



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS MEDIADAS POR SOFTWARES
EDUCATIVOS EM UMA PERSPECTIVA SEMIÓTICA: UMA CONTRIBUIÇÃO
PARA O CONHECIMENTO DO FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

Maria Margarete do Rosário Farias

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós
Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em
Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos
Filosóficos Científicos para obtenção do Título de Mestre em Educação
matemática

RIO CLARO
2007





510.07 Farias, Maria Margarete do Rosário.

F224r As representações matemáticas mediadas por softwares
educativos em uma perspectiva semiótica : uma contribuição
para o conhecimento do futuro professor de matemática /
Maria Margarete do Rosário Farias. - Rio Claro: [s.n.], 2007
195f. : il., figs. + 1 CD-ROM

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciência Exatas
Orientador: Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Formação inicial.
I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP



COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
(Orientadora)

Prof. Dr. Rômulo Campos Lins

Prof. Dr. Hermes Renato Hildebrand

Rio Claro, 18 de JUNHO de 2007

Resultado: APROVADA





**Aos meus pais Antonio e Balbina, pela
atenção, amor e carinho que sempre me
dedicaram.**

**Ao meu querido esposo Paulo, amigo e
companheiro de todas as horas, em especial
aos meus filhos, Bruno e Beatriz pelo
apoio, cuidado e compressão
durante as longas
horas de ausência da
mamãe durante
o processo de
construção
e estudo
desta
pesquisa.**

AGRADECIMENTOS

A professora Orientadora Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, por sua atenção, dedicação e importantes sugestões ao longo deste trabalho de pesquisa, principalmente, pela amizade, confiança e pela aposta feita em minha pessoa. Muito obrigada por tudo.

Aos professores Prof. Dr. Rômulo Campos Lins, Dr. Hermes Renato Hildebrand, por integrarem a banca examinadora da dissertação.

Aos professores e colegas da Pós Graduação em Educação Matemática, Prof.Dr. Marcelo Borba, Leandro, Carla, Eduardo, Dirlene, Márcio, Marcos, Luciane, Sueli, Silvana, Maurício, Adelino, Célia, Leonardo, Escher, Heloisa, Patrícia, Rejane e a tantos outros amigos novos e antigos pelas discussões sobre o meu trabalho e temas diversos, pela amizade e momentos de alegria e descontração.

Ao grupo de Formação de Professores, em especial à Profa. Dra. Rosana Miskulin, a Profa. Dra Miriam Godoy e Profa. Dra. Laurizete Passos pelas valiosas informações que muito ampliaram a minha visão de mundo e sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

Aos amigos da UESC, em especial aos meus queridos amigos Humberto Bortolossi, Jurema Botelho, Eurivalda Ribeiro, Irene Cazorla, José Carlos Chagas por me incentivarem, acreditarem e torcerem por mim. Muito obrigada!

Aos professores e colegas da UESC, em especial, Prof. Ms. Erinalva Calazans e Prof. Ms. José Reis que foram os meus mentores quando ainda estudante e amigos que sempre torceram pelo meu sucesso nessa caminhada.

Aos funcionários de Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro: Elisa, Ana e Diego pela atenção, simpatia e apoio técnico que muito contribuiu para o desenvolvimento deste trabalho de pesquisa.

Aos professores e alunos do curso de Matemática e Educação Matemática, participantes da pesquisa, muito obrigada pela troca, atenção e disponibilidade manifestada.

Ao colega Orlando Figueiredo e Roger Miarka, muito obrigada pela tarefa de correção e tradução para o inglês.

Ao meu esposo Paulo e aos meus filhos Bruno e Beatriz pelo amor e compreensão que sempre demonstraram, mesmo em momento adversos.

MUITO OBRIGADA

M^a. Margarete do R. Farias



SUMÁRIO

Índice.....	i
Índice de Figuras.....	iv
Resumo.....	vii
Abstracts.....	viii
Introdução.....	01
Capítulo 1: Formação Inicial de Professores.....	06
Capítulo 2: Uma Introdução à Semiótica	27
Capítulo 3: As Representações Matemáticas e as TICs em uma Perspectiva Semiótica.....	50
Capítulo 4: Metodologia da Pesquisa (Parte 1) As Entrevistas.....	65
Capítulo 5: Metodologia da Pesquisa (Parte 2) Descrição das Atividades Exploratório-Investigativas e Análise dos Dados.....	120
Considerações Finais.....	183
Referências Bibliográficas.....	189



ÍNDICE¹

Introdução: O Caminhar da Pesquisa.....	01
Capítulo 1: Formação Inicial de Professores.....	06
1.1. Apresentação.....	06
1.2. Formação Inicial de Professores de Matemática.....	06
1.3. Dimensões Implícitas na Constituição do Conhecimento para a Formação do Futuro Professor de Matemática.....	07
1.4. O Cálculo Diferencial e Integral I: Uma Disciplina Fundamental para a Formação de Futuros Professores de Matemática.....	21
Capítulo 2: Uma Introdução à Semiótica	27
2.1. Apresentação.....	27
2.2. Dando os Primeiros Passos... O que é Semiótica?.....	27
2.3. As Categorias Fenomenológicas: O “Três” como Fundamento.....	31
2.4. O Signo: Uma Relação Triádica.....	37
2.4.1. Objeto Imediato e Objeto Dinâmico.....	40
2.5. Aplicações da Semiótica para a Matemática.....	43
Capítulo 3: As Representações Matemáticas e as TICs em uma Perspectiva Semiótica.....	50
3.1. Apresentação.....	50
3.2. As Representações Matemáticas Mediadas pelo Computador.....	55
3.2.1. O Uso do Computador no Processo de Visualização.....	57
3.2.2. Representações Matemáticas em uma Perspectiva Semiótica e sua relação com os Processos de Visualização.....	61

¹ **Anexos (Disponíveis em CD - ROM)**

Anexo A - Descrição das Atividades Exploratórias-Investigativas

Anexo B - Descrição das Observações realizadas em Classe

Anexo C - Roteiro das Entrevistas Professor e Estudante

Capítulo 4:	Metodologia da Pesquisa -Parte 1: As Entrevistas.....	65
4.1.	Apresentação.....	65
4.2.	Antes: o Encaminhamento dos Trabalhos.....	67
4.3.	Durante: o Desenvolvimento da Pesquisa.....	68
4.3.1.	O Diário de Campo da Pesquisadora.....	70
4.3.1.1.	Observando o Ambiente da Sala de Aula.....	70
4.3.1.2.	As Notas de Aula.....	73
4.4.	As Entrevistas.....	74
4.5.	Conversando com os Professores.....	76
4.5.1.	O Professor K.....	76
4.5.1.1.	Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor K.....	81
4.5.2.	O Professor Y.....	83
4.5.2.1.	Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor Y.....	86
4.5.3.	O Professor W.....	88
4.5.3.1.	Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor W.....	94
1.	O professor Z.....	96
4.5.4.1.	Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor Z.....	104
4.6.	Conversando com os Estudantes.....	106
4.6.1.	Síntese Interpretativa do 1º. Bloco: Comentários dos Estudantes.....	109
4.6.2.	Síntese Interpretativa do 2º. Bloco: comentários dos estudantes.....	112
4.6.3.	Síntese Interpretativa do 3º. Bloco: Comentários dos Estudantes.....	115
Capítulo 5:	Metodologia da Pesquisa -Parte 2 Descrição das Atividades	
	Exploratório-Investigativas e Análise dos Dados.....	120
5.1.	Metodologia Junto aos Sujeitos Pesquisados:	
	Investigação Matemática em Sala de Aula.....	120
5.2.	As Atividades Exploratório-Investigativas.....	123

5.2.1.	Desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas.....	128
5.3.	No Laboratório: Softwares Livres como uma Opção para a Representação Matemática em uma Proposta Investigativa.....	130
5.3.1.	Winplot.....	132
5.4.	Análise dos Dados da Pesquisa.....	133
5.4.1.	Compreendendo e Analisando as Representações Matemáticas como um Signo: O Objeto de Investigação.....	135
5.5.	Análise das Atividades Exploratório- Investigativas.....	138
5.5.1.	Atividade 1.....	139
5.5.2.	Atividade 2.....	148
5.5.3.	Atividade 3.....	155
5.5.4.	Atividade 4.....	165
5.6.	Análise das Entrevistas.....	178
5.6.1.	Interpretações Diferenciadas sobre os Conceitos Matemáticos.....	176
5.6.2.	O Aspecto Visual das Representações Matemáticas.....	178
5.6.3.	Inter-relacionar Diversas Representações Matemáticas Constitui-se em Abordagem Versus o Tecnicismo Matemático.....	179
5.6.4.	Mobilidade das Diversas Representações Matemáticas Possibilitando uma “Ponte” entre..... a Matemática Escolar e a Acadêmica.....	180
5.7.	Tecendo a Análise.....	182
5.8.	Considerações Finais.....	183
Referências Bibliográficas.....		189

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: A relação triádica do signo.....	38
Figura 2: Contextura do signo.....	39
Figura 3: O Triângulo Epistemológico.....	43
Figura 4: Atividade 1.....	124
Figura 5: Atividade 2.....	125
Figura 6: Atividade 3.....	126
Figura 7: Atividade 4.....	127
Figura 8: Os Procedimentos Metodológicos.....	135
Figura 9: Variação da Função para $k < 0$	141
Figura 10: Variação da Função para $k > 0$	141
Figura 11: Variação (a) da Função para $k \neq 2$	142
Figura 12: Variação (a) da Função para $k = -2$	142
Figura 13: Limitação do Winplot no traçado do gráfico da função $f(x)$	147
Figura 14: Ponto sobre a Curva.....	149
Figura 15: Cálculo Algébrico do Coeficiente Angular: Robin e Clotilde.....	150
Figura 16: Cálculo Algébrico da Equação da Reta Secante: Robin e Clotilde.....	150
Figura 17: Cálculo Algébrico do coeficiente Angular e da Equação da reta secante: Any e Suka.....	151

Figura 18: A Reta Secante.....	151
Figura 19: A reta tangente.....	152
Figura 20: Descrição do Comentário - Letícia e Marcela.....	152
Figura 21: Descrição do Comentário - Augusto e Márcio.....	153
Figura 22: A Circunferência.....	156
Figura 23: O Semicírculo.....	157
Figura 24: Primeiro segmento.....	157
Figura 25: Retângulo inscrito.....	157
Figura 26: A Função Área.....	158
Figura 27: Derivada da Função Área.....	159
Figura 28: Retângulo de maior área inscrito no semicírculo de raio 1.....	160
Figura 29: Retângulo de maior área inscrito no semicírculo de raio 2.....	160
Figura 30: Retângulo de maior área inscrito no semicírculo de raio 3.....	161
Figura 31: Pontos de Máximo, Valor Máximo e Maior Área Classificados para cada Raio.....	161
Figura 32: Retângulo Inscrito de Maior Área a Partir de um Raio genérico.....	162
Figura 33: Tampa.....	166
Figura 34: Base.....	166
Figura 35: Lateral.....	166



Figura 36: O Cilindro.....	167
Figura 37: Representação da Função Custo, Altura e Volume.....	168
Figura 38: Custo Mínimo.....	169
Figura 39: Cilindro versus Representação Algébrica das Funções Custo, 1ª. e 2ª. Derivadas.....	170
Figura 40: Síntese das Principais Idéias Relacionadas à Entrevistas com os Professores de CDI I.....	174
Figura 41: Síntese das Principais Idéias Apresentadas pelos Estudantes durante a Entrevista	175





RESUMO

Esta pesquisa realiza um estudo epistemológico das representações matemáticas, mediadas por softwares educativos, em uma perspectiva Semiótica, objetivando investigar as diferentes formas representativas de conceitos matemáticos como dimensões didático-pedagógicas, implícitas no conhecimento do professor em formação inicial, no ensino do Cálculo Diferencial e Integral - CDI I. Nessa perspectiva temos como meta principal responder a seguinte questão norteadora: “Quais são as contribuições das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, mediadas por softwares educativos, para o conhecimento do Futuro Professor de Matemática?” Os aportes teóricos que fundamentam este trabalho de investigação constituem-se na Formação Inicial de Professores e Semiótica. A Metodologia adotada é de abordagem qualitativa, sob a qual trabalhamos com os alunos do primeiro ano do curso de Matemática, do IGCE/ UNESP/Rio Claro, na disciplina CDI I. A análise baseada em quatro sub-panoramas constituídos pelas entrevistas realizadas com os professores e estudantes atividades exploratório-investigativas desenvolvidas junto aos estudantes, além das observações realizadas em classe da turma do 1º. Ano de Matemática, indica que ao explorarmos o universo signíco das representações, agregamos valores à discussão da constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática, ressaltando a importância desses estudantes/professores, conscientizarem-se da perspectiva Semiótica implícita à abordagem de transitar entre várias representações matemáticas no processo de investigação e interpretação dos conceitos, por meio de softwares próprios à disciplina, aumentando assim o grau de compreensão dos mesmos.

PALAVRAS CHAVES: Representações Matemáticas, Formação Inicial, Winplot, Ensino do Cálculo Diferencial e Integral e Semiótica.





ABSTRACT

This research is an epistemological study of mathematical representations, through educational software, in a semiotic perspective, aiming to investigate different ways of representing mathematical concepts as didactic-pedagogical dimensions, inherent to the teachers' knowledge in Initial Education, in the teaching of Calculus I – CI. From this perspective we aim to answer the question “What are the contributions of mathematical representations, in a semiotic perspective through educational software, for the knowledge of the future teacher?” The theory that supports this work is in the Teachers Education and Semiotics. The methodology adopted has a qualitative approach that we have worked with students of the first year of the Mathematics course of IGCE / UNESP/Rio Claro, in the subject CI. The analysis is based on four sub-panorama constituted by interviews made with teachers and students, working with exploring-investigative activities, developed and applied with the students, as well as observations made in the classroom of the first year of the Mathematics course. It indicates that, in the process of exploration of “signics” universe of representations, we add value to the discussion about the constitution of the future teachers' knowledge, highlighting the importance of these students/teachers to figure out the semiotics perspective, inherent to an approach that propitiates different mathematical representations in the process of investigation and interpretation of concepts, through specific software, related to the subject, increasing the understanding of teachers and students.

KEY WORDS: Mathematical Representations, Teachers Education, Winplot, Teaching of Calculus and Semiotics.





O caminhar de uma pesquisa em Educação Matemática não é exatamente linear, muitos são os percalços vividos pelo pesquisador. Muitos são os momentos de insegurança e raros períodos de certeza, existe o medo e a coragem sempre juntos, mas também existe a paixão pelo objeto de estudo, o desejo de seguir em frente de poder enfim dar a sua parcela de contribuição ao que se propõe realizar. A nossa pesquisa tem o seu próprio caminhar, mas certamente não se distancia do objetivo principal de toda e qualquer pesquisa, o que vem a ser informar, contribuir, buscar respostas. Obviamente seguimos a passos curtos, mas sempre constantes, e a cada passo um novo olhar ou um aprimoramento desse olhar. A pergunta diretriz, os objetivos, a metodologia a ser aplicada, bem como, os aportes teóricos que fundamentam o nosso trabalho, tudo segue em busca a validar, dar corpo a nossa investigação.

Introdução

O Caminhar da Pesquisa



Introdução

O Caminhar da Pesquisa

Esta pesquisa realiza um estudo epistemológico das representações matemáticas, mediadas por softwares educativos, em uma perspectiva Semiótica, objetivando evidenciar as diferentes formas representativas de conceitos matemáticos como dimensões didático-pedagógicas implícitas ao conhecimento do professor em formação inicial.

A motivação principal para desenvolver este estudo decorreu da prática docente da pesquisadora² como professora universitária, pois, com essa experiência pôde observar que uma das dificuldades enfrentadas pelos licenciandos refere-se à interpretação e construção de gráficos, assim como a compreensão dos conceitos matemáticos, envolvidos nessas construções. Sob esse aspecto torna-se relevante ressaltar que essas dificuldades ampliam-se claramente quando faz-se necessário a mudança de uma representação matemática para outra, o que fortalece a concepção de que, de uma maneira geral, parte dos alunos que chegam à universidade ainda se encontram em processos de formação de conhecimentos básicos da Matemática. Podemos identificar esse fato considerando pontos de vistas de alguns pesquisadores da área de Educação Matemática;

A fragilidade do conhecimento desses licenciandos muitas vezes passam despercebidas nos cursos de graduação e futuros professores são aprovados nos cursos de Matemática, convencidos de que possuem o conhecimento necessário para lecionar (D'AMBRÓSIO, B. 2005, p. 63).

Nesse sentido, com a perspectiva de dar um primeiro passo em nossa investigação, iniciamos leituras que contemplassem as Tecnologias Informacionais e Comunicacionais (TICs), o Ensino e a Formação Inicial de Professores, buscando compreender os processos matemáticos por meio de uma perspectiva **Semiótica**. Iniciativa essa que nos permitiu considerar alguns pontos os quais passaram a ter uma amplitude e uma importância bastante significativa na presente pesquisa.

O processo de formular a **pergunta diretriz** constituiu-se uma das etapas da pesquisa que nos inquietou, devido a sua importância frente ao desenvolvimento e direcionamento da mesma. Após alguns embates no sentido de organizar o pensamento em direção à pergunta, para a qual tivemos que formular e reformular várias vezes na tentativa de torná-la mais clara

² Margarete Farias - autora desta pesquisa





possível chegamos por fim a um consenso. Vale enfatizar que chegar a tal concordância foi um longo caminho.

A pergunta inicial: **“Quais dimensões estariam implícitas em representações semióticas do conhecimento de futuros professores de Matemática, utilizando softwares educativos, no ensino do Cálculo Diferencial e Integral I?”** não estava ainda amadurecida, havia um conjunto de palavras chaves tais como representações, Semiótica, conhecimentos do professor, ensino do Cálculo Diferencial e Integral I - CDI I que vinham ao encontro do que nós pretendíamos investigar, mas elas ainda não se harmonizavam em uma frase concisa e convincente, a pergunta ainda mostrava-se ambígua e um pouco obscura. Diante desse impasse foram muitas as discussões, leituras, idas e vindas.

Ao final desse processo, a pergunta da pesquisa ficou assim formulada: **Quais são as contribuições das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, mediadas por softwares educativos, para o conhecimento do Futuro Professor de Matemática?** Investigar tal questão significa, entre outros aspectos, investigar a importância das representações, em uma perspectiva da Semiótica, no processo de interpretação e compreensão de conceitos matemáticos³, concernentes a constituição do conhecimento por futuros professores na formação inicial, particularmente no ensino do CDI I.

Nesse processo de delinear a questão investigativa, outros questionamentos foram vislumbrados. Dentre esses, o conhecimento do futuro professor de matemática, considerando que uma grande parte dos que integram o Curso de Licenciatura⁴ não desenvolvem necessariamente os tipos de compreensões requeridas para o ensino da Matemática e o que é mais preocupante, permanecem ao longo do seu currículo aquém desses discernimentos e, como consequência, forma-se um círculo vicioso, considerando que, esses licenciados, posteriormente, poderão transmitir (não como detentores do conhecimento, mas como orientadores nesse processo) em uma sala de aula os conhecimentos adquiridos durante o seu período de formação. Obviamente que conhecimento necessário para ser um bom professor de Matemática não se limita apenas à compreensão de conteúdos específicos, pois existem outros aspectos a serem considerados⁵. Sob o aspecto do conhecimento matemático, o NCTM⁶ sugere que;

Uma componente central na preparação para o ensino da Matemática é o desenvolvimento de uma compreensão profunda dos temas matemáticos do currículo escolar e de como eles se enquadram na

³ Estudo de Limites e Derivadas de funções.

⁴ Curso de Licenciatura em Matemática.

⁵ Aspectos do conhecimento que serão devidamente especificados no Capítulo 1, da presente pesquisa.

⁶ Normas Profissionais para o Ensino da Matemática



disciplina de Matemática. Com demasiada frequência, assume-se como verdade que o conhecimento dos professores relativamente ao conteúdo da Matemática escolar está adquirido no momento em que concluem o secundário. Os professores devem ter a oportunidade de retomar os tópicos da Matemática escolar através de processos que lhes permitam desenvolver um conhecimento mais profundo. (NCTM [1], apud Veloso, 2004, p.31).

Desse modo, o fato do futuro professor adquirir um conhecimento profundo acerca do conteúdo matemático é de fundamental importância, pois, o tipo de compreensão a ser desenvolvida, não se refere à memorização de fórmulas e da execução de procedimentos, mas vai além, ou seja, visa possibilitar uma interlocução entre a Matemática e o modo de apresentá-la de uma maneira significativa. Isso implica pensar sobre estratégias de ensino e, que futuros professores estejam conscientes da possibilidade de constituírem uma compreensão mais global do conteúdo que terão de ensinar no futuro e, por conseguinte, redimensionarem seus métodos de ensino e as suas capacidades para ensinar.

Portanto, nessa perspectiva apresentamos os objetivos propostos na pesquisa, podendo ser expressos como:

- ✓ Investigar e ressaltar as potencialidades didático-cognitivas das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, mediadas por softwares educativos, no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I;
- ✓ Investigar os limites e possibilidades didático-pedagógicas das representações matemáticas na formação inicial do futuro professor de Matemática.

Apresentado os primeiros passos da pesquisa, buscaremos nos próximos capítulos, seguir uma lógica que conduza o leitor a uma compreensão gradual das discussões envolvidas nesta dissertação.

Assim, no **primeiro capítulo** versaremos sobre a **Formação de Professores**, enfatizando o **conhecimento do futuro professor** e quais as perspectivas na área da Educação Matemática para o desenvolvimento e constituição deste conhecimento, bem como a formação acadêmica do futuro professor no contexto da disciplina **CDI I**. As principais referências que permeiam esse capítulo são: Stylianides e Ball, (2004); Garcia Blanco, (2003), dentre outros.

No **segundo capítulo** discutiremos sobre **Semiótica**, dedicando a nossa atenção ao pensamento de C. S. Peirce (1839-1914), apresentando a relação triádica do signo, tendo como principais referências, Nöth, (1996), Hildebrand (2002), Santaella (2002), entre outros. Nesse contexto abordaremos sobre as relações entre **o signo consigo mesmo, o signo com o**



objeto e o signo com o interpretante, relações implícitas às categorias fenomenológicas da **primeiridade, secundidade e terceiridade**, idealizadas por Peirce, além de apresentarmos algumas aplicações da Semiótica na Matemática, baseada em pesquisas realizadas por pesquisadores tais como Otte e Steinbring (2006), buscando estabelecer uma linha de pensamento que nos conduza de maneira coerente à interpretação e análise dos dados coletados ao longo desse trabalho de pesquisa.

No **terceiro capítulo** estaremos discutindo as relações das **TICs** (tecnologias da informação e comunicação) e o processo de formação de professores, associado a uma abordagem didático-pedagógica das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica. As referências que darão respaldo a esta discussão constituem-se, principalmente, nos autores, Hitt (2003), (Kenski 2003), Lévy (1998), Miskulin 2003, Borba e Penteado (2003) entre outros.

No **quarto e quinto capítulos**, apresentaremos a **Metodologia** abordada, na qual será delineada a **Descrição e Análise dos Dados** da pesquisa. Para tanto, foram utilizados procedimentos metodológicos de coleta tais como: observação em sala de aula de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em um curso de Licenciatura do 1º. Ano de Matemática, da UNESP de Rio Claro, entrevistas e depoimentos dos alunos, entrevistas com alguns professores que ministram ou ministraram a disciplina CDI I na UNESP de Rio Claro, além da Metodologia junto aos sujeitos da pesquisa, na qual foram desenvolvidas **atividades exploratório-investigativas**, baseadas nas concepções da IMEs (Investigações Matemáticas em Sala de Aula). A **Análise dos Dados** das **atividades exploratório-investigativas, observações e entrevistas** denotadas por **sub-panoramas**, serão fundamentadas na literatura pesquisada destacando a **Semiótica** de Peirce (1839-1914).

Para concluir, serão apresentadas as **Considerações Finais**, e as **Referências Bibliográficas** adotadas no desenvolver do texto.





Capítulo 1

Formação Inicial de Professores



Capítulo 1

Formação Inicial de Professores

1.1. Apresentação

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre a constituição do conhecimento no contexto da formação de professores objetivando tecer um panorama que busque apreender as possíveis inter-relações entre o conhecimento do futuro professor de matemática e as representações matemáticas, mediadas por softwares educativo no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I.

1.2. Formação Inicial de Professores de Matemática

Uma concepção baseada no senso comum enuncia que o processo de formação inicial de professores possui como principal motivo, formar profissionais competentes para o exercício da profissão. Ao nos depararmos com essa frase, percebemos que há uma enorme complexidade subjacente a essa afirmação e que, para atingir tal complexidade são muitos os caminhos que devemos percorrer, considerando as múltiplas facetas que interferem nesse processo.

Sob o ponto de vista de Garcia Blanco (2003), a formação de professores, e especificamente a formação inicial, é um campo que intervêm em diferentes esferas, como a sociedade, instituições, pesquisadores, formadores de professores e alunos, que se encontram em constante desenvolvimento e evolução. As inter-relações dessas esferas fazem com que a formação inicial seja considerada como uma formação necessária ao desenvolvimento da profissionalização do professor de Matemática. Sendo assim torna-se natural pensar que todos os envolvidos devam ter a sua parcela de responsabilidade.

Ainda, nesse processo, a pesquisa em Educação Matemática, também intervêm de forma significativa, pois através dela advém importantes fundamentos e termos conceituais que são utilizados para fornecer e permitir elementos teóricos e metodológicos possibilitando, deste modo, estabelecer as bases para a formação de professores de Matemática. Sob esse aspecto o caminho percorrido pela pesquisa brasileira compreende um período relativamente curto, mas de grande influência para o desenvolvimento e enriquecimentos de idéias e concepções que perfazem esse importante tema. Essa conjectura está baseada no levantamento





do estado da arte da pesquisa sobre formação de professores que lecionam Matemática, realizado por Ferreira (2003)⁷.

De acordo a autora acima citada, os trabalhos produzidos abrangem questões de aspectos políticos e sociais, como também questões de fundo teórico e epistemológico. Dessa forma, esses trabalhos têm, sem dúvida, a sua parcela de contribuição para o desenvolvimento e enriquecimento no que se refere às mudanças ocorridas na formação de professores. Em confirmação a esse pensamento destacamos Fiorentini (2003), o qual assinala que os educadores matemáticos constituem-se, entre outros, em um dos grupos que buscam lançar novos olhares e quase sempre estão a aventurarem-se em busca de novos caminhos. Mas, muitas são as críticas destinadas à formação de professores, nesse caso, em particular, à formação inicial.

Ainda, segundo Fiorentini (2003), a formação de professores é um tema antigo e atual, o qual está sendo ultimamente muito debatido e pesquisado nas universidades e outros contextos acadêmicos, configurando-se de grande relevância para a Educação, passando a ser dominante tanto em encontros e congressos educacionais quanto em publicações de artigos e livros.

Nesse contexto, vamos situar algumas dimensões implícitas na constituição do conhecimento do futuro professor de matemática.

1.3. Dimensões Implícitas na Constituição do Conhecimento para a Formação do Futuro Professor de Matemática.

Atualmente, o professor é considerado peça chave no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Em nossa percepção, ao professor, além de outras funções, cabe a importante tarefa de ensinar e orientar o conhecimento dos seus alunos no domínio da matéria. Ao licenciando, o desafio de aprender e de adquirir um conhecimento matemático de nível superior que possa vir a lhe proporcionar as bases necessárias à sua formação docente. Mas, quais dimensões estariam subjacentes na constituição do conhecimento do professor de Matemática no que se refere à sua prática docente ou pedagógica? Em nossa pesquisa, torna-se fundamental e importante compreendermos e conhecermos essas dimensões. Nesse sentido,

⁷ Apresentado em artigo publicado no livro: Formação de Professores de Matemática, organizado por Dario Fiorentini (2003). Esse artigo faz uma retrospectiva sobre a pesquisa brasileira incluindo alguns comentários acerca da pesquisa internacional, na qual, segundo a autora, há uma maior evidência de trabalhos registrados a partir dos anos 70. p. 19 – 50.



buscamos na literatura referenciais teóricos que possam nos orientar a respeito desse questionamento.

Assim, autores como Ball, (2004); Garcia Blanco, (2003); Fiorentini, (2003); Rocha (2005), Melo (2000), entre outros, podem ser encontrados temas relacionados à essas multiplicidades de dimensões que definem o conhecimento do professor.

Rocha (2005) evidencia que há uma forte dispersão semântica em referência ao termo **saber docente**, o qual muitas vezes é denominado de **saber profissional**, **saber disciplinar**, **saber da experiência**, **conhecimento do professor** entre outros. Em sua pesquisa (Borges, 2002, apud Rocha, 2005), assinala que mais de 21.000 trabalhos fazem referência a questão do conhecimento docente, “o que evidencia a diversidade de enfoques e metodologias gerando uma variedade de concepções teóricas” (p. 50).

É a partir dos saberes obtido na experiência profissional que os professores avaliam sua formação inicial e julgam a relevância das reformas nos programas de ensino. Nesse sentido, os saberes da experiência são saberes dos professores, produzidos e legitimados por eles em sua prática cotidiana (TARDIF et al, 2001, apud ROCHA, 2005, p.64).

Outros autores citados por Rocha (2005)⁸, tais como, Shulman e Schön têm se preocupado pelos saberes que os professores possuem e têm mobilizado.

A partir dos últimos anos dessa década, algumas pesquisas começam a perceber o professor (ou futuro professor) de Matemática como alguém que pensa, reflete sobre sua prática, alguém cujas concepções e percepções precisam ser conhecidas. Mais que uma peça útil ao sistema ele começa a ser visto como um elemento importante no processo ensino-aprendizagem (FERREIRA, 2003, p.29).

Outra importante questão que se baseia na integração do futuro professor ao sistema educativo busca saber que Matemática deve o professor de Matemática aprender para ensinar? Atualmente, essa questão tem se tornado um tema polêmico e de difícil solução, como apontam muitos investigadores, tais como Studylianides e Ball (2004), Moreira e David (2005), entre outros.

Iniciando uma discussão, fazemos menção a duas dimensões que são ressaltadas por Garcia Blanco (2003), que se caracterizam no **conhecimento do professor**, o qual abrange três aspectos (conceituação, domínios e estrutura), e na **aprendizagem do professor de Matemática**, na qual se integra à conceituação e caracterização.

⁸ A autora informa que a citação original pertence a Ludke (2001) e Monteiro (2001)



Deste modo, fazendo alusão ao conhecimento do professor, Garcia Blanco (2003), identifica três perspectivas: **aprender a ensinar, trabalho profissional e perspectiva cognitiva**. Estas perspectivas se integram às várias relações transversais classificadas pelo autor, tais como: conhecimento e crenças, conhecimento e prática, conhecimento do conteúdo pedagógico e conhecimento de Matemática. Essa forma de estruturar o conhecimento do professor reforça a idéia de que “presentemente, procura-se estudar o conhecimento do próprio professor sobre o ensino e a forma como ele raciocina nas situações da sua prática” (LLINARES, 1994, apud Garcia Blanco, 2003).

Continuando nessa perspectiva, podemos apresentar a concepção de Ball (1988), quando prorroga que:

A definição de conhecimento matemático engloba duas dimensões, conhecimento da Matemática e conhecimento acerca da Matemática. O conhecimento da Matemática integra o que se pode designar por conhecer os conceitos e os processos matemáticos. “No caso do conhecimento acerca da Matemática este integra a compreensão sobre a natureza da Matemática” (BALL, 1988, apud Veloso, 2004 p.35).

É de senso comum entre educadores, que não basta saber Matemática para ensinar Matemática. Concordamos com esse fato e, diante dessa perspectiva, buscamos teoricamente perceber a relação entre aprender e ensinar Matemática, por meio dos estudos que ora se apresentam. Sobre essa vertente, Garcia Blanco (2003) em seus escritos, dá especial atenção ao conhecimento do conteúdo do professor da disciplina específica, tomando como referência os trabalhos de Shulman (1986).

Quanto à base teórica, proposta por Shulman et al. (1986, apud Garcia Blanco, 2003), três categorias são destacadas. A **primeira** se refere ao **conhecimento da disciplina específica**⁹, ou seja, a formação do professor deve promover um conhecimento substancial da disciplina que ensina, de modo a tornar-se hábil a responder perante os alunos as verdades mais aceitas nesse domínio (conhecimento do conteúdo). Para essa categoria foram propostas **quatro dimensões: conteúdo para o ensino; substantivo para o ensino; sintático para o ensino; crenças sobre a disciplina de ensino**. A **segunda** categoria refere-se ao **conhecimento curricular**, que inclui a compreensão do programa como todo, isto é, trata sobre a familiaridade com as formas de organizar e dividir o conhecimento para o ensino, em forma de textos, programas, livros de exercícios etc. E quanto à **terceira**, temos o **conhecimento do conteúdo pedagógico**, que faz referência a um tipo de conhecimento que é próprio do professor, no qual consiste em integrar o conhecimento da disciplina, como

⁹ Em nosso caso particular referimo-nos a Matemática





matéria de ensino, ao conhecimento pedagógico do professor, ou seja, maneiras de apresentar um conteúdo, exemplos, explicações, bem como formas de representar e compor o conteúdo, a fim de torná-lo compreensível ao estudante. Essa compreensão está associada ao conhecimento das várias concepções de professores e alunos sobre a Matemática, em particular.

Fazendo agora referência à **perspectiva a partir do trabalho docente**, Garcia Blanco (2003) destaca alguns autores como Llinares (1991), Bromme (1994), Fennema e Loef (1992), entre outros, e em suas considerações conclui que esses pesquisadores atentam pela conceituação e pelos domínios do conhecimento do professor, no que se refere ao trabalho docente, ou seja, a caracterização do conhecimento do professor está vinculada à sua prática de ensino. Neste sentido Llinares (1991, apud Blanco, 2003,), afirma que, “conhecimento profissional é uma integração cognitiva entre o conhecimento científico e o conhecimento prático, ambos procedentes de domínios e de contextos práticos diferentes” (p. 56). Este conhecimento profissional é gerado através de um processo de reflexão sobre a própria prática. Bromme (1994, apud Pablo Martínez, 2000), assinala que, o conhecimento profissional do professor abrange o conhecimento da Matemática como disciplina escolar, conhecimento sobre a filosofia da Matemática (aspecto epistemológico) e o conhecimento pedagógico geral, o qual compreende a forma de apresentar e organizar os conteúdos. Este autor também se refere ao conhecimento do professor como algo mais do que o conteúdo matemático que se discute nas aulas, incluindo também um conhecimento adicional, que capacita o professor a ensinar a Matemática de acordo suas crenças e perspectivas pessoais.

Fennema e Loef (1992, apud Bairral, 2003, p.13) consideram que o conhecimento do professor de Matemática possui componentes matemáticos (conceitos procedimentos e processos de resolução de problemas no domínio que ensinam), pedagógicos (procedimentos de ensino, de organização de aula, técnicas de motivação etc.), cognitivos (conhecimento sobre como pensam e aprendem os alunos, suas dificuldades etc.) e as crenças.

De forma explícita ou implícita, esses autores em sua maioria vão ao encontro de uma das referências mais marcantes nessa área de investigação: o trabalho desenvolvido por Donald Schön (1983, 1987) relacionado ao conhecimento profissional e, posteriormente, adaptado para o conhecimento do professor. Para Schön (1983, apud Bairral, 2003), o conhecimento de um profissional é marcado pela prática da reflexão, na qual designa por reflexão-na-ação os processos deliberativos realizados no decurso da própria ação, que permitem reformular aquilo que estamos fazendo e o que pretendemos fazer.





Schön (1987), igualmente considera que, podemos refletir sobre a ação (reflexão sobre-a-ação) pensando retrospectivamente sobre aquilo que fizemos, com o sentido de descobrir como o nosso conhecimento na ação pode ter contribuído para um resultado não esperado. Poderemos fazê-lo após a ação, em tranquilidade, ou podemos fazê-lo numa pausa (*stop-and-think*) no meio da ação, em ambos os casos, as nossas reflexões não têm uma ligação direta com a ação em curso ou recentemente concluída (*present action*). “Trata-se de refletir sobre a representação ou reconstrução a posteriore da ação” (PÉREZ GOMES, apud Saraiva, 2001, p. 55).

Nesse sentido, Garcia e Llinares (1993, apud Garcia Blanco, 2003), ressaltam a necessidade de esclarecer e caracterizar, com o auxílio de ferramentas teóricas, os conteúdos e os processos que permitem ao professor tornar significativas as situações de ensino e aprendizagem em que se envolve, ou seja, no **processo da reflexão-sobre-a-ação** está implícita uma prática reflexiva, seja ela individual ou com apoio de outros, de modo a estar integrada em algum processo de formação, visando contribuir para o desenvolvimento profissional do professor.

Certamente a discussão sobre conhecimento profissional não se limita a esses autores e esses aspectos, uma vez que, muito há ainda para se discutir, sobre essa temática.

Em relação à **perspectiva cognitiva**, são vários os trabalhos citados por Garcia Blanco (2003), referências como: Leinhardt (1989,1990) e colaboradores; Leinhardt e Smith(1985); Leinhardt e Greeno(1986); Leinhardt, Putnam, Stein e Baxter(1991), Ernest (1989), buscam elaborar um modelo que possa descrever as estruturas mentais dos professores e, nesse sentido, identificar as diferenças no que concerne ao conhecimento do professor **experiente** e o professor **novato**. Para esses pesquisadores a capacidade de ensinar é determinada por dois sistemas de conhecimento: **o conhecimento da matéria de ensino** (nesse caso refere-se ao conhecimento de Matemática, dos métodos de apresentação, procedimentos de avaliação, de atividades curriculares etc.) e o **Conhecimento da estrutura da lição**.

Ernest (1989, apud, Garcia Blanco, 2003), em particular, propõe um modelo similar ao de Shulman, no qual busca dar resposta aos fundamentos psicológicos da prática de ensino. Esse autor busca analisar variedades de conhecimentos próprias a formação do professor, o que inclui crenças e atitudes (consideradas como percepções distintas) associadas à prática docente.

Questões que buscam responder como e onde o conhecimento do professor é gerado? Como ele se organiza? Fundamentam-se da Epistemologia bem como dos aspectos





cognitivos, o que, de acordo Garcia Blanco (2003), relaciona-se com a natureza do conhecimento do professor e sua organização.

Deste modo, o conhecimento seja matemático, pedagógico, bem como o conhecimento profissional ou cognitivo do professor sempre estarão conectados ao entendimento que esse professor possui, frente ao seu ensino, e o papel que lhe é atribuído no contexto escolar. Mas será possível haver uma integração entre a Matemática escolar e a vivenciada na Universidade?

Tendo em vista essa problemática, parece-nos adequado abordar sobre duas outras questões, implicitamente envolvidas, as quais referem-se ao conhecimento matemático de futuros professores em nível secundário e, como esses professores podem ser ajudados a desenvolverem um conhecimento matemático próprio ao contexto do ensino da matemática.

De acordo com Ponte (2003), a maneira mais natural de considerar este tema seria por meio da elaboração de uma lista de conhecimentos que o futuro professor “supostamente deveria adquirir”. Aqueles que se propuserem fazer tal lista deverão considerar a existência de um grande acervo literário, tanto em nível internacional como nacional sobre o tema, podendo ser encontrado facilmente em livros, periódicos, artigos, dissertações e teses disponíveis na Internet, bibliotecas e livrarias de todo o país. No entanto, sublinhando as palavras de Ponte (2003), tais listas deixam muitas questões em aberto, devido à dificuldade em determinar especificamente e com clareza qual o conhecimento matemático de que os futuros professores precisam para ensinar de uma forma significativa. Sendo assim, como podem esses futuros professores/ estudantes desenvolverem o conhecimento matemático de que precisam para ensinar? Ou, ainda, que tipos de experiências matemáticas lhes devem ser proporcionadas pela formação inicial?

A partir desse ponto de vista, objetivamos buscar explicações a esses questionamentos, não fazendo lista e, tampouco nos preocupando em definir quais seriam esses conceitos. Nosso intuito consiste em compreender o que atualmente vem sendo discutido para formação de futuros professores de Matemática em termos de conhecimento matemático, sob o ponto de vista cognitivo e epistemológico. Resgatando, nesse momento, os objetivos da nossa pesquisa, podemos dizer que a nossa preocupação maior recai sobre as contribuições que as representações matemáticas podem desempenhar na formação inicial de professores de matemática.

Para tanto, consideremos duas importantes referências: Ball (1988) e Liping Ma (1999), cujas fontes de pesquisa buscam contribuir com a preparação matemática de futuros professores.





Em referência a Ball (1988, apud Veloso, 2004), contesta em sua tese de doutorado, a três pressupostos sobre a constituição do conhecimento matemático dos futuros professores. Segundo a autora, o **primeiro** pressuposto é apresentado como: “**o conteúdo tradicional da Matemática escolar é simples**”. Segundo a investigadora, nesta afirmação está implícita um certo reducionismo do conhecimento matemático no sentido de que, se o futuro professor sabe o básico, então é capaz de efetivamente ensinar, não precisando necessariamente avançar de modo a atingir os conceitos, as conexões e a procura de evidências matemáticas. Nesse sentido, acreditamos na necessidade de possibilitar aos futuros professores uma preparação matemática significativa que os induzam a compreensão, ao raciocínio, à justificativas de idéias e conceitos de maneira a tornar significativo o conhecimento sobre a matemática.

O **segundo** pressuposto contestado por Ball (1988, apud Veloso, 2004), trata-se sobre as “**aulas de Matemática dos ensinos básico e secundário que podem servir como preparação Matemática dos futuros professores**”, nesse caso a investigadora revela que esse pressuposto é muitas vezes defendido por grande parte dos professores encarregados dessa formação, mas o que acontece é que quando o futuro professor vê a necessidade de revisitar os conteúdos, procurando recordar conceitos, procedimentos ou simples termos, geralmente, o que encontra são regras, truques, fragmentos de definições e muitas vezes não explícitos, o que para a investigadora é compreensível já que na aprendizagem, esses estudantes tiveram como destaque a mecanização de técnicas de cálculo.

O último e **terceiro** pressuposto contestado por Ball (1988, apud Veloso, 2004), revelam que, os **estudos universitários de Matemática asseguram um conhecimento matemático para o ensino**. Diante disso, Ball (1988, apud Veloso, 2004) afirma que, mesmo o aluno que obtém sucesso em cadeiras de Matemática tradicionais não desenvolve essencialmente o tipo de compreensão requerido para o ensino, pois geralmente esse sucesso resulta da memorização de fórmulas e execução de procedimentos.

Sendo assim, para nós, passa então a existir o seguinte paradoxo, o estudante que é bem sucedido em seu curso universitário de Matemática, pode não possuir conhecimentos substanciais em relação à Matemática elementar, que obviamente deveriam constituírem-se como pré-requisitos, o que fortalece, portanto, a concepção que esses futuros professores têm a matéria memorizada e, certamente, não compreendida.

Ao concluir o seu estudo, Ball (1988, apud Veloso, 2004) explica que, embora muitos dos futuros professores do secundário, participantes em sua pesquisa tivessem sido avaliados como bons estudantes, com excelentes classificações, não mostraram desenvolver os tipos de compreensão requeridos para o ensino. As categorias analisadas pela investigadora





constituíram-se em “*subject matter knowledge*”¹⁰; tema que engloba o conhecimento sobre a Matemática como disciplina científica, o conhecimento matemático e a atitude dos estudantes perante a Matemática.

Em referência ao **conhecimento sobre a Matemática**, os alunos, poucos concebiam a matéria como um domínio no qual podia existir argumentação e interpretação, fazendo supor que fazer Matemática era simplesmente seguir procedimentos e chegar a respostas certas. No que diz respeito ao **conhecimento de conteúdos matemáticos** “poucos foram capazes de articular explicitamente significados e princípios subjacentes aos tópicos tratados” (BALL, 1988 apud VELOSO, 2004, p.42). Na percepção da referida pesquisadora, os estudantes em sua maioria revelaram-se hesitantes e usualmente apresentaram respostas incorretas, demonstrando um conhecimento fragmentado e desconexo.

Quanto à **atitude perante a Matemática**, a pesquisadora citada, detectou diferenças substanciais entre os estudantes que participaram da pesquisa. As impressões se manifestavam entre paralisados, negativos, confiantes, entusiásticos face à disciplina, embora alguns desses estudantes, não dessem conta do seu conhecimento fragmentado e até mesmo deficiente para o ensino.

Observando os resultados encontrados por Ball em 1988 e, considerando o que se apresentam nas pesquisas atuais que focam esse ponto, podemos entender que muita coisa não mudou, a problemática continua, e isso pode ser notado em Moreira e David (2005) ao expor a tensão que há sobre a formação de professores - esses autores discutem em seu livro conflitos subjacentes à Matemática Escolar e à Matemática Acadêmica. Sob esse enfoque eles assinalam que:

Se a Matemática Escolar é concebida como mero subconjunto da Matemática Científica, a tendência é reduzir a primeira à parte elementar da última, com a conseqüente desqualificação do conhecimento matemático escolar frente ao saber acadêmico. Nesse processo a Matemática Escolar acaba se tornando apenas o elemento fácil, simples e básico do complexo sofisticado edifício da Matemática Científica. Essa concepção pode implicar, ainda, a idéia de que não há muito que investigar, questionar ou refletir sobre a Matemática Escolar e associar a ela a condição de conhecimento naturalmente ‘dado’ dentro do processo de formação profissional do professor. [...] uma reflexão profunda sobre o papel da Matemática Escolar no currículo da licenciatura pode contribuir para introduzir uma referência mais direta e intrínseca da prática escolar no processo de formação inicial do professor. (MOREIRA e DAVID, 2005, p. 34-35).

¹⁰ Conhecimento do conteúdo da matéria.





Referindo-nos a Liping Ma (1999) o destaque também é dado em sua tese de doutorado, publicada em forma de livro¹¹, na qual compara o conhecimento matemático dos professores relativo aos tópicos de Matemática elementar que devem ensinar aos seus alunos.

Nesse trabalho Ma (1999, apud Veloso, 2004), retoma as objeções de Deborah Ball (1988, apud Veloso, 2004), relativamente ao **terceiro** pressuposto, ou seja, os **estudos universitários de Matemática asseguram um conhecimento matemático para o ensino**, o que no conduz a concluir que o sucesso nos cursos de formação inicial em Matemática para futuros professores não implica necessariamente uma profunda compreensão da Matemática elementar que vão ensinar.

Para chegar a essa conclusão Ma (1999, apud Veloso, 2004), entrevistou vinte e três professores americanos e setenta e dois chineses, no qual foi proposta aos mesmos, quatro questões concebidas por Ball em 1988, na sua tese de doutorado. Ao comparar o desempenho frente às respostas para as quatro questões, Ma (1999, apud Veloso, 2004), observa que os professores chineses mesmo tendo uma preparação mais rápida que os professores americanos apresentaram resultados significantes, pois de um modo geral responderam adequadamente, como se espera que um professor de Matemática o faça, ao contrário dos professores americanos que demonstraram carências preocupantes.

Segundo a referida pesquisadora, essas carências emergiram da ausência de explicitar a origem e a razão dos procedimentos adotados e, em alguns casos, a incapacidade de resolver corretamente algumas operações.

Considerando, portanto, as evidências encontradas em seu estudo, Ma (1999, apud Veloso, 2004), introduz um conceito relativo ao conhecimento matemático, o **entendimento profundo da Matemática fundamental (PUFM)**¹², o qual apresenta um grau de conhecimento próprio dos professores e que deve ser atingido no decorrer do seu desenvolvimento profissional.

Nessa perspectiva, um professor com um **PUFM**, possui competências tais como **conectividade**, ou seja, o professor deve ter a capacidade de fazer conexões entre conceitos matemáticos e procedimentos, desde conexões simples e superficiais entre partes isoladas do conhecimento até conexões complexas e subjacentes, bem como, entre operações e subdomínios matemáticos os quais refletidos no ensino, poderão evitar que a aprendizagem

¹¹ Intitulado: Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States.

¹² A Profound Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM)





dos alunos se torne fragmentada, possibilitando aos mesmos aprenderem um corpo unificado de conhecimentos.

Uma **segunda** característica associada ao PUFM, a qual o professor, segundo Ma (1999, apud Veloso, 2004), deve adquirir, é a **possibilidade de múltiplas perspectivas**, nesse caso espera-se que o professor considere os diversos aspectos de uma idéia e suas várias abordagens na resolução de um problema, observando as suas vantagens e inconveniências. Além disso, que seja capaz de fornecer justificações dessas abordagens e argumentos apresentados.

Assim, na concepção de Liping Ma (1999), essa capacidade possibilita o professor conduzir os seus alunos em direção a uma compreensão substancial da disciplina. A **terceira** competência caracteriza-se por **idéias básicas**, ou seja, os professores dotados desse profundo conhecimento possuem atitudes favoráveis à Matemática, e estão sempre atentos aos simples, mas fundamentais conceitos e princípios básicos da Matemática (por exemplo, a idéia de equação) de modo a estarem predispostos a revisar e reforçar essas idéias sempre que necessário, encorajando os alunos a fazerem o mesmo, o que pode conduzi-los a desenvolver atividades matemáticas significativas.

Por último, a **coerência longitudinal**, característica que, segundo Ma (1999, apud Veloso, 2004), habilita o professor limitar-se ao conteúdo que deve ser ensinado em certo ano de escolaridade, ao contrário possibilita ao mesmo o conhecimento profundo do currículo matemático elementar, buscando sempre valer-se de oportunidades para rever conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente, bem como o que os alunos vão estudar a seguir e, deste modo, criar oportunidades para estabelecerem bases para essa nova aprendizagem.

As pesquisas de Ball (1988), Liping Ma (1999), Moreira e David (2005) acima citados, representam trabalhos desenvolvidos na perspectiva educacional, esses autores apontam uma tensão fundamental que solicita uma postura frente a tal problemática por todos os profissionais preocupados com a formação inicial de professores e, reconhecemos esses trabalhos como extremamente positivos perante a Educação Matemática.

Vale ressaltar que não somente educadores matemáticos se preocupam com essas questões, “matemáticos puros” também fazem suas críticas e apontam sugestões acerca do tema o qual estamos a discutir - conhecimento do futuro professor de Matemática frente à sua formação.





Um exemplo de contribuição que pode ser apresentado na perspectiva matemática é o de Hung-Hsi Wu¹³ (1997). Ao lermos o texto de Veloso (2004), compreendemos que Wu (1997), adota com admiração o livro de Liping Ma (1999), deixando claro essa aprovação quando afirma que “tendo refletido em profundidade sobre o conhecimento da Matemática escolar por parte dos professores, sugiro que para melhorar a Educação Matemática dos alunos, uma ação importante a tomar é melhorar a qualidade do conhecimento da Matemática escolar dos seus professores” (WU, 1997, apud VELOSO, 2004, p.49). Nesse sentido, Wu (1997, apud Veloso, 2004), enfatiza que, o principal objetivo a ser alcançado é que esses sejam capazes de aprender Matemática e, além disso, que reflitam profundamente sobre o currículo do ensino básico e secundário.

É importante ressaltar que Wu (apud Veloso, 2004), já em 1992 fazia fortes críticas à formação dos futuros professores, o que pode ser observado quando enuncia;

Existem muitas razões para explicar a performance tão fraca de tantos professores de Matemática. Uma razão óbvia é que nunca aprenderam corretamente Matemática desde o jardim de infância até o fim da universidade. Isto é um obstáculo a possibilidade de um bom ensino porque não se pode ensinar o que não se sabe. Outra explicação para sua fraca performance é que a sua abordagem pomposa, dissecada e rígida da matéria afasta logo de início os alunos. Na maior parte dos casos, estes professores nunca viram outro tipo de ensino do que o dos seus professores, na escola e na universidade, igualmente pomposo, dissecado e rígido. Anos e anos de exposição a este mau ensino deixam naturalmente as suas marcas. Em teoria estes erros no modo de ensinar de cada um seriam eliminados em aula de pedagogia no departamento de educação, mas essa teoria falha por duas razões. A primeira, é que desfazer este problema pedagógico, requer um profundo conhecimento matemático da parte dos futuros professores e de seus formadores. A segunda, é que não se podem eliminar os efeitos perniciosos dos anos e anos de observação direta de um mau ensino num semestre ou dois de amáveis discussões sobre a maneira de ensinar. Por isso um ponto de partida para o desenvolvimento profissional dos futuros professores tem que consistir num melhor ensino em toda a universidade (e certamente nas escolas) (p.48).

De acordo com Veloso (2004), H. Wu trabalhou por oito anos, aproximadamente, com a formação continuada de professores em cursos de verão, no qual a sua principal preocupação consistia na necessidade de preparação dos futuros professores. Em adição á esse trabalho escreveu artigos os quais tratavam sobre questões educacionais como também textos de Matemática elementar muito interessante.

Sob esse último enfoque, no texto de Veloso (2004), é ressaltado um artigo onde H. Wu (1992) explica que:

¹³Do Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia, Berkeley.



No geral os cursos de licenciatura em Matemática são pensados para estudantes que futuramente farão cursos de pós-graduação e, por conseguinte esses cursos procuram dar ao estudante um embasamento para posteriores investigações em Matemática (avançada, acréscimo nosso). Sendo assim, a atenção é focada nos procedimentos técnicos em detrimento a uma apreensão mais substancial dos assuntos abordados nas disciplinas de Matemática (WU, 1992, apud VELOSO, 2004, p. 49).

Mais recentemente, Wu, (1997, apud Veloso, 2004), escreve que o problema consiste no fato que apenas 20% desses estudantes seguem para Pós-Graduação em matemática, os restantes prepararem-se para serem futuros professores e, sendo assim, seria de fundamental importância que esses 80% entendessem melhor o que aprenderam “mal” ou deixaram de aprender na escola.

Na opinião desse matemático, a educação universitária proporciona aos estudantes uma formação longa baseada em tecnicismo, mas curta na informação essencial mínima que permite aos estudantes compreender os fatos elementares sob um ponto de vista avançado e, nesse sentido, a proposta apresentada por ele é que novos cursos sejam criados para futuros professores e, que embora, qualitativamente diferentes não impliquem em menos qualidade. Ele ainda propõe que esses cursos deveriam obedecer as **seguintes condições**: fazer conexões explícitas entre temas do curso e os tópicos da Matemática elementar, colocar os temas no seu contexto histórico e, por último, situar os temas em contextos matemáticos amplos. Sendo que, essa última condição implicaria na importância dos futuros professores de Matemática adquirirem uma cultura Matemática mais ampla. As idéias de Wu foram propostas em 1997, mas dez anos depois parecem apoiar-se no contexto atual de ensino da Matemática.

Na mesma linha de pensamento de Wu (1997), Al Cuoco (2001, apud Loureiro, 2004), sugere uma lista de características que devem consistir em uma estrutura base de qualquer disciplina de Matemática na formação de professores, tais como: a organização e claros objetivos na abordagem dos conteúdos, a Matemática deve ser concebida como algo que se faz mais do que algo que se memoriza, a ênfase deve estar presentes nos raciocínios aplicados as atividades matemáticas, introduzir os alunos em uma cultura que prestigie uma abordagem histórica, bem como estar focado nas interações entre alunos e professores. Por fim tomar os problemas como precedentes às abstrações, a experiência como precedente dos sistemas de axiomas, e o raciocínio do aluno como centro de aprendizagem.

Embora tenha prescritas essas características em menção ao conhecimento do professor, Al Cuoco (2001, apud Loureiro, 2004), admite que mais importante do que listar características é pensar sobre o modo como são entendidas as idéias e, sendo assim, ele afirma



“podemos fazer listas de tópicos, mas estas serão ineficazes se não encontramos maneiras de comunicar o espírito de fazer Matemática às pessoas que vão ser professores de Matemática” (AL CUOCO, 2001, apud LOUREIRO, 2004 p. 95).

Ao destacarmos trabalhos realizados por matemáticos, achamos relevante citarmos outros dois matemáticos de indiscutível competência conhecidos por Klein (1849-1925) e Lebesgue (1875-1941), os quais escreveram importantes textos sobre a preparação dos futuros professores de Matemática. Referindo-nos inicialmente a Félix Klein (1849-1925), é importante notar que já em 1908 escrevia “A Matemática não é um conjunto de temas isolados, mas um organismo vivo” (KLEIN, 1908, apud VELOSO, 2004, p.58). Através dessa frase é possível perceber a sua preocupação em relação ao ensino da Matemática e, para nós, que nos preocupamos com a Educação Matemática e com a formação dos futuros professores é muito gratificante constatar que um matemático tão ilustre como Klein (1849-1925) dedicou tanto esforço em prol de uma melhor educação para o estudante candidato ao professorado.

Em seu livro intitulado: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*¹⁴ Félix Klein (1849-1925) mostra a sua apreensão a respeito do ensino universitário dos futuros professores de Matemática, escrevendo que:

Os universitários estavam preocupados exclusivamente com a sua ciência, sem pensar sequer um momento nas necessidades das escolas, sem mesmo se preocuparem em estabelecer ligações com a Matemática escolar. Qual era o resultado dessa prática? [...] Quando depois de ter acabado o curso, esses estudantes (acrécimo nosso) se tornavam professores e percebiam que se esperavam deles que ensinassem a Matemática tradicional à antiga maneira, e como eram incapazes (sem ajuda) de descobrir qualquer ligação entre esta tarefa e a sua Matemática universitária, recaiam rapidamente no modo habitual de ensinar, e dos seus estudos universitários restavam apenas uma mais ou menos agradável memória, que não tinha qualquer influência no seu ensino. [...] Existe agora (referindo-se ao ano de 1908) um movimento para abolir esta dupla descontinuidade, a qual é prejudicial para a escola e para a universidade. Por um lado, desenvolve-se um esforço para impregnar a matéria ensinada pelas escolas secundárias com novas idéias originadas nos avanços modernos da ciência e de acordo com a cultura moderna. [...] Por outro lado, faz-se uma tentativa para ter em conta na formação universitária, as necessidades dos professores da escola secundária. [...] O meu objetivo será sempre de mostrar as conexões mútuas entre os problemas dos vários domínios (álgebra, teoria dos números, teoria das funções, geometria,...) coisa que não é feita suficientemente nas aulas habituais, e em especial salientar as relações entre esses problemas e os da Matemática escolar. Deste modo espero tornar mais fácil para os estudantes (acrécimo nosso) adquirir aquela capacidade que considero como a verdadeira meta que devem ter os futuros professores frente aos seus estudos acadêmicos: a capacidade de retirar (em larga escala), do

¹⁴ De acordo com a transcrição feita por Veloso (2004) de parte do livro (1º. Parágrafo), esse livro foi inspirado nos ciclos de lições realizadas por Klein durante muitos anos em Gottingen, destinadas a professores e futuros professores do ensino secundário (ensino médio).





amplo corpo de conhecimentos que a universidade coloca diante deles, um estímulo vivo para o ensino (KLEIN, 1908, apud LOUREIRO, p. 58-59)

Henri Lebesgue (1875-1941), por sua vez era considerado um notável matemático e também um famoso professor e formador de professores, tema que tinha em alta conta. Certamente isso explica a razão da sua preocupação perante a formação Matemática dos professores. Essa preocupação é demonstrada ao declarar que: “desejaria que os professores fossem preparados nos seus cursos a dominar completamente o que ensinam” (LEBESGUE, apud VELOSO, 2004)¹⁵, acreditando que não é pedir muito que os professores avancem um pouco mais em relação ao ensino secundário e, nesse sentido, faz o seguinte questionamento: Quais são os prolongamentos naturais da Matemática elementar? Lebesgue (1875-1941), em seu comentário avança com algumas sugestões gerais de conteúdos para os cursos de Matemática universitários dos futuros professores:

Seria necessário que os candidatos estudassem a Matemática [...] que estabeleça conexões mais diretas entre partes aparentemente muito distantes do programa (matérias como geometria pura, teoria dos números, álgebra superior entre outras) que são de tal modo ligadas à Matemática elementar. [...] Todas em qualquer caso, deveriam ser estudadas como prolongamentos e esclarecimentos da Matemática elementar e não como degrau para subir ainda mais alto em geometria pura, em teoria dos números etc. (LEBESGUE, 1904, apud VELOSO, 2004, p. 62).

Vale ressaltar nesse contexto, que segundo Veloso (2004), o modo como Lebesgue (1875-1941), tratava as questões do ensino dos vários temas matemáticos era exemplar. Na sua metodologia de ensino comumente adotava uma perspectiva histórica ao tema apresentado, preocupando-se em apresentar as várias abordagens possíveis seja ela geométrica, gráfica, algébrica. Em suas palavras afirma que “é necessário observar, constatar em vez de deduzir, a figura encarrega-se das deduções, tal como as equações o fazem em geometria analítica” (LEBESGUE, 1901, apud VELOSO, 2004, p. 65).

Tendo em vista esse panorama, passemos agora a abordar com mais propriedade sobre a importância da disciplina Cálculo Diferencial Integral, particularmente de Cálculo I, na formação do futuro professor de Matemática.

¹⁵ Extraído de uma crítica aos concursos (da época) de recrutamento de professores - a então chamada Aggrégation



1.4. O Cálculo Diferencial e Integral I: Uma Disciplina Fundamental para a Formação de Futuros Professores de Matemática.

De acordo o que foi discutido no Item 2.3. e, trazendo a esse debate a formação de professores no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, passemos a considerar as seguintes questões: Existem relações entre a disciplina Cálculo e a Matemática escolar em nível médio e fundamental? Que conhecimentos essa disciplina pode incluir em seu percurso para a formação do futuro professor de Matemática? Quais abordagens poderiam ser utilizadas para possibilitar esse conhecimento? Questionamentos como esses nos motivaram a investigar mais profundamente Quais as contribuições das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, por meio de softwares educativos, para o conhecimento do futuro professor de Matemática no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I?

Nessa perspectiva, compreendemos ser importante que no ensino da referida disciplina, os estudantes tenham a oportunidade de estabelecer um vínculo entre os conteúdos estudados e a Matemática apresentada no ensino médio e fundamental, possibilitando aos mesmos perceberem o significado do conhecimento aprendido, de maneira que, futuramente, esses possam ser aplicados em situações diversas em sala de aula. Por conseguinte, esperamos que os conhecimentos apreendidos possam gerar transformação de caráter cognitivo no processo de aquisição de conhecimentos importantes e pela compreensão da lógica que os sustenta. Dentre esses saberes importantes, inclui-se o aprender a ensinar, de maneira que:

Ensinar didática ou metodologia pode ser feito por todas as disciplinas. [...] Investigar conceitos da disciplina em estudo, analisar a gênese de determinado conhecimento, de sua linguagem ou, ainda, de suas aplicações dentro ou fora da Matemática, podem ser alguns exemplos de como as disciplinas específicas, sem abandonar os conteúdos que valorizam, podem formar o professor no sentido amplo (DINIZ e SMOLE, 2002, p 42).

Esse enfoque impõe ao professor formador e ao futuro professor, um constante diálogo sobre o que é apreendido em termos de conteúdos específicos, articulando o que se propõe a ensinar na matemática escolar e o que se estuda na universidade, proporcionando ao professor em formação uma maior proximidade da realidade que o espera, isto é, a realidade que terá que enfrentar a cada dia de sua vida profissional.

De acordo Barufi (2002), no curso de Matemática, Bacharelado ou Licenciatura, o CDI I é concebido como uma disciplina básica, pré-requisito para várias outras. O Estudante quando chega à Universidade e começa a estudar Cálculo, espera conseguir uma integração com o que trabalhava na escola secundária. Mas, para a maioria dos estudantes, a Matemática



da Escola Secundária pouco ou nada tem a ver com o que lhes é apresentado no Cálculo. E, o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece constituir uma grande dificuldade. Entretanto, sendo o Cálculo uma disciplina considerada tanto pelos professores como pelos estudantes de grande relevância, porque provoca tanta frustração? Tanto do ponto de vista dos professores como dos próprios alunos?

Nesse sentido, é importante ressaltar que nas escolas de Ensino Médio normalmente não são mostrados textos relativos ao que se é apresentado no Cálculo Diferencial e Integral. Antes de chegar à Universidade, os alunos trabalharam alguns conceitos matemáticos muitas vezes de maneira isolada dando a impressão de a Matemática ser estática e, quando esses alunos se defrontam com assuntos tais como Limite, Derivada, Integral, por exemplo, percebem que não é assim, a Matemática expressa movimento e já no primeiro curso de Cálculo são defrontados com um tratamento lógico-formal dedutivo.

Nesse nível os alunos aprendem Cálculos Infinitesimais diferente da escola básica. A abstração de trabalhar com a noção de infinito traz ao aluno, muitas vezes, decepção e despreparo, pois o **Cálculo Diferencial e Integral** também chamado de **Cálculo Infinitesimal** ou simplesmente **Cálculo** se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido), de maneira que o Cálculo tem como objeto de estudo às funções matemáticas, prioritariamente o movimento ou crescimento de fenômenos variáveis¹⁶, no entanto, essas noções normalmente não são exploradas no Ensino Médio, o que não é de se surpreender que os estudantes ao se depararem com esses os conceitos, próprios da disciplina, expressem estranhamento.

No Brasil, o ensino do Cálculo tem sido responsabilizado por um grande número de reprovações e de evasões de estudantes universitários. A preocupação por parte dos pesquisadores a respeito do ensino do Cálculo não é recente. Os temas mais abordados têm girado em torno do uso de metodologias que possam motivar e desenvolver a capacidade criadora e perceptiva do aluno no uso da modelagem, do trabalho de projetos, da utilização do computador etc.

Pesquisas desenvolvidas, mostrando as dificuldades que os alunos apresentam no início da universidade, quando começam a estudar Cálculo Diferencial e Integral I, buscam identificar quais os principais fatores para tais obstáculos. Segundo Olímpio Junior (2005):

Os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral têm se constituído em objeto de investigação por toda uma classe de

¹⁶ Definições encontradas em <http://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo> . Acesso em 09 de Setembro de 2006.



pesquisadores em Educação Matemática no Ensino Superior, no Brasil e no Exterior, principalmente a partir da década de 1980. Sintomas das dificuldades emergentes em tais processos - e que continuam desafiando alunos, educadores e pesquisadores atuantes neste nível de ensino - materializam-se de maneira bastante preocupante, por exemplo, pelos elevados índices de reprovação e de desistência da disciplina, os quais, possivelmente, num efeito colateral perturbador, contribui para a manutenção dos singulares índices de evasão dos cursos de Licenciatura/Bacharelado em Matemática no cenário brasileiro, em particular naqueles vinculados às universidades públicas (p.1).

Villarreal (1999), em sua pesquisa de doutorado, também aborda sobre a problemática do ensino do Cálculo mostrando às preocupações ligadas às dificuldades subjacentes a forma do professor ensinar e as dificuldades do aluno aprender. Em uma das suas discussões, ela aponta¹⁷ que, uma das características básicas que permeiam as aulas de Cálculo, são: “aulas expositivas, centradas na fala do professor, conteúdos apresentados como pontos inquestionáveis, sem relação com situações reais, apresentações caracterizadas pela sequência: definições, enunciados, teoremas e demonstrações, seguidos de cálculos e exercícios” (p.24) acrescentando que tal estrutura é refletida nos livros de Cálculo¹⁸. Nesse sentido: “a formalização precoce gera dificuldades aos estudantes, sendo ingrediente fundamental para o fracasso do ensino e da aprendizagem da Matemática, particularmente do Cálculo I (acréscimo nosso), por exemplo, nos elevados índices de reprovação, insucesso, abandono e repetição” (NEMIROVSKY, 1993, PALIS, 1995, apud VILLARREAL, 1999, p. 24).

Em relação às dificuldades, elas não se limitam apenas as acima citadas, refletem-se também ao grande número de estudantes presentes em sala de aula, principalmente no curso de Cálculo I, o que dificulta a relação entre professor-aluno, em termos de comunicação individual, no sentido de o que pensa o aluno, suas compreensões, suas dúvidas, que visão ele tem sobre determinado conceito ou procedimento matemático.

Em particular, nos cursos de Cálculo I, o professor ao introduzir idéias abstratas como a noção de **Limite**, por exemplo, constitui para um estudante recém chegado, uma fase difícil, porque implica em uma mudança profunda na sua maneira de raciocinar obrigando-o a pensar de maneira diferente ao que estava acostumado. “Na própria notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ o sinal de igualdade não tem o mesmo significado com o qual o aluno estava acostumado na escola

¹⁷ Fundamentada no texto de Franchi (1995)

¹⁸ Hoje, alguns livros de Cálculo como o de Howard Anton, Stuart já apresentam mudanças significativas em relação à perspectiva apresentada por Villarreal em 1999. Entretanto poucas mudanças ocorreram em sala de aula, para o ensino do Cálculo.



básica, pois envolve a idéia de ‘arbitrariamente próximo’, que é completamente nova” (CÂNDIDO, BARUFI e MONTEIRO, 2004).

Outra questão apontada pelas autoras acima referidas constitui-se no fato que, “cada estudante, considerado como um futuro profissional de sua área, precisará certamente desenvolver habilidade e competência na utilização da tecnologia” (CÂNDIDO, BARUFI e MONTEIRO, 2004, p.2). Nesse sentido, concebemos a disciplina Cálculo I como básica, ampla, integradora e com um farto e rico material, envolvendo conceitos matemáticos que podem ser explorados pelo professor na sua prática em sala de aula. Além do que, o Cálculo favorece esse tipo de desenvolvimento.

Logo, podemos reconhecer que através de uma abordagem constituída de significado, a qual essa pesquisa se propõe a mostrar, poderá ser possível contribuir com o conhecimento do futuro professor no contexto do Cálculo Diferencial e Integral. Conscientes de que, para desenvolvermos o conhecimento não basta uma simples imposição de conteúdos ou exposição de metodologias diversas, mas, esse processo envolve toda uma estrutura complexa de experiências que podem ser refletidas com a ajuda do professor e do cenário de ensino, podendo assim contribuir para a constituição do conhecimento, nesse sentido, acreditamos que, para que esses conhecimentos se constituam, torna-se necessário estarmos sempre aberto a metodologias problematizadoras, contemporâneas e interessantes, as quais possam deflagrar uma ação cognitiva em busca à uma maior compreensão por parte dos estudantes (futuros professores) dos processos e conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, a partir do estudo de Garcia Blanco (2003), é possível perceber que o os conhecimentos necessários ao professor de Matemática podem ser caracterizados em: **Conhecimento/ aprender a ensinar**, o qual é destacado o conteúdo específico como o conhecimento proveniente do ensino e aprendizagem de noções matemáticas concretas. **Conhecimento/ prática profissional**, no qual as principais idéias a ressaltar são que o desenvolvimento do conhecimento relacionado à prática profissional está vinculado à participação e a reflexão, pois quando o professor pensa e reflete sobre o que acontece em sala de aula, ele produz um conhecimento, o que nos faz pensar que **a prática do trabalho do professor pode transformar a experiência docente**. Por fim, o **Conhecimento cognitivo**, no qual pesquisadores buscam elaborar modelos que possam descrever estruturas mentais dos futuros professores, de forma a identificar diferenças no que concerne ao conhecimento do professor experiente e do professor novato, bem como ao conhecimento apreendido.

Considerando, portanto, as abordagens e concepções apresentadas por vários pesquisadores e estudiosos revelados nesse capítulo deduziram que questões tão complexas,





como investigarem e evidenciar os conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática, não apresentam soluções simples, mas, alguns pontos ficam em evidência, como por exemplo, a importância do professor obter um conhecimento amplo e integrado da Matemática, bem como o de desenvolver uma atitude de investigação e de permanente questionamento sobre o que está sendo ensinado.

No próximo capítulo estaremos discutindo sobre Semiótica, e as principais aplicações da Semiótica ao ensino da Matemática. Neste capítulo apresentamos um breve panorama sobre como as representações matemáticas podem ser compreendidas sob a perspectiva da Semiótica Peirceana e quais as potencialidades didático-cognitivas das representações na constituição do conhecimento do futuro professor de Matemática.





Capítulo 2

Uma Introdução à Semiótica



Capítulo 2

Uma Introdução à Semiótica

2.1. Apresentação.

"Those who can, do. Those who understand, teach"
(Shulman, apud Kathryn F. Cochran, 1997, p. 14)

Neste capítulo pretendemos buscar alguns esclarecimentos sobre Semiótica na perspectiva de Charles Sanders Peirce e, nesse processo, tentar compreender o significado e as inter-relações existentes entre signo, objetos e representações e suas implicações para os processos de ensinar e aprender Matemática.

Essa abordagem se faz necessária, pois se pretendemos analisar as contribuições das representações matemáticas e sua importância na constituição do conhecimento matemático na formação de futuros professores, por meio do contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação, as quais estão inteiramente inter-relacionadas à ciência Matemática e a uma linguagem lógica, é importante que compreendamos os princípios signícos das linguagens verbais e não verbais desse universo matemático.

2.2. Dando os Primeiros Passos... O que é Semiótica?

Segundo Santaella (2004a) o nome Semiótica vem da raiz grega Semeion, que significa signo. Portanto, Semiótica é a ciência dos signos - os signos da linguagem ou em termos mais gerais a Semiótica é a ciência das linguagens. Nesse sentido, fazemos uma ressalva, de maneira a esclarecer que tipo de linguagem a autora se refere. Existem diferenças entre língua e linguagem e, sendo assim, existem as linguagens verbais e não verbais. A mais evidente e natural corresponde à língua nativa, materna ou pátria e que, segundo a referida autora, tendemos a desaperceber que esta não é a única forma de nos comunicarmos com o mundo e com quem está ao nosso redor.

Muitas vezes esquecemos que a nossa condição de sobrevivência neste planeta está intrinsecamente relacionada a uma rede múltipla de linguagens, ou seja, através da "leitura e/ou produção de formas, volumes, massas, interações de forças, movimentos; que somos também leitores e/ou produtores de dimensões e direções de linhas, traços, cores... enfim, também nos comunicamos e nos orientamos através de imagens, gráficos, sinais, setas,





números, luzes, da linguagem do computador, bem como, por meio de objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, através do olhar, do sentir e do apalpar. “Somos uma espécie animal tão complexa quanto são complexas e plurais as linguagens que nos constituem como seres simbólicos, isto é, seres de linguagem”. (SANTAELLA, 2004a, p. 10).

Vale notar que o que diz a autora é que não existe uma exclusividade da língua materna como forma de linguagem ou como veículo comunicativo, mas da existência de muitas outras formas de interação entre o ser humano e o mundo que o rodeia. A autora ainda explicita que, a língua, como meio de comunicação é privilegiada devido a uma subordinação histórica, o que veiculou uma crença de que a única maneira de conhecimento, de cultura, interpretação do mundo são as transmitidas pela língua, na sua manifestação falada ou escrita.

O saber analítico, que essa linguagem permite, conduziu a legitimação consensual e institucional de que esse é o saber de primeira ordem, em detrimento e relegado para uma segunda ordem todos os outros saberes, mais sensíveis, que as outras linguagens, as não verbais, possibilitam (SANTAELLA, 2004a, p. 11).

Interpretando essa máxima, faremos um breve recorte histórico baseando-nos inicialmente nas palavras de Lévy (2006), o qual aponta em seu texto que a oralidade primária nos leva a palavra antes que uma dada sociedade tenha adotado a escrita, logo o fator primordial consistia na gestão da memória social, as lembranças dos indivíduos, no qual o saber era transmitido oralmente. A saber, a oralidade primária está diretamente ligada ao dizer pela forma do “conto” danças nos gestos de variadas e múltiplas habilidades técnicas. Nada era transmitido sem que fosse incansavelmente observado, escutado, repetido, imitado, atuado pelas pessoas ou por uma comunidade como um todo.

A persistência da oralidade primária nas sociedades modernas não se deve ao fato de que ainda falemos (o que está relacionado com a oralidade secundária), mas à forma pela qual as representações e as maneiras de ser continuam a transmitir-se independentemente dos circuitos da escrita e dos meios de comunicação eletrônicos. (LÉVY, 2006, p. 84).

Na compreensão, desse autor, a oralidade primária sobreviveu enquanto mídia da escrita, nos próprios textos. E quando enfim a oralidade primária “desapareceu”¹⁹, devido à literatura, há de certo modo uma busca, talvez como uma vocação paradoxal o de reencontrar a força ativa e a magia das palavras.

¹⁹Em termos, pois nós entendemos como um paradigma, pois de certo há de existir sociedades, mesmos que raras, ainda se comunicam oralmente devido ao fato de não saber ler e escrever.





A oralidade secundária está relacionada ao código da palavra que é complementar ao da escrita. E, assim sendo “através da escrita, o poder estatal comanda tanto os signos quanto os homens, fixando-os em uma função, designando-os para um território, ordenando-os sobre uma superfície unificada”. (LÉVY, 2006, p.88). Com esse adágio Lévy (2006) afirma que, por meio da escrita as representações se mostram em outros formatos que não o canto e as narrativas e com maiores possibilidades, se essas representações advêm do manuscrito ao impresso podendo explorar o uso dos signos escriturários de modo a ser amplamente disseminadas na sociedade.

As **representações** passam então a ser difundidas e perdurar independentemente da memória, o que torna possível registrar os números e as palavras dispostos em tabelas e listas. A tecnologia intelectual de fundamento escriturário como ressalta Lévy (2006), admite o curso das “livres” e pequenas representações não subjacentes às narrativas, pois com seus bancos de dados de caracteres diversos passam a ser armazenada em memórias óticas ou magnéticas, e a Informática simplesmente aumenta, socialmente, a quantidade de informações modulares e fora de contexto.

A partir do momento em que a tarefa da memória não mais se refere somente a lembranças humanas, os longos encadeamentos de causas e efeitos perdem uma parte de seus privilégios de conectar representações entre si. Segundo Lévy (2006), as lições de psicologia cognitiva, a memória nos permite compreender, de uma forma mais concisa, como as sociedades que não possuem meios de armazenamento como a escrita, o cinema ou a fita magnética codificou os seus conhecimentos. Em seu texto ele ressalta que as representações que têm mais chance de sobrevivida deverão ser essencialmente aquelas que atenderem os seguintes critérios:

- “As representações serão ricamente interconectadas entre si, o que exclui listas e todos os modos de apresentação em que a informação se encontra disposta de forma modular, muito recortada”;
- “As conexões entre representações envolverão, sobretudo, relação de causa e efeito”;
- “As proposições devem ser dirigidas aos membros da sociedade fazendo referências a domínio do conhecimento concretos e familiares de maneira que os membros dessa sociedade possam ligá-las a esquemas pré-estabelecidos”;
- “Essas representações deverão manter estreitos laços com o cotidiano, com os “problemas da vida” envolvendo o sujeito e carregadas fortemente de sentimentos e emoções” (p.82).

A encenação da ação, as apresentações “dramáticas” cedem lugar, em parte, a disposições sistemáticas. “A forma hipotético-dedutiva, ou ainda as cadeias de inferência





designadas a encontrar todas as conseqüências de um pequeno número de princípios mostra outra forma de representação, uma outra forma sistemática de representar” (LÉVY, 2006, p.93). Nesse caso, o referido autor toma como ilustração os Elementos de Euclides, aludindo o fato das representações constituírem-se prioritariamente em figuras, construída por características fortemente intuitivas. Com efeito, os Elementos de Euclides apresentam a geometria como um sistema lógico, no qual, as definições, os axiomas ou postulados conceitos e proposições são admitidos sem demonstração constituindo-se assim, em fundamentos especificamente geométricos, baseados na existência dos entes fundamentais: ponto, reta e plano.

Outra característica inerente a esse sistema relaciona-se ao fato de que os teoremas não aparecem agrupados ao acaso, mas antes expostos em uma ordem perfeita. Cada teorema resulta das definições, dos axiomas e dos teoremas anteriores, de acordo com uma demonstração rigorosa. A “partir então da negação do quinto axioma de Euclides e a introdução do conceito de conjunto não-cantorianos” (HILDEBRAND, 2002, p.43), foi possível, segundo o autor citado, desvincular a idéia de percepção espacial Matemática das Geometrias de maneira que por meio da teoria axiomática, tornou-se possível operar matematicamente e de forma generalizada, na qual a escrita é a principal ferramenta para tal ação.

A oralidade e a escrita são, portanto linguagens essenciais e intrínsecas à nossa vida. A escrita, por sua vez, constitui-se na forma representativa mais freqüente e estável de transmitir a conversação, os assuntos de caráter prático vivenciados em nosso dia a dia, além de, em um contexto matemático, pois, “permitem construir modelos absolutamente abstratos e totalmente desvinculados do mundo real. Esses são baseados em signos, operações e estruturas, muitas vezes impossíveis de serem associados às coisas da percepção intuitiva” (HILDEBRAND, 2002, p.43-44). Nesse sentido, Lévy (2006), sublinha: “Não existe teoria enquanto gênero de conhecimento socialmente estabelecido sem o uso regular da escrita” (p. 92). No entanto, conforme Santaella (2004a), em todos os tempos, os grupos humanos trazem o legado de outras e distintas linguagens verbais e não verbais como a linguagens dos sons, dos surdos-mudos, dos números, etc. O que implica que, quando nos referimos à linguagem nos referimos a uma variedade de modos em termos de comunicação e de significados, o que inclui a linguagem verbal falada, mas abrange também a linguagem da Matemática e tantas outras.

Com essa percepção compreendemos que “é no homem e pelo homem que se opera o processo de alteração dos sinais em signos e linguagens” (SANTAELLA, 2004a, p.13). Como





já mencionado, o termo linguagem se projeta às linguagens binárias (a linguagem do computador) ou até tudo que toca os sentidos do homem, como a linguagem da natureza, do nosso corpo e até mesmo a linguagem do silêncio, de modo que as linguagens e o homem fazem parte de um sistema no qual um depende do outro.

Voltando ao debate sobre o que é Semiótica, alguns elementos podem ser acrescentados; Segundo Santaella (2002), a **Semiótica** também chamada de **Lógica**, subdivide-se em três ramos: A **gramática especulativa**, a **lógica crítica** e a **metodêutica ou retórica especulativa**. E, dentro desse contexto;

A gramática especulativa é o estudo de todos os tipos de signos e formas de pensamento que eles possibilitam. [...] A lógica crítica apoiando-se nos diversos tipos de signos estuda os modos de inferências, raciocínios e argumentos (abdução, indução e dedução) estruturados por meio dos signos. [...] A metodêutica, por sua vez, dispõe-se a analisar os métodos originados por cada um dos tipos de raciocínio, baseando-se na legitimidade de seus argumentos. (SANTAELLA, 2002, p.3).

Os três ramos da semiótica acima designados estabelecem entre si uma dependência, a qual advém dos níveis mais baixos aos mais altos de classificação. Neste caso, a gramática especulativa é considerada a base das outras duas. Em nossa pesquisa, apesar desses três ramos estarem inter-relacionados, nos restringiremos a abordar a gramática especulativa, considerando seu caráter geral em relação ao estudo dos signos e conceitos abstratos, permitindo-nos descrever, analisar e avaliar qualquer processo existente de signos verbais e não verbais como a fala, escrita, imagens fixas e em movimento. Nesse contexto buscaremos compreender as representações matemáticas por meio das categorias de primeiridade, secundidade e terceiridade.

2.3. As Categorias Fenomenológicas: O “Três” como Fundamento

Peirce (apud Santaella, 2004a), a partir de uma complexa relação entre a noção de experiência e a doutrina que compõe toda a estrutura do pensamento, concluiu que tudo que aparece à consciência assim o faz numa gradação de três propriedades, que foram por si denotadas: 1) **Qualidade**, 2) **Relação** e 3) **Representação**, sendo que posteriormente o termo **Relação** foi substituído por **Reação** e o termo **Representação** por uma denominação mais ampla de **Mediação**. Para fins científicos Peirce (1839-1914) preferiu estabelecer esses termos com as seguintes terminologias: **Primeiridade**, **Secundidade** e **Terceiridade** onde o terceiro pressupõe o segundo e o primeiro. O segundo pressupõe o primeiro e o primeiro é





livre e qualquer relação superior a três passa a corresponder uma complexidade dessas tríades. Segundo Santaella (2004a), “essas três categorias são, pois o que poderíamos chamar de três modalidades possíveis de apreensão de todo e qualquer fenômeno esteja ele ocorrendo na física, na matemática, biologia, na música entre outros” (p.42).

A partir de trechos de cartas enviadas para uma senhora chamada Lady Welby, Charles S. Peirce (1839 - 1914) revela a sua preocupação em classificar e reduzir toda uma pluralidade de fenômenos ao número três. Ouçamos Peirce:

Sabe senhora que sou particularmente favorável à invenção de palavras novas para a tradução de idéias. Não sei se o assunto que denomino Ideoscopia pode ser considerado uma idéia nova, mas o vocábulo fenomenologia é empregado em sentido diverso. A Ideoscopia consiste em descrever e classificar as idéias que estão na experiência ordinária, ou que naturalmente brota em conexão com a vida comum, independentemente de serem válidas ou não e independentemente de sua feição psicológica. Dedicando-me ao estudo do assunto, já há muito tempo, fui levado após apenas três ou quatro anos de dedicação, a colocar todas as idéias em três classes, as da Primeiridade, Secundariedade e Terciariedade. Esse tipo de noção me é tão pouco agradável como para qualquer outra pessoa e, durante muitos anos, tentei reduzir-lhe a importância e afastar-me dele. Contudo, de há muito ele me conquistou por completo [...]. Eu definiria Primeiridade, Secundariedade e Terciariedade em termos seguintes [...].(p.135-136).

Por **primeiridade**, Peirce (1839 - 1914), classificou por impressão total, não analisada, provocada por qualquer multiplicidade, não vista como fato concreto, mas simplesmente como uma **qualidade**, mera possibilidade positiva de surgimento, é uma idéia de primeiridade, ou seja, aquilo que é o que é sem referência a mais nada.

Logo o sentimento de **primeiridade** é um sentimento imediato, imperceptível, e original de modo a não ser segundo para uma representação. De acordo com Santaella (2004a) o mundo para uma criança nos seus primeiros anos de vida, antes que ela tenha desenvolvido quaisquer distinções, ou estabelecido qualquer consciência da sua própria condição de existir nesse mundo, implica em o primeiro, o novo, o presente, o livre, lembrando-se sempre que, qualquer descrição desse estado deve fundamentalmente torná-lo falso.

Para nós adultos, o sentimento de primeiridade existe, mesmo que não possamos descrever - lo, o que não significa que não possamos apontá-lo ou imaginar tal sentimento.

A idéia de **primeiridade**, portanto corresponde a um ponto no tempo, no qual nenhum pensamento se pode colocar e do qual nenhum pormenor se pode isolar, em outras palavras, corresponde a uma percepção indiferenciada, como vaga impressão de algo.





Em um contexto matemático, poderíamos ilustrar usando o fato de um estudante visualizar na lousa o desenho do gráfico de uma função, aquele traço (uma linha, uma reta, uma curva) por si só, sem fazer referência a nada, mas simplesmente a imagem do traço registrado na lousa pela professora corresponde a uma primeira apreensão, uma **primeiridade**.

O primeiro avistar ou inferência (mesmo não consciente desse estado) de um dado objeto matemático, no caso particular o desenho na lousa observado pelo estudante, essa primeira apreensão, antes que ele faça qualquer relação com qualquer outro objeto matemático, corresponde ao estado primeiro. Sublinhando o que diz Santaella (2004a), entendemos que esse estado, o primeiro, vem a significar uma finíssima película de mediação, entre os estudantes e os fenômenos, mas já suscetivelmente colocados, simplesmente por já pertencer a este mundo ou especificamente a um dado contexto. Nesse sentido, Santaella (2004a) reafirmando as palavras de Peirce assinala que:

Sentimento é, pois, um quase signo do mundo, nossa primeira forma rudimentar, confusa e indeterminada de qualificar as coisas. Um estado de quase lá, que indica uma possibilidade de ser e quase que imediatamente caminha para o que já é, e nesse caminhar, já chegando, ou sendo. Entramos no universo do segundo (p. 46-47).

A **secundidade** é entendida como a experiência, a energia dispensada sobre um objetivo ou uma idéia em particular. Santaella (2004a) assinala que, estamos sempre a esbarrar em fatos do nosso dia a dia, fatos que nos são externos, acontecimentos reais e que invariavelmente não se rendem ao nosso bel prazer. O simples fato de estarmos vivos implica uma reação em relação ao mundo, pois existir é fazer parte de uma conexão, ocupar um lugar na interminável teia de imposições desse mundo em que habitamos, de modo que agir e reagir, ocupar o nosso lugar no tempo e no espaço confrontar-nos com outros seres, com seus propósitos e objetivos, faz parte da nossa vida.

Certamente, onde quer que haja um fenômeno, há uma qualidade, isto é uma primeiridade. Mas a qualidade é apenas uma parte do fenômeno, visto que para existir, a qualidade tem que estar encarnada numa matéria. A fatalidade do existir (secundidade) está na corporificação material. (SANTAELLA, 2004a, p.47).

Em outra perspectiva, a secundidade, poderia ser interpretada como a fase de busca interpretativa, de indução frente a uma dada informação. O interpretante à secundidade envolve conflito desencadeando relações indiciais (referência). Por conseguinte, como assinala Santaella (2004a), qualquer sensação já é secundidade: ação de um sentimento sobre nós e nossa reação específica, sobressalto do eu para com o estímulo.





Fazendo aqui uma ressalva, e voltando ao desenho na lousa, não como elemento de análise, mas apenas como efeito ilustrativo, revivamos o instante em que o estudante vê o traço na lousa, e imediatamente relaciona-o a uma parábola, por exemplo, gráfico de uma função do segundo grau. Esse é o estado segundo, pois, “no plano da **primeiridade** a lógica é a da mera probabilidade de ser, a força que não realiza.” (PEIRCE, apud SANTAELLA, 2004a, p.46). Mas, a sensação ou qualquer reação gerada nesse breve instante provocada por esse sentimento quando esse estudante principia uma interpretação, diante a imagem desse objeto matemático apresentado na lousa, identificando-o a algo real e concreto considerando, por conseguinte, suas particularidades e/ou singularidades, é o estado de **secundidade** que se manifesta nessa condição de confronto, na busca de compreensão associada ao caráter de observação em relação aos acontecimentos que estão lhe sendo impostos. É também, o momento de adentrar em um estado diferenciado de percepção, no qual outras potencialidades de informação e aprendizagem poderão manifestar-se. Mas, renovar hábitos, sair de um estado perceptivo, ou que seja, de um estado qualitativo, exige aplicação física e/ou mental. Posteriormente essa passagem pode se tornar mais simples dada à familiaridade obtida pelo estudante no desenvolvimento dos exercícios, e tarefas propostas pelo professor, sobre essa temática.

Simultaneamente ao estado de receptividade do estudante, cabe ao professor preparar as tarefas que mais favoreçam a compreensão do seu aluno, à descobertas de novas maneiras que possam solucionar o dado problema. Nesse constante exercício de exploração pode esse estudante transformar o seu modo de pensar. Evidenciamos, portanto que, nesse momento de confronto e só nesse momento, haja o estabelecimento de uma suposta compreensão que lhe permita relacionar conhecimentos anteriores aos novos adquiridos. Sob esse aspecto Peirce (1839 - 1914) assinala;

A idéia típica da Secundariedade é a experiência de esforço privado da idéia de objetivos. Cabe dizer que não há uma experiência dessa ordem, que sempre está implícito um propósito quando um esforço se realiza. [...] A existência da palavra ‘esforço’ é demonstração suficiente de que as pessoas supõem possuir uma idéia; e é o quanto basta (p.137).

Assumindo, portanto, que a idéia principal de **secundidade** é a experiência, faz-se necessário esclarecer o que vem a ser experiência para Peirce (1839 - 1914). Ele diz: “Experimentamos vicissitudes, especialmente, é a compulsão, a absoluta coação sobre nós de alguma coisa que interrompe o fluxo de nossa quietude daquilo que estivemos pensando que constitui a experiência” (PEIRCE, apud SANTAELLA, 2004a, p. 49).



Podemos assim interpretar que, experiência é a vida que segue, é tudo aquilo que de uma maneira ou de outra o devir da vida nos impulsionou a refletir, é o que induz o nosso pensar, retirando-nos do que estamos costumeiramente a vivenciar. E na nossa ação, diante de um fenômeno é importante notar que essas reações à realidade, como afirma Peirce (apud Santaella, 2004a, p.50), já se constituem em respostas significadas ao mundo, as quais já deixam rastros de maior ou menor intensidade quando nos referimos à nossa experiência.

Assim em uma prática e experimentação contínua é configurado o ambiente de exploração que vai permitir o desenvolvimento de idéias e concepções, de modo que o conhecimento é elaborado mediante uma percepção sýnica. Se a nossa existência depende da experiência, acreditamos que a mesma esteja implícita no processo de ensino e aprendizagem de cada um de nós.

A **terceiridade** implica em generalidade, continuidade, crescimento e inteligência, mas, a mais elementar idéia de **terceiridade** é aquela de um signo ou representação. Em outras palavras, a **terceiridade** é uma **relação triádica**²⁰ existente entre o signo, o objeto e o pensamento interpretante, ou seja, um signo coloca um segundo - seu objeto em relação cognitiva para com um terceiro - o interpretante.

Nesse sentido, Peirce (1839 - 1914) esclarece que, se pensarmos em signo no seu mais amplo sentido seu interpretante não será necessariamente um signo²¹. Nessa medida, o simples olhar atento do estudante, referindo-nos ao exemplo dado anteriormente, já está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, ou seja, a caminho da terceiraidade, sob a qual ele poderá interpretar o dado traço que corresponde à uma parábola de acordo com uma suposta lei ou conceito matemático. Assim sendo, baseando-nos nas anotações de Santaella (2004a), corroboramos com a concepção de que “é sempre o resultado de uma ação cognitiva, produto de uma intervenção sýnica que se torna possível a nossa orientação no espaço em busca de um reconhecimento e acessão frente às coisas, que só o signo permite” (p.51).

O homem só conhece o mundo porque, de alguma forma, o representa e só interpreta essa representação numa outra representação, que Peirce denomina de interpretante da primeira. Daí que o signo seja uma coisa de cujo conhecimento depende do signo, isto é aquilo que é representado pelo signo. Daí que para nós, o signo seja o primeiro, o objeto um segundo e o interpretante o terceiro (e esse interpretante não corresponde a necessariamente um sujeito, acréscimo nosso). Para se

²⁰ A relação triádica implica que o signo pode ser analisado, em si mesmo, nas suas propriedades internas, ou seja, no seu poder de significar. Pode ser analisado na sua referência àquilo que ele indica, se refere ou representa; e nos tipos de efeitos que está apto a produzir nos seus receptores, isto é, nos tipos de interpretação que ele tem o potencial de despertar nos seus usuários.(SANTAELLA, 2005, p.5)

²¹ A idéia de signo será mais amplamente discutida no Tópico 2.4

conhecer o homem se faz signo e só interpreta esses signos traduzindo-se em outros signos (SANTAELLA, 2004a, p.52).

Deste modo, entendemos que as palavras para significar têm que necessariamente estarem conectadas com outras palavras, isto é, para compreendermos um dado pensamento precisamos interpretá-lo com outro pensamento, uma representação em outra representação, onde o signo faz o papel de mediador, pois de um lado representa o que é externo a ele, o seu objeto, e do outro lado dirige-se a alguém, o interpretante que por sua vez processará a mensagem advinda do signo. E esse processo ocorre infinitamente.

Quanto ao fato de sermos signos, é algo que nos parece bastante complexo, mas Peirce (apud Santaella, 2004b) nos explica;

Decorre da nossa própria existência (que é provada pela ocorrência da ignorância e do erro) que tudo que está presente a nós é uma manifestação fenomenológica de nós mesmos. Isso não impede que seja também a manifestação de algo fora de nós. [...] Quando pensamos, em nós mesmos, tal como somos naquele momento, aparecemos como signo. (p. 50).

A fenomenologia segundo Peirce (apud Santaella, 2004b) busca descrever, de maneira geral, como os fenômenos passam a existir no mundo e como já citado acima, fenômeno é todo e qualquer acontecimento, poderia ser, por exemplo, uma bomba, um sonho, uma fórmula matemática.

Neste ponto retornamos à linguagem; “ação, pensamento, representação, mediação, cognição, linguagem, está sob a dominância da categoria fenomenológica de terceiraidade” (IBRI, 1992, apud SANTAELLA, 2004b, p. 65). Portanto, elementos da **terceiridade** implicam em um processo de conhecimento, pois estabelece um pensamento, compõe uma intercessão entre o estado de primeiridade e secundidade. E de acordo o texto de Peirce (1839 - 1914), não é possível a **terceiridade** sem que a **primeira** e a **segunda** estejam presentes, de maneira que, esse entrelaçamento de experiências é uma relação fundamental para a compreensão do pensamento.

2.4. O Signo: Uma Relação Triádica

Um signo é qualquer coisa, escreve Peirce (1839 - 1914);

Um signo, ou representamen é algo que sob certos aspectos ou de algum modo representa alguma coisa para alguém. [...] Ao signo assim criado, denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, o seu objeto. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que tenho, por vezes denominado o fundamento do representamen (p.94).

Para Peirce, a expressão “idéia” deve ser entendida de forma comum (banal) no sentido corriqueiro em que dizemos que uma pessoa captou a idéia do outro.

Ao apontar que um Signo significa algo, Peirce (1839 - 1914) procura determinar que ele se encontra em relação tal com um objeto que é reconhecido por uma mente como se fosse esse objeto, seja ele real ou não.

