



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Rafael Lucas de Arruda

Teorema de Riemann-Roch e Aplicações

São José do Rio Preto, 25 de fevereiro de 2011

RAFAEL LUCAS DE ARRUDA

Teorema de Riemann-Roch e Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Geometria Algébrica junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

São José do Rio Preto, 25 de fevereiro de 2011

Arruda, Rafael Lucas de.

Teorema de Riemann-Roch e aplicações / Rafael Lucas de Arruda. -
São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

142 f. : il. ; 30cm.

Orientador: Parham Salehyan

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto
de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Geometria algébrica. 2. Curvas algébricas. 3. Riemann-Roch,
Teorema de. 4. Curvas algébricas. I. Salehyan, Parham. II.
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 512.7

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

RAFAEL LUCAS DE ARRUDA

Teorema de Riemann-Roch e Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Geometria Algébrica junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Parham Salehyan
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Eduardo de Sequeira Esteves
Professor Titular
IMPA - Rio de Janeiro

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 25 de fevereiro de 2011

*Aos meus pais,
Antonio e Eleni,
dedico.*

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Primeiramente a Deus.

Aos meus pais, Antonio Mauro de Arruda e Eleni Scandiucci Arruda, pelo amor, carinho e por estarem sempre me apoiando nos estudos.

À minha irmã, Juliana de Arruda, pela amizade e pelos divertidos momentos na minha vida.

Ao professor Parham Salehyan, pela atenção e paciência prestadas, pelos conhecimentos transmitidos, e por depositar sua confiança em mim diante deste trabalho.

A todos professores do departamento de matemática do IBILCE. Em especial, à professora Maria Gorete Carreira Andrade, pela tutoria no PET durante minha graduação.

À banca examinadora.

À FAPESP, pelo apoio financeiro no processo 2008/08768-7.

Aos meus colegas de pós-graduação, pelas discussões de exercícios de várias disciplinas.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar o Teorema de Riemann-Roch, um dos resultados fundamentais na teoria de curvas algébricas, e apresentar algumas de suas aplicações. Este teorema é uma importante ferramenta para a classificação das curvas algébricas, pois relaciona propriedades algébricas e topológicas. Daremos uma descrição das curvas algébricas de gênero g , $1 \leq g \leq 5$, e faremos um breve estudo dos pontos de inflexão de um sistema linear sobre uma curva algébrica.

Palavras-chave: Superfícies de Riemann, Curvas Algébricas, Divisores, Sistemas Lineares, Teorema de Riemann-Roch, Classificação de Curvas Algébricas, Pontos de Inflexão, Pontos de Weierstrass.

Abstract

The main purpose of this work is to discuss The Riemann-Roch Theorem, which is one of the most important results of the theory of algebraic curves, and to present some applications. This theorem is an important tool of the classification of algebraic curves, since relates algebraic and topological properties. We will describe the algebraic curves of genus g , $1 \leq g \leq 5$, and also study inflection points of a linear system on an algebraic curve.

Keywords: Riemann Surfaces, Algebraic Curves, Divisors, Linear Systems, The Riemann-Roch Theorem, Classification of Algebraic Curves, Inflection Points, Weierstrass Points.

Sumário

Lista de Símbolos	12
Introdução	14
1 Superfícies de Riemann	16
1.1 Cartas e Estruturas Complexas	16
1.1.1 Cartas Complexas	16
1.1.2 Atlas Complexos	20
1.1.3 Definição de uma Superfície de Riemann	22
1.1.4 Variedades Reais	22
1.1.5 O Gênero de uma Superfície de Riemann Compacta	24
1.1.6 Variedades Complexas	24
1.2 Exemplos de Superfícies de Riemann	25
1.2.1 Como Definir Superfícies de Riemann?	25
1.2.2 Espaços Projetivos	26
1.2.3 Toros Complexos	27
1.2.4 Gráficos de Aplicações Holomorfas	29
1.2.5 Curvas Planas Afins Suaves	29
1.3 Curvas Projetivas	32
1.3.1 Curvas Planas Projetivas Suaves	32
1.3.2 Interseções Completas	35
1.3.3 Interseções Completas Locais	36
2 Funções e Mapas	38
2.1 Funções Sobre Superfícies de Riemann	38
2.1.1 Funções Holomorfas	38
2.1.2 Singularidades de Funções e Funções Meromorfas	41
2.1.3 Séries de Laurent e a Ordem de uma Função Meromorfa num Ponto	43
2.1.4 Teoremas sobre Funções Holomorfas e Meromorfas	45

