSKY, A. I.; SANDERS, B. C.; TITTEL, W. Optical quantum memory. **Nature Photonics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 3, n. 12, p. 706–714, dez. 2009. DOI: 10.1038/nphoton.2009.231.

MÜCKE, M. et al. Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. **Nature**, Springer Science e Business Media LLC, v. 465, n. 7299, p. 755–758, mai. 2010. DOI: 10.1038/nature09093.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge University Press, 2000.

OLIVEIRA, A. N. de; WALBORN, S. P.; MONKEN, C. H. Implementing the Deutsch algorithm with polarization and transverse spatial modes. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, IOP Publishing, v. 7, n. 9, p. 288–292, ago. 2005. DOI: 10.1088/1464-4266/7/9/009.

OLIVEIRA, E. V. B. de. **Método de dinâmicas efetivas aplicado na análise da interação qubit-qubit em dispositivos supercondutores: a interação qubit-qubit no contexto da computação quântica**. São Carlos, 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/15735>>.

PHILLIPS, D. F. et al. Storage of Light in Atomic Vapor. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 86, n. 5, p. 783–786, jan. 2001. DOI: 10.1103/physrevlett.86.783.

REISERER, A.; REMPE, G. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 4, p. 1379–1418, dez. 2015. DOI: 10.1103/revmodphys.87.1379.

SANTOS, A. C. O Computador Quântico da IBM e o IBM Quantum Experience. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, FapUNIFESP (SciELO), v. 39, n. 1, set. 2016. DOI: 10.1590/1806-9126-rbef-2016-0155. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2016-0155>>.

SOUZA, J. A.; CABRAL, L. et al. Electromagnetically-induced-transparency-related phenomena and their mechanical analogs. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 92, n. 2, ago. 2015. DOI: 10.1103/physreva.92.023818.

SOUZA, J. A.; FIGUEROA, E. et al. Coherent Control of Quantum Fluctuations Using Cavity Electromagnetically Induced Transparency. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 111, p. 113602, 11 set. 2013. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.113602.

VILLAS-BOAS, C. J.; ROSSATTO, D. Z. Multiphoton Jaynes-Cummings Model: Arbitrary Rotations in Fock Space and Quantum Filters. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 122, n. 12, mar. 2019. DOI: 10.1103/physrevlett.122.123604.

XIN, T. et al. Quantum algorithm for solving linear differential equations: Theory and experiment. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 101, n. 3, mar. 2020. DOI: 10.1103/physreva.101.032307.