



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.004/13

O mecanismo atrator e a função entropia de Sen para buracos negros

Prieslei Estefânio Dominik Goulart Santos

Orientador

Horatiu Nastase

Fevereiro de 2013

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha família por toda a paciência e pelo apoio incondicional neste momento tão intenso de minha vida. Agradeço a todos os professores e funcionários do IFT por fazerem do nosso ambiente de estudo a nossa casa. Agradeço a todos os amigos do IFT pelos bons momentos e pelas experiências que adquiri durante o mestrado. Em especial agradeço a David e José Cupertino pela amizade e apoio. Agradeço ao meu orientador Horatiu Nastase por todo incentivo e atenção prestados ao longo destes dois anos de mestrado. Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos o mecanismo atrator e a função entropia para buracos negros. Depois de revisarmos alguns aspectos de Relatividade Geral e buracos negros do tipo Schwarzschild, Reissner-Nordstrom e Kerr-Neumann demonstraremos detalhadamente como são deduzidas a lei zero e a primeira lei das chamadas Leis da Termodinâmica de Buracos Negros. Apresentaremos também a segunda e a terceira destas leis e discutiremos a relação entre as Leis da Termodinâmica e as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros. Após isso, apresentaremos um exemplo para demonstrar como ocorre o chamado fenômeno atrator, que faz com que todos os campos escalares admitam o mesmo valor sobre o horizonte de eventos do buraco negro, fazendo-os então perder toda a memória de suas condições iniciais no infinito. Finalmente, apresentaremos a dedução da chamada função entropia de Sen, e demonstraremos sua importância no que se refere ao estudo dos campos escalares de um buraco negro para a geometria próxima ao horizonte de eventos, ou seja, para o mecanismo atrator. Demonstraremos a validade deste formalismo através da solução de Reissner-Nordstrom usual em 4 dimensões e de uma teoria correspondendo à parte bosônica de uma ação da supergravidade à baixas energias.

Palavras Chaves: termodinâmica de buracos negros; mecanismo atrator; função entropia de Sen.

Áreas do conhecimento: Relatividade Geral; Teoria de Campos.

Abstract

In this Master Thesis we study the attractor mechanism and the entropy function for black holes. After reviewing some aspects of General Relativity and black holes solutions of the Schwarzschild, Reissner-Nordstrom and Kerr-Newmann type, we give a detailed derivation of the zeroth and first of the so-called Laws of Black Hole Thermodynamics. We will also present the second and third laws and discuss the relation between The Laws of Thermodynamics and The Laws of Black Hole Thermodynamics. Then we will present an example of how the so-called attractor phenomena occurs, which makes all the scalar fields assume the same value on the black hole event horizon, forcing them to lose all the memory of their initial conditions at the infinity. Finally, we will present the derivation of the so-called Sen's entropy function, and we will show its importance concerning the study of scalar fields of a black hole for the near horizon geometry, or in other words, for the attractor mechanism. We will show the validity of this formalism through the usual Reissner-Nordstrom solution in 4 dimensions and a theory corresponding to the bosonic part of a low energy supergravity action.

Índice

1	Introdução	1
2	Leis da Termodinâmica e função entropia	4
2.1	As leis da termodinâmica	4
2.2	Espaço de fase e número de microestados	5
2.3	Definição estatística de entropia	7
2.4	Contagem pseudo-quântica de Ω	8
2.5	Distribuição Microcanônica e limite termodinâmico	10
2.5.1	Densidade de espaço de fase e hipótese ergódica	10
2.5.2	Número de microestados de N partículas não -interagentes . .	12
2.5.3	Diferentes definições de entropia	14
3	Resultados de Relatividade Geral	15
3.1	Noções básicas	16
3.1.1	Transporte paralelo	16
3.1.2	Geodésicas	16
3.1.3	Isometrias e conservação do quadrimomento	17
3.1.4	Desvio geodésico	18
3.1.5	Vetores de Killing e equação de Killing	20
3.1.6	Derivada de Lie	21
3.1.7	Condições de Energia	23
3.1.8	Congruências geodésicas	25
3.2	Buracos negros	33
3.2.1	Solução de Schwarzschild	34
3.2.2	Solução de Reissner-Nordstrom	38
3.2.3	Solução de Kerr-Neumann	43
3.2.4	Superfícies nulas e horizontes de Killing	44
3.2.5	Massa, carga e momento angular	47

4	As leis da termodinâmica de buracos negros	54
4.1	Gravidade superficial e lei zero da termodinâmica de buracos negros .	55
4.2	A fórmula integral	59
4.3	A fórmula diferencial	62
4.4	Leis da termodinâmica de buracos negros	72
4.5	Buracos negros e termodinâmica	73
5	O mecanismo atrator	75
5.1	Dualidade eletromagnética	76
5.2	Revisão de buracos negros dilatônicos	76
5.3	O mecanismo atrator	81
6	Função entropia de Sen	88
6.1	Definição de buracos negros extremos	88
6.2	Função Entropia para buracos negros esfericamente simétricos em D=4	91
6.3	$AdS_2 \times S^3$	97
6.4	Generalização do cálculo da função entropia de Sen para $AdS_2 \times S^{D-2}$	103
7	Conclusões	107
A	Propriedades do determinante da métrica	108
B	Teorema de Gauss-Stokes	110
	Referências	113

Capítulo 1

Introdução

Em 1915 Einstein apresentou ao mundo a Teoria da Relatividade Geral. Utilizando-se de certos limites de campo gravitacional fraco e de experimentos pensados por ele, Einstein deduziu uma equação tensorial que relaciona a geometria do espaçotempo, cuja informação está contida no tensor de curvatura, com a matéria que faz com que a geometria do espaçotempo tome essa forma, cujo conteúdo é dado pelo tensor energia-momento. Em sua teoria Einstein pôde explicar por exemplo o problema da precessão do periélio de Mercúrio, cuja mecânica Newtoniana não bastava para dar uma explicação concreta. Porém, um dos maiores triunfos da Relatividade Geral é sem dúvida a chamada solução de Schwarzschild, que é uma solução das equações de Einstein para um espaçotempo estacionário e esfericamente simétrico. Uma das previsões que podia ser feita desta solução era que a luz poderia mudar sua trajetória ao passar próxima a corpos massivos como planetas e estrelas. De fato, esta previsão foi confirmada alguns anos após Einstein ter apresentado ao mundo a sua teoria, o que confirmou ainda mais a validade da Relatividade Geral. Vários experimentos são feitos ainda hoje com a intenção de servirem de testes para a teoria e verificar seus limites, como por exemplo a medida do deslocamento para o vermelho de um raio de luz enviado para a lua e refletido de volta para a Terra, sendo este efeito causado pela ação do campo gravitacional sobre os ftons do raio de luz.

A solução de Schwarzschild apresenta algumas peculiaridades como a presença de uma singularidade em $r = 0$ e um horizonte de eventos, que é uma superfície da qual nada que esteja em seu interior escapa. Isso levou à introdução do termo buraco negro para designar tais soluções, e é este o principal objeto de estudo desta dissertação. A solução de Schwarzschild é válida quando o tensor energia-momento, que carrega informação sobre os campos do corpo que colapsou em um buraco negro, é nulo. Podemos admitir que um buraco negro possa ter também cargas elétricas e magnéticas, o que faria que o tensor energia-momento fosse diferente de zero, e assim somos levados à chamada solução de Reissner-Nordstrom, que é uma solução

das equações de Einstein que representa um buraco negro carregado. Uma diferença com relação à solução de Schwarzschild é a de que a solução de Reissner-Nordstrom possui dois horizontes de eventos quando certos limites sobre a massa e a carga são tomados, como demonstraremos nos próximos capítulos. Além do mais, depois de um trabalho muito mais árduo, podemos ainda demonstrar que é possível se obter uma solução que representa um buraco negro em rotação, ou seja, possui momento angular. Esta é a chamada solução de Kerr-Newmann.

Desde de sua descoberta buracos negros têm sido alvo de muito estudo e especulação. Várias foram as descobertas teóricas que impulsionaram os físicos Bardeen, Carter e Hawking a formular em 1973 as chamadas Leis da Termodinâmica de Buracos Negros. Em seu artigo, eles descobriram que existe uma forte analogia entre as leis da Termodinâmica usuais e as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros. Mais tarde Hawking demonstrou que é possível associar ao buraco negro uma temperatura, que passou a ser chamada de Temperatura Hawking, que deixou claro que a área do buraco negro está diretamente relacionada com a entropia. Após essa descoberta Hawking fez a incrível descoberta de que processos quânticos fazem com que buracos negros emitam radiação, sendo que esta passou a ser chamada de Radiação Hawking. Estas descobertas demonstraram que de fato buracos negros se comportam como sistemas termodinâmicos e que por suas características serviriam como um laboratório ideal para se testar teorias de gravitação quântica. Muito avanço foi feito mas o que se tem certeza atualmente é de que sabemos muito pouco sobre a termodinâmica de buracos negros.

Apesar de sabermos definir a entropia para um buraco negro não sabemos ainda contar seus microestados, pelo menos sem o uso de ferramentas mais avançadas como a teoria de cordas. O conteúdo microscópico de um buraco negro é ainda um mistério e vários esforços são feitos para se entender melhor como definir esses microestados. Caso soubéssemos disso, seria possível obter informações sobre o conteúdo microscópico de um buraco negro através de suas grandezas macroscópicas que podemos medir, reforçando a idéia de que eles são o laboratório ideal para se estudar teorias de gravitação quântica.

O horizonte do buraco negro tem algumas propriedades interessantes. O que é entendido é que independentemente dos valores assintóticos para os campos, no horizonte eles tomam valores específicos, um fenômeno conhecido como mecanismo atrator. Uma maneira de se encontrar este fenômeno é definir uma função entropia como a proposta por Sen [1] e outros, cujo extremo nos dá o atrator, e a função entropia tomada no extremo nos dá a entropia do buraco negro.

Nesta dissertação estudamos o mecanismo atrator e a função entropia, e os aplicamos para o caso de quando o horizonte é do tipo $AdS_2 \times S^2$, e em geral $AdS_2 \times S^{D-2}$.

A organização da dissertação é dada como se segue. Escreveremos as leis da termodinâmica e mostraremos como se pode definir a entropia de Boltzmann, bem como suas diferentes definições para a distribuição microcanônica. Mostraremos em seguida como estas diferentes definições convergem para o mesmo valor. Discutiremos as ferramentas necessárias para se estudar buracos negros como congruências geodésicas, condições de energia, horizontes de Killing e definições de massa e momento angular para buracos negros. Apresentaremos a dedução da lei zero e da primeira lei da Termodinâmica de buracos negros, e também apresentaremos a segunda e a terceira lei e discutiremos a relação entre essas leis e as leis da termodinâmica apresentadas no capítulo 2. Estudaremos teorias invariantes por transformação de dualidade cujo fundo corresponde à uma solução do tipo buraco negro extremo. Demonstraremos como se dá o fenômeno atrator para uma teoria de gravidade acoplada à campos de gauge e ao campo escalar do dÍlato. Deduziremos o formalismo da função entropia de Sen e como ele é usado para o estudo do fenômeno atrator e para uma dedução da entropia do buraco negro. Aplicaremos esse formalismo para a solução de Reissner-Nordstrom usual em 4 dimensões e também para o exemplo de uma teoria em 5 dimensões . Por fim, demonstraremos como se escrever a função entropia de Sen para uma teoria em D dimensões .

Capítulo 2

Leis da Termodinâmica e função entropia

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados referentes à termodinâmica usual. Primeiro vamos enumerar as Leis da Termodinâmica, que estão relacionadas completamente com o conteúdo macroscópico de um sistema. Após isso, apresentaremos a definição estatística da entropia, através da fórmula de Boltzmann

$$S = k_B \ln \Omega.$$

A entropia escrita nessa forma relaciona as quantidades macroscópicas de um sistema com seu estado microscópico, que é descrito pelo número total de microestados Ω . Vamos demonstrar a relação entre o espaço de fase clássico e o número total de microestados Ω . Então aplicaremos nossas idéias para o cálculo de Ω para uma partícula quântica numa caixa cúbica. Apresentaremos uma breve discussão sobre a hipótese ergódica que diz respeito às grandezas médias calculadas classicamente e no contexto da física estatística. Estenderemos o cálculo do número total de microestados para um sistema de N partículas quânticas numa caixa cúbica, e também calcularemos a densidade de microestados. Finalmente, apresentaremos as possíveis definições estatísticas da entropia para este caso e demonstraremos que no limite termodinâmico, isto é, $N \rightarrow \infty$, todas definições convergem para o mesmo valor.

2.1 As leis da termodinâmica

Nesta seção vamos apresentar as leis da termodinâmica. Basicamente existem 4 leis, e, algumas vezes, diferentes formas de apresentá-las. Seguiremos as referências [2], [3] e [4].

0. Lei zero da termodinâmica:

Todos os sistemas que estão em equilíbrio térmico com um dado sistema também estão em equilíbrio térmico entre si.

1. Primeira lei da termodinâmica:

A mudança de energia interna para uma mudança de estado (reversível ou irre-

versível) é dada pela soma do trabalho δW e do calor δQ trocados com os arredores do sistema

$$dU = \delta W + \delta Q. \quad (2.1)$$

A primeira lei é simplesmente uma expressão para a conservação da energia de um sistema termodinâmico, e a escrevemos usando os diferenciais δ para representar o fato de que o trabalho e o calor trocados com os arredores podem depender do processo termodinâmico envolvido.

2. Segunda lei da termodinâmica:

Um macroestado de equilíbrio de um sistema pode ser caracterizado por uma quantidade S chamada de entropia, a qual tem as seguintes propriedades:

a. em qualquer processo no qual um sistema isolado termicamente vai de um macroestado para outro a entropia tende a crescer, isto é

$$\Delta S \geq 0; \quad (2.2)$$

b. se um sistema não é isolado e passa por um processo infinitesimal quasi-estático no qual ele absorve calor δQ , então

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (2.3)$$

onde T é a temperatura absoluta do sistema.

Para sistemas isolados, $\delta Q = 0$, o que implica que $dS = 0$, indicando que nesta situação de equilíbrio a entropia tem um extremo. Todo experimento confirma que este extremo é um máximo.

3. Terceira lei da termodinâmica:

A entropia S de um sistema tem a propriedade limitante de que, conforme

$$T \rightarrow 0_+, \quad S \rightarrow S_0, \quad (2.4)$$

onde S_0 é uma propriedade independente de todos os parâmetros do sistema particular.

2.2 Espaço de fase e número de microestados

Para fixar o estado de movimento de um sistema clássico basta conhecer todas as coordenadas generalizadas $q_\nu(t)$ e $p_\nu(t)$ para todo t , onde $\nu = 1, \dots, 3N$ quando não há vínculos para as coordenadas e momentos. O conjunto (q_ν, p_ν) do espaço de fase $6N$ -dimensional é interpretado como o microestado deste sistema. Um ponto definido no espaço de fase corresponde a um estado microscópico do movimento do sistema inteiro. A evolução temporal do sistema corresponde à uma curva

$(q_\nu(t), p_\nu(t))$ do espaço de fase, também chamada de trajetória no espaço de fase, que é determinada pelas equações de movimento de Hamilton

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad (2.5)$$

onde $H(q_\nu(t), p_\nu(t))$ é a hamiltoniana do sistema. Em um sistema fechado no qual a hamiltoniana não depende do tempo, a energia total

$$E = H(q_\nu, p_\nu) \quad (2.6)$$

é uma quantidade conservada, e, ao longo de uma trajetória do espaço de fase, ela sempre assume o mesmo valor E independente do tempo.

Chamamos de célula do espaço de fase ao elemento de espaço de fase $d^{3N}q d^{3N}p$. Ela relaciona o volume de certas regiões do espaço de fase, isto é, a região entre as elipses E e $E + \Delta E$. A célula também é chamada de elemento de volume no espaço de fase, que abreviaremos para $d\omega$. O volume correspondendo à região entre E e $E + \Delta E$, é dado por

$$\Delta\omega = \int_{E \leq H(q_\nu, p_\nu) \leq E + \Delta E} d\omega = \int_{E \leq H(q_\nu, p_\nu) \leq E + \Delta E} d^{3N}q d^{3N}p. \quad (2.7)$$

Da mesma forma, podemos definir a área por

$$\sigma(E) = \int_{E=H(q_\nu, p_\nu)} d\sigma \quad (2.8)$$

e relacioná-la à hipersuperfície de energia, onde $d\sigma$ representa o elemento de superfície. Considere um sistema termodinâmico caracterizado pelas variáveis naturais E , V e N . O volume do reservatório restringe as possíveis coordenadas das partículas, e o fato da energia ser dada faz com que somente pontos no espaço de fase sejam permitidos. Como temos a área da hipersuperfície de energia à nossa disposição, assumiremos que o número de microestados é proporcional à essa área. Então, para um dado macroestado existe um número grande de diferentes microestados, dado por

$$\Omega(E, V, N) = \frac{\sigma(E, V, N)}{\sigma_0}, \quad (2.9)$$

com

$$\sigma(E, V, N) = \int_{E=H(q_\nu, p_\nu)} d\sigma \quad (2.10)$$

e σ_0 sendo uma constante de proporcionalidade que não influenciará na dinâmica do sistema, já que veremos futuramente que estaremos interessados nas razões entre diferentes estados microscópicos. Para um estado macroscópico o volume total do espaço de fase é dado por

$$\omega(E, V, N) = \int_{H(q_\nu, p_\nu) \leq E} d^{3N}q d^{3N}p, \quad (2.11)$$

onde a fronteira é a hipersuperfície de energia $E = H(q_\nu, p_\nu)$. Para ΔE pequeno o volume entre E e $E + \Delta E$ é dado por

$$\Delta\omega = \omega(E + \Delta E) - \omega(E) = \left. \frac{\partial\omega}{\partial E} \right|_{V,N} \Delta E. \quad (2.12)$$

O volume entre duas superfícies vizinhas (veja [3]), com área $\sigma(E)$ e distância ΔE é dado por

$$\Delta\omega = \sigma(E)\Delta E. \quad (2.13)$$

Comparando as expressões 2.12 e 2.13 verificamos que

$$\sigma(E) = \frac{\partial\omega}{\partial E}, \quad (2.14)$$

o que nos fornece para a equação 2.9

$$\Omega(E, V, N) = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial\omega}{\partial E}, \quad (2.15)$$

onde ω é dado por 2.11.

2.3 Definição estatística de entropia

Considere um sistema fechado que consiste de um subsistema 1 e um subsistema 2, cujas variáveis de estado são E, V e N , de forma que

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \text{const} & dE_1 &= -dE_2 \\ V &= V_1 + V_2 = \text{const} & dV_1 &= -dV_2 \\ N &= N_1 + N_2 = \text{const} & dN_1 &= -dN_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Isto equivale a dizer que os sistemas podem trocar energia ou partículas, ou podem alterar seus volumes. Porém, em equilíbrio, E_i, V_i e N_i , com $i = 1, 2$, se adaptarão à certos valores médios. O número total de microestados deste sistema $\Omega(E, V, N)$ será o produto do número de estados de cada subsistema, isto é,

$$\Omega(E, V, N) = \Omega(E_1, V_1, N_1)\Omega(E_2, V_2, N_2). \quad (2.17)$$

O estado de equilíbrio corresponde ao estado com maior número de microestados, isto é, $\Omega = \Omega_{max}$ e $d\Omega = 0$. Usando 2.17 podemos formar os diferenciais

$$d\Omega = \Omega_2 d\Omega_1 + \Omega_1 d\Omega_2, \quad (2.18)$$

ou, se dividirmos essa equação por 2.17, teremos

$$d \ln \Omega = d \ln \Omega_1 + d \ln \Omega_2. \quad (2.19)$$

A condição de equilíbrio é escrita como

$$d \ln \Omega = 0, \quad \ln \Omega = \ln \Omega_{max}. \quad (2.20)$$

Quando a energia interna U de um sistema fechado é identificada com a energia total E podemos considerar este sistema do ponto de vista termodinâmico, para o qual a entropia total será a soma das entropias dos dois subsistemas

$$S(E, V, N) = S(E_1, V_1, N_1) + S(E_2, V_2, N_2). \quad (2.21)$$

O diferencial dessa expressão é escrito como

$$dS = dS_1 + dS_2. \quad (2.22)$$

De acordo com a segunda lei da termodinâmica estamos em equilíbrio termodinâmico se a entropia é máxima

$$dS = 0, \quad S = S_{max}. \quad (2.23)$$

Podemos comparar as equações 2.20 e 2.23 e verificar que existe de fato uma analogia entre a entropia e $\ln \Omega$. De fato, as duas quantidades devem ser proporcionais uma à outra, ou seja, podemos definir a entropia do sistema como

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N), \quad (2.24)$$

onde k_B é identificada como sendo a constante de Boltzmann. Vale ressaltar que poderíamos ter definido a entropia da forma acima mais uma constante, porém, a constante poderia ser absorvida por S .

A função 2.24 possui extrema importância no sentido em que podemos calcular propriedades termodinâmicas de um dado sistema de muitos corpos usando a hamiltoniana $H(q_\nu, p_\nu)$. Apesar da simplicidade da equação 2.15 o cálculo de Ω não é trivial. Usamos em geral a teoria do ensemble para nos dar um método prático para o cálculo de Ω para sistemas mais complicados.

2.4 Contagem pseudo-quântica de Ω

Consideraremos agora o caso do gás ideal e contaremos o número de estados quânticos para uma determinação direta de Ω .

Do problema da partícula quântica em uma caixa cúbica de comprimento L temos que sua função de onda é dada por

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z} = A \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \sin \frac{n_z \pi z}{L}, \quad (2.25)$$

onde $n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$ e sua energia é dada por

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (2.26)$$

No caso clássico o microestado da partícula era fixado pela variáveis canônicas $\vec{q}$ e $\vec{p}$. Agora para o caso quântico cada estado de uma única partícula é fixado pelos números quânticos (n_x, n_y, n_z) . A energia total para o problema de N -partículas é determinada pelos $3N$ números quânticos dos estados ocupados,

$$E = \frac{h^2}{8mL^2} \sum_{i=1}^{3N} n_i^2. \quad (2.27)$$

Estamos agora lidando com um espaço $3N$ -dimensional que contém uma esfera de energia $(3N - 1)$ dimensional. O estado de menor energia corresponde ao estado para o qual todos números quânticos são iguais a 1. O próximo estado é aquele em que somente um dos números quânticos assume valor igual a 2 e os demais iguais a 1. Se o sistema contivesse 3 partículas por exemplo, haveria $\Omega = 9$ estados possíveis para esta configuração de energia. Isto na realidade não corresponde à um cálculo quântico, já que as partículas são idênticas e não podemos distinguir exatamente qual delas assumiu o valor de $n_i = 2$. Tudo que fizemos foi usar o cálculo estatístico clássico para contar estados. Em um cálculo quântico deve-se levar em conta no início do problema a indistinguibilidade das partículas.

Nos sistemas termodinâmicos em geral há sempre troca de energia com o ambiente, por isso é interessante definir o número de microestados médio Ω sobre um intervalo de energia ΔE . Para isso considere o número de todos microestados no interior da esfera de energia,

$$\Sigma(E, V, N) = \sum_{E' \leq E} \Omega(E', V, N). \quad (2.28)$$

Podemos aproximar Σ para uma função média $\bar{\Sigma}$ contínua, que diferenciada com relação à energia nos fornece a densidade média de estados, que corresponde ao número médio de estados por intervalo de energia

$$g(E, V, N) = \frac{\partial}{\partial E} \bar{\Sigma}(E, V, N), \quad (2.29)$$

em analogia com o cálculo clássico da superfície de energia $\sigma(E)$ por meio de $\sigma(E) = \partial\omega/\partial E$. No limite para o qual $N \rightarrow \infty$ temos $\bar{\Sigma} \approx \Sigma$, que corresponde à um cálculo clássico. O fator de correção de Gibbs $N!$ é introduzido com o intuito de descontar a contagem dos estados extras que são provenientes do fato das partículas serem

indistinguíveis. Então, introduzindo o fator de correção de Gibbs para $\Sigma(E)$, a entropia absoluta é dada por

$$S(E, V, N) = k \ln \Omega(E, V, N), \quad (2.30)$$

com as seguintes definições

$$\Omega(E, V, N) = g(E, V, N)E, \quad (2.31)$$

$$g(E) = \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E}, \quad (2.32)$$

$$\Sigma(E) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int_{H(q_\nu, p_\nu) \leq E} d^{3N} q d^{3N} p, \quad (2.33)$$

onde o fator h^{3N} é a unidade de volume do espaço de fase.

2.5 Distribuição Microcanônica e limite termodinâmico

Os parâmetros termodinâmicos que especificam o número de microestados de um sistema isolado são a energia E , o volume V e o número de partículas N . O postulado básico da mecânica estatística nos diz que todos os microestados da superfície de energia de um sistema fechado podem ser assumidos como sendo igualmente prováveis. A coleção dos sistemas em diferentes microestados e valores especificados de E , V e N é chamado de **ensemble microcanônico**. Para um sistema quântico a energia E deve ser sempre especificada em alguma faixa de energia, pois se ela fosse especificada exatamente, o sistema teria que estar em um de seus possíveis autoestados, e permaneceria neste autoestado indefinidamente. Se isso acontecesse um tratamento estatístico não faria sentido. Além do mais, a energia em geral é considerada como sendo uma variável contínua. Conhecendo-se a função entropia é possível fazer a conexão com a termodinâmica através das definições gerais de temperatura T , pressão p e potencial químico μ , que são dadas por

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}, \quad \frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}, \quad -\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial N}. \quad (2.34)$$

O que precisamos agora é especificar como podemos definir a entropia para um sistema cuja energia é uma variável contínua.

2.5.1 Densidade de espaço de fase e hipótese ergódica

Para sistemas não-fechados o postulado básico da mecânica estatística deixa de ser válido. Para este caso o microestado deve ser multiplicado por uma função peso $\rho(q_\nu, p_\nu)$ que depende da energia do estado. Portanto teremos uma função peso para

cada ponto do espaço de fase (q_ν, p_ν) , que pode ser interpretada como a densidade de probabilidade para o microsistema alcançar este ponto do espaço de fase. Então, para um sistema fechado ρ seria nulo dentro e fora da superfície de energia, e seria constante sobre a superfície de energia. A densidade de probabilidade ρ é chamada de densidade de espaço de fase e é normalizada a 1,

$$\int d^{3N} q d^{3N} p \rho(q_\nu, p_\nu) = 1. \quad (2.35)$$

Sendo $f(q_\nu, p_\nu)$ qualquer observável do sistema, então, em geral, pode-se observar um valor médio $\langle f \rangle$ desta quantidade em um dado macroestado, no qual o microestado contribui com seu peso correspondente $\rho(q_\nu, p_\nu)$:

$$\langle f \rangle = \int d^{3N} q d^{3N} p f(q_\nu, p_\nu) \rho(q_\nu, p_\nu). \quad (2.36)$$

Como o ponto do espaço de fase (q_ν, p_ν) pode ser identificado com uma cópia do sistema macroscópico real em um certo microestado, a equação acima é simplesmente uma média sobre o conjunto de tais cópias idênticas à tempo fixo. A quantidade $\langle f \rangle$ é chamada de média de ensemble da quantidade f e a densidade de espaço de fase ρ é a função de peso do ensemble.

A densidade de espaço de fase de um sistema fechado corresponde a um certo ensemble de possíveis microestados e o chamaremos simplesmente de um ensemble microcanônico, que denotaremos pelo índice *mc*. Então, para um sistema fechado, o ensemble microcanônico é dado por

$$\rho_{mc} = \begin{cases} \text{const}, & E \leq H(q_\nu, p_\nu) \leq E + \Delta E \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (2.37)$$

A constante em 2.37 é determinada pela normalização 2.35,

$$\text{const} = \frac{1}{\Omega(E, V, N) h^{3N}}, \quad (2.38)$$

onde incluiremos o fator de correção de Gibbs, $N!$, somente se formos corrigir o fato das partículas serem distinguíveis. Por comodidade incluiremos o fator h^{3N} no elemento de volume para que a definição da densidade de espaço de fase seja adimensional. Então nossas definições passam a ser

$$\frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p \rho(q_\nu, p_\nu) = 1, \quad (2.39)$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{h^{3N}} \int d^{3N} q d^{3N} p f(q_\nu, p_\nu) \rho(q_\nu, p_\nu). \quad (2.40)$$

A densidade de espaço de fase normalizada do ensemble microcanônico será

$$\rho_{mc} = \begin{cases} \frac{1}{\Omega}, & E \leq H(q_\nu, p_\nu) \leq E + \Delta E \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (2.41)$$

Para calcular a média temporal de uma certa quantidade f no laboratório geralmente tomamos a média de vários valores de amostra de f em um intervalo de tempo razoavelmente grande, T . Matematicamente isso corresponde a calcular

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t). \quad (2.42)$$

A **hipótese ergódica** consiste basicamente em assumir que, no equilíbrio, esse mesmo valor pode ser obtido de uma média no espaço de fase,

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(q_\nu, p_\nu) \rho(q_\nu, p_\nu) d^{3N}q d^{3N}p}{\int \rho(q_\nu, p_\nu) d^{3N}q d^{3N}p}, \quad (2.43)$$

onde o ensemble é tomado sobre todos os microestados acessíveis ao sistema. Para que haja a igualdade entre as duas grandezas é necessário assumir que, para um sistema fechado a uma dada energia, durante sua evolução temporal, a trajetória do espaço de fase passa através de cada ponto da superfície de energia um número igual de vezes. De fato, para sistemas com muitas dimensões pode-se demonstrar matematicamente que a trajetória do espaço de fase, a princípio, nunca pode passar por todos pontos da superfície de energia. Para estes casos então é necessário invocar a **hipótese quasi-ergódica**, que diz que a condição necessária para que haja a igualdade entre as médias temporais e as médias de ensemble é que a trajetória do espaço de fase passe arbitrariamente perto dos pontos da superfície de energia.

2.5.2 Número de microestados de N partículas não -interagentes

Vamos agora calcular o número de microestados de um sistema de N partículas distinguíveis e dividir por $N!$ para corrigir a contagem dos estados extras. Para o caso de uma partícula em uma caixa tridimensional o número de microestados com energia menor ou igual a E é igual ao volume do octante positivo da esfera de energia. O que faremos agora é generalizar esse caso para um sistema de N partículas.

O volume de uma hipersfera n -dimensional é dado por

$$V_n = \int_{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \leq R^2} dr_1 dr_2 \dots dr_n. \quad (2.44)$$

Para valores inteiros de n pode ser mostrado que este volume é dado por

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n, \quad (2.45)$$

onde, por 2.26,

$$R^2 \equiv n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{h}\right)^2 2mE. \quad (2.46)$$

Como estamos interessados em calcular o volume somente para o caso em que os valores de n sejam todos positivos, temos que acrescentar um fator de correção ao volume. Então, o volume da parte correspondente ao "octante" positivo de uma hiperesfera n -dimensional é dado por

$$\Sigma(R) = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_n(R). \quad (2.47)$$

Usando as propriedades da função gama, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, e que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$, podemos facilmente demonstrar que para o caso em que $n = 3N$ este volume é dado por

$$\Sigma(E, V, N) = \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{(3N/2)!}. \quad (2.48)$$

Incluindo o fator de correção de Boltzmann temos

$$\Sigma(E, V, N) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{(3N/2)!}. \quad (2.49)$$

Este volume do "octante" positivo da hiperesfera de energia corresponde ao número de microestados de um sistema de partículas não-interagentes com energia menor ou igual a E .

Para o caso em que o número de partículas é muito grande, temos que $N \gg 1$, o que nos permite usar a aproximação de Stirling, $\ln N! = N \ln N - N$, e o logaritmo da expressão 2.5.2 se torna

$$\ln \Sigma(E, V, N) = N \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} N \ln \frac{mE}{3N\pi\hbar^2} + \frac{5}{2} N, \quad (2.50)$$

onde $2\pi\hbar = h$. Podemos também calcular a densidade de estados 2.32, que é escrita como

$$g(E) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{[(3N/2) - 1]!} E^{(3N/2)-1}. \quad (2.51)$$

Tomando o logaritmo desta expressão temos

$$\ln g(E) = -\ln N! + N \ln V - 3N \ln h + \frac{3N}{2} \ln(2\pi m) - \ln\left(\frac{3N}{2} - 1\right)! + \left(\frac{3N}{2} - 1\right) \ln E. \quad (2.52)$$

Quando o valor de N é grande podemos usar a aproximação de Stirling novamente e escrever

$$\begin{aligned} \ln g(E) = & -N \ln N + N + N \ln V - 3N \ln h + \frac{3N}{2} \ln(2\pi m) \\ & - \left(\frac{3N}{2} - 1\right) \ln\left(\frac{3N}{2} - 1\right) + \left(\frac{3N}{2} - 1\right) + \left(\frac{3N}{2} - 1\right) \ln E. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como podemos notar $\Sigma(E, V, N)$ e $g(E)$ são funções de E , V e N que crescem muito rapidamente.

Uma vez que conhecemos o número de microestados podemos escrever a entropia 2.30 deste sistema. Após isso podemos calcular as grandezas macroscópicas, que são a temperatura, a pressão e o potencial químico através das expressões apresentadas na introdução da seção, 2.34, responsáveis por fazer essa conexão com a termodinâmica.

2.5.3 Diferentes definições de entropia

Após todas essas definições podemos nos perguntar como devemos definir a entropia para um sistema no qual a energia é uma variável contínua. Note que temos 3 possibilidades:

$$S = k_B \ln g(E)E, \quad (2.54)$$

$$S = k_B \ln \Sigma(E, V, N), \quad (2.55)$$

$$S = k_B \ln g(E). \quad (2.56)$$

Como estamos no limite para o qual o valor de N é muito grande, $3N/2 \gg 1$, e deste modo o logaritmo da densidade de estados 2.53 é escrito como

$$\ln g(E) = N \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2}N \ln \frac{mE}{3N\pi\hbar^2} + \frac{5}{2}N. \quad (2.57)$$

Esta definição é idêntica à 2.50. Além do mais, como vimos por 2.31, no limite para o qual $N \rightarrow \infty$ a definição do número de microestados pode ser escrita como

$$\Omega(E, V, N) = g(E, V, N)E. \quad (2.58)$$

Calculado o logaritmo desta expressão e usando a aproximação de Stirling, podemos novamente demonstrar que o resultado será uma expressão idêntica a 2.50. O que demonstramos foi que, no limite termodinâmico, as definições de entropia dadas pelas equações 2.54, 2.55 e 2.56 são as mesmas. Em outras palavras dizemos que as diferentes definições de entropia convergem para o mesmo valor para N grande. É importante lembrar disso no caso gravitacional que será discutido mais tarde. Uma definição de entropia mais clara e não-ambígua para este caso somente é possível para valores grandes de entropia.