2.2	Mapas Holomorfos entre Superfícies de Riemann	47
2.2.1	Isomorfismos e Automorfismos	48
2.2.2	Teoremas sobre Mapas Holomorfos	48
2.2.3	Funções Meromorfas e Mapas Holomorfos Associados	49
2.3	Propriedades Locais e Globais dos Mapas Holomorfos	50
2.3.1	Forma Normal Local e Multiplicidade	50
2.3.2	Grau de um Mapa Holomorfo entre Superfícies de Riemann Compactas	53
2.3.3	A Soma das Ordens de uma Função Meromorfa	54
2.3.4	Fórmula de Hurwitz	55
2.4	Determinando Alguns Corpos de Funções Meromorfas	57
2.4.1	Funções Meromorfas sobre a Esfera de Riemann	57
2.4.2	Funções Meromorfas sobre um Toro Complexo	58
2.5	Curvas Projetivas Suaves	60
2.6	Formas Diferenciais	61
2.6.1	1-Formas Meromorfas	62
2.6.2	Operações entre 1-Formas Meromorfas	62
2.6.3	<i>Pullback</i> de 1-Formas Meromorfas	64
2.6.4	Teorema do Resíduo	65
2.6.5	Diferenciais de Ordem Superior	66
3	Divisores e Mergulhos	67
3.1	Divisores	67
3.1.1	Definição de Divisor	67
3.1.2	Divisores Principais	68
3.1.3	Divisores Canônicos	69
3.1.4	<i>Pullback</i> de um Divisor	71
3.1.5	Divisores de Ramificação e de Ramo de um Mapa Holomorfo	72
3.1.6	Divisores de Interseção sobre uma Curva Projetiva Suave	73
3.1.7	Teorema de Bézout para Curvas Projetivas Suaves	74
3.1.8	Fórmula de Plücker	75
3.2	Equivalência Linear de Divisores	76
3.2.1	Definição de Equivalência Linear	76
3.2.2	Equivalência Linear para Divisores sobre a Esfera de Riemann	77
3.2.3	Equivalência Linear para Divisores sobre um Toro Complexo	78
3.3	Espaços de Funções Meromorfas e de 1-Formas Meromorfas Associadas a um Divisor	78
3.3.1	Espaço $\mathcal{L}(D)$	78

3.3.2	Espaço $\mathcal{L}^{(n)}(D)$	80
3.3.3	Uma Cota Superior para a Dimensão de $\mathcal{L}(D)$	81
3.3.4	Cálculo de $\mathcal{L}(D)$ para a Esfera de Riemann	82
3.3.5	Cálculo da Dimensão de $\mathcal{L}(D)$ para um Toro Complexo	83
3.3.6	Sistemas Lineares	83
3.3.7	Pontos de Base de Sistemas Lineares	84
3.3.8	Como Remover Pontos de Base?	86
3.4	Mergulhos	86
3.4.1	Sistema Linear de um Mapa Holomorfo	88
3.4.2	Divisores Hiperplanos de um Mapa Holomorfo	89
3.4.3	Como Definir Mapas Holomorfos via Sistemas Lineares?	90
3.4.4	Crítérios para ϕ_D ser um Mergulho	91
3.4.5	Grau da Imagem de um Mapa Holomorfo para $\mathbb{P}^n$	93
4	Curvas Algébricas e Teorema de Riemann-Roch	95
4.1	Curvas Algébricas	95
4.1.1	Definição de Curva Algébrica	95
4.1.2	Funções Meromorfas com Truncamentos de Laurent Específicos	96
4.1.3	Grau de Transcendência do Corpo de Funções Meromorfas $\mathcal{M}(X)$	99
4.2	Divisores de Truncamento de Laurent	102
4.2.1	Espaço $\mathcal{H}^1(D)$	103
4.2.2	Finitude da Dimensão de $H^1(D)$	104
4.3	Teorema de Riemann-Roch e Dualidade de Serre	108
4.3.1	Primeira Forma do Teorema de Riemann-Roch	108
4.3.2	Aplicação Resíduo	109
4.3.3	Dualidade de Serre	109
4.3.4	Segunda Forma do Teorema de Riemann-Roch	112
5	Aplicações do Teorema de Riemann-Roch	114
5.1	Primeiras Aplicações	114
5.1.1	Crítério para um Divisor ser Muito Amplo	114
5.1.2	Curvas Algébricas de Gênero $g = 0$	115
5.1.3	Equações de Curvas Algébricas	116
5.1.4	Curvas Algébricas de Gênero $g = 1$	118
5.1.5	Sistema Linear Canônico	119
5.1.6	Curvas Algébricas de Gênero $g = 2$	119
5.1.7	Teorema de Clifford	120
5.2	Mapa Canônico	122
5.2.1	Mapa Canônico de uma Curva Algébrica de Gênero $g \geq 3$	122

