UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Estudo de problemas de curvatura média por meio de regularização elíptica

Mariele Vaz Quiraldello

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Abril de 2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Estudo de problemas de curvatura média por meio de regularização elíptica

Mariele Vaz Quiraldello

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Abril de 2026

Q8e

Quiraldello, Mariele Vaz
Estudo de problemas de curvatura média por meio de regularização elíptica / Mariele Vaz Quiraldello. -- , 2026
66 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente,
Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Problemas elípticos. 2. Funções de variação limitada. 3. Existência de soluções. 4. Operador 1-Laplaciano. 5. Operador de curvatura média. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Estudo de problemas de curvatura média por meio de regularização elíptica

AUTORA: MARIELE VAZ QUIRALDELLO
ORIENTADOR: MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
Data: 17/04/2026 15:20:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Prof. Dr. OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI (Participaçao Presencial)
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. MATHEUS FREDERICO STAPENHORST (Participaçao Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Presidente Prudente, 17 de abril de 2026.

À minha mãe, que sempre me lembrou da importância dos estudos.

Agradecimentos

Meu carinho e gratidão à minha mãe e à minha irmã, que sempre me apoiaram e incentivaram aos estudos, e que com amor e paciência tornaram este caminho mais leve e especial.

Aos meus amigos, que estiveram ao meu lado e me apoiaram durante todo este percurso, e àqueles que conheci ao longo desta jornada, que guardo com todo meu afeto.

Aos professores com quem tive a oportunidade de aprender durante minha formação, pelo cuidado, dedicação e empenho em compartilhar conhecimento de forma atenciosa e inspiradora.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, deixo minha mais sincera gratidão pelo tempo dedicado, paciência, atenção e apoio constante. Seu cuidado, orientação e incentivo tornaram esta jornada mais leve e significativa.

Agradeço à Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) pelo ambiente de aprendizagem e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional (PosMAC).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo nº 2024/02669-0, incluindo a Bolsa de Estágio de Pesquisa no Exterior (BEPE), processo nº 2024/17547-7.

As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade da autora e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

"Devemos ter perseverança e, acima de tudo, autoconfiança."
Marie Curie

Resumo

Este trabalho prova a existência de uma solução de variação limitada para um problema elíptico quasilinear envolvendo o operador de curvatura média e uma não linearidade sublinear. A solução é obtida por meio de uma técnica de aproximação, na qual primeiro resolvemos problemas quasilineares para $p > 1$, e, em seguida, analisamos a sequência de soluções à medida que p se aproxima de 1. Essa abordagem também pode ser aplicada ao estudo do operador 1-Laplaciano.

Palavras-Chave: *Problemas elípticos, Funções de variação limitada, Existência de soluções, Operador 1-Laplaciano, Operador de curvatura média.*

Abstract

This work proves the existence of a bounded variation solution for a quasilinear elliptic problem involving the mean curvature operator and a sublinear nonlinearity. The solution is obtained through an approximation technique, in which we first solve quasilinear problems for $p > 1$ and then analyze the sequence of solutions as p approaches 1. This approach can also be applied to the study of the 1-Laplacian operator.

Keywords: *Elliptic problems, Functions of bounded variation, Existence of solutions, 1-Laplacian operator, Mean curvature operator.*

Índice de Notações

Ω	Conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω em $\mathbb{R}^N$.
$\overline{\Omega}_\delta$	Conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \delta\}$.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\lvert\Omega\rvert$	Medida de Lebesgue de Ω.
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Subconjunto aberto relativamente compacto de Ω.
$C^k(\Omega)$	Espaço das funções com derivadas contínuas até ordem k em Ω.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espaço das funções $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.
$\mathcal{D}$	Notação para $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espaço das distribuições sobre Ω.
$\mathcal{D}'$	Notação para $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.
$L^p(\Omega)$	Espaço de Lebesgue de funções p-ésimas integráveis em Ω.
$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	Espaço de funções localmente p-ésimas integráveis em Ω.
$L^\infty(\Omega)$	Espaço de funções limitadas em Ω.
$W^{m,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev de ordem m em $L^p(\Omega)$.
$H^1_0(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{1,2}_0(\Omega)$.
$BV(\Omega)$	Espaço de funções de variação limitada em Ω.
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espaço das medidas de Radon em Ω.
$\mathcal{H}^{N-1}$	Medida de Hausdorff de dimensão $N-1$.
$\mathcal{L}^N$	Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.
∇u	Gradiente de u, definido por $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u)$.
$\operatorname{div} u$	Divergência de u, definida por $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} u_i$.
Δu	Laplaciano de u, definido por $\Delta u = \sum_{i=1}^N \partial^2_{x_i} u$.
Du	Derivada de u no sentido das distribuições.
$\lvert Du\rvert$	Medida da variação total de u.
$u^+ = \max\{u, 0\}$	Parte positiva de u.
$u^- = \min\{u, 0\}$	Parte negativa de u.
$\operatorname{sign}(u)$	Função sinal de u, definida por $\operatorname{sign}(u) = \begin{cases} \dfrac{u}{\lvert u\rvert}, & \text{se } u \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0. \end{cases}$
ν	Vetor normal unitário.
p^*	Expoente crítico de Sobolev, definido por $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.

Sumário

Resumo **5**

Abstract **7**

Índice de Notações **9**

Sumário **11**

1 Introdução **13**

2 Noções preliminares **15**
2.1 Teoria das distribuições 15
2.1.1 Espaço das funções-teste 15
2.1.2 Distribuições 18
2.1.3 Operações com distribuições 19
2.2 Espaço das funções de variação limitada $BV(\Omega)$ 20
2.2.1 Fórmula de Green para funções em $BV(\Omega)$ 27
2.3 Desigualdades fundamentais 28

3 Soluções nodais para problema com o 1-Laplaciano **31**
3.1 Método de aproximação para soluções 33
3.2 Demonstração do Teorema 3.3 37

4 Soluções em $BV(\Omega)$ para problema com o operador de curvatura média **45**
4.1 Resultados de convergência em $BV(\Omega)$ 46
4.2 Existência por esquema de aproximação 48
4.3 Demonstração do Teorema 4.4 57

5 Conclusão **63**

Referências **63**

Capítulo

1

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 2$ e $\lambda > 0$. A equação de curvatura média com condição de contorno nula é dada por:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) &= \lambda\, f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Se considerarmos uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, a expressão $-\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)$ representa a curvatura média do gráfico da função u no ponto $(x, u(x))$. Embora esteja relacionado à descrição de uma superfície, esse problema encontra aplicações em diversos contextos, tais como: transporte ótimo [9], na teoria da capilaridade [14] e no estudo de superfícies mínimas [15].

Problemas envolvendo esse operador têm sido amplamente estudados na literatura. Em particular, destacamos o trabalho [12], no qual os autores investigam a existência e multiplicidade de soluções em problemas com crescimento crítico, bem como [8], em que se analisam soluções nodais em problemas de valor de contorno. Além disso, há contribuições que abordam a existência de soluções fundamentais radiais [10], reforçando a relevância das questões associadas a esse operador.

Nesta dissertação, o nosso objetivo é estudar o problema (1), considerando sobre a não-linearidade f certas condições de crescimento. A nossa abordagem é baseada no trabalho [17], o qual apresenta de maneira pioneira uma técnica de aproximação para o estudo desse problema, inspirado pelo procedimento frequentemente utilizado no estudo de problemas com o 1-Laplaciano.

O ambiente natural para a busca de soluções desse problema é o espaço das funções de variação limitada, denotado por $BV(\Omega)$, formado por funções em $L^1(\Omega)$ cujas derivadas de primeira ordem, no sentido das distribuições, são medidas de Radon. No Capítulo 2, dedicado às preliminares, apresentamos os principais resultados necessários ao desenvolvimento deste trabalho, incluindo a teoria das distribuições, na qual introduzimos o conceito de derivada distribucional e as propriedades fundamentais do espaço $BV(\Omega)$. Discutimos também algumas expressões que precisam ser definidas para a formulação da noção de solução do problema (1), a qual será introduzida no Capítulo 4, como (z, Du) e $[z, \nu]$. Para isso, utilizaremos a *pairing theory* desenvolvida por G. Anzellotti em [5].

Como mencionado, a abordagem adotada para o estudo do problema (1), é baseada em um processo de aproximação. No Capítulo 3, estudamos um problema envolvendo o operador 1-Laplaciano, utilizando justamente essa estratégia. Em particular, consideramos o

seguinte problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Com relação a esse problema, podemos citar os trabalhos [2], [3] e [4], que estudam as soluções utilizando técnicas de aproximação em $W^{1,p}(\Omega)$ a partir de soluções da equação do p-Laplaciano $-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = \lambda f(u)$, quando $p \to 1^+$. Essa estratégia consiste em considerar o limite de problemas elípticos quasilineares associados, que podem ser tratados por métodos variacionais clássicos. Para esta dissertação, o artigo [13] foi utilizado como principal referência no estudo do problema (2), no qual os autores estudam soluções nodais para o problema (2) por meio desse esquema de aproximação.

No Capítulo 4, tratamos o problema (1) por meio de uma abordagem semelhante. Sobre a não-linearidade, consideramos as seguintes hipóteses:

(f_1) Existem $0 < q < 1$ e uma constante $c_1 > 0$, tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1|s|^{q-1}, \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ e q.t.p. } x \in \Omega;$$

(f_2) $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\,ds \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}$ e existe $t_0 > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega F(x,t_0)\,dx > 0$;

(f_3) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (uniforme com respeito a $x \in \Omega$) tal que, se $|s| < \delta$, então

$$|f(x,s)| < \varepsilon \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

(f_4) A função $f(x,s)$ é de Carathéodory.

A noção de solução de (1) é dada da seguinte forma: dizemos que $u \in BV(\Omega)$ é uma solução de (1) se existir $z \in X_N(\Omega)$ tal que $\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\operatorname{div} z &= \lambda\, f(x,u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (z, Du) &= \sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1-|z|^2}\,\mathcal{L}^N \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [z,\nu] &\in \operatorname{sign}(-u)\,\mathcal{H}^{N-1} \text{ q.t.p. } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $X_N(\Omega) = \left\{ z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div}(z) \in L^N(\Omega) \right\}$.

O principal resultado desse capítulo, e de todo o trabalho, é apresentado no seguinte teorema:

Teorema. *Se f satisfaz as hipóteses (f_1)-(f_4), então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para $\lambda > \lambda^*$, existe uma solução não trivial $u \in BV(\Omega)$ de (1).*

Para demonstrá-lo, consideramos o seguinte problema elíptico aproximado:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left((1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}Du\right) &= \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nosso objetivo é construir uma sequência de soluções u_p desse problema, utilizando métodos variacionais, para $p > 1$ e, posteriormente, analisar o limite quando $p \to 1^+$. A principal dificuldade consiste em estabelecer uma propriedade que deve ser satisfeita por $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e pelo limite $u \in BV(\Omega)$, dado por $u = \lim_{p \to 1^+} u_p$, a qual assegura que z desempenhe o papel de $\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}$. Como resultado final, provaremos a existência de soluções para o problema de curvatura média, utilizando a técnica de aproximação apresentada.

Capítulo

2

Noções preliminares

2.1 Teoria das distribuições

O objetivo desta seção é apresentar os conceitos básicos da teoria das distribuições, seguindo [16]. Durante o desenvolvimento, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto.

2.1.1 Espaço das funções-teste

Definição 2.1. *Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) uma função contínua. Definimos o conjunto*

$$K = \{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}.$$

O fecho de K em $\mathbb{R}^N$ é chamado de suporte de ϕ e denotado por $\mathrm{supp}(\phi)$. *Se o conjunto fechado* $\mathrm{supp}(\phi)$ *for também compacto, então dizemos que a função ϕ possui suporte compacto.*

Definição 2.2. *O conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis (ou seja, de classe C^∞) com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$ forma um espaço vetorial, denominado espaço das funções-teste. Este espaço é denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ou, de forma simplificada, por $\mathcal{D}$, sendo definido como*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \mathrm{supp}(\phi) \text{ é compacto em } \mathbb{R}^N\}.$$

Apresentaremos a seguir um lema que será fundamental na construção de exemplos de funções em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & se \quad x > 0, \\ 0, & se \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Então, f é de classe C^∞.

Demonstração. Queremos demostrar que todas as derivadas de f existem e são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Para $x > 0$, a função $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ é contínua por ser composição de funções suaves. Para $x < 0$, tem-se $f(x) = 0$, que é claramente infinitamente diferenciável.

Verifiquemos agora a continuidade na origem. Observe que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ao aplicar a substituição $u = 1/x^2$, o segundo limite se torna $\lim_{u\to+\infty} e^{-u} = 0$. Logo, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, o que demonstra que f é contínua em $\mathbb{R}$.

Para a derivada, $f'(x)$ existe para $x \neq 0$. Em $x = 0$, o limite lateral à esquerda é $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. Já o limite lateral à direita é dado por

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Esta última igualdade resulta da aplicação da Regra de L'Hôpital. Portanto, $f'(0)$ existe e $f'(0) = 0$.

O mesmo raciocínio se estende para as derivadas de ordem superior. Por indução, a n-ésima derivada para $x > 0$ sempre pode ser escrita como uma combinação linear finita de termos da forma $x^{-l}\exp(-x^{-2})$, onde l é um inteiro maior ou igual a zero. Uma aplicação sucessiva da Regra de L'Hôpital demonstra que o limite de todos esses termos tende a zero quando $x \to 0^+$.

Portanto, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. ■

Como consequência do lema anterior, podemos construir exemplos de elementos do espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.4. *Seja $a > 0$ e $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a}{a - \|x\|^2}\right), & se \quad \|x\| < a, \\ 0, & se \quad \|x\| \geq a, \end{cases}$$

com $x = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2$.