Capítulo 3

Resultados de Relatividade Geral

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados conhecidos da relatividade geral com o intuito de fixar a notação e preparar o campo para o estudo de buracos negros e sua termodinâmica. Primeiro descreveremos brevemente o transporte paralelo. Depois descreveremos geodésicas que são parametrizadas afim e também as que não são parametrizadas afim, pois estas últimas são importantes para a definição de uma grandeza chamada gravidade superficial que aparecerá nos próximos capítulos. Estudaremos as isometrias, os vetores de Killing e o desvio geodésico que servirão de base para se definir a derivada de Lie e demonstrar a relação entre a derivada de Lie e a equação de Killing. Após isso falaremos sobre as condições impostas ao tensor energia momento de uma teoria, que são chamadas de condições de energia. Como demonstraremos ao longo de toda a dissertação, a derivada de Lie é de extrema importância nas várias deduções feitas para a obtenção das Leis da Termodinâmica de Buracos Negros bem como as condições de energia. O estudo feito sobre congruências geodésicas tem como intenção deduzir a chamada equação de Raychaudhuri, que juntamente com certas condições de energia é usada para demonstrar o chamado teorema da focalização, que nos dá uma prova de que a gravitação é uma força atrativa. Por fim, deduziremos a solução de Schwarzschild que corresponde a um buraco negro sem carga e sem momento angular, e a solução de Reissner-Nordstrom, que corresponde a um buraco negro com carga e sem momento angular. Apresentaremos a solução de Kerr-Newmann, que corresponde a um buraco negro carregado e com momento angular. Discutiremos a maneira de se definir o chamado horizonte de eventos, as superfícies nulas e a relação que ambas possuem com os chamados horizontes de Killing. Ao longo de nossas discussões falaremos sobre o teorema “no hair”, que diz que o buraco negro é descrito por um conjunto muito pequeno de parâmetros. Devido a esse teorema vamos mostrar como se escreve as expressões para a massa, a carga e o momento angular do buraco negro, todos vistos por um observador no infinito.

3.1 Noções básicas

3.1.1 Transporte paralelo

Cosidere um caminho $x(\lambda)$, onde λ é o parâmetro ao longo deste caminho. Um tensor T é transportado paralelamente ao longo de $x(\lambda)$ se sua derivada covariante ao longo do caminho é nula:

$$\left(\frac{D}{d\lambda}T\right)^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} = 0. \quad (3.1)$$

Para um vetor V^μ essa exigência nos leva a

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{d\lambda}V\right)^\mu &= \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma V^\mu = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\partial_\sigma V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}V^\rho = 0 \\ \frac{d}{d\lambda}V^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}V^\rho &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se a conexão é compatível com a métrica, a métrica é sempre transportada paralelamente

$$\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda}\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Dessa forma o produto interno de dois vetores transportados paralelamente é preservado:

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu &= \left(\frac{D}{d\lambda}g_{\mu\nu}\right)V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu}\left(\frac{D}{d\lambda}V^\mu\right)W^\nu + g_{\mu\nu}V^\mu\left(\frac{D}{d\lambda}W^\nu\right) \\ \frac{D}{d\lambda}(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O transporte paralelo com respeito a uma conexão compatível com a métrica preserva a norma e a ortogonalidade de vetores.

3.1.2 Geodésicas

O vetor tangente a uma curva parametrizada $x^\mu(\lambda)$ é dado por $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Uma geodésica é uma curva na qual o vetor tangente é transportado paralelamente ao longo de $x^\mu(\lambda)$, i.e.

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0. \quad (3.5)$$

Escrevendo explicitamente

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (3.6)$$

Esta é a chamada **equação da geodésica**. Essa é uma escolha de parametrização específica na qual a curva $x^\mu(\lambda)$ foi parametrizada com o que chamamos de **parâmetro**

afim. Qualquer parâmetro λ que se relaciona com o tempo próprio através da relação linear

$$\lambda = a\tau + b \quad (3.7)$$

é chamado de parâmetro afim. A equação da geodésica mais geral é escrita como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\alpha} \frac{dx^\rho}{d\alpha} = f(\alpha) \frac{dx^\mu}{d\alpha} \quad (3.8)$$

para algum parâmetro $\alpha(\lambda)$.

A equação da geodésica com parâmetro afim pode ser escrita em termos da quadrivelocidade $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ da seguinte forma

$$U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0, \quad (3.9)$$

ou em termos do quadrimomento $p^\mu = mU^\mu$,

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0. \quad (3.10)$$

Esta equação é válida para trajetórias do tipo tempo. Para trajetórias nulas o tempo próprio τ é nulo, o que quer dizer que ele não é um parâmetro afim apropriado. Se uma trajetória nula é uma geodésica para um parâmetro λ ela também será uma geodésica para um parâmetro da forma $a\lambda + b$. Uma normalização conveniente do parâmetro afim é escolher λ de forma que o quadrimomento seja dado por

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (3.11)$$

Uma partícula com quadrimomento p^μ medido por um observador com quadrivelocidade U^μ terá sua energia medida por esse mesmo observador dada por

$$E = -p_\mu U^\mu \quad (3.12)$$

independentemente se p^μ é nulo ou do tipo tempo. Como vimos o caráter da trajetória é determinado pelo produto interno do vetor tangente com ele mesmo. Uma propriedade importante das geodésicas em um espaçotempo com métrica de Lorentz é que o caráter da geodésica, relativa a uma conexão compatível com a métrica, nunca muda.

3.1.3 Isometrias e conservação do quadrimomento

Considere a métrica no espaço de Minkowski em quatro dimensões

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.13)$$

Facilmente notamos que essa métrica é invariante sob translações, isto é

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (3.14)$$

e da mesma forma por transformações de Lorentz

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (3.15)$$

pois

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma.$$

Uma variedade M possui uma simetria se a geometria é invariante sob certas transformações que mapeiam M para si mesma. Em outras palavras M possui uma simetria se a métrica não muda de um ponto a outro. Simetrias da métrica são chamadas de **isometrias**. Sempre que os coeficientes da métrica forem independentes de uma coordenada individual $x^{\sigma*}$, ou melhor, $\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0$ para um σ^* fixo, haverá uma simetria sob translação ao longo de σ^* , isto é

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow x^{\sigma*} \rightarrow x^{\sigma*} + a^{\sigma*} \quad (3.16)$$

é uma simetria. Utilizando a equação da geodésica para trajetórias do tipo tempo temos

$$\begin{aligned} p^\lambda \nabla_\lambda p_\mu &= p^\lambda \partial_\lambda p_\mu + \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma p^\lambda p_\sigma = 0 \\ \Rightarrow m \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda p_\mu &= -\frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p_\sigma \\ \Rightarrow m \frac{dp_\mu}{d\tau} &= -\frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p^\nu = -\frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se para uma direção específica $x^{\sigma*}$, $\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0$, a equação da geodésica implica na conservação do componente do momento $p_{\sigma*}$:

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0. \quad (3.18)$$

Em 4 dimensões há quatro tipos de translações e seis tipos de transformações de Lorentz, o que corresponde a um total de 10 isometrias.

3.1.4 Desvio geodésico

Agora consideraremos curvas geodésicas que se encontram inicialmente paralelas e mostraremos como elas se comportam conforme caminhamos sobre os diferentes pontos de cada geodésica. Considere uma família de geodésicas dependentes de um parâmetro afim t , $\gamma_s(t)$, onde o subscrito s é um número real, e, para cada

s temos somente uma única geodésica associada. A coleção de todas essas curvas forma uma superfície suave bidimensional $\mathcal{M}$. As coordenadas sobre essa superfície podem ser escolhidas de forma que sejam s e t , desde que tenhamos uma família de geodésicas que não se cruzam. A superfície inteira é formada pelo conjunto de pontos $x^\mu(s, t) \in \mathcal{M}$. Os dois campos vetoriais são o vetor tangente à superfície

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \quad (3.19)$$

e o vetor de desvio, que mede o desvio entre duas geodésicas próximas, dado por

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}. \quad (3.20)$$

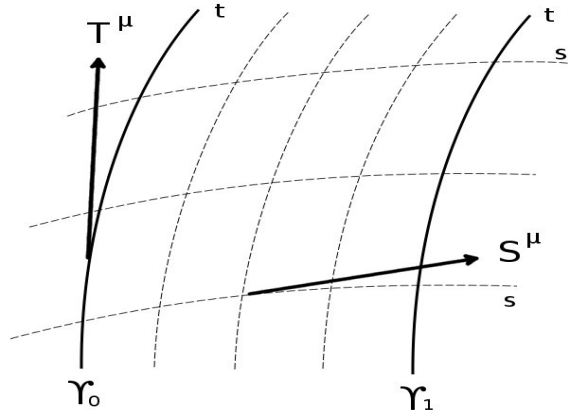


Figura 3.1: Representação dos vetores tangente e de desvio.

A velocidade relativa e a aceleração entre geodésicas são definidas respectivamente por

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu, \quad (3.21)$$

$$A^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu. \quad (3.22)$$

Usando o fato de que $[S, T] = 0$ temos

$$[S, T]^\mu = S^\lambda \partial_\lambda T^\mu - T^\lambda \partial_\lambda S^\mu = S^\lambda \nabla_\lambda T^\mu - T^\lambda \nabla_\lambda S^\mu = 0. \quad (3.23)$$

Logo

$$S^\lambda \nabla_\lambda T^\mu = T^\lambda \nabla_\lambda S^\mu, \quad (3.24)$$

Assim podemos calcular a aceleração

$$\begin{aligned} A^\mu &= T^\rho \nabla_\rho V^\mu = T^\rho \nabla_\rho (T^\sigma \nabla_\sigma S^\mu) = T^\rho \nabla_\rho (S^\sigma \nabla_\sigma T^\mu) \\ &= (T^\rho \nabla_\rho S^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + T^\rho S^\sigma (\nabla_\rho \nabla_\sigma T^\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T^\rho \nabla_\rho S^\sigma)(\nabla_\sigma T^\mu) + T^\rho S^\sigma [\nabla_\sigma \nabla_\rho T^\mu + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu] \\
&= (T^\rho \nabla_\rho S^\sigma)(\nabla_\sigma T^\mu) + S^\sigma \nabla_\sigma (T^\rho \nabla_\rho T^\mu) - (S^\sigma \nabla_\sigma T^\rho) \nabla_\rho T^\mu + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma
\end{aligned}$$

Usando o fato de que T^μ é o vetor tangente, isto é $T^\rho \nabla_\rho T^\mu = 0$, a aceleração entre as geodésicas é dada por

$$A^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma. \quad (3.25)$$

Esta aceleração é uma manifestação das forças de marés gravitacionais. Esta é a chamada equação do desvio geodésico e, usando a notação de derivada ao longo da curva $x(t)$, ela é escrita como

$$A^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma. \quad (3.26)$$

Pelo resultado vemos que a aceleração entre duas geodésicas é proporcional à curvatura.

3.1.5 Vetores de Killing e equação de Killing

Seja $g_{\mu\nu}$ a métrica independente da coordenada $x^{\sigma*}$, e seja o vetor unitário associado à essa direção dado por $K \equiv \partial_{\sigma*}$, tal que

$$K^\mu = (\partial_{\sigma*}) = \delta^\mu_{\sigma*}. \quad (3.27)$$

K^μ é o vetor que gera a isometria do espaçotempo. O componente do momento associado à essa direção pode ser escrito como

$$p_{\sigma*} = K^\nu p_\nu. \quad (3.28)$$

Como vimos anteriormente essa é uma quantidade conservada. Essa lei de conservação é o equivalente a afirmar que a derivada direcional ao longo da geodésica é nula, isto é

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} \Leftrightarrow p^\mu \nabla_\mu (p_{\sigma*}) = p^\mu \nabla_\mu (K^\nu p_\nu) = 0. \quad (3.29)$$

De fato,

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\nu p^\mu (\nabla_\mu K_\nu) + K_\nu p^\mu (\nabla_\mu p^\nu) = 0.$$

O segundo termo é nulo pela definição da geodésica 3.10. No primeiro termo os componentes do momento são simétricos pela troca dos índices μ e ν , logo podemos simetrizar o termo que multiplica esses componentes de forma a obter

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0. \quad (3.30)$$

Como os componentes do momento são arbitrários a equação que resulta dessa condição é dada por

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0. \quad (3.31)$$

Esta é a chamada **equação de Killing** e qualquer vetor K_μ que satisfaça essa equação implica que $K_\nu p^\nu$ seja uma quantidade conservada ao longo da geodésica. Os vetores que satisfazem a equação de Killing são chamados de **vetores de Killing**.

3.1.6 Derivada de Lie

Para introduzir o conceito de derivada de Lie considere a lei de transformação da métrica sob transformações de coordenadas

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (3.32)$$

Podemos escrever a transformação como

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu, \quad (3.33)$$

onde ϵ é o parâmetro infinitesimal e ξ é o gerador da transformação. Note que

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\rho + \epsilon \partial_\mu \xi^\rho(x),$$

e a expansão da métrica até primeira ordem em ϵ é escrita como

$$g_{\rho\sigma}(x) = g_{\rho\sigma}(x') - \epsilon \xi^\mu \partial_\mu g_{\rho\sigma}(x).$$

Substituindo estes resultados em 3.32 temos

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\rho\sigma}(x') - \epsilon (\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + g_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.34)$$

Se a transformação de coordenadas corresponde à uma isometria então devemos ter

$$g'_{\mu\nu}(x') - g_{\rho\sigma}(x') = 0, \quad (3.35)$$

e, devido à arbitrariedade do parâmetro ϵ , consequentemente teremos

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + g_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho = 0, \quad (3.36)$$

que é a chamada **derivada de Lie** da métrica. Se a conexão é compatível com a métrica temos

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma g_{\sigma\mu}.$$

Substituindo na expressão 3.36 teremos

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (3.37)$$

que é a equação de Killing 3.31, o que demonstra que o vetor que gera a transformação 3.33 é um vetor de Killing. A derivada de Lie é um conceito definido para tensores de quaisquer tipos, como veremos. Considere agora uma curva γ cujo vetor tangente é $\xi^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. Podemos escrever a transformação de coordenadas com parâmetro infinitesimal $d\lambda$ como

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha d\lambda. \quad (3.38)$$

Sob essa transformação um vetor contravariante A^α se torna

$$\begin{aligned} A'^\alpha(x') &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \\ &= (\delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha d\lambda) A^\beta(x) \\ &= A^\alpha(x) + \partial_\beta \xi^\alpha(x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Por outro lado, o valor desse mesmo vetor no ponto x' é escrito como

$$\begin{aligned} A^\alpha(x') &= A^\alpha(x^\alpha + \xi^\alpha d\lambda) \\ &= A^\alpha(x) + \xi^\beta \partial_\beta A^\alpha(x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Em geral, $A'^\alpha(x')$ e $A^\alpha(x')$ não serão iguais. A diferença entre eles define a derivada de Lie de um vetor A^α ao longo da curva γ :

$$\mathcal{L}_\xi A^\alpha \equiv \frac{A^\alpha(x') - A'^\alpha(x')}{d\lambda}. \quad (3.41)$$

Combinando as duas equações anteriores à essa temos

$$\mathcal{L}_\xi A^\alpha = \xi^\beta \partial_\beta A^\alpha - A^\beta \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (3.42)$$

ou seja, a derivada de Lie de um vetor contravariante A^α por ξ^α é igual ao comutador entre ξ^α e A^α . Partindo dos mesmos princípios podemos estender a idéia de derivada de Lie para escalares, que é escrita como

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi^\alpha \partial_\alpha f, \quad (3.43)$$

e para um vetor covariante A_α , a derivada de Lie é escrita como

$$\mathcal{L}_\xi A_\alpha = \xi^\beta \partial_\beta A_\alpha + A^\beta \partial_\beta \xi_\alpha. \quad (3.44)$$

Por indução podemos verificar que a derivada de Lie de um tensor de ordem m em seu índice contravariante, e de ordem n em seu índice covariante é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} &= \xi^\gamma \nabla_\gamma T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} - T^{\gamma \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} \nabla_\gamma \xi^{\alpha_1} - \dots \\ &- T^{\alpha_1 \dots \gamma}_{\beta_1 \dots \beta_n} \nabla_\gamma \xi^{\alpha_m} + T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\gamma \dots \beta_n} \nabla_{\beta_1} \xi^\gamma + \dots + T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \gamma} \nabla_{\beta_n} \xi^\gamma. \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.1.7 Condições de Energia

As equações de Einstein relacionam as propriedades geométricas do espaçotempo, embutidas no tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, com o conteúdo de energia da matéria, embutido no tensor energia-momento. De fato, para certos tipos de matéria há uma certa arbitrariedade na escolha de fontes de energia momento. Chamamos de condições de energia às condições impostas sobre o tensor energia-momento de forma a limitar essa arbitrariedade. Acredita-se por exemplo, que todos os sistemas físicos satisfazem a condição de energia fraca, enquanto que para outras condições isso já não é muito claro. Porém, os tipos de matéria usuais, como poeira e radiação por exemplo, satisfazem todas as condições de energia que apresentaremos. Seja t^μ um quadrive-tor do tipo tempo e l^μ um quadrive-tor do tipo nulo. As condições de energia mais comumente encontradas na literatura são :

1. condição de energia fraca

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0 \quad (3.46)$$

para todo vetor do tipo tempo t^μ ;

2. condição de energia nula

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0 \quad (3.47)$$

para todo vetor nulo l^μ ;

3. condição de energia dominante

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0, \quad T_{\mu\nu}T^\nu{}_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0, \quad (3.48)$$

que equivale a dizer que exigimos a condição de energia fraca e que $T_{\mu\nu}t^\mu$ seja um vetor do tipo nulo ou do tipo tempo;

4. condição de energia dominante nula

$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0, \quad T_{\mu\nu}T^\nu{}_\lambda l^\mu l^\lambda \leq 0, \quad (3.49)$$

que equivale a dizer que exigimos a condição de energia dominante para vetores nulos somente;

5. condição de energia forte

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{D-2}T^\lambda{}_\lambda t_\mu t^\mu \quad (3.50)$$

para todos vetores do tipo tempo t^μ .

Como exemplo de aplicação das condições de energia vamos tratar do caso de um fluido perfeito, descrito pelo tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

onde U^μ é a quadrivelocidade do fluido, tal que $U_\mu U^\mu = -1$, e o espaço é isotrópico, de forma que a pressão tem o mesmo valor nas direções espaciais. Como U^μ é um vetor do tipo tempo temos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu &= (\rho + p) U_\mu U^\mu U_\nu U^\nu + p g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \\ &= (\rho + p) - p = \rho \Rightarrow \\ T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu &= \rho, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu &= (\rho + p) U_\mu l^\mu U_\nu l^\nu + p g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \\ &= (\rho + p) (U_\mu l^\mu)^2 \Rightarrow \\ T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu &= (\rho + p) (U_\mu l^\mu)^2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} T^\nu{}_\lambda U^\mu U^\lambda &= (\rho + p)^2 U_\mu U^\mu U_\nu U^\nu U_\lambda U^\lambda \\ &+ (\rho + p) p U_\mu U^\mu U_\nu U^\nu + p(\rho + p) U_\mu U^\mu U_\lambda U^\lambda + p^2 g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \\ &= -(\rho + p)^2 + 2p(\rho + p) - p^2 = -\rho^2 \Rightarrow \\ T_{\mu\nu} T^\nu{}_\lambda U^\mu U^\lambda &= -\rho^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$T^\lambda{}_\lambda = (D - 1)p - \rho. \quad (3.55)$$

Como t^μ é um vetor qualquer do tipo tempo, isto é, $t_\mu t^\mu < 0$, podemos escolher a decomposição $t^\mu = U^\mu + \alpha l^\mu$, sendo α uma constante. Porém $t_\mu t^\mu < 0$ implica em

$$\alpha U_\mu l^\mu < \frac{1}{2}. \quad (3.56)$$

A condição de energia fraca estabelece que

$$\rho - 2\alpha\rho(U_\mu l^\mu) + \alpha^2(\rho + p)(U_\mu l^\mu)^2 \geq 0. \quad (3.57)$$

Escolhendo $\alpha = 0$ implica em $\rho \geq 0$, e escolhendo $\alpha = 1$ podemos escolher $U_\mu l^\mu = -1/2$ de forma que 3.56 seja satisfeita e isso implica em $\rho + p \geq 0$. A condição de energia fraca estabelece então que $\rho \geq 0$ e que $\rho + p \geq 0$, ou seja, que a densidade de energia seja positiva e que a pressão não seja grande demais se comparada com a densidade de energia. Por 3.53 vemos que a condição de energia nula estabelece somente que $\rho + p \geq 0$, ou seja, que agora a densidade de energia pode ser negativa sendo compensada com uma pressão positiva. A condição de energia dominante estabelece que

$$-\rho^2 + 2\alpha\rho^2(U_\mu l^\mu) + \alpha^2(-\rho^2 + p^2)(U_\mu l^\mu)^2 \leq 0. \quad (3.58)$$

Já sabemos que $\rho > 0$, então podemos escolher $U_\mu l^\mu = -1$ e $\alpha > 1/2$, o que nos fornecerá a condição $p^2 - \rho^2 \leq 0$, ou seja, que $\rho \geq |p|$. Então a condição de energia

dominante estabelece que $\rho \geq |p|$, ou seja, que a densidade de energia seja maior que a pressão em módulo permitindo a pressão assumir valores negativos. A condição de energia forte estabelece que

$$(D-3)\rho - 2\alpha\rho(D-3)(U_\mu l^\mu) - 2\alpha^2 p(D-1)(U_\mu l^\mu) + (D-1)p + \alpha^2(\rho+p)(D-2)(U_\mu l^\mu)^2 \geq 0. \quad (3.59)$$

Para $\alpha = 0$ temos $(D-3)\rho + (D-1)p \geq 0$. Para $\alpha = 1$ e $U_\mu l^\mu = -1$ temos

$$-\rho(D-3) + 3(D-1)p + (D-2)(\rho+p) \geq 0.$$

Pela condição $(D-3)\rho + (D-1)p \geq 0$ os dois primeiros termos dessa expressão são claramente maior ou igual a zero, o que resulta em $(D-2)(\rho+p) \geq 0$. Logo, a condição de energia forte estabelece que $(D-3)\rho + (D-1)p \geq 0$ e que $(\rho+p) \geq 0$. A condição de energia forte implica que a gravitação é atrativa, como veremos na seção a seguir que trata de congruências geodésicas.

3.1.8 Congruências geodésicas

Uma congruência geodésica é um conjunto de curvas em uma região aberta do espaçotempo tal que cada ponto desta região se encontra precisamente sobre uma única curva, o que equivale a dizer que as curvas não se cruzam. Para o estudo da evolução de uma congruência geodésica é necessário introduzir tensores que nos dão ideia de alguns conceitos referentes à cinemática de um meio deformável, o que nos dará uma visão geométrica, porém mais física, a respeito do comportamento da congruência em questão. Considere o movimento interno de um meio deformável bidimensional, o qual analisaremos de um ponto de vista puramente cinemático. Para um deslocamento suficientemente pequeno ξ^α sobre um ponto de referência O podemos escrever

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = B^\alpha{}_\beta(t)\xi^\beta + O(\xi^2) \quad (3.60)$$

para algum tensor $B^\alpha{}_\beta(t)$. É a dinâmica do meio que determina a dependência temporal deste tensor. Para pequenos intervalos de tempo a relação abaixo é válida

$$\xi^\alpha(t_1) = \xi^\alpha(t_0) + \Delta\xi^\alpha(t_0), \quad (3.61)$$

onde

$$\Delta\xi^\alpha(t_0) = B^\alpha{}_\beta(t_0)\xi^\beta(t_0) + O(\Delta t^2), \quad (3.62)$$

e $\Delta t = t_1 - t_0$. A ação de $B^\alpha{}_\beta$ pode ser visualizada geometricamente através de um exemplo simples, um círculo, descrito por $\xi^\alpha(t_0) = (r_0 \cos \phi, r_0 \sin \phi)$. Separadamente considere o caso em que $B_\alpha{}^\beta$ é proporcional a matriz identidade na seguinte

forma:

$$B^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

com $\theta \equiv B^\alpha{}_\alpha$. Então temos a variação

$$\Delta\xi_\alpha = \frac{1}{2}\theta r_0 \Delta t (\cos \phi, \sin \phi), \quad (3.64)$$

o que, por 3.61, corresponderá a uma variação no raio do círculo

$$r_1 = r_0 + \frac{1}{2}\theta r_0 \Delta t, \quad (3.65)$$

o que demonstra que o círculo estará se expandindo, para $\Delta t > 0$, ou se contraindo, para $\Delta t < 0$. Essa mudança no raio corresponderá à uma mudança na área, $\Delta A \equiv A_1 - A_0 = \pi r_0^2 \theta \Delta t$. De fato, essa mudança na área nos dá uma interpretação para θ , que pode ser escrito como

$$\theta = \frac{1}{A_0} \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (3.66)$$

Apesar de ser uma função do tempo a quantidade θ é chamada de parâmetro de expansão, ou simplesmente expansão, e por 3.66 corresponde à mudança fracional de área por unidade de tempo.

Suponha agora que $B^\alpha{}_\beta$ seja simétrico e com traço nulo, escrito na seguinte forma:

$$B^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \sigma_+ & \sigma_\times \\ \sigma_\times & -\sigma_+ \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Então, sendo $\alpha, \beta = 1, 2$, temos

$$\Delta\xi^1 = B^1{}_1 \xi^1 \Delta t + B^1{}_2 \xi^2 \Delta t = r_0 \Delta t (\sigma_+ \sin \phi + \sigma_\times \cos \phi)$$

$$\Delta\xi^2 = B^2{}_1 \xi^1 \Delta t + B^2{}_2 \xi^2 \Delta t = r_0 \Delta t (\sigma_\times \cos \phi - \sigma_+ \sin \phi),$$

que de forma reduzida é escrita como

$$\Delta\xi^\alpha = r_0 \Delta t (\sigma_+ \sin \phi + \sigma_\times \cos \phi, \sigma_\times \cos \phi - \sigma_+ \sin \phi) \quad (3.68)$$

Então 3.61 nos fornece

$$r_1(\cos \phi, \sin \phi) = r_0(\cos \phi, \sin \phi) + r_0 \Delta t (\sigma_+ \cos \phi + \sigma_\times \sin \phi, -\sigma_+ \sin \phi + \sigma_\times \cos \phi). \quad (3.69)$$

Multiplicando o primeiro componente por $\cos \theta$, o segundo componente por $\sin \theta$ e depois somando os resultados chegamos à equação paramétrica que descreve a nova figura

$$r_1 = r_0(1 + \sigma_+ \Delta t \cos 2\phi + \sigma_\times \Delta t \sin 2\phi). \quad (3.70)$$

Considerando o caso em que $\Delta t > 0$ e $\sigma_+ > \sigma_\times$, esta figura representa uma elipse com semieixo maior dado por $r_0(1 + \sigma_+ \Delta t)$ e semieixo menor dado por $r_0(1 - \sigma_+ \Delta t)$. A área da figura, que antes era πr_0^2 , não muda até a primeira ordem em Δt . O tensor B^α_β representa nesse caso a distorção da figura (o termo em inglês usado nesse caso é "shear") e os parâmetros σ_+ e $\sigma_\times$ são chamados de parâmetros de distorção. Uma característica interessante desta transformação da figura é que a área da figura é a mesma antes e depois, até a primeira ordem em Δt .

Como último caso, suponhamos agora que B^α_β seja antissimétrico, de forma que

$$B^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Da mesma forma que antes obtemos

$$\Delta \xi^\alpha = r_0 \omega \Delta t (\sin \phi, -\cos \phi). \quad (3.72)$$

Como Δt é pequeno podemos escrever

$$\xi^\alpha(t_1) = r_0 (\cos(\phi - \omega \Delta t), \sin(\phi - \omega \Delta t)). \quad (3.73)$$

De fato, isto representa uma rotação global da figura original e essa rotação não altera a área da figura. Por este motivo chamamos ω de parâmetro de rotação. O caso geral corresponde a B^α_β sendo igual a soma dos três casos anteriores, isto é

$$B^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_+ & \sigma_\times \\ \sigma_\times & -\sigma_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

que pode ser escrito em termos de componentes como

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\theta\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}. \quad (3.75)$$

Nesta expressão $\theta = B^\alpha_\alpha$ corresponde ao traço de $B_{\alpha\beta}$ e é chamada de expansão, $\sigma_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2}\theta\delta_{\alpha\beta}$ corresponde à parte simétrica e de traço nulo de $B_{\alpha\beta}$, que é chamada de distorção, e finalmente $\omega_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]}$ corresponde à parte antissimétrica de $B_{\alpha\beta}$ e é chamada de rotação. A ação deste tensor mais geral corresponde a uma combinação linear da expansão, distorção e rotação. Podemos facilmente generalizar a equação 3.75 para o caso tridimensional, que será expressa como

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\theta\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}, \quad (3.76)$$

onde agora teremos $\theta = B^\alpha_\alpha$, $\sigma_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{3}\theta\delta_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]}$. Para o caso tridimensional, θ é a mudança fracional do volume por unidade de tempo

$$\theta = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (3.77)$$

Podemos verificar essa expressão ao considerar a relação

$$\xi^\alpha(t_1) = (\delta^\alpha_\beta + B^\alpha_\beta \Delta t) \xi^\beta(t_0) \quad (3.78)$$

como uma transformação de coordenadas de $\xi^\beta(t_0)$ para $\xi^\beta(t_1)$. O jacobiano da transformação será

$$J = \det[\delta^\alpha_\beta + B^\alpha_\beta \Delta t] = 1 + \text{Tr}[B^\alpha_\beta \Delta t] = 1 + \theta \Delta t,$$

o que implica que o volume em t_0 e t_1 são relacionados por

$$V_1 = (1 + \theta \Delta t) V_0$$

que implica a equação 3.77. Este resultado também mostra que o volume não é afetado pelos tensores de distorção e de rotação.

Estes são, a princípio, os ingredientes essenciais para se estudar congruências geodésicas. Estudaremos primeiro a congruência de geodésicas do tipo tempo, que facilmente pode ser estendido para geodésicas do tipo espaço. O caso nulo será tratado separadamente. Queremos determinar como uma dada congruência se comporta com o tempo, ou, mais precisamente, queremos estudar o comportamento do vetor de desvio ξ^α entre duas geodésicas vizinhas em uma congruência como uma função do tempo próprio. Sendo $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ o vetor tangente às geodésicas do tipo tempo (o mesmo que o vetor T^μ em 3.19) e o vetor de desvio ξ^α transversal ao fluxo da congruência (o mesmo que o vetor de desvio S^μ em 3.20) as relações abaixo são válidas

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \quad u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0, \quad u^\alpha \xi_\alpha = 0, \quad \xi^\beta \nabla_\beta u^\alpha = u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha. \quad (3.79)$$

A métrica $g_{\alpha\beta}$ é decomposta em uma parte longitudinal, $-u_\alpha u_\beta$, e uma parte transversal, $h_{\alpha\beta}$,

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta. \quad (3.80)$$

A métrica transversal é puramente espacial, no sentido em que ela é ortogonal a u^α , isto é

$$u^\alpha h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \quad (3.81)$$

Ela é puramente tridimensional. Para um referencial de Lorentz em um ponto P da congruência, $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, logo $h_{\alpha\beta} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$. Introduzimos nesse ponto o campo tensorial

$$B_{\alpha\beta} = \nabla_\beta u_\alpha, \quad (3.82)$$

que também é puramente transversal, pois

$$u^\alpha B_{\alpha\beta} = u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = \frac{1}{2} \nabla_\beta (u^\alpha u_\alpha) = 0,$$

$$B_{\alpha\beta} u^\beta = u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = 0.$$

De $u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \xi^\beta \nabla_\beta u^\alpha$ temos

$$u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = B^\alpha_\beta \xi^\beta. \quad (3.83)$$

Por 3.8 dizemos que B^α_β é um tensor que mede a "falha" de ξ^α em ser transportado paralelamente ao longo da congruência. Essa equação é análoga a 3.60 e o tensor B^α_β é dado por 3.76, já que estamos considerando caso de uma congruência de geodésicas do tipo tempo, e a interpretação da expansão, distorção e rotação é a mesma que a anterior. Se $\theta > 0$ a congruência estará divergindo e se $\theta < 0$ a congruência estará convergindo. Todo esse formalismo foi apresentado para que pudéssemos deduzir uma equação para a evolução de θ com respeito ao tempo próprio. Como $B_{\beta\alpha} = \nabla_\beta u_\alpha$ temos

$$\begin{aligned} u^\mu \nabla_\mu B_{\alpha\beta} &= u^\mu \nabla_\mu \nabla_\beta u_\alpha \\ &= u^\mu \nabla_\beta \nabla_\mu u_\alpha - R_{\alpha\nu\beta\mu} u^\nu u^\mu \\ &= \nabla_\beta (u^\mu \nabla_\mu u_\alpha) - \nabla_\mu u_\alpha \nabla_\beta u^\mu - R_{\alpha\mu\beta\nu} u^\mu u^\nu \\ &= -B_{\alpha\mu} B^\mu_\beta - R_{\alpha\mu\beta\nu} u^\mu u^\nu. \end{aligned}$$

Tomando o traço desta expressão temos

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta. \quad (3.84)$$

Separadamente temos

$$B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} = \left(\frac{1}{3} \theta \delta^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} \right) \left(\frac{1}{3} \theta \delta_{\beta\alpha} + \sigma_{\beta\alpha} + \omega_{\beta\alpha} \right)$$

$$B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} = \frac{1}{3} \theta^2 + \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \omega^{\alpha\beta} \omega_{\beta\alpha},$$

onde usamos o fato de que o delta de Kronecker multiplicado pelo tensor de rotação é nulo por ser um produto de um tensor simétrico com um antissimétrico e que o tensor de distorção tem traço nulo. Substituindo esse resultado em 3.84 temos finalmente

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3} \theta^2 - \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} \omega_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta. \quad (3.85)$$

Esta é a chamada *equação de Raychaudhuri* para uma congruência de geodésicas do tipo tempo. A importância desta equação para a relatividade geral é revelada pelo seguinte teorema: Seja uma congruência geodésica ortogonal à hipersuperfície, de

forma que $\omega_{\alpha\beta} = 0$ e que seja válida a condição de energia forte 3.50, i.e. $R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq 0$. Então, a equação de Raychaudhuri 3.85 implica que

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \leq 0. \quad (3.86)$$

A expansão deve portanto decrescer durante a evolução da congruência. Então uma congruência que inicialmente está divergindo, isto é, $\theta > 0$, divergirá menos rapidamente no futuro, enquanto que uma congruência que está convergindo, isto é, $\theta < 0$, convergirá mais rapidamente no futuro. Este é o chamado *teorema de focalização* (focusing theorem). A interpretação física deste teorema é que **quando a condição de energia forte é válida a gravitação é uma força atrativa**, e que as geodésicas se focalizam como resultado desta atração. Também da equação de Raychaudhuri sob as condições do teorema de focalização vale a relação

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2, \quad (3.87)$$

que pode ser facilmente integrada, fornecendo

$$\frac{1}{\theta(\tau)} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{\tau}{3}, \quad (3.88)$$

sendo $\theta_0 \equiv \theta(t_0)$ a constante de integração. Isto mostra que para uma congruência que está inicialmente convergindo ($\theta_0 < 0$), então $\theta(\tau) \rightarrow -\infty$ quando o intervalo de tempo próprio for $\tau \leq 3/|\theta_0|$. Isso quer dizer que as geodésicas se encontrarão em um ponto, chamado de cáustica. A cáustica é uma singularidade da congruência e a equação de Raychaudhuri perde o significado em tais pontos.

