UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

Eduardo Granado Garcia

Diferentes Maneiras de Definir a Função Logarítmica Natural

São José do Rio Preto
2014

Eduardo Granado Garcia

Diferentes Maneiras de Definir a Função Logarítmica Natural

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fatima Martins

São José do Rio Preto
2014

Garcia, Eduardo Granado.
Diferentes maneiras de definir a função logarítmica natural / Eduardo Granado Garcia. -- São José do Rio Preto, 2014
54 f. : il.

Orientador: Luciana de Fatima Martins
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) 3. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 4. Logarítmos – Estudo e ensino. 5. Números reais. I. Martins, Luciana de Fatima. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Eduardo Granado Garcia

Diferentes Maneiras de Definir a Função Logarítmica Natural

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof^{a}. Dr^{a}. Luciana de Fatima Martins
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof^{a}. Dr^{a}. Ana Claudia Nabarro
USP - São Carlos

Prof. Dr. Parham Salehyan
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pela oportunidade, força, fé e proteção concedida a mim para realizar este sonho. Em segundo lugar, à minha esposa Mara, que neste período esteve presente comigo incentivando-me e apoaindo-me nos momentos mais difíceis dentre viagens, estudos e provas. Aos meus pais, pela árdua e sofrida vida que levaram para propiciar a mim e aos meus irmãos uma formação digna e decente. Agradeço também a todos os professores e colegas do Ibilce que participaram deste momento da minha vida.

Agradeço à CAPES pelo concessão da bolsa de estudos.

Agradeço, em especial, à minha orientadora professora Dr$^{\text{a}}$ Luciana de Fatima Martins, pela paciência, pelos ensinamentos e sugestões de pesquisa que acabaram por constituir-se neste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar diferentes formas de definir a função logarítmica natural. Mais especificamente, a partir da função exponencial, como sua inversa; como área de uma região do plano e, por fim, como limite de uma sequência de números reais.

Além disso, procuramos no último capítulo, realizar uma análise de algumas questões que exercem influência sobre o ensino de logaritmos na Educação Básica. Para embasamento teórico, recorremos a algumas fontes que abordam o processo de Educação Matemática em nosso país, e também às diretrizes oficiais, como PCNs e o Currículo Oficial do Estado de São Paulo. Neste último, trazemos uma análise das situações de aprendizagem que compõem o material que é disponibilizado aos alunos da rede estadual, verificando o tipo de abordagem evidenciada para o ensino de logaritmos.

Palavras-chave: Função Logarítmica Natural; Função Exponencial, números reais, sequências.

Abstract

The main objective of this paper is to present different forms of defining the natural logarithm function. And, more specifically, start from the exponential function; its inverse; as an area of a region on the plane and finally as the limit in a real number sequence.

Besides that, on the last chapter we aimed at doing an analysis of some issues that influence the teaching of logarithm in Basic Education. As theoretical basis we have employed some sources that approach the process of Mathematics Teaching in our country as well as official directives such as the PCN - National Curricular Parameters and the Sao Paulo State Official Educational Curriculum. Based on the latter we have done an analysis of the teaching sequences that make up the material which is made available to the students of the state public schools and verified the kind of approach employed for the teaching of logarithms.

Keywords: Natural logarithmic function, exponential function, real numbers, sequences

Sumário

Introdução

Neste trabalho procurou-se estruturar melhor o que são os logaritmos naturais, estudando três diferentes maneiras de definir tal função. Essa multiplicidade de abordagens que desenvolvemos ao longo desta dissertação é extremamente valiosa quando o que queremos é possibilitar uma maior compreensão do saber, ou seja, a compreensão das funções logarítmicas naturais.

Uma abordagem muito utilizada e que geralmente é o escopo da maioria dos livros didáticos e materiais desenvolvidos para a Educação Básica, utiliza como ponte para construção do significado de função logarítmica o estudo inicial das potências de 10. Define-se que um número N pode ser representado como uma potência de base 10, ou seja, $N = 10^n$. Estabelece-se uma relação direta entre o número N e o expoente n da base 10, definindo assim que n é o logaritmo decimal de N. Esta situação também é explorada posteriormente para outras bases p diferentes de 10, e que mais tarde dará respaldo para definir as funções logarítmicas na base p, dentre elas a função logarítmica natural (base e), que representa o foco deste trabalho. Nessa abordagem o que evidencia-se é a definição da função logarítmica como sendo a função inversa da exponencial. Esta forma de apresentação do conceito é mais natural para o aluno da escola básica, visto que parte-se do conhecimento de função exponencial, algo que já foi abordado em outras séries/anos e já foi assimilado pelos alunos.

A possibilidade de se conhecer no ensino básico o logaritmo natural por meio da definição geométrica representaria também uma iniciativa extremamente promissora e importante. Apesar dessa perspectiva não ser observada com naturalidade nos materiais do Ensino Médio, é perfeitamente possível de ser introduzida e estudada nas séries finais. O conhecimento de áreas e da proporcionalidade são capazes de explicar, por exemplo, a transformação T_k que envolve a preservação de áreas de figuras no plano. Trazendo para o contexto geométrico do logaritmo natural, dizer que a área sobre o ramo positivo da hipérbole equilátera $y = \dfrac{1}{x}$ compreendido entre 1 e um número real e ser igual a 1, torna-se uma proposta interessante para entender e conhecer o número neperiano, visto que só ele tem essa propriedade.

Neste trabalho também é discutido uma nova abordagem da função logarítmica natural, dada a partir do estudo da sequência de número reais $x_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$. Neste caminho, demonstrou-se que a função $\varphi(a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ apresenta todas as propriedades da função logarítmica natural, e conclui-se que se trata efetivamente da função logarítmica natural. Ficará evidente aos leitores que a abordagem supracitada talvez seja incompatível para ser estudada na maioria das escolas de educação básica, visto que se apresentam conhecimentos ligados a limites e integrais, entre outros, que não pertencem à grade de conteúdos previstos neste nível. Para o Ensino Superior, principalmente para a formação destinada às licenciaturas, é válido enfatizar o quanto tal proposta é importante e favorece o estudo de muitas propriedades ligadas aos números reais como, por exemplo, $\mathbb{R}$ ser um *corpo ordenado completo*. Esta propriedade diz, entre outras coisas, que um subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado superiormente e/ou inferiormente, possua um elemento do subconjunto sendo supremo e/ou ínfimo, entendimento fundamental que possibilitou definir a convergência de sequências de números reais.

Por fim, procurou-se no último capítulo refletir sobre o ensino de logaritmos na Educação Básica. Neste contexto, levantou-se uma série de questões que são plenos indicadores das dificuldades encontradas neste nível de ensino que impedem alcancar as expectativas de aprendizagem do conceito de uma forma plena e satisfatória. Recorreu-se também à análise do material pedagógico utilizado pela escola pública do Estado de São Paulo, verificando a forma como são abordados os conteúdos ligados ao ensino de logaritmos.

Capítulo 1

Sequência de Números Reais

Neste capítulo revisamos os conceitos, principais resultados e exemplos de sequências de números reais que são necessários para os capítulos seguintes. O material consultado é o livro [7] e o artigo [10]. Omitimos as demonstrações que podem ser encontradas em [7].

1.1 Números reais

Nesta seção fazemos uma breve revisão das principais propriedades do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, juntamente com suas consequências. Maiores detalhes podem ser encontrados no Capítulo 2 de [7].

• $\mathbb{R}$ ***é um corpo***, isto é, estão definidas em $\mathbb{R}$ duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que fazem corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, a soma $x + y \in \mathbb{R}$, como também o produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \qquad & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \qquad & (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

Os axiomas a que essas operações obedecem são:

1. *Associatividade:* para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$; $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

2. *Comutatividade:* para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$; $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

3. *Elementos Neutros:* existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

4. *Inversos:* todo $x \in \mathbb{R}$ possui um *inverso aditivo* $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe também um *inverso multiplicativo* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

5. *Distributividade:* Para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Desses axiomas, seguem todas as propriedades familiares com os números reais. Como exemplos, podemos citar:

(a) $0 + x = x$ e $(-x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ e $x^{-1} \cdot x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

(c) $x \cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(d) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$

(e) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, $(-x) \cdot (-y) = xy$ e $-(-x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(f) Se $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x^2 = y^2$, então $x = \pm y$

• $\mathbb{R}$ ***é um corpo ordenado***, isto é, existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado conjunto dos *números reais positivos*, que cumpre as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x.y \in \mathbb{R}^+$.

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Escrevemos $x < y$ e dizemos que x é menor do que y quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, existe $z \in \mathbb{R}^+$, tal que $y = x + z$. Desse modo, escrevemos $y > x$ e dizemos que y é maior do que x. A notação $x \leq y$ significa que x é menor ou igual y. São válidas as seguintes propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$:

O1. *Transitividade:* se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

O2. *Tricotomia:* dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

O3. *Monotonicidade da adição:* se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, $x + z < y + z$.

O4. *Monotonicidade da multiplicação:* se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se, porém, $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, definimos as seguintes notações para os intervalos - intervalo aberto: (a, b); itervalo fechado: $[a, b]$; intervalo semiaberto ou semifechado: $[a, b)$, $(a, b]$.

• $\mathbb{R}$ ***é um corpo ordenado completo***.

Definição 1.1.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **limitado superiormente** quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma **cota superior** de X. Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é **limitado inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma **cota inferior** de X. Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto* limitado. *Isto significa que X está contido em um intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $r > 0$ tal que se $x \in X$ então $|x| < r$.*

Exemplo 1.1.2. Tomemos o conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$. Então X é limitado superiormente pois, tomando $b = 1$:

$$\forall x \in X \Rightarrow x \leq 1,$$

assim $b = 1$ é cota superior de X. Além disso, X também é limitado inferiormente, pois tomando $a = 0$:

$$\forall x \in X \Rightarrow x \geq 0\,.$$

□

Definição 1.1.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o **supremo** do conjunto X quando b for uma cota superior de X e*

$$\forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \exists x \in X; \ \ b - \varepsilon < x,$$

ou seja, b é a menor das cotas superiores de X. Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X. Isto equivale dizer que b deve cumprir as duas condições:

S1. *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;*

S2. *Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c, \forall x \in X$, então $b \leq c$.*

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se ***ínfimo*** *do conjunto X, e escreve-se $a = \inf X$, quando:*

$$\forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \exists x \in X; \ \ x < a + \varepsilon,$$

ou seja, a é a maior das cotas inferiores de X. Isto equivale dizer que a deve satisfazer às duas condições:

I1. *Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;*

I2. *Se $c \leq x, \forall x \in X$, então $c \leq a$.*

Exemplo 1.1.4. Tomando o conjunto X do exemplo anterior temos que $b = 1$ é supremo de X pois:

i. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq 1$;

ii. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $1 - \varepsilon < x$. Basta tomar $x = 1$.