Note que $\phi(x) \neq 0$ apenas quando $\|x\| < a$. Como o suporte de ϕ está contido no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq a\}$, concluímos que $\mathrm{supp}(\phi)$ *é limitado. Além disso,* $\mathrm{supp}(\phi)$ *é fechado. Logo,* $\mathrm{supp}(\phi)$ *é compacto e, portanto, ϕ é um elemento do espaço $\mathcal{D}$.*

Exemplo 2.5. *Seja $\varepsilon > 0$ e considere a função $\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} k\,\varepsilon^{-N} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right), & se \quad \|x\| < \varepsilon, \\ 0, & se \quad \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

sendo

$$k^{-1} = \int_{\|x\|<1} \exp\left(-\frac{1}{1 - \|x\|^2}\right) dx.$$

Pelo Exemplo 2.4, sabemos que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ com $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$. *Além disso, $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que a integral de ρ_ε sobre $\mathbb{R}^N$ é igual a 1. Fazendo a mudança de variável $u = \dfrac{x}{\varepsilon}$, temos $\|u\| = \dfrac{\|x\|}{\varepsilon} < 1$ e $dx = \varepsilon^N\, du$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{\|x\|<\varepsilon} k\,\varepsilon^{-N} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right) dx \\ &= k \int_{\|u\|<1} \exp\left(-\frac{1}{1-\|u\|^2}\right) du \\ &= k \cdot k^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Resta verificar a positividade. Observe que a exponencial de qualquer número real é estritamente positiva e que o fator $k\,\varepsilon^{-N} > 0$. Logo, $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Por fim, note que, as funções ρ_ε, conforme $\varepsilon \to 0$, possuem suportes menores, mas preservam o volume contido sob o gráfico. À medida que $\varepsilon \to 0$, essas funções se concentram na origem. Tais funções são denominadas mollifiers ou sequências regularizantes. ■

Definição 2.6. *Uma família de conjuntos $\{E_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^N$ é dita localmente finita se, para todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$, existe uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}^N$ que intersecta apenas um número finito dos conjuntos E_i.*

Teorema 2.7. *Seja $(\Omega_i)_{i\in I}$ uma família de abertos tais que $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Dizemos que uma família de funções $\{\phi\}_{i\in I}$, de classe C^∞, forma uma partição da unidade localmente finita subordinada à cobertura $(\Omega_i)_{i\in I}$ se elas satisfazem*

i) $\operatorname{supp}(\phi_i) \subset \Omega_i$;

ii) A família $\{\operatorname{supp}(\phi_i)\}_{i\in I}$ *é localmente finita;*

iii) $0 \leq \phi_i(x) \leq 1$, *para todo* $i \in I$ *e para todo* $x \in \Omega$;

iv) $\sum_{i\in I} \phi_i(x) = 1$, *para todo* $x \in \Omega$.

Observação 2.8. *Uma vez que, dado $x \in \Omega$, existe uma vizinhança que irá intersectar apenas um número finito dos conjuntos $\{\operatorname{supp}(\phi_i)\}_{i\in I}$, decorre que $\phi_i(x) = 0$ para todos os índices i, exceto para um número finito deles. Portanto, a soma na condição (iv) é, de fato, uma soma finita e, consequentemente, é bem definida. O nome partição da unidade é autoexplicativo, pois a função constante 1 é particionada em funções C^∞ cujos suportes podem ser controlados.*

Podemos munir $\mathcal{D}(\Omega)$ com uma topologia que o transforma em um espaço vetorial topológico. No entanto, para o desenvolvimento da teoria, não será necessário descrever essa topologia em detalhes. Bastará compreender o que significa uma sequência de funções em $\mathcal{D}(\Omega)$ convergir.

Definição 2.9. *Dizemos que uma sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$ se existe um compacto fixo $K \subset \Omega$ tal que*

i) $\operatorname{supp}(\phi_n) \subset K$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

ii) ϕ_n *e todas as suas derivadas convergem uniformemente para zero em K quando $n \to \infty$.*

2.1.2 Distribuições

Definição 2.10. *Dizemos que um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é uma distribuição em Ω se, para toda sequência $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, vale $T(\phi_n) \to 0$.*

Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições, o qual coincide com o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{\, T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \mid T \text{ é linear e contínuo} \,\}.$$

Exemplo 2.11. *Seja $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Definimos o funcional*

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \delta_x(\phi) = \phi(x). \end{aligned}$$

Então, o funcional δ_x é uma distribuição em Ω, chamada de distribuição de Dirac centrada em x.

Demonstração. De fato, dados $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} \delta_x(\phi_1 + \lambda\phi_2) &= (\phi_1 + \lambda\phi_2)(x) \\ &= \phi_1(x) + \lambda\phi_2(x) \\ &= \delta_x(\phi_1) + \lambda\delta_x(\phi_2), \end{aligned}$$

o que mostra que δ_x é linear.

Note que, se $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, temos, em particular, a convergência pontual de ϕ_n. Consequentemente, $T(\phi_n) \to 0$.

Logo, δ_x define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Definição 2.12. *Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente integrável se, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$,*

$$\int_K |f|\, dx < \infty.$$

O conjunto de todas as funções mensuráveis e localmente integráveis em Ω é denotado por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Exemplo 2.13. *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Definimos o funcional*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi. \end{aligned}$$

O funcional T_f define uma distribuição em Ω.

Demonstração. Sejam $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} T_f(\phi_1 + \lambda\phi_2) &= \int_\Omega f(\phi_1 + \lambda\phi_2) \\ &= \int_\Omega f\phi_1 + \lambda \int_\Omega f\phi_2 \\ &= T_f(\phi_1) + \lambda T_f(\phi_2). \end{aligned}$$

Além disso, sejam $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\phi) \subset K$. Então,

$$|T_f(\phi)| = \left| \int_K f\phi \right| \leq \int_K |f\phi| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_K |f|.$$

Logo, se $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge para 0, temos que

$$|T_f(\phi_n)| \leq \|\phi_n\|_{L^\infty} \int_K |f| \to 0.$$

Portanto, o funcional T_f é uma distribuição. ■

2.1.3 Operações com distribuições

Definição 2.14. *Seja $x \in \mathbb{R}^N$ com coordenadas $(x_1, \ldots, x_N)$. Um multi-índice é uma N-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, onde cada componente α_i é um número inteiro não negativo.*

Associado a α, definimos:

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 \ + \ \alpha_2 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_N; \\ \alpha! &:= \alpha_1!\, \alpha_2!\, \cdots\, \alpha_N!; \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, \cdots\, x_N^{\alpha_N} \text{ com } x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Observação 2.15. *Dois multi-índices α e β satisfazem $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, N$.*

Definição 2.16. *Seja $u \in C^\infty(\Omega)$. Definimos a derivada parcial de ordem α de u, associada ao multi-índice α, por*

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}\, \cdots\, \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Exemplo 2.17. *Sejam $N = 2$ e $\alpha = (2, 1)$. Então, a derivada parcial correspondente ao multi-índice α é dada por*

$$D^\alpha = \frac{\partial^3}{\partial x_1^2\, \partial x_2}.$$

Definição 2.18. *Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e T_f a distribuição associada a f*

$$T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi(x)\, dx, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

A derivada distribucional de T_f é o funcional $T_f' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_f'(\phi) := -T_f(\phi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi'(x)\, dx.$$

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, então, por integração por partes, temos

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, \phi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi'(x)\, dx = -T_f(\phi'), \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ou seja, a derivada distribucional coincide com a distribuição gerada pela derivada clássica de f. Podemos iterar este procedimento para obter derivadas de ordem k

$$T_f^{(k)}(\phi) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi^{(k)}(x)\, dx = (-1)^k T_f(\phi^{(k)}).$$

Mais geralmente, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então, para qualquer multi-índice α, a derivada distribucional $D^\alpha T$ é definida por

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemplo 2.19. *Seja $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a distribuição de Dirac, definida por*

$$\delta(\phi) = \phi(0),\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Então, sua derivada distribucional é dada por

$$\delta'(\phi) = -\delta(\phi') = -\phi'(0).$$

Exemplo 2.20. *Seja H a função de Heaviside, isto é,*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \geq 0 \\ 0, & se \quad x < 0. \end{cases}$$

A distribuição associada a H é o funcional $T_H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dado por

$$T_H(\phi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)\,dx = \int_0^{\infty} \phi(x)\,dx,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

A derivada distribucional de T_H é definida por

$$T'_H(\phi) = -T_H(\phi') = -\int_0^{\infty} \phi'(x)\,dx = \phi(0) = \delta(\phi).$$

2.2 Espaço das funções de variação limitada $BV(\Omega)$

Nesta seção, apresentaremos resultados fundamentais da teoria dos espaços de variação limitada, os quais podem ser encontrados em referências clássicas, como [1], [6] e [20]. Ao longo do texto, assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e possui fronteira de Lipschitz.

Definição 2.21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado. Dizemos que μ é uma medida de Radon, se μ for uma medida de Borel não-negativa, tal que $\mu(\Omega) < +\infty$. Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ o espaço de todas as medidas de Radon em Ω e por $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, o espaço de todas as medidas de Radon vetoriais sobre $\mathbb{R}^N$.*

Dada $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, denotaremos por $|\mu|$ a variação total de μ, definida para todo conjunto de Borel B de Ω por:

$$|\mu|(B) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{\infty} |\mu(B_i)| : \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = B\right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições de B em $\mathcal{B}(\Omega)$.

Definição 2.22. *Dizemos que uma função $u \in L^1(\Omega)$ é uma função de variação limitada se sua derivada no sentido das distribuições, denotada por Du, for gerada por uma medida de Radon vetorial, ou seja,*

$$Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

O espaço das funções de variação limitada, denotado por $BV(\Omega)$, é dado por

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

Observação 2.23. *Como $\mathcal{M}(\Omega)$ é o dual topológico de $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ e o espaço $C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ é denso em $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$, segue que as afirmações abaixo são equivalentes:*

i. $u \in BV(\Omega)$;

ii. $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|Du\| := \sup\left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx \;\middle|\; \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$;

iii. $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|Du\| := \sup\left\{ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i \, D_i u \;\middle|\; \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff (ver [6, Teorema 2.4.6]), temos que

$$\|Du\| = \int_\Omega |Du|.$$

Teorema 2.24 (Desigualdade de Poincaré no Espaço $BV(\Omega)$)**.** *Seja $u \in BV(\Omega)$. Então, existe uma constante $C = C(N, \Omega) > 0$ de modo que a seguinte desigualdade vale:*

$$\int_\Omega |u| \, dx \leq C \left(\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, d\mathcal{H}^{N-1} \right).$$

O espaço $BV(\Omega)$ admite as seguintes normas:

$$\|u\|_{BV} := \int_\Omega |Du| + \|u\|_{L^1} \quad \text{e} \quad \|u\|'_{BV} := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

onde $\mathcal{H}^{N-1}$ denota a medida de Hausdorff de dimensão $N-1$, sobre $\partial\Omega$.

Proposição 2.25. *As normas $\|u\|_{BV}$ e $\|u\|'_{BV}$ são equivalentes.*

Demonstração. Pelo Teorema do traço para BV (ver [6, p. 378]), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} |u| \, d\mathcal{H}^{N-1} \leq C \left(\int_\Omega |Du| + \|u\|_{L^1(\Omega)} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u\|'_{BV} &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\leq \int_\Omega |Du| + C \left(\int_\Omega |Du| + \|u\|_{L^1(\Omega)} \right) \\
&\leq (1 + C) \int_\Omega |Du| + \|u\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq (1 + C) \|u\|_{BV}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Teorema 2.24, temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{BV} &= \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Du| \\
&\leq C' \left(\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, d\mathcal{H}^{N-1} \right) + \int_\Omega |Du| \\
&\leq (1 + C') \left(\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| \, d\mathcal{H}^{N-1} \right) \\
&\leq (1 + C') \|u\|'_{BV}.
\end{aligned}$$

Portanto, existem constantes positivas $C_2 = 1 + C$ e $C_1 = \dfrac{1}{1+C'}$, tais que

$$C_1\|u\|'_{BV} \leq \|u\|_{BV} \leq C_2\|u\|'_{BV},\ \forall u \in BV(\Omega).$$

Assim, as normas $\|\cdot\|_{BV}$ e $\|\cdot\|'_{BV}$ são equivalentes. ■

Pelo Teorema de Radon-Nikodym, dado $u \in BV(\Omega)$, existem duas medidas $D^a u$ e $D^s u$, sendo a primeira absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e a segunda singular com respeito à mesma medida, tais que

$$Du = D^a u + D^s u.$$

A partir dessa observação, segue que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço de $BV(\Omega)$ e que a norma $\|\cdot\|_{BV}$ é uma extensão da norma usual em $W^{1,1}(\Omega)$.

O exemplo a seguir mostra que existem funções que pertencem a $BV(\Omega)$, mas não pertencem a $W^{1,1}(\Omega)$.

Exemplo 2.26. *Seja $E \subset \Omega$ um conjunto aberto com fronteira suave tal que*

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty.$$

Para toda $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, pelo Teorema da Divergência, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \chi_E \operatorname{div}\varphi\, dx &= \int_E \operatorname{div}\varphi\, dx = \int_{\partial E} \varphi\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{N-1}\\ &\leq \int_{\partial E} |\varphi\cdot\nu|\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\partial E} \|\varphi\|_\infty |\nu|\, d\mathcal{H}^{N-1}\\ &= \|\varphi\|_\infty \int_{\partial E} |\nu|\, d\mathcal{H}^{N-1} = \|\varphi\|_\infty\, \mathcal{H}^{N-1}(\partial E)\\ &\leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty,\end{aligned}$$

em que $\nu(x)$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \partial E$. Portanto, temos $\chi_E \in BV(\Omega)$, mas $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$. De fato,

$$D\chi_E = -\nu\, \mathcal{H}^{N-1}\lfloor \partial E,$$

ou seja, $D\chi_E$, por consistir de uma medida singular em relação à medida de Lebesgue, não é gerada por nenhuma função em $L^1(\Omega)$.

Na sequência, mostraremos que a norma em $BV(\Omega)$ é semicontínua inferiormente com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.

Lema 2.27. *Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Então, $u \in BV(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |Du| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n|.$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Daí, obtemos

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\, \varphi\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n \operatorname{div}\, \varphi\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n|.$$

A primeira igualdade segue da convergência $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Ao tomar o supremo sobre todas as funções φ, chegamos à desigualdade desejada. ■

O resultado anterior nos permite provar que $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV})$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.28. *$(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |Du_n - Du_m| + \|u_n - u_m\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon,\ n, m \geq n_0.$$

Como (u_n) também é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } L^1(\Omega) \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desse modo, para todo $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq n_0$, como

$$u_n - u_m \to u - u_m \text{ em } L^1(\Omega) \text{ quando } n \to +\infty,$$

segue do Lema 2.27 que

$$\int_\Omega |D(u - u_m)| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |D(u_n - u_m)| < \varepsilon.$$

Consequentemente, obtemos que $u \in BV(\Omega)$ e

$$u_m \to u \text{ em } BV(\Omega) \text{ quando } m \to +\infty.$$

Portanto, $BV(\Omega)$ é completo. ■

Observação 2.29. *O espaço $BV(\Omega)$ não contém $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ como subconjunto denso em relação à norma $\|\cdot\|_{BV}$, uma vez que*

$$\overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,1}}} = W^{1,1}(\Omega).$$

Portanto, precisamos introduzir uma noção de convergência que faça $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ ser denso em $BV(\Omega)$. Para isso, utilizaremos a convergência estrita.

Definição 2.30. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e seja $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que u_n converge estritamente para u em $BV(\Omega)$ se*

$$u_n \to u \text{ em } L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |Du_n| \ \to\ \int_\Omega |Du| \text{ quando } n \to +\infty.$$

O próximo teorema garante a aproximação de funções de variação limitada por funções suaves.