Para que algo seja um signo deve “representar” e um signo pode ter mais do que um objeto. Se um signo é diverso do seu objeto, deve existir, no pensamento ou na expressão, uma explicação ou argumento ou contexto mostrando de que modo - segundo que sistema ou porque razão - o signo representa o objeto ou conjunto de objetos que representa. (p.96)

Sublinhando, as palavras de Santaella (2004a), enfatizamos que um signo só pode fazer sentido como tal se traz o poder de representar alguma coisa diferente dele. Um signo não é um objeto, ele apenas está no lugar do objeto, fazendo referência ao objeto, de maneira que ele só pode representar esse objeto de um certo modo e em uma certa capacidade. Por exemplo, no contexto matemático, a aparência gráfica da palavra função, a representação algébrica da função, o esboço gráfico da função, são todos signos do objeto matemático função.

Ora, o signo só pode representar seu objeto para um intérprete do signo, num processo relacional que se cria na mente do intérprete. A partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro) sendo assim o significado de um signo é outro signo (SANTAELLA, 2004a, p. 58).

A Semiótica, portanto, procurar estabelecer os modos de compreender os signos e para que uma definição seja bem interpretada convém esclarecer, que um signo na concepção de Peirce (1839 - 1914), mantém uma relação triádica, sendo que, um primeiro seu

representamen, estabelece uma relação com um segundo, seu objeto e para um terceiro interpretante. Veja abaixo de maneira figurativa como se estabelece essa relação. (Figura 1)

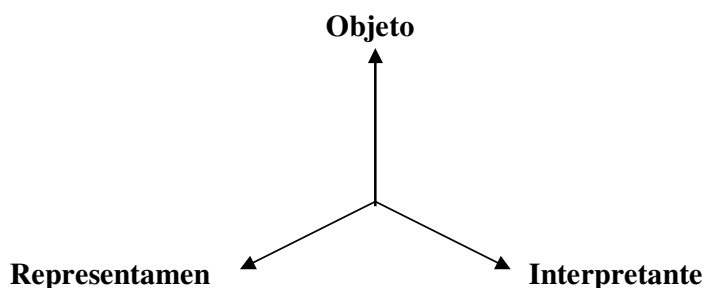


Figura 1: A Relação Triádica do Signo

Partindo desse diagrama, podemos notar que a Figura 1 nos remete a idéia de terceiridade abordada no Item 2.3., ou seja, um signo (representamen) coloca um segundo - seu objeto em relação cognitiva para com um terceiro - o interpretante. Vejamos agora de maneira mais sistemática como são estabelecidas ou apresentadas as divisões dos signos sob uma perspectiva epistemologicamente matemática tendo como principal objetivo uma maior elucidação, mas sempre esclarecendo que não nos adentraremos em maiores detalhes nessas classificações na análise dos dados desta pesquisa.

De acordo com Santaella (2004), existem 10 divisões triádicas²². e dentre todas essas tricotomias há três mais gerais, a saber: **a da relação do signo consigo mesmo, a relação do signo com seu objeto e a relação do signo com seu interpretante** (Figura 2) Desta maneira, é importante que mantenhamos na mente a leitura dos elementos do gráfico associados às categorias fenomenológicas descritas no Item 2.3., ou seja, as categorias de primeiridade, secundidade e terceiridade. E, para uma melhor visualização consideremos abaixo o quadro proposto por Santaella²³, vide (Fig. 2).

²²As quais compõem combinações entre si. Na Figura 2, é mostrada a relação do signo consigo mesmo, o signo com o objeto e o signo com o interpretante intrínseco as relações de primeiridade, secundidade e terceiridade. Deste modo podemos identificar as seguintes relações: 111 - quali-signo (remático-icônico), 211 - sin-signo (remático-icônico), 221 - sin-signo (indicial-remático), 222 - sin-signo (indicial-discente), 311 - legi-signo (icônico-remático), 321 - legi-signo (indicial-remático), 322 - legi-signo (indicial-dicente), 331 - legi-signo (simbólico-remático), 332 - legi-signo (simbólico-discente), 333 - legi-signo (simbólico-argumento)

²³Quadro mostrando as relações de tricotomias entre os signos, podendo ser mais bem analisado no livro O que é Semiótica? autoria de Lúcia Santaella, 2004, p. 62.



	Signo (1º.) (em si mesmo)	Signo (2º.) (com seu objeto)	Signo (3º.) (com seu interpretante).
(1º.)Primeiridade	Quali-signo	Ícone	Rema
(2º.)Secundariedade	Sin-signo	Índice	Dicente
(3º.)Terceiridade	Legi-signo	Símbolo	Argumento

Figura 2: Contextura do Signo

A **relação do representamen consigo mesmo**, pode ser através de uma **qualidade** - **Quali-Signo**, através de um **existente e singular** (algo real, concreto) - **Sin-Signo** ou através de uma **lei geral** - **Legi-signo**.

Na **relação do representamen com seu objeto**, o signo se tornará:

- ✓ Um **ícone** de algo, ou seja, uma relação de semelhança;
- ✓ Um **índice**, fazendo referência ao objeto que é afetado por ele também chamado de objeto imediato²⁴;
- ✓ Um **símbolo** é aquilo que o signo substitui, podendo funcionar como uma lei geral, ou convenção que faz com que essa palavra que não apresenta nenhuma semelhança gráfica com o objeto, possa, no entanto representá-lo.

Em nível de raciocínio, ou seja, **na relação do representamen com o interpretante**, o signo apresenta-se como:

- ✓ **Rema**, uma hipótese ou possibilidade, que de certo modo consiste naquilo que o signo está apto a reproduzir na mente do interpretante qualquer e sob diversos aspectos. Assim como supõe Santaella (2004a), há signos que são interpretáveis na forma de qualidade de sentimento, outros através da experiência, outros através de possibilidades ou pensamentos numa sucessão infinita;
- ✓ **Dicissigno**, também chamado de signo Dicente, representa um signo de existência real, “um signo que veicula informação” (Nöth, 2003, p.88);
- ✓ **Argumento**, o qual se apresenta como lei.

Como podemos notar, há uma relação ulterior e exterior entre os signos correlatos (representamen, objeto e interpretante), ou seja, um signo não é uma coisa estática, mas uma relação intrínseca e complexa.

²⁴ O termo objeto imediato será mais bem explicitado no tópico 2.4.1.



2.4.1. Objeto Imediato e Objeto Dinâmico

Para a compreensão desses conceitos vamos apresentar um exemplo matemático, Pensemos assim, o gráfico de uma reta na tela do computador é um signo, aquilo que representa algo em lugar de outra coisa. Em um contexto matemático - a função polinomial do 1º. Grau o objeto dinâmico desse signo, pois, esta função matemática faz com que o interpretante estabeleça relações matemáticas para compreender sua essência. Entretanto, “o modo como o signo representa, indica, se assemelha, evoca a que ele se refere é o objeto imediato [...] Ele se chama imediato, pois só temos acesso ao objeto dinâmico por meio do objeto imediato” (SANTAELLA, 2002, p.15). Nesse sentido, três são as palavras imprescindíveis na relação entre **o objeto imediato** e **o objeto dinâmico**: **representa, indica** e **sugere**, pois, segundo Santaella (2002), vai depender novamente da natureza do fundamento do signo. Se for uma **qualidade**, o **objeto imediato** só poderá **evocar (ícone), sugerir seu objeto dinâmico**. Se for um **existente (indicial)** indica seu **objeto dinâmico** e se for uma **lei (simbólico)**, o **objeto imediato** de um **símbolo** representa seu **objeto dinâmico**.

Peirce (1931-1958, apud Santaella, 2002) dividiu **os signos icônicos** em três níveis: **Imagem, diagrama** e **metáfora**. Em nossa pesquisa vamos entender o termo diagrama como uma representação gráfica, geométrica ou por tabelas ou ainda a imagem algébrica de uma função. Sendo assim, podemos então nos ajustar à idéia concebida por Peirce (1931-1958, apud Santaella, 2002) que assinala, “o diagrama representa seu objeto imediato por similaridade entre as relações internas que o signo exhibe e as relações internas do objeto dinâmico que o signo visa representar” (p.19). Logo, o diagrama não se relaciona ao objeto por similaridade.

No caso do **índice**, não existe uma divisão explícita, mas passa a idéia que corresponde **as várias formas de indicar o objeto** e, em cada uma dessas variações, os **objetos imediatos são diferenciados**, pois variam o modo como **o mesmo objeto dinâmico** aparece. Pensemos assim, existem várias formas de representar um objeto. Outro aspecto importante é que todos os **índices** trazem em si os **ícones**, pois é nessa **relação dialética** que faz o **índice funcionar como signo**. Por exemplo, é por meio da imagem de um gráfico que se torna possível indicar a qual objeto (função, conceito) matemático ele se refere.

A **ação do símbolo reflete-se em seu fundamento - legi-signo**. Para tanto, são prescritas determinadas condições para que a lei possa agir. Ou seja, para se representar um



objeto algebricamente devemos antes operacionalizar desempenhando determinados pré-requisitos. Assim;

O objeto imediato do ícone é o modo como sua qualidade pode sugerir ou evocar outras qualidades. O objeto imediato do índice é o modo particular pelo qual o signo indica o seu objeto. O objeto imediato do símbolo é o modo como o símbolo representa o objeto dinâmico. Enquanto o ícone sugere através de associações por semelhança e o índice através de conexão de fato, existencial, o símbolo representa através de uma lei [...] Enfim, o objeto dinâmico de um símbolo, especialmente quando o símbolo é um conceito, se perde de vista (SANTAELLA, 2002, p.20).

Como podemos entender então? Talvez, a princípio, poderíamos inferir considerando um determinado problema, o qual apresenta um gráfico de uma função. Assim, em nível de **primeiridade** temos a imagem do gráfico, a qual está expressa sua qualidade, caracterizando-se em um **ícone**, cujo **objeto imediato** está relacionado às suas relações internas e, não exatamente, por **similaridade**. Em nível de **secundidade** está a sua referencia, o que o gráfico indica - uma representação algébrica, por exemplo, a qual se caracteriza em um caso particular do objeto imediato indicar o seu objeto dinâmico, Em nível de **terceiridade**, nós poderíamos pensar em termos de uma lei que representa esse objeto, tendo como referência o **ícone** e tudo que ele **indica**. O objeto dinâmico do símbolo, o que representa o objeto seria a compreensão global e total de tudo que representa o objeto imediato. Como aponta Santaella (2002);

O objeto dinâmico dos símbolos é uma referência última que engloba todo o contexto a que o símbolo se refere ou se aplica [...] Um signo só pode representar o seu contexto de referência dentro de certas capacidades e limites, onde o recorte específico que um símbolo faz do seu contexto de referência é o objeto imediato do símbolo (p.21).

Em relação **ao interpretante, o terceiro elemento da tríade que compõe o signo**. Lembremos que, o **signo** propriamente dito é composto por uma relação triádica, onde “o objeto é aquilo que o signo (representamen) determina e representa. Já o interpretante é o efeito interpretativo que o signo produz em uma mente real ou meramente potencial” (SANTAELLA, 2002, p.23). É importante enfatizar que o interpretante nem sempre é um intérprete, constitui-se, portanto, em algo mais geral. Sendo assim, **o interpretante** pode ser **imediato**, revelando o potencial interpretativo do signo, mesmo sem mediação de um intérprete. “É algo que pertence ao signo na sua objetividade” (SANTAELLA, 2002, p.24). Por exemplo, uma representação matemática, seja ela em que forma se apresente, gráfica, algébrica, geométrica, etc. tem um potencial a ser interpretado, mesmo antes de iniciarmos





qualquer reação em busca de indagar o que essas se propõem, existem nelas toda uma carga interpretativa.

O interpretante também pode ser caracterizado por sua dinamicidade, envolvendo aí a dimensão psicológica do intérprete. Para esse caso, são três os níveis que subdividem o **interpretante dinâmico**: em **primeiro nível** caracteriza-se em uma simples **qualidade de sentimento** (primeiridade), nesse caso ao nos depararmos com um ícone, podemos conjecturar a respeito, comparando-o a algo que nos pareça familiar e junto a essa apreensão alguns sentimentos podem ser revelados, tipo; familiaridade, aversão, satisfação etc.

Em segundo nível surge o efeito denominado **energético** que corresponde a uma “ação física ou mental, exigindo do intérprete um dispêndio de energia de alguma espécie” (SANTAELLA, 2002, p.25). Em terceiro nível, temos o efeito **lógico**, no qual o intérprete canaliza a idéia por meio de uma regra interpretativa. Em outras palavras, “o símbolo está conectado a seu objeto em virtude de uma idéia da mente que usa o símbolo, sem o que tal conexão não existiria” (SANTAELLA, 2002, p. 25). Nesse sentido a autora citada assinala que, as interpretações estão sujeitas as mudanças de hábito, o que Peirce (1931-1958, apud Santaella, 2002) chamou de **interpretante lógico último**, argumentado “se as interpretações sempre dependessem de regras interpretativas, não haveria espaço para transformação e a evolução. A mudança de hábito introduz esse elemento transformativo e evolutivo no processo de interpretação” (p.26).

Existe também um interpretante denominado **interpretante final**, considerado como um limite pensável, pois segundo Santaella (2002), é impossível o interpretante dinâmico chegar a um limite último de interpretação, atingir a um “total resultado interpretativo”.

A **tricotomia dos signos**, como podemos ver traz um panorama lógico e complexo que não nos compete nesta pesquisa adentrarmos em tais complexidades, embora, revele-se de grande importância em termos de análise para o conhecimento matemático, bem como para a interpretação de linguagens permitindo a compreensão do intrincado jogo de relações que se estabelecem numa Semiose - processo de apreensão do signo, ou em um sistema delas. Nesta pesquisa nos limitaremos a analisar os dados coletados baseando-nos na relação triádica do signo, observando os aspectos de primeiridade, secundidade e terceiridade como já anteriormente anunciado.

No próximo Item abordaremos a **Semiótica de Peirce** sob diferentes perspectivas teóricas, fundamentadas nos trabalhos de Otte (2006), Steinbring (2006), Hildebrand (2002), entre outros. Entretanto, é importante ressaltar que não temos a intenção de fazer uma análise dos pontos de vistas dos referidos autores, mas sim, apreendermos aspectos de suas teorias de



maneira que possam nos auxiliar a obter uma maior percepção em respeito à relevância da **Semiótica** e suas possíveis relações com a Matemática, situando entre essas concepções a importância das representações sógnicas em referências aos conceitos e objetos matemáticos que representam.

2.5. Aplicações da Semiótica para a Matemática.

Nesses últimos dez anos, os educadores matemáticos têm reunido diferentes perspectivas teóricas, tendo como base a Semiótica. Trabalhos desenvolvidos na Psicologia, Antropologia, Lingüística e Sociologia visando analisar e melhor compreender os processos envolvendo o ensino e aprendizagem da Matemática.

Para um início de discussão daremos evidência ao trabalho de Steinbring (2006), o qual postula que os signos matemáticos têm ambas as funções semióticas e funções epistemológicas. Segundo o autor, a **função semiótica** corresponde ao signo matemático que, sob certos aspectos, significa algo para alguma coisa, cuja ênfase consiste em privilegiar o caráter representacional do signo. A **função epistemológica** corresponde ao papel do signo sob a perspectiva da construção do saber e do pensamento matemático, em outras palavras poderíamos dizer que a função epistemológica refere-se a uma mediação entre tipos de entidades, no caso, objetos e signos.

Mediante essas duas funções, Steinbring (2006), propõe uma relação que pode ser representada em um diagrama, denominado **triângulo epistemológico** (Figura 3), constituído por três pontos interligados: “conceito”, “signo/símbolo” e “objeto/contexto”, os quais segundo o autor, constituem um sistema equilibrado e mutuamente apoiado.

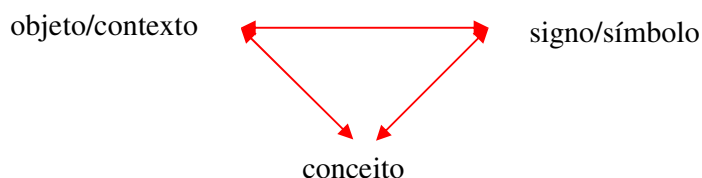


Figura 3: O Triângulo Epistemológico



As ações recíprocas entre os “vértices” do triângulo e a relação dos lados, no sentido que, signos/símbolos (por exemplo, operações matemáticas) e os objeto/referência do contexto (por exemplo, diagramas, estruturas funcionais etc.) devem ser produzidos ativamente em interação com os outros, pelo estudante, no processo de aprendizagem, observando as condições de influência epistemológica. (STEINBRING, 2006, p. 136, tradução da pesquisadora)²⁵.

De acordo com o pensamento do autor, a composição do triângulo epistemológico (Figura 3), pode ajudar a modelar (mesmo que imperceptivelmente) o conhecimento matemático do estudante por meio das representações construídas durante a atividade, na interação com o professor e seus colegas em sala de aula. Além disso, abrem-se perspectivas para um contexto cultural mais geral, no qual a formação do conhecimento matemático está inserida. O autor ainda faz uma ressalva, explicando que o sujeito e a interação social não são elementos analiticamente iguais em relação aos três componentes do “triângulo epistemológico”, mas correspondem a um meta-elemento que é responsável na construção de relações neste esquema.

Como ressalta Steinbring (2006), é claro que o conhecimento matemático não deve ser traduzido e interpretado por uma mera leitura de signos, símbolos ou princípios. Essa leitura requer experiência e conhecimento implícito, ou seja, não podemos entender esses signos sem algumas pressuposições de tal conhecimento, bem como atitudes e maneiras de utilizá-lo. O que se torna fundamental dentro de uma cultura.

O uso dos símbolos em uma cultura de ensino da matemática é constituído de significados para letras, signos e diagramas [...] A interação social constitui-se em uma cultura específica de ensino baseada na escola-símbolos matemáticos que são interpretados conforme convenções particulares e regras metodológicas. Desta maneira a dependência escolar do conhecimento empírico e epistemológico da matemática é criada, na qual as leituras dos símbolos introduzidos são determinadas fortemente por regras convencionais para facilitar o entendimento, mas esta forma de apresentação entra em conflito com a teoria, isto é, com a estrutura epistemológica do conhecimento matemático. (STEINBRING, 1997, apud STEIMBRING, 2006 p. 137, tradução da pesquisadora)²⁶.

²⁵ “The reciprocal actions between the “corner points” of the triangle and the necessary structures on the side of the signs/symbols (for example mathematical operations) and the object/reference context (for example diagram, functional structures etc.) have to be actively produced by the learning student, in interaction with others and observing the epistemological influence conditions ((STEINBRING, 2006, p. 136).

²⁶ The use of the symbols in the culture of mathematics teaching is constituted in a specific way, giving social and communicative meaning to letters, signs and diagrams(...). Social interaction constitutes a specific teaching culture based on school-mathematical symbol that are interpreted according to particular conventions and methodical rules. In this way, a very school-dependent, empirical epistemology of mathematical knowledge is created interactively, in which the reading of the introduced symbols determined strongly by conventional rules designed to facilitate understanding, but, in this way, coming into conflict with the theoretical, epistemological structure of mathematical knowledge. ((STEINBRING, 1997, Apud STEIMBRING, 2006 p. 137)





Otte, (2004, apud, Sáenz-ludlow e Presmeg, 2006 p.19), por sua vez adotando a teoria de Charles S. Peirce, argumenta que a epistemologia da Matemática sob o ponto de vista da Semiótica é essencialmente uma “epistemologia genética” enfatizando a questão da função epistemológica dos signos e do processo de generalização, o que conforme Peirce (1931-1935, apud, Otte, 2006, p.17), generalização é um dos mais importantes processos do pensamento matemático.

Na concepção de Otte (2006), a generalização também possui um papel fundamental, determinando que no processo de ensino a epistemologia da Matemática implica, principalmente, nos variantes e invariantes das suas representações. Esse autor também assinala que, o significado surge da relação dialética do pensamento, entre o particular e o geral, entre lei e aplicação, entre hábito e regra, entre crença e transformação.

Em relação à classificação dos signos Peirce (1931-1935, apud, Otte, 2006), entende, que a cognição e o efeito transformador dos signos sobre o ensino conduz a todos os envolvidos em um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade Matemática, o que implica na importância dos signos ou símbolos sob o ponto de vista epistemológico da Matemática.

De acordo com esse ponto de vista, Otte (2006), nos chama a atenção sobre a prática da Matemática, especialmente na escola, na qual, é usualmente seduzida para uma identificação dos signos e seus significados através de atividades, de maneira que o algoritmo é expresso em fórmulas quando em procedimentos de cálculo, fazendo-se uma distinção entre conceito, signos e objetos, ao invés de uma abordagem em que haja uma integração entre esses. Nesse sentido, o referido autor ressalta que, “os conceitos matemáticos não se encontra independente de representações, entretanto não deve ser confundido com nenhuma representação em particular” (p. 21)²⁷.

Além desses pesquisadores, acima citados, outros buscam uma compreensão dos fenômenos matemáticos por meio de aspectos teóricos e/ou empíricos, de forma implícita ou explícita mediadas pelos vários sistemas semióticos que circundam o ensino e aprendizagem da Matemática. Assim, Miskulin, Martins e Mantoan, (1996) postulam que, uma abordagem Semiótica no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática permite “o estudante se apropriar dos saberes com significados próprios e selecionar as linguagens e ambientes mais próprios para representarem as suas elaborações conceituais” (MISKULIN, MARTINS e

²⁷ Para uma leitura mais aprofundada, vide “Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic point of View” por Michael Otte, (2006), p. 11-38.





MANTOAN, 1996, p.12). Em relação às representações as autoras acima citadas, ressaltam que:

A representação possui uma função instrumental e um caráter de semiotividade. Ambos são complementares e indissociáveis. A semiotividade é abordada por diferentes modos de representação: gestos, imagens, linguagens, entre outros. A instrumentalidade da representação garante ao sujeito a possibilidade de refletir sobre os objetivos e meios os quais atua (MISKULIN, MARTINS e MANTOAN, 1996, p.12).

Com essa declaração, as autoras apontam para a relação intrínseca entre as representações e seu caráter semiótico, o que não significa materializar o signo e sim corporificar as representações por meio de uma linguagem não verbal, viabilizando seus objetivos implícitos acordando que, em um contexto matemático a resolução de problemas ou realização de tarefas “identificam-se uma mobilidade crescente de representações” (MISKULIN, MARTINS e MANTOAN, 1996, p.19), permitindo o estudante pensar sobre as possibilidades de processos matemáticos frente a um dado problema. Nessa mesma linha de pensamento, Miskulin, Moura e Silva (2006) assinalam que, frente a determinadas representações;

Observam-se progressos e também regressões temporárias, quando um sistema de representação está sendo constituído pelo sujeito. Podemos dizer que um dado conhecimento quando expresso por diferentes sistemas de representação torna-se mais compreensível pelo sujeito. “Quanto mais o sujeito conseguir concebê-los de diferentes perspectivas maior será a capacidade de sintetizá-los” (MISKULIN et al, 1996, apud SILVA, MISKULIN e MOURA, 2006, p.19).

Ainda nesse enfoque, Fischbein (1993, apud Miskulin 1999, p. 290) assinala que no processo de construir e representar um objeto matemático nós devemos atentar para o seu aspecto conceitual e figural. Assim sendo, “nesta simbiose entre conceito e figura” (FISCHBEIN, 1993, apud MISKULIN, 1999, p.291), propicia-se o estímulo para novas formas de pensar. Nesse sentido, Fischbein (1994, apud Fainguelernt, 1999,) assinala que:

O significado comportamental dos conceitos em Matemática é um instrumento importante e bem controlado pela estrutura conceitual. Por exemplo, as representações gráficas são bons modelos para representar as relações Matemáticas abstratas. Geralmente, as interpretações das representações que são produzidas espontaneamente e usadas implicitamente sem se beneficiarem do controle sistemático da instância conceitual formal podem levar a distorções e a respostas diferentes (p.40)





De fato, existe toda uma logicidade ao representarmos um dado objeto matemático. “Por isso, os estudiosos sempre estiveram preocupados com todos os tipos de representação que comportam a matemática em particular, estiveram às voltas com as relações sógnicas no interior da própria linguagem, preocupando-se com os estímulos visuais que recebiam dessa ciência” (HILDEBRAND, 2002, p.19) Com essa abordagem, na sua tese de doutorado, o referido autor ainda assinala que:

O homem estrutura seu pensamento de forma lógica. E por outro lado, como todas as linguagens são sistemas sógnicos organizados logicamente através de um conjunto complexo de representações. Podemos dizer que a Matemática que é considerada como uma ciência de mesma natureza que a Lógica, mostra a sua estrutura enquanto linguagem, expondo-se como forma de organização do pensamento humano. Ao longo do tempo, ela vem sendo construída baseada substancialmente nos desenhos, gráficos, diagramas, rabiscos, anotações, textos, artigos, enfim, nas linguagens visuais e escritas (p. 164).

Neste capítulo discutimos, sobre **Semiótica**, considerando vários olhares e concepções, buscando compreender a relação entre os signos, conceitos matemáticos e as implicações para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Relação que envolve tanto o futuro professor, e o professor formador, ambos, interpretante desse processo.

Segundo Bauersfeld (1980, apud Steinbring, 2006, p.2) o professor e o estudante deveriam se dar conta das discrepâncias entre o significado da matéria (assunto), a matéria ensinada e a matéria aprendida. O que na concepção desse autor, a aprendizagem da Matemática é essencialmente uma **atividade semiótica**, simultaneamente mediada por re-criação, interpretação, e apropriação de uma variedade de sistemas semióticos.

Considerando os pontos de vistas acima expostos, podemos perceber que a teoria **Semiótica** nos conduz a novas perspectivas em termos de conhecimento, representação, comunicação, ensino e aprendizagem, entre outros aspectos.

Esta teoria integra uma complexa cadeia de relações que circunda o significado ou sentido do ‘processo fazer’ de indivíduos em uma atividade sociocultural e em contextos cognitivos, além disso, a teoria semiótica esclarece a relação entre subjetividade, intersubjetividade e objetividade. (SÁENZ-LUDLOW e PRESMEG, 2006, p.2, tradução da pesquisadora)²⁸.

A semiose de acordo Peirce (1839-1914) é um processo ininterrupto, que regride infinitamente em direção ao objeto dinâmico, ou seja, a todas as suas várias formas

²⁸ This theorie intertwine in a complex web of relationships that encompasses the meaning-making process of individuals in sociocultural and cognitive contexts. In addition, semiotic theorie enlighten the relationships among subjectivity, intersubjectivity, and objectivity (SÁENZ-LUDLOW e PRESMEG, 2006, p.2).





representativas e progride infinitamente em direção ao interpretante final, ou seja, as suas infinitas formas de interpretação.

No próximo capítulo, estaremos apresentando e discutindo sobre as TICs e a relevância de se trabalhar em um ambiente computacional, observando viabilidades e dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos no processo de aprender e ensinar matemática. Além de constatar a relevância do uso de softwares educativos, como uma abordagem significativa para o ensino da Matemática, podendo até mesmo interferir no nosso modo de pensar sobre os conceitos matemáticos e suas formas de representar.





Capítulo 3

As Representações Matemáticas e as TICs em uma Perspectiva Semiótica



Capítulo 3

As Representações Matemáticas e as TICs em uma Perspectiva Semiótica

O avanço tecnológico tem influenciado notavelmente no desenvolvimento de noções teóricas que antes eram importantes, mas não eram consideradas como cruciais em termos de explicar a aprendizagem de conceitos matemáticos. Estes aspectos teóricos são a base para entender o estudo das diferentes representações dos objetos matemáticos e seu papel na construção de conceitos. Agora com a tecnologia, é importante o estudo das diferentes representações dos objetos matemáticos em ambientes muito diferentes aos que tínhamos no passado (HITT, 2003, p. 2)

3.1. Apresentação

Neste capítulo, pretendemos trazer algumas reflexões sobre o uso do computador em sala de aula e a relevância de se utilizar softwares educativos, particularmente software matemáticos como um recurso metodológico para o ensino da Matemática. A seguir, em um contexto mais específico, analisaremos a relevância do uso do software **Winplot** associado às representações matemáticas na aplicação de atividades em uma perspectiva semiótica. Além do que, pretendemos a posteriore (capítulo de análise) relacionar tais reflexões a alguns aspectos à constituição do conhecimento do futuro professor, em contextos práticos dessas atividades como um procedimento didático-pedagógico, nos quais a tecnologia se faz cada vez mais presente.

Nessa perspectiva, antes de adentrarmos em uma discussão mais específica sobre representações mediadas pelo computador, esboçaremos algumas conjecturas, baseadas em pesquisas que tenham como objeto de estudo a inter-relação entre a educação e as tecnologias informacionais e comunicacionais. Portanto, em referência ao ensino da Matemática e a tecnologia, inseridas ao contexto de sala de aula, é importante ressaltar que:

Pensar sobre a introdução e disseminação da Tecnologia na Educação, não significa apenas pensar em artefatos tecnológicos, mas, sobretudo, significa refletir e pensar sobre Educação e sobre os possíveis benefícios que essa Tecnologia poderá trazer para a sociedade. Sabe-se que a utilização da tecnologia na Educação, por si só não conduz à emancipação e nem a opressão de indivíduos, mas por outro lado, tal tecnologia está incorporada em contextos econômicos e sociais, que determinam as suas aplicações. E desse modo, esses contextos devem ser reavaliados constantemente, para assegurar que as aplicações da Tecnologia na sociedade desenvolvam e conservem valores humanos ao invés de extinguí-los (MISKULIN, 1999, p.51).





Esta citação destaca o fato que os computadores fazem parte do cotidiano, pressupondo um cenário relacionado a aspectos culturais, sociais e políticos sobre a introdução e disseminação desse recurso na escola com reflexos na sociedade em geral.

Segundo Miskulin (2003), no âmbito educacional, a realidade de trabalhar com computadores em sala de aula traz a tona “uma nova lógica, uma nova linguagem, novos conhecimentos e novas maneiras de compreender e de se situar no mundo em que vivemos” (MISKULIN, 2003, p.217), exigindo do professor e futuros professores, uma nova cultura profissional. Nesse sentido, a autora enuncia:

As TICs acarretam o maior uso da informática e da automação nos meios de produção e serviços, implicando novas atitudes humanas. [...] Ambientes como os sistemas bancários, os sistemas informatizados das companhias aéreas, entre outros exigem, uma nova formação do cidadão, um novo perfil do trabalhador com um nível qualificado de informação e comunicação com conhecimento crítico, criativo e amplo, resultando em condições que lhe permitam integrar-se plena e consciente nas tarefas que desempenhará em sua profissão e em sua vida (MISKULIN, 2003, p.221).

Nessa mesma linha de pensamento, Kenski (2003), aponta que as tecnologias estão por todo lado, faz parte da nossa vida diária, está associada a inúmeras atividades que realizamos, sejam em nossas casas, no trabalho, na escola, na rua.

Diante de tais ocorrências e, trazendo essa discussão a um contexto educacional, as tecnologias intelectuais implicam em um gênero singular de comunicação que busca ser introduzido na escola através das TICs sob a forma de textos, “hipertextos (matrizes de textos potenciais), os quais possibilitam uma leitura interativa apresentando-se como um sistema de múltiplos recursos” (LEVY, 1998, p. 18) via rede e uso de softwares didáticos, possibilitando assim mudanças na forma de pensar do estudante, os quais são levados a buscarem novas maneiras de domínio estabelecidos num ambiente de códigos e signos digitais.

A mediação digital remodela certas atividades cognitivas fundamentais que envolvem a linguagem, a sensibilidade, o conhecimento e a imaginação inventiva. A escrita, a leitura, (...) a visão, e a elaboração das imagens, a concepção, o ensino e o aprendizado, reestruturados por dispositivos técnicos inéditos, estão ingressando em novas configurações sociais (LÉVY, 1998, p.17).

Esse é um dos grandes desafios para a escola nos dias atuais, a viabilização para um uso crítico das tecnologias de informação e comunicação, pois essa se qualifica como importante e necessária, entretanto, ainda uma sabedoria nova para nós professores em termos de atuação em sala de aula. Sendo assim, uma especificidade que caracteriza esse desafio,





advém da velocidade de criação de novos produtos (softwares, Internet) e como se processam e se utilizam essas novidades atreladas ao ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, como fazer um uso crítico das tecnologias se, em geral, se a preocupação predominante é a tecnologia em si própria referindo-nos aqui às questões técnicas? Acreditamos que só será possível se o nosso foco de preocupação centrar-se no processo cognitivo que envolve a interação do aluno/professor com o seu meio de ensino e aprendizagem.

Deste modo, levando-se em conta essas permanentes mudanças fica evidentemente difícil articular determinadas alterações sobre uma tradição refletida no modo de pensar e fazer educação. Torna-se um desafio a ser assumido por todos nós, levando em conta nessa utilização plural da tecnologia para o ensino, a relevância e a determinação de se aplicar novas maneiras de acesso ao conhecimento.

Ao falarmos de mudanças, devemos sempre nos reportar a realidade das escolas, considerando classes com mais de trinta alunos, dois computadores por aluno (quando disponíveis), softwares proprietários, conhecimento do professor sobre como operar estes softwares, tempo de preparação das aulas e de uso destes equipamentos, reticência dos professores.

Segundo Lévy (1998), o professor antes mesmo de importar aos alunos o uso dos computadores, faz-se imprescindível voltar-se a si mesmo e repensar o ensino de sua disciplina, pois o desenvolvimento de um curso ou uma aula mediada por esse instrumento, traduzida em um software educativo, por exemplo, necessita de intenções esclarecidas em direção aos objetivos que se propõe uma dada atividade escolar.

Assim o futuro professor somente utilizará a tecnologia de forma educativa quando tiver a oportunidade de propiciar um contexto de aprendizagem no qual esse possa ser crítico e ter a capacidade de criar novos modelos de representações de conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, a crescente modificação e velocidade que se processam as linguagens informáticas podem constituir-se em um obstáculo, mas também em viabilidade para o ensino. Deste modo, o professor em interação com as tecnologias de informação e comunicação, pode adquirir e difundir metodologias de trabalho com base em uma nova lógica, pois através de uma abordagem diferenciada, alteram-se principalmente os procedimentos didáticos, obrigando o professor a repensar o seu modo de atuar em sala de aula.

No caminho de possibilidades de utilização da tecnologia no contexto educativo, encontram-se os usos de software educativo, e dentre esses os softwares matemáticos. Essa





tecnologia funciona como um importante auxílio em termos de ensino e aprendizagem em um contexto educacional para o ensino da Matemática, possibilitando meios de informação visual, simulações, nos quais o estudante em função de conhecimentos anteriores e/ou de sua capacidade investigativa é possível representar e interagir com modelos cujo procedimento é por vezes complexo, o que seria certamente difícil realizá-lo de maneira manipulativa.

“A informática para o ensino pode ser considerada como sendo mais do que uma simples ferramenta de transmissão e gestão de informação” (LÉVY, 1998, p. 35). Dependendo do objetivo da atividade proposta pelo professor ao aluno, sublinhando as palavras de Kenski (2003), é preciso conceber as tecnologias, sendo essas representadas pelo computador, ou seja, por meio de software, Internet ou ainda giz, pincel e lousa, como perspectivas educativas nas quais se inserem as maneiras como serão “acessadas e trabalhadas as fontes de informação, e os modos individuais e coletivos como irão ocorrer as aprendizagens” (KENSKI, 2003, p 47). O que significa que cada tecnologia torna-se adequada e preferencial a certo tipo de tarefa, onde outras, por conseguinte, tornam-se secundárias, mas não necessariamente excludentes.

Acrescentando outros aspectos a essa abordagem, pesquisadores tais como, Borba e Penteado (2003), Miskulin (2003), Ponte et al (2003), Papert (apud Miskulin, 2003), entre outros, identificam e propõem perspectivas e possibilidades para o uso do computador como uma importante abordagem que gera novas ações didáticas e epistemológicas no ensino da Matemática e na Educação em geral.

Na concepção de Miskulin (2003), a tecnologia não deve ser concebida apenas como um recurso a mais para os professores motivarem as suas aulas, mas principalmente em um meio que propicie aos seus alunos novas maneiras de gerar o conhecimento.

Conseqüentemente os professores têm o papel de refletir sobre a utilização dos computadores em sala de aula, igualmente, conduzir os seus alunos a considerarem as várias possibilidades de exploração que permitem o uso de um software na investigação de uma atividade Matemática. (MISKULIN, 2003, p.226).

Nessa mesma linha de pensamento, Valente (2005) assinala que o professor e o futuro professor, precisam conhecer os diferentes usos da informática na educação. E importante que esse professor tenha ciência das possibilidades que os recursos tecnológicos oferecem para a construção do conhecimento. Ponte et al (2003) postula que;





O uso das TIC como ferramentas cada vez mais presentes nas atividades dos professores de Matemática, constituem-se em: a) um meio educacional auxiliar para apoiar a aprendizagem dos alunos; b) um instrumento de produtividade pessoal, para preparar material para as aulas, para realizar tarefas administrativas e para procurar informações e materiais; c) um meio interativo para interagir e colaborar com outros professores e parceiros educacionais (PONTE et al., 2003, p.163).

Com essa acepção, o autor acima citado, propõe que o professor ou futuro professor aprendam a utilizar o computador, os programas disponíveis, como os softwares educativos, tendo consciência de suas potencialidades, o que implica conhecer seus limites, ou seja, quais são seus pontos fracos e seus pontos fortes. Segundo Ponte et al (2003) essas tecnologias mudam o ambiente de trabalho e o relacionamento entre os sujeitos que convivem nesse ambiente escolar, “trazendo um impacto importante na natureza do trabalho do professor” (PONTE et al., 2003, p.163) e conseqüentemente no seu modo de pensar.

As concepções acima mencionadas mostram possibilidades e perspectivas para o uso da tecnologia no ambiente escolar, mas existem alguns reveses e contratempos na utilização desses recursos tecnológicos. Referindo-nos, portanto, às dificuldades inerentes ao uso do computador no contexto escolar, vários são os aspectos inseridos. Entre eles, está o tempo e a oportunidade que deve ter o professor (ou futuro professor) para familiarizar-se com as novas tecnologias, incluindo aí os seus limites e possibilidades didático-pedagógicos. Além disso, os recursos técnicos, a disponibilidade de computadores, softwares educativos ou ainda a interação da escola e na escola no que concerne a reorganização da distribuição de espaço e tempo, relacionados ao trabalho do professor com o aluno, assim como outros contratempos passíveis de acontecer nesse processo de transformação no ambiente escolar. O que devemos refletir como educadores matemáticos é que deveríamos considerar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática todas essas limitações, considerando também, não ser aceitável conceber o uso da tecnologia informática comunicativa e educativa sem a ela conectarmos à figura do professor e a sua formação.

Sendo assim, é natural conjecturar que futuros professores devam ter a oportunidade de conhecimento e reflexão sobre esse aprendizado, que tenha a oportunidade de escolha, para que possa conduzir a sua prática fazendo uso ou não da informática. Em suma, concordamos com Vale (1999, apud Ribeiro e Cabrita, 2004) quando afirma que:

Um dos objetivos que a formação inicial deve ter é o de proporcionar um ambiente de aprendizagem em que os futuros professores, entre outros aspectos e conhecimentos, tenham amplas oportunidades de serem confrontados com as mesmas atividades e experiências que deverão propor aos seus futuros alunos (p. 144).





Em verdade, segundo Borba e Penteado (2003) as inovações educacionais, em sua maior parte, conduzem à mudanças significativas na prática docente e que o uso das TICs no ambiente educacional envolve propostas pedagógicas, recursos técnicos, particularidades da disciplina, entre outros. O que implica que a prática do professor é dependente de todos esses aspectos e, mesmo que o professor priorize alguns em detrimento de outros deve ter a consciência que, da sua escolha dependerá “os diferentes caminhos para a organização de aprendizagem e, conseqüentemente a qualidade desses ambientes” (BORBA e PENTEADO, 2003, p. 56).

Assim, torna-se necessário, no contexto tecnológico, refletirmos sobre as representações matemáticas e sua inter-relação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.2. As Representações Matemáticas Mediadas pelo Computador

Hitt (2003) assinala que, cada representação é parcial em relação à uma compreensão global, visto que é enganoso pensar que as representações de conceito deva conter o mesmo conteúdo ou que um transpareça no outro de forma evidente. Portanto devemos considerar como absolutamente necessário o intercâmbio entre essas diferentes representações de um dado objeto, no que corresponde à formação ou interpretação de um conceito, uma propriedade, ou outra noção Matemática qualquer.

Na exploração ou investigação de um problema torna-se importante não priorizar uma representação matemática em detrimento da outra visando, deste modo, possibilitar ao aluno perspectivas de análise e percepções sobre a atividade desenvolvida, contudo levando-se em conta as dificuldades inseridas em tais transformações ou procedimentos adotados entre as representações.

No que se segue em relação ao uso da tecnologia no trato das várias representações, autores como Borba (2005) assinalam que, com a possibilidade do uso de calculadoras gráficas e dos computadores, o uso de múltiplas representações²⁹, tem sido intensivamente discutido, especialmente para o ensino de funções. Borba (1994, apud Borba e Villarreal 2005), Borba e Confrey (1996, apud Borba e Villarreal, 2005) têm também destacado a importância dessa abordagem que privilegia a mudança de uma representação matemática à outra, ou seja, visa contemplar em uma atividade ou em um dado problema a coordenação

²⁹ Segundo Borba (2005) essa terminologia “múltiplas representações” foi criada por Cofrey e Smith (1994)





entre essas várias representações que podem ser ilustradas tais como tabelas, gráficos cartesianos e expressões algébricas.

Em termos práticos, o uso reflexivo da tecnologia, tem sido ainda muito pouco explorado nos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Os problemas que geram uso criativo das calculadoras, softwares como o Winplot, Maple, Planilhas entre outros já se encontram em livros didáticos³⁰, em trabalhos de pesquisas ou afins, mas não expressam, por conseguinte o interesse de muitos dos professores formadores de futuros professores de Matemática. O professor formador, muitas vezes, encontra-se reservado nesse sentido.

No nosso ponto de vista, acreditamos que muito ainda deve ser feito em busca de reverter esse processo, trabalhos como o do grupo de estudo e pesquisa LAPEMMEC³¹, Hitt (2003), Borba e Penteado (2003), Borba e Villarreal (2005), Ponte et,al (2003), Miskulin (1994,1999 e 2003) são exemplos dessas tentativas. Na perspectiva de Ponte et al. (2003) o uso das TICs, incluído softwares educativos próprios à disciplina ou de uso geral, pelos professores de Matemática associado à sua prática constituem-se em ferramentas que possibilitam o uso da linguagem gráfica e de novas formas de representação e, como consequência, relativizam a valor do cálculo e da manipulação simbólica.

Para Borba e Penteado (2003) a discussão sobre informática na Educação Matemática, o que inclui a formação inicial de professores, deve ser entendida como um direito e, portanto entendemos que qualquer que seja o nível de ensino seja numa escola pública ou particular, o aluno em formação deve poder usufruir uma educação tecnológica.

Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, desenvolver noções espaciais etc. E nesse sentido a escola passa a ser parte das respostas a questões ligadas a cidadania (BORBA e PENTEADO, 2003, p.17).

Por sua vez, Hitt (2003), assinala que o avanço tecnológico tem influenciado notavelmente para o estudo das diferentes representações dos objetos matemáticos. E com essa abordagem;

A visualização Matemática de um dado problema desempenha um papel importante, e tem a ver com entender um enunciado mediante a realização de diferentes representações da situação em questão o que nos permite realizar uma ação que possivelmente nos conduzirá a uma solução para o problema (HITT, 2003, p.6).

³⁰ Tais como, Anton, Stuart entre outros.

³¹ Laboratório de pesquisa em Educação Matemática Matemática mediada por computador/Círculo de estudo, memória e pesquisa em Educação Matemática - Faculdade de Educação/ Universidade Estadual de Campinas. <<http://www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec>>



3.2.1. O Uso do Computador no Processo de Visualização

Em nossa concepção não é possível conceber a abordagem das representações matemáticas por meio de software matemático sem trazer ao debate a necessidade de se utilizar elementos visuais o que implica dar a visualização um significado no processo de transformação, compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos.

Neste tópico estaremos a discutir algumas definições aplicadas ao termo visualização, baseando-nos em autores como Gutiérrez (1996), Borba e Villarreal (2005), Miskulin (1999), Fishbein (apud Miskulin, 1999), Hildebrand (2002) entre outros. Faremos também uma reflexão sobre as vantagens e desvantagens de se explorar imagens na tela do computador tendo como recurso softwares educativos e, nesse ponto, perceber através das leituras realizadas a importância da visualização nos processos matemáticos que os estudantes usam no desenvolvimento de uma atividade.

Como aponta Gutiérrez (1996), a visualização das representações gráficas no ensino da Matemática tem sido reconhecida dada a sua importância como uma das bases para formação do conhecimento. Nesse sentido, ele afirma que muitos educadores matemáticos têm enfatizado a relevância de se explorar esse campo de estudo. Assim em uma mostra desse interesse Gutiérrez assinala que tanto professores como autores de livros textos de Matemática têm ressaltado o uso de diversos diagramas de forma a serem evidenciados e explorados em sala de aula.

Segundo Borba e Villarreal (2005), a visualização tem sido considerada como uma fonte de pesquisas na área da Educação Matemática de maneira que vantagens e desvantagens em termos de abordagem visual no ensino e na aprendizagem têm sido discutidas e caracterizadas. Assim como em Gutiérrez (1996), Miskulin (1999), Borba e Villarreal (2005) apontam a existência de uma variedade de terminologias em referência a visualização, termos como imagens mentais, imagens visuais, habilidade espacial, visualização entre outros, os quais em alguns casos expressam significados bem diferentes.

Com respeito ao vocabulário, os termos imagem mental, imagem espacial e imagem visual definida por Yakimanskaya (1991), Dreyfus (1995) e Presmeg (1986), podem ser considerados como basicamente equivalentes, e os termos visualização, imagens visuais, e pensamento espacial podem também ser considerados como equivalentes (Gutiérrez, 1996, apud Miskulin, 1999, p.291).

Na área da Educação Matemática muitos são os trabalhos que dão suporte a uma organização teórica geral no campo da visualização. Em Gutiérrez (1996) encontramos vários



posicionamentos sobre o assunto dentre estes destacamos inicialmente considerações de educadores matemáticos sobre a necessidade da interação entre as imagens mentais e as representações externas (não mentais) ³² como um auxílio ao estudante na compreensão e apreensão no que concerne a resolução de problemas. “A visualização é o contexto onde esta interação acontece” (ZIMMERMANN, CUNNIGHAM, 1991, apud GUTIÉRREZ, 1996, p. 4).

Uma imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais. Uma representação externa pertinente à visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos, propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc., que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual (GUTIÉRREZ, 1996, p. 8).

Sendo assim, “visualização envolve a habilidade de interpretar e compreender informações figurais e a habilidade de conceitualizar e traduzir relações abstratas e informações não-figurais em condições visuais” (BEM-CHAIM, LAPPAN E HOUANG, 1989, apud BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 80). Nessas definições dois pontos se destacam em termos de habilidades visuais. Um, a capacidade de interpretação e compreensão dos objetos matemáticos na sua forma figural e o outro a capacidade de concebermos mentalmente imagens desses objetos quando se apresentam em sua forma abstrata e não-figural.

Ainda nessa perspectiva, Eisenberg e Dreyfus (1989, apud Borba e Villarreal, 2005) afirmam que, um conceito matemático pode ser representado através de um diagrama ou um gráfico o que implica que “a visualização está associada com a representação visual” (p.80). Sob outro ponto de vista Bishop (1983, apud Gutiérrez, 1996 p.8), diferencia dois tipos de visualização, sendo ele o “processo visual” de informação (VP)³³, onde para esse inclui-se a tradução de relações abstratas e perspectiva visual de dados não-figurais, a manipulação e exteriorização de imagens visuais, e a conversão de uma imagem visual em outra.

O segundo tipo leva a denominação de “interpretação de informação figural” (IFI)³⁴ a qual envolve informação de padrões visuais (imagens representando relacionamentos matemáticos), “linguagem” geométrica espacial, gráficos, diagramas em geral, leitura interpretativa de imagens visuais bem como as imagens mentais e físicas. Esses termos

³² “Uma imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade por meio de elementos visuais ou espaciais. Uma representação externa pertinente à visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos, propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc, que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 8)

³³ Para criar imagens mentais

³⁴ Para gerar informação





imagens mentais e imagens visuais têm gerado muito debate, no qual autores buscam fazer distinção entre eles.

Lean, Clementes (1981, apud Gutiérrez, 1996) usa a seguinte definição: “imagens mentais é uma ocorrência da atividade mental na percepção de um objeto, mas quando esse não lhe é apresentado aos órgãos dos sentidos”. “Imagens visuais são imagens mentais que incidem como uma figura no olho da mente” (p.5). Presmeg (1986, apud, Gutiérrez, 1996) busca definir uma imagem visual como um esboço que se processa na mente o que delinea informações visuais ou espaciais, tendo em vista um objeto ou outra representação externa qualquer.

Hildebrand (2002) discute em sua tese de doutorado que, criar modelos de representações de imagens mentais implica visualizar (em signos) as estruturas dos conceitos que se pretende conceber ou até operacionalizar. Nesse sentido, ele complementa que são as traduções entre os signos que nos conduzem a compreender os conceitos atribuídos aos signos, ou seja, o significado de algo é dado na sintaxe semântica ou pragmática do signo.

No artigo escrito por Gutiérrez (1996) podemos perceber a amplitude das várias considerações de diversos autores sobre imagens mentais e visuais bem como habilidades necessárias ao processo de imagens mentais. Nesse sentido esclarecemos que nesse trabalho em particular, não podemos abarcar aqui um estudo aprofundado, remetendo, portanto, ao leitor que se interesse por uma descrição mais abrangente desse campo, ler McGee (1979), citado por Gutiérrez (1996, p. 7), o qual em sua pesquisa resume resultados de vários outros trabalhos pertinentes ao assunto.

Centralizando agora, a nossa atenção a um contexto de ensino e aprendizagem da Matemática, esclarecemos inicialmente que vamos usar a palavra visualização tendo em mente a sua equivalência para com os outros termos mencionados tais como imagens visuais e pensamento espacial. Deste modo, o termo visualização em Matemática pode ser definido como;

Um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais como físico desenvolvido para resolver problemas ou provar propriedades, sendo que a visualização é integrada por quatro principais elementos: imagens mentais, representações externas, processos de visualização³⁵ e habilidades visuais (GUTIÉRREZ, 1996, p.8).

Em termos educacionais, a visualização possui um papel importante para diversos níveis educacionais incluindo aí o nível universitário. Trazendo essa discussão para um

³⁵ “Processos de visualização é uma ação física ou mental, no qual imagens mentais estão envolvidas” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 8)





contexto particular, Gutiérrez (1996), assinala que a visualização tem sido amplamente reconhecida em livros textos, trabalhos de pesquisas que focalizam o ensino e a aprendizagem do Cálculo³⁶. Ele ainda aponta que mesmo tendo surgido na geometria a idéia de se investigar o processo de visualização em Matemática, esse conhecimento tem sido bastante explorado no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo.

Conceitualmente, o papel do pensamento visual é tão fundamental para a aprendizagem do Cálculo que é difícil imaginar um curso com êxito de Cálculo que não enfatiza os elementos visuais do tema. Isto é especialmente verdade se o curso tem a intenção de promover um entendimento conceitual, o qual é amplamente reconhecido como carente na maioria dos cursos de cálculo como é atualmente ensinado. A manipulação algébrica tem sido enfatizada em demasia e nesse processo o espírito do Cálculo se tem perdido. (ZIMMERMANN, 1990, apud HITT, 2003 p. 6) .

A partir então da inclusão dos computadores, das possibilidades tecnológicas apresentadas por essas ferramentas, podemos sublinhar as palavras de (Borba e Villarreal, 2005) confirmando que, a função do software é primordial em muitas atividades envolvendo modelagem e resolução de problemas (acréscimo nosso), pois possibilita aos estudantes a oportunidade de explorar idéias matemáticas, analisar exemplos e contra exemplos permitindo aos mesmos um ganho de percepção visual de grande abrangência.

“A visualização é geralmente considerada útil em auxiliar a percepção e a formação de conceitos na aprendizagem Matemática” (DREYFUS, 1991, apud BORBA e VILLARREAL, 2005, p.88), podemos então conceber que a visualização é uma ferramenta importante para a compreensão dos processos matemáticos. Nesse sentido Zimmermann e Cunningham (1991, apud BORBA e VILLARREAL, 2005, p.88) advertem que a visualização é normalmente associada à representações gráficas , mas isso não deve ser considerado como um tópico isolado, a visualização também incide em outros contextos matemáticos tais como, as representações numéricas e simbólicas.

Como acima mencionado há as vantagens e desvantagens no uso do computador considerando a exploração visual dos objetos matemáticos. Vantagens tais como auxiliar a compreensão, exploração de novos ângulos e perspectivas na investigação e resolução num dado problema, análise diferenciada das soluções possíveis de um dado problema, aumento da percepção visual, permitindo ao estudante um ganho de experiência na qual lhes permitirá formar imagens mentais mais ricas do que dos livros, entre outras. Mas existem os problemas advindos em relação ao uso dos computadores, por exemplo, algumas limitações de tela, de

³⁶ podemos citar por exemplo algumas pesquisas na área tais como a da Mônica Villarreal (1999), Ricardo Scucuglia (2005) entre outros.





potencialidade no uso de um dado software o que induz o estudante a obter falsas interpretações. O professor, portanto deve estar atendo em auxiliar quando necessário aos seus alunos a apreender a interpretar as figuras e desenhos projetados na tela do computador corretamente. Um outro problema enquadra-se em termos da linguagem própria no uso do software, o que deve ser levado em conta na seleção desse dependendo da atividade a ser desenvolvida.

Segundo Borba e Villarreal, (2005), embora se reconheça a relevância do processo de visualização na situação de ensino e aprendizagem da Matemática, ainda é considerada de segunda classe na produção Matemática científica. Mas isto não acontece na Educação Matemática, pois a visualização constitui uma alternativa de acesso ao conhecimento matemático, a compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações e a representação visual pode transformar o entendimento em si, a visualização é parte da atividade matemática como um modo de resolver problemas, a tecnologia é uma interface visual presente nas escolas e seu uso no ensino e aprendizagem Matemática requerem compreensão do processo visual, se os conteúdos matemáticos podem ser mudados pelos computadores é claro que deve haver algumas mudanças na escola, e embora as provas sejam vistas como verdades na academia matemática não é necessariamente transposta para a sala de aula de matemática em vários níveis.

A tecnologia informática realça o componente visual da matemática mudando o status da visualização na Educação Matemática, pois alcança uma nova dimensão se considerar o ambiente de aprendizagem com computadores como um processo que vai além de mostrar uma imagem.

3.2.2. Representações Matemáticas em uma Perspectiva Semiótica e sua relação com os Processos de Visualização

Em particular, quando falamos em construção de conhecimento matemático, o termo representação passa a ter uma dimensão significativa. Por sua vez, a forma de representar conceitos e objetos matemáticos na perspectiva da Semiótica, nos conduz a pensar em abordagens que envolvam uma diversidade de linguagens próprias para representar essas entidades matemáticas. Linguagens que se fundamentam em signos, sendo esses, códigos, imagens, símbolos, sons e movimentos, entre outros.

Peirce (apud, Hildebrand, 2002) assinala que, as representações matemáticas possuem aspectos formais, sintáticos e mentais, “cujo enfoque está nas relações internas entre os





diversos elementos que estruturam esse tipo de signo, isto é, na composição, na forma, na medida, na estrutura e na inter-relação entre os aspectos visuais e mentais, sobre os quais o discurso matemático opera” (PEIRCE, apud HILDEBRAND, 2002, p.101).

As representações, portanto, têm um papel especial e importante na visualização dos objetos matemáticos seja essa imagem produzida por um computador ou uma imagem reproduzida no papel.

Segundo Hildebrand (2002), em inúmeras pesquisas que abordam temas matemáticos, os signos dão suportes visuais aos modelos que objetivamos representar. Assim, Roger B.Nelsen (1993, apud Hildebrand, 2002) analisa que, a produção de conhecimento por meio de imagens e diagramas visuais, constituem-se em auxílios na elaboração de demonstrações e provas Matemáticas, ou seja, a visualização é usada como estímulo às reflexões nas demonstrações Matemáticas.

Outro pesquisador Paul Halmos (apud Hildebrand, 2002) concebe que, a Matemática como ciência, exige de nós sujeitos pensantes, a habilidade de visualizar figuras como um fator fundamental e, que os professores deveriam ensinar a Matemática aos seus alunos fazendo uso dessa habilidade. O referido autor ainda nos esclarece que, “esta forma de raciocinar era muito utilizada por Albert Einstein e Henry Poincaré que diziam da importância de usarmos nossa intuição visual para melhor conhecer e representar as coisas do mundo” (p.107). A importância de visualizar desenhos, diagramas e representações no processo de reflexão pode ser também reconhecida nos estudos de Pitágoras, que segundo Hildebrand (2002), demonstrou a consistência de seus modelos por meio de imagens. Enfim;

A forma visual de um signo associada a um conceito é extremamente relevante na definição da notação, principalmente em Matemática. Um símbolo matemático deve possuir uma propriedade de dizer visualmente qual é o seu conteúdo conceitual, isto é, deve carregar em sua imagem a qualidade de representar o que ele substitui. Dizendo de outro modo, o conteúdo visual da representação signfica Matemática é muito importante para estabelecer o desenvolvimento do raciocínio sobre o modelo que estamos estudando. Se ele for mal elaborado dificultará a percepção do que estamos observando (HILDEBRAND, 2002, p.110).

Assim sendo, na presente pesquisa, a importância fundamental que assume a visualização no processo de compreensão dos conhecimentos matemáticos, será ressaltada, pois, em nossa concepção só se concebe os conceitos matemáticos se for possível atribuímos um significado matemático ao signo que representa o conceito matemático intrínseco a uma determinada representação. Nesse sentido, Miskulin (1999) assinala que, “a representação e a visualização desempenham funções extremamente importantes” (p. 289), enfatizando que,





toda representação possui um caráter semiótico e um caráter instrumental. A Semioticidade pode ser percebida pelos desenhos, gráficos, gestos, discursos, palavras, etc.

A dimensão instrumental da representação está relacionada aos objetivos, formas do sujeito expressar o conceito matemático por meio dos signos que carrega nele próprio o significado conceitual matemático. Assim sendo, como afirma (Fischbein, 1993, apud Miskulin, 1999) “nesta simbiose entre conceito e figura, como pode ser revelado nas figuras geométricas, por exemplo, é a imagem componente que estimula novas direções de pensamento, não esquecendo suas restrições lógicas e conceituais que controlam o rigor formal do processo” (p. 291).





Capítulo 4

Metodologia da Pesquisa - Parte 1 **As Entrevistas**



Capítulo 4

Metodologia da Pesquisa - Parte 1

As Entrevistas

4.1. Apresentação³⁷

Ao andar no campo, uma pessoa vê um pássaro amarelo no momento em que este retira uma amora de um arbusto, mas vai a outro arbusto, deixa cair a primeira amora e apanha uma segunda. Caso o observador fosse um ornitologista a estudar os hábitos alimentares, podia ser que estivesse a tomar notas detalhadas - a recolher dado. Se se tratasse de um investigador educacional a passear num dia de folga, os detalhes podiam passar despercebidos e não serem registrados. De modo semelhante, os arqueólogos chamam dados ao que os outros consideram lixo (antigos depósitos de lixo são uns dos locais favoritos para este tipo de investigação). Um memorando do diretor de uma escola pode constituir um dado valioso se o investigador o considerar como tal ou se compreender o seu potencial. Tal como um mineiro apanha uma pedra, perscrutando-a na busca do ouro, também o investigador procura identificar a informação importante por entre o material encontrado durante o processo de investigação. Num certo sentido, os acontecimentos vulgares tornam-se dados quando vistos de um ponto de vista particular o do investigador (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.149)

Conforme enunciado, a Metodologia de Pesquisa escolhida para a Coleta e Análise dos dados, foi baseada em uma abordagem qualitativa, com ênfase na observação participante. Nesse sentido, Fiorentini e Lorenzato (2006) assinalam que, a observação participante apresenta um aspecto naturalista ou etnográfico, na qual o pesquisador vivencia o local onde ocorrem os fenômenos, ou seja, onde as pessoas trabalham, comem, conversam, estudam etc. O termo participante significa participação do pesquisador associada ao registro das observações, com a característica de não interferir ou inferir o mínimo possível no ambiente investigado. Acreditamos, portanto, que a partir dessa metodologia será possível alcançar o envolvimento necessário ao ambiente investigativo, uma vez que:

A observação participante é uma estratégia que envolve não só a observação direta, mas todo um conjunto de técnicas metodológicas (incluindo entrevistas, consulta a materiais, entre outros), pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada (FIORENTINI e LORENZATO, 2006. p.108).

³⁷ Neste Capítulo, estaremos em alguns momentos, descrevendo os métodos e informações pertinentes à metodologia da pesquisa, na primeira pessoa do singular. O motivo para tal posicionamento vem do fato que na aplicação das atividades, bem como na realização das entrevistas e das observações em sala de aula, todos esses procedimentos, foram aplicados diretamente pela principal autora desse trabalho de dissertação (Margarete Farias). Além do que, acreditamos que a descrição dos dados, deverão tornar-se mais apropriado e natural ao leitor. No entanto é importante enfatizar que os encaminhamentos foram em sua totalidade baseados em valiosas sugestões por parte da orientadora desta pesquisa (Rosana Miskulin)





Nessa perspectiva, tendo em mente a pergunta diretriz e dos objetivos da pesquisa que são apresentados como:

- ✓ **Investigar e ressaltar as potencialidades didático-cognitivas das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, mediadas por softwares educativos, no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I;**
- ✓ **Investigar e evidenciar os limites e possibilidades didático-pedagógicas das representações matemáticas na formação do futuro professor de Matemática.**

Passei a me dedicar à Coleta de Dados da pesquisa, na qual, dei início observando as aulas de **Cálculo Diferencial e Integral I**, do curso de Licenciatura em Matemática, IGCE/UNESP – Rio Claro, no turno da manhã, duas vezes por semana, sempre as segundas e às quartas-feiras. Devo ressaltar que um dos objetivos para tal procedimento consistiu em obter uma maior interação com os alunos e com a professora da disciplina.

Os procedimentos metodológicos da Coleta de Dados podem ser descritos **em três momentos distintos**, porém inter-relacionados: Observação em sala de aula, interação com os sujeitos da pesquisa por meio de entrevistas e aplicações das **atividades Exploratório-Investigativas**, além das entrevistas com professores da UNESP de Rio Claro, que ministram ou ministraram a disciplina **Cálculo Diferencial e Integral I**.

Quanto às observações em sala de aula, em um primeiro momento da coleta, busquei perceber o ambiente da sala como um todo, bem como a metodologia utilizada na apresentação da matéria, além de apreender, sob a ótica da professora, **o papel das representações** na resolução das atividades, problemas e na apresentação de conceitos matemáticos.

Em relação às entrevistas foi realizado um encontro com a professora da disciplina que ora observava, além de alguns professores da UNESP de Rio Claro, que ministram ou ministraram a disciplina CDI I³⁸. A relevância dessa iniciativa consistiu no fato de considerarmos (eu e minha orientadora) essencial conhecer mais de perto a opinião desses formadores, no que se refere principalmente, a importância das **representações** Matemáticas para o conhecimento do futuro professor.

Foram também realizadas **entrevistas** com os sujeitos da pesquisa, visando, por conseguinte, perceber mais proximamente a idéias dos mesmos com respeito às suas dificuldades, compreensões e interpretação ao explorar as várias **representações**, próprias da matéria CDI I, na resolução dos problemas e atividades, propostos em sala de aula.

³⁸ Não limitamos ao ano em que foi ministrada pelo professor ou grau de experiência do mesmo com a disciplina.





Concluindo a coleta de dados, foram aplicadas **atividades Exploratório-Investigativas** junto aos sujeitos da pesquisa com a finalidade de perceber sob um outro ponto de vista, possíveis dificuldades dos estudantes, as quais poderiam emergir, perante a exploração das várias **representações** Matemáticas, associadas ao uso do software **Winplot**.

Na descrição das **atividades** realizadas com os sujeitos pesquisados, estaremos utilizando a denominação **atividades exploratório-Investigativas**, apoiada na perspectiva da **Investigação Matemática em Sala de Aula** tendo como principal referência João Pedro da Ponte (2005)³⁹.

Vale ressaltar, que o conjunto de **procedimentos metodológicos**, que nos propomos a concretizar: as entrevistas, observação, aplicações de atividades, constituem-se em partes integrantes de um todo, no sentido de obter as informações necessárias e fundamentais que, possivelmente, permitirão um delineamento para a **análise dos dados**.

Acreditamos, portanto, na relevância da aplicação de cada uma desses procedimentos, pois através deles, associados à teoria, objetivamos legitimar o principal questionamento dessa pesquisa, que consiste em **investigar as contribuições das representações matemáticas, em uma perspectiva semiótica, mediadas por software educativo, como uma possibilidade didático-pedagógica no ensino do CDI I, de maneira a subsidiar o conhecimento do futuro professor de Matemática**.

4.2. Antes: o encaminhamento dos trabalhos

O “**Antes**” constituiu-se em momentos de estudo e reflexão, especificamente acerca de leituras em busca de melhor realizar as observações e as entrevistas, ou seja, como e qual a maneira mais adequada de escrever o diário de campo acerca dos acontecimentos.

Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994) assinalam que, no diário de campo deve ser escrito o que aconteceu, a descrição dos lugares, acontecimentos, atividades e, integrados à esses dados, devem ser registradas as conversas, idéias, estratégias, reflexões e palpites, bem como os padrões que emergem. Sendo que, depois de cada observação, entrevista ou qualquer outra sessão de investigação é aconselhável anotar o que se viu, ouviu, experienciou, pensou ou refletiu sobre as informações obtidas.

O “**Antes**” também se constituiu em momentos de preparação e organização para a coleta de dados junto aos sujeitos da pesquisa na realização das entrevistas e aplicação das

³⁹ Tema que será abordado com mais profundidade no Capítulo 5 desta pesquisa.





atividades, bem como para composição do material de estudo. Esse tempo foi particularmente importante, pois nos permitiu definir e organizar a maneira como as informações seriam obtidas, de forma a intermediar um caminho na busca de responder a pergunta diretriz e, conseqüentemente, vir a atender os objetivos da pesquisa.

Vale enfatizar, que toda essa elaboração foi fundamental, pois possibilitou-nos tomar várias decisões a respeito dos procedimentos metodológicos a serem aplicados, definindo o local da coleta de dados, o que iríamos observar a necessidade de realizar entrevistas, os registros dos dados em áudio, vídeo ou somente em notas escritas, quais dimensões seriam analisadas aprendizagem ou ensino, se a abordagem seria metodológica ou epistemológica, com quantos ou quais alunos seria realizada a pesquisa, enfim decisões essenciais para o desdobramento do nosso trabalho investigativo.

Determinados, portanto, os encaminhamentos, o primeiro passo foi procurar a professora responsável pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Matemática (1º. Ano) - UNESP de Rio Claro e apresentar-lhe formalmente a minha intenção em observar a sua classe de alunos. Argumentei que o objetivo para tal iniciativa consistia em interagir com os estudantes e, conseqüentemente, estar a par dos trabalhos desenvolvidos pela professora na apresentação dos conteúdos, bem como, o de observar a dinâmica dos alunos na resolução dos exercícios e problemas propostos em classe. Mais especificamente, o objetivo consistiu em identificar subsídios teórico-epistemológicos para a configuração do contexto da pesquisa, quantos e quais alunos, os procedimentos metodológicos, a abordagem do Cálculo quanto às representações Matemáticas, entre outros.

A concordância da professora foi imediata, e tendo em mãos a sua liberação para nossa solicitação essa pesquisadora pôde iniciar os trabalhos de coleta de dados.

4.3. Durante: o desenvolvimento da pesquisa

O desenvolvimento da Pesquisa constituiu-se principalmente, no momento da Coleta de Dados, nesse sentido, foram realizados diferentes procedimentos já mencionados na apresentação acima: observação, entrevistas e aplicação de atividades. A finalidade para tal estrutura foi fundamentalmente determinada pela questão investigativa e pelos objetivos da nossa pesquisa.

Vale enfatizar, que a idéia de observar as aulas da disciplina CDI I correspondeu à expectativa de tentar responder em parte a nossa pergunta diretriz, no sentido de considerar a





relevância das representações Matemáticas sob o ponto de vista tanto do aluno como da professora no momento da apresentação dos conceitos, teoremas e propriedades inerentes à disciplina, bem como, na resolução dos exercícios propostos em aula. Para tanto, foi observado por um lado, como a professora percebia e explorava essas representações em sua prática pedagógica e, por outro lado, as dúvidas, os argumentos, as perguntas, respostas e procedimentos que os alunos empregavam ao utilizar uma dada representação na resolução dos problemas e atividades propostas pela professora da classe.

Para o registro das **observações**⁴⁰, utilizei o **diário de campo**, no qual foram anotados **os episódios de aulas**, retratando alguns diálogos entre os alunos e a professora, além da descrição do cenário da sala de aula e de alguns outros elementos envolvidos no contexto. Essa abordagem, portanto, contribuiu para responder apenas em parte a nossa pergunta diretriz, por conter percepções muito genéricas e superficiais, embora tenha buscado estar sempre atenta aos acontecimentos ocorridos no ambiente do estudo que estava a observar. Para tanto, fez-se necessário o estudo com alguns outros procedimentos metodológicos que serão explicitados a seguir.

As **entrevistas** foram realizadas com **cinco professores**⁴¹ que ministraram ou ministraram CDI I e **vinte e um alunos** da turma de CDI I - primeiro ano da UNESP de Rio Claro, como já mencionado, lembrando que o principal objetivo consistiu essencialmente **em conhecer mais de perto a opinião desses formadores, no que se refere principalmente, a importância das representações matemáticas para o conhecimento do futuro professor**. Essas entrevistas vieram corresponder a nossa expectativa em obter mais diretamente alguns dados que não foram possíveis alcançar na observação. Nesse sentido tivemos a oportunidade de aprofundar a nossa investigação, complementando assim os outros métodos adotados.

Na **aplicação de atividades exploratório-investigativas** com os alunos tínhamos como objetivo perceber, sob outra perspectiva, a relevância das múltiplas representações, na resolução das atividades exploratório-investigativas, nesse sentido, buscar compreender a partir das falas, registros escritos e interpretativos (gravados em áudio) dos estudantes perante o processo de construção e realização dos problemas matemáticos propostos em tais atividades.

⁴⁰ As observações encontram-se detalhadamente descritas no Anexo B (CD-ROM) desta pesquisa.

⁴¹ Das cinco entrevistas realizadas uma não será divulgada devido problemas éticos (infelizmente um dos professores faleceu e não houve tempo hábil para correção do texto, de maneira que não foi possível obter autorização para publicação da referida entrevista).





4.3.1. O Diário de Campo da Pesquisadora

No diário de campo foram registradas as observações constando apontamentos dos assuntos apresentados à classe de CDI I, durante as aulas e, como parte desses registros, foram feitas anotações referentes às impressões e comentários extras ocorridos entre os alunos e a professora, no ambiente da sala de aula. A esses dados foram também acrescentados comentários específicos registrados sobre as entrevistas realizadas com os estudantes dessa mesma classe e os professores de CDI I, além das anotações das atividades aplicadas no laboratório de informática associadas aos comentários dessa pesquisadora. Nesse sentido, acreditamos ser relevante descrever nesse texto parte do que foi registrado no diário de campo de modo a revelar o que foi observado.

4.3.1.1 Observando o Ambiente da Sala de Aula.

A decisão tomada por mim e minha orientadora em observar a turma de graduandos do curso de Matemática nos permitiu alcançar um dos objetivos da coleta de dados que consistia em uma maior proximidade entre essa pesquisadora com os estudantes assim como com a professora da disciplina. Essa oportunidade de vivenciar o ambiente natural de sala de aula me possibilitou, portanto, registrar observações e percepções com maior acuidade, o que facilitou, seguramente, na obtenção de dados mais esclarecedores acerca dos aspectos fundamentais dessa investigação.

O contato inicial com a turma foi um tanto desconfortável devido ao fato de não conhecê-los, bem como da minha própria inexperiência em estar realizando pela primeira vez uma coleta de dados. Para resolver esse **primeiro impasse** e, de certo modo, estar respondendo a curiosidade dos estudantes em estar vendo aquela figura “estranha” no meio deles, foi combinado com a professora da disciplina um momento da aula para que eu pudesse me apresentar para a turma e, nesse breve instante, explicar aos estudantes o motivo pelo qual estava ali, explicitando, portanto, o foco e os objetivos da pesquisa frente ao trabalho que esperava desenvolver, especificamente, que pretendia participar das aulas como ouvinte, visando observar como os conteúdos de Cálculo I eram tratados pela professora, mais especificamente, como as representações Matemáticas eram abordadas em sala durante as aulas, bem como estar interagindo com todos, e que, posteriormente, os convidaria a participar da aplicação de algumas atividades, nas quais teríamos a oportunidade de usar o





software matemático **Winplot** no processo de discussão e compreensão dos conceitos de CDI I.

Na verdade, a tática de não dar muitos detalhes foi devido a uma conversa anterior com a professora (da classe) que achou por bem não informar aos alunos que estaria ali para observá-los, pois poderia constrangê-los e, possivelmente, os levaria a agirem não espontaneamente no ambiente da sala de aula enquanto eu estivesse presente.

Em relação aos estudantes, é interessante destacar que durante a minha explanação, demonstraram atenção, embora com certo desinteresse, pois ao perguntar-lhes se tinham alguma pergunta ou dúvida não houve nenhum tipo de manifestação por parte deles, o que foi motivo de apreensão de minha parte, pois o primeiro pensamento foi: “e se não houver interesse por parte dos estudantes em participar da minha pesquisa?”. Este passou a ser o **terceiro impasse**.

O **segundo impasse** referiu-se à inexperience desta pesquisadora, dificuldade que aos poucos foi sendo encaminhado e, para tanto, se mostrou necessário estar revendo algumas das recomendações de Bogdan e Biklen (1994) os quais assinalam que “o investigador deve ser o mais descritivo possível” (p.163) e, nesse sentido, deve apreender o momento, registrando as idéias, estratégias, reflexões e palpites, bem como os padrões que emergem.

Considerando tais sugestões, me dediquei a iniciar as anotações em meu diário de campo, relatando os fatos que pude ouvir ver, experienciar no decurso da coleta de dados e, sempre que possível, registrava as minhas reflexões acerca das notas de aula bem como das perguntas e dúvidas dos alunos encaminhadas a professora da disciplina.

O contato com os alunos, em sala de aula ocorreu em aproximadamente dois semestres. Nesse intervalo foram realizadas dezenove observações em classe. Na primeira observação, fiz anotações das minhas impressões acerca do ambiente.

Ao passar dos dias a minha presença foi ficando cada vez menos incômoda e estranha e a relação com os estudantes tornou-se menos formal o que possibilitou uma maior integração ao ambiente. Segundo Bogdan e Biklen (1994), “à medida que o investigador vai passando mais tempo com os sujeitos, a relação torna-se menos formal” (p.113). No meu caso, em particular, essa relação de proximidade foi decisivo em relação ao terceiro impasse, acima mencionado, pois com a participação em sala de aula, no dia a dia, pude sentir o momento em que já me sentia habilitada a convocar os estudantes a participarem como sujeitos integrantes da pesquisa.

No final do primeiro semestre, resolvi solicitar à professora da disciplina, um momento da aula, com o objetivo de fazer um convite a todos os alunos que estivessem





interessados em participar como colaboradores para coleta de dados de minha pesquisa. No momento do convite optei por ser clara e objetiva ao apresentar a proposta do trabalho, explicando aos estudantes que a partir do segundo semestre seriam necessários alguns encontros, extraclasse, para a aplicação de algumas atividades, nas quais os assuntos a serem abordados, corresponderiam aos que foram apresentados durante o curso corrente da disciplina pela professora, enfatizando que eles teriam a oportunidade de estar explorando conceitos matemáticos de Limites e Derivadas com um software matemático - o **Winplot**.

Expliquei que a participação dos mesmos seria fundamental para o desenvolvimento da minha pesquisa. Após essa explanação, passei aos alunos um papel, no qual propunha aos que estivessem interessados a escreverem os seus nomes, entre outras informações, como e-mail, fone para contato, assim como outros dados. Vale registrar que vinte e sete alunos se dispuseram a participar o que significou o fim do terceiro impasse. É claro que a quantidade de inscritos ultrapassou a minha expectativa, mas não significou necessariamente um problema, embora tivesse agora um **quarto impasse**, mas esse contratempo parecia ser de fácil resolução, afinal nesse caso, é melhor o excesso do que a falta.

Referindo-me, portanto, ao **quarto impasse**, ou seja, em relação a seleção dos sujeitos para a coleta de dados de nossa pesquisa, tínhamos pensado (eu e minha orientadora), inicialmente, em convidar um grupo de oito a dez licenciados, mas viemos descobrir a posteriori que o curso de Matemática da UNESP de Rio Claro não faz distinção, nos três primeiros anos, entre licenciatura e bacharelado. A maioria dos “novatos” quando se matriculam ainda não tem necessariamente uma idéia, se pretendem formar-se professor ou bacharel.

Cientes dessa informação passamos a considerar, portanto, a possibilidade de convidar os estudantes sem a preocupação no seu interesse ou inclinação referente à que caminhos pretendiam seguir, contanto que fossem alunos da disciplina CDI I, porém, dando prioridade àqueles que manifestassem interesse em, futuramente, ensinar Matemática.

A seleção, portanto ficou por ser definida após entrevista com os inscritos, na qual teríamos maiores informações a respeito dos seus interesses e projeções para sua formação, pois no momento da inscrição, somente dois estudantes explicitaram querer cursar licenciatura e apenas três manifestaram interesse em cursar o bacharelado. Os outros não se manifestaram o que implicou na maioria deles. Logo, tendo em vista esse panorama, achamos ser prudente esperar mais um pouco. As entrevistas ficariam por serem realizadas logo no início do segundo semestre do presente ano.



4.3.1.2. As Notas de Aula

As aulas de **Cálculo I**, durante **todo o primeiro semestre** foram pautadas de forma tradicional, centrada na figura da professora. E, deste modo, tornou-se inviável observar sistematicamente a produção dos alunos, em termos de resolução de exercícios e problemas, propostos durante as aulas. Entretanto, foi bastante proveitoso observar a metodologia e procedimentos adotados, bem como perceber a relevância das **representações Matemáticas** na abordagem dos conteúdos propostos em sala de aula.

Ao iniciar o curso, a professora apresentou aos alunos os conteúdos que seriam discutidos durante o ano letivo, apresentado na seguinte ordem: **Números Reais, Funções, Limite, Continuidade, Derivada, Integral, Coordenadas Polares, Seqüências e Séries**. Nessa **1ª Aula** a professora achou por bem dar uma breve revisão abordando **Números Reais e Funções**, o que em sua concepção são assuntos que costumam ser pré-requisitos para a disciplina **Cálculo Diferencial e Integral I**.

No início, ela começou relembrando as propriedades dos números naturais, inteiros, e racionais e na sua exposição sempre fazia referência de como esse assunto é apresentado no ensino fundamental e como os alunos sentem dificuldade em abstrair quando se fala em reta real. Ao revisar **Funções Polinomiais**, por exemplo, é perceptível a preocupação da professora em explorar **as várias representações algébricas e gráficas**. Alguns alunos (os veteranos) deram a entender que não sentiam muita dificuldade em reconhecer as funções afim, linear, quadrática e cúbica. Entretanto, em relação a outras funções como as Funções Trigonométricas, os alunos pareciam apresentar pouca familiaridade.

Nesse sentido, para amenizar um pouco a dificuldade expressada pelos alunos, a professora usou com muita frequência o círculo trigonométrico para ilustrar os resultados, sempre fazendo comparações com os gráficos dessas funções. E, mesmo assim em várias dessas construções foram geradas algumas dúvidas por parte dos alunos, na sala de aula.

Notei também, que mesmo os veteranos e, principalmente, os calouros sentiam alguma dificuldade na construção dos gráficos e na interpretação de funções através do círculo trigonométrico, bem como em outras representações apresentadas durante as aulas. Vale ressaltar, que na apresentação da maioria dos conteúdos **a professora explorou as representações algébricas, gráficas e geométricas**, buscando sempre **mostrar as relações intrínsecas entre elas**. Pude inferir que na concepção da professora o desenho do gráfico teve a função de auxiliar a compreensão do aluno no desenvolvimento algébrico de um processo



matemático, ou seja, não teve a função de provar ou validar um resultado, seja ele concebido por meio de um conceito, propriedade, teorema. Em suas palavras: “Provar só algebricamente”. O que, aliás, essa forma de representar foi bastante explorada na justificação de resultados, propriedades e teoremas de limites e derivadas de funções, apresentados durante as aulas.

Na concepção dessa pesquisadora, de tudo o que foi visto e observado, mesmo que ainda superficialmente, é percebível a dificuldade do aluno quanto às justificativas dos exercícios, nas **interpretações dos gráficos**, principalmente nas demonstrações de propriedades, mostrando assim uma compreensão parcial dos assuntos que estão sendo aprendidos. Os motivos pelo qual isso ocorre não nos competem nesse trabalho delimitar uma resposta, mas, certamente, influenciarão em nossas ações futuras como investigadoras.

Impressões abstraídas a partir das observações, terão as suas parcelas de importância nessa investigação quando chegar o momento de analisar a produção desses estudantes, considerando as entrevistas e a aplicação das atividades exploratórias - investigativas.

4.4. As Entrevistas

[...] o entrevistador deve manter-se na escuta ativa e com a atenção receptiva a todas as informações prestadas, intervindo com discretas interrogações de conteúdo ou com sugestões que estimulem a expressão mais circunstanciada de questões que interessem a pesquisa. A atitude disponível à comunicação, a confiança manifesta nas formas e escolhas de um diálogo descontraído devem deixar o informante livre para exprimir-se sem receios, falar sem constrangimentos sobre seus atos e atitudes, interpretando-os no contexto que ocorrem (CHIZZOTI, 1991, apud FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p.122).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), as entrevistas possuem características bem familiares, pois consistem em uma conversa entre duas pessoas, podendo, no entanto, envolver mais indivíduos, com o objetivo de adquirir informações sobre um tema, sobre a pessoa, suas concepções entre outros aspectos.

A entrevista além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados de alcance superficial ou genérica, como por exemplo, a observação (RICHARDSON et al., 1985, apud FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p.120).

Em nossa pesquisa, optamos pela **entrevista semi-estruturada**, a qual segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), essa modalidade de pesquisa é muito usual em várias pesquisas





educacionais. A **entrevista semi-estruturada** busca aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão, específica, e para a aplicação da mesma, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados e, nesse processo pode algumas vezes alterar a ordem dos mesmos, inclusive formular questões não pensadas inicialmente.

Em nosso estudo investigativo, achamos relevante entrevistar tanto os sujeitos da pesquisa, (**vinte e um estudantes do primeiro ano de Matemática**, da turma de CDI I da UNESP de Rio Claro-SP), bem como os **professores** que trabalharam ou trabalham com a disciplina **Cálculo I**, nessa universidade, com o objetivo de perceber a importância das representações matemáticas para o conhecimento do futuro professores.

Vale acrescentar que, pesquisar significa para nós “enxergar” o objeto de investigação – representações matemáticas - sob várias perspectivas, as quais se constituem nas dimensões importantes do contexto da pesquisa. Desse modo, achamos de suma relevância entrevistar professores de Cálculo, além dos estudantes como já mencionado.

Para aplicar as entrevistas, primeiramente entrei em contato com os possíveis candidatos (professores formadores) e sujeitos da pesquisa (estudantes de Cálculo I), informando-os do objetivo e natureza da presente pesquisa, explicitando o motivo pelo qual eles foram escolhidos, em adição, me preocupei em confirmar que tudo o que fosse narrado na entrevista seria tratado com bastante ética e respeito, pois o meu interesse constituía-se apenas em uma investigação para o meu trabalho de pesquisa.

As **entrevistas** foram individuais, gravadas em áudio com a permissão dos entrevistados. Os encontros com os professores e estudantes foram determinados de acordo com a disponibilidade dos mesmos. Como já explicitado, foram entrevistados vinte e um estudantes e cinco professores (como já enunciado em nota de rodapé, p.69, apenas quatro das cinco entrevistas serão divulgadas), dentre esses se inclui a professora da turma de **Cálculo I**.

Na transcrição das **entrevistas**, as quais serão relatadas nos itens a seguir, tanto os professores, quanto os estudantes terão os seus nomes codificados, assim como ocorrerá na descrição das aplicações das **atividades exploratório-investigativas**. As **entrevistas** foram compostas no formato semi-estruturado, sendo previamente elaboradas **doze perguntas**⁴² dentre as quais foram articuladas questões não previstas inicialmente.

⁴² As perguntas propostas nas entrevistas estão disponíveis no Anexo C (CD-ROM) (desta pesquisa)



4.5. Conversando com os Professores

Na preparação das **entrevistas dos professores**, organizamos um roteiro em torno de **quatro blocos**: O **primeiro** referiu-se à **formação do entrevistado**⁴³, a **sua experiência em lecionar para turmas de Cálculo Diferencial e Integral I** e sobre o **papel da disciplina Cálculo para a formação do futuro professor de matemática**.

O **segundo bloco** versou sobre a aplicabilidade e a **importância das representações matemáticas** no contexto do ensino de **CDI I**. O **terceiro bloco** buscou perceber a **relação do professor com as TICs**, sua **experiência com uso de softwares educativos**, sua **relação da utilização dessa tecnologia com a abordagem das várias representações Matemáticas** e, qual a **relevância do uso dos softwares na exploração das representações matemáticas como um recurso didático e pedagógico**.

O **último bloco** versou sobre o **conhecimento do futuro professor de matemática**, isto é, qual a opinião do **professor formador** em referência aos conhecimentos de **CDI I**, necessários à formação inicial de professores.

Em termos de esclarecimento informamos ao leitor que as entrevistas com os professores foram transcritas na íntegra e estão descritas em sua forma original, podendo conter erros de linguagem. No entanto, o leitor poderá optar por ler apenas a síntese interpretativa realizada pela pesquisadora ao final de cada entrevista.

É importante também ressaltar que, o objetivo de manter em incógnita a **identidade dos professores entrevistados** consiste em transcrever suas concepções a respeito dos temas abordados na sua forma original sem correções ou alterações de texto (salvo vícios de linguagem). Esses professores, para efeitos descritivos, serão denotados pelas letras **K, Y, W** e **Z**, considerando que o termo “**o professor**” corresponde na presente pesquisa aos sujeitos do sexo feminino e masculino.

⁴³ Esse bloco não será revelado, objetivando preservarmos a identidade do professor entrevistado.

4.5.1. O Professor K

A entrevista com o professor K foi realizada no dia 22 de junho de 2006, em sua sala de trabalho, às 10:00 hs. (dez) da manhã. Durante a nossa conversa, o professor aparentava tranqüilidade respondendo a todas as perguntas sem restrições.

Sob o ponto de vista do professor K, um dos principais motivos da reprovação na disciplina **Cálculo** é o despreparo do aluno quando chega à universidade. Em sua opinião os alunos chegam realmente mal preparados e a universidade, por sua vez, ignora esse fato e ignorando esse fato, o índice reprovatório torna-se muito alto, em consequência, afeta a disciplina Cálculo, assim como outras que fazem parte do currículo do curso de Matemática. Desta maneira, na concepção desse professor, **Cálculo é uma das disciplinas que tem reprovação alta.**

Em relação ao despreparo do aluno, o professor K aponta que falta compreensão sobre o conteúdo, pois em suas palavras o aluno quando chega ao primeiro do curso de Matemática, parece estar preso às fórmulas, não se preocupando em justificar o uso dessas fórmulas ou procedimentos de cálculos operatórios. Ele ainda entende que no Ensino Médio, a Matemática é apresentada de maneira estática, e quando o aluno chega á universidade e vê pela primeira vez um curso de Cálculo, percebe uma **Matemática que além de discreta é contínua.** Desta maneira, a forma de pensar do aluno concebida no Ensino Médio, sofre uma transformação ao deparar-se com a Matemática da universidade, Outra dificuldade é a linguagem lógico-formal própria do Cálculo Diferencial e Integral, pois o processo de abstração leva tempo. Nesse sentido, a abstração, na concepção do professor K:

É sempre uma reflexão sobre o que fazer, você só abstrai quando você pensa sobre. Uma coisa é fazer, outra é pensar sobre o que está fazendo. Tecnicamente, você pode realizar qualquer atividade, mas para realizá-la, antes você reflete sobre aquela atividade, do que ela é feita, como ela é feita, como é que ela funciona e é a partir daí que é possível a abstração. Então essa reflexão é importante.

O professor K segue em sua explanação comentando que, normalmente a disciplina é apresentada aos alunos de forma invertida, isto é, primeiro é dada a teoria e, a seguir, as aplicações, de maneira que a abstração vem antes da reflexão, o que na opinião desse professor, deveria ser ao contrário, primeiro deveria ser dado ao aluno a oportunidade de refletir de pensar de experienciar, só depois então exigir a sua capacidade de abstração. E, nesse sentido, o professor K, propõe que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral passe a ter mais aplicações, seja ela dada nos cursos de Geologia, Física, Química, Matemática entre



outros. Mas ressalta que, em geral, os alunos de Matemática não gostam e nem sentem falta de trabalhar nessa acepção. Ouçamos o que diz o professor K;

Eu sinto que os alunos não gostam muito quando envolvem aplicações, apesar de que eu dava muitas aplicações no curso de Cálculo. Mas, acho que isso é um círculo vicioso, pois muito do que os alunos pensam advém do próprio ambiente. Faz parte do ambiente em que ele está, no qual a maioria dos professores de Matemática não valoriza o uso de aplicações no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. O aluno por sua vez, quando estuda Cálculo, não vê aplicações, logo quando esse aluno torna-se um professor e se por acaso for dá um curso de Cálculo, provavelmente não trabalhará com essa abordagem (grifo da pesquisadora). Isso explica o sucesso dos meninos no livro do Guidorizzi, o que no meu ver não é um livro de Cálculo, mas muitos professores gostam, por quê? Não tem a parte de aplicação. Eu acho que, quando eu falo em reflexão, penso também na teoria - é uma reflexão sobre um fazer. A teoria é abstração de uma prática. E, não há como você aprender Cálculo sem que você trabalhe com aplicações, logo o primeiro contato com essa disciplina é dentro de um problema e o restante é a teoria sobre a resolução daquele problema. (grifo da pesquisadora).

O professor K, também faz uma ressalva, assinalando que o aluno do primeiro ano está mais aberto ao curso, essa abertura advém da mudança de ambiente, pois é justamente o que ele espera - que haja mudança. E, em um curso de **Cálculo**, se você começa com uma abordagem diferenciada evidenciando as aplicações, ele estará aberto a essa metodologia. Porém, isso não significa que ele goste, nem mesmo que ele ache interessante e talvez até preferisse que não tivesse aplicações, pois isso introduz certa dificuldade, mas cabe ao professor conduzir de maneira que seja interessante e que conceitos não sejam concebidos mecanicamente, mas por meio da experiência.

Nos meus primeiros cursos, quando ensinei Cálculo era de forma bem tradicional, eu começava com demonstrações, epislons e deltas, tinha exercícios e provas, depois com o tempo eu fui mudando. Eu me lembro que num curso anual, resolvi começar pela parte de integral, e não por Limites e Derivadas. Eu lembro da primeira vez que fiz isso foi com alunos do primeiro ano, não tinham idéia do curso, nunca tinha feito Cálculo, estava entrando pela primeira vez na universidade, mas tinha alunos que já tinha feito Cálculo antes. Eu me lembro direitinho que uma aluna chegou pra mim, depois de algumas aulas e falou: professor, você está maluco, você vai começar justamente por integral? (ela já tinha feito a disciplina) Ela reclamou no início, ouvi o seu desabafo na época, até que recentemente encontrei com ela e nos lembramos do fato, depois ela concordou que funcionou a disciplina.

Ao citar essa experiência, **o professor K** assinala que, o aluno quando chega ao primeiro ano, ele já é introduzido em um espaço no qual existem coisas que são valorizadas ou não são valorizadas, isso é evidente e, ele sofre a pressão do ambiente e das pessoas que o cercam e convivem nesse meio e com as mudanças que ocorrem adicionadas à reação do pessoal antigo, ou seja, os alunos veteranos.





Prosseguindo a entrevista perguntei ao **professor K**, sobre a relevância da disciplina **Cálculo para a formação do futuro professor de Matemática**, especificamente para o aluno do primeiro ano. O professor K me respondeu que o Cálculo é em primeiro lugar uma passagem de um tipo de raciocínio discreto para um tipo de raciocínio contínuo, onde o termo contínuo faz a grande diferença do Cálculo. Ele ilustra o fato, dizendo que se o aluno pegar um possível deslocamento e dividir em pequenos intervalos, considerar a cada pequeno intervalo uma força constante, a seguir, calcular o trabalho pra cada um deles, somar tudo e depois calcular limite, esse é um típico exemplo da passagem do raciocínio discreto para o contínuo. E na Matemática essa idéia é muito importante, principalmente em termos de aplicações, a qual na opinião do professor K é uma das **idéias fundamentais da Matemática**, portanto, deve fazer parte da formação do professor. A questão é discutir o quanto e o quê, ou seja, deve envolver um contexto. Na concepção do professor K, o futuro professor tem que ter uma idéia geral da Matemática.

Ao perguntar-lhe sobre a importância de se abordar várias **representações** matemáticas para a compreensão e resolução de um dado problema? O professor K me respondeu que:

Cada representação permite ao aluno tirar algumas conclusões que outras representações não permitem. Então justamente por isso que é importante ter representações, representar conceitos.(grifo da pesquisadora) Do ponto de vista formal, lógico você tem representações, que nos permitem fazer variadas interpretações sobre as definições. A partir das definições e axiomas você faz as demonstrações, essa é a parte formal. Agora quando você fala em raciocínio, o indivíduo vai pensar, e nós não pensamos com a definição (grifo da pesquisadora), ninguém pensa em derivada, com a definição de derivada, ninguém pensa em integral com a definição de integral. Quando você vai resolver um problema que envolva integral ou derivada, você não vai pela definição, você usa as representações, por isso ela é importante. Se o indivíduo não faz isso, a única coisa que ele vai fazer é classificar problemas, e associar esse problema ao tipo de fórmula, o que é muito comum. (grifo da pesquisadora).

Nesse sentido, o professor K afirma que, não consegue pensar sem representações, sublinhado que acha importante que o futuro professor tenha consciência do uso dessa abordagem, não como uma técnica, mas como um método que possa favorecer a compreensão da matéria seja ela qual for. O problema é diferenciar e coordenar essas representações. Ouçamos o que diz o professor K:

O problema é que eu não posso pensar nunca isso separadamente porque muitas vezes passo de uma pra outra (grifo da pesquisadora), em geometria analítica costumo muito fazer isso. A idéia é como o indivíduo cola uma com a outra, ele tem que saber. Eu acho que isso pro professor é importante, pro



aluno também é importante. [...] agora normalmente isso não é explorado, não é explorado. (grifo da pesquisadora).

Dando prosseguimento à entrevista, perguntei ao professor K, **qual a sua experiência em trabalhar com software educativo em sala de aula?** Sua resposta foi taxativa, em afirmar que não usa software nem esporadicamente, que uma vez usou, mas já faz muito tempo. Em suas palavras ele afirma:

Não vejo vantagem nesse uso, pois eu nunca consigo os programas que façam o que eu gostaria que fizesse (grifo da pesquisadora). Usar o Maple, por exemplo, é loucura, pois o indivíduo vai ter que aprender antes uma linguagem super complexa. O tempo que eu acho que o aluno perde aprendendo aquela linguagem ou escrevendo aqueles codificadores, quando não se sabe de pronto, acho que acaba desanimando-o a fazer outras explorações (grifo da pesquisadora).

Ao ouvir o **professor K**, pergunto-lhe: e o Winplot, você conhece? O professor K me responde que não conhece e contrapõe que acha muito interessante que o aluno pense “com a mão”. Insistindo ainda nesse tema eu pergunto ao professor K, se ao estar trabalhando com os alunos em sala de aula com uma abordagem que envolva o uso de várias representações ao investigar um dado problema, não seria importante o uso do software matemático como um recurso didático, como um agilizador dos processos matemáticos? O professor K responde que, deixando de lado a dificuldade em relação a linguagem que deve ser apreendida no uso do software, realmente é importante em termos de visualização.

A seguir e já finalizando a entrevista, pergunto ao professor K, em sua opinião, **quais conhecimentos seriam importantes para a formação do futuro professor de Matemática?** O professor K no início não entende e pergunta **conhecimento matemático?** Eu respondo, também, mas não existe só esse conhecimento, você pode pensar em termos gerais. O professor K, então responde, proferindo que é uma pergunta ampla e difícil, mas por fim assinala:

Na formação Matemática do aluno é importante ter noção de problemas envolvendo o vetorial e o não vetorial, a idéia do topológico, do métrico (grifo da pesquisadora) isso são idéias importantes para o indivíduo conhecer, ter uma idéia daquilo que se chama Matemática. Outra coisa que o aluno deve ter nesse aprendizado entre diversos fatores, é a experiência didática (grifo da pesquisadora), trabalhar com metodologias diferentes (grifo da pesquisadora) daquelas que estão acostumados, é importante que ele tenha essas experiências didáticas, principalmente no início do curso (grifo da pesquisadora). Um outro conhecimento importante é conhecer psicologia, eu acho fundamental. Ter também uma noção de discursividade, saber lidar com os jovens, pois o professor em início de carreira se sente perdido quando vai pra escola ter que lidar com uma geração diferente da sua. É importante também que ele conheça a realidade da escola e que as discussões metodológicas ou discussões que

ocorrem dentro da sala de aula do professor leve ao condutor da escola (o diretor). Não dá pra você discutir isso isoladamente. Na minha época isso não era feito você não tinha a mínima idéia do que era sala de aula. Então o professor também tem que ter isso tem que saber trabalhar e motivar o aluno.