Também podemos concluir que $a = 0$ é ínfimo de X pois:

iii. Para todo $x \in X$ tem-se $0 \leq x$;

iv. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < 0 + \varepsilon$. Basta tomar $x = \dfrac{1}{n}$, onde n é um número satisfazendo $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. $\square$

Axioma 1.1.5. ***(Axioma do Supremo ou Postulado de Dedekind)*** *O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é* ***completo****, isto é, todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo.*

A partir do Axioma do Supremo podemos provar que:

Corolário 1.1.6. *Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente possui ínfimo.*

Demonstração. Com efeito, considere o conjunto $Y = \{-x; x \in X\}$. Então Y é não vazio e limitado superiormente pois, se a é cota inferior de X, temos $a \leq x, \forall x \in X$ então $-a \geq -x, \forall x \in X$, ou seja, $-a$ é cota superior para Y. Logo Y possui um supremo $b \in \mathbb{R}$. Afirmamos que o número $-b$ é o ínfimo de X. De fato, como $X = \{-y; y \in Y\}$ e b é supremo de Y, então:

$$y \leq b, \forall y \in Y \Rightarrow -y \geq -b, \forall y \in Y \Rightarrow x \geq -b, \forall x \in X,$$

ou seja, $-b$ é cota inferior de X. Além disso, se $c \leq x, \forall x \in X$, temos $-c \geq -x, \forall x \in X$ e daí $-c \geq y, \forall y \in Y$, o que implica que $b \leq -c$, já que b é supremo de Y. Logo $c \leq -b$, o que prova a afirmação. □

1.2 Sequência de números reais

Neste trabalho $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \cdots\}$.

Definição 1.2.1. *Uma **sequência de números reais** é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$ chamado n-ésimo termo da sequência.*

Denotaremos por $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$, ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n), a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Note que $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ é o conjunto formado pelos *termos da sequência x*, ou seja, pelas imagens da função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 1.2.2.

(a) $(1, 1, 1, 1, ...)$

$X = \{1\}$

$x(n) = x_n = 1.$

(b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$

$X = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\}$

$x(n) = x_n = \frac{1}{2^n}.$ □

Algumas sequências possuem propriedades especiais como, por exemplo, as que apresentamos a seguir.

Definição 1.2.3. *Uma sequência* (x_n) *é dita*

- ***limitada****, se existe* $c > 0$ *tal que* $|x_n| < c$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Quando uma sequência* (x_n) *não é limitada, dizemos que ela é* ***ilimitada****.*

- ***decrescente****, se* $x_{n+1} < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que a sequência é* ***não crescente****, se* $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

- ***crescente****, se* $x_{n+1} > x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que a sequência é* ***não decrescente****, se* $x_{n+1} \geq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de ***sequências monótonas***. Classificando as sequências apresentadas no Exemplo 1.2.2, temos:

(a) É fácil observar que a sequência $x_n = 1$ é limitada, pois $|x_n| < 2$, ou seja, todos os termos da sequência estão no intervalo $-2 < x_n < 2$. Além disso, trata-se de uma sequência monótona (pode-se defini-la tanto como não crescente ou não decrescente), pois $x_n = x_{n+1}$.

(b) A sequência $x_n = \frac{1}{2^n}$ é limitada, pois como $0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ então, tomando $c = 1$ temos $-1 < \frac{1}{2^n} < 1$. Além disso, como $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$, ou seja, $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência é monótona decrescente.

Definição 1.2.4. *Dada uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais, uma* ***subsequência*** *de* (x_n) *é a restrição da função* x *que define* (x_n) *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}_1 = n_1 < n_2 < n_3 < ... < x_n < ...\}$*. Denotemos a subsequência por* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$*, ou* $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_i}, ...)$ *ou ainda* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}_1}$*.*

Exemplo 1.2.5. Tomando a sequência do Exemplo 1.2.2 (b) e o subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{3n; n \in \mathbb{N}\}$ do conjunto $\mathbb{N}$ então, os elementos formados pela sequência $x(n) = \frac{1}{2^n}$ restrita a $\mathbb{N}_1$, é a subsequência $(\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^9}, ..., \frac{1}{2^{3n}}, ...)$, com $n \in \mathbb{N}$. □

1.3 Limites de sequências de números reais

Definição 1.3.1. *Sejam* (x_n) *uma sequência de números reais e* l *um número real. Dizemos que* (x_n) *converge para* l*, ou é* ***convergente****, e escreve-se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$*, quando* *para qualquer intervalo aberto I contendo l, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$. Quando não existir um número l para o qual x_n convirja, dizemos que a sequência x_n diverge, ou que é **divergente**.*

Exemplo 1.3.2. *Mostremos que a sequência do Exemplo 1.1.2, $x_n = \frac{1}{n}$, converge para 0. Seja I um intervalo aberto contendo 0 e seja $r = min\left(|\sup I|, |\inf I|\right)$. Para qualquer $n_0 \geq 1$, temos $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$. Tome $n_0 > \frac{1}{r}$. Logo, $r > \frac{1}{n_0}$. Deste modo, para $n > n_0$, temos $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < r$, ou seja, $\left|\frac{1}{n}\right| < r$, o que garante que (x_n) está contido no intervalo $(-r, r) \subset I$, para todo $n > n_0$.* □

Alguns resultados válidos são:

Proposição 1.3.3. a) *Se existir um número real l tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, então ele é único.*

b) *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Ver [7], p. 24. □

O seguinte resultado foi adotado como um axioma na disciplina do PROFMAT que tratou sobre sequências. Aqui o formulamos como um teorema e apresentamos sua demonstração.

Teorema 1.3.4. *Toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente.*

Demonstração. Tomemos uma sequência (x_n) não decrescente $(x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq ...)$. Da hipótese de ser limitada, temos que $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ possui um supremo S (pelo Axioma do Supremo). Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$. De fato, tomando qualquer $r > 0$, temos $S - r < S$. Como $S = \sup X$, então existe n_0 tal que $S - r < x_{n_0} \leq S$, ou seja, $S - r$ não é cota superior. Como x_n é monótona não decrescente então, para todo $n > n_0$ temos $x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $S - r < x_n$. Como $x_n \leq S$ para todo n, assim, $x_n < S + r$. Logo $x_n \in (S - r, S + r)$. Como r é aleatório, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$. A demonstração é análoga para (x_n) não crescente $(x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq ...)$. □

Segue da demonstração do teorema acima, o seguinte resultado:

Corolário 1.3.5. i) *Toda sequência de números reais crescente e limitada superiormente é convergente.*

ii) *Toda sequência de números reais decrescente e limitada inferiormente é convergente.*

O seguinte exemplo, além de aplicar os resultados vistos até o momento, é muito importante para os capítulos seguintes.

Exemplo 1.3.6. Consideremos a sequência $x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$, com $a \geq 1$ um número real. Mostremos que (x_n) é convergente. Se $a = 1$, isto é imediato pois (x_n) é uma sequência constante. Se $a > 1$, mostraremos que (x_n) é limitada inferiormente e decrescente e então basta aplicar o Corolário 1.3.5 ii). Vamos também obter uma cota inferior para (x_n), pois esta informação nos será útil posteriormente (ver Exemplos 1.3.9 e 1.3.11).

1) (x_n) *é decrescente:*

Para mostrarmos tal relação de ordem dos termos de x_n, consideremos inicialmente uma progressão geométrica de razão b, com $b > 1$:

$$1, b, b^2, ..., b^n, ...$$

Consideremos $\mathbb{R}^2$ com um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $x0y$. Representemos por P_n o ponto (n, b^n), para $n = 0, 1, 2, ...$. Obtemos assim a sequência de pontos:

$$P_0, P_1, P_2, ..., P_n, ...$$

Os pontos P_0 e P_n determinam uma reta do $\mathbb{R}^2$ que representaremos por r_n. Para $n = 1, 2, ...$, obtemos retas

$$r_1, r_2, ..., r_n, ...$$

com intersecção em P_0, como mostra a Figura 1.1.

Chamando de α_n o ângulo entre o eixo $0x$ e a reta r_n, temos que $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ e $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, para $n = 1, 2, \ldots$.

De fato, sejam P e Q, respectivamente, as intersecções de r_n e r_{n+1} com a reta das abscissas. Considerando o triângulo PQP_0 temos que α_{n+1} é o ângulo externo do ângulo $P\widehat{Q}P_0$, logo o ângulo interno $\alpha_n = Q\widehat{P}P_0$ é menor que α_{n+1}.

Uma vez que a função tangente é crescente em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, então $\text{tg}\alpha_n < \text{tg}\alpha_{n+1}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Com $R = (n, 1)$ e $S = (n + 1, 1)$ e, sendo P_0, P_n e P_{n+1} com coordenadas, respectivamente, $(0, 1)$, (n, b^n) e $(n + 1, b^{n+1})$, concluímos que:

$$P_0R = n; \quad P_0S = n + 1 \quad RP_n = b^n - 1; \quad SP_{n+1} = b^{n+1} - 1.$$

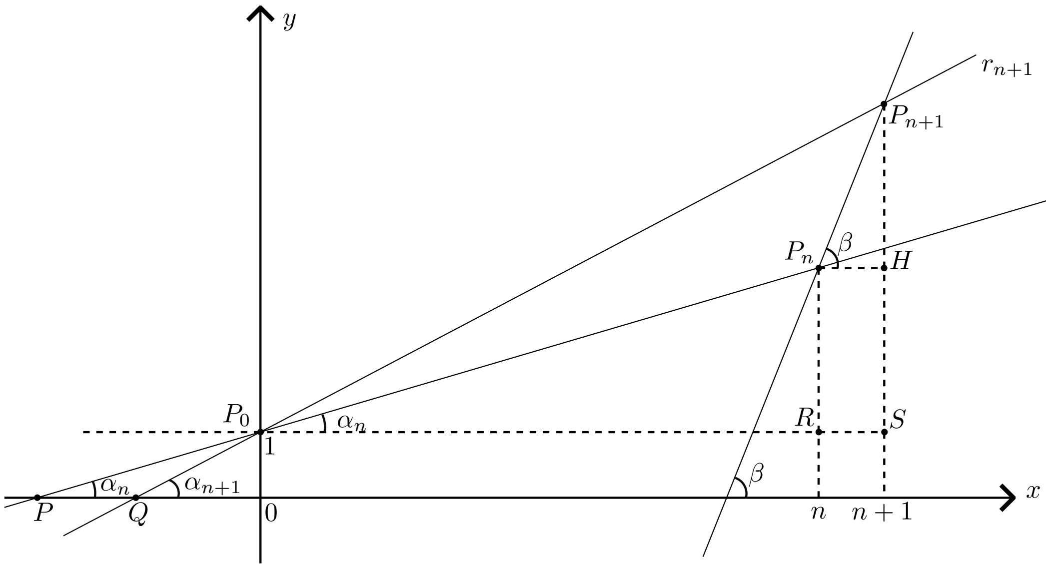

Figura 1.1: Exemplo 1.3.6

Logo,

$$\text{tg}\alpha_n = \frac{RP_n}{P_0R} = \frac{b^n - 1}{n}; \quad \text{tg}\alpha_{n+1} = \frac{SP_{n+1}}{P_0S} = \frac{b^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Assim,

$$\frac{b^n - 1}{n} < \frac{b^{n+1} - 1}{n+1},$$

ou seja,

$$(n+1)(b^n - 1) - n(b^{n+1} - 1) < 0. \tag{1.1}$$

Seja $b = \sqrt[n(n+1)]{a}$, ou seja, b é o número real que satisfaz $a = b^{n(n+1)}$. Como $a > 1$, então $b > 1$. Temos $\sqrt[n]{a} = b^{n+1}$ e $\sqrt[n+1]{a} = b^n$.