Teorema 2.31. *Seja $u \in BV(\Omega)$. Então, existe uma sequência $\{u_i\} \in C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega |u_i - u| dx = 0$$

e

$$\lim_{i\to\infty} \|Du_i\|(\Omega) = \|Du\|(\Omega).$$

Demonstração. Mostremos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função $v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |u - v_\varepsilon|\, dx < \varepsilon \quad \text{e} \quad \|Dv_\varepsilon\|(\Omega) < \|Du\|(\Omega) + \varepsilon.$$

Sejam $\{\Omega_i\}$ subdomínios de Ω tais que

$$\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1} \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i = \Omega.$$

Como $\|Du\|$ é uma medida, podemos escolher Ω_0 suficientemente grande de modo que

$$\|Du\|(\Omega \setminus \Omega_0) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Tomemos uma partição da unidade suave $\mathcal{F}$ subordinada à cobertura aberta

$$U_i = \{\Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega}_{i-1}\}_{i=1}^{\infty} \text{ com } U_0 = \Omega_1.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos f_i como a soma de todas as funções $\psi \in \mathcal{F}$ tais que $\operatorname{supp}\psi \subset U_i$ e que não tenham sido escolhidas nos passos anteriores $j < i$. Dessa forma, obtemos $f_i \in C_c^\infty(U_i)$ e $\sum_{i=0}^{\infty} f_i = 1$ em Ω. Logo, $f_i u \in BV(\Omega)$ e $\operatorname{supp}(f_i u) \subset U_i$.

Seja ρ_ε um mollifier. Então, para cada i, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $\operatorname{supp}\left((f_i u) * \rho_{\varepsilon_i}\right) \subset U_i$. Além disso, podemos escolher ε de modo que

$$\int_\Omega |(uf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uf_i|\, dx < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \tag{2.3}$$

e

$$\int_\Omega |(uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uDf_i|\, dx < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}. \tag{2.4}$$

Defina

$$v_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} (uf_i) * \rho_{\varepsilon_i}.$$

É claro que $v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Além disso, para todo $x \in \Omega$, temos que

$$u(x) = u(x) \cdot 1 = u(x) \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u(x)\, f_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (uf_i)(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon - u\|_{L^1(\Omega)} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (uf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - \sum_{i=0}^{\infty} uf_i \right\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|(uf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uf_i\|_{L^1(\Omega)} \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aplicando a regra do produto, obtemos $D(uf_i) = f_i\,Du + u\,Df_i$. Pela propriedade dos mollifiers de que a derivada da convolução coincide com a convolução com a derivada, segue que

$$\begin{aligned} Dv_\varepsilon &= \sum_{i=0}^{\infty}(D(uf_i)) * \rho_{\varepsilon_i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(f_i Du) * \rho_{\varepsilon_i} + \sum_{i=0}^{\infty}(uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

Para manipular o segundo termo da soma, escrevemos

$$(uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} = ((uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uDf_i)) + uDf_i.$$

Daí,

$$\sum_{i=0}^{\infty}((uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} = \sum_{i=0}^{\infty}((uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uDf_i) + \sum_{i=0}^{\infty} uDf_i.$$

Como $\sum_{i=0}^{\infty} f_i = 1$ em Ω, segue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} Df_i = D\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right) = D(1) = 0.$$

Então,

$$Dv_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty}(f_i Du) * \rho_{\varepsilon_i} + \sum_{i=0}^{\infty}\left((uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uDf_i\right).$$

Aplicando a desigualdade triangular e integrando ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\int_\Omega |Dv_\varepsilon|\,dx \leq \sum_{i=0}^{\infty}\int_\Omega |(f_i Du) * \rho_{\varepsilon_i}|\,dx + \sum_{i=0}^{\infty}\int_\Omega |(uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uDf_i|\;dx.$$

Concluímos que o segundo termo do somatório é menor ε por (2.3).

Para estimar o primeiro termo, consideremos $\psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $\|\psi\|_\infty \leq 1$ e seja $\psi_\varepsilon = \psi * \rho_\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (\rho_\varepsilon * (f_i Du))\;\psi\,dx\right| &= \left|\int_\Omega \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) f_i(y)\,d(Du)(y)\right)\psi(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\psi(x)\,dx\right) f_i(y)\,d(Du)(y)\right| \\ &= \left|\int_\Omega \psi_\varepsilon(y)\; f_i(y)\,d(Du)(y)\right| \\ &= \left|\int_\Omega u\,\mathrm{div}(\psi_\varepsilon f_i)\,dx\right| \\ &\leq \|Du\|\,(U_i), \end{aligned}$$

uma vez que $\mathrm{supp}(\psi_\varepsilon f_i) \subset U_i$ e $\|\psi_\epsilon\|_\infty \leq 1$. Tomando o supremo sobre todas essas ψ, temos que

$$\int_\Omega |(\rho_\varepsilon * (f_i Du))(x)|\;dx = \sup_{\|\psi\|_\infty \leq 1}\left|\int_\Omega (\rho_\varepsilon * (f_i Du))\psi\,dx\right| \leq \|Du\|(U_i).$$

Portanto, como cada ponto $x \in \Omega$ pertence a, no máximo, dois conjuntos U_i, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Dv_\varepsilon| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_\Omega |(f_i Du) * \rho_{\varepsilon_i}| + \sum_{i=0}^{\infty} \int_\Omega |(uDf_i) * \rho_{\varepsilon_i} - uDf_i| \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|Du\|(U_i) + \varepsilon \\ &\leq \|Du\|(\Omega_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \|Du\|(U_i) + \varepsilon \\ &\leq \|Du\|(\Omega_1) + 2\,\|Du\|(\Omega \setminus \Omega_0) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Por (2.2), concluímos que

$$\int_\Omega |Dv_\varepsilon|\,dx \leq \|Du\|(\Omega) + 3\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o resultado segue. ■

Observação 2.32. *Modificando ligeiramente a demonstração do teorema anterior, tomando funções de regularização suficientemente próximas a u na norma $L^p(\Omega)$, poderíamos obter uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ para a qual a conclusão do teorema se estenderia para a norma $L^p(\Omega)$ em vez de $L^1(\Omega)$, para todo $p \geq 1$ tal que $u \in L^p(\Omega)$.*

Apresentaremos a seguir resultados de imersão do espaço $BV(\Omega)$ em espaços $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.33. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto com fronteira suave (não necessariamente limitado). Então, a imersão*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua para todo $1 \leq p \leq 1^*$, onde $1^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.31, temos que, dado $u \in BV(\Omega)$, existe uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ que converge para u de acordo com a convergência estrita. Note que $u_n \in W^{1,1}(\Omega)$ para todo n e, portanto, dado $1 \leq p \leq 1^*$, pela imersão contínua de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, segue que

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C\left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u_n|\,dx\right) < +\infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitado em $L^p(\Omega)$, segue que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Pela semicontinuidade inferior da norma de $L^p(\Omega)$ com respeito à topologia fraca, obtemos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} C\left(\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u_n|\,dx\right) \\ &= C\|u\|_{BV(\Omega)}.\end{aligned}$$

■

Teorema 2.34. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado com fronteira suave. Então, a imersão*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta para todo $1 \leq p < 1^*$, onde $1^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência tal que $\|u_n\|_{BV(\Omega)} \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 2.32, existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$\|v_n - u_n\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \int_\Omega |Dv_n| < 2.$$

Como a sequência (v_n) é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$, pela imersão compacta $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < 1^*$, existe uma subsequência (v_{n_k}) e uma função $u \in L^p(\Omega)$, tais que

$$v_{n_k} \to u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ quando } k \to \infty.$$

Como

$$\|v_{n_k} - u_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{n_k},$$

pela desigualdade triangular, concluímos que

$$\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_{n_k} - v_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} + \|v_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$$

quando $k \to \infty$.

Portanto, qualquer sequência limitada em $BV(\Omega)$ possui uma subsequência que converge fortemente em $L^p(\Omega)$. ■

2.2.1 Fórmula de Green para funções em $BV(\Omega)$

Apresentaremos a seguir uma versão da Fórmula de Green para expressões da forma $w \operatorname{div} z$, onde $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\operatorname{div} z \in L^N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$. Para isso, definiremos o produto entre z e Dw, que denotaremos por (z, Dw). Essa construção é feita por meio da *pairing theory* desenvolvida por Anzellotti [5].

Seja

$$X_N(\Omega) = \left\{ z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div}(\mathrm{z}) \in L^{\mathrm{N}}(\Omega) \right\}.$$

Para $z \in X_N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$, definimos a distribuição $(z, Dw) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle (z, Dw), \varphi \rangle := -\int_\Omega w\varphi \operatorname{div}(z)\, dx - \int_\Omega wz \cdot \nabla\varphi\, dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.5}$$

Pode-se provar que a distribuição (z, Dw) é gerada por uma medida de Radon tal que

$$\left| \int_B (z, Dw) \right| \leq \|z\|_\infty \int_B |Dw|,$$

para todo conjunto de Borel $B \subset \Omega$.

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário descrever o traço do campo z. É possível provar a existência de um operador traço

$$[\cdot, \nu] : X^N(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$$

tal que

$$\|[z, \nu]\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|z\|_\infty \tag{2.6}$$

e, se $z \in C^1(\overline{\Omega}_\delta, \mathbb{R}^N)$,

$$[z, \nu](x) = z(x) \cdot \nu(x) \text{ em } \Omega_\delta,$$

onde Ω_δ denota uma δ-vizinhança de $\partial\Omega$.

Com essas definições, podemos estabelecer a seguinte versão da Fórmula de Green para $z \in X^N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$,

$$\int_\Omega w \operatorname{div}(z)\, dx + \int_\Omega (z, Dw) = \int_{\partial\Omega} [z, \nu] w\, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{2.7}$$

2.3 Desigualdades fundamentais

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto.

Teorema 2.35 (Desigualdade de Young). *Seja $p > 1$ um número real e $p' = \dfrac{p}{p-1}$ o seu expoente conjugado. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a, b \geq 0$, vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Teorema 2.36 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, p' > 1$ expoentes conjugados. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e vale a desigualdade:*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\, dx\right)^{1/p'}.$$

A seguir, apresentaremos alguns elementos fundamentais de Análise Convexa (para uma referência completa sobre o tema, ver [11]).

Seja $g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função convexa. A função $g^* : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$g^*(x) = \sup\{x \cdot x^* - g(x^*) : x^* \in \mathbb{R}^N\} \tag{2.8}$$

é chamada de conjugada convexa de g. As seguintes propriedades são válidas:

(i) g^* é convexa;

(ii) A desigualdade de Young-Fenchel:

$$x \cdot x^* \leq g(x) + g^*(x^*),\ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^N. \tag{2.9}$$

Observe que esta constitui uma generalização da desigualdade de Young clássica, a qual pode ser obtida ao considerar $g(x) = \dfrac{1}{q}x^q$, com $q > 1$.

Se $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$, por (2.8), o supremo na definição é atingido em $x^* \in \mathbb{R}^N$ tal que $x = \nabla g(x^*)$. Então,

$$g^*(x) = x^* \cdot \nabla g(x^*) - g(x^*), \tag{2.10}$$

onde $x = \nabla g(x^*)$.

De (2.9), (2.10) e da convexidade de g, segue que a igualdade em (2.9) ocorre se, e somente se,

$$x^* = \nabla g(x). \tag{2.11}$$

Exemplo 2.37. *Consideremos a função convexa $g(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$. A sua função convexa conjugada é dada por $g^*(x^*) = -\sqrt{1 - |x^*|^2}$ para $|x^*| \leq 1$.*

Essas funções estão relacionadas pela desigualdade de Young-Fenchel, segundo a qual

$$x \cdot x^* \leq \sqrt{1 + |x|^2} - \sqrt{1 - |x^*|^2},\ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^N.$$

Como a g é uma função de classe C^1, então a igualdade na desigualdade de Young-Fenchel ocorre se, e somente se,

$$x^* = \nabla g(x) = \nabla(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + |x|^2}}.$$

A partir do Exemplo 2.37, observe que, para todo $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, vale

$$z = \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \iff z \cdot \nabla u = \sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1-|z|^2}.$$

De fato, se $z = \dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$, então $|z| \leq 1$. Assim,

$$1 - |z|^2 = 1 - \frac{|\nabla u|^2}{1+|\nabla u|^2} = \frac{1}{1+|\nabla u|^2}$$

e, portanto,

$$\sqrt{1-|z|^2} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Logo,

$$z \cdot \nabla u = \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \cdot \nabla u = \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

e

$$\sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1-|z|^2} = \sqrt{1+|\nabla u|^2} - \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}.$$

Por outro lado, definindo $x = \nabla u$ e $x^* = z$, da desigualdade de Fenchel, segue que

$$z \cdot \nabla u \leq \sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1-|z|^2}.$$

Se assumirmos que $z \cdot \nabla u = \sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1-|z|^2}$, então $x^* = \dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$.

Exemplo 2.38. *Para cada $p > 1$, definimos a função convexa e suave $g_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por*

$$g_p(x) = \frac{1}{p}(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}}$$

e seja $g_p^*(x^*)$ a sua função conjugada convexa. Pela desigualdade de Young-Fenchel, segue que

$$x \cdot x^* \leq g_p(x) + g_p^*(x^*),\ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^N.$$

Note que a igualdade ocorre se, e somente se,

$$x^* = \nabla g_p(x) = \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{2}(1+|x|^2)^{\frac{p}{2}-1} 2x = (1+|x|^2)^{\frac{p-2}{2}} x.$$

Além disso, de acordo com [18, Seção 6], se $1 \leq r \leq s$, então

$$g_r^*(x) \geq g_s^*(x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

e

$$g_r^*(x^*) \to g_1^*(x^*)$$

monotonicamente para $|x^*| \leq 1$, quando $r \to 1^+$, onde

$$g_1^*(x^*) = \begin{cases} -\sqrt{1-|x^*|^2}, & \text{se } |x^*| \leq 1, \\ -\infty, & \text{se } |x^*| > 1. \end{cases}$$

Capítulo

3

Soluções nodais para problema com o 1-Laplaciano

Neste capítulo, estudaremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto limitado com fronteira Lipschitz. A não-linearidade f satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) Existe $\alpha > 0$ tal que $\limsup_{|s|\to 0} \dfrac{f(s)}{|s|^\alpha} < +\infty$;

(f_3) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $1 < q < 1^*$, tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{q-1}, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

onde $1^* = \dfrac{N}{N-1}$;

(f_4) Existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s, \ \forall s \neq 0,$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$;

(f_5) f é crescente em $\mathbb{R}$.

Observação 3.1. *Das condições (f_1) e (f_2), segue que $f(0) = 0$.*

Exemplo 3.2. *Considere a não-linearidade $f(s) = |s|^{r-2}s$, com $1 < r < 1^*$. Mostremos que f satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_5)$:*

(f_1) Temos $f \in C^0(\mathbb{R})$, pois a função $s \mapsto |s|^{r-2}s$ é contínua em $\mathbb{R}$.