Finalizando seu pensamento o professor K complementa argumentando que:

O licenciando de hoje será o professor de Matemática de amanhã e como professor de Matemática ele pode preparar os assuntos da matéria com uma abordagem diferenciada, pode falar de continuidade de uma maneira que não aborde o assunto de Cálculo, mas ele prepara isso quando ele trabalha com função, logo, essa natureza de pensamento podia ser explorada no Ensino Médio (grifo da pesquisadora). Acho que dá pra fazer atividades interessantes pro Ensino Médio. Fazer o aluno pensar ao invés de propor procedimentos operatórios em que se aplique uma variedade de fórmulas que o cara não tem nenhuma idéia do que está fazendo(grifo da pesquisadora). Agora pra formação do professor eu acho importante, um conhecimento mais profundo, mais substancial da área que ele está atuando(grifo da pesquisadora).

4.5.1.1. Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor K

Em síntese, o professor K afirma que os alunos chegam a Universidade, mal preparados, cujo conhecimento matemático está atado à fórmulas e procedimentos operatórios sem justificativas, o que compromete a sua compreensão em relação ao conteúdo abordado na disciplina **Cálculo Diferencial e Integral I**. Entretanto, não devemos impor essa responsabilidade apenas ao Ensino Secundário, a universidade tem a sua parcela de culpa ao ignorar esse fato, o que favorece o índice reprovatório tornando-o ainda mais elevado, em consequência, afeta a disciplina Cálculo, assim como outras que fazem parte do currículo do curso de Matemática. Desta maneira, na concepção desse professor, **Cálculo é uma das disciplinas que tem reprovação alta.**

. O professor K assinala que, no Ensino Médio, a Matemática é apresentada de maneira estática e na Universidade, o curso de **CDI I** (em particular) apresenta uma Matemática dinâmica o que pressiona o aluno a uma mudança na forma de pensar, **percebendo uma Matemática que além de discreta é contínua.**

Para o professor K, outra dificuldade enfrentada pelo estudante é **a linguagem lógico-formal própria da disciplina CDI I**. Nesse sentido, o referido professor adverte que, normalmente a disciplina **CDI I** é apresentada aos alunos de forma invertida – **abstração antes da reflexão**. Na opinião do professor K, primeiro deveria ser oferecida ao aluno a oportunidade de refletir, pensar, experienciar, só depois então, exigir a sua capacidade de abstração. O professor K, ainda propõe que a disciplina **CDI I** passe a ter mais aplicações. Nesse sentido, o professor K enfatiza que, a teoria é abstração de uma prática. E, não há como



you learn **Cálculo** without exploring its applications. What belongs to the formative professor is to lead the student or future professor of Mathematics to explore more this approach in an interesting way and that concepts are not conceived mechanically, but through experience.

In the conception of professor K the **CDI I** is in first place a passage of a type of **raciocínio discreto para um tipo de raciocínio contínuo**, in which the term **contínuo** constitutes the **principal factor of Cálculo**. Besides that, in **Cálculo I**, for example, it works a lot with **representações Matemáticas**, in a way that **each representation allows the student to draw some conclusions that other representations do not allow**. This is an important aspect of the **representações**, inclusive the one of representing concepts. In reference to this topic, professor K signals that **he does not manage to think without representations, conceiving the idea of the future professor being able to explore the representations, not as a technique, but, as a method that can favor the understanding of the subject coordinating the representations among themselves**. In this sense, he signals that the future professor must have a general idea of Mathematics, besides working with different methodologies, experiencing didactic experiences, mainly in the beginning of the Mathematics course, particularly in the course of Licenciatura em Matemática.



4.5.2. O Professor Y

O encontro com o professor Y realizou-se às 10:00 hs da manhã do dia 27 de Junho, numa terça feira. Em relação a sua experiência em lecionar **Cálculo**, o professor Y, informa ter lecionado para turmas de Biologia, Física e Computação. Em relação à turma de Matemática sua experiência é grande em se tratando em início de curso, ou seja, Cálculo I. O professor Y acrescenta que entres os cursos há uma grande diferença na maneira de ver a disciplina Cálculo:

Por exemplo, o biólogo não gosta de estudar Cálculo. Parece que ele vai pra Biologia já dizendo que não gosta de exatas, então a rejeição é muito grande e aí o que você tem que fazer? ademais a carga horária é pequena comparada com a Matemática, então você praticamente elimina a parte teórica de dedução, você acaba dando a técnica. Entretanto no curso de Física, ou Computação funciona bem como a Matemática. O problema é quando você vai pra Ecologia, Biologia aí a rejeição é grande.

Ainda versando sobre o tema Cálculo, perguntei ao professor qual sua opinião em relação **a grande reprovação existente na disciplina Cálculo**. Sua resposta foi:

Eu acho que tudo dá pra gente falar geral, é grande a mudança do Ensino Médio pra o ensino superior e os estudantes não são ou estão acostumados com abstração (grifo da pesquisadora). Na Universidade a gente trabalha muito com demonstrações de propriedades, teoremas e os conceitos também são novos. Limites e Derivadas são pouquíssimos os alunos que entram na Faculdade tendo visto esse conceito. Então acho que a abstração que a gente já dá no início na disciplina Cálculo I é uma mudança muito grande de raciocínio, considerando o que os estudantes vêem no Ensino Médio. Então acho que isso já é um choque, esse é o maior problema e não tem muito que fazer, porque se você for olhar, o Cálculo é o início de tudo, então você diria vamos aliviar, aliviar como? Você vai retardar? Se é o começo de tudo? (grifo da pesquisadora) Então não tem jeito, eu acho que Matemática é isso aí mesmo, ela exige um perfil do aluno e que infelizmente, se ele não tiver esse perfil de um futuro matemático, gostar de Matemática, de trabalhar com Matemática, ele não vai se adaptar (grifo da pesquisadora). Então acho que já está inserida na Matemática essa dificuldade, não depende de qual curso ou de qual aluno ou de qual professor. Esse problema de Cálculo é antigo. A gente recebe professores aqui dando palestras, dizendo que há quarenta anos atrás Cálculo era o terror, então não é problema de que o ensino está mais fraco ou não. Matemática é isso daí mesmo, exige muito do aluno e não tem jeito, talvez no Ensino Médio, pudesse já adentrar um pouco nos conceitos, chegar aqui já com uma certa bagagem, mas aí você vê que é o contrário, essa é a realidade(grifo da pesquisadora).

Buscando enfatizar um pouco mais o que foi exposto pelo o professor Y, acrescento a seguinte pergunta: **O que você acha de estar ensinando, abordando esse assunto (noções de Cálculo Diferencial e Integral) lá no Ensino Médio?** O professor me responde:

Interessantíssimo (grifo da pesquisadora), principalmente quando o professor está trabalhando com física, já que precisa muito falar em velocidade, aceleração. Então, se poderia já introduzir noções de derivada, mas o que eu noto é que em geral eles não dão nem o básico (grifo da pesquisadora). Mesmo nas escolas particulares que eles tem condições, eu não sei se eles conseguiriam iniciar esse assunto não é mesmo? Mas seria interessante, com certeza.

Finalizando o **primeiro bloco**, perguntei: **em sua opinião qual a relevância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral para a formação do futuro professor de Matemática?** O professor Y me respondeu:

Eu não vejo só o Cálculo, eu acho que o futuro professor tem que saber Matemática, não adianta fugir disso (grifo da pesquisadora). Eles têm que saber Matemática e tem que saber bastante, para enfim, ensinar com muita facilidade o básico não é? E o Cálculo, especificamente, pra mim ele é uma ferramenta importante que deve ser utilizada pelo professor do ensino fundamental e médio, quando ele está trabalhando a construção de gráficos de uma função, mesmo que ele não vá passar pro aluno onde essa função apresenta crescimento ou decrescimento ou comportamento assintótico etc. (grifo da pesquisadora), mas ele sabe o comportamento, então ele tem muita certeza do que ele está passando pro aluno, porque ele tem conhecimento mais profundo pra dar certeza do que ele está pensando. Então você não pode ter um aprendizado pequeno (grifo da pesquisadora), porque eu vou ensinar pequenas coisas. Então você tem que ter um aprendizado muito forte pra entender muito bem o básico, estar com um alicerce muito forte do que vai falar lá não é? Portanto, não só o Cálculo, mas todo o curso de graduação em Matemática. Quanto mais teoria que o aluno tiver muito mais liberdade ele tem de trabalhar em sala de aula (grifo da pesquisadora). Ele vai ter segurança de mudar de assunto e fazer relação entre os assuntos. Se ele não tem uma bagagem boa ele vai ficar limitado (grifo da pesquisadora), ele vai pegar um exemplo simples, porque ele não sabe um exemplo mais sofisticado certo? Então acho o que falta hoje para a turminha que está aí dando aula é conteúdo, é conteúdo, então tem que ensinar Matemática mesmo e Cálculo com certeza (grifo da pesquisadora). Logo, não existe limite para Licenciatura e bacharelado de forma alguma em referência à disciplina Cálculo. Cálculo é Cálculo, é o básico e se você apresentar um fato novo pro aluno, nada mais natural que você prove pro aluno o porque daquilo. Nesse sentido, eu. Acho que na graduação você não pode mais passar só uma informação sem mostrar pra ele de onde vem àquela afirmação, então pra mim não tem separação (grifo da pesquisadora). Por exemplo, o nosso curso 1º. e 2º. ano não tem separação. Como você vai separar estruturas algébricas? Nós estamos dando uma base de álgebra pro aluno. Não importa que, se ele vai fazer mestrado ou vai dar aula, ele precisa de uma bagagem não é? Na minha concepção, não tem diferença principalmente em Cálculo, com certeza não (grifo da pesquisadora).

O **segundo bloco** de perguntas foi sobre **representações Matemáticas**, nesse sentido, questionei: É fato que a Matemática em sua totalidade é composta por símbolos e representações. Considerando, portanto, representações Matemáticas como representações gráficas, algébricas, geométricas, entre outras. **Em sua opinião qual a importância das**

representações Matemáticas para o conhecimento do aluno? E para o futuro professor de Matemática? Para essa pergunta o professor Y me respondeu:

Muito importante, a importância é muito grande, porque se a gente acha que o Cálculo é difícil, é pesado é árduo, é muita teoria, muita demonstração, essa parte gráfica é “o pulo do gato”, então pra o aluno enxergar a teoria, a compreensão dos muitos teoremas, antes de demonstrá-los, buscamos fazer um simples desenho, e então, o aluno enxerga perfeitamente o que está acontecendo, o porque daquilo. Lógico que você vai fazer algebricamente (grifo da pesquisadora). Eu sempre friso aos alunos que o gráfico não prova nada, é mais pra você enxergar o que está sendo feito, então eu acho fundamental principalmente por isso, pela teoria ser muito difícil para o aluno. O gráfico o ajuda a acompanhar o desenrolar de um fato, que desse fato o leva a outro, e se nessa sequência de fatos eles se perder, então você fez um desenho, ele passa a entender o esquema, de maneira que a teoria vai ficar muito mais clara pra eles (grifo da pesquisadora), especificamente se for o caso de uma demonstração.

Em relação às **mudanças de representações**, eu acrescento à pergunta: **Com sua experiência em sala de aula você nota que eles têm dificuldade de fazer mudanças de representações Matemáticas?** Por exemplo, de uma representação algébrica para uma representação gráfica? O professor Y responde;

Aí por exemplo é que entra a maravilha do Cálculo (grifo da pesquisadora), que é o que a gente procura dar em Cálculo. Ou seja, você não precisa ficar criando uma tabelinha pra ele esboçar o gráfico de uma função. Você busca olhar o crescimento, decrescimento, ponto de máximo, mínimos, assíntotas, você tem todo o comportamento dela, sem perder tempo com tabelinha. Então eu acho que o Cálculo faz com que o aluno abra a mente, você vai dar mais informações pra ele, ele não precisa calcular dez pontinhos pra enxergar aquele esboço né? Então eu acho fundamental. Agora em relação à dificuldade, se você dá uma teoria, ele passar pro gráfico, fazer um esboço, eu acho que é mais difícil, então essa parte em geral traz muita dificuldade pro aluno (grifo da pesquisadora).

Ao perguntar sobre sua experiência com as TICs, especificamente sobre o uso de softwares como um recurso didático e pedagógico para o ensino da Matemática, o professor Y responde:

Olha o computador é muito interessante, considerando o tempo que ganhamos, pois em poucas horas você pode fazer muitas atividades, que com certeza não teríamos condições de fazer na lousa (grifo da pesquisadora). Olha o software que eu tenho usado é o Maple, mesmo porque é o que nós temos no Laboratório e eu acho que o aluno precisa sair da graduação conhecendo pelo menos o Maple, ou o pacote Matemática, isto é, conhecer um pacote completo onde ele faça tudo que ele precisar. Não que no dia à dia, talvez ele vá ter condições de ter, na escola onde ele vá trabalhar, mas pra saber que existe, mesmo porque, agora o aluno domina tranquilamente o computador. Eu gostaria de ter mais tempo pra fazer essas atividades (grifo da pesquisadora),

porque requer tempo, considerando que, as atividades, não podem ser muito demoradas, you tem que limitar tempo, you precisa da ajuda de alguém, não dá pra levar a turma toda um dia só, então isso está me limitando muito, a levar a turma toda que é grande, no computador (grifo da pesquisadora).

Finalizando a entrevista perguntei sobre o conhecimento do futuro professor, especificamente, que tipo de conhecimento é necessário ao futuro professor de Matemática? Na opinião do professor Y essa questão requer um aprofundamento maior, já que é uma pergunta difícil de responder, entretanto, o professor Y acha que:

Quanto mais conteúdo matemático you der pra o futuro professor melhor vai ser (grifo da pesquisadora). E, não adianta dizer que basta o mínimo, pois isso não é verdade, you tem que dar muita bagagem. Eu vejo pela gente da Matemática Pura, you faz graduação, mestrado, doutorado e de repente você está em sala de aula, e então, aparece um aluno, e "puxa vida!" Mostra um caminho, olha! Nunca pensei nisso! Então você estuda uma vida inteira e às vezes você se surpreende com a idéia nova de um aluno. Agora imagina se você não estudar profundamente a Matemática, porque ela exige muito de você. Então, primeiro detalhe a dizer pro professor, ensine o máximo que você puder de Matemática, primeiro passo, agora é lógico, ele vai ser professor você vai ter que tomar o cuidado com a outra parte, como lidar com a turma, por exemplo. Hoje em dia, eu nem sei te falar o que eu proporia atualmente num curso de graduação, ou então como lidar com esses problemas parece que um ano de Psicologia já não está mais dando conta. Eu reconheço que nos cursos de graduação, no nosso, por exemplo, falta fazer um pouco mais de contato dos alunos com as escolas. A nova portaria do MEC está tentando mudar isso aí. Eles aumentaram as horas de prática de ensino e exigindo que a gente dilua a prática durante o curso, durante as atividades e isso já no primeiro, segundo ano ou fazer um projeto pra uma escola, já tentar levar o aluno mais pro seu futuro local de trabalho. Só que a gente ainda não viu essa mudança, porque acontece mais no segundo ano. Nesse aspecto a minha impressão é que vai melhorar bastante, o aluno ter contato com a escola. Isso eu acho que faz falta.

4.5.2.1. Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor Y

Para o professor Y existe uma grande mudança do Ensino Médio para o Ensino Superior em relação à maneira de abordar os conteúdos matemáticos. Os estudantes não estão acostumados com **a linguagem lógico-formal** apresentada logo no início do curso de Cálculo I., mas, em sua opinião não há como fugir disso é necessário que o aluno aprenda a abstrair, pois o que se vê em Cálculo é o início de tudo, é a base, além de ser uma continuação do que foi visto e estudado no Ensino Médio.

Na concepção do professor Y, o futuro professor tem que **saber Matemática**, ter um conhecimento profundo dos conceitos matemáticos, pois, quanto maior conhecimento do conteúdo melhor. Nesse sentido, o professor Y acrescenta que, o futuro professor precisa gostar de Matemática. Deste modo, as noções de Cálculo constituem-se em uma ferramenta



importante que deve ser utilizada pelo aluno ou futuro professor de Matemática que irá lecionar em nível de Ensino Fundamental e Médio, principalmente quando se objetiva explorar as representações gráficas de uma função, ou seja, a importância das representações é muito grande, pois segundo o professor Y, possibilita uma maior compreensão da teoria, permitindo ao aluno ou futuro professor enxergar perfeitamente o processo de abstração.

Em relação às **representações matemáticas**, o professor Y faz questão de ressaltar que, a **representação gráfica** tem apenas a função de orientar o desenrolar de um fato, de maneira a tornar mais esclarecedor o que algebricamente é demonstrado isto é, não tem a função de provar um resultado matemático, enquanto que a representação algébrica tem o poder de justificação e comprovação de um fato. Portanto, para o professor Y, explorar e coordenar as várias representações constitui-se em um fator fundamental em qualquer disciplina, principalmente em **CDI I**, pois possibilita ao aluno ou futuro professor uma maior compreensão dos conceitos estudados. E, considerando que, atualmente, o aluno domina tranquilamente o computador, o professor Y, entende ser um recurso que deve ser mais explorado em um curso de **CDI I**, levando em conta que o ganho de tempo na exploração de atividades que envolvem **várias representações** é substancial. Entretanto, muitas são as limitações, principalmente quando se trabalha com um grupo grande de alunos, pois se deve considerar o limite de tempo, apoio de um técnico, entre outros impasses ou necessidades. Por fim o professor Y acrescenta, enfatizando que, não importa se o aluno vai fazer mestrado ou vai dar aula, ele precisa de uma “bagagem”, de maior conhecimento matemático, estudar e entender profundamente a Matemática.



4.5.3. O professor W

Contatei o professor W no final do primeiro semestre de 2006, e o convidei a colaborar com a nossa pesquisa. Ao obter a sua concordância, foi agendada a nossa entrevista para depois das férias de julho, com data a ser posteriormente definida. Após as férias, entrei novamente em contato com o professor W, e finalmente foi realizada a nossa conversa em 15 de agosto, numa terça-feira, às 17:00 hs, em sua sala de trabalho nas dependências da UNESP.

É grande a experiência do professor W em ministrar a disciplina **Cálculo Diferencial e Integral**. Segundo o professor W, nos últimos treze anos ministrou esta disciplina em cinco oportunidades em diferentes universidades. Após as apresentações perguntei-lhe qual a sua metodologia em sala de aula ao ensinar Cálculo, se limita os conteúdos, ou se é muito exigente? O professor W responde:

A limitação dos conteúdos irá ser quanto a carga horária. Por exemplo, num curso de Matemática geralmente temos uma carga horária de 90 horas, o que é suficiente. Cabe lembrar também a questão temporal, já que esse ministro esta disciplina há algum tempo, de maneira que não consigo repetir o mesmo nível de cobrança exigido no passado, isso porque o aluno que chega hoje na universidade é diferente. Às vezes, fico olhando as provas que aplicava, comparando com as provas que eu aplico hoje. Vê-se claramente a diferença. Esta comparação em termos de avaliação fica um pouco diferenciada, por conta que o conteúdo também foi filtrado. Não só a platéia mudou como também a questão de carga horária. Uma coisa que não abro mão é de fazer demonstrações em sala de aula (grifo da pesquisadora). Atualmente ministro a disciplina Cálculo I com uma carga horária mais “folgada”, 180 horas anuais. Podemos acrescentar na ementa da disciplina a fórmula de Taylor e Equações Diferenciais. Então optei por fazer um curso bem mais detalhado, logo, estou fazendo todas as demonstrações. Talvez num curso mais rápido eu não exigisse tantas demonstrações de teoremas ou propriedades.

Após a explanação do professor W, perguntei-lhe sobre **a questão da reprovação na disciplina Cálculo**, qual a sua opinião? O qual me respondeu que **é um curso que tradicionalmente reprova** associado ao fato de que o professor não consegue, muitas vezes, ser benevolente com provas entregues quase que totalmente em “branco”, sem justificativas ou com muitos erros. Ou seja, não consegue considerar um “mínimo a ser avaliado” apresentado pelo aluno. Outra causa para a reprovação seria a falta de base dos estudantes que chegam a universidade. Ouçamos o professor W:

É realmente o curso que mais reprova. Eu acho que o reprovar está preso também a uma mentalidade profissional do professor de Matemática. Pode ser que ele seja restrito a essa questão da aprovação. E se é assim, então ele não costuma ser benevolente em aprovar. O outro fato marcante é que o professor não consegue avaliar nada que o aluno apresenta caso este apresente uma prova com respostas incompletas ou parcialmente corretas. Por que isso?

Porque o aluno tem problema de base, eu acredito que o problema está na formação com que ele chega aqui (na universidade) (grifo da pesquisadora). O aluno chega com muitas falhas em sua formação, o que dificulta acompanhar o curso. A disciplina de Cálculo é difícil, porque é uma disciplina muito diferente do que ele vinha fazendo até então (grifo da pesquisadora). Costumo dizer para os alunos que a disciplina de Cálculo I é onde a Matemática passa a ter movimento. Até então a Matemática era estática (grifo da pesquisadora). A própria motivação do Cálculo vem das equações de movimento da Física de Newton em sua criação. É um cálculo que é diferente já na sua concepção. O aluno já começa com dificuldades. Acho que a reprovação não é culpa nem do professor, nem da Matemática em si. É um problema onde se supõem certas coisas, tais como domínio e formação tornando-se difícil nesse sentido.

Ainda nesse primeiro bloco de perguntas, indaguei: Você acha que seria interessante para o aluno já no Ensino Médio, ter uma noção de limites, derivadas, mesmo que seja no final do curso do terceiro ano? O professor W argumentou:

Só seria interessante, por exemplo, como ocorre nos Estados Unidos ou na Europa que tem esse conteúdo no colegial. A diferença está que desde o primeiro ano do ensino todo o programa é cumprido existindo condições para que isso seja feito. Aqui, no Brasil, na atual situação do ensino eu não vejo como algo viável, uma vez que o Ensino Médio não está cumprindo o que é suposto cumpri. Vamos dar um exemplo, no disciplina de Cálculo I costumo fazer uma revisão de trigonometria e sempre pergunto se alguém nunca tinha visto esse assunto. Algo entre dois ou três alunos que levantam a mão falam que nunca tinha visto este assunto (grifo da pesquisadora). Então de nada adianta se temos em uma sala de 40 alunos, por volta de 10%, nunca viram boa parte desse conteúdo. Como posso falar em dar noções de limite e derivada no Ensino Médio? Não dá certo. Num futuro, quem sabe!?

Para finalizar esse primeiro bloco, perguntei: professor W, em sua opinião qual a relevância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral para a formação do futuro professor de Matemática? O citado professor assinalou a seguinte aceção:

É a velha discussão se você ficar preso à máxima de que “só vou passar pro aluno (futuro professor) aquilo que o indivíduo deverá ensinar”, ou seja, se ficarmos presos no conteúdo de formação de professores e ensinar muito bem aquilo que ele vai ensinar, então bastariam ter cursos de Tabuada o que estaríamos ridicularizando a discussão. Acredito que só podemos ensinar algo anterior se dominamos o conteúdo à frente dela (grifo da pesquisadora). Nesse sentido, vamos fazer um parêntese. Numa outra disciplina que estou ministrando levantei a seguinte questão para os alunos: será que vale a pena ensinar determinados conceitos no segundo grau? Ressaltei essa pergunta, porque eles estão vendo o quão é difícil é a formalização do conceito de número complexo. Como funcionam as propriedades, etc. A idéia, portanto, é dar uma noção melhor pra eles, para poderem ensinar de uma maneira mais consistente e coerente esse assunto no segundo grau. Então, é claro que o professor de Matemática não irá ensinar limites e derivadas ou integral se ele for dar aula no chamado colégio. Mas este conteúdo dará um entendimento melhor para ensinar os conteúdos do Ensino Médio (grifo da pesquisadora). A isso que me referia antes. É importante fazer a disciplina de Análise Matemática, que é como um Cálculo Avançado, pois o estudante e futuro

professor devem ter uma compreensão de conceitos de números reais, funções, continuidade para ter um entendimento melhor do Cálculo. Um melhor entendimento para o futuro professor poder posteriormente ensinar (grifo da pesquisadora). Caso contrário, ele fica alheio ao que chamaria do pensamento matemático. Fazendo um paralelo com as Artes, talvez fosse como o caso do indivíduo que é um entendedor de arte. O que para alguns de nós um quadro só passaria apenas por um desenho, talvez para ele, que tem um entendimento da história da arte, do uso de cores, da simbologia, com certeza terá um entendimento muito melhor do quadro. Deste modo, o professor de Matemática que vai trabalhar só com as “pinturinhas”, seja importante ter aquele “entendimento artístico”. Ele saberá valorizar melhor as idéias, os variantes, detectar um aluno brilhante na sala. Saber olhar e perceber. Então acredito que é importante sim para a formação do futuro professor. (grifo da pesquisadora).

Terminado o primeiro bloco de questões, num segundo momento da entrevista perguntei ao professor W sobre a importância das representações Matemáticas para o conhecimento do aluno, incluindo o futuro professor de Matemática. Qual a sua concepção à respeito? Segundo o professor W, é importante destacar que irá depender da experiência de quem propõe essa abordagem. Em suas palavras ele acrescenta:

Eu sempre me preocupo muito na disciplina de Cálculo em privilegiar as aplicações (grifo da pesquisadora). Não só no Cálculo, em qualquer disciplina que ministre. Isso acontece, talvez por minha formação ter sido mais em Matemática Aplicada. Tento sempre fornecer uma motivação maior, mais prática. Partindo do “algo real” criar-se um modelo matemático. O modelo matemático se expressa por uma linguagem seja ela geométrica ou algébrica. A partir daí resolvemos matemática e buscamos sua comprovação experimental. Valorizo este mecanismo pois acredito ser importante lidarmos com as diversas representações (grifo da pesquisadora). Falando novamente da outra disciplina que estou ministrando comento com os alunos que os números complexos podem ser vistos ora como um par ordenado, ora como um ponto no plano, como também por uma matriz. Desta forma, forneço ao estudante as diversas formulações de linguagens diferentes para representar o mesmo conceito de número complexo. Fazendo uma analogia com o conceito de derivada, podemos mostrar ao aluno que estamos falando a mesma coisa, ora como velocidade instantânea, ora como declividade de reta tangente. Todas representam o mesmo conceito matemático só que com terminologias diferentes (grifo da pesquisadora).

Após a explicação do professor, volto a lhe perguntar: Então o senhor acha que para se trabalhar com as várias representações, o professor tem que ter um conhecimento mais profundo do conteúdo? Para essa pergunta o referido professor responde:

Tem sim, por exemplo, se o professor irá fazer uma representação algébrica, e tem que exibir um gráfico - a representação gráfica, e desenha o gráfico errado? (grifo da pesquisadora) É delicado. Às vezes ao esboçar um gráfico notamos que partes do esboço estão muito verticais, quer dizer, não é função. Às vezes, o que esboçamos não corresponde à um gráfico de uma função que queremos representar e dizemos para os alunos que não está bom. Então,



fazemos outro desenho mais claro para aluno. É importante que o professor saiba o que está fazendo, pois nessas formulações ele pode cometer erros. Se o futuro professor tiver um entendimento profundo, como também a capacidade de abordar de diversas maneiras as representações Matemáticas, isto mostra que ele está evoluindo no entendimento da Matemática. Se esse professor priorizar apenas a parte algébrica e não ter domínio sobre a representação gráfica isto passa a ser uma limitação dele, (grifo da pesquisadora) Um conhecimento que ele não domina.

Dando prosseguimento a entrevista, já **no terceiro bloco de perguntas**, questiono o professor W, perguntado-lhe: **Qual a sua experiência com as TIC em sala de aula**, pouca, grande? Fale um pouco da **relevância de se utilizar softwares educativos** (matemáticos) como uma metodologia de ensino. O professor W responde:

Já usei o Cabri e o Maple. Eu utilizo esses recursos não concomitantemente com a aula, porque não é possível (grifo da pesquisadora). A razão disso é que dependo de um laboratório de informática. Frequentemente prefiro que o aluno faça inicialmente alguns exercícios na mão e então no computador. Desta forma, não uso o laboratório constantemente. Eu prefiro assim. Vale ressaltar, que existem vários fatores que acabam complicando o uso constante do laboratório, pois este é utilizado por muitos professores na universidade. Quando dou aula usando algum software, procedo assim: após trabalhar bastante em sala de aula, vou ao laboratório. Primeiro para ensinar a usar o software, com isso eu mostro suas vantagens e limitações. Acredito ser importante que a o aluno saiba o que está fazendo no software, o que é certo e errado. Uma conta, um desenho, é importante. Mas, essa confiança tem de ser avaliada pelo aluno se o programa fez certo ou não, considerando que foi feito na mão antes. Tem que primeiro ter um trabalho em sala de aula. (grifo da pesquisadora) Outro aspecto que acho positivo é que o aluno começa a perceber o quanto o software faz facilmente algo que ele levou muito tempo pra fazer usando lápis e papel. O que consiste numa das grandes vantagens de se trabalhar com um software matemático. Agora, é necessário que o professor saiba selecionar exemplos interessantes. Qual a diferença entre a aula usando a lousa e o computador? Nenhuma, fazer no computador o que você faria na aula? Na minha concepção, devemos explorar na máquina um contexto que normalmente não faríamos em sala de aula seja ela pela dificuldade, seja pela complexidade, para o aluno perceber a nova maneira de abordar o problema (grifo da pesquisadora). É semelhante a você ter que fazer uma conta num restaurante. Você ter que usar uma calculadora pra somar, eu acho um desperdício, em certo sentido. Agora se você usar uma calculadora para fazer contas mais elaboradas como calcular raiz quadrada, raiz cúbica, ou uma série de cálculos numéricos, aí sim, é válido. Afinal, a função dela é pra isso. Agora usar uma calculadora pra calcular 10×4 ? Eu acho um desperdício. O software entra na minha disciplina como algo que vem consolidar o que foi feito em sala de aula, reforçar, no sentido de dar uma visão de algo que não conseguimos fazer em sala de aula facilmente, tipo gráficos, desenhos etc. (grifo da pesquisadora). O computador faz muito mais bonito do que você faria na lousa. Você consegue explorar muito melhor o assunto abordado em sala de aula. Retomar o conteúdo dizendo: olha está vendo aquilo que a vimos na aula? É uma forma de valorizar o que foi apreendido, bem como as possibilidades e potencialidades do software, pois ele faz coisas muito mais precisas, mais elaboradas, mais complexas (grifo da pesquisadora). No caso da minha disciplina, acredito que está dando certo. Os



alunos estão gostando e querem voltar. E eu só levei uma vez. [...] Acredito que o uso do software é extremamente positivo.

Buscando explorar um pouco mais sobre esse assunto, indaguei o professor W, perguntando-lhe: Em relação às **representações**, essa abordagem de se usar várias representações, você acha que o software contribui bastante com isso. E o que você acha da questão da animação no software, em referência a visualização? Sobre esse questionamento o professor W emitiu a seguinte opinião:

Vem reforçar aquilo que falei. No Cálculo, por exemplo, a motivação é muito grande, porque o Cálculo envolve movimento (grifo da pesquisadora). Então, se o aluno vai estudar derivada por retas secantes, é possível fazer uma animação por retas secantes. É um recurso que o aluno visualiza. Só que eu acho, na minha experiência, que a surpresa se dá muito mais para o software do que pro conteúdo. Porque ele já tinha abstraído este resultado ao estudar (grifo da pesquisadora). Quando o aluno vê o software realizar a figura na tela do computador, ele acha bonito, pois está reproduzindo aquilo que ele imaginou. Acho importante nesse sentido. Mas, surge a dúvida: a surpresa foi pelo software ou pela maneira diferenciada de abordar o conteúdo? São muitos os exemplos gráficos em que não é possível fazer manualmente, é quando devemos utilizar o computador. A figura passa então, a fazer sentido, porque o aluno vê precisamente o que está acontecendo. Essa é a vantagem no caso da visualização (grifo da pesquisadora). Agora, vejamos o seguinte exemplo, existem certas superfícies quando estudamos no cálculo avançado, que às vezes o desenho na lousa apela muito mais para a abstração. Algo como quando uma criança desenha uma casinha e mostra para você um desenho cheio de rabisco. Mesmo assim, com certo esforço, você consegue enxergar a casinha que a criança desenhou. Às vezes na aula temos uma situação parecida. Fazemos um desenho e falamos para aluno, por exemplo que é um cone e em cima tem uma semi-esfera. O desenho pode ser pobre, horrível, mas, o aluno num processo de abstração consegue ver. Poderia ser diferente no caso do uso de um “Notebook” e o “Data Show” em sala de aula. Construímos diretamente o gráfico e o aluno iria ver a figura sob vários ângulos, várias perspectivas. Mas, volto a me perguntar, qual a diferença se tivesse uma peça de isopor, um cone de isopor e trouxesse pra sala de aula? Nesse caso ainda ele vai poder colocar a mão, manipular. Será que fazer uma atividade no computador, em sala de aula direto facilitou a aprendizagem? Todo mundo visualizou. Mas será que esse processo não cortou a abstração do aluno, o esforço que ele teria que fazer para enxergar tudo aquilo primeiro? O aluno da Matemática tem esse problema de abstração e de visualização. Ele sabe manipular muito bem algebricamente, mas não tem dificuldade em representar figuras, objetos, sólidos etc. (grifo da pesquisadora), que é o contrário que acontece com estudantes de Física. Já dei aula para os dois cursos e possível perceber as diferenças. O aluno da Física, tem por hábito fazer experimentos abstratos mentais constantemente. Quando você fala: pegamos um canhão e lançamos uma projétil. Ele abstrai facilmente a trajetória parabólica pois ele tem essa visualização na mente. Quer dizer, o problema físico o obriga a fazer abstrações. Eles são constantemente exercitados a fazer isso. Então, quando fazemos um desenho de um sólido na Física eles conseguem abstrair o que está na frente e o que está por detrás. A mesma atividade com estudantes de Matemática causa um caos.



Tentando esclarecer sobre a argumentação acima exposta pelo professor W em relação a questão da visualização, pergunto: seria o fato de trabalhar muito pouco com aplicações num curso de Matemática? Nesse sentido, o referido professor responde:

Não seria quanto às aplicações. O problema é de visualização. Representação geométrica. O aluno da Matemática vê muito pouco esse tipo de representação (em Cálculo) (grifo da pesquisadora). Normalmente ocorre em disciplinas como Geometria Diferencial no caso de superfícies. O aluno de Matemática sabe calcular. Ele acompanha sem problemas os cálculos mas quando passamos para os desenhos (visualização e abstração) eles se perdem. Não compreendem os desenhos. Não visualizam. (grifo da pesquisadora).

Para o último bloco de perguntas, busco explorar um pouco a **questão do conhecimento do professor de Matemática**, para tanto, pergunto ao professor W, em sua opinião, que tipo de conhecimento é necessário ao futuro professor de Matemática? Para essa pergunta, professor argumenta que:

Não vou falar sobre educação porque não é minha área. Eu não fiz licenciatura e conheço muito pouco sobre o assunto. Mas, às vezes fico pensando se não seria interessante termos uma estrutura curricular em que a parte chamada licenciatura em educação e a parte chamada bacharelado que seria a formação para o futuro pesquisador, fossem colocadas como uma especialização. Poderíamos em dois anos e meio ter uma formação comum às duas áreas, fornecendo os conhecimentos básicos para o licenciando e bacharel. Nesse sentido voltando-se mais para o ensino de metodologias, técnicas e aplicações no ensino da Matemática. Comento isso, mais como uma crítica, pois ouço freqüentemente o aluno questionar o porque aprender certas coisas ou mesmo para que serve. Só podemos dizer para que serve algo ou o porquê de se aprender algum conteúdo depois de termos uma visão GLOBAL do assunto (grifo da pesquisadora). O que responder a um aluno para que serve aprender derivada? Se sei o que acontece no curso como um todo, responderia que aprende-se derivada porque em Física temos tal problema, na Economia tal problema, na Biologia tal problema, etc. Em todos os casos precisamos do conceito de derivada. Mais ainda, se estudar Matemática pela Matemática precisamos estudar do conceito de derivada para o estudo de superfícies. A derivada é uma linguagem básica. Só podemos responder a aquela pergunta se tivermos ciência do todo. O que quero dizer é que o professor precisa ter uma visão ampla. Fico pensando se não seria muito mais proveitoso ensinar o básico e ter essa parte de educação ou de pesquisa como algo mais especializado para o aluno. Acredito que ele deveria se dedicar mais na sua própria formação, ou seja, no básico primeiro. Aprender mais, de maneira que ele tenha condições de ter um conhecimento mínimo e substancial. Não adianta levantar uma pergunta como se vamos ensinar derivada e limite no segundo grau se o aluno só vai ter uma clara noção desse conceito depois do segundo ou terceiro ano dentro da universidade. No final ele olha para trás e diz que não pode ensinar esse assunto para os seus futuros alunos, mas que foi importante ter aprendido pois agora conhece melhor o conteúdo (grifo da pesquisadora). Essa é uma idéia que me passa e estou falando isso, porque eu me lembro que quando estava a aprender a usar o Maple, percebi que para desenvolver os programas ou resolver um problema no Maple, tive a oportunidade de aprender muito mais sobre a Matemática. De outra forma, ao implementar um problema e resolve-lo no software, tirando as dificuldades da





linguagem de programação e tudo que envolve esse processo, comecei a perceber que certos problemas não dependia do meu conhecimento sobre o Maple, mas do conteúdo teórico-matemático. Tive que voltar a abrir livros e entender melhor a Matemática. Penso numa analogia horrível que o Maple seria como um bom aluno. Para ensinar a resolver certos problemas tive que compreender melhor os conteúdos da Matemática para então poder ensinar ele, Maple, a fazer as contas.

Buscando esclarecer um pouco mais o que ouvia da explanação do professor W, acrescentei: O senhor quer dizer que para manusear bem a linguagem do software, poder explorar melhor a potencialidade do software, antes é necessário ter um conhecimento substancial da Matemática?

Exatamente. Você acaba aprendendo muito mais quando levanta questões e problemas e acaba aprendendo um pouquinho mais da Matemática. Perguntas de como ensinar, porque ensinar, usar ou não o computador, em que momento ensino certo conteúdo, etc. Todas essas perguntas irão surgir num certo momento e vão reforçar o que o aluno aprendeu. Penso que o aluno, no caso da formação do professor, tem que saber Álgebra. Geometria, Cálculo Diferencial e Integral, Teoria dos Números pois os alunos num momento ou outro irão perguntar sobre estes assuntos para ele. As vezes um aluno se dirige ao professor e diz que gosta de Matemática e quer fazer Matemática, mas quer saber o que se estuda em Matemática. Se o professor ficar restrito ao que vai ensinar ele não irá responder a essa última pergunta. O conteúdo e a reciclagem é importante. Ele precisa ter domínio do assunto para poder falar a respeito.

4.5.3.1. Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor W

Para o professor W as maiorias dos alunos que chegam à Universidade apresentam problemas **de base em seu conhecimento matemático**, o que dificulta a compreensão dos mesmos ao deparar-se com o que se propõe o curso de **CDI I**. Na concepção do professor W, o **Cálculo** é um curso difícil, diferente de tudo que o aluno tinha visto até então, pois os conceitos de Limites e Derivadas de funções introduzem uma **passagem de uma Matemática discreta para uma Matemática contínua**, além de apresentarem uma linguagem lógico-formal mais elaborada.

Toda essa mudança ocasiona grandes dificuldades para o aluno iniciante no curso de **CDI I**. Sob esse aspecto é importante que esses mesmos alunos ou futuros professores possam vivenciar novas experiências, trabalhar com aplicações explorando e coordenando às representações Matemáticas, sejam elas geométricas, gráficas, algébricas etc. No entanto, segundo o professor W, para se trabalhar e coordenar as representações, o futuro professor deve ter um conhecimento mais profundo dos conceitos matemáticos.





Na concepção do professor W as **representações** podem e devem ser exploradas por meio de softwares matemáticos. Nesse sentido, ao se trabalhar com esse recurso didático-pedagógico o professor deve considerar uma abordagem diferenciada da qual normalmente é apresentada em sala de aula na apresentação de conceito ou resolução de problemas próprios da disciplina. Ou seja, **o uso do computador mediado por um software educativo**, entra na disciplina como algo que vem consolidar o que foi feito em sala de aula, um reforço, no sentido de dar uma visão de algo que o professor não consegue fazer em sala de aula de maneira hábil, tais como construção de gráficos de determinadas funções, desenho de figuras geométricas em terceira dimensão, entre outras representações matemáticas.

O professor W acredita que, utilizando o computador, associado ao uso de um software matemático adequado, torna-se possível ao professor propor aos seus alunos uma exploração mais efetiva das **representações** de conceitos abordados em sala de aula. O professor W ainda assinala que, o acesso ao computador constitui-se em uma forma de valorizar o que foi apreendido em sala de aula. No cálculo I, por exemplo, a motivação é grande, pois os conceitos de Limites, Derivadas, Integrais envolvem movimento, valores aproximados, continuidade.

Segundo o professor W, quando o aluno usa o computador, a figura, ou gráficos estudados em sala de aula, passam então, a ser mais esclarecedores, o aluno visualiza melhor o processo de construção desses gráficos ou figuras. Para o professor W, esse é um aspecto importante, considerando que o aluno de Matemática geralmente tem dificuldade em abstrair e visualizar a figura de um gráfico, principalmente de funções mais elaboradas. No entanto, esse mesmo aluno consegue com certa facilidade desenvolver cálculos algébricos, qualidade que não é claramente manifestada quando a atividade é representar graficamente conceitos matemáticos. Assim, na concepção do professor W, o aluno ou futuro professor de Matemática precisa em sua formação **adquirir uma visão global da Matemática**, necessita obter um conhecimento mais profundo dos conceitos matemáticos. Sendo assim a abordagem de se explorar e coordenar as representações Matemáticas pode e deve ser incentivada.



4.5.4. O Professor Z

Contatei o professor Z desde abril de 2006, o qual concordou imediatamente em participar da pesquisa, mas o nosso encontro só foi possível no dia 21 de agosto do mesmo ano.

A entrevista foi realizada nas dependências da UNESP, às 17:00hs, numa terça-feira. Vale ressaltar que o professor respondeu a todas as perguntas e esteve sempre solícito às dúvidas dessa pesquisadora.

Feita as apresentações, ainda nesse **primeiro bloco de perguntas**, questionei: Há quanto tempo leciona para turmas de Cálculo Diferencial e Integral? E para turmas de Matemática (especificamente)? O professor Z me respondeu:

Olha! eu só ensinei Cálculo para outros cursos, ou seja, eu já ensinei outras disciplinas pra Matemática, mas Cálculo pra outros cursos. Enfim, no período de estudos entre Mestrado e Doutorado eu dei aula de Cálculo pros cursos da Engenharia, Administração, Economia.

Sobre a questão da reprovação na disciplina **Cálculo Diferencial e Integral**, perguntei: pesquisas afirmam que a disciplina Cálculo Diferencial e integral é uma das que mais reprovam em um curso de graduação em Matemática, bem como em outros cursos que tem essa disciplina inserida no seu currículo. Em sua opinião quais os principais motivos para tal ocorrência (isso de um modo geral) e particularmente para o curso de Matemática? O professor Z apresentou a seguinte opinião:

Antes de qualquer coisa, você está pedindo a minha opinião e vou dar exatamente isso certo? Sobre as pesquisas como você já disse mesmo, tem várias, mais tem a da Rezende da USP, tem a do Antonio Olimpio Jr. (tese de doutorado), agora recentemente, que está lidando com isso, na qual ele faz um apanhado geral e inclusive sobre a questão da reprovação aqui do programa. Então eu vou colocar impressões com características mais livres que uma entrevista pode ser dada e não necessariamente como resultado de pesquisa. Como você bem sabe, eu realizo pesquisas também nessa área, mas em temas mais específicos que não me permitiriam gerar conclusões para a sua pergunta. Então aqui são as opiniões do professor que vive num departamento de Matemática e que convive com vários docentes de departamentos de Matemática e as impressões que eu vou dar são do que eu vejo enquanto comunidade e nas minhas reflexões e com a imensa experiência e quantidade de leituras que eu tenho na minha área. Primeiro, o fenômeno do Cálculo, ele não é apenas um fenômeno brasileiro, ele é um fenômeno mais ou menos universal, embora nós tenhamos os alunos mais aplicados em termos de reprovação entendeu? (grifo da pesquisadora) Por exemplo, nos Estados Unidos existe a reprovação, mas esse fenômeno não é encarado dessa forma como é aqui. O índice de reprovação não é dessa forma. Em uma universidade fora do Brasil, onde eu estudei isto seria visto como um problema e quando alguns níveis se elevam os responsáveis rapidamente tomavam algumas

providências, tentando resolver o problema. A grande questão, que eu acho, aqui no Brasil, é que a reprovação em Matemática é vista mais ou menos como natural, ela não é vista como algo que seja um problema, a própria comunidade Matemática em geral não vê isso como um problema a ser resolvido a curto prazo. Então no meu ponto de vista não há uma consciência sobre isso (grifo da pesquisadora). Por exemplo, se acontece uma infecção hospitalar num hospital todo mundo vai achar que é um problema porque isso está gerando morte, certo? Agora, fazendo uma analogia às causas da nossa “infecção hospitalar” que geram tantas reprovações, nem sempre é vista como um problema que possa ser discutido entre os pares. No meu modo de ver, eu acho que essa é o primeiro problema. Posso ilustrar dando um exemplo; recentemente, duas alunas do terceiro ano de um curso de Matemática, mais conceituados no País, com as quais tive chance de conversar bastante sobre Cálculo de maneira informal, pois elas não eram minhas alunas. Nessa conversa, elas perguntaram: o professor a taxa de variação tem haver com derivada? Aí eu falei: mas, “pôxa” o que você está querendo dizer com isso? A aluna me respondeu, há! Porque eu acho que tem alguma relação entre taxa de variação e derivada e aí eu gostaria que o senhor me dissesse se está relacionado ou não? Passado o susto, eu pedi que me definissem derivada. Elas sabiam definir derivada sem nenhum problema você entende? Então, essa é apenas uma ilustração, mas, eu me pergunto: como duas alunas que já tinham feito **Cálculo I** duas vezes, com duas excelentes professoras estavam fazendo essa pergunta? Ou seja, a reprovação, referindo-me a esse caso, como se pode notar, ela não necessariamente vai gerar aprendizado (grifo da pesquisadora) de questões básicas como a relação entre taxa de variação e derivação. Talvez seja um caso para aqueles que defendem a reprovação pensarem, será que a reprovação mantém o nível de ensino? Pois esse parece ser o grande argumento de quem é a favor da reprovação, mas ela não está tendo resultados, nem pra aqueles que defendem a reprovação como método de ensino, ou melhor, como caminho para se manter o nível da Educação Matemática. Bom a questão de cunho epistemológico, pra mim que, está por traz, quer dizer eu já coloquei uma já de cultura, uma de filosofia dessa cultura, ou seja, como é que ela se traduz em avaliação? Bom, eu acho que há mais questões e uma delas é a barreira, o salto da Matemática no Ensino Médio para a Matemática no ensino universitário, então nós teríamos no Cálculo I, em minha opinião, quer dizer afastarmos ao máximo você entende? A análise do Cálculo I, porque ele só amplia esse salto visto que o Cálculo já vai trazer idéias novas e o aluno entra no curso de Cálculo I pensando que vai calcular. A princípio a visão dele do Ensino Médio, se ele não tiver visto derivada e provavelmente não viu e se viu, ele viu alguma regra decorada ou algo do tipo. Então, por exemplo, o problema de máximo e mínimo do cilindro é algo que eu acho que esse aluno está esperando, além do que, ele viu parte disso no Ensino Médio com as ferramentas disponíveis no Ensino Médio, com os conceitos disponíveis no Ensino Médio. Entretanto, rapidamente ele se vê demonstrando ou tentando compreender as propriedades de limites ou algumas definições muito formais de função em que começam a gerar um estranhamento (grifo da pesquisadora). Em minha opinião o relevante é compreender a noção de integral, sua relação com a derivada. O teorema fundamental do Cálculo, ele não é só fundamental como ele é cheio de idéias, e nem sempre é explorado o suficiente. No meu caso eu não exploro também o bastante, porque não há nem tempo, no caso da disciplina que atualmente leciono, mas eu tento e não necessariamente com bons resultados, mas eu insisto, utilizando recursos como os das tecnologias da informação, utilizando trabalhos com modelagem, buscando relacionar as noções de taxa de variação instantânea com derivada, quando eles vão utilizar uma taxa de variação,

aproximações da taxa de variação instantânea etc. Portanto, como professor, eu não tomo a reprovação como natural, mas com tristeza (grifo da pesquisadora), como motivo de derrota. Eu tenho aprendido bastante a identificar os potenciais perigos de reprovação nas primeiras semanas e em geral tenho chamado esses estudantes. É muito difícil, porque como a gente não tem condições de saber quem vai ser reprovado. Mas, quando eu noto nas primeiras semanas, pelas perguntas que fazem ou alguma atitude que mostre sua fragilidade quanto ao assunto, eu peço pra vir resolver algum exercício no final da aula, de tal maneira que a turma saia e não fique uma situação embaraçosa para os alunos e peço pra falar e encaminho a conversa pra isso. E, logo na primeira aula eu digo pra pessoas que é muito comum em algumas disciplinas, dizendo que aqueles que odeiem ou não gostem de Matemática tem uma boa chance de passar a gostar e procurarem e que podiam ter espaço pra estudarem parte da Matemática. Então, eu diria que é isso, há uma questão cultural, onde é natural ser reprovado. Não creio que o problema é visto como importante, (embora sob o ponto de vista do uso do dinheiro público seja lamentável que entre 40 pessoas por ano, saia vinte, isso na melhor das hipóteses). Várias vezes entram quarenta e saem cinco não é? Isso nos melhores cursos do Brasil, o que reflete um mau uso do dinheiro público, mas não é visto como um problema grave. E enquanto isso, nós sabemos que há várias faculdades formando professores em três anos, aonde Cálculo I é praticamente um trabalho de formatura certo? Cada vez mais um pré-requisito para se fazer um trabalho de formatura ou para a disciplina cálculo II. É, então, estamos vivendo essa situação paradoxal e uma resistência ainda muito grande para se utilizar a tecnologia da informação e quando é utilizada é usada apenas, por exemplo para se ilustrar uma determinada curva em Cálculo II, mas não é permitido, nem incentivado que o aluno use essa tecnologia o tempo todo, você entende? É, isso não é visto como algo fundamental que deve ser colocado desde o começo para que o aluno construa suas idéias (grifo da pesquisadora).

Adentrando um pouco sobre a formação do aluno no Ensino Médio buscando relacionar esse fato com a reprovação nos curso de Matemática na universidade, pergunto ao professor : gostaria de saber se para o caso da reprovação você incluiria o fato do aluno chegar do Ensino Médio com uma base Matemática escolar, um tanto, fragilizada? Sobre essa questão, o professor Z, responde:

Não, eu não acrescentaria isso, eu acrescentaria, como já disse, que há uma grande diferença entre o currículo esperado pela academia, pela universidade e aquela formação que vem para o Ensino Médio. Mas eu não utilizaria jamais esse argumento do aluno mal preparado (grifo da pesquisadora). Vou justificar a minha resposta: Não sei quem disse primeiro, mas vários educadores matemáticos já disseram que se nós utilizarmos, o argumento do mal preparado, nós podemos concluir que, obviamente o professor do Ensino Médio fará o mesmo, argumentando que o Ensino Médio não vai bem porque o aluno do ensino fundamental não veio bem preparado e em geral a culpa está na formação das professoras primárias que não tem formação específica em Matemática, por sua vez essas professoras culpam as professoras do infantil, porque tem menos preparação ainda, pois muitas vezes os alunos apresentam a mínima noção de quantidade, de curva, de figuras geométricas etc. E então a última questão, que se transforma em uma piada é que as professoras do infantil e da creche não tenham ninguém a culpar a não ser aqueles

responsáveis pela concepção da criança no momento de não terem preparado bem durante a concepção para chegar a educação infantil, já bem preparados para tal. Então quer dizer, esse argumento no meu modo de ver ele não pode ser dado. Se a universidade está achando que há um vazio entre a chegada do aluno e aonde esse aluno deve chegar, ela tem duas opções: a primeira é continuar com o pensamento: vamos selecionar quarenta, passar vinte e vamos efetivamente preparar dez. A segunda opção é decidir se ela quer aprender a lidar com esse aluno que vem fazer Matemática e que já enfrentou o preconceito dos seus colegas na escola, por gostar de Matemática (o que reflete uma questão mais ampla no fenômeno cultural geral de que Matemática, pois é vista como acessível para poucos). Alunos que vêm de escolas particulares, de escola pública, os quais, é claro, têm muitas vezes lacunas em termos de aprendizagem. Aprender a lidar no sentido de criar uma cultura nos cursos de aprovação e não de reprovação. É uma cultura de aprendizagem, tem que criar uma cultura que os alunos fiquem incentivados a aprender o que é demonstrar, porque a demonstração é importante mesmo se eu já tenho o resultado e compreender isso dentro de uma atmosfera acadêmica e ver que em outras vezes o resultado é importante. O nosso aluno, é claro que eu posso dizer, queria que o meu aluno fizesse mais isso, queria que o meu aluno soubesse mais aquilo porque ia facilitar mais a minha vida - é verdade, mas a nossa solução pode ser Cálculo zero já adotado por várias Universidades, projeto do primeiro ano adotado por essa universidade, e se por acaso não deu certo, vamos buscar outras soluções. Eu acho também que se busca ensinar numa graduação, muitas coisas que não são necessárias pro professor você entende? Quer dizer, são importantes, os professores precisa ler Machado de Assis e precisa saber algumas disciplinas que são ensinadas aqui e em outros cursos na Matemática. Mas não pra dar aula, precisa saber como cultura geral e eles podem estar se formando e estar vendo cada vez mais aquilo. Mas, ele não pode ganhar raiva de Matemática, ou perder a sua confiança em Matemática, ou ser reprovado nessa disciplina, pra depois vir a dar aula em Matemática, de maneira que venha reproduzir de novo o ciclo, isso é o que eu acho que está equivocado (grifo da pesquisadora).

Ainda sobre o tema ensino do Cálculo, perguntei ao professor Z: em sua opinião qual a **relevância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral para a formação do futuro professor de Matemática?** Em resposta, o professor Z, falou:

Eu acho que o Cálculo é importante por vários motivos. Primeiro, porque ele possibilita um caminho interessante perfazendo uma ponte entre um representante da Matemática acadêmica que é a Análise e a Matemática do Ensino Médio. Então ele é importante pra fazer essa ponte (grifo da pesquisadora). Outro fato é porque ele permite aos alunos que chegam à universidade tendo noção de função, calculando volumes, áreas etc., passem a ter noções de taxas de variação. Enfim, nós temos que utilizar essa disciplina, como uma maneira de construir essa ponte, temos que usar pra que o aluno, ou esse futuro professor tenha noção do conceito de taxa de variação espontânea, de áreas de figuras não formadas por linhas poligonais, mas por curvas. Que ele saiba, por exemplo, como lidar com séries de uma maneira diferente do que eles viram no Ensino Médio. E isso é importante que eles aprendam, inclusive porque eu acho que seria possível que alguma dessas idéias também fossem desenvolvidas no Ensino Médio caso a gente não tivesse também a postura de que todos os alunos têm que estudar a mesma coisa o tempo todo (grifo da pesquisadora). É importante reconhecermos que existe todo um leque

de opções em termos de disciplinas e que poderíamos abrir um pouco mais pra eles, oferecer mais optativas. Eu acho que para um aluno se tornar um matemático, talvez, um grau de exigência de todas as coisas que ele tenha que passar pra ele ganhar esse título seja outro e eu nem quero entrar nessa discussão, porque eu não sou matemático profissional, mas eu não acho que as pessoas precisem saber todas essas áreas com o grau de rigor muitas vezes exigido para que ele se torne um professor. Na minha opinião, um rigor exacerbado, muitas vezes tem contribuído para um aluno que entrou aos dez minutos do primeiro tempo do primeiro ano adorando Matemática, mas que fica inseguro no segundo ano e às vezes sai odiando Matemática do terceiro para o quarto ano com a mão tremendo na hora de fazer uma prova. Antes, o que era um ato de afirmação, virou um ato de medo (grifo da pesquisadora) ou numa história que eu já ouvi e que já contei pra vários alunos, que quando ouvem, revelam aquele riso de solidariedade. A história fala de pessoas que pegam determinada disciplina e decoram 28, 35, 45 demonstrações, decoram as demonstrações porque sabem que três ou quatro vão cair na prova e aí eles vão tentar acertar duas ou três, com o objetivo de passar na disciplina com o famoso "cinco bola". Então quer dizer, isso é uma prática comum, mas, obviamente não gera bons matemáticos, não gera bons educadores matemáticos nem algo do tipo. Então, no meu modo de ver o Cálculo é importante, é fundamental para o aluno ter noções de determinados conceitos matemáticos, mas não adianta saber resolver integral, ele precisa entender integral, ele precisa entender taxa de variação pra entender o que está por trás dos modelos econômicos, modelos de reserva de avião que estruturam as suas vidas e isso é fundamental (grifo da pesquisadora). Modelos da economia, muitas dessas pessoas não tem a menor noção que isso tem a ver com derivada, que o aumento da inflação tem haver com a derivada segunda ou se eu quiser com a derivada terceira, dependendo de onde eu comece na escala econômica. Então nesse sentido, é que eu acho que é importante, levando em conta essa parte da cidadania de entender a impregnação da Matemática na nossa vida cotidiana, como uma ponte para a Matemática do Ensino Médio pro terceiro grau. Decididamente, eu acho que é uma disciplina fundamental e também porque eu acho que há muitas questões que sem você falar ainda ou introduzir ferramentas mais próprias do Cálculo e com dificuldade, você poderia estar trazendo algumas dessas idéias ligadas à taxa de variação, talvez de maneira um pouco mais espontâneas ou mais intuitivas sobre ela para o Ensino Médio. Que são questões também fundamentais (grifo da pesquisadora).

Terminado o **primeiro bloco de perguntas** e já adentrando no segundo momento da entrevista, perguntei ao professor sobre **a importância das representações Matemáticas** como uma abordagem didático-pedagógica para o ensino e conhecimento do futuro professor de Matemática? O professor tem a seguinte posição:

Olha num determinado momento das minhas pesquisas e da minha carreira, eu já cheguei a escrever (e está na minha tese de doutorado), que conhecer significa coordenar diferentes representações. Eu já andei revendo essa afirmação, dizendo que não necessariamente isso pudesse ser verdade pra tudo, colocando assim de uma forma mais geral. Mas, concordo que, certamente, no Cálculo diferencial eu diria que saber Cálculo é uma coordenação entre essas representações (grifo da pesquisadora). Então, coordenar algo que o diagrama nos apresenta, com o silogismo de uma demonstração é fundamental. Assim como é fundamental que o aluno ou

futuro professor saiba coordenar resultados de uma tabela, perceber diferenças e semelhanças entre representações de funções do primeiro grau, do segundo grau, de uma exponencial, de uma polinomial até graus razoáveis etc. Então ele tem que saber coordenar essas representações. E, se tiver um software para lidar com elas, melhor ainda (grifo da pesquisadora). O software nos possibilita observar os padrões e ter uma outra compreensão. No meu modo de ver a visualização torna-se cada vez mais importante. Entendermos um gráfico, entendermos diagramas. Em Cálculo mais ainda, coordenarmos os diagramas das demonstrações com as demonstrações, aprendermos de uma maneira criativa sem decorarmos as demonstrações, passa a ser uma articulação. Entendermos o que foi anteriormente provado. Toda a parte lógica com a parte algébrica, às vezes operativas de equivalência com uma parte gráfica e com uma parte tabular, também. Várias pesquisas tem contado isso, cada vez, é mais importante coordenar essas representações usualmente Matemáticas, com aquela que é a nossa organizadora mestra da lógica, ou seja, a língua materna. Então eu acho que a coordenação entre escrever sobre os objetos matemáticos do Cálculo, escrever sobre seus conceitos, a álgebra que foi uma linguagem que consagrou, a informática que está consagrando uma linguagem gráfica cada vez mais usual e transformando o grande problema da continuidade como fundamento da Matemática, tem que ser vista também como algo importante (grifo da pesquisadora). As tabelas que antes era um instrumento chato, com o Excel e com vários softwares de funções se torna um amigo para que o aluno passe a entender padrões.

Dando ênfase ao **uso dos softwares**, pergunto ao professor Z: embora me pareça redundante fazer esse questionamento, gostaria de saber qual **a sua experiência com as TICs em sala de aula**, pouca, grande? Fale um pouco da relevância de se utilizar softwares educativos (matemáticos) como uma metodologia de ensino. O professor Z responde:

A primeira coisa que eu diria é que, como você mesma disse, eu só tenho feito pesquisa sobre isso. E uma das coisas que me fez ganhar algum respeito com a comunidade de professores do Ensino Médio é que quando a resistência pra informática era bem maior que ela é hoje, lá pelos anos 90, A UNESP de Rio Claro (no departamento) tinha apenas dois computadores até 1996. E dez anos atrás (outro dia), eu utilizava as calculadoras gráficas não por opção, como eu ainda faço até hoje, mas porque era a única maneira que eu tinha. Um pouco tempo depois, passei a usar dois **Macintosh** que eu comprei com o meu dinheiro. Mais tarde chegaram mais dois computadores, também comprados com verba pessoal. Bom, o que gerava muito respeito com os professores, é que eles falavam: você está falando isso, mas você não usa, eu falava, desculpa, mas você está enganada. Eu utilizo na sala de aula. Você quer ver um exemplo? Está aqui um exemplo olha. Eu fiz isso daqui e gerou isso daqui. E com isso, eu tive que viver parte, do que depois a uma reconhecida autora, a qual atua também nesse programa classificou muito bem como sendo o professor estar na zona de risco, que era viver o risco do ambiente de sala de aula envolvendo o uso do computador. Porque a informática desestruturava a sequência dos livros, desestruturava a certeza que as respostas de exercícios ímpares traziam e de repente todos estavam lá sem saber como lidar com um determinado fenômeno (grifo da pesquisadora). Seja por limitação do software, ou por algo que nós não sabíamos resolver com lápis e papel. Portanto, uma maneira de nós desenvolvermos sequências de novas atividades com informática num ambiente um pouco mais controlado, pra que nós mesmos aprendêssemos um pouco mais daquele software, conseqüentemente



percebermos a reação do aluno frente ao software, tínhamos que correr riscos, sairmos de um ambiente conhecido - a sala de aula, para experienciar novos caminhos. É com isso, que a gente tem trabalhado, vivenciado o uso da informática na sala de aula em experimento, enfim em palestras, em cursos com professores e mais recentemente em cursos sobre software como o Geometrics ou Winplot via Internet. Entretanto, é notório que mesmo em boas universidades o uso ainda é bastante limitado. Em algumas escolas do ensino público, por exemplo, a lógica da diretora da escola do estado ainda prevalece de manter o computador bem trancado você entende? para que ele fique seguro e depois apodreça de velho e vire um Windows 95, parado. Então, infelizmente, encontramos ainda uma resistência muito grande a esse uso. Atualmente não é mais dito que é errado. É dito, SIM, mas se deixa de lado, com o argumento que o uso do computador altera muito pouco a dinâmica de aulas expositivas, das maneiras dos testes etc. do trabalho que é feito. E a Internet, Por sua vez, é ainda muito pouco autorizada a entrar na sala de aula (grifo da pesquisadora).

No último bloco de perguntas, já finalizando a entrevista, quis saber do professor Z, sua concepção à respeito **do conhecimento necessário para a formação do futuro professor de Matemática**. Sua resposta foi:

Esse é um assunto que muita gente está pesquisando e tentando responder essa pergunta, porque uma resposta parece que não satisfaz mais - tenho que ensinar a Matemática acadêmica, porque se ele souber $n+1$ ele vai saber ensinar n ou $n-1$ ou $n-2$. Essa resposta que já era fraca nos anos 80, com o crescimento de noções como EtnoMatemática, se mostrou completamente não razoável (grifo da pesquisadora). A Matemática escolar não é apenas um subconjunto da Matemática acadêmica, tem relação com ela, mas ela também tem algo que é próprio (grifo da pesquisadora), tem determinadas regras, determinadas questões que são importantes e que do ponto de vista da Matemática informal não é. A minha maior fonte de inspiração para responder a sua pergunta que é difícil é o livro do Plínio Moreira e da Manuela David, no meu modo de ver, é um dos livros mais importantes da Educação Matemática Brasileira e eu diria mundial, porque eu acho que não está dito isso com muita clareza em vários artigos que têm sido colocados sobre esse assunto. De novo tenho que colocar uma limitação nisso, porque embora leia bastante dessa literatura não sou um especialista nessa área, como eu sou em informática, onde poderia estar afirmando isso um pouco mais. Mas eles dizem com bastante clareza no livro que a questão interessante é do relacionamento, ou seja, são determinados critérios, que podem ser visto como verdade ou problemático na Escola e problemático na Universidade. Os exemplos que ele dão, são sobre números racionais, números reais. Enquanto números racionais se perdem do ponto de vista da Matemática acadêmica, um tempo imenso lidando com frações, representações decimais, cada uma dessas representações demora-se anos para serem consolidadas, equivalências entre as operações e tudo mais, do ponto de vista da Matemática acadêmica isso não é um problema há muito tempo e nem visto como importante e tem poucos cursos que problematizam isso. Por exemplo, representação decimal versus a representação fracionária na área dos números racionais ou tal, dos números reais, isso não é visto como algo extremamente problemático, não é dedicado mais do que, não sei, vou “chutar” aqui, dez horas no curso inteiro nas três mil horas certo? Ou algo do tipo. Então esse é um grande problema, quer dizer, para ser resolvido. Agora em relação a ensinar $n+1$, deve-se aprender n , isso



já é praticado bastante. Também já está resolvido de um ponto de vista lógico, mas não do ponto de vista prático que apenas ensinar a Matemática do Ensino Médio, não é a saída para que o futuro professor tenha noção daquele conteúdo e passe a ensiná-lo sem ter uma visão da Matemática como ciência (grifo da pesquisadora). É necessário então, que ele tenha uma visão da Matemática como ciência e que ele tenha no meu modo de ver, uma visão de alguns dos autores da literatura brasileira, de boa parte da Matemática acadêmica, de boa parte das questões de sociologia pra entender a história da miséria desse país, pra ele não torcer o nariz quando entrar numa escola de periferia, pra ele aprender a lidar um pouco com o fato de que as universidades são extremamente brancas (as públicas em particular) e as escolas extremamente negras e índias e tudo mais, bastante misturadas e ele precisa lidar com isso. E nem sempre ele sabe lidar com isso. Então, esse conhecimento, quer dizer, não é apenas um conhecimento. Isto é, eu não queria me restringir apenas às questões da Matemática, embora eu já tenha apontado as minhas limitações. Eu estou esperando muito que continuações de pesquisas e de futuras pesquisas possam em parte desatar esse nó, trazendo respostas mais concretas para esse impasse. Pesquisas que têm sido realizadas nesse programa e em outros, para que nós tentemos de fato transformar essa prática na sala de aula da licenciatura, para quem sabe em trinta anos se modifique uma parte desses efeitos na escola do Ensino Médio e fundamental. Não esquecendo, que uma parte está sendo modificada pelos nossos tradutores. Eu acho que autores como Bigode ou Imenes (eles são tradutores), bebem na água das nossas pesquisas e traduzem ao seu modo, a partir de sua visão. E é isso mesmo que deve ser feito, no entanto, ressalto que essas minhas palavras não se constituem uma crítica a outros autores de livros didáticos. Enfim, acho que não são só esses autores que adotam essa prática, mas eu estou falando desses que eu conheço um pouco mais, que levam boa parte das idéias da comunidade pra sala de aula de uma maneira muito mais poderosa que a gente poderia imaginar. É claro, que depois tem também a sua maneira particular de traduzir e depois tem uma outra tradução feita pelo professor e uma outra feita pelo aluno. Então são várias camadas de tradução. Sendo que algumas dessas encontram-se envolvidas numa visão de que a Matemática está espalhada pela sociedade, que a Matemática é difícil, de que a Matemática é chata, que é algo pra “nerd”, de que é algo pra gente esquisita ou para um cientista maluco ou algo do tipo. Adverso a essa perspectiva, eu acho que nós podemos ter uma Matemática popular, uma Matemática aberta pra todos, o que não impede que haja Matemática específica pra poucos entende? Mas é justamente o pensamento contrário que ainda impera nas classes populares, na classe média alta e naquela que se esperava ser alvo de grande crítica da sociedade, ou seja, o subgrupo dos acadêmicos, dos universitários, vindo das escolas de filosofia que deveriam ter a consciência crítica. No entanto, muitas vezes reproduzem essa questão, exatamente como as classes populares fazem e dizem que nós temos que fazer você entende? Em minha concepção a Matemática ser bem difícil é uma forma de mostrar o seu grau de reprovação. Eu volto a dizer, pra concluir, que a gente vai ter que conseguir, fazendo campanha pra mostrar que o problema da reprovação em Matemática é um problema. Seja na primeira série, na segunda, na terceira, na quarta do ensino fundamental, médio, universitário. Não há saídas fáceis e, as saídas que estão sendo apresentadas, definitivamente não tem funcionado para matemáticos, para educadores, para ninguém. Não são promoções automáticas, promoções não automáticas, que estão resolvendo o problema da reprovação, o que também tem sido um problema, mas, algumas saídas têm sido muito corajosas. Porque definitivamente nós já sabemos, há reprovações, via de regra, não geram novo aprendizado, ainda mais que a pessoa venha do mesmo curso, ou



no caso do Ensino Médio e fundamental passa a ver o mesmo curso várias vezes já numa situação humilhante, numa cadeira que nem cabe a pessoa, porque ele já tem dezesseis anos e está numa turma de aluno de doze. É uma situação muito comum ainda. Então, a respeito desse quadro, a gente tem que continuar fazendo o que estamos fazendo, publicando artigo, publicando livro, pesquisando. Isso que é importante, a gente está vendo livros dos outros que fazem pesquisa e conseguem escrever essas pesquisas de maneira densa e ao mesmo tempo acessível para outros. Espero que você consiga fazer isso com a sua pesquisa, pra gente.

4.5.4.1. Síntese Interpretativa da Entrevista com o Professor Z

Segundo o professor Z, o Cálculo I, em particular, é uma disciplina que traz novas idéias e, o aluno ao iniciar o curso de Cálculo I, rapidamente se vê demonstrando teoremas ou tentando compreender as propriedades de Limites, Derivadas que se constitui em definições formais de conceitos matemáticos, os quais geram no aluno ingressante, certo estranhamento. Na concepção do professor Z, isso ocorre devido a grande diferença que existe entre o currículo esperado pela universidade e a formação que vem do Ensino Médio, o que não implica necessariamente que o aluno chegue mal preparado.

Em relação à importância do Cálculo para formação do futuro professor, o professor Z assinala que o estudo dessa disciplina é relevante por vários motivos, entre os quais, possibilita um caminho - uma ponte entre um representante da Matemática que é a Análise e a Matemática do Ensino Médio, além do que, proporciona aos que se propõe estudá-la, alunos ou futuros professores de Matemática, um conhecimento mais aprofundado dos conceitos matemáticos, considerando que, saber CDI envolve coordenar representações, isto é, coordenar resultados de uma tabela com sua escrita algébrica, ou sua representação gráfica, por exemplo. Portanto, é importante que o aluno ou futuro professor de Matemática aprenda a perceber as diferenças e semelhanças entre funções do primeiro e segundo grau, exponencial, funções polinomiais de graus razoáveis de maneira a obter uma visão mais global dos objetos matemáticos.

Nesse sentido, o professor Z assinala que, cada vez se torna mais importante coordenar essas representações usualmente Matemáticas com aquela que é a organizadora mestra – a língua materna. Logo é importante escrever sobre os conceitos matemáticos do CDI. De acordo com o professor Z, a álgebra é a linguagem que consagrou a informática, e que está consagrando uma linguagem gráfica mais usual. Infelizmente o uso da informática ainda é bastante limitado.





Em sua explanação o professor Z busca ressaltar que **novas abordagens e experiências devem ser vivenciadas pelo aluno ou futuro professor de Matemática**, de maneira que estudar Matemática seja motivo de prazer e não de aversão. O futuro professor não pode e não deve perder a confiança e o estímulo em aprender Matemática, para depois vir a dar aula reproduzindo um ciclo de reprovação.

Sob esse aspecto, o professor Z acrescenta que **explorar novas abordagens** e métodos de ensino tais como a modelagem Matemática, o que implica explorar aplicações de problemas do cotidiano, por conseguinte **envolve coordenar representações matemáticas** e, se esse processo for intermediado por recursos tecnológicos como o computador na utilização de softwares matemáticos adequados, é fundamental para a formação do aluno ou futuro professor de Matemática. Nesse sentido, o professor observa que a formação do futuro professor não se restringe apenas a questões da Matemática, mas também à questões sociais e culturais, além do que o futuro professor precisa ter uma visão da Matemática como ciência.

A seguir, dando continuidade à transcrição das entrevistas, vamos apresentar o início de nossa interação com os estudantes de CDI I, tentando mostrar que muitas idéias e concepções manifestadas pelos professores, acima entrevistados, vão ao encontro ou vão de encontro ao que pensam os estudantes quando chegam ao Ensino do Terceiro grau e se deparam com uma abordagem teórico-metodológica.



4.6. Conversando com os Estudantes

As entrevistas⁴⁴ com os **os alunos da disciplina CDI I** do curso de **Matemática (1º. Ano) da UNESP de Rio Claro - SP** foram realizadas individualmente com cada um dos estudantes nas dependências da **UNESP**. As quais foram gravadas em áudio com a permissão dos mesmos. É importante lembrar que no início (como enunciado no item 4.3.1.1) pensamos em realizar as entrevistas como uma forma de seleção dos sujeitos da pesquisa, mas tendo em vista **a possibilidade de dividir os estudantes em duas turmas para a aplicação das atividades exploratório-investigativas** e, percebendo ser viável trabalhar com esses em **grupo de dois**, achamos por bem permanecer com esse número, mesmo porque é comum haver desistência por parte dos sujeitos pesquisados, durante o processo da coleta de dados.

Para apresentação dos dados estaremos utilizando nomes codificados e, para uma dinamização das falas dos estudantes, estaremos descrevendo interativamente as percepções apresentadas por esses durante a nossa conversa.

O roteiro de perguntas propostas aos sujeitos da pesquisa apresentou uma estrutura semelhante ao roteiro de perguntas apresentadas aos professores. No entanto, as perguntas foram dirigidas aos estudantes, pela pesquisadora, de maneira menos formal do que foi para os professores. Antes de dar início as entrevistas foi solicitado a cada um dos estudantes, preencher uma pequena ficha (com o objetivo de agilizar a entrevista), a qual solicitava dados pessoais tais como: Nome completo, e-mail, telefone, idade, cidade de origem/estado e cidade onde atualmente reside/estado. Após o estudante preencher esses dados, a pesquisadora passou à entrevista gravada em áudio.

Assim como ocorrido **na entrevista com os professores**, as perguntas dirigidas aos estudantes – sujeitos da pesquisas subdividiram-se em **quatro blocos**, com o **objetivo** de percebermos quais as perspectivas e dificuldades apresentadas pelo estudante, futuro professor de Matemática em estudar os conteúdos próprios da disciplina **CDI I**. Nesse sentido, apreendermos a importância das representações matemáticas para o conhecimento dos futuros professores, tendo como perspectiva uma abordagem semiótica, mediada por softwares matemáticos (em particular, o Winplot). Deste modo, foram elaboradas perguntas, as quais privilegiassem temas como conhecimento do futuro professor, TICs, representações matemáticas e ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

⁴⁴ As perguntas propostas na entrevistas com os estudantes encontram-se disponíveis no Anexo C (CD-ROM) (desta pesquisa)

No **primeiro bloco**, foi perguntado aos estudantes sobre sua motivação e expectativas quanto ao curso de Matemática. No **segundo bloco**, foi perguntado, especificamente, sobre a disciplina Cálculo e sua relevância para a formação do futuro professor de Matemática. O **terceiro bloco** referiu-se ao uso das representações matemáticas como uma abordagem didático-pedagógica para o ensino da Matemática, em particular, para o ensino do CDI I. Neste bloco também foi interrogado ao estudante sua opinião a respeito do uso do computador como um recurso para aprender Matemática, também se já haviam utilizado essa tecnologia em sala de aula. O último **bloco** de perguntas referiu-se a um nível mais pessoal, inquirendo o que e como o estudante fazia para estudar e apreender os conteúdos propostos em sala de aula, no contexto da disciplina **Cálculo Diferencial e Integral I**.

Os **entrevistados** são denominados nessa pesquisa⁴⁵ por **Clotilde, Robin, Clara, Alexandre, Ana Paula, Augusto, Márcio, Patrícia, Ágata, Letícia, Marcela, Any, Suka, Rosana, Lara, Gabrielle, Laura, Serapião, José, Frederico, e Henrique**. Esses estudantes são bastante jovens, numa faixa etária entre 17 e 23 anos e a maioria deles reside em Rio Claro. Quanto à cidade de origem, a maior parte é do interior de São Paulo, sendo que, apenas dois são naturais de Rio Claro, um da grande São Paulo e um de Recife/Pernambuco. Novamente é importante ressaltar ao leitor que as entrevistas realizadas estão descritas na íntegra podendo haver erros de linguagem, enfatizando que o leitor poderá optar por uma leitura mais resumida apresentada ao final de cada bloco de entrevista.

Assim, a primeira pergunta dirigida aos estudantes foi: **Qual sua motivação para fazer o curso de Matemática?** Segue abaixo a opinião desses estudantes sobre essa primeira pergunta;

Rosana - Eu gosto de Matemática e gosto da área de pesquisa, eu sempre gostei da área de exatas e quando eu entrei pro cursinho, foi que eu decidi mesmo;

Any - Kumon, aquele ensino individualizado, comecei a fazer na 6ª. série e então aprendi Matemática de novo, de um outro ângulo e gostei.

Augusto - Sinceramente eu caí no curso de Matemática de pára-quedas, porque eu queria fazer Engenharia Elétrica e a minha nota não seria suficiente para passar. E realmente não foi. Mas, eu sempre tive um gosto por Ciências Exatas, por Matemática.

José - Eu comecei a gostar de Matemática, por causa de uma professora, na qual me identifiquei muito. E principalmente porque ela usava várias formas de resolver um tipo de exercício. Nunca só um método de resolver. Várias formas de resolver o exercício.

Clotilde - Eu nunca pensei em fazer Matemática, foi bem assim de última hora, mas é porque eu tenho muita facilidade, tinha muita facilidade no ensino fundamental, e também é uma matéria que eu sempre gostei, então acho que é isso.

Letícia - Sempre quis ser professora, Na 8ª. série conheci uma professora de Matemática na escola, ela era muito boa em Matemática. Então no primeiro ano,

⁴⁵ Codinomes sugeridos pelos próprios sujeitos da pesquisa.

comecei a tomar gosto, comecei a estudar, estudar, estudar. Aí pensei vou prestar Matemática, Eu sei que tenho dificuldade, mas eu quero prestar Matemática.

Márcio - Sempre gostei da área de exatas, principalmente, de Matemática

Ana Paula - Bom, sempre gostei de Matemática no colegial e, quando estava na época do vestibular o curso que tinha menos concorrência, era mais acessível e eu tinha estudado.

Marcela - Na verdade, estava pretendendo a licenciatura, porque eu sempre quis ser professora. Só não sabia a matéria. Daí eu me identifiquei mais com a Matemática. No terceiro Colegial eu conheci uma professora de Matemática, olha! eu adorava o jeito que ela ensinava. Daí foi que vim pra área de Matemática.

Gabrielle - Curiosidade, mas, fazer o curso de Matemática, foi mesmo de última hora, porque na verdade eu queria mesmo era fazer Odontologia.

Laura - há! no colegial gostava das aulas e tinha muita facilidade, então optei por Matemática

Henrique - por gostar de Matemática.

Clara - Foi porque eu descobri nas exatas e é uma coisa que eu gosto muito de estar fazendo, de sentar ali e ficar pesquisando sobre o assunto, de estar resolvendo os problemas que não tem uma única solução, ou um único caminho de resolver e encontrar a solução.

Alexandre - Eu gosto muito da área de Computação, Arte em Computação é uma área exata também né? Praticamente Matemática pura. Mas aí eu acabei conhecendo mais a Matemática, minha mãe é professora também, comecei a procurar mais sobre Matemática, a pesquisar alguns livros. Daí comecei a me interessar. Como eu não queria largar a área de Computação, eu prestei vestibular, eu prestei também na USP em Matemática, uma introdução científica. Se não me engano. E Matemática aqui em Rio Claro né? Acabei conseguindo entrar só na UNESP. Eu sinto prazer mesmo em estudar Matemática, gosto de pesquisar alguma coisa sabe? Então por isso que eu sinto motivado em estudar Matemática.

Patrícia - Matemática quando eu estudava no colegial, era uma das matérias que eu mais gostava. Então eu acabei fazendo o vestibular, mas Matemática não é do jeito que eu pensava não.

Robin - Sempre gostei de Matemática, acho que sempre me destaquei no fundamental e Médio em Matemática, uma matéria que todo mundo tem mais dificuldade. Sempre gostei, sempre estudei.

Serapião - Eu fui um excelente aluno em Matemática, minhas notas sempre eram 10. E em todas as apresentações em sala de aula, todos diziam que eu tinha jeito para ser professor. Então juntei as coisas e decidi por fazer Matemática.

Frederico - Foi pelo curso mesmo, sempre quis me formar num curso da área de exatas e, ou fazia Matemática, Física ou Engenharia. Como aqui não tem Engenharia nem Física, sobrou Matemática.

Suka - Algumas professoras do ensino fundamental, me influenciaram a fazer Matemática.

Agáta - Sempre gostei de exatas e, Matemática era a matéria que tinha mais afinidade. Além do que as chances de entrar em Matemática são bem maiores do que em Engenharia, por exemplo.

Lara - Desde pequena, desde o primário, era a matéria que eu mais gostava era Matemática mesmo. Daí, na oitava série, eu ajudava sempre as minhas amigas na aula.

4.6.1. Síntese Interpretativa do 1º. Bloco: Comentários dos Estudantes

Nesse **primeiro bloco de perguntas**, em relação ao principal motivo para cursar Matemática, podemos observar que uma das principais razões apresentadas foi **o gosto** pela Matemática, em segundo, **a influência** por parte dos professores de Matemática em nível escolar, os quais, segundo alguns estudantes, apresentavam uma forma diferenciada (da tradicional) e motivadora, mostrando várias maneiras de abordar os conteúdos matemáticos. Poucos afirmaram ter feito o curso de Matemática **por acaso** ou **curiosidade**, mas mesmos esses revelaram gostar de estudar Matemática, pois ao serem interrogados **se tinham facilidade em entender os conteúdos matemáticos?** Os estudantes em sua maioria responderam que SIM. Esse aspecto nos leva a deduzir que o aluno não se sente mal preparado, e se esse mesmo aluno possui o gosto e familiaridade em relação aos conteúdos matemáticos, mesmo que, ainda, em nível escolar, consideramos ser um incentivo ao ensino de novas abordagens e metodologias principalmente em início de curso no ingresso à universidade.

Em termos de **dificuldades**, os problemas surgem quando esses mesmos estudantes deparam-se com os conceitos e teorias propostas no curso de **Cálculo I**. O estranhamento é imediato, devido **a linguagem lógico-formal própria da disciplina**. Essa particularidade aparece na entrevista quando os estudantes afirmam que passaram a sentir alguma dificuldade, outros, muita dificuldade (a maioria), pois, segundo a opinião desses, **a Matemática é diferente da ensinada no Ensino Médio**, embora tenham admitido que os assuntos abordados na escola servissem de base para as disciplinas de **CDI I**.

Quanto às condições de estudos, todos foram unânimes em dizer que na Universidade, estão dedicando muito mais do que no Ensino Médio. Pois, se não o fazem, com certeza não obterão resultados positivos nas avaliações. Nas respostas dos estudantes foi ressaltada também a preferência por uma ou outra disciplina, as que mais sentiam dificuldade ou afinidade. Dentre as disciplinas que mais sentem dificuldade inclui-se **Cálculo I**, o principal motivo para tal dificuldade consiste principalmente na demonstração de teoremas, construção e compreensão de gráficos de funções, particularmente de funções não-elementares. Embora, o **Cálculo I** tenha sido apontado como uma das disciplinas mais difíceis, ela também foi citada pela maioria dos estudantes como uma das mais interessantes e, para alguns, **CDI I** consta na lista de suas preferências.

No **segundo bloco de perguntas**, os estudantes foram questionados por essa pesquisadora sobre **a importância da disciplina Cálculo e qual a sua influência para a**

formação do futuro professor. Todos, sem exceção, responderam que a disciplina Cálculo I é muito importante, principalmente por ser uma disciplina básica. Vejamos abaixo, suas aceções;

Rosana - Importante, tem vários procedimentos de cálculo que facilitam e explicam alguns processos matemáticos, os quais aparecem sem sentido quando estamos no Ensino Médio, por exemplo, encontrar o vértice de uma função do segundo grau. Em relação a formação do futuro professor, eu acredito que é bom o professor saber mais, ter um maior conhecimento.

Any - Claro, eu acho que é uma base, uma disciplina básica. Para a formação do futuro professor, eu acho importante, porque possibilita uma outra visão, pra tudo, o aluno pára de enxergar em nível de Ensino Médio - uma visão restrita. No Cálculo você tem uma visão mais abrangente, você tem como lidar melhor com aquilo. Eu acho muito importante o Cálculo pro professor.

Augusto - Bom, eu acredito que, mesmo não conhecendo muito da disciplina Cálculo, pois estou no primeiro ano, tenho pouca experiência, mas acredito que tem uma importância muito grande, porque esta disciplina está presente em muitas áreas. Em ciências exatas, nem se fala. Quanto a sua importância para a formação do futuro professor de Matemática, eu acho que auxilia, que é importante. Talvez não chegue a aplicar esses conhecimentos na prática, pra seus futuros alunos, mas auxilia na compreensão do professor, dos assuntos.

José - Talvez não saiba (ainda) dizer com propriedade, a verdadeira importância. Mas ela é uma disciplina bem interessante. Ela é básica. Isso é o que imagino por enquanto. Quanto à sua importância para a formação do futuro professor de Matemática, sinceramente eu não tenho opinião, porque não vejo utilização nenhuma em relação ao Ensino Médio. Lá a gente vê apenas a parte de funções. Sinceramente eu não sei.

Clotilde - É importante, porque ela é a base no curso de Matemática, pré-requisito para muitas outras disciplinas. Olha, eu tinha muita dificuldade em função, gráfico e no Cálculo, muda bastante o jeito de abordar esses assuntos, bastante diferente do colegial. Para o futuro professor, eu acho que ajuda bastante, principalmente para entender construção de gráficos. Eu acho que deveria ser ensinada noção de Cálculo no colegial,. Eu acho super importante.

etícia - Com certeza é importante. Ela é básica. o Cálculo a gente vê praticamente em todas as matérias. Acho bem interessante falar um pouco da história do Cálculo. Você vê assim, um teorema e você vê uma história por trás daquele teorema. Eu acho bem interessante. O Cálculo, com certeza é importante para a formação do futuro professor porque a gente vê como chegar a uma função, qual a diferença de uma função pra outra, porque ela é par, porque ela é ímpar etc. O Cálculo, é muito importante, principalmente para aquele que vai ensinar.

Márcio - Eu acho que Cálculo é importante sim, pois é base pra tudo. Para a, também é muito importante, acho que o professor tem que saber o que está fazendo e, a disciplina Cálculo dá base para esse conhecimento. Se ele não tiver um conhecimento mais aprofundado - o alicerce, “não vai conseguir erguer a casa”.

Ana Paula - A disciplina Cálculo I, é importante, com certeza, não só para Matemática, mas para qualquer curso que de exatas, lógico que é importante, ela é a base. Agora, quanto à formação do futuro professor, depende, se for um professor que vai dar aula pro Ensino Médio, acho que sim, mas ele não vai dar essa matéria. Eu acredito que antigamente tinha, alguma coisa de Cálculo, Limite, Derivada no Ensino Médio, mas hoje em dia não. Agora se for dar aula na Faculdade com certeza é importante.

Marcela - Eu acho que ela é super importante, e indispensável para o curso de Matemática. Ela é base para outras disciplinas e nos dá uma visão geral do assunto

de funções. É uma disciplina muito interessante, só que difícil. Tenho que me dedicar muito na matéria. O futuro professor deve conhecer bem os conteúdos de Cálculo, pois ela é fundamental. Cálculo é uma disciplina, que nunca deve ser abolida do currículo, porque ela é que vai “abrir a porta” pra tudo (a estudante se refere a disciplina Cálculo como pré-requisito de outras disciplinas no curso de Matemática).

Gabrielle - Cálculo é importante, porque é base para outras matérias. É o princípio pra gente compreender outras matérias. Na sala, a professora de Cálculo I, enfatizou muito a parte de gráficos. Acho que, nesse sentido, Cálculo ajuda bastante, pois a partir do cálculo da derivada a gente tem idéia de como vai ser o gráfico de uma função. Então, é importante que o professor saiba Cálculo e, mesmo que ele não utilize o conteúdo de Cálculo, ele tem uma visão mais ampla, no momento que ele está ensinando, ele consegue visualizar melhor e de repente explicar até melhor pro seus alunos.

Laura - há! eu acho que ela é importante, porque ela é base para outras disciplinas. Em Física a gente vai usar bastante coisa de Cálculo não é? Agora, para a formação do futuro professor, com certeza ele não vai ensinar Derivada e Integrais lá no Ensino Médio. Mas, acho que influencia sim porque ela é básica. E, o professor tem que ter uma base para ensinar, assim como o aluno na universidade tem que ter base para conseguir estudar Cálculo.

Henrique - É importante, mesmo porque, Cálculo para mim é sinônimo de Matemática superior. No Ensino Médio não vemos Cálculo. Para o futuro professor de Matemática é importante, porque em Cálculo nós estudamos todos os conceitos de Função e, Função é base para a Matemática do Ensino Médio. Logo, Cálculo é bem importante.

Clara - A disciplina Cálculo é a base de tudo, do que estamos aprendendo. É base para outras matérias. Em relação à formação **do futuro professor**, eu penso que, Cálculo é base para as coisas que vamos ver mais pra frente. Mostra como calcular e porque calcular. Logo o professor deve conhecer.

Alexandre - Olha, eu acho o Cálculo I uma das matérias mais importantes do primeiro ano. E o Cálculo II do segundo ano. Porque, como diz o nome, vai ser a parte que a gente vai calcular mesmo. A disciplina Cálculo é básica, ela vai me dar a sustentação pro curso inteiro sabe? Eu vou ter que derivar e integrar em outros cursos. Tem que calcular limites, analisar gráficos. O resto do curso tem muito a ver com isso ok? Então, apesar de não estar indo muito bem. Pra mim é uma matéria extremamente importante e a gente não pode estar deixando lacunas nela, mesmo porque uma coisa que depende da outra. Derivada depende de limite e limite depende de função. A Integral depende da derivada. Portanto, as matérias que eu acho mais importante são Cálculo e Geometria Analítica, porque lá a gente vê gráfico, projeções de gráfico. A disciplina Cálculo I, traz muita informação para o futuro professor de Matemática, porque nela, se trabalha muito com função e gráfico. E no colegial, onde eu estudei, observei que os professores não trabalham muito com gráficos. É muito mais fácil pra mim aprender o Cálculo, usando gráficos em vez de só teorema, teorema e calculando. Às vezes observar o gráfico, me ajudou a entender muita coisa, que não tinha entendido até hoje. Então, a forma do professor ensinar deve ser bem diversificada. É bem forte essa parte de gráfico. Mostrar, oh! pessoal como as coisas acontecem. Pois, às vezes, mostrar o gráfico de uma função, permite o aluno observar o comportamento da mesma, se vai subir, descer etc. E até mesmo na Física, a gente vê, que muitas formas na Física sai por derivadas e integrais que a gente aprendeu no Cálculo, então Cálculo é base para a Matemática inteira não é? Então eu acho que o aluno “leva” muita coisa do Cálculo para ensinar. Não que eu vá ensinar derivadas e integral pros alunos do primeiro, segundo terceiro ano. Acho que lá quando eu for ensinar, na hora de solucionar um exercício e rapidamente poder ensinar o aluno de uma outra forma, o que eu

aprendi em Cálculo, vai me ajudar a ensinar melhor o meu aluno, portanto eu acho Cálculo essencial sim.

Patrícia - Eu acho que é uma disciplina importante, porém, eu acho que faltam no curso as aplicações, como aluna de Cálculo, sempre me pergunto: onde eu vou usar isso? o que eu vou fazer com isso? Eu acho que falta ensinar ao aluno onde aplicar os ensinamentos do Cálculo. A teoria é importante, mas falta aplicação. E para o futuro professor, dá uma base pra ele entender muitas coisas. É claro que se for dar aula lá pra oitava série, tem muita coisa que ele não vai precisar passar. Mas é importante o professor saber mais do que precisa para ensinar em nível fundamental.

Robin - Cálculo, atualmente é a disciplina que eu mais gosto. Mas, eu acho que devia ser mais aplicada. A metodologia, a teoria, deveria ser mais aplicada. Em relação a sua importância para a formação do futuro **professor**, é bem complicado responder essa pergunta. Na minha opinião, depende para quem o professor pretende ensinar. Se for do Ensino Fundamental e Médio, ele não vai dar Cálculo. Não tem como você querer explicar Cálculo para os alunos do Ensino Médio e fundamental. Não tem lógica isso. Agora se for pra Universidade, aí sim. Você pode aprofundar em tudo. Olha, o professor é aquela pessoa que o aluno deve admirar. Ele não sabe tudo, mas é aquele que sabe muito mais do que o aluno. Se o professor “pega” um aluno que é muito inteligente, então ele tem que ter uma bagagem pra poder suprir o que esse aluno quiser. Se esse professor “pega” um aluno que sabe mais do que ele, eu acho que não dá certo.

Serapião - Há! eu acho que Cálculo é uma disciplina muito importante e básica, porque eu acho que engloba quase tudo de Matemática. Quando cheguei no curso de Matemática, percebi que todos os meus conhecimentos de Matemática são necessários para estudar Cálculo. Gostaria que o curso de Cálculo tivesse mais aplicações. Em relação a formação do futuro professor, eu acho que o professor que conhece os conteúdos de Cálculo, se sente mais seguro para dar aula no Ensino Médio. Por exemplo, no Ensino Médio, vértice você acha de um jeito absurdo, No Cálculo, você vai lá e deriva e iguala a zero é muito fácil! Então eu acho que dá mais segurança para o professor.

Frederico - Cálculo é fundamental. É uma base para outras disciplinas, possui ferramentas como limites, derivadas e integral que eu sei que a gente ainda vai usar muito. Para o futuro professor, ela é importante, com certeza.

Suka - Para essa pergunta, a estudante não soube dar uma resposta.

Agáta - Cálculo é muito importante sim, qualquer curso de exatas que você for fazer tem essa disciplina, eu acho que ela é básica. Para o futuro professor que vai ensinar no Ensino Médio, eu não vejo muita aplicação.

Lara - É importante, pois é básica para outras disciplinas. Para o futuro professor é importante, pois vai lhe permitir obter um maior conhecimento, saber de onde surgiu as coisas (ela se refere a alguns conceitos de Matemática) que ele vai ensinar, se aprofundar mais no conhecimento.

4.6.2. Síntese Interpretativa do 2º. Bloco: comentários dos estudantes

No segundo bloco, a importância do Cálculo Diferencial e Integral I para a formação do futuro professor foi relacionada a uma disciplina básica, a qual possibilita a obtenção de novos conhecimentos. Entre esses, foi apontado pelos estudantes, a exploração das representações gráficas de uma função, embora sintam falta de mais aplicações ao longo do curso.

O CDI I também foi apontado pelos estudantes como um pré-requisito, que auxilia na compreensão dos conteúdos abordados nas demais disciplinas estudadas em um curso de Matemática. Porém, grande parte dos estudantes não vê ligação do que se é ensinado em Cálculo I, com o que se ensina em Nível Médio e Fundamental, entretanto, percebem que os conteúdos abordados em Cálculo I abrangem tudo o que foi estudado anteriormente, possibilitando ao aluno ou futuro professor de Matemática, uma visão mais ampla, mais geral dos conteúdos contemplados em nível médio e fundamental, o que na concepção dos estudantes, um conhecimento mais profundo para ensinar com mais segurança.

Abrindo o **terceiro bloco** de perguntas, me dirigi aos estudantes (em momentos diferenciados) e indaguei sobre **as representações Matemáticas (algébrica, geométricas, gráficas, etc.), se a coordenação entre essas (na abordagem dos conteúdos matemáticos), auxiliam na compreensão dos conceitos**. Em um caso particular, na apreensão dos conceitos de **Cálculo I**. As respostas, em sua maioria, foram positivas, como pode ser observado de acordo as respostas abaixo;

Rosana - Eu acho importante usar várias representações Matemáticas, porque tem bastante gente que tem dificuldade em visualizar a solução de um problema de um jeito, mas consegue visualizar de outro. Então quando vai pro computador, consegue visualizar melhor ainda, o que está fazendo.