Logo:

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)(\sqrt[n+1]{a} - 1) - n(\sqrt[n]{a} - 1) = (n+1)(b^n - 1) - n(b^{n+1} - 1).$$

Portanto, segue de (1.1) que $x_{n+1} - x_n < 0$, ou seja, (x_n) é uma sequência decrescente, como afirmamos.

2) <u>(x_n) *é limitada inferiormente:*</u>

De fato, sendo $a > 1$ então $\sqrt[n]{a} > 1$. Logo, $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Deste modo, concluímos que todos os termos de x_n são positivos. Portanto, x_n é limitada inferiormente.

Concluímos de i) e ii) que a sequência (x_n) é também convergente para $a > 1$.

3) $\dfrac{a-1}{a}$ *é uma cota inferior de* (x_n)*:*

A afirmação é imediata para o caso em que $a = 1$. Suponhamos $a > 1$. Considere a reta determinada pelos pontos P_n e P_{n+1}, com coeficiente angular igual a $\text{tg}\beta$. Por construção, $\beta > \alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, uma vez que β é ângulo externo de um triângulo tendo α_n como ângulo interno não adjacente à β. Como tg é uma função crescente então $\text{tg}\beta > \text{tg}\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Do triângulo $P_n H P_{n+1}$ onde $H = (n+1, b^n)$, segue que $\text{tg}\beta = \dfrac{HP_{n+1}}{HP_n} = b^{n+1} - b^n$. Obtemos, portanto, a desigualdade

$$\frac{b^n - 1}{n} < b^n(b-1) \tag{1.2}$$

válida para todo $b > 1$.

Como $a > 1$, seja $C = \sqrt[n]{a} > 1$. Então a desigualdade (1.2) é válida para C, ou seja, obtemos

$$\frac{C^n - 1}{n} < C^n(C-1).$$

Agora, como $C^n = a$, obtemos:

$$\frac{a-1}{n} < a(\sqrt[n]{a} - 1)$$

ou,

$$\frac{a-1}{a} < n(\sqrt[n]{a} - 1) = x_n,$$

ou seja, $\dfrac{a-1}{a}$ é uma cota inferior para a sequência (x_n), com $a > 1$. □

Algumas operações e propriedades válidas para sequências de números reais e importantes para os capítulos seguintes são:

Proposição 1.3.7. *Sejam* $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = k$ *então:*

(a) $\lim_{n\to\infty} c\,x_n = c \lim_{n\to\infty} x_n = cl$, *para* c *constante.*

(b) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = l + k.$

(c) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n) = lk.$

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{l}{k}$, *com* $k \neq 0$.

Demonstração. Ver [6] p. 27. □

Proposição 1.3.8. *Se (x_n) é uma sequência convergente satisfazendo $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $x_n > b$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então $\lim_{n\to\infty} x_n \leq b$ (respectivamente $\lim_{n\to\infty} x_n \geq b$).*

Demonstração. Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, com $x_n < b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos por absurdo que $l > b$. Tomemos $r > 0$, suficientemente pequeno, tal que $l - r > b$. Por definição de limite de uma sequência, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n \in (l - r, l + r)$. Mas isso significa que para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n > b$, contradizendo a hipótese $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim_{n\to\infty} x_n \leq b$, como queríamos demonstrar. O raciocínio é análogo para o caso de $x_n > b$. □

Exemplo 1.3.9. Consideremos a sequência $x_n = n\,(\sqrt[n]{a} - 1)$, para $a > 1$, dada no Exemplo 1.3.6. Observemos que, como $\dfrac{a-1}{a}$ é cota inferior para x_n, e $a - 1$ é cota superior, uma vez que (x_n) é decrescente e $x_1 = \sqrt{a} - 1 < a - 1$ pois $\sqrt{a} < a$ ($\sqrt{a} < a$ pois, se $\sqrt{a} = b$ então $b^2 = a$, com $b > 0$, logo

$$a > 1 \Rightarrow b^2 > 1 \Rightarrow |b| > 1 \Rightarrow b > 1 \Rightarrow b^2 > b \Rightarrow a > b = \sqrt{a}).$$

Então, segue da Proposição 1.3.8 que

$$\frac{a-1}{a} \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq a - 1. \tag{1.3}$$

□

Teorema 1.3.10. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) três sequências satisfazendo $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = l = \lim_{n\to\infty} z_n$. Então $\lim_{n\to\infty} y_n = l$.*

Demonstração. Ver [6], p. 26. □

Exemplo 1.3.11. A sequência $z_n = \sqrt[n]{a}$, com $a > 0$ converge para 1.

De fato, suponhamos primeiramente que $a > 1$. Consideremos a sequência $x_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$. Pelo Exemplo 1.3.9,

$$\frac{a-1}{a} \leq x_n \leq a - 1,$$

ou seja,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)\frac{1}{n} + 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \frac{a-1}{n} + 1$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (pelo Exemplo 1.3.2), então

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{a-1}{a}\right)\frac{1}{n} + 1\right) = \left(\frac{a-1}{a}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

onde usamos a Proposição 1.3.7 (a) e (b).

Além disso, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1}{n} + 1\right) = 1$, pelos mesmos argumentos.

Consequentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, pelo Teorema 1.3.10.

Suponhamos agora que $0 < a < 1$. Seja $b = \dfrac{1}{a} > 1$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1,$$

onde usamos a Proposição 1.3.7 (d). Quando $a = 1$ o exemplo é imediato. □

Exemplo 1.3.12. Consideremos novamente a sequência $x_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ do Exemplo 1.3.6. Vimos que ela é convergente quando $a \geq 1$. Mostraremos agora que a sequência dada também converge quando $0 < a < 1$.

Seja $b = \dfrac{1}{a} > 1$. Então:

$$x_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = n\sqrt[n]{a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right) = n\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\left(1 - \sqrt[n]{b}\right) = -\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\, n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right). \tag{1.4}$$

Sejam $y_n = -\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$ e $z_n = n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right)$. Então $x_n = y_n z_n$.

Portanto, basta mostrar que y_n e z_n são sequências convergentes pois, usando a Proposição 1.3.7 (c), concluímos que x_n é convergente.

1) y_n é convergente

De fato, pelo Exemplo 1.3.11 temos que $\sqrt[n]{b}$ converge para 1. Logo, pela Proposição 1.3.7 (d), como $y_n = -\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -1$.

2) z_n é convergente

É imediato pois z_n é a sequência do Exemplo 1.3.6, uma vez que $b > 1$.

Concluímos assim que x_n é convergente para $0 < a < 1$ e que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = -\lim_{n\to\infty} z_n,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = -\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right) = -\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1\right). \tag{1.5}$$

Esta informação é usada nos próximos capítulos. $\square$

Capítulo 2

Função Logarítmica Natural

Neste capítulo revisamos definições e propriedades das funções exponenciais e logarítmicas naturais, tendo como referências principais os livros [6] e [9].

2.1 Função exponencial

Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. A ***função exponencial*** de base a é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ dada por $f(x) = a^x$. Para detalhes sobre a definição de a^x, para x racional e irracional, ver Capítulo 8, Seções 2 e 3 de [6]. A função exponencial f satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $f(0) = 1$ e $f(1) = a$;

2) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;

3) f é crescente para $a > 1$, e decrescente para $0 < a < 1$, logo injetora;

4) A função f é ilimitada superiormente.

5) f é contínua e sobrejetora.

As funções exponenciais são modelos matemáticos extremamente importantes, principalmente no que concerne à sua capacidade de representar problemas de aplicações em situações reais. Deste modo, para verificar se o modelo exponencial realmente modela o problema em questão, é preciso conhecer as propriedades que a caracterizam. O teorema a seguir fornece informações importantes neste sentido.

Teorema 2.1.1. (Caracterização da função exponencial) *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ *uma função monótona injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $f(nx) = f(x)^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

ii) $f(x) = a^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$*;*

iii) $f(x + y) = f(x)f(y)$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver [6], p. 183. □

Entre as funções exponenciais de base $a \in \mathbb{R}_*^+$, $a \neq 1$, há uma mais importante nas aplicações. Sua base é o número real denotado por e, que definimos a seguir. Antes porém, vejamos um exemplo motivador.

Exemplo 2.1.2. Consideremos o seguinte problema: Em uma cultura de bactérias, sabe-se que a população dobra num período k de tempo. Seja N_0 a população inicial. Assim ao final de um período k, a população que inicialmente era de N_0 bactérias transformará numa população $N_1 = 2N_0$, ou seja, a população cresce a uma taxa $t = 100\%$ no período de tempo k. A Figura 2.1 ilustra o problema em questão.

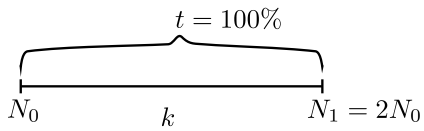

Figura 2.1:

Um possível entendimento desta situação sugere que a população inicialmente N_0, permaneceu estacionária (sem modificações) durante o período, atingindo somente no final do tempo k à população de $N_1 = 2N_0$. Note que esta proposta de entendimento não é natural, pois concebe que a transformação (crescimento) ocorre somente no final do tempo k. A forma natural de conceber o problema é a de que a transformação ocorra de forma contínua no passar do tempo k.

Suponhamos então que na metade do tempo k a população seja atualizada, conforme a Figura 2.2.

Deste modo, a população na metade do tempo k $\left(N_{\frac{1}{2}}\right)$ ficaria:

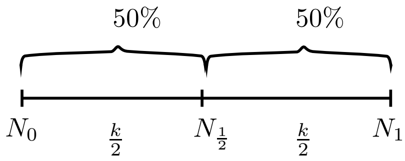

Figura 2.2:

$$N_{\frac{1}{2}} = N_0 + 50\% N_0 = N_0 + \frac{1}{2}N_0 = N_0\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

e

$$N_1 = N_{\frac{1}{2}} + 50\% N_{\frac{1}{2}} = N_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}N_{\frac{1}{2}} = N_{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = N_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

Note que $N_0\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25N_0$, ou seja, a população no final do tempo k passa a não ser mais $2N_0$. Apesar dessa proposta ser mais compreensível do que a primeira, ainda não parece ser natural, pois consideramos o tempo ainda fragmentado em duas partes e não continuamente.