(f_2) Note que, se $\alpha = r - 1 > 0$, então

$$\frac{f(s)}{|s|^\alpha} = \frac{|s|^{r-2}s}{|s|^{r-1}} = \frac{s}{|s|} = \begin{cases} 1, & \text{se } s > 0, \\ -1, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\limsup_{|s|\to 0} \frac{f(s)}{|s|^\alpha} = 1 < +\infty.$$

(f_3) Temos que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{r-1}, \, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Assim, escolhendo $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, obtemos

$$|f(s)| = |s|^{r-1}, \, \forall s \in \mathbb{R}.$$

(f_4) Observemos que

$$F(s) = \int_0^s |t|^{r-2}t \, dt = \frac{|s|^r}{r}.$$

Assim,

$$f(s)s = |s|^r = rF(s).$$

Logo, a condição (f_4) é satisfeita para $\kappa = r > 1$.

(f_5) A função $f(s) = |s|^{r-2}s$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned} f'(s) &= |s|^{r-2} + s(r-2)|s|^{r-3}\frac{s}{|s|} \\ &= |s|^{r-2} + (r-2)\frac{s^{r-1}}{|s|} \\ &= (r-1)|s|^{r-2} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

para todo $s \neq 0$, uma vez que $r > 1$.

Concluímos que $f(s) = |s|^{r-2}s$ satisfaz as hipóteses (f_1) – (f_5).

A seguir, enunciaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.3. *Suponha que f satisfaça (f_1) – (f_5). Então, existe uma solução nodal $u_0 \in BV(\Omega)$ para o problema (3.1) no seguinte sentido: $u_0^\pm \neq 0$ e existe um campo $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, com $\|z\|_\infty \leq 1$, tal que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} z &= f(u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (z, Du_0) &= |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [z, \nu] &\in \operatorname{sign}(-u_0) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

No teorema anterior, por solução nodal, entendemos uma solução tal que $u^\pm \neq 0$, onde $u^+ \not\equiv 0$ e $u^- \not\equiv 0$, sendo as partes positiva e negativa de u definidas por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\} \text{ e } u^-(x) := \min\{u(x), 0\},$$

para todo $x \in \Omega$. Nesse caso, vale que $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$.

3.1 Método de aproximação para soluções

Para $p > 1$, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita uma solução fraca do problema (3.2) se a identidade

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u)v \, dx \tag{3.3}$$

é satisfeita para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

O funcional energia associado ao problema (3.2) é definido por

$$I_p(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx, \, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.4}$$

Este funcional é bem definido para todo $1 < p < N$. De fato, pela hipótese (f_3), temos

$$|F(u)| = \left|\int_0^u f(s)\, ds\right| \leq c_1|u| + \frac{c_2}{q}|u|^q \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega |F(u)| \, dx \leq c_1 \int_\Omega |u| \, dx + \frac{c_2}{q}\int_\Omega |u|^q \, dx.$$

Assim,

$$\int_\Omega F(u) \, dx \leq c_1\|u\|_{L^1} + c_3\|u\|_{L^q}^q < \infty$$

pelas imersões de Sobolev, com $q < \dfrac{N}{N-1} < \dfrac{pN}{N-p}$.

Consideremos também o funcional auxiliar

$$\Phi_p(u) := I_p(u) + \frac{p-1}{p}|\Omega|,$$

definido para toda função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

A derivada de Fréchet de Φ_p em u, denotada por $\Phi_p'(u)$, é dada por

$$\Phi_p'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f(u)v \, dx, \, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lema 3.4. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\Phi_p(u) < \infty$, para todo $p > 1$. Então, a família $(\Phi_p(u))_{p>1}$ é não decrescente.*

Demonstração. De fato, seja $1 < p_1 \leq p_2 < N$. Pela desigualdade de Young, com expoentes $\dfrac{p_2}{p_1}$ e $\dfrac{p_2}{p_2 - p_1}$, obtemos

$$|\nabla u|^{p_1}.1 = |\nabla u|^{p_1} \leq \frac{p_1}{p_2}|\nabla u|^{p_2} + \frac{p_2 - p_1}{p_2} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Integrando ambos os lados sobre Ω, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1} dx \leq \frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2} \, dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2}|\Omega|.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $\dfrac{1}{p_1}$, temos

$$\frac{1}{p_1}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1}\,dx \leq \frac{1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,dx + \frac{p_2-p_1}{p_1p_2}|\Omega|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1}\,dx + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)\,dx \\
&\leq \frac{1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,dx + \frac{p_2-p_1}{p_1p_2}|\Omega| + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)\,dx \\
&= \frac{1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}\,dx + \frac{p_2-1}{p_2}|\Omega| - \int_\Omega F(u)\,dx \\
&= \Phi_{p_2}(u). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Como $\Phi_{p_1}(u) \leq \Phi_{p_2}(u)$ para $p_1 \leq p_2$, temos que a família $(\Phi_p(u))_{p>1}$ é não decrescente. ■

Observação 3.5. *Note que*

$$\frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = \frac{f(s)}{|s|^\alpha}\,|s|^{\alpha-(p-1)}.$$

Assim, pela hipótese (f_2), segue que

$$\limsup_{s\to 0}\frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0.$$

Esse comportamento próximo da origem, combinado com a hipótese (f_4), garante a geometria do funcional energia auxiliar Φ_p. Mais precisamente, para cada $u \neq 0$, a função $t \mapsto \Phi_p(tu)$ cresce para t pequeno e passa a decrescer para t grande, e possui um único ponto de máximo, correspondente ao único elemento da variedade de Nehari ao longo da direção u.

Como os funcionais Φ_p e I_p diferem apenas por uma constante, o problema (3.2) pode ser analisado variacionalmente por meio de qualquer um deles.

Denotemos por $\mathcal{N}_p$ a variedade de Nehari usual associada ao funcional Φ_p, definida por

$$\mathcal{N}_p = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\middle|\; u \neq 0 \text{ e } \Phi_p'(u)u = 0\right\}.$$

Além disso, para todo p, a variedade de Nehari nodal associada a (3.2) está bem definida e é dada por

$$\mathcal{N}_p^\pm = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid u^\pm \neq 0 \text{ e } \Phi_p'(u^\pm)u^\pm = 0\right\}.$$

Note que $\mathcal{N}_p$ contém todas as soluções fracas não-triviais de (3.2). De fato, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução, então $\Phi_p'(u)v = 0$, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Em particular, $\Phi_p'(u)u = 0$.

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\Phi_p'(u)u^\pm &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla u^\pm\,dx - \int_\Omega f(u)u^\pm\,dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&= \int_\Omega |\nabla u^\pm|^{p-2}\nabla u^\pm\cdot\nabla u^\pm\,dx - \int_\Omega f(u^\pm)u^\pm\,dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\
&= \Phi_p'(u^\pm)u^\pm.
\end{aligned}$$

Dessa forma, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução nodal de (3.2), então $u \in \mathcal{N}_p^{\pm}$, pois

$$\Phi_p'(u^{\pm})u^{\pm} = \Phi_p'(u)u^{\pm} = 0.$$

De maneira análogo a [7], é possível mostrar que existe $u_p \in \mathcal{N}_p^{\pm}$ satisfazendo

$$\Phi_p(u_p) = \min_{v \in \mathcal{N}_p^{\pm}} \Phi_p(v) \tag{3.6}$$

e que u_p é uma solução nodal de (3.2) com energia mínima entre todas as soluções que mudam de sinal.

Em particular,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u_p)v \, dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.7}$$

Pode-se verificar ainda que

$$\Phi_p(u_p) = \max_{t,s>0} \Phi_p(tu_p^+ + su_p^-). \tag{3.8}$$

Além disso, dado qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $u^{\pm} \neq 0$, existem $t, s > 0$ tais que

$$tu^+ + su^- \in \mathcal{N}_p^{\pm}.$$

Lema 3.6. *A família $(\Phi_p(u_p))_p$ é não decrescente para $1 < p < N$.*

Demonstração. Sejam $1 < p_1 \leq p_2 < N$. Tomemos $u_{p_1} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $u_{p_2} \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ satisfazendo (3.6). Como $p_2 \geq p_1$, segue que $W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Além disso, dado que $(u_{p_2})^{\pm} \neq 0$, existem $t, s > 0$ tais que

$$t(u_{p_2})^+ + s(u_{p_2})^- \in \mathcal{N}_{p_1}^{\pm}. \tag{3.9}$$

Então, de (3.5), (3.6), (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi_{p_2}(u_{p_2}) &= \max_{t_0,s_0>0} \Phi_{p_2}(t_0u_{p_2}^+ + s_0u_{p_2}^-) \\
&\geq \Phi_{p_2}\left(t_0u_{p_2}^+ + s_0u_{p_2}^-\right) \\
&\geq \Phi_{p_1}\left(t_0u_{p_2}^+ + s_0u_{p_2}^-\right) \\
&\geq \Phi_{p_1}\left(u_{p_1}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a família $(\Phi_p(u_p))_p$ é não decrescente para $1 < p < N$. ■

Lema 3.7. *Para $1 < \overline{p} < N$, a família $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $1 < \overline{p} < N$ fixo. Pelo Lema 3.6, obtemos

$$\Phi_p(u_p) \leq \Phi_{\overline{p}}(u_{\overline{p}}) =: C, \ \forall 1 < p < \overline{p}. \tag{3.10}$$

Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx \leq C, \ \forall 1 < p < \overline{p}.$$

Note que $u_p \in \mathcal{N}_p$, logo $\Phi_p'(u_p)u_p = 0$. Assim, usando (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} C &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa}f(u_p)u_p - F(u_p)\right) dx, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $1 < p < \overline{p}$.

Pela hipótese (f_4), existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s, \ \forall s \neq 0,$$

o que implica

$$\frac{1}{\kappa}f(s)s - F(s) \geq 0, \ \forall s \neq 0.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa}f(u_p)u_p - F(u_p)\right) dx \geq 0. \tag{3.12}$$

Portanto, de (3.11) e de (3.12), obtemos

$$C \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx. \tag{3.13}$$

Concluímos, pela desigualdade de Young e por (3.13), que

$$\begin{aligned} \|u_p\|_{BV} &= \int_\Omega |\nabla u_p| \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_p| \cdot 1 \, dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx + \frac{p-1}{p}\int_\Omega 1 \, dx \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\ &\leq \frac{C}{p} + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\ &\leq C_1, \end{aligned}$$

onde $C_1 = C + |\Omega|$. Isso prova o resultado. ■

A partir do Lema 3.7 e das imersões compactas dos espaços de Sobolev, segue que existe $u_0 \in BV(\Omega)$ tal que

$$u_p \to u_0 \text{ em } L^r(\Omega), \ \forall 1 \leq r < 1^*,$$

e

$$u_p \to u_0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

quando $p \to 1^+$.

3.2 Demonstração do Teorema 3.3

Lema 3.8. *Existe $z \in X_N$ com $\|z\|_\infty \leq 1$, tal que*

$$-\operatorname{div} z = f(u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Fixemos $1 < r < \infty$ e seja $p > 1$ tal que $r < p' = \dfrac{p}{p-1}$. Então,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left||\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\right|^r dx &= \int_\Omega |\nabla u_p|^{(p-1)r} \cdot 1\, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx\right)^{\frac{r}{p'}} \left(\int_\Omega 1\, dx\right)^{1-\frac{r}{p'}} \\ &\leq C^{\frac{r}{p'}} |\Omega|^{1-\frac{r}{p'}}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\||\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\|_{L^r(\Omega)} \leq C^{\frac{1}{p'}} |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}}. \tag{3.14}$$

Como

$$\lim_{p\to 1^+} C^{\frac{1}{p'}} = C^0 = 1$$

e

$$\lim_{p\to 1^+} |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}} = |\Omega|^{\frac{1}{r}},$$

então $(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p)_p$ é limitada em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Pelo fato de que L^r é reflexivo, existe $z_r \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \rightharpoonup z_r \text{ em } L^r$$

quando $p \to 1^+$.

De (3.14) e fazendo $p \to 1^+$, pela semicontinuidade inferior fraca da norma, temos

$$\|z\|_{L^r(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{p\to 1^+} C^{\frac{1}{p'}} |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}} = |\Omega|^{\frac{1}{r}}.$$

Agora, fazendo $r \to +\infty$, temos

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{p\to+\infty} |\Omega|^{\frac{1}{r}} = 1.$$

Por um argumento diagonal, pode-se provar que z_r não depende de r e, portanto, será denotado por z.

Em particular, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{p\to 1^+} \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega z \cdot \nabla\varphi\, dx.$$

Além disso, pela hipótese de crescimento sobre f e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega f(u_p)\varphi\, dx \to \int_\Omega f(u_0)\varphi\, dx.$$

Portanto, passando o limite na equação fraca dada por (3.3), obtemos

$$\int_\Omega z \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f(u_0)\varphi\, dx,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

ou seja,

$$-\operatorname{div} z = f(u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.15}$$

■

Observação 3.9. *Note que $f(u_0) \in L^N(\Omega)$. De fato, da hipótese (f_3), segue que*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u_0)|^N &\leq \int_\Omega |c_1 + c_2|u_0|^{q-1}|^N \, dx \\ &\leq \int_\Omega 2^N.(c_1^N + c_2^N |u_0|^{N(q-1)}| \, dx \\ &= c_3|\Omega| + c_4 \int_\Omega |u_0|^{N(q-1)} \, dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\dfrac{1^*}{N(q-1)}$ *e o seu conjugado* $\left(\dfrac{1^*}{N(q-1)}\right)'$, *obtemos*

$$\int_\Omega |f(u_0)|^N \leq c_3|\Omega| + c_5 \left(\int_\Omega |u_0|^{1^*} \, dx\right)^{\frac{N(q-1)}{1^*}} < +\infty.$$

Observe ainda que $\frac{1^*}{N(q-1)} > 1$, *pois* $1 < q < 1^*$. *Da identidade* (3.15) *e do fato de que* $f(u_0)$ *é uma distribuição gerada por uma função em* L^N, *segue que* (3.15) *vale em* $L^N(\Omega)$ *e, portanto,* $\operatorname{div} z \in L^N(\Omega)$.

A observação a seguir será útil no Lema 3.11.

Observação 3.10. *Pelo Teorema de Riesz-Alexandroff [6, Teorema 2.4.6], duas medidas de Radon μ e ν em Ω são iguais se, e somente se,*

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_\Omega \varphi \, d\nu, \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Lema 3.11. *A função u_0 e o campo vetorial z satisfazem a seguinte igualdade no sentido das medidas de Radon em Ω*

$$(z, Du_0) = |Du_0|.$$

Demonstração. Como $\|z\|_\infty \leq 1$, segue que

$$(z, Du_0) \leq |Du_0|,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \varphi(z, Du_0) \leq \int_\Omega \varphi |Du_0|, \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \ \varphi \geq 0.$$

De fato, para todo conjunto boreliano $B \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}\int_B (z, Du_0) &\leq \left| \int_B (z, Du_0) \right| \\ &\leq \|z\|_\infty \int_B |Du_0| \\ &\leq \int_B |Du_0|.\end{aligned}$$

Portanto, basta demonstrar a desigualdade oposta, ou seja, que

$$\langle (z, Du_0), \varphi \rangle \geq \int_\Omega \varphi |Du_0|,$$

para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$.