Partiremos agora para o caso de uma congruência de geodésicas nulas. O vetor tangente às geodésicas será k^α , e será um vetor nulo. As geodésicas serão parametrizadas por um parâmetro afim λ . O vetor de desvio novamente será ξ^α , e também será ortogonal às geodésicas e Lie transportado ao longo delas. Logo, é válido o conjunto de equações

$$k^\alpha k_\alpha = 0, \quad k^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0, \quad k^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \xi^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0, \quad k^\alpha \xi_\alpha = 0. \quad (3.89)$$

Se a métrica transversal fosse dada por uma fórmula similar a 3.80, usando k^α em vez de u^α , claramente ela não seria ortogonal ao vetor k^α , já que $h_{\alpha\beta}k^\beta = k_\alpha$. Para resolver esse problema introduzimos as coordenadas nulas

$$u = t - x, \quad v = t + x. \quad (3.90)$$

O elemento de linha num referencial de Lorentz será

$$ds^2 = -dudv + dy^2 + dz^2. \quad (3.91)$$

Como k^α é um vetor nulo poderíamos escolhê-lo de forma que ele fosse tangente às curvas $u = \text{const}$, e 3.91 seria então dado por $d\tilde{s}^2 = dy^2 + dz^2$, o que representaria uma métrica transversal bidimensional. Este será o nosso caso, pois $ds^2 = 0$ para deslocamentos ao longo da direção v . Para poder isolar a parte transversal da métrica introduzimos outro vetor nulo N^α , que será o vetor auxiliar com a normalização $N_\alpha k^\alpha = -1$. Poderíamos por exemplo escolher $k_\alpha = -\partial u$ e $N_\alpha = -\frac{1}{2}\partial_\alpha v$ em um referencial de Lorentz que essa normalização será satisfeita. Por construção, a métrica transversal pode ser escrita como

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + k_\alpha N_\beta + N_\alpha k_\beta, \quad (3.92)$$

satisfazendo

$$h_{\alpha\beta}k^\beta = h_{\alpha\beta}N^\beta = 0, \quad h^\alpha{}_\alpha = 2, \quad h^\alpha{}_\mu h^\mu{}_\beta = h^\alpha{}_\beta. \quad (3.93)$$

Essa métrica é ortogonal a k^α e N^α , e efetivamente bidimensional. Para descrever a evolução da congruência de geodésicas nulas introduzimos novamente o tensor $B_{\alpha\beta} = \nabla_\beta k_\alpha$ como sendo uma medida da falha de k^α ser transportado paralelamente ao longo da congruência, através da relação

$$k^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = B^\alpha{}_\beta \xi^\beta. \quad (3.94)$$

$B^\alpha{}_\beta$ é ortogonal a ao vetor tangente, isto é, $k^\alpha B_{\alpha\beta} = 0$, mas não é ortogonal a N^α , o que nos diz que a equação acima tem um componente transversal que deve ser removido. Para isso, projetamos o vetor de desvio ξ^α usando a métrica transversal 3.92, o que nos dará sua parte puramente transversal $\tilde{\xi}^\alpha$:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^\alpha &\equiv h^\alpha{}_\mu \xi^\mu = \xi^\alpha + k^\alpha (\xi^\mu N_\mu) + N^\alpha (\xi^\mu k_\mu) \\ \tilde{\xi}^\alpha &= \xi^\alpha + k^\alpha (\xi^\mu N_\mu). \end{aligned} \quad (3.95)$$

A velocidade relativa entre duas geodésicas é dada pela derivada covariante do vetor de desvio transversal na direção k^α

$$\begin{aligned} k^\beta \nabla_\beta \tilde{\xi}^\mu &= k^\beta \nabla_\beta h^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu + h^\mu{}_\nu \cdot k^\beta \nabla_\beta \xi^\nu \\ &= k^\beta \nabla_\beta h^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu + h^\mu{}_\nu \cdot \xi^\beta \nabla_\beta k^\nu \\ &= k^\beta \nabla_\beta h^\mu{}_\nu \cdot \xi^\nu + h^\mu{}_\nu \cdot B^\nu{}_\beta \xi^\beta. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo cálculo para o lado direito de 3.95 temos

$$\begin{aligned} k^\beta \nabla_\beta \tilde{\xi}^\mu &= k^\beta \nabla_\beta \xi^\mu + k^\beta \nabla_\beta N_\nu \cdot \xi^\nu k^\mu + N_\nu k^\mu \cdot k^\beta \nabla_\beta \xi^\nu + N_\nu \xi^\nu \cdot k^\beta \nabla_\beta k^\mu \\ &= k^\beta \nabla_\beta \xi^\mu + k^\beta \nabla_\beta N_\nu \cdot \xi^\nu k^\mu, \end{aligned}$$

de onde notamos que $k^\beta \nabla_\beta \tilde{\xi}^\mu$ tem um componente ao longo de k^μ . Para removê-lo temos que projetá-lo usando h^α_μ , o que nos dará

$$\begin{aligned} h^\alpha_\mu k^\beta \nabla_\beta \tilde{\xi}^\mu &= h^\alpha_\mu h^\mu_\nu \cdot B^\nu_\beta \xi^\beta \\ &= h^\alpha_\mu B^\mu_\nu \xi^\nu \\ &= h^\alpha_\mu B^\mu_\nu (\tilde{\xi}^\nu - (N_\beta \xi^\beta) k^\nu) \\ &= h^\alpha_\mu B^\mu_\nu \tilde{\xi}^\nu \\ &= h^\alpha_\mu h^\nu_\beta B^\mu_\nu \tilde{\xi}^\beta \end{aligned}$$

para os componentes transversais da velocidade relativa. Podemos escrever o resultado como

$$h^\alpha_\mu k^\beta \nabla_\beta \tilde{\xi}^\mu = \tilde{B}^\alpha_\beta \tilde{\xi}^\beta, \quad (3.96)$$

onde definimos a parte puramente transversal de $B_{\mu\nu}$ como

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta B_{\mu\nu}. \quad (3.97)$$

A equação 3.96 é a equação que governa o comportamento transversal de uma congruência de geodésicas nulas, e $\tilde{B}^\alpha_\beta \tilde{\xi}^\beta$ pode ser interpretado como a velocidade relativa transversal entre duas geodésicas vizinhas. Usando 3.97 e as relações 3.92 e 3.94 podemos facilmente expressar $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ como

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} + k_\alpha N^\mu B_{\mu\beta} + k_\beta B_{\alpha\mu} N^\mu + k_\alpha k_\beta B_{\mu\nu} N^\mu N^\nu. \quad (3.98)$$

A decomposição do tensor $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ em suas partes irredutíveis é similar a 3.75:

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \theta h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}, \quad (3.99)$$

onde θ , $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\omega_{\alpha\beta}$ possuem interpretações similares ao caso anterior. Explicitamente, a expansão escalar é escrita como

$$\begin{aligned} \theta &= g^{\alpha\beta} \tilde{B}_{\alpha\beta} \\ &= g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \\ &= \nabla^\alpha k_\alpha. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Este resultado nos diz que, apesar da arbitrariedade da escolha de um vetor nulo N^α , a expansão não depende dessa escolha, o que demonstra que ela é única. De forma similar à 3.66, a interpretação de θ é a de que ele representa uma taxa de variação fracional por unidade de parâmetro afim da área da seção transversal da congruência. Seguindo os mesmos passos apresentados para o caso de congruências de geodésicas do tipo tempo podemos deduzir a versão nula da equação de Raychaudhuri. De fato,

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \quad (3.101)$$

e como

$$B^{\alpha\beta}B_{\beta\alpha} = \tilde{B}^{\alpha\beta}\tilde{B}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\theta^2 + \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \omega^{\alpha\beta}\omega_{\beta\alpha},$$

teremos

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta}\omega_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta. \quad (3.102)$$

Esta é a *equação de Raychaudhuri* para uma congruência de geodésicas nulas. Pelo fato dos tensores de rotação e distorção serem puramente transversais, $\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} \geq 0$ e $\omega^{\alpha\beta}\omega_{\beta\alpha} \geq 0$, com a igualdade valendo somente se os tensores são nulos. O teorema da focalização também possui uma versão nula. Considere uma congruência de geodésicas nulas ortogonais a hipersuperfície, de forma que $\omega_{\alpha\beta} = 0$, e que seja a válida a condição de energia nula, i.e. $R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$. A equação de Raychaudhuri implica que

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \leq 0, \quad (3.103)$$

que significa que as geodésicas se focalizam durante a evolução das congruências. Integrando $\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{2}\theta^2$, temos

$$\frac{1}{\theta(\lambda)} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{\lambda}{2}, \quad (3.104)$$

onde $\theta_0 = \theta(0)$. Este resultado mostra que, para uma congruência que esta inicialmente convergindo ($\theta_0 < 0$), $\theta \rightarrow -\infty$, dentro de um intervalo de parâmetro afim $\lambda < 2/\theta_0$, o que também sinaliza a ocorrência de uma cóustica.

3.2 Buracos negros

Nesta seção apresentaremos as soluções do tipo buraco negro para as equações de Einstein. A primeira e mais simples de todas essas soluções, chamada de **solução de Schwarzschild** em homenagem à Karl Schwarzschild que a descobriu em 1916, corresponde a uma solução esfericamente simétrica das equações de Einstein com conteúdo de matéria nulo, isto é, $T_{\mu\nu} = 0$. A solução de Reissner-Nordstrom corresponde à solução de um buraco negro carregado e sem momento angular. A solução de Kerr-Neumann é a mais geral de todas essas soluções pois descreve um buraco negro carregado e com momento angular.

Basicamente seguiremos as referências [5], [7] e [9]. Somente por completeza escreveremos algumas soluções em diferentes sistemas de coordenadas. Uma discussão sobre o comportamento dos cones de luz nas regiões de dentro e fora do horizonte de eventos bem como alguns fenômenos físicos que ocorrem devido à cada geometria como o desvio da luz e o atraso no tempo também são encontradas nas referências citadas acima.

Uma discussão sobre superfícies nulas, horizontes de Killing e a maneira como se define massa, carga e momento angular na região assintótica também são apresentadas nesta seção.

3.2.1 Solução de Schwarzschild

Um campo gravitacional apresentará simetria esférica quando a distribuição de matéria é esfericamente simétrica e quando o movimento da matéria ocorre somente na direção radial. A simetria esférica implica que a métrica é a mesma para todos pontos que se localizam à mesma distância do centro. A expressão para o elemento de linha com simetria esférica mais geral em coordenadas esféricas é escrita como

$$ds^2 = l(r, t)dt^2 + a(r, t)drdt + h(r, t)dr^2 + k(r, t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.105)$$

onde a , h , k e l são funções arbitrárias de r e t . Devido à arbitrariedade da escolha de sistemas de coordenadas na relatividade geral podemos escolher um sistema de coordenadas que não estrague a simetria esférica do problema. Usando transformações do tipo

$$t \rightarrow f_1(r', t'), \quad r \rightarrow f_2(r', t') \quad (3.106)$$

podemos escolher um sistema de coordenadas em que $a(r, t) = 0$ e $k(r, t) = r^2$. Essa escolha implica que a coordenada r é definida de forma que a circunferência do círculo com centro na origem seja $2\pi r$. Por conveniência escrevemos

$$l(r, t) = -e^\nu, \quad h(r, t) = e^\lambda, \quad (3.107)$$

onde λ e ν são funções de r e t , e tomamos $c = 1$. Então o elemento de linha toma a forma

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.108)$$

Definindo as coordenadas $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$, os elementos da métrica e da métrica inversa serão respectivamente

$$\begin{aligned} g_{00} &= -e^\nu, \quad g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \\ g^{00} &= -e^{-\nu}, \quad g^{11} = e^{-\lambda}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Definindo as derivadas temporais com pontos e derivadas com respeito à coordenada radial com prima, os símbolos de Cristoffel não nulos são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\nu}, \quad \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-(\nu-\lambda)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Os tensores de Ricci são dados por

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda}, \quad R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
R_{11} &= \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} \right) e^{-(\nu-\lambda)} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}, \\
R_{22} &= \left(\frac{r\lambda'}{2} - \frac{r\nu'}{2} - 1 \right) e^{-\lambda} + 1, \quad R_{33} = \left(\frac{r\lambda'}{2} - \frac{r\nu'}{2} - 1 \right) e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta. \quad (3.111)
\end{aligned}$$

As equações de Einstein que não são identicamente nulas são

$$8\pi GT_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (3.112)$$

$$8\pi GT_2^2 = 8\pi GT_3^3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} \right), \quad (3.113)$$

$$8\pi GT_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (3.114)$$

$$8\pi GT_0^1 = -e^{\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}. \quad (3.115)$$

Essas equações têm soluções exatas no caso de um campo gravitacional com simetria esférica no vácuo, isto é, quando $T^{\mu\nu} = 0$. Isso equivale a dizer que não há matéria fora das massas que produzem o campo gravitacional. Nesse caso a equação 3.115 implica que

$$-e^{\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0,$$

ou seja, $\dot{\lambda} = 0$. Logo λ é independente do tempo. De fato, após a escolha de tensor energia-momento nulo, as equações de Einstein se reduzem a

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (3.116)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (3.117)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (3.118)$$

Somando 3.117 e 3.118 chegamos a equação

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad (3.119)$$

que quando integrada com relação à coordenada radial fornece

$$\lambda + \nu = f(t). \quad (3.120)$$

Devido a invariância da métrica podemos efetuar uma transformação na coordenada temporal de forma que $\nu \rightarrow \nu + f(t)$, o que nos fornece

$$\lambda + \nu = 0. \quad (3.121)$$

Este resultado demonstra que o campo gravitacional esfericamente simétrico é automaticamente estático. Usando o resultado anterior podemos resolver a equação resultante para λ ,

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0. \quad (3.122)$$

Essa equação pode ser facilmente integrada se for escrita como

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Integrando essa equação temos

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{cte}{r}. \quad (3.123)$$

Lembrando que $\nu + \lambda = 0$, note que, no limite de $r \rightarrow \infty$, a métrica descreve um espaço plano com métrica de Minkowski, isto é

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.124)$$

Para determinar o valor da constante *cte* devemos tomar o limite para grandes distâncias, onde o campo gravitacional é fraco e a lei de Newton deve valer, isto é, a métrica deve ser escrita da forma

$$ds^2 = -(1 + 2U)dt^2 + (1 - 2U)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (3.125)$$

onde $U = \frac{G_N M}{r}$ é o potencial gravitacional de Newton (veja por exemplo [9]). Em outras palavras, devemos ter

$$g_{00} = 1 - \frac{2G_N M}{r}, \quad (3.126)$$

onde M é a massa do corpo que produz o campo gravitacional. Comparando g_{00} de ambas soluções temos o valor da constante de integração

$$cte = -2G_N M. \quad (3.127)$$

Finalmente podemos escrever o elemento de linha que representa a solução esfericamente simétrica,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.128)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Essa é a chamada **solução de Schwarzschild** e o valor da constante de integração recebe o nome de **raio de Schwarzschild**, que denominaremos por r_S . A superfície completa é chamada de **horizonte de eventos**.

Aparentemente a solução se torna singular em dois pontos: $r = 0$ e $r_S = 2G_N M$. De fato, a fonte do campo gravitacional se encontra exatamente em $r = 0$, como pode ser determinado pelo limite newtoniano. Isso representa uma singularidade natural da métrica. Um critério para a determinação das singularidades verdadeiras da métrica é que, se qualquer escalar (porém não todos eles) construído a partir do tensor de curvatura se torna singular em um ponto, esse ponto representa uma singularidade da métrica. Os valores desses escalares para $r = r_S$ são finitos, o que não caracteriza r_S como sendo uma singularidade pelo nosso critério, que corresponde a resolver a equação $g^{rr} = 0$. Esse critério é válido para a solução de Schwarzschild, para a qual assumimos que não há matéria fora do horizonte de eventos, e não funcionaria para estrelas como o Sol por exemplo, já que o horizonte de eventos se encontra dentro delas. A solução de Schwarzschild é válida mesmo para objetos como o Sol, porém ela deve ser tomada na região externa à região contendo matéria. Uma região que contém toda sua matéria dentro de seu horizonte de eventos é chamada de **buraco negro**.

Apesar de termos iniciado o problema com elementos da métrica dependentes do tempo, naturalmente provamos que a métrica é **estacionária**, isto é $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. Porém, como já foi dito anteriormente, podemos efetuar uma transformação na coordenada temporal de forma a obter coeficientes da métrica dependentes do tempo, resultando em uma métrica não -estacionária que contém elementos provenientes de termos cruzados no elemento de linha, do tipo $g_{01}(dt dr - dr dt)$. Uma propriedade mais restritiva da métrica é impor que ela seja **estática**, isto é, que ela possua um vetor de Killing do tipo tempo ortogonal à família de hipersuperfícies definidas pela condição $t = \text{constante}$. Se adaptarmos as coordenadas de forma que a métrica seja estacionária e que possua um vetor de Killing do tipo tempo ortogonal à família de superfícies definidas por $t = \text{constante}$, os elementos da métrica não conterão termos cruzados envolvendo as coordenadas de espaço e tempo, isto é, g_{0i} será nulo. Portanto, a solução de Schwarzschild é uma solução das equações de Einstein para um espaçotempo estático e esfericamente simétrico. De fato, o **teorema de Birkhoff** estabelece que a métrica de Schwarzschild é a única solução para as equações de campo de Einstein que descreve o espaçotempo de vácuo fora de um corpo de massa M esfericamente simétrica. O teorema é válido mesmo quando a distribuição de massa possui uma dependência temporal, desde que o espaçotempo externo seja necessariamente estático e a métrica seja dada por 3.128.

As coordenadas de 3.128 cobrem a geometria do espaçotempo somente fora do

horizonte de eventos. O conjunto de coordenadas que cobrem toda a geometria foi descoberto por Kruskal e Szekeres e o apresentaremos aqui. Primeiro se introduz as coordenadas r_* (tortoise coordinates) ao se impor

$$\frac{dr}{1 - \frac{2G_N M}{r}} = dr_* \rightarrow r_* = r + 2G_N M \ln\left(\frac{r}{2G_N M} - 1\right), \quad (3.129)$$

que nos fornece a métrica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) (-dt^2 + dr_*^2) + r^2(r_*) d\Omega_2^2. \quad (3.130)$$

Após isso introduzimos as coordenadas nulas

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_*, \quad (3.131)$$

de forma que a luz (ds^2) viaja com velocidade $u = \text{constante}$ ou $v = \text{constante}$. Finalmente introduzimos as coordenadas de Kruskal,

$$\bar{u} = -4G_N M e^{-\frac{u}{G_N M}}, \quad \bar{v} = 4G_N M e^{\frac{v}{G_N M}}. \quad (3.132)$$

A métrica neste sistema de coordenadas se torna

$$ds^2 = -\frac{2G_N M}{r} e^{-\frac{r}{4G_N M}} d\bar{u}d\bar{v} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.133)$$

onde $r = r(\bar{u}, \bar{v})$. Essa é a solução de Schwarzschild em coordenadas de Kruskal.

3.2.2 Solução de Reissner-Nordstrom

Apresentaremos agora outra solução estática, esfericamente simétrica cujo conteúdo de energia é dado pelo tensor energia-momento do campo de Maxwell. Assumindo a existência de monopólos magnéticos, essa solução representa um buraco negro carregado com cargas elétricas e magnéticas. As equações de Einstein para esse caso serão :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (3.134)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\gamma} F_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (3.135)$$

As equações de Maxwell correspondem às equações de Euler-Lagrange mais as identidades de Bianchi

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.136)$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0. \quad (3.137)$$

Como exigimos que a métrica seja estática e esfericamente simétrica os únicos componentes dos campos elétricos e magnéticos são os componentes radiais, que por

sua vez devem ser independentes das coordenadas θ e ϕ . Porém, admitiremos a princípio que os componentes de do campo eletromagnético possam ter dependência temporal, isto é, $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(r, t)$.

Os componentes dos campos elétrico e magnético vistos por um observador com quadrivelocidade v^μ são dados respectivamente por

$$E_\mu = F_{\mu\nu}v^\nu, \quad B_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}v^\beta F_{\gamma\delta}, \quad (3.138)$$

onde definimos o tensor de Levi-Civita por

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (3.139)$$

e o símbolo de Levi-Civita por $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta} = +1$ se $\alpha\beta\gamma\delta$ é permutação par de 0123, $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -1$ se $\alpha\beta\gamma\delta$ é permutação ímpar de 0123, e $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, para os outros casos.

Para manter a simetria esférica exigimos que os observadores de Killing com $v \propto \partial_t$ atribuam projeções nulas dos componentes dos campos elétrico e magnético na esfera S^2 , isto é

$$\begin{aligned} (\partial_\theta)_\mu E^\mu &= E_\theta = F_{\theta\nu}v^\nu = F_{\theta t}v^t = F_{\theta t} = 0, \\ (\partial_\phi)_\mu E^\mu &= E_\phi = F_{\phi\nu}v^\nu = F_{\phi t}v^t = F_{\phi t} = 0, \\ (\partial_\theta)_\mu B^\mu &= B_\theta = \frac{1}{2}\varepsilon_{\theta\beta}{}^{\gamma\delta}v^\beta F_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\theta t}{}^{r\phi}F_{r\phi} = 0, \\ (\partial_\phi)_\mu B^\mu &= B_\phi = \frac{1}{2}\varepsilon_{\phi\beta}{}^{\gamma\delta}v^\beta F_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\phi t}{}^{r\theta}F_{r\theta} = 0. \end{aligned}$$

Após essas exigências os únicos componentes que não são nulos serão $F_{rt}(r, t)$ e $F_{\theta\phi}(r, t)$. Denominaremos o campo elétrico por

$$E_r = F_{tr}(r, t) = -F_{rt}(r, t) = f(r, t). \quad (3.140)$$

Para definir o campo magnético precisamos usar a definição do tensor de Levi-Civita 3.139,

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{2}\varepsilon_{r\beta}{}^{\gamma\delta}v^\beta F_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\tilde{\varepsilon}_{r\beta}{}^{\gamma\delta}v^\beta F_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}F_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Então, para que o campo magnético não tenha dependência angular precisamos que o componente $F_{\theta\phi}$ do campo eletromagnético tenha a forma

$$F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = g(r, t)r^2 \sin \theta, \quad (3.142)$$

para alguma função $g(r, t)$, já que $\sqrt{-g} \propto r^2 \sin \theta$. Usando a identidade encontrada no apêndice

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} \sqrt{-g},$$

a equação de Maxwell 3.136 é então escrita como

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} &= \partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} F^{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} F^{\mu\alpha} \\ &= \partial_{\mu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} \sqrt{-g} F^{\alpha\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} F^{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} (\sqrt{-g} F^{\alpha\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} F^{\mu\alpha}. \end{aligned}$$

Como os coeficiente de conexão são simétricos nos índices μ e α e $F^{\mu\alpha}$ é anti-simétrico, o segundo termo é nulo e podemos reescrever 3.136 como

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} (\sqrt{-g} F^{\alpha\nu}) = 0. \quad (3.143)$$

A métrica tem a mesma forma que a métrica da seção anterior, portanto essa equação nos permite escrever o componente do campo elétrico como

$$\begin{aligned} \partial_r (e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)} r^2 \sin^2 \theta g^{tt} g^{rr} F_{tr}) &= 0 \\ &= \partial_r (e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)} r^2 F_{tr}) = 0 \Rightarrow \\ F_{tr} &= \frac{K_1}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.144)$$

onde K_1 é uma constante de integração. Seguindo os mesmos procedimentos podemos determinar, para K_2 também sendo uma constante de integração

$$F_{\theta\phi} = K_2 e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)} r^2 \sin \theta, \quad (3.145)$$

que é consistente com 3.142.

Podemos agora encontrar os componentes do tensor energia-momento por 3.135

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \frac{f^2}{8\pi} e^{-\nu} + \frac{g^2}{8\pi} e^{\lambda}, \quad T_{rr} = -\frac{f^2}{8\pi} e^{-\lambda} - \frac{g^2}{8\pi} e^{\nu}, \\ T_{\theta\theta} &= \frac{r^2 g^2}{8\pi r^2} + \frac{r^2 f^2}{8\pi r^2}, \quad T_{\phi\phi} = T_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad T_{rt} = 0. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Facilmente podemos demonstrar que o traço do tensor energia-momento é nulo, o que implica que o escalar de Ricci também é nulo pelas equações de Einstein. As equações de Einstein se reduzem ao mesmo conjunto de equações da solução de Schwarzschild, de 3.112 a 3.115. Novamente, como $T_{rt} = 0$, isso implica que $\dot{\lambda} = 0$, e as equações de Einstein se reduzem ao conjunto

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (3.147)$$

$$8\pi G_N g^{tt} T_{tt} = -e^{-\lambda} \left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (3.148)$$

$$8\pi G_N g^{rr} T_{rr} = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}. \quad (3.149)$$

Como $g^{tt}T_{tt} = g^{rr}T_{rr}$ podemos subtrair as equações 3.148 e 3.149, o que novamente fornece $\lambda' + \nu' = 0$. Integrando com respeito à variável r temos

$$\lambda + \nu = f(t). \quad (3.150)$$

Seguiremos o procedimento idêntico ao da seção anterior e faremos uma transformação no parâmetro ν de forma que $\nu \rightarrow \nu + f(t)$, e dessa forma obter

$$\lambda + \nu = 0. \quad (3.151)$$

Devido à essa escolha, todos elementos da métrica serão independentes do tempo, e como g_{01} é igual á zero, novamente teremos uma solução estática das equações de Einstein. Com essa escolha podemos resolver as equações de Maxwell e obter a forma do tensor $F_{\mu\nu}$. O componente t de 3.136 nos dá

$$\partial_t F_{tr} - \Gamma_{tt}^\sigma F_{\sigma r} - \Gamma_{tr}^\sigma F_{t\sigma} = 0.$$

Como a métrica é independente do tempo $\Gamma_{tt}^t = 0$ e $\Gamma_{tr}^r = \dot{\nu}/2 = 0$ temos $\partial_t F_{tr} = 0$, que integrando nos dá

$$F_{tr} = f(r). \quad (3.152)$$

Para determinar a forma de f usamos 3.143, ou seja

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\mu (r^2 \sin \theta F^{\mu\nu}) = 0.$$

Essa equação implica que

$$\partial_r (r^2 F^{rt}) = \partial_r (r^2 g^{rr} g^{tt} F_{rt}) = -\partial_r (r^2 F_{rt}) = 0,$$

que integrada nos dá

$$f(r) = \frac{K_1}{r^2}. \quad (3.153)$$

Como $F_{01} = E_r$ o valor da constante $K_1 = Q$ é interpretada como sendo a carga elétrica do buraco negro, que denominaremos por Q . Agora, usando 3.149 temos

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0.$$

Para $\mu = t, \nu = \theta, \rho = \phi$ temos $\partial_t F_{\theta\phi} = 0$, o que demonstra que $F_{\theta\phi}$ é independente do tempo. Usando 3.138, temos

$$\partial_r (r^2 g) = 0,$$

que integrando nos dá

$$g(r) = \frac{K_2}{r^2}. \quad (3.154)$$

Da mesma forma podemos interpretar a constante de integração K_2 como sendo a carga magnética do buraco negro, que denominaremos por P . Logo, os componentes não-nulos do tensor de campo eletromagnético serão

$$F_{tr} = \frac{Q}{r^2}, \quad F_{\theta\phi} = P \sin \theta. \quad (3.155)$$

Estamos agora equipados para resolver a equação 3.148 (ou 3.149), já que conhecemos a forma das funções f e g . Usando 3.146, podemos escrever esta equação como

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) &= \frac{1}{r^2} - G_N f^2 - G_N g^2, \\ \frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) &= 1 - \frac{G_N Q^2}{r^2} - \frac{G_N P^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Integrando com respeito à variável r temos finalmente

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{cte}{r} + \frac{G_N(Q^2 + P^2)}{r^2}. \quad (3.156)$$

Novamente no limite newtoniano, $cte = -2G_N r$. Logo a solução da equação será

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{G_N(Q^2 + P^2)}{r^2}, \quad (3.157)$$

onde Q é a carga elétrica e P é a carga magnética do buraco negro. O elemento de linha será

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{G_N(Q^2 + P^2)}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{G_N(Q^2 + P^2)}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.158)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Essa é a chamada **solução de Reissner-Nordstrom**. Para determinar a posição do horizonte de eventos resolvemos para r a equação $g^{rr} = 0$. Para unidades em que $G_N = 1$ a solução será

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - (Q^2 + P^2)}, \quad (3.159)$$

ou seja, existem três casos a serem analisados:

Caso 1: $M^2 < (Q^2 + P^2)$.

Há uma singularidade em $r = 0$ e não há horizonte de eventos, ou seja, o que temos é uma "singularidade nua". Esse caso é excluído por motivos físicos: existem alguns teoremas dizendo que uma singularidade nua não deveria ocorrer sob certos pressupostos razoáveis, sendo um deles que a contribuição do campo gravitacional para a energia é menor que a contribuição somada dos campos elétrico e magnéticos.

Caso 2: $M^2 > (Q^2 + P^2)$.

Neste caso há dois horizontes de eventos, r_+ e r_- , que por sua vez são superfícies nulas, como será discutido nas próximas seções. Neste caso a contribuição do campo gravitacional para a energia é maior que a contribuição dos campos elétrico e magnético, o que torna essa solução mais física.

Caso 3: $M^2 = (Q^2 + P^2)$.

Neste caso, os dois horizontes de eventos coincidem exatamente sobre a mesma superfície. A solução apresenta a singularidade em $r = 0$ e horizonte de eventos em $r = G_N M$, onde restauramos a constante de Newton por análise dimensional. A condição de extremalidade implica que a métrica possui a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{G_N M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{G_N M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.160)$$

Definindo a coordenada radial como $\rho = r - G_N M$ a métrica passa a ser escrita em coordenadas isotrópicas, isto é,

$$ds^2 = -H^2(\rho)dt^2 + H^{-2}(\rho)[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2^2], \quad (3.161)$$

onde

$$H(\rho) = 1 + \frac{G_N M}{\rho}. \quad (3.162)$$

Como $d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2^2$ é a métrica plana no espaço tridimensional, podemos igualmente escrever

$$ds^2 = -H^2(\vec{x})dt^2 + H^{-2}(\vec{x})[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (3.163)$$

onde agora a função H é dada por

$$H(\vec{x}) = 1 + \frac{G_N M}{|\vec{x}|}. \quad (3.164)$$

Neste ponto é interessante salientar que o fato da massa ser igual à carga, também conhecido como condição BPS, de Bogomol'nyi-Prasad-Somerfield, implicar que a posição dos dois horizontes de eventos coincidam, conhecido como condição de extremalidade, é um fato inerente ao espacotempo quadridimensional. Em teorias envolvendo buracos negros em dimensões mais altas essa coincidência pode não ocorrer, forçando-nos a diferenciar o caso extremo do caso BPS.

3.2.3 Solução de Kerr-Neumann

A solução mais geral do tipo buraco-negro é a chamada solução de Kerr-Neumann. Ela representa a solução de um buraco negro carregado e que contém momento angular J . Pelas discussões das seções anteriores notamos que essa solução não descreve

um espaçotempo estático. Sua dedução foge do escopo dessa dissertação e apenas a escreveremos por completeza. Ela é dada por

$$ds^2 = -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi \\ + \left(\frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (3.165)$$

onde

$$\Delta(r) = r^2 - 2G_N M r + a^2 + e^2 \\ \Sigma(r) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Os três parâmetros da solução são a massa do corpo, M , o parâmetro a , que é o momento angular por unidade de massa,

$$a = \frac{J}{M},$$

e a carga do corpo, e , dada por

$$e = \sqrt{Q^2 + P^2}.$$

Uma discussão muito bem detalhada sobre esta solução é encontrada em [12].

3.2.4 Superfícies nulas e horizontes de Killing

Seja $S(x)$ uma função suave das coordenadas do espaçotempo x^μ . Considere uma família de hipersuperfícies para as quais $S = \text{constante}$. Os vetores normais à hipersuperfície são

$$l = \tilde{f}(x)(g^{\mu\nu} \partial_\nu S) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.166)$$

onde $\tilde{f}(x)$ é uma função arbitrária diferente de zero. Se l é um vetor nulo, isto é, $l_\mu l^\mu = 0$, para uma dada superfície $\mathcal{N}$, então dizemos que $\mathcal{N}$ é uma **superfície nula**. Como exemplo de aplicação da equação 3.166, considere o caso da solução de Schwarzschild nas coordenadas de Eddington-Finkelstein "ingoing", (r, v, θ, ϕ) ,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dv^2 + 2dr dv + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.167)$$

e $S = r - 2M$. Usando 3.166 temos

$$l = \tilde{f}(x) \left[(g^{rr} \partial_r S + g^{rv} \partial_v S) \frac{\partial}{\partial r} + (g^{vr} \partial_r S + g^{vv} \partial_v S) \frac{\partial}{\partial v} \right].$$

Separadamente, os elementos do tensor métrico são

$$g_{vv} = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right), \quad g_{rv} = 1, \quad g_{vr} = 1. \quad (3.168)$$

Usando $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$, temos para $\mu = \nu = r$,

$$g_{rr}g^{rr} + g_{rv}g^{vr} = 1 \Rightarrow g^{vr} = 1.$$

Para $\mu = v$, $\sigma = r$ temos

$$g_{vr}g^{rr} + g_{vv}g^{vr} = 0 \Rightarrow g^{rr} = -g_{vv}.$$

Usando esses coeficientes métricos e o fato de que S é independente de v podemos escrever o vetor nulo como

$$l = \tilde{f}(x) \left[\left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial v} \right]. \quad (3.169)$$

Como $l_\mu l^\mu = 0$, temos

$$\begin{aligned} l_\mu l^\mu &= \tilde{f}^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = 0 \\ \tilde{f}^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Como a função $\tilde{f}$ é arbitrária, o valor de r que resolve esta equação é portanto $r = 2G_N M$. Logo a superfície nula $\mathcal{N}$, que se encontra em $r = 2G_N M$, possui vetor normal

$$l|_{r=2G_N M} = \tilde{f} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3.171)$$

Um vetor tangente t à superfície nula $\mathcal{N}$, e com vetor normal l dado por 3.166, satisfaz $t \cdot l = 0$. Pelo fato de l ser um vetor nulo, ele é portanto normal e tangente à superfície ao mesmo tempo. Logo podemos escrever o vetor tangente como

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (3.172)$$

para alguma curva nula $x(\lambda)$. Vamos considerar o caso geral para o qual $S = \text{const}$ é uma família de hipersuperfícies (não necessariamente nulas). Usando a definição de vetor normal, note que

$$\begin{aligned} l^\rho \nabla_\rho l^\mu &= l^\rho \nabla_\rho (\tilde{f} g^{\mu\nu} \partial_\nu S) \\ &= l^\rho \partial_\rho \tilde{f} \cdot g^{\mu\nu} \partial_\nu S + \tilde{f} l^\rho g^{\mu\nu} \nabla_\rho \partial_\nu S \\ &= l^\rho \partial_\rho (\ln \tilde{f}) l^\mu + \tilde{f} l^\rho g^{\mu\nu} \nabla_\rho \partial_\nu S. \end{aligned}$$

Separadamente temos

$$l^\rho g^{\mu\nu} \nabla_\rho \partial_\nu S = l^\rho g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\nu + l^\rho g^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \partial_\sigma S = l^\rho g^{\mu\nu} \nabla_\nu \partial_\rho S = l^\rho \nabla^\mu (\tilde{f}^{-1} l_\rho).$$

Este resultado nos permite escrever

$$\begin{aligned} l^\rho \nabla_\rho l^\mu &= l^\rho \partial_\rho (\ln \tilde{f}) l^\mu + \tilde{f} l^\rho \nabla^\mu (\tilde{f}^{-1} l_\rho) \\ &= \left(\frac{d}{d\lambda} \ln \tilde{f} \right) l^\mu + l^\rho \nabla^\mu l_\rho - l_\rho l^\rho \partial^\mu \ln \tilde{f} \\ &= \left(\frac{d}{d\lambda} \ln \tilde{f} \right) l^\mu + \frac{1}{2} \partial^\mu l^2 - (\partial^\mu \ln \tilde{f}) l^2. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Sendo $\mathcal{N}$ um membro dessa família para o qual $S = 0$. Sabemos que $l^2|_{\mathcal{N}} = 0$, porém isso não implica que $\partial^\mu(l^2) = 0$ a menos que a família toda de hipersuperfícies $S = \text{constante}$ seja nula. Pelo fato de l^2 ser constante em $\mathcal{N}$ podemos escrever $t^\mu \partial_\mu l^2 = 0$ para qualquer vetor tangente t à hipersuperfície. Como $t^\mu l_\mu = 0$, isso implica que

$$\partial_\mu l^2|_{\mathcal{N}} \propto l_\mu. \quad (3.174)$$

Definindo a constante de proporcionalidade como cte , a equação 3.173 será

$$\begin{aligned} l^\rho \nabla_\rho l^\mu|_{\mathcal{N}} &= \left(\frac{d}{d\lambda} \ln \tilde{f} + \frac{cte}{2} \right) l^\mu - (\partial^\mu \ln \tilde{f}) l^2|_{\mathcal{N}} \\ &\equiv K|_{\mathcal{N}} l^\mu + V^\mu|_{\mathcal{N}}, \end{aligned} \quad (3.175)$$

onde $K|_{\mathcal{N}}$ é uma constante e $V^\mu|_{\mathcal{N}}$ é um vetor, sobre $\mathcal{N}$. O que demonstramos de fato foi que

$$l^\rho \nabla_\rho l^\mu|_{\mathcal{N}} \propto l^\mu, \quad (3.176)$$

ou seja, que $x^\mu(\lambda)$ é uma geodésica, com vetor tangente l por 3.8. Podemos escolher a função $\tilde{f}$ de forma que

$$l^\rho \nabla_\rho l^\mu|_{\mathcal{N}} = 0, \quad (3.177)$$

isto é, de forma que λ seja um parâmetro afim.