Esse mesmo processo poderia ser estendido agora de modo que dividissemos o tempo k em 4 partes. Deste modo teríamos as populações atualizadas em $\{N_{\frac{1}{4}}, N_{\frac{1}{2}}, N_{\frac{3}{4}}, N_1\}$, ou seja:

$$N_{\frac{1}{4}} = N_0\left(1 + \frac{1}{4}\right);\ N_{\frac{1}{2}} = N_0\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2;\ N_{\frac{3}{4}} = N_0\left(1 + \frac{1}{4}\right)^3;\ N_1 = N_0\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$$

Neste caso, a população atualizada em $N_1 = N_0\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$ equivale a aproximadamente $2,44N_0$.

Dividindo continuamente k em n partes, com n natural, as populações atualizadas $N_{\frac{1}{n}}, N_{\frac{2}{n}}, \cdots N_{\frac{n-1}{n}}, N_{\frac{n}{n}} = N_1$ serão:

$$N_{\frac{1}{n}} = N_0\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$N_{\frac{2}{n}} = N_0\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$
$$\vdots$$

$$N_{\frac{n-1}{n}} = N_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$N_{\frac{n}{n}} = N_1 = N_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

Tomando n suficientemente grande, então $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ se aproxima do número real $2,7182...$. Este número é conhecido como Número de Euler, denotado pela letra e e igual ao $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$, o qual existe, conforme mostramos a seguir:

Proposição 2.1.3. *A sequência* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ *é convergente.*

Demonstração. Vamos provar que a sequência $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ que define e é crescente e limitada superiormente. Logo, pelo item i) do Corolário 1.3.5 tal sequência é convergente. Utilizando o Binômio de Newton $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k \, a^k \, b^{n-k}$ onde $\mathcal{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, temos:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= 1 + n \,.\, \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \,.\, \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!} \,.\, \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1 + (n+1) \,.\, \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)n}{2!} \,.\, \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \\ &\quad + \frac{(n+1)n\cdots[(n+1) - [(n+1)-1)]]}{(n+1)!} \,.\, \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{(n+1)-1}{n+1}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Desenvolvendo o binômio em x_n e x_{n+1} chegamos as expressões (2.1) e (2.2), respectivamente. É fácil observar que, além do termo a mais que conterá a segunda expressão (x_{n+1}), todos os outros termos são maiores aos correspondentes em x_n. Deste modo, provamos que $x_n < x_{n+1}$, isto é, a sequência x_n é crescente.

Agora, provaremos que x_n é limitada e para isso basta observarmos que cada parênteses que está escrito em (2.1) é menor do que 1. Deste modo, podemos escrever:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Na última desigualdade, basta observar que $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, logo a soma S_n dos seus n primeiros termos é dada pela fórmula

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

o que mostra que $S_n < 2$.

Para $n = 1$ e $n = 2$, $\frac{1}{n!} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Pelo Princípio da Indução Finita, temos que para todo $n \geq 3$, $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$. Para $n = 3$, a desigualdade $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$ é válida. Para $n > 3$, supondo a hipótese de indução $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ válida para n, mostremnos que também é válida para $n + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{2^{n-1}(n+1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{2^{n-1}(n+1)} < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\frac{1}{2^{n-1}(n+1)} < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{2^n}{2}(n+1) > 2^n \Leftrightarrow n > 1.$$

Como propomos para $n \geq 3$, temos que $\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{2^n}$ é verdadeiro, mostrando assim que $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Concluímos assim que x_n é convergente. $\square$

Observação 2.1.4.

1) Denotamos por e o limite da sequência dada na proposição anterior, ou seja,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2) Como $e > 1$ (pois $x_n > 2$ então $\lim_{n\to\infty} x_n \geq 2$, pela Proposição 1.3.8), temos bem definida a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, que tem como base o número e, ou seja, $f(x) = e^x$.

Outras considerações sobre o número e poderão ser vistas na Seção 2.3.

2.2 Função logarítmica

Sejam I e J conjuntos tais que $I, J \subset \mathbb{R}$. Recordemos que a função $g : J \to I$ é a ***inversa da função*** $f : I \to J$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in I$ e $y \in J$. Quando $g : J \to I$ é uma função inversa de $f : I \to J$, denotaremos $g = f^{-1}$.

Além disso temos:

- f é invertível $\Leftrightarrow$ f é bijetiva, ou seja, f é uma correspondência biunívoca entre I e J.
- Se g é a inversa de f, tem-se $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.
- Se $f : I \to J$ é invertível, onde $I, J \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos, então f é monótona crescente ou decrescente.

Como a função exponencial $f(x) = a^x$ é bijetora, logo invertível, temos a seguinte definição.

Definição 2.2.1. *Dado $a \in \mathbb{R}_*^+$, $a \neq 1$, a* ***função logarítmica*** *na base a é a função inversa da função exponencial de base a,*

$$\log_a : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o ***logaritmo*** *de x na base a. Chamamos de* **função logarítmica natural** *a função logarítmica cuja base é o número e dado na Observação 2.1.4, ou seja, $f(x) = \log_e x$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$. Denotamos $\log_e x$ por $\ln x$ e dizemos que $\ln x$ é o logaritmo natural de x.*

Observação 2.2.2. Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, então:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Além disso:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

Portanto,

$$\ln e = 1.$$

Vale também notar que $\ln 1 = 0$ pois $e^0 = 1$.

A função logarítmica, por ser a inversa da função exponencial, tem a propriedade de transformar produtos em somas, isto é, vale $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}_*^+$, e, por indução sobre $n \in \mathbb{N}$, prova-se que

$$n \log_a x = \log_a x^n$$

também é válida. Dentre as funções injetivas, somente a função logarítmica apresenta essa característica. O teorema a seguir caracteriza a função que apresenta tal propriedade.

Teorema 2.2.3. ***(Caracterização das funções logarítmicas)*** *Seja $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ uma função injetiva tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$, para todo $x \in \mathbb{R}_*^+$.*

Demonstração. Ver [6], p. 194. □

2.3 Propriedade geométrica dos logaritmos naturais

Apresentamos agora uma maneira geométrica de tratar os logaritmos naturais.

Seja $k \in \mathbb{R}^+$ e $T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função que associa a cada ponto (x, y) o ponto $T_k(x, y) = \left(kx, \dfrac{y}{k}\right)$.

Esta transformação preserva áreas de figuras do plano, isto é, transforma toda figura F do plano numa figura $F' = T_k(F)$ tal que F e F' têm a mesma área. Para maiores detalhes, ver [8] p. 22 e 49. Por exemplo, seja um retângulo X, de lados paralelos aos eixos, e com medidas da base valendo b e da altura a. Ele é transformado por T_k num retângulo $X' = T_k(X)$, ainda com os lados paralelos aos eixos, entretanto com medidas da base igual a kb e altura $\dfrac{a}{k}$. As áreas das figuras X e X' são equivalentes, pois a transformação T_k redimensiona de forma inversamente proporcional os lados do retângulo X em relação à X', pelo fator k na horizontal e pelo fator $\dfrac{1}{k}$ na vertical, o que preserva as medidas das áreas, conforme ilustra a Figura 2.3.

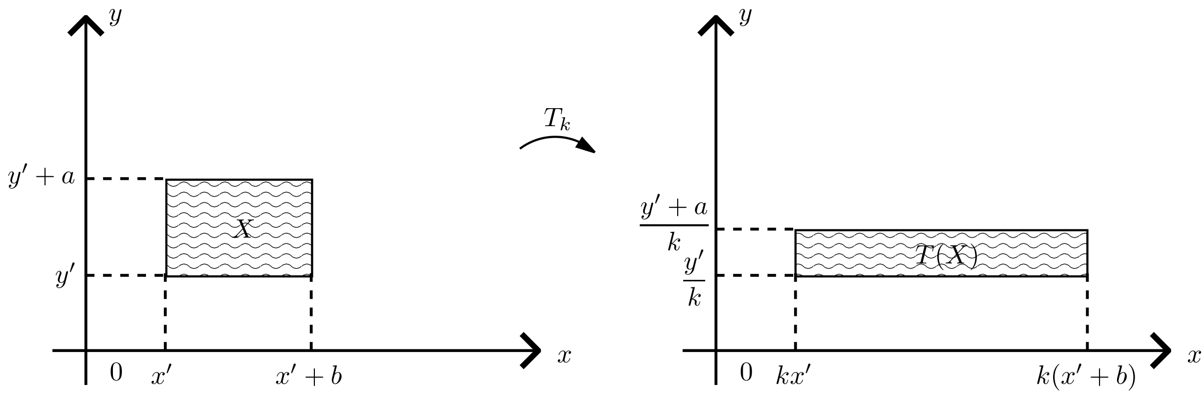

Figura 2.3:

Seja

$$H = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right); x > 0 \right\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$, ou seja, H é o gráfico da função $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Seja H_a^b a faixa da hipérbole que contém o conjunto dos pontos (x, y) tais que x está entre a e b e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$, conforme a Figura 2.4.

A transformação $T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}, para todo $k > 0$, de modo que H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área, conforme a Figura 2.5.

Definimos também "*áreas orientadas*" como sendo áreas com sinal positivo (+) ou negativo (−) para a área da faixa da hipérbole quando $a < b$ ou $b < a$, respectivamente. A área é zero quando $a = b$. Para representar estas áreas escreveremos $\acute{A}REA\, H_a^b$ com letras maiúsculas, logo:

$$\acute{A}REA\, H_a^b = \acute{a}rea\, H_a^b > 0, \quad \text{se} \quad a < b;$$

$$\acute{A}REA\, H_a^b = -\acute{a}rea\, H_a^b < 0, \quad \text{se} \quad b < a;$$

$$\acute{A}REA\, H_a^a = 0.$$

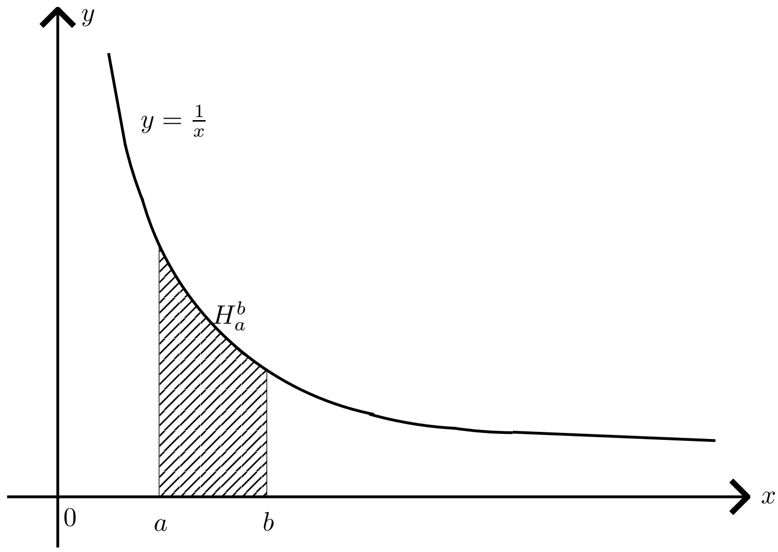

Figura 2.4:

É válido para operações com áreas as seguintes propriedades:

i) $\acute{a}rea\, H_a^b + \acute{a}rea\, H_b^c = \acute{a}rea\, H_a^c$, com $a < b < c$ e $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$;

ii) $\acute{A}REA\, H_a^b = -\acute{A}REA\, H_b^a$;

iii) $\acute{A}REA\, H_a^b + \acute{A}REA\, H_b^c = \acute{A}REA\, H_a^c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$.