Para isso, tomemos $u_p\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste em (3.3). Então,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla(u_p\varphi)\, dx = \int_\Omega f(u_p)u_p\varphi\, dx. \tag{3.16}$$

Pela regra do produto, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot (\varphi\nabla u_p + u_p\nabla\varphi)\, dx = \int_\Omega f(u_p)u_p\varphi\, dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p\, dx + \int_\Omega u_p|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f(u_p)u_p\varphi\, dx.$$

Estudemos a seguir o comportamento de cada termo da equação acima quando $p \to 1^+$. Começamos analisando o primeiro termo. Para $\varphi \in C_c(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, pela definição de variação total, temos

$$\int_\Omega \varphi|Du_0| := \sup\left\{ \int_\Omega u_0 \ \mathrm{div}\,\psi\, dx \;\middle|\; \psi \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^N),\ |\psi(x)| \leq \varphi(x) \right\}.$$

Escolhendo $\psi \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ arbitrário com $|\psi| \leq \varphi$, por integração por partes, chegamos a

$$\int_\Omega u_p \ \mathrm{div}\,\psi\, dx = -\int_\Omega \nabla u_p \cdot \psi\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u_p|\, \varphi\, dx.$$

Usando o fato que $u_p \to u_0$ em $L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_0 \ \mathrm{div}\,\psi\, dx &= \lim_{p\to 1^+}\int_\Omega u_p \ \mathrm{div}\,\psi\, dx \\ &\leq \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega |\nabla u_p|\, \varphi\, dx.\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as ψ, segue que

$$\int_\Omega \varphi|Du_0| \leq \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|\, dx. \tag{3.17}$$

Concluímos, pela desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi|Du_0| &\leq \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p| dx \\ &\leq \liminf_{p\to 1^+}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p}\int_\Omega \varphi dx\right) \\ &= \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p dx.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Para o segundo termo, a convergência forte $u_p\nabla\varphi \to u_0\nabla\varphi$ em $(L^r(\Omega))^N$, combinada com o fato de que $|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \rightharpoonup z$ fracamente em $(L^{r'}(\Omega))^N$, assegura que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot (u_p\nabla\varphi)\, dx \to \int_\Omega z \cdot (u_0\nabla\varphi)\, dx \tag{3.19}$$

quando $p \to 1^+$.

Por fim, no terceiro termo, a convergência q.t.p. de u_p para u_0, aliada à hipótese (f_3), permite a aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, de modo que

$$\lim_{p\to 1^+}\int_\Omega f(u_p)u_p\varphi\,dx = \int_\Omega f(u_0)u_0\varphi\,dx. \tag{3.20}$$

Portanto, de (3.15), (3.18), (3.19) e (3.20), temos que

$$\begin{aligned}
\langle (z, Du_0), \varphi\rangle &= -\int_\Omega \varphi u_0 \text{ div } z\,dx - \int_\Omega u_0 z\cdot\nabla\varphi\,dx\\
&= \int_\Omega f(u_0)u_0\varphi\,dx - \int_\Omega u_0 z\cdot\nabla\varphi\,dx\\
&= \lim_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega f(u_p)u_p\varphi\,dx - \int_\Omega u_p|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla\varphi\,dx\right)\\
&= \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p dx\\
&\geq \int_\Omega \varphi|Du_0|,
\end{aligned}$$

o que implica $(z, Du_0) = |Du_0|$. Isso completa a demonstração. ■

Lema 3.12. *A função u_0 satisfaz $[z,\nu]\in \text{sign}(-u_0)$ em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Devemos provar que

$$|u_0| + [z,\nu]\,u_0 = 0\ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p. em } \partial\Omega.$$

Note que

$$|[z,\nu]\,u_0| \leq \|z\|_\infty\,|u_0| \leq |u_0|\text{-q.t.p. em } \partial\Omega.$$

e, portanto,

$$|u_0| + [z,\nu]\,u_0 \geq 0\text{-q.t.p. em } \partial\Omega. \tag{3.21}$$

Agora, para $\varphi\in C_0^1(\Omega)$, consideremos $(u_p-\varphi)\in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste em (3.3). Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla(u_p-\varphi)\,dx = \int_\Omega f(u_p)(u_p-\varphi)\,dx,$$

o que implica

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla u_p\,dx - \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(u_p)(u_p-\varphi)\,dx$$

e, portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p\,dx = \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega f(u_p)(u_p-\varphi)\,dx. \tag{3.22}$$

Pela desigualdade de Young, segue que

$$p\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u_p|^p\,dx + (p-1)|\Omega|. \tag{3.23}$$

Substituindo (3.22) em (3.23), obtemos

$$p\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega f(u_p)(u_p-\varphi)\,dx + (p-1)|\Omega|.$$

Fazendo $p \to 1^+$ na equação anterior, resulta

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to 1^+} p\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx &\le \int_\Omega z\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega f(u_0)(u_0-\varphi)\,dx\\ &= -\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,z\,dx - \int_\Omega f(u_0)\varphi\,dx + \int_\Omega f(u_0)u_0\,dx.\end{aligned}$$

Decorre, de (3.15) e da Observação 3.9, que

$$-\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}\,z\,dx = \int_\Omega f(u_0)\,\varphi\,dx.$$

Logo,

$$\limsup_{p\to 1^+} p\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx \le \int_\Omega f(u_0)u_0\,dx = -\int_\Omega u_0\ \mathrm{div}\,z\,dx.$$

Por fim, usando a Fórmula de Green (2.7) e o Lema 3.11, obtemos que

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to 1^+} p\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx &= -\int_\Omega u_0\ \mathrm{div}\,z\,dx\\ &= \int_\Omega (z,Du_0) - \int_{\partial\Omega}[z,\nu]\,u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}\\ &= \int_\Omega |Du_0| - \int_{\partial\Omega}[z,\nu]\,u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Observemos que, pela semicontinuidade inferior da norma $BV(\Omega)$ com respeito à convergência em $L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega}|u_0|\,d\mathcal{H}^{N-1} &\le \liminf_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx + \int_{\partial\Omega}|u_p|\,d\mathcal{H}^{N-1}\right)\\ &= \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega |\nabla u_p|\,dx\\ &= \int_\Omega |Du_0| - \int_{\partial\Omega}[z,\nu]\,u_0\,d\mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Omega}(|u_0| + [z,\nu]\,u_0)\ d\mathcal{H}^{N-1} \le 0.\tag{3.25}$$

Então, levando em conta (3.21) e (3.25), deduzimos que

$$|u_0| + [z,\nu]\,u_0 = 0\ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p. em } \partial\Omega,$$

o que completa a prova. ■

Até agora, obtivemos a existência de $u_0 \in BV(\Omega)$ para a qual existe $z \in X^N(\Omega)$ tal que $\|z\|_\infty \le 1$ e

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,z &= f(u_0)\text{ em }\mathcal{D}'(\Omega),\\ (z,Du_0) &= |Du_0|\text{ em }\mathcal{M}(\Omega),\\ [z,\nu] &\in \mathrm{sign}(-u_0)\text{ sobre }\partial\Omega.\end{cases}$$

Resta mostrar que $u_0^\pm \neq 0$. Para isso, introduzimos o funcional

$$\begin{aligned}&\Phi : BV(\Omega)\to\mathbb{R}\\ &\qquad u \mapsto \Phi(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega}|u|\,d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)\,dx.\end{aligned}$$

Temos que $\Phi(u) \leq \Phi_p(u)$, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, pela desigualdade de Young,

$$\int_\Omega |\nabla u|\, dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega|.$$

Como

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|\, dx,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

obtemos que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_\Omega |\nabla u| - \int_\Omega F(u)\, dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| - \int_\Omega F(u)\, dx \\ &= \Phi_p(u).\end{aligned}$$

Observe também que

$$\lim_{p\to 1^+} \Phi_p(u_p) = \Phi(u_0). \tag{3.26}$$

De fato, da convergência $u_p \to u_0$ em L^1, quando $p \to 1^+$, temos que

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{BV} &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0|\, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_\Omega (z, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0[z,\nu]\, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= -\int_\Omega u_0 \operatorname{div}(z)\, dx \\ &= \int_\Omega f(u_0)u_0\, dx \\ &= \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_\Omega f(u_p)u_p\, dx \\ &= \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Além disso, de $u_p \to u_0$ q.t.p. em Ω e da hipótese (f_3), usando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_\Omega F(u_0)\, dx = \lim_{p\to 1^+} \int_\Omega F(u_p)\, dx. \tag{3.28}$$

Como

$$\Phi_p(u_p) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx - \int_\Omega F(u_p)\, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega|,$$

substituindo (3.27) e (3.28) e lembrando que $\dfrac{p-1}{p}|\Omega| \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 1^+} \Phi_p(u_p) &= \lim_{p\to 1^+} \left[\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx - \int_\Omega F(u_p)\, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega|\right] \\ &= \|u_0\|_{BV} - \int_\Omega F(u_0)\, dx \\ &= \Phi(u_0).\end{aligned}$$

Fixe $0 < \alpha_0 < \min\left\{\alpha, \dfrac{1}{N-1}\right\}$. Então, pela hipótese (f_2), temos $\limsup\limits_{|s|\to 0} \dfrac{f(s)}{|s|^{\alpha_0}} = 0$.

De fato, observe que

$$\frac{f(s)}{|s|^{\alpha_0}} = \frac{f(s)}{|s|^{\alpha_0}}.\frac{|s|^{\alpha}}{|s|^{\alpha}} = \frac{f(s)}{|s|^{\alpha}}.|s|^{\alpha-\alpha_0}.$$

Consequentemente, $\lim\limits_{|s|\to 0} \dfrac{f(s)}{|s|^{\alpha_0}} = 0$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|s| < \delta$, então

$$\left|\frac{f(s)}{|s|^{\alpha_0}}\right| < \varepsilon \Longrightarrow |f(s)| < \varepsilon.|s|^{\alpha_0}. \tag{3.29}$$

Por outro lado, pela hipótese (f_3), existe $M > 0$ tal que, se $|s| > M$, então

$$|f(s)| \leq c_3|s|^{q-1}. \tag{3.30}$$

De fato, fixado $c_3 > 2c_2$, basta tomar $M > 0$ tal que $c_1 < c_2|s|^{q-1}$, para todo $|s| > M$. Assim, se $|s| > M$, então

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq c_1 + c_2|s|^{q-1} \\ &< 2c_2|s|^{q-1} \\ &< c_3|s|^{q-1}. \end{aligned}$$

Seja

$$c_4 = \max_{\delta<|s|<M} \frac{|f(s)|\,.\,\varepsilon|s|^{\alpha_0}}{|s|^{q-1}}.$$

Então, se $C_\varepsilon = \max\{c_3, c_4\}$, note que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s|^{\alpha_0} + C_\varepsilon|s|^{q-1}, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

De fato, consideremos os seguintes casos:

Caso 1: Se $0 \leq |s| < \delta$, então

$$|f(s)| < \varepsilon|s|^{\alpha_0} \leq \varepsilon|s|^{\alpha_0} + C_\varepsilon|s|^{q-1}.$$

Caso 2: Se $|s| > M$, temos que

$$\begin{aligned} |f(s)| &< c_3|s|^{q-1} \\ &\leq C_\varepsilon|s|^{q-1} \\ &\leq \varepsilon|s|^{\alpha_0} + C_\varepsilon|s|^{q-1}. \end{aligned}$$

Caso 3: Se $\delta \leq |s| \leq M$, segue que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s|^{\alpha_0} + c_4|s|^{q-1} \leq \varepsilon|s|^{\alpha_0} + C_\varepsilon|s|^{q-1},$$

pois

$$c_4 \geq \frac{|f(s)| - \varepsilon|s|^{\alpha_0}}{|s|^{q-1}} \iff |f(s)| \leq \varepsilon|s|^{\alpha_0} + c_4|s|^{q-1}.$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon |s|^{\alpha_0} + C_\varepsilon |s|^{q-1}, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{\alpha_0 + 1}|t|^{\alpha_0+1} + \frac{C_\varepsilon}{q}|t|^q \\ &= d_1\varepsilon|t|^{\alpha_0+1} + d_2|t|^q, \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Como $0 < \alpha_0 < 1^* - 1$, então $1 < \alpha_0 + 1 < 1^*$. Assim, $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha_0+1}(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \|u\|_{BV(\Omega)} - \int_\Omega F(u)\,dx \\ &\geq \|u\|_{BV(\Omega)} - d_1\varepsilon \int_\Omega |u|^{\alpha_0+1}\,dx - d_2 \int_\Omega |u|^q\,dx. \end{aligned}$$

Observe que, pelas imersões de Sobolev,

$$\|u\|_{L^{\alpha_0+1}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^{\alpha_0+1}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha_0+1}} \leq d_3\|u\|_{BV(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq d_4\|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \|u\|_{BV(\Omega)} - d_5\varepsilon\|u\|^{\alpha_0+1}_{BV(\Omega)} - d_6\|u\|^q_{BV(\Omega)} \\ &= \|u\|_{BV(\Omega)}\left(1 - d_5\varepsilon\|u\|^{\alpha_0}_{BV(\Omega)} - d_6\|u\|^{q-1}_{BV(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Seja $\rho > 0$ tal que, se $0 < \|u\|_{BV(\Omega)} < \rho$, então

$$1 - d_5\varepsilon\|u\|^{\alpha_0}_{BV(\Omega)} - d_6\|u\|^{q-1}_{BV(\Omega)} > \frac{1}{2}.$$

Assim, se $u \in BV(\Omega)$ e $0 < \|u\|_{BV(\Omega)} < \rho$, então

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{BV}.$$

Como $u_p \in \mathcal{N}_p^\pm$, temos que $s = 1$ é ponto de máximo de $s \mapsto \Phi_p(su_p^\pm)$. Logo, para $\rho \in (1, \overline{p})$,

$$\begin{aligned} \Phi_p(u_p^\pm) &\geq \Phi_p\left(\frac{\rho u_p^\pm}{\|u_p^\pm\|_{W^{1,p}}}\right) \\ &\geq \Phi\left(\frac{\rho u_p^\pm}{\|u_p^\pm\|_{W^{1,p}}}\right) \\ &\geq \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $1 < \rho < \overline{p}$, temos que

$$\frac{\rho}{2} \leq \Phi_p(u_p^\pm) = \int_\Omega \left(\frac{1}{p}f(u_p^\pm)u_p^\pm - F(u_p^\pm)\right)\,dx + \frac{p-1}{p}|\Omega|. \tag{3.33}$$

Se $u_p^\pm \to 0$ em $BV(\Omega)$, então, por (f_3) e pelo Teorema da Convergência Dominada, a desigualdade (3.33) falha para p próximo de 1. Logo, $u_0^\pm \neq 0$.