5.2.2	Mapa Canônico de uma Curva Algébrica Hiperelíptica	123
5.2.3	Curvas Algébricas de Gênero $g = 3$	124
5.2.4	Curvas Algébricas de Gênero $g = 4$	124
5.2.5	Forma Geométrica do Teorema de Riemann-Roch	126
5.2.6	Curvas Algébricas de Gênero $g = 5$	127
5.3	Pontos de Inflexão e Pontos de Weierstrass	128
5.3.1	Números de Lacunas e Pontos de Inflexão de um Sistema Linear . .	128
5.3.2	Critério do Wronskiano	130
5.3.3	Número de Pontos de Inflexão	133
5.3.4	Pontos de Inflexão de Curvas Planas Projetivas Suaves	135
5.3.5	Pontos de Weierstrass	136
Referências Bibliográficas		139
Índice Remissivo		140

Lista de Símbolos

α_D	- Aplicação truncamento de Laurent entre $\mathcal{M}(X)$ e $\mathcal{T}[D](X)$
B_F	- Divisor de ramo do mapa holomorfo F
$\mathbb{C}$	- Corpo dos números complexos
$\mathbb{C}/L$	- Toro complexo definido pelo quociente de $\mathbb{C}$ pelo reticulado L
$\mathbb{C}[z, w]$	- Anel dos polinômios em duas variáveis z, w e coeficientes em $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}[x, y, z]$	- Anel dos polinômios em três variáveis x, y, z e coeficientes em $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$	- Anel dos polinômios em $n+1$ variáveis $x_0, x_1, \dots, x_n$ e coeficientes em $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}_\infty$	- Esfera de Riemann
$\deg(D)$	- Grau do divisor D
$\deg(F)$	- Grau do mapa holomorfo F
$\text{Div}(X)$	- Grupo dos divisores sobre a superfície de Riemann X
$\text{div}(f)$	- Divisor associado a função meromorfa f
$\text{div}_0(f)$	- Divisor dos zeros da função meromorfa f
$\text{div}_\infty(f)$	- Divisor dos pólos da função meromorfa f
$\text{div}(\omega)$	- Divisor associado a 1-forma meromorfa ω
$ D $	- Sistema linear completo do divisor D
$F^*(D)$	- Pullback do divisor D
$F^*(\omega)$	- Pullback da 1-forma meromorfa ω
$\phi^*(H)$	- Divisor hiperplano do mapa holomorfo ϕ
g_d^r	- Sistema linear de grau d e dimensão r
$G_p(Q)$	- Conjunto dos números de lacunas do sistema linear Q no ponto p
$g(X)$	- Gênero da superfície de Riemann compacta X
$\mathcal{H}^1(D)$	- Conúcleo da aplicação truncamento de Laurent α_D
$\mathcal{H}^1(D_1/D_2)$	- Núcleo do homomorfismo natural $\varrho : \mathcal{H}^1(D_1) \rightarrow \mathcal{H}^1(D_2)$