Para iii) é fácil mostrar a validade da operação para $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq c \leq a$, $b \leq a \leq c$, $c \leq b \leq a$ e $c \leq a \leq b$.

Consideremos a função $F : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real $x > 0$ a área orientada da faixa da hipérbole equilátera compreendida 1 e x, ou seja,

$$F(x) = \acute{A}REA\, H_1^x.$$

Podemos observar:

a) Para $x > 1$, temos $F(x) = \acute{A}REA\, H_1^x = \acute{a}rea\, H_1^x > 0$;

b) Para $0 < x < 1$, temos $F(x) = \acute{A}REA\, H_1^x = -\acute{a}rea\, H_1^x < 0$;

c) Para $x = 1$, temos $F(1) = \acute{a}rea\, H_1^1 = 0$;

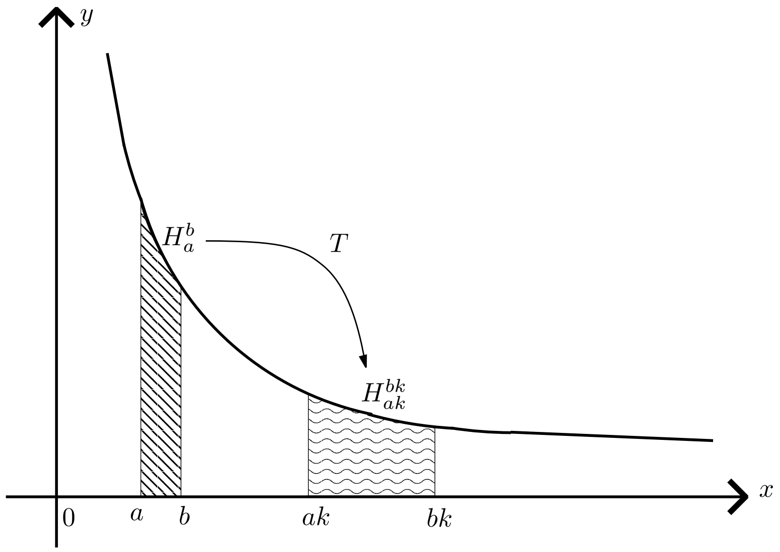

Figura 2.5:

A seguinte propriedade da função F é de fundamental importância.

Proposição 2.3.1. *$F(xy) = F(x) + F(y)$.*

Demonstração. Por definição $F(xy) = \acute{A}REA\, H_1^{xy}$. Pelo item iii) desta seção, podemos escrever:

$$\acute{A}REA\, H_1^{xy} = \acute{A}REA\, H_1^{x} + \acute{A}REA\, H_x^{xy}$$

Como $\acute{A}REA\, H_x^{xy} = H_1^{y}$, segue o resultado. □

Observação 2.3.2. *Como F claramente é monótona crescente (logo injetiva) e satisfaz $F(xy) = F(x) + F(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_*^+$, segue do Teorema 2.2.3 que existe $a > 0$, tal que $F(x) = \log_a x$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$.*

Teorema 2.3.3. *O número a da Observação 2.3.2 é o número e dado na Observação 2.1.4, isto é, $F(x) = \ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$.*

Demonstração. Considerando a Figura 2.6 e o retângulo menor com base medindo $\frac{1}{n}$ e altura igual a $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, contido na faixa $H_1^{1+\frac{1}{n}}$, que por sua vez está contida no retângulo maior, com base medindo $\frac{1}{n}$ e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas figuras, temos:

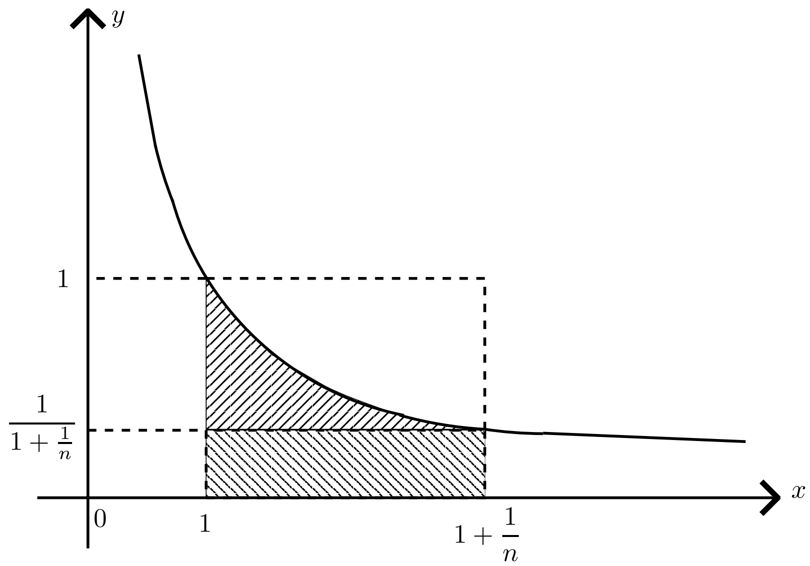

Figura 2.6:

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leq F\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Multiplicando por n:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq n \log_a \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 1,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq \log_a \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Assim,

$$a^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a.$$

Quando n tende ao infinito, $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ se aproxima de 1 (ver Exemplo 1.3.2), logo $a^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}$ converge para a. Portanto, segue do teorema que:

$$a = e,$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Concluímos do teorema acima que, geometricamente, a função logarítmica natural $\ln x$ calcula a área orientada da faixa da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ compreendida entre 1 e x.

Notemos também que $\acute{A}REA\, H_1^e = \acute{a}rea\, H_1^e = F(e) = \ln e = 1$, uma vez que $e > 1$. Portanto o número e é o único real x tal que $\acute{A}REA\, H_1^x = 1$.

Observação 2.3.4. Segue das considerações anteriores que

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt,\ \forall x \in \mathbb{R}_*^+,$$

uma vez que $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt = \acute{A}REA\, H_1^x$.

Capítulo 3

Função Logarítmica como Limite de Sequências de Números Reais

Consideremos a sequência:

$$x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

com $a > 0$ real.

Vimos nos Exemplos 1.3.6 e 1.3.12 do Capítulo 1 que essa sequência é convergente. Como o seu limite depende apenas de a, podemos definir uma função

$$\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$$

dada por:

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{3.1}$$

onde $\mathbb{R}_*^+$ denota o conjunto dos números reais positivos (excluindo o zero).

O objetivo deste capítulo é estudar a relação entre a função φ e a função logarítmica natural. Mostremos que tratam-se da mesma função.

Pela Observação 2.3.4 basta provar que

$$\varphi(a) = \int_1^a \frac{1}{x}dx.$$

A principal referência para este capítulo é o artigo [10].

3.1 Propriedades da função $\varphi = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

Claramente a função φ é positiva para $a > 1$ (ver o Exemplo 1.3.6, onde mostramos que $\varphi(a) \geq \dfrac{a-1}{a} > 0$, já que $a > 1$). Quando $0 < a < 1$, usando a Equação 1.4 do Exemplo 1.3.12, concluímos que:

$$\varphi(a) = -\varphi\left(\frac{1}{a}\right).$$

Logo φ é negativa para $0 < a < 1$. Além disso $\varphi(1) = 0$.

Proposição 3.1.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, tem-se:*

i) $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$

ii) $\varphi\left(\dfrac{a}{b}\right) = \varphi(a) - \varphi(b)$

iii) $\varphi\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \dfrac{p}{q}\varphi(a)$, com $p, q \in \mathbb{N}$

Demonstração. i) Por definição,

$$\varphi(ab) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{ab} - 1).$$

Podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} - 1 = (\sqrt[n]{a} - 1)(\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1).$$

Logo, pela Proposição 1.3.7 (b) e (c) e o Exemplo 1.3.11,

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{b} - 1) + \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

como queríamos.

ii) Temos,

$$0 = \varphi(1) = \varphi\left(\frac{a}{a}\right) = \varphi(a) + \varphi\left(\frac{1}{a}\right),$$

onde a última igualdade segue do item i).

Logo,

$$\varphi(a) = -\varphi\left(\frac{1}{a}\right).$$

Assim,

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi\left(a.\frac{1}{b}\right) = \varphi(a) + \varphi\left(\frac{1}{b}\right) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

como queríamos

iii) Mostremos, por indução, que:

$$\varphi\left(a^p\right) = \underbrace{\varphi(a) + \varphi(a) + \ldots + \varphi(a)}_{p\ vezes} = p\varphi(a),$$

onde p é um número natural.

Para $p = 1$, temos $\varphi\left(a^1\right) = 1\varphi(a) = \varphi(a)$. Suponhamos $\varphi\left(a^p\right) = p\varphi(a)$ e mostremos que $\varphi\left(a^{p+1}\right) = (p+1)\varphi(a)$.

Utilizando i) e a hipótese de indução, temos:

$$\varphi\left(a^{p+1}\right) = \varphi\left(a^p a\right) = \varphi\left(a^p\right) + \varphi(a) = p\varphi(a) + \varphi(a) = (p+1)\varphi(a).$$

Então, pelo Princípio da Indução Finita, temos $\varphi\left(a^p\right) = p\varphi(a)$ é válido para qualquer p natural.

Mostremos agora $\varphi\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\varphi(a)$, com $p, q \in \mathbb{N}$.

Seja $c = \sqrt[q]{a}$. Logo $a = c^q$. Assim podemos escrever:

$$\varphi(a) = \varphi\left(c^q\right) = q\varphi(c) = q\varphi\left(\sqrt[q]{a}\right),$$

ou seja,

$$\frac{1}{q}\varphi(a) = \varphi\left(\sqrt[q]{a}\right) = \varphi\left(a^{\frac{1}{q}}\right). \tag{3.2}$$

Portanto,

$$\varphi\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \varphi\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\,\varphi\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q}\varphi(a),$$

onde a última igualdade segue da igualdade (3.2), como queríamos. □

Vamos estudar agora o gráfico da função φ.