Isso encerra a demonstração do Teorema 3.3.

Capítulo

4

Soluções em $BV(\Omega)$ para problema com o operador de curvatura média

A segunda equação a ser estudada, utilizando a técnica de aproximação, envolve o operador de curvatura média. Para isso, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, com $N \geq 2$ e $\lambda > 0$. O problema a ser considerado é o seguinte:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) &= \lambda\, f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Sobre a função f, consideremos as seguintes hipóteses:

(f_1) Existem $0 < q < 1$ e uma constante $c_1 > 0$, tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 |s|^{q-1},\ \forall s \in \mathbb{R} \text{ e q.t.p. } x \in \Omega;$$

(f_2) $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\,ds \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}$ e existe $t_0 > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega F(x,t_0)\,dx > 0$;

(f_3) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (uniforme com respeito a $x \in \Omega$) tal que, se $|s| < \delta$, então

$$|f(x,s)| < \varepsilon \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

(f_4) A função $f(x,s)$ é de Carathéodory.

Observação 4.1. *Das hipóteses (f_3) e (f_4), segue que*

$$f(x,0) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Observação 4.2. *As hipóteses (f_1) e (f_3) implicam que existe $C > 0$, tal que*

$$f(x,s) \leq C,\ \forall s \in \mathbb{R} \text{ e q.t.p. } x \in \Omega.$$

Inicialmente, definiremos a noção de solução para o problema (4.1).

Definição 4.3. *Dizemos que $u \in BV(\Omega)$ é uma solução de (4.1) se existir $z \in X_N(\Omega)$ tal que $\|z\|_\infty \leq 1$ e*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} z &= \lambda\, f(x,u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (z, Du) &= \sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1-|z|^2}\,\mathcal{L}^N \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [z,\nu] &\in \operatorname{sign}(-u)\,\mathcal{H}^{N-1} \text{ q.t.p. } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

O principal resultado deste capítulo é o teorema a seguir.

Teorema 4.4. *Se f satisfaz as hipóteses (f_1)-(f_4), então existe $\lambda^* > 0$ tal que, para $\lambda > \lambda^*$, existe uma solução não trivial $u \in BV(\Omega)$ de (4.1) no sentido de (4.2).*

4.1 Resultados de convergência em $BV(\Omega)$

A seguir, estudaremos a semicontinuidade de certos funcionais definidos em $BV(\Omega)$ e $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Primeiramente, dado $u \in BV(\Omega)$, definimos a medida

$$\sqrt{1+|Du|^2} = |(\mathcal{L}^N, Du)|,$$

ou seja, $\sqrt{1+|Du|^2}$ é definida como a variação total da medida de Radon $N+1$ dimensional $(\mathcal{L}^N, Du)$. É possível provar que

$$\int_\Omega \sqrt{(1+|Du|^2)} = \sup\left\{ \int_\Omega \left(u \sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + \psi_{N+1} \right) dx \;\middle|\; \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{N+1}),\ \|\psi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Lema 4.5. *Seja $(u_p)_{p>1}$ uma família de funções tal que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$ com $u_p \to u$ em $L^1(\Omega)$. Então,*

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \left(1+|\nabla u_p|^2\right)^{\frac{p}{2}}\, dx.$$

Demonstração. Seja $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R$. Definimos

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad x \in B_R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Então, $\overline{u} \in BV$ e a derivada $D\overline{u}$, de acordo com [6, Exemplo 10.2.2], é dada por

$$D\overline{u} = Du\big|_\Omega + u \cdot \nu \cdot \mathcal{H}^{N-1}\big|_{\partial\Omega}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+|D\overline{u}|^2} &= |(\mathcal{L}^N, D\overline{u})| \\ &= \sqrt{1+|D^a\overline{u}|^2}\mathcal{L}^N + |D^s\overline{u}| \\ &= \sqrt{1+|D^a u|^2}\mathcal{L}^N + |u|\mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\int_{B_R} \sqrt{1+|D\overline{u}|^2} = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{4.3}$$

Então, fixada $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{N+1})$, tomemos

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se} \quad x \in \Omega \\ (0,0,\ldots,0), & \text{se} \quad x \in B_R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Note que $\overline{\varphi} \in C_c^1(B_R, \mathbb{R}^{N+1})$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_i}{\partial x_i} + \overline{\varphi}_{N+1} \right) dx &= \lim_{p \to 1} \int \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{u}_p \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}_i}{\partial x_i} + \overline{\varphi}_{N+1} \right) dx \\ &\leq \liminf_{p \to 1} \int_{B_R} \sqrt{1 + |\nabla u_p|^2}\, dx \\ &\leq \liminf_{p \to 1} \int_{\Omega} (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}}\, dx. \end{aligned}$$

Tomando o supremo do lado esquerdo e usando (4.3), concluímos que

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{p \to 1} \int_{\Omega} (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} dx.$$

■

Lema 4.6. *Seja $(u_p)_{p>1}$ uma família de funções, com $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \in BV(\Omega)$ e $z \in X_N(\Omega)$, tais que*

$$u_p \to u \text{ em } L^1(\Omega)$$

e

$$\frac{\nabla u_p}{(1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \rightharpoonup z \text{ em } L^1(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Então, para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega), \varphi \geq 0$,

$$\int_{\Omega} \varphi \sqrt{1 + |Du|^2} - \int_{\Omega} \varphi \sqrt{1 - |z|^2}\, dx \leq \liminf_{p \to 1^+} \int_{\Omega} \frac{\varphi |\nabla u_p|^2}{(1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx. \tag{4.4}$$

Além disso,

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} - \int_{\Omega} \sqrt{1 - |z|^2} dx + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{p \to 1^+} \frac{|\nabla u_p|^2}{(1 + |\nabla u_p)^{\frac{2-p}{p}}} dx. \tag{4.5}$$

Demonstração. Para $p > 1$, defina $g_p(x) = \frac{1}{p}(1 + |x|^2)^{\frac{p}{2}}$, então $\nabla g_p(x) = \frac{x}{(1 + |x|^2)^{\frac{2-p}{2}}}$.

Denotemos por

$$z_p = \frac{\nabla u_p}{(1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} = (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_p = \nabla g_p(\nabla u_p).$$

Pelo Exemplo 2.38, ao considerar $x = \nabla u_p$ e $x^* = z_p = \nabla g_p(\nabla u_p)$, temos

$$\nabla u_p \cdot z_p = g_p(\nabla u_p) + g_p^*(z_p).$$

Assim, para $p > 1$, obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi |\nabla u_p|^2}{(1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \varphi (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} + \int_{\Omega} \varphi g_p^*(z_p), \tag{4.6}$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Para $1 < p < 1 + \varepsilon$, pelo Exemplo 2.38, segue que

$$g_p^*(z_p) \geq g_{1+\varepsilon}^*(z_p). \tag{4.7}$$

Além disso, como $g_{1+\varepsilon}^*$ é convexa, segue que o funcional $z \mapsto \displaystyle\int_\Omega g_{1+\varepsilon}^*(z)$ é fracamente semicontínuo inferiormente em $L^1(\Omega)$. Logo, de (4.7), temos

$$\begin{aligned} \liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \varphi g_p^*(z_p) &\geq \liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \varphi g_{1+\varepsilon}^*(z_p) \\ &\geq \int_\Omega \varphi g_{1+\varepsilon}^*(z). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ em (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \varphi g_p^*(z_p) &\geq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\Omega \varphi g_{1+\varepsilon}^*(z) \\ &= -\int_\Omega \varphi\sqrt{1-|z|^2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Calculando o limite inferior em (4.6) quando $p \to 1^+$ e utilizando (4.9), segue que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{\varphi|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \geq \liminf_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_\Omega \varphi(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} - \int_\Omega \varphi\sqrt{1-|z|^2}.$$

Portanto, segue do Lema 4.5 que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{\varphi|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \geq \int_\Omega \varphi\sqrt{1+|Du|^2} - \int_\Omega \varphi\sqrt{1-|z|^2},$$

para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega), \varphi \geq 0$. Isso prova (4.4).

Para mostrar (4.5), basta considerar uma bola B de tal forma que $\Omega \subset\subset B$, considerar as extensões $\overline{u_p}$ e $\overline{u}$ de u_p e u, respectivamente, por zero fora de Ω, e observar que:

$$\int_B \sqrt{1+|D\overline{u}|^2} = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

■

4.2 Existência por esquema de aproximação

Seja $p > 1$. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left((1+|Du|^2)^{\frac{p-2}{2}}Du\right) &= \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

em que f satisfaz as condições (f_1)-(f_4).

Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (4.10) se

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)v\, dx,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.11}$$

Associamos ao problema (4.10) o funcional energia $J_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega (1+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}}\, dx - \lambda\int_\Omega F(x,u)\, dx. \tag{4.12}$$

Lema 4.7. *O funcional J_p é coercivo, limitado inferiormente e possui um mínimo global.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que J_p é coercivo e limitado inferiormente. Comecemos analisando o primeiro termo do funcional. Como $p > 1$, temos que

$$\int_\Omega \left(1 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx := \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Para o segundo termo, utilizando a hipótese (f_1), obtemos

$$\begin{aligned} |F(x,t)| &= \left| \int_0^t f(x,s)\, ds \right| \\ &\leq \int_0^{|t|} |f(x,s)|\, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} c_1 s^{q-1}\, ds \\ &= c_1 \int_0^{|t|} s^{q-1}\, ds \\ &= \frac{c_1}{q}|t|^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F(x,t) \leq C_1 |t|^q.$$

Assim,

$$J_p(u) \geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_1\lambda \int_\Omega |u|^q \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^q \, dx &= \int_\Omega |u(x)|^q \cdot 1 \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|\, dx \right)^q |\Omega|^{1-q} \\ &= \|u\|^q_{L^1(\Omega)} |\Omega|^{1-q}. \end{aligned}$$

Logo,

$$J_p(u) \geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_1\lambda \|u\|^q_{L^1(\Omega)}, \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Então,

$$J_p(u) \geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_1\lambda \|u\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Note que, se $\|u\| \to +\infty$, como $q < p$, então $J_p(u) \to +\infty$, ou seja, o funcional é coercivo. Ainda por essa desigualdade, J_p é limitado inferiormente. Dessa forma, existe um número real β_p tal que

$$\beta_p = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p.$$

Seja $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência minimizante, ou seja, $J_p(v_n) \to \beta_p$. A coercividade de J_p implica que (v_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, como J_p é coercivo, temos que se $\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty$, então $J_p(v_n) \to +\infty$. No entanto, sabemos que $J_p(v_n) \to \beta_p < +\infty$, o que é uma contradição caso $\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ não seja limitada.

Ainda, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e, portanto, toda sequência limitada possui uma subsequência que converge fracamente. Então, existe $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup u_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Além disso, como a aplicação $u \mapsto \int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{p/2} dx$ é convexa, ela também é fracamente semicontínua inferiormente. Logo,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}}\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla v_n|^2)^{\frac{p}{2}}\, dx. \tag{4.13}$$

Para o segundo termo do funcional, utilizamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a hipótese (f_1). De fato, para $1 \leq r < p^*$, a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ é compacta. Portanto, a menos de subsequência,

$$v_n \to u_p \text{ fortemente em } L^r(\Omega)$$

e

$$v_n(x) \to u_p(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Em particular,

$$F(x, v_n) \to F(x, u_p) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, pela hipótese (f_1),

$$\begin{aligned} |F(x, v_n)| &\leq \int_0^{|v_n|} |f(x, s)|\, ds \\ &\leq \int_0^{|v_n|} c_1 |s|^{q-1}\, ds \\ &= \frac{c_1}{q}|v_n|^q. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|F(x, v_n)| \leq C|v_n|^q.$$

Como $v_n \to u_p$ em $L^r(\Omega)$, segue que $C|v_n|^q \to C|u_p|^q$ fortemente em $L^1(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega F(x, v_n)\, dx \to \int_\Omega F(x, u_p)\, dx. \tag{4.14}$$

Combinando (4.13) e (4.14) e usando a definição do funcional J_p dada em (4.12), obtemos

$$J_p(u_p) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla v_n|^2)^{p/2} dx - \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x, v_n)\, dx.$$

Por fim, β_p é um minimizante global. De fato,

$$\begin{aligned}\beta_p \leq J_p(u_p) &= \frac{1}{p}\int_\Omega (1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}}\,dx - \lambda\int_\Omega F(x,u_p)\,dx\\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{p}\int_\Omega (1+|\nabla v_n|^2)^{\frac{p}{2}}\,dx - \lim_{n\to\infty}\lambda\int_\Omega F(x,v_n)\,dx\\ &= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p}\int_\Omega (1+|\nabla v_n|^2)^{\frac{p}{2}}\,dx - \lambda\int_\Omega F(x,v_n)\,dx\right]\\ &= \liminf_{n\to\infty} J_p(v_n)\\ &= \beta_p.\end{aligned}$$

Portanto, $J_p(u_p) = \beta_p$, isto é, u_p é um minimizante global de J_p.

Pelas hipóteses (f_1) e (f_4), segue que o funcional J_p é de classe C^1. Consequentemente, u_p é uma solução fraca do problema (4.10). ■

Lema 4.8. *Existe $\overline{p} > 1$ tal que, para todo $1 < p < \overline{p}$, a função $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca não trivial de* (4.10).

Demonstração. Escolha um ponto $x_0 \subset \Omega$ e $r, \delta > 0$ tais que

$$B_r(x_0) \subset \overline{B_{r+\delta}(x_0)} \subset \Omega$$

e

$$\int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)dx > 0, \tag{4.15}$$

que existem por (f_2).

Seja $w : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)\\ t_0, & \text{se} \quad x \in B_r(x_0)\\ \dfrac{t_0}{\delta}(r+\delta-|x-x_0|), & \text{se} \quad x \in B_{r+\delta}(x_0)\setminus B_r(x_0).\end{cases}$$

Note que $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Analisemos o gradiente da função w em cada caso.

Caso 1: Se $x \in \Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)$, então $w(x) = 0$. Logo, $\nabla w(x) = 0$.

Caso 2: Se $x \in B_r(x_0)$, temos que $w(x) = t_0$. Portanto, $\nabla w(x) = 0$.