Uma hipersuperfície nula $\mathcal{N}$ é um **horizonte de Killing** de um campo vetorial de Killing ξ se, em $\mathcal{N}$, ξ é normal a $\mathcal{N}$. Seja l o vetor normal à $\mathcal{N}$ de forma que $l \cdot \nabla l^\mu = 0$ (parametrização afim). Então, sobre $\mathcal{N}$, o vetor de Killing ξ é proporcional ao vetor nulo l da seguinte forma

$$\xi^\mu = f(x) l^\mu, \quad (3.178)$$

para alguma função f das coordenadas x^ν . A equação $l \cdot \nabla l^\mu = 0$ resulta em

$$\begin{aligned} l^\rho \nabla_\rho l^\mu &= f^{-1} \xi^\rho \nabla_\rho (f^{-1} \xi^\mu) \\ &= f^{-1} \xi^\rho \partial_\rho (f^{-1} \xi^\mu) + f^{-2} \xi^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \xi^\nu \\ &= f^{-3} \xi^\rho (\partial_\rho f^{-1}) \xi^\mu + f^{-2} \xi^\rho \partial_\rho \xi^\mu + f^{-2} \xi^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \xi^\nu. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Como esta expressão é igual a zero, isso resulta em

$$\begin{aligned} \xi^\rho \partial_\rho \xi^\mu + \xi^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \xi^\nu &= \xi^\rho (\partial_\rho \ln f) \xi^\mu \\ \xi^\rho \nabla_\rho \xi^\mu &= \kappa \xi^\mu, \end{aligned} \quad (3.180)$$

onde a constante $\kappa = \xi^\rho (\partial_\rho \ln f)$ é chamada de **gravidade superficial**. Pela equação 3.8 vemos que a gravidade superficial é uma medida da "falha" do "parâmetro temporal de Killing" coincidir com o parâmetro afim. Isso demonstra que podemos associar a cada horizonte de Killing essa quantidade chamada gravidade superficial.

A noção de horizonte de Killing é puramente geométrica, e, a princípio, é independente da noção de horizonte de eventos, mas para um espaçotempo com simetria translacional elas estão relacionadas. Seguindo a classificação apresentada em [7] temos:

- todo horizonte de eventos em um espaçotempo estacionário, assintoticamente plano é um horizonte de Killing para um campo de Killing l^μ ;
- se o espaçotempo é estático, $l^\mu = (\partial_t)^\mu$ representa translações temporais na região assintótica;
- se o espaçotempo é estacionário mas não estático, ele será axisimétrico com um campo de Killing rotacional ψ^μ , e

$$l^\mu = \xi^\mu + \Omega_H \psi^\mu, \quad (3.181)$$

para alguma constante Ω_H .

Os argumentos para a validade dessa classificação segue dessa mesma referência, e das referências lá citadas.

3.2.5 Massa, carga e momento angular

Na relatividade geral existe um teorema, chamado de **no-hair theorem**, que diz que soluções estacionárias do tipo buraco negro, assintoticamente planas, acopladas ao eletromagnetismo e não-singular fora do horizonte de eventos são completamente caracterizadas pela massa, cargas elétrica e magnética e momento angular. Em outras palavras, o teorema nos diz que qualquer outro parâmetro do buraco negro deve ser escrito em termos desses três parâmetros. Por este motivo apresentaremos nesta seção as expressões para a massa, carga e momento angular de um buraco negro na região assintótica. Apresentaremos a maneira mais simples de deduzir essas quantidades, já que a mais formal exigiria um estudo sobre o formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral. Porém, as discussões apresentadas aqui servirão ao nosso propósito.

O quadrivetor corrente elétrica J_e^μ é definido a partir da equação de Maxwell

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J_e^\mu. \quad (3.182)$$

A carga passando através de uma hipersuperfície Σ do tipo espaço é dada pela integral sobre as coordenadas x^i em Σ

$$Q = - \int_\Sigma J^\mu n_\mu \sqrt{h} d^3x = - \int_\Sigma \nabla_\nu F^{\mu\nu} n_\mu \sqrt{h} d^3x, \quad (3.183)$$

onde h_{ij} é a métrica induzida sobre Σ com determinante h e n^μ é o vetor normal unitário. Usando o teorema de Stokes B.8 temos

$$Q = - \int_{\partial\Sigma} F^{\mu\nu} n_\mu k_\nu d^2x \sqrt{\sigma}, \quad (3.184)$$

onde agora σ_{ij} é a métrica em duas dimensões induzida sob a superfície de fronteira $\partial\Sigma$, com determinante σ , e k^μ é o vetor normal a $\partial\Sigma$. Para verificar que esta integral de fato representa a carga considere o espaço de Minkowski, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.185)$$

e considere que o campo elétrico é escrito como

$$F^{tr} = E^r = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (3.186)$$

Os vetores normais unitários são escritos como

$$n^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad \sigma^\mu = (0, 1, 0, 0). \quad (3.187)$$

Separadamente, temos

$$n_\mu \sigma_\nu F^{\mu\nu} = n_t \sigma_r F^{tr} = g_{tt} g_{rr} F^{tr} = -E^r$$

$$\sqrt{\sigma} = r^2 \sin \theta.$$

Substituindo na expressão 3.184 temos

$$Q = -\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial\Sigma} \left(-\frac{q}{4\pi r^2} \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = q. \quad (3.188)$$

Dessa forma demonstramos que nossa definição de carga está correta.

Para um espaçotempo assintoticamente plano, uma definição de corrente conservada será

$$J_T^\mu = \xi_\nu T^{\mu\nu}, \quad (3.189)$$

onde ξ^μ é um campo vetorial de Killing do tipo tempo. A conservação pode ser facilmente checada, pois

$$\nabla_\mu J_T^\mu = \nabla_\mu \xi_\nu \cdot T^{\mu\nu} + \xi_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

onde o primeiro termo é nulo por ser a multiplicação de um tensor antissimétrico por um tensor simétrico, e o segundo pela conservação do tensor energia-momento. Sendo Σ uma hipersuperfície do tipo espaço, a definição de energia portanto será

$$E_T = \int_\Sigma J_T^\mu \sqrt{h} n_\mu d^3x. \quad (3.190)$$

Para a geometria de Schwarzschild o tensor energia-momento é nulo em todo espaço, porém a energia não é nula, já que um buraco negro possui massa. Precisamos de uma definição alternativa de energia. Note que a corrente, definida por

$$J_R^\mu = \xi_\nu R^{\mu\nu}, \quad (3.191)$$

é conservada, pois

$$\nabla_\mu J_R^\mu = \nabla_\mu \xi_\nu \cdot R^{\mu\nu} + \xi_\nu \cdot \nabla_\mu R^{\mu\nu} = 0,$$

pois o primeiro termo do lado direito é nulo por ser uma multiplicação de um tensor simétrico por um antissimétrico, e o segundo é nulo porque a derivada direcional do tensor de Ricci é nula ao longo de um vetor de Killing. A energia conservada associada com esta corrente será

$$E_R = \frac{1}{4\pi G_N} \int_\Sigma R^{\mu\nu} n_\mu \xi_\nu \sqrt{h} d^3x. \quad (3.192)$$

A energia é independente da escolha da hypersuperfície Σ , já que ela é uma quantidade conservada. Pelo fato de ξ^μ ser um vetor de Killing podemos escrever a expressão

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\mu = \nabla_\mu (\nabla_\nu \xi^\mu) = \xi^\mu R_{\mu\nu}, \quad (3.193)$$

ou seja, a corrente é escrita em termos de uma derivada total. A expressão para a energia será portanto

$$E_R = \frac{1}{4\pi G_N} \int_\Sigma n_\mu (\nabla^\mu \xi^\nu) \nabla_\nu \sqrt{h} d^3x.$$

Usando o teorema de Stokes novamente temos

$$E_R = \frac{1}{4\pi G_N} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \xi^\nu n_\mu k_\nu \sqrt{\sigma} d^2x. \quad (3.194)$$

Definindo o elemento de superfície bidimensional como $-2k_{[\mu} n_{\nu]} \sqrt{\sigma} d^2x \equiv d\Sigma_{\mu\nu}$ escrevemos a energia da seguinte forma

$$E_R = \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (3.195)$$

Esta expressão é conhecida como integral de Komar para a energia. Como exemplo de aplicação dessa fórmula considere o caso de Schwarzschild, cujo elemento de linha é dado por 3.128. O único componente não-nulo do vetor unitário normal, cuja normalização é dada por $n_\mu n^\mu = -1$, é encontrado por

$$\begin{aligned} n_\mu n^\mu &= n_0 n^0 = g_{00} n^0 n^0 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) n^0 n^0 = -1 \\ n^0 &= \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n_0 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Da mesma forma, o único componente não-nulo do vetor unitário normal k^μ , com normalização $k_\mu k^\mu = 1$, será

$$k^1 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad k_1 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.197)$$

Sendo o vetor de Killing do tipo tempo $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$, separadamente

$$\begin{aligned}
\nabla^0 \xi^1 &= g^{00} \nabla_0 \xi^1 \\
&= g^{00} (\partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\lambda}^1 \xi^\lambda) \\
&= g^{00} \Gamma_{00}^1 \xi^0 \\
&= - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right)^{-1} \frac{G_N M}{r^2} \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) \\
&= - \frac{G_N M}{r^2}.
\end{aligned}$$

O determinante da métrica bidimensional é dado por $\sqrt{\sigma} = r^2 \sin \theta$, e, substituindo essas expressões na integral de Komar temos

$$\begin{aligned}
E_R &= \frac{1}{4\pi G_N} \int_{\partial\Sigma} d\theta d\phi r^2 \sin^2 \theta (-1) \left(-\frac{G_N M}{r^2} \right) \\
&= \frac{M}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} d\theta d\phi \sin \theta \\
&= M,
\end{aligned}$$

o que demonstra que a escolha do fator de normalização da integral de Komar é conveniente. Em unidades de $c = 1$ as definições de massa e energia em relatividade geral são equivalentes, como deduzimos do resultado acima.

A definição de momento angular segue da corrente de Killing

$$J_\phi^\mu = \psi_\nu R^{\mu\nu}, \quad (3.198)$$

que também é conservada

$$\nabla_\mu J_\phi^\mu = \nabla_\mu \psi_\nu \cdot R^{\mu\nu} + \psi_\nu \nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \psi_\nu \nabla^\nu R = 0,$$

onde o primeiro termo é nulo por ser uma multiplicação de um tensor antissimétrico por um tensor simétrico. Para demonstrar que o segundo termo é nulo, utilizaremos o chamado lema de Killing 4.14, demonstrado no próximo capítulo, que contraído é escrito como

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma \psi^\mu = R_{\sigma\nu} \psi^\nu. \quad (3.199)$$

Contraindo a identidade de Bianchi, $\nabla_{[\mu} R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0$, com $g^{\alpha\gamma}$ temos

$$\nabla_\mu R_{\beta\delta} - \nabla_\beta R_{\mu\delta} + \nabla^\alpha R_{\beta\mu\alpha\delta} = 0.$$

Contraindo com ψ^μ e em seguida contraindo $g^{\beta\delta}$ temos

$$\psi^\mu \nabla_\mu R - 2\psi^\mu \nabla^\delta R_{\mu\delta} = 0.$$

Usando a regra da cadeia e usando o lema de Killing temos

$$\psi^\mu \nabla_\mu R = 2\nabla^\delta (\nabla_\mu \nabla^\mu \psi_\delta),$$

e usando o fato de que ψ^μ é um vetor de Killing temos

$$\psi^\mu \nabla_\mu R = 0, \quad (3.200)$$

o que demonstra finalmente que J_ϕ^μ é uma corrente conservada. O momento angular é então definido pela integral dessa corrente

$$J = -\frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \psi^\nu n_\mu k_\nu \sqrt{\sigma} d^2x. \quad (3.201)$$

Usando a definição de elemento de superfície bidimensional $d\Sigma_{\mu\nu} = -2\sqrt{\sigma} n_{[\mu} k_{\nu]} d^2x$, podemos escrever essa expressão de uma forma mais elegante, isto é

$$J = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\partial\Sigma} \nabla^\mu \psi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (3.202)$$

que é a integral de Komar para o momento angular. Para verificar que esta expressão de fato representa o momento angular usamos o teorema de Gauss B.1,

$$J = \frac{1}{16\pi G_N} \int_\Sigma \psi^\nu R^\mu{}_\nu d\Sigma_\mu. \quad (3.203)$$

Note que, usando as equações de Einstein

$$\begin{aligned} J^\mu &= \psi^\nu R^\mu{}_\nu = \psi^\nu \left(8\pi G_N T^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} T \delta^\mu{}_\nu \right) \\ &= 8\pi G_N T^\mu{}_\nu \psi^\nu - \frac{1}{2} T \psi^\mu. \end{aligned}$$

Como escolhemos Σ como sendo a hipersuperfície para $t = \text{const}$ e $\psi^\mu = (\partial_\phi)^\mu$, $\psi^\mu d\Sigma_\mu = 0$, e o momento angular será

$$J = \int_\Sigma T^0{}_\nu \psi^\nu d\Sigma. \quad (3.204)$$

Em coordenadas cartesianas

$$\partial_\phi = x\partial_y - y\partial_x = \psi^1\partial_x + \psi^2\partial_y,$$

logo

$$J = \int_\Sigma \left(T^0{}_1 \psi^1 - T^0{}_2 \psi^2 \right) d\Sigma.$$

No espaço assintótico $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$, o terceiro componente do momento angular de um campo no espaçotempo de Minkowski com tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é dado por

$$J \approx \epsilon_{3jk} \int_\Sigma x^j T^{k0} d\Sigma. \quad (3.205)$$

Assim demonstramos que a integral 3.202 representa o momento angular.

Finalmente apresentaremos a chamada energia ADM, que em certos limites se reduz às integrais de Komar. Para deduzir uma expressão para a energia consideramos que na região assintótica a métrica pode ser escrita como uma perturbação da forma

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} - \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (3.206)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal, e $h_{\mu\nu}$ é de $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$. Observamos que nesse caso $h_{\mu\nu}$ não é a métrica induzida, como nos casos anteriores. Comumente se usa a letra h para expressar a perturbação da métrica. Vamos usar as equações de Einstein escritas na forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_N \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right). \quad (3.207)$$

Usando a aproximação 3.206 o tensor de Ricci é escrito como

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \epsilon [\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho h_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial^\rho h_{\mu\rho}]. \quad (3.208)$$

Também devido à essa aproximação o tensor energia momento será

$$T_{\mu\nu} \approx 0 + \epsilon \tau_{\mu\nu}. \quad (3.209)$$

Facilmente as equações de Einstein são escritas como

$$[\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho h_{\nu\rho} - \partial_\nu \partial^\rho h_{\mu\rho}] \approx 16\pi G_N (\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \tau). \quad (3.210)$$

Para fontes estacionárias a métrica é independente do tempo, logo para $\mu\nu = 0$, essa equação resulta em

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{00} = 16\pi G_N [\tau_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} (\eta^{00} \tau_{00} + \eta^{ii} \tau_{ii})].$$

Como estamos na região assintótica o valor dos componentes temporais do tensor energia-momento são muito maiores que o valor dos espaciais, e isso nos permite escrever

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{00} = -8\pi G_N \tau_{00}. \quad (3.211)$$

Tomando o traço da equação 3.210, temos

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h - \eta^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\rho h_{\sigma\mu} = -8\pi G_N \tau. \quad (3.212)$$

Expandindo os índices e fazendo a mesma consideração sobre os componentes temporais de τ temos

$$\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{00} + \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{ii} - \partial_i \partial_j h_{ij} = -8\pi G_N \tau_{00}. \quad (3.213)$$

Somando as equações 3.211 e 3.213 temos

$$\tau_{00} = -\frac{1}{16\pi G_N} \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}). \quad (3.214)$$

A energia é escrita como a integral de τ_{00} sobre todo o espaço para $t = \text{constante}$.

$$E = -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{t=\text{const}} \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) d^3x. \quad (3.215)$$

Usando o teorema de Gauss B.1 temos

$$E_{ADM} = -\frac{1}{16\pi G_N} \int (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) d^2x. \quad (3.216)$$

Essa é a chamada **energia ADM** do espaçotempo assintoticamente plano, deduzida por Arnowitt, Deser e Misner. Veremos a importância desta expressão no próximo capítulo onde calcularemos uma expressão diferencial para a massa de um buraco negro contendo momento angular, que será identificada como uma das leis da termodinâmica de buracos negros.

Capítulo 4

As leis da termodinâmica de buracos negros

Em 1973 Bardeen, Carter e Hawking demonstraram em [6] que existe uma analogia muito próxima entre os sistemas termodinâmicos, descritos pelas leis da termodinâmica, e os sistemas envolvendo buracos negros. Em seu artigo original eles demonstraram que os buracos negros obedecem um conjunto de leis muito parecidas com as leis da termodinâmica, chamadas a princípio de "as quatro leis da mecânica de buracos negros". A lei zero estabelece que a grandeza chamada de gravidade superficial, introduzida na seção anterior, é constante sobre o horizonte de eventos. A primeira lei da mecânica de buracos negros estabelece que

$$\delta M = \int \Omega \delta dJ + \int \bar{\mu} \delta dN + \int \bar{\theta} \delta S + \Omega_H \delta J_H + \frac{\kappa}{8\pi} \delta A, \quad (4.1)$$

onde o significado de cada parâmetro desta expressão será apresentado no desenvolvimento deste capítulo. A segunda lei, também chamada de lei da área, diz que a área do horizonte de eventos do buraco negro não decresce com o tempo, isto é,

$$\delta A \geq 0, \quad (4.2)$$

ou, em outras palavras, que a área final do horizonte de eventos é maior que a área dos horizontes de eventos iniciais, $A_3 > A_1 + A_2$. A terceira lei estabelece que se o tensor energia-momento é "bounded" e satisfaz a condição de energia fraca, então a gravidade superficial de um buraco negro não pode ser reduzida à zero por uma sequência finita de operações.

Apresentaremos primeiramente uma expressão para a gravidade superficial escrita em termos do vetor normal à hipersuperfície, partindo do teorema de Frobenius. Usando essa expressão provaremos em seguida que a gravidade superficial é constante sobre o horizonte de eventos. Deduziremos então a primeira lei seguindo [6]. A dedução original da primeira lei foi feita usando-se técnicas covariantes, imaginando uma perturbação de uma solução estacionária e axisimétrica das equações de Einstein-Maxwell para outra. Atualmente, deduções mais modernas, as quais não

discutiremos aqui, foram dadas utilizando-se o formalismo hamiltoniano, o qual se aplica para perturbações mais gerais. Por fim, apresentaremos a segunda e a terceira lei, e discutiremos algumas de suas implicações .

4.1 Gravidade superficial e lei zero da termodinâmica de buracos negros

Considere o vetor de Killing nulo normal ao horizonte de eventos de uma solução estacionária e axisimétrica,

$$\chi^\mu = \xi^\mu + \Omega_{BH}\psi^\mu, \quad (4.3)$$

onde ξ^μ é o vetor de Killing que gera a isometria temporal e ψ^μ é o vetor de Killing que gera a isometria por rotações . O teorema de Frobenius diz que a condição necessária e suficiente para um campo vetorial ser ortogonal à uma hipersuperfície é que

$$\chi_{[\mu}\nabla_\nu\chi_{\rho]} = 0. \quad (4.4)$$

Como χ^μ é um vetor de Killing, podemos escrever essa expressão como

$$\chi_\rho\nabla_\mu\chi_\nu = -\chi_\mu\nabla_\nu\chi_\rho - \chi_\nu\nabla_\rho\chi_\mu.$$

Contraindo com $\nabla^\mu\chi^\nu$ e usando a equação de Killing temos

$$\begin{aligned} \chi_\rho(\nabla^\mu\chi^\nu)\nabla_\mu\chi_\nu &= -\chi_\mu(\nabla^\mu\chi^\nu)\nabla_\nu\chi_\rho - \chi_\nu(\nabla^\mu\chi^\nu)\nabla_\rho\chi_\mu \\ &= -2\chi_\mu(\nabla^\mu\chi^\nu)\nabla_\nu\chi_\rho. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A definição de gravidade superficial, sendo o vetor de Killing normal χ^μ , é

$$\chi_\mu\nabla^\mu\chi^\nu = \kappa\chi^\nu. \quad (4.6)$$

Usando essa definição e a equação de Killing temos

$$\begin{aligned} \chi_\rho(\nabla^\mu\chi^\nu)\nabla_\mu\chi_\nu &= -2(\kappa\chi^\nu)\nabla_\nu\chi_\rho \\ &= -2\kappa^2\chi_\rho. \end{aligned}$$

Logo, para χ_ρ arbitrário, a gravidade superficial escrita em termos do vetor normal à hipersuperfície é dada por

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu\chi^\nu)(\nabla_\mu\chi_\nu). \quad (4.7)$$

Como foi dito na introdução do capítulo, a gravidade superficial de um buraco negro é constante no horizonte de eventos. Para provar essa afirmação considere a definição do tensor de Riemann

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\chi_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu\chi_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma\chi_\sigma. \quad (4.8)$$

Usando a equação de Killing e fazendo permutações com os índices podemos escrever as identidades

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\rho + \nabla_\nu \nabla_\rho \chi_\mu = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \chi_\sigma \quad (4.9)$$

$$\nabla_\nu \nabla_\rho \chi_\mu + \nabla_\rho \nabla_\mu \chi_\nu = R_{\nu\rho\mu}{}^\sigma \chi_\sigma \quad (4.10)$$

$$\nabla_\rho \nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\rho = R_{\rho\mu\nu}{}^\sigma \chi_\sigma. \quad (4.11)$$

Somando 4.9 com 4.10 e subtraindo 4.11 temos

$$2\nabla_\nu \nabla_\rho \chi_\mu = (R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + R_{\nu\rho\mu}{}^\sigma - R_{\rho\mu\nu}{}^\sigma) \chi_\sigma. \quad (4.12)$$

Usando a identidade de Bianchi na forma

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + R_{\nu\rho\mu}{}^\sigma + R_{\rho\mu\nu}{}^\sigma = 0 \quad (4.13)$$

a equação 4.12 pode ser escrita como

$$\nabla_\nu \nabla_\rho \chi_\mu = -R_{\rho\mu\nu}{}^\sigma \chi_\sigma. \quad (4.14)$$

Esta equação é conhecida como **lema de Killing**. Agora aplicamos o operador $\chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]}$ pelo lado direito da equação 4.6,

$$\left(\chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \chi^\nu \right) \nabla_\nu \chi_\mu + \chi^\nu \chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla_\nu \chi_\mu = \chi_\mu \chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \kappa + \kappa \chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \chi_\mu. \quad (4.15)$$

Usando 4.14 o segundo termo do lado esquerdo dessa equação pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \chi^\nu \chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \nabla_\nu \chi_\mu &= \frac{1}{2} (\chi^\nu \chi_\sigma \nabla_\rho \nabla_\nu \chi_\mu - \chi^\nu \chi_\rho \nabla_\sigma \nabla_\nu \chi_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \chi^\nu (-\chi_\sigma R_{\nu\mu\rho}{}^\gamma \chi_\gamma + \chi_\rho R_{\nu\mu\sigma}{}^\gamma \chi_\gamma) \\ &= -\chi^\nu R_{\nu\mu[\rho}{}^{|\gamma|} \chi_{\sigma]} \chi_\gamma. \end{aligned}$$

Novamente usando o teorema de Frobenius, podemos escrever o primeiro termo do lado esquerdo da equação 4.15 como

$$\begin{aligned} \left(\chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \chi^\nu \right) \nabla_\nu \chi_\mu &= -\frac{1}{2} (\chi^\nu \nabla_\sigma \chi_\rho) \nabla_\nu \chi_\mu \\ &= -\frac{1}{2} (\nabla_\sigma \chi_\rho) \kappa \chi_\mu \\ &= \kappa \chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \chi_\mu, \end{aligned}$$

que é igual ao segundo termo do lado direito dessa mesma equação. Fazendo o cancelamento o resultado da expressão 4.15 será

$$\chi_\mu \chi_{[\sigma} \nabla_{\rho]} \kappa = \chi^\nu R_{\mu\nu[\rho}{}^{|\gamma|} \chi_{\sigma]} \chi_\gamma. \quad (4.16)$$

Agora aplicamos $\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]}$ à igualdade proveniente de 4.4, $\chi_\rho \nabla_\sigma \chi_\gamma = -2\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_\rho$, logo

$$\left(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_\rho \right) \nabla_\mu \chi_\nu + \chi_\rho \chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \nabla_\mu \chi_\nu = -2 \left(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_{[\mu} \right) \nabla_{\nu]} \chi_\rho - 2 \left(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \nabla_{[\nu} \chi_{\rho]} \right) \chi_\mu. \quad (4.17)$$

Usando a equação de Killing e novamente a igualdade $\chi_\rho \nabla_\sigma \chi_\gamma = -2\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_\rho$ podemos escrever o primeiro termo do lado esquerdo de 4.17 como

$$\begin{aligned}
(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_\rho) \nabla_\mu \chi_\nu &= -\frac{1}{2} (\chi_\rho \nabla_\sigma \chi_\gamma) \nabla_\mu \chi_\nu \\
&= \frac{1}{2} (\chi_\mu (\nabla_\nu \chi_\rho) \nabla_\sigma \chi_\gamma - \chi_\nu (\nabla_\mu \chi_\rho) \nabla_\sigma \chi_\gamma) \\
&= -(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_\mu) \nabla_\nu \chi_\rho + (\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_\nu) \nabla_\mu \chi_\rho \\
&= -2(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \chi_{[\mu} \nabla_{\nu]}) \chi_\rho.
\end{aligned}$$

Logo o primeiro termo do lado esquerdo de 4.17 se cancela com o segundo termo do lado direito da mesma equação. Podemos reescrever o outro termo do lado esquerdo de 4.17 como

$$\chi_\rho \chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \nabla_\mu \chi_\nu = -\chi_\rho R_{\mu\nu[\gamma}{}^{|\delta|} \chi_{\sigma]} \chi_\delta,$$

e o outro termo do lado direito da equação pode ser reescrito como

$$-2(\chi_{[\sigma} \nabla_{\gamma]} \nabla_{[\nu} \chi_{\rho]}) \chi_\mu = -2\chi_{[\mu} R_{\nu]\rho[\gamma}{}^{|\delta|} \chi_{\sigma]} \chi_\delta,$$

o que faz com que a expressão inicial resulte em

$$\chi_\rho R_{\mu\nu[\gamma}{}^{|\delta|} \chi_{\sigma]} \chi_\delta = 2\chi_{[\mu} R_{\nu]\rho[\gamma}{}^{|\delta|} \chi_{\sigma]} \chi_\delta. \quad (4.18)$$

Multiplicando a expressão toda por $g^{\rho\gamma}$ o termo do lado esquerdo é nulo, pois

$$g^{\rho\gamma} \chi_\rho R_{\mu\nu[\gamma}{}^{|\delta|} \chi_{\sigma]} \chi_\delta = \frac{1}{2} (R_{\mu\nu\gamma\delta} \chi_\sigma - R_{\mu\nu\sigma\delta} \chi_\gamma) \chi^\gamma \chi^\delta = 0,$$

já que o vetor χ^μ é um vetor nulo. Logo,

$$g^{\rho\gamma} (\chi_{[\mu} R_{\nu]\rho[\gamma}{}^{|\delta|} \chi_{\sigma]} \chi_\delta) = 0. \quad (4.19)$$

Expandindo esta expressão temos

$$\begin{aligned}
g^{\rho\gamma} (\chi_{[\mu} R_{\nu]\rho\gamma}{}^\delta \chi_\sigma \chi_\delta - \chi_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma}{}^\delta \chi_\gamma \chi_\delta) &= 0 \\
\Rightarrow -\chi_{[\mu} R_{\nu]\rho}{}^\gamma{}_\delta \chi_\sigma \chi^\delta - \chi_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma\delta} \chi^\rho \chi^\delta &= 0 \\
\Rightarrow -\chi_{[\mu} R_{\nu]\delta} \chi_\sigma \chi^\delta &= \chi_{[\mu} R_{\nu]\rho\sigma\delta} \chi^{|\rho|} \chi_\delta.
\end{aligned} \quad (4.20)$$

Facilmente podemos rescrever o lado direito dessa expressão de modo a obter

$$-\chi_{[\mu} R_{\nu]\delta} \chi_\sigma \chi^\delta = R_{\sigma\delta[\nu}{}^\rho \chi_{\mu]} \chi_\rho \chi^\delta. \quad (4.21)$$

Agora, usando 4.16, o lado direito de 4.21 é escrito como

$$R_{\sigma\delta[\nu}{}^\rho \chi_{\mu]} \chi_\rho \chi^\delta = \chi_\sigma \chi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa. \quad (4.22)$$

Finalmente chegamos à expressão

$$-\chi_{[\mu} R_{\nu]\delta} \chi_{\sigma} \chi^{\delta} = \chi_{\sigma} \chi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa,$$

que para χ_{σ} arbitrário nos fornece

$$\chi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa = -\chi_{[\mu} R_{\nu]}^{\delta} \chi_{\delta}. \quad (4.23)$$

Considere agora a congruência geodésica gerada por χ^{μ} sobre o horizonte de eventos. Pelo fato de χ^{μ} ser sempre ortogonal ao horizonte isso implica que θ , $\omega_{\mu\nu}$ e $\sigma_{\mu\nu}$ são todos nulos para essa congruência. Portanto, da equação 3.102 resulta que no horizonte de eventos

$$R_{\mu\nu} \chi^{\mu} \chi^{\nu} = 0. \quad (4.24)$$

A condição de energia dominante 3.54 nos diz que $T^{\mu}_{\nu} \chi^{\nu}$ deve ser um vetor do tipo tempo ou nulo dirigido para o futuro. Usando as equações de Einstein temos

$$8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})\chi^{\mu}\chi^{\nu} = 0$$

$$T_{\mu\nu}\chi^{\mu}\chi^{\nu} - \frac{1}{2}T\chi_{\mu}\chi^{\mu} = 0.$$

Considerando o fato de que χ^{μ} é um vetor nulo essa expressão resulta em

$$T_{\mu\nu}\chi^{\mu}\chi^{\nu} = 0. \quad (4.25)$$

Isto implica que $T_{\mu\nu}\chi^{\nu}$ é um vetor nulo, logo ele aponta na direção de χ^{μ} , e também que

$$\begin{aligned} \chi_{\rho} T_{\mu\nu} \chi^{\nu} - \chi_{\mu} T_{\rho\nu} \chi^{\nu} &= \chi_{[\rho} T_{\mu]\nu} \chi^{\nu} = 0 \\ \Rightarrow \chi_{\rho} \left(\frac{1}{8\pi} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \chi^{\nu} - \chi_{\mu} \left(\frac{1}{8\pi} R_{\rho\nu} + \frac{1}{2} T g_{\rho\nu} \right) \chi^{\nu} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{8\pi} \chi_{\rho} R_{\mu\nu} \chi^{\nu} + \frac{1}{2} T \chi_{\rho} \chi_{\mu} - \frac{1}{8\pi} \chi_{\mu} R_{\rho\nu} \chi^{\nu} - \frac{1}{2} T \chi_{\mu} \chi_{\rho} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{8\pi} \chi_{[\rho} R_{\mu]\nu} \chi^{\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Então, da equação 4.23 concluímos que

$$\chi_{[\mu} \nabla_{\nu]} \kappa = 0. \quad (4.27)$$

Multiplicando pela esquerda por χ^{μ} resulta em $\chi^{\mu} \chi_{\nu} \nabla_{\mu} \kappa = 0$, e como χ_{ν} é arbitrário temos

$$\chi^{\mu} \nabla_{\mu} \kappa = 0, \quad (4.28)$$

o que estabelece que a gravidade superficial é constante no horizonte de eventos do buraco negro.