Any - Eu acho muito importante, porque às vezes de uma forma a gente não enxerga direito, mas se o professor mostrar aquela função na forma de um gráfico, uma coisa mais visual, podemos passar a entender melhor. Então eu acho muito importante mostrar várias formas de fazer, porque o aluno se dá bem com uma, mas isso não garante que todos entendam, entendeu? Eu acho muito importante o professor usar várias representações, principalmente, recursos visuais, gráficos, diagramas. Eu acho muito importante pra compreensão sim.

Augusto - Primeiro, eu acho que a aula fica mais dinâmica, mais atraente, porque, às vezes, o aluno não se interessa por uma forma de resolver o assunto, mas se atrai, pela outra. E uma forma complementa a outra. Uma forma de representar, por mais excelente que seja, não vai ser melhor ou pior do que a outra. Vai complementar a outra forma de representação.

José - Usar várias representações, é perfeito. Pois, nos permite ver uma função, de várias formas, algebricamente, em paralelo à forma gráfica. No meu entender a compreensão é quase total. Ajuda muito.

Clotilde - Eu acho interessante que o professor explique a resolução de um problema usando várias formas de representar, porque, por exemplo, tem aluno que tem mais facilidade em enxergar as coisas no gráfico, tem aluno que já vê o teorema e pega todo o conteúdo. Mas eu acho importante trabalhar com variados tipos de representações, porque um aluno não é igual ao outro não é? Logo aprende diferente e aprende com a representação que tiver mais facilidade de entendimento.

Letícia - Eu acho que o uso das representações ajuda muito, principalmente, a representação gráfica. Apesar de que, em Cálculo não uso muito, pois calculo mais algebricamente. Mas acho bem interessante. Pois a gente consegue enxergar melhor, (os conceitos matemáticos) que a professora mostra na lousa, principalmente as demonstrações dos teoremas. Através de um gráfico, a compreensão é mais rápida.

Márcio - Eu acho que toda iniciação é válida.

Ana Paula - Eu acho que ajuda bastante, porque, por meio da representação gráfica, nós podemos visualizar como é que vai ficar a função que está sendo representada algebricamente. Portanto, é importante o aluno saber o que está fazendo. Saber jogar no gráfico e usar essas visualizações.

Marcela - Conforme, a professora coloca um desenho na lousa - um gráfico pra explicar o aquela representação algébrica, com certeza “vai dar uma luz” para o aluno entender melhor o assunto. Há! era isso que eu tinha que fazer? E então ele vai para a parte algébrica o que acaba ficando um pouquinho mais fácil. É importante o aluno saber o que está fazendo, aonde quer chegar. Pelo desenho é mais fácil.

Gabrielle - Há! Eu acho legal, pois no Ensino Médio ou você faz uma coisa ou faz outra. Aqui, na universidade a gente tem mais possibilidade de usar várias representações, acho que dá um esclarecimento maior pra gente, no momento em que estamos estudando a disciplina Cálculo.

Laura - Olha eu acho interessante, porque em Matemática, ela tem toda uma parte prática também muita teoria. E os gráficos, meio que ilustram o que a gente está vendo e fazendo na resolução de um problema não é? Ajuda a entender a teoria (a estudante refere-se às demonstrações)

Henrique - Eu acho que, se o professor usar várias representações Matemáticas para explicar os conteúdos matemáticos, ajuda o aluno, visualizar melhor o que está sendo feito. Ajuda. mas, o mais importante é entender a parte algébrica, pois, nem sempre vamos ter a ferramenta gráfica. Se a gente for trabalhar numa função com muitas variáveis, é difícil esboçar o gráfico dessa função, podemos até dizer que é impossível. Então é importante a parte algébrica.

Clara - Eu acho super importante, porque você vê as várias maneiras de estar resolvendo o problema, seja algebricamente ou graficamente, neste ultimo caso, você não consegue provar, mas se orientar. Mas, algebricamente nós podemos provar aquilo que vemos graficamente.

Alexandre - Além de ajudar muito, acho que é essencial. Porque as aulas que eu assisti na escola pública, os professores podem não ser, mais bem capacitados, por motivo de não saber usar melhor algumas representações Matemáticas. Mas, eles têm muita prática de ensino. Lá no Ensino Médio, a gente começa aprendendo funções, no primeiro ano, é por tabelinhas mesmo. Há! se substituir x aqui, vai ter um pontinho aqui. E assim monta o gráfico. Assim, é importante o aluno conhecer o gráfico, bem como saber analisar esse gráfico. O professor deve mostrar o que aconteceu no gráfico pro aluno, dizendo: olha gente, nós analisamos isso, esse pedaço aqui, essa inclinação, essa curva. Porque às vezes o aluno resolve uma equação do segundo grau e acha as raízes, então diz: nossa! o que são esses dois números? Muitas vezes ele faz o cálculo e nem sabe o que é, se aquilo é uma parábola, sabe? Então eu acho o gráfico essencial e deve ser explorado no curso inteiro, desde que você ensine das mais primitivas funções até as mais complexas funções. Eu acho que gráfico é um jeito de mostrar pro aluno, uma função de outra maneira. Torna-se mais nítido pro aluno. Ele enxerga melhor. Quer ver, quando a gente calcula um limite, por exemplo, Há! o limite da função, indo pra alguma coisa, vai pro infinito. Mas, como assim vai pro infinito? Mas, se o professor mostrar no gráfico o que está acontecendo com a função, ele vai entender na hora. Ha! agora eu sei, porque vai pro infinito. Ou seja, no gráfico, ele consegue perceber bem melhor do que você mostrando só algebricamente.

Patrícia - Eu acho que ajuda demais no entendimento do assunto, ou um conceito qualquer. Por exemplo, o professor está falando de uma teoria lá, vamos fazer um “deseinho” aqui, pra tentar entender, acho muito importante a exploração de várias representações, pois ajuda a compreender o conteúdo sim.

Robin - Eu acho importante o professor usar todos os recursos, para poder explicar alguma coisa. Se precisar usar um gráfico, usar um gráfico, se precisar usar uma

tabela, usar uma tabela. Então, quanto mais fazer isso é melhor pra mostrar a aplicação de uma função e, não só analiticamente, usar também o desenho para falar que aquilo é verdade. Usar o gráfico pra mostrar que corresponde ao cálculo algébrico. Então isso é muito importante. Eu pessoalmente tenho mais facilidade de trabalhar com gráfico, do que algebricamente.

Serapião - Eu acho importante explorar várias representações Matemáticas, porque, alguns alunos, eles não conseguem ver a parte algébrica, outros já tem facilidade, outros não conseguem ver a parte geométrica. Um aluno é diferente do outro. Então por isso eu acho interessante usar várias formas de representar.

Frederico - Tem horas que você não vai ter a forma gráfica, seja lá o que você estiver estudando. Mas, se você tem auxilia bastante. Bastante mesmo.

Suka - Eu acho bom o professor usar várias representações Matemáticas para explicar os conteúdos matemáticos, porque, o aluno tem uma visão mais geral, não fica limitado, usar mais de uma representação, possibilita trabalhar com aplicações, dá para visualizar. No Ensino Médio, o professor não explorava muito a representação gráfica, pois o aluno tinha muito interesse. Eu venho de uma escola pública e como Matemática é uma matéria que os alunos não gostam muito, a professora não se sentia muito animada em aprofundar os assuntos.

Agáta - Eu acho importante, até porque o professor, em sala de aula, usa somente a lousa, e acaba não explorando muito a forma gráfica. No Winplot, mostrado por você, teve muita coisa que passou a fazer sentido para mim.

Lara - Olha ajuda muito e muda muito o a forma de pensar. Pois, às vezes a gente está perdido, aí o professor mostra o gráfico, Nossa! centraliza não é? O aluno “se acha”.

4.6.3. Síntese Interpretativa do 3º. Bloco: Comentários dos Estudantes

Assim como os professores, os estudantes fazem explicitamente associações das representações gráficas **ao processo de visualização dos conceitos**, quando esses são apresentados **na forma escrita e algébrica**. Sob esse aspecto, os estudantes, em grande parte, esclareceram que quando o professor, na abordagem dos conteúdos, utiliza **várias representações Matemáticas**, estão fornecendo elementos variados para o entendimento dos alunos em referência á apreensão dos conceitos matemáticos, em particular os conceitos de Cálculo I. Na concepção da maioria dos estudantes, essa abordagem é importante, principalmente por que cada aluno tem **uma forma diferenciada em termos de compreensão**.

Prosseguindo com as perguntas, ainda no **terceiro bloco**, questionei sobre **o uso do computador, como um recurso para aprender os conteúdos matemáticos e, se já haviam utilizado algum software em sala de aula, seja no colegial ou universidade**. A resposta para esse último questionamento foi que a maioria usou muito pouco. Na universidade (UNESP) conheceram o software Maple e o Cabri, os professores de Cálculo I e Geometria Analítica (respectivamente) levaram os alunos, uma vez, durante o primeiro semestre de 2007, para visualizarem alguns gráficos. No Ensino fundamental e Médio, o uso foi quase

inexistente, apenas um ou dois tiveram a oportunidade de trabalhar com softwares no colegial, mas em outras disciplinas, Não, em Matemática.

Em nossa pesquisa, durante a coleta de dados, a adaptação dos estudantes em relação ao software **Winplot** foi bastante favorável. Comentários apresentados pelos estudantes mostram que na resolução dos problemas o **Winplot** possibilitou **um maior entendimento ao coordenar às representações algébrica, gráficas e geométricas na exploração e resolução das atividades exploratório-investigativas**. Vejamos abaixo concepções particulares dos estudantes sobre o uso do computador em nível didático-pedagógico para as aulas de Matemática, em particular para o ensino do **Cálculo I**.

Rosana - É muito importante, é bom para quem não tem visualização. Enxergar o que a gente faz na teoria. Às vezes fazemos o Cálculo mecanicamente, e não sabemos porque de estarmos derivando.

Any - Eu acho interessante, principalmente para desenhar gráfico. Eu acho muito interessante.

Augusto - Eu acho que auxilia, só que o usuário tem que tomar um certo cuidado, para não cair no comodismo. O usuário já tem que ter um conhecimento e noção dos conceitos, o que é tal coisa. Mas, auxilia muito, porque, por exemplo, se a gente vai verificar as retas secantes de um gráfico de uma função? se fosse na mão, dar valores para ver a variação da inclinação iria demorar muito. Já no computador, ele faz espontaneamente. Então se a pessoa já tem a noção do assunto, o computador ele agiliza um processo que manualmente demoraria muito.

José - Há! Eu acho muito bom, principalmente a parte gráfica. São revoluções que você faz no gráfico, movimenta, coisa que no papel ou na lousa é impossível. Já usei o computador a qui na UNESP, No início da aula de Cálculo, a gente foi, montou uma função. Estudou os detalhes. Também já usei o computador no Ensino Médio. Mas não para Matemática.

Clotilde - Olha! Na parte gráfica eu acho importante, mas na parte algébrica, nem tanto, pois o aluno não ficaria muito interessado. Mas a parte gráfica deveria ser explorado mais, pois quase não usam o computador para Matemática mesmo.

Letícia - Há! Uma maravilha, agora que eu aprendi a mexer no Winplot e estou usando em casa. Às vezes a gente estudando uma função, demora pra enxergar a cara daquela função, principalmente quando é x^6 . x^7 e a gente vai derivando. A gente não sabe como é a “carinha” daquela função. Então a gente põe ali, no computador e vai vendo, vai “mexendo”, movimentando, olhando pra onde ela vai. Então acha o limite, vai calculando as derivadas. O aluno passa tem uma noção maior, eu acho. Seria uma maravilha poder trabalhar com ele (o Winplot) mais tempo.

Márcio - Eu acho super válido, porque, podemos aprender com mais facilidade e também pra ensinar os outros, no caso de querer seguir a carreira de professor.

Ana Paula - É importante, dependendo do programas a ser utilizado, É importante o aluno ver essa parte de gráficos. Eu já usei no colegial, na minha escola (pública), tinha um laboratório. Mas não foi a professora de Matemática.

Marcela - Há! Muito interessante. Eu gostei muito do Winplot, principalmente para construir gráficos. Na Escola a diretora não deixava os alunos usarem, pois a diretora tinha medo que os alunos quebrasse. Então não tive acesso. Aqui na faculdade usei apenas duas vezes, em Geometria e... a outra disciplina, eu não lembro mais.

Gabrielle - Aqui na Faculdade a professora de Cálculo I levou a gente, logo no início da aula pra usar o Maple. Acho legal, porque ajuda a gente desenvolver a

noção das coisas não é? Principalmente, quando tem animação, ver o comportamento que podem assumir os gráficos das funções.

Laura - É mais ou menos aquilo, que eu falei do gráfico, como na Matemática a gente sabe bem pouco da teoria, o computador ajuda bastante a gente. Eu vejo bem agora que a gente está estudando na sua pesquisa.

Henrique - Gostei muito do Winplot, é bom, porque é mais fácil, mais rápido, no sentido de visualizar os conceitos.

Clara - Eu acho que enxerga melhor, pois na lousa o que o professor faz é apenas um rascunho do que a gente está vendo. O computador revela aquilo que realmente é, o que foi visto no papel ou na lousa.

Alexandre - Eu acho fantástico, que o professor ensine usando o computador. O computador é uma ferramenta. A Matemática é uma ferramenta para o computador, tudo o que o computador faz, é por meio da Matemática. A linguagem do computador é um código binário, não é? E como eu vi nas representações gráficas que são extremamente importantes pra mim. O computador mostra isso como ninguém. É fantástico vê o gráfico, mexendo devagarzinho, Então você diz. Há! Quando eu altero o coeficiente do "x", o gráfico faz isso. Há! Quando eu altero o "b" da função, o gráfico faz aquilo. O mais triste ver é que muitas escolas e até faculdades não tem equipamento suficiente, pra poder dar isso pros alunos. Se todo mundo pudesse ter acesso, a Matemática poderia ser diferente. A Matemática poderia até não ser encarada como uma matéria difícil. A Matemática não é difícil, ela exige desempenho. Não é incompreensível. Se você realmente estudar, e praticar, você vai conseguir. Não precisa ser nenhum gênio para entender Matemática.

Patrícia - Olha! Eu nunca usei nenhum software em sala de aula não. Mas, eu acho que as escolas deveriam dar aula de Matemática usando o computador. Pois todo mundo que aprendeu geometria usando o computador tem hoje a maior facilidade na disciplina. E mesmo usando agora esse programa com você, às vezes quando a professora fala: quando o x está se aproximando, o limite está indo. Nossa! eu não estou enxergando pra onde esse limite está indo. Daí, usando o programa, como naquele dia que você mostrou, deu pra entender direitinho.

Robin - Eu acho que é importante. Só que no computador o aluno, fica na internet. Então o professor tem que ter autoridade na classe, se não tiver não dá. Se tiver autoridade e o pessoal respeitar mesmo, ele pode dar uma aula excepcional, usando o auxílio do computador para muitas matérias com assuntos da Matemática. Eu estudei em uma escola particular e eu nunca usei nenhum software para estudar Matemática. Também, a professora não vai levar no laboratório e dizer isso é um gráfico, se é pra isso ela vai na lousa e mostra do mesmo jeito. Faz conta, conta, é sempre assim. Isso é difícil de mudar, mas acaba ficando assim.

Serapião - Eu acho muito interessante, porque, é que nem uma demonstração por outras formas. Pensando assim, tem determinados resultados que para algumas pessoas não é interessante, mas aí quando vê no computador, passa a ficar interessante.

Frederico - Gostei do Winplot, é uma ótima ferramenta, faz tudo pra gente. Trabalha rápido, visualiza, auxilia nos erros.

Suka - É um algo a mais não é? Uma coisa diferente pra ver também.

Agáta - Eu acho legal, até porque, foi a coisa mais prática durante todo o curso que eu vi até agora (a estudante refere-se ao uso do Winplot). Na sala de aula, nós não tiramos o olho da lousa, então é um diferencial também, eu acho.

Lara - Olha é muito legal (referindo-se ao Winplot), pois o gráfico ajuda muito na visualização. Mesmo porque você usa a derivada e não sabe para o que serve, na pesquisa deu pra fazer algumas aplicações, foi muito legal.



Como já mencionado, **no último bloco de perguntas**, busquei captar **características pessoais dos estudantes á respeito de como cada um fazia para estudar a disciplina Cálculo I**. Se estudavam em grupo ou individualmente, como estudavam a disciplina, ou seja, se liam antes a teoria e faziam exercícios, se usavam notas de aulas, entre outros. No final perguntei de 1 a 10 qual nota dariam para o seu conhecimento matemático e o que motivou o estudante a participar da pesquisa.

As respostas foram bem diversificadas; **quanto a forma de estudar**, percebi que poucos usavam as notas de aula, a maioria utilizava os livros didáticos. Uma grande parte dos estudantes afirmou que lia antes a teoria e então passava à resolução dos exercícios. Em respeito a estudar individualmente ou em grupo, a maioria prefere estudar individualmente e, em caso de dúvida procura os colegas ou a professora. **Quanto à avaliação pessoal de cada um**, os números apresentados entre 1 e 10 eram interpretados de forma particular, por exemplo, para alguns sete é pouco, enquanto que para outros é uma nota excepcionalmente alta. Houveram alguns poucos, que se avaliaram com nota 2, outros com 5, 6 e 7, não houve uma avaliação acima de 8. Os alunos ao se avaliarem entendem que ainda há muito o que aprender, que há pela frente uma grande caminhada a ser percorrida.

Quanto ao **motivo para participarem da pesquisa**, transcorreu entre entender melhor os conceitos de Cálculo I, curiosidade em conhecer o software **Winplot** e colaborar com essa pesquisadora em seu trabalho de pesquisa.





Capítulo 5

Metodologia da Pesquisa - Parte 2 Descrição das Atividades Exploratório- Investigativas e Análise dos Dados



Capítulo 5 - Metodologia da Pesquisa - Parte 2

Descrição das Atividades Exploratório-Investigativas e Análise dos Dados

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza Matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). [...] Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, apud PONTE et al., 2005, p.19).

5.1. Metodologia Junto aos Sujeitos Pesquisados: Investigação Matemática em Sala de Aula

Antes de descrevermos e analisarmos as atividades propostas em nossa coleta de dados junto aos estudantes, sujeitos da pesquisa, faz-se necessário uma introdução à abordagem metodológica da Investigação Matemática, cujo tema é principalmente referenciado por João Pedro da Ponte et al. (2005). Vale ressaltar que a nossa escolha por essa abordagem como um procedimento metodológico para a aplicação e desenvolvimento das atividades, vincula-se ao fato de que as Investigações Matemáticas caracterizam-se em uma proposta desafiadora e instigante no que se refere à dinâmica metodológica no processo de ensino da Matemática, envolvendo conceitos, e mobilidade entre as representações matemáticas.

Segundo Ponte et al. (2005), em uma investigação se parte de uma questão que inicialmente é preciso compreendê-la e interpretá-la. Essa fase inicial é de grande importância, embora sendo curta, é decididamente crítica, pois é nesse momento que o professor deve garantir que todos os alunos entendam o que lhes é proposto.

Assegurado o momento inicial em relação à compreensão dos alunos acerca da atividade, o professor poderá passar a ser um observador atento, o que não quer dizer que não possa intervir quando isso se fizer necessário, portanto, é importante procurar entender como o trabalho dos alunos vai se desenvolvendo. Um aspecto relevante relaciona-se com a exploração e formulação de questões, formulação de conjecturas, a justificação dessas conjecturas e avaliação do trabalho. Conforme Ponte et al. (2005), nessa fase, os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

No ensino tradicional, não é muito comum em sala de aula haver uma discussão sobre determinado tema matemático, o que ocorre é que, na maioria das vezes, o professor é o ator





principal onde expõem as suas idéias e concepções, determinando no grupo o que deve ou não ser discutido ou estudado.

Assim, a abordagem metodológica da investigação Matemática propicia ao aluno e ao professor a oportunidade de criarem um contexto com uma interação maior. Os alunos podem colocar em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, e o professor pode assumir o papel de moderador desse confronto. Este também pode ser um momento crítico para o professor, pois é nessa hora que o mesmo deve aproveitar para explorar as potencialidades do trabalho investigativo visando realizar aulas de discussão produtivas.

Entendemos, portanto, que o professor tem um papel fundamental no planejamento das atividades de investigação em sala de aula, participando também no processo de delineamento dos objetivos, metodologias e estratégias, reformulando-os de acordo com a realidade do contexto, o qual está inserido.

Deste modo, não é difícil perceber que, o futuro professor de Matemática que tem em sua formação inicial, a possibilidade de experienciar e conhecer novos métodos tais como a investigação, o uso da tecnologia disponível e relevante ao ensino, formas distintas de representar os conceitos matemáticos, tenha mais possibilidade em romper com os modelos padronizados, permitindo aos mesmos explorar e ampliar a sua capacidade de compreensão e de reflexão sobre a Matemática enquanto objeto de aprendizagem e ensino.

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes da investigação. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem (PONTE et.al, 2005, p.23).

Diante de tais benefícios, nos perguntamos por que a metodologia proposta pela investigação Matemática não tem um lugar de destaque na formação do futuro professor? Pois o que vemos, considerando a nossa experiência em sala de aula é que, na maioria das vezes são explorados métodos retrógrados, pautados em modelos tradicionais de ensino o que muitas vezes, tornam-se até prejudiciais à aprendizagem desse estudante/professor no sentido de não permitir aos mesmos a chance de desenvolver um espírito investigativo.

Temos consciência que na prática nem sempre é fácil, leva tempo, pois há de se considerar o currículo, entre outros impasses. Nesse sentido, Ponte et al (2005) chama a atenção para o fato, de que para a realização de uma investigação, muitas vezes, há a necessidade de se levar conta uma ligação estreita com os temas do currículo, o que facilitará





maior interação e consolidação dos conceitos matemáticos estudados em sala de aula.

Ora, o tempo é um fator que todo o professor tem que ponderar na sua prática, exigindo a tomada de decisões. [...] A realização de uma investigação requer certo tempo, mas o que se gasta nas primeiras experiências e nas primeiras ocasiões que se procura discutir os resultados obtidos, pode ser recuperado mais tarde. [...] Além disso, o trabalho efetuado no âmbito de uma investigação, em torno de determinado conteúdo matemático, pode revelar-se de tal forma produtivo que o professor já não vê a necessidade de voltar a trabalhá-lo, ganhando assim tempo para dedicar a outro assunto (PONTE, 2005, p.141).

Acreditamos, portanto, na possibilidade de futuros professores terem ciência e experienciar essa metodologia, sob a perspectiva de desenvolverem em sua prática, a possibilidade de ensinar Matemática de forma mais expressiva, proporcionando uma maior relevância a aspectos da atividade Matemática tais como: formulação e resolução de problemas abertos, argumentação e crítica de resultados, entre outros. Por conseguinte, entendemos ser bastante viável, explorar essa abordagem metodológica em nível universitário, associada à mobilidade de várias representações matemáticas, considerando o fato de que a realização de investigações Matemáticas, pelo futuro professor, possui a função de contribuir de maneira significativa para a sua aprendizagem, possibilitando ao mesmo desenvolver uma atitude de descoberta em relação à disciplina Matemática e em relação à sua prática, pois ao envolver-se nessa experiência, poderão obter conhecimentos que possam futuramente vir a ser desenvolvidos com os seus futuros alunos.

Nessa perspectiva; alguns autores, Ball, (1990), (OLIVEIRA, 1998, apud OLIVEIRA et.al, 1998), Castro (2004) têm sublinhado a importância das experiências Matemáticas vividas pelos professores como fator decisivo no tipo de ensino que desenvolvem. Além do que a investigação emerge como um poderoso elemento na constituição do conhecimento do futuro professor de Matemática.



5.2. As Atividades Exploratório-Investigativas

Segundo Silva, Miskulin e Escher (2006), as atividades exploratório-investigativas são concebidas como;

Atividades ou problemas nos quais os alunos envolvem-se em processo de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema. [...] A mediação do professor no desenvolvimento da aula será de fundamental importância na constituição da característica exploratório-investigativa de uma atividade ou um problema de Matemática. O professor ao mediar o processo educativo por meio de atividades exploratório-investigativas cria situações desafiantes, através dos recortes dessas atividades em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes da atividade ou problema principal, olhando-o e percebendo-o sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhes a busca de novos caminhos e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-os, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento matemático. (p. 3).

Nessa perspectiva, a proposta **das atividades exploratório-investigativas** em nossa pesquisa cumpre em trabalhar com questões de cunho aberto, objetivando explorar e coordenar às várias representações matemáticas por meio do software **Winplot**, sendo elas: gráficas algébricas e geométricas, dentro de um ponto de vista semiótico associado ao processo investigativo.

As atividades 1, 2, 3 e 4 desenvolvidas junto aos estudantes nesse trabalho de pesquisa e, intituladas respectivamente: **um ponto de continuidade, encontro da reta à curva, o caso do retângulo inscrito e a latinha de cerveja sobre outra perspectiva** (Figuras 4, 5, 6 e 7), foram aplicadas no Laboratório de Informática da UNESP de Rio Claro, envolvendo conteúdos da disciplina Cálculo I: Limites e Derivadas.

ATIVIDADE 1: “Um ponto de Continuidade”

Objetivos Gerais:

- ✓ Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);
- ✓ Analisar as representações Matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;
- ✓ Analisar o conhecimento matemático do aluno;
- ✓ Analisar a capacidade de generalização do aluno frente o desenvolvimento e investigação da atividade.
- ✓ Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo específico: perceber a compreensão do aluno em relação ao estudo de continuidade de uma função definida por partes em determinado ponto, para diferentes valores de k.

Problema: Considere a família de funções definida por $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Discutindo o problema:

- a) Discuta com o seu colega os dados do problema, por exemplo: se a função é contínua, em caso de descontinuidade, onde isso ocorre;
- b) desenhe a função $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ Observem o gráfico e respondam qual o limite da função, quando x tende a 1 para valores menores que 1 e para valores maiores que 1, a seguir verifiquem se existe o limite? E para k=-2, existe o limite de f quando x tende a 1? Justifiquem suas respostas;

Figura 4: Atividade 1

A **Atividade 1**, propunha explorar o conceito de Limite e Continuidade de uma função definida por partes, em um determinado ponto, para diferentes valores de k. Durante o processo de investigação, foi solicitado aos estudantes desenharem por meio do **Winplot** o gráfico da função, usando os comandos apropriados, incluindo o de animação, tendo em vista propiciar um contexto, no qual os estudantes poderiam iniciar um processo de compreensão envolvendo-se com os dados do problema proposto.

ATIVIDADE 2: “Encontro da Reta à Curva”

Objetivos Gerais:

Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);

Analisar as representações Matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;

Analisar o conhecimento matemático do aluno;

Analisar a capacidade de generalização do aluno frente ao desenvolvimento e a investigação da atividade.

Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo Específico: Trabalhar o conceito de derivada de uma função num dado ponto de modo a perceber na interpretação dos alunos a relevância das várias possibilidades de representações Matemáticas para resolução do problema.

Problema: Seja a função $f(x) = x^2$ e um ponto (x,y) do seu gráfico, discuta a relação da reta secante com a reta tangente ao gráfico no ponto $(1,1)$.

Explorando o Problema:

Use o **Winplot** para traçar a função $f(x) = x^2$ e o ponto $(1,1)$ pertencente ao gráfico de f .

Crie um ponto genérico pertencente a função f (localizado acima do ponto $(1,1)$).

Trace uma reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(1,1)$ e o ponto genérico pertencentes a f .

Descreva o que acontece com a reta secante quando o ponto x (genérico) se aproxima de $x = 1$, e a partir dos dados apresentados e do que foi observado escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.

A partir das informações obtidas levando em conta o ponto dado e a função $f(x)$ determine a equação da reta tangente no ponto $(1,1)$, a seguir use o **Winplot** para fazer a representação gráfica desta equação. Discuta com seu colega qual a relação existente entre f' e a equação da reta tangente no ponto $x=1$.

Figura 5: Atividade 2

A Atividade 2 propunha investigar o conceito de Derivada partindo da representação geométrica de uma reta secante ao gráfico da função $f(x) = x^2$, dado um ponto (x,y) do seu gráfico.

ATIVIDADE 3: “O Caso do retângulo inscrito”

Objetivos Gerais:

- ✓ Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);
- ✓ Analisar as representações matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;
- ✓ Analisar o conhecimento matemático do aluno;
- ✓ Analisar a capacidade de generalização do aluno frente o desenvolvimento e investigação da atividade.
- ✓ Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo Específico: investigar os diferentes tipos de representações matemáticas utilizadas pelo aluno, bem como o grau de conhecimento matemático no processo de interpretação, compreensão e visualização no desenvolvimento do problema.

Problema: Encontrar o retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semi-círculo de raio r .

Explorando o Problema:

- a) Apenas observando a figura através do **Winplot** é possível identificar qual dos retângulos tem a maior área? Justifique sua resposta.
- b) Supondo (x,y) o vértice (do retângulo inscrito) que está no primeiro quadrante (note que este ponto também pertence ao semi-círculo), e a partir desse dado, escreva de forma genérica a área do retângulo.
- c) Pensando na possibilidade de eliminar o y e usando o fato que (x,y) está sobre o círculo escreva a área do retângulo em função de x , ou seja, substitua y na fórmula da área pela equação do semi-círculo determinado acima (essa será a função modelo utilizada para a representação gráfica);
- d) Determinada a função encontre o seu domínio? Esse dado é importante para o desenvolvimento do problema? Justifique sua resposta.
- e) Usando o Winplot desenhe a imagem do gráfico da função $A(x)$ no mesmo eixo de coordenadas que foi feita a simulação do retângulo inscrito no semi-círculo. Para isso use a opção **equação → explícita** (digite no espaço indicado a função) Para dinamizar a função crie um ponto genérico clicando em **Equação → ponto (x, y)** , escreva para $x = a$ e para $y = a$ a representação algébrica da função A , substituindo a variável x pelo parâmetro a .
- f) Analisando as funções A e A' você poderia dizer;
 - f.1) Para as regiões onde A cresce, a área dos retângulos também tendem a crescer?
 - f.2) Os pontos no qual a função derivada A' se anula chamam-se pontos críticos. Nesse caso determine a derivada da função $A(x)$ e determine quais os zeros e o domínio da função derivada? Qual a relevância de se conhecer esses dados?
- g) A partir dos dados encontrados, e das observações realizadas a partir das imagens dos gráficos de A e A' você poderia chegar a alguma conclusão para resolução do problema?
- h) Você acha que visualizar o desenho do triângulo inscrito no semicírculo conjuntamente às representações gráficas e algébrica da função Área facilitou a sua compreensão do problema? Justifique sua resposta.

Figura 6: Atividade 3

A Atividade 3 propunha investigar um problema de otimização partindo da figura geométrica de um retângulo inscrito em um semicírculo e, através da coordenação entre várias representações matemáticas, conceber um modelo matemático do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r .

ATIVIDADE 4: “A latinha de cerveja sob outra perspectiva”

Problema: Determinar as dimensões de uma lata de refrigerantes de $111,5\pi \text{ cm}^3$ construída com a menor quantidade possível de metal.

Sugestão: Considere a possibilidade de visualizar a lata cilíndrica planificada, então procure descrever a área da tampa (e do fundo). E para determinar a área do lado da lata imagine o lado aberto para formar um retângulo e que a tampa e o fundo tenham sido retirados. Encontrada as respectivas áreas determine o custo do material para a confecção da embalagem.

Objetivo Específico: investigar um problema de otimização, introduzindo noções de geometria espacial envolvendo máximos e mínimos de funções por meio do software Winplot, visando explorar as representações algébricas, gráficas, e geométricas inerentes ao problema.

Investigando o problema.

- a) Para uma possível resolução do problema, considere os seguintes dados:
 - ✓ O preço do material usado para o fundo e a tampa da lata é 3 centavos por centímetro quadrado e o preço do material usado para a lata é 2 centavos por centímetro quadrados;
 - ✓ Seja r o raio da tampa e do fundo, h a altura e C o custo (em centavos) do material necessário para construir uma latinha;
- b) Expresse o custo do material necessário para construir uma latinha de cerveja em função do raio;
- c) Use o **Winplot** para fazer a representação gráfica da função $C(r)$;
- d) Calcule a derivada da função $C(r)$, a seguir, usando o **Winplot** esboce a imagem do gráfico de $C'(r)$ no mesmo sistema de coordenadas de $C(r)$;
- e) Para dinamizar os gráficos de $C(r)$ e $C'(r)$ crie um ponto genérico sobre cada função, faça um comentário sobre o que observa.
- f) No mesmo sistema de coordenadas que foram esboçados os gráficos de $C(r)$ e $C'(r)$, esboce o gráfico do **Volume** e da altura da latinha em função do raio.
- g) Como anteriormente, crie um ponto genérico r sobre as funções altura e volume de modo a observar o comportamento das funções em relação as funções $C(r)$ e $C'(r)$. Faça um comentário das suas observações.
- h) A partir dos cálculos e observações realizados determine as dimensões da latinha de cerveja de 350 cm^3 enunciada no problema;

Figura 7: Atividade 4

Atividade 4 propunha um problema, interagindo assuntos de Geometria Espacial e Cálculo Diferencial e Integral I. Nesta atividade a pesquisadora buscou investigar um problema de otimização por meio do software **Winplot**, visando explorar as representações algébricas, gráficas, e geométricas inerentes ao problema.

Para o registro dos comentários realizados pelos estudantes, na descrição dos dados coletados nas atividades exploratório-investigativas, como ocorrido nas entrevistas, vale enfatizar que foram utilizados codinomes (escolhidos pelos próprios participantes) a fim de resguardar a identidade dos sujeitos da pesquisa, bem como preservar a originalidade e legitimidade dos seus comentários. É importante esclarecer que as citações dos estudantes e da pesquisadora apresentadas no desenvolvimento das atividades exploratório-investigativas encontram-se descritas, detalhadamente, no **Anexo A** (vide **CD-ROM**), as quais foram reproduzidas a partir de transcrições literais e mantêm, conseqüentemente, possíveis erros de



português cometidos no decorrer da fala. Faz-se também, importante ressaltar as **notações** utilizadas nas transcrições que aparecem no corpo do trabalho tais como:

- ✓ Esclarecimento sobre as falas dos estudantes, gestos silenciosos, prolongados etc. aparecem em negrito entre parênteses ()
- ✓ Reticências indicam o pensamento ou reflexão dos estudantes
- ✓ Os gráficos aparecem para ilustrar o trabalho desenvolvido no **Winplot**

5.2.1. Desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas⁴⁶

Para a realização das quatro atividades no Laboratório de Informática da UNESP de Rio Claro, foi proposto aos estudantes, em um primeiro momento, que informassem seus horários disponíveis, com a intenção de dividir o grupo selecionado de vinte e sete alunos, em duas turmas, ficando assim definido: **Turma A** a noite com encontros toda terça-feira às 19:00 hs, e **Turma B**, pela manhã, com encontros toda quarta-feira às 10:00hs⁴⁷. É importante ressaltar, que dos vinte e sete estudantes que se inscreveram, vinte e um participaram das entrevistas, vinte e três na **Atividade 1**, vinte na **Atividade 2**, dezenove na **Atividade 3** e apenas seis na **Atividade 4** (a ausência dos estudantes neste último encontro foi devido ao feriado prolongado, sendo que a maioria deles residia em cidades circunvizinhas a Rio Claro).

Esquematizados os horários e as turmas, foi possível, então, iniciarmos efetivamente a aplicação e o desenvolvimento das atividades exploratório-investigativas, junto aos sujeitos da pesquisa. No decorrer da aplicação e desenvolvimento das atividades, em um primeiro momento, foi dedicado à familiarização do software **Winplot** e a apresentação das questões. Em um segundo momento foi realizado a exploração dos problemas apresentados nas atividades, com o intuito de organizar os dados, formular conjecturas, justificar e refinar essas conjecturas. Em um terceiro e último momento foi realizado um balanço dos resultados encontrados e da abordagem adotada.

Vale explicitar que durante a investigação dos problemas propostos nas atividades, a mobilidade entre as representações matemáticas foi generosamente explorada. Para tanto, foram utilizados os softwares **Winplot**, **Maple** (como recurso eventual)⁴⁸, **PLANILHA**⁴⁹,

⁴⁶ Mais detalhes no Anexo A (CD-ROM).

⁴⁷ Durante o processo da aplicação das atividades exploratório investigativas, houveram mudanças nos horários da Turma B, passando da quarta pela manhã para quinta-feira à noite no horário das 19:00 hs.

⁴⁸ O Maple foi utilizado como um recurso opcional, por já se encontrar instalado nos computadores do Laboratório, logo de comum acordo, foi determinado entre a pesquisadora e os estudantes o uso do referido software, caso os estudantes desejassem fazer uso desse recurso.

⁴⁹ Open Office do sistema operacional LINUX.





planilha de cálculo, bem como papel e lápis. Na utilização do software **Winplot** houveram algumas limitações devido ao sistema operacional **Linux**, instalado no Laboratório de Informática de Matemática do IGCE/Rio Claro. A saber, o **Winplot** foi concebido para rodar no sistema operacional Windows, mas, no laboratório utilizado para a efetivação dos trabalhos, foi feita uma “emulação”⁵⁰ na qual se tornou possível rodar o **Winplot**, com algumas restrições em termos de comandos. Cientes desse fato empenhamo-nos, portanto, ao trabalho de adaptar às atividades a essas limitações.

Além desse obstáculo, o qual foi perfeitamente contornável, houve problemas de ordem técnica, por exemplo, em alguns momentos de aplicação das atividades, o computador travava, e muitas vezes (quando o trabalho não salvo) se perdiam dados. Desta maneira, os estudantes tinham que reiniciar todo o processo. Problemas à parte, a aplicação e desenvolvimento das atividades orientadas pela pesquisadora, decorreram tranquilamente.

A posteriore, no Item 5.5., serão apresentadas descrições resumidas do que foi discutido e experienciado durante a aplicação e o desenvolvimento **das atividades exploratório-investigativas**. Após cada descrição será apresentada uma análise semiótica tendo como principal objeto de observação, as representações matemáticas e sua importância na constituição do conhecimento do futuro professor de Matemática. Ressaltamos que na elaboração desta análise serão escolhidos alguns excertos, retirados de uma descrição mais detalhada da aplicação e do desenvolvimento das atividades (Anexo A – CD-ROM). Além das entrevistas e observações realizadas ao longo da pesquisa.

A seguir faremos uma breve introdução sobre softwares livres contextualizando o uso do software Winplot, acreditando assim, tornar mais claro o entendimento do leitor à respeito da nossa escolha no uso dessa tecnologia e de sua relevância na coleta dos dados desta pesquisa.

⁵⁰ A reprodução de um sistema de computação por outro sistema através do uso de software e hardware que permite que o hardware execute programas escritos para o software.
<https://www2.rural.com.br/manual/ibm/9agloss.htm>.



5.3. No Laboratório: Softwares Livres como uma Opção para a Representação Matemática em uma Proposta Investigativa

O computador, usado como ferramenta, tem sido apresentado como sendo um instrumento muito útil na condução de Atividades Matemáticas. Incentiva a realização de um grande número de experiências permitindo a exploração de situações e assuntos não triviais (PONTE e MATOS, 1992/1996, p.120).

O uso do computador na educação é, sem dúvida alguma, imprescindível, pois possibilita aos professores, um melhor acesso a materiais didáticos e outras atividades. As TICs se tornam agentes efetivos para práticas educacionais tais como modelagem Matemática, resolução de problemas, investigação Matemática e trabalhos de projetos, enfim, metodologias de ensino que têm sido valorizadas na Educação Matemática. Nesse sentido, Borba e Penteadó (2005), vêem a modelagem como uma perspectiva pedagógica adequada para se trabalhar com investigações associadas ao uso do computador, nos quais são explorados problemas envolvendo modelagem, gráficos e tabelas.

Miskulin (2003) ressalta que, é importante esclarecer e propagar, entre os futuros professores e os professores em exercício, as diversas maneiras de utilizar a tecnologia na sala de aula como um recurso metodológico. Na resolução de problemas, por exemplo, essa tecnologia torna-se extremamente poderosa para o conhecimento matemático, nessa perspectiva Valente (2000)⁵¹ assinala que;

O aprendizado baseado na resolução de problemas ou na elaboração de projetos não é novo e, já tem sido amplamente explorada através dos meios tradicionais de ensino. O computador adiciona uma nova dimensão - o fato de o aprendiz ter que expressar a resolução do problema segundo uma linguagem de programação. Isso possibilita uma série de vantagens. Nesse sentido podem ser vistas como uma linguagem Matemática. Portanto quando um aluno representa a resolução de um problema segundo um programa de computador ele tem uma descrição formal, precisa desta resolução. [...] Com isto o aluno pode verificar suas idéias e conceitos (p.14).

A tecnologia e a infra-estrutura necessária para o emprego de computadores na educação, dependendo da solução adotada, podem se tornar inacessíveis, gerando mais um fator para a exclusão digital. Somente instituições com elevados recursos financeiros para investimentos nesta área poderiam oferecer aos seus alunos acesso à tecnologia, tão fundamental, nos dias de hoje.

O software livre, embora não seja uma solução universal, pode contribuir

⁵¹ Artigo disponível em< <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/separatas/Sep1.pdf> >



significativamente para a disseminação e uso, em larga escala, de soluções eficientes e de baixo custo para a educação. Embora a filosofia do movimento, free software, enfatize a questão da liberdade, cobrar por um determinado programa não seria incoerente com esta ideologia, pois na definição de software livre não consta nenhuma restrição quanto ao preço. Poder cobrar não se torna em tese um problema para as escolas públicas com seus raríssimos recursos financeiros, pois existem umas infinidades de softwares livres, sem ônus algum, que podem ser utilizados nas aulas de Matemática (e em outras áreas também)⁵².

Existem professores e pesquisadores que são contra o emprego de soluções baseadas em software livre para a Educação em geral, mas os casos de sucesso são numerosos e representam uma prova eloqüente de sua viabilidade⁵³, casos de sucesso são verídicos, mas um dado software utilizado em sala de aula pode, depois de algum tempo tornar-se enfadonho, da mesma forma que para muitos uma aula com uso intensivo de giz, ou outra baseada em discussão de textos, pode também não motivar. “Uma vez que essas tecnologias envolvem muitas vertentes e estão em permanente desenvolvimento, algumas escolhas devem ser feitas” (PONTE et al, 2003, p.161). Assim com a intenção de ressaltar a importância do uso de softwares educativos como um grande auxílio ao professor de Matemática, na sua prática diária apresentamos abaixo, de forma breve o ambiente computacional que usamos com mais empenho no desenvolvimento das atividades exploratório-investigativas.

5.3.1. Winplot⁵⁴.

Segundo Araújo (2006)⁵⁵, o **Winplot** é um excelente programa gráfico de domínio público inteiramente gratuito. Foi desenvolvido pelo professor Richard Parris ("Rick"), da **Philips Exeter Academy**, por volta de 1985. Escrito em linguagem computacional **C**, chamava-se **PLOT** e rodava no antigo **DOS**. Com o lançamento do **Windows 3.1**, o programa foi rebatizado de "**Winplot**". Embora, não se possa estabelecer comparações entre softwares de categorias diferentes, é importante ressaltar que o **Winplot** possui muitas vantagens: fácil de usar, capaz de representar diversos tipos de gráficos além de que é capaz de representar qualquer tipo de equação e, ainda pode ser armazenado em um disquete.

⁵² Disponível em: http://www.uol.com/aprendiz/n_colunas/g_piolla/id271001.htm, acesso 21 de setembro de 2005.

⁵³ Acesse <<http://intermega.com.br/matematicalivre>> para verificar relatos que verificam essa afirmação.

⁵⁴ O **Winplot** pode ser baixado em <http://math.exeter.edu/rparris>, inclusive na versão em português

⁵⁵ Gregos e troianos, disponível em: www.gregosetroianos.mat.br/





Muitos são os recursos desse programa, por exemplo, são várias as aplicações ao Cálculo para o estudo da Integral, Limites e Derivadas de funções, além é claro da representação de gráficos em 2D (Bidimensional) e 3D (Tridimensional), ideal para todos os níveis educacionais. É necessário ressaltar que a versão do **Winplot** está em português, sendo que este trabalho de tradução resultou da iniciativa e empenho de Professor Adelmo Ribeiro de Jesus⁵⁶ e com a participação nas versões mais recentes do Professor Carlos César de Araújo⁵⁷.

Diferentemente de outros softwares gratuitos, o **Winplot** se encontra em permanente evolução, sendo que a última versão foi apresentada em português, pelo professor Adelmo, neste último mês de Setembro de 2006, e os seus usuários podem contar com a assistência direta do seu criador, **Richard Parris**. Alguns pontos positivos na utilização desse software são destacados por Araújo (2006), são eles:

- Contribui para o desenvolvimento da capacidade de observação e do senso crítico;
- Possibilita a associação de idéias e contribui para evitar simples memorizações;
- Desperta o interesse do usuário, permitindo melhor aprendizagem, favorecendo a construção do conhecimento;
- Permite promover “animação” de gráficos a partir de parâmetros adotados, traça simultaneamente, gráfico de uma família de equações de curvas, considerando determinados parâmetros; Mas, algumas limitações são perceptíveis como não possuir a função “desfazer” para casos em que gráficos são apagados por engano.⁵⁸

Com todas essas vantagens, o **Winplot** pode ser utilizado no ensino de todos os tipos de funções e facilmente operado por alunos do ensino fundamental e médio. Aplicações nas mais diversas áreas da Matemática são possíveis, com uma surpreendente interatividade, como pudemos perceber em nossa pesquisa, na aplicação das atividades exploratório-investigativas, sendo que, os estudantes, frente ao **Winplot**, foram capazes de modificar coeficientes, deslocar funções utilizando cada comando sem grandes dificuldades.

As atividades apresentadas aos estudantes, para resolução dos problemas envolvendo a proposta do aporte teórico das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, só foram possíveis com o auxílio do computador, em nosso caso, por meio do **Winplot**. Nesse sentido, foi sugerido aos estudantes que explorassem simultaneamente o comportamento de várias funções na sua forma algébrica, gráfica, partindo de um modelo

⁵⁶ Contato no endereço: adelmo@ufba.br

⁵⁷ Contato no endereço: cca@gregosetroianos.mat.br

⁵⁸ www.diadematematica.com/professores/Novas_tecnologias.htm





geométrico. Deste modo (representações mediadas pelo Winplot), tornou-se viável a realização de um grande número de experiências, através das animações dos gráficos, bem como uma retroação em diversos tipos de representações, o que de certo modo possibilitou um produtivo diálogo entre os sujeitos pesquisados e a pesquisadora.

5.4. Análise dos Dados da Pesquisa

A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.205).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados “é um processo de busca e de organização sistemático de transcrição de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que possam ser agregados a esse processo” (p.205). Devemos enfatizar que na concepção particular da pesquisadora, essa fase da pesquisa é intimidante, levando-se em conta à própria inexperiência diante de tal empreendimento, mas ao mesmo tempo instigante, pois acima do “temor” existe o desejo de compreensão e aprofundamento acerca das informações encontradas durante a coleta dos dados.

Neste capítulo teremos a difícil tarefa de interpretar e tornar compreensível o objeto de investigação da pesquisa – as representações matemáticas. Para tanto, achamos necessário considerar os seguintes procedimentos metodológicos, que destacaremos por sub-panoramas, os quais se constituem em: entrevistas com os professores e estudantes (colaboradores e sujeitos da pesquisa), as atividades aplicadas, além das observações realizadas em sala de aula.

Gostaríamos de enfatizar que analisar os dados coletados da pesquisa significa “enxergarmos” o objeto investigado – representações matemáticas - sob múltiplas perspectivas, as quais estão implicitamente representadas pelo panorama da Figura 8. Tais dimensões, implícitas no panorama, vão nos fornecer elemento importante para compreendermos como o objeto pesquisado se revelou e se desenvolveu no decorrer da pesquisa. Assim, **os sub-panoramas ou dimensões** constituem-se em: **entrevistas com os professores e estudantes, as atividades exploratório-investigativas aplicadas e desenvolvidas**, além das **observações da pesquisadora, realizadas em sala de aula**.

Acreditamos, portanto, que no desenvolvimento deste trabalho investigativo um dos aspectos relevantes relaciona-se ao envolvimento da pesquisadora com os estudantes, sujeitos da pesquisa. Esse envolvimento só foi possível devido ao período de observação da





pesquisadora, em sala de aula de CDI e, principalmente, por meio das aplicações e desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, no Laboratório de Informática. Esse clima de amizade e confiabilidade foi essencial para procedermos a Análise dos Dados coletados.

A idéia de inter-relacionarmos esses quatro sub-panoramas (Figura 8), os quais estão intimamente vinculados às dimensões: representações matemáticas, softwares educativos, conhecimento do futuro professor de Matemática, ensino do CDI I, consiste em extrairmos dos seus aspectos gerais, dimensões que nos possibilitem realizarmos uma análise sobre os pontos de vista dos estudantes e professores de Matemática. Nesse processo, pretendemos associar os aspectos mais relevantes da análise, buscando assim delinear possíveis respostas à questão investigativa: **Quais são as contribuições das representações matemáticas, mediadas por softwares educativos, para o conhecimento do futuro professor de Matemática no ensino do Cálculo Diferencial e Integral I**





Figura 8: Os Procedimentos Metodológicos

5.4.1. Compreendendo e Analisando as Representações Matemáticas como um Signo: O Objeto de Investigação

Por que compreendermos as representações Matemáticas sob uma Perspectiva Semiótica? Delineando possíveis respostas a esta questão apresentamos fragmentos do nosso aporte teórico sobre **Semiótica** que nos ajudarão a compreendermos como as representações matemáticas se constituem como representações (signos) em relação a elas próprias, em relação aos objetos (conceitos matemáticos) e em relação ao interpretante (os estudantes, os professores e a pesquisadora). Nesse sentido, Santaella (2002), postula: “Em uma análise semiótica o contexto é revelador, é preciso auscultar os signos para entender o que eles têm a dizer” (p.30).



Fazendo menção a discussão elaborada no Capítulo 2, entendemos que o **signo** é uma representação de uma determinada coisa e que a mente humana só tem acesso ao mundo externo por meio das representações ou signos, acrescentando que os fenômenos que circundam o nosso mundo podem ser estudados a partir da Semiótica. Essa idéia advém da visão de Peirce (1839-1914)⁵⁹, filósofo, matemático - um gênio polivalente, que assumiu como princípio que tudo é signo, portanto, tudo pode ser analisado segundo os preceitos da Semiótica.

Sob esse aspecto, Buczynska-Garewicks (1978, apud Santaella, 2002) assinala que, “a teoria dos signos é capaz de explicar e interpretar todo o domínio da cognição humana [...] Além de ser uma **teoria do conhecimento**, a **Semiótica** também fornece as categorias para a análise da **cognição** já realizada. Com isso, ela também é uma **metodologia**” (p. XIII). Fortalecendo esta concepção Santaella (2002) acrescenta que, a Semiótica, constitui-se em uma vastíssima fundação para qualquer tipo de investigação ou pesquisa de qualquer espécie envolvendo a **representação** e os três aspectos que ela engloba; a **significação**, a **objetivação** e a **interpretação**.

Sabemos que a Semiótica pode ser compreendida a partir de três perspectivas inter-relacionadas: Gramática Especulativa, a qual estuda os tipos de signos; a Lógica Crítica, a qual estuda os diferentes raciocínios: Indução, Dedução e Abdução e a Metodêutica, a qual estuda os métodos indutivos, dedutivos e métodos abdutivos. No presente trabalho de pesquisa, em termos de proceder a análise, vamos nos restringir à Gramática Especulativa (como já enunciado no Capítulo 2), a qual possibilitará elementos teóricos da **Semiótica**, por meio da **tricotomia do signo – Primeiridade, Secundidade e Terceiridade**. Essa acepção nos remete ao signo e sua natureza triádica, sob a qual “há três pontos de vista: a) das qualidades, b) dos objetos e c) da mente” (PEIRCE, apud SANTAELLA, 2002, p.143). Assim, o signo pode ser analisado na relação do representamen - signo consigo mesmo, ou seja, no seu poder de significar. Na relação do signo (representamen) com seu objeto, ou seja, naquilo que o signo se refere ou representa e na relação do signo (representamen) com o interpretante, ou seja, nos tipos de interpretação que está apto a produzir e despertar no seu usuário, estabelecendo assim o **triângulo do modelo triádico**.

⁵⁹ Segundo Santaella (2002), Peirce dedicou-se às mais diversas áreas da ciência: Matemática, Física, Astronomia, Química, Lingüística, Psicologia, História, Lógica e Filosofia. Foram tantas as áreas devido ao fato de que seu talento o destinava para a lógica, mais propriamente a lógica da ciência. (p.1)





Nesse ponto⁶⁰, é importante ressaltar que a Semiótica tem como base a Fenomenologia, fato que possibilita a noção de signo ser tão geral, ou seja, um signo pode ser uma ação, uma emoção ou uma reação. Segundo Santaella (2002), “um signo é aquilo que dá corpo ao pensamento” (p.10), são externalizações traduzidas de imagens internas, sendo que “as classes de signos revelam que espécie um signo deve ser capaz de representar a espécie de objeto que ele representa” (PEIRCE, apud SANTAELLA, 2002, p. 11). Portanto, são propriedades que dão fundamento ao signo e estão inseridas umas nas outras e, na maior parte das vezes atuam simultaneamente. Cujas predominância de uma sobre as outras pode ser observada perante a análise do fenômeno. Nessa perspectiva, faz-se necessário explicitarmos os aspectos fundamentais para podermos compreender e analisar o nosso objeto de investigação – **representações matemáticas**. Assim, Santaella (2002) nos sugere três tipos de olhares, os quais se caracterizam em: **contemplativo, observacional e geral**.

O contemplativo caracteriza-se em um estado no qual desenvolvemos a capacidade de desvendar os nossos sentidos em busca de perceber as qualidades dos fenômenos, sem, contudo, interpretá-los. A “capacidade contemplativa corresponde à rara capacidade que tem o artista de ver as cores aparentes da natureza como elas realmente são sem substituí-las por nenhuma interpretação”. (PEIRCE apud SANTAELLA 2002, p. 30).

O observacional relaciona-se ao estado de entrar em ação com nossa habilidade perceptiva. “[...] trata-se de estar atento para a dimensão sin-signo do fenômeno, para o modo como sua singularidade se delineia no seu aqui e agora”.(SANTAELLA 2002, p.31). Nesse sentido, torna-se imprescindível estar atento às particularidades do fenômeno, delinear suas características, distinguindo partes do todo que o identificam, ou seja, “é necessário desenvolver considerações situacionais sobre o universo no qual o signo se manifesta e de qual é parte”. (FERREIRA, 1997, apud SANTAELLA, 2002, p. 31).

O geral relaciona-se ao terceiro olhar, o qual possibilita nos dirigirmos aos fenômenos, desenvolvendo efetivamente uma capacidade de generalização.

Considerando, portanto, **a relação do signo com o objeto imediato**, a **primeira forma de olhar** é a que analisa o aspecto qualitativo do signo. “Sob esse olhar o objeto imediato coincide com a qualidade de aparência do signo”. (SANTAELLA, 2002, p.34). O **segundo olhar** “é o que corresponde a existência do signo “como parte do universo a que o signo existencialmente pertence”. (SANTAELLA, 2002, p.34). O **terceiro olhar** constitui-se na propriedade da lei, sua generalidade, na compreensão do **objeto dinâmico**. Assim, analisar

⁶⁰ Como já enunciado no Capítulo 2





e compreender o **objeto imediato** implica diretamente na análise e na compreensão do **objeto dinâmico**, fato que torna difícil pensar nessas duas perspectivas do objeto de forma independente.

Quando interpretamos signos - aliás, algo que estamos fazendo continuamente, sem descanso -, nossas interpretações são intuitivas e não nos damos conta da complexidade das relações que estão implicadas nesse ato. [...] É por isso que a análise dos interpretantes deve estar alicerçada na leitura cuidadosa tanto dos aspectos envolvidos no fundamento do signo como nos aspectos envolvidos nas relações do signo com o objeto. (SANTAELLA, 2002, p.37)

5.5. Análise das Atividades Exploratório-Investigativas

Para a **análise das atividades**, tomaremos como base as categorias fenomenológicas do pensamento idealizadas por Peirce e sua relação com os signos. Nesse contexto, a análise semiótica das atividades terá como função perceber a relevância de inter-relacionar e coordenar as representações geométricas, gráficas e algébricas por meio dos softwares **Winplot**, **Maple** e **PLANILHA**, na resolução das atividades apresentadas. Para tanto, faremos uma análise entre o **ponto de vista qualitativo, singular** e o **convencional**. Segundo Santaella (2002), estes três pontos de vistas são fundamentais e complementares de maneira que; o aspecto **qualitativo** em nosso caso, o objeto de estudo (as representações matemáticas), será analisado em referência a sua imagem e forma, “esses aspectos são responsáveis pela primeira impressão que um objeto provoca no receptor [...] são responsáveis ainda pelas associações de idéias que a primeira impressão desperta” (SANTAELLA, 2002, p.70).

Sob o ponto de vista **singular**, as representações matemáticas serão analisadas como algo que existe em um espaço e universo determinados. Os traços da identidade do objeto matemático, suas particularidades, características e qualidades próprias que fazem parte da composição deste objeto. As referências ou indicativos passam a ser vistas em função de seu uso, emprego e aplicações. Sob o ponto de vista **convencional**, as representações matemáticas serão analisadas em sua multiplicidade na busca de compreender os tipos de convenções, generalizações e, em que medida o uso simultâneo de várias representações contribui na constituição do conhecimento do futuro professor de Matemática.

Além de discutirmos os três pontos de vistas acima mencionados, estaremos analisando o poder interpretativo das representações matemáticas e sua importância no processo de compreensão dos conceitos estudados para o estudante/futuro professor.





Entendemos, portanto que a análise semiótica, nos permite adentrarmos nas particularidades das representações matemáticas, o que nos dá possibilidade de compreender os aspectos implícitos às formas gráficas, geométricas, formas escritas ou algébricas e nas relações entre esses. Deste modo, cada representação matemática constitui-se efetivamente em um signo, pois pode ser analisada em si mesma, em suas propriedades internas, ou seja, em seus aspectos qualitativos, singulares e gerais. Pode também ser analisada em sua referenciabilidade, ou aplicações a um contexto matemático. Por fim pode ser analisada nos tipos de efeitos interpretativos que cada uma das representações matemáticas pode produzir em termos de aprendizagem para o estudante – futuro professor de Matemática.

Tendo esse panorama em vista, passemos agora efetivamente **a análise das Atividades**, sempre entrelaçando as possíveis inter-relações das dimensões implícitas aos sub-panoramas (Figura 8), além de buscarmos na literatura pesquisada aportes teóricos que possam validar tais inter-relações. Assim, vamos considerar nesta análise **excertos da descrição das Atividades Exploratório-Investigativas** e dos demais sub-panoramas sempre que possível, acrescentando qualitativamente os diálogos estabelecidos pela pesquisadora, os professores e os estudantes.

5.5.1. Atividade 1

A **Atividade 1 - “Um ponto de Continuidade”**, propunha como **objetivo específico** perceber a compreensão do aluno em relação ao estudo de continuidade de uma função definida por partes em determinado ponto, para diferentes valores de k. Sendo a função $f(x) =$

$$\begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

De início houve uma maior preocupação na utilização do software, mas, durante a aplicação e desenvolvimento da atividade esse impasse foi se diluindo ao longo do tempo.

Durante o processo de investigação, foi solicitado aos estudantes desenharem por meio do **Winplot** o gráfico da função, usando os comandos apropriados, incluindo o de **animação**, objetivando propiciar um contexto, no qual poderiam iniciar um processo de compreensão em relação aos conceitos matemáticos implícitos no problema.



Foi, então, proposto aos estudantes que olhassem a função:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \text{ sendo } k \text{ um valor real e que fizessem inferências sobre a}$$

Continuidade da mesma. Perante questionamentos apresentados pela pesquisadora, a maioria dos estudantes se posicionou dizendo que a função estudada era contínua, como podemos verificar reproduzindo suas argumentações:

Robin - Ah! ...eu acho que ela é contínua.

MA⁶¹ - por quê?

Robin- Ah!... porque não vai ter salto nenhum, hum.. porque já está restringindo né? O domínio dela.

MA - No intervalo dado na função? É isso?

Robin- isso

MA - E você Clotilde, o que você acha?

Clotilde - Eu acho que vai ser contínua a função, porque não tem salto e também a gente fez as contas pra ver se tinha algum problema na função, mas a gente não achou problema nenhum.

Nesse momento o grupo todo começou a questionar o valor de k , apresentado na função. Assim, um dos estudantes comentou:

Robin - A gente pensou, a gente pensou no k se ele for ou caso... Ele vai fazer isso daqui né? **(o Robin movimentava os braços indicando o movimento da função)**. Se o k for variando vai fazendo isso aqui com o gráfico **(indica com os braços a inclinação da parábola, no caso positivo)** e se for negativo vai fazendo isso **(novamente com os braços indica a inclinação da parábola, nesse caso negativo)**, mas não vai chegar passar pra cá porque é sempre pra lá.

Nessa fala, o estudante faz referência **ao domínio da função** para o qual o valor x está limitado. Para uma melhor compreensão reproduzimos abaixo o gráfico representando a fala do aluno.

⁶¹ Ma - codinome da pesquisadora.

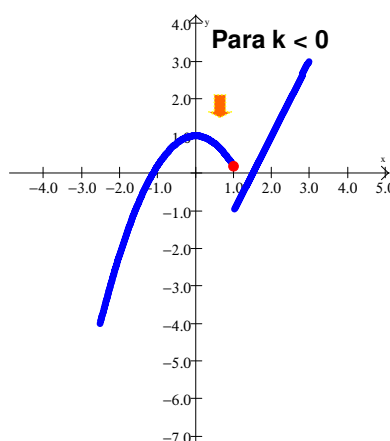


Figura 9: Variação da Função para $k < 0$

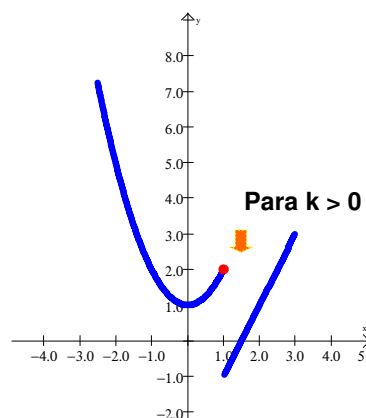
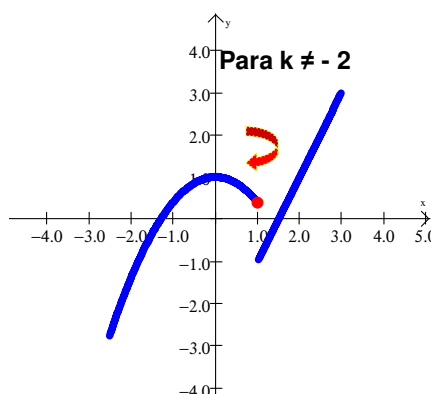
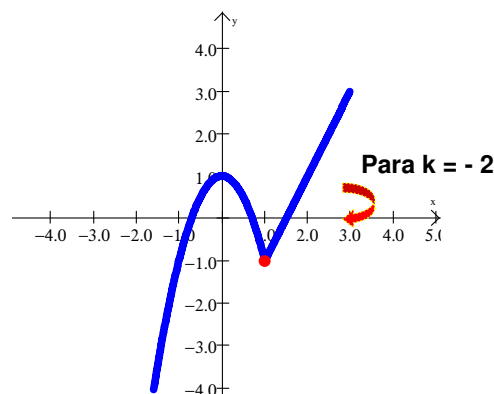


Figura 10: Variação da Função para $k > 0$

No momento em que começaram explorar o gráfico da função (Figuras 9 e 10) variando o valor do parâmetro k , os estudantes (embora estivesse explícita a quebra no gráfico) passaram a conjecturar entre si, demonstrando que já não se sentiam seguros ao afirmarem se a função era uma função contínua. Vale ressaltar que a maioria dos estudantes antes de visualizarem o gráfico, afirmaram que a função era contínua. Nesse momento a pesquisadora, resolveu investigar um pouco mais perguntando se eles lembravam das condições de Continuidade de uma Função. Os estudantes relembrando as aulas de Cálculo começaram a apresentar uma definição tal como: “a função deveria ser definida no ponto, deveria existir o limite para a direita e para a esquerda da função no ponto dado e esses limites deveriam ser iguais e, ainda, o valor do limite no ponto deveria ser igual ao valor da função no ponto”.

Percebendo, a relevância desse momento a pesquisadora solicitou aos estudantes que voltassem a olhar o gráfico no **Winplot** para identificar para qual valor de k a função tornava-se contínua. Entretanto, para a maioria a dúvida persistia. Foi então que a pesquisadora sugeriu que passassem a fazer uso do comando de **animação** do **Winplot** o que permitiu variar o valor do parâmetro k , possibilitando aos estudantes perceberem que apenas para k igual a -2 , a função f se tornava contínua (Figuras 11 e 12).

Figura 11: Variação (a) da Função para $k \neq -2$ Figura 12: Variação (a) da Função para $k = -2$

Ainda nesse processo de visualização, foi questionado aos estudantes se eles já poderiam determinar o limite da função, sendo $k = -2$, quando x tendia a 1 “pela esquerda”. Para esta pergunta, a maioria informou, com certa facilidade, que o Limite era igual a -1, por conseguinte, puderam perceber que quando x se aproximava de 1 “pela direita”, o Limite também existia e era igual a -1, Tendo em vista esses resultados para os limites laterais foi possível concluir baseados em propriedades estudadas sobre existência do limite de uma função em um dado ponto, que o limite da função existia correspondendo a -1.

Dando prosseguimento à investigação e considerando a exploração da representação gráfica da função f no **Winplot**, a pesquisadora propôs aos estudantes que discutissem uma outra forma representativa que justificassem os resultados visualizados no **Winplot**. Vejamos abaixo argumentações apresentadas por alguns dos estudantes:

Robin e Clotilde - f só será contínua se só se os limites laterais forem iguais. (realizados os cálculos, concluem): $\lim_{x \rightarrow 1} kx^2 + 1 = k + 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1$, temos

que $k + 1 = -1 \Rightarrow k = -2$. Substituindo k por -2 em f obtemos $\begin{cases} -2x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$,

neste caso a função será contínua, mas para $\forall k \in \mathbb{R}/k \neq -2$, $f(x)$ não será contínua.

Assim, para $k = -1$, por exemplo, $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - 3 = -1$, logo como os

limites bilaterais são diferentes. Assim, não existe o que implica na descontinuidade da função f .

Clara e Alexandre - Para que a função seja contínua é necessário que os limites laterais sejam iguais. Assim $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow 1} kx^2 + 1 = k + 1$ e

$\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1 \Rightarrow k = -2$. Portanto, a função é contínua apenas quando $k = -2$ e sua descontinuidade ocorre para $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Paulo - Para $k = -1$ não existe o limite, pois o limite existe quando seus limites laterais são iguais. Logo para $k = -1$, o limite à direita é -1 e pela esquerda é 0, quando x tende

a 1. Para $k=-2$, existe o limite, pois o limite à direita é -1 e pela esquerda é -1, quando x tende a 1.

Ao finalizar a atividade foi proposto aos estudantes, uma breve discussão sobre os conceitos discutidos e quais seriam as percepções deles ao explorar no **Winplot** a representação gráfica da função f em concomitância com uma exploração algébrica. Além disso, foi discutido se essa abordagem havia facilitado a compreensão deles para o desenvolvimento da atividade.

MA⁶² - Eu queria saber se por meio do Winplot, visualizando o gráfico de f e depois justificando algebricamente as interpretações adquiridas através do que foi visto na tela do computador, ajudou a clarear um pouco mais o que vocês já tinham visto em sala de aula;

Alexandre- Ajuda

Robin- ajudou

Robin- É.. a gente quer ver né? aquela imagem né? [...] então quando mostra como é que fica (**ele refere-se a imagem do gráfico**) e usando o software e vendo o gráfico é.. como se comporta, interessante que muitas vezes a gente não sabia nem como é o gráfico... dessa função. Porque eu olhei assim e não tinha muita idéia de como era o gráfico dela.

MA - Eu queria saber se vocês conseguiram enxergar o ponto de descontinuidade no gráfico .

Any - deu pra enxergar direitinho

MA - E a discussão que ocorreu aqui na investigação do problema, ajudou formalizar um pouco mais os conceitos?

Any - Ficou bem mais fácil

MA - Ótimo! E o Winplot? o que acharam?

Any - É legal, é bem gostoso de trabalhar, não é difícil.

MA - mais um comentário?... fala Augusto! (**Aqui eu incentivo ao estudante Augusto fazer algum comentário**)

Augusto - Bom, eu acredito que essa maneira de trabalhar auxilia bastante na aprendizagem dos alunos. eu vejo assim por mim mesmo que é mais fácil de compreender os assuntos teóricos vendo é... vendo dessa maneira como foi apresentado no Winplot.

MA - Ok. Alguém mais gostaria de fazer um outro comentário? (nesse momento eu insisti bastante)

Henrique - É legal o Winplot, porque ele é bem simples e bem versátil. Acho que você pode fazer "mil e uma nele" é uma aplicação bem legal do que você vê em sala de aula. Que é... você tendo uma visão geométrica do que você está fazendo auxilia pra "caramba" no entendimento né?

No processo de investigação da **Atividade 1**, pudemos perceber que trabalhando com as representações matemáticas (gráficas e algébricas) por meio do **Winplot**, possibilitou aos estudantes uma maior compreensão na resolução do problema. Alguns estudantes conseguiram delinear conclusões acertadas, mesmo sem a visualização do gráfico por meio do software, tendo apenas como referência a função na sua forma algébrica. Os estudantes

⁶² Em referência à pesquisadora

Augusto e Frederico perceberam de imediato que a função era contínua para $k = -2$, fato que puderam comprovar com seus comentários e registros realizados via papel e lápis.

Frederico e Henrique: f é contínua dependendo do valor de k (**realizado alguns cálculos, o estudantes comprovam suas conjecturas iniciais**);

$\lim_{x \rightarrow 1} kx^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3$, considerando que $kx^2 + 1$ se $x \leq 1$ e $2x - 3$ se $x > 1$. Logo

$$\lim_{x \rightarrow 1} [kx^2 + 1 - 2x - 3] = 0 \Rightarrow k = -2.$$

Portanto, a função f é contínua para $k = -2$, para os demais valores f é descontínua.

Por exemplo, para $k = -1$ $\lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 \Rightarrow 0 = -1$, ou seja, para $k = -1$, a

função é descontínua no ponto $(1, f(1))$. Enquanto que para $k = -2$

$\lim_{x \rightarrow 1} -2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 \Rightarrow -1 = -1$, ou seja, para $k = -2$, a função é contínua no

ponto $(1, f(1))$.

Esses alunos apresentaram algumas convenções pré-estabelecidas demonstrando conhecimentos interiorizados a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos. Outros estudantes, entretanto, só conseguiram abstrair visualizando o gráfico no Winplot e calculando os limites laterais da função. Nesse sentido, ressaltamos que, ao observarem a

função na sua forma algébrica, $\begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ os estudantes a identificaram como

contínua, mas ao mostrar-lhe o gráfico da função f , puderam perceber que a “quebra” no gráfico da função indicava descontinuidade no ponto $x = 1$, exceto para o valor $k = -2$. Nesse caso, a função seria contínua no ponto $x = 1$. Fato que puderam comprovar justificando algebricamente. Vejamos abaixo alguns comentários dos estudantes à respeito.

Alexandre- É realmente, olhando o domínio eu enxerguei de início que a função era contínua.

Any - Bom... Eu na primeira vez "boiei legal" não deu pra ver direito, lembrei na hora que o "fruta" (**colega - José**) falou que o k igual a -2 (**dois negativo**) era contínuo, fiquei “boiando”, porque eu não achei que no k igual a -2 era contínuo, depois que eu fui ver e agora que eu testei todos os limites aí fui ver que estava errada no que eu pensei e que tenho que rever alguns... conceitos. Foi bom que eu vou lembrando aos poucos o que eu já tinha aprendido assim é uma maneira de eu não esquecer também.

Dado o encaminhamento da atividade, foi claramente perceptível que a interpretação errônea feita pelos estudantes em relação à Continuidade de uma função foi aos poucos sendo esclarecida. Em termos de primeiridade, esses estudantes ao visualizarem o gráfico da função f e sua animação puderam em um primeiro momento apreender a qualidade que esse gráfico transmitia aos “seus olhos”. A partir desse primeiro discernimento, a forma algébrica da



função $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, passou a operar como um índice inicial para a investigação

do problema.

De acordo com Nöth (2003), os índices podem distinguir-se de outros signos por três principais características: primeiro por não ter nenhuma semelhança significativa com o objeto, segundo, referem-se a seus objetos por unidades singulares e terceiro dirigem-se a os objetos com uma compulsão cega.

Deste modo, diante da indicação implícita fornecida pela função, alguns estudantes apresentaram caminhos de resolução acertados, entretanto, as maiorias deles não souberam interpretar corretamente o que se propunha indicar tal representação matemática, no momento em que não consideraram a variação do ícone k . Esses estudantes só passaram a perceber o seu engano, a partir da visualização na tela do computador, por meio do **Winplot**, mediante animação do gráfico da função f . Assim, a dinamicidade do software permitiu aos mesmos visualizarem a referência do k na função, os seus possíveis valores assumidos, os conceitos figurais e conceituais. Essa perspectiva direcionou os estudantes a refletirem mais claramente sobre o conceito de Continuidade de uma Função. Finalmente ao justificarem suas observações algebricamente, puderam então constatar a descontinuidade da função, para k diferente de -2 .

Situadas as relações matemáticas, os estudantes passaram, então, a apresentar indícios de raciocínios relacionados à secundidade, e à terceiridade, estabelecendo uma relação triádica entre o signo - representação algébrica e gráfica com o objeto de estudo - conceito matemático de Continuidade de uma função, culminando em uma interpretação, na qual, a partir da interação e das discussões entre a pesquisadora e os sujeitos pesquisados, bem como entre eles próprios ao inter-relacionarem e coordenarem as representações gráficas e algébricas tornou-se possível aos estudantes uma compreensão e generalização do conceito de continuidade. Temos então, nesse momento, na análise semiótica, a Terceiridade.

É interessante também registrar, que alguns alunos, mesmo visualizando a quebra no gráfico, não conseguiam abstrair a descontinuidade da função. Eles sabiam definir uma função contínua, mas, não conseguiram associar essa definição à sua representação gráfica, demonstrando, deste modo, um conhecimento fragmentado. Vejamos um pouco da discussão sobre essa dificuldade entre a pesquisadora e os estudantes.

MA - Vocês sabem definir o que é uma função contínua, mas não conseguiram relacionar a quebra do gráfico ao conceito, por que isso aconteceu? O que vocês acham? (os alunos demoram a responder e eu volto a insistir em busca de uma resposta) gostariam de falar um pouco?



Alexandre - Ah!... a idéia não está muito madura ainda, eu acho. ... Precisa formalizar um pouco mais.

Robin - Não adianta esticar demais o conteúdo... é isso... é isso... é isso... Você não consegue fixar a idéia.

Alexandre - Eu acho que vale mais a gente aprender o que significa mesmo, do que ficar colocando exercício pra gente resolver, resolver, resolver.

Robin - É porque resolver Limite não tem dificuldade pra ninguém porque é só usar uma fórmula uma regra tipo L' Hopital, vai lá faz. Agora saber pra que vai precisar? **(ele refere-se a uma aplicação)**. Háa... Na verdade é um negócio simples, mas que falta mais explicação.

Alexandre - Falta explicação, porque do ângulo que a pessoa quer olhar aquilo, se ela quer olhar ou quer fazer que a gente olhe só pra resolver Limites, também Háa, depois vem a derivada é só calcular o Limite e assim vai... ou saber realmente o que ele significa é... se deve vir para um lado, se deve vir pro outro, por ele **(referindo-se ao limite de uma função)** que eu vou ver se é contínua ou não. Eu acho que é isso daí que precisa chamar mais atenção, com x caminhando, sabe? Naquele ponto, ver o que acontece com a imagem, tem que saber o que está calculando.

Casos como esses, nos preocupam e nos levam a crer que uma abordagem didático-pedagógica, na qual possamos utilizar o computador como um meio de inter-relacionarmos várias representações poderá significamente contribuir na constituição do conhecimento matemático de futuros professores. Nas entrevistas realizadas podemos perceber que tanto professores como estudantes acreditam nessa hipótese.

Patrícia - Olha! Eu nunca usei nenhum software em sala de aula não. Mas, eu acho que as escolas deveriam dar aula de Matemática usando o computador. Pois todo mundo que aprendeu geometria usando o computador tem hoje a maior facilidade na disciplina. E mesmo usando agora esse programa com você, às vezes quando a professora fala: quando o x está se aproximando, o limite está indo. Nossa! eu não estou enxergando pra onde esse limite está indo. Daí, usando o programa, como naquele dia que você mostrou, deu pra entender direitinho.

Márcio - Eu acho super válido, porque, podemos aprender com mais facilidade e também pra ensinar os outros, no caso de querer seguir a carreira de professor.

Professor W - No Cálculo, por exemplo, o uso do computador tem uma motivação muito grande, porque o cálculo envolve movimento. Representar, representações geométricas, desenhos. Essas representações, o aluno da Matemática vê muito pouco em Cálculo. Normalmente é visto mais em cursos de geometria diferencial, de superfícies. O aluno de Matemática sabe calcular. O professor define um determinado conceito, ele sabe calcular, mas quando você faz desenhos na lousa, eles se perdem, não entendem os desenhos, eles não visualizam, ele não sabe o que está na frente.[...] então, se o aluno vai estudar a derivada por retas secantes, é possível fazer uma animação por retas secantes. É um recurso que o aluno visualiza. [...] deste modo, quando você usa o computador, a figura passa então, a ganhar sentido, porque o aluno vê precisamente o que está acontecendo.

Outro ponto a destacar nessa atividade consistiu no fato de que, durante o processo de exploração e investigação do problema, o software apresentou algumas limitações, como a que foi discutida entre a pesquisadora e o estudante Paulo.

MA - Ok. Uma última pergunta, eu... **(nesse instante um estudante interrompe a minha fala)** sim? Fala Paulo, pode falar.

Paulo - Eu acho que fora isso a gente tem que tomar cuidado também na limitação do programa né? Por exemplo, nessa animação quando ele vai descendo (**fazendo referência ao gráfico**) olha como o ponto sai fora do gráfico.

MA- É, mais observa que o ponto sai fora do gráfico porque não colocamos... é... vamos dizer assim, não adequamos a tela de modo a visualizar o gráfico por inteiro. Por exemplo, se você for lá em Ver (comandos do Winplot) e você aumentar é... o limitante inferior você vai conseguir enxergar o gráfico.

Paulo - Não!... eu falo ... o ponto sai da ponta do gráfico, olha lá oh! (Figura.13)

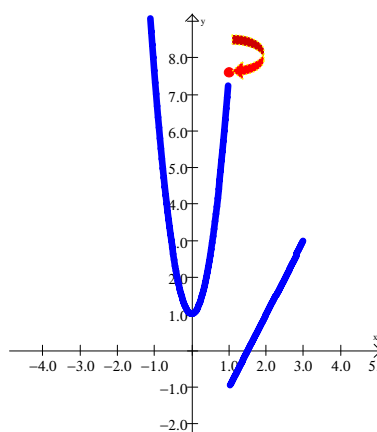


Figura 13: Limitação do Winplot no Traçado do Gráfico da Função $f(x)$

MA- Aaa... ok! é... alguém poderia falar sobre isso? Porque que o ponto do sai do gráfico? Ele está falando que a função é descontínua no ponto? É isso que você está falando? (Nesse momento eu não havia entendido ainda o que Paulo explicava, pensei que ele falava da continuidade do gráfico, mas logo após o Augusto esclareceu o ponto de vista do colega).

Augusto- Ele está falando que na hora que está subindo aqui oh! (O Augusto aponta para o telão onde está projetado o gráfico da função) o ponto tá saindo da extremidade do gráfico.

MA - Há entendi... entendi. Realmente precisamos ter cuidado com as limitações do software nós temos que atentar para isso, ou seja, ter cuidado de sempre ter em mente a teoria para que possamos entender que isso não acontece ok?

Analisando a discussão entre a pesquisadora e o estudante Paulo, acima apresentada, podemos dizer que na literatura destacamos a idéia das muitas vantagens e desvantagens do uso de softwares matemáticos tais como: auxiliar a compreensão, explorar novos ângulos e perspectivas na investigação e na resolução de problemas, explorar as percepções visuais, permitindo ao estudante um ganho de experiência, a qual lhe permitirá formar imagens mentais que poderão ajudá-lo em seu processo de raciocínio. Por outro lado, existem os problemas advindos das limitações próprias dos softwares, relacionadas à características computacionais dos mesmos, os quais podem direcionar os estudantes à interpretações do objeto imediato (a figura do gráfico) questionável quanto a sua confiabilidade em relação ao objeto dinâmico (conceito de continuidade da função). Por exemplo, algumas limitações da tela no uso **Winplot** provocou no estudante Paulo questionamentos em relação a posição do ponto pertencente ao gráfico da função (Figura 13), fato que poderia possibilitar ao estudante

um entendimento errôneo. O professor, portanto deve estar atento em auxiliar quando necessário os seus alunos para que esses possam apreender a interpretar corretamente as figuras e os desenhos, projetados na tela do computador.

5.5.2. Atividade 2

A **Atividade 2**, propunha uma investigação envolvendo a interpretação geométrica da inclinação de uma reta tangente a uma curva, buscando compreender o conceito da **Derivada de uma função em um dado ponto**.

Para o desenvolvimento dessa atividade foi solicitado aos estudantes de Cálculo I, que realizassem uma simulação no software **Winplot**, partindo da representação geométrica de uma reta secante ao gráfico da função $f(x) = x^2$, dado um ponto (x,y) do seu gráfico.

A fim de estimular um debate, a pesquisadora perguntou aos estudantes o que eles entendiam a respeito de derivada de uma função, se poderiam dar uma definição e comentar sobre possíveis aplicações envolvendo o conceito de **Derivada**. Inicialmente houve um pequeno silêncio, mas logo surgiram algumas respostas:

- **Definindo Derivada**

Robin e Clotilde - Derivada é o coeficiente angular da reta que é tangente ao gráfico num ponto.

Frederico - a derivada é o coeficiente angular da reta tangente

- **Comentando sobre as aplicações da derivada**

Clotilde - A gente usa derivada pra fazer o máximo e o mínimo da função, pra montar o gráfico...

Robin - máximo e mínimo, ponto de inflexão... você vê, se a função é crescente ou decrescente

Clotilde - Pra achar o erro da... (**Robin, completa a frase da Clotilde**)

Robin - [...] tipo a gente fazia... variava dez centímetros de um cilindro, no raio do cilindro, daí a gente tinha que ver qual era o erro. Você calculava, se tivesse à mão (sem as ferramentas da derivada, por estimativas) e, se você fizesse com a derivada achava outro valor, aí tinha um erro pequeno.

Serapião - serve pra qualquer problema envolvendo taxa de variação

Henrique - pra achar o máximo e o mínimo da função

Frederico - construção de gráficos.

- **Dificuldades enfrentadas pelos estudantes no estudo da derivada**

Robin - Há... a parte de derivada trigonométrica, derivada de arco seno, arco co-seno, arco tangente, arco... Derivada em geral, tipo polinômio já é mais fácil e algumas a gente acaba lembrando como a derivada de log, por exemplo.

MA - então são derivadas de funções não elementares?

Robin - isso

MA - mas, porque? Vocês acham que essa dificuldade surge, porque vocês não estudaram essas funções lá no Ensino Médio?

Robin - isso

MA - Vocês não viram funções logarítmicas ou trigonométricas?

Robin - vimos, tem logaritmo[...]

Alexandre - [...] mas só que não tem gráfico

Clotilde - eles não exploram gráfico no Ensino Médio, aí quando vem pra universidade, sente muita dificuldade, porque... há... eu queria usar o gráfico, olhar com o gráfico, mostrar o gráfico das funções, pois, sem esse recurso, aí fica bem difícil pra mim.

Passado esse primeiro instante foi solicitado aos estudantes que desenhasssem por meio do **Winplot** o gráfico da função $f(x) = x^2$, bem como o ponto (1,1). E assim foi feito, como ilustrado abaixo (Figura 14):

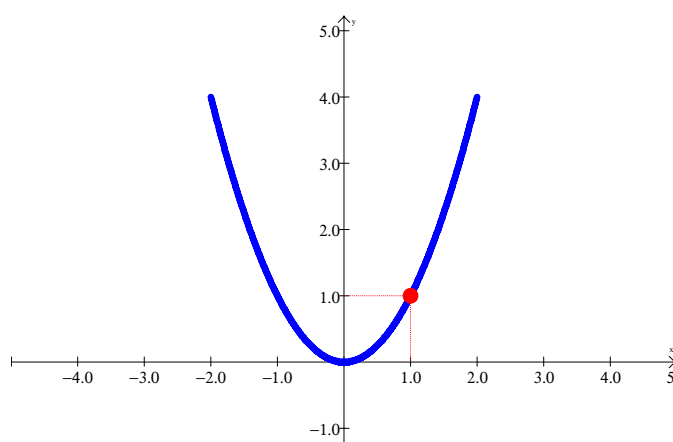


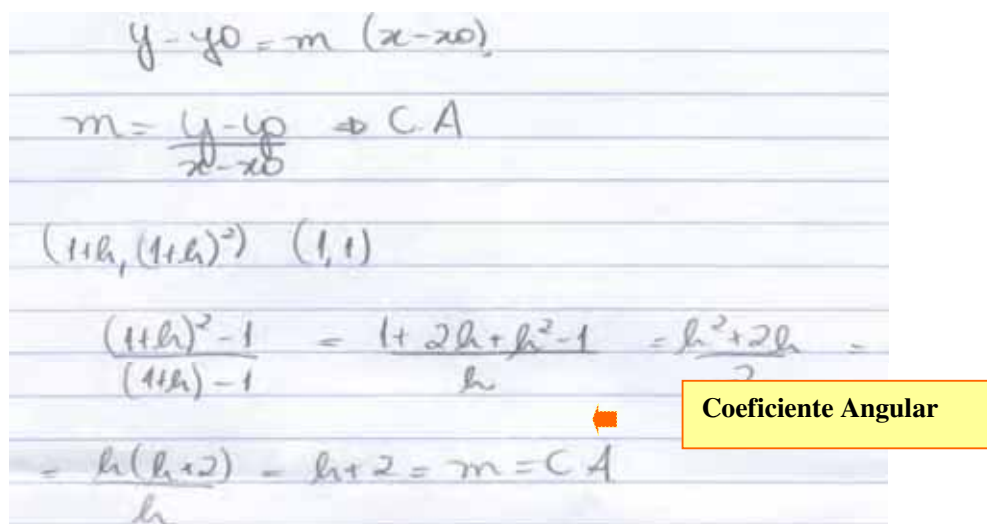
Figura 14: Ponto sobre a Curva

Considerando a Figura 14, alguns questionamentos e discussões foram realizados. Nesse sentido, foi perguntado aos estudantes como eles poderiam representar algebricamente um ponto genérico pertencente a função $f(x) = x^2$, de maneira que esse ponto estivesse localizado acima do ponto $x = 1$, sobre o gráfico de $f(x)$? Inicialmente, os estudantes sentiram certa dificuldade em abstrair essa idéia, o que foi necessário uma intervenção por parte da pesquisadora, sugerindo que o ponto poderia ser, por exemplo, x igual a $(1+h)$, considerando h um valor variável.

A partir desse dado, foi possível aos estudantes uma maior compreensão tornando possível determinarem o ponto de coordenada $y = (1+h)^2$ iniciando a construção da reta secante ao gráfico passando pelos pontos $(1+h, (1+h)^2)$ e $(1,1)$.

Nesse processo de construção, houve algumas discussões iniciais sobre como determinar **a equação da reta secante**. Nesse sentido alguns estudantes se posicionaram: a estudante **Ana Paula** propôs que a equação da reta poderia ser escrita da seguinte forma: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, diante essa resposta, a pesquisadora questionou aos demais grupos se concordavam com essa definição. Todos responderam que sim. Porém, os estudantes

apresentaram uma certa dificuldade, ao serem questionados, sobre como calcular o coeficiente angular da reta secante. Após sugestões e questionamentos, algumas respostas foram apresentadas:



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow C.A.$$

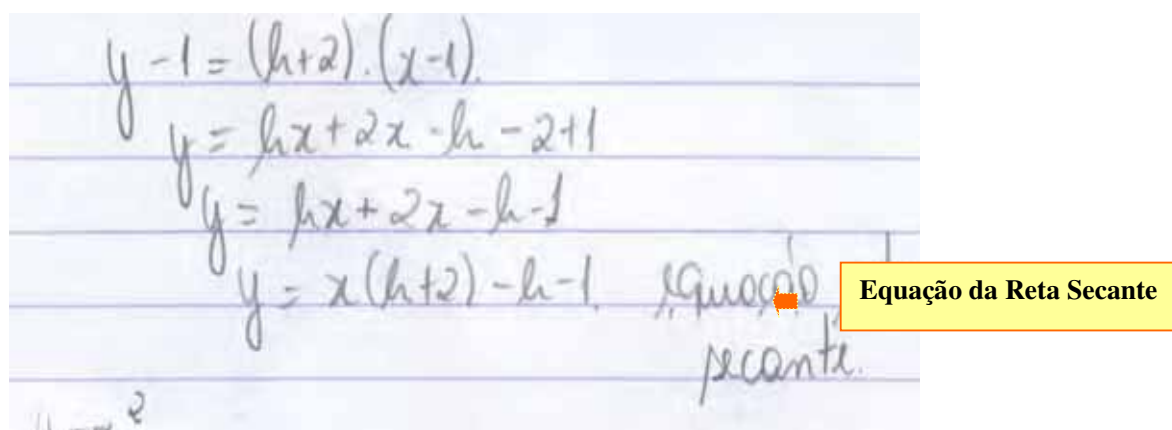
$$(1+h, (1+h)^2) \quad (1, 1)$$

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} =$$

$$= \frac{h(h+2)}{h} = h+2 = m = C.A.$$

Coeficiente Angular

Figura 15: Cálculo Algébrico do Coeficiente Angular - Robin e Clotilde



$$y - 1 = (h+2) \cdot (x - 1)$$

$$y = hx + 2x - h - 2 + 1$$

$$y = hx + 2x - h - 1$$

$$y = x(h+2) - h - 1$$

Equação da Reta Secante

Figura 16: Cálculo Algébrico da Equação da Reta Secante – Robin e Clotilde

Handwritten derivation showing the calculation of the slope (coefficient angular) and the equation of the secant line. The steps are as follows:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$\frac{(y - y_0)}{(x - x_0)} = m \quad \frac{(1 - (1+h)^2)}{1 - (1+h)} = \frac{1 - 1 - h^2 - 2h}{h} = \frac{-h(h+2)}{h} = -(h+2)$$

The slope m is identified as $-(h+2)$, which is circled and labeled "Coeficiente Angular".

Then, the equation of the secant line is derived:

$$(y - 1) = -(h+2)(x - 1)$$

$$y = hx + 2x - h - 2 + 1$$

$$y = hx - h + 2x - 1$$

$$y = h(x - 1) + 2x - 1$$

This final equation is labeled "Equação da Reta Secante".

Figura 17: Cálculo Algébrico do coeficiente Angular e da Equação da reta secante – Any e Suka

A partir dessa discussão e das respostas dos estudantes, o gráfico da equação da reta secante, gerou a seguinte figura por meio do **Winplot** (Figura 18)

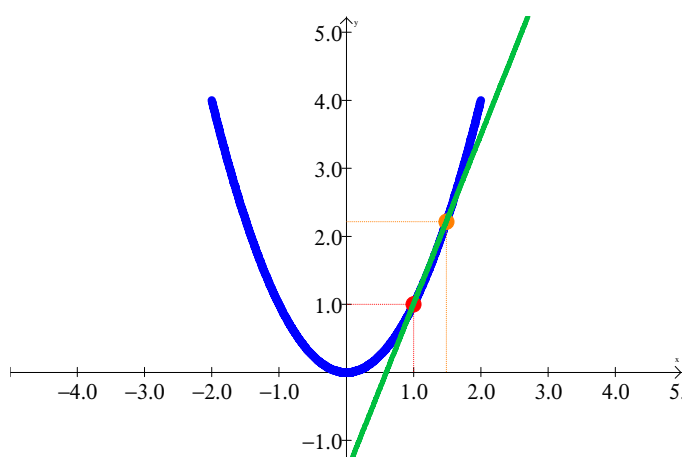


Figura 18: A Reta Secante

Buscando, então, explorar um pouco mais essa idéia, a pesquisadora solicitou aos estudantes animarem o gráfico, movimentando a reta sobre a curva e, a seguir que comentassem suas observações (Figura 19)

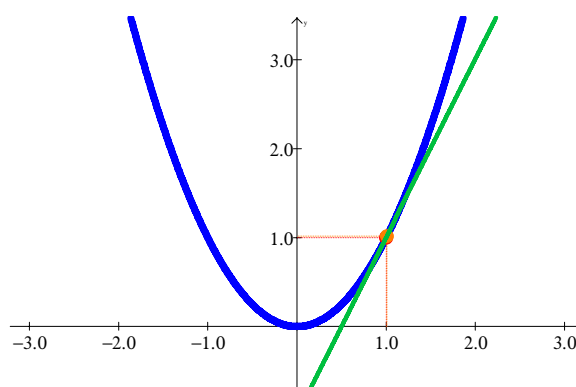


Figura 19: A Reta Tangente

Como resposta, os estudantes, em sua maioria enunciou que, ao movimentar a reta sobre a curva $f(x) = x^2$, no momento que a reta passava de **secante a tangente**, o valor **h** tendia a zero. Vejamos abaixo alguns comentários redigidos pelos estudantes:

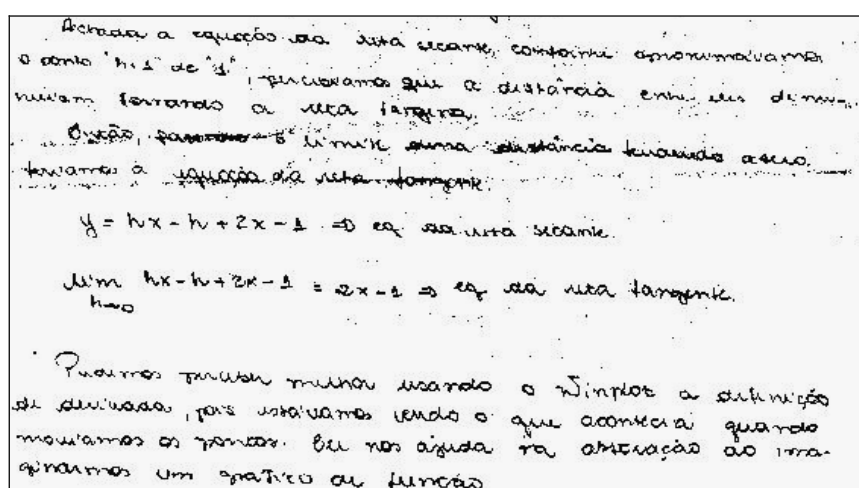


Figura 20: Descrição do Comentário - Letícia e Marcela

Letícia e Marcela escrevem;

Achada a equação da reta secante conforme aproximávamos o ponto "h + 1" de "1" percebemos que a distância entre eles diminuía tornando a reta tangente. Então, fazendo o limite dessa distância tendendo a zero teríamos a equação da reta tangente. $Y = hx - h + 2x - 1 \Rightarrow \text{eq. da reta secante}$. $\lim_{h \rightarrow 0} (hx - h + 2x - 1) = 2x - 1$ (equação da reta tangente). Pudemos perceber melhor usando o **Winplot** a definição de derivada, pois estávamos vendo o que acontecia quando movíamos os pontos [...]⁶³

⁶³ Transcrição parcial do comentário escrito das estudantes Letícia e Marcela

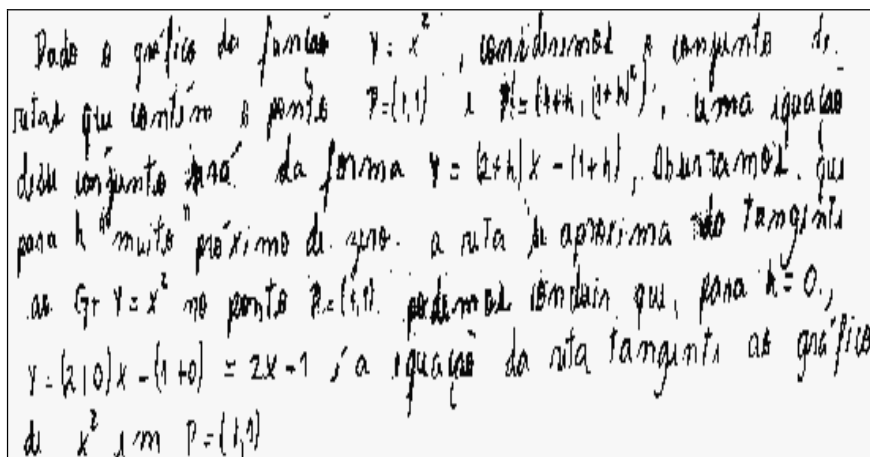


Figura 21: Descrição do Comentário - Augusto e Márcio

Augusto e Márcio escrevem:

Dado o gráfico da função $y = x^2$, consideremos o conjunto de retas que contém o ponto $P = (1,1)$ e $P' = (1+h, (1+h)^2)$, uma equação desse conjunto será da forma $y = (2+h)x - (1+h)$, observamos que para "h" muito próximo de zero a reta se aproxima da tangente ao Gr (Gráfico) x^2 no ponto $P = (1,1)$. Podemos concluir que, para $h = 0$, $y = (2 + 0)x - (1+0) = 2x - 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de x^2 em $P = (1,1)$ ⁶⁴.