$K\text{Div}(X)$	- Grupo dos divisores canônicos sobre a superfície de Riemann X
$\mathcal{L}(D)$	- Espaço das funções meromorfas com pólos limitados pelo divisor D
$\mathcal{L}^{(1)}(D)$	- Espaço das 1-formas meromorfas com pólos limitados pelo divisor D
$\mathcal{L}^{(n)}(D)$	- Espaço das n -diferenciais meromorfas com pólos limitados pelo divisor D
$\mathcal{M}(X)$	- Corpo das funções meromorfas sobre a superfície de Riemann X
$\mathcal{M}^{(1)}(X)$	- $\mathcal{M}(X)$ -espaço vetorial das 1-formas meromorfas sobre a superfície de Riemann X
$\text{mult}_p(F)$	- Multiplicidade do mapa holomorfo F no ponto p
$\Omega^1(X)$	- $\mathbb{C}$ -espaço vetorial das 1-formas holomorfas sobre a superfície de Riemann X
$\text{ord}_p(f)$	- Ordem da função meromorfa f no ponto p
$\text{ord}_p(\omega)$	- Ordem da 1-forma meromorfa ω no ponto p
$\mathbb{P}^1$	- Reta projetiva complexa
$\mathbb{P}^2$	- Plano Projetivo complexo
$\mathbb{P}^n$	- n -espaço projetivo complexo
$\mathcal{P}(f)$	- Conjunto dos pólos da função meromorfa f
$\mathbb{P}(V)$	- Projetivização do espaço vetorial V
$P\text{Div}(X)$	- Grupo dos divisores principais sobre a superfície de Riemann X
$\text{Res}_p(\omega)$	- Resíduo da 1-forma meromorfa ω no ponto p
R_F	- Divisor de ramificação do mapa holomorfo F
R_k	- Aplicação que determina as hipersuperfícies de grau k que contém uma curva algébrica
$\text{sing}(f)$	- Conjunto dos pontos singulares do polinômio f
$\text{supp}(D)$	- Suporte do divisor D
$\text{span}(D)$	- Gerado do divisor D
$\mathcal{T}(X)$	- Grupo dos divisores de truncamentos de Laurent sobre a superfície de Riemann X
$\mathcal{T}[D](X)$	- Grupo dos divisores de truncamentos de Laurent sobre a superfície de Riemann X limitados por D
t. o. m.	- Termos de ordem maior
$\text{tr. deg}(\mathcal{M}(X))$	- Grau de transcendência do corpo $\mathcal{M}(X)$ sobre $\mathbb{C}$
$w_p(Q)$	- Peso do ponto p com respeito ao sistema linear Q
$\chi(S)$	- Característica de Euler da 2-variedade real compacta S
$\mathcal{Z}(f)$	- Conjunto dos zeros da função meromorfa f

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar o Teorema de Riemann-Roch, um dos resultados fundamentais na teoria de curvas algébricas, e apresentar algumas de suas aplicações. Este teorema é uma importante ferramenta para a classificação das curvas algébricas, pois relaciona propriedades algébricas e topológicas. Daremos uma descrição das curvas algébricas de gênero g , $1 \leq g \leq 5$, e faremos um breve estudo dos pontos de inflexão de um sistema linear sobre uma curva algébrica.

No primeiro capítulo faremos um estudo sobre superfícies de Riemann, apresentando vários exemplos, entre eles, curvas planas afins e projetivas e curvas de interseção completa. Naturalmente, uma questão discutida é sobre a classificação das superfícies de Riemann. Um dos resultados mais conhecidos é o seguinte: *toda superfície de Riemann compacta é difeomorfa a um g -toro*. O número g obtido neste teorema é chamado de gênero topológico da superfície.

Como uma superfície de Riemann se identifica localmente a um subconjunto dos números complexos, dedicamos o Capítulo 2 ao estudo de funções meromorfas, mapas holomorfos e 1-formas meromorfas. Como consequência do estudo das propriedades locais e globais de um mapa holomorfo entre duas superfícies de Riemann compactas, obtemos a fórmula de Hurwitz, a qual relaciona os gêneros das superfícies de Riemann com o grau do mapa e suas ramificações.

O foco principal do Capítulo 3 é o estudo dos divisores sobre uma superfície de Riemann. Estudaremos diversos tipos de divisores, entre eles o divisor de interseção. Estudando as propriedades do divisor de interseção, mostraremos o Teorema de Bézout para curvas projetivas suaves, e como consequência, obteremos a fórmula de Plücker, a qual relaciona o gênero de uma curva plana projetiva suave e seu grau.

Outro problema estudado neste capítulo é o problema de Riemann. Mais precisamente, dado um divisor D , estamos interessados em calcular a dimensão do espaço vetorial das

funções meromorfas com pólos limitados por D . Inicialmente mostraremos a finitude da dimensão deste espaço para superfícies de Riemann compactas e em seguida daremos uma cota superior para a mesma.

A última seção é destinada ao estudo de divisores muito amplos. De fato, dado um divisor muito amplo, mostraremos que existe um mergulho da superfície de Riemann compacta para um determinado espaço projetivo, cuja dimensão é dada pela dimensão do sistema linear associado ao divisor.

Os principais resultados do Capítulo 4 são o Teorema de Riemann-Roch e a Dualidade de Serre, os quais darão resposta ao problema de Riemann.