4.2 A fórmula integral

Nesta seção deduziremos uma fórmula integral para a massa de um buraco negro, apresentada em [6]. Para tanto, considere um espaçotempo estacionário, axissimétrico e assintoticamente plano, para o qual há somente um único vetor de Killing associado à isometria temporal, ξ^μ , o qual é do tipo tempo no infinito com normalização $\xi_\mu \xi^\mu = -1$, e um único vetor de Killing associado à isometria por rotações, ψ , cujas órbitas são fechadas com parâmetro de comprimento 2π . A equação de Killing 3.31 e o lema de Killing 4.14 nos permitem escrever

$$\nabla_\mu \xi_\nu = \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}, \quad \nabla_\mu \psi_\nu = \nabla_{[\mu} \psi_{\nu]} \quad (4.29)$$

$$\nabla_\mu \xi_\nu \cdot \psi^\mu = \nabla_\mu \psi_\nu \cdot \xi^\mu \quad (4.30)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \xi^\nu = -R^\nu{}_\mu \xi^\mu, \quad \nabla_\mu \nabla^\mu \psi^\nu = -R^\nu{}_\mu \psi^\mu, \quad (4.31)$$

onde $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$. Sendo $d\Sigma_\mu$ o elemento de superfície de S e $d\Sigma_{\mu\nu}$ o elemento de superfície de ∂S podemos integrar a primeira das equações 4.31 sobre a superfície S e obter

$$\int_S \nabla_\mu \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_\nu = - \int_S R^\nu{}_\mu \xi^\mu d\Sigma_\nu.$$

Usando o teorema de Stokes o lado esquerdo desta expressão é escrito como

$$\int_S \nabla_\mu \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_\nu = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\nu\mu},$$

e a integral acima pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial S} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\nu\mu} = - \int_S R^\nu{}_\mu \xi^\mu d\Sigma_\nu. \quad (4.32)$$

A fórmula da quadriaceleração em um espaço curvo é dada por

$$a^\mu = \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{(-\xi^\alpha \xi_\alpha)}. \quad (4.33)$$

Na região assintótica a normalização do vetor de Killing do tipo tempo implica que

$$a^\mu = \frac{\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu}{(-\xi^\alpha \xi_\alpha)} \approx \xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu. \quad (4.34)$$

Da mecânica clássica sabemos que

$$\nabla \cdot \vec{a} = -4\pi\rho. \quad (4.35)$$

Integrando a expressão sobre um volume V temos

$$\int_S \nabla \cdot \vec{a} dV = -4\pi M. \quad (4.36)$$

Usando o teorema da divergência temos

$$\int_S \nabla \cdot \vec{a} dV = \oint_{\partial S} \vec{a} \cdot \vec{n} dA. \quad (4.37)$$

Na região assintótica as derivadas temporais são pequenas se comparadas com as derivadas espaciais, e além disso, para todo o espaço, o vetor normal à hipersuperfície é do tipo espaço, então podemos reescrever a integral acima como

$$\oint_{\partial S} a^\mu n_\mu \sqrt{\sigma} d^2\theta = \oint_{\partial S} \xi_\nu \nabla^\nu \xi^\mu n_\mu \sqrt{\sigma} d^2\theta = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \nabla^\nu \xi^\mu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (4.38)$$

onde $d\Sigma_{\mu\nu} = 2n_{[\mu} \xi_{\nu]} \sqrt{\sigma} d\theta$, com σ sendo o determinante da métrica bidimensional, e θ^2, θ^3 as coordenadas do espaço bidimensional. A superfície ∂S é fechada, logo a integral sobre toda a superfície contém uma contribuição positiva de $\partial\Sigma_\infty$ e uma contribuição negativa de ∂B , já que no último caso o vetor normal à superfície aponta na direção oposta ao sentido do vetor ξ^μ . Podemos então escrever a integral do lado direito de 4.38 como

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial S} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_\infty} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int_{\partial B} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (4.39)$$

Voltando a expressão 4.32 temos

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_\infty} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} - \int_S R^\nu{}_\mu \xi^\mu d\Sigma_\nu. \quad (4.40)$$

Usando 4.36 podemos escrever a expressão acima como

$$-4\pi M = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu} - \int_S R^\nu{}_\mu \xi^\mu d\Sigma_\nu. \quad (4.41)$$

Usando as equações de Einstein facilmente podemos escrever o tensor de Ricci como

$$R^\nu{}_\mu = -4\pi(T\delta^\nu{}_\mu - 2T^\nu{}_\mu). \quad (4.42)$$

Substituindo acima temos

$$M = \int_S (2T^\nu{}_\mu - T\delta^\nu{}_\mu) \xi^\mu d\Sigma_\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu \xi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}. \quad (4.43)$$

A primeira integral do lado direito é identificada como a massa da matéria fora do buraco negro e a segunda como a massa do buraco negro.

Seguindo o mesmo procedimento para a segunda das equações 4.31 podemos escrever a equação

$$J = - \int_S T^\mu{}_\nu \psi^\nu d\Sigma_\mu - \frac{1}{16\pi} \int_{\partial B} \nabla^\nu \psi^\mu d\Sigma_{\mu\nu}, \quad (4.44)$$

onde usamos a fórmula para o momento angular 3.202. De modo semelhante a primeira integral do lado direito é identificada como o momento angular da matéria

fora do buraco negro e a segunda integral é considerada como o momento angular do buraco negro.

Na seção anterior discutimos os casos em que o horizonte de eventos era considerado um horizonte de Killing, bem como o modo de definir um vetor normal ao horizonte de eventos para um espaço tempo estacionário e axissimétrico. O vetor nulo tangente aos geradores do horizonte de eventos pode ser expresso por

$$l^\mu = \xi^\mu + \Omega_H \psi^\mu, \quad (4.45)$$

onde Ω_H é a velocidade angular do buraco negro, que é a mesma em todos os pontos do horizonte de eventos. Substituindo ξ^μ expresso acima em 4.43 temos

$$\begin{aligned} M &= \int_S (2T^\nu{}_\mu - T\delta^\nu{}_\mu) \xi^\mu d\Sigma_\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu d\Sigma_{\nu\mu} - \frac{\Omega_H}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu \psi^\nu d\Sigma_{\nu\mu} \\ M &= \int_S (2T^\nu{}_\mu - T\delta^\nu{}_\mu) \xi^\mu d\Sigma_\nu + 2\Omega_H J_H + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu d\Sigma_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

O elemento de superfície $d\Sigma_{\nu\mu}$ pode ser expresso como $2l_{[\mu} n_{\nu]} \sqrt{\sigma} d^2\theta$, onde n_μ é o outro vetor nulo ortogonal a superfície ∂B , normalizado de forma que $n_\mu l^\mu = -1$. A última integral do lado direito acima pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu d\Sigma_{\nu\mu} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu \cdot \frac{1}{2} (l_\nu n_\mu - l_\mu n_\nu) \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu \cdot l_\nu n_\mu \sqrt{\sigma} d^2\theta - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu \cdot l_\mu n_\nu \sqrt{\sigma} d^2\theta. \end{aligned}$$

Usando a equação de Killing e renomeando os índices na segunda integral temos

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu d\Sigma_{\nu\mu} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} l_\nu \nabla^\mu l^\nu \cdot n_\mu \sqrt{\sigma} d^2\theta.$$

Usando 4.6 temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu d\Sigma_{\nu\mu} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} (-\kappa l^\mu) \cdot n_\mu \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu l^\nu d\Sigma_{\nu\mu} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} \kappa dA. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como κ é constante sobre o horizonte de eventos a fórmula integral da massa se torna

$$M = \int_S (2T^\nu{}_\mu - T\delta^\nu{}_\mu) \xi^\mu d\Sigma_\nu + 2\Omega_H J_H + \frac{\kappa}{4\pi} A, \quad (4.48)$$

onde A é a área do horizonte de eventos.

4.3 A fórmula diferencial

Considere duas soluções do tipo buraco negro estacionárias e axisimétricas levemente diferentes. Seja δM a diferença de massa entre as duas soluções e considere também que a matéria fora do horizonte de eventos seja um fluido perfeito. A densidade de energia do fluido ε é escrita em função da densidade por número de partícula n e da densidade de entropia s . Sendo p a pressão do fluido a equação de estado é escrita como

$$p = \mu n + \theta s - \varepsilon, \quad (4.49)$$

onde θ é a temperatura e μ é o potencial químico dados por

$$\theta = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}, \quad \mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}. \quad (4.50)$$

O tensor energia momento para um fluido perfeito é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)v_\mu v_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (4.51)$$

onde v^μ , que é escrito como

$$v^\mu = \frac{u^\mu}{(\sqrt{-u_\nu u^\nu})}, \quad (4.52)$$

é o vetor tangente as linhas de fluxo

$$u^\mu = \xi^\mu + \Omega\psi^\mu, \quad (4.53)$$

sendo Ω a velocidade angular do fluido. O momento angular, a entropia do fluido e o número de partículas são dados respectivamente por

$$- \int T^\mu{}_\nu \psi^\nu d\Sigma_\mu, \quad (4.54)$$

$$\int s v^\mu d\Sigma_\mu, \quad (4.55)$$

$$\int n v^\mu d\Sigma_\mu. \quad (4.56)$$

Escolhemos as superfícies S , os horizontes de eventos e os vetores de Killing ξ^μ e ψ^μ de forma que sejam os mesmos para as duas soluções, logo

$$\delta\xi^\mu = 0, \quad \delta\psi^\mu = 0. \quad (4.57)$$

Sendo $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$, as variações dos vetores covariantes serão

$$\delta\xi_\mu = h_{\mu\nu}\xi^\nu, \quad \delta\psi_\mu = h_{\mu\nu}\psi^\nu. \quad (4.58)$$

A variação do vetor nulo l^μ , com índices contravariantes e covariantes será

$$\delta l^\mu = (\delta \Omega_H) \psi^\mu \quad (4.59)$$

$$\delta l_\mu = h_{\mu\nu} l^\nu + g_{\mu\nu} (\delta \Omega_H) \psi^\nu. \quad (4.60)$$

Como os horizontes de eventos estão na mesma posição nas duas soluções os vetores covariantes normais a eles devem ser paralelos

$$\delta l_{[\mu} l_{\nu]} = 0, \quad \delta n^{[\mu} n^{\nu]} = 0. \quad (4.61)$$

Além disso a derivada de Lie de δl_μ por l^ν é zero

$$\mathcal{L}_l \delta l_\mu = l^\nu \nabla_\nu \delta l_\mu + \delta l_\nu \nabla_\mu l^\nu = 0. \quad (4.62)$$

Contraindo $\kappa l_\mu = -\frac{1}{2} \nabla_\mu (l_\nu l^\nu)$ com n^μ temos

$$\kappa = \frac{1}{2} \nabla_\mu (l_\nu l^\nu) \cdot n^\mu. \quad (4.63)$$

Logo, calculando a variação dessa equação temos

$$\begin{aligned} \delta \kappa &= \frac{1}{2} \delta [\nabla_\mu (l_\nu l^\nu)] \cdot n^\mu + \frac{1}{2} \nabla_\mu (l_\nu l^\nu) \cdot \delta n^\mu \\ \Rightarrow \delta \kappa &= \frac{1}{2} (\nabla_\mu \delta l_\nu) l^\nu n^\mu + \frac{1}{2} (\delta l_\nu) (\nabla_\mu l^\nu) n^\mu + \frac{1}{2} (\nabla_\mu l_\nu) \delta l^\nu n^\mu + \frac{1}{2} l_\nu (\nabla_\mu \delta l^\nu) n^\mu + l_\nu \nabla_\mu l^\nu \cdot \delta n^\mu. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Usando 4.62 podemos escrever a identidade

$$\frac{1}{2} l^\mu \nabla_\mu \delta l_\nu \cdot n^\nu + \frac{1}{2} \delta l_\mu (\nabla_\nu l^\mu) n^\nu = 0,$$

e somá-la à expressão acima e obter

$$\delta \kappa = \frac{1}{2} (\nabla_\mu \delta l_\nu) (l^\nu n^\mu + l^\mu n^\nu) + (\delta l_\nu) (\nabla_\mu l^\nu) n^\mu + \frac{1}{2} (\nabla_\mu l_\nu) \delta l^\nu n^\mu + \frac{1}{2} l_\nu (\nabla_\mu \delta l^\nu) n^\mu + l_\nu \nabla_\mu l^\nu \cdot \delta n^\mu. \quad (4.65)$$

Note que, usando a equação de Killing, podemos escrever o terceiro termo do lado direito como

$$\frac{1}{2} \delta l^\nu (\nabla_\mu l_\nu) n^\mu = -\frac{1}{2} \delta l^\nu (\nabla_\nu l_\mu) n^\mu.$$

Agora usamos a derivada de Lie de l_μ por δl^ν , isto é,

$$\delta l^\nu (\nabla_\nu l_\mu) + l_\nu \nabla_\mu \delta l^\nu = 0,$$

e o termo acima se torna

$$\frac{1}{2} \delta l^\nu (\nabla_\mu l_\nu) n^\mu = \frac{1}{2} l_\nu \nabla_\mu \delta l^\nu.$$

Reescrevendo a expressão 4.65 temos

$$\delta\kappa = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \delta l_\nu)(l^\nu n^\mu + l^\mu n^\nu) + (\delta l_\nu)(\nabla_\mu l^\nu)n^\mu + l_\nu(\nabla_\mu \delta l^\nu)n^\mu + l_\nu(\nabla_\mu l^\nu)\delta n^\mu. \quad (4.66)$$

Agora usamos a expressão 4.59,

$$\delta\kappa = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \delta l_\nu)(l^\nu n^\mu + l^\mu n^\nu) + (\nabla_\mu l^\nu)[(\delta l_\nu)n^\mu + (\delta n^\mu)l_\nu] + \delta\Omega_H(\nabla_\mu \psi^\nu)l_\nu n^\mu. \quad (4.67)$$

Usando a normalização $l_\mu n^\mu = -1$, podemos multiplicar $\delta l_{[\mu} l_{\nu]} = 0$ por n^μ e $\delta n^{[\mu} n^{\nu]} = 0$ por l_ν para obtermos as relações

$$\delta l_\nu = -(\delta l_\mu)l_\nu n^\mu, \quad \delta n^\mu = -(\delta n^\nu)n^\mu l_\nu. \quad (4.68)$$

Usando o fato de que $\delta(l_\mu n^\mu) = 0$, podemos escrever $(\delta l_\mu)n^\mu = -l_\mu(\delta n^\mu)$, e com este resultado podemos demonstrar que o termo entre colchetes em 4.67 é nulo, pois

$$(\delta l_\nu)n^\mu + (\delta n^\mu)l_\nu = -(-l_\rho \delta n^\rho)l_\nu n^\mu - (\delta n^\rho)n^\mu l_\rho l_\nu = 0.$$

Assim, a equação 4.67 é reescrita como

$$\delta\kappa = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \delta l_\nu)(l^\nu n^\mu + l^\mu n^\nu) + \delta\Omega_H(\nabla_\mu \psi^\nu)l_\nu n^\mu. \quad (4.69)$$

Usando a normalização do tetrado, isto é,

$$g^{\mu\nu} = -n^\mu l^\nu - n^\nu l^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu, \quad (4.70)$$

temos

$$\delta\kappa = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \delta l_\nu)(-g^{\mu\nu} + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu) + \delta\Omega_H(\nabla_\mu \psi^\nu)l_\nu n^\mu.$$

Os vetores estão normalizados de forma que $l_\mu m^\mu = l_\mu \bar{m}^\mu = 0$, $l_\mu n^\mu = -1$, e como δl_μ é proporcional a l_μ no horizonte, $\nabla_\nu \delta l_\mu \cdot m^\mu \bar{m}^\nu = 0$, e a expressão anterior se torna

$$\begin{aligned} \delta\kappa &= -\frac{1}{2}\nabla^\mu \cdot \delta l_\mu + \delta\Omega_H(\nabla_\mu \psi^\nu)l_\nu n^\mu \\ \delta\kappa &= -\frac{1}{2}\nabla^\mu \cdot (h_{\mu\nu}l^\nu + g_{\mu\nu}\delta\Omega_H\psi^\nu) + \delta\Omega_H(\nabla_\mu \psi^\nu)l_\nu n^\mu \\ \delta\kappa &= -\frac{1}{2}\nabla^\mu h_{\mu\nu} \cdot l^\nu + \delta\Omega_H(\nabla_\mu \psi^\nu)l_\nu n^\mu. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Este resultado será utilizado futuramente para o cálculo da forma diferencial para a massa de um buraco negro.

Para calcular δM precisamos da fórmula integral da massa encontrada na seção anterior, 4.48. A variação da massa é escrita como

$$\delta M = \delta \int_S (2T^\nu{}_\mu + \frac{1}{8\pi}R\delta_\mu{}^\nu)\xi^\mu d\Sigma_\nu + 2\delta\Omega_H J_H + 2\Omega_H \delta J_H + \frac{\delta\kappa}{4\pi}A + \frac{\kappa}{4\pi}\delta A. \quad (4.72)$$

O que vamos fazer é calcular a variação de cada termo desta expressão separadamente e assim obter a expressão para δM escrita em termos da variação dos outros parâmetros que estão do lado direito da fórmula integral.

A variação do termo contendo o escalar de curvatura, $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ é escrita como

$$\delta \int_S \left(\frac{1}{8\pi} R \xi^\nu d\Sigma_\nu \right) = -\frac{1}{8\pi} \int_S \delta(\sqrt{-g} R) d^4x.$$

Separadamente temos

$$\delta(\sqrt{-g} R) = \delta(\sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} (\delta g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\delta R_{\alpha\beta}). \quad (4.73)$$

Do apêndice temos

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}).$$

Para calcular a variação do tensor de Ricci escolhemos um sistema de coordenadas onde os símbolos de Cristoffel são nulos, ou seja

$$(\delta R_{\alpha\beta}) = \delta(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu). \quad (4.74)$$

Como $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ é uma equação tensorial podemos substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes e assim escrever a variação como

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \nabla^\mu (g_{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu) - g_{\mu\beta} (\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\nu)). \quad (4.75)$$

Separadamente, a variação dos símbolos de Cristoffel são

$$\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} [\partial_\beta (\delta g_{\sigma\alpha}) + \partial_\alpha (\delta g_{\sigma\beta}) - \partial_\sigma (\delta g_{\alpha\beta})] + \frac{1}{2} (\delta g^{\nu\sigma}) [\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\beta g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}], \quad (4.76)$$

$$\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} [\partial_\alpha (\delta g_{\sigma\nu})] - \frac{1}{2} (\delta g^{\nu\sigma}) [\partial_\alpha g_{\sigma\nu}]. \quad (4.77)$$

Como dito anteriormente estamos lidando com uma equação tensorial, logo os termos que contém derivadas parciais podem ser transformados em derivadas covariantes. Usando o fato de que $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$, 4.75 é escrita como

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} &= \nabla^\mu [g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu) - \delta_\mu^\alpha (\delta \Gamma_{\alpha\nu}^\nu)] \\ &= \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} \nabla_\beta (\delta g_{\mu\beta}) + g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha (\delta g_{\sigma\beta}) - g^{\alpha\beta} \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\beta}) - \delta_\mu^\alpha g^{\nu\sigma} \nabla_\alpha (\delta g_{\sigma\nu})] \\ &= g^{\alpha\beta} \nabla_\beta (\delta g_{\mu\beta}) - g^{\alpha\beta} \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Separadamente, cada termo dessa expressão é reescrito como

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta (\delta g_{\mu\beta}) &= \nabla_\beta (g^{\alpha\beta} \delta g_{\mu\beta}) - (\nabla_\beta g^{\alpha\beta}) \delta g_{\mu\beta} = \nabla_\beta (g^{\alpha\beta} h_{\mu\beta}), \\ g^{\alpha\beta} \nabla_\mu (\delta g_{\alpha\beta}) &= \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}) - \nabla_\mu (g^{\alpha\beta}) \delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\mu (g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

e isso nos permite escrever 4.78 como

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \nabla^\mu(\nabla_\beta h_\mu^\beta - \nabla_\mu h_\beta^\beta) = -2\nabla^\mu\nabla_{[\mu}h_{\beta]}^\beta. \quad (4.79)$$

Finalmente, com este resultado podemos escrever a variação do termo contendo o escalar de curvatura da seguinte forma

$$\delta \int_S \left(\frac{1}{8\pi} R \xi^\nu d\Sigma_\nu \right) = -\frac{1}{8\pi} \int_S \left[(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R)h^{\alpha\beta} + 2\nabla^\mu\nabla_{[\mu}h_{\beta]}^\beta \right] \xi^\nu d\Sigma_\nu. \quad (4.80)$$

Podemos reescrever o segundo termo de dentro da integral do lado direito da expressão acima. Para isso note que

$$\begin{aligned} 2\nabla^\mu\nabla_{[\mu}h_{\beta]}^\beta \cdot \xi^\nu &= 2\nabla^\mu(\nabla_{[\mu}h_{\beta]}^\beta \cdot \xi^\nu) - 2\nabla_{[\mu}h_{\beta]}^\beta \cdot \nabla^\mu\xi^\nu \\ &= 2\nabla_\mu(\nabla^{[\mu}h^{\beta]}_{\beta]} \cdot \xi^\nu) - \nabla^\mu h_\beta^\beta \cdot \nabla_\mu\xi^\nu + \nabla^\beta h^\mu_\beta \cdot \nabla_\mu\xi^\nu. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para reescrevermos a expressão acima como uma derivada de um único termo vamos demonstrar algumas identidades. Pelo fato da derivada de Lie da métrica com relação ao vetor ξ^α ser zero, a mesma derivada com relação à variação da métrica também é zero, ou seja

$$\mathcal{L}_\xi(\delta g_{\beta\gamma}) = \xi^\alpha\nabla_\alpha h_{\beta\gamma} + h_{\beta\alpha}\nabla_\gamma\xi^\alpha + h_{\alpha\gamma}\nabla_\beta\xi^\alpha = 0. \quad (4.82)$$

Multiplicando essa expressão por $g^{\beta\gamma}$ temos

$$\xi^\alpha\nabla_\alpha h_\beta^\beta = 0. \quad (4.83)$$

Aplicando o operador ∇_μ pela direita temos

$$\nabla_\mu\xi^\alpha \cdot \nabla_\alpha h_\beta^\beta + \xi^\alpha\nabla_\mu\nabla_\alpha h_\beta^\beta = 0.$$

Como h_β^β é um escalar as derivadas covariantes que o multiplicam comutam, e, usando a equação de Killing e em seguida a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \xi^\alpha\nabla_\alpha\nabla_\mu h_\beta^\beta - \nabla_\alpha\xi_\mu \cdot \nabla^\alpha h_\beta^\beta &= 0. \\ \Rightarrow \nabla_\alpha(\xi^\alpha\nabla_\mu h_\beta^\beta) - \nabla_\alpha\xi_\mu \cdot \nabla^\alpha h_\beta^\beta &= 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Agora vamos demonstrar uma outra relação, sendo essa um pouco mais complicada que a anterior. Podemos reescrever a expressão 4.82 da seguinte forma

$$\xi^\mu\nabla_\mu h_\beta^\gamma + h_{\beta\mu}\nabla^\nu\xi^\mu + h_\mu^\nu\nabla_\beta\xi^\mu = 0. \quad (4.85)$$

Aplicando o operador ∇^β pela direita temos

$$\begin{aligned} \nabla^\beta\xi^\mu \cdot \nabla_\mu h_\beta^\gamma + \xi^\mu\nabla^\beta\nabla_\mu h_\beta^\gamma + \nabla^\beta h_{\beta\mu} \cdot \nabla^\nu\xi^\mu + h_{\beta\mu}\nabla^\beta\nabla^\nu\xi^\mu + \nabla^\beta h_\mu^\nu \cdot \nabla_\beta\xi^\mu \\ + h_\mu^\nu\nabla^\beta\nabla_\beta\xi^\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

O primeiro e o quinto termo desta expressão se cancelam pois, usando a equação de Killing temos

$$\nabla^\beta \xi^\mu \cdot \nabla_\mu h_\beta^\gamma + \nabla^\beta h_\mu^\nu \cdot \nabla_\beta \xi^\mu = \nabla^\beta \xi^\mu \cdot \nabla_\mu h_\beta^\gamma - \nabla_\beta h_\mu^\nu \cdot \nabla^\mu \xi^\beta = 0.$$

O segundo termo da expressão 4.86 é reescrito como

$$\begin{aligned} \xi^\mu \nabla^\beta \nabla_\mu h_\beta^\gamma &= \xi^\mu \nabla_\mu \nabla^\beta h_\beta^\gamma + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\beta{}_\delta h^{\delta\nu} + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\nu{}_\delta h^{\beta\delta} \\ &= \nabla_\mu (\xi^\mu \nabla^\beta h_\beta^\gamma) + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\beta{}_\delta h^{\delta\nu} + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\nu{}_\delta h^{\beta\delta}. \end{aligned}$$

Com estes resultados a expressão 4.86 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\xi^\mu \nabla^\beta h_\beta^\gamma) - \nabla^\beta h_{\beta\mu} \nabla^\mu \xi^\nu + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\beta{}_\delta h^{\delta\nu} + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\nu{}_\delta h^{\beta\delta} + h_{\beta\mu} \nabla^\beta \nabla^\nu \xi^\mu \\ + h_\beta{}^\nu \nabla^\mu \nabla_\mu \xi^\beta = 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Usando a equação 4.31 podemos reescrever os quatro últimos termos como

$$\begin{aligned} \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\beta{}_\delta h^{\delta\nu} + \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\nu{}_\delta h^{\beta\delta} + h_{\beta\mu} \nabla^\beta \nabla^\nu \xi^\mu - h_\beta{}^\nu R_{\mu\beta}{}^\mu{}_\delta \xi^\delta = \\ -h_{\beta\mu} \nabla^\beta \nabla^\nu \xi^\mu - h^{\beta\nu} \xi^\mu R_{\mu\delta\beta}{}^\delta + h^{\beta\nu} \xi^\mu R_{\beta\delta\mu}{}^\delta + h_{\beta\delta} \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\nu{}_\delta = \\ -h_{\beta\mu} \nabla^\beta \nabla^\nu \xi^\mu + h_{\beta\delta} \xi^\mu R_{\beta\mu}{}^\nu{}_\delta. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Agora, aplicando o operador ∇_β na equação de Killing, temos

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \nabla_\mu \xi^\nu + \nabla_\beta \nabla^\nu \xi_\mu &= 0, \\ \Rightarrow \nabla_\beta \nabla_\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \nabla_\beta \xi_\mu + R_{\mu\delta\beta}{}^\nu \xi^\delta &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando esta expressão por $h^{\beta\mu}$ temos

$$h^{\beta\mu} \nabla_\beta \nabla_\mu \xi^\nu + h^{\beta\mu} \nabla^\nu \nabla_\beta \xi_\mu + h^{\beta\mu} R_{\mu\delta\beta}{}^\nu \xi^\delta = 0.$$

O segundo termo é nulo pois $h^{\beta\mu}$ é um tensor simétrico e $\nabla_\beta \xi_\mu$ é antissimétrico pela equação de Killing. Logo

$$h^{\beta\mu} \nabla_\beta \nabla_\mu \xi^\nu + h^{\beta\mu} R_{\mu\delta\beta}{}^\nu \xi^\delta = 0, \quad (4.89)$$

que é a mesma equação que 4.88. Logo, a última identidade que precisávamos demonstrar é escrita como

$$\nabla_\mu (\xi^\mu \nabla^\beta h_\beta^\gamma) - \nabla^\beta h_{\beta\mu} \nabla^\mu \xi^\nu = 0. \quad (4.90)$$

O que demonstramos portanto é que os objetos $\nabla^\nu h_\beta{}^\beta \equiv A^\nu$ e $\nabla^\beta h^\nu{}_\beta \equiv B^\mu$ são Lie transportados por ξ^μ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi A^\nu &= \xi^\mu \nabla_\mu A^\nu - A^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = \xi^\mu \nabla_\mu \nabla^\nu h_\beta{}^\beta - \nabla^\mu h_\beta{}^\beta \cdot \nabla_\mu \xi^\nu = 0, \\ \mathcal{L}_\xi B^\nu &= \xi^\mu \nabla_\mu B^\nu - B^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = \xi^\mu \nabla_\mu \nabla^\beta h^\nu{}_\beta - \nabla^\beta h^\mu{}_\beta \cdot \nabla_\mu \xi^\nu = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Usando a regra da cadeia em cada equação temos

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\xi^\mu \nabla^\nu h_\beta^\beta) - \nabla^\mu h_\beta^\beta \cdot \nabla_\mu \xi^\nu &= 0 \\ \nabla_\mu(\xi^\mu \nabla^\beta h^\nu_\beta) - \nabla^\beta h^\mu_\beta \cdot \nabla_\mu \xi^\nu &= 0,\end{aligned}\tag{4.92}$$

Com este resultado 4.81 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}2\nabla^\mu \nabla_{[\mu} h_{\beta]}^\beta \cdot \xi^\nu &= 2\nabla_\mu(\nabla^{[\mu} h^{\beta]}_\beta \cdot \xi^\nu) - \nabla_\mu(\xi^\mu \nabla^\nu h_\beta^\beta) + \nabla_\mu(\xi^\mu \nabla^\beta h^\nu_\beta) \\ &= 2\nabla_\mu[\nabla^{[\mu} h^{\beta]}_\beta \cdot \xi^\nu - \xi^\mu \nabla^{[\nu} h^{\beta]}_\beta].\end{aligned}\tag{4.93}$$

O último termo da integral 4.80 será então

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8\pi} \int_S [2\nabla^\mu \nabla_{[\mu} h_{\beta]}^\beta] \xi^\nu d\Sigma_\nu &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla_\mu [\nabla^{[\mu} h^{\beta]}_\beta \cdot \xi^\nu - \xi^\mu \nabla^{[\nu} h^{\beta]}_\beta] d\Sigma_\nu \\ \Rightarrow -\frac{1}{8\pi} \int_S [2\nabla^\mu \nabla_{[\mu} h_{\beta]}^\beta] \xi^\nu d\Sigma_\nu &= -\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial S} [\nabla^{[\mu} h^{\beta]}_\beta \cdot \xi^\nu - \xi^\mu \nabla^{[\nu} h^{\beta]}_\beta] d\Sigma_{\nu\mu},\end{aligned}\tag{4.94}$$

onde na última passagem usamos o teorema de Stokes. A contribuição para esta expressão da superfície S é proveniente da fronteira na região assintótica, que denominaremos por $\partial\Sigma_\infty$, e do horizonte de eventos, que denominaremos por ∂B . Note que, na região assintótica, o vetor de Killing do tipo tempo possui somente o componente temporal diferente de zero, e isso implica que

$$\xi^\mu d\Sigma_{\mu\nu} = \xi^0 d\Sigma_{0i},\tag{4.95}$$

já que o vetor de Killing é ortogonal ao vetor normal à $\partial\Sigma_\infty$. Isso nos permite escrever

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} [\nabla^{[i} h^{\beta]}_\beta d\Sigma_{0i} - \nabla^{[i} h_{\beta}^{\beta]} d\Sigma_{i0}] = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} 2\nabla^{[i} h^{\beta]}_\beta d\Sigma_{0i}.\tag{4.96}$$

Na região assintótica as derivadas covariantes podem ser aproximadas para derivadas parciais, já que lá o espaço é aproximadamente plano, portanto

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} 2\nabla^{[i} h^{\beta]}_\beta d\Sigma_{0i} \approx \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} (\partial^i h^\beta_\beta - \partial^\beta h^i_\beta) d\Sigma_{0i}.\tag{4.97}$$

Assumimos que a métrica é estacionária, portanto a expressão do lado direito toma a forma

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} (\partial_i h^0_0 + \partial_i h^j_j - \partial_j h^i_j) d\Sigma_{0i}.$$

Podemos eliminar $\partial_i h_{00}$ com auxílio de 3.211 e 3.213, considerando $h_{\mu\nu} = \delta\tilde{h}_{\mu\nu}$. A expressão final será

$$\frac{1}{16\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) d\Sigma_{0i}.\tag{4.98}$$

Usando a expressão 3.216 com métrica escrita como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu}$, e, pelo fato das definições de energia massa serem equivalentes, esta expressão é igual à $-\delta M$, em unidades nas quais $G_N = 1$.

Temos que calcular agora o valor dessa integral na superfície ∂B . Note que, devido à antissimetria de $d\Sigma_{\mu\nu}$, podemos escrever a integral 4.94 como

$$-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} [\nabla^{[\mu} h^{\beta]}_{\beta} \cdot \xi^\nu - \xi^\mu \nabla^{[\nu} h^{\beta]}_{\beta}] d\Sigma_{\nu\mu} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} [\xi^\nu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} - \xi^\mu \nabla^\beta h^\nu_{\beta}] d\Sigma_{\nu\mu}. \quad (4.99)$$

Usamos agora as expressões $\xi^\mu = l^\mu - \Omega_H \psi^\mu$, $d\Sigma_{\mu\nu} = -(l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu) \sqrt{\sigma} d^2x$, onde $l_\mu n^\mu = -1$, $\psi_\mu n^\mu = 0$. Logo, a integral 4.99 será

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} [\xi^\nu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} + \xi^\mu \nabla^\beta h^\nu_{\beta}] d\Sigma_{\nu\mu} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} (-l_\mu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} \\ & + l_\nu \nabla^\beta h^\nu_{\beta} + \Omega_H (\psi^\nu l_\nu) n_\mu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} - \Omega_H (\psi^\mu l_\mu) n_\nu \nabla^\nu h^\beta_{\beta}) \sqrt{\sigma} d^2x. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Usando a normalização da métrica 4.70, podemos escrever

$$\psi_\nu = -(\psi^\mu l_\mu) n_\nu, \quad (4.101)$$

o que nos permite reescrever a 4.100 como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} [\xi^\nu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} - \xi^\mu \nabla^\beta h^\nu_{\beta}] d\Sigma_{\nu\mu} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} (-l_\mu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} \\ & + l_\nu \nabla^\beta h^\nu_{\beta} - \Omega_H \psi_\mu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} + \Omega_H \psi_\nu \nabla^\beta h^\nu_{\beta}) \sqrt{\sigma} d^2x. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Pelo fato da velocidade angular ser constante no horizonte de eventos, o vetor l^μ é um vetor de Killing. Isto nos permite escrever, usando a derivada de Lie da variação da métrica 4.82,

$$\begin{aligned} l_\mu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} &= g^{\beta\gamma} l_\mu \nabla^\mu h_{\mu\beta} \\ &= g^{\beta\gamma} (-h_{\mu\beta} \nabla_\gamma l^\mu - h_{\gamma\mu} \nabla_\beta l^\mu) \\ &= 2h_{\mu\beta} \nabla^\beta \xi^\mu \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Essa expressão é válida para qualquer vetor de Killing, o que também nos permite deduzir

$$\psi_\mu \nabla^\mu h^\beta_{\beta} = 0. \quad (4.104)$$

Agora, note também que

$$\begin{aligned} \psi^\nu \nabla^\beta h_{\nu\beta} &= \nabla^\beta (\psi^\nu h_{\nu\beta}) \\ &= \nabla^\beta (\psi^\nu \delta g_{\nu\beta}) \\ &= \delta \nabla^\beta (\psi^\nu g_{\nu\beta}) \\ &= \delta \nabla^\beta (\psi_\beta) = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Usando 4.71 podemos escrever 4.102, cancelando alguns termos por 4.103, 4.104 e 4.105, como

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} l^\nu \nabla^\beta h_{\beta\nu} \sqrt{2} dx^2 &= -\frac{2}{8\pi} \int_{\partial B} \delta\kappa \sqrt{\sigma} d^2x + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} 2\delta\Omega_H \nabla_\mu \psi^\nu l_{[\nu} n_{\mu]} \sqrt{\sigma} d^2x \\ &= -\frac{\delta\kappa}{4\pi} - 2\delta\Omega_H \frac{1}{16\pi} \int_{\partial B} \nabla^\mu \psi^\nu d\Sigma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Usando a definição de momento angular 3.202 o resultado desta expressão será

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\partial B} l^\mu \nabla^\beta h_{\beta\nu} \sqrt{2} dx^2 = -\frac{\delta\kappa}{4\pi} - 2\delta\Omega_H J_H, \quad (4.107)$$

onde J_H é o momento angular do buraco negro.