3.1.1 Gráfico da função φ

Sejam a e b dois números reais positivos, com $a > b$. Logo $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right) > 0$ pois $\frac{a}{b} > 1$. Consequentemente, concluímos que φ é crescente.

Analisemos se φ é limitada. Recorde que:

- Dizer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ significa que $\forall M > 0, \exists A > 0$ tq $x > a \Rightarrow f(x) > M$;
- e dizer que $\lim\limits_{x\to 0^+} -\infty$ significa que $\forall N > 0, \exists \delta > 0$ tq $0 < x < \delta \Rightarrow f(x) < -N$.

O primeiro significa que φ não é limitada superiormente e, no segundo, que φ não é limitada inferiormente.

Afirmamos que φ não é limitada superiormente e nem inferiormente.

De fato, seja $M > 0$ um número real qualquer e n um natural satisfazendo $\varphi(2^n) > M$. Observemos que n existe pois basta tomar $n > \frac{M}{\varphi(2)}$, pois, como $\varphi(2) > 0$ já que $\varphi(1) = 0$ e φ é crescente, então

$$n > \frac{M}{\varphi(2)} \Rightarrow n\varphi(2) > M \Rightarrow \varphi(2^n) > M,$$

onde usamos a Proposição 3.1.1 (iii). Assim tomando $a > 2^n$, temos $M < \varphi(2^n) < \varphi(a)$, já que φ é crescente. Deste modo, a função φ não é limitada superiormente, ou seja, $\lim\limits_{a\to\infty} \varphi(a) = +\infty$.

De modo análogo, dado um número real qualquer $N > 0$, seja n um natural satisfazendo $\varphi(2^{-n}) < -N$. A existência de n é garantida pois basta tomar $n > \frac{N}{\varphi(2)}$ que teremos:

$$n > \frac{N}{\varphi(2)} \Rightarrow -n\varphi(2) < -N \Rightarrow \varphi\left(2^{-n}\right) < -N.$$

Logo, tomando $a < 2^{-n}$ temos $\varphi(a) < \varphi(2^{-n}) < -N$, pois φ é crescente. Concluímos assim que $\lim\limits_{a\to 0} \varphi(a) = -\infty$.

Portanto φ não é limitada. Passemos a estudar a derivada da função φ.

Das desigualdades (1.3) dada no Exemplo 1.3.9, temos $\frac{a-1}{a} \leq \varphi(a) \leq a - 1$, para $a > 1$. Quando $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$ e daí vale:

$$\frac{\frac{1}{a} - 1}{\frac{1}{a}} \leq \varphi\left(\frac{1}{a}\right) \leq \frac{1}{a} - 1,$$

ou seja,

$$1 - a \leq \varphi\left(\frac{1}{a}\right) \leq \frac{1-a}{a}.$$

Como $\varphi\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\varphi(a)$, então substituindo na expressão acima e multiplicando por (-1), obtemos

$$a - 1 \geq \varphi(a) \geq \frac{a-1}{a}. \tag{3.3}$$

Portanto, as desigualdades são válidas para todo $a > 0$.

Calculemos a derivada de φ, por definição. Substituindo a nas desigualdades dadas em (3.3) por $\dfrac{a+h}{a}$, obtemos:

$$\frac{a+h}{a} - 1 \geq \varphi\left(\frac{a+h}{a}\right) \geq \frac{\frac{a+h}{a} - 1}{\frac{a+h}{a}}.$$

Realizando manipulação algébrica e utilizando a Proposição 3.1.1 ii), obtemos:

$$\frac{h}{a} \geq \varphi(a+h) - \varphi(a) \geq \frac{h}{a+h},$$

Multiplicando as desigualdades por $\dfrac{1}{h}$, então

$$\frac{1}{a+h} \leq \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} \leq \frac{1}{a}.$$

Fazendo $h \to 0$, segue do Teorema 1.3.10 que:

$$\frac{d}{dt}\varphi(a) = \frac{1}{a}.$$

A derivada segunda de $\varphi(a)$ é $-\dfrac{1}{a^2}$, que é sempre negativa. Logo o gráfico de φ é côncavo para baixo, como mostra a Figura 3.1.

3.1.2 O número e

Representemos por $\overline{e}$ a solução de $\varphi(a) = 1$. Substituindo $a = \overline{e}$ na desigualdade da esquerda em (3.3), obtemos

$$\varphi(\overline{e}) \leq \overline{e} - 1 \Rightarrow 1 \leq \overline{e} - 1 \Rightarrow 2 \leq \overline{e}.$$

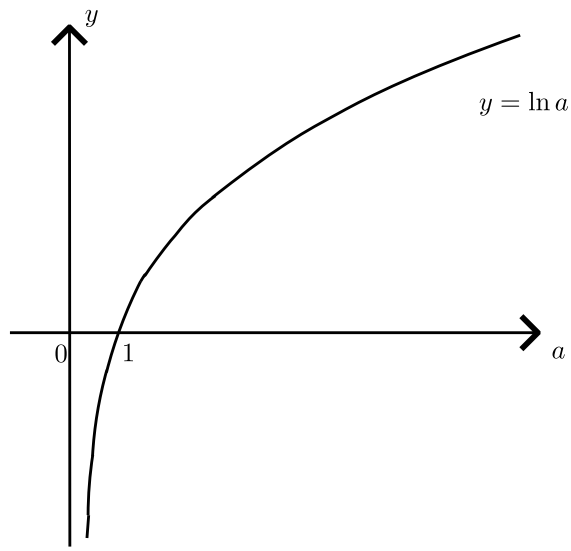

Figura 3.1:

Fazendo $a = \sqrt{\overline{e}}$ na desigualdade da direita de (3.3) temos

$$\frac{\sqrt{\overline{e}}-1}{\sqrt{\overline{e}}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\overline{e}} < 2 \Rightarrow \left(\overline{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2 < 2^2 \Rightarrow \overline{e} < 4.$$

Logo $2 \leq \overline{e} \leq 4$.

Fazendo-se $a = \sqrt[n]{\overline{e}}$ nas desigualdades (3.3) temos:

$$\frac{\sqrt[n]{\overline{e}}-1}{\sqrt[n]{\overline{e}}} < \frac{1}{n} \Rightarrow n\sqrt[n]{\overline{e}} - n < \sqrt[n]{\overline{e}} \Rightarrow (n-1)\sqrt[n]{\overline{e}} < n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{e})^{\frac{1}{n}} < \frac{n}{n-1} \Rightarrow \left((\overline{e})^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Rightarrow \overline{e} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

e,

$$\frac{1}{n} < \sqrt[n]{\overline{e}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + 1 < (\overline{e})^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \left(\frac{1}{n}+1\right)^n < \left((\overline{e})^{\frac{1}{n}}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{n}+1\right)^n < \overline{e}.$$

Logo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \overline{e} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}, \text{ para } n > 1.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right] =$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,$$

concluímos que

$$\overline{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Portanto, segue da Observação 2.1.4 que $\overline{e} = e$, ou seja, $\varphi(e) = 1$.

3.2 Relação entre a função φ e a função $\ln$

Vimos que a função φ é crescente e satisfaz $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Logo, segue do Teorema 2.2.3 que existe $c \in \mathbb{R}_*^+$ tal que $\varphi(x) = \log_c x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$. Vamos mostrar que $c = e$, ou seja, que $\varphi(x) = \ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$. Vimos na Seção 2.3 que:

- se $a > 1$ então $\ln a =$ Área H $= \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}dx,$

- se $0 < a' < 1$ então $\ln a' = -$ Área K $= -\displaystyle\int_{a'}^1 \frac{1}{x}dx,$

onde H e K são as regiões dadas na Figura 3.2.

Portanto, basta mostrar que

- se $a > 1$ então $\varphi(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}dx,$

- se $0 < a' < 1$ então $\varphi(a') = -\displaystyle\int_{a'}^1 \frac{1}{x}dx.$

Note que $\varphi(1) = 0 = \ln 1$.

Suponhamos $a > 1$.

Consideremos a decomposição

$$D = \left\{1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, ..., a^{\frac{n-1}{n}}, a^{\frac{n}{n}}\right\}$$

do intervalo $[1, a]$, veja Figura 3.3.

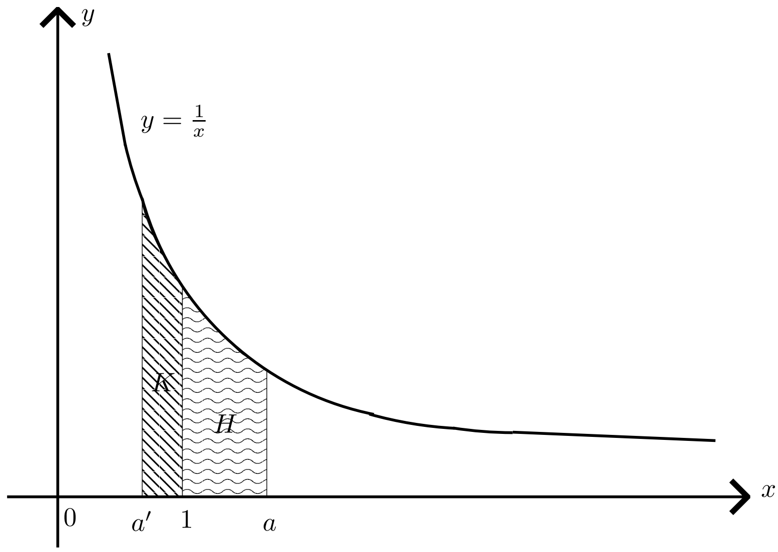

Figura 3.2:

Tomemos um intervalo genérico $\left[a^{\frac{r-1}{n}}, a^{\frac{r}{n}}\right]$ desta composição. Observe que há dois retângulos com base nesse intervalo, como mostra a Figura 3.4.