Caso 3: Se $x \in B_{r+\delta}(x_0) \setminus B_r(x_0)$, segue que $w(x) = \dfrac{t_0}{\delta}(r+\delta-|x-x_0|)$. Para calcular o gradiente de w, observemos que, para cada componente i,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|x-x_0|) = \frac{(x)_i - (x_0)_i}{|x-x_0|}.$$

Dessa forma,

$$\nabla|x-x_0| = \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \quad \Longrightarrow \quad |\nabla|x-x_0|| = 1.$$

Aplicando a regra da cadeia para w, concluímos que

$$\nabla w(x) = \frac{t_0}{\delta}\nabla(r+\delta-|x-x_0|) = -\frac{t_0}{\delta}\frac{x-x_0}{|x-x_0|}.$$

Consequentemente,

$$|\nabla w(x)| = \frac{t_0}{\delta}.$$

Como $\frac{t_0}{\delta} > 0$ e $p > 1$, temos $1 \leq \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}$, o que implica que

$$\int_{\Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)} 1\, dx \leq \int_{\Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)} \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx$$

e

$$\int_{B_r(x_0)} 1\, dx \leq \int_{B_r(x_0)} \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(1 + |\nabla w|^2\right)^{\frac{p}{2}}\, dx &= \int_{\Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)} 1\, dx + \int_{B_r(x_0)} 1\, dx + \int_{B_{r+\delta} \setminus B_r(x_0)} \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\leq \int_{\Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)} \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx + \int_{B_r(x_0)} \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\quad + \int_{B_{r+\delta} \setminus B_r(x_0)} \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&= \int_\Omega \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&= \left(1 + \left(\frac{t_0}{\delta}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} |\Omega|. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\int_\Omega F(x, w)\, dx = \left[\int_{B_r(x_0)} F(x, t_0)\, dx + \int_{B_{r+\delta} \setminus B_r(x_0)} F(x, w(x))\, dx + \int_{\Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)} F(x, 0)\, dx\right].$$

De (f_2) e (f_3), segue que $F(x, 0) = 0$. Logo,

$$\int_{\Omega \setminus B_{r+\delta}(x_0)} F(x, 0)\, dx = 0. \qquad (4.17)$$

Da hipótese (f_2), como $F(x, t) \geq 0$ para todo $t > 0$, segue que

$$\int_{B_{r+\delta}(x_0) \setminus B_r(x_0)} F(x, w(x))\, dx > 0. \qquad (4.18)$$

Logo, de (4.15), (4.17) e (4.18), temos

$$-\lambda \int_\Omega F(x, w)\, dx \leq -\lambda \int_{B_r(x_0)} F(x, t_0)\, dx. \qquad (4.19)$$

A partir da definição do funcional J_p (4.12) e das estimativas (4.16) e (4.19), obtemos que

$$\begin{aligned}
J_p(w) &= \frac{1}{p} \int_\Omega (1 + |\nabla w|^2)^{\frac{p}{2}} dx - \lambda \int_\Omega F(x, w) dx \\
&\leq \frac{1}{p} \left(1 + \frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}} |\Omega| - \lambda \int_{B_r(x_0)} F(x, t_0)\, dx.
\end{aligned}$$

Como, quando $p \to 1^+$, a expressão $\frac{1}{p}\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega|$ converge para $\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}|\Omega|$, segue que, para

$$\lambda^* = \frac{\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}|\Omega|}{\displaystyle\int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)dx},$$

existe $\overline{p} > 1$ tal que, para todo $\lambda > \lambda^*$ e $1 < p < \overline{p}$,

$$\frac{1}{p}\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega| - \lambda\int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)dx < 0.$$

De fato, note que

$$\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}|\Omega| - \lambda^*\int_\Omega F(x,w)\,dx < \left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}|\Omega| - \lambda^*\int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)\,dx = 0.$$

Definimos

$$t_{\lambda^*} := \left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}|\Omega| - \lambda^*\int_\Omega F(x,w)\,dx$$

e consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $t_{\lambda^*} + \varepsilon < 0$. Como

$$\lim_{p\to 1^+}\left[\frac{1}{p}\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega| - \lambda^*\int_\Omega F(x,w)\,dx\right] = t_{\lambda^*},$$

existe $\overline{p} > 1$ tal que, para todo $1 < p < \overline{p}$,

$$\frac{1}{p}\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega| - \lambda^*\int_\Omega F(x,w)\,dx < t_{\lambda^*} + \varepsilon < 0.$$

Então, dados $\lambda > \lambda^*$ e $1 < p < \overline{p}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,w)\,dx &< \frac{1}{p}\left(1+\frac{t_0^2}{\delta^2}\right)^{\frac{p}{2}}|\Omega| - \lambda^*\int_\Omega F(x,w)\,dx\\ &< t_{\lambda^*} + \varepsilon\\ &< 0.\end{aligned}$$

Como u_p é um minimizante do funcional J_p, temos

$$J_p(u_p) \le J_p(w) < 0. \tag{4.20}$$

Mas

$$J_p(0) = \frac{1}{p}\int_\Omega (1+0)^{\frac{p}{2}}\,dx - \lambda\int_\Omega F(x,0)\,dx = \frac{1}{p}|\Omega| > 0.$$

Portanto,

$$J_p(u_p) < 0 < J_p(0)$$

e, assim, u_p é solução fraca não trivial de (4.10), para todo $1 < p < \overline{p}$, desde que $\lambda > \lambda^*$. ■

Nosso objetivo agora é provar que a família $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$. Para $p > 1$ fixo, definimos o funcional $I_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I_p(u) = J_p(u) + \frac{p-1}{p}|\Omega|. \tag{4.21}$$

Lema 4.9. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. A família $(I_p(u))_{1<p<\overline{p}}$ é não decrescente em relação à variável p.*

Demonstração. Sejam $1 < p_1 \leq p_2 < N$ e $u \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ fixo. Aplicando a desigualdade de Young com os expoentes conjugados definidos por $\dfrac{p_2}{p_1}$ e $\dfrac{p_2}{p_2 - p_1}$, tomando $a = (1+|Du|^2)^{\frac{p_1}{2}}$ e $b = 1$, temos

$$\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{p_1}{2}} \leq \frac{p_1}{p_2}\left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{p_2}{2}} + \frac{p_2 - p_1}{p_2}.$$

Integrando ambos os lados sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega \left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{p_1}{2}}\, dx \leq \frac{p_1}{p_2}\int_\Omega \left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{p_2}{2}}\, dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2}|\Omega|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1}\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p_1}{2}}dx + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx \\
&\leq \frac{1}{p_1}\left[\frac{p_1}{p_2}\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p_2}{2}}dx + \frac{p_2-p_1}{p_2}|\Omega|\right] + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{p_2}\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p_2}{2}}dx + \left[\frac{p_2-p_1}{p_1p_2} + \frac{p_1-1}{p_1}\right]|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{p_2}\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p_2}{2}}dx + \left[\frac{p_2-p_1+p_2(p_1-1)}{p_1p_2}\right]|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{p_2}\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p_2}{2}}dx + \left[\frac{p_1p_2-p_1}{p_1p_2}\right]|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{p_2}\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\frac{p_2}{2}}dx + \frac{p_2-1}{p_2}|\Omega| - \lambda\int_\Omega F(x,u)dx \\
&= I_{p_2}(u).
\end{aligned}$$

Logo, a família de funcionais $(I_p(u))_{1<p<\overline{p}}$ é não decrescente em relação a p. ■

Observemos também que u_p é um ponto de mínimo global para o funcional I_p, pois I_p e J_p diferem apenas por uma constante.

Lema 4.10. *Para $1 < p_1 < p_2 < \overline{p}$, temos $I_{p_1}(u_{p_1}) \leq I_{p_2}(u_{p_2})$.*

Demonstração. Como $p_1 < p_2$, temos a inclusão contínua $W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Então, toda função em $W_0^{1,p_2}(\Omega)$ também pertence a $W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Em particular, $u_{p_2} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$.

Note que u_{p_1} é ponto de mínimo global de I_{p_1} e, portanto,

$$I_{p_1}(u_{p_1}) \leq I_{p_1}(u_{p_2}). \tag{4.22}$$

Além disso, do Lema 4.9, temos que

$$I_{p_1}(u_{p_2}) \leq I_{p_2}(u_{p_2}). \tag{4.23}$$

De (4.22) e (4.23), concluímos que

$$I_{p_1}(u_{p_1}) \leq I_{p_2}(u_{p_2}).$$

■

Lema 4.11. *A família $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.*

Demonstração. Vamos provar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx \leq C, \, \forall 1 < p < \overline{p}.$$

De fato, sabemos que

$$I_p(u_p) = \frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} \, dx - \lambda \int_\Omega F(x, u_p) \, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega|. \tag{4.24}$$

Defina $C_0 := I_{\overline{p}}(u_{\overline{p}})$. Pelo Lema 4.10, temos que $I_p(u_p) \leq C_0$. Portanto,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} \, dx \leq C_0 + \lambda \int_\Omega F(x, u_p) \, dx - \frac{p-1}{p}|\Omega|.$$

Observe que $-\dfrac{p-1}{p}|\Omega| \leq 0$, pois $p > 1$ e $|\Omega| > 0$. Logo,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} \, dx \leq C_0 + \lambda \int_\Omega F(x, u_p) \, dx.$$

Da hipótese (f_1) e das imersões de Sobolev, existe uma constante $C' > 0$, tal que

$$\lambda \int_\Omega F(x, u_p) \, dx \leq C'\lambda \|u_p\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} \, dx \leq C_0 + C'\lambda \|u_p\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)}.$$

Como

$$\int_\Omega (1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}} \, dx \geq \int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx = \|u_p\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)},$$

concluímos que

$$\|u_p\|^p_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leq C_0 + \lambda C' \|u_p\|^q_{W^{1,p}_0(\Omega)}.$$

Como $0 < q < 1 < p$, segue que

$$\|u_p\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leq C, \, \forall 1 < p < \overline{p}. \tag{4.25}$$

Aplicando a desigualdade de Young com expoentes conjugados p e $p/(p-1)$ e tomando $a = |\nabla u_p|$, $b = 1$, obtemos

$$|\nabla u_p| \leq \frac{1}{p}|\nabla u_p|^p + \frac{p-1}{p} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Integrando ambos os lados sobre Ω, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_p| \, dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, dx + \frac{p-1}{p}|\Omega|.$$

Usando (4.25), concluímos que

$$\|u_p\|_{BV(\Omega)} \leq C + \frac{p-1}{p}|\Omega| \leq C + |\Omega|.$$

Logo, a sequência (u_p) é limitada em $BV(\Omega)$. ∎

O lema anterior, juntamente com as imersões compactas do espaço $BV(\Omega)$, implica que existe $u \in BV(\Omega)$ tal que, quando $p \to 1^+$,

$$u_p \to u \text{ em } L^r(\Omega),\ \forall 1 \leq r < 1^*, \tag{4.26}$$

e

$$u_p \to u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Agora, estudaremos o comportamento da família de campos vetoriais

$$\left(\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right)_{1<p<\overline{p}}. \tag{4.27}$$

Lema 4.12. *A família* (4.27) *é limitada e equi-integrável em* $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$*, isto é, existem* $C, \alpha > 0$ *tais que, para todo conjunto de Borel* $B \subset \Omega$*,*

$$\left| \int_B \frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx \right| \leq C|B|^\alpha.$$

Demonstração. Do Lema 4.11, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|\, dx \leq C.$$

Note que, para $1 < p < \overline{p}$, temos $(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}} \geq 1$. Logo,

$$\left| \frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right| \leq |\nabla u_p|.$$

Integrando ambos os lados sobre Ω, segue que

$$\int_\Omega \left| \frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right| dx \leq \int_\Omega |\nabla u_p|\, dx \leq C.$$

Observe ainda que, para B um conjunto Boreliano,

$$\int_B |\nabla u_p|\, dx = \int_\Omega |\nabla u_p|\, \chi_B\, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla u_p|\, dx &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\chi_B|^{\frac{p-1}{p}}\, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} |B|^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left| \int_B \frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx \right| &\leq \int_B |\nabla u_p|\, dx \\ &\leq |B|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C|B|^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

■

4.3 Demonstração do Teorema 4.4

De agora em diante, consideraremos o limite $p \to 1^+$ e verificaremos as três propriedades de (4.2) para $u = \lim_{p\to 1^+} u_p$.

Lema 4.13. *Existe $z \in X_N(\Omega)$ tal que $\|z\|_\infty \leq 1$ e*

$$-\operatorname{div}(z) = \lambda f(x,u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Fixemos $1 < r < \infty$ e seja $p > 1$ tal que $r < p' = \dfrac{p}{p-1}$. Note que

$$\left|\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right| \leq \left|\frac{\nabla u_p}{(|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right| = |\nabla u_p|^{p-1}.$$

Assim,

$$\int_\Omega \left|\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right|^r dx \leq \int_\Omega |\nabla u_p|^{(p-1)r} dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{(p-1)r} dx \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx\right)^{\frac{r}{p'}} \left(\int_\Omega 1\, dx\right)^{1-\frac{r}{p'}} \leq C^{\frac{r}{p'}} |\Omega|^{1-\frac{r}{p'}}.$$

Logo,

$$\left\|\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right\|_{L^r(\Omega)} \leq C^{\frac{1}{p'}} |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}}.$$

Como

$$\lim_{p\to 1^+} C^{\frac{1}{p'}} = 1 \text{ e } \lim_{p\to 1^+} |\Omega|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}} = |\Omega|^{\frac{1}{r}},$$

então a família

$$\left(\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)_p$$

é limitada em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$, para todo $1 < r < \infty$.

Fazendo $r \to \infty$,

$$\|z\|_\infty = \lim_{r\to\infty} \|z\|_{L^r(\Omega)} \leq \lim_{r\to\infty} |\Omega|^{\frac{1}{r}} = 1.$$

Como L^r é reflexivo para $1 < r < \infty$, existe $z_r \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \rightharpoonup z_r \text{ em } L^r(\Omega)$$

quando $p \to 1^+$.

Por um argumento diagonal, z_r não depende de r e será denotado simplesmente por z. Portanto,

$$\frac{\nabla u_p}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \rightharpoonup z \text{ em } L^r(\Omega),\ \forall\, 1 < r < \infty. \tag{4.28}$$

Assim, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot \nabla \varphi}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx \to \int_\Omega z \cdot \nabla \varphi\, dx. \tag{4.29}$$

Além disso, por (f_3), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|u_p| < \delta$, então $|f(x, u_p)| < 1$ q.t.p. em $x \in \Omega$.

Note que, para tal δ, podemos decompor Ω como

$$\Omega = \Omega \cap \{x : |u_p(x)| < \delta\} \ \cup \ \Omega \cap \{x : |u_p(x)| \geq \delta\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x, u_p) \cdot \varphi \, dx &= \int_{\Omega \cap \{x : |u_p(x)| < \delta\}} f(x, u_p) \cdot \varphi \, dx + \int_{\Omega \cap \{x : |u_p(x)| \geq \delta\}} f(x, u_p) \cdot \varphi \, dx \\
&\leq \int_{\Omega \cap \{x : |u_p(x)| < \delta\}} 1 \cdot |\varphi| \, dx + \int_{\Omega \cap \{x : |u_p(x)| \geq \delta\}} C_1 |u_p|^{q-1} |\varphi| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |\varphi| \, dx + C_1 \int_\Omega \frac{1}{\delta^{1-q}} |\varphi| \, dx \\
&= \int_\Omega |\varphi| \left(1 + \frac{C_1}{\delta^{1-q}}\right) dx. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada e por (4.26), como

$$u_p \to u \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

temos que

$$f(x, u_p) \ \to \ f(x, u) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e, portanto,

$$\int_\Omega f(x, u_p) \varphi \, dx \ \to \ \int_\Omega f(x, u) \varphi \, dx, \qquad (4.31)$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

A partir de (4.11), (4.29) e (4.31), concluímos, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega z \cdot \nabla \varphi \, dx &= \lim_{p \to 1^+} \int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot \nabla \varphi}{(1 + |\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \, dx \\
&= \lim_{p \to 1^+} \int_\Omega \lambda f(x, u_p) \varphi \, dx \\
&= \lambda \int_\Omega f(x, u) \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Isso prova o resultado. ■

Observação 4.14. *Note que, pela Observação 4.2, temos*

$$\int_\Omega |f(x, u)|^N dx \leq C^N |\Omega| < +\infty.$$

Logo, $f(x, u) \in L^N(\Omega)$ *e, portanto,* $\operatorname{div}(z) \in L^N(\Omega)$.