No Capítulo 5 apresentamos algumas aplicações do Teorema de Riemann-Roch, como por exemplo, o Teorema de Clifford, o qual fornece uma cota superior para o espaço de funções meromorfas com pólos limitados por um divisor especial. Visto que toda curva algébrica pode ser mergulhada num espaço projetivo, descrevemos as curvas algébricas de gênero g , $1 \leq g \leq 5$, como variedades algébricas projetivas. De fato, desta maneira mostraremos o Teorema de Riemann nestes casos, o qual afirma que toda superfície de Riemann compacta é uma variedade algébrica projetiva. Por último, fazemos um breve estudo sobre os pontos de inflexão de um sistema linear, com alguns comentários para o caso particular de pontos de Weierstrass.

CAPÍTULO 1

Superfícies de Riemann

1.1 Cartas e Estruturas Complexas

Superfícies de Riemann são, a grosso modo, espaços topológicos que, localmente, se identificam a um subconjunto aberto do plano complexo. Essa identificação é naturalmente feita por meio de aplicações capazes de transportar as propriedades locais de um subconjunto do plano complexo para o espaço X . Nesta seção formalizaremos essa ideia.

1.1.1 Cartas Complexas

Seja X um espaço topológico. Para que X seja visto, localmente, como um subconjunto do plano complexo, é de se esperar que a aplicação que relaciona os subconjuntos abertos de cada espaço seja bijetiva. Como estamos interessados nos aspectos locais é necessário que a aplicação e sua inversa sejam contínuas. Isso nos conduz a definição seguinte.

Definição 1.1.1. Uma *carta complexa*, ou simplesmente *carta*, sobre X é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde $U \subset X$ e $V \subset \mathbb{C}$ são abertos. O subconjunto aberto U é chamado de *domínio* da carta ϕ . Diremos que a carta ϕ está *centrada* em $p \in U$ se $\phi(p) = 0$.

Note que uma carta $\phi : U \rightarrow V$ sobre X agrega a seu domínio uma geometria: para cada ponto $x \in U$ está associada uma coordenada complexa local dada por $z = \phi(x)$. Note também que, fixado um ponto $p \in U$ podemos sempre supor que ϕ está centrada em p , pois a aplicação $\psi : U \rightarrow V - \phi(p)$ dada por $\psi(x) = \phi(x) - \phi(p)$ é uma carta sobre X .

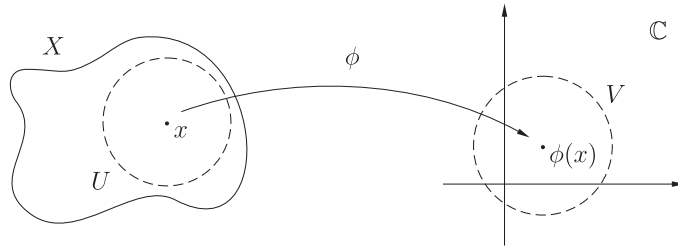


Figura 1.1.1. A definição de uma carta.

Exemplo 1.1.1. Tome $X = \mathbb{R}^2$ e $U \subset X$ um subconjunto aberto não-vazio. A aplicação definida por

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad U &\longrightarrow \phi_U(U) \\ (x, y) &\longmapsto \phi_U(x, y) = x + iy, \end{aligned}$$

é uma carta complexa sobre $\mathbb{R}^2$. Note que para $U = \mathbb{R}^2$, ϕ_U é a aplicação natural que identifica $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$. Outro exemplo de carta complexa sobre $\mathbb{R}^2$ é a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad U &\longrightarrow \phi_U(U) \\ (x, y) &\longmapsto \phi_U(x, y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.2. Se $\phi : U \rightarrow V$ é uma carta complexa sobre X e $U_1 \subset U$ é um subconjunto aberto não-vazio de U , então $\phi|_{U_1} : U_1 \rightarrow \phi(U_1)$ é uma carta complexa sobre X . Esta restrição de ϕ é chamada de uma *subcarta* de ϕ .

Exemplo 1.1.3. Se $\phi : U \rightarrow V$ é uma carta complexa sobre X e $\psi : V \rightarrow W$ é uma bijeção holomorfa entre subconjuntos do plano complexo, então a composição $\psi \circ \phi : U \rightarrow W$ é uma carta complexa sobre X . De fato, basta lembrar-se de que uma bijeção holomorfa entre subconjuntos do plano complexo tem sua inversa automaticamente holomorfa (consulte [Con86]); como a composição $\psi \circ \phi$ é, claramente, uma bijeção holomorfa, segue o afirmado.