O primeiro aproxima a área de H por falta e a segunda por excesso. A altura do primeiro retângulo é $a^{-\frac{r}{n}}$ e a do segundo é $a^{-\frac{r-1}{n}}$. Portanto a soma das áreas de todos os retângulos por falta (s_D), determinados pela decomposição D, é dada por:

$$s_D = \sum_{r=1}^{n} a^{-\frac{r}{n}} \left[a^{\frac{r}{n}} - a^{\frac{r-1}{n}}\right].$$

Analogamente, a soma das áreas dos retângulos por excesso (S_D) é:

$$S_D = \sum_{r=1}^{n} a^{-\frac{r-1}{n}} \left[a^{\frac{r}{n}} - a^{\frac{r-1}{n}}\right].$$

Operando as expressões, temos:

$$s_D = \sum_{r=1}^{n} \left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right) = n\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right)$$

e

$$S_D = \sum_{r=1}^{n} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

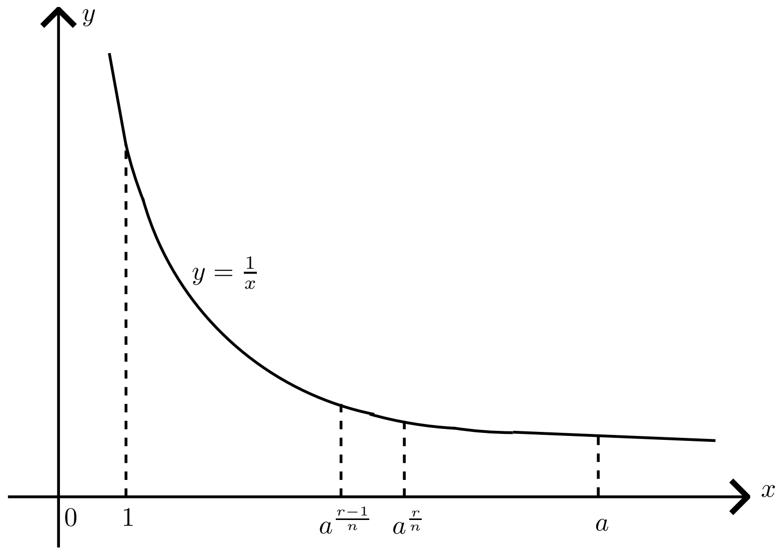

Figura 3.3:

Como a área procurada é dada pela integral $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}dx$, obtemos a desigualdade:

$$s_D \leq \int_1^a \frac{1}{x}dx \leq S_D$$

isto é,

$$n\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right) \leq \int_1^a \frac{1}{x}dx \leq n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - a^{-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{a} - 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = \varphi(a),$$

visto que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, obtemos:

$$\varphi(a) \leq \int_1^a \frac{1}{x}dx \leq \varphi(a).$$

Portanto,

$$\varphi(a) = \int_1^a \frac{1}{x}dx = \ln a. \tag{3.4}$$

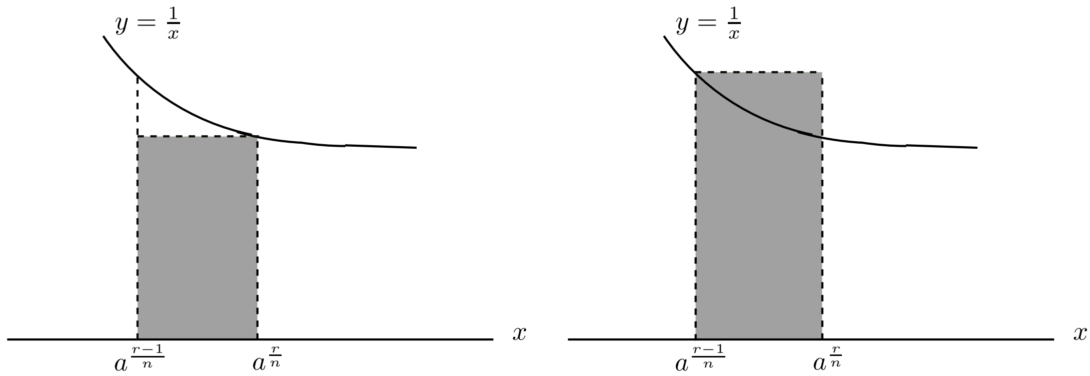

Figura 3.4:

Suponhamos agora $0 < a' < 1$. Então $\dfrac{1}{a'} > 1$ e, portanto,

$$\varphi\left(\frac{1}{a'}\right) = \ln\left(\frac{1}{a'}\right) = \ln 1 - \ln a' = -\ln a' \, .$$

Por outro lado,

$$\varphi\left(\frac{1}{a'}\right) = \varphi(1) - \varphi(a') = -\varphi(a').$$

Portanto,

$$\varphi(a') = \ln a' \, ,$$

como queríamos.

Portanto, a função φ é a função logarítmica natural. $\square$

Capítulo 4

Logaritmos na Educação Básica

4.1 Considerações Iniciais

Ao questionarmos a relevância do tema logaritmos a uma determinada parte de professores que atuam no Ensino Médio em nosso país provavelmente ouviríamos um certo desprestígio pelo ensino e aprendizagem deste conteúdo. É comum ainda verificar, em grande parte das avaliações em larga escala destinadas aos alunos da Educação Básica, como ENEM, SARESP (Estado de São Paulo), Avaliação da Aprendizagem em Processo (Estado de São Paulo), entre outros, a ausência, total ou parcial, da abordagem deste conteúdo em problemas e questões da prova, mesmo sabendo que o ensino de logaritmos pertence à grade de conteúdos voltados para o Ensino Médio.

Essas percepções nos remetem a alguns questionamentos: Qual o motivo do conhecimento de logaritmos ser tão pouco prestigiado no Ensino Médio na Educação Básica? Por que os mecanismos avaliativos das instituições que aferem a qualidade da Educação Básica não contemplam com maior importância o conhecimento de logaritmos em seus exames?

Comecemos inicialmente pontuando alguns fatores que estão presentes no cenário da escola básica e que representam um empecilho para a melhoria da qualidade do ensino da matemática e, consequentemente, dos logaritmos em nosso país.

Um primeiro aspirante para essa condição encontra-se na formação inicial que os futuros professores recebem na Educação Superior. De acordo com [3], é comum encontrar alunos nos terceiros e quartos anos dos cursos de licenciatura em Matemática que não sabem responder perguntas como: O que é área? O que é logaritmo? O que é integral? Para que servem? A forma pouco funcional e superficial conferida aos conteúdos matemáticos na graduação tornam o ensino e aprendizagem dos mesmos fortemente centrados na técnica em detrimento da formação de conceitos. Esta prática não contribui nem para a aprendizagem da Matemática, de um modo geral, muito menos para a dos logaritmos. A este momento de formação inicial de professores que nos referimos, provavelmente caracterizará a forma de atuar desse docente em sala de aula, desenvolvendo um efeito em cadeia que futuramente recairá sobre os alunos da Educação Básica. Apesar de haver um enorme empenho por parte de universidades, secretarias de educação e outras instituições para alterar o quadro desfavorável que caracteriza o ensino de Matemática no Brasil, consequentemente o ensino de logaritmos, pouco tem contribuído para a formação inicial quanto continuada dos professores para o exercício da docência, conforme explica [2].

Outro fator importante que possivelmente justifica a visão conturbada dos logaritmos na escola básica encontra-se na história da Educação Matemática em nosso país. É pertinente salientar, conforme traz [4], que a Matemática ensinada por aqui sempre apresentou uma forte e estreita ligação com as propostas de ensino desenvolvidas no continente europeu, o que posteriormente só viria a ser rompido pelas ideias da Etnomatemática, do mesmo autor, fundamentada na tendência socioetnocultural defendida também por [5]. Deste modo, em 1950, o Brasil adere ao movimento internacional de reforma do currículo escolar que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna, que epistemologicamente trouxe mudanças significativas ao modo como educadores e pesquisadores pensavam o ensino da Matemática no país. Dentre elas, podemos ressaltar o formalismo da linguagem Matemática e a preocupação excessiva com a simbologia, o rigor, e os aspectos estruturais e lógicos centrados principalmente em noções da teoria dos conjuntos. Este movimento segregou o ensino da Matemática em diversos níveis, algébrico, geométrico e aritmético, descontruindo a ligação estreita entre os mesmos, promovendo a falta de sentido e significado no aprendizado dos conteúdos matemáticos. Muitos especialistas na Educação afirmam que há ainda uma forte presença das ideias pregadas naquele período em livros e publicações nos tempos atuais, obras que são amplamente divulgadas em escolas e instituições de ensino e servem de apoio para formação de professores que atuam na Educação Básica. Para os logaritmos a realidade não é nada diferente, vista por todos como um conteúdo abstrato, complexo, carregado de propriedades e sem utilidade no cotidiano, é percebida como difícil de ser aprendida e questionada por especialistas da área da Educação sobre sua aplicabilidade dentro da Educação Básica.

A busca por contextos e de aplicabilidade para o ensino de logaritmos apresenta-se também como um grande desafio aos educadores. É necessário buscar a compreensão do significado das mudanças conceituais historicamente e não somente o significado dos conceitos fundamentais.

> Os logaritmos, por exemplo, que inicialmente eram instrumentos fundamentais para a simplificação de cálculos, hoje não se destinam precipuamente a isso, sendo imprescindíveis no estudo das grandezas que variam exponencialmente: decomposição radiativa, crescimento exponencial, potencial hidrogenionico, escala Richter para terremotos, decibéis etc. Quem ignorar hoje a riqueza de significados presente na ideia de logaritmo e se dirigir a uma sala de aula do Ensino Médio pretendendo ensiná-la tendo em vista a simplificação de cálculos não será compreendido pelos alunos, que poderão até mesmo considerar estranha a intenção do professor. ([13], p. 45)

A mudança ao qual descreve o documento norteador do Estado de São Paulo está relacionada ao modelo interdisciplinar que deve ser adotado para o ensino de logaritmos junto às ciências, ou seja, seu tratamento deve partir de problemas que envolvam aplicações em situações reais, conforme destaca os PCN para o Ensino Médio.

> Para se conduzir o ensino de forma compatível com uma promoção das competências gerais, além da consciência de que, em cada aula de cada ciência, se desenvolvem linguagens, se realizam investigações e se apresentam contextos, é preciso que o professor tenha a percepção de linguagens comuns entre a sua disciplina e as demais de sua área para auxiliar o aluno a estabelecer as sínteses necessárias a partir dos diferentes discursos e práticas de cada uma das disciplinas. Isso propicia a composição de uma ideia mais ampla de Ciência para além das diferentes ciências, de forma que os instrumentos gerais de pensamento reforcem e ampliem os instrumentos particulares. ([1], p. 26)

Em relação à produção de significados temos que destacar que não representa apenas um movimento de buscar uma utilidade prática em outras áreas que produzirá um ensino de logaritmos mais atraente aos olhos dos alunos, mas sim a busca por apresentar um significado ou um sentido para aquilo que pretendemos que aprendam. Neste sentido, os logaritmos se apresentam como um potente catalisador para produção de centros de interesse que estejam associados ao estudo de vários fenômenos reais onde se aplicam taxas de variação exponencial.

A compreensão das ideias apresentadas até o momento são fortes indicadores que traduzem de certo modo um possível cenário do ensino e a aprendizagem dos logaritmos em nosso país. Uma maneira importante de conhecer como ela se apresenta para os alunos de uma escola é entender o que um currículo prescreve em relação às diretrizes de seu ensino em sala de aula. Referenciaremos a partir de agora o currículo oficial do Estado de São Paulo, material que será analisado para entendermos melhor a realidade dos logaritmos na Educação Básica.