Agora, usando 4.51, o tensor energia-momento é escrito como

$$T_\mu{}^\nu = \frac{(\varepsilon + p)u_\mu u^\nu}{-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma} + p\delta_\mu{}^\nu. \quad (4.108)$$

Como $u^\mu = \xi^\mu + \Omega\psi^\mu$, a variação do termo que contém o tensor energia-momento será

$$\begin{aligned} 2\delta \int T_\mu{}^\nu \xi^\mu d\Sigma_\nu &= 2\delta \int T_\mu{}^\nu u^\mu d\Sigma_\nu - 2\delta \int T_\mu{}^\nu \psi^\mu d\Sigma_\nu. \\ &= 2 \int u^\mu \delta(T_\mu{}^\nu d\Sigma_\nu) + 2 \int (\delta u^\mu) T_\mu{}^\nu d\Sigma_\nu - 2 \int (\delta\Omega) T_\mu{}^\nu \psi^\mu d\Sigma_\nu - 2 \int \Omega \delta(T_\mu{}^\nu \psi^\mu d\Sigma_\nu). \end{aligned} \quad (4.109)$$

Por 4.57 temos $\delta u^\mu = (\delta\Omega)\psi^\mu$, o que cancela dois termos da expressão acima, resultando em

$$2\delta \int T_\mu{}^\nu \xi^\mu d\Sigma_\nu = 2 \int u^\mu \delta(T_\mu{}^\nu d\Sigma_\nu) - 2 \int \Omega \delta(T_\mu{}^\nu \psi^\mu d\Sigma_\nu). \quad (4.110)$$

Usando 4.108 e o fato de que $\psi^\mu d\Sigma_\mu = 0$ a variação do tensor energia-momento é escrita como

$$2\delta \int T_\mu{}^\nu \xi^\mu d\Sigma_\nu = 2 \int \Omega \delta(-T_\mu{}^\nu \psi^\mu d\Sigma_\nu) + 2\delta \int p u^\mu d\Sigma_\mu + 2 \int u^\mu \delta \left[\frac{(\varepsilon + p)u_\mu}{-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right]. \quad (4.111)$$

Vamos calcular a terceira integral do lado direito de 4.111 separadamente. Note que podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} 2 \int u^\mu \delta \left[\frac{(\varepsilon + p)u_\mu}{-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] &= 2 \int \frac{u^\mu u_\mu}{(-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \delta \left[\frac{(\varepsilon + p)}{(-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] \\ &\quad + 2 \int u^\mu \delta \left[\frac{u_\mu}{(-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \right] \frac{(\varepsilon + p)}{(-g_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \xi^\nu d\Sigma_\nu. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Podemos calcular a seguinte identidade

$$u^\mu \delta \left(\frac{u_\mu}{(-g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta)^{1/2}} \right) = \frac{u^\mu \delta u_\mu}{(-g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta)^{1/2}} + u_\mu u^\mu \delta [(-g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta)^{-1/2}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u^\mu \delta u_\mu}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{u_\mu u^\mu}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{3/2}} \delta(-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma) \\
&= \frac{u^\mu \delta u_\mu}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{h_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{2u_\sigma \delta u^\sigma}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\delta u_\mu = h_{\mu\nu} u^\nu + \delta\Omega \psi_\mu$ e $\delta u^\mu = \delta\Omega \psi^\mu$ a identidade é escrita como

$$u^\mu \delta \left(\frac{u_\mu}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{h_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}}. \quad (4.113)$$

Substituindo este resultado em 4.112 temos

$$\begin{aligned}
2 \int u^\mu \delta \left[\frac{(\varepsilon + p) u_\mu}{-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] &= 2 \int \frac{u^\mu u_\mu}{(-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \delta \left[\frac{(\varepsilon + p)}{(-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] \\
&+ 2 \int \frac{1}{2} \frac{h_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma}{(-g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^{1/2}} \frac{(\varepsilon + p)}{(-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \xi^\nu d\Sigma_\nu. \quad (4.114)
\end{aligned}$$

Usando $\varepsilon + p = \mu n + \theta s$ e 4.108 temos

$$\begin{aligned}
2 \int u^\mu \delta \left[\frac{(\varepsilon + p) u_\mu}{-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] &= -2 \int (-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2} \mu \delta \left[\frac{n}{(-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] \\
&- 2 \int \delta \mu \cdot n \xi^\mu d\Sigma_\mu - 2 \int (-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2} \theta \delta \left[\frac{s}{(-g_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma)^{1/2}} \xi^\nu d\Sigma_\nu \right] \\
&- 2 \int \delta \theta \cdot s \xi^\mu d\Sigma_\mu + \int T^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu - \int p g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \quad (4.115)
\end{aligned}$$

Fazendo as definições

$$\begin{aligned}
\delta dJ &\equiv \delta(-T_\mu{}^\nu \psi^\mu d\Sigma_\nu) \\
\delta dN &\equiv \delta(-n(-u_\mu u^\mu)^{-1/2}) \xi^\nu d\Sigma_\nu \\
\delta dS &\equiv \delta(-s(-u_\mu u^\mu)^{-1/2}) \xi^\nu d\Sigma_\nu
\end{aligned} \quad (4.116)$$

onde δdJ , δdN e δdS são respectivamente as variações de momento angular, do número de partículas e de entropia atravessando o elemento de superfície $d\Sigma_\nu$. Definimos também o potencial químico e a temperatura "red-shiftados", dados respectivamente por

$$\bar{\mu} = (-u_\mu u^\mu)_\mu, \quad \bar{\theta} = (-u_\mu u^\mu)\theta. \quad (4.117)$$

Isso nos permite escrever a variação do termo contendo o tensor energia-momento como

$$\begin{aligned}
2\delta \int T_\mu{}^\nu \xi^\mu d\Sigma_\nu &= 2 \int \Omega \delta dJ + 2\delta \int p u^\mu d\Sigma_\mu + \int T^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu - \int p g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \\
&+ \int \bar{\mu} \delta dN + \int \bar{\theta} \delta dS - 2 \int (\delta \mu \cdot n + \delta \theta \cdot s) \xi^\nu d\Sigma_\nu. \quad (4.118)
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado de 4.98, 4.107 e 4.118 em 4.72, e fazendo os cancelamentos em seguida temos

$$\begin{aligned} \delta M = \int \Omega \delta dJ + \int \bar{\mu} \delta dN + \int \bar{\theta} \delta dS + \Omega_H \delta J_H + \frac{\kappa}{8\pi} \delta A - \int p g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \xi^\nu d\Sigma_\nu \\ - 2 \int (\delta\mu \cdot n + \delta\theta \cdot s) \xi^\nu d\Sigma_\nu + \delta \int p \xi^\mu d\Sigma_\mu \end{aligned} \quad (4.119)$$

Usamos agora o fato de que $\delta p = \delta\mu \cdot n + \delta\theta \cdot s$, e $\delta d\Sigma_\mu = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} d\Sigma_\mu$, para cancelar os termos envolvendo a pressão e finalmente obter

$$\delta M = \int \Omega \delta dJ + \int \bar{\mu} \delta dN + \int \bar{\theta} \delta dS + \Omega_H \delta J_H + \frac{\kappa}{8\pi} \delta A, \quad (4.120)$$

que é a fórmula diferencial para a massa de um buraco negro.

4.4 Leis da termodinâmica de buracos negros

Da mesma forma que fizemos no primeiro capítulo vamos agora enumerar as chamadas leis da termodinâmica de buracos negros.

0. Lei zero: A lei zero da termodinâmica de buracos negros estabelece que a gravidade superficial de um buraco negro estacionário é constante sobre todo o horizonte de eventos quando o tensor energia-momento satisfaz a condição de energia dominante.

1. Primeira lei: Considerando um processo quasi-estático para o qual um buraco negro de massa M , momento angular J e área superficial A é levado a um novo buraco negro estacionário com parâmetros $M + \delta M$, $J + \delta J$ e $A + \delta A$, a primeira lei estabelece que a mudança da massa, da área superficial e do momento angular estão relacionadas por

$$\delta M = \int \Omega \delta dJ + \int \bar{\mu} \delta dN + \int \bar{\theta} \delta dS + \Omega_H \delta J_H + \frac{\kappa}{8\pi} \delta A, \quad (4.121)$$

cujos parâmetros relacionados ao tensor energia momento são os mesmos definidos na seção anterior.

2. Segunda lei: A segunda lei da termodinâmica de buracos negros estabelece que, se o tensor energia-momento satisfaz a condição de energia nula, então a área da superfície não decresce nunca, isto é

$$\delta A \geq 0. \quad (4.122)$$

Este é o chamado teorema da área de Hawking, demonstrado em 1971. Foi Penrose quem observou que o horizonte de eventos é gerado por geodésicas nulas sem pontos

terminais futuros. Essa afirmação estabelece que os geradores do horizonte de eventos não podem chegar a uma cáustica. O teorema da focalização então implica que a expansão θ deve ser positiva ou nula sobre todo o horizonte de eventos. Se $\theta < 0$ o teorema da focalização garante que os geradores convergirão para uma cáustica, como vimos por 3.103, o que entraria em contradição com o que foi demonstrado por Penrose. Então $\theta \geq 0$ sobre todo o horizonte de eventos, o que implica por 3.66 que a área da superfície do horizonte de eventos não decresce.

3. Terceira lei: Como foi dito na introdução do capítulo a terceira lei estabelece que se o tensor energia-momento é "bounded" e satisfaz a condição de energia fraca, então a gravidade superficial de um buraco negro não pode ser reduzida à zero por uma sequência finita de operações. Para buracos negros extremos em quatro dimensões a gravidade superficial é zero, ou seja, a terceira lei estabelece que, sob essas condições impostas ao tensor energia-momento, é impossível para um buraco negro se tornar extremo dentro de um intervalo de tempo finito $\Delta t > 0$.

4.5 Buracos negros e termodinâmica

Como demonstramos ao longo deste capítulo, as quatro leis da termodinâmica de buracos negros se assemelham muito às quatro leis da termodinâmica, apresentados no capítulo 1, sendo que a gravidade superficial κ faz o papel da temperatura, a área do horizonte de eventos A faz o papel da entropia e a massa M faz o papel da energia interna. A princípio, as leis da termodinâmica de buraco negro foram chamadas de "as quatro leis da mecânica de buracos negros". No artigo original [6], Bardeen, Carter e Hawking apresentaram argumentos de que κ não poderia ser interpretada como a temperatura real do buraco negro. Mais tarde, agora sozinho, Hawking demonstrou que de fato existe uma relação entre a gravidade superficial e a temperatura do buraco negro, dada por

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} \kappa, \quad (4.123)$$

e, pouco tempo depois, o próprio Hawking demonstrou que processos quânticos fazem com que surja um fluxo térmico de partículas que é emitido de buracos negros, o que implicou então que buracos negros realmente se comportam como sistemas termodinâmicos. A lei zero é portanto um caso especial da lei zero da termodinâmica, que estabelece que um sistema em equilíbrio térmico tem temperatura constante. A primeira lei é somente uma relação entre os parâmetros do buraco negro, assim como a primeira lei é uma relação entre os parâmetros do sistema termodinâmico, condizentes com a conservação de energia. A segunda lei é só mais uma afirmação de que a entropia de um sistema não pode decrescer, já que podemos encontrar

a relação entre a entropia e a área do horizonte de eventos substituindo 4.123 em 4.120, dada por

$$S = \frac{A}{4}. \quad (4.124)$$

Deve ser mencionado aqui que a emissão de radiação Hawking faz com que a área do buraco negro decresça. Porém, o tensor energia-momento desta radiação não obedece a condição de energia nula, que era uma das exigências para se demonstrar o teorema da área. Por outro lado, o processo de evaporação do buraco negro não viola a segunda lei da termodinâmica generalizada, que estabelece que a entropia total, que é a soma entre a entropia do buraco negro e da radiação emitida, não decresça. Além disso, a radiação Hawking é um efeito da gravitação quântica e ainda hoje não é bem entendida (veja por exemplo o paradoxo da informação de um buraco negro).

Capítulo 5

O mecanismo atrator

O teorema "no hair" estabelece que os sistemas envolvendo buracos negros são descritos por um número muito pequeno de parâmetros. Podemos introduzir campos escalares em teorias do tipo Einstein-Maxwell, de forma que esse número de parâmetros aumente, alterando a forma da primeira lei da termodinâmica de buracos negros. A situação mais geral então passa a ser um buraco negro com cargas elétrica e magnética, momento angular, massa, e campos escalares. Porém, a fórmula da entropia de Bekenstein-Hawking ainda sim depende somente do valor das cargas do buraco negro.

Nesta seção apresentaremos um exemplo do chamado **Mecanismo Atrator**, descoberto a princípio no contexto das teorias de supergravidade $N = 2$ e $N = 4$, [14], [15], [16]. Mais tarde foi descoberto que a supersimetria não exerce um papel fundamental para o fenômeno atrator, sendo este uma consequência da simetria da geometria próxima ao horizonte de eventos para o caso extremo, que é $AdS_2 \times S^{D-2}$, para buracos negros estáticos e esfericamente simétricos. O mecanismo atrator é um fenômeno que faz com que os valores dos campos escalares sobre o horizonte de eventos sejam sempre os mesmos, dependendo somente das cargas do buraco negro e não importando suas condições iniciais no infinito. Este é mais um exemplo do teorema "no hair".

Descreveremos a transformação de dualidade clássica da teoria de Maxwell, e apresentaremos algumas teorias que contém transformações generalizadas deste tipo que também representam uma invariância das equações de movimento. Estas teorias descrevem um papel fundamental no que se refere ao mecanismo atrator, que será descrito também na última seção deste capítulo. Nesta seção vamos considerar teorias com unidades em que $16\pi G_N = 1$.

5.1 Dualidade eletromagnética

As equações de Maxwell para o espaço livre em unidades de $c = 1$, dadas por

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0, & \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{5.1}$$

apresentam uma simetria entre os campos elétrico e magnético. Basta trocar $\vec{E}$ por $\vec{B}$ e $\vec{B}$ por $-\vec{E}$ que o primeiro par de equações se torna o segundo e o segundo se torna o primeiro. Se admitirmos a existência de monopólos magnéticos as equações de Maxwell na presença de fontes elétrica e magnética também apresentam essa chamada **dualidade eletromagnética**. De fato, é mais fácil verificar essa dualidade utilizando a teoria de Maxwell em um espaço de Minkowski, cuja ação é dada por

$$I = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.\tag{5.2}$$

As equações de movimento para essa teoria são dadas por

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0,\tag{5.3}$$

e as identidades de Bianchi são escritas como

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu F_{\rho\sigma} = \nabla_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,\tag{5.4}$$

onde definimos

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},\tag{5.5}$$

sendo que definimos os campos elétrico e magnético por 3.138. A dualidade eletromagnética agora é escrita simplesmente como

$$F^{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}.\tag{5.6}$$

Pelo fato de $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ a dualidade eletromagnética é uma simetria das equações de movimento somente, e não da ação. Essa simetria também pode ser entendida como uma rotação entre as equações de movimento e as identidades de Bianchi, já que uma se transforma na outra após a transformação de dualidade.

5.2 Revisão de buracos negros dilatônicos

Em nossa discussão sobre buracos negros nas seções anteriores estudamos somente os casos em que as fontes dos campos do buraco negro eram somente do tipo gravitacionais e eletromagnéticas. Nesta seção discutiremos o caso de um buraco

negro na presença de campos escalares. Para isso, considere a ação da teoria de Einstein-Maxwell acoplada ao campo escalar do dilaon

$$I[\phi, A_\mu, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (5.7)$$

onde R é o escalar de curvatura, ϕ é o dilaon e $F_{\mu\nu}$ é o campo intensidade de qualquer campo de gauge $U(1)$. Seguindo os mesmos procedimentos feitos para a obtenção da solução de Reissner-Nordstrom podemos encontrar uma solução do tipo buraco negro para esta ação. De fato, as equações de movimento são escritas como

$$\nabla_\mu (e^{-2\phi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5.8)$$

$$\nabla_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.9)$$

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2e^{-2\phi} F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

A solução para estas equações correspondendo à um buraco negro dilatônico magneticamente carregado é escrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r \left(r - \frac{Q^2 e^{2\phi_0}}{M} \right) d\Omega_2^2, \quad (5.11)$$

onde M é a massa, Q é a carga magnética e ϕ_0 é o valor assintótico do campo do dilaon. Os campos do dilaon e intensidade que resolvem as equações de movimento são dados por

$$e^{-\phi} = e^{-2\phi_0} - \frac{Q^2}{Mr}, \quad (5.12)$$

$$F = Q e^{2\phi_0} \sin \theta d\theta \wedge d\phi, \quad (5.13)$$

onde introduzimos a 2-forma $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ que define o campo intensidade. Para $M^2 > 2Q^2 e^{2\phi_0}$ métrica tem somente um horizonte de eventos em $r = 2M$, que rodeia uma singularidade em $r_0 = Q^2 e^{2\phi_0} / M$ onde a área da esfera S^2 de raio constante vai para zero.

A solução eletricamente carregada está relacionada à solução magneticamente carregada através da transformação de dualidade, que agora na presença do campo do dilaon é escrita como

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} e^{-2\phi} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}, \\ \phi' &= -\phi. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pelo fato do termo eletromagnético

$$e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = e^{-2\phi} (E^2 - B^2) \quad (5.15)$$

se transformar em seu negativo via transformação de dualidade, para este caso também ela não é uma simetria da ação, mas sim das equações de movimento.

Na literatura podemos encontrar teorias com mais de um campo escalar que são invariantes sob certos tipos de transformações de dualidade. Vamos discutir agora o caso de uma ação de teoria de cordas efetiva à baixas energias, apresentada também em [13]. Para discutir o a transformação de dualidade basta considerar somente a parte bosônica desta ação, cujos campos à baixas energias são a métrica $G_{S\mu\nu}$, o campo tensorial antissimétrico $B_{\mu\nu}$, o campo do dílaton ϕ , e um único campo $U(1)$ de gauge A_μ , e essa ação é dada por

$$S = - \int d^4x \sqrt{-G_S} e^{-\phi} (-R_S - G_S^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{12} G_S^{\mu\mu'} G_S^{\nu\nu'} G_S^{\tau\tau'} H_{\mu\nu\tau} H_{\mu'\nu'\tau'} + \frac{1}{8} G_S^{\mu\mu'} G_S^{\nu\nu'} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'}), \quad (5.16)$$

onde $G_{S\mu\nu}$ é a métrica do modelo- σ , que se relaciona com a métrica de Einstein $G_{\mu\nu}$ através de

$$G_{S\mu\nu} = e^\phi G_{\mu\nu}, \quad (5.17)$$

e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.18)$$

$$H_{\mu\nu\rho} = (\partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (A_\mu F_{\nu\rho} + A_\nu F_{\rho\mu} + A_\rho F_{\mu\nu}). \quad (5.19)$$

Escrevendo a ação em termos da métrica de Einstein e deduzindo as equações de movimento temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\rho \phi - \frac{1}{4} e^{-2\phi} H_{\mu\nu\tau} H_\nu{}^{\rho\tau} - \frac{1}{4} e^{-\phi} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho = 0, \quad (5.20)$$

$$\nabla_\rho (e^{-2\phi} H^{\mu\nu\rho}) = 0, \quad (5.21)$$

$$\nabla_\mu (e^{-\phi} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} e^{-2\phi} H_{\rho\mu}{}^\nu F^{\rho\mu} = 0, \quad (5.22)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{1}{6} e^{-2\phi} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.23)$$

onde ∇_μ é a derivada covariante. A identidade de Bianchi para $H_{\mu\nu\rho}$ é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu H_{\nu\rho\sigma} = -\frac{3}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (5.24)$$

onde

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-G}} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (5.25)$$

Podemos usar a equação 5.23 para eliminar o termo $\nabla^\rho \nabla_\rho \phi$ em 5.20. Após isso as duas equações se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{G_{\mu\nu}}{12} e^{-2\phi} H_{\alpha\beta\rho} H^{\alpha\beta\rho} - \frac{G_{\mu\nu}}{16} F_{\rho\tau} F^{\rho\tau} + \frac{e^{-2\phi}}{4} H_{\mu\nu\tau} H_\nu{}^{\rho\tau} + \frac{e^{-\phi}}{4} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho. \quad (5.26)$$

Usando a segunda equação de movimento 5.21 podemos definir um campo escalar a tal que

$$H^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{\sqrt{-G}} e^{2\phi} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma a, \quad (5.27)$$

pois, usando $\partial_\rho (-G)^{-1/2} = -\Gamma_{\rho\mu}^\mu / \sqrt{-G}$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_\rho \left(-\frac{1}{\sqrt{-G}} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma \right) &= (\sqrt{-G})^{-1} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} (\Gamma_{\rho\mu}^\mu \partial_\sigma a - \partial_\rho \partial_\sigma) \\ &= (\sqrt{-G})^{-1} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\rho \partial_\sigma = 0. \end{aligned}$$

Com índices abaixados a expressão para 5.27 será

$$H_{\mu\nu\rho} = -\sqrt{-G} e^{2\phi} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\sigma a. \quad (5.28)$$

Agora usando $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{\epsilon}_{\nu\rho\sigma\delta} = -3! \delta_\delta^\mu$, podemos facilmente demonstrar que a identidade de Bianchi 5.24 se torna

$$\nabla^\mu (e^{2\phi} \nabla_\mu a) = \frac{1}{8} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (5.29)$$

Agora, definimos o campo complexo λ e os campos intensidades F_+ e F_- como

$$\lambda = a + i e^{-\phi} \equiv \lambda_1 + i \lambda_2, \quad (5.30)$$

$$F_\pm = F \pm i \tilde{F}. \quad (5.31)$$

Para reescrever as equações de movimento em termos das definições destes campos escrevemos alguns termos separadamente,

$$\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = -\frac{1}{2(\lambda_2)^2} \partial_\mu a \partial_\nu a + \frac{1}{4(\lambda_2)^2} (\partial_\mu \lambda \partial_\nu \bar{\lambda} + \partial_\nu \lambda \partial_\mu \bar{\lambda}), \quad (5.32)$$

$$\frac{1}{4} G_{\nu\gamma} e^{-2\phi} H_{\mu\rho\gamma} H^{\gamma\rho\tau} = -\frac{1}{2} e^{2\phi} G_{\mu\nu} \partial_\delta a \partial^\delta a + \frac{1}{2} e^{2\phi} \partial_\mu a \partial_\nu a, \quad (5.33)$$

$$-\frac{1}{12} G_{\mu\nu} e^{-2\phi} H_{\alpha\beta\rho} H^{\alpha\beta\rho} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} e^{2\phi} \partial_\delta a \partial^\delta a. \quad (5.34)$$

Utilizando estas expressões a equação 5.26 se torna

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \bar{\lambda} \partial_\nu \lambda + \partial_\nu \bar{\lambda} \partial_\mu \lambda}{4(\lambda_2)^2} + \frac{1}{4} \lambda_2 F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{16} \lambda_2 G_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (5.35)$$

Também calculando os termos de 5.23 separadamente temos

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = -\frac{1}{2i\lambda_2} (\nabla_\mu \nabla^\mu \lambda - \nabla_\mu \nabla^\mu \bar{\lambda}) - \frac{1}{4(\lambda_2)^2} (\nabla_\mu \lambda \nabla^\mu \lambda + \nabla_\mu \bar{\lambda} \nabla^\mu \bar{\lambda} - 2 \nabla_\mu \lambda \nabla^\mu \bar{\lambda}), \quad (5.36)$$

$$\frac{e^{-2\phi}}{6}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{4(\lambda_2)^2}(\nabla_\mu\lambda\nabla^\mu\lambda + \nabla_\mu\bar{\lambda}\nabla^\mu\bar{\lambda} + 2\nabla_\mu\lambda\nabla^\mu\bar{\lambda}). \quad (5.37)$$

Utilizando estas expressões a equação 5.23 é escrita como

$$-\frac{1}{2i(\lambda_2)^2}(\nabla_\mu\nabla^\mu\lambda - \nabla_\mu\nabla^\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{2(\lambda_2)^3}(\nabla_\mu\lambda\nabla^\mu\lambda + \nabla_\mu\bar{\lambda}\nabla^\mu\bar{\lambda}) + \frac{1}{8}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.38)$$

Da mesma forma, usando a definição 5.30, também podemos escrever a equação 5.22 como

$$-\frac{1}{2i(\lambda_2)^2}(\nabla_\mu\nabla^\mu\lambda + \nabla_\mu\nabla^\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{2(\lambda_2)^3}(\nabla_\mu\lambda\nabla^\mu\lambda - \nabla_\mu\bar{\lambda}\nabla^\mu\bar{\lambda}) + \frac{1}{8i}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.39)$$

Somando as equações 5.38 e 5.39, e usando $F_{+\mu\nu}F_-^{\mu\nu} = 0$, as duas equações de movimento se reduzem a

$$\frac{\nabla^\mu\nabla_\mu\lambda}{(\lambda_2)^2} + i\frac{\nabla_\mu\lambda\nabla^\mu\lambda}{(\lambda_2)^3} - \frac{i}{16}F_{-\mu\nu}F_-^{\mu\nu} = 0. \quad (5.40)$$

Usando a definição do campo $\tilde{F}$, e as equações de Maxwell a equação 5.21 se reduz a

$$\nabla_\mu(\lambda F_+^{\mu\nu} - \bar{\lambda} F_-^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.41)$$

E por fim a identidade de Bianchi para $\tilde{F}^{\mu\nu}$ passa a ser escrita como

$$\nabla_\mu(F_+^{\mu\nu} - F_-^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.42)$$

Note que, sob a transformação

$$\lambda \rightarrow \lambda + c, \quad (5.43)$$

as equações de movimento e as identidades de Bianchi são invariantes. Sob as transformações

$$\lambda \rightarrow -\frac{1}{\lambda}, \quad F_+ \rightarrow -\lambda F_+, \quad F_- \rightarrow -\bar{\lambda} F_-, \quad (5.44)$$

o campo λ_2 se transforma como $\lambda_2/\lambda\bar{\lambda}$. Podemos verificar que a equação 5.40 é invariante, e as equações 5.41 e 5.42 se transformam uma na outra. A equação 5.35 se transforma em si mesma mais um termo extra, dado por

$$-\frac{\lambda_1(\lambda_2)^2}{|\lambda|^2}(2F_{\mu\rho}\tilde{F}_\nu^\rho + 2F_{\nu\rho}\tilde{F}_\mu^\rho - G_{\mu\nu}F_{\rho\tau}\tilde{F}^{\rho\tau}). \quad (5.45)$$

Porém, em 4 dimensões, pode ser demonstrado que este termo é identicamente nulo. Portanto as transformações 5.43 e 5.44 são também uma transformação de simetria das equações de movimento. As duas transformações juntas geram o grupo $SL(2, \mathbf{R})$ sob o qual $\lambda \rightarrow (a\lambda + b)/(c\lambda + d)$ com $ad - bc = 1$, e $F_+ \rightarrow -(c\lambda + d)F_+$. O fato da identidade de Bianchi se transformar na equação de movimento após a

transformação 5.44 e vice-versa demonstra que esta teoria é invariante sob este tipo de transformação de dualidade.

Como vimos, as transformações 5.43 e 5.44 correspondem a uma simetria das equações de movimento. É interessante notar neste ponto que podemos deduzir as mesmas equações de movimento da ação

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} e^{4\phi} \partial_\mu a \partial^\mu a - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right). \quad (5.46)$$

A ação precisa ser escrita necessariamente sob essa forma, inclusive os coeficientes numéricos, para que a transformação de dualidade funcione.

Os campos do áxion e dÍlaton podem ser unidos para formar o campo escalar complexo chamado de axidÍlaton, que é escrito como

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \equiv a + ie^{-2\phi}. \quad (5.47)$$

Definimos agora $\lambda_2 = e^{-2\phi}$, com um fator de 2 no expoente somente para seguir a mesma notação de [13]. Podemos também definir os campos intensidades autodual e antiautodual, escritos respectivamente como

$$F_\pm \equiv F \pm i\tilde{F}. \quad (5.48)$$

Com um pouco de álgebra, podemos demonstrar que a ação 5.46 então toma a seguinte forma

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{|\partial\lambda|^2}{2\lambda_2^2} + \frac{i}{4} (\lambda F^2 - \bar{\lambda} \tilde{F}^2) \right). \quad (5.49)$$

Esta ação foi construída de forma a gerar as mesmas equações de movimento que as que resultam da ação 5.16, e com equações de movimento invariantes sob o grupo $SL(2, \mathbf{R})$.

5.3 O mecanismo atrator

Em teorias de supergravidade podemos tratar de características gerais do setor bosônico de modo independente da dimensão do espaçotempo. Focaremos então nossa atenção à uma teoria da gravidade acoplada à um conjunto de campos escalares sem massa, cuja parte bosônica da ação tem a forma

$$I[G_{\mu\nu}, \phi^i, A_\mu^I] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^Dx \sqrt{-G} [R - g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j - f_{AB}(\phi) F_{\mu\nu}^A F^{B\mu\nu} + V(\phi)], \quad (5.50)$$

onde $F_{\mu\nu}^A$, com $A = (0, \dots, N)$ são campos de gauge, ϕ^i com $i = (1, \dots, n)$ são os campos escalares e $V(\phi^i)$ é o potencial dos campos escalares. Os campos escalares

determinam as constantes de acoplamento de gauge e $g_{ij}(\phi)$ é a métrica no espaço dos campos escalares (modulis).

Focaremos nossa atenção no caso de buracos negros que são um exemplo de atrator estável, para teorias de supergravidade $N = 4$. Demonstraremos como funciona o mecanismo atrator usando um exemplo de [16], que consiste na parte bosônica da ação de uma teoria de supergravidade $N = 4$ sem o campo do áxion. A ação é escrita como

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \left(e^{-2\phi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e^{2\phi} \tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} \right) \right], \quad (5.51)$$

onde $F^{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$ são campos independentes e $\tilde{G}^{\mu\nu}$ é dado por

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-2\phi} \epsilon^{\mu\nu\lambda\delta} G_{\lambda\delta}. \quad (5.52)$$

Escrevendo a lagrangiana de matéria como

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left[-2g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} e^{-2\phi} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} e^{2\phi} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \tilde{G}_{\alpha\beta} \tilde{G}_{\mu\nu} \right) \right], \quad (5.53)$$

podemos de forma simples calcular sua variação com relação ao tensor métrico, o que nos fornece o tensor energia momento vezes o determinante da métrica

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} T_{\mu\nu}. \quad (5.54)$$

Logo, calculando

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left[g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left(e^{-2\phi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + e^{2\phi} \tilde{G}^{\rho\sigma} \tilde{G}_{\rho\sigma} \right) + \right. \\ \left. e^{-2\phi} F_{\mu\beta} F_\nu{}^\beta + e^{2\phi} \tilde{G}_{\mu\beta} \tilde{G}_\nu{}^\beta - 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right], \end{aligned} \quad (5.55)$$

nos permite identificar o tensor energia momento como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} \left[g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \left(e^{-2\phi} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + e^{2\phi} \tilde{G}^{\rho\sigma} \tilde{G}_{\rho\sigma} \right) + \right. \\ \left. e^{-2\phi} F_{\mu\beta} F_\nu{}^\beta + e^{2\phi} \tilde{G}_{\mu\beta} \tilde{G}_\nu{}^\beta - 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Para nossa análise devemos calcular as equações de movimento dos campos da teoria. Em detalhes, temos para o campo escalar

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = -\frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{-g} \partial_\mu \partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu (\sqrt{-g}) \right].$$

Usando A.11 esta parte da equação de movimento será

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) &= \frac{1}{4\pi} \left[\sqrt{-g} \partial_\rho \partial^\rho \phi + \sqrt{-g} \Gamma_{\nu\rho}^\nu \partial^\rho \phi \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sqrt{-g} \nabla_\rho \partial^\rho \phi. \end{aligned} \quad (5.57)$$

O outro termo da equação de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\partial \phi} = \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \left(-e^{-2\phi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e^{-2\phi} \tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} \right). \quad (5.58)$$

Após o cancelamento de $\sqrt{-g}$ a equação de movimento para o campo escalar será

$$\nabla_\rho \partial^\rho \phi = \frac{1}{4} \left(-e^{-2\phi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e^{-2\phi} \tilde{G}^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu} \right). \quad (5.59)$$

Da mesma forma calculamos a equação de movimento para o campo vetorial A^μ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\partial (\partial_\rho A^\gamma)} &= \frac{1}{32\pi} \sqrt{-g} e^{-2\phi} \frac{\partial}{\partial (\partial_\rho A^\gamma)} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] \\ &= \frac{1}{8\pi} \sqrt{-g} e^{-2\phi} F^\rho{}_\gamma. \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathcal{M}}}{\partial A^\gamma} = 0. \quad (5.61)$$

Logo, a equação de movimento para o campo vetorial A^μ é dada por

$$\partial_\rho \left(\sqrt{-g} e^{-2\phi} F^\rho{}_\gamma \right) = 0. \quad (5.62)$$

De modo similar podemos encontrar a equação de movimento para o campo B^μ associado a $\tilde{G}^{\mu\nu}$,

$$\partial_\rho \left(\sqrt{-g} e^{2\phi} \tilde{G}^\rho{}_\gamma \right) = 0. \quad (5.63)$$

Nossa intenção será resolver as equações de movimento de forma a obter uma expressão para o campo escalar escrita em termos das coordenadas do espaçotempo. Para resolvê-las é necessário conhecer a forma da métrica de forma que possamos incluir seu determinante nas equações 5.59, 5.62 e 5.63. O que faremos de fato é impôr um ansatz para a métrica de acordo com o nosso interesse. Como sabemos dos capítulos anteriores as soluções do tipo buraco negro com carga e sem momento angular são estáticas e esfericamente simétricas. Além do mais o mecanismo atrator desenvolve um papel fundamental para soluções extremas de Reissner-Nordstrom, e por esse motivo buscaremos uma solução deste tipo. Também podemos escolher um sistema de coordenadas conveniente que facilite nossos cálculos. Vamos considerar então que todas funções dependem das coordenadas isotrópicas $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. O ansatz para a métrica será escrito em termos de $U = U(r)$, de modo similar à 3.163, só que com a assinatura da métrica sendo $(+ - - -)$ de acordo com [16], ou seja

$$ds^2 = e^{2U} dt^2 - e^{-2U} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (5.64)$$

Impomos para nosso ansatz que campos de gauge tenham um componente cada, isto é $A^0 = \psi(r)$ e $B^0 = \chi(r)$. Impomos também que todos os campos dependam de somente duas funções H_1 e H_2 da seguinte forma

$$e^{2U} = H_1 H_2, \quad e^{2\phi} = \frac{H_2}{H_1}, \quad \psi = \pm \frac{1}{H_1}, \quad \chi = \pm \frac{1}{H_2}. \quad (5.65)$$

Após todas essas escolhas temos que verificar que elas satisfazem as equações de movimento. Logo,

$$\sqrt{-g} = e^{-2U} = H_1 H_2,$$

e, usando 5.62 e o fato de que A^μ só possui o componente temporal diferente de zero e que este é independente do tempo temos

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[\frac{H_1}{H_2} H_1 H_2 (\partial^\rho A_\gamma - \partial_\gamma A^\rho) \right] &= 0 \\ \partial_i \partial^i H_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Agora repetimos o processo para 5.63.

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[\frac{H_2}{H_1} H_1 H_2 (\partial^\rho B_\gamma - \partial_\gamma B^\rho) \right] &= 0 \\ \partial_i \partial^i H_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.67)$$

O operador $\partial_i \partial^i$ pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\partial_i \partial^i = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial^r),$$

o que nos permite reescrever a equação diferencial 5.66, sendo o prima a derivada com respeito à coordenada radial, como

$$H_1'' + \frac{2}{r} H_1' = 0. \quad (5.68)$$

Multiplicando a equação toda por r^2 temos

$$(r^2 H_1')' = 0, \quad (5.69)$$

que depois de integrada nos dá

$$H_1' = \frac{C_1}{r^2}. \quad (5.70)$$

Como $H_1' = -F_{tr}$, a constante de integração tem interpretação de carga elétrica. Integrando mais uma vez temos finalmente a solução de 5.66

$$H_1 = C_2 + \frac{|q|}{r}, \quad (5.71)$$

onde C_2 é outra constante de integração. Podemos repetir o mesmo procedimento para 5.67 e obteremos o mesmo tipo de solução, só que agora a primeira constante de integração terá interpretação de carga magnética. O que demonstramos então foi que as soluções de 5.66 e 5.67 são as funções harmônicas

$$H_1 = e^{-\phi_0} + \frac{|q|}{r}, \quad H_2 = e^{+\phi_0} + \frac{|p|}{r}, \quad (5.72)$$

onde ϕ_0 é o valor do campo de matéria no infinito.