Na aplicação e desenvolvimento da **Atividade 2** a interação entre a pesquisadora e os estudantes foi de fundamental importância, devido a notória dificuldade apresentada pela maioria deles, durante a investigação e exploração do problema. Tal dificuldade mostrou-se bastante acentuada no processo de abstração, a partir dos dados inicialmente apresentados, na busca de compreender a idéia geométrica da **Derivada de uma função em um dado ponto**.

Podemos inferir que muitas vezes a dificuldade encontrava-se em lembrar-se de determinadas operações básicas na efetuação de alguns cálculos, como por exemplo, muitos dos estudantes havia se esquecido da fórmula utilizada para calcular a equação de uma reta, principalmente o cálculo do coeficiente angular, ficando assim muito limitados a fórmulas. Nessa perspectiva, Ball⁶⁵ (1988, apud Veloso, 2004), nos alerta sobre essa questão, quando em sua análise destaca o fato do futuro professor muitas vezes apresentar um conhecimento fragmentado, pois ao revisar os conteúdos matemáticos, procurando recordar conceitos, procedimentos ou simples termos, geralmente, se vê lembrando regras, truques, e geralmente não explícitos, o que para a investigadora é compreensível diante o fato que, esses estudantes tiveram como destaque a mecanização de técnicas de cálculo.

⁶⁴ Transcrição parcial do comentário escrito dos estudantes Augusto e Márcio

⁶⁵ <http://www-personal.umich.edu/~dball/>



Em nossa análise pudemos comprovar alguns desses aspectos e percebemos que os alunos ao inter-relacionarem as representações gráficas e algébricas, principalmente a partir da visualização e animação do gráfico da função apresentada no problema proposto apresentaram dificuldades, mas, com a interlocução da pesquisadora e refletindo sobre os diversos gráficos representados foram aos poucos conseguindo desenvolver um processo de abstração. O que nos leva a crer que, nesse processo de compreensão da atividade proposta, em um dado momento, os estudantes, primeiramente apreenderam a qualidade representada na figura do gráfico – **Primeiridade**. Em um outro momento, os alunos perceberam como essas qualidades se manifestavam nas representações, por meio de suas características singulares, favorecendo à eles indicações de novos elementos no processo de investigação - **Secundidade**. Assim, a partir da interação estudante/pesquisadora; estudante/software e estudante/estudante e considerando o cálculo da equação algébrica da reta secante e tangente, explorando os conceitos de **Limites e Derivada de uma função** em um determinado ponto, os estudantes apresentaram conjecturas à respeito do que estava sendo investigado e experienciado, por meio do **Winplot**, a passagem da reta secante para a reta tangente em um determinado ponto da curva. Nesse momento passaram a **generalizar** esse conceito, percebendo que quando a reta secante passava a ser a reta tangente eles teriam a **Derivada** da função no ponto de tangência - **Terceridade**.

Comentários de alguns estudantes, retirados das entrevistas após a aplicação e desenvolvimento da Atividade 2, apontam que esses estudantes concordam com a importância da visualização e coordenação entre as representações matemáticas, possibilitando aos mesmos, compreenderam os conceitos matemáticos.

Letícia - Há! Uma maravilha, agora que eu aprendi a mexer no Winplot e estou usando em casa. Às vezes a gente estudando uma função, demora pra enxergar a cara daquela função, principalmente quando é x^6 . x^7 e a gente vai derivando. A gente não sabe como é a “carinha” daquela função. Então a gente põe ali, no computador e vai vendo, vai “mexendo”, movimentando, olhando pra onde ela vai. Então acha o limite, vai calculando as derivadas. O aluno passa tem uma noção maior, eu acho. Seria uma maravilha poder trabalhar com ele (o Winplot) mais tempo.

Agáta - Eu acho legal, até porque, foi a coisa mais prática durante todo o curso que eu vi até agora (a estudante refere-se ao uso do Winplot). Na sala de aula, nós não tiramos o olho da lousa, então é um diferencial também, eu acho.

Lara - Olha é muito legal (referindo-se ao Winplot), pois o gráfico ajuda muito na visualização. Mesmo porque você usa a derivada e não sabe para o que serve, na pesquisa deu pra fazer algumas aplicações, foi muito legal.





Robin - Eu acho importante o professor usar todos os recursos, para poder explicar alguma coisa. Se precisar usar um gráfico, usar um gráfico se precisar usar uma tabela, usar uma tabela. Então, quanto mais fazer isso é melhor pra mostrar a aplicação de uma função e, não só analiticamente, usar também o desenho para falar que aquilo é verdade. Usar o gráfico pra mostrar que corresponde ao cálculo algébrico. Então isso é muito importante. Eu pessoalmente tenho mais facilidade de trabalhar com gráfico, do que algebricamente.

Esse aspecto pode ser corroborado com as falas dos professores, implícitas nas Entrevistas realizadas. Assim, ao perguntar para um dos professores entrevistados sobre a importância de se abordar várias **representações** Matemáticas para a compreensão e resolução de um dado problema, ele respondeu que:

Professor K - Cada representação permite ao aluno tirar algumas conclusões que outras representações não permitem. Então justamente por isso que é importante ter representações, representar conceitos. Do ponto de vista formal, lógico você tem representações, que nos permitem fazer variadas interpretações sobre as definições. A partir das definições e axiomas você faz as demonstrações, essa é a parte formal. Agora quando você fala em raciocínio, o indivíduo vai pensar, e nós não pensamos com a definição, ninguém pensa em derivada, com a definição de derivada, ninguém pensa em integral com a definição de integral. Quando você vai resolver um problema que envolva integral ou derivada, você não vai pela definição, você usa as representações, por isso ela é importante. Se o indivíduo não faz isso, a única coisa que ele vai fazer é classificar problemas, e associar esse problema ao tipo de fórmula, o que é muito comum.

Como podemos notar na fala acima, há um papel muito importante atribuído à representação matemática. Trata-se de um papel que considera o estatuto epistemológico das representações matemáticas na constituição do conhecimento, fato esse fundamental, em nossa pesquisa, pois, relaciona-se diretamente com a questão investigada.

5.5.3. Atividade 3

A **Atividade 3** tinha como objetivo investigar um problema de otimização por meio do software **Winplot**, visando perceber o conhecimento do estudante – futuro professor, no processo de interpretação, compreensão, justificação e visualização do problema, a partir **do estudo das várias representações matemáticas** inseridas no contexto da disciplina Cálculo I. Para tanto, foi proposto aos estudantes o seguinte problema: **Determinar as dimensões do retângulo de área máxima, que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r .**



Para a exploração do problema foram utilizados os softwares matemáticos **Winplot** e o **Maple**⁶⁶. Os encaminhamentos para as possíveis soluções da atividade proposta e para a abordagem das **representações gráficas** por meio do software processaram-se da forma, abaixo explicitada.

- **Interação da pesquisadora com os estudantes de modo a propiciar um ambiente investigativo, com a perspectiva de motivar a estudante a trabalharem em um contexto de exploração da atividade, mediada pelo software matemático Winplot.**

Assim, foi inicialmente sugerido aos estudantes, que desenhasssem no **Winplot** o gráfico da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ (Figura 22).

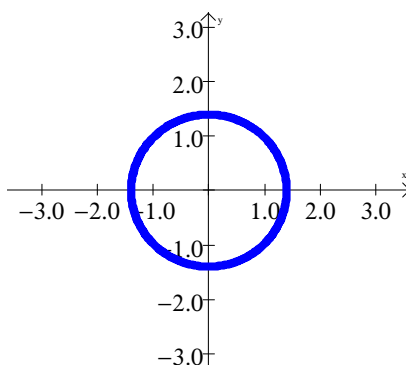


Figura 22: A Circunferência

Em vista da visualização do gráfico, foi solicitado, então, que desenhasssem no **Winplot** a semicircunferência, de centro na origem a partir da equação da circunferência, tendo dois dos seus vértices sobre o diâmetro localizado sobre o eixo Ox (eixo das abscissas). A partir dessas informações, foi requerido aos estudantes que discutissem em grupo como poderiam representar algebricamente a equação da semicircunferência. Após discussões, mediadas pela pesquisadora e questionamentos estabelecidos pelos próprios estudantes, algumas soluções foram apresentadas.

Dando prosseguimento à essa exploração, foi proposto aos estudantes desenharem por meio do **Winplot** o gráfico da equação $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, a qual gerou uma semicircunferência de centro na origem e de raio genérico sobre o eixo das ordenadas (Figura 23).

⁶⁶ Vale ressaltar que os estudantes já estavam familiarizados com alguns comandos do **Winplot**, **PLANILHA Eletrônica** e do **Maple**⁶⁶, de maneira que, sob esse aspecto o desenvolvimento dos trabalhos transcorreram tranqüilamente.

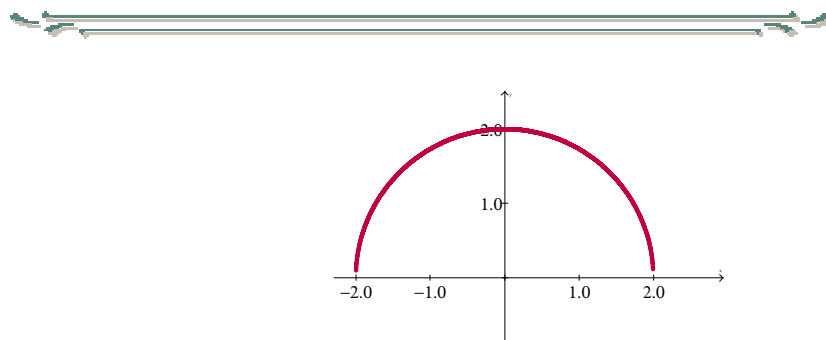


Figura 23: O Semicírculo

A partir desta representação, foi sugerido aos estudantes que desenhasssem o retângulo inscrito no semicírculo. A pesquisadora, juntamente com os estudantes esboçaram o primeiro segmento que daria origem ao retângulo inscrito na semicircunferência, deixando a cargo dos estudantes os três segmentos restantes (Figuras 24 e 25);

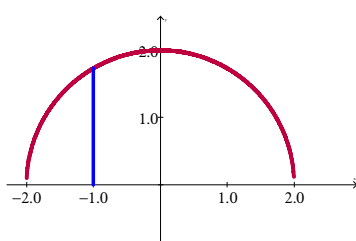
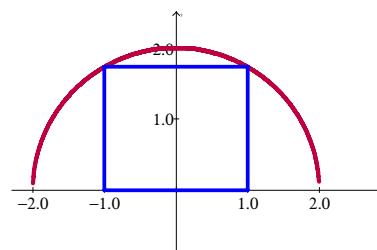


Figura 24 : O Primeiro Segmento



25: O Retângulo Inscrito

► **Orientação para os estudantes sobre a concepção de um modelo matemático que pudesse motivá-los a encontrar possíveis soluções para a Atividade proposta.**

Tendo em vista o retângulo inscrito na semicircunferência (Figura 25), foram levantadas algumas conjecturas e hipóteses pela pesquisadora encaminhadas aos estudantes, orientando-os a pensarem em um modelo matemático que viesse representar a área do retângulo inscrito na semicircunferência de raio r e de centro na origem.

O **objetivo** consistia em envolver os estudantes em um processo investigativo, para que eles pudessem avançar um raciocínio que os permitissem interagir com a atividade, a fim de chegar em estratégias que os conduzissem à respostas conclusivas. Depois de algumas conjecturas entre os estudantes, intermediadas pela pesquisadora, foi determinada a função $A(x) = 2 \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ e, em seguida, desenhado o seu gráfico no **Winplot**, bem como o ponto $(a, 2 \cdot a \cdot \sqrt{r^2 - a^2})$.

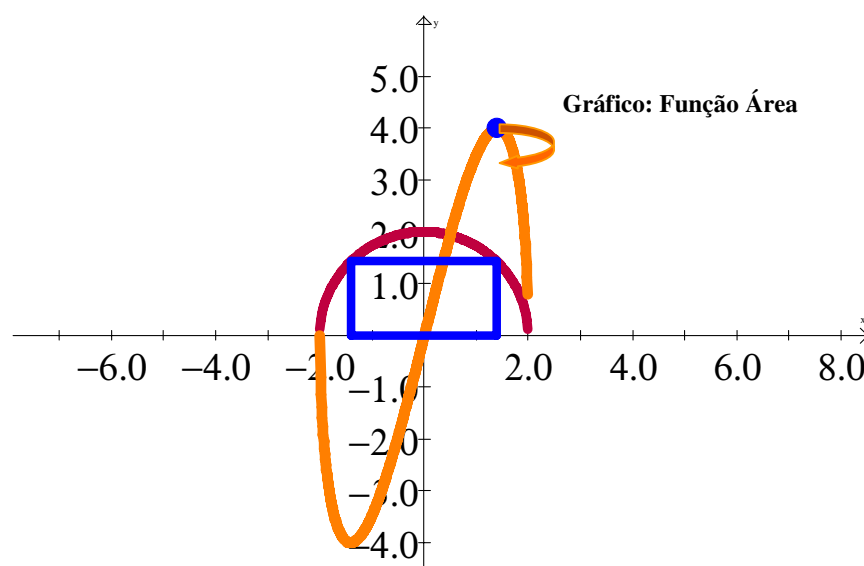


Figura 26: A Função Área

Dando prosseguimento a exploração do gráfico (Figura 26), foi perguntado aos estudantes como poderiam justificar algebricamente suas observações de maneira a determinar as dimensões do retângulo de área máxima? Para responder tal questionamento foi necessária a mediação da pesquisadora e discussões entre os próprios grupos presentes.

Alexandre e Clara - Pudemos observar que quando o valor se aproxima do ponto de maior extremo, o valor da área do retângulo se aproxima do máximo. Podemos observar melhor, junto aos cálculos de derivadas. [...] Quando encontrado o valor máximo, a derivada zera, nesse caso, a área do retângulo inscrito é máxima.

Patrícia e Ágata - Pela primeira vez entendemos a relação para a construção de um tipo de problema. Pudemos observar que quando a área é máxima, a derivada da função é zero e quando é mínima também. Pudemos ainda observar que é importante ter noção do que estamos fazendo, pois a máquina pode errar (referindo-se a uso do software) e devemos estar atentos ao que ocorre.

Delineado os procedimentos, todos passaram então à atividade de calcular a Derivada de $A(x)$, bem como $A'(x)$ e $A''(x)$, registrando os cálculos operatórios por meio de lápis e papel. Após concluírem e devidamente registrarem o cálculo das derivadas de $A(x)$ no papel, foi solicitado aos estudantes que abrissem o pacote algébrico do **Maple** para poderem confirmar se as soluções encontradas estavam corretas.

Ao observarem, portanto a solução apresentada no **Maple** os estudantes puderam então comparar suas respostas. Muitos deles puderam confirmar acertos e erros e, após as correções necessárias, concluíram que o ponto máximo da função correspondia a $x = 1,4$

considerando o raio $r = 2$. Considerando esses valores para o “teste da segunda derivada”⁶⁷, puderam concluir tanto por meio de cálculos manuais bem como por meio do Maple, que $x = 1.4$ correspondia a um ponto de máximo da função.

Concluídos os cálculos os estudantes passaram então a desenhar por meio do **Winplot** o gráfico da função derivada, bem como um ponto genérico representado pela seguinte coordenada: $\left(a, \frac{2 \cdot (\sqrt{r^2 - a^2} - a^2)}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right)$ (Figura 27) gráfico da função área e gráfico da função derivada), possibilitando aos mesmos perceberem que quando o ponto atingia o **máximo da função** simultaneamente era mostrado **a maior área do retângulo** na figura do retângulo inscrito.

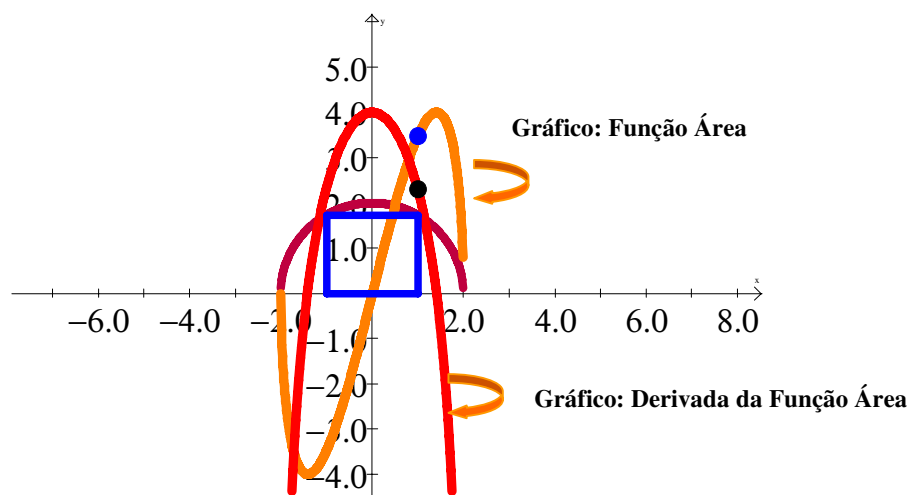


Figura 27: Derivada da Função Área.

Tendo em vista o valor genérico da área do maior retângulo inscrito no semicírculo de raio r , foi sugerido aos estudantes usarem o recurso da **PLANILHA** para que pudessem analisar sob um outro ponto de vista os resultados anteriormente encontrados. O objetivo para tal procedimento consistia em mostrar a esses possíveis futuros professores, que o problema apresentado poderia ser trabalhado em nível médio e fundamental sem a necessidade explícita de se trabalhar com ferramentas de Cálculo de maneira a introduzir conceitos de variação e continuidade de uma função para os seus futuros alunos ainda em nível escolar. Assim como foi procedido com o **Winplot** e o **Maple**, ao mesmo tempo em que discutiam os resultados, a

⁶⁷ Nessa atividade também foram explorados resultados para outros valores do raio r

pesquisadora orientava os estudantes nos comandos para utilização da PLANILHA. Vejamos alguns resultados encontrados (Figuras 28, 29 e 30)

x	y	Área
0	1	0
0,1012	0,994866102	0,201360899
0,202	0,979385522	0,395671751
0,3028	0,953054122	0,577169576
0,4036	0,914935539	0,738535967
0,5044	0,863470115	0,871068652
0,6052	0,796073464	0,963567321
0,706	0,708211833	0,999995108
0,8068	0,590824644	0,953354646
0,9076	0,419835968	0,762086249

 maior área

Figura 28: Retângulo de maior área inscrito no semi-círculo de raio 1

x	y	Área
0	2	0
0,101	1,997448122	0,403484521
0,202	1,989772851	0,803868232
0,303	1,976914515	1,198010196
0,404	1,958771043	1,582687003
0,505	1,935193789	1,954545727
0,606	1,905981112	2,310049108
0,707	1,870869049	2,645408836
0,808	1,829517969	2,956501038
0,909	1,781493475	3,238755137
1,01	1,726238686	3,487002145
1,111	1,663033072	3,695259487
1,212	1,590929288	3,856412595
1,313	1,508652047	3,961720276
1,414	1,414427093	3,999999818

 maior área

Figura 29: Retângulo de maior área inscrito no semicírculo de raio 2



x	y	Área
0	3	0
0,101	2,998299351	0,605656469
0,202	2,993191608	1,209249409
0,303	2,984659277	1,808703522
0,404	2,972672871	2,40191968
0,505	2,95719039	2,986762293
0,606	2,938156565	3,561045757
0,707	2,915501844	4,122519607
0,808	2,889141049	4,668851935
1,919	2,305957285	8,85026406
2,02	2,218017132	8,960789215
2,121	2,121640639	8,99999959
2,222	2,015618019	8,957406478
2,323	1,898333743	8,81965857
2,424	1,767547453	8,569070054
2,525	1,619992284	8,180961034
2,626	1,450559892	7,618340552

 maior área

Figura 30: Retângulo de maior área inscrito no semi-círculo de raio 3

Observando os dados de **pontos de máximo, valor máximo e maior área classificados para cada raio**, foi possível aos estudantes conjecturarem uma solução para o problema. A pesquisadora solicitou então que reorganizassem uma tabela apenas com os maiores valores de áreas encontrados em cada uma das planilhas e se possível, tentassem generalizar os resultados. Assim foi feito (Figura 31).

R(raio)	X (ponto de máximo)	Y(valor máximo)	Área Máxima
1	0,706	0,708211833	0,999995108
2	1,414	1,414427093	3,999999818
3	2,121	2,121640639	8,99999959
....			

Figura 31 Pontos de Máximo, Valor Máximo e Maior Área classificados para cada raio

Para essa abordagem, os estudantes, em sua maioria, tiveram dificuldade em generalizar os resultados. Entretanto alguns obtiveram sucesso. Os estudantes Frederico e Henrique apresentaram a seguinte tabela (Figura 32).





R(raio)	X (ponto de máximo)	Y(valor máximo)	Área Máxima
1	0,706	0,708211833	0,999995108 ~ 1
2	1,414	1,414427093	3,999999818 ~ 4
3	2,121	2,121640639	8,99999959 ~ 9
....			
n	n	$\frac{n}{\sqrt{2}}$	$\sim n^2$

Figura 32: Retângulo inscrito de maior Área a partir de um raio genérico

A partir dessa discussão, foi solicitado aos estudantes que registrassem no papel esses últimos resultados, e que comentassem um pouco sobre suas percepções à respeito da atividade desenvolvida. Vejamos abaixo seus comentários:

Alexandre e Clara - Pudemos observar que quando o valor se aproxima do ponto de maior extremo, o valor da área do retângulo se aproxima do máximo. Podemos observar melhor, junto aos cálculos de derivadas. [...] Quando encontrado o valor máximo, a derivada zera, nesse caso a área do retângulo inscrito é máxima.

Patrícia e Agáta - Pela primeira vez entendemos a relação para a construção de um tipo de problema. Pudemos observar que quando a área é máxima, a derivada da função é zero e quando é mínima também. Pudemos ainda observar que é importante ter noção do que estamos fazendo, pois a máquina pode errar (referindo-se a uso do software) e devemos estar atentos aos que ocorre.

Ana Paula e Laura - Pudemos observar no Winplot que a maior área do retângulo pode ser vista se calcularmos o ponto máximo da função da área.

Marcela e Letícia - O que a gente achou mais difícil foi calcular a derivada, enquanto que o mais legal foi ver no gráfico os pontos de máximo e mínimo da função e cada vez com um raio diferente.

Frederico e Henrique - Montar o retângulo por meio do software foi o que a gente achou mais interessante, outra coisa bem legal foi ter a noção de trabalhar na planilha, poder relacionar máximos e mínimos. Já no Winplot foi a possibilidade de visualizar os gráficos das funções, da função Área e das funções derivadas, além de interpretar através da área do maior retângulo os pontos de máximo e mínimo.

Os estudantes acharam bastante interessante trabalhar com o **Winplot** nessa atividade. Ao perguntar se a idéia de inter-relacionar várias representações matemáticas na exploração do problema ajudou na compreensão? a maioria respondeu que ajudou bastante. Pudemos perceber que a possibilidade de visualizar os gráficos de retângulo inscrito, a Função Área e a Derivada da Função, permitiu aos estudantes explorar sob vários ângulos e perspectivas uma solução para o problema.





Assim, transpondo essas considerações em uma análise Semiótica, nós podemos inferir que a forma visual do retângulo inscrito no semicírculo correspondeu em um primeiro momento em uma forma sígnica icônica - uma primeiridade e em um segundo momento um indicativo para a definição do modelo matemático - a função área.

Á partir dessa primeira apreensão, por meio da interação e discussões geradas pela pesquisadora, no contexto do desenvolvimento da atividade exploratório-investigativa e pelas inferências e hipóteses levantadas pelos estudantes no processo de criarem estratégias para resolverem a atividade, novos elementos surgiram, no sentido que, foram avançando e elaborando os seus raciocínios de maneira mais significativa, ou seja, começaram a perceber como a qualidade dos signos era manifestada nas diferentes representações das figuras, isto é, como a circunferência, o semicírculo se relacionavam com os dados da atividade proposta – existia “uma certa tradução” dos dados da atividade exploratório-investigativa para a sua **representação**. Nesse ponto, temos então **a secundidade**.

Em um terceiro momento, quando os alunos começaram a relacionar os conceitos de derivada de uma função com o fato de igualar à representação algébrica que exprimia a função área a zero, perceberam que deveriam encontrar também a segunda derivada da função área para saberem se o ponto era de máximo ou de mínimo começaram a relacionar os diversos conceitos matemáticos trabalhados através da visualização e da dinamicidade do software. Além disso, ao utilizarem um outro software para confirmarem as suas conjecturas iniciais perceberam as diversas relações matemáticas que puderam ser extraídas e estabelecidas à partir das diferentes representações – algébrica, gráficas (estática e dinâmica). Nesse momento podemos considerar que os alunos atingiram um nível mais elevado de raciocínio matemático possibilitando aos mesmos a capacidade de abstrair e generalizar os conceitos estudados para outros contextos. Nesse ponto, temos então, na análise Semiótica, **a terceridade**.

No nível do **interpretante imediato**, a imagem do retângulo inscrito no semicírculo em seus vários momentos trata-se de um interpretante em abstrato, pressupondo a probabilidade de resultados para o cálculo de área. No nível do **interpretante dinâmico**, a imagem na tela do computador e a possibilidade de animação da figura por meio do **Winplot** permitiram aos estudantes maiores perspectivas e simulações na abordagem do problema. Segundo Hildebrand (2002), “a simulação é um aspecto importante na observação das formas matemáticas” (110). Nesse sentido, o uso do software foi fundamental, pois permitiu aos estudantes realizarem várias simulações de áreas do retângulo.





Nas entrevistas, alguns estudantes mostraram o interesse em trabalhar com aplicações que envolvessem conceitos de Limites e Derivadas em um curso de Cálculo como uma forma de experimentar novas abordagens que viessem contribuir com o seu conhecimento matemático, didático e pedagógico.

Rosana - Importante tem vários procedimentos de cálculo que facilitam e explicam alguns processos matemáticos, os quais aparecem sem sentido quando estamos no Ensino Médio, por exemplo, encontrar o vértice de uma função do segundo grau. Em relação **a formação do futuro professor**, eu acredito que é bom o professor saber mais, ter um maior conhecimento.

Patrícia - Eu acho que é uma disciplina importante, porém, eu acho que faltam no curso as aplicações, como aluna de Cálculo, sempre me pergunto: onde eu vou usar isso? o que eu vou fazer com isso? Eu acho que falta ensinar ao aluno onde aplicar os ensinamentos do Cálculo. A teoria é importante, mas falta aplicação. E para **o futuro professor**, dá uma base pra ele entender muitas coisas. É claro que se for dar aula lá pra oitava série, tem muita coisa que ele não vai precisar passar. Mas é importante o professor saber mais do que precisa para ensinar em nível fundamental.

Ao considerarmos esse aspecto entendemos que na aplicação e desenvolvimento da **Atividade 3**, na qual foi investigado um problema de otimização, contemplamos parte dessa expectativa, possibilitando aos estudantes revisitarem conceitos matemáticos estudados em nível escolar além de experienciarem uma abordagem diferenciada da qual estão comumente acostumados a tratar em classe, durante o período letivo de aulas, como a pesquisadora pôde constatar durante o período de observação. Nessa atividade os estudantes tiveram a oportunidade de conjecturar sobre alguns conceitos de crescimento, decrescimento, comportamento assintótico, máximos e mínimos de funções, por meio do software matemático - **Winplot**. Vejamos abaixo excertos de comentários relacionados a essa temática, apresentada pelos estudantes.

Frederico e Henrique - Montar o retângulo por meio do software foi o que a gente achou mais interessante, outra coisa bem legal foi ter a noção de trabalhar na planilha, poder relacionar máximos e mínimos. Já no Winplot foi a possibilidade de visualizar os gráficos das funções, da função Área e das funções derivadas, além de interpretar através da área do maior retângulo os pontos de máximo e mínimo.

A perspectiva de aplicar os conceitos de Limites e Derivadas de uma função, inter-relacionando várias representações matemáticas no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, com vistas a possibilitar o estudante/futuro professor experiências didáticas além de um conhecimento aprofundado dos conteúdos matemáticos, foi também, bastante discutida pelos professores entrevistados. Assim, alguns dos professores comentaram que:



Professor K - Na formação Matemática do aluno é importante ter noção de problemas envolvendo o vetorial e o não vetorial, a idéia do topológico, do métrico. São idéias importantes para o individuo conhecer, ter uma idéia daquilo que se chama Matemática. Outra coisa que o aluno deve ter nesse aprendizado entre diversos fatores é a experiência didática, trabalhar com metodologias diferentes daquelas que estão acostumados, é importante que ele tenha essas experiências didáticas, principalmente no início do curso. Acho que dá pra fazer atividades interessantes pro Ensino Médio. Fazer o aluno pensar ao invés de propor procedimentos operatórios em que se aplique uma variedade de fórmulas que o cara não tem nenhuma idéia do que está fazendo. Agora pra formação do professor eu acho importante, um conhecimento mais profundo, mais substancial da área que ele está atuando.

Professor W - Em um curso de Cálculo eu costumo sempre privilegiar bastante as aplicações. Não só no Cálculo, qualquer curso que eu ministre aulas. Isso acontece, talvez por minha formação for mais aplicada. Então, eu tento sempre dá uma motivação maior, mais prática. Então, essa é a história do algo real criar-se um modelo matemático. Esse modelo matemático você expressa por uma linguagem seja ela geométrica, algébrica etc. E aí com o conteúdo desenvolvido você resolve e busca comprovar usando a linguagem Matemática. Então eu valorizo demais, acho que é importante e tem que haver esse jogo, com as diversas representações

Professor Z - eu diria que saber Cálculo é uma coordenação entre essas representações. é fundamental que o aluno ou futuro professor saiba coordenar resultados de uma tabela, perceber diferenças e semelhanças entre representações de funções do primeiro grau, do segundo grau, de uma exponencial, de uma polinomial até graus razoáveis etc. Então ele tem que saber coordenar essas representações. E, se tiver um software para lidar com elas, melhor ainda. O software nos possibilita observar os padrões e ter uma outra compreensão. [...] aprendermos de uma maneira criativa sem decorarmos as demonstrações, passa a ser uma articulação. Então, no meu modo de ver o Cálculo é importante, é fundamental para o aluno ter noções de determinados conceitos matemáticos, mas não adianta saber resolver integral, ele precisa entender integral, ele precisa entender taxa de variação pra entender o que está por trás dos modelos econômicos, modelos de reserva de avião que estruturam as suas vidas e isso é fundamental.

5.5.4. Atividade 4

Para a **Atividade 4**, foi proposto um problema, inter-relacionando conceitos de **Geometria Espacial e Cálculo Diferencial e Integral I**. Esta atividade buscava investigar um problema de **Otimização** por meio do software **Winplot**, visando explorar as representações algébricas, gráficas, e geométricas. A proposta da Atividade consistia em: **Determinar as dimensões de uma lata de refrigerantes de $111,5\pi \text{ cm}^3$, construída com a menor quantidade possível de metal, considerando que o preço do material usado para o fundo e a tampa da lata custa três centavos por centímetro quadrado e o preço do material usado para a lateral da lata custa dois centavos por centímetro quadrados.**

Para tanto, foi explicitado aos estudantes, que para o desenvolvimento desta **Atividade Exploratório Investigativa**, utilizaríamos o recurso dos softwares: **Winplot** para fazermos a simulação geométrica do problema, bem como para esboçar os gráficos das funções. O pacote algébrico do **Maple** seria utilizado para experimentarmos e comprovarmos as soluções

encontradas das representações algébricas, realizadas previamente pelos estudantes, utilizando lápis e papel.

Sendo essa atividade, um pouco mais elaborada que as demais, foi sugerindo aos estudantes que considerassem a possibilidade de **visualizar** a lata cilíndrica planificada e, a seguir, que eles procurassem descrever algebricamente a **Área** da tampa e do fundo da latinha. Para que pudéssemos discutir os resultados em grupo foi proposto ainda aos estudantes que utilizassem a letra **r** para representar o raio da tampa e do fundo, **h** a altura e **C** o custo (em centavos) do material necessário para construir uma latinha.

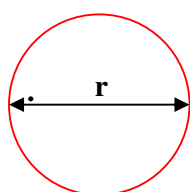


Figura 33: Tampa

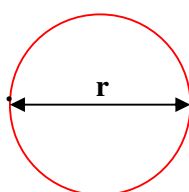


Figura 34: Base

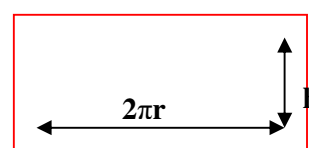


Figura 35: Lateral

Encontrada as respectivas Áreas: $A = \pi \cdot r^2$ (área da tampa e do fundo) e $A = 2 \pi r h$ (Área da lata aberta), tarefa que todos concluíram sem grandes dificuldades, embora, em diversos momentos a interação entre pesquisadora e estudantes tenha sido relevante para esse intento. Prosseguindo a investigação, já cientes dos dados acima estabelecidos, os estudantes puderam então conjecturar a respeito do custo do material para a confecção da embalagem. Para tanto, retornaram a discutir entre eles próprios e, por meio de alguns questionamentos por parte da pesquisadora, chegaram por fim a um consenso, determinando que o custo total (somando o custo do lado com os custos da tampa e do fundo), poderia ser expresso da seguinte maneira:

$$C = 3\pi r^2 + 3\pi r^2 + 4\pi r h \Rightarrow C = 6 \pi r^2 + 4\pi r h$$

Determinada a **Equação custo**, os estudantes em consenso chegaram a conclusão, depois de muita reflexão e discussão, que para desenharem o gráfico de $C = 6 \pi r^2 + 4\pi r h$, por meio do **Winplot**, seria necessário escrever o **Custo em função apenas de uma variável**, de maneira que o próximo passo na exploração da Atividade seria o de expressar a **altura h** em função de **r**. Foi então, solicitado aos estudantes, que conjecturassem um pouco mais a respeito, e que sugerissem uma solução. Assim, após amplas discussões e questionamentos entre a pesquisadora e os estudantes o Custo em função do raio pôde ser representado algebricamente, substituindo a altura h na função custo, como indicado abaixo:

$$C = 6\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot rh \Rightarrow C(r) = 6\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot r \frac{111,5}{r^2} \Rightarrow C(r) = 6\pi r^2 + \frac{446\pi}{r}$$

Nesse momento da investigação, foi sugerido aos estudantes que, antes de desenharem o gráfico da função custo, eles deveriam fazer a construção da latinha por meio do **Winplot**, simulando as dimensões do volume e da altura do cilindro.

Primeiramente foi solicitado à eles que desenhassem o círculo representando a base (equação do círculo de raio r). Para desenhar a tampa da latinha (círculo de raio r , acima do eixo Ox) um grupo sugeriu uma translação, somando a equação do círculo com a altura;

$$h = \frac{111,5}{r^2}. \text{ Isto é, } 6\pi r^2 + \frac{446\pi}{r} + \frac{111,5}{r^2}.$$

Essa sugestão foi interessante,

principalmente por ter sido uma iniciativa dos próprios estudantes. Dado um tempo, e diante de muitas sugestões chegaram à solução (Figura 36).

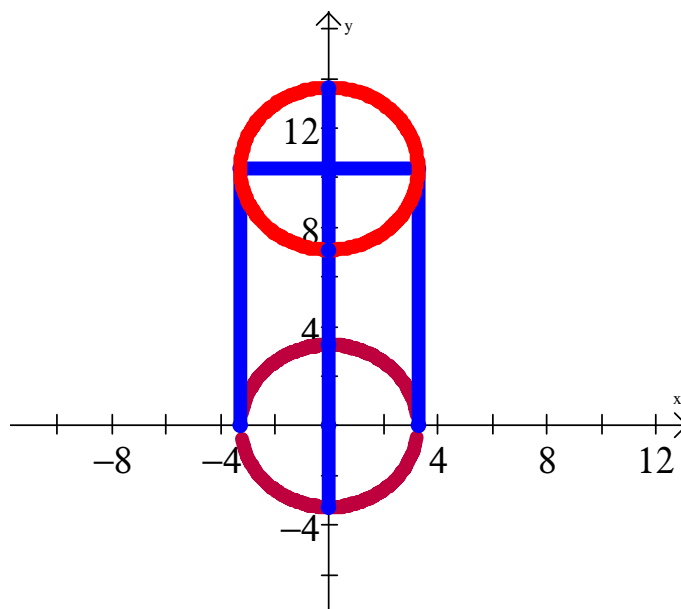


Figura 36: O Cilindro

Prosseguindo na exploração da Atividade foi solicitado aos estudantes que abrissem uma outra tela, no **Winplot**, para que pudessem desenhar os gráficos representando as funções **Custo**, **Altura** e **Volume** da latinha, bem como os pontos genéricos pertencentes a cada uma dessas funções, de maneira que pudessem **animar** os gráficos comparando essas representações à representação geométrica do **cilindro**. Vale ressaltar que, para essa tarefa, os estudantes já estavam familiarizados com os comandos, portanto, poucas foram as intervenções realizadas sob esse aspecto (Figura 37).

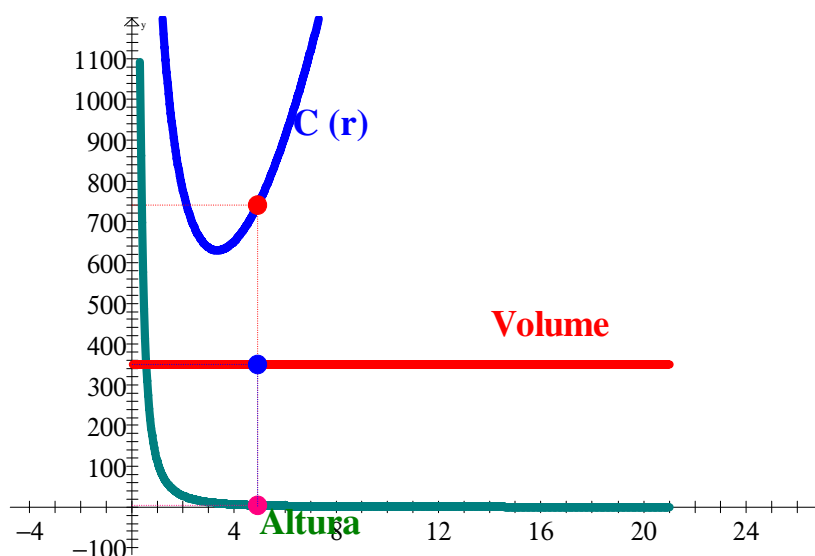


Figura 37: Representação da Função Custo, Altura e Volume.

Observando os gráficos, os estudantes puderam concluir que o **Custo** era estimado **Mínimo** para algum valor de r e que deveriam achar uma maneira de encontrar esse valor. Assim, os alunos montaram no software PLANILHA a função Custo e testaram diversos valores. Qual seria o valor mínimo? Semelhantemente a atividade 3, embora com dados e enfoque diferenciados, os estudantes concordaram que no valor do custo Mínimo a derivada da função seria igual a zero. Assim, derivando a função **Custo** $C(x)$, os estudantes fizeram, primeiramente, o cálculo da **Derivada** no papel e então resolveram experimentar os resultados no **Maple**.

Levando em conta que o raio poderia ser qualquer valor positivo, o objetivo, portanto, seria determinar o Mínimo absoluto de $C(r)$, para $r > 0$. Assim, a partir da derivada de $C(r)$, discutimos que os pontos críticos da função indicariam uma resposta para o problema. Supondo então, que a função passa por um **Mínimo** no ponto em que a derivada é nula, o custo Mínimo do material para confecção da latinha apresentava-se de **menor valor para o raio igual ao valor abaixo**;

$$C'(r)=0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{223}{6}} \cong 3,3372.$$

Finalmente para ter certeza de que esse extremo correspondia realmente a um **Mínimo absoluto** (e não a um **Máximo**), bastou que os estudantes observarem que $C'(r)$ possuía apenas um ponto crítico, para $r > 0$. Para justificar esse resultado os estudantes calcularam a segunda **derivada** de $C(r)$ com lápis e papel e, por meio do **Maple**, puderam experimentar e comprovar as suas respostas. Concluída as justificações algébricas, foi solicitado aos

estudantes que desenhasssem, por meio do **Winplot**, os gráficos das funções $C'(r)$ e $C''(r)$, para que pudessem **visualizar** o comportamento das mesmas em comparação à **Função Custo** $C(r)$.

Ao **movimentarem** os pontos genéricos sobre essas funções (Figura 38), puderam perceber que, quando o ponto atinge o menor valor em $C(r)$, o ponto sobre $C'(r)$, tocava o eixo Ox , indicando o zero dessa função, ao mesmo tempo em que para as funções altura $h(r)$ e volume $V(r)$, os valores aproximados, correspondiam a 10,011m e a 350 ml, respectivamente, cujas dimensões determinavam a solução para a **Atividade 4**.

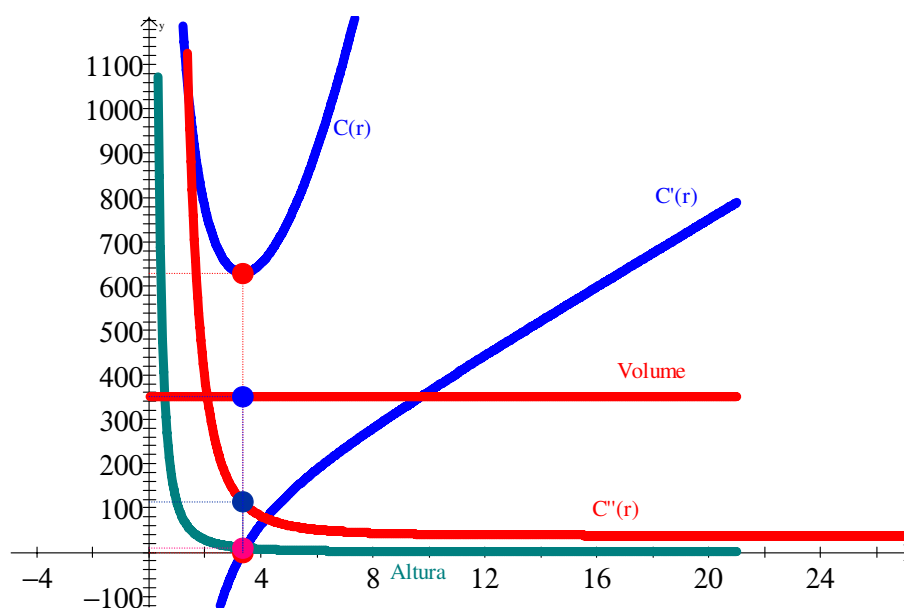


Figura 38: Custo Mínimo

Ao finalizar a investigação sobre o problema apresentado na **Atividade 4**, foi proposto aos estudantes retomarmos a representação geométrica do cilindro de maneira a observarmos simultaneamente a animação dos gráficos das funções $C(r)$, $C'(r)$, $C''(r)$, $h(r)$, $V(r)$ em relação a do cilindro por meio do **Winplot**.

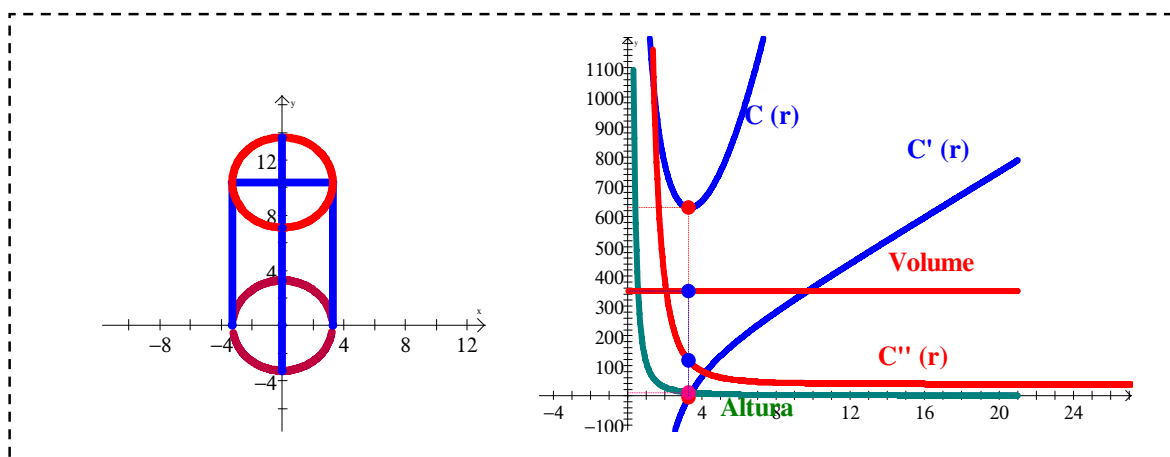


Figura 39: Cilindro versus Representação Algébrica das Funções Custo, 1ª. e 2ª. Derivadas

Essa abordagem foi importante, pois os estudantes tiveram a oportunidade de perceber que quando a função **Custo** atingia seu **menor valor**, simultaneamente, o cilindro configurava-se na forma ideal, ou seja, expressando as dimensões **de menor quantidade para o metal necessário na construção da latinha de cerveja**, considerando-se, obviamente, os dados apresentados no problema.

Encerrando as Atividades, a pesquisadora solicitou aos estudantes que registrassem no papel considerações sobre os conceitos trabalhados durante as discussões da **Atividade 4**, convidando-os também a falarem um pouco sobre a abordagem empregada nesta pesquisa. Vejamos as opiniões dos estudantes à respeito:

Robin- Lidar com gráfico é uma coisa que prende a atenção [...] pra alguns é importante, pra outros não, mas na minha opinião achei bastante interessante.

Robin e Clotilde - A parte mais difícil do problema foi pensar como escrever a equação dos três gráficos da função Custo, da derivada e da segunda derivada.[...] Para o aluno que não tem noção de derivada, é importante ter um conhecimento anterior.

Any - Mas, mesmo assim (**referindo-se à fala de Henrique**), pra trabalhar com os alunos do ensino médio é bem interessante, fica bem mais rápido pra eles visualizarem...

Henrique -...é, porque a gente pode relacionar as várias representações, é bem melhor do que ficar imaginando a figura, o que está acontecendo. A idéia de partir de uma figura geométrica para a equação, pode ser que no início fique difícil, mas é possível trabalhar desta maneira mesmo com alunos que desconhecem os conteúdos de derivada e limites.

Henrique - Gostei da atividade, pois deu pra ver o comportamento de vários gráficos. O comportamento do gráfico do Custo, entre outros. É só meio complicado pro ensino médio, você explicar que uma curva ou que aquele gráfico representa, por exemplo, o volume, ou altura do cilindro. Mas essa forma de abordar os conteúdos matemáticos é muito interessante.

Augusto - A atividade de hoje, eu gostei bastante, principalmente a parte de manipular vários gráficos ao mesmo tempo e... é interessante que o computador agiliza um processo, que se a gente fosse fazer manualmente seria inviável. E com relação ao problema proposto na atividade de hoje, envolvendo cilindro e volume, eu acho possível pelo menos nessa perspectiva ser abordado no ensino médio, porque, por exemplo, dado um volume fixo dá pra trabalhar só com equação do segundo grau envolvendo a variável r . Dado r , colocar a altura em função do raio. E como é uma função do segundo grau, dá pra trabalhar normalmente com máximo, mínimo, sem falar de derivada.

Na opinião geral dos estudantes, esta atividade foi bastante interessante, mesmo porque tiveram a possibilidade de perceber a **movimentação** de vários gráficos associados à **imagem** do cilindro. Mesmo com relativa dificuldade ao modelar a função **Custo** partindo da figura do cilindro, foram poucas as interferências por parte da pesquisadora, no sentido de orientar o uso dos comandos do **Winplot**, devido os estudantes já se encontrarem em mais familiarizados com a linguagem do software, o que ajudou bastante no processo de exploração do problema. Novamente a **simulação das imagens**, por meio do **Winplot**, foi de grande relevância para a compreensão e interpretação do problema proposto na atividade. Podemos perceber essa afirmação de acordo os comentários de alguns estudantes;

Any - pra mim ajudou bastante, melhorou muito a visão que eu tinha antes, agora, quando começar a trabalhar (**referindo-se ao estudo do Cálculo I**), ficou mais fácil perceber a importância dos gráficos em relação à sua representação algébrica. Eu acho que ajuda muito não só pra mim, como para os meus futuros alunos do ensino médio ou fundamental, pois é uma forma de ver e analisar os conteúdos matemáticos.

Clotilde - Eu acho que o aluno ia aprender melhor, olhando pelo gráfico, apesar de, se não for bem trabalhado em sala de aula, com certeza sentirão alguma dificuldade, mas para aprender é melhor, acredito que facilmente ele pega o jeito (**referindo-se a linguagem do software Winplot**).

De acordo com Peirce (apud Hildebrand, 2002), “as imagens matemáticas são representações dos modelos que concebemos mentalmente, isto é, são signos diagramáticos que exteriorizam o comportamento de nossa idéias” (p.102).

Deste modo, sob o **ponto de vista qualitativo**, a **imagem do cilindro** relacionada aos gráficos da função **Custo**, **Altura**, **Volume**, **Primeira e Segunda Derivadas da Função** estudada, constituíram-se em **ícones diagramáticos**, possibilitando aos estudantes uma disponibilidade contemplativa na interpretação do problema, como pudemos perceber na fala do estudante Henrique.

Henrique - No começo não tinha entendido muito qual era a relação da construção da latinha com as representações gráficas das funções. Mas, depois que você mostrou pelo Windows ligando um no outro, caiu a ficha, foi bem legal.



Em **Semiótica**, **ícones** expressam suas características referentes aos conceitos matemáticos em **Primeiridade**. Em termos da **Secundidade**, podemos analisar, particularmente olhando os nossos dados, que as **imagens** dos gráficos, formas algébricas e geométricas se referiram à forma singular no contexto não por similaridades, mas de acordo com um sistema matemático, no qual estavam inseridas, respeitando regras, propriedades e conceitos relativos aos gráficos em formas de curvas e retas correspondentes a determinadas funções algébricas.

Em termos da **Terceiridade**, tendo em vista tudo o que propõe a apreensão e a compreensão de uma **representação ou de uma imagem** e, ainda considerando o que esta imagem possa referir e representar temos, no processo da interação desta pesquisa, **a interpretação das imagens** pelos estudantes, por meio de diálogos e da criação de diferentes estratégias buscando dar possíveis respostas às **Atividades** propostas, caminhando no sentido da **generalização** do pensamento, em busca de uma **Lei** que pudesse exprimir **os aspectos qualitativos e como esses aspectos se manifestavam nas imagens dos diferentes gráficos, tornado-se singulares às essas imagens por suas características matemáticas**. Nesse processo, trazendo ao contexto da Atividade 4, os estudantes criaram a Função Custo, a Função Altura, a Função Volume do Cilindro que, por sua vez, representava a **latinha de cerveja**, ou seja, constituía-se em um **signo**, revelando assim suas características constituintes como **objeto dinâmico** e como **objeto imediato do signo**. Em outras palavras, as inter-relações das **características conceituais e figurais das imagens**, serviram como objetos de reflexão e de investigação para os estudantes desta pesquisa. Propiciando aos mesmos elaborarem raciocínios cada vez mais gerais que os auxiliaram na compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados.

Em termos gerais, as inter-relações e coordenações entre as várias **representações gráficas, geométricas e algébricas** constituíram-se em uma abordagem interessante, pois implícitas aos problemas propostos nas atividade puderam ser observadas em seus aspectos **sígnicos**, que se materializaram em imagens, gráficos e fórmulas, todos referentes ao contexto matemático organizado, segundo um sistema fundamentalmente diagramático. De acordo com Hildebrand (2002) “as imagens representam ou traduzem uma linguagem abstrata, enquanto as expressões são representações destas formas”. (p.101).





5.6. Análise das Entrevistas

Para a análise apresentamos o seguinte panorama (Figura 8), o qual encontra-se subdividido em quatro sub-panoramas. Onde cada um dos sub-panoramas representa um dos procedimentos metodológicos adotados para a coleta de dados da pesquisa.

A idéia de inter-relacionarmos esses quatro sub-panoramas consistiu em extrairmos dos seus aspectos gerais, categorias que nos possibilitaram realizar uma análise considerando, obviamente, os pontos de vista dos estudantes e professores de Matemática. Nesse processo, buscamos associar os aspectos mais relevantes, de maneira que se tornou possível delinear algumas respostas para a questão diretriz que definimos como dimensões.

Depois de uma leitura aprofundada tendo em vista as percepções dos professores foi possível esquematizar em tabelas algumas categorias. Na entrevista com os professores K, Y, W e Z e, com os estudantes, pontos de vistas compartilhados pela maioria puderam ser destacados em relação aos temas tratados: Conhecimento do Futuro Professor de Matemática; Ensino do Cálculo Diferencial e Integral I; Representações Matemáticas mediadas por Softwares Educativos em uma perspectiva Semiótica.

Nessa perspectiva explicitaremos nas tabelas a seguir (Figuras 40 e 41) os principais aspectos retirados do conjunto de entrevistas realizadas, apresentando os temas abordados e percepções compartilhadas entre os professores e os estudantes, considerando principalmente as percepções assumidas na fala dos professores, K, Y, W e Z e dos estudantes, diante questões propostas pela pesquisadora durante as **Entrevistas** apresentadas no Capítulo 4 (itens 4.5 e 4.6).



Temas Abordados	Percepções apresentadas pelos dos Professores	Identificação do Professor
Conhecimento do Futuro Professor de Matemática	✓ Vivenciar metodologias diferenciadas no início do curso	K e Z
	✓ Aplicações	K, W e Z
	✓ Conhecimento mais aprofundado dos conceitos e conteúdos matemáticos.	K, Y, W e Z
	✓ Várias formas de representar: ▪ Vetorial/não vetorial; ▪ Métrico/topológico.	K, W e Z
CDI I	✓ Ensino Médio X Universidade;	K, Y, W e Z
	✓ Matemática discreta X Matemática com movimento;	
	✓ ; Discreto X Contínuo	
	✓ Linguagem lógico formal, própria da disciplina;	K, Y, W e Z
	✓ Aplicações;	K, W e Z
	✓ Ferramenta básica na exploração conceitos matemáticos;	X, Y, W e Z
TICs (Winplot)	✓ Compreensão e interpretações dos conteúdos abordados ;	K, Y, W e Z
	✓ Difícil Linguagem;	K e W
	✓ Visualização de gráficos e figuras geométricas;	K, Y e W
	✓ Compreensão dos conceitos matemáticos;	X, Y, W e Z
	✓ Não substitui formas de representações dos conceitos ou objetos matemáticos, mas acrescenta.	K, W e Z
Representações Matemáticas	✓ Maio rapidez e maior possibilidade em representar a linguagem matemática.	Y, W e Z
	✓ Representar conceitos	K, Y, W e Z
	✓ Reflexão, compreensão e interpretação; ▪ Cada representação permite tirar conclusões particulares de um mesmo objeto matemático; ▪ Transforma o pensamento ▪ Justificação de um fato	K, Y, W e Z
	✓ Propicia um conhecimento mais profundo;	K, Y, W e Z
	✓ Aplicações	K, W e Z
	✓ Coordenação de representações	Y e Z

Figura 40: Síntese das Principais Idéias Relacionadas à Entrevistas com os Professores de CDI I.

Temas abordados	Percepções apresentadas pelos dos estudantes	Estudantes⁶⁸
1º. Bloco Motivação para fazer o curso de Matemática	✓ Gosto pela Matemática	+
	✓ Facilidade e familiaridade com os conteúdos matemáticos em nível fundamental e médio	+
	✓ Formas diferentes de resolver os problemas	±
	✓ trabalhar como professor de Matemática	±
	✓ Curiosidade	-
	✓ Pesquisa	-
2º. Bloco A importância do cálculo para a formação do futuro professor de Matemática	✓ Conhecimento aprofundado dos conceitos e conteúdos matemáticos;	±
	✓ Matemática diferente da ensinada em nível médio;	-
	✓ Falta aplicações;	±
	✓ Ferramenta básica na exploração conceitos matemáticos;	+
	✓ Novas ferramentas para a construção de gráficos, possibilitando uma maior exploração e coordenação das representações matemáticas.	±
	✓ Oferece ao futuro professor um conhecimento mais profundo, possibilitando ao mesmo, mais segurança para ensinar;	-
3º. Bloco Representações Matemáticas E TICs	✓ Abrange todo o conteúdo estudado em nível médio e fundamental.	-
	✓ Importante, Fundamental	+
	✓ Visualização de gráficos e figuras geométricas;	+
	✓ Compreensão dos conceitos matemáticos;	+
	✓ O uso do software não substitui formas de apresentações, mas acrescenta.	±
	✓ O uso do software possibilita maior rapidez em representar a linguagem matemática.	±
	✓ Representar conceitos	±
	✓ Reflexão, compreensão e interpretação; ▪ Cada representação permite tirar conclusões particulares de um mesmo objeto matemático; ▪ Transforma o pensamento ▪ Justificação de um fato	±
	✓ Aplicações	±
	✓ Ajuda a entender a teoria	+
	✓ Para o uso do software, quanto maior conhecimento matemático, melhor na investigação e exploração do problema	±

Figura 41: Síntese das Principais Idéias Apresentadas pelos estudantes durante a entrevista

A partir de sistematizações das concepções implícitas nas questões das **Entrevistas**, além do que foi observado em classe e por meio da aplicação e desenvolvimento das quatro atividades exploratório- investigativas identificamos quatro **dimensões** implícitas relevantes em nossa análise:

⁶⁸ A terceira coluna (Figura 41) apresenta a opinião dos estudantes, cujos sinal (+) implica na opinião da maioria dos estudantes, (±) equivale à boa parte dos estudantes embora não corresponda na opinião da maioria; (-) implica na opinião de poucos estudantes;

5.6.1. Interpretações Diferenciadas sobre os Conceitos Matemáticos

As representações possibilitam interpretações diferenciadas sobre os conceitos matemáticos, pois cada representação permite tirar conclusões que em outras não são evidenciadas com tanta clareza. Essa idéia foi abertamente declarada tanto pelos estudantes como pelos professores durante as entrevistas e claramente observados pela pesquisadora durante a aplicação e desenvolvimento das atividades bem como por meio das observações em classe.

Professor K - Cada representação permite ao aluno tirar algumas conclusões que outras representações não permitem. Então justamente por isso que é importante ter representações, representar conceitos. Do ponto de vista formal, lógico você tem representações, que nos permitem fazer variadas interpretações sobre as definições. A partir das definições e axiomas você faz as demonstrações, essa é a parte formal. Agora quando você fala em raciocínio, o indivíduo vai pensar, e nós não pensamos com a definição, ninguém pensa em derivada, com a definição de derivada, ninguém pensa em integral com a definição de integral. Quando você vai resolver um problema que envolva integral ou derivada, você não vai pela definição, você usa as representações, por isso ela é importante. Se o indivíduo não faz isso, a única coisa que ele vai fazer é classificar problemas, e associar esse problema ao tipo de fórmula, o que é muito comum.

Any - Eu acho muito importante trabalhar com várias representações, porque às vezes de uma forma a gente não enxerga direito, mas se o professor mostrar aquela função na forma de um gráfico, uma coisa mais visual, podemos passar a entender melhor. Então eu acho muito importante mostrar várias formas de fazer, porque o aluno se dá bem com uma, mas isso não garante que todos entendam, entendeu? Eu acho muito importante o professor usar várias representações, principalmente, recursos visuais, gráficos, diagramas. Eu acho muito importante pra compreensão sim.

Na literatura pesquisada, encontramos Hitt (2003), que aborda essa dimensão assinalando que cada representação é parcial em relação à uma compreensão global, portanto, devemos considerar como absolutamente necessário o intercâmbio entre as diferentes representações de um dado conceito matemático.

Ball e Ma (1988, 1999, apud Veloso, 2004) postulam que, um professor que almeja alcançar um conhecimento profundo acerca da Matemática e como fazer Matemática deve ter a capacidade de inter-relacionar conceitos matemáticos às suas várias representações, de maneira tal que venha refletir no seu conhecimento matemático didático e pedagógico, possibilitando a esse professor em formação, um conhecimento substancial e significativo, por conseguinte, possibilitando ao mesmo aprender um corpo unificado de conhecimentos.

Acreditamos, portanto, que essa é uma dimensão importante na abordagem de criarmos contextos de ensino e aprendizagem, os quais possam inter-relacionar e explorar as representações matemáticas em suas múltiplas perspectivas, de maneira a apreender suas



qualidades, suas referências, sua simbologia. Considerando o fato de que os estudantes ao serem interrogados mostraram-se inclinados a novas abordagens na apreensão dos conceitos matemáticos, evidenciando em seus comentários que a exploração de várias representações possibilitam aos mesmos um maior esclarecimento dos conceitos estudados em sala de aula. Nesse sentido, a fala de alguns dos estudantes vem autenticar essas afirmações.

Augusto - Primeiro, eu acho que a aula fica mais dinâmica, mais atraente, porque, às vezes, o aluno não se interessa por uma forma de resolver o assunto, mas se atrai, pela outra. E uma forma complementa a outra. Uma forma de representar, por mais excelente que seja, não vai ser melhor ou pior do que a outra. Vai complementar a outra forma de representação.

José - Usar várias representações, é perfeito. Pois, nos permite ver uma função, de várias formas, algebricamente, em paralelo à forma gráfica. No meu entender a compreensão é quase total. Ajuda muito.

Clotilde - Eu acho interessante que o professor explique a resolução de um problema usando várias formas de representar, porque, por exemplo, tem aluno que tem mais facilidade em enxergar as coisas no gráfico, tem aluno que já vê o teorema e pega todo o conteúdo. Mas eu acho importante trabalhar com variados tipos de representações, porque um aluno não é igual ao outro não é? Logo aprende diferente e aprende com a representação que tiver mais facilidade de entendimento.

Percepções que são corroboradas pela fala dos professores, nesse sentido o professor Z postula que;

professor Z - É importante que o aluno ou futuro professor saiba coordenar resultados de uma tabela, perceber diferenças e semelhanças entre representações de funções do primeiro grau, do segundo grau, de uma exponencial, de uma polinomial até graus razoáveis etc. Então ele tem que saber coordenar essas representações. E, se tiver um software para lidar com elas, melhor ainda. O software nos possibilita observar os padrões e ter uma outra compreensão. No meu modo de ver a visualização torna-se cada vez mais importante. Entendermos um gráfico, entendermos diagramas. Em Cálculo mais ainda, coordenarmos os diagramas das demonstrações com as demonstrações, aprendermos de uma maneira criativa sem decorarmos as demonstrações, passa a ser uma articulação. Entendermos o que foi anteriormente provado. Toda a parte lógica com a parte algébrica, às vezes operativas de equivalência com uma parte gráfica e com uma parte tabular, também.

Essas concepções mostram a importância de desenvolver em um contexto pedagógico a possibilidade de propiciar aos estudantes/ futuros professores a capacidade de visualizar e a interpretar um problema matemático por meio de várias representações.



5.6.2. O Aspecto Visual das Representações Matemáticas

Sob o aspecto visual das representações matemáticas, em nossa análise, considerando os comentários dos estudantes e professores é notória a relação entre representações gráficas e visualização. Os estudantes, em particular, expressaram como a possibilidade de enxergar os gráficos na tela do computador por meio do Winplot foi significativo e, como esse aspecto foi importante na constituição e justificação dos modelos matemáticos desenvolvidos, principalmente, durante as atividades 3 e 4 ao determinarem a função área no caso do retângulo inscrito e custo ao modelarem o cilindro representando a latinha de cerveja.

Any - pra mim ajudou bastante, melhorou muito a visão que eu tinha antes, agora, quando começar a trabalhar (**referindo-se ao estudo do Cálculo I**), ficou mais fácil perceber a importância dos gráficos em relação à sua representação algébrica. Eu acho que ajuda muito não só pra mim, como para os meus futuros alunos do ensino médio ou fundamental, pois é uma forma de ver e analisar os conteúdos matemáticos.

Em relação à importância de coordenar representações na constituição do conhecimento do futuro professor um dos professores entrevistados comenta;

Professor Z - O aluno ou futuro professor saiba coordenar resultados de uma tabela, perceber diferenças e semelhanças entre representações de funções do primeiro grau, do segundo grau, de uma exponencial, de uma polinomial até graus razoáveis etc. Então ele tem que saber coordenar essas representações. E, se tiver um software para lidar com elas, melhor ainda. O software nos possibilita observar os padrões e ter uma outra compreensão. No meu modo de ver a visualização torna-se cada vez mais importante.

Semioticamente podemos inferir que, não só as representações gráficas possuem a capacidade de apresentar uma **qualidade**, o aspecto visual, mas todas as representações sejam elas na forma escrita, geométrica, gráfica, todas possuem **iconicidade**, e dimensões **diagramáticas**, cuja capacidade de referência, provoca no receptor interpretações diversas.

Nesse sentido, Hitt (2003) postula que a visualização desempenha um papel essencial nesse processo, principalmente mediante a possibilidade de coordenarmos diferentes representações matemáticas. Afirmação que pode ser legitimada nas palavras de muitos autores estudados nesta pesquisa, tais como: (BEM-CHAIM, LAPPAN E HOUANG, 1989, apud BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 80) e Miskulin (1999), os quais assinalam que a possibilidade do estudante/professor em inter-relacionar distintas representações associada à capacidade de visualização possibilitam-lhes a capacidade de interpretar e compreender informações figurais e conceituais, considerando que toda representação possui aspectos semióticos e instrumental, de maneira que a semioticidade pode ser percebida de várias formas, seja em desenhos, gráficos, gestos, discursos, palavras, entre outras e a



instrumentalidade das representações está relacionada aos objetivos de se realizar tal representação. Outra dimensão revelada em nossa coleta de dados configurou -se em:

5.6.3. Inter-Relacionar Diversas Representações Matemáticas Constitui-se em um Método versus o Tecnicismo Operatório Matemático

O que implica que a abordagem de inter-relacionarmos e coordenarmos as representações entre si revela-se um instrumento fundamental no processo de compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos, um meio de comunicação para as aplicações em contextos variados, em termos de ensino da matemática. Possibilitando um canal de informação visual e simulações, de maneira que o futuro professor acrescente e/ou re-signifique conhecimentos anteriores, tornando possível representar e interagir com modelos matemáticos, cujo procedimento é por vezes complexos.

Acreditamos assim, que no processo de ensino e aprendizagem da Matemática torna-se necessário e fundamental o futuro professor estar em contato com uma abordagem teórico-metodológica, a qual prioriza a coordenação das diversas representações, por meio da tecnologia, mais especificamente, softwares educativos, pois, assim sendo, tal abordagem poderá possibilitar-lhe a experiência de apreender os conceitos matemáticos de maneira significativa, sem memorizações, evitando assim, o uso de técnicas desnecessárias. Essa preocupação foi ressaltada na fala dos professores entrevistados;

Professor Z - Entendermos um gráfico, entendermos diagramas. Em Cálculo mais ainda, coordenarmos os diagramas das demonstrações com as demonstrações, aprendermos de uma maneira criativa sem decorarmos as demonstrações, passa a ser uma articulação. Entendermos o que foi anteriormente provado. Toda a parte lógica com a parte algébrica, às vezes operativas de equivalência com uma parte gráfica e com uma parte tabular, também.

Professor K - Quando você vai resolver um problema que envolva integral ou derivada, você não vai pela definição, você usa as representações, por isso ela é importante. Se o indivíduo não faz isso, a única coisa que ele vai fazer é classificar problemas, e associar esse problema ao tipo de fórmula, o que é muito comum.

Professor W - Se o futuro professor tiver um entendimento profundo, como também a capacidade de abordar de diversas maneiras as representações Matemáticas, mostra que está evoluindo nos entendimentos. Então se esse estudante prioriza apenas a parte algébrica e não tem domínio sobre a representação gráfica é uma limitação dele, certo? Um conhecimento que ele não domina.

Dimensões como essas são corroboradas por autores diversos na literatura. Assim, Ma (1999, apud Veloso, 2004), em sua leitura, afirma a importância dos futuros professores adquirirem um conhecimento profundo da Matemática, mostrando que um dos caminhos para alcançar essa sabedoria advém da possibilidade de múltiplas perspectivas na abordagem de um problema, inter-relacionando as várias representações matemáticas. Além disso, que seja





capaz de fornecer justificações dessas abordagens e argumentos apresentados. Assim, na concepção de Ma (1999), essa capacidade possibilita o professor conduzir os seus alunos em direção a uma compreensão substancial da disciplina.

Prosseguindo, destacamos uma outra dimensão que se mostrou comum entre os pontos de vista dos professores e estudantes e importante em nossa pesquisa;

5.6.4. Mobilidade das Diversas Representações Matemáticas Possibilitando uma “Ponte” entre a Matemática Escolar e a Acadêmica.

Trazendo essa percepção em um contexto mais específico para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral I, Félix Klein (1907, apud Roxo, apud Braga, 2006) assinala que, o ensino do Cálculo está intimamente ligado a um bom domínio de função por parte do aluno, o que só poderia vingar se o educando transitar com relativo embaraço pelas várias representações matemáticas. Precisamente, o referido autor, afirma com propriedade que “no campo do Cálculo Infinitesimal a descontinuidade entre o ensino secundário e o superior alcança grau máximo” (KLEIN, 1927, apud BRAGA, 2006, p.46).

Esse tema amplamente discutido na área da **Educação Matemática** revelou-se importante em nossa pesquisa, o qual observado sob o aspecto da importância das representações matemáticas na constituição do conhecimento do futuro professor no ensino do CDI I, entendemos que, inter-relacionar e coordenar distintas representações matemáticas significa gerar um contexto didático-pedagógico de possibilidades no caminho da continuidade entre a Matemática escolar e a acadêmica. Nessa perspectiva o professor Z e Y, assinalam;

Professor Z - No Cálculo diferencial eu diria que saber Cálculo é uma coordenação entre essas representações. Então, coordenar algo que o diagrama nos apresenta, com o silogismo de uma demonstração é fundamental. Assim como é fundamental que o aluno ou futuro professor saiba coordenar resultados de uma tabela, perceber diferenças e semelhanças entre representações de funções do primeiro grau, do segundo grau, de uma exponencial, de uma polinomial até graus razoáveis etc. Então ele tem que saber coordenar essas representações.

Professor Y - Na disciplina Cálculo, especificamente, para mim, coordenar várias representações constitui-se em uma ferramenta importante que deve ser utilizada pelo professor do ensino fundamental e médio, quando ele está trabalhando a construção de gráficos de uma função, mesmo que ele não vá passar pro aluno onde essa função apresenta crescimento ou decrescimento ou comportamento assintótico enfim [...].





Os estudantes também se manifestaram a respeito dessa questão

Alexandre - Olha, eu acho o Cálculo I uma das matérias mais importantes do primeiro ano. E o Cálculo II do segundo ano. Porque, como diz o nome, vai ser a parte que a gente vai calcular mesmo. A disciplina Cálculo é básica, ela vai me dar a sustentação pro curso inteiro sabe? Eu vou ter que derivar e integrar em outros cursos. Tem que calcular limites, analisar gráficos. O resto do curso tem muito a ver com isso ok? Então, apesar de não estar indo muito bem. Pra mim é uma matéria extremamente importante e a gente não pode estar deixando lacunas nela, mesmo porque uma coisa que depende da outra. Derivada depende de limite e limite depende de função. A Integral depende da derivada. Portanto, as matérias que eu acho mais importante são Cálculo e Geometria Analítica, porque lá a gente vê gráfico, projeções de gráfico. A disciplina Cálculo I, traz muita informação para o **futuro professor** de Matemática, porque nela, se trabalha muito com função e gráfico. E no colegial, onde eu estudei, observei que os professores não trabalham muito com gráficos. É muito mais fácil pra mim aprender o Cálculo, usando gráficos em vez de só teorema, teorema e calculando. Às vezes observar o gráfico, me ajudou a entender muita coisa, que não tinha entendido até hoje. Então, a forma do professor ensinar deve ser bem diversificada. É bem forte essa parte de gráfico. Mostrar, oh! pessoal como as coisas acontecem. Pois, às vezes, mostrar o gráfico de uma função, permite o aluno observar o comportamento da mesma, se vai subir, descer etc. E até mesmo na Física, a gente vê, que muitas formas na Física sai por derivadas e integrais que a gente aprendeu no Cálculo, então Cálculo é base para a Matemática inteira não é? Então eu acho que o aluno “leva” muita coisa do Cálculo para ensinar. Não que eu vá ensinar derivadas e integral pros alunos do primeiro, segundo terceiro ano. Acho que lá quando eu for ensinar, na hora de solucionar um exercício e rapidamente poder ensinar o aluno de uma outra forma, o que eu aprendi em Cálculo, vai me ajudar a ensinar melhor o meu aluno, portanto eu acho Cálculo essencial sim.

Deste modo, entendemos que sendo as **representações matemáticas** uma “ponte” entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, elas encontram-se no centro de um contexto pedagógico, que aborda problemas e possibilidades citados ao longo da pesquisa, tanto na literatura estudada pela pesquisadora, como por meio dos dados coletados.



5.7. Tecendo a Análise

As diversas facetas que a análise semiótica apresenta podem assim nos levar a compreender qual é a natureza e quais são os poderes de referência dos signos, que a informação transmitem, como eles se estruturam em um sistema, como funcionam, como são emitidos, produzidos, utilizados e que tipos de efeitos são capazes de provocar no receptor (SANTAELLA, 2005, p.4)

“Ao se pensar em Semiótica e suas relações com a Educação Matemática mediada por computadores, se sobressai a imagem da interação entre estudantes e professores” (MISKULIN, MOURA E SILVA, 1996, p.3). Em nossa pesquisa essa interação foi gerada por meio das **observações** realizadas em classe, nas **entrevistas** culminando no desenvolvimento e aplicação das **atividades exploratório-investigativas**. O uso dos softwares nesse contexto encorajou os sujeitos da pesquisa a incorporarem a proposta de investigação dos problemas. Nesse sentido, entendemos que há um grande potencial para a criação de um ambiente educacional dinâmico e acessível ao ensino do Cálculo na constituição do conhecimento do futuro professor de Matemática, de forma que os estudantes possam se apropriar de conceitos, com significados próprios, levando em conta a inter-relação e coordenação de múltiplas representações matemáticas nas suas elaborações conceituais.

Acreditamos, portanto, que se torna necessário e fundamental para constituição do conhecimento de futuros professores considerando o contexto investigado, ou seja, a disciplina **CDI I**, a perspectiva de visualizar figuras, por meio de softwares educativos, conectando essas imagens aos conceitos matemáticos, relacionando-os às suas múltiplas representações. Esta constatação pôde ser legitimada tendo como referência a literatura pesquisada, além de **uma pesquisa aprofundada**, considerando **as inter-relações dos sub-panoramas**, apresentados e ilustrados no Item 5.4 (Figura 8), culminando nas quatro dimensões acima explicitadas.

Reportando-nos à teoria, o estudo da **Semiótica** enquanto a relação apresentada por Steinbring (2006) “conceito”, “signo/símbolo” e “objeto/contexto de referência” constituem um sistema equilibrado e mutuamente apoiado, proporcionando um modelo de mediação semiótica entre referência de contexto e signos subjacentes à influência epistemológica do conhecimento matemático. Esta relação, de acordo com o autor, não deveria ser vista como independente da aprendizagem do estudante.



Na perspectiva de Otte (2006), a generalização é um dos mais importantes processos do pensamento matemático. A generalização, segundo o autor, também possui um papel fundamental, no processo de ensino da Matemática implicando principalmente, na diversidade das suas representações.

Peirce (apud, Otte, 2006), o grande precursor das idéias acima apresentadas pelos autores citados, postula que a cognição e o efeito transformador dos signos sobre o ensino possibilita a todos os envolvidos, (incluímos aqui, estudantes/futuros professores e professores) um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade Matemática, especialmente na escola, na qual, é usualmente seduzida a procedimentos tecnicistas e mecanizados na abordagem dos conteúdos matemáticos. Assim sendo, o estudo da **Semiótica** nos dá suporte aos modelos que pretendemos representar adequando a produção de conhecimento por meio dos diagramas visuais, expressões e formas algébricas, escrita e oralidade, auxiliando o estudante, futuro professor a interpretar e transformar a sua realidade no contexto de ensino e aprendizagem da Matemática.

5.8 Considerações Finais

Ao investigarmos sobre a contribuição das representações matemáticas na constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática, associada a mediação informática por meio do uso de softwares educativos, no ensino do Cálculo Diferencial e Integral I, destacamos em nossa análise quatro dimensões⁶⁹, as quais nos levam a inferir, em termos gerais, que todas as formas de representações matemáticas constituem-se em formas lógicas de organização para o ensino e apreensão dos conceitos matemáticos. Concebendo que, através de um processo semiótico, é possível gerar novas formas de representação e assim *ad infinitum*.

Ao explorar o universo signífico das representações agregamos valores à discussão da constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática, ressaltando a importância desses estudantes/professores, conscientizarem-se da perspectiva semiótica implícita à abordagem de transitar entre várias representações matemáticas no processo de exploração e interpretação dos conceitos, por meio de softwares próprios à disciplina, aumentando assim o grau de compreensão dos mesmos diante uma Matemática que, em princípio lhes parecia estática em nível escolar, passando a ser contínua em nível acadêmico.

⁶⁹ Dimensões explicitadas no Capítulo de Análise





De acordo com Hildebrabd (2002), a Matemática é antes de tudo axiomática e produz conhecimento a partir da semiose dos signos, que por sua vez, caracteriza-se em um estado de constante evolução. Trazendo essa percepção a um contexto mais particular, entendemos que no processo de ensino dos conceitos matemáticos, não devemos conceber cada representação em compartimentos estanques, isoladas de maneira a considerar uma em detrimento da outra, mas contemplá-las como um processo signífico, percebendo suas qualidades, observando suas particularidades e referências de forma que, como interpretantes, o futuro professor possa generalizar estando sempre aberto a interpretações “possíveis” no processo de “fazer matemática”. Deste modo acreditamos que os objetivos desta pesquisa explicitados como: **investigar e ressaltar as potencialidades didático-cognitivas das representações matemáticas em uma perspectiva semiótica, mediadas por softwares educativos, no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I e investigar os limites e possibilidades didático-pedagógicas das representações matemáticas na formação didático- pedagógica do futuro professor de Matemática**, começaram a ser contemplados a partir da Coleta de Dados, desta pesquisa e, por meio, da Análise dos Sub-Panoramas, descritos no Capítulo 5, sendo esses constituídos pelas **entrevistas** realizadas com os **estudantes e professores da UNESP de Rio Claro, observações em classe**, além da aplicação das **atividades exploratório-investigativas**, junto aos sujeitos da pesquisa (estudantes do 1º. Ano de Matemática na disciplina CDI I, UNESP de Rio Claro).

Considerando as compreensões apresentadas na **Análise dos Dados**, algumas inferências podem ser delineadas, de maneira que na concepção da maioria dos professores e estudantes pesquisados, as representações matemáticas são essenciais para a compreensão e visualização dos conceitos matemáticos. Além do que é notória a associação, das representações gráficas à visualização de conceitos, como um meio de compreender e perceber o que está sendo representada na forma algébrica ou escrita, seja essa, no estudo de uma função ou na demonstração de um teorema.

O uso do computador, intermediado por softwares educativos, também foi qualificado de grande relevância pela maioria dos professores como um método importante para o ensino do CDI I, pois possibilita uma compreensão na abordagem dos conceitos matemáticos, quando são exploradas as representações gráficas.

Na concepção dos estudantes pesquisados o desenvolvimento das atividades mediadas pelo Winplot ajudou a visualizar os conceitos, permitindo aos mesmos ver ângulos e perspectivas do problema que na lousa seria impossível, além do Winplot possuir uma linguagem fácil de ser compreendida. Porém, eles próprios observam que o professor, ao





trabalhar com esse recurso, deve ser criativo ao elaborar as atividades, tornando-as interessantes e diferenciadas.

Diante das concepções dos estudantes e professores, reveladas mediante as **entrevistas**, percebemos que muito do que falaram seguem em direção ao que encontramos na literatura a respeito dos temas abordados. Em relação ao ensino do Cálculo no curso de Matemática, especificamente em um curso de Licenciatura, Barufi (2002) assinala que “para a maioria dos alunos a Matemática da Escola Média pouco ou nada tem a ver com o que lhes é apresentado no Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece se constituir em grande dificuldade” (p.69).

Ao atentarmos sobre o que foi revelado pelos estudantes, ao serem interrogados sobre a relevância da disciplina Cálculo I, para a formação de futuros professores de Matemática, buscando entender a importância das representações matemáticas na constituição do conhecimento⁷⁰, nós compreendemos que os estudantes ao ingressarem na Universidade esperam integrar a Matemática que estudaram, em nível médio, com o que estão vendo na universidade. Em **Cálculo**, especificamente, o estranhamento é grande e, embora procurem estar motivados, a frustração, muitas vezes é inevitável, mesmo para aqueles que acham possuir uma grande familiaridade com os conteúdos matemáticos. Logo, em nossa concepção, a busca de uma metodologia mais adequada, ou seja, a exploração e coordenação das **representações matemáticas** com a atuação dos estudantes poderiam propiciar uma melhor aceitação por parte desses ao depararem-se com os conteúdos específicos de um curso de CDI I.

Em nossa percepção, entendemos também que, a disciplina **Cálculo I**, para a maioria dos estudantes entrevistados, foi qualificada como importante, relevante e fundamental para a formação do futuro professor de Matemática. Entretanto, esses não vêem associação dos conteúdos próprios dessa disciplina com o que é ensinado em nível escolar, como confirmado por Barufi (2006). Para nós, como pesquisadores, esse distanciamento entre a Matemática escolar e acadêmica, no contexto da disciplina Cálculo I constitui-se em um impasse ou até mesmo em um contra-senso no processo de constituição do conhecimento do professor em formação.

Nesse sentido, dentre o que foi lido e interpretado pela pesquisadora frente a literatura pesquisada, os estudos de Klein (1927, apud Braga, 2006) é o que mais se aproximou de um esclarecimento para esse impasse, o qual assinala que “precisamente no campo do Cálculo

⁷⁰ Matemático, didático/pedagógico





Infinitesimal é onde a descontinuidade entre o ensino secundário e o superior alcança grau máximo” (p.46). Para Klein (1927; apud Braga, 2006);

[...] ao menos em linhas gerais, no ensino da Matemática; dever-se-ia conduzir a juventude, tendo em conta a sua natural capacidade e disposição, lentamente até chegar a matérias mais elevadas e, finalmente, a formulações abstratas, seguindo o mesmo caminho pelo qual a humanidade tem ascendido do seu estado primitivo aos altos cumes do conhecimento (p.48).

Segundo Braga (2006), Klein achava muito importante ser cultivado desde as séries iniciais a idéia de **variação** e **dependência**. “Aos poucos, com o progressivo e constante trânsito pelas representações tabular, gráfica e analítica de função, o aluno caminharia em direção à sua formação funcional” (p.52). Nesse sentido, Klein (1907, apud Roxo, 1937, apud Braga, 2006) entendia que, “só o precoce afeiçoamento da idéia de funcionalidade traria pleno benefício aos colegiais” (p.52), ou seja, a idéia de função, variação e continuidade, deveriam ser consideradas um capítulo fundamental ao longo de todo o curso secundário, “conectando e intermediando, sempre que possível os conceitos e os processos empregados na Aritmética, na Álgebra, e na Geometria” (p.52). Braga (2006), ainda, acrescenta que;

O curso de Cálculo Infinitesimal não prescinde das variáveis. Assim, ao fixar o centro da matemática escolar em função, Klein estaria colocando as variáveis dependente e independente das funções no dia-a-dia do secundário e disponibilizando, dessa forma, os pré-requisitos para disciplinarizar o Cálculo. Um outro aspecto relevante para essa disciplinarização na forma proposta por Klein é o que se refere à capacidade de o aluno visualizar e trabalhar com alguma naturalidade a mobilidade das figuras geométrica – a abordagem de inspiração newtoniana do Cálculo está diretamente ligada a movimento. Essa percepção cinética é de grande valia para toda a extensão do referido conteúdo, desde as noções iniciais de limite até o cálculo de áreas e volumes passando, ainda, pela interpretação geométrica da derivada e suas aplicações (p.53).

Um outro fato relevante que pudemos observar por meio dos dados coletados, é que existe a curiosidade do estudante que inicia um curso de **Cálculo**, existe a motivação, o que pode vir a gerar novas idéias e novos entendimentos. Entendemos, portanto, que o **CDI I**, além de constituir-se em uma ferramenta extremamente fértil à formação do futuro professor, possui um conjunto de “termos específicos e símbolos correspondentes, sendo que o todo se constitui em um mundo novo para os estudantes” (BARUFI, 2006, 71). Nesse sentido, concordamos com Barufi (2006) ao assinalar que;

[...] nem uma simples exposição nem uma imposição acarretam a construção do conhecimento por parte dos alunos, encontramos diante da necessidade de definição e quais mecanismos de negociação



poderão ser disponibilizados a fim de possibilitar a apropriação por parte dos alunos, daqueles significados do conhecimento desejado (p.72).

Com as perspectivas abordadas e, partindo da problemática da pesquisa, acreditamos que o objetivo do ensino, na formação inicial consiste não apenas em formar os futuros professores de matemática, mas, além disso, propiciar um contexto educativo que forneça aos alunos elementos teórico-metodológicos para enfrentarem, no futuro, a sala de aula, permeada de múltiplos problemas.

Entre os problemas destacados, nesta pesquisa, tanto pelos estudantes como pelos professores em sua maioria encontram-se: O despreparo do aluno, tecnicismo e mecanização dos procedimentos operatórios matemáticos, a formalidade da linguagem matemática, dirigida no início do curso de futuros professores e falta de aplicações sobre os conteúdos matemáticos estudados em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. As propostas apresentadas pelos próprios estudantes e professores pesquisados para possíveis contribuições sobre os vários aspectos, acima citados, revelaram-se, em uma necessidade de mais aplicações sobre os conteúdos matemáticos estudados, tanto em nível escolar como em nível acadêmico.

O futuro professor deve experienciar uma abordagem em que envolva modelagem, atividades investigativas, resolução de problemas entre outras, ou seja, “fazer matemática” e, ainda, terem a possibilidade de refletir sobre esse “fazer”. Para tanto, torna-se fundamental transitar entre várias representações matemáticas, considerando o fato que “a Matemática é uma forma de organização do pensamento que se concretiza por meio de signos mentais e visuais” (Hildebrand, 2002, p. 214). Portanto, a mobilidade entre as representações matemáticas possibilita ao estudante um gerar conhecimentos que possam ser operacionalizados em diversas formas na interpretação e compreensão dos conceitos matemáticos, pelas imagens, pela escrita, pelos modelos lógicos e leis que fundamentam esses conceitos.

A **Semiótica** vem **fornecer** suporte à essa compreensão, sob o aspecto epistemológico da constituição do conhecimento, tendo como meio de comunicação, a linguagem matemática. Segundo Hildebrand (2002) ao longo do tempo, essa linguagem vem sendo estabelecida fundamentalmente nos desenhos, gráficos, diagramas, enfim, nas linguagens visuais e escritas. Sendo que a visualidade corresponde às formas signícas icônicas e que, segundo a teoria peirceana, deve ser concebida em **primeiridade**. Em **secundidade**, é observada a forma escrita, podemos dizer que seus signos são diagramas. Em **terceiridade**



encontramos o interpretante que, em nossa pesquisa, revelou-se nas próprias representações, nos estudantes, nos professores e na pesquisadora.

Ao término do nosso trabalho vislumbramos perspectivas em direção a pergunta diretriz dessa pesquisa, ao considerarmos as dimensões apresentadas o que em síntese podemos inferir que as representações matemáticas quando inter-relacionadas e mediadas por softwares educativos promovem significativamente uma compreensão unificada e global dos conceitos matemáticos, além de constituírem-se em um meio de comunicação entre a Matemática escolar e Matemática acadêmica. Obviamente, não paramos nesse ponto, esse é um primeiro passo a caminho de novos elementos na busca de contribuir com a formação inicial de professores de Matemática, mesmo porque essas respostas não são definitivas ou mesmo únicas, apenas um pedaço do grande quebra-cabeça que constitui o caminhar de toda pesquisa.





REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J.L; BORBA, M.C. Contruindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C; ARAÚJO, J.L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-46.

BALL, D. L. **What Do Students Know? Facing Challenges of distance, context and desire in trying to hear children**, 1997. Disponível em:< <http://www-personal.umich.edu/~dball/>>. Acesso em: 23 maio. 2005.

BAIRRAL, M. Natureza do Conhecimento profissional do Professor: Contribuições Teóricas para pesquisa em Educação Matemática. **Boletim GEPEM, Rio de Janeiro**, n. 41,p.11-33.fev.2003.Disponívelem: <http://www.gepeticem.ufrj.br/docs/publicacao/Bairral%20Gepem%2041%202003.pdf>. Acesso em: 17 Set. 2006.

BARUFI, M. O Cálculo no Curso de Licenciatura em Matemática. **Educação matemática em Revista**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, n.11A, p.69-72, abril 2002.

BLANCO GARCIA, M..M. A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de um currículo. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p. 51-86.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994. 333 p.

BORBA, M.C; PENTEADO,M.G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: AUTÊNTICA, 2003.

BORBA, M.C; VILLARREAL, M.C. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. Austrália: Springer, 2005. p. 125 -168.





BRAGA, C. **Função:** a alma do ensino da matemática. Pinheiros: Annablume, 2006

CÂNDIDO, C.C; BARUFI, M.C.B; MONTEIRO, M.S. **Dificuldades no ensino/aprendizagem de Cálculo**, 2004. Disponível em http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupos_trabalho/gdt04-Claudia&Maria&Martha.doc . Acesso em: 9 Dez. 2006.

CASTRO, J.F. **Um Estudo sobre a Própria Prática em um Contexto de de Aulas Investigativas de Matemática**. 2004.202f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

COCHRAN, K.F.. **Pedagogical Content Knowledge: Teachers' Integration of Subject Matter, Pedagogy, Students, and Learning Environments**, 1997. Disponível em: <<http://www.unco.edu/cebs/edpsychology/faculty/cochran.htm>> Acesso em: 23 de Set. 2006.

D'ÁMBROSIO, B.S. Conteúdo e metodologias na formação de professores. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A.M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional. de professores que ensinam**.Campinas: MUSA, 2005.p.20-32.

DINIZ, M.I.S.V; SMOLE, K.S. Um professor Competente para o Ensino Médio Proposto pelos PCNEM. **Educação matemática em Revista**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, n.11A, p.39-43, abril 2002.

FERREIRA, A.C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: MERCADO DE LETRAS, 2003. p.19-50.

FIORENTINI, D. Em busca de Novos Caminhos e de outros olhares na Formação de Professores de Matemática In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Ed. MERCADO DE LETRAS, 2003. p.7-18.





FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006. 216 p.

GUTIÉRREZ, A. Visualização em Geometria 3-D: na procura de uma estrutura. In:; PME, 20th, 1996, Valencia Anais... Espanha: Universidade de Valência, 1996. p. 1-19.

HILDEBRAND, H. R. **As Imagens Matemáticas**: a semiótica dos espaços topológicos matemáticos e suas representações no contexto tecnológico. 2002.228 f. Tese (Doutorado em Comunicação e Semiótica) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

HITT, F. Una reflexion sobre la construccion de conceptos matemáticos en ambientes com tecnologia. **Boletín de la Asociacion Matemática Venezolana** , Caracas, v. X, n.2, p.6, 2003. Disponível em:

< <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>. >. Acesso em: 7 Jun. 2006.

KENSKI, V.M. **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância**. Campinas: Papirus, 2003. 157 p.

LÉVY, P. **A Máquina do Universo**: criação, cognição e cultura informática, Porto Alegre: ARTMED, 1998. 173 p.

_____. **As Tecnologias da Inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C.I. da Costa. 14. ed. São Paulo: EDITORA 34, 2006. 204 p.

LOUREIRO, C. Que Formação para os Professores do 1º. Ciclo. In: BORRALHO,A; MONTEIRO,C; ESPADEIRO,R. (Orgs.). **A Matemática na Formação do Professor**, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciência de Educação, 2004. p. 89 - 124.

MARTÍNEZ, P. Conocimiento profesional en el área de Didáctica de la Matemática en el Primer curso de la formación de maestros,2002. Disponível em : <<http://ddm.ugr.es/personal/pflores/Indexarticulosinvesti.htm> >. Acesso em: 10 Dez. 2006.





MAUÉS, O.C. Reformas internacionais da educação e formação de professores. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 118, p. 89-117, mar. 2003.

MELO, G.N. Formação inicial de professores para a educação básica: uma (re)visão radical. **Revista São Paulo em Perspectiva**, São Paulo, n. 1, p. 98 -110, jan/mar. 2000. Disponível em: <www.schwartzman.org.br/simon/delphi/pdf/guiomar.pdf>. Acesso em: 15 Jun. 2005

MISKULIN, R.G.S. **Concepções Teórico - Metodológicas Baseadas em Logo e em Resolução de Problemas para o Processo Ensino-Aprendizagem da Geometria**. 1994 313 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

_____. **Concepções Teórico - Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo de Ensino e Aprendizagem da Geometria**. 1999. 577 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

_____. As possibilidades didático -pedagógicas de ambientes computacionais na formação colaborativa de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Ed. Mercado de Letras, 2003. p. 217-248.

MISKULIN, R.G.S; MARTINS, M.C; MANTOAN, M.T.E. Análise Microgenética dos Processos Cognitivos em Contextos Múltiplos de Resolução de Problemas: Campinas: NIED NIED/UNICAMP, memo nº 31, 43 p., 1996
Disponível em <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/memos/Memo31.PDF> acesso 20 de Junho de 2006

MISKULIN, R.G.S; MOURA, A.R.L; SILVA, M.R.C. Um Estudo sobre a Dimensão Semiótica da Tecnologia na Educação e na Educação Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003, Santos, **Anais...** São Paulo: Editora, 1996, p. 1-20

MOREIRA, P.C; DAVID, M.M.M.S. **A formação matemática do professores: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: AUTÊNTICA, 2005.





NÖTH, W. A Semiótica no Século XX, São Paulo: Annablume, 1996. 314 p.

OLIVEIRA, H., SEGURADO, M. I; PONTE, J. P. Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula. In: CEBOLA, G; PINHEIRO, M. (Org.), **Desenvolvimento Curricular em Matemática**. Lisboa: SEM-SPCE, 1998. p. 107-125

OLÍMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática**: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2005. 264f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

OTTE, M. Mathematical Epistemology from a Peircean's Semiotic Point of View. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 61, n. 1-2, p. 11 -38, 2006.

PEIRCE, C. S. **Trechos de Charles Sanders Peirce**. Tradução de HARTSHORNE; WEISS, ed. São Paulo: Cultrix; Editora da Universidade de São Paulo, 1975. v.1-6, 164p.

PONTE, J.P; BROCARD, J; HÉLIA, O. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula** Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 152 p.

PONTE, J.P; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **As Atividades de Investigação, O professor e a Aula de Matemática. Investigar para aprender Matemática**. Disponível em: <[www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-fonseca-etc\(ProfMat-MPT\).doc](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-fonseca-etc(ProfMat-MPT).doc)>. Acesso em: 20 jun. 2003.

PONTE, J. P; MATOS, J. F. Processos Cognitivos e interações Sociais nas investigações Matemáticas. In: ABRANTES, P; LEAL, L. C; PONTE, J. P. (Org.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1992-1996. p. 119-138.

PONTE, J.P; OLIVEIRA, H; VARANDAS, J.M. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p. 159-192.





RIBEIRO, A.; CABRITA, I. A Geometria e a Informática na Formação do Professor do 1º. Ciclo do Ensino Básico. In BORRALLHO, A; MONTEIRO, C; ESPADEIRO, R. (Orgs). **A Matemática na Formação do Professor**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2004. p. 137 - 154.

ROCHA, L.P. **(Re) constituição dos Saberes dos Professores de Matemática nos Primeiros Anos de Docência**. 2005. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

SÁENZ-LUDLOW, A; PRESMEG, N. Semiotic Perspectives on Learning Mathematics and Communicating Mathematically. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands v. 61, n. 1-2, p. 1-10, 2006.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. São Paulo: Thomson, 2002. 185 p.

_____. 2002 **O que é Semiótica**. 20.ed. São Paulo: Brasiliense, 2004a. 86 p.

_____. **O Método Anticartesiano de C.S. Peirce**. São Paulo: EDUNESP, 2004b. 265p.

SARAIVA, M. J.F. S. **O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de matemática**. 2001. 624 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001. Disponível em: <<http://ia.fc.ul.pt/textos/msaraiva>>. Acesso em 11 Dez. 2006

SCHÖN, D. A. **Teaching artistry through reflection-in-action**, 1987 Disponível em: <<http://www.uiowa.edu/~c07w120/reflection.doc>>. Acesso em: 17 Set. 2006

SCUCUGLIA, R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas**. 2006. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.





SILVA, C. R.M; MISKULIN, R.G.S; ESCHER, M.A. A Utilização didático-dedagógica do Maple em uma perspectiva de Investigação matemática” - In ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, São Paulo, 2006. **Anais...** São Paulo :VIIIPEM, 2006. p.1-9.