No exemplo anterior, visto que ϕ fornece uma coordenada complexa local sobre U , podemos interpretar a operação de composição $\psi \circ \phi$ como uma mudança de coordenadas complexas. No entanto, algumas observações são necessárias para se verificar que essa interpretação é coerente com a noção geral de que temos sobre mudança de coordenadas. É natural esperar que as cartas ϕ e $\psi \circ \phi$ forneçam as mesmas respostas quanto às questões levantadas sobre as propriedades do subconjunto aberto U de X ; ou seja, as cartas ϕ e $\psi \circ \phi$ devem ter uma certa compatibilidade sobre o domínio comum U . Essa condição de compatibilidade estende-se de modo esperado para quaisquer duas cartas, e é estabelecida segundo a próxima definição.

Definição 1.1.2. Sejam $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ duas cartas complexas sobre X . Diremos que ϕ_1 e ϕ_2 são *compatíveis* se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é holomorfa. No segundo caso, a função $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é chamada de *função de transição* entre as duas cartas; T é sempre uma bijeção contínua.

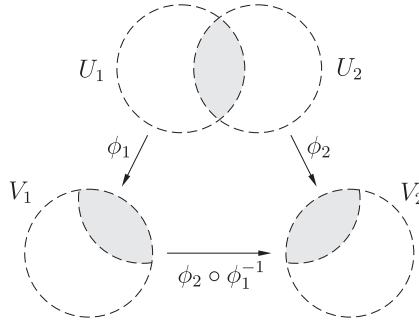


Figura 1.1.2. Compatibilidade entre cartas

Note que compatibilidade entre cartas é uma relação de equivalência. É reflexiva: toda carta ϕ é compatível consigo mesma, pois $\phi \circ \phi^{-1} = id$, a qual é uma função holomorfa; é simétrica: se $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ então $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ (veja o Exemplo 1.1.3); e por último, é transitiva: se $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\phi_3 \circ \phi_2^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_2(U_2 \cap U_3)$, então $\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$ é holomorfa sobre $\phi_1(U_1 \cap U_3)$, pois cada uma das funções entre parênteses são holomorfas.

Lema 1.1.1. A derivada T' de uma função de transição T entre duas cartas compatíveis nunca se anula sobre o domínio de T .

Demonstração. Denote por S a função inversa de T ; então $S \circ T = id$ sobre o domínio de T , isto é, $S(T(w)) = w$ para todo w no domínio de T . Derivando ambos os lados dessa igualdade resulta $S'(T(w))T'(w) = 1$, donde segue que $T'(w)$ nunca se anula. ■

Suponha que T é a função de transição entre duas cartas ϕ e ψ , com um ponto p comum em seus domínios. Digamos que as coordenadas locais fornecidas por estas cartas sejam $z = \phi(x)$ e $w = \psi(x)$, com $z_0 = \phi(p)$ e $w_0 = \psi(p)$. Assim, a função de transição $T = \phi \circ \psi^{-1}$ expressa z como função de w , e o lema anterior nos diz que a expansão em séries de potências de T próximo a p é da forma

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w - w_0)^n,$$

com $a_1 = T'(w_0) \neq 0$. Essa observação será utilizada nos capítulos seguintes.

Exemplo 1.1.4. Retomando o Exemplo 1.1.3, sejam $\phi : U \rightarrow V$ uma carta complexa sobre X e $\psi : V \rightarrow W$ uma bijeção holomorfa entre subconjuntos do plano complexo. Como $(\psi \circ \phi) \circ \phi^{-1} = \psi$, a qual é uma função holomorfa, segue que ϕ e $\psi \circ \phi$ são compatíveis; portanto, a noção de mudança de coordenadas complexas está bem definida. Mais ainda, $\psi \circ \phi$ é compatível com qualquer carta compatível com ϕ . De fato, se ϕ_1 é compatível com ϕ então $\phi \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa; logo, a composição $\psi \circ (\phi \circ \phi_1^{-1})$ é holomorfa, e portanto, $\psi \circ \phi$ é compatível com ϕ_1 .

Exemplo 1.1.5. Quaisquer duas subcartas de uma carta complexa $\phi : U \rightarrow V$ são compatíveis. De fato, se $\phi|_{U_1}$ e $\phi|_{U_2}$ são duas subcartas de ϕ com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então $\phi|_{U_2} \circ \phi|_{U_1}^{-1} = id$, a qual é uma função holomorfa. Logo, $\phi|_{U_1}$ e $\phi|_{U_2}$ são compatíveis.

Exemplo 1.1.6. Com o mesmo argumento do exemplo anterior, no Exemplo 1.