Lema 4.15. *Seja* $z \in X_N(\Omega)$ *tal que* $\|z\|_\infty \leq 1$. *Então,*

$$(z, Du) = \sqrt{1 + |Du|^2} - \sqrt{1 - |z|^2} \text{ em } \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N). \qquad (4.32)$$

Demonstração. Observe que, no sentido de medidas em Ω (ver [19, Lema 5.5]), temos

$$(z, Du) \leq \sqrt{1+|Du|^2} - \sqrt{1-|z|^2}\,\mathcal{L}^N.$$

Para obter a desigualdade oposta, mostraremos que, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, vale

$$\langle (z, Du), \varphi \rangle \geq \int_\Omega \varphi\,\sqrt{1+|Du|^2} - \int_\Omega \varphi\,\sqrt{1-|z|^2}\,dx. \tag{4.33}$$

Para $p > 1$ fixo e $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$, consideramos $u_p\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste na equação (4.11). Então,

$$\int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot \nabla(u_p\varphi)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u_p)u_p\varphi\,dx. \tag{4.34}$$

Usando a regra do produto $\nabla(u_p\varphi) = \varphi\nabla u_p + u_p\nabla\varphi$, temos

$$\int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot (\varphi\nabla u_p)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx + \int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot (u_p\nabla\varphi)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u_p)u_p\varphi\,dx. \tag{4.35}$$

Como f é uma função de Carathéodory e $u_p \to u$ fortemente em $L^r(\Omega)$, temos que

$$u_p(x) \to u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Pela continuidade de f em s, segue que

$$f(x,u_p(x))u_p(x)\varphi(x) \to f(x,u(x))u(x)\varphi(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, da hipótese (f_3) e pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos

$$\lambda \int_\Omega f(x,u_p)u_p\varphi\,dx \longrightarrow \lambda \int_\Omega f(x,u)u\varphi\,dx. \tag{4.36}$$

Além disso, de (4.28) e do fato de que $u_p\nabla\varphi \to u\nabla\varphi$ forte em $L^{r'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot (u_p\nabla\varphi)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx \longrightarrow \int_\Omega z\cdot(u\nabla\varphi)\,dx. \tag{4.37}$$

Logo, por (4.35), (4.36) e (4.37), segue que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot (\varphi\nabla u_p)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)u\varphi\,dx - \int_\Omega z(u\nabla\varphi)\,dx.$$

Pelo Lema 4.13, temos que $-\operatorname{div}(z) = \lambda f(x,u)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Portanto,

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot (\varphi\nabla u_p)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = -\int_\Omega u\varphi\operatorname{div} z\,dx - \int_\Omega z(u\nabla\varphi)\,dx.$$

Da Definição 2.5, temos que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{\varphi|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \langle (z,Du), \varphi\rangle. \tag{4.38}$$

Por outro lado, pelo Lema 4.6, segue que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{\varphi|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx \geq \int_\Omega \varphi\sqrt{1+|Du|^2}\,dx + \int_{\partial\Omega} \varphi|u|\,d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega \varphi\sqrt{1-|z|^2}\,dx. \tag{4.39}$$

De (4.38) e (4.39), concluímos que

$$\langle (z,Du), \varphi\rangle \geq \int_\Omega \varphi\sqrt{1+|Du|^2}\,dx - \int_\Omega \varphi\sqrt{1-|z|^2}\,dx,$$

o que prova (4.33). ∎

Lema 4.16. *A função u satisfaz*

$$[z,\nu] \in \operatorname{sign}(-u), \text{ em } \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p. em } \partial\Omega.$$

Demonstração. Mostraremos que

$$|u| + [z,\nu]\, u = 0 \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p. em } \partial\Omega.$$

De (2.6), sabemos que

$$|[z,\nu](x)| \leq \|z\|_\infty \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p em } \partial\Omega.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $|u(x)|$, obtemos

$$|[z,\nu](x)|\,|u(x)| \leq \|z\|_\infty\,|u(x)|.$$

Daí

$$|[z,\nu](x)\,u(x)| \leq \|z\|_\infty\,|u(x)|\ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p em } \partial\Omega.$$

Mas $\|z\|_\infty \leq 1$, então

$$|[z,\nu](x)\,u(x)| \leq \|z\|_\infty\,|u(x)| \leq |u(x)|\ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p em } \partial\Omega.$$

Logo,

$$-|u(x)| \leq [z,\nu](x)\,u(x) \leq |u(x)|\ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p em } \partial\Omega,$$

o que implica que

$$|u| + [z,\nu]u \geq 0 \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-q.t.p em } \partial\Omega. \tag{4.40}$$

Agora, para $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, considere $(u_p - \varphi) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste na equação (4.11). Então,

$$\int_\Omega \frac{\nabla u_p \cdot (\nabla u_p - \nabla\varphi)}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u_p)(u_p-\varphi)\,dx.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \int_\Omega \frac{\nabla u_p\cdot\nabla\varphi}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx - \lambda\int_\Omega f(x,u_p)\varphi\,dx + \lambda\int_\Omega f(x,u_p)u_p\,dx. \tag{4.41}$$

De (4.29), segue que

$$\int_\Omega \frac{\nabla u_p\cdot\nabla\varphi}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx \to \int_\Omega z\cdot\nabla\varphi\,dx,\ \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega). \tag{4.42}$$

Além disso, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lambda\int_\Omega f(x,u_p)u_p\,dx \ \to\ \lambda\int_\Omega f(x,u)u\,dx \tag{4.43}$$

e

$$\lambda\int_\Omega f(x,u_p)\varphi\,dx \ \to\ \lambda\int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx. \tag{4.44}$$

Portanto, aplicando (4.42), (4.43) e (4.44) em (4.41) e fazendo $p\to 1^+$, segue que

$$\liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \frac{|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\,dx = \int_\Omega z\cdot\nabla\varphi\,dx - \lambda\int_\Omega f(x,u)\varphi\,dx + \lambda\int_\Omega f(x,u)u\,dx.$$

Da Fórmula de Green (2.7), segue que

$$\int_\Omega \varphi \operatorname{div}(z)\, dx + \int_\Omega z \cdot \nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} [z,\nu]\varphi \, d\mathcal{H}^{N-1},\ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega). \tag{4.45}$$

Como φ tem suporte compacto, o termo do bordo é zero. Então,

$$\int_\Omega \varphi \operatorname{div}(z)\, dx = -\int_\Omega z \cdot \nabla\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega). \tag{4.46}$$

Assim, a partir da equação acima e do Lema 4.13, obtemos

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx = -\int_\Omega \varphi \operatorname{div} z\, dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx - \int_\Omega u \operatorname{div} z\, dx.$$

Usando novamente a Fórmula de Green (2.7) e observando que, pelo Lema 4.13,

$$-\lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx = \int_\Omega \varphi \operatorname{div} z\, dx,$$

segue que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx = \int_\Omega (z, Du) - \int_{\partial\Omega} [z,\nu]u\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Portanto, pelo Lema 4.15,

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} - \int_\Omega \sqrt{1-|z|^2}\, dx - \int_{\partial\Omega} [z,\nu]u\, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{4.47}$$

Por outro lado, pelo Lema 4.6, segue que

$$\liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \frac{|\nabla u_p|^2}{(1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\, dx \geq \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} - \int_\Omega \sqrt{1-|z|^2}\, dx + \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{4.48}$$

Por (4.47) e (4.48), concluímos que

$$-\int_{\partial\Omega} [z,\nu]u\, d\mathcal{H}^{N-1} \geq \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Omega} (|u| + [z,\nu]u)\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0. \tag{4.49}$$

Finalmente, levando em conta (4.40) e (4.49), segue que

$$|u| + [z,\nu]\, u = 0\ \mathcal{H}^{N-1} \text{ q.t.p. em } \partial\Omega.$$

■

Para concluir a prova do Teorema 4.4, resta mostrar u é não trivial. Definimos o funcional $I : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I(v) = \int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2}\, dx + \int_{\partial\Omega} |v|\, d\mathcal{H}^{N-1} - \lambda \int_\Omega F(x,v)\, dx.$$

Do Lema 4.5, temos que

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \liminf_{p\to 1^+} \int_\Omega \left(1+|\nabla u_p|^2\right)^{\frac{p}{2}}\, dx. \tag{4.50}$$

Então, usando (4.50) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned}\liminf_{p\to 1^+} J_p(u_p) &\geq \liminf_{p\to 1^+} \frac{1}{p}\int_\Omega (1+|\nabla u_p|^2)^{\frac{p}{2}}\, dx - \lambda \lim_{p\to 1^+}\int_\Omega F(x,u_p)\, dx \\ &\geq \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\, dx + \int_{\partial\Omega} |u|\, d\mathcal{H}^{N-1} - \lambda\int_\Omega F(x,u)\, dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$I(u) \leq \liminf_{p\to 1^+} J_p(u_p).$$

No entanto, havíamos provado em (4.20) que $J_p(u_p) < 0$ para $p > 1$. Logo

$$I(u) \leq \liminf_{p\to 1^+} J_p(u_p) \leq 0.$$

Como

$$I(0) = \int_\Omega \sqrt{1+0}\, dx + \int_{\partial\Omega} 0\, d\mathcal{H}^{N-1} - \lambda\int_\Omega F(x,0)\, dx,$$

então $I(0) = \displaystyle\int_\Omega 1\, dx = |\Omega|$.

Concluímos que

$$I(u) < 0 < I(0)$$

e, portanto, $u \neq 0$.

Com isso, a demonstração do Teorema 4.4 está completa.

Capítulo

5

Conclusão

Neste trabalho, estudamos dois problemas: um envolvendo o operador 1-Laplaciano e outro envolvendo o operador de curvatura média. O primeiro é abordado no Capítulo 3 e o segundo no Capítulo 4. Para o estudo da existência de soluções, utilizamos um esquema de aproximação no qual cada problema é aproximado por uma família de problemas quasilineares dependentes de um parâmetro $p > 1$.

Esses problemas aproximados possuem estrutura variacional, o que permite associar a eles um funcional de energia, cujos pontos críticos correspondem às soluções fracas desses problemas. Além disso, associamos a cada um deles um funcional de energia auxiliar, que difere do funcional principal apenas por uma constante e desempenha um papel fundamental na verificação da monotonicidade.

Mostramos que a família de soluções $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ dos problemas aproximados é limitada em $BV(\Omega)$ e, dessa forma, utilizando a imersão compacta de $BV(\Omega)$ no espaço de Lebesgue $L^r(\Omega)$, obtemos a convergência forte de u_p para uma função limite em $L^r(\Omega)$, para todo $1 \leq r < 1^*$, a qual fornece um candidato a solução para cada um dos problemas.

Em seguida, verificamos a existência de um campo $z \in X_N$ com $\|z\|_\infty \leq 1$, tal que essa função limite e o campo z estão relacionados por três condições explicitadas nos Teoremas 3.3 e 4.4. A primeira garante que a equação original é satisfeita no sentido das distribuições, a segunda estabelece o papel do campo z e a terceira corresponde à condição de fronteira. Encerramos os capítulos mostrando que a função limite obtida é não trivial.

Referências

[1] L. AMBROSIO, N. FUSCO, and D. PALLARA. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000.

[2] F. ANDREU, C. BALLESTER, V. CASELLES, and J. M. MAZÓN. The Dirichlet problem for the total variation flow. *Journal of Functional Analysis*, 180:347–403, 2001.

[3] F. ANDREU, C. BALLESTER, V. CASELLES, and J. M. MAZÓN. Minimizing total variation flow. *Differential and Integral Equations*, 14:321–360, 2001.

[4] F. ANDREU, V. CASELLES, and J. M. MAZÓN. *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, volume 233 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 2004.

[5] G. ANZELLOTTI. Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 135:293–318, 1983.

[6] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO, and G. MICHAILLE. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization*, volume 6 of *MPS-SIAM Series on Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.

[7] S. BARILE and G. M. FIGUEIREDO. Existence of a least energy nodal solution for a class of $p\&q$-quasilinear elliptic equations. *Advances in Nonlinear Studies*, 14(2):511–530, 2014.

[8] D. BONHEURE, A. DERLET, and S. DE VALERIOLA. On the multiplicity of nodal solutions of a prescribed mean curvature problem. *Mathematische Nachrichten*, 286(11–12):1072–1086, 2013.

[9] Y. BRENIER. Extended Monge-Kantorovich theory. In *Optimal Transportation and Applications*, volume 1813 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 91–121. Springer, Berlin, 2003.

[10] M. DEL PINO and I. GUERRA. Ground states of a prescribed mean curvature equation. *Journal of Differential Equations*, 241(1):112–129, 2007.

[11] I. EKELAND and R. TEMAM. *Convex Analysis and Variational Problems*, volume 28 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999.

[12] G. M. FIGUEIREDO and M. T. O. PIMENTA. Existence and multiplicity of solutions for a prescribed mean-curvature problem with critical growth. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015(86):1–15, 2015.

[13] G. M. FIGUEIREDO and M. T. O. PIMENTA. Nodal solutions to quasilinear elliptic problems involving the 1-Laplacian operator via variational and approximation methods. *Indiana University Mathematics Journal*, 71(2):439–462, 2022.

[14] R. FINN. *Equilibrium Capillary Surfaces*, volume 284 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, New York, 1986.

[15] E. GIUSTI. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1984.

[16] S. KESAVAN. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International (P) Ltd., New Delhi, 2003.

[17] M. T. O. PIMENTA and M. MONTENEGRO. Existence of a BV solution for a mean curvature equation. *Journal of Differential Equations*, 299:51–64, 2021.

[18] C. SCHEVEN and T. SCHMIDT. On the dual formulation of obstacle problems for the total variation and the area functional. *Annales de l'Institut Henri Poincare C, Analyse Non Lineaire*, 35:1175–1207, 2008.

[19] C. SCHEVEN and T. SCHMIDT. BV supersolutions to equations of 1-Laplace and minimal surface type. *Journal of Differential Equations*, 261(3):1904–1932, 2016.

[20] W. P. ZIEMER. *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*. Springer, New York, 1989.