Usando as duas funções harmônicas o campo do dÍlaton em 5.65 é dado por

$$e^{-2\phi} = \frac{e^{-\phi_0} + \frac{|q|}{r}}{e^{+\phi_0} + \frac{|p|}{r}}. \quad (5.73)$$

Para a geometria próxima ao horizonte de eventos, isto é, $r \rightarrow 0$, o valor do campo do dÍlaton é fixo e dado por

$$\left(e^{-2\phi}\right)_{fix} = \frac{|q|}{|p|}. \quad (5.74)$$

O que demonstramos é que o valor do campo escalar no infinito se torna irrelevante para a geometria próxima ao horizonte de eventos, e o valor do dÍlaton sobre o horizonte de eventos é único e depende somente das cargas elétrica e magnética do buraco negro.

Vamos agora resolver 5.59 para verificar se a forma do campo do dÍlaton encontrada acima é consistente com 5.65. Em formas diferenciais os campos intensidades associados aos campos A^μ e B^μ são respectivamente

$$F = d\psi \wedge dt, \quad \tilde{G} = d\chi \wedge dt. \quad (5.75)$$

Escrevendo os cálculos separadamente temos

$$\begin{aligned} d\psi &= \pm \partial_\mu \left(\pm \frac{1}{H_1} \right) dx^\mu = \mp \frac{\partial_\mu H_1}{H_1^2} dx^\mu = \mp \frac{H_1'}{H_1^2} \partial_i r dx^i \\ d\psi \wedge dt &= \mp \frac{H_1'}{H_1^2} \partial_i r dx^i \wedge dt = \pm \frac{H_1'}{H_1^2} \frac{\partial r}{\partial x^i} dt \wedge dx^i = F_{ti} dt \wedge dx^i \\ F_{ti} &= \pm \frac{H_1'}{H_1^2} \partial_i r. \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} d\chi &= \pm \partial_\mu \left(\pm \frac{1}{H_2} \right) dx^\mu = \mp \frac{\partial_\mu H_2}{H_2^2} dx^\mu = \mp \frac{H_2'}{H_2^2} \partial_i r dx^i \\ d\chi \wedge dt &= \mp \frac{H_2'}{H_2^2} \partial_i r dx^i \wedge dt = \pm \frac{H_2'}{H_2^2} \frac{\partial r}{\partial x^i} dt \wedge dx^i = \tilde{G}_{ti} dt \wedge dx^i \\ \tilde{G}_{ti} &= \pm \frac{H_2'}{H_2^2} \partial_i r. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Devido às nossas escolhas F_{ti} e $\tilde{G}_{ti}$ são os componentes não-nulos de F e $\tilde{G}$. Conhecendo agora a forma dos campos intensidades podemos resolver as equações de movimento do campo escalar. Considere separadamente os cálculos

$$e^{-2\phi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{H_1}{H_2} 2F^{ti} F_{ti} = 2g^{tt} \left[\frac{H_1}{H_2} \frac{H_1'}{H_1^2} \partial^i r \frac{H_1'}{H_1^2} \partial_i r \right] = 2g^{tt} \frac{(H_1')^2}{H_1^3 H_2} \partial^i r \partial_i r.$$

$$e^{2\phi}\tilde{G}^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{H_2}{H_1}2\tilde{G}^{ti}\tilde{G}_{ti} = 2g^{tt}\left[\frac{H_2}{H_1}\frac{H_2'}{H_2^2}\partial^i r\frac{H_2'}{H_2^2}\partial_i r\right] = 2g^{tt}\frac{(H_2')^2}{H_1H_2^3}\partial^i r\partial_i r.$$

Definindo $\partial_x r = r_x$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(-e^{-2\phi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e^{-2\phi}\tilde{G}^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(H_1')^2}{H_1^3H_2} - \frac{(H_2')^2}{H_1H_2^3}\right)(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)g^{tt} \\ &= \frac{1}{2}g^{tt}(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\left(\frac{(H_1')^2H_2^2 - H_1^2(H_2')^2}{H_1^3H_2^3}\right),\end{aligned}$$

$$\partial_i\partial^i\phi = \partial_i(\phi'\partial^i r) = [\phi''(\partial^i r)(\partial_i r) + \phi'\partial^i\partial_i r] = [(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\phi'' + (r_{xx} + r_{yy} + r_{zz})\phi'].$$

Logo, podemos reescrever a equao do campo escalar 5.59 da seguinte forma

$$(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\phi'' + (r_{xx} + r_{yy} + r_{zz})\phi' = \frac{1}{2}g^{tt}(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)\left(\frac{(H_1')^2H_2^2 - H_1^2(H_2')^2}{H_1^3H_2^3}\right).$$

Mas, $g^{tt} = H_1H_2$ e além disso

$$r_x^2 = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1, \quad r_{xx} + r_{yy} + r_{zz} = \frac{2}{r},$$

o que nos permite reescrever essa equação da seguinte forma

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' = \frac{1}{2}\left(\frac{(H_1')^2H_2^2 - H_1^2(H_2')^2}{H_1^3H_2^3}\right). \quad (5.78)$$

Podemos checar que a solução dessa equação é dada por

$$\phi = \frac{1}{2}\ln H_2(r) - \frac{1}{2}\ln H_1(r), \quad (5.79)$$

que pode facilmente ser colocado na forma apresentada em 5.67. Como conhecemos a forma funcional das funções harmônicas $H_1(r)$ e $H_2(r)$ podemos desenhar um gráfico do campo ϕ em função da coordenada radial, que é mostrado na figura 5.1.

Como podemos verificar pelo gráfico o campo escalar perde toda sua memória sobre suas condições iniciais no infinito, fazendo com que seu valor sobre o horizonte de eventos do buraco negro seja fixo, e dependente somente das cargas do buraco negro, o que está de acordo com 5.74. Este é somente um dos exemplos apresentados em [16] cuja ação corresponde à parte bosônica de uma teoria de supergravidade para $N = 4$. Também em [16] há um exemplo para uma teoria de supergravidade $N = 8$, cuja ação contém um número maior de campos escalares. O mecanismo atrator para este caso se faz presente em para todos os campos escalares da teoria, e novamente os valores que eles adquirem sobre o horizonte de eventos dependem somente das cargas do buraco negro, não dependendo de suas condições no infinito, o que reforça a idéia do teorema “no hair” discutido anteriormente.

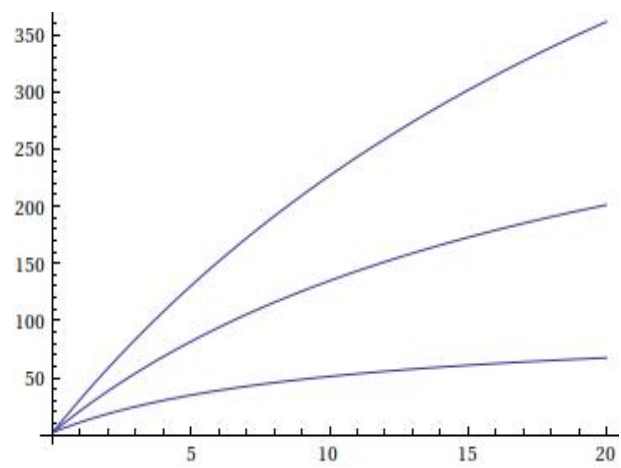


Figura 5.1: Mecanismo atrator para $|q|/|p| = 2$. Eixo vertical: $e^{2\phi}$; eixo horizontal: r

Capítulo 6

Função entropia de Sen

Neste capítulo revisaremos a solução de buracos negros extremos em 4 dimensões com geometria próxima ao horizonte de eventos $AdS_2 \times S^2$ em teorias de gravidade acopladas à campos escalares e vetoriais. Apresentaremos uma expressão para a chamada função entropia de Sen. Basicamente, definiremos uma função dependente dos campos e das cargas da teoria, dada por $\mathcal{E}$, e demonstraremos que quando tomada sob o horizonte de eventos ela é de fato a mesma entropia deduzida em [18], chamada de entropia de Wald. Ao se extremizar essa função obtemos as chamadas equações atratoras, que permitem determinar os valores dos campos escalares sobre o horizonte de eventos, e também podemos tomar o valor dessa função sobre o horizonte de eventos de forma a se obter a função entropia do buraco negro. Como exemplo aplicaremos esse formalismo para o caso da solução de Reissner-Nordstrom extrema em 4 dimensões para demonstrar sua validade. Repetiremos o mesmo procedimento para uma teoria de gravidade acopladas a um conjunto de campos escalares e campos de gauge em 5 dimensões para poder demonstrar a generalidade da teoria, bem como introduzir as técnicas utilizadas para se estudar o comportamento dos campos escalares para a geometria próxima ao horizonte de eventos.

6.1 Definição de buracos negros extremos

No capítulo 2 chamamos a atenção ao fato de que, em 4 dimensões, a solução extrema de Reissner-Nordstrom, para o qual os dois horizontes de eventos coincidem, ocorria exatamente quando as cargas do buraco negro eram iguais à massa, sendo essa a chamada condição BPS. De fato, essa é uma característica do espaço quadridimensional, e, em teorias com dimensões mais altas a solução extrema é mais geral, e não ocorre necessariamente quando a massa é igual à carga. Nesta seção revisaremos alguns detalhes referentes a buracos negros extremos em 4 dimensões

e calcularemos sua entropia. Seguiremos a mesma convenção de unidades de [17], onde $16\pi G_N$ é multiplicado somente pelo escalar de curvatura e não multiplica o termo eletromagnético na ação de Einstein-Maxwell.

A teoria usual de Einstein-Maxwell em 4 dimensões é dada por

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G_N} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (6.1)$$

Os símbolos de Cristoffel, tensor de Riemann e de Ricci, e o escalar de curvatura são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_{\nu} g_{\sigma\rho} + \partial_{\rho} g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} g_{\nu\rho}), \\ R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} &= \partial_{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\tau\rho}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\tau} - \Gamma_{\tau\sigma}^{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau}, \\ R_{\nu\sigma} &= R^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma}, \quad R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}. \end{aligned}$$

A solução de Reissner-Nordstrom para essa teoria é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \left(1 - \frac{b}{\rho}\right) d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \left(1 - \frac{b}{\rho}\right)} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.2)$$

$$F_{\rho\tau} = \frac{q}{4\pi\rho^2}, \quad F_{\theta\phi} = \frac{p}{4\pi} \sin \theta. \quad (6.3)$$

Separadamente, podemos fazer o produto dos dois termos em parênteses e comparar com a solução de Reissner-Nordstrom usual,

$$\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) \left(1 - \frac{b}{\rho}\right) = 1 - \frac{(a+b)}{\rho} + \frac{ab}{\rho^2} = \left(1 - \frac{2G_N M}{\rho} + \frac{G_N Q^2}{4\pi\rho^2}\right).$$

Logo, para $Q^2 = q^2 + p^2$, temos

$$a + b = 2G_N M, \quad ab = \frac{G_N(q^2 + p^2)}{4\pi}$$

onde q e p são as cargas elétrica e magnética do buraco negro e M é sua massa. Para $a > b$ os horizontes interno e externo do buraco negro se encontram respectivamente em $\rho = b$ e $\rho = a$. O limite extremo corresponde a escolher a e b de forma que os horizontes de eventos interno e externo coincidam, ou seja

$$a = b = \sqrt{\frac{G_N(q^2 + p^2)}{4\pi}}. \quad (6.4)$$

Logo, para essa escolha, a massa do buraco negro extremo é dada por

$$M^2 = \frac{1}{4\pi G_N} (q^2 + p^2), \quad (6.5)$$

e a solução extrema pode ser reescrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 d\tau^2 + \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^{-2} d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.6)$$

Para estudar a geometria do buraco negro próxima ao horizonte de eventos definimos as coordenadas

$$t \equiv \frac{\lambda\tau}{a^2}, \quad r \equiv \alpha^{-1}(\rho - a), \quad (6.7)$$

onde α é uma constante. Usando essa definição a métrica extrema e os campos intensidades podem ser reescritos como

$$ds^2 = - \frac{r^2 a^4}{(a + \lambda r)^2} dt^2 + \frac{(a + \lambda r)^2}{r^2 a^4} dr^2 + (a + \lambda r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.8)$$

$$F_{rt} = \frac{qa^2}{4\pi(a + \lambda r)^2}, \quad F_{\theta\phi} = \frac{p}{4\pi} \sin \theta. \quad (6.9)$$

O limite correspondente à geometria próxima ao horizonte do buraco negro é alcançada quando $\alpha \rightarrow 0$, como pode ser checado pelas equações 6.8 e 6.9, e nesse limite

$$ds^2 = a^2 \left(-r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{a^4 r^2} \right) + a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.10)$$

$$F_{rt} = \frac{q}{4\pi a^2}, \quad F_{\theta\phi} = \frac{p}{4\pi} \sin \theta. \quad (6.11)$$

A métrica 6.10 nos mostra que a parte espacial da geometria próxima ao horizonte de eventos é AdS_2 e a parte angular é simplesmente S^2 . Por isso dizemos que a geometria do buraco negro em 4 dimensões próxima ao horizonte de eventos possui invariância $AdS_2 \times S^2$. A área do buraco negro corresponde a área da superfície do horizonte de eventos, isto é

$$A_{BH} = \int \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} d\theta d\phi = a^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$A_{BH} = 4\pi a^2 = G_N(q^2 + p^2). \quad (6.12)$$

Logo a entropia do buraco negro para a solução de Reissner-Nordstrom é dada por

$$S_{BH} = \frac{A_{BH}}{4G_N} = \frac{1}{4}(q^2 + p^2). \quad (6.13)$$

Podemos agora enumerar algumas características dessa métrica.

1. No limite $\lambda \rightarrow 0$ temos $\rho \rightarrow a$, logo 6.10 descreve a configuração do buraco negro próxima ao horizonte de eventos;
2. Para qualquer λ , 6.10 descreve uma solução clássica exata, então o limite $\lambda \rightarrow 0$ descreve uma solução clássica exata para todo valor finito de r , não somente para r

pequeno;

3. O espaço tempo de 6.10 é $AdS_2 \times S^2$, sendo (θ, ϕ) a esfera usual em duas dimensões, e (r, t) o espaço AdS_2 ;

4. A métrica 6.10 tem uma isometria $SO(3)$ atuando na esfera S^2 , e uma isometria $SO(2, 1)$ atuando no espaço AdS_2 que não estava presente na solução completa do buraco negro, a qual é gerada por

$$L_1 = \partial_t, \quad L_0 = t\partial_t - r\partial_r, \quad L_{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} + t^2 \right) - tr\partial_r. \quad (6.14)$$

Podemos mostrar também que os campos de gauge são invariantes sob a transformação $SO(2, 1) \times SO(3)$. Todas soluções conhecidas de buracos negros extremos esfericamente simétricos em quatro dimensões tem geometria $AdS_2 \times S^2$ próxima ao horizonte de eventos e uma isometria associada $SO(2, 1) \times SO(3)$.

6.2 Função Entropia para buracos negros esfericamente simétricos em D=4

Consideremos a teoria quadridimensional da gravidade acoplada a um conjunto de campos abelianos $A_\mu^{(i)}$ e campos escalares neutros ϕ^s . A lagrangiana da teoria é dada por $\sqrt{-g}\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é construída a partir dos campos escalares ϕ^s , dos campos intensidades $F_{\mu\nu}^{(i)} \equiv \partial_\mu A_\nu^{(i)} - \partial_\nu A_\mu^{(i)}$, da métrica inversa $g^{\mu\nu}$, do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ e de derivadas covariantes de todos esses campos. Consideramos uma solução de buracos negros extremos esfericamente simétricos cuja geometria próxima ao horizonte de eventos possui invariância $SO(2, 1) \times SO(3)$. A configuração de campo mais geral consistente com essa isometria é da seguinte forma

$$ds^2 = v_1 \left(-r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{a^4 r^2} \right) + v_2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ \phi_s = u_s, \quad F_{rt}^{(i)} = e_i, \quad F_{\theta\phi}^{(i)} = \frac{p_i}{4\pi} \sin \theta, \quad (6.15)$$

onde v_1, v_2, u_s, e_i e p_i são constantes. Os elementos do tensor métrico e os elementos do tensor métrico inverso são dados por

$$g_{tt} = -v_1 r^2, \quad g_{rr} = \frac{v_1}{r^2}, \quad g_{\theta\theta} = v_2, \quad g_{\phi\phi} = v_2 \sin^2 \theta \\ g^{tt} = -\frac{1}{v_1 r^2}, \quad g^{rr} = \frac{r^2}{v_1}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{v_2}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{v_2 \sin^2 \theta}. \quad (6.16)$$

Os símbolos de Cristoffel não nulos podem ser facilmente calculados e expressos por

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{tt}^r = r^3, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (6.17)$$

Usando as expressões acima podemos encontrar os componentes do tensor de Riemann,

$$R_{trtr} = v_1, \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = v_2 \sin^2 \theta, \quad (6.18)$$

onde os outros componentes são encontrados usando a antissimetria deste tensor pela troca do primeiro com o segundo e do terceiro com o quarto índice. Todos esses casos podem ser reproduzidos se utilizarmos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -v_1^{-1}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = rt \\ R_{mnpq} &= v_2^{-1}(g_{mp}g_{nq} - g_{mq}g_{np}), \quad m, n, p, q = \theta, \phi \end{aligned} \quad (6.19)$$

Devido a forma geral de 6.15 segue-se que as derivadas covariantes dos campos escalares ϕ_s , dos campos intensidades $F_{\mu\nu}^{(i)}$ e do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ são nulas para a geometria próxima ao horizonte de eventos. Por considerações de simetria segue-se que as contribuições para as equações de movimento de qualquer termo em $\mathcal{L}$ que envolva derivadas covariantes dos campos intensidades, dos escalares ou do tensor de Riemann são identicamente nulos para essa métrica e nós podemos restringir nossa atenção a somente aqueles termos os quais não envolvam derivadas covariantes destes campos.

Denotemos por $f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$ a densidade de lagrangiana integrada nas coordenadas θ e ϕ , isto é, a densidade de lagrangiana para a geometria próxima ao horizonte de eventos

$$f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) = \int d\theta d\phi \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (6.20)$$

As equações de movimento para o campo escalar e para a métrica correspondem a extremizar f com respeito as variáveis $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\frac{\partial f}{\partial u_s} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0. \quad (6.21)$$

As equações para os campos de gauge e as identidades de Bianchi tomam a seguinte forma

$$\partial_r \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta F_{rt}^{(i)}} \right) = 0, \quad \partial_r F_{\theta\phi}^{(i)} = 0, \quad (6.22)$$

onde $\mathcal{S}$ é a ação. Essas equações são automaticamente satisfeitas pela métrica próxima ao horizonte de eventos. Integrando essas equações em θ e ϕ temos

$$\int d\theta d\phi \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta F_{rt}^{(i)}} = a_i, \quad \int d\theta d\phi F_{\theta\phi}^{(i)} = b_i \quad (6.23)$$

onde a_i , b_i são constantes independentes de r . Para a geometria próxima ao horizonte de eventos temos $F_{rt}^{(i)} = e_i$ e $F_{\theta\phi}^{(i)} = \frac{p_i}{4\pi} \sin \theta$, logo

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta F_{rt}^{(i)}} = \sqrt{-g} F^{(i)rt} = \frac{\partial}{\partial F_{rt}^{(i)}} [\sqrt{-g} \mathcal{L}]$$

$$\begin{aligned}
a_i &= \int d\theta d\phi \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta F_{rt}^{(i)}} = \int d\theta d\phi \frac{\partial}{\partial F_{rt}^{(i)}} [\sqrt{-g} \mathcal{L}] \\
\Rightarrow a_i &= \frac{\partial}{\partial e_i} \left[\int d\theta d\phi \sqrt{-g} \mathcal{L} \right] = \frac{\partial f}{\partial e_i}, \\
b_i &= \int d\theta d\phi \frac{p_i}{4\pi} \sin \theta = p_i.
\end{aligned}$$

Então, as constantes a_i e b_i são dadas por

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial e_i}, \quad b_i = p_i. \quad (6.24)$$

Visto de um observador no infinito, a_i e b_i são as integrais do fluxo elétrico e magnético, isto é

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial e_i}, \quad b_i = p_i, \quad (6.25)$$

logo, q_i é associado a carga elétrica e p_i é associado a carga magnética do buraco negro. Fixando $\vec{p}$ e $\vec{q}$ temos um conjunto de três equações

$$\frac{\partial f}{\partial u_s} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial e_i} = q_i \quad (6.26)$$

e três variáveis $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{e}$, de forma que o sistema é completamente determinado.

Vamos agora definir uma nova função,

$$\mathcal{E}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{q}, \vec{p}) \equiv 2\pi[e_i q_i - f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})]. \quad (6.27)$$

As equações 6.26 podem ser reproduzidas por

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_s} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e_i} = 0, \quad (6.28)$$

de forma que os parâmetros próximos ao horizonte de eventos podem ser determinados extremizando-se uma única função $\mathcal{E}$. A fórmula geral para a entropia na presença de termos com derivadas mais altas é discutida em [18], [19], [20], [21], e apresentamos o resultado aqui:

$$S_{BH} = -8\pi \int_H d\theta d\phi \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta R_{trtr}}. \quad (6.29)$$

Para calcular a quantidade $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta R_{trtr}}$ precisamos seguir o seguinte procedimento:

1. devemos expressar $\mathcal{S}$ em termos das derivadas covariantes dos campos simetrizadas substituindo combinações antissimétricas de derivadas covariantes em termos do tensor de Riemann, e então
2. devemos tratar $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ como variáveis independentes.

No nosso caso, as derivadas covariantes de todos os tensores são nulas, então

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta R_{trtr}} = \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{trtr}}, \quad (6.30)$$

e em $\mathcal{L}$ nós precisamos manter somente termos que não envolvem derivadas covariantes, e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$ é definido através de

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} \delta R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (6.31)$$

Substituindo 6.30 em 6.29 temos

$$\begin{aligned} S_{BH} &= -8\pi \int_H d\theta d\phi \sqrt{-g_{tt}g_{rr}} \sqrt{-g_{tt}g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}} \\ &\Rightarrow S_{BH} = 8\pi g_{tt}g_{rr} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}} A_H \\ &\Rightarrow S_{BH} = 8\pi(-v_1 r^2) \left(\frac{v_1}{r^2}\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}} A_H \\ &\Rightarrow S_{BH} = -8\pi v_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}} A_H. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Para expressarmos essa entropia em termos da função f definida anteriormente, denotemos por $f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$ uma expressão similar ao lado direito de 6.20 exceto pelo fato de que cada fator de R_{rtrt} em $\mathcal{L}$ é multiplicado por um fator de λ . Então é válida a igualdade

$$\left. \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int d\theta d\phi \sqrt{-g} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}}, \quad (6.33)$$

onde os índices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são somados sobre r e t. Fazendo considerações de simetria o termo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}}$ é proporcional a $(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})$. De fato, podemos escrevê-lo com a normalização correta como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}} = -v_1^2 (g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}}. \quad (6.34)$$

Usando este resultado e 6.19 podemos reescrever 6.33 como

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} &= \int d\theta d\phi \sqrt{-g} [-v_1^{-1} (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})] [-v_1^2 (g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}} \\ &= \int d\theta d\phi \sqrt{-g} [v_1^2 (g_{\alpha\gamma}g^{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}g^{\beta\delta} - \delta_\delta^\gamma \delta_\gamma^\delta - \delta_\gamma^\delta \delta_\delta^\gamma + g_{\alpha\delta}g^{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}g^{\beta\gamma})] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}}. \end{aligned}$$

Lembrando que os índices contraídos α, β, γ , e δ são somados em r e t, e que $\sqrt{-g} = v_1 \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}$ temos

$$\left. \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 4v_1^2 \int d\theta d\phi \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{rtrt}}.$$

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{trt}}$ é independente de θ e ϕ temos

$$\left. \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 4v_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{trt}} A_H. \quad (6.35)$$

Substituindo 6.35 em 6.32, a entropia do buraco negro pode ser reescrita como

$$S_{BH} = -2\pi \left. \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1}. \quad (6.36)$$

O lado direito dessa expressão deve ser expresso em termos de derivadas de f com respeito a $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{e}$ e $\vec{p}$. Como $\mathcal{L}$ é invariante sob reparametrização de r e t cada fator R_{trt} em f_λ deve aparecer na combinação $\lambda g^{rr} g^{tt} R_{trt} = \lambda \left(-\frac{1}{v_1 r^2} \right) (v_1) = -\lambda v_1^{-1}$, cada fator de $F_{rt}^{(i)}$ deve aparecer na combinação $\sqrt{-g^{tt} g^{rr}} F_{rt}^{(i)} = e_i v_1^{-1}$, cada fator de $F_{\theta\phi}^{(i)} = \frac{p_i}{4\pi}$ e $\phi_s = u_s$ deve aparecer sem acompanhar nenhuma potência de v_1 . A contribuição de todos os termos os quais envolvem derivadas covariantes de $F_{\mu\nu}^{(i)}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ou ϕ_s são nulas. A outra dependência em v_1 de $f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$ vem de $\sqrt{-g} \propto v_1$. Então podemos escrever

$$f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) = v_1 g(\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{p}, \lambda v_1^{-1}, \vec{e} v_1^{-1}) \quad (6.37)$$

para alguma função g . Então é válida a igualdade

$$\lambda \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} + v_1 \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial v_1} + e_i \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial e_i} - f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) = 0. \quad (6.38)$$

Se para esta igualdade impormos que $\lambda = 1$, e usarmos a equação de movimento para v_1 , isto é, $\frac{\partial f}{\partial v_1} = 0$, a igualdade acima nos dá como resultado

$$\left. \frac{\partial f_\lambda(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = -e_i \frac{\partial f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial e_i} + f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}). \quad (6.39)$$

Com este resultado podemos escrever 6.36 como

$$S_{BH} = 2\pi \left(e_i \frac{\partial f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})}{\partial e_i} - f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) \right). \quad (6.40)$$

Usando $\frac{\partial f}{\partial e_i} = q_i$, a quantidade $\frac{S_{BH}}{2\pi}$ pode ser considerada como a transformada de Legendre da função $f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$ com respeito as variáveis e_i depois de eliminarmos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ através de suas equações de movimento: $\frac{\partial f}{\partial u_s} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial v_i} = 0$. Finalmente, usando 6.27, podemos expressar a entropia do buraco negro como

$$S_{BH} = \mathcal{E}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{q}, \vec{p}), \quad (6.41)$$

no extremo

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_s} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e_i} = 0. \quad (6.42)$$

No capítulo anterior vimos que os valores dos campos escalares de um buraco negro sobre o horizonte de eventos são independentes de seus valores vistos por um observador no infinito. O formalismo desenvolvido aqui nos permite encontrar os valores dos campos escalares através de 6.42 extremizando-se a função entropia dada por 6.27. Este formalismo se tornou uma ferramenta extra para o estudo do mecanismo atrator, que também pode ser investigado através do método do potencial efetivo, [22], que se baseia em encontrar as equações de movimento dos campos escalares e encontrar as condições satisfeitas pelo potencial efetivo de modo que o fenômeno atrator ocorra. Além disso, a entropia do buraco negro é dada pelo valor da função $\mathcal{E}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{q}, \vec{p})$ sobre o horizonte de eventos. Essa análise foi baseada nas equações de movimento e não faz uma referência direta sobre o uso de supersimetria ou uso de estruturas específicas de termos de derivadas de ordem mais altas.

Para verificarmos a validade destes resultados consideremos como exemplo o caso de um buraco negro de Reissner-Nordström extremo na teoria de Einstein-Maxwell, que é descrita pela ação 6.1. A métrica mais geral que contém invariância $SO(2, 1) \times SO(3)$ é dada por

$$ds^2 = a^2 \left(-r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{a^4 r^2} \right) + a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.43)$$

$$F_{rt} = \frac{q}{4\pi a^2}, \quad F_{\theta\phi} = \frac{p}{4\pi} \sin \theta. \quad (6.44)$$

Substituindo os resultados 6.1 e 6.19 podemos encontrar a função f usando 6.20. Para essa métrica $\sqrt{-g} = v_1 v_2 \sin \theta$, logo

$$f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) = \int d\theta d\phi v_1 v_2 \sin \theta \left[\frac{1}{16\pi G_N} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right],$$

onde deixamos a notação geral $f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$ por comodidade, em vez da notação que deveria levar em conta que o campo escalar é constante sobre todo o espaço, $f(\vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$. Os índices contraídos assumem valores r, t, θ, ϕ , e expandindo os termos separadamente temos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} &= g^{tt} g^{rr} (R_{rttr} + R_{trtr}) + g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} (R_{\theta\phi\theta\phi} + R_{\phi\theta\phi\theta}) \\ &= \left(-\frac{1}{v_1 r^2} \right) \left(\frac{r^2}{v_1} \right) 2v_1 + \left(\frac{1}{v_2} \right) \left(\frac{1}{v_2 \sin^2 \theta} \right) 2v_2 \sin^2 \theta \\ &= -\frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2}, \\ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (F_{rt} F^{rt} + F_{tr} F^{tr}) + \frac{1}{4} (F_{\theta\phi} F^{\theta\phi} + F_{\phi\theta} F^{\phi\theta}) \\ &= \frac{1}{2} g^{tt} g^{rr} (F_{rt})^2 + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g^{\phi\phi} (F_{\theta\phi})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{v_1 r^2}\right) \left(\frac{r^2}{v_1}\right) (e)^2 + \left(\frac{1}{v_2}\right) \left(\frac{1}{v_2 \sin^2 \theta}\right) \left(\frac{p}{4\pi} \sin \theta\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{v_1^2} e^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{v_2^2} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^2.
\end{aligned}$$

Com esses resultados temos

$$\begin{aligned}
f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) &= \int d\theta d\phi v_1 v_2 \sin \theta \left[\frac{1}{16\pi G_N} \left(-\frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{v_1^2} e^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{v_2^2} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^2 \right] \\
\Rightarrow f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) &= 4\pi v_1 v_2 \left[\frac{1}{16\pi G_N} \left(-\frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{v_1^2} e^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{v_2^2} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^2 \right]. \quad (6.45)
\end{aligned}$$

Com este resultado podemos escrever a função entropia 6.27 como

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(v_1, v_2, e, q, p) &\equiv 2\pi(eq - f) \\
&= 2\pi \left[qe - \frac{1}{4G_N} (2v_1 - 2v_2) - 2\pi v_1^{-1} v_2 e^2 + 2\pi v_1 v_2^{-1} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^2 \right]. \quad (6.46)
\end{aligned}$$

No extremo temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} &= 2\pi \left[-\frac{1}{4G_N} (2) + 2\pi v_1^{-2} v_2 e^2 + 2\pi v_2^{-1} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^2 \right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_2} &= 2\pi \left[-\frac{1}{4G_N} (-2) - 2\pi v_1^{-1} v_2 e^2 - 2\pi v_1 v_2^{-2} \left(\frac{p}{4\pi}\right)^2 \right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e} &= 2\pi [q - 4\pi v_1^{-2} v_2 e] = 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$v_1 = v_2 = G_N \frac{q^2 + p^2}{4\pi}, \quad e = \frac{q}{4\pi} \quad (6.47)$$

Substituindo esses resultados na expressão para a entropia 6.27 podemos checar que a função entropia no horizonte de eventos é dada por

$$\mathcal{E} = S_{BH} = \frac{1}{4}(q^2 + p^2). \quad (6.48)$$

Essa expressão é idêntica à 6.13, o que demonstra que este formalismo está de fato correto.

6.3 $AdS_2 \times S^3$

Vamos agora aplicar o formalismo desenvolvido na seção anterior para uma teoria gravitacional em 5-dimensões na presença de um potencial para o campo escalar.