4.2 O estudo dos logaritmos segundo o currículo do Estado de São Paulo

A proposta de um currículo unificado foi implementada no Estado de São Paulo em 2008, nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio, com o principal objetivo de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências de modo que as escolas funcionassem como uma rede. Isto quer dizer que todo aluno que estude na rede estadual de ensino, não importando a região ou cidade ao qual ele reside, tem garantido o estudo da mesma matriz de conteúdos voltados ao ano/série ao qual faz parte.

Junto a essa proposta, foi desenvolvido um material de apoio pedagógico ao professor intulado de Cadernos do Professor e Cadernos do Aluno, que apresentam situações de aprendizagem (SA) diversificadas, com foco na metodologia do desenvolvimento de habilidades e competências. São apresentadas quatro SA por caderno/volume (bimestre), que constituem quatro centros de interesses a serem desenvolvidos com os alunos. Em cada uma delas é apontado ao professor, de maneira sugestiva, o período de tempo para o seu desenvolvimento, o conteúdo abordado, as competências e habilidades a serem desenvolvidas e as estratégias adotadas.

Os conteúdos são organizados na matriz curricular tomando como características três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. Os conteúdos de logaritmos e funções logarítmicas encontram-se nos blocos NÚMERO e NÚMERO/RELAÇÕES, respectivamente, estando organizadas dentro da matriz de conteúdos no terceiro bimestre da 1ª série do Ensino Médio, sendo retomada novamente, com maior aprofundamento, no terceiro bimestre da 3ª série do Ensino Médio.

O Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Fundamental Ciclo II e Ensino Médio, propõe que a exploração dos conteúdos matemáticos levem o aluno a desenvolver:

> - **capacidades de expressão**, que pode ser avaliada por meio da produção de registros, de relatórios, de trabalhos orais e/ou escritos etc.;
> - **capacidade de compreensão**, de elaboração de resumos, de sínteses, de mapas, da explicação de algoritmos etc.;
> - **capacidade de argumentação**, de construção de análises, justificativas de procedimentos, demonstrações etc.;
> - **capacidade propositiva**, de ir além dos diagnósticos e intervir na realidade de modo responsável e solidário;
> - **capacidade de contextualizar**, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhe dão vida e consistência;
> - **capacidade de abstrair**, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes. ([13], p. 54)

Abordaremos agora o que cada uma das situações de aprendizagem apontam como ideais para o desenvolvimento da compreensão do logaritmo. É importante salientar que o escopo deste trabalho residirá em verificar se as noções encerradas no material propiciam um entendimento satisfatório do conceito e, além disso, pontuar se há ocorrências do estudo do logaritmo natural nas séries mencionadas anteriormente.

No caderno volume 3 (3º bimestre) da 1ª série do Ensino Médio, a situação de aprendizagem 1 traz atividades que exploram situações que envolvem crescimento exponencial do tipo $y = a^x$. As atividades propostas estão relacionadas à resolução de problemas e a construção de gráficos. Observa-se que há uma preocupação de propiciar ao aluno uma exploração do crescimento dessas funções quando variamos a constante a, com valores alternando entre números inteiros, racionais e irracionais. Para este último tipo de número há a atividade de se trabalhar com um software plotador de gráficos.

A situação de aprendizagem 2 do mesmo volume traz atividades que exploram a representação de números como potências do número 10. Todo número N pode ser representado

Tempo previsto: 2 semanas. **Conteúdos e temas:** significado da potenciação com expoentes naturais, inteiros, racionais e reais; função exponencial, com a construção de seu gráfico e o destaque para suas propriedades relativas ao crescimento e decrescimento; funções exponenciais em diferentes contextos. **Competências e habilidades:** expressar e modelar diversos fenômenos naturais envolvendo potências, compreendendo-os nos diversos contextos em que eles surgem; enfrentar e resolver situações-problema envolvendo expoentes e funções exponenciais. **Estratégias:** articulação das noções sobre potências já estudadas em séries/ anos anteriores; destaque de alguns fatos fundamentais, considerados especialmente importantes para a compreensão da natureza da função exponencial; apresentação de exemplos ilustrativos e proposição de exercícios exemplares.

Tabela 4.1: Quadro referência de uma Situação de Aprendizagem (SA) do Currículo de Matemática - Ensino Médio, contendo o tempo previsto, os conteúdos e temas, as competências e habilidades e as estratégias da referida SA.

como uma potência 10^n, ou seja, $N = 10^n$. Os alunos são levados a perceber a estreita ligação entre o expoente n da potência de 10 e o número N. Deste modo, define-se que n é o "logaritmo de N". Algumas observações e propriedades do "logaritmo de N"são trabalhadas nesta situação de aprendizagem. É explorado também que existem outras bases de forma que é possível escrever $N = a^n$, sendo a uma base qualquer maior que zero e diferente de 1. As atividades propostas, em sua maioria, estão relacionadas à resolução de problemas.

A situação de aprendizagem 3 do mesmo volume traz atividades que exploram o gráfico das funções do tipo $y = a^x$ e $x = \log_a y$, onde x é logaritmo de y na base a. A esta última função denomina-se, na SA, de função logarítmica e representa-se por $f(x) = \log_a x$. É evidenciado para os alunos os tipos de crescimento tanto da função $y = a^x$ quanto da função $y = \log_a x$, tomando $a > 1$ inicialmente e $0 < a < 1$ posteriormente. Define-se na SA o que é uma função inversa, e os alunos são levados a perceber que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial. As atividades propostas estão relacionadas à resolução de problemas e também à utilização de software plotador de gráficos.

A última situação de aprendizagem (SA4), também do mesmo volume, traz atividades (situações-problema) envolvendo equações e inequações em diferentes contextos. O foco das mesmas é trabalhar problemas que se utilizam do conhecimento de potências e de logaritmos.

Passando agora para o caderno volume 3, da 3ª série do Ensino Médio, encontramos na situação de aprendizagem 1 as atividades 3 e 4 (situações-problema) que utilizam do conhecimento de função exponencial e função logarítmica.

A situação de aprendizagem 2, da 3ª série do Ensino Médio - volume 3, traz atividades que envolvem transformações em funções. O aluno deve construir diversos gráficos, observando o que cada transformação leva a produzir de efeitos no gráfico da função.

A situação de aprendizagem 3, do mesmo volume e série, traz atividades de exploração e estudo dos tipos de crescimento e decrescimento de cada função. Nesta vertente, os alunos compreendem a diferença entre funções que "crescem a taxas constantes", por exemplo, as funções de 1º grau; as funções que "crescem a taxas crescentes", por exemplo, as funções exponenciais; e as funções que "crescem a taxas decrescentes", por exemplo, a função logarítmica. As atividades propostas, em sua maioria, estão relacionadas à resolução de problemas.

A situação de aprendizagem 4, do mesmo volume, traz atividades (situações-problema) que envolvem fenômenos naturais, que em sua maioria são modeladas por funções exponenciais e logarítmicas na base e (logaritmo natural de x). As atividades propostas estão relacionadas à resolução de problemas e também à utilização de softwares plotadores de gráficos.

Conclusões finais:

Observa-se que a proposta de estudo dos logaritmos e das funções logarítmicas no currículo do Estado de São Paulo contemplam uma variedade enriquecida de situações de aprendizagem que constroem de maneira bem consistente os conceitos ligados a estes conteúdos. As atividades propõem a todo momento a construção de relações, sejam elas por meio da observação de exemplos e/ou dos comportamentos de funções do tipo exponencial, inicialmente de base 10, chegando à sua relação com a função logarítmica decimal.

Em relação à função logarítmica natural, constatamos que sua introdução é realizada apenas na última situação de aprendizagem do volume 3 da 3ª série do Ensino Médio. Não há uma discussão mais aprofundada da importância deste tipo de função para as ciências, principalmente para a modelagem de diversos fenômenos naturais que tem como característica o seu crescimento.

Contudo, há no material analisado uma preocupação em trazer o logaritmo de uma forma não mecanizada, explorando por meio de situações problemas a relação viável que tem com outras áreas, principalmente relacionadas à Biologia, Química, Física. Este tipo de encadeamento de ideias e relações fortalecem o estudo do logaritmo no currículo de Matemática, sobretudo, promovendo um ensino de mais qualidade para os alunos da escola básica.

Neste trabalho procuramos apresentar 3 formas diferentes de se abordar o conhecimento de logaritmos, sendo a primeira relacionada à apresentação como função inversa da função exponencial, a segunda, investida na sua importante definição geométrica, e a última, na definição como limite de uma sequência de números reais. Das três perspectivas somente a pautada na função inversa da exponencial é explorada nos cadernos do Currículo do Estado de São Paulo. Observando os conceitos e propriedades que evidenciamos em cada um dos capítulos e que sustentaram a argumentação de cada uma das perspectivas apontadas, é evidente que aquela que necessitamos de conhecimentos ligados a limites e integrais não estariam realmente adequadas à realidade da grade de conteúdos para o Ensino Médio. Desta maneira, acreditamos que seria uma excelente opção para reforçar o significado de logaritmos no Ensino Médio, a abordagem geométrica apresentada neste material, que fortaleceria a correspondência estreita que há entre os eixos algébricos e geométricos na Matemática.

Para o Ensino Superior, as três perspectivas são especialmente importantes de serem estudadas. A partir da problematização que realizamos neste início de capítulo, a proposta articulada entre estas três formas de conhecimento de logaritmos na formação inicial de professores dentro das universidades favoreceria a construção de elos, conexões e significados necessários para a atuação segura do docente, nos níveis didáticos, pedagógicos e conceituais, na Educação Básica.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 144p.

[2] CASTRO, M. A. C. D. *História e Educação Matemática*. São João del-Rei, MG: UFSJ 2009. 65p.

[3] CORRÊA, J. F.; CYRINO, M. C. C. T. *Do Problema das Quadraturas ao Cálculo da Integral*: História na Educação Matemática de futuros professores. In: ENCONTRO BRASILEIRO DOS ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2006, Belo Horizonte. Anais. Belo Horizonte: 2006. p. 1-5.

[4] D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática*. 2. ed. São Paulo: Ática 1993.

[5] FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra 1997.

[6] LIMA, E. L. et al; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - volume 1*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM 2006. 237 p.

[7] LIMA, E. L. *Curso de Análise - volume 1*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM 2010. 195 p.

[8] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de janeiro: SBM 1991

[9] LIMA, E. L. *Logaritmos*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM 1996.

[10] MEDEIROS, L. A. Função Logarítmica Neperiana. *Iniciação científica em revista*, Rio de Janeiro, n. 4, p. 1-10, nov. 1993.

[11] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor*: Matemática. Ensino Médio 1ª série, volume 3/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009.

[12] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Caderno do Professor*: Matemática. Ensino Médio 3ª série, volume 3/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009.

[13] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo*: Matemática e sua Tecnologias - Ensino Fundamental - Ciclo II e Ensino Médio. São Paulo, SEE, 2010.