STEINBRING, H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? - An Epistemological Perspective on Mathematical Interacion. **Educational Studies in Mathematics**, Nethelands, v. 61, n. 1-2, p. 133-162, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. 4.ed. São Paulo: PioneiraThomson Learning, v. 1, 2005. 580 p.

STYLIANIDES, A.J; BALL, D.L. **Studying the Mathematical Knowledge Needed for Teaching: the case of teacher's knowledge of reasoning and proof**. Disponível em: <<http://www-personal.umich.edu/~dball/>>. Acesso em: 15 set. 2006.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. In: VALENTE (Org.) **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: UNICAMP/NIED, p. 1-27, 2000. Disponível em: http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/pub.php?cod_publicacao=10&classe=separata. Acesso em 25 Set. 2006.

VALENTE, J. A Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador O papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In ALMEIDA, M. E.B.de; MORAN, J. M. (Org.) **Integração das tecnologias na Educação. Salto para o Futuro**. Brasília: Ministério da Educação, SEED, 2005, p. 22-31.

VELOSO, E. **Educação matemática dos futuros professores**. In BORRALHO, A; MONTEIRO, C; ESPADEIRO, R. (Org.). **A Matemática na formação do professor**, Portugal: Ed. Sociedade Portuguesa de Ciência de Educação, 2004, p. 31 - 68.

VILLARREAL, M.E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. 1999. 378f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.



ANEXO A: Descrição das Atividades

Atividade 1

“Um Ponto de Continuidade”

ATIVIDADE 1: “Um ponto de Continuidade”

Objetivos Gerais:

- ✓ Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);
- ✓ Analisar as representações Matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;
- ✓ Analisar o conhecimento matemático do aluno;
- ✓ Analisar a capacidade de generalização do aluno frente o desenvolvimento e investigação da atividade.
- ✓ Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo específico: Perceber a compreensão do aluno em relação a existência do Limite no processo de Continuidade de uma função em determinado ponto x , através do Winplot, na visualização do gráfico de f .

Problema: Considere a família de funções definida por $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Discutindo o problema:

- a) Discuta os dados do problema, por exemplo: se a função é contínua, em caso de descontinuidade, onde isso ocorre;
- b) Usando o Winplot, desenhe a função $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e os pontos de extremos. A seguir, discuta sobre a continuidade da função no ponto $x=1$;
- c) Ao observarem o gráfico, respondam qual o limite da função, quando x tende a 1 para valores menores que 1 e para valores maiores que 1, a seguir verifiquem se existe o limite? E para $k=-2$, existe o limite de f quando x tende a 1? justifiquem algebricamente suas respostas;

Figura A1: Atividade 1 aplicada junto a Turma A

Apresentação¹

A **Atividade 1**, propunha explorar o conceito de Limite e Continuidade de uma **função definida por partes** para diferentes valores de k . Durante o processo de investigação, foi solicitado aos estudantes desenharem por meio do **Winplot** o gráfico da função, usando os comandos apropriados, incluindo o de animação, tendo em vista propiciar um contexto, no qual os estudantes poderiam iniciar um processo de

¹ Para a apresentação dessa atividade estarei descrevendo os trabalhos (na primeira pessoa do singular) desenvolvidos com as Turmas A e B separadamente.

compreensão envolvendo-se com os dados do problema proposto. Para o desenvolvimento da atividade foi entregue aos estudantes um papel sulfite, contendo orientações para utilizar os comandos do software **Winplot** e o problema acima exposto.

➤ **Trabalhando com o Winplot:**

Para desenhar a função use o comando $y = \text{joinx}(kx^2+1|1,2x-3); -2.500000 \leq x \leq 3.000000$ (sugestão de intervalo)

Para desenhar o ponto use o comando: Equação $\rightarrow$ Ponto (x,y)

Desenvolvimento da Atividade 1 com a Turma A

A aplicação e desenvolvimento da atividade exploratório-investigativa com a **Turma A**, começou no dia e horário previsto, com a participação de **cinco estudantes** da disciplina CDI I². Vale ressaltar que, com exceção de um, todos os outros estudantes desta Turma A estavam cursando CDI I pela primeira vez.

Ao iniciarmos os trabalhos falei dos objetivos, informando aos estudantes que faríamos uma investigação sobre Limites e Continuidade de Funções e para abordarmos esses conceitos, exploraríamos as representações gráficas e algébricas da função proposta no problema apresentado.

Após essa explanação propus que abrissem o programa **Winplot** de maneira que os estudantes pudessem se familiarizar com o software vale ressaltar, que nenhum dos presentes já havia trabalhado com esse software, mas isso não representou um problema, pois no transcorrer da atividade os comandos foram aos poucos inseridos, na medida em que iam sendo solicitados na investigação e exploração da atividade.

Investigando o Problema com a Turma A

Ao iniciar a atividade, fiz oralmente a pergunta do item (a), Figura A1, buscando estimular os participantes da pesquisa discutirem entre si os dados do problema. Dado um tempo, voltei a refazer a pergunta explicando aos estudantes que estaria gravando suas argumentações e considerações em referências às questões propostas.

² Cálculo Diferencial e Integral I



MA³ - Olhando a função $\begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ apresentada no

problema, o que vocês diriam? Vocês acham que essa função é contínua e se for descontínua em que ponto acontece essa descontinuidade?

Robin - Ah! ...eu acho que ela é contínua.

MA - por quê?

Robin - Ah!... porque não vai ter salto nenhum, hum.. porque já está restringindo né? o domínio dela.

MA - no intervalo dado na função? é isso?

Robin - isso

MA - E você Clotilde, o que você acha?

Clotilde - Eu acho que vai ser contínua a função, porque não tem salto e também a gente fez as contas pra ver se tinha algum problema na função, mas a gente não achou problema nenhum.

MA- Ok! E a Clara tem algum comentário?

Clara - no momento não (risos)

MA - E você Alexandre?

Alexandre - Ah! também achei contínua é... também dá pra ver que ela muda de comportamento, ela muda para x igual a 1, mas parece que ela é contínua sim.

MA - Ana Paula o que você acha?... (Ana Paula, tímida, não emite opinião). Bom...vocês pensaram no valor k?

Robin - A gente pensou, a gente pensou no k se ele for ou caso... ele vai fazer isso daqui né? (o Robin movimenta os braços indicando o movimento da função). Se o k for variando vai fazendo isso aqui com o gráfico (indica com os braços a inclinação da reta, no caso positiva) e se for negativo vai fazendo isso (novamente com os braços indica a inclinação da reta, nesse caso negativa), mas não vai chegar pra cá porque é sempre pra lá (aqui ele faz referência ao domínio da função para o qual o valor x está limitado)

³ Cognato em referência à pesquisadora

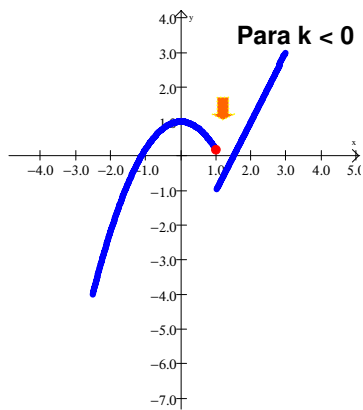


Figura A2: Variação da Função para $k < 0$

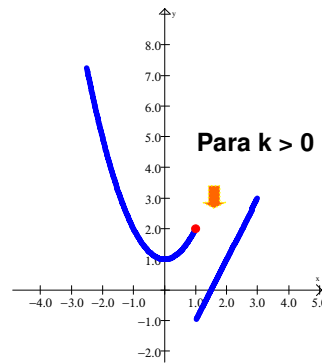


Figura A3: Variação da Função para $k > 0$

MA - Vamos continuar discutindo..... Hum esse valor k ele está variando? O que acham? Vocês concordam que ele pode ser um valor negativo bem como um valor positivo? o que vocês acham? Concordam com isso?

(Todos concordam e discutem entre si. A seguir Robin se manifesta):

Robin- Se ele for zero o gráfico é uma constante (**nesse caso ele refere-se ao gráfico de uma reta paralela ao eixo Ox**)

MA- Aparentemente apenas uma das funções de $\begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, será constante no caso de k ser igual a zero, é isso?

Robin- isso.

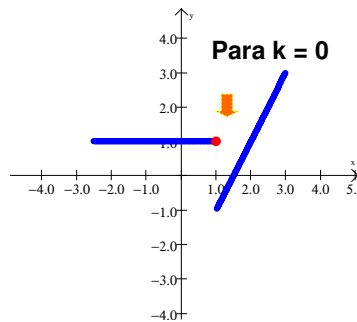


Figura A4: Variação da Função para $k = 0$

MA - Então de início vocês concordam que a função é contínua, mas para qual valor de k ?

Clara - para k diferente de zero

MA - para k diferente de zero? Vocês acham que tem um valor específico pra esse k ? Ou vale pra qualquer valor de k ?

Alexandre- Ah!... pra qualquer valor inteiro.

MA - Para qualquer valor pertencente ao conjunto dos números inteiros? Bom vamos agora verificar isso usando o software ok? Vamos aprender a utilizar o software, no qual faremos uma animação em que será possível variar o valor k de modo a percebermos o comportamento da função ao variar esse parâmetro.

Após essa discussão, falei um pouco sobre o software **Winplot**, ao mesmo tempo em que apresentava os comandos que usaríamos para desenhar o gráfico da função $f(x)$. Os estudantes não tiveram nenhuma dificuldade em me acompanhar, vale ressaltar que propositalmente pensei para esse primeiro trabalho, uma atividade bem simples de maneira que não os desestimulassem e que possibilitasse uma proveitosa discussão, pois essa seria a primeira vez que eles usariam o software.

No momento em que começamos a explorar a opção (b), Figura A1, do problema (animando o gráfico variando o valor do parâmetro k) percebi que os estudantes (embora estivesse explícita, a quebra no gráfico, Figuras. A2, A3 e A4), não se sentiam seguros ao afirmar se f era uma função contínua ou não. Enfatizo que, todos os estudantes antes de visualizarem o gráfico, afirmaram que f era contínua. Resolvi então investigar um pouco mais, e perguntei se eles lembravam da definição de uma função contínua e, das condições para uma função ser contínua.

O **Robin** e o **Alexandre** tentaram dar uma resposta, embora ainda incompleta. Nesse momento fui aos poucos incentivando-os a relembrem o que a professora de CDI I havia tratado sobre Continuidade em sala de aula e, foi então que eles começaram a lembrar que para uma função ser contínua a função deve existir num dado ponto, o limite da função quando x se aproxima de um dado ponto deve existir e que o limite da função quando x se aproxima desse ponto deve ser igual ao valor da função nesse ponto. É importante ressaltar que essa definição foi sendo dita alternadamente pelos estudantes de forma fragmentada, dando a entender que se sentiam ainda bastante inseguros a respeito desse conceito.

Percebendo, portanto, que esse era um ponto importante para ser explorado, solicitei então, que voltassem a olhar o gráfico (Figura A5 e A6) no **Winplot** para identificar para qual valor de k a função tornava-se contínua. Volto a destacar que antes mesmo de olharem o gráfico da função f por meio do software, todos disseram que a função era contínua para qualquer valor k , mas foi então que observando a animação da

representação gráfica, ao variar o valor do parâmetro k , eles perceberam que apenas para k igual a -2 , a função f tornava-se contínua (Figura A6)

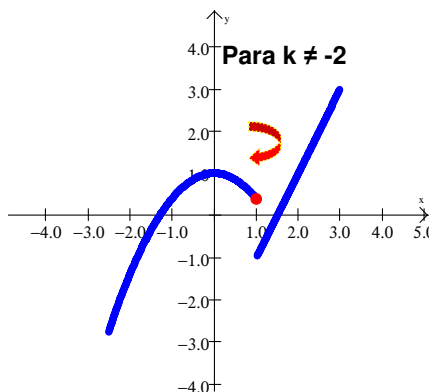


Figura A5: Variação (a) da Função para $k \neq -2$

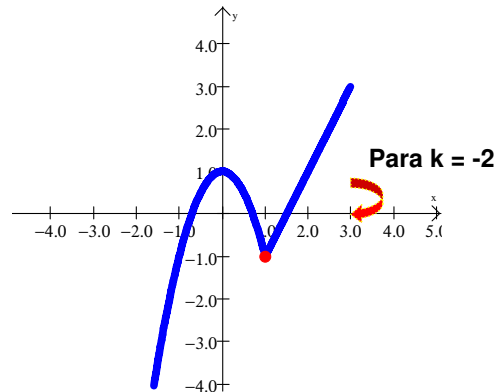


Figura A6: Variação (a) da Função para $k = -2$

Ainda visualizando a Figura A6, perguntei aos estudantes qual era o limite da função quando x tendia a 1 pela esquerda, sendo $k = -2$, foi com certa facilidade que a maioria deles informaram ser igual a -1 , por conseguinte, puderam perceber que quando x se aproximava de 1 pela direita o limite também existia igual a -1 . Considerando a exploração da representação gráfica da função f no Winplot, propus aos estudantes que discutissem a opção (c), Figura A1, ou seja, encontrar uma justificativa algébrica para os resultados visualizados no Winplot. Percebi que só uma aluna, **Ana Paula**, teve alguma dificuldade em apresentar uma resposta. Decidi então interagir com ela, e perguntei no que especificamente consistia a sua dificuldade, **Ana Paula** me respondeu que era o primeiro ano de CDI I e que sentia muita dificuldade em entender o conceito de Limite de modo que ainda não conseguia resolver com tranquilidade os exercícios que a professora apresentava em sala de aula. Assim, explorei as diversas possibilidades do conceito de Limite com essa estudante por meio das figuras visualizadas por meio do Winplot na tela do computador.

Ao completar esse momento da investigação solicitei aos grupos que registrassem no papel suas conclusões, e assim o fizeram. Em suas justificações os estudantes fizeram argumentações como podemos perceber em algumas das respostas apresentadas por alguns dos grupos da Turma A:

Robin e Clotilde - f só será contínua se só se os limites laterais forem iguais. (realizados os cálculos, concluem): $\lim_{x \rightarrow 1} kx^2 + 1 = k + 1$ e

$\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1$, temos que $k + 1 = -1 \Rightarrow k = -2$. Substituindo k por -2 em

f obtemos $\begin{cases} -2x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, neste caso a função será contínua

$\forall k \in \mathbb{R}/k \neq -2$, $f(x)$ não será contínua. Assim, para $k = -1$, por exemplo,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$ o limite não existe, pois os limites laterais

são diferentes, o que implica na descontinuidade da função f .

(Clara e Alexandre - Para que a função seja contínua é necessário

que os limites laterais sejam iguais. Assim $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$;

$\lim_{x \rightarrow 1} kx^2 + 1 = k + 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1 \Rightarrow k = -2$. Portanto, a função é contínua

apenas quando $k = -2$ e sua descontinuidade ocorre para $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Após me entregarem o material, expliquei que para finalizar a **Atividade 1**, faríamos uma breve discussão sobre o que investigamos e qual a percepção ao explorar no **Winplot** a representação gráfica da função f em concomitância com uma exploração algébrica, e se essa abordagem havia facilitado a compreensão deles para o desenvolvimento da atividade.

Como era de se esperar alguns se intimidaram e, assim, pouco contribuíram com o debate, mas houve os que venceram o embaraço e falaram de suas dificuldades em entender certas propriedades e conceitos de Limites. Vejamos então um pouco dessa conversa:

MA - Vocês lembram da propriedade de Limite na aceção de determinar a continuidade de uma função em um número?... (os alunos demoram a responder e eu volto a insistir em busca de uma resposta) gostariam de falar um pouco?

Alexandre - Eu não lembro muito bem. **(Os outros balançam a cabeça como para confirmar a resposta do Alexandre)**

MA – Hum! Porque vocês acham que esqueceram esse conceito se estão estudando Cálculo esse ano e viram esse assunto no primeiro semestre?... **(risos dos alunos)**.

Alexandre - Ah!... a idéia não está muito madura ainda, eu acho. ... Precisa formalizar um pouco mais.

Robin - Não adianta esticar demais o conteúdo... é isso... é isso... é isso... Você não consegue fixar a idéia.

Alexandre - Eu acho que vale mais a gente aprender o que significa mesmo, do que ficar colocando exercício pra gente resolver, resolver, resolver.

Robin - É porque resolver Limite não tem dificuldade pra ninguém porque é só usar uma fórmula uma regra tipo L' Hopital, vai lá faz. Agora saber pra que vai precisar? **(ele refere-se a uma aplicação)**. Háa... Na verdade é um negócio simples, mas que falta mais explicação.

Alexandre - Falta explicação, porque do ângulo que a pessoa quer olhar aquilo, se ela quer olhar ou quer fazer que a gente olhe só pra resolver Limites, também Háa, depois vem a derivada é só calcular o Limite e assim vai... ou saber realmente o que ele significa é... se deve vir para um lado, se deve vir pro outro, por ele **(referindo-se ao limite de uma função)** que eu vou ver se é contínua ou não. Eu acho que é isso daí que precisa chamar mais atenção, com x caminhando, sabe? Naquele ponto, ver o que acontece com a imagem, tem que saber o que está calculando.

MA - Ana Paula eu vi que você estava com dificuldade em fazer a notação, você realmente não sabia fazer ou se esqueceu? O que foi?

Ana Paula - Não, é ...que é a primeira vez que estudo Cálculo..

MA - Então... está sentido muita dificuldade é isso?

Ana Paula - Muita dificuldade, é... coisas simples, básicas eu ... não sei.

MA - Bom pessoal, outra coisa que eu queria saber é em relação ao que foi apresentado nessa primeira atividade. Ou seja, hoje eu apresentei uma atividade bem simples, justamente para não haver sobressaltos, porque... a proposta era que vocês tivessem um contato com o **Winplot** e ao realizarem a atividade fossem aprendendo o software, foi proposital ok? E dentro dessa perspectiva a minha pergunta é: Eu queria saber se a abordagem de primeiro mostrar um comportamento da função através do seu gráfico no **Winplot** e depois pedir que formalizassem suas justificativas no papel.. foi ruim, foi bom? se ajudou se .. não contribuiu em nada? O que vocês acharam?

Alexandre - Ajuda

Robin - ajudou

Robin - É.. a gente quer ver né? aquela imagem né? Isto é... as vezes preenche as lacunas, as vezes um “negocinho”, fica pra trás. Se faltou numa aula e perdeu aquele detalhe., o curso que você não voltar atrás não aprende ele de novo. Então quando mostra como é que fica (**ele refere-se a imagem do gráfico**) e usando o software e vendo o gráfico é.. como se comporta, interessante que muitas vezes a gente não sabia nem como é o gráfico... dessa função. Porque eu olhei assim e não tinha muita idéia de como era o gráfico dela.

MA - No caso o parâmetros k atrapalhou a visualização do gráfico não é?

Clara e Robin- é

MA - Ao fazer no software a exploração do gráfico, vocês acham que através dessa exploração dá pra compreender com mais clareza? E mesmo pra você Ana Paula que está tendo mais dificuldade deu pra você entender alguma coisa?

Ana Paula - deu

MA - deu pra você entender essa questão da variação do k , que ele vai mudando os valores, a questão da continuidade, da aproximação no valor x igual a 1? deu pra você enxergar isso?

Ana Paula - sim

MA- E Clara que está caladinha aí?

Clara - Eu entendi sim

MA - Sério?

MA - Que bom, Porque eu peguei uma questão importante, que é a questão da Continuidade de uma função em um dado ponto.

Robin - Eu também acho que é muito importante

Alexandre - É realmente, olhando o domínio eu enxerguei de início que a função era contínua, (**nesse caso eu interpreto a fala do Alexandre assim: olha depois visualizei o gráfico de f no Winplot percebi que a função era contínua apenas para o valor k igual a dois negativo.**)

Terminada a fala do Alexandre, dei por encerrada as discussões para a **Atividade 1**.

Atividade 1- Turma A

1) $f(x) = \begin{cases} Kx^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Kx^2 + 1 = K + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

$$K + 1 = -1$$

$$K = -1 - 1 = -2$$

a) A função será contínua somente quando $K = -2$
Para os demais valores de K , f será descontínua

b) No WinPlot
 $K = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} Kx^2 + 1 = K + 1 = -1 + 1 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$
 $0 \neq -1$, não existe limite para $K = -1$

$K = -2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} Kx^2 + 1 = K + 1 = -2 + 1 = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$
 $-1 = -1$, existe limite para $K = -2$

Ana Paula

①a)

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} Kx^2 + 1 = K + 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 3 = -1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} Kx^2 + 1 = K + 1$

Para a função ser contínua os limites laterais tem que ser iguais logo $K + 1 = -1$
 $\boxed{K = -2}$

para calcular o limite da função substitui K por -2 , então:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -2x^2 + 1 = -1$$

Robin e Clotilde

(a) f será contínua se e só se os limites laterais forem iguais.
 Calculamos os limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Kx^2 + 1 = K + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

Temos $K + 1 = -1 \Rightarrow K = -2$

Substituindo K por -2 temos:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Neste caso a função será contínua

$\forall K \in \mathbb{R} / K \neq -2, f(x)$ não será contínua

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+}$ pois os limites laterais são diferentes

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -2x^2 + 1 = -1$$

Robin e Clotilde

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} Kx^2 + 1 = K + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

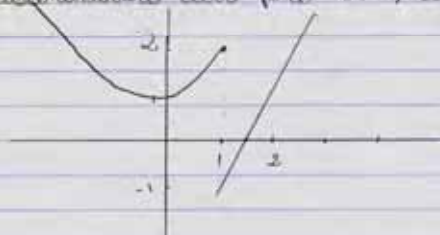
Para que a função seja contínua, precisamos que os limites laterais sejam iguais
 $K + 1 = -1 \Rightarrow K = -2$

Portanto, a função é contínua quando $K = -2$

Respostas

a) a função f é contínua apenas quando $K = -2$, e sua descontinuidade ocorre para $K \in \mathbb{R} - \{-2\}$

b)



$P: (1, f(1))$

c) para $K = 1$, quando x tende a 1, a função é descontínua, pois seus limites são diferentes. E, para $K = -2$ quando x tende a 1 a função é contínua, pois seus limites são iguais.

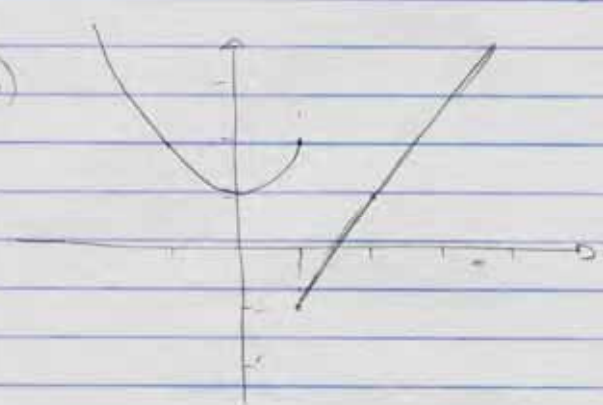
Mara e Alexandre

$\lim_{x \rightarrow 1} |Kx+1| = |K+1|$
 $\lim_{x \rightarrow 1} 2x-2 = -1$

$|K+1| = -1$
 $K+1-1 = -1-1$
 $K = -2$

(a) f é contínua para $K = -2$; a descontinuidade ocorre nos $\mathbb{R} - \{-2\}$.

(B)



No ponto $x=1$ a função tem um salto.

(c) $K = -1$, com $x \rightarrow 1$ é descontinua pois os limites laterais não diferem.
 $K = -2$, com $x \rightarrow 1$ é contínua pois os limites laterais não iguais

Mara e Alexandre

Desenvolvimento da Atividade 1 com a Turma B

O primeiro encontro com a **Turma B**, foi realizado no Laboratório de Informática, no qual estavam presentes dezoito estudantes da disciplina Cálculo I o que dentre os vinte e sete, inicialmente inscritos apenas quatro não compareceram já que os outros cinco estudantes escolheram estar participando da coleta de dados no período da noite. Assim sendo, ao dar início aos trabalhos, no dia e horário (10:00hs) previsto, falei dos objetivos (já explicitados na descrição dos trabalhos da **Turma A**) enfatizando principalmente o que iríamos desenvolver nesse primeiro encontro.

Na apresentação da atividade, falei que estudaríamos o tema Limite e Continuidade de funções em um dado ponto e, por conseguinte, estaríamos explorando bastante a visualização de gráficos de funções através do **Winplot** articulando, portanto as representações no gráfico com suas respectivas representações algébricas.

Após minha explanação pedi aos estudantes que abrissem o programa **Winplot** e imediatamente passei a apresentar-lhes alguns comandos que iríamos usar para a **Atividade 1**, ressaltando que durante o caminhar da coleta de dados eles teriam a oportunidade de conhecer os demais comandos que posteriormente seriam utilizados nas próximas atividades.

Esclareci também, que esse primeiro problema matemático, apresentava-se propositalmente bem simples de modo que em grupo de dois eles pudessem ir aos poucos se familiarizando com a sintaxe do **Winplot** no desenvolvimento da atividade proposta.

Assim como ocorreu com a **Turma A**, para o desenvolvimento dos trabalhos foi entregue a cada dupla de estudantes, uma folha onde constava o problema a ser investigado e dicas de como usar os comandos do **Winplot** (já explicitados no Item 1.1).

A atividade aplicada **foi a mesma da Turma A**. Passemos agora às questões propostas conformadas no problema para depois descrever às discussões ocorridas com a **Turma B**.

ATIVIDADE 1: “Um ponto de Continuidade”

Objetivos Gerais:

- ✓ Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);
- ✓ Analisar as representações Matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;
- ✓ Analisar o conhecimento matemático do aluno;
- ✓ Analisar a capacidade de generalização do aluno frente o desenvolvimento e investigação da atividade.
- ✓ Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo específico: Perceber a compreensão do aluno em relação a existência do Limite no processo de Continuidade de uma função em determinado ponto x , através do Winplot, na visualização do gráfico de f .

Problema: Considere a família de funções definida por $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Discutindo o problema:

- a) Discuta os dados do problema, por exemplo: se a função é contínua, em caso de descontinuidade, onde isso ocorre;
- b) Usando o Winplot, desenhe a função $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e os pontos de extremos. A seguir, discuta sobre a continuidade da função no ponto $x=1$;
- c) Ao observarem o gráfico, respondam qual o limite da função, quando x tende a 1 para valores menores que 1 e para valores maiores que 1, a seguir verifiquem se existe o limite? E para $k=-2$, existe o limite de f quando x tende a 1? justifiquem algebricamente suas respostas;

Figura A7: Atividade 1 aplicada junto a Turma B

Explorando e Discutindo o Problema – Turma B

Após a leitura da **Atividade 1**, comecei a discutir com os estudantes a opção (a), (Figura A7), por exemplo: se a função era contínua, em caso de descontinuidade, onde ocorria. Nesse sentido solicitei que fizessem alguns comentários enfatizando a importância de estarmos debatendo o assunto de maneira a enfatizar suas principais dificuldades referentes ao conceito de Limite e Continuidade de uma Função em um dado ponto.

Dentre os grupos, alguns dos estudantes pareciam ter um maior conhecimento entre os demais, uma vez que responderam rapidamente e com segurança que a função era contínua para $k = -2$ (diferentemente do que ocorreu com a **Turma A**). No momento que solicitei que comentassem mais sobre o que estávamos a discutir, pois estaria a partir desse instante gravando as suas justificações, quase todos se mostraram tímidos e

constrangidos diante a idéia de gravar os seus comentários e, talvez por essa razão, resultou que o primeiro debate foi bastante improdutivo, mesmo assim, pude gravar uma fala do estudante José:

José - Se k for igual a -2 , a função vai ser contínua

MA - vocês concordam?...isto é, pra qualquer outro valor de k a função é descontínua é isso?

José - é (nesse momento todos balançam a cabeça aparentemente concordando com a resposta do colega).

Após esse breve debate, sugeri aos estudantes que desenhasssem o gráfico da função por meio do **Winplot**, solicitando aos mesmos utilizarem o comando **Animação** para que pudessem observar o movimento do gráfico de f e, por conseguinte, visualizarem a resposta dada por José e confirmada por outro dois participantes, o Augusto e o Márcio. Para uma discussão mais profícua sugeri que seria interessante que formassem grupos de duas pessoas, e que discutissem sobre a continuidade da função $f(x)$ no ponto $x=1$. Assim o fizeram.

É claro que nesse momento muitas foram as dúvidas acerca de como desenhar o gráfico no **Winplot**, qual comando utilizar para representar certo ponto, entre outros questionamentos (como aconteceu com a **Turma A**). Vale ressaltar que apesar da **Turma B** ter uma quantidade maior de estudantes do que a **Turma A**, o trabalho transcorreu a contento.

Passada a agitação inicial, concedi a todos os estudantes um espaço de tempo para que pudessem conversar e fazer conjecturas. Em um segundo momento, percebendo que já se esgotavam as discussões em cada grupo, propus a todos, que observassem com mais vagar o gráfico de f instigando-os a justificarem oralmente acerca do Limite da Função quando x tende 1 , com valores menores que 1 e para valores maiores que 1 . Se existia o limite para qualquer valor k ? E para o caso de $k = -2$ verificar se a representação gráfica de f correspondia à resposta que inicialmente alguns dos estudantes haviam comentado? (Figuras A8 e A9).



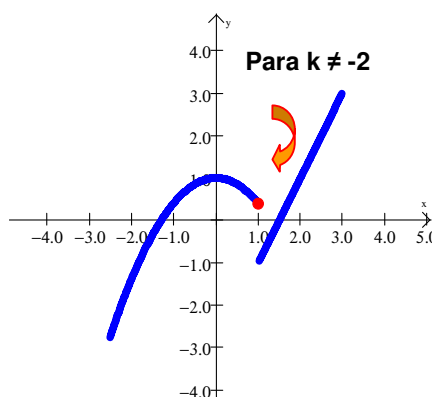


Figura A8: Variação(b) da função para $k \neq -2$

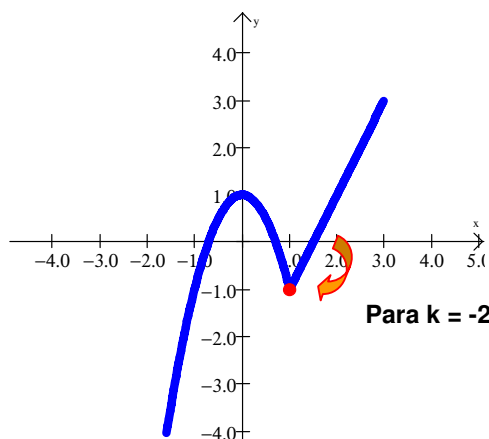


Figura A9: Variação(b) da função para $k = -2$

Para esse debate não houve gravação, pois fiquei receosa em não obter respostas, decidi então registrar apenas as minhas percepções. De maneira que, descrevo abaixo algumas argumentações entre os estudantes Any e Augusto:

Any - o limite da função é -2?

Augusto – não, é y igual a -1(1 negativo), o valor -2(dois negativo) é o valor de k quando a função é contínua;

Any - Eu não consigo ver.

Nesse momento sentei à frente do computador e, por meio do **Winplot**, simulei uma aproximação ao valor x igual a 1 para valores maiores e menores que 1, mostrando que ao aproximar cada vez mais de 1, a função, o valor de y, aproximava-se cada vez mais de -1. Foi então que olhei para Any e perguntei se ela havia entendido? o que prontamente me respondeu que sim. Para concluir foi solicitado a todos os grupos (duplas de estudantes) que registrassem no papel uma justificativa algébrica para atividade proposta. E assim o fizeram, como podemos observar mediante justificações apresentadas por alguns dos estudantes participantes na pesquisa;

Paulo (trabalhando sozinho respondeu) - Para $k = -1$ não existe o limite, pois o limite existe quando seus limites laterais são iguais. Logo para $k = -1$, o limite à direita é -1 e pela esquerda é 0, quando x tende a 1. Para $k = -2$, existe o limite, pois o limite à direita é -1 e pela esquerda é -1, quando x tende a 1.

Frederico e Henrique - f é contínua dependendo do valor de k (realizado alguns cálculos, o estudantes concluem);

$$\lim_{x \rightarrow 1} kx^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3, \text{ considerando que } kx^2 + 1 \text{ se } x \leq 1 \text{ e } 2x - 3$$

$$\text{se } x > 1. \text{ Logo } \lim_{x \rightarrow 1} [kx^2 + 1 - 2x - 3] = 0 \Rightarrow k = -2.$$

Portanto, a função f é contínua para $k = -2$, para os demais valores f é descontínua. Por exemplo, para $k = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 \Rightarrow 0 = -1, \text{ ou seja, para } k = -1, \text{ a função é}$$

descontínua no ponto $(1, f(1))$. Enquanto que para $k = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} -2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 \Rightarrow -1 = -1, \text{ ou seja, para } k = -2, \text{ a função é}$$

contínua no ponto $(1, f(1))$.

Após todos os grupos me entregarem suas respostas, informei-lhes que para o encerramento dos trabalhos seria importante ouvir mais alguns comentários acerca da abordagem adotada na aplicação dessa primeira atividade.

Pedi então que formassem um círculo à minha volta (já que o grupo de estudantes era bem maior do que a **Turma A**) de modo que pudessem falar abertamente e sem formalidades os seus pontos de vista. Para iniciar o debate, perguntei aos estudantes se a visualização do gráfico por meio do Winplot os ajudou a entender melhor a forma algébrica apresentada no problema e se através desse processo investigativo, foi possível obter uma maior compreensão (tendo em vista a coordenação entre as duas representações) considerando o que eles já haviam visto em sala de aula (Figura A10).

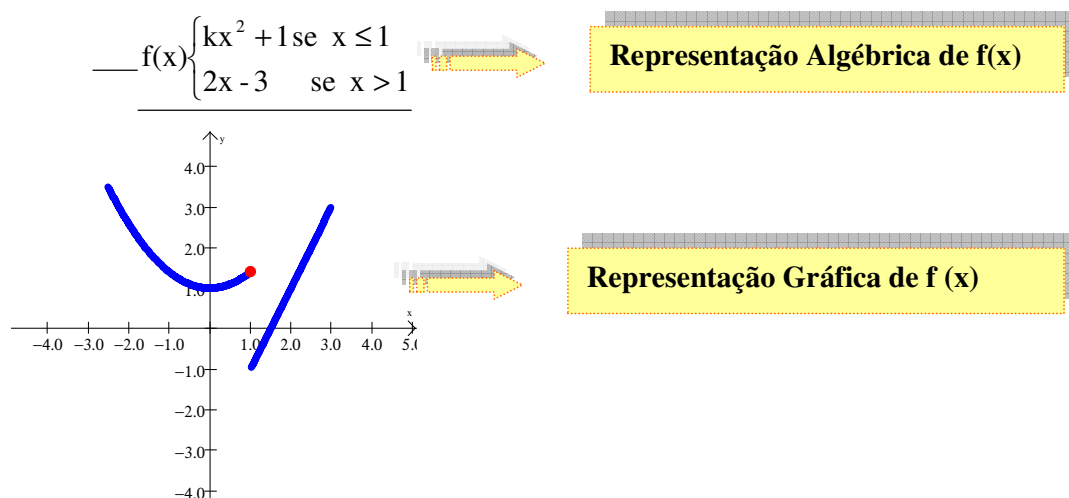


Figura A10: Representação Gráfica da Função $f(x)$

Vejamos, portanto um pouco do que foi discutido pelos estudantes:

MA - Eu queria saber se por meio do Winplot, visualizando o gráfico de f e depois justificando algebricamente as interpretações adquiridas através do que foi visto na tela do computador, ajudou a clarear um pouco mais o que vocês já tinham visto em sala de aula?

Any - Bom... Eu na primeira vez "boiei legal" não deu pra ver direito, lembrei na hora que o "fruta" (**colega - José**) falou que o k igual a -2 (**dois negativo**) era contínuo, fiquei "boiando" (**o estudante revela que não entendeu**), porque eu não achei que no k igual a -2 era contínuo, depois que eu fui ver e agora que eu testei todos os limites aí fui ver que estava errada no que eu pensei e que tenho que rever alguns... conceitos. Foi bom que eu vou lembrando aos poucos o que eu já tinha aprendido assim é uma maneira de eu não esquecer também.

MA - Eu queria saber se você conseguiu enxergar o ponto de descontinuidade no gráfico.

Any - deu pra enxergar direitinho

MA - E a discussão que ocorreu aqui na investigação do problema, ajudou você formalizar as suas observações?

Any - Ficou bem mais fácil

MA - Ótimo! E o Winplot? o que você achou? difícil, fácil?

Any - É legal, é bem gostoso de trabalhar, não é difícil.

MA - mais um comentário?... fala Augusto! (**Aqui eu incentivo ao estudante Augusto fazer algum comentário**)

Augusto - Bom.. eu acredito que essa maneira de trabalhar auxilia bastante na aprendizagem dos alunos. eu vejo assim por mim mesmo que é mais fácil de compreender os assuntos teóricos vendo é... vendo dessa maneira como foi apresentado no Winplot.

MA - Ok. Alguém mais gostaria de fazer um outro comentário? (nesse momento eu insisti bastante)

Henrique - É legal o Winplot, porque ele é bem simples e bem versátil. Acho que você pode fazer "mil e uma nele" é uma aplicação bem legal do que você vê em sala de aula. Que é... você tendo uma visão geométrica (**aqui ele se refere a**



representação gráfica da função) do que você está fazendo auxilia pra “caramba” no entendimento né?

MA - Ok. Uma última pergunta, eu... **(nesse instante um estudante interrompe a minha fala)** sim? Fala Paulo, pode falar.

Paulo - Eu acho que fora isso a gente tem que tomar cuidado também na limitação do programa né? Por exemplo, nessa animação quando ele vai descendo **(fazendo referência ao gráfico)** olha como o ponto sai fora do gráfico.

MA- É, mais observa que o ponto sai fora do gráfico porque não colocamos... é... vamos dizer assim, não adequamos a tela de modo a visualizar o gráfico por inteiro. Por exemplo, se você for lá em Ver (comandos do Winplot) e você aumentar é... o limitante inferior você vai conseguir enxergar o gráfico.

Paulo - Não!... eu falo ... o ponto sai da ponta do gráfico, olha lá oh! (Figura A11)

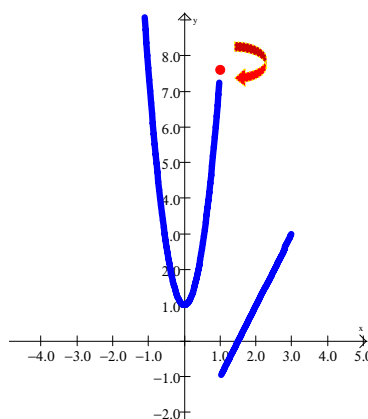


Figura A11: Limitação do Winplot no Traçado do Gráfico da Função $f(x)$

MA - Há... ok! é... alguém poderia falar sobre isso? Porque que o ponto do sai do gráfico? Ele está falando que a função é descontínua no ponto? É isso que você está falando? **(Nesse momento eu não havia entendido ainda o que Paulo explicava, pensei que ele falava da continuidade do gráfico, mas logo após o Augusto esclareceu o ponto de vista do colega).**



Augusto- Ele está falando que na hora que está subindo aqui oh! **(O Augusto aponta para o telão onde está projetado o gráfico da função)** o ponto tá saindo da extremidade do gráfico.

MA - Há entendi... entendi. Realmente precisamos ter cuidado com as limitações do software nós temos que atentar para isso, ou seja, ter cuidado de sempre ter em mente a teoria para que possamos entender que isso não acontece ok?

Após esse último comentário, encerrei as discussões para a **Atividade 1**.



Atividade 1- Turma B

a) Kx^2+1 se $x \leq 1$
 $2x-3$ se $x > 1$

f é contínua dependendo do valor de K

$$\lim_{x \rightarrow 1} Kx^2+1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x-3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [Kx^2+1 - 2x+3] = 0$$

$$K+1-2+3 = 0$$

$$\boxed{K = -2}$$

f é contínua p/ $K = -2$, para os demais valores, f é descontínua.

p/ $K = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} -x^2+1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x-3$

$$0 = -1 \quad (-\neq)$$

Ou seja, p/ $K = -1$, a função é descontínua no ponto $(1, f(1))$

Frederico e Henrique

Para $k = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} -2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3$$

$$-1 = -1 \quad \checkmark$$

De fato, p/ $k = -2$, a função é contínua pois chegamos numa verdade absoluta.

Frederico e Henrique

a) Não

No $P(1, f(1))$ pois esta função pois leis diferentes para $x \leq 1$ e $x > 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} -1x^2 + 1 = 0, K = -1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$

$\therefore \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x), K = -1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} -2x^2 + 1 = -1, K = -2$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$

Sim, pois $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x), K = -2$

Rosana Lara e Gabryelle

a) A função f é contínua quando o valor de K for -2 . Para $K \neq -2$, a função é descontínua, e essa descontinuidade ocorre em $x=1$, pois há um salto no gráfico.

c) Para $K=1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$

Como os limites laterais são diferentes, não há limite em $K=1$ com $x \rightarrow 0$.

Para $K=-2$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = -2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$

Em $K=-2$, os limites laterais são iguais, portanto há limite.

Any e Suka

Atividades 1. "Continuidade de funções de var. variável"

a) f é contínua em $K=-2$ pois $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ Logo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0$$

Demos de ter $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = K+1$ Logo

$$-1 = K+1 \Rightarrow K = -2$$

d) Para $K=-1$ não existe limite, pois limite existe quando seus limites laterais são iguais. Logo para $K=-1$, limite direito -1 e pela esquerda é 0 , quando x tende a 1 .

Para $K=-2$ existe limite, pois limite a direita é -1 e pela esquerda é -1 , quando x tende a 1 .

Paulo

1a) Seja f a família de funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

temos que para cada valor de k temos uma função diferente, e a continuidade desta depende do valor de k . Logo não se pode afirmar que uma função pertencente a esta família é contínua sem conhecer o valor de k .

A descontinuidade ocorre em $x = 1$, para $k \neq -2$ pois se x é maior do que 1, temos que $f(x) = 2x - 3$ que é contínua em todo o seu domínio, se $x < 1$ temos que $f(x) = kx^2 + 1$ que, independentemente do valor de k , são uma função contínua em todo o seu domínio.

1c). olhando no gráfico vemos que para $k = -1, \neq$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ para $k = -2$ pois

para $k = -1$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

para $k = -2$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x^2 + 1 = -1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1 = f(1)$$

Augusto e Márcio

a) Para obter uma representação algébrica, $f(x)$ não é contínua, pois no ponto $x=1$ há um "salto" no gráfico da função.

Após fazer as contas, a função torna-se contínua com $k=-2$.

$$(c) \text{ Seja } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$p/k = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe limite global.

$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$p/k = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -2x^2 + 1 = -1$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

Como os limites laterais são iguais, a função $p/k = -2$ é limitada em -1 .

a) Sim, quando temos $k = -2$ e $x = 1$, a função é contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -2x^2 + 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

Os limites laterais são iguais, logo existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, sendo assim é contínua.

Porém, se $k \neq -2$, a função não vai ser contínua, e seu gráfico vai apresentar salto.

c) Para $k = -1$ e x tendendo a 1 não existe limite de f pois os limites laterais são diferentes.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = -1$$

Para $k = -2$ e x tendendo a 1 existe limite de f .

Laura

(a) Não, para nós o fato da função ser definida em partes haveria um salto em $x=1$, e isso implicaria em f não ser contínua.

(c) $K=-1$

$$f(x) = -x^2 + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$f(x) = 2x - 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1$$

Como os limites das partes são diferentes então não existe o limite $f(x)$.

$K=-2$

$$-2x^2 + 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} -2x^2 + 1 = -1$$

$$2x - 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} 2x - 3 = -1$$

Como o limite das partes são iguais então existe o limite de $f(x)$.

1 / 1

Atividade I

a) Para $k = -2$, $f(x)$ é contínua.
 Para $k \neq -2$, $f(x)$ é descontínua, pois $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

b) Para $k = -1$ tem-se: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
 Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para $k = -1$ pois $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Para $k = -2$ tem-se: $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
 O $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para $k = -2$ existe, pois $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 1} -2x^2 + 1 = -2(1) + 1 = -1.$

Serapião e José

Atividade 2⁴:

⁴ Esta atividade foi realizada em 15-16/08/2006, com a Turmas A - 19:00hs e Turma B às 10:00hs, no Laboratório de Informática – UNESP/ Rio Claro .Adaptada de uma atividade apresentada no XEBEM

“ Encontro da Reta à Curva”

ATIVIDADE 2: “Encontro da Reta à Curva”

Objetivos Gerais:

- Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);
- Analisar as representações Matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;
- Analisar o conhecimento matemático do aluno;
- Analisar a capacidade de generalização do aluno frente ao desenvolvimento e a investigação da atividade.

Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo Específico: Trabalhar o conceito de derivada de uma função num dado ponto de modo a perceber na interpretação dos alunos a relevância das várias possibilidades de representações Matemáticas para resolução do problema.

Problema: Seja a função $f(x) = x^2$ e um ponto (x,y) do seu gráfico, discuta a relação da reta secante com a reta tangente ao gráfico no ponto $(1,1)$.

Trabalhando no Winplot:

No software Winplot, pode-se realizar uma simulação do problema, para isso clique na opção **equação→ explícita** (digite a equação $y = x^2$; $-2.000000 \leq x \leq 2.000000$). Para desenhar o ponto $(1,1)$ clique opção **equação→ ponto (x,y)** e digite o referido ponto adequando as opções desejadas. Para desenhar a equação da reta secante clique na opção **equação→ explícita** e digite a equação desejada as opções desejadas.

Explorando o Problema:

- a) Use o **Winplot** para traçar a função $f(x) = x^2$ e o ponto $(1,1)$ pertencente ao gráfico de f .
- b) Crie um ponto genérico pertencente a função f (localizado acima do ponto $(1,1)$).
- c) Trace uma reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(1,1)$ e o ponto genérico pertencentes a f .
- d) Descreva o que acontece com a reta secante quando o ponto x (genérico) se aproxima de $x = 1$, e a partir dos dados apresentados e do que foi observado escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.
- e) A partir das informações obtidas levando em conta o ponto dado e a função $f(x)$ determine a equação da reta tangente no ponto $(1,1)$, a seguir use o **Winplot** para fazer a representação gráfica desta equação. Discuta com seu colega qual a relação existente entre f' e a equação da reta tangente no ponto $x = 1$.

Figura A12: Atividade 2 aplicada junto as Turmas A e B

Apresentação

- Encontro Bahiano em educação Matemática/Vitória da Conquista - BA, no período entre 01 à 03 de Julho de 2003, por Adelmo Ribeiro de Jesus, Eliana Prates Soares e Miriam Fernandes Mascarenhas/UFBA-BA.

O segundo encontro com as **Turmas A e B**, foi realizado no laboratório de informática na UNESP de Rio Claro, onde estavam presentes cinco estudantes **Turma A** (Noite) e dezessete estudantes, **Turma B** (Manhã). Os trabalhos desenvolvidos na Atividade 2, tiveram duração aproximadamente 1:30 hs (Turma A e B).

Ao dar início aos trabalhos, falei dos objetivos, enfatizando que nessa atividade iríamos trabalhar o conceito de derivada, com vistas a perceber a relevância de se empregar as várias representações Matemáticas frente a exploração do problema.

Para o desenvolvimento dessa atividade foi solicitado aos estudantes de Cálculo I, realizar uma simulação no software **Winplot**, partindo da representação geométrica de uma reta secante ao gráfico da função $f(x) = x^2$, dado um ponto (x,y) do seu gráfico.

Em termos de esclarecimento, na transcrição dessa atividade, diferentemente da primeira, estarei simultaneamente comentando as discussões ocorridas durante o desenvolvimento dos trabalhos realizado entre as turmas **A e B**.

Discutindo o Problema com a Turma A e B⁵

Para a **Atividade Exploratório-Investigativa 2**, foi proposto aos estudantes uma investigação envolvendo a interpretação geométrica como a inclinação de uma reta tangente a uma curva, buscando compreender o conceito da derivada de uma função em um dado ponto.

A fim de estimular um debate, primeiramente perguntei aos estudantes o que eles entendiam a respeito de derivada de uma função, se poderiam dar uma definição e comentar sobre possíveis aplicações envolvendo o conceito de derivada. Na **Turma B** (Manhã) bem como na **Turma A** (Noite) inicialmente houve um pequeno silêncio, mas logo surgiram algumas respostas:

✓ **Definindo Derivada (Turma A);**

Robin e Clotilde - Derivada é o coeficiente angular da reta que é tangente ao gráfico num ponto.

• **Comentando sobre as aplicações da derivada (Turma A);**

⁵ Cada turma em seus respectivos horários.





Clotilde - A gente usa derivada pra fazer o máximo e o mínimo da função, pra montar o gráfico...

Robin - máximo e mínimo, ponto de inflexão... você vê, se a função é crescente ou decrescente

Clotilde - Pra achar o erro da... **(Robin, completa a frase da Clotilde)**

Robin - ...tipo a gente fazia... variava dez centímetros de um cilindro, no raio do cilindro, daí a gente tinha que ver qual era o erro. Você calculava, se tivesse à mão (sem as ferramentas da derivada, por estimativas) e, se você fizesse com a derivada achava outro valor, aí tinha um erro pequeno.

- **Dificuldades enfrentadas pelos estudantes no estudo da derivada (Turma A);**

Robin - Há... a parte de derivada trigonométrica, derivada de arco seno, arco co-seno, arco tangente, arco... Derivada em geral, tipo polinômio já é mais fácil e algumas a gente acaba lembrando como a derivada de log, por exemplo.

MA - então são derivadas de funções não elementares?

Robin - isso

MA - mas, porque? Vocês acham que essa dificuldade surge, porque vocês não estudaram essas funções lá no Ensino Médio?

Robin - isso

MA - Vocês não viram funções logarítmicas ou trigonométricas?

Robin - vimos, tem logaritmo ...

Alexandre - ... mas só que não tem gráfico

Clotilde - eles não exploram gráfico no Ensino Médio, aí quando vem pra universidade, sente muita dificuldade, porque... há... eu queria usar o gráfico, olhar com o gráfico, mostrar o gráfico das funções, pois, sem esse recurso, aí fica bem difícil pra mim.

Para a **Turma B**, propus os mesmos questionamentos feitos a **Turma A**. Perguntei aos estudantes se poderiam dar uma definição de derivada, e quais suas aplicações. Os estudantes no início ficaram meio reticentes em responder, de maneira que apenas três estudantes fizeram comentários:

- **Definindo Derivada (Turma B);**

Frederico - a derivada é o coeficiente angular da reta tangente

Quando perguntei quais seriam as aplicações da derivada, ouvi as seguintes respostas:



✓ **Comentando sobre as aplicações da derivada (Turma B);**

Serapião - serve pra qualquer problema envolvendo taxa de variação

Henrique - pra achar o máximo e o mínimo da função

Frederico - construção de gráficos.

Em relação às dificuldades, os comentários foram semelhantes aos já comentados pela **Turma A**. Decorrido esse primeiro momento, entreguei aos estudantes (tanto para **Turma A** como para **Turma B**, em seus respectivos horários) um papel sulfite, contendo orientações para usar os comandos do Winplot, bem como, as questões propostas para o desenvolvimento da **Atividade 2** (Figura A12). Para início dos trabalhos, solicitei aos estudantes (**Turma A**- Noite e **Turma B** - Manhã) que desenhasssem por meio do Winplot o gráfico de $f(x) = x^2$ bem como o ponto (1,1). E assim foi feito, como ilustrado abaixo (Figura A13):

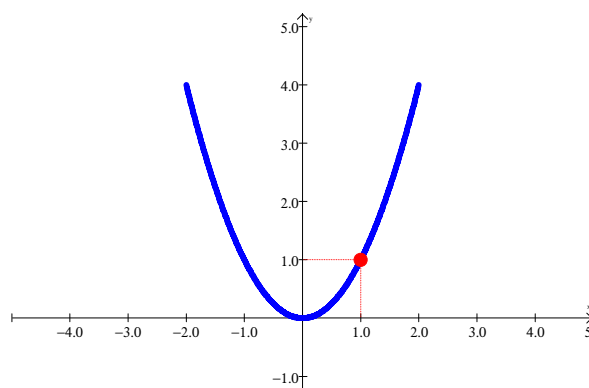


Figura A13: Ponto sobre a Curva

Para encaminhar os trabalhos no Winplot, perguntei como poderíamos representar um ponto genérico pertencente a função $f(x) = x^2$, de maneira que esse ponto estivesse localizado acima do ponto $x = 1$, sobre o gráfico de f ? realizado esse questionamento, concedi um tempo a cada grupo de estudantes tanto para Turma A como para a turma B, para que pudessem refletir sobre a pergunta. Como não surgiram respostas, resolvi explorar essa idéia um pouco mais explicando que, para marcar esse ponto, deveríamos pensar de forma abstrata, ou seja, o ponto poderia ser, por exemplo, x igual a 1 mais algum valor genérico.

Partindo dessa informação, ficou fácil para os estudantes concluírem que x poderia ser igual a $1 + a$, ou $1 + b$, ou $1 + c$, etc. Diante de tantas sugestões, propus então que utilizassem a letra “ h ”, lembrando-lhes da definição de derivada apresentada pela professora de CDI I em sala de aula. Prosseguindo nesse pensamento, perguntei qual seria o valor de coordenada y , correspondente a $x = 1 + h$ na função $f(x) = x^2$? Para essa pergunta os estudantes responderam quase que imediatamente que, o valor de y correspondia a $(1+h)^2$ (resposta sugerida pela maioria dos grupos tanto na **Turma A** como na **Turma B**).

Percebendo, que até o momento todos os grupos (**Turma A** e **B**) estavam acompanhando bem o desenvolvimento da atividade, propus então, que por meio do **Winplot** desenhasssem o ponto $(1+h, (1+h)^2)$, e em seguida foi solicitado que usassem o comando Animação (do Winplot) permitindo aos mesmos visualizarem o comportamento da função a partir do movimento do ponto genérico⁶ $(1+h, (1+h)^2)$.(Vide Fig. 21 e 22)

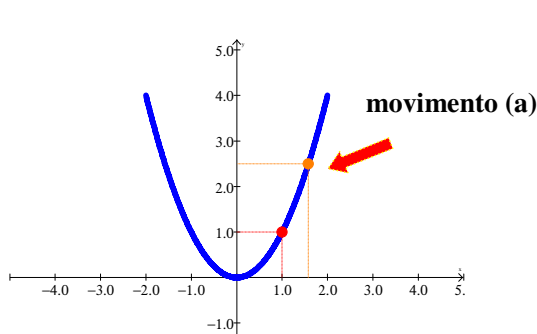


Figura A14: Movimento (a) do Ponto Genérico
sobre a Curva

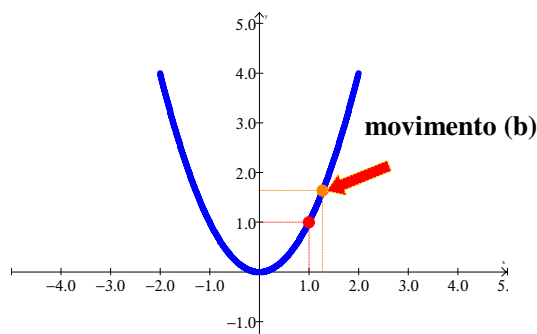
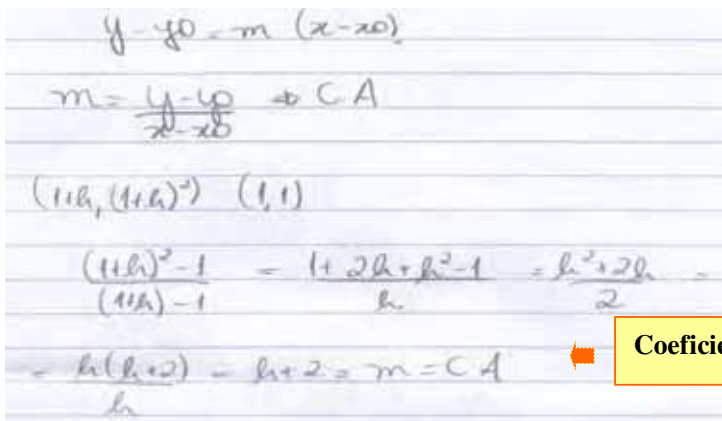


Figura A15: Movimento (b) do Ponto
sobre a Curva

Dando prosseguimento, perguntei aos estudantes (para cada grupo das **Turmas A e B**, nos horários respectivos, noite e manhã), como poderíamos representar algebricamente a equação de uma reta secante passando pelos pontos $(1,1)$ e o ponto genérico $(1+h, (1+h)^2)$. Novamente dei um espaço de tempo para que pudessem conjecturar a respeito, isto é, que cada grupo pudesse discutir entre si (**Turmas A e B**) uma solução para dada pergunta. Passado esse tempo voltei a indagar o que eles concluíram?

⁶ Os movimentos (a) e (b) ilustrados nas figuras A14 e A15 são para valores variáveis de x .

Na **Turma A**, a estudante **Ana Paula** respondeu que a equação da reta poderia ser escrita da seguinte forma: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, diante dessa resposta, perguntei aos demais grupos se concordavam? Todos responderam que sim. Mas ao perguntar como calcular o coeficiente angular da reta secante ninguém soube responder de imediato. Resolvi então lembrá-los que isolando “m” na equação $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, facilmente encontrariam o valor procurado. Após essa intervenção solicitei aos estudantes que registrassem no papel a representação algébrica da equação da reta secante considerando os pontos (1,1) e $(1+h, (1+h)^2)$, calculando a seguir o valor do coeficiente angular da reta, o que fizeram, sem grandes dificuldades. Vejamos abaixo uma solução apresentada pela dupla de estudantes, Robin e Clotilde;



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \text{ C.A.}$$

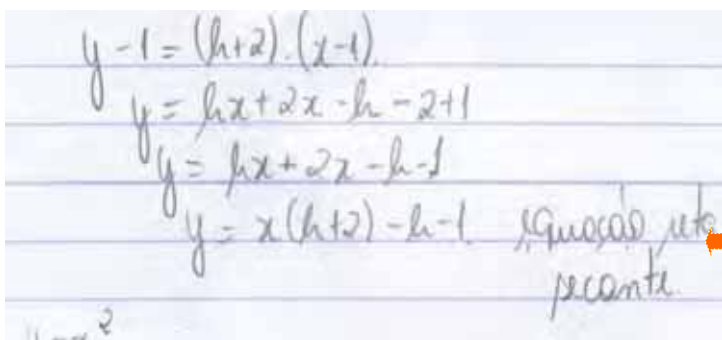
$$(1+h, (1+h)^2) \quad (1, 1)$$

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} =$$

$$= \frac{h(h+2)}{h} = h+2 = m = \text{C.A.}$$

Coeficiente Angular

Figura A16: Cálculo Algébrico do Coeficiente Angular - Robin e Clotilde



$$y - 1 = (h+2) \cdot (x - 1)$$

$$y = hx + 2x - h - 2 + 1$$

$$y = hx + 2x - h - 1$$

$$y = x(h+2) - h - 1 \text{ Equação da reta secante.}$$

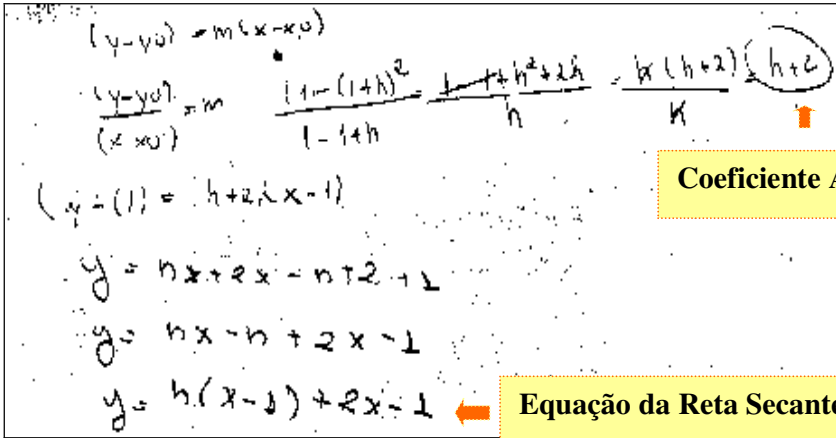
Equação da Reta Secante

Figura A17: Cálculo Algébrico da Equação da Reta Secante – Robin e Clotilde

Na **Turma B**, propus a mesma pergunta feita à **Turma A**. O estudante **Henrique** respondeu que, a equação da reta secante seria $y = a.x$. Concordei, acrescentando que essa era uma forma de representar. Perguntei aos demais grupos da **Turma B**, se havia uma forma mais geral de escrever a equação da reta secante? A

estudante Any respondeu: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Tendo em vistas essas sugestões, resolvi investigar um pouco mais, e percebi que alguns dos estudantes estavam confundindo a **representação algébrica da equação da reta** com a **definição de derivada**, mas tendo em vista o que foi comentado por essa pesquisadora e pelos colegas ao longo dos trabalhos puderam desfazer-se dessa idéia.

Em sua maioria os grupos de estudantes da **Turma B**, como a **Turma A**, acompanharam a contento as primeiras investigações propostas por essa pesquisadora, no entanto, apresentaram dificuldade em responder como calcular o coeficiente angular da reta secante. Nesse sentido, tive que responder às muitas solicitações dos estudantes, principalmente devido ao uso do **Winplot**. Sanada algumas dúvidas, solicitei aos estudantes da **Turma B** e **A** que registrassem no papel (em seus respectivos horários) o cálculo do coeficiente angular, bem como a representação algébrica da equação da reta secante ao gráfico de f nos pontos $(1,1)$ e $(1+h, (1+h)^2)$. O que, também, fizeram sem maiores dificuldades. Segue abaixo uma solução apresentada pelas estudantes Any e Suka.



The image shows handwritten mathematical work on a grid background. The work is as follows:

- Line 1: $(y - y_0) = m(x - x_0)$
- Line 2: $\frac{(y - y_0)}{(x - x_0)} = m$
- Line 3: $\frac{(1 - (1+h)^2)}{1 - 1+h} = \frac{1 - 1 - h^2 - 2h}{h} = \frac{-h^2 - 2h}{h} = \frac{-h(h+2)}{1} = -(h+2)$
- Line 4: $(y - 1) = -(h+2)(x - 1)$
- Line 5: $y = -hx - 2x + h + 2 + 1$
- Line 6: $y = -hx - 2x + h + 3$
- Line 7: $y = -h(x - 1) - 2x + 3$

Two yellow boxes with black text are overlaid on the right side of the work:

- A box labeled "Coeficiente Angular" with an arrow pointing to the expression $-(h+2)$ in line 3.
- A box labeled "Equação da Reta Secante" with an arrow pointing to the final equation in line 7.

Figura A18: Cálculo Algébrico do coeficiente Angular e da Equação da reta secante – Any e Suka

A partir dessa discussão e das respostas dos estudantes (**Turmas A e B**), pedi que desenhassem por meio do Winplot o gráfico da equação da reta secante, reforçando a idéia de que se a solução encontrada estivesse correta o gráfico da reta passaria exatamente pelos pontos pré-definidos (Figura A19).

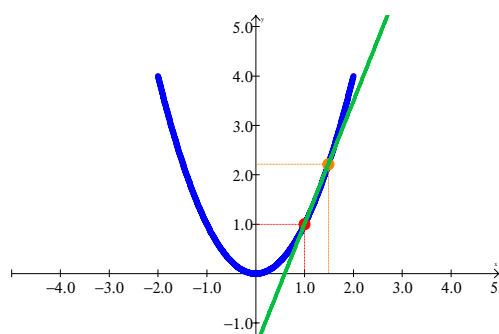


Figura A19: A Reta Secante

Até essa etapa da atividade, todos os grupos de estudantes, tanto da **Turma A** como da **Turma B** mostravam compreender os processos realizados.

Prosseguindo a investigação, foi solicitado às Turmas A e B (em seus respectivos horários), determinarem a equação da reta tangente no ponto (1,1), tomando como base, os dados previamente apresentados no problema, e as observações dos estudantes, por meio da visualização do gráfico de f no Winplot. Nesse momento era perceptível o embaraço de todos diante de tal questionamento (principalmente dos grupos da Turma A). Para resolver o impasse que se estabeleceu, decidi então, ir até a lousa com o intuito de lembrá-los a definição da derivada de uma função⁷ levando em conta a sua interpretação geométrica (Figura A20).

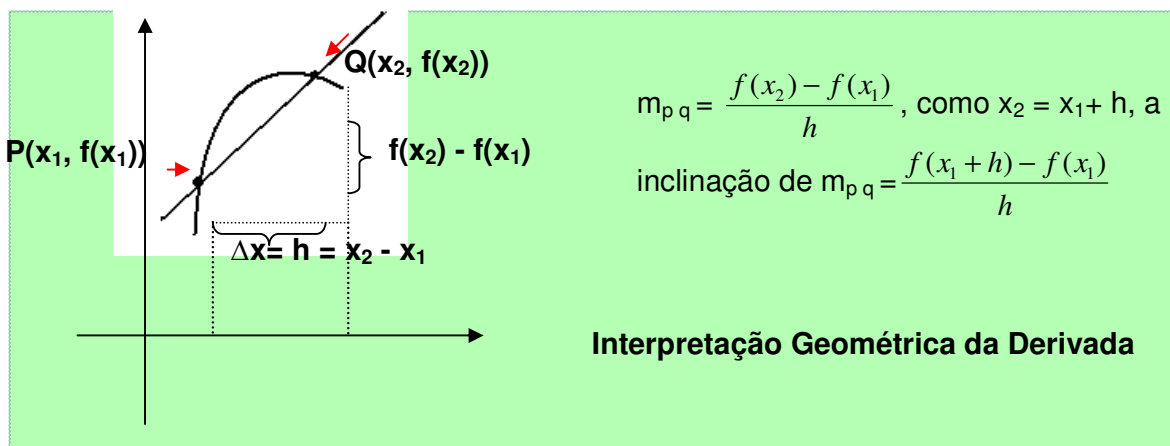


Figura A20: Interpretação Geométrica da Derivada

⁷ Definição: A derivada de uma função f é a função denotada por f' , tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se esse limite existir. Se x_1 for um determinado número no domínio de f , então $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$, se esse limite existir.

Perante o problema da **Atividade 2**, em particular, ressaltei que já tínhamos conhecimento dos pontos no caso o ponto (1,1) e o ponto genérico $(1+h, (1+h)^2)$, o que nos possibilitou, anteriormente, determinar o valor da inclinação $m = 2 + h$, permitindo escrever a equação da reta secante $y = (2+h).x - 1 + h$. Mas como escrever a equação da reta tangente diante de tais informações sem utilizar, ainda, as operações de derivação?

Buscando, então, explorar um pouco mais essa idéia, solicitei aos estudantes que movimentassem novamente a reta sobre a curva por meio do **Winplot** e, a partir daí refletissem um pouco sobre o que observavam. Passado alguns instantes, retomei a discussão perguntando o que concluíram?

Como resposta, os grupos (em sua maioria) tanto da **Turma A** como a **Turma B** enunciaram que ao movimentar a reta sobre a curva $f(x) = x^2$, no momento que a reta passava de secante a tangente, o valor **h** tendia a zero. Vejamos abaixo alguns comentários redigidos pelos estudantes:

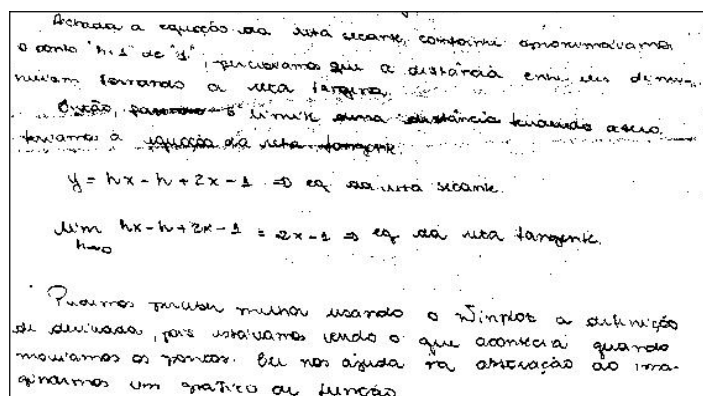


Figura A21: Descrição do Comentário - Letícia e Marcela

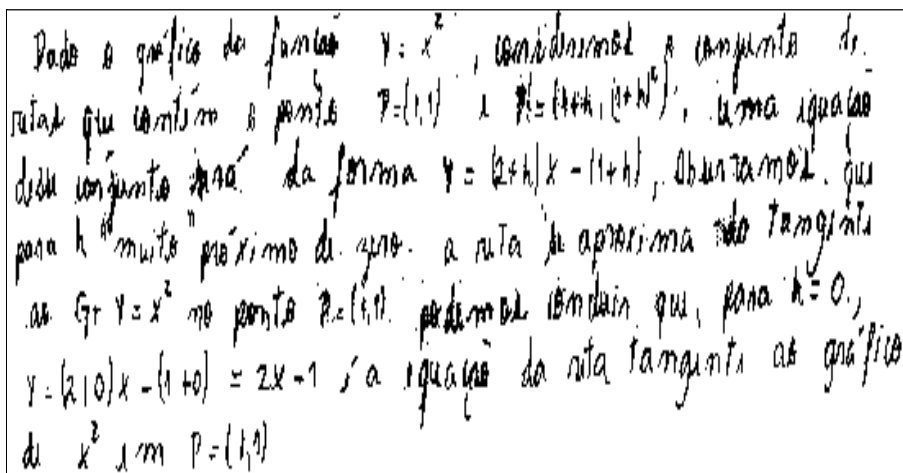
Letícia e Marcela escrevem;

Achada a equação da reta secante conforme aproximávamos o ponto "h +1" de "1" percebemos que a distância entre eles diminuía tornando a reta tangente. Então, fazendo o limite dessa distância tendendo a zero teríamos a equação da reta tangente.

$Y = hx - h + 2x - 1 \Rightarrow$ eq. da reta secante.

$\lim_{h \rightarrow 0} (hx - h + 2x - 1) = 2x - 1 \Rightarrow$ equação da reta tangente. Pudemos perceber melhor usando o **Winplot** a definição de derivada, pois estávamos vendo o que acontecia quando movíamos os pontos [...]⁸

⁸ Transcrição parcial do comentário escrito das estudantes Letícia e Marcela



Dado o gráfico da função $y = x^2$, consideremos o conjunto de retas que contém o ponto $P = (1,1)$ e $P' = (1+h, (1+h)^2)$, uma equação desse conjunto será da forma $y = (2+h)x - (1+h)$, observamos que para h muito próximo de zero a reta se aproxima da tangente ao Gr $y = x^2$ no ponto $P = (1,1)$. Podemos concluir que, para $h = 0$, $y = (2+0)x - (1+0) = 2x - 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de x^2 em $P = (1,1)$.

Figura A22: Descrição do Comentário - Augusto e Márcio

Augusto e Márcio escrevem:

Dado o gráfico da função $y = x^2$, consideremos o conjunto de retas que contém o ponto $P = (1,1)$ e $P' = (1+h, (1+h)^2)$, uma equação desse conjunto será da forma $y = (2+h)x - (1+h)$, observamos que para h muito próximo de zero a reta se aproxima da tangente ao Gr (Gráfico) x^2 no ponto $P = (1,1)$. Podemos concluir que, para $h = 0$, $y = (2+0)x - (1+0) = 2x - 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de x^2 em $P = (1,1)$ ⁹.

Voltei então a perguntar aos estudantes qual foi a equação encontrada para representar a reta secante passando pelos pontos $(1,1)$ e $(1+h, (1+h)^2)$, nesse momento, tanto os grupos da **Turma A** como a **Turma B** apontaram a seguinte solução: $y = (2+h).x + (-h-1)$. A partir desse dado propus aos estudantes usarem a idéia da definição de derivada a partir de sua interpretação geométrica para calcular o $\lim_{h \rightarrow 0} ((2+h)x - h - 1)$, assim que terminaram perguntei o que encontraram e eles disseram que o limite encontrado foi $2x-1$. Então perguntei o que representava essa equação? Os estudantes puderam então perceber que se tratava da equação da reta tangente.

Para concluir a nossa investigação pedi aos estudantes que desenhasssem por meio do **Winplot** o gráfico da equação da reta tangente, a partir das últimas informações obtidas, e perguntei o que aconteceu; Todos puderam observar que o gráfico da reta tangente foi desenhado exatamente no ponto $(1,1)$ (Figura A23).

⁹ Transcrição parcial do comentário escrito dos estudantes Augusto e Márcio

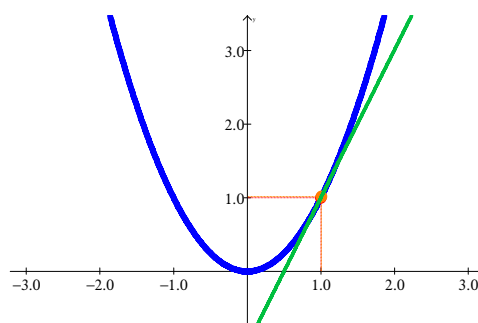


Figura A23: A Reta Tangente

Ao término da **Atividade 2**, ressalttei que uma maneira de se encontrar a equação da reta tangente ao gráfico, dado um ponto, além do que foi investigado nesse problema, é através das operações de derivação, ou seja, através dos teoremas sobre derivação de funções algébricas¹⁰. Sobre essas propriedades, os estudantes em sua maioria (**Turma A e B**) mostraram relativa segurança, pois ao perguntar-lhes como encontrar a equação da reta tangente usando as ferramentas de derivação foram unânimes em responder que bastaria calcular a derivada de $f(x) = x^2$, isto é, $f'(x) = 2x$, o que implica que para $f'(1) = 2$. De modo que substituindo na fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$ a equação da reta seria como previsto $y = 2x - 1$. Terminadas as discussões dei por encerrada a Atividade 2.

¹⁰ Teoremas que possibilitam encontrar derivadas com mais facilidade. Esses teoremas são facilmente encontrados em livro de Cálculo tais como o do, Stuart, (2005) Leithold, 1(999) entre outros.

Atividade 2- Turma A

$$\begin{aligned}
 x &= (1+h) \\
 y &= (1+h)^2 \\
 P &= (1, 1) \\
 x_2 &= (1+h, (1+h)^2)
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 m &= \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
 m &= \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1} = \frac{2h+h^2}{h} \\
 &= \frac{h(2+h)}{h} = 2+h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y - y_0 &= m(x - x_0) \\
 y - 1 &= (2+h)(x - 1) \\
 y - 1 &= 2x - 2 + xh - h \\
 y &= x(2+h) - 2 - h + 1 \\
 y &= (2+h)x - h - 1
 \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$$

$$x_0 = x - h$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 \Rightarrow y' = 2x \\
 (1, 1) \quad y' &= 2 \cdot 1 = 2
 \end{aligned}$$

Ana paula

valor de x : $x_0 = 1$ $x = 1+h$ 1 1

$y_0 = 1$ $y = (1+h)^2$

$\therefore y = (1+h)^2$

coef. =

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

→ coef. ang. da retasecante:

$$m = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} \rightarrow m = \frac{1+h+h^2-1}{h} \rightarrow \cancel{h}(2+h) = \boxed{2+h}$$

eq. da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = (2+h)(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2 + hx - h$$

$$y - 1 + 2 = 2x + hx - h$$

$$y = -1 + x(2+h) - h$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$

$y = 2x + hx - 1 - h$

$h \rightarrow 0 \rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow \text{reta } t_g$

$y' = x^2 \rightarrow y' = 2x$

$(1, 1) \rightarrow y' = 2 \cdot 1 \rightarrow y' = 2 = m$

coef.

tilibra

Laura

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \Rightarrow m = \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}$$

$$m = \frac{(1 - (1 + h)^2)}{(1 - (1 + h))} \Rightarrow m = \frac{1 - 1 - 2h - h^2}{1 - 1 - h} \Rightarrow m = \frac{-h(2 + h)}{-h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 2 + h$$

↳ C.A. Decante

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \Rightarrow (y - (1 + h)^2) = (2 + h)(x - (1 + h)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y - 1 - 2h - h^2) = (2 + h)(x - 1 - h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 - 2h - h^2 = 2x - 2 - 2h + hx - h - h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2x - 2 + hx - h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2x + hx - 1 - h \Rightarrow y = x(2 + h) - 1 - h$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad h = x - x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$y = 2x + hx - 1 - h$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow y = 2x - 1 \rightarrow \text{reta tangente}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2$$

$$\text{ponto } (1, 1) \rightarrow [x = 1]$$

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$(y - 1) = 2(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2x - 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow C.A$$

$$(1+h, (1+h)^2) \quad (1, 1)$$

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{2} =$$

$$= \frac{h(h+2)}{h} = h+2 = m = C.A$$

$$y - 1 = (h+2) \cdot (x - 1)$$

$$y = hx + 2x - h - 2 + 1$$

$$y = hx + 2x - h - 1$$

$$y = x(h+2) - h - 1 \quad \text{equação reta secante.}$$

$$y = x^2$$

$$y' = \frac{2x}{1} \Rightarrow C.A$$

$$(1, 1)$$

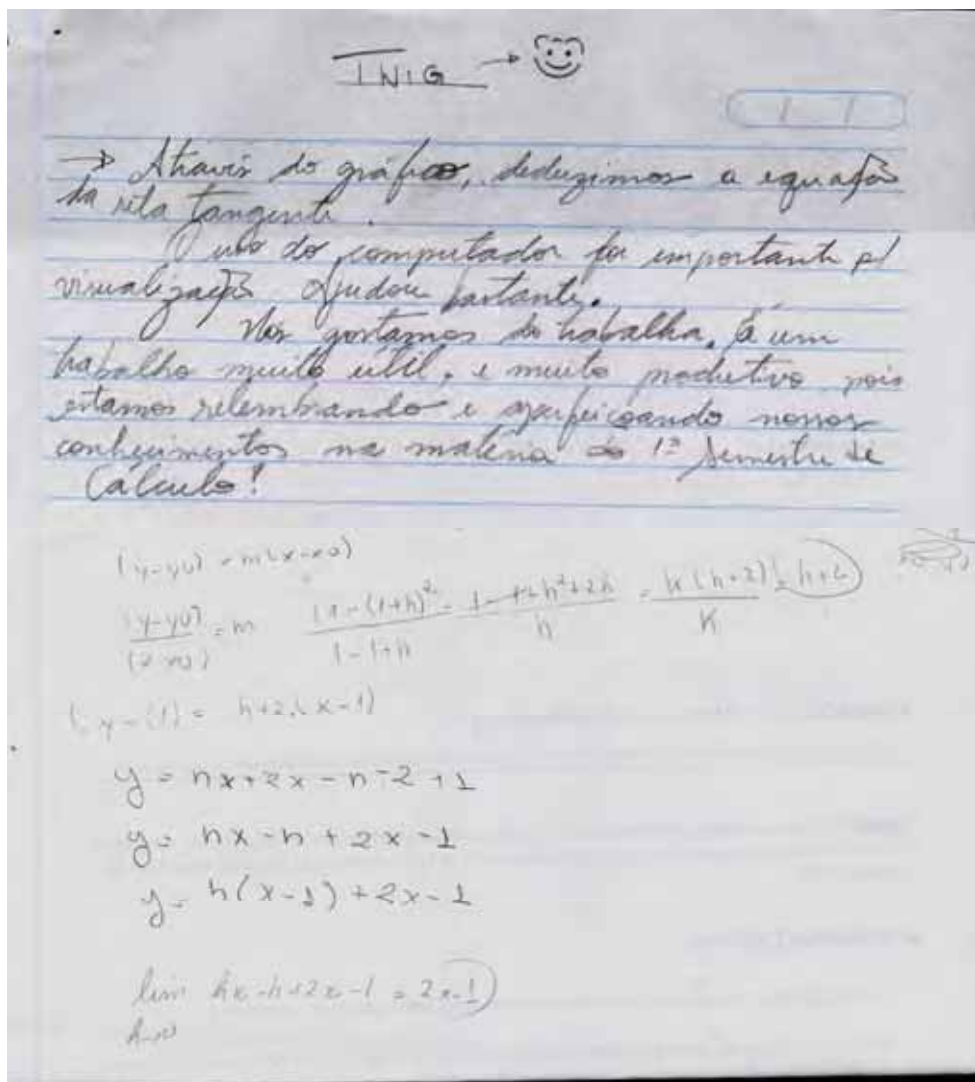
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

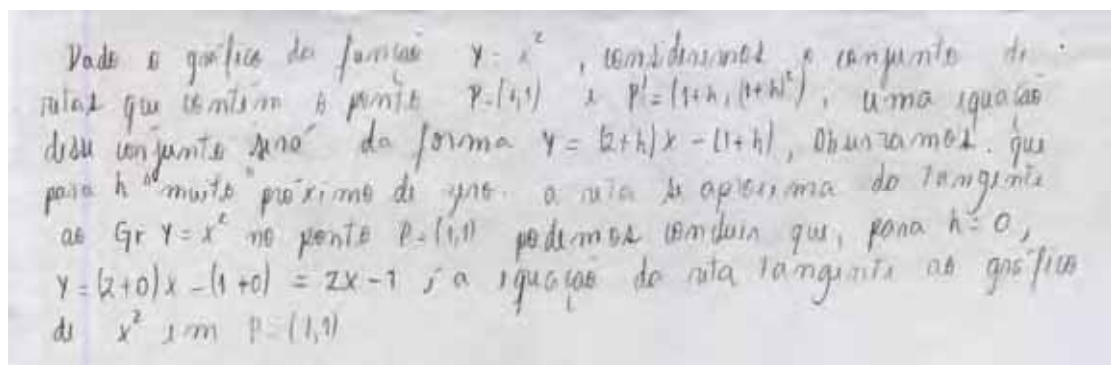
$$y = 2x - 2$$

$$y = 2x - 1 \quad \rightarrow \text{eq. reta tangente}$$

Atividade 2- Turma B



Any e Suka



Augusto e Márcio

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$m = \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h+2$$

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = (h+2)(x - 1)$$

$$y - 1 = hx - h + 2x - 2$$

$$y = hx - h + 2x - 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} hx - h + 2x - 1 = 2x - 1$$

Para achar a equação da reta tangente:

Achamos a equação da reta secante, conforme aproximarmos o ponto 'h+1' de '1', percebemos que a distância entre eles diminui, tornando a reta tangente.

Então, fazendo o limite dessa distância tendendo a zero, teremos a equação da reta tangente:

$$y = hx - h + 2x - 1 \rightarrow \text{eq da reta secante}$$

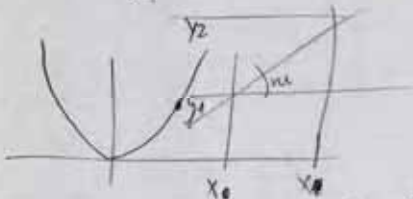
$$\lim_{h \rightarrow 0} hx - h + 2x - 1 = 2x - 1 \rightarrow \text{eq da reta tangente}$$

Podemos plotar muitos valores usando o Winplot a partir de uma tabela, pois utilizamos tudo o que aconteceu quando movíamos os pontos. Ele nos ajuda na obtenção do imaginamos um gráfico da função.

Letícia e Marcela



Frederico e Henrique



Frederico e Henrique

O uso do Utiplot é muito interessante para visualizar que realmente acontece no gráfico com relação à limite, reta secante, reta tangente e etc. Nós poderíamos ter a perfeita visão de que qdo $h \rightarrow 0$ a reta secante passa a ser a reta tangente.

Na verdade todas as aulas de cálculo poderiam ser dadas com auxílio desse software. Talvez assim o conteúdo não tão teórico se tornasse mais concreto e abstrato, o que acaba tornando difícil a compreensão.

Patrícia e Ágata

$xy = ax + b$
 $y - y_0 = m(x - x_0)$
 $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$
 $f(3, 2) = (3, 2)$
 $f(2, 3)$
 $m = \frac{(3+2)^2 - 3}{3+2-3} = \frac{3+2(3+2)^2 - 3}{2} = \frac{2(2+2)}{2} = 2+2=4$
 $y - 3 = (2+2)(x - 3)$
 $y = (2+2)(x - 3) + 3$
 $y = 4(x - 3) + 3$
 $y = 4x - 12 + 3$
 $y = 4x - 9$

Dada uma função $f(x) = x^2$ e um ponto $(3, 3)$ pertencente ao gráfico da função e $(2+3, 3+3^2)$ também pertencente à função.

A reta que passa por esses dois pontos, quando a distância entre eles tende a zero (ou seja, $2+3 \rightarrow 3$), se tornará tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(3, 3)$.

Assim, temos:

Para $(2+2)(x-3) + 3 = 2x - 3$.

Porém - Melancia

Saud - Sagui

Serapião e José

Atividade 3¹¹: “O caso do retângulo inscrito”(Parte 1)

ATIVIDADE 3: “O Caso do retângulo inscrito”

Objetivos Gerais:

- ✓ Investigar a capacidade de justificação do aluno (aspecto didático);
- ✓ Analisar as representações matemáticas utilizadas pelos alunos no desenvolvimento e resolução da atividade apresentada, quais caminhos são abordados e quais as estratégias para enfrentar e resolver o problema;
- ✓ Analisar o conhecimento matemático do aluno;
- ✓ Analisar a capacidade de generalização do aluno frente o desenvolvimento e investigação da atividade.
- ✓ Investigar a capacidade de visualização do aluno frente ao problema apresentado.

Objetivo Específico: investigar os diferentes tipos de representações matemáticas utilizadas pelo aluno, bem como o grau de conhecimento matemático no processo de interpretação, compreensão e visualização no desenvolvimento do problema.

Problema: Encontrar o retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semi-círculo de raio r .

Trabalhando no Winplot: Visualizando o triângulo inscrito no semi-círculo.

No software Winplot, pode-se realizar uma simulação do problema, para isso clique na opção **equação→ explícita** (digite a equação genérica do semi-círculo). Para inscrever o retângulo clique opção **equação→ para o 1º.segmento (x,y)**, para $x1 = -a$, $y1 = \text{sqr}(-(-a)^2 + r^2)$, $x2 = a$, $y2 = \text{sqr}(-(-a)^2 + r^2)$; para o 2º.segmento (x,y), clique em **equação→ Inventário→dupl**(na janela que se abre clique em não e então escreva os dados para o 2º. Segmento) para $x1 = a$, $y1 = 0$, $x2 = a$, $y2 = \text{sqr}(-a^2 + r^2)$ e para o 3º.segmento (x,y) clique em **equação→ Inventário→dupl**(na janela que se abre clique em não e então escreva os dados para o 3º. Segmento), para $x1 = -a$, $y1 = 0$, $x2 = -a$, $y2 = \text{sqr}(-(-a)^2 + r^2)$. A seguir clique na opção **Anim → individuais → A** (Use a barra de rolagem para observar os vários retângulos inscritos no semi-círculo).

Explorando o Problema:

- a) Apenas observando a figura através do **Winplot** é possível identificar qual dos retângulos tem a maior área ? justifique sua resposta.
- b) Supondo (x,y) o vértice (do retângulo inscrito) que está no primeiro quadrante (note que este ponto também pertence ao semi-círculo), e a partir desse dado, escreva de forma genérica a área do retângulo.
- c) Pensando na possibilidade de eliminar o y e usando o fato que (x,y) está sobre o círculo escreva a área do retângulo em função de x , ou seja, substitua y na fórmula da área pela equação do semi-círculo determinado acima (essa será a função modelo utilizada para a representação gráfica);
- d) Determinada a função encontre o seu domínio? Esse dado é importante para o desenvolvimento do problema? Justifique sua resposta.
- e) Usando o Winplot desenhe a imagem do gráfico da função $A(x)$ no mesmo eixo de

¹¹ Realizada em 22/08/06 - Turma A (Noite) e 24/08/2006 -Turma B (Noite)/ Hora: 19:00 Turmas A e B respectivamente)/Local:Laboratório de Informática – UNESP/ Rio Claro). Adaptada do Livro de Stuart (2005) p.334.



coordenadas que foi feita a simulação do retângulo inscrito no semi-círculo. Para isso use a opção **equação→ explícita** (digite no espaço indicado a função) Para dinamizar a função crie um ponto genérico clicando em **Equação→ ponto (x,y)**, escreva para $x = a$ e para $y =$ a representação algébrica da função A, substituindo a variável x pelo parâmetro a . Para visualizar o movimento do ponto sobre o gráfico da função A use a opção **Anim→Parâmetros A**, (na janela de animação escreva 0 e clique em def L, limitando o parâmetro à esquerda e para limitar à direita escreva 2, depois clique em def R) CLIQUE NA BARRA DE ROLAGEM, observe o que acontece.

f) Analisando as funções A e A' você poderia dizer;

f.1) Para as regiões onde A cresce, a área dos retângulos também tendem a crescer?

f.2) Os pontos no qual a função derivada A' se anula chamam-se pontos críticos. Nesse caso determine a derivada da função A(x) e determine quais os zeros e o domínio da função derivada? Qual a relevância de se conhecer esses dados?

g) Para dinamizar a função derivada crie um outro ponto genérico clicando em **Equação→ ponto (x,y)**, escreva para $x = a$ e para $y =$ a representação algébrica da função derivada A', substituindo a variável x pelo parâmetro a . Para visualizar o movimento do ponto sobre o gráfico da função A' use a opção **Anim→Parâmetros A**, (na janela de animação escreva 0 e clique em def L, limitando o parâmetro à esquerda e para limitar à direita escreva 2, depois clique em def R) CLIQUE NA BARRA DE ROLAGEM, observe o que acontece.

h) A partir dos dados encontrados, e das observações realizadas a partir das imagens dos gráficos de A e A' você poderia chegar a alguma conclusão para resolução do problema?

Figura A24: Atividade 3 aplicada junto as Turmas A e B

Apresentação

O terceiro encontro foi realizado no Laboratório de Informática. O desenvolvimento da **Atividade 3** com a **Turma A** foi realizada na terça-feira e com a **Turma B** na quinta-feira¹², iniciando os trabalhos exatamente às 19:00 no Laboratório de Informática, com duração de aproximadamente 1:30hs para cada Turma. Estiveram presentes sete estudantes da **Turma A** e onze estudantes da **Turma B**¹³.

A **Atividade 3** tinha como **objetivo** investigar um **problema de otimização** por meio do software **Winplot**, visando explorar o conhecimento do estudante (futuro professor), no processo de interpretação, compreensão, justificação e visualização, a partir do estudo das várias representações matemáticas inseridas no contexto da disciplina Cálculo I. Para a **Atividade 3** foi proposto aos estudantes o seguinte problema: **Encontrar o retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semi-círculo de raio r** (Figura A24).

¹² Houve uma mudança de dia e horário na aplicação dessa atividade, devido o uso do Laboratório já estar agendado para outros compromissos. Esclarecendo, o uso do laboratório para a minha coleta de dados estava sujeito a disponibilidade dos professores que o utilizavam para dar aulas.

¹³ Alguns participantes da Turma B, migraram para a Turma A, devido a problemas de horário.





Discutindo e Explorando o Problema: Turmas A e B (Parte 1)

Antes de dar início às discussões das questões propostas na atividade informei aos estudantes tanto da **Turma A** como para **Turma B** (em cada turma separadamente) que iríamos explorar um problema de **otimização** e que, provavelmente, seriam necessários dois encontros para concluirmos a nossa investigação. Expliquei que para o desenvolvimento dessa atividade utilizaríamos os softwares matemáticos **Winplot** para fazermos a simulação geométrica do problema e para desenhar os gráficos das funções. Em conversa com os estudantes decidimos que usaríamos o pacote algébrico do **Maple** (como recurso eventual) para que pudessem conferir as soluções encontradas das representações algébricas realizadas previamente por eles com lápis e papel. Além disso, uma Planilha seria usada para explorarmos o problema sob um outro ponto de vista, sem aplicações das propriedades conceituais do Cálculo Diferencial e Integral I.

Para orientar os trabalhos foi entregue aos grupos de estudantes, em suas respectivas turmas, um roteiro informando o problema a ser pesquisado, instruções de como usar o software **Winplot** para a simulação da representação gráfica e geométrica e algumas questões inerentes ao dado problema. Vale ressaltar que os estudantes já estavam familiarizados com alguns comandos do **Winplot** e do **Maple**¹⁴, de maneira que, sob esse aspecto o desenvolvimento dos trabalhos transcorreu tranquilamente.

Os encaminhamentos para as possíveis soluções da atividade proposta e para a abordagem das representações gráficas por meio do software obedeceram aos seguintes passos:

► **Interação da pesquisadora com os estudantes de modo a propiciar um ambiente investigativo, com a perspectiva de motivar os estudantes a um contexto de exploração da atividade mediada pelos softwares matemático Winplot.**

Ao iniciar a atividade perguntei aos estudantes como poderíamos representar algebricamente a equação da circunferência cujo centro encontrava-se na origem. Para essa questão tanto a **Turma A** como a **Turma B** não tiveram nenhuma dificuldade em responder que a equação da circunferência consistia na soma dos quadrados de duas variáveis ($x^2 + y^2$, por exemplo) igual ao raio ao quadrado, ou seja, $x^2 + y^2 = r^2$. Tomando como base essa representação, sugeri aos estudantes que desenhassem no

¹⁴ Orientados pela professora de Cálculo.



Winplot o gráfico da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ (nesse caso r corresponderia a um valor genérico para o raio e x e y as variáveis para a equação). (Figura A25).

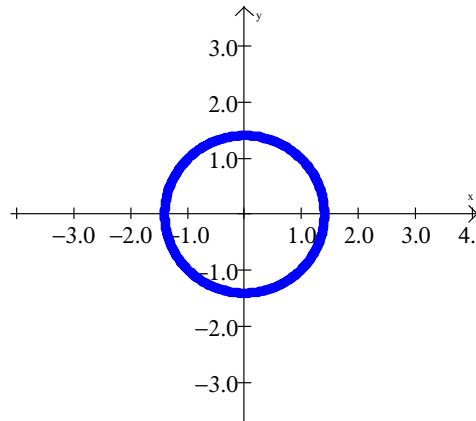


Figura A25: O Gráfico da Circunferência

A partir da equação da circunferência, propus aos estudantes que discutissem em grupo como poderiam representar algebricamente a equação da semicircunferência. Após discussões mediadas por essa pesquisadora e questionamentos apresentados pelos próprios estudantes, algumas soluções foram apresentadas. Ou seja, como o problema solicitava investigar qual a maior área do retângulo inscrito em um semicírculo de raio r , tornou-se conveniente escrever a equação $x^2 + y^2 = r^2$ de forma adequada, isto é, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, adaptando as necessidades do que buscava investigar a Atividade 3.

Dando prosseguimento a exploração do problema, sugeri aos estudantes desenharem por meio do **Winplot** o gráfico da equação $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, o qual gerou uma semicircunferência de centro na origem e de raio genérico sobre o eixo das ordenadas (Figura A26).

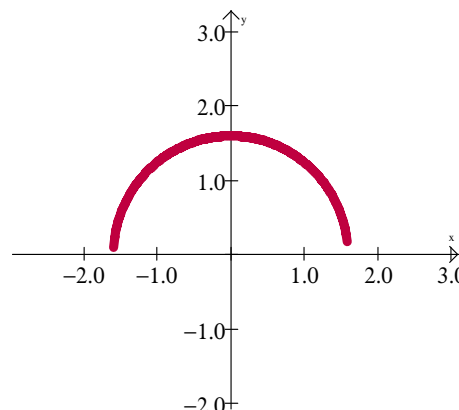


Figura A26: O Gráfico do Semi-Círculo



À partir dessa representação, pedi aos estudantes que desenhassem o retângulo inscrito na semicirculo. Para agilizar esse momento da atividade mostrei como traçar o primeiro segmento que daria origem ao retângulo inscrito no semicirculo, deixando a cargo de cada grupo os três segmentos restantes (vide Fig.27 e 28);

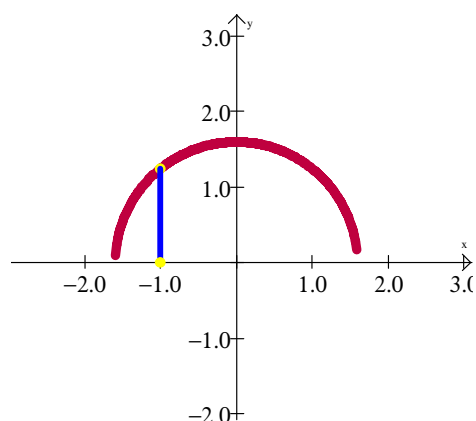


Figura A27: Primeiro Segmento

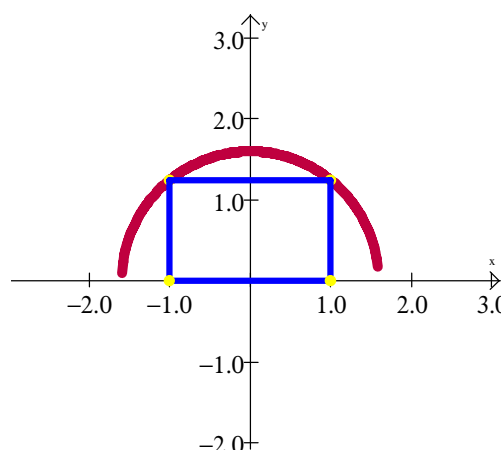


Figura A28: Retângulo Inscrito

Passado esse primeiro momento e percebendo que todos já haviam concluído a tarefa sem maiores dificuldades, voltei a conduzir uma discussão propondo aos grupos de estudantes em suas respectivas turmas, movimentarem a figura do retângulo de modo a observar as possíveis representações de área e, desta maneira conjecturar entre si se já seria possível determinar o retângulo de maior área (Fig. 29, 30 e 31)¹⁵.

¹⁵ As áreas nas figuras A29, A30 e A31 indicadas pelas letras (a), (b) e (c) correspondem a valores genéricos.



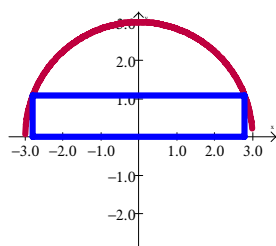


Figura A29: Área (a)

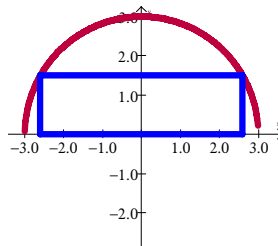


Figura A30: Área (b)

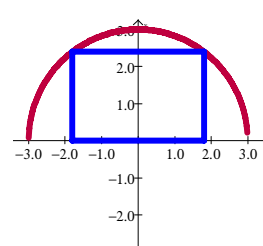


Figura A31: Área (c)

Após observarem a movimentação da figura do retângulo inscrito no semicírculo, os grupos, tanto da **Turma A** quanto da **Turma B** perceberam que seria difícil determinar com clareza e precisão o retângulo de maior área.

► **Orientação para os estudantes sobre a concepção de um modelo matemático que pudesse motivá-los a encontrar possíveis soluções para o problema.**

Nesse sentido, perguntei, qual seria o caminho mais provável para chegar a um modelo de função que determinasse a área do retângulo inscrito no semicírculo, tomando como base os dados já apresentados? O objetivo era delinear um raciocínio em que os estudantes pudessem interagir com o problema a fim de chegar a uma resposta conclusiva.

Tendo em vista o retângulo inscrito no semicírculo (vide Fig. 30), foram levantadas algumas conjecturas e hipóteses pelos estudantes, e, em interação com essa pesquisadora começaram a pensar em um modelo matemático, uma função, que viesse representar a área do retângulo inscrito no semicírculo de raio r com centro na origem. Para tanto, sugeri que registrassem no papel a área com a letra “ A ”, a metade da base com a letra “ x ” e a altura com a letra “ y ”, de maneira a representar a área de um retângulo, levando-os a abstrair um possível resultado. Vale ressaltar que foram necessárias algumas intervenções por parte desta pesquisadora, para que todos chegassem à representação algébrica desejada, pois, alguns estudantes, tanto das **Turmas A e B** escreveram $A = x.y$, informei-os então que para esse caso, em específico, não estava correto, de maneira que estariam considerando apenas a metade da base, pedi que olhassem de novo a figura na tela do computador e buscassem abstrair um resultado. A partir de mais algumas discussões, os estudantes em seus respectivos grupos, chegaram finalmente a seguinte fórmula;

$$A = 2 \cdot x \cdot y \quad \Rightarrow \quad \text{Área do retângulo inscrito no Semi-círculo}$$

Encontrada essa representação sugeri para cada grupo, em suas respectivas turmas que escrevessem a área $A = 2 \cdot x \cdot y$ em função de uma única variável, propondo aos mesmos que registrassem no papel mais esse dado e, em seguida, desenhasssem o gráfico da função área: $A(x)$ por meio do **Winplot**. O objetivo para tal proposta consistia em motivá-los a observarem o comportamento da função área: $A(x)$ em relação ao movimento da figura do retângulo inscrito no semicírculo, tendo como parâmetro um dado ponto genérico.

Depois de algumas conjecturas entre os estudantes, intermediadas por essa pesquisadora, foi determinada a seguinte representação algébrica dada pela função;

$$A(x) = 2 \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Função Área}$$

Em seguida, os alunos produziram a sua representação gráfica, desenhando o gráfico $A(x) = 2 \cdot x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ no **Winplot**, bem como o ponto $(a, 2 \cdot a \cdot \sqrt{r^2 - a^2})$ (Figura A32), para essa simulação em específico foi considerados o raio igual a dois e o ponto de máximo encontrado foi $x = 1,40$ aproximadamente). Para encontrar o ponto de máximo nesse primeiro momento, não foi necessário que os estudantes realizassem qualquer tipo de cálculo algébrico, pois, por meio de operações do software Winplot foi possível encontrar esse resultado. (Figura A33). Em relação ao ponto de mínimo o procedimento foi análogo.

Nessa investigação, os estudantes puderam também perceber que quando na movimentação, o ponto tocava a origem o retângulo passava a ser o raio do semicircunferência, o que implica a não existência de área, mas de distância de uma extremidade a outra (Figura A34).

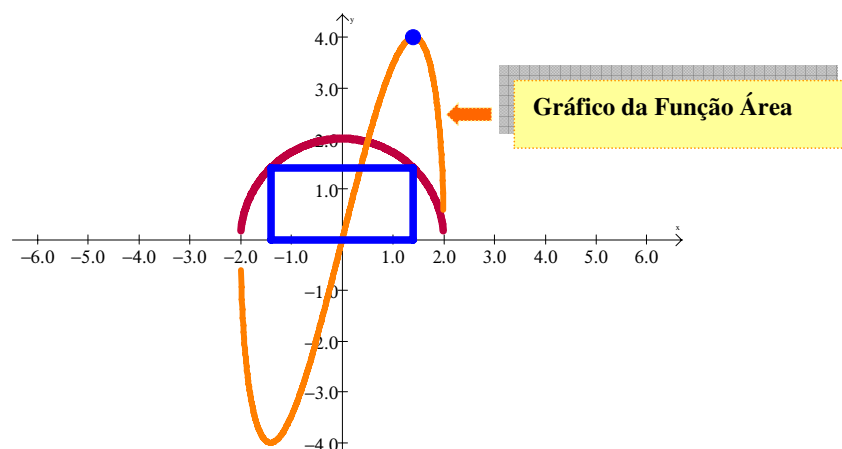


Figura A32: A função área

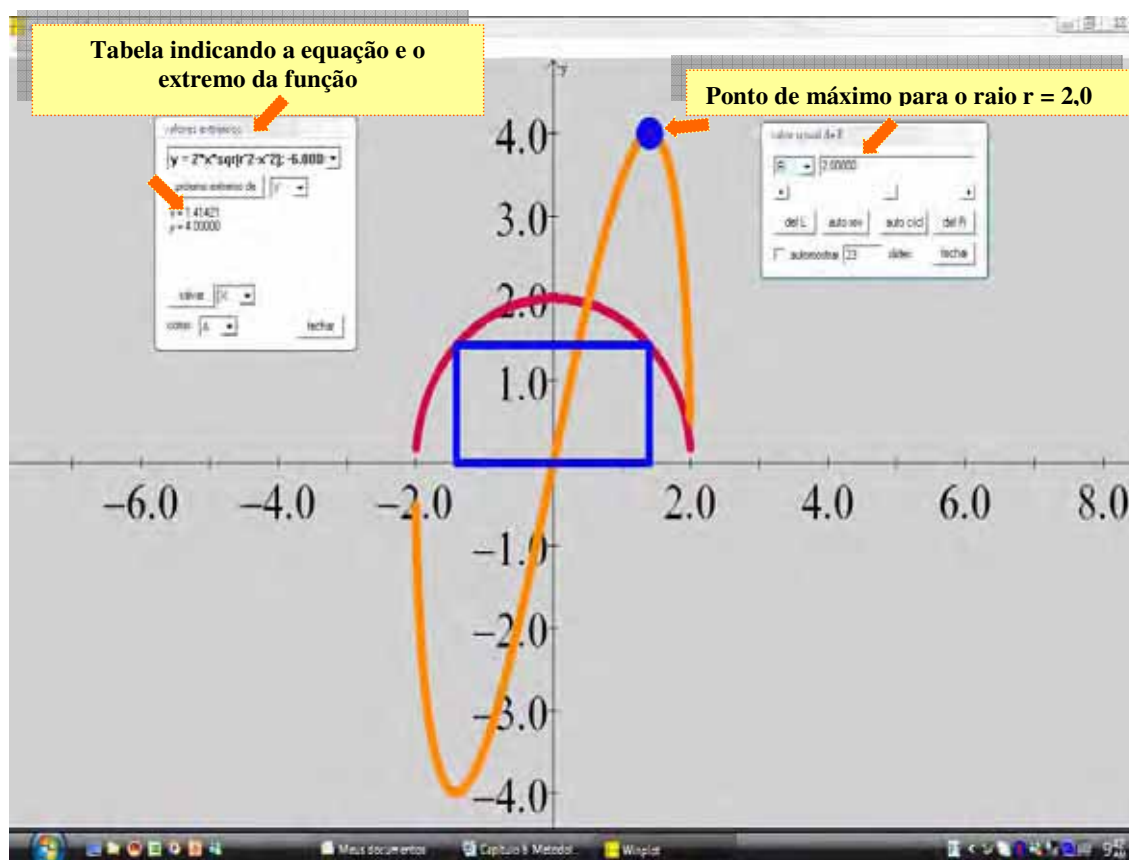


Figura 33: Cálculo dos extremos e máximos da função por meio do Winplot

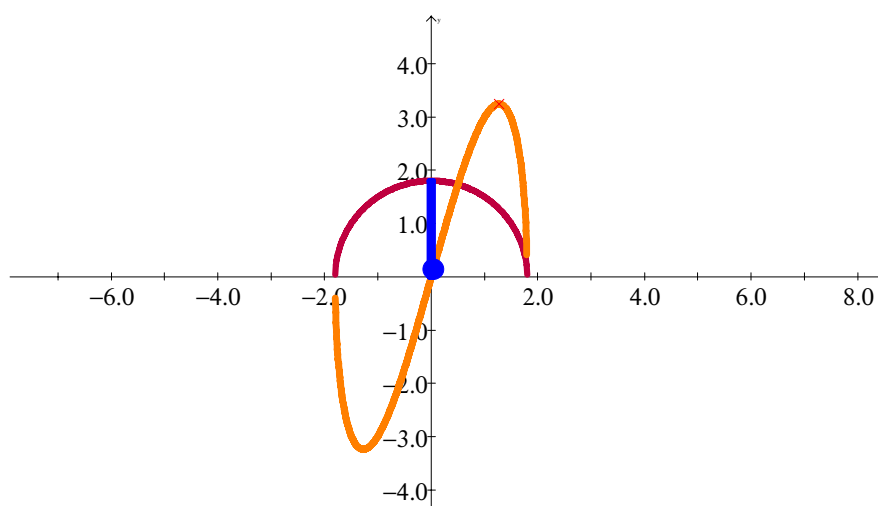


Figura A34: Ponto sobre a origem dos eixos coordenados

É importante ressaltar, que esse foi um momento importante, pois, por meio da animação do ponto (no Winplot) sobre o gráfico da função Área e da movimentação do

retângulo inscrito no semicírculo, os estudantes puderam perceber que no instante em que o ponto genérico atingia o **valor máximo da função $A(x)$** , simultaneamente mostrava (possivelmente) o **retângulo de maior área** (Figura A33). Vale ressaltar que os estudantes só puderam comprovar ser o retângulo de maior área por meio de cálculos algébricos, já que o Winplot não possui comando para o cálculo desse valor. E, posteriormente puderam também observar por meio de tabelas usando o recurso da PLANILHA, nesse caso os resultados mostravam-se aproximados, como poderão ser mostrados posteriormente por meio das tabelas no Item 3.2. Observemos agora comentários de alguns estudantes (**Turma A e B**) sobre esse momento da investigação na **Atividade 3**;

Alexandre e Clara (Turma A) - Pudemos observar que quando o valor se aproxima do ponto de maior extremo, o valor da área do retângulo se aproxima do máximo. Podemos observar melhor, junto aos cálculos de derivadas. [...] Quando encontrado o valor máximo, a derivada zera, nesse caso, a área do retângulo inscrito é máxima.

Patrícia e Ágata (Turma B) - Pela primeira vez entendem a relação para a construção de um tipo de problema. Pudemos observar que quando a área é máxima, a derivada da função é zero e quando é mínima também. Pudemos ainda observar que é importante ter noção do que estamos fazendo, pois a máquina pode errar (referindo-se a uso do software) e devemos estar atentos ao que ocorre.

Dando prosseguimento à exploração do gráfico (Fig. 33), perguntei aos estudantes como poderiam justificar algebricamente suas observações de maneira a determinar as dimensões do retângulo de maior área? Para responder tal questionamento foi necessária a mediação dessa pesquisadora e discussões entre os próprios grupos de estudantes. Nesse sentido, as repostas e soluções sugeridas foram: **primeiramente**, calcular a **derivada da função $A(x)$** . **Segundo**, calcular **os zeros da função derivada** ($A'(x) = 0$) para determinar os **pontos críticos** desta função. **Terceiro**, calcular a **derivada segunda** para confirmar se algum dos pontos críticos correspondia a um ponto de **máximo** ou **mínimo**. **Quarto**, através dos resultados encontrados, determinarem **as dimensões do retângulo de maior área**.

Dando início aos procedimentos, após o cálculo da derivada da função $A(x)$ foi decidido de comum acordo com a **Turma A** adiar uma discussão mais aprofundada para o próximo encontro, bem como a conclusão dos trabalhos para a **Atividade 3**, pois alguns estudantes precisavam se ausentar e a hora já se adiantava. Nessa atividade e



para essa turma não houve uma discussão final ficando também a realizar-se na próxima terça-feira dia 29 de agosto.

Em relação à **Turma B**, os trabalhos avançaram um pouco mais, por conseguinte, após cada grupo concluírem e devidamente registrarem o cálculo da derivada de $A(x)$ no papel, foi solicitado aos estudantes que abrissem o pacote algébrico do **Maple** para poderem confirmar as soluções encontradas. Assim foi feito como mostram as representações abaixo.

> Diff(2*x*sqrt(r^2-x^2),x);

$$\frac{d}{dx} (2x\sqrt{r^2-x^2})$$

> diff(2*x*sqrt(r^2-x^2),x);

$$2\sqrt{r^2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \text{Função } A'(x)$$

Ao observarem, portanto as soluções apresentadas no **Maple** os estudantes puderam então comparar suas respostas. Muitos deles puderam confirmar acertos e erros e, após as correções necessárias, concluíram que **o ponto máximo da função** correspondia a $x = 1,4$ considerando o raio $r = 2$ ¹⁶. Diante de tal fato, puderam, então, desenhar por meio do **Winplot** o gráfico da função derivada, bem como dois pontos genéricos representados pelas seguintes coordenadas:

$$\left(a, \frac{2 \cdot (\sqrt{r^2 - a^2} - a^2)}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) \text{ e } \left(-a, \frac{2 \cdot (\sqrt{r^2 - a^2} - a^2)}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right).$$

É importante observar que a determinação dos pontos genéricos foi o que permitiu aos estudantes visualizarem o comportamento das funções $A(x)$ e $A'(x)$, por meio do comando de **animação** do **Winplot**, tendo como parâmetro o valor de x igual a “a” (Figura A35),

¹⁶ Nessa atividade também foram explorados resultados para outros valores do raio r

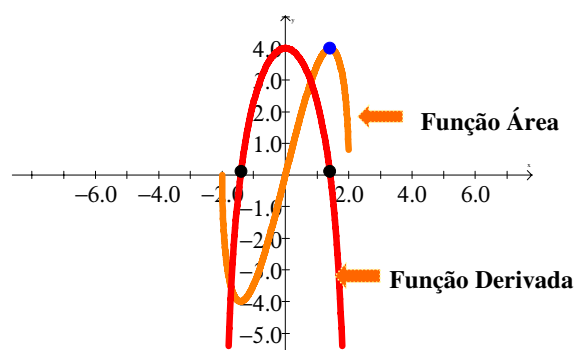


Figura A35: Gráfico da derivada da função área

Nesse momento, tinha como finalidade, motivar os estudantes a conjecturarem sobre uma possível relação entre a **função área** e sua **função derivada** e, para tanto, sugeri que também criassem dois pontos genéricos sobre $A'(x)$ (pontos pretos sobre o gráfico da derivada da Função Área).

Realizado esse procedimento, ao visualizar a movimentação dos gráficos na tela do computador, um grupo de estudantes iniciou uma profícua discussão, ressaltando ter percebido um interessante resultado. Nesse sentido, os estudantes **Henrique** e **Frederico** ao analisarem o movimento dos pontos genéricos tanto sobre a função $A(x)$ e $A'(x)$ (simultaneamente) indagaram que no momento que os pontos genéricos representavam as raízes de $A(x)$ ao mesmo tempo outros pontos genéricos pertencentes a $A'(x)$ representavam o valor máximo dessa função, ou seja, será que as raízes da função determinam os pontos críticos (máximo e mínimo) da função derivada, será que isso ocorre sempre?(Figura A36). Como a hora já se adiantava, não foi possível realizar essa discussão nesse dia, sugeri então que os estudantes pesquisassem um pouco mais sobre suas observações em literatura pertinente e que em um próximo encontro voltaríamos a discutir sobre o assunto.

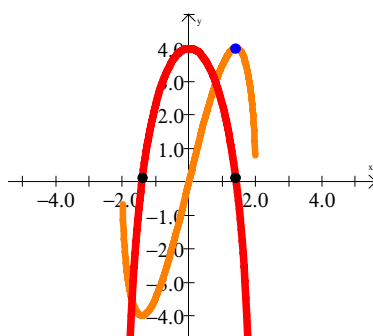


Figura A36: Relação entre a função área e sua derivada

Para finalizar essa primeira parte de aplicação e desenvolvimento da **Atividade 3** convidei cada grupo de estudantes que me entregassem as suas anotações e que no próximo encontro os convidaria a fazerem um breve comentário do que foi apresentado nessa atividade, queria saber o que eles acharam da metodologia aplicada, se por meio da abordagem de trabalhar com várias representações matemáticas ajudou-os a uma maior compreensão ou um maior aprofundamento em relação ao seu conhecimento matemático.

Discutindo e Explorando o Problema: Turmas A e B (Parte 2)

A segunda parte da **Atividade 3** foi realizada no Laboratório de Informática, na terça-feira às 19:00 hs com a **Turma A** e na quinta-feira às 10:00 hs com a **Turma B**, com duração de aproximadamente 1:30hs para cada Turma.

Nesse novo encontro, comecei lembrando o que havíamos discutido na nossa última reunião, orientando aos grupos de estudantes, em suas respectivas turmas, a abrirem os documentos salvos e reiniciarem os trabalhos.

A **Turma A**, começou por desenhar no Winplot o gráfico da função derivada (Figura A37 e A38) e os pontos genéricos sobre essa função, para que pudessem observar o comportamento da mesma em relação ao gráfico da função Área e, por conseguinte, a movimentação do retângulo inscrito na semi-circunferência de raio r

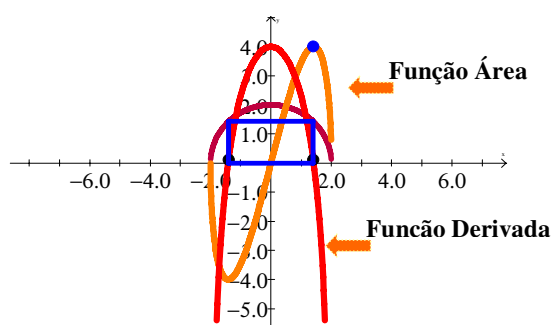


Figura A37: Função $A(x)$, Função $A'(x)$ e Área (a) do retângulo Inscrito

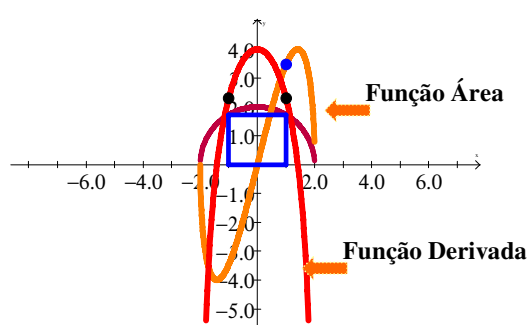


Figura A38: Função $A(x)$, Função $A'(x)$ e Área (b) do retângulo Inscrito

A Turma B, como já havia avançado um pouco mais na exploração do problema, reiniciou os trabalhos a partir do estudo da segunda derivada. Nesse sentido, a fim de estimular uma investigação relacionando a função Área, à função da primeira e segunda derivada de $A(x)$, foi perguntado aos estudantes das Turmas A e B como ter certeza que

o ponto de extremo determinado na figura do gráfico da função Área (Figura A39) era mesmo ponto de máximo (isso sem usar as ferramentas do Winplot).

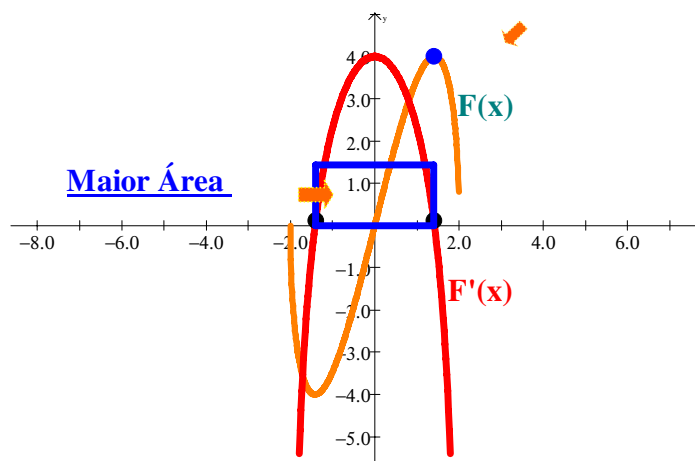


Figura A39: Ponto de Máximo

Incentivando-os, portanto, a refletirem mais sobre esse questionamento, solicitei aos grupos das Turmas **A** e **B** (em seus horários, respectivamente), que discutissem um pouco entre si.

Passado um tempo, voltei a perguntar-lhes se haviam chegado a uma conclusão. Os estudantes (**Turmas A e B**) em sua maioria, responderam que seria necessário derivar novamente a partir da primeira derivada e então usar o teste da “**segunda derivada**” para verificar se correspondia a um ponto de máximo ou mínimo. Propus então que fizessem esse cálculo no papel e em seguida verificassem por meio do Maple (opcional) as respostas encontradas. Vale ressaltar, que o processo de calcular a segunda derivada usando lápis e papel tomou um tempo razoável, devido os cálculos serem extensos e complexos. Mesmo por meio do Maple foi necessário raciocinarmos por estimativas na interpretação dos resultados encontrados, quando esses se tratavam de valores genéricos.

Os estudantes em sua maioria (**Turma A e Turma B**) mesmo com relativa dificuldade, conseguiram chegar a um consenso e, calculando a **segunda derivada da função Área no Maple**, acharam a seguinte expressão algébrica, o que relativamente, correspondeu aos resultados encontrados anteriormente pelos estudantes:

`> diff(2*x*sqrt(r^2-x^2),x,x);`

$$f''(x) = -\frac{6x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{2x^3}{(r^2-x^2)^{(3/2)}}$$

Para o “teste da segunda derivada”, no caso do ponto $x = 1.4$ para um raio $r=2$, foi calculado o valor numérico da função estabelecido da seguinte maneira por meio do **Maple**;

`>evalf(-6*(1.4)/(2^2-(1.4)^2)^(1/2)-2*(1.4)^3/(2^2-(1.4)^2)^(3/2));`

-7.764690346

Os estudantes puderam perceber que se tratava de um valor negativo, ou seja, menor que zero. Portanto, se $f''(x) < 0$, a concavidade da função $f(x)$ é para baixo, assim, o ponto de extremo encontrado corresponde a um ponto de máximo da função.

Sendo esse um resultado importante, solicitei aos grupos de estudantes das **Turmas A e B** (em seus respectivos horários) que discutissem entre si e determinassem em termos gerais as **dimensões do retângulo de maior área**. Para tal tarefa foram necessárias algumas intervenções e questionamentos dessa pesquisadora, de maneira que foi orientado aos estudantes que olhassem novamente o que já haviam investigado tal como **a representação algébrica da derivada da função Área**, qual seriam os pontos críticos dessa função, e qual o valor da área em função do ponto de máximo. Após algum tempo os estudantes concluíram que x como ponto de máximo correspondia a $r\frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo que a base (ou largura) do maior retângulo implicava em $r\sqrt{2}$ e altura (comprimento) correspondia a $\frac{r}{\sqrt{2}}$, logo a área do maior retângulo encontrado foi:

$$A = 2.x.y \Rightarrow A=r^2$$

Tendo em vista o valor genérico da área do maior retângulo inscrito no semicírculo de raio r , sugeri aos estudantes usarem o recurso da PLANILHA¹⁷ para que pudessem analisar sob um outro ponto de vista os resultados anteriormente encontrados. O objetivo para tal procedimento consistia em mostrar aos estudantes, possíveis futuros

¹⁷ PLANILHA - Open Office do sistema operacional Linux, software semelhante ao EXCELL do Windows.

professores, que essa atividade poderia ser trabalhada em nível médio e fundamental sem a necessidade explícita de se trabalhar com ferramentas de Cálculo, ou seja, sem a dependência de se calcular Limites e Derivadas de uma Função, de maneira a introduzir conceitos de variação e continuidade de uma função para os seus futuros alunos ainda em nível escolar. Assim como foi procedido com o **Winplot** e o **Maple**, ao mesmo tempo em que discutíamos os resultados, orientava os estudantes nos comandos para utilização da PLANILHA. Vejamos alguns resultados encontrados (vide Fig. 40, 41 e 42).

x	y	Área
0	1	0
0,1012	0,994866102	0,201360899
0,202	0,979385522	0,395671751
0,3028	0,953054122	0,577169576
0,4036	0,914935539	0,738535967
0,5044	0,863470115	0,871068652
0,6052	0,796073464	0,963567321
0,706	0,708211833	0,999995108
0,8068	0,590824644	0,953354646
0,9076	0,419835968	0,762086249

Figura A40: Retângulo de maior área inscrito no semi-círculo de raio 1

x	y	Área	maior área
0	2	0	
0,101	1,997448122	0,403484521	
0,202	1,989772851	0,803868232	
0,303	1,976914515	1,198010196	
0,404	1,958771043	1,582687003	
0,505	1,935193789	1,954545727	
0,606	1,905981112	2,310049108	
0,707	1,870869049	2,645408836	
0,808	1,829517969	2,956501038	
0,909	1,781493475	3,238755137	
1,01	1,726238686	3,487002145	
1,111	1,663033072	3,695259487	
1,212	1,590929288	3,856412595	
1,313	1,508652047	3,961720276	
1,414	1,414427093	3,999999818	maior área
1,515	1,305670326	3,956181088	
1,616	1,178364969	3,80847558	
1,717	1,025627125	3,522003548	

Figura A41: Retângulo de maior área inscrito no semicírculo de raio 2

x	y	Área
0	3	0
0,101	2,998299351	0,605656469
0,202	2,993191608	1,209249409
0,303	2,984659277	1,808703522
0,404	2,972672871	2,40191968
0,505	2,95719039	2,986762293
0,606	2,938156565	3,561045757
0,707	2,915501844	4,122519607
0,808	2,889141049	4,668851935
0,909	2,858971668	5,197610493
1,01	2,824871679	5,706240791
1,111	2,78669679	6,192040268
1,212	2,744276954	6,652127336
1,313	2,697411908	7,08340367
1,414	2,645865454	7,482507504
1,515	2,589358029	7,845754826
1,616	2,527556923	8,169063976
1,717	2,460063211	8,447857065
1,818	2,386393932	8,676928338
1,919	2,305957285	8,85026406
2,02	2,218017132	8,960789215
2,121	2,121640639	8,99999959
2,222	2,015618019	8,957406478
2,323	1,898333743	8,81965857
2,424	1,767547453	8,569070054
2,525	1,61992284	8,180961034
2,626	1,450559892	7,618340552

maior área

Figura A42: Retângulo de maior área inscrito no semi-círculo de raio 3

Observando os dados de **pontos de máximo**, **valor máximo** e **maior área classificados para cada raio**, foi possível aos estudantes conjecturarem uma solução para o problema. Solicitei então que reorganizassem uma tabela apenas com os maiores valores de áreas encontrados em cada uma das planilhas e se possível, tentassem generalizar os resultados. Assim foi feito (Figura A43).

R(raio)	X (ponto de máximo)	Y(valor máximo)	Área Máxima
1	0,706	0,708211833	0,999995108
2	1,414	1,414427093	3,999999818
3	2,121	2,121640639	8,99999959
....			

Figura A43: Pontos de Máximo, Valor Máximo e Maior Área classificados para cada raio

Para essa abordagem a maior dificuldade foi justamente generalizar os resultados. Nesse sentido, houveram algumas tentativas por parte dos estudantes da **Turma B**, na tentativa de elaborar uma forma geral para determinar a maior área. Os estudantes Frederico e Henrique apresentaram a seguinte tabela (Figura.A44):

R(raio)	X (ponto de máximo)	Y(valor máximo)	Área Máxima
1	0,706	0,708211833	0,999995108 ~ 1
2	1,414	1,414427093	3,999999818 ~ 4
3	2,121	2,121640639	8,99999959 ~ 9
....			
n	n	$\frac{n}{\sqrt{2}}$	$\sim n^2$

Figura A44: Retângulo inscrito de maior Área a partir de um raio genérico

A partir dessa discussão, pedi às **Turmas A e B** que registrassem no papel esses últimos resultados, e que fizessem alguns comentários sobre o que foi desenvolvido nessa atividade. Vejamos o que disseram os estudantes;

Comentários da Turma A

Alexandre e Clara - Pudemos observar que quando o valor se aproxima do ponto de maior extremo, o valor da área do retângulo se aproxima do máximo. Podemos observar melhor, junto aos cálculos de derivadas. [...] Quando encontrado o valor máximo, a derivada zero, nesse caso a área do retângulo inscrito é máxima.

Patrícia e Agáta - Pela primeira vez entendem a relação para a construção de um tipo de problema. Pudemos observar que quando a área é máxima, a derivada da função é zero e quando é mínima também. Pudemos ainda observar que é importante ter noção do que estamos fazendo, pois a máquina pode errar (referindo-se a uso do software) e devemos estar atentos aos que ocorre.

Ana Paula e Laura - Puderam observar no Winplot que a maior área do retângulo pode ser vista se calcularmos o ponto máximo da função da área.

Comentários da Turma B

Marcela e Letícia - O que a gente achou mais difícil foi calcular a derivada, enquanto que o mais legal foi ver no gráfico os pontos de máximo e mínimo da função e cada vez com um raio diferente.

Frederico e Henrique - Montar o retângulo por meio do software foi o que a gente achou mais interessante, outra coisa bem legal foi ter a noção de trabalhar na planilha, poder relacionar máximos e mínimos. Já no Winplot foi a possibilidade de visualizar os gráficos das funções, da função Área e das funções derivadas, além de interpretar através da área do maior retângulo os pontos de máximo e mínimo.

Nesse momento achei interessante investigar um pouco mais e perguntei:

MA - Vocês acham viável trabalhar essas noções no ensino médio?

Frederico - Que é interessante é, agora eles acharem legal é outra coisa. Porque o mais difícil de explicar é o que o gráfico significa, explicar que aquela curva lá (**referindo-se ao gráfico da função Área**) é a área do quadrado.

Serapião e José - A maior dificuldade é mexer no software, por exemplo, no **Winplot**. Eu acho que a familiarização com o software é importante. No entanto o mais legal foi calcular a derivada na mão (**opinião particular de Serapião, o que provocou risos dos colegas**).

José - (**não concordando com o colega em relação ao cálculo da derivada sem o recurso do Maple**) **ressalta que:** usar o software para construir os gráficos, movimentar o gráfico é difícil, pois tem que pensar de forma diferente do usual.

(**Tentando entender um pouco melhor sobre o que falavam os estudantes Serapião e José, perguntei**)

MA - vocês perceberam que toda a elaboração e construção dos gráficos foi fundamentada em assuntos do ensino médio e fundamental? Dessa maneira posso entender que o difícil foi usar a linguagem do software.

Serapião e José - sim. Mas a gente aprende, sendo que o mais legal é a animação que o software faz e acho que facilita o entendimento muito.

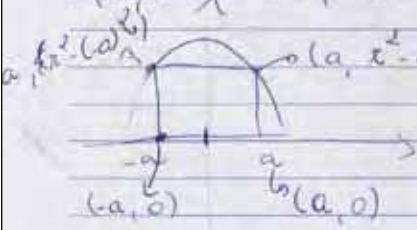
MA- concordam que a linguagem do programa é difícil (**referindo-se ao Maple**), embora o mais legal seja a animação dos gráficos e construção dos mesmos.

Suka - É... mas, o mais difícil, ainda foi calcular as derivadas (**sem o recurso do Maple**)



Atividade 3- Turma A

equação da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$



$(-a, 0)$ $(a, 0)$ $(a, x^2 - a^2)$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x \cdot \sqrt{2}$

Área = $2x \cdot y = 2x \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x \cdot x \cdot \sqrt{2}$
 base altura

Podemos observar que quando o valor se aproxima do extremo, o valor da área do triângulo se aproxima do máximo. Podemos observar melhor junto aos cálculos de derivadas.

Cálculo 1º derivada, raízes

para raio 2, $x = \pm 1,41421$

$$2 \cdot \sqrt{1-x^2} + 2x \cdot (x^2 - x^4)^{-1/2} \cdot (-2x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(x^2 - x^4) - 4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x^2 - 6x^4}{\sqrt{1-x^2}} = y'$$

$$\frac{2x^2 - 6x^4}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 3x^4) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2 - 6x^4}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -6x^4 = -2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$x^2 > x^2$

Quando encontrado o valor máximo a derivada zera, nesse caso, a área do triângulo inscrito é máximo

Robin e Clotilde

Equação da Circunferência
 $x^2 + y^2 = r^2$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \text{ + eq. semi-círculo superior (y)}^2$$

+ vamos trabalhar com o semi-círculo superior.

Marcamos 2 pontos pertencentes ao semi-círculo superior e 2 pontos pertencentes ao eixo x (fronteira do semi-círculo) e ligamos os pontos formando um retângulo.

Área retângulo = $2x \cdot y = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$

Pontos: $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(-a, \sqrt{r^2 - a^2})$, $(a, \sqrt{r^2 - a^2})$

Conclusão: A maior área ^{do retângulo} é qdo o ponto assume o maior valor do gráfico (ponto máximo), onde a derivada é igual a zero, sendo q. o gráfico é a variação da área do retângulo.

$$y = 2x \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = 2x (r^2 - x^2)^{1/2}$$

$$y' = 2(r^2 - x^2)^{1/2} + 2x \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-1/2} (-2x)$$

Robin e Clotilde

$$y' = 2(r^2 - x^2)^{1/2} - \frac{2x^2}{(r^2 - x^2)^{1/2}}$$

Pontos de extremos (max e min)

$$x = 1,41421 \quad x_1 = -1,41421$$

$$y = 4 \quad y_1 = -4$$

Raiz da derivada

$$2(r^2 - x^2)^{1/2} - \frac{2x^2}{(r^2 - x^2)^{1/2}} = 0$$

$$2(r^2 - x^2) - 2x^2 = 0$$

$$2r^2 - 2x^2 - 2x^2 = 0$$

$$2r^2 - 4x^2 = 0$$

$$r^2 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r^2}{2}}$$

$$x = \pm r \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$S = \left\{ -r \sqrt{\frac{1}{2}}, r \sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$$

Robin e Clotilde

Equação da circunferência: $y^2 + x^2 = r^2$

Semi-círculo: $y^2 = r^2 - x^2$
 $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

1º segmento: $(-a, \sqrt{r^2 - (-a)^2})$ para $(a, \sqrt{r^2 - a^2})$
 2º segmento: $(-a, 0)$ para $(-a, \sqrt{r^2 - (-a)^2})$
 3º segmento: $(a, 0)$ para $(a, \sqrt{r^2 - a^2})$
 4º segmento: $(-a, 0)$ para $(a, 0)$

Área do retângulo: $b \cdot h$
 $b = 2x$ $A = 2x \cdot y$
 $h = y$

Sabendo que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
 $A = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$

$f(x) = 2x \cdot (r^2 - x^2)^{1/2}$ $g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$
 $g(x)$ $h(x)$

$f(x) = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$\frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - r^2}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2r^2 - r^2}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\frac{2r^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2r^2}{2} = r^2$

Ponto máximo: $(a, 2a \cdot \sqrt{r^2 - a^2})$

Ana paula e Laura

Atividade 3- Turma B

$x^2 + y^2 = r^2$ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $A(x) = 2xy$ $1 \text{ m}^2 \text{ de } 0,00$
 $A = 2xy$
 $r^2 = x^2 + y^2$
 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
 $A = 2xy = 2x \sqrt{r^2 - x^2}$
 $x = 1,41421$
 $y = 4,000$
 $A = 2x \sqrt{r^2 - x^2}$
 $A'(x) = 2 \sqrt{r^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2 \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$
 $\text{Diff}(2 * x * \text{sgn}(\sqrt{r^2 - x^2}));$

Pode se observar que isolando-se o gráfico da área de um retângulo inscrito em uma semi-círculo simplifica, pois com o gráfico de sua derivada que o valor máximo da área ocorre para um valor de x que é raiz da função derivada da área

$$\frac{[2r^2 - 4x^2] \sqrt{r^2 - x^2} - (2r^2 - 4x^2) \sqrt{r^2 - x^2}}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{-8x \sqrt{r^2 - x^2} + 2(r^2 - 4x^2) \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right)}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{-8x \sqrt{r^2 - x^2} + 2r^2 x - 4x^3}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-8x(r^2 - x^2) + (2r^2 - 4x^2)x}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-8x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2x(r^2 - 2x^2)}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ libra}$$

$$A''(x) = \frac{2x(2x^2 - 3r^2)}{(r^2 - x^2)^{3/2}}, \quad A'(x) = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow r^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow r = \pm x\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{r}{\sqrt{2}}}$$

$$A''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3r^2\right)}{\left(r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{2r}{\sqrt{2}}\left(2\frac{r^2}{2} - 3r^2\right)}{\left(r^2 - \frac{r^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{2r}{\sqrt{2}}(-2r^2)}{\left(\frac{r^2}{2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{-4r^3}{\sqrt{2}} = \frac{-4r^3 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2} \cdot r^3} = -4\sqrt{4} = -8 < 0 \quad \therefore \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \text{ ocorre máx de } A(x)$$

para $r=1$, $x=0,7071$
 $y=1$

n	x	y	A
1	0,7071	0,7071	1
2	1,4142	1,4142	4
3	2,1213	2,1213	9

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{r^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{r^2}{\left(\frac{r^2}{2}\right)^{3/2}}$$

Augusto e Márcio

04/08/06

$r = \text{raio}$

eq. do C. $x^2 + y^2 = r^2$ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
 Positivo p/ semi-C. acima do eixo x , negativo
 p/ semi-C. abaixo do eixo x .

área do retângulo
 equação: $A = 2x \cdot y$
 $A(x) = 2x \sqrt{r^2 - x^2}$
 $= 2x \sqrt{r^2 - x^2}$

Conforme o ponto u movimenta no gráfico
 a área do retângulo diminui ou aumenta. Quando
 o ponto chega no vértice, a área é máxima
 Conforme o ponto u aproxima do eixo x a área
 tende a 0.

Domínio $\frac{1}{x^2} \quad x^2 \quad x^2$

$x = 1,91421$ $2x \sqrt{r^2 - x^2}$
 $y = 4$ $2x \sqrt{r^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}$
 $A'(x) = (2x)' \cdot (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + (2x) \cdot ((r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}})'$
 $= \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

13/108/06

$\frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2(r^2 - x^2) - 2x^2 = 0$
 $2r^2 - 2x^2 - 2x^2 = 0$
 $-4x^2 + 2r^2 = 0$
 $-2(2x^2 - r^2) = 0$
 $2x^2 - r^2 = 0$
 $2x^2 = r^2 \Rightarrow x^2 = \frac{r^2}{2}$
 $x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} = \pm \frac{r\sqrt{2}}{2}$ (libra)

24/08/06

Pelas gráficas das áreas e das derivadas das funções, quando as áreas são máximas, as derivadas são zero.

31108106

$$\left(\frac{2(r^2 - n^2) - 2n^2}{\sqrt{r^2 - n^2}} \right)' = \left[(2(r^2 - n^2) - 2n^2) \cdot (r^2 - n^2)^{-\frac{1}{2}} \right]'$$

$$= [2r^2 - 4n^2] \cdot \frac{1}{2} (r^2 - n^2)^{-\frac{3}{2}} + (-8n) \cdot (r^2 - n^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2n(-3r^2 + 2n^2)}{(r^2 - n^2)^{3/2}}$$

Raiz 1, $n = 0,70711$

Raiz 2, $n = 1,41421$

$y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ $\frac{ad}{2} = 1,41$

$n = r$	y	áreas
1	0,707	0,707
2	1,413	2,82
3	2,127	6,36

$\frac{2n \cdot y}{2} = n \cdot y$

Any e Suka

Equação da circunferência: $y^2 + x^2 = r^2$

Área do retângulo:

$$A = 2x, y = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow A(x) = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

De acordo com o gráfico temos que conforme o ponto se desloca sobre o gráfico da função área quando ele se aproxima do vértice a área aumenta, afastando-se do vértice decresce.

→ extremos

$$x = 3,43423$$

$$x = -3,43423$$

$$y = 4$$

$$y = -4$$

$$A'(x) = (2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2})' = (2x)' (\sqrt{r^2 - x^2})' + (2x) (\sqrt{r^2 - x^2})' = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Observando um ponto genérico no gráfico da derivada e outro no gráfico da área observamos que quando o ponto do gráfico da derivada aproxima-se de zero o ponto do gráfico da área aproxima-se de um máximo ou mínimo local.

31/08/06

$A(n)=0$

$$\frac{2n^2-4x^2}{\sqrt{n^2-x^2}}=0 \Rightarrow 2n^2-4x^2=0 \Rightarrow 4x^2=2n^2 \Rightarrow x^2=\frac{n^2}{2} \Rightarrow x=\pm \frac{n}{\sqrt{2}} = \pm \frac{n}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$A(x)=\frac{2n^2-4x^2}{\sqrt{n^2-x^2}}$$

$$A'(x)=\frac{-8x \cdot \sqrt{n^2-x^2} - (2n^2-4x^2) \cdot \frac{-x}{\sqrt{n^2-x^2}}}{(n^2-x^2)^{3/2}} = \frac{-8x \sqrt{n^2-x^2} + 2x(2n^2-4x^2)}{(n^2-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-8x}{\sqrt{n^2-x^2}} - \frac{x(2n^2-4x^2)}{(n^2-x^2)^{3/2}}$$

Ponto de estremo:

$n=1$ máximo: $x=0,7071$ $y=1$

$n=2$ máximo: $x=1,4142$ $y=4$

$n=3$ máximo: $x=2,1213$ $y=9$

n	x	y	Área
1	0,707	1	0,707
2	1,414	4	2,828
3	2,121	9	6,36

A área do retângulo foi determinada pela fórmula $S = 2xy$, sendo y é a semi-circunferência e $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, logo

$$S = 2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

tomando o ponto a , $f(a)$, verificamos como a área do retângulo varia, buscando com esse valor tomado

$$S' = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \cancel{2x} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot -2x$$

$$S' = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{ou } S' = \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \quad y = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$S = 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{Área do retângulo} = r^2$$

$$S'' = \frac{-1 \cdot 2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \left[\frac{-4x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{(-2x^2) + 1 \cdot 2x}{2\sqrt{r^2 - x^2} (r^2 - x^2)} \right]$$

$$S'' = \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{4x^3}{(2r^2 - 2x^2)\sqrt{r^2 - x^2}}$$

TABELA

n	x_{max}	y	ÁREA
1	0,71	0,70420	1
2	1,4142	1,4142	4
3	2,12132	2,12132	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n/\sqrt{2}$	$n/\sqrt{2}$	n^2

$$S'' = \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \left(3 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} \right) \quad \left[\left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{r^2}{2} \right]$$

$$S''(r/\sqrt{2}) = \frac{-r\sqrt{2}}{\sqrt{r^2/2}} \left(3 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{r^2/2} \right) = \frac{-3r\sqrt{2}}{r/\sqrt{2}}$$

$$S''(r/\sqrt{2}) = -6$$

$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$
 $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{0,70411}{\sqrt{2}}, 1 \right) \Rightarrow r = 1$
 $\left(\frac{2,12132}{\sqrt{2}}, 9 \right) \Rightarrow r = 3$

A montagem do ponto indica os diferentes valores da ÁREA que o retângulo assume em função de "a". Sendo a área máxima o ponto de máximo da função.

$$A = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$A' = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2} (R^2 - x^2)^{-1/2} (-2x)$$

$$2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\frac{2(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2(R^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Análise entre a derivada de $f(x)$ e a função ÁREA é que quando x_1 em $f(x) = \text{pto máximo}$, x_1 e $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{2(R^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$2R^2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 2R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} = \pm \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(-3R^2 + 2x^2)}{\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}$$

$$\text{Para } x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}(-12R^2 + 3R\sqrt{2} - 1)}{(4R + \sqrt{2})\sqrt{R(-4R + \sqrt{2})}}$$

Rosana e Lara

2,	1,47421	
3,	0,80610	2,12132
1,	0,70711	
	$\sqrt{x^2 - R^2}$	
x	y	ÁREA
1	$\sqrt{1 - R^2}$	$2\sqrt{R^2 - 1}$
2	$\sqrt{4 - R^2}$	$4\sqrt{R^2 - 4}$
3	$\sqrt{9 - R^2}$	$6\sqrt{R^2 - 9}$

Rosana e Lara

Atividade 4¹⁸

“A latinha de cerveja sobre outra perspectiva”¹⁸

ATIVIDADE 4: “A latinha de cerveja sob outra perspectiva”

Problema: Determinar as dimensões de uma lata de refrigerantes de $111,5\pi \text{ cm}^3$ construída com a menor quantidade possível de metal.

Sugestão: Considere a possibilidade de visualizar a lata cilíndrica planificada, então procure descrever a área da tampa(e do fundo). E para determinar a área do lado da lata imagine o lado aberto para formar um retângulo e que a tampa e o fundo tenham sido retirados. Encontrada as respectivas áreas determine o custo do material para a confecção da embalagem.

Objetivo Específico: investigar um problema de otimização, introduzindo noções de geometria espacial envolvendo máximos e mínimos de funções por meio do software Winplot, visando explorar as representações algébricas, gráficas, e geométricas inerentes ao problema.

Trabalhando no Winplot:

No software Winplot, pode-se realizar uma simulação do problema, para isso clique na opção **equação → paramétrica** (digite para circunferência da base $x = \cos(at)$, $y = \sin(at)$ e $z = 0$ (circunferência com centro na origem de raio 1. Para circunferência da tampa da lata escreva $x = \cos(at)$, $y = \sin(at)$ e $z = a$. O parâmetro a simula a altura da lata. Para dar a forma do cilindro é necessário determinar dois pontos na circunferência da base e da tampa da suposta lata. Para isso clique na opção **equação → ponto (x,y)**, escreva para 1º. Ponto; $x = \cos(at)$, $y = \sin(at)$ e $z = 0$, 2º. $x = -\cos(at)$, $y = -\sin(at)$ e $z = 0$, 3º. Ponto $x = \cos(at)$, $y = \sin(at)$ e $z = a$ 4º. Ponto $x = -\cos(at)$, $y = -\sin(at)$ e $z = a$. Para observar o movimento clique na opção **Anim → individuais → A** (Use a barra de rolagem para observar as várias alturas possíveis).

Investigando o problema.

- Para uma possível resolução do problema, considere os seguintes dados:
 - ✓ O preço do material usado para o fundo e a tampa da lata é 3 centavos por centímetro quadrado e o preço do material usado para a lata é 2 centavos por centímetro quadrados;
 - ✓ Seja r o raio da tampa e do fundo, h a altura e C o custo (em centavos) do material necessário para construir uma latinha;
- Expresse o custo do material necessário para construir uma latinha de cerveja em função do raio;
- Use o **Winplot** para fazer a representação gráfica da função $C(r)$;
- Calcule a derivada da função $C(r)$, a seguir, usando o **Winplot** esboce a imagem do gráfico de $C'(r)$ no mesmo sistema de coordenadas de $C(r)$;
- Para dinamizar os gráficos de $C(r)$ e $C'(r)$ crie um ponto genérico sobre cada função, faça um comentário sobre o que observa.
- No mesmo sistema de coordenadas que foram esboçados os gráficos de $C(r)$ e $C'(r)$, esboce o gráfico do **Volume** e da altura da latinha em função do raio.
- Como anteriormente, crie um ponto genérico r sobre as funções altura e volume de modo a observar o comportamento das funções em relação as funções $C(r)$ e $C'(r)$. Faça um comentário das suas observações.

¹⁸Realizada em 05/08/06 - Turma A e B /Hora: 19:00. Adaptada do Livro Stuart, (2005), p.331.

h) A partir dos cálculos e observações realizados determine as dimensões da latinha de cerveja de 350 cm^3 enunciada no problema;

Figura A45: Atividade 4 aplicada junto a Turma A e B

Apresentação

A **Atividade 4** foi realizada no Laboratório de Informática, às 19:00 hs em uma terça-feira. Nesse último encontro vieram apenas seis pessoas, e como alguns estudantes já haviam me informado que não iriam participar, pois estariam viajando na terça a noite, já que na quarta não teriam aula e na quinta seria feriado de sete de setembro, decidi então, organizar uma única turma dentre as **Turmas A e B**. Já suspeitando que poucos viriam, o que realmente aconteceu, tive então de reorganizar a disposição dos grupos, formando três duplas de estudantes, sendo essas não necessariamente iguais as já estabelecidas nos últimos encontros.

Para a **Atividade 4**, foi proposto um problema, interagindo assuntos de Geometria Espacial e Cálculo Diferencial e Integral I. Esta atividade buscava investigar um problema de otimização por meio do software **Winplot**, visando explorar as representações algébricas, gráficas, e geométricas inerentes ao problema, (Figura A45).

Explorando e Investigando o problema - Turmas A e B

Ao iniciar os trabalhos fiz um pequeno esclarecimento aos estudantes, informando-os que nesse último encontro exploraríamos um **problema de otimização**, cuja principal idéia era introduzir noções de geometria espacial envolvendo máximos e mínimos de funções.

O problema apresentado consistia em **determinar as dimensões de uma lata de refrigerantes com capacidade de $111,5\pi \text{ cm}^3$, construída com a menor quantidade possível de metal, considerando que o preço do material usado para o fundo e a tampa da lata custava três centavos por centímetro quadrado e o preço do material usado para a lateral da lata, dois centavos por centímetro quadrados;**

Nesse sentido, foi explicitado aos estudantes, que para o desenvolvimento dessa atividade, assim como, foi para a **Atividade 3**, utilizaríamos o recurso dos softwares: **Winplot** para fazermos a simulação geométrica do problema, bem como desenhar os gráficos das funções e, o pacote algébrico do **Maple** (uso opcional) para

experimentarmos as soluções encontradas das representações algébricas realizadas previamente pelos estudantes utilizando lápis e papel.

Para orientar os trabalhos (assim como foi feito nas outras atividades), foi entregue aos grupos de estudantes, um roteiro informando o problema a ser pesquisado, instruções para usar os comandos do software **Winplote** questões inerentes ao dado problema (Figura A45).

Sendo essa atividade, um pouco mais elaborada do que as anteriores iniciei a atividade sugerindo aos estudantes que considerassem a possibilidade de visualizar a lata cilíndrica planificada, e a seguir procurassem descrever algebricamente a área da tampa e do fundo da latinha. Para determinar a área lateral da lata imaginassem o lado aberto, de maneira que a tampa e o fundo tivessem sido retirados. Em busca de uma melhor visualização, recomendei que desenhassem no papel a figura que eles imaginassem que pudesse representar a lata aberta e, dois círculos, para representar a tampa e o fundo da lata respectivamente), (Figuras A46, A47 e A48), e que utilizassem a letra **r** para representar o raio da tampa e do fundo, **h** a altura e **C** o custo (em centavos) do material necessário para construir uma latinha.

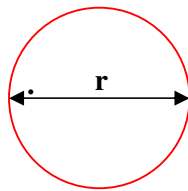


Figura A46: Tampa

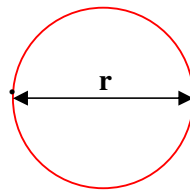


Figura A47: Base

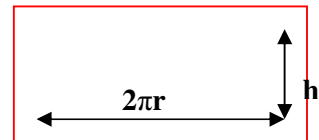


Figura A48: Lateral

Após esse comentário, achei adequado disponibilizar um espaço de tempo aos estudantes para discutirem entre seus pares os procedimentos a serem aplicados bem como o registro das possíveis respostas encontradas em um primeiro momento. Entretanto, durante esse tempo, algumas intervenções da minha parte foram às vezes solicitada pelos estudantes.

Encontrada as respectivas áreas: $A = \pi \cdot r^2$ (área da tampa e do fundo) e $A = 2 \pi r h$ (área da lata aberta), tarefa que todos concluíram sem grandes dificuldades, solicitei que a partir desses dados determinassem o custo do material para a confecção da embalagem. Lembrando-os que o custo da tampa e do fundo equivalia três centavos por cm^2 e para a lateral da lata dois centavos por cm^2 .



Para responder, os estudantes, retornaram a discutir entre eles e, por meio de algumas intervenções por parte dessa pesquisadora, chegaram por fim a um consenso, determinando que o custo total (somando o custo do lado com os custos da tampa e do fundo), poderia ser expresso da seguinte maneira:

$$C = 3\pi r^2 + 3\pi r^2 + 4\pi rh \Rightarrow C = 6\pi r^2 + 4\pi rh. \Rightarrow \text{Equação Custo}$$

Determinada a Equação custo, os estudantes em consenso com essa pesquisadora chegaram a conclusão que para desenhar o gráfico de $C = 6\pi r^2 + 4\pi rh$ por meio do **Winplot**, seria necessário escrever o custo em função apenas de uma variável, de maneira que o próximo passo na exploração do problema seria o de expressar a **altura** “**h**” em função de **r**. Solicitei então, aos estudantes, que conjeturassem um pouco mais a respeito, e que sugerissem uma solução. Passado um tempo, percebi que dois grupos estavam sentindo dificuldade em encontrar uma resposta. Logo, resolvi intermediar perguntando-lhes, qual a capacidade da latinha? Os estudantes responderam que o volume da latinha era **111,5π cm³**. A seguir perguntei como representar esse volume algebricamente? Os estudantes pensaram um pouco e responderam que o volume poderia ser representado pela base da latinha vezes a altura. Ou seja, o produto da área da base por sua altura. Diante dessa resposta, pedi então, que registrassem no papel essa expressão e que substituíssem o valor do volume pelo dado apresentado no problema. Isto é,

$$V = \pi r^2 \times h \Rightarrow 111,5\pi = \pi r^2 \times h.$$

Após o registro dessa equação ficou mais simples para os estudantes perceberem que bastava simplesmente isolar “**h**” e teriam a altura em função do raio **r**, ou seja,

$$h = \frac{111,5\pi}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{111,5}{r^2} \Rightarrow \text{Função Altura}$$

$$\text{Confirmando que } V = \pi r^2 \times h \Rightarrow V = \pi r^2 \times \frac{111,5}{r^2} \Rightarrow V = 111,5\pi \Rightarrow \text{Volume da Latinha}$$

Assim, O custo em função do raio pôde ser representado algebricamente, substituindo a altura **h** na função custo, como indicado abaixo:

$$C = 6\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot rh \Rightarrow C(r) = 6\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot r \frac{111,5}{r^2} \Rightarrow C(r) = 6\pi r^2 + \frac{446\pi}{r} \Rightarrow \text{Função Custo}$$

Nesse ponto da investigação, chamei a atenção dos estudantes, dizendo-lhes que antes de desenharmos o gráfico da **Função Custo**, fariam uma construção da latinha por meio do Winplot, simulando as dimensões do volume e altura do cilindro. Para tanto fui aos poucos dando as orientações necessárias para tal construção.

Primeiramente solicitei que desenhassem o círculo representando a base, sugeri, então, aos estudantes usarem o comando **equação→explícita** (comando do Winplot), para escrever a equação da circunferência de raio r (genérico).

Para desenhar a tampa da latinha (circunferência de raio r , acima do eixo Ox) um grupo sugeriu uma translação, somando a equação da circunferência com a altura;

$$h = \frac{111,5}{r^2}. \text{ Isto é, } 6\pi r^2 + \frac{446\pi}{r} + \frac{111,5}{r^2}.$$

Essa sugestão foi interessante, principalmente por ter sido uma iniciativa dos próprios estudantes. Percebendo, portanto, que os grupos interagiam e pareciam estar a vontade frente à construção da figura, incentivei-os a continuarem o trabalho sem minha interferência. Dado um tempo, perguntei se haviam terminado à construção do cilindro no **Winplot**, um grupo estava finalizando, no entanto, dois outros grupos, encontravam-se em dificuldade para determinar alguns dos segmentos na construção lateral do cilindro, mas com algumas poucas sugestões chegaram à solução (Figura A49).

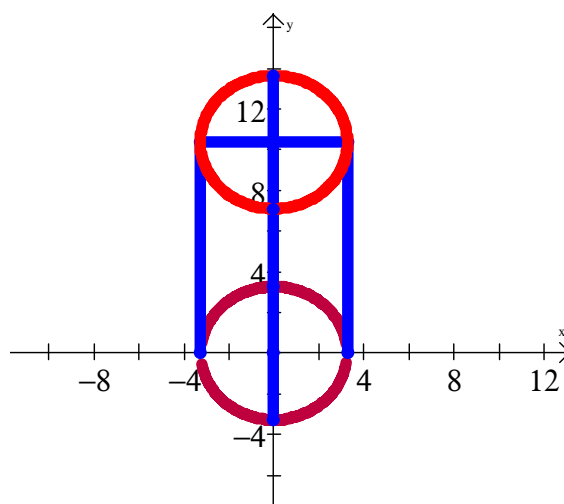


Figura A49: O Cilindro

Terminada essa construção, pedi que “animassem” a figura, usando o comando **Anim** (animação) no **Winplot**, para que pudessem visualizar as várias dimensões do Cilindro na tela do computador, e assim fizeram, vide (Figuras A50, A51 e A52)¹⁹.

¹⁹ Os valores (a), (b) e (c), nas figuras A50, A51 e A52, respectivamente, correspondem a movimentos da altura do cilindro em função do raio “ r ”.

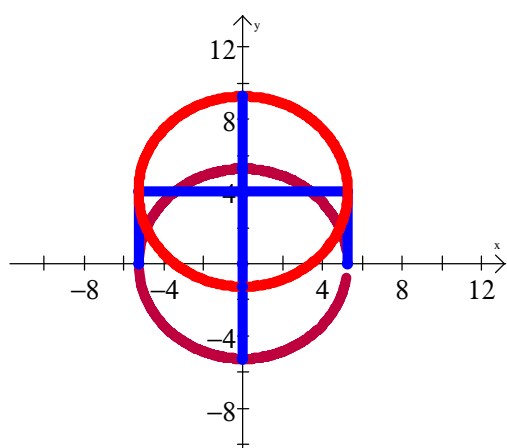


Figura A50 Movimento (a) do Cilindro

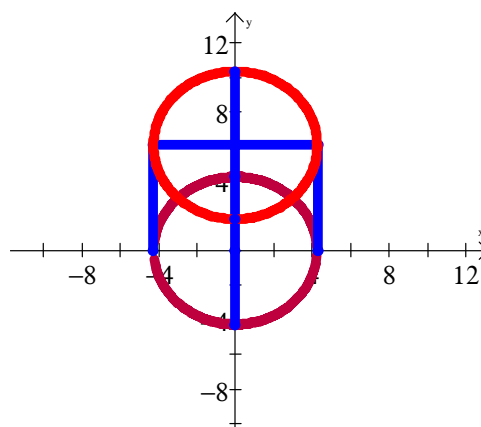


Figura A51 Movimento (a) do Cilindro

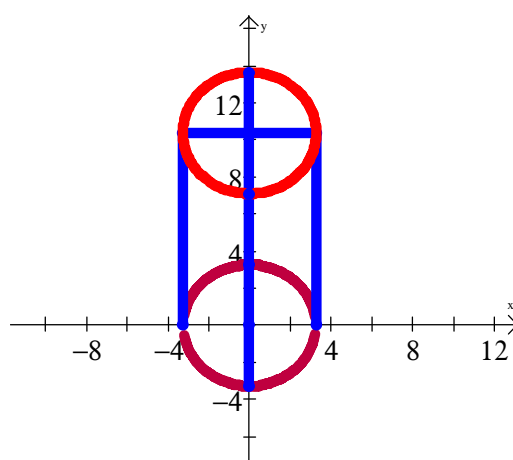


Figura A52: Movimento (c) do Cilindro

Prosseguindo na exploração do problema, solicitei aos estudantes que abrissem uma outra tela, no **Winplot**, para que pudessem desenhar os gráficos representando as funções **Custo**, **Altura** e **Volume** da latinha, bem como os pontos genéricos pertencentes a cada uma dessas funções, de maneira que pudessem animar os gráficos comparando essas representações à representação geométrica do cilindro. Vale ressaltar que, para esta tarefa, os estudantes já estavam familiarizados com os comandos, portanto, poucas foram as intervenções realizadas sob esse aspecto (Figura A53).

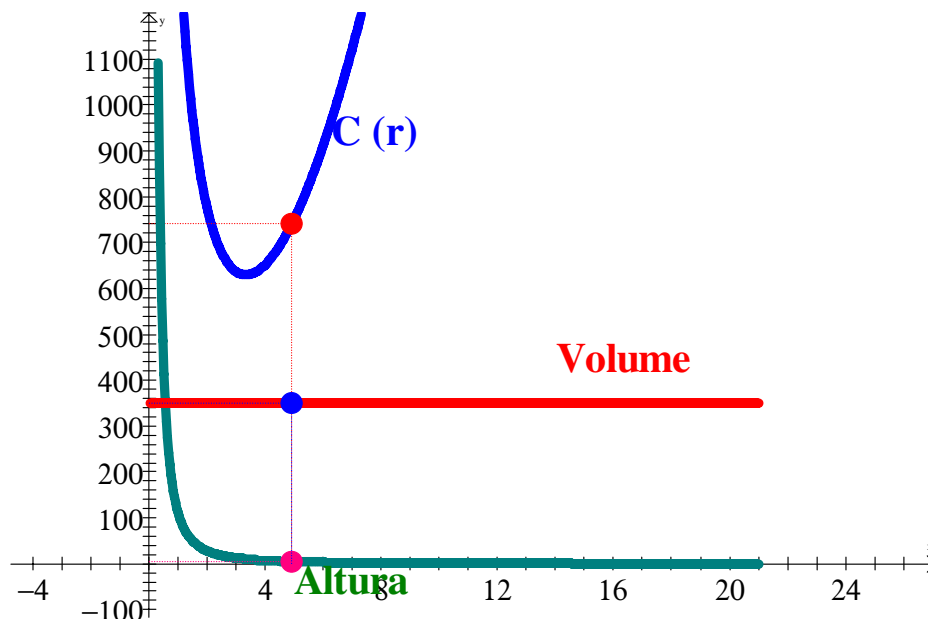


Figura A53: Representação da Função Custo, Altura e Volume.

Após a construção dos gráficos por meio do **Winplot** de cada uma das funções, solicitei que observassem o comportamento de cada função movimentando os pontos genéricos pertencentes às funções, respectivamente e, que a partir dessa análise conjecturassem sobre uma possível solução para o problema (Figuras A54, A55, A56 e A57)²⁰.

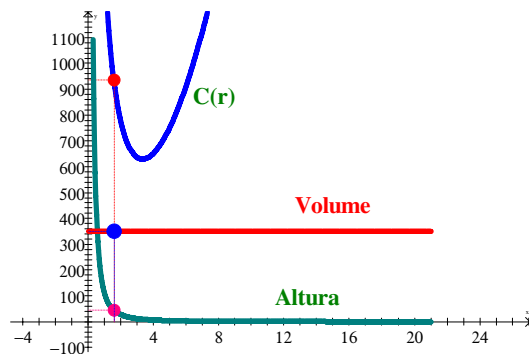


Figura A54: Simulação (a)

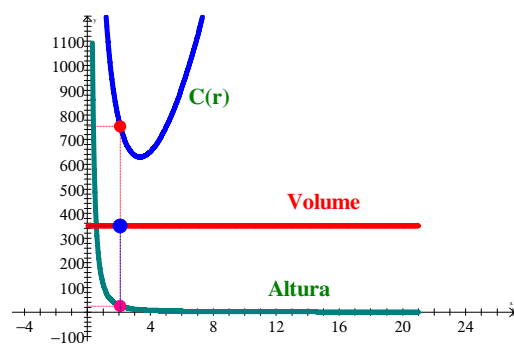


Figura A55: Simulação (b)

²⁰ As letras (a), (b), (c) e (d) nas figuras A54, A55, A56 e A57 correspondem a simulação das funções Custo, Volume e Altura em função do raio " r ".

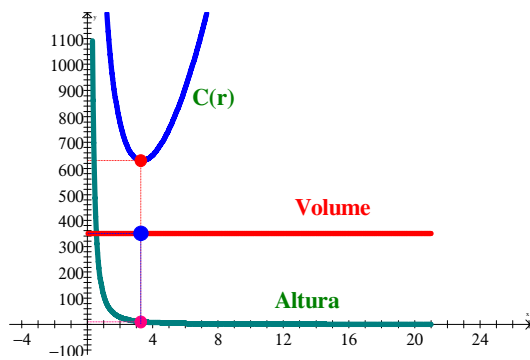


Figura A56 Simulação (c)

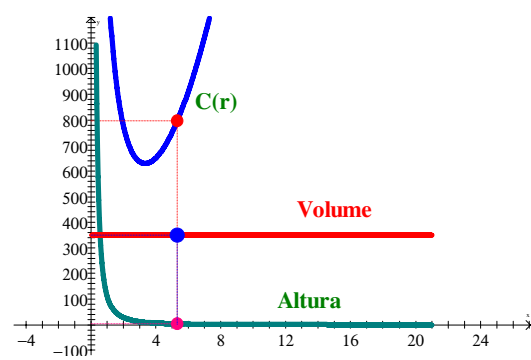


Figura A57: Simulação (d)

Observando os gráficos, os estudantes puderam concluir que o custo era estimado mínimo para algum valor de r e que uma forma de determinar esse valor, seria derivando a função Custo $C(x)$. Para esse procedimento, fizeram primeiramente o cálculo da derivada no papel e então resolveram experimentar os resultados no **Maple**. De maneira que a derivada da função Custo foi indicada pela seguinte representação algébrica;

`> diff(6*Pi*r^2+446*Pi/r,r);`

$$12 \pi r - \frac{446 \pi}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Derivada da Função Custo}$$

Levando em conta que o raio pode ser qualquer valor positivo, o objetivo, portanto, seria determinar o mínimo absoluto de $C(r)$ no intervalo $r > 0$. Assim, a partir da derivada $C'(r)$, discutimos que os pontos críticos da função indicariam uma resposta para o problema. Supondo então, que a função passa por um **mínimo** no ponto em que a derivada é nula, o custo mínimo do material para confecção da latinha apresentava-se de menor valor para o raio igual ao valor abaixo;

$$C'(r)=0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{223}{6}} \approx 3,3374.$$

Finalmente para ter certeza de que esse extremo correspondia realmente a um **mínimo absoluto** (e não a um **máximo**), bastou os estudantes observarem que $C'(r)$ possuía apenas um ponto crítico no intervalo $r > 0$. Para justificar esse resultado os estudantes calcularam a segunda **derivada** de $C(r)$ com lápis e papel e, por meio do **Maple** puderam experimentar suas respostas.

> diff(6*Pi*r^2+446*Pi/r, r,r);

$$12\pi + \frac{892\pi}{r^3} \quad \text{Derivada Segunda da Função Custo}$$

Substituindo o valor $r = \sqrt[3]{\frac{223}{6}} \cong 3,3372$ em $C''(r)$, isto é, $C''(3,3372) = 12\pi + \frac{892\pi}{3,3372^3}$

foi possível perceber que $C'(3,3372) > 0$. Logo pelo teste da derivada segunda $C''(3,3372) = r = 3,3372$ correspondia a um ponto de mínimo.

Concluída as justificações algébricas, solicitei que desenhassem por meio do **Winplot** os gráficos das funções $C'(r)$ e $C''(r)$ para que pudessem visualizar o comportamento das mesmas em comparação à **Função Custo $C(r)$** .

Ao movimentarem os pontos genéricos sobre essas funções (vide Fig.60), puderam perceber que quando o ponto atinge o menor valor em $C(r)$, o ponto sobre $C'(r)$, tocava o eixo Ox, indicando o zero dessa função, ao mesmo tempo em que para as funções altura $h(r)$ e volume $V(r)$, os valores aproximados, correspondiam a 350 ml e 10,011 respectivamente, cujas dimensões determinavam a solução para o problema da **Atividade 4**.

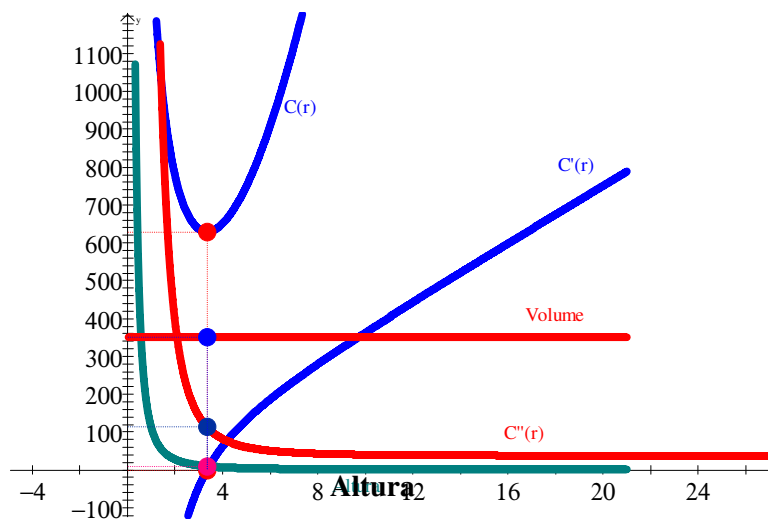


Figura A58: Custo Mínimo

Ao finalizar a investigação sobre o problema apresentado na **Atividade 4**, propus aos estudantes retomarmos a representação geométrica do cilindro de maneira a observarmos concomitantemente a animação dos gráficos das funções $C(r)$, $C'(r)$, $C''(r)$, $h(r)$, $V(r)$ em relação a do cilindro por meio do **Winplot**. Para tal tarefa foi

necessário usar o software rodando no **Windows**, pois no sistema operacional **Linux** não seria possível devido as limitações já mencionadas. Perante essa impossibilidade, tomei a decisão de levar para o laboratório um Notebook, no qual pude mostrar aos estudantes essa simulação (Figura A59).

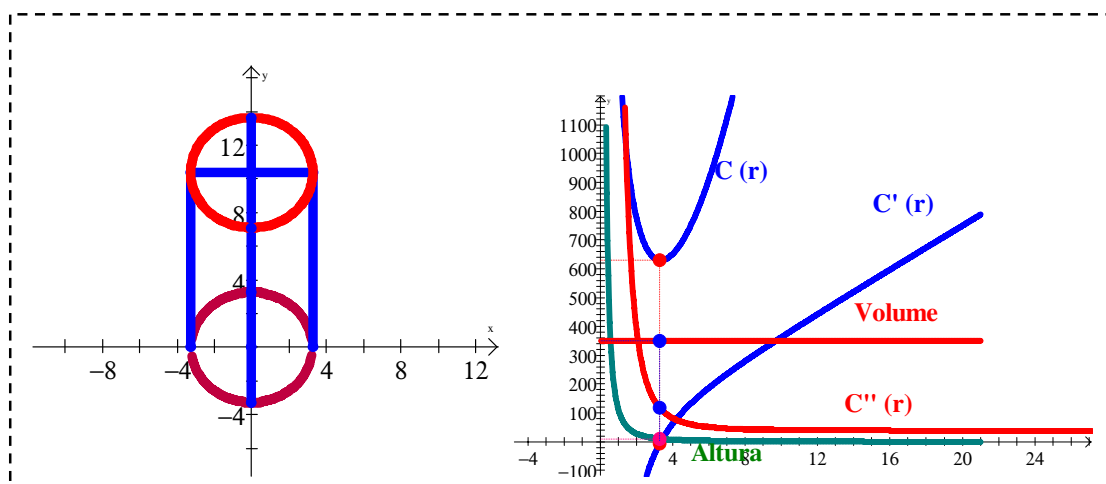


Figura A59: Cilindro versus Representação Algébrica das Funções Custo, 1ª. e 2ª. Derivadas

Essa abordagem foi importante, pois os estudantes tiveram a oportunidade de perceber que quando a função Custo atingia seu menor valor, simultaneamente, o cilindro configurava-se na forma ideal, ou seja, expressando as dimensões de menor quantidade para o metal necessário na construção da latinha de cerveja, considerando obviamente os dados apresentados no problema.

Encerrando os trabalhos pedi aos estudantes que registrassem no papel as informações apreendidas durante as discussões da **Atividade 4**, convidando-os também a falar um pouco sobre a abordagem empregada nesse trabalho, vejamos as opiniões dos alunos à respeito:

Comentário dos Estudantes - Turma A e B

MA -Pessoal vou pedir que falem um pouco sobre essa última atividade, o que vocês acharam, se foi ou não interessante, explorar várias representações matemáticas na abordagem do problema.

Robin- Lidar com gráfico é uma coisa que prende a atenção [...] pra alguns é importante, pra outros não, mas na minha opinião achei bastante interessante.

Clotilde - Eu acho que o aluno ia aprender melhor, olhando pelo gráfico, apesar de, se não for bem trabalhado em sala de aula, com certeza sentirão alguma dificuldade, mas para aprender é melhor,

acredito que facilmente ele pega o jeito (**referindo-se a linguagem do software Winplot**).

Robin e Clotilde - A parte mais difícil do problema foi pensar como escrever a equação dos três gráficos da função Custo, da derivada e da segunda derivada.[...] Para o aluno que não tem noção de derivada, é importante ter um conhecimento anterior.

MA - Então não seria produtivo falar de ponto mínimo, máximo sem os estudantes terem conhecimento básico de limites e derivadas?

Robin - Ter até teria, pois no mínimo ficariam deslumbrados com a movimentação dos gráficos. Para o ensino médio mesmo sem falar em derivada seria possível passar a idéia de ponto mínimo ou máximo, mas só através do gráfico. Eu acho super importante.

Conversando com outros dois grupos de estudantes, perguntei:

MA - Queria que vocês comentassem um pouco sobre a atividade, o que vocês acharam, Se é possível usar essa abordagem em sala de aula.

Henrique - No começo não tinha entendido muito qual era a relação da construção da latinha com as representações gráficas das funções. Mas, depois que você mostrou pelo Windows ligando um no outro, caiu a ficha, foi bem legal.

Any - Mas, mesmo assim (**referindo-se a fala da Henrique**), pra trabalhar com os alunos do ensino médio é bem interessante, fica bem mais rápido pra eles visualizarem...

Henrique -...é, porque a gente pode relacionar as várias representações, é bem melhor do que ficar imaginando a figura, o que está acontecendo. A idéia de partir de uma figura geométrica para a equação, pode ser que no início fique difícil, mas é possível trabalhar desta maneira mesmo com alunos que desconhecem os conteúdos de derivada e limites.

Any - pra mim ajudou bastante, melhorou muito a visão que eu tinha antes, agora, quando começar a trabalhar (**referindo-se ao estudo do Cálculo I**), ficou mais fácil perceber a importância dos gráficos em relação à sua representação algébrica. Eu acho que ajuda muito não só pra mim, como para os meus futuros alunos do ensino médio ou fundamental, pois é uma forma de ver e analisar os conteúdos matemáticos.

Henrique - Gostei da atividade, pois deu pra ver o comportamento de vários gráficos. O comportamento do gráfico do Custo, entre outros. É só meio complicado pro ensino médio, você explicar que uma curva ou que aquele gráfico representa, por exemplo, o volume, ou altura do cilindro. Mas essa forma de abordar os conteúdos matemáticos é muito interessante.



Augusto - A atividade de hoje, eu gostei bastante, principalmente a parte de manipular vários gráficos ao mesmo tempo e... é interessante que o computador agiliza um processo, que se a gente fosse fazer manualmente seria inviável. E com relação ao problema proposto na atividade de hoje, envolvendo cilindro e volume, eu acho possível pelo menos nessa perspectiva ser abordado no ensino médio, porque, por exemplo, dado um volume fixo dá pra trabalhar só com equação do segundo grau envolvendo a variável r . Dado r , colocar a altura em função do raio. E como é uma função do segundo grau, dá pra trabalhar normalmente com máximo, mínimo, sem falar de derivada.

Henrique - Acho que o Cálculo, é uma das únicas matérias da Universidade que dá pra aplicar no ensino médio, eu acho!

Augusto - pela pouca experiência que a gente tem dá impressão que o Cálculo está mais próximo, tanto que tem livros do ensino médio que contém assuntos que hoje são do Cálculo I na Universidade.



Atividade 4- Turma A e B

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h \\
 S &= 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{111,5}{R} = 2\pi \left(R^2 + \frac{111,5}{R} \right) \\
 S'(R) &= \frac{4\pi R}{R^2} + \frac{223\pi [R^{-1}]^1}{R^2} \\
 &= \frac{4\pi R}{R^2} + \frac{223\pi (-1) R^{-2}}{R^2} \\
 &= \frac{4\pi R - 223\pi}{R^2} \\
 S'(R) &= \frac{4\pi R - 223\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi R}{R^2} = \frac{223\pi}{R^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4\pi R^3 &= 223\pi \Rightarrow R^3 = \frac{223}{4} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{223}{4}} \\
 S''(R) &= \frac{4\pi - 223\pi [R^{-2}]^1}{R^3} = \frac{4\pi - 223\pi (-2) R^{-3}}{R^3} = \\
 &= \frac{4\pi + 446\pi}{R^3} \\
 S''\left(\sqrt[3]{\frac{223}{4}}\right) &= \frac{4\pi + 446\pi}{\left(\sqrt[3]{\frac{223}{4}}\right)^3} = \frac{4\pi + 446\pi}{\frac{223}{4}} = \frac{4\pi + 446 \cdot 4}{223} > 0 \\
 S'\left(\sqrt[3]{\frac{223}{4}}\right) &= 0 \text{ e } S''\left(\sqrt[3]{\frac{223}{4}}\right) > 0 \text{ implica que} \\
 P &= \left(\sqrt[3]{\frac{223}{4}}, S\left(\sqrt[3]{\frac{223}{4}}\right)\right) \text{ é ponto de mínimo local} \\
 (I) \text{ Se } S(x) &\text{ a função Área superficial, } h(x) \\
 \text{altura, } C(x) &\text{ custo} \\
 \text{Para que } S(x) &\text{ seja mínima, calculamos a derivada } S'(x) \\
 \text{e encontramos os pontos críticos, com auxílio de } S''(x) \\
 \text{verificamos o ponto de mínimo que é} \\
 x &= 3,82076 = x \\
 \text{colocando pontos genéricos}
 \end{aligned}$$

Henrique e Augusto

em $S, h \in \mathbb{C}$, determinamos f para um dado valor de n , $S, h \in \mathbb{C}$ variam

Seguiremos a área máxima, $n = 382076$, mas a área máxima não implica um custo máximo.

Para um custo máximo, calculamos o ponto de mínimo da função C (custo), $x = 3,33702 = n$

Sabendo o valor de n , substituindo $S, h \in \mathbb{C}$ convergimos os respectivos valores para ócio, obtendo o custo, em função de n .

$$S(n) = 2\pi \cdot \left(n^2 + \frac{777,5}{n} \right)$$

$$h(n) = \frac{777,5}{n^2}$$

$$C(n) = (2\pi n^2) \cdot (0,03) + (0,02) \cdot \left(777,5 \cdot \frac{2\pi}{n} \right)$$

Determinar as dimensões de uma lata de altura de $11,5\pi\text{cm}$ construída com a menor quantidade de metal.

Dados: O preço do material para o fundo e a tampa é R\$ 0,03 por cm^2 .
 E o preço do material para a lateral é R\$ 0,02 por cm^2 .

$V = \pi r^2 h$
 $11,5\pi = \pi r^2 h$
 $h = \frac{11,5}{r^2}$

Equação do semi-círculo
 $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$
 Equação do semi-círculo de arco
 $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} + h$

$P_1 = (-r, 0)$
 $P_2 = (0, r)$
 $P_3 = (r, 0)$
 $P_4 = (0, -r)$

$P_5 = (-r, h)$
 $P_6 = (0, h)$
 $P_7 = (r, h)$

Função custo total
 $2\pi r^2 + 2\pi r h$
 $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{11,5}{r^2} = \frac{2\pi r^3 + 2\pi \cdot 11,5}{r} =$

$2\pi \left(\frac{r^3 + 2,3}{r} \right)$ Função custo total

$\frac{0,1884 r^3 + 14,0044}{r}$

Derivando temos o ponto candidato a mínimo.

$\frac{0,3768 r^2 - 14,0044}{r^2} = 0$

$\frac{0,3768 r^3 - 14,0044}{r^2} = 0$

$\frac{0,3768 r^3 - 14,0044}{r^2} = 0$ $\Rightarrow r^3 = 37,16667$ $\Rightarrow r = 3,337$

Letícia e Marcela

Ponto de extremos

$$x = 3,3372$$

$$y = 629,78375$$

Derivado:

$$C(t) = 6\pi r^2 + \frac{446\pi}{r}$$

$$C'(t) = 12\pi r - \frac{446\pi}{r^2}$$

$$\frac{12\pi r - 446\pi}{r^2} = 0$$

$$12\pi r = \frac{446\pi}{r^2}$$

$$12\pi r^3 = 446\pi$$

$$12r^3 = 446$$

$$6r^3 = 223$$

$$r^3 = \frac{223}{6}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{223}{6}} \Rightarrow r = 3,3372$$

$$C''(t) = 12\pi + \frac{892\pi}{r^3}$$

+ O ponto está no extremo da função, isto, quer dizer, que o primeiro é zero, isto quer dizer, que o pto extremo é um candidato a extremo local e a derivada segunda é positiva então isto quer dizer q o ponto extremo é um ponto de mínimo.

Robin e Clotilde

ANEXO B: Observações

As observações foram realizadas em uma classe de 1º. ano da UNESP de Rio Claro, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. Os textos estão descritos na íntegra correspondendo as 19 aulas, das quais participei junto aos estudantes e professora da classe. Vale ressaltar ao leitor que ao registrar as minhas impressões, as escrevi informalmente de maneira que poderão ocorrer erros na escrita.

Os ícones , ,  correspondem aos comentários da pesquisadora¹, estudantes e professora respectivamente.

OBSERVAÇÃO 1

Maria Margarete do R. Farias

1ª Observação Data: 20/03/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

Hoje iniciei as observações (parte da coleta de dados para minha pesquisa) na turma de licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro. O primeiro tempo começou às 8:00 horas, mas infelizmente devido a alguns contratempos não pude chegar logo no início da aula. Embora o meu atraso ter sido apenas por alguns minutos, foi o suficiente para me deixar preocupada, só que ao chegar ao local percebi que não seria um prejuízo tão grande, a professora ainda estava bem no início da sua apresentação.

A minha primeira impressão foi de sala cheia, procurei um lugar no fundo da classe, achando que assim não chamaria a atenção e realmente passei quase despercebida, acho que os alunos me viram como mais uma estudante da turma, apesar de parecer mais velha que a maioria.

Ao olhar a lousa, notei que a professora havia exposto o assunto que seria estudado durante todo o ano. Os assuntos estavam dispostos na seguinte ordem: **Números Reais, Funções, Limite, Continuidade, Derivada, Integral, Coordenadas Polares, Sequências e Séries.**

 Os assuntos **Números Reais e Funções** serão dados como revisão, mas mesmo assim serão cobrados nas provas.

¹ Margarete Farias

Sentada então na última fileira e me sentindo um pouco mais à vontade, tentei me envolver com o ambiente procurando ficar atenta o máximo possível às discussões que poderiam surgir durante a aula. Em uma conversa anterior com a professora, ela me disse que iniciaria o curso fazendo revisão dos assuntos que costumam ser pré-requisitos para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, e assim o fez. Hoje começou falando dos números reais, lembrando as propriedades dos números naturais, inteiros, e racionais e na sua exposição sempre fazia referência de como esse assunto é apresentado a turmas do ensino fundamental e como os alunos sentem dificuldade em abstrair quando se fala em reta real. A professora em sua apresentação buscou envolver os alunos, fazendo perguntas sobre o que estava a expor.



CO. Noto que alguns estudantes, talvez por ser a primeira aula, ainda se encontram tímidos em responder as perguntas feitas pela professora, mas os que se dispuseram a dar algum retorno pareciam ter um razoável embasamento matemático sobre o tema exposto. Notei também que a professora conhece o nome de muitos que se encontram ali, isso pode significar que; ou são repetentes, ou antes, dessa primeira aula tiveram algum encontro anterior e a professora tendo boa memória gravou o nome da maioria.

Durante algum tempo procurei ouvir as respostas dos alunos e em outros momentos escrevia no meu diário de campo alguns pontos que me chamavam a atenção. Um desses momentos foi quando a professora depois de discorrer sobre o tema números racionais, escreveu a definição na lousa, a seguir perguntou aos alunos como justificariam **a** e **b** positivos, como não houve resposta dos alunos a professora retornou a pergunta e então timidamente alguns alunos começam a arriscarem uma resposta:



(CA) _ porque os sinais devem ser o mesmo?



(CP) _ a professora questiona, como assim o mesmo? A seguir, argumenta: podemos usar essa expressão para justificar? E que tal se envolvêssemos o conjunto dos números reais na definição, como faríamos isso? Uma outra aluna então arrisca uma resposta:



(CA) _ podemos considerar $a > 0$, $b > 0$, ou $a < 0$ e $b < 0$ então?



(CP)² a professora diz não é isso, mas é quase e conduz a aluna a pensar mais um pouco. Percebendo por fim que a discussão não seria mais produtiva naquele momento, ela disse então que muitas vezes sabemos a resposta, mas temos dificuldade de expressá-las e representá-las adequadamente, e com esse comentário mostrou em seguida a resposta correta.



Já pela metade da aula, confirmei que muito dos alunos que ali se encontravam, faziam o curso já pela segunda ou terceira vez, e que naquele dia encontravam-se poucos calouros. Fiquei sabendo também da presença de um estudante do 4º. Ano de engenharia e só por curiosidade um vice-presidente da câmara de vereadores de Rio Claro e além de mim mais um ouvinte, ainda não me informei sobre se o seu interesse também é de fazer uma pesquisa.

Como já disse é uma turma grande, mais de 30 alunos, todos na faixa etária de 17 à vinte e poucos anos, a sala de aula é ampla e arejada, não há qualquer tipo de mídia, como computadores, retro projetores, data show, etc. A não ser o giz e a lousa (se considerarmos como uma espécie de mídia). As cadeiras não são muito confortáveis embora sejam práticas e ficam dispostas na forma tradicional. Há também um grande quadro de giz, uma mesa e uma cadeira para uso da professora, não há armários.



O estilo de dar aula da professora parece ser da forma tradicional, ou seja, aulas expositivas, apresentação do assunto, definição, exemplos e exercícios.

Em prosseguimento com a aula, após demonstrar um resultado envolvendo números inteiros a professora propôs alguns exercícios aos alunos e um deles foi: **Seja p um número inteiro. Então:**

- (a) Se p for ímpar, então p^2 será ímpar;
- (b) Se p^2 for par, então p será par.

Depois de escrever o exercício, a professora dá um espaço de tempo para que os alunos pudessem demonstrar a propriedade apresentada e nesse tempo aproveitou para confirmar a presença dos que estavam em sala.

No momento em que a professora começou a fazer a chamada dos nomes a impressão que tive foi que a maioria dos alunos sequer tentavam responder a questão

² CP - Comentário do professor

proposta e os poucos que se empreendiam a tal tarefa o faziam de forma individual. Imagino que possam sentir uma certa estranheza em resolver demonstrações, ou simplesmente tem dificuldades, ou ainda não se sentem motivados. A professora chegou a comentar se eles estavam a estranhar a formalidade imposta nos resultados das demonstrações.

Terminada a chamada dos nomes, a professora voltou a lousa e perguntou se alguém havia feito alguma das opções do exercício, poucos se manifestaram, a professora, então, incentivou-os a se aproximar da lousa para mostrar o que fizeram e como fizeram. Como ninguém se manifestou, a professora então sugeriu o nome de uma aluna e pediu que ela se aproximasse. A referida aluna se levantou um pouco relutante e foi até ao quadro de giz começando a mostrar aos colegas como havia encontrado a resposta:

Resposta da Aluna para opção (a):

Seja $p = 2t + 1$, temos $p^2 = (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t+1 = 2(2t^2+2t) +1 = 2z+1$, onde $z=(2t^2+2t)$. Logo p^2 é ímpar.

Outro aluno foi chamado pela professora, ele resiste um pouco mais, pois informa que sua solução pode não estar correta, mas acaba concordando com a professora que o incentiva dizendo que a participação do aluno nesses casos é importante, justamente por ter a oportunidade de perceber mais claramente as dificuldades enfrentadas pelos mesmos na resolução dos exercícios.

Resposta do Aluno para opção (b):

O aluno inicia tentando seguir os passos da resolução da colega que anteriormente tinha ido à frente da lousa, mas se perde um pouco e não consegue prosseguir em sua suposição. A professora interfere e sugere que ele tente demonstrar por absurdo supondo que p seja ímpar e em uma nova tentativa ele escreve:

$P \in b(\text{item a})$ p^2 é ímpar . Abs. E como por hipótese p^2 é par, logo p é par.

Após a resolução desse exercício, a professora deu por fim a aula, deixando escrito na lousa um exercício para que os alunos trouxessem a resposta na próxima aula.

Exercício de Casa: Provar porque um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.



Na saída procurei a professora e disse a ela que na próxima aula informássemos aos alunos sobre a minha situação de pesquisadora e ela me disse que tudo bem, mas que

evitássemos informar que estava ali para fazer observações, apenas informasse que participaria das aulas como ouvinte. Vou conversar com Rosana (orientadora) sobre isso!



OBSERVAÇÃO 2

Maria Margarete do R. Farias

2ª Observação Data: 22/03/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP de Rio Claro

Hora: 8:00hs

No segundo dia de aula logo ao adentrar a sala a professora me perguntou se gostaria de me apresentar e falar do propósito de estar participando das aulas. Então me dirigi à frente dos alunos, me apresentei e comecei a falar que pretendia participar das aulas como ouvinte com o objetivo de rever os conteúdos de Cálculo, bem como estar interagindo com todos ali, e que posteriormente os convidaria a participar de um estudo de um software educativo o qual pretendia usar na resolução de alguns problemas de limites e derivadas. Na verdade eu não quis dar mais detalhes devido a uma conversa anterior com a professora e depois com a Rosana (minha orientadora) achamos por bem não informar aos alunos que estaria ali para observá-los, pois poderia constrangê-los e possivelmente limitando-os a agirem naturalmente na sala de aula quando eu estivesse presente.

Feita a apresentação fui me sentar e como da outra vez, fiquei no fundo da sala, por achar que ali teria uma visualização melhor de todo o ambiente.

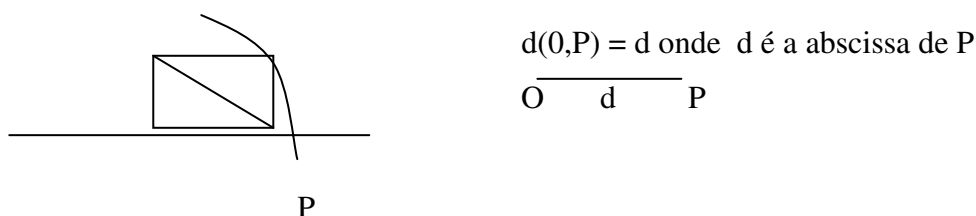


Os alunos me pareceram meio apáticos, sem nenhuma expressão, pois ao terminar a minha fala, ninguém mostrou interesse, isso me preocupou, o que me fez pensar - “e se ninguém quiser participar da minha pesquisa?” Espero que seja apenas uma impressão, pois considerando que é apenas o segundo dia e eles não se conhecem bem (isso no caso dos calouros) devo reconsiderar e aguardar mais um pouco e ver o que acontece.

Assim que me acomodei na cadeira olhei para o quadro e vi que a professora havia colocado as datas das futuras provas, anotei o dia da prova de Cálculo, pois além dela havia datas de outras disciplinas, como a de GA (Geometria Analítica), por exemplo. As provas de Cálculo serão realizadas dia 12 de maio e 26 de junho. A professora informou que em prova costuma usar questões tipo verdadeiro ou falso. Se falso devem dar contra exemplos e se verdadeiro devem provar.

Enquanto eu copiava as datas das provas a professora escrevia no quadro a seguinte proposição: **A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.**

Enquanto escreve a professora vai dando explicações e para ilustrar o que diz desenha uma figura no quadro, explicando ser a **representação geométrica da solução de $x^2 = 2$**



Em seguida definiu, escrevendo: Todo ponto de reta graduada.....etc. etc.

Ao terminar sua explicação pede aos alunos que comentem sobre o que ouviram e o que vêem registrado no quadro.

A professora insiste;

 (CP)_ E então pessoal, alguma dúvida?

Ninguém responde

A professora brinca, provocando.

 (CP)_ Que maravilha ninguém tem dúvida?!

Dando prosseguimento a aula a professora colocou no quadro 13 propriedades dos conjuntos dos números reais e enquanto o fazia sempre estava a comentar e perguntar aos alunos se fazia sentido os resultados ou como chegar aos resultados. Após enunciar e provar algumas das propriedades, ela colocou no quadro o exercício:

Prove que $y \cdot 0 = 0$, sendo $y \in \mathbb{R}$

Um aluno comenta;

 (CA)_ isso não faz sentido, mas $0 \cdot y$ é convincente, pois $\underbrace{0 \times 0 \times 0 \times \dots \times 0}_{y \text{ vezes}} = 0$

 (CO)_ O aluno acima citado, segundo comentário da professora (em particular) é repetente e falta muita a aula, mas me pareceu bastante inteligente.

No segundo tempo da aula a professora começou a rever o assunto de Valor Absoluto e pergunta aos alunos o que é módulo? Como eles definiriam módulo? Mas

ninguém responde. Então ela diz: “se vocês preferirem dêem uma definição geométrica”.
Então um aluno responde:

 (CA) é a distância de x a 0?

A professora concorda com algumas ressalvas e logo em seguida escreve a definição no quadro, ela comenta que também dará uma **definição geométrica**, pois percebeu que os **alunos parecem preferir essa representação**.

Dando seguimento ao assunto de módulo a professora comenta que os alunos costumam não aceitar o fato que $|x| = -x$, pois não entendem como um número em módulo possa ser igual a um número negativo, chegou a dar um exemplo, nos contando que uma vez passou um bom tempo tentando explicar a uma aluna o significado do sinal, e que este tipo de situação não costuma ser fato isolado. E por fim explica que o sinal significa o oposto do número representado por x, pois se x representar um número negativo passara a ser positivo. Ao terminar o seu comentário ela coloca no quadro as propriedades de módulo, no total de dez proposições.

Destacarei aqui algumas delas, pelo motivo de algumas considerações dos alunos ter me chamado a atenção.

Propriedade (2): $|a|^2 = a^2$ e $\sqrt{a} = |a|$

Nessa propriedade a professora questiona:

$\sqrt{(-3)}$ pode ser 3? Pode ser -3? Alguns alunos respondem que sim. A professora diz que

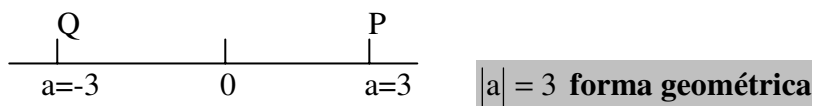
não, e explica dando a seguinte definição: $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x \end{cases}$

Na **Propriedade (4):** $a \leq |a|$, a professora pergunta é verdadeiro ou Falso? Um aluno responde:

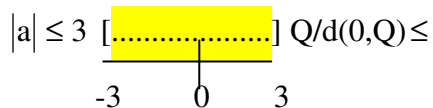
 (CA) é verdadeiro, dando a definição de módulo.

A professora diz é um caminho! Mas enfatiza que ele apenas definiu o valor absoluto do número o que não é o suficiente, e logo a seguir mostra o resultado utilizando as representações geométrica e algébrica.

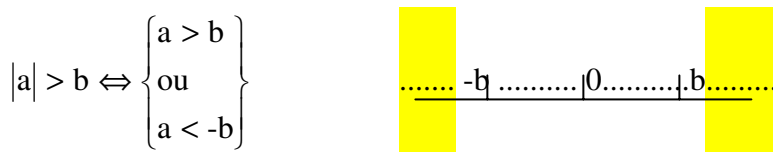
$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a : \text{neg.} \\ |a| : \text{pos.} \end{cases} \Rightarrow a \leq |a| \text{ forma algébrica}$$



Para provar a **propriedade (5)** $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$ a professora mostra um exemplo e usa uma representação geométrica para auxiliar os alunos na visualização do problema.



Repete esse mesmo processo para explicar a demonstração da **propriedade (6)**



Na **propriedade da desigualdade triangular** $|a + b| \leq |a| + |b|$ a professora pede aos alunos conjecturarem sobre os resultados dando valores para **a** e **b**. Ela chama a atenção que os sinais dos números influenciam no resultado, pois quando os sinais são positivos há uma igualdade e quando os sinais são opostos acontece a desigualdade.

Finalizando o assunto, a professora diz que as propriedades de módulo ajudam muito na resolução de alguns problemas e propõe um exercício:

Resolva em $\mathbb{R}$.

(a) $|x - 2| < 7$

(b) $|x - 2| > |x + 3|$

Dado o exercício a professora pergunta aos alunos o que é resolver em $\mathbb{R}$? diz para eles pensarem.

Resolução dos alunos:

Resposta de um aluno para a opção (a)

$$|x - 2| < 7 = -7 < x - 2 < 7 \xrightarrow{\uparrow} -7 + 2 < x - 2 + 2 < 7 + 2 \xrightarrow{\uparrow} -5 < x < 9$$

Correção da Professora:

$$|x - 2| < 7 = -7 < x - 2 < 7 \Leftrightarrow -7 + 2 < x - 2 + 2 < 7 + 2 \Leftrightarrow -5 < x < 9$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < 9\} = (-5, 9) =]-5, 9[$$



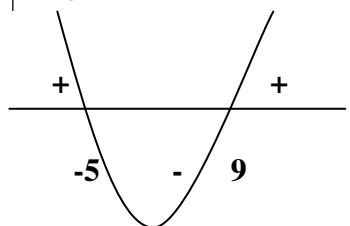
Resposta de uma aluna para a opção (b)

porquê? Pergunta a professora

$$\begin{aligned} |x-2| > |x+3| &\Leftrightarrow (|x-2|)^2 > (|x+3|)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 > (x+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-x^2) + x - 4x + 4 > (-x^2) + x - 6x + 9 \Leftrightarrow -4x - 6x > 9 - 4 \Leftrightarrow -10x > 5(-1) \Leftrightarrow 10x < -5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \\ S &= \left\{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Resposta da aluna: Porque são positivas.

Resposta de um segundo aluno para a opção (a) (outra forma de responder a questão)

$$\begin{aligned} |x-2| > 7 &\quad |x-2|^2 > 7^2 \\ x^2 - 4x + 4 > 49 & \\ x^2 - 4x - 45 > 0 & \end{aligned}$$


S=4 e P = -45

x' = 9 e x'' = -5

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < 9\}$$



1) Uma aluna a minha frente estava com um livro da Coleção Tendências - Filosofia da Educação Matemática, (será que eles estudam essa disciplina?)

2) A professora fala para os alunos da existência da Pós Graduação em Matemática e Educação Matemática. Fala da importância de futuramente fazerem um curso de Pós Graduação.

3) Indicação do livro: A professora diz que qualquer livro que trate do assunto que estão estudando serve, mas ela costuma usar o Livro de Swokowski Vol.1 (ela diz que o livro é mais light, e que esse é mais indicado para o primeiro ano (usando palavras da professora). Além dessa indicação ela escreve no quadro o nome de outros livros, alguns por sugestão dos próprios alunos.

H.L.Guidorizzi, Thompson, Geraldo Ávila(em algumas passagens o livro conta a história da Matemática), Leithold.

 **CO** No momento em que a professora fala do livro de Geraldo Ávila, citando o fato de introduzir passagens da história da matemática, dois alunos próximos a mim no fundo da sala riem, como se achasse tudo isso uma grande bobagem. 

OBSERVAÇÃO 3

Maria Margarete do R. Farias
3ª Observação Data: 27/03/2006

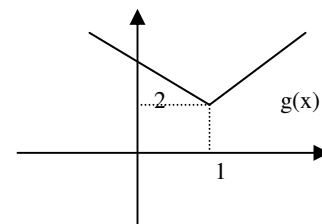
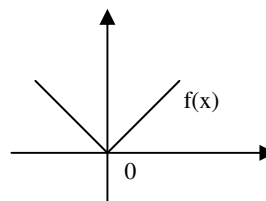
Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro
Hora: 8:00hs

 **CO** Hoje tentei chegar mais cedo, antes das 8:00 hs, na tentativa de conseguir uma maior aproximação com os estudantes. E foi o que aconteceu, usei a desculpa de me informar sobre as datas das provas e uma das alunas me perguntou quando eu iria começar a selecionar as pessoas para participar da minha pesquisa, eu respondi que provavelmente em junho começaria a conversar mais diretamente com eles. Fiquei contente com essa pergunta, pois ela me pareceu que estava interessada (Isso é bom, espero que outros também demonstrem interesse). Após uma breve conversa agradei e me dirigi a sala, pois a professora havia acabado de chegar.

A professora iniciou a aula falando da **função módulo**, escreveu dois exemplos no quadro com suas respectivas representações gráficas:

Exemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \underbrace{|x+1|}_y + 2$



Após a exposição ela pergunta:

 **(CP)** Qual a relação de $f(x) = |x|$ e $g(x) = \underbrace{|x+1|}_y + 2$ pensando graficamente.

Ninguém responde;

Então explica que houve uma translação no eixo Ox de (+1) e no eixo Oy de (+2), ou seja uma unidade para direita e duas unidade para cima.

Em seguida ela mostra a **função Menor Inteiro**, dando um exemplo:

Exemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = [x]$, onde $[x]$ = maior inteiro, menor ou igual a x .

 (CP) Alguém lembra o que significa esse colchete em x ?

Ninguém responde. A professora então enfatiza que realmente essa é uma função estranha, mas bastante útil quando aplicada ou modelada para estudar o nascimento de animais com gestações muito distantes da outra, por exemplo, as baleias. A professora também expôs no quadro o gráfico da função maior inteiro além de dar alguns exemplos com valores numéricos.

O próximo ponto a ser apresentado foi a **função Polinomial**. A professora apresenta a função e em seguida escreve a definição da função no quadro:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$$

$$\text{onde } \begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n \\ a_n \neq 0 \end{cases}$$

Em seguida pergunta aos alunos se $n=1$ como passará a se chamar a função especificamente? E se $n=2$.

 CO. Alguns alunos (aparentemente os veteranos) respondem dando a entender que não sentem muita dificuldade em reconhecer as funções afim, linear, quadrática e cúbica.

 (CP) essas funções serão amplamente exploradas durante todo o curso.

Terminada a revisão das funções Polinomiais, a professora começa a falar das **funções Racionais**, escrevendo no quadro a seguinte definição:

$$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0, p \text{ e } q \text{ sendo funções polinomiais. A seguir escreve o}$$

seguinte exemplo no quadro.

$$\text{Exemplo: } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x}{x}$$

A professora desmembra a função em duas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$ e $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}$, perguntando aos calouros, especificamente, se eles conhecem a função g .

 (CA) É a função inversa de x ?

 (CA₂)_ É a exponencial de x? parece a exponencial

 CO_ O comentário do segundo aluno surgiu depois que a professora registrou no quadro o gráfico da função g.

Para explicar a professora escreve:

$$x \rightarrow \pm\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad ; \quad x \rightarrow 0^+, \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad ; \quad x \rightarrow 0^-, \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

A professora pergunta aos alunos (aos calouros) se já conheciam a função com o nome hipérbole. Só um aluno responde que conhecia.

O último ponto da aula foi **Funções Trigonométricas**. Ela introduz o assunto perguntando:

 (CP)_ O que é ângulo para vocês

-ninguém responde.

A professora representa o gráfico no quadro

 (CA₁)_ Um aluno veterano, responde: é formado por duas semi-retas?

Antes de definir a função seno, a professora fala do ângulo θ mostrando uma relação com a geometria, chegando a alguns resultados: $\frac{C}{r} = \theta$ ou $C = \theta \cdot r$ e $\frac{C}{2r} = \pi$, pergunta:

 (CP)_ quem seria um ângulo de 1 radiano?

 (CA)_ aluno veterano acima citado, responde: $C = r$

Após algumas deduções comparando a relação do ângulo θ em radianos no triângulo e no círculo a professora define a função seno do ângulo θ . A professora também fala um pouco sobre a origem das notações **Sen**(θ) e **Co-sen**(θ) e pergunta aos alunos sobre o significado da notação **Co**. Um aluno responde:

 (CA₁)_ seria o complementar? A professora diz que sim.

Em seguida a professora mostra alguns resultados da função Seno e Co-seno do ângulo e através desse ela apresenta o gráfico das funções mencionadas. Feito o registro no quadro a professora pergunta:

 (CP)_ Como posso comparar em termos geométricos o **sen**(θ) e **-sen**(θ)?



(CA)_ O aluno veterano, acima referido, responde: O ponto $P = -Q$?(ele estava a olhar para o gráfico que estava no quadro).

Para explicar melhor ao aluno a professora usa as relações $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$ e $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ para explorar no gráfico e no círculo trigonométrico alguns resultados apresentados anteriormente.



(CA)_ O mesmo aluno veterano diz que: através dessas relação fica mais fácil entender a relação $\cos(\theta) = \text{sen}(90 - \theta)$.



(CO)_ Hoje houve uma discussão na sala sobre as relações citadas acima, o aluno que esteve a discutir com a professora afirmou que $\cos(\theta) = \text{sen}(90 - \theta)$ **representa uma translação no gráfico** . A professora, então, explica que essa igualdade não representa uma translação e argumenta no círculo trigonométrico marcando os ângulos θ e $\theta + \frac{\pi}{2}$, dizendo aos alunos que uma possível forma para provar a translação seria mostrar que os triângulos formados pelos arcos de seno e cosseno no círculo são congruentes. Para encerrar a aula a professora pede aos alunos para resolver o exercício:
Definir a função Tangente, escrever o seu domínio, construir o gráfico usando as variações do seno e do cosseno. 🔒

OBSERVAÇÃO 4

Maria Margarete do R. Farias

4ª Observação Data: 29/03/2006

Local:IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

A professora inicia a aula perguntando aos alunos sobre a resolução do exercício solicitado na aula anterior(27 de março).

Relembrando o exercício.

Definir a função Tangente, escrever o seu domínio, construir o gráfico usando as variações do seno e do cosseno.

Durante a resolução do exercício, a professora pergunta aos alunos;



(CP)_ Onde o x da tg não é real?

 (CA) _ Em $\frac{\pi}{2}$?

 (CP) _ Porquê?

 (CA) _ Porque em $\frac{\pi}{2}$ o Cos é 0

A professora confirma e acrescenta á resposta da aluna uma observação no quadro.

OBS. $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2}; \pm 3\frac{\pi}{2}, \dots \Leftrightarrow x = \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Após explicar o que foi exposto na lousa, a professora esboça o gráfico da função, usando as variações da função $\text{Sen}(x)$ e $\text{Cos}(x)$ fazendo algumas conjecturas;

 (CP) _ O que significa para vocês a notação $\frac{\pi^-}{2}$

 (CA) _ Inverso?

 (CA) _ Anti-horário?

 (CA) _ n tendendo a $\frac{\pi}{2}$ pela esquerda.

A professora confirma a resposta do aluno **(CA) 3 (aluno 3)** e explica aos demais o significado da notação dando um exemplo:

$$x \rightarrow \frac{\pi^-}{2} \rightarrow \cos(x) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{\cos(x)} \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{tg}(x) = \text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \rightarrow +\infty, \text{sen}(x) > 0 \text{ e}$$

$$x < \frac{\pi}{2}.$$

A professora mostra de modo análogo o resultado quando $x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}$. E conclui que

$$\text{tg}(x) = \text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = -\infty$$

 **CO.** A professora usa todo o tempo o círculo trigonométrico para ilustrar os resultados como também para construção do gráfico da tangente. Essa construção gerou algumas dúvidas na sala por parte dos alunos, notei que mesmo os veteranos bem como os calouros

sentem alguma dificuldade na construção dos gráficos e na interpretação das funções trigonométricas.

 (CP)_ A professora explica aos alunos que não há tempo hábil para mostrar a construção de todos os gráficos das funções trigonométricas e sugere que os alunos o façam como exercício de casa, e avisa que pode tranquilamente ser assunto de prova.

O próximo assunto dado hoje na aula foi **Função Exponencial**. Antes de definir a função a professora escreve um problema no quadro:

Problema: O crescimento de um animal.

Peso animal: W

A cada intervalo de tempo (pré- determinado) o animal adquire p% de acréscimo no peso.

Estágio inicial: w

Após o 1º. Intervalo: $w + \frac{P}{100} \cdot W = w \cdot (1 + \frac{P}{100})$

Após o 2º. Intervalo: $w \cdot (1 + \frac{P}{100}) + \frac{P}{100} [w \cdot (1 + \frac{P}{100})] = w \cdot (1 + \frac{P}{100}) [1 + \frac{P}{100}] =$

$$= w \left(\frac{1 + P}{100} \right)^2$$

Assim que escreve os dados do problema no quadro a professora comenta que por indução percebemos que , após o n-ésimo intervalo temos o peso dado por $w \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n = w \cdot q^n$, ou seja:

$$1 \longrightarrow w \cdot q$$

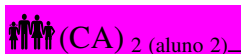
$$2 \longrightarrow w \cdot q^2$$

.....

$$n \longrightarrow w \cdot q^n$$

 (CP)_ Como chamamos essa relação?

 (CA) _{1 (aluno 1)} Série?



(CA) 2 (aluno 2)

Sequência? A professora confirma a resposta do aluno (calouro) e volta a perguntar;



(CP)

como vocês definiriam Sequência;

Sem respostas a professora define então o que é uma Sequência. E enfatiza que o motivo de ter citado o assunto foi para mostrar uma solução para o problema dado e explica que nenhum animal cresce por etapas. Em seguida sugere aos alunos para supor hipoteticamente a seguinte situação;



(CP)

Imaginemos o peso do animal dado por $w \cdot q^n$, $n \in \mathbf{Q}$, onde $n = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $q^n = q^{p/r}$

$$= \sqrt[r]{q^p}.$$

A professora ainda supõe;



(CP)

E se $n \in \mathbf{IR} - \mathbf{Q}$? Como calcular q^n , $n \in \mathbf{IR}$, ou seja, $n \notin \mathbf{Q}$?

Sem respostas, a professora mostra no quadro uma técnica matemática na qual utiliza o conceito de Sequências para encontrar um resultado aproximado quando queremos calcular a potência de um número irracional e enfatiza dizendo aos alunos que é um método muito utilizado na 7ª. Série do ensino fundamental para se calcular raiz quadrada de números irracionais e que é um método algébrico e que não há como representá-lo geometricamente, não há como visualizar.

Após a professora expor o problema do peso do animal, a professora passa então a definir **Função Exponencial de base q**. E pergunta aos alunos qual a sigla para exponencial? Qual a lei?

Sem respostas ela escreve no quadro a notação de exponencial e a lei da mesma.



(CP)

Por quê a base deve ser positiva?



(CA)

A raiz quadrada de número negativo não é definido em $\mathbf{IR}$.

Por fim a professora representa graficamente o gráfico da função exponencial no quadro, explicando as suas particularidades. E nesse sentido a professora pergunta;



(CP)

O gráfico da função toca o eixo Ox?



Houveram alguns comentários dos alunos (infelizmente não deu para ouvir direito), mas a maioria concorda que não, pois na imagem da função não tem o zero.

OBSERVAÇÃO 5

Maria Margarete do R. Farias

5ª Observação **Data: 03/04/2006**

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs



Hoje a professora iniciou a aula dando uma resolução de um problema apresentado na sexta-feira dia 31 de março (nesse dia não estive presente), ela identificou a resolução como **uma outra maneira de resolver**. O problema dado foi;

Seja $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Determinar A tal que f seja estritamente crescente

$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) > f(x_2)$.

A professora argumenta e enfatiza que em algumas passagens da resolução deste problema foi preciso provar alguns resultados, e logo em seguida escreve no quadro outro exemplo : $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x}$ afirmando que g é estritamente crescente e em seguida escreve a solução no quadro para todos verem.

Dando prosseguimento a aula a professora fala da **Função Inversa**, e antes de defini-la formalmente desenha no quadro um exemplo do gráfico de uma função que admite inversa.



A professora pergunta: qual é o papel da Inversa?



É o caminho inverso da função.

A professora confirma o comentário da aluna e expõe no quadro algumas restrições inerentes a esse tipo de funções, como por exemplo, duplicidades no gráfico e para tal a professora desenha alguns gráficos ilustrando essas limitações. Após a explicação a professora define a função Inversa, e em seguida a funções Injetora, Sobrejetora e Bijetora. Antes de definir a função Injetora a professora pergunta aos alunos:



Quem poderia definir o que é uma função Injetora?



(CA) Um aluno responde dando a seguinte **representação algébrica** $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$



(CP) Ok, mas, só é verdadeiro se f é função, caso contrário essa implicação nem sempre é verdadeira.



(CO) - Ao definir a função Injetora a professora escreve no quadro uma observação, onde menciona a teoria dos conjuntos para explicar a lógica da expressão $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ para chegar a equivalência $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Durante o desenvolvimento e deduções de alguns resultados na observação apresentada, a professora usa várias vezes as representações gráficas de funções para ilustrar esses resultados. Nessa perspectiva a professora pede aos alunos para provar que **se f é estritamente crescente então $f(x) = x^2 + 1$ é injetora**. Dado um tempo para que os alunos pudessem encontrar uma solução, a professora faz a chamada dos presentes.

Passado esse tempo a professora pergunta se alguém fez. Uma aluna responde que sim; Então a professora pede que ela venha no quadro mostrar como fez, mas a aluna se recusa; a professora então escreve a solução da aluna no quadro. A solução encontra-se no meu caderno de campo. p.25.



(CP) A professora comenta que essa é uma solução particular e que devemos encontrar uma solução genérica, então propõe que os alunos demonstrem para um caso geral.

No quadro ela demonstra para o caso de f ser estritamente crescente e informa que para f estritamente decrescente a solução é análoga. Nesse momento um aluno questiona;



(CA) Posso usar outro resultado? Se f é injetora f é estritamente crescente?



(CP) A professora diz BEM OBSERVADO, e sugere aos alunos que tentem dar uma resposta a essa pergunta, propondo como exercício para casa.

A seguir a professora pede que os alunos dêem alguns exemplos de função injetora. Um aluno dá o seguinte exemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$.

A professora pede que ele calcule a imagem dos números 2 e -2 , feito o cálculo o aluno percebe que $x_1 \neq x_2$ mas, $f(x_1) = f(x_2)$, logo f não é injetora. Nesse sentido ela pergunta:

 (CP)_ Posso transformar esse gráfico de modo a tirar a duplicidade?

 (CA)_ Olhar para o lado positivo?

 (CP)_ Certo, mas qual seria o domínio e o contradomínio da função agora?

Sem respostas a professora escreve o domínio e o contradomínio da nova função denotada por $g(x)$ do seguinte modo $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ e em seguida representa a função graficamente e conclui que a função g é injetora pois é estritamente crescente.

A professora ainda na mesma questão, conjectura;

 (CP)_ As funções f e g são iguais?

Alguns alunos dizem que não, pois seus domínios são diferentes.

Terminada a explicação a professora define a função sobrejetora, observando que $\text{Im}(f) \subset B$ é sempre válido por definição, onde $\text{Im}(f) = \{y \in B / y = f(x), \text{para algum } x \in A\}$ e nem sempre $B \subset \text{Im}(f)$ e ilustra essa afirmação com o exemplo: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, a seguir a professora **esboça o gráfico da função e argumenta que através dessa representação percebe que a função é sobrejetora, e sua imagem $\text{Im}(f) = [1, +\infty] \neq \mathbb{R}$, mas enfatiza que a representação gráfica não prova que f é sobrejetora.** Diante disso a professora questiona;

 (CP)_ Posso dizer que o conjunto dos reais não está contido na imagem?

 (CA)_ Se pegar para $x = -1$?

 (CP)_ Não vale, pois $-1 \notin D(f)$ e acrescenta; É comum o aluno confundir o que está ou não no domínio.

 (CA)_ Se mudar a função (Lei) com o mesmo contra domínio, ou seja $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 2$; a função é sobrejetora?

 (CP)_ qual seria a imagem dessa função? A aluna não responde. A professora então informa que a imagem fica $\text{Im}(h) = [2, +\infty]$, logo a função não é sobrejetora, pois não é inversível para todos os seus pontos.

Em seguida a professora define a função bijetora e pede aos aluno que dêem exemplos para ilustrar essa função, e volta a propor um novo exercício no qual pede para provar que $\text{Im}(f) = [2, +\infty]$ para a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2$.

 (CO)_ -A professora volta a lembrar que os exercícios estão sendo feitos pela metade, pois não provamos nada.

 (CP)_ Como provar que dois conjuntos são iguais?

 (CA)_ Provar que um está contido no outro e vice-versa.

 (CP)_ No exercício devemos então provar que $\text{Im}(f) \subset [2, +\infty]$ e $[2, +\infty] \subset \text{Im}(f)$?

 (CP)_ A professora pergunta diretamente aos calouros: Quem naturalmente já está contido no outro? O que significa que f está na imagem?

 (CA₁)_ Que $f(x)$ recebe uma correspondência

 (CA₂)_ Temos que provar que o 1°. Elemento de um conjunto é igual ao 1°. Elemento do 2°. Conjunto?

 (CP)_ Não, não precisa ter uma sequência.

Para terminar a aula a professora pede que os alunos respondam como exercício para casa, provar a segunda inclusão, já que em aula ela respondeu a primeira. Nesse momento um aluno pergunta:

 (CA₂)_ Devemos provar que f é contínua?

 (CP)_ Não é preciso, pois é possível provar sem falar em continuidade. 

OBSERVAÇÃO 6

Maria Margarete do R. Farias

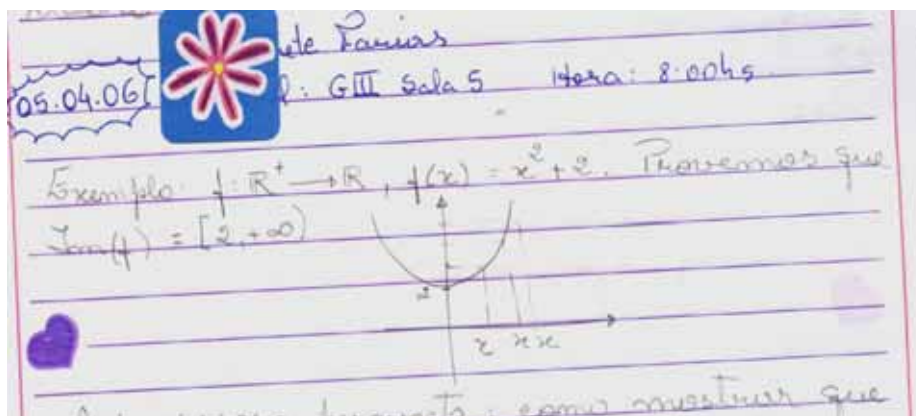
6ª Observação Data: 05/04/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

Hoje a professora iniciou a aula respondendo a segunda inclusão $[2, +\infty] \subset \text{Im}(f)$ do exercício de casa: **provar que $\text{Im}(f) = [2, +\infty]$ para a função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2$.**

 (CP) A professora pergunta: como mostrar que um dado número pertence a imagem? E dando ênfase á sua pergunta define: $\text{Im}(f) = \{y \in \text{CD}(f) / y=f(x) \text{ para algum } x \in D(f)\}$. Nesse momento a professora faz um rascunho buscando explicitar melhor a definição de imagem para o problema dado acima (vide , p.30-31) e em seguida pergunta aos alunos; a função f é sobrejetora?



A maioria dos alunos diz que sim, e um dos alunos confunde função injetora com função sobrejetora. Após ouvir os comentários dos alunos a professora informa que a resposta é não, pois $\text{CD}(f) = \mathbb{R} \neq \text{Im}(f) = [2, +\infty)$ e completa dizendo que é possível definir uma outra função $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow [2, +\infty)$ onde $g(x) = x^2 + 2$, desta maneira a função passa a ser sobrejetora.

 (CA) Toda função sobrejetora é injetora?

³Ícone que indica que certas anotações encontram-se em meu diário de campo.



(CP)

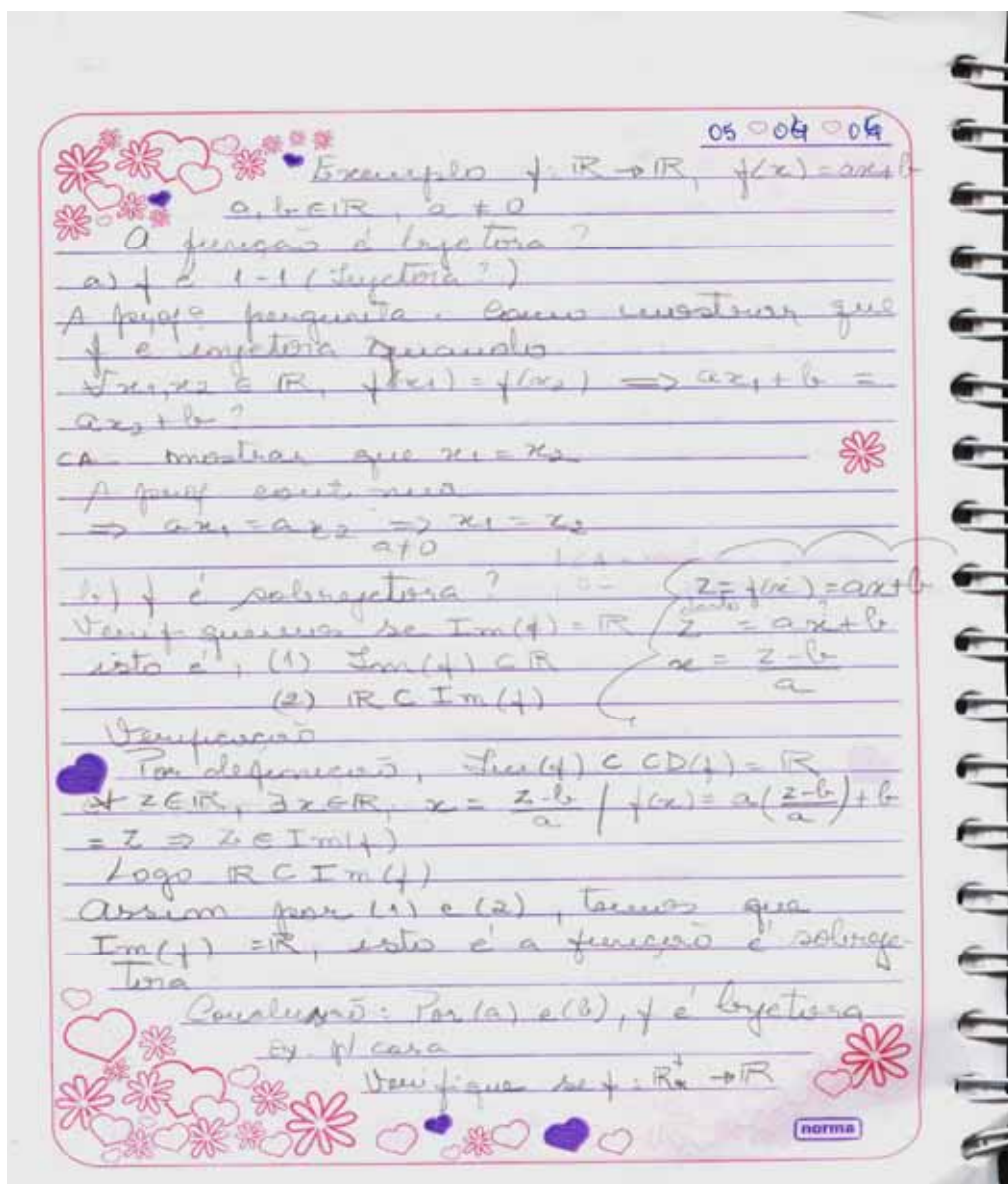
A professora explica que não e desenha no quadro o gráfico de uma função que é sobrejetora, mas não é injetora, o exemplo dado foi ; $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 2], f(x) = \sin(x)$.

Dando prosseguimento a aula a professora escreve um outro exemplo no quadro: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax+b$ sendo $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e pergunta se a dada função é bijetora explicando em seguida como resolver o problema, ela informa que primeiro devemos provar que a função é injetora e sobrejetora e então concluir a sobrejeção da função.



CO

- A resposta do dado problema está no meu caderno de campo  (p. 32).





(CP) A professora pergunta aos alunos, qual o meu interesse em estudar a função bijetora?



(CA) Para chegar a função Inversa.



(CP) Ok!

Para explicar o processo da função inversa a professora desenha no quadro um diagrama (vide  p. 33) e em seguida define a função.

33.

05/04/06

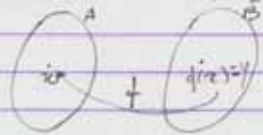
$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ é bijetora. Caso contrário, defina uma nova função que seja bijetora.

CP: (1991) Qual o meu interesse em estudar a bijetora?

CA: Para chegar a função inversa.

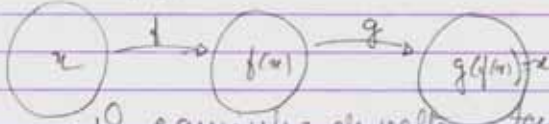
A profª define Função Inversa.

E para explicar o processo de inversa a profª desenha no quadro um abajourinho (para ilustrar o caminho da inversa).



Def: Dada uma função $f: A \rightarrow B$, bijetora, dizemos que uma função $g: B \rightarrow A$ é a função de f , se: $g \circ f = f \circ g = Id$.

Obs: $(g \circ f)(x) = Id(x) = x, \forall x \in D(f) = A$
 $(f \circ g)(x) = Id(x) = x, \forall x \in D(g) = B$



O caminho de volta para que volte.

A profª pergunta aos alunos o que vocês acham mais estranho no que está escrito no quadro.

CA: De primeira é complicado.

norma

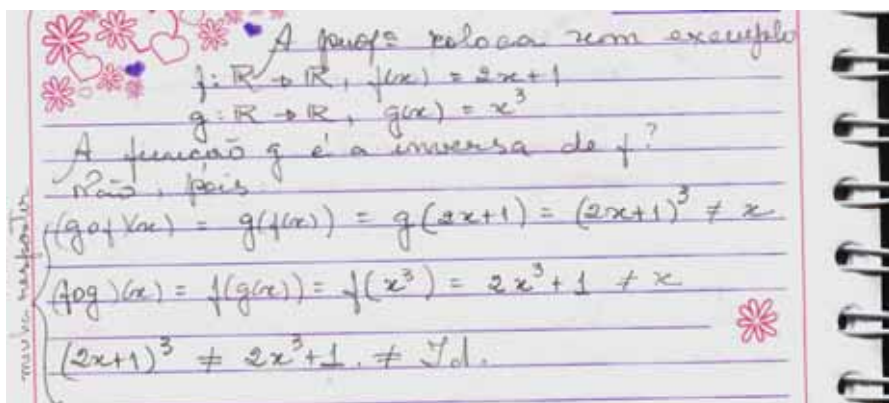


(CP)_ A professora, então, pergunta aos alunos; o que vocês acham de mais estranho no que está escrito no quadro?



(CA)_ Bem de início é complicado!

Nesse momento a professora coloca um exemplo no quadro $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3$, pedindo aos alunos que verifiquem se as duas funções apresentadas são inversas entre si. (cálculo, vide  p.34).



CO. Enquanto os alunos resolviam o exercício, a professora comenta que o bacharelado é muito difícil e que o aluno que sente dificuldade em entender certos procedimentos matemáticos deveria fazer Licenciatura, bem feita, e se possível fazer alguma disciplinas do bacharelado, mas se realmente decidir fazer o bacharelado deve ter cuidado para não perder tempo.



(CA)_ Um aluno interrompe a conversa da professora e pergunta; Se a função f é bijetora então a função g , inversa de f é bijetora?



(CP)_ Sim



(CA)_ então é condição necessária?



(CP)_ Não, é consequência.

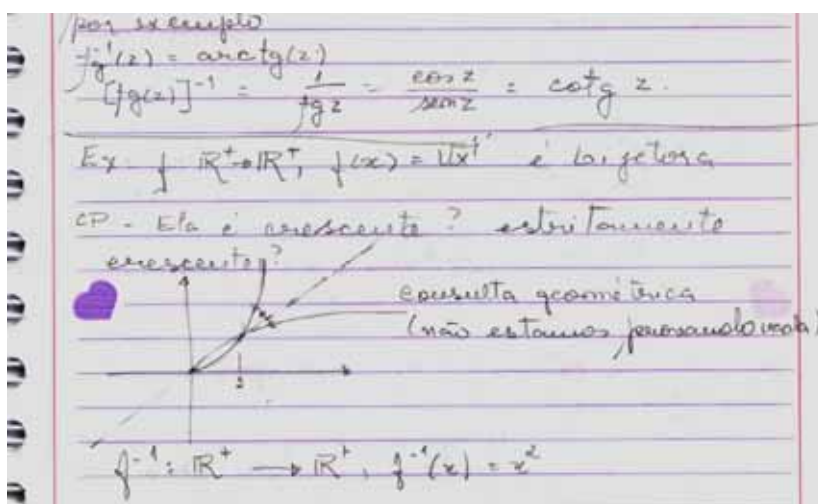
A professora aproveita a pergunta do aluno e sugere aos demais alunos que pensem sobre o assunto e tentem provar (para casa); **Se g for a função inversa de f prove que g é bijetora** tomando como base os registros das funções dadas no exercício anterior.

 (CP)_ Qual a necessidade da função ser bijetora? Porque a função deve ser bijetora para admitir função inversa? Pensem e tragam a resposta na próxima aula.

A professora faz uma observação:

 (CP)_ Não confundir certas notações, por exemplo; $f^{-1}(z)$ (função inversa) com $[f(z)]^{-1} = 1/f(z)$ (inversa do número) em seguida dá um exemplo para ilustrar a sua observação(vide  p. 35).

A seguir a professora escreve a seguinte função no quadro; $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ (bijetora), calcula a inversa da função f^{-1} e esboça o gráfico das duas funções no mesmo eixo cartesiano(vide  p. 35).



 (CP)_ O que vocês observam nesse esboço de gráficos?

 (CA)_ A simetria

 (CP)_ Quem é o espelho do gráfico?

 (CA)_ a reta

 (CP)_ Diante o comentário do aluno a professora escreve na lousa $y = x$ e diz que está fazendo uma consulta geométrica e que não está provando nada e em seguida pergunta: E geometricamente qual a propriedade posso deduzir? Ponto a ponto a distância de uma curva à reta tem que ser igual a outra reta? De acordo com esses questionamentos ela propõe aos alunos que eles podem provar essas questões usando a congruência de triângulos.

Ao falar da inversa das funções trigonométricas a professora inicia esboçando o gráfico do seno e diz que a função seno não é injetora e pergunta, é sobrejetora? Se sim, como fazemos para torná-la injetora?

 (CA)_ Limitamos a função a um determinado arco

 (CP)_ A professora responde: Ok! e dá o exemplo sen: $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$ nesse caso a

função é injetora, pois é estritamente crescente.

Dado o exemplo a professora volta a questionar; mas como provar que todo valor $[-1, 1]$ é imagem de alguém do domínio? Para a resolução desse problema a professora propõe aos alunos usar o ciclo trigonométrico.

Por fim a professora escreve no quadro a seguinte função arcsen: $[-1, 1] \rightarrow$

$$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

 (CP)_ O que significa trabalhar com arco seno no ponto 1?

 (CA)_ Significa; o arco cujo valor do seno é 1.

Para finalizar a aula a professora sugere aos alunos desenhar a imagem de arcseno junto a função seno e observar a simetria. 

OBSERVAÇÃO 7

Maria Margarete do R. Farias
7ª Observação **Data: 09/04/2006**
Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro
Hora: 8:00hs

Hoje a professora iniciou a aula mostrando uma curiosidade sobre o número neperiano “e”. A professora ao apresentar um exemplo comenta um pouco da história do número “e”. Ela comenta que esse número não é tão estranho como parece. Ela fala também da base de Naper $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^7$ lembrando da aula passada (sexta-feira) dizendo que

ele não tinha nem idéia da base “e” mas que ao falar de base exponencial ele chegou bem próximo dessa noção.

Em seguida a professora fala da função logaritmo neperiano e pergunta;

 (CP)_ Alguém sabe qual a notação do logaritmo neperiano?

 (CA)_ log?

 (CP)_ E a função inversa da função log neperiano? Alguém sabe?

 (CA)_ exponencial

A professora confirma a resposta dos alunos e escreve na lousa $f(x) = e^x$ e volta a perguntar se alguém lembra de alguma situação real na qual a função logarítmica pode ser aplicada. Ninguém responde e então a professora escreve um exemplo de crescimento populacional e desenha um gráfico para ilustrar esse crescimento.

 (CO)_ O crescimento apresentado refere-se hipoteticamente ao crescimento de São Paulo a partir da época de 1820 aproximadamente.

Nesse exemplo ela simula o estacionamento da população ao passar dos anos chegando até os dias de hoje e informa que esse fenômeno acontece devido à problemas vários como falta de espaço, violência entre outros.

A seguir a professora define o que é uma função algébrica é uma função transcendente, escrevendo alguns exemplos;

Definição: Dada que é um número finito de operações fundamentais da Álgebra.

Dada a definição a professora pergunta que tipo de função não cai numa operação básica?

 (CA)_ que possua raiz?

A professora exemplifica Ex: $f(x) = \sqrt{x}$

 (CA)_ a função $\log(x)$ é?

 (CA)_ funções trigonométricas?

A professora dando então prosseguimento a aula pergunta aos veteranos o que é uma função par?

 (CA)_ Uma função é par quando $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$.

A partir da resposta do aluno a professora define então a função comentada. Ela diz que todo gráfico da função par é simétrico em relação à reta $x = 0$ e esboça na lousa um gráfico ilustrando a dada definição. Terminando a sua explanação a professora pede a uma aluna para dar um exemplo de função par e ela responde;

 (CA)_ função módulo

A professora diz Ok e se dirige à toda sala e sugere aos alunos que dêem mais alguns exemplos.

 (CA)_ Função quadrática

 (CA)_ Função cosseno

Tomando como exemplo a última resposta a professora pergunta aos alunos se a função Co-seno é par em toda a sua extensão?

Para exemplificar melhor a sua pergunta a professora desenha na lousa o gráfico do Co-seno e diz;

 (CP)_ Olhando o círculo trigonométrico podemos investigar o valor dos ângulos x e $-x$ e perceber que os valores para imagem são os mesmos, logo a função Co-seno é par.

Nesse momento a professora pergunta, e a função Seno é par? A professora pede para os alunos olharem o gráfico comparando ao círculo trigonométrico e verificar que os valores da imagem para os ângulo x e $-x$ são opostos. Ela explica que a função Seno é ímpar e então define o que é uma função ímpar. A seguir a professora pede aos alunos para darem exemplos de funções ímpares.

Alguns alunos respondem;

 (CA)₁ $f(x) = x$

 (CA)₂ $g(x) = x^3$

 (CO)_ Para cada função citada pelo aluno a professora escreve o domínio e esboça o gráfico informando aos mesmos que uma função é ímpar quando é simétrica a origem.

A partir dessa fala a professora inicia o assunto Função Limitada, perguntando aos alunos se eles poderiam dar um exemplo de função limitada. Um aluno dá o seguinte exemplo;

 (CA) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, pois não ultrapassa o eixo x.

A professora diz que não é uma resposta adequada, pois o motivo para ser limitada não tem a ver passar o eixo, o que temos na verdade é olhar se a função é limitada no seu domínio e escreve um exemplo na lousa esboçando o gráfico da função $|x|$. A professora explica que a dada função é limitada na origem e ilimitada para valores maiores que zero.

Aproveitando a noção de limitada a professora escreve a notação $-N \leq f(x) \leq M$ e a representa geometricamente, a seguir ela mostra outra notação $-N \leq f(x) \leq N$ e pergunta o que difere da notação anteriormente apresentada?

Como ninguém responde, ela explica que o valor M é maior em valor absoluto e que para simplificar alguns resultados podemos trabalhar num intervalo simétrico, tomando $-N \leq f(x) \leq N$, desprezando os valores que estão entre N e M na reta. Nesse momento uma aluna pergunta;

 (CA) E na hora de construir o gráfico não tem problema desprezar esses valores?

 (CP) Os valores estarem representados no gráfico ou não depende de como está definida a função. Por fim a professora escreve na lousa a definição de função limitada.
Definição: É uma função f denotada quando $\exists N > 0 / |f(x)| \leq N, \forall x \in D(f) \Rightarrow -N \leq f(x) \leq N, \forall x \in D(f)$.

Nesse momento a professora dá um pequeno intervalo para a chamada de presença dos alunos e coloca na lousa algumas definições para os mesmos completarem.

Def. Uma função f é limitada inferiormente quando:

 (CA) $\exists N > 0 / f(x) \geq N, \forall x \in D(f)$

Def. Uma função f é limitada superiormente quando:

 (CA) $\exists N > 0 / G(x) \leq N, \forall x \in D(G)$

 - Durante o intervalo, houve um momento de descontração e alguns alunos aproveitaram para tirar as dúvidas com a professora sobre a função limitada.

Segundo a professora uma aluna perguntou se na definição é preciso sempre explicitar o domínio escrevendo $\forall x \in D(f)$ (por exemplo). Então ela responde;

 (CP)_ Sim, pois isso mostra que é válido para todo x do domínio.

Dois alunos comentam da resposta da aluna, onde ela coloca $N > 0$, ao completar as definições expostas no quadro para serem completadas, perguntam se é necessário explicitar que o valor N é sempre positivo?

A professora diz que é uma boa observação e responde que nem sempre o N é positivo, e no caso das definições pedidas para serem completadas a notação deve ser escrita como $N \in \mathbb{R}$ e ilustra o fato, mostra um exemplo desenhando um gráfico na lousa. O exemplo dado é o da função exponencial, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$. Ela então escreve algumas características da função:

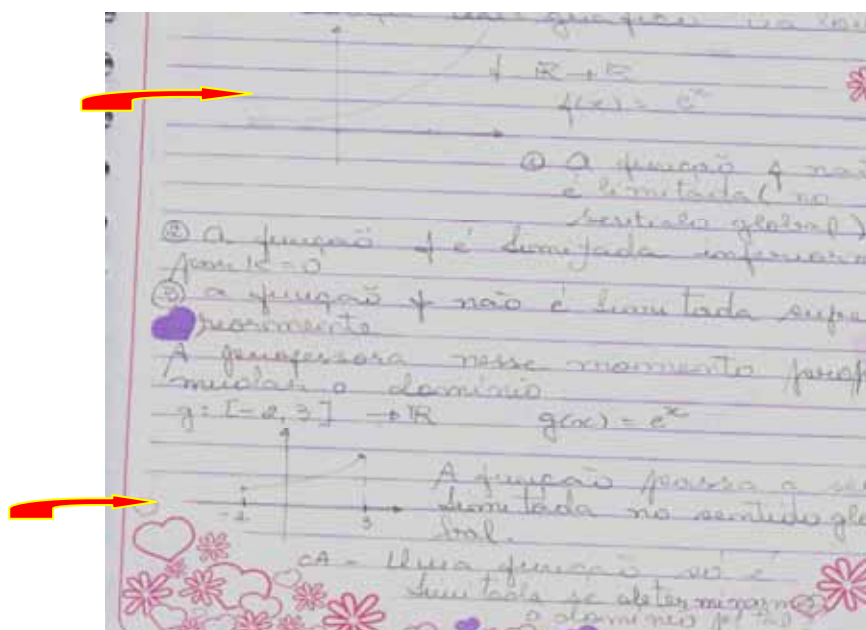
(1) A função f não é limitada (no sentido global)

(2) A função f não é limitada superiormente.

A professora então a partir desses dados propõe aos alunos fazer uma pequena investigação, mudando o domínio da função para $g: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$. Nesse caso a professora explica que a função passou a ser limitada no sentido global. Nesse momento um aluno pergunta;

 (CA)_ Uma função só é limitada se determinarmos o domínio para tal?

 (CP)_ Vocês alunos tem que entender a definição de uma forma ampla e não se apegar a detalhes dos exemplos. E para ilustrar o que diz a professora desenha um gráfico, cujo domínio é $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e diz ser limitada (vide gráfico  p. 45).



A seguir a professora escreve na lousa o seguinte resultado: **Uma função f é limitada, se for limitada inferiormente e superiormente.**

Para finalizar a aula a professora pede para os alunos trazerem na próxima aula a resposta do exercícios:

- 1) $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^4 - 2x}$, verifique se f é par, ímpar, ou nenhum desses casos.
- 2) Existe função par e ímpar simultaneamente?

 (CP) Quero uma prova algébrica, pois não é somente enxergar. Visualizar é importante, mas não prova nada. 

OBSERVAÇÃO 8

Maria Margarete do R. Farias
8ª Observação **Data: 12/04/2006**
Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro
Hora: 8:00hs

Hoje a professora iniciou a aula, perguntando aos alunos se responderam o exercício 2 da aula anterior. Um aluno responde que sim e vai ao quadro mostrar como fez a demonstração.

Função Par: $f(x) = f(-x) \forall x \in D(f)$

Ímpar: $f(x) = -f(-x) \forall x \in D(f)$

f : par é ímpar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = 0, \forall x \in D(f) \Leftrightarrow f \equiv 0$ (função nula), para ilustrar o aluno esboça o gráfico de $f(x) = 0$.

Olhando a resposta do aluno, a professora faz uma observação: Notar que o único número real que é igual ao seu posto zero.

Ao término da apresentação da resposta do exercício, a professora começa então o assunto LIMITE De UMA FUNÇÃO. e inicia perguntando;

 (CP) Dada uma função $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a medida em que x se aproxima do número “ a ” será que $f(x)$ se aproxima de algum número real L ?



A professora começa o assunto de limite com essa pergunta, o que ao meu ver expressa o cuidado que tem ao abordar algumas expressões como vizinhança e proximidade de valores a um determinado ponto. Ela começa dando exemplos, destacando o domínio da função e tendo como base a questão da vizinhança determina o limite de cada função exposta na lousa.

Para responder a essa pergunta a professora propõe aos alunos a resolução de alguns exemplos, e na resolução dos mesmos tem sempre o cuidado de destacar o domínio de cada função, onde faz simulações de aproximações de valores em pontos destacados no domínio.

Eu um dos exemplos apresentados a professora pede que alguém vá ao quadro dar a solução. Um aluno dá a seguinte resposta para o dado problema:

$$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}; \text{ calcular, se existir, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$



me parece que muitos fizeram a questão, mas sentem-se inseguros quanto ao resultado encontrado, digo isso pelas respostas dada a professora quando questionados.

RESP. do aluno.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1/2)}{(x-2)(x+1/3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1/2}{x+3/5}$$

Aqui a professora chama a atenção do aluno sobre o erro na fatoração, explicando que se ele tentar retornar a função original multiplicando entre si ambas as parcelas tanto no numerador como no denominador, ele não vai conseguir chegar a função de origem.

O aluno então considera a observação da professora e então corrige o resultado anterior, multiplicando o número 2 às parcelas do numerador e número 5 às parcelas do denominador, ficando da seguinte forma.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x-1/2)}{5(x-2)(x+1/3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1/2}{x+3/5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3/2}{13/5} = \frac{3}{13}$$

Assim que o aluno termina a correção, ele pergunta à professora;



(CA) Professora que hora a notação de limite desaparece?



CO _A partir dessa pergunta é desencadeada uma discussão na sala, onde é notável a dificuldade dos alunos em entender o processo de tratar a função, para encontrar o valor do limite.

Diante de tantas dúvidas a professora responde;



(CP) _ Vamos lembrar dos exemplos dados anteriormente, onde a função não está definida em um determinado ponto, a impressão que temos é que no gráfico vai existir um enorme buraco, mas na verdade isso não acontece, pois ao tratar a função a expressão passa a ser definida no ponto, ou seja, as aparências enganam e quanto ao momento de parar para usar a notação é justamente quando vocês conseguem fazer a transformação da função tirando a indeterminação nos pontos não definidos na função.

Dando prosseguimento a aula a professora pede aos alunos veteranos para definirem em suas palavras o conceito do Limite de uma função. Escrevendo na lousa;

O limite de f é L , quando x tende a “ a ”, se...

_ Ninguém responde.



CO _Noto que mesmo os veteranos, que de alguma forma já viram o assunto, ainda não assimilaram a concepção do que significa vizinhança de um número, raio de aproximação, o uso dos símbolos na definição entre outras.



(CP) _ Falar de vizinhança é estranho para vocês?

Ao definir limite formalmente, a professora fala do termo vizinhança e com muito cuidado vai registrando no quadro o conceito de limite, explicando passo a passo cada símbolo e expressão que aparece.



CO _A professora define limite de duas formas, algebricamente e na linguagem natural, articulando-as entre si e para ilustrar ela retorna a um dos exemplos dados: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{3x-1}{2}$ e esboça o seu gráfico na lousa, ilustrando a aproximação a um determinado número x , onde explica o que acontece com o limite da função.

Ao final da aula ela pede aos alunos para provar que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x-1}{2} = \frac{11}{2}$

OBSERVAÇÃO 9

Maria Margarete do R. Farias

9ª Observação Data: 17/04/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

A professora inicia a aula lembrando a aula de quarta-feira passada (dia 09 de abril), desenhando um gráfico para explicar a idéia de limite. Faz uma importante observação a respeito da definição. Ela enfatiza que δ (delta) depende de ε (epsilon) e de “a”.

_No desenho exposto na lousa (vide gráfico ⁴p.56)

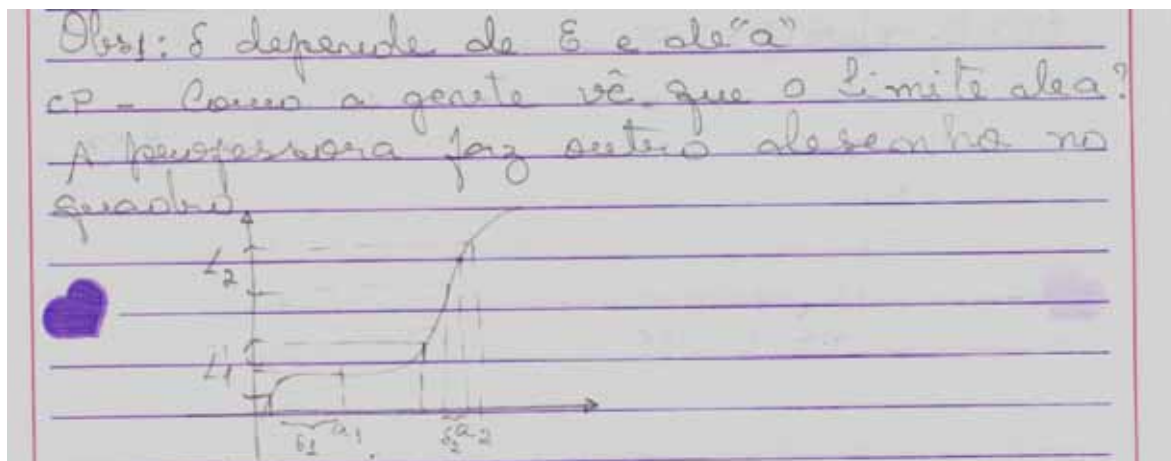


Ilustração Diário de Campo.p.56

A professora mostra que o fato de δ depender de “a” pode ser verificado em sua posição no gráfico. Ela explica que se a imagem de “a”, ou seja, o limite L da função quando x tende a “a” estiver projetado em um ponto do gráfico em que a função tem pouca inclinação o valor do ε no intervalo tende a ser grande (a aproximação a L , tende a ser mais demorada) se tomarmos um intervalo próximo a L , ou seja, se o limite L da função quando x tende a “a” estiver projetado em um ponto do gráfico em que a função tem grande inclinação o valor do ε tende a ser pequeno (a aproximação a L , tende a ser mais rápida), isto é, se tomarmos um intervalo próximo a L .

⁴ Diário de Campo

Ainda relembrando a aula anterior, a professora faz outra observação, diz que nem sempre vale a seguinte frase: $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 / \forall x \in D(f), 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ e para ilustrar o fato a professora dá o seguinte exemplo e em seguida esboça o gráfico na lousa, explicando que para o intervalo entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ a função é projetada para qualquer valor real, logo não existe um intervalo correspondente a ε . A função dada pela professora foi a seguinte;

Ex: $f: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{tg}(x)$, $a = 0$ e $f(0) = 0$ (vide gráfico  p. 57)

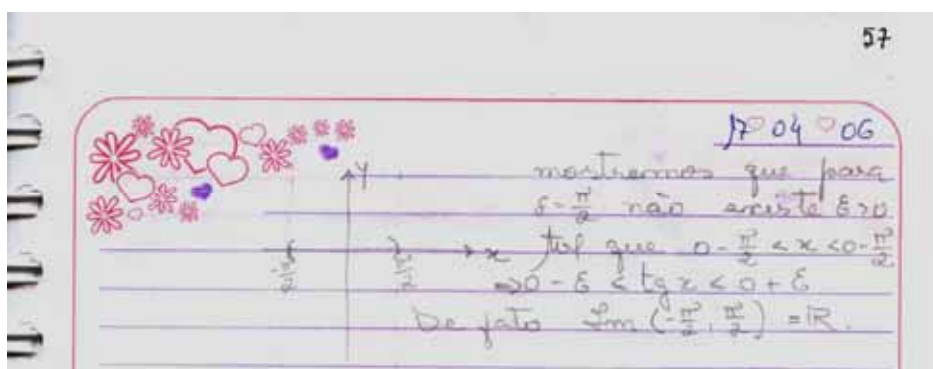


Ilustração Diário de Campo p.57

 (CA)_ Se tomássemos outro raio, por exemplo, $\pi/4$, seria possível encontrar um ε ?

 (CP)_ sim, pois $x = \pi/4$ está definido no domínio da função, encontramos um ε embora corresponda a um intervalo grande.

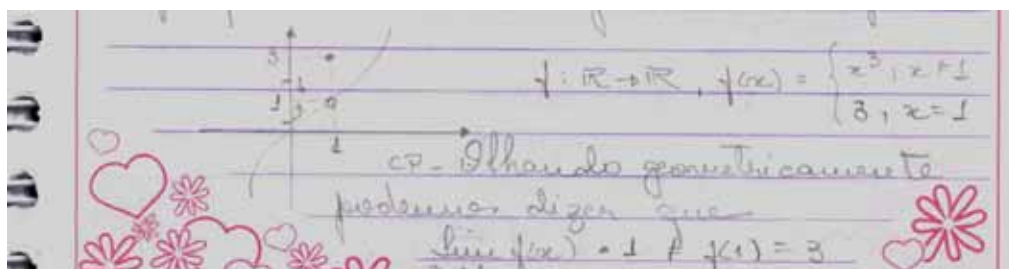
Dando prosseguimento a aula, a professora pergunta aos alunos;

 (CP)_ porque eu coloquei na definição de limite $0 < |x - a|$? Vocês se lembram do que eu disse na aula passada sobre isso?

_ Ninguém responde.

 (CP)_ Bem, só lembrando [...] o motivo foi porque a função f não precisa estar definida em $x = a$, isto é, $|x - a| \neq 0$, ou seja $0 < |x - a|$, quer dizer não precisamos necessariamente verificar a função no ponto “a”.

Para explicar melhor a sua resposta, a professora coloca no quadro o exemplo de uma função f e pergunta aos alunos qual o limite de $f(x)$ quando x tende a 1? A seguir ela esboça o gráfico da função (vide gráfico  p.57) falando que ;



 (CP) Olhando geometricamente qual o limite de $f(x)$ quando x tende a 1?

Um aluno responde e diz que é 3, a professora corrige explicando que ele deve olhar para vizinhança de 1 e que nesse caso o limite é o número 1. E escreve na lousa a lei da função em estudo;

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases} \text{ mostrando que } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 3$$

Em um outro exemplo a professora esboça o gráfico de uma função (vide gráfico  p.58) e pede aos alunos que fale qual é a lei que representa o gráfico.

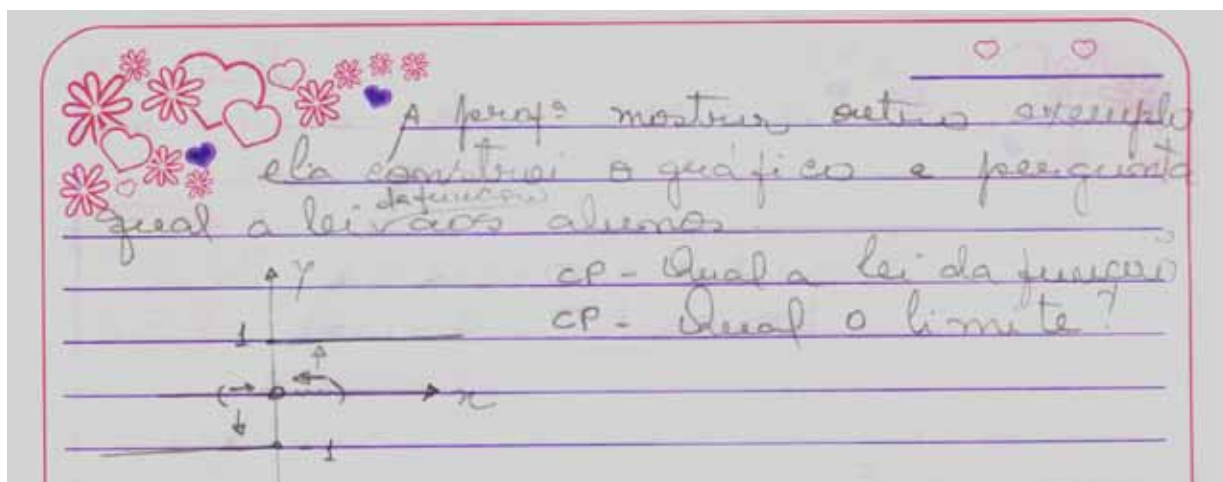


Ilustração do Diário de Campo p.58

Uma aluna arrisca um palpite e a professora completa escrevendo a lei da função na lousa:

$$F: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

A seguir a professora, pergunta:

 (CP) Qual o limite de F ?

Um aluno responde que não existe o limite.



Aqui nesse exemplo dá-se a impressão que a professora pretende introduzir a noção de limite lateral.

Seguindo com a aula a professora pergunta aos alunos como provar que o limite é único?



(CA) propor a existência de dois limites e provar que são iguais.

De acordo a resposta do aluno, a professora coloca na lousa um teorema onde pede para mostra que se **existir limite de $f(x)$ quando x tende a “a”, então ele é único.**

A professora mostra aos alunos como demonstrar esse teorema e como muito cuidado vai explicando os passos de cada resultado encontrado.

A professora pede também que se prove as seguintes propriedades:

b.1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$

b.2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = L.M$

b.3) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$, desde que $g(x) \neq 0$, $M \neq 0$.



A professora demonstra b.1 e explica que não vai demonstrar b.2 e b.3 por não haver tempo.

Ao finalizar a aula a professora pede aos alunos para provar a seguinte propriedade:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$; $c \in \mathbb{R}$, prove que limite de $f(x)$ quando x tende a “a” é c.

OBSERVAÇÃO 10

Maria Margarete do R. Farias

10ª Observação Data: 26/04/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

A professora ncia a aula dando alguns recados e logo em seguida pede aos alunos que façam uma discussão dos exercícios de limite deixados como problemas de casa. Como ninguém se apresentou para ir ao quadro, a professora decidiu apresentar algumas soluções para os exercícios propostos.

Ao resolver o exercício 4 (vide p.61), a professora pergunta:

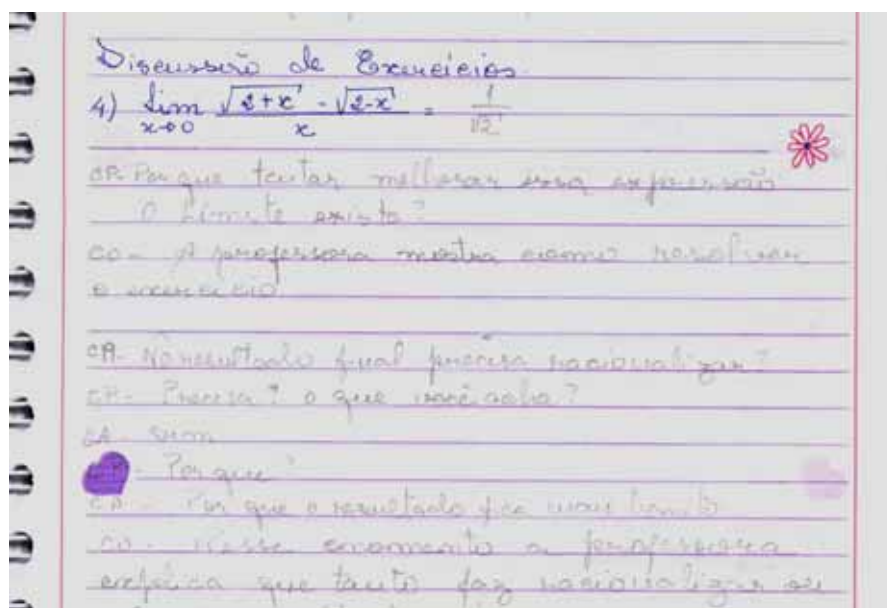


Ilustração Diário de Campo p.61

 (CP)_ Por quê tentar melhorar essa expressão? O limite existe?

 (CA)_ No resultado final, precisa racionalizar?

 (CP)_ Precisa? O que você acha?

 (CA)_ Sim.

 (CP)_ Porquê?

 (CA)_ Há, porque o resultado fica mais bonito.

A professora explica a aluna que tanto faz racionalizar ou não, pois o resultado não se altera.

Finalmente após resolver os exercícios propostos, a professora mostra cinco propriedades de limites e demonstra três deles.

Na prova da propriedade 2 (vide  p.63) a professora comenta:

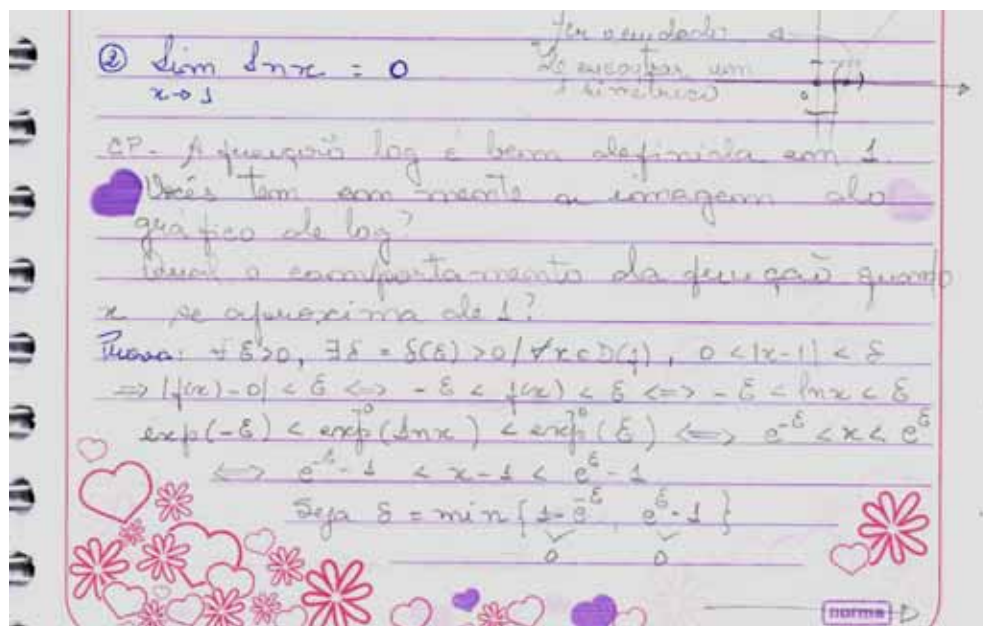


Ilustração Diário de Campo p.63

 (CP) A função log é bem definida em 1, vocês tem em mente a imagem do gráfico de log? Qual o comportamento da função quando x se aproxima de 1?

Feita essas perguntas a professora inicia então a demonstrar a propriedade articulando a s explicações entre a figura do gráfico da função log e os sinais utilizados na prova do resultado 2. Ao final comentou;

 (CP) O desenho ajuda na compreensão, mas não prova nada. Provar só algebricamente. Embora o exercício de demonstrar pareça chato, serviu para relembrar propriedades de log, exponencial e desigualdade de funções.

Finalizando as provas dos resultados mencionados acima, a professora encerrou a aula. 

OBSERVAÇÃO 11

Maria Margarete do R. Farias

11ª Observação Data: 03/05/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

A professora inicia a aula resolvendo os exercícios propostos na última aula.

Nessa aula a professora apresenta aos alunos o teorema da existência do limite e introduz algumas definições de limites infinitos e no infinito, vale lembrar que ela não denotou especificamente os limites, apenas comentou o comportamento da função e ao mesmo tempo em que enunciava cada limite solicitava aos alunos que exemplificasse cada um deles com representações de gráfico de funções.

Após o enunciado de cada limite de função que crescem e decrescem indefinidamente ou de funções que tendem a um determinado valor em “y” quando x cresce ou decresce indefinidamente, a professora falou da função limitada e articulou essa noção com a noção de limites infinitos e no infinito. Alguns comentários a esse respeito foram feitos em sala de aula;

 (CP)_ Quando uma função é limitada? $|f(x)| \leq M$

 (CA)_ $f(x) = \sin(x)$

 (CP)_ Sim é um exemplo, mas vamos extrapolar isso. Aproveitando a discussão a professora aproveitou para explicar como se nega uma função limitada.

Dando prosseguimento a aula a profa propõe aos alunos um exercício (vide  p. 70). Na resolução do mesmo, os alunos ficam com dúvidas e discutem entre si sobre a questão;

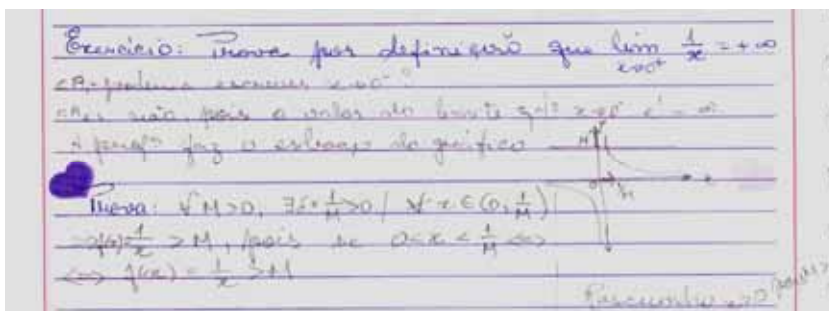


Ilustração do Diário de Campo p.70

 (CA₁)_ poderia escrever $x \rightarrow 0^-$?

 (CA₂)_ Não, pois o valor do limite quando $x \rightarrow 0^-$ é $-\infty$.

Para esclarecer aos alunos sobre o desenvolvimento do exercício a professora esboça o gráfico da função dada no problema enquanto faz a resolução do mesmo, a professora volta a falar com ênfase: Os desenhos servem apenas para compreender o comportamento do limite, mas não serve para provar ou validar o fato, a prova é através da definição algébrica.

 CO Vale ressaltar que a professora ao provar o resultado do exercício, esteve todo o tempo fazendo a articulação entre a representação algébrica e a representação gráfica, além é obvio da oralidade e escrita. 

OBSERVAÇÃO 12

Maria Margarete do R. Farias
12ª Observação **Data: /04/2006**
Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro
Hora: 8:00hs

Nessa aula a professora mostra alguns exemplos de limites indeterminados (vide  p.71) propondo alguns questionamentos:



Ilustração do Diário de Campo p.71

 (CP) Qual a sugestão para terminar o exercício?

 (CA) Um dos fatores é 1

 (CP) O Cezar percebeu que 1 é raiz, logo podemos decompor a equação. Ao fazê-lo a professora enfatiza a técnica para caracterizar a indeterminação do limite. (vide  p.71).

A seguir a professora apresenta aos alunos um teorema e as provas de alguns limites fundamentais (vide  p.72)

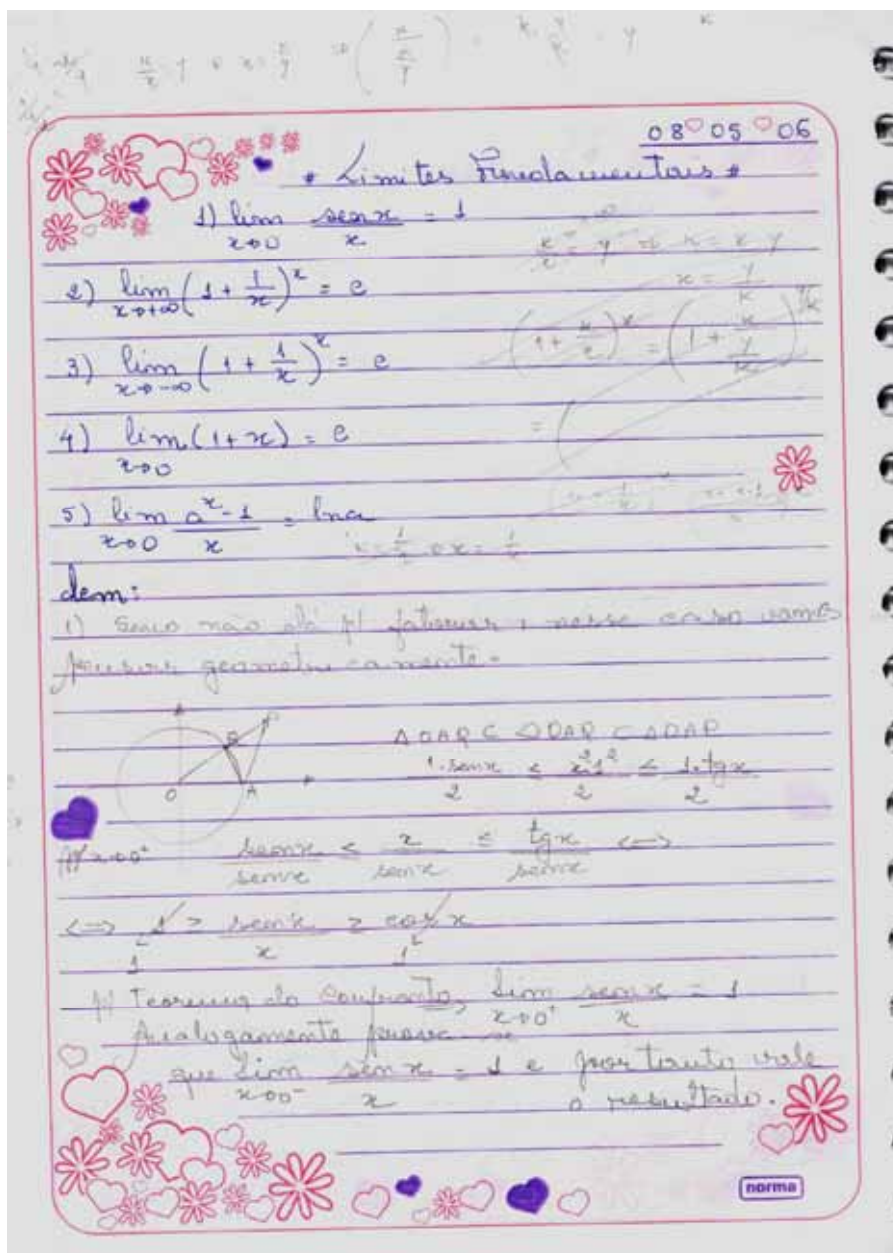


Ilustração do Diário de Campo p.72

👤📖 CO Nas demonstrações mencionadas acima (as quais tomaram todo o tempo da aula), nota-se a presença maciça das representações algébricas. 🧮

OBSERVAÇÃO 13

Maria Margarete do R. Farias

13ª Observação Data: 15/05/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

A professora introduz a aula comentando a 1ª. prova da disciplina realizada no dia 13.0. Após breves comentários a profa prossegue a aula falando de **continuidade de funções**. Antes de dar uma definição formal a professora pede aos alunos que dêem exemplos de funções contínuas;

 (CA₁)_ Função constante;

 (CA₂)_ $f(x) = x$?

Nesse momento a professora pergunta se funciona para todas as funções afins? Os alunos respondem que sim.

Para esclarecer a questão da continuidade a profa. propõe um contra exemplo, a saber a função tangente. Após mostrar que no domínio da função tangente há saltos em determinados pontos, a professora ilustra a descontinuidade de funções com exemplos aleatórios de vários gráficos que apontam pontos não definidos no domínio, a não existência de limite bem como a existência do limite mas não tendo o mesmo valor do ponto na função. A partir dessa introdução a professora apresenta aos alunos a definição formal de continuidade em um determinado ponto, bem como todas as particularidades inerentes a esse tema. Após a explanação da definição e de alguns teoremas, entre eles o da completude dos números reais, a professora propôs aos alunos a resolução de alguns exercícios referentes ao tema exposto.

Em um dos exercícios o aluno Rafael foi ao quadro responder (vide  p.66 - 70). A professora então fez o seguinte comentário;

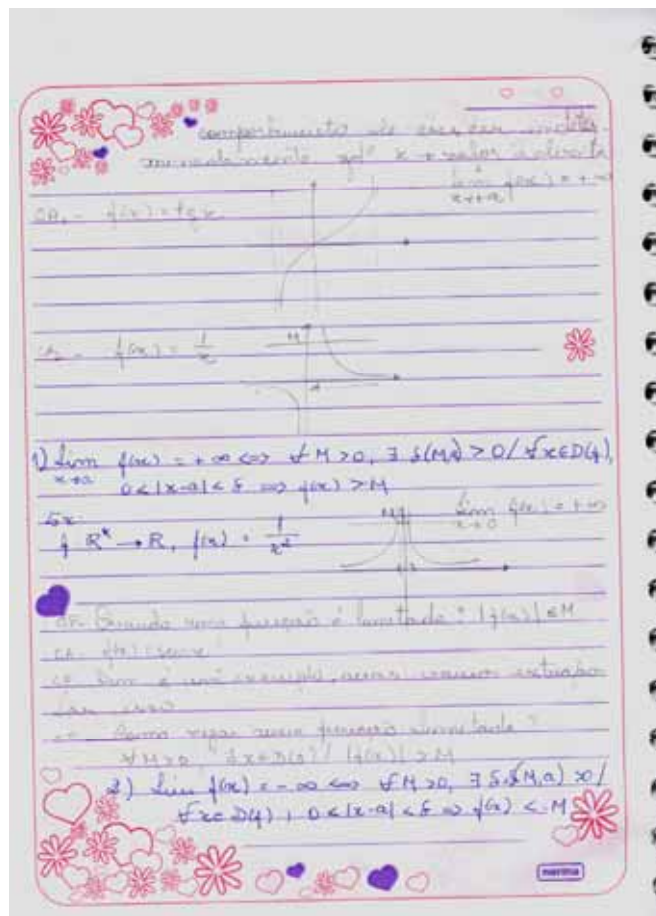


Ilustração do Diário de Campo p.68

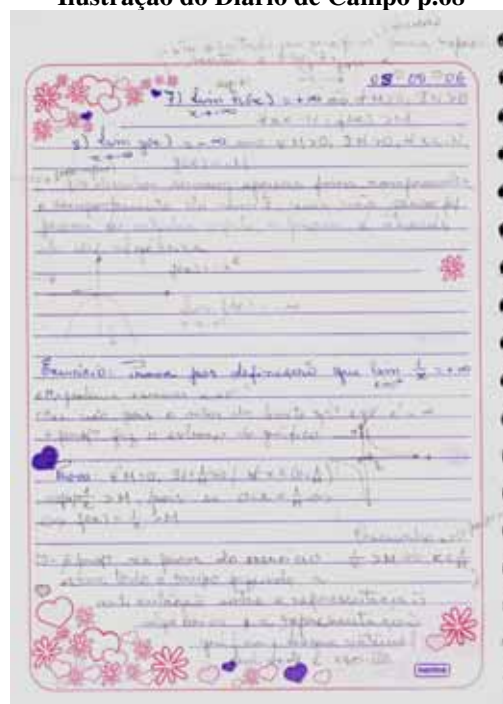


Ilustração do Diário de Campo p.69

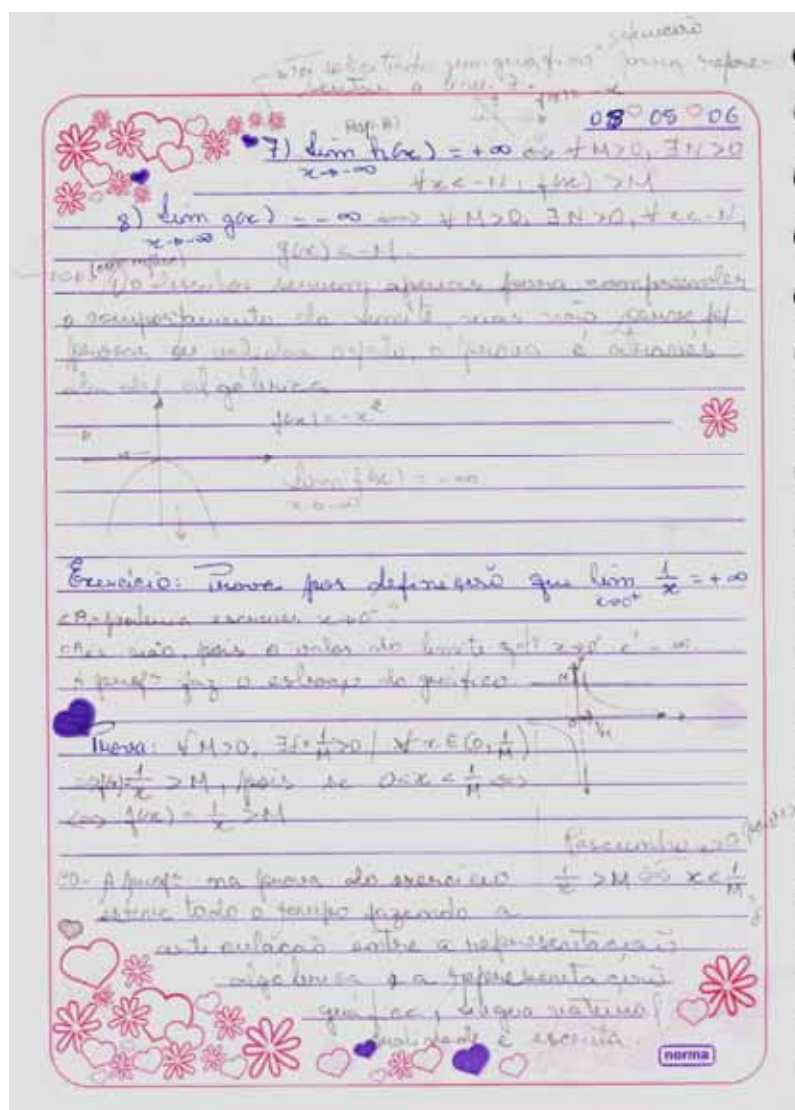


Ilustração do Diário de Campo p.70

 (CP) Como rascunho está bom, deveria escrever um pouco mais.

 CO - Em minha concepção, percebo que o aluno expõe no quadro apenas um procedimento sem justificativas, o que foi notado pela professora, tanto que ela comenta que para rascunho serve, mas não aceitaria como resposta em uma prova.

Ao finalizar a aula a prova coloca no quadro uma lista de funções contínuas, tais como funções afim, polinomiais entre outras. 

OBSERVAÇÃO 13

Maria Margarete do R. Farias

14ª Observação Data: 17/05/2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00hs

Nessa aula a professora continua a falar do mesmo assunto da aula anterior, Continuidade de funções em um ponto, falando especificamente da redefinição de função, transformando-a em uma função contínua, no caso da descontinuidade ser removível, em caso contrário a função terá uma descontinuidade essencial, ou seja, não existirá o limite da função. Para ilustrar o fato a professora expõe no quadro alguns exemplos de funções que comportam essas características. Dando prosseguimento a aula a profa demonstra alguns teoremas que abordam o tema continuidade, entre eles o teorema do Valor Intermediário. vide  p.81 - 85).

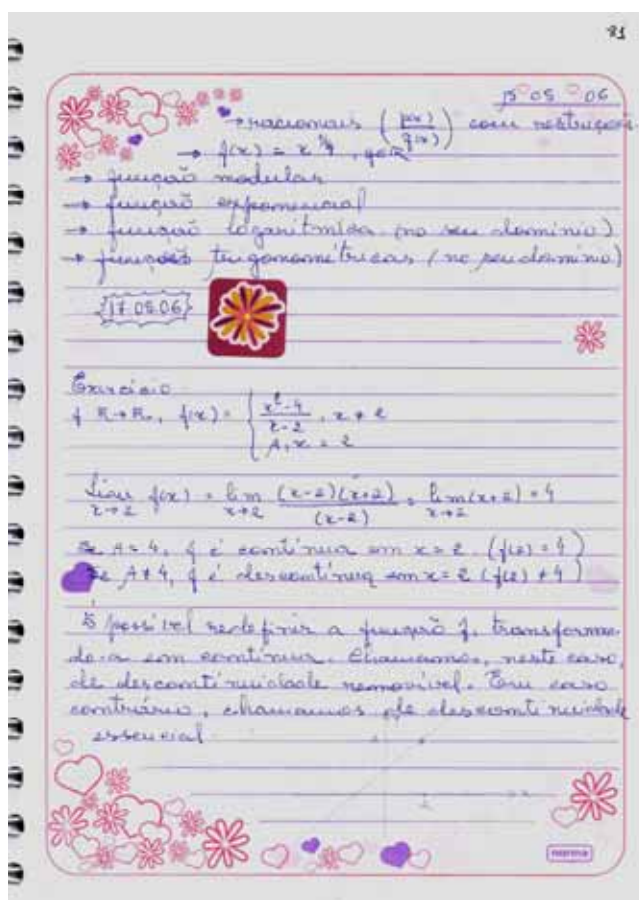


Ilustração do Diário de Campo p.57

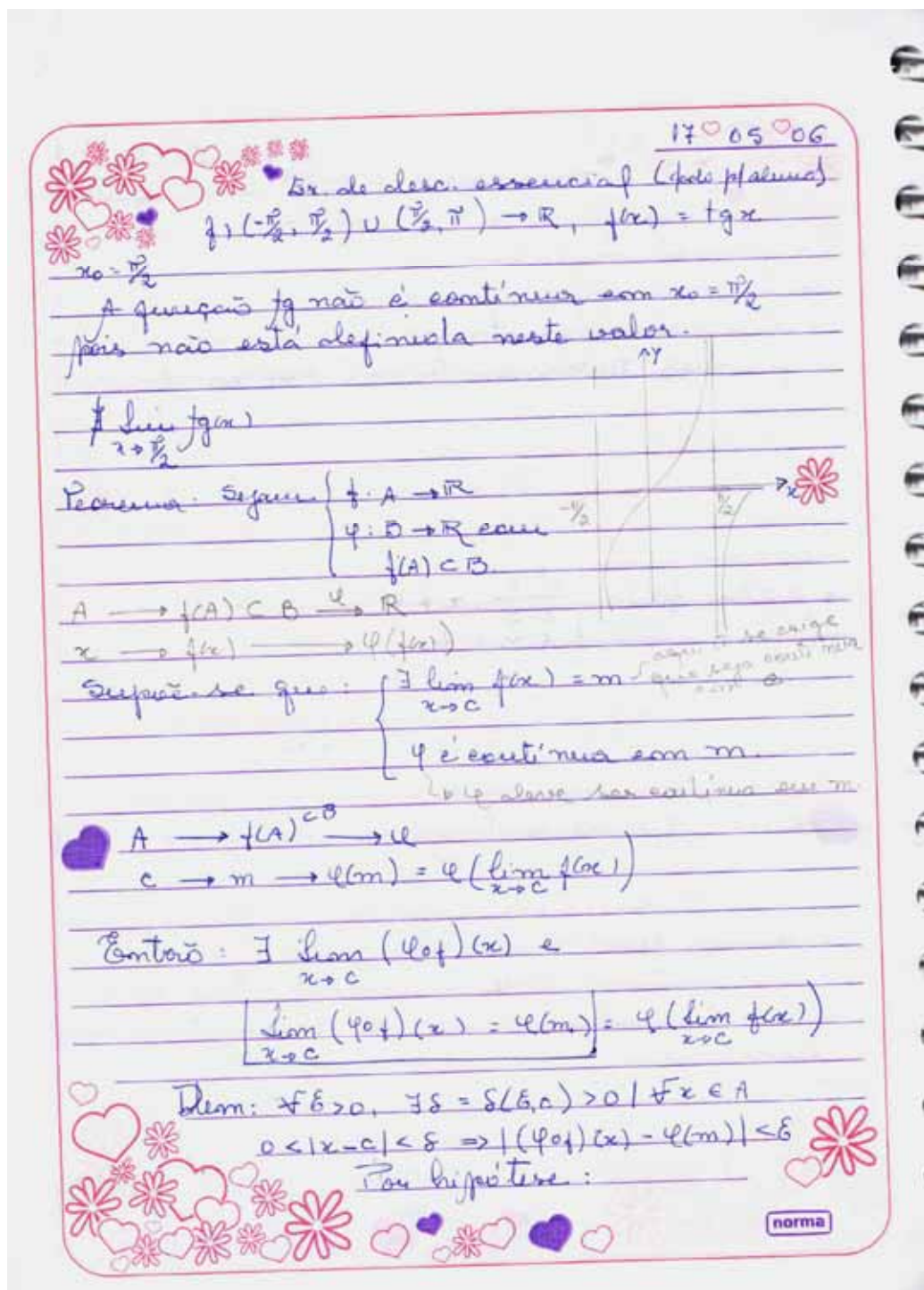


Ilustração do Diário de Campo p.82

17/05/06

(1) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = m \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, c) > 0 /$
 $\forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$
 (2) φ contínua em $m \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, m) > 0 /$
 $\forall y \in B, |y - m| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(y) - \varphi(m)| < \varepsilon$

Tomamos $\varepsilon = \delta_2$ em (1), $\exists \delta_1 > 0 / \forall x \in A, 0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f(x) - m| < \delta_2 \xrightarrow{*} |\varphi(y) - \varphi(m)| < \varepsilon$ (caso 2)
 Logo, $\lim_{x \rightarrow c} (\varphi \circ f)(x) = \varphi(m)$

Proposição: Sejam $\left\{ \begin{array}{l} f: A \rightarrow \mathbb{R}, \text{ contínua} \\ \varphi: B \rightarrow \mathbb{R}, \text{ contínua} \\ f(A) \subset B \end{array} \right.$

Então $\varphi \circ f$ é contínua em A

Dem: Pelo teorema anterior, temos
 $\lim_{x \rightarrow c} (\varphi \circ f) = \varphi(m) = \varphi(\lim_{x \rightarrow c} f(x))$

com $m = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Então $\lim_{x \rightarrow c} (\varphi \circ f)(x) = (\varphi \circ f)(c)$, isto é, $(\varphi \circ f)$ é contínua em c , p/ todos $c \in A$.

Ex: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, desde que exista

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ e que $g(x) \geq 0$ nas vizinhanças de a , se n for par.

norma

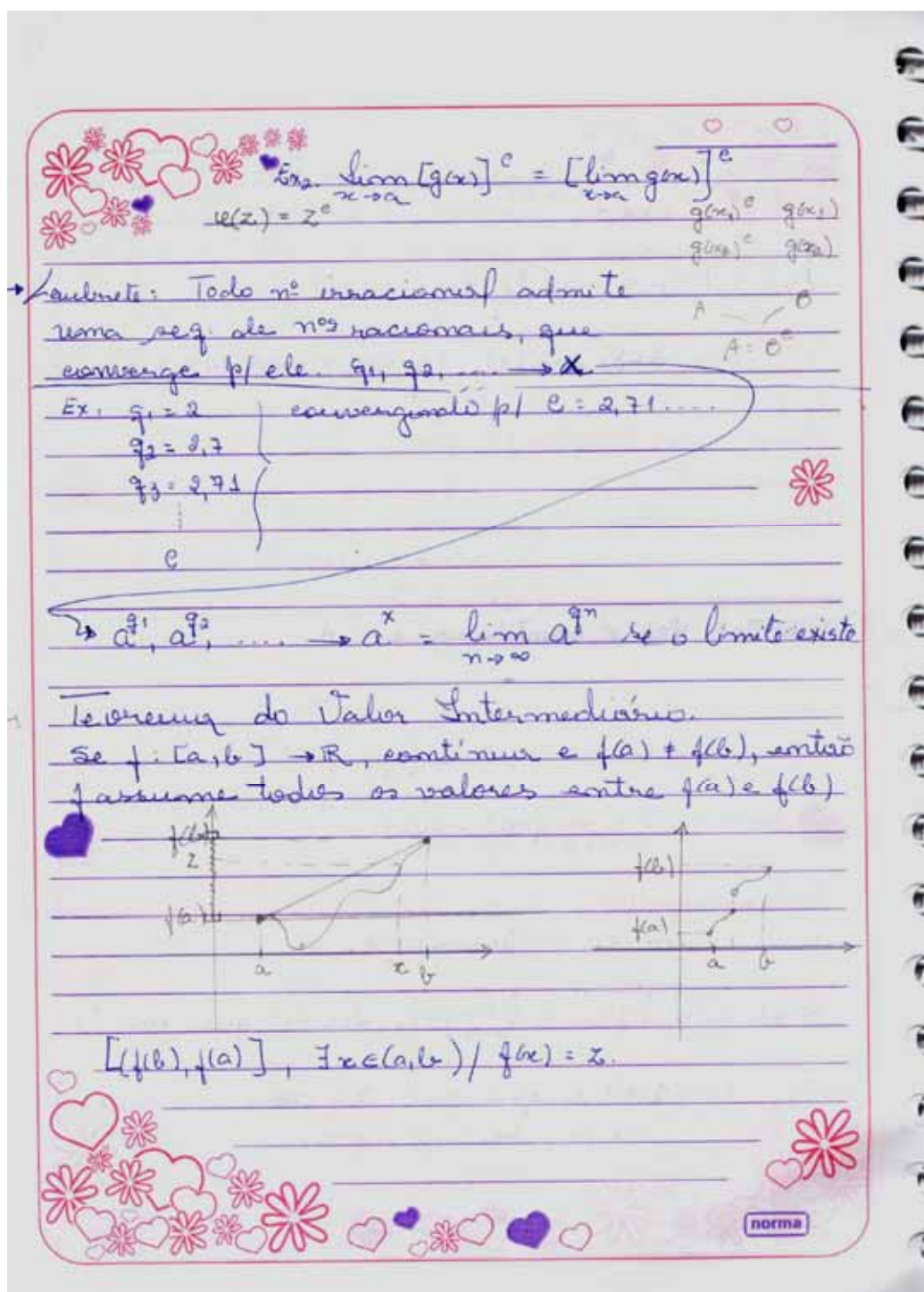


Ilustração do Diário de Campo p.84

17/05/06

Concluímos: Se f for contínua em $[a, b]$ com $f(a) < 0 < f(b)$ (ou, $f(b) < 0 < f(a)$) então: $\exists x \in (a, b) / f(x) = 0$

dem: Semear provar que $0 \in (f(a), f(b))$ e pelo teorema, $\exists x \in (a, b) / f(x) = 0$

Exercício 01: Prove que: $\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = x - 1$

$f(x) = \cos x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = x - 1$
 f é contínua em $[0, \pi]$
 $f(0) = 2$
 $f(\pi) = -\pi$
 Como $f(\pi) < 0 < f(0)$ pelo concluímos
 $\exists x_0 \in (0, \pi) / f(x_0) = 0 \Rightarrow \cos x_0 = x_0 - 1$
 Se $[a, b] = [\pi/4, \pi/2]$ o concluímos também vale

Exercício 02: $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 3) \\ 1, & x \in [3, 5] \end{cases}$
 Temos $f(0) = -1 < 0$ e $\nexists x \in (0, 5) / f(x) = 0$
 $f(5) = 1 > 0$
 Isto contradiz o concluímos? Não pois f não sendo contínua em $[0, 5]$, não satisfaz o concluímos.

Ilustração do Diário de Campo p.85

 - Na apresentação dos teoremas a professora sempre faz o uso de representações gráficas, como apoio para a compreensão dos alunos. 

OBSERVAÇÃO 14-19

Maria Margarete do R. Farias

15^a, 16^a., 17^a., 18^a. e 19^a. Observação

Data: 17, 24, 29/06 e 07, 19/06 de 2006

Local: IGCE/ GIII – UNESP/ Rio Claro

Hora: 8:00 às 10:00 hs

Nessa. Memória farei uma síntese das últimas observações, especificamente do dia 17 de maio à 19 de junho. E, devido a não ter tido uma certa regularidade em estar escrevendo essas percepções talvez eu deixe a desejar em termos de detalhamento e especificações.

Na última aula dia **17 de maio** a professora falou sobre continuidade de funções, e demonstrou o teorema do Valor intermediário. E dando continuidade ao assunto ela inicia a aula do dia **24 de maio** enunciando um teorema que afirma que se uma função f , for diferenciável em um determinado ponto, então f será contínua nesse ponto, e ressalta que a recíproca não é verdadeira. Para explicar o assunto aos alunos ela desenha no quadro dois gráficos de funções onde ilustra um exemplo e contra-exemplo de diferenciabilidade no ponto. Após a mostra de exemplos ela demonstra o teorema mencionado.

Dando continuidade a aula a professora. enuncia vários teoremas, cuja aplicação caracteriza-se em determinar a derivada de funções.



Ao apresentar os teoremas aos alunos a professora sempre está atenta às justificativas dos resultados e uma vez ou outra se dirige aos alunos para perguntar sobre determinados resultados apresentados no quadro giz. Para alguns resultados de teoremas a profa. vê a necessidade de usar a representação gráfica para explicar ao aluno o significado da derivada de uma função.

No **dia 29 de maio** a professora. apresenta aos alunos a regra da cadeia, Enuncia o teorema, mas não faz a demonstração, após a explanação desse resultado propõe aos alunos a resolução de alguns exercícios.

No dia **07 de junho** a professora mostra aos alunos alguns resultados da derivada de funções trigonométricas inversas. Basicamente ela enuncia os teoremas e os demonstra, para explicar esses resultados ela sempre usa a representação geométrica e gráfica. E enfatiza a importância da visualização no processo da compreensão dos resultados.

No **dia 19 de junho** a professora fala sobre o teorema do Valor Médio e ao explicar a demonstração do mesmo, desenha a representação gráfica de uma função qualquer sempre fazendo a integração entre representação algébrica e gráfica. Alguns comentários da professora ao expor o teorema;

 (CP)_ Qual a distância de $g(a)$ e $g(b)$ à reta secante?

Ela mesma responde; Por construção é zero, olhem o gráfico - algebricamente também é zero. Isto é $g(a) = g(b) = 0$

Após a explicação do resultado acima a professora mostra aos alunos algumas aplicações do teorema e para alguns casos usa a representação algébrica para melhor explicar o movimento da função, ou seja, quando é crescente ou decrescente sempre fazendo comparação a função derivada da mesma. 

ANEXO C: Roteiro das Entrevistas

Professor	
Mestrado em Educação Matemática – IGCE – UNESP Campus de Rio Claro – SP Entrevista com o professor que ministra aula de Cálculo Diferencial e Integral na UNESP de Rio Claro - SP	
Local da Entrevista: UNESP/ RIO CLARO	Data:
E-mail do entrevistado:	Telefone do entrevistado:
Entrevista: 1) Nome completo: _____ 2) Cidade de origem: _____ 3) Cidade onde atualmente mora: _____ 4) Lotado em que departamento: _____ 5) Fale um pouco sobre a sua formação; 6) Há quanto tempo leciona para turmas de Cálculo Diferencial e Integral? E para turmas de matemática (especificamente)? 7) Pesquisas afirmam que a disciplina Cálculo Diferencial e integral é uma das que mais reprovam em um curso de graduação em matemática, bem como em outros cursos que tem essa disciplina inserida no seu currículo. Em sua opinião qual os principais motivos para tal ocorrência (isso de um modo geral) e particularmente para o curso de matemática? 8) Em sua opinião qual a relevância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral para a formação do futuro professor de matemática? 9) Você acha que a disciplina cálculo diferencial e integral promove o conhecimento para o ensino da matemática, porquê? 10) É fato que a matemática em sua totalidade é composta por símbolos e representações. Considerando, portanto, representações matemáticas como representações gráficas, algébricas, geométricas, entre outras. Em sua opinião qual a importância das representações matemáticas para o conhecimento do aluno? E para o futuro professor de matemática? Poderia exemplificar a sua fala? 11) Qual a sua experiência com as TIC em sala de aula, pouca, grande? Fale um pouco da relevância de se utilizar softwares educativos (matemáticos) como uma metodologia de ensino. 12) Em sua opinião que tipo de conhecimento é necessário ao futuro professor de matemática?	

Aluno	
Mestrado em Educação Matemática – IGCE – UNESP Campus de Rio Claro – SP Entrevista com o aluno do curso de licenciatura e Matemática da UNESP/Rio Claro - SP	
E-mail do entrevistado:	Telefone do entrevistado:
1) Nome completo _____ 2) Idade _____ 3) Cidade de origem/estado _____ 4) Cidade onde atualmente mora/estado _____ 5) Qual a motivação para fazer o curso de matemática? 6) Tem facilidade para entender os conteúdos matemáticos? 7) Você conhece o currículo do curso? Quais as disciplinas que mais gosta? Porquê? E quais/qual as/a que mais tem ou teve dificuldade para assimilar o conteúdo? 8) O que você acha da disciplina Cálculo, você acha que é uma disciplina importante e porquê? 9) Pretende ser professor de matemática? Porquê? 10) Na sua opinião qual a influência da disciplina Cálculo para formação do futuro professor de Matemática? 11) Você acha que as articulações entre as representações matemáticas (algébrica e Gráficas, por exemplo) auxiliam na compreensão do conteúdo matemático? Porquê? 12) Você gosta de estudar individualmente ou em grupo? 13) Como costuma estudar matemática(resolve exercícios, estuda a teoria, usa o livro, apontamentos, costuma ler as definições para aplicar na resolução dos exercícios) 14) O que você acha do uso do computador como recurso para aprender matemática, já usou algum software educativo? Qual? 15) De 1 a 10, qual nota corresponde ao seu conhecimento matemático? 16) O que o motivou a participar dessa pesquisa?	