Considere a ação mais geral de uma teoria 5-dimensional da gravidade acoplada a um conjunto de campos escalares sem massa e campos vetoriais

$$I[G_{\mu\nu}, \phi^i, A_\mu^I] = \frac{1}{\kappa^2} \int_M d^5x \sqrt{-G} [R - g_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j - f_{AB} F_{\mu\nu}^A F^{B\mu\nu} + V(\phi^i)] \quad (6.49)$$

onde $F_{\mu\nu}^A$ com $A = (0, \dots, N)$ são os campos de gauge, $\phi \equiv (\phi^i)$ com $i = (1, \dots, N)$ são os campos escalares, $V(\phi^i)$ é o potencial dos campos escalares e $\kappa^2 = 16\pi G_N$, e $g_{ij}(\phi)$ é a métrica no espaço dos moduli. Similarmente às seções anteriores podemos encontrar as equações de movimento para os campos da teoria. Elas são:

1. Para a métrica

$$R_{\mu\nu} - g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j = f_{AB} \left(2F_{\mu\lambda}^A F_{\nu}^{B\lambda} - \frac{1}{3} G_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda}^A F^{B\alpha\lambda} \right) - \frac{1}{3} G_{\mu\nu} V(\phi), \quad (6.50)$$

2. Para o moduli

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_\mu (\sqrt{-G} g_{ij} \partial^\mu \phi^j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial \phi^i} F_{\mu\nu}^A F^{B\mu\nu} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial \phi^i} \partial_\mu \phi^m \partial^\mu \phi^n - \frac{\partial V(\phi^i)}{\partial \phi^i} \right), \quad (6.51)$$

3. Para os campos de gauge

$$\partial_\mu [\sqrt{-G} (f_{AB} F^{B\mu\nu})] = 0. \quad (6.52)$$

Da mesma forma que no capítulo anterior, vamos considerar o ansatz para a métrica do espacotempo 5-dimensional estático e esfericamente simétrico

$$ds^2 = -a(r)^2 dt^2 + a(r)^{-2} dr^2 + b(r)^2 d\Omega_3^2, \quad (6.53)$$

onde $d\Omega_3^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2$, com os seguintes intervalos de variação, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$. As identidades de Bianchi são escritas como

$$F_{[\mu\nu;\lambda]}^A = 0. \quad (6.54)$$

A forma do campo intensidade que resolve as equações de movimento e as identidades de Bianchi

$$F^A = \frac{1}{b^3} f^{AB} Q_B dt \wedge dr, \quad (6.55)$$

onde Q_A são as constantes que determinam as cargas elétricas carregadas pelo campo de gauge F_A , e f_{AB} é o inverso de f^{AB} , encontrado pela relação

$$f_{AB} f^{BC} = \delta_A^C. \quad (6.56)$$

A métrica mais geral próxima ao horizonte de eventos que contém a simetria $AdS_2 \times S^3$ é escrita como

$$ds^2 = v_1 \left(\rho^2 d\tau^2 + \frac{1}{\rho^2} d\rho^2 \right) + v_2 d\Omega_3^2 \quad (6.57)$$

onde $d\Omega_3^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2$. Na seção anterior encontramos uma forma de escrever todos os componentes do tensor de Riemann de uma forma compacta, 6.19. Apesar de estarmos tratando agora de uma teoria que contém uma dimensão angular a mais ainda assim podemos expressar os componentes do tensor de Riemann de forma similar à 6.19, ou seja

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -v_1^{-1}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = rt \\ R_{mnpq} &= v_2^{-1}(g_{mp}g_{nq} - g_{mq}g_{np}), \quad m, n, p, q = \theta, \phi, \psi. \end{aligned} \quad (6.58)$$

O ansatz para o campo intensidade que utilizaremos será

$$F^A = e^A d\tau \wedge d\rho. \quad (6.59)$$

Separadamente, os termos da lagrangiana expandidos nos índices $\tau, \rho, \theta, \phi, \psi$

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R_{\nu\alpha\mu\beta} &= g^{\tau\tau}g^{\rho\rho}(R_{\rho\tau\rho\tau} + R_{\tau\rho\tau\rho}) + g^{\theta\theta}g^{\phi\phi}(R_{\theta\phi\theta\phi} + R_{\phi\theta\phi\theta}) \\ &\quad + g^{\theta\theta}g^{\psi\psi}(R_{\theta\psi\theta\psi} + R_{\psi\theta\psi\theta}) + g^{\phi\phi}g^{\psi\psi}(R_{\psi\phi\psi\phi} + R_{\phi\psi\phi\psi}) \\ &= \left(-\frac{1}{v_1\rho^2}\right)\left(\frac{\rho^2}{v_1}\right)2v_1 + \left(\frac{1}{v_2}\right)\left(\frac{1}{v_2\sin^2\theta}\right)2v_2\sin^2\theta + \\ &\quad \left(\frac{1}{v_2}\right)\left(\frac{1}{v_2\cos^2\theta}\right)2v_2\cos^2\theta + \left(\frac{1}{v_2\sin^2\theta}\right)\left(\frac{1}{v_2\cos^2\theta}\right)2v_2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= -\frac{2}{v_1} + \frac{6}{v_2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}f_{AB}F_{\mu\nu}^AF^{B\mu\nu} = \frac{1}{4}f_{AB}(F_{\rho\tau}^AF^{B\rho\tau} + F_{\tau\rho}^AF^{B\tau\rho})$$

$$= \frac{1}{2}g^{\tau\tau}g^{\rho\rho}f_{AB}e^Ae^B = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{v_1\rho^2}\right)\left(\frac{\rho^2}{v_1}\right)f_{AB}e^Ae^B = -2\frac{1}{v_1^2}f_{AB}e^Ae^B$$

O determinante da métrica é dado por $\sqrt{-G} = v_1(v_2)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$, logo a expressão para a função f , dada por 6.20 integrada em relação à coordenada angular extra a mais, é escrita como

$$\begin{aligned} f(u^i, v_1, v_2, e^A) &= \frac{1}{\kappa^2} \int d\theta d\phi d\psi v_1(v_2)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta \left[\left(-\frac{2}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{v_1^2}f_{AB}e^Ae^B + V(\phi) \right] \\ f(u^i, v_1, v_2, e^A) &= \frac{2\pi^2}{\kappa^2} \left[-2(v_2)^{\frac{1}{2}} + 6v_1(v_2)^{\frac{1}{2}} + 2(v_2)^{\frac{3}{2}}f_{AB}e^Ae^B + v_1(v_2)^{\frac{1}{2}}V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

A função entropia, dada por 6.27, será

$$\mathcal{E}(u^i, v_1, v_2, e^A, Q_A) = 2\pi \left[Q_A e^A - \frac{2\pi^2}{\kappa^2} \left[-2(v_2)^{\frac{1}{2}} + 6v_1(v_2)^{\frac{1}{2}} + 2(v_2)^{\frac{3}{2}} f_{AB} e^A e^B + v_1(v_2)^{\frac{1}{2}} V(\phi) \right] \right]. \quad (6.61)$$

As equações que extremizam a entropia, dadas por 6.42, serão

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = \frac{4\pi^3}{\kappa^2} \left[6\sqrt{v_2} - 2\frac{(v_2)^{\frac{3}{2}}}{v_1^2} f_{AB} e^A e^B + (v_2)^{\frac{3}{2}} V(\phi) \right] = 0$$

$$6v_1^2 - 2v_2 f_{AB} e^A e^B + v_1^2 v_2 V(\phi) = 0, \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = \frac{4\pi^3}{\kappa^2} \left[-3(v_2)^2 + 3\frac{v_1}{\sqrt{v_2}} + 3\frac{\sqrt{v_2}}{v_1} f_{AB} e^A e^B + \frac{3}{2} v_1 \sqrt{v_2} V(\phi) \right] = 0$$

$$-v_1 v_2 + v_1^2 + v_2 f_{AB} e^A e^B + \frac{v_1^2 v_2}{2} V(\phi) = 0, \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^i} = \frac{4\pi^3}{\kappa^2} \left[2\frac{(v_2)^{\frac{3}{2}}}{v_1^2} \frac{\partial f_{AB}}{\partial u^i} e^A e^B + (v_2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial V(\phi)}{\partial u^i} \right] = 0$$

$$2\frac{\partial f_{AB}}{\partial u^i} e^A e^B = -v_1^2 \frac{\partial V(\phi)}{\partial u^i}, \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e^A} = 2\pi \left[Q_A - \frac{2\pi^2}{\kappa^2} \left(4\frac{(v_2)^{\frac{3}{2}}}{v_1} \right) f_{AB} e^B \right] = 0$$

$$Q_A = \frac{8\pi^2}{\kappa^2} \left(\frac{(v_2)^{\frac{3}{2}}}{v_1} \right) f_{AB} e^B. \quad (6.65)$$

Combinando as equações 6.62 e 6.63 podemos escrever a equação para o potencial

$$\frac{4}{v_2} - \frac{1}{v_1} + V(\phi) = 0. \quad (6.66)$$

Podemos checar a validade dessa equação facilmente usando os resultados da referência [10]. Lá, encontramos que, para a teoria D -dimensional

$$I = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-G} \left(R - \frac{(D-1)(D-2)}{3} \Lambda - F^2 \right), \quad (6.67)$$

com fundo do tipo anti-de Sitter-Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = -a(r)^2 dt^2 + a(r)^{-2} dr^2 + r^2 (d\Omega_{D-2}^k)^2, \quad (6.68)$$

onde a parte angular da métrica para $\Lambda < 0$ é dada por

$$(d\Omega_{D-2}^k)^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \prod_{i=1}^{D-3} \sin^2 \theta_i^2 d\theta_{D-2}^2, \quad (6.69)$$

a função $a^2(r)$ é dada por

$$a^2(r) = 1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{M}{r^{D-3}} + \frac{Q^2}{r^{2(D-3)}}, \quad (6.70)$$

e os parâmetros de massa M e de carga Q se relacionam com a massa e a carga ADM respectivamente por

$$M_{ADM} = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi}M, \quad (6.71)$$

$$Q_{ADM} = \sqrt{\frac{(D-3)(D-2)}{2}}Q, \quad (6.72)$$

com Ω_{D-2} dado por

$$\Omega_{D-2} = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma[(D-1)/2]}. \quad (6.73)$$

Portanto, em 5 dimensões, 6.70 pode ser escrita como

$$a^2(r) = 1 + \frac{r^2}{l^2} - \frac{M}{r^2} + \frac{Q^2}{r^4}. \quad (6.74)$$

Utilizando esta expressão vamos determinar o valor de v_1 . Para isso, introduzimos as coordenadas

$$\rho = r - r_H \rightarrow 0. \quad (6.75)$$

Isso nos permite escrever as seguintes expansões de Taylor

$$(\rho + r_H)^{-2} \approx \frac{1}{r_H^2} - \frac{2}{r_H^3}\rho + \frac{3}{r_H^4}\rho^2, \quad (6.76)$$

$$(\rho + r_H)^{-4} \approx \frac{1}{r_H^4} - \frac{4}{r_H^5}\rho + \frac{10}{r_H^6}\rho^2. \quad (6.77)$$

Introduzindo as coordenadas 6.75 em 6.74 e utilizando as aproximações de Taylor, temos que

$$a^2(\rho) \approx \frac{4}{l^2 r_H^2} (3r_H^2 + l^2)\rho^2 = \frac{1}{v_1}\rho^2. \quad (6.78)$$

Logo, a constante cosmológica, o potencial e as constantes v_1 e v_2 são dados por

$$\Lambda = -\frac{3}{l^2}, \quad V = -4\Lambda, \quad \frac{1}{v_1} = \frac{4}{l^2 r_H^2} (3r_H^2 + l^2), \quad v_2 = r_H^2. \quad (6.79)$$

De fato,

$$\frac{4}{v_2} - \frac{1}{v_1} + V(\phi) = \frac{4}{r_H^2} - \frac{12}{l^2} - \frac{4}{r_H^2} - 4\left(-\frac{3}{l^2}\right) = 0,$$

o que está de acordo com 6.66. Usando a equação 6.62 escrita na forma

$$-6v_1\sqrt{v_2} + 2\frac{(v_2)^{\frac{3}{2}}}{v_1}f_{AB}e^Ae^B - v_1(v_2)^{\frac{3}{2}}V(\phi) = 0$$

e 6.63, é fácil verificar que a função entropia 6.61 se reduz a

$$\mathcal{E}(u^i, v_1, v_2, e^A, Q_A) = \frac{8\pi^3}{\kappa^2} (v_2)^{\frac{3}{2}}. \quad (6.80)$$

De fato, essa fórmula para a função entropia está correta pois a área do buraco negro em 5 dimensões é dada por 6.73 para $D = 5$, isto é $A_H = 2\pi^2(v_2)^{\frac{3}{2}}$, e, além disso, $\kappa^2 = 16\pi G_N$, logo, substituindo na expressão 6.80 acima temos

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2(v_2)^{\frac{3}{2}}}{2G_N} = \frac{A_H}{4G_N}, \quad (6.81)$$

resultado este que reforça ainda mais a afirmação de que $\mathcal{E}$ realmente pode ser identificada como a função entropia. Podemos checar a validade das equações 6.62 e 6.63 usando 6.65. Multiplicando 6.65 por f^{CA} e usando 6.56 temos

$$f^{CA}Q_A = 8\pi^2 \frac{(v_2)^{\frac{3}{2}}}{v_1} e^C,$$

logo,

$$e^A = \frac{1}{8\pi^2} \frac{v_1}{(v_2)^{\frac{3}{2}}} f^{AC} Q_C. \quad (6.82)$$

Substituindo em 6.62 temos

$$\begin{aligned} 6v_1^2 - 2v_2 f_{AB} \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{v_1}{(v_2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 f^{AC} Q_C f^{BD} Q_D + v_1^2 v_2 V(\phi) &= 0 \\ 6v_1^2 - 2v_2 \left(\frac{1}{8\pi^2} \frac{v_1}{(v_2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \delta_B^C Q_C f^{BD} Q_D + v_1^2 v_2 V(\phi) &= 0 \\ 6 - 2 \frac{1}{v_2^2} \left(\frac{1}{8\pi^2} \right)^2 f^{BD} Q_B Q_D + v_2 V(\phi) &= 0. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Para determinar os parâmetros de massa M e de carga Q^2 basta substituir as expansões de Taylor 6.76 e 6.77 em 6.70. Após isso, os coeficientes multiplicando potências de ρ devem ser nulos. Logo, esses coeficientes nos permitem determinar o parâmetro de carga para a teoria 6.67, com $f_{AB} = \delta_{AB}$, dada por

$$\tilde{Q}^2 \equiv \frac{Q_A}{8\pi^2} = 3r_H^4 \left(1 + 2 \frac{r_H^2}{l^2} \right). \quad (6.84)$$

Usando os valores de v_1 , v_2 , do potencial e do parâmetro de carga podemos demonstrar que 6.83 é de fato nula

$$6 - 2 \frac{1}{r_H^4} 3r_H^4 \left(1 + 2 \frac{r_H^2}{l^2} \right) + r_H^2 \frac{12}{l^2} = 0.$$

Da mesma forma repetimos o processo para a equação 6.63

$$-r_H^2 \frac{4}{l^2 r_H^2} (3r_H^2 + l^2) + 1 + \frac{1}{r_H^4} 3r_H^4 \left(1 + 2 \frac{r_H^2}{l^2} \right) + \frac{r_H^2}{2} \frac{12}{l^2} = 0.$$

Logo, demonstramos que as equações 6.62 e 6.63 são satisfeitas. Usando 6.82 o campo de gauge, dado por

$$F^A = \frac{e^A}{v_1} d\tau \wedge d\rho = \frac{v_1 f^{AB} \tilde{Q}_B}{v_2^{3/2}}. \quad (6.85)$$

Para a teoria 6.67, temos $f^{AB} = \delta^{AB}$, e sabendo que $v_2 = r_H^2$, o campo de gauge é então escrito como

$$F_{\tau\rho} = \frac{\tilde{Q}}{r_H^3}, \quad (6.86)$$

o que é condizente com 6.55.

O que fizemos nesta seção foi demonstrar que o formalismo da função entropia funciona para teorias contendo 5 dimensões. De fato, ele pode ser estendido para qualquer teoria D -dimensional com $D > 4$. As equações 6.63-6.65 são as chamadas equações atratoras, pois elas permitem que estudemos o comportamento dos campos escalares sobre o horizonte de eventos. Novamente demonstramos a validade da função entropia através de 6.81, e além disso, apresentamos alguns métodos de como se estuda o comportamento dos campos para a geometria próxima ao horizonte de eventos.

6.4 Generalização do cálculo da função entropia de Sen para $AdS_2 \times S^{D-2}$

Nesta seção vamos generalizar o cálculo da função entropia para o caso de uma teoria D -dimensional. Para isso, considere a ação mais geral de uma teoria D -dimensional da gravidade acoplada a um conjunto de campos escalares sem massa e campos vetoriais

$$I[G_{\mu\nu}, \phi^i, A_\mu^I] = \frac{1}{\kappa^2} \int_M d^D x \sqrt{-G} [R - g_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j - f_{AB} F_{\mu\nu}^A F^{B\mu\nu} + V(\phi^i)], \quad (6.87)$$

onde igualmente à seção anterior $F_{\mu\nu}^A$ com $A = (0, \dots, N)$ são os campos de gauge, $\phi \equiv (\phi^i)$ com $i = (1, \dots, N)$ são os campos escalares, $V(\phi^i)$ é o potencial dos campos escalares e $\kappa^2 = 16\pi G_N$, e $g_{ij}(\phi)$ é a métrica no espaço dos moduli. As equações de movimento para os campos da teoria são :

1. Para a métrica

$$R_{\mu\nu} - g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j = f_{AB} \left(2F_{\mu\lambda}^A F_{\nu}^{B\lambda} - \frac{1}{3} G_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda}^A F^{B\alpha\lambda} \right) - \frac{1}{3} G_{\mu\nu} V(\phi); \quad (6.88)$$

2. Para o moduli

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_\mu \left(\sqrt{-G} g_{ij} \partial^\mu \phi^j \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial \phi^i} F_{\mu\nu}^A F^{B\mu\nu} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial \phi^i} \partial_\mu \phi^m \partial^\mu \phi^n - \frac{\partial V(\phi^i)}{\partial \phi^i} \right); \quad (6.89)$$

3. Para os campos de gauge

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-G} (f_{AB} F^{B\mu\nu}) \right] = 0. \quad (6.90)$$

Vamos considerar o ansatz para a métrica do espaço tempo D-dimensional esfericamente simétrico

$$ds^2 = -a(r)^2 dt^2 + a(r)^{-2} dr^2 + b(r)^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (6.91)$$

onde

$$d\Omega_{D-2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2 + \dots + \prod_{i=1}^{D-3} \sin^2 \theta_i d\theta_{D-2}^2, \quad (6.92)$$

onde todos os $\theta_i \in [0, 2\pi]$, com exceção de θ_{D-3} , que varia de $[0, \frac{\pi}{2}]$. A área da esfera unitária em $D - 2$ dimensões é dada por 6.73. Devemos agora expressar a função f dessa teoria D-dimensional. Quando somamos sobre os índices contraídos da lagrangiana o único termo que muda com relação ao caso anterior é o termo que contém o escalar de Ricci, que agora passa a ser escrito como

$$R = -\frac{2}{v_1} + \frac{(D-2)!}{(D-4)!v_2}. \quad (6.93)$$

O determinante da métrica é dado por

$$\sqrt{-G} = v_1 (v_2)^{(D-2)/2} \prod_{i=3}^{D-1} \sin^i \theta_{D-i} \cos \theta, \quad (6.94)$$

logo a expressão para a função f é escrita como

$$\begin{aligned} f(u^i, v_1, v_2, e^A) &= \frac{1}{\kappa^2} \int d\theta_1 \dots d\theta_{D-2} v_1 (v_2)^{(D-2)/2} \\ &\times \prod_{i=3}^{D-1} \sin^i \theta_{D-i} \cos \theta \left[\left(-\frac{2}{v_1} + \frac{(D-2)!}{(D-4)!v_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{v_1^2} f_{AB} e^A e^B + V(\phi) \right] \\ \Rightarrow f(u^i, v_1, v_2, e^A) &= \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[-2(v_2)^{(D-2)/2} + \frac{(D-2)!}{(D-4)!} v_1 (v_2)^{(D-4)/2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} f_{AB} e^A e^B + v_1 (v_2)^{(D-2)/2} V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (6.95)$$

A função entropia, dada por 6.27, será

$$\mathcal{E}(u^i, v_1, v_2, e^A, Q_A) = 2\pi \left[Q_A e^A - \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[-2(v_2)^{(D-2)/2} + \frac{(D-2)!}{(D-4)!} v_1 (v_2)^{(D-4)/2} + 2 \frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} f_{AB} e^A e^B + v_1 (v_2)^{\frac{(D-2)}{2}} V(\phi) \right] \right]. \quad (6.96)$$

As equações atratoras serão

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = 2\pi^2 \left[-\frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[\frac{(D-2)!}{(D-4)!} (v_2)^{(D-4)/2} - 2 \frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1^2} f_{AB} e^A e^B + (v_2)^{(D-2)/2} V(\phi) \right] \right] = 0$$

$$\frac{(D-2)!}{(D-4)!} v_1^2 (v_2)^{(D-4)/2} - 2(v_2)^{(D-2)/2} f_{AB} e^A e^B + v_1^2 (v_2)^{(D-2)/2} V(\phi) = 0, \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = 2\pi^2 \left[\frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[-(D-2)(v_2)^{(D-4)/2} + \frac{(D-2)!}{(D-4)!} \frac{(D-4)}{2} v_1 (v_2)^{(D-6)/2} \right. \right. \\ \left. \left. + (D-2) \frac{(v_2)^{(D-4)/2}}{v_1} f_{AB} e^A e^B + \frac{(D-2)}{2} v_1 (v_2)^{(D-4)/2} V(\phi) \right] \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2v_1 (v_2)^{(D-4)/2} + \frac{(D-2)!}{(D-4)!} \frac{(D-4)}{(D-2)} v_1^2 (v_2)^{(D-6)/2} + 2(v_2)^{(D-4)/2} f_{AB} e^A e^B \\ + 2v_1^2 (v_2)^{(D-4)/2} V(\phi) = 0, \quad (6.98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u^i} = 2\pi \left[-\frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[2 \frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} \frac{\partial f_{AB}}{\partial u^i} e^A e^B + v_1 (v_2)^{(D-2)/2} \frac{\partial V(\phi)}{\partial u^i} \right] \right] = 0 \\ 2 \frac{\partial f_{AB}}{\partial u^i} e^A e^B = -v_1^2 \frac{\partial V(\phi)}{\partial u^i}, \quad (6.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e^A} = 2\pi \left[Q_A - \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left(4 \frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} \right) f_{AB} e^B \right] = 0 \\ Q_A = 4 \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left(\frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} \right) f_{AB} e^B. \quad (6.100) \end{aligned}$$

Substituindo 6.100 na função entropia 6.96 temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^i, v_1, v_2, e^A, Q_A) = 2\pi \left[4 \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left(\frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} \right) f_{AB} e^A e^B - \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[-2(v_2)^{(D-2)/2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(D-2)!}{(D-4)!} v_1 (v_2)^{(D-4)/2} + 2 \frac{(v_2)^{(D-2)/2}}{v_1} f_{AB} e^A e^B + v_1 (v_2)^{\frac{(D-2)}{2}} V(\phi) \right] \right] \\ \mathcal{E}(u^i, v_1, v_2, e^A, Q_A) = 2\pi \left[-\frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2 v_1} \left[+ \frac{(D-2)!}{(D-4)!} v_1^2 (v_2)^{(D-4)/2} - 2(v_2)^{(D-2)/2} f_{AB} e^A e^B \right. \right. \\ \left. \left. + v_1^2 (v_2)^{\frac{(D-2)}{2}} V(\phi) \right] - \frac{\Omega_{D-2}}{\kappa^2} \left[-2(v_2)^{(D-2)/2} \right] \right]. \end{aligned}$$

Usando $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1} = 0$ e $\kappa^2 = 16\pi G_N$ a entropia do buraco negro é dada por

$$\mathcal{E}(u^i, v_1, v_2, e^A, Q_A) = \frac{\Omega_{D-2}}{4G_N} (v_2)^{(D-2)/2}, \quad (6.101)$$

que confere com os casos em 4 e 5 dimensões discutidos anteriormente. A fórmula geral então para a obtenção da função entropia em uma teoria em D -dimensões é dada por 6.96.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação estudamos o mecanismo atrator e a função entropia para buracos negros. Começamos estudando as leis da Termodinâmica usual e as Leis da Termodinâmica de Buracos Negros e, através delas, demonstramos que existe uma relação entre os parâmetros de um buraco negro com os parâmetros de um sistema físico termodinâmico. Vimos que a entropia de um buraco negro é proporcional à sua área, e que ela se relaciona com a segunda lei da Termodinâmica no sentido em que ela se mantém constante ou cresce de valor nos processos físicos que ocorrem no sistema. Estudamos vários aspectos envolvendo buracos negros e uma grande parte da matemática necessária para a compreensão de sua geometria próxima ao horizonte de eventos. Estudamos teorias de gravidade acopladas à campos escalares e vetoriais, e também alguns casos de transformações de dualidade. Demonstramos que para essas teorias é possível se obter soluções do tipo buraco negro extremo para as quais discutimos o chamado mecanismo atrator, que faz com que os valores dos campos sejam fixos sobre o horizonte de eventos e dependente somente das cargas do buraco negro. Por fim estudamos o formalismo da função entropia de Sen e demonstramos através de exemplos como essa função se relaciona com a entropia usual. Vimos que ela é uma ferramenta extremamente útil para se obter o mecanismo atrator e para a determinação entropia de um buraco negro. O mecanismo atrator e a função entropia de Sen são assuntos de intensa pesquisa atual e muito ainda não é conhecida sobre a extensão de sua aplicabilidade.

Apêndice A

Propriedades do determinante da métrica

Neste apêndice demonstramos como calcular a variação da raiz quadrada de menos o determinante da métrica com relação a métrica. O determinante de uma matriz $g_{\mu\nu}$ dado por

$$g = \sum_{\mu}^{\nu} g_{\nu\mu} A^{\nu\mu}, \quad (\text{A.1})$$

onde $A^{\nu\mu}$ é a matriz transposta dos cofatores de $g^{\mu\nu}$ e $g = \det(g_{\mu\nu})$. Multiplicando por $g_{\sigma\mu}$ e contraíndo σ com ν temos

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{g} A^{\nu\mu}. \quad (\text{A.2})$$

Derivando A.1 com relação à métrica e usando A.2 temos

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = A^{\mu\nu} = g g^{\nu\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Então usando A.3 temos

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Usando o fato de que $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ constante

$$\begin{aligned} \delta(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) &= (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}) = 0 \\ (\delta g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} &= -g^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Logo, usando A.4 e A.5, podemos calcular a variação

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) \\ \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O lado esquerdo de A.6 pode ser reescrito como

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.7})$$

Por fim chegamos a seguinte identidade

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}). \quad (\text{A.8})$$

Outro resultado que é útil é apresentado agora. Usando A.3 a derivada do determinante da métrica pode ser escrita como

$$\frac{\partial g}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = gg^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}. \quad (\text{A.9})$$

Usando o fato de que a métrica é compatível, i.e. $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$ temos

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma g_{\alpha\sigma}. \quad (\text{A.10})$$

Substituindo esse resultado em A.9 temos

$$\begin{aligned} \partial_\gamma g &= gg^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma g_{\alpha\sigma}) \\ \partial_\gamma g &= g\Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ou, escrevendo em termos de logaritmo

$$\Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha = \partial_\gamma (\ln g). \quad (\text{A.12})$$

Apêndice B

Teorema de Gauss-Stokes

Considere uma região do espaço finita V da variedade do espaçotempo, fechada por uma hipersuperfície ∂V . A hipersuperfície pode ter segmentos que são do tipo espaço, tempo ou nulos. O **teorema de Gauss** estabelece que

$$\int_V \nabla_\alpha A^\alpha \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial V} A^\alpha d\Sigma_\alpha, \quad (\text{B.1})$$

onde $d\Sigma_\alpha = \varepsilon n_\alpha \sqrt{h} d^3y$, com $\varepsilon = +1$ se ∂V é do tipo espaço e $\varepsilon = -1$ se ∂V é do tipo tempo. Para provar este resultado imagine que um conjunto de hipersuperfícies fechadas folheam V , sendo ∂V a camada mais externa. Podemos escolher um sistema de coordenadas para o qual x^0 seja constante sobre cada uma das hipersuperfícies, com $x^0 = 0$ sendo o ponto central e $x^0 = 1$ sendo ∂V . Então x^0 cresce radialmente para fora e podemos escolher as coordenadas x^a como sendo as coordenadas sobre a hipersuperfície fechada $x^0 = \text{constante}$. As coordenadas y^a sobre ∂V são identificadas com estas coordenadas angulares. Neste sistema de coordenadas o lado esquerdo de B.1 é escrito como

$$\begin{aligned} \int_V \nabla_\alpha A^\alpha \sqrt{-g} d^4x &= \int_V \partial_\alpha (\sqrt{-g} A^\alpha) d^4x \\ &= \int dx^0 \oint \partial_0 (\sqrt{-g} A^0) d^3x + \int dx^0 \oint \partial_a (\sqrt{-g} A^a) d^3x \\ &= \int dx^0 \oint \frac{d}{dx^0} \sqrt{-g} A^0 d^3x \\ &= \int dx^0 \oint \sqrt{-g} A^0 d^3x \Big|_{x^0=0}^{x^0=1} \\ &= \int dx^0 \oint \sqrt{-g} A^0 d^3y, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde na primeira linha usamos a forma da divergência de um campo vetorial A^α . A segunda integral da segunda linha mente nula pois x^a são variáveis angulares e a integração é sobre uma superfície tridimensional fechada. Na quarta linha a contribuição de $x^0 = 0$ é nula porque a hipersuperfície $x^0 = 0$ tem volume igual a zero. Nas coordenadas especificadas facilmente podemos checar que o lado direito de B.1, usando a definição de elemento de hipersuperfície, pode ser escrito como

$$\oint_{\partial V} A^\alpha d\Sigma_\alpha = \int dx^0 \oint \sqrt{-g} A^0 d^3y. \quad (\text{B.3})$$

Logo, provamos que um lado é igual ao outro, o que demonstra a validade do teorema de Gauss. Quando um campo vetorial j^α tem divergência nula, isto é,

$$\nabla_\alpha j^\alpha = 0, \quad (\text{B.4})$$

o teorema de Gauss implica que

$$\oint_\Sigma j^\alpha d\Sigma_\alpha = 0, \quad (\text{B.5})$$

para qualquer hipersuperfície fechada Σ . Quando j^α é nulo no infinito espacial podemos escolher Σ de forma que ela seja decomposta em duas hipersuperfícies do tipo espaço Σ_1 e Σ_2 se estendendo até o infinito, e de um "tricilindro" no infinito, para o qual $j^\alpha = 0$. Então, o teorema de Gauss implica que

$$\int_{\Sigma_1} j^\alpha d\Sigma_\alpha + \int_{\Sigma_2} j^\alpha d\Sigma_\alpha = 0. \quad (\text{B.6})$$

Sob cada hipersuperfície do tipo espaço temos, $d\Sigma_\alpha = -n_\alpha \sqrt{h} d^3y$, onde o vetor normal saindo da hipersuperfície fechada é n_α , h é o determinante da métrica induzida sob Σ_1 e Σ_2 . Sob Σ_2 , $n_\alpha = n_{2\alpha}$ e sob Σ_1 , $n_\alpha = -n_{1\alpha}$, com ambos os vetores sendo futuro direcionados. Logo

$$\nabla_\alpha j^\alpha = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_1} j^\alpha n_{1\alpha} \sqrt{h} d^3y = \int_{\Sigma_2} j^\alpha n_{2\alpha} \sqrt{h} d^3y, \quad (\text{B.7})$$

ou seja, se j^α é um vetor com divergência nula, então a carga total conservada $\int j^\alpha n_\alpha d\Sigma$ é independente da hipersuperfície escolhida para o cálculo da integral, que é uma outra forma de afirmar que a carga é conservada.

Para uma região tridimensional Σ encoberta por uma hipersuperfície bidimensional fechada $\partial\Sigma$ podemos provar um teorema similar ao anterior, chamado de **teorema de Stokes**. Este teorema estabelece que para qualquer campo tensorial antissimétrico $B^{\alpha\beta}$ em Σ ,

$$\int_\Sigma \nabla_\beta B^{\alpha\beta} d\Sigma_\alpha = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} B^{\alpha\beta} d\Sigma_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.8})$$

onde o elemento de área de uma hipersuperfície bidimensional é definido como $d\Sigma_{\alpha\beta} = 2k_{[\alpha} N_{\beta]} \sqrt{\sigma} d^2\theta$, sendo N_α o vetor normal auxiliar, satisfazendo $N_\alpha k^\alpha = -1$, usado para definir a métrica inversa como

$$g^{\alpha\beta} = -k^\alpha N^\beta - N^\alpha k^\beta + \sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta, \quad (\text{B.9})$$

com σ^{AB} sendo a métrica inversa definida sob a superfície bidimensional. A demonstração do teorema é similar ao caso anterior. Construímos um sistema de coordenadas tal que x^0 seja constante sob a hipersuperfície Σ , $x^1 = \text{constante}$ descreve

uma folha das hipersuperfícies bidimensionais fechadas em Σ , com $x^1 = 1$ sendo $\partial\Sigma$ e $x^1 = 0$ a hipersuperfície central de área nula de Σ e x^A sejam as coordenadas angulares sob as superfícies fechadas. O elemento de superfície sob este sistema de coordenadas é escrito como $d\Sigma_\alpha = \delta_\alpha^0 \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3$. O lado esquerdo de B.8 é escrito como

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \nabla_\beta B^{\alpha\beta} d\Sigma_\alpha &= \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_\beta (\sqrt{-g} B^{\alpha\beta}) d\Sigma_\beta \\
&= \int_\Sigma \nabla_\beta (\sqrt{-g} B^{0\beta}) dx^1 dx^2 dx^3 \\
&= \int dx^1 \oint \nabla_1 (\sqrt{-g} B^{01}) dx^2 dx^3 + \int dx^1 \oint \nabla_A (\sqrt{-g} B^{0A}) dx^2 dx^3 \\
&= \oint \sqrt{-g} B^{01} dx^2 dx^3 \Big|_{x^1=0}^{x^1=1} \\
&= \oint_{\partial\Sigma} \sqrt{-g} B^{01} d^2\theta,
\end{aligned} \tag{B.10}$$

com $x^A = \theta^A$ sob $\partial\Sigma$. Na primeira linha usamos a forma do divergente de um tensor antissimétrico 3.143, deduzida no capítulo 2. Na segunda linha substituímos $d\Sigma_\alpha$. A segunda integral da terceira linha é nula porque x^A são coordenadas angulares com domínio de integração sendo uma superfície bidimensional fechada. Na quarta linha não há contribuição da hipersuperfície $x^1 = 0$ pois ela contém área nula. Sob este sistema de coordenadas, $B^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} = 2B^{01} \sqrt{-g} d^2\theta$ e o lado direito de B.8 é escrito como

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial\Sigma} B^{\alpha\beta} d\Sigma_{\alpha\beta} = \oint_{\partial\Sigma} B^{01} \sqrt{-g} d^2\theta. \tag{B.11}$$

Logo, o lado direito e esquerdo de B.8 são iguais neste sistema de coordenadas especificado, o que demonstra a validade do teorema de Stokes.

Referências

- [1] A. Sen, *Black hole entropy function and the attractor mechanism in higher derivative gravity*, JHEP **0509**, 038 (2005) [arXiv:hep-th/0506177].
- [2] F. Reif, *Fundamental of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill, 1965)
- [3] W. Greiner, L. Neise and H. Stocker, *Classical Theoretical Physics: Thermodynamics and Statistical Physics* (Springer, 1997).
- [4] D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics* (Oxford University Press, 1987).
- [5] R.M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [6] J.M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking, *The four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 61 (1973).
- [7] S. Carroll, *Spacetime and Geometry* (Addison Wesley, 2003).
- [8] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973).
- [9] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Vol. 2, Fourth Edition: The Classical Theory of Fields* (Butterworth-Heinemann, 1975).
- [10] V. Cardoso, O. J. C. Dias and J. P. S. Lemos, *Nariai, Bertotti-Robinson and anti-Nariai solutions in higher dimensions*, Phys. Rev. D **70**, 024002 (2004) [arXiv:hep-th/0401192].
- [11] D. Astefanesei, H. Nastase, H. Yavartanoo and S. Yun, *Moduli flow and nonsupersymmetric AdS attractors*, JHEP **04** (2008) 074 [arXiv:hep-th/0711.0036].
- [12] P. K. Townsend, *Black holes: Lecture Notes*, [arXiv:gr-qc/9707012].
- [13] A. Shapere, S. Trivedi and F. Wilczek, *Dual dilaton dyons*, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2677.

- [14] S. Ferrara, R. Kallosh and A. Strominger, *$N = 2$ extremal black holes*, Phys. Rev. D **52**, 5412 (1995) [arXiv:hep-th/9508072].
- [15] A. Strominger, *Macroscopic entropy of $N=2$ extremal black-holes*, Phys. Lett. B **383**, 39 (1996) [arXiv:hep-th/9602111].
- [16] S. Ferrara and R. Kallosh, *Supersymmetry and attractors*, Phys. Rev. D **54**, 1514 (1996) [arXiv:hep-th/9602136].
- [17] A. Sen, *Black Hole Entropy Function, Attractors and Precision Counting of Microstates*, [arXiv:hep-th/0708.1270].
- [18] R. M. Wald, *Black hole entropy in the Noether charge*, Phys. Rev. D **48**, 3427 (1993) [arXiv:gr-qc/9307038].
- [19] T. Jacobson, G. Kang and R. C. Myers, *On Black Hole Entropy*, Phys. Rev. D **49**, 6587 (1994) [arXiv:gr-qc/9312023].
- [20] V. Iyer and R. M. Wald, *Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*, Phys. Rev. D **50**, 846 (1994) [arXiv:gr-qc/9403028].
- [21] T. Jacobson, G. Kang and R. C. Myers, *Black hole entropy in higher curvature gravity*, arXiv:gr-qc/9502009.
- [22] K. Goldstein, N. Iizuka, R. P. Jena and S. P. Trivedi, *Non-supersymmetric attractors*, Phys. Rev. D **72**, 124021 (2005) [arXiv:hep-th/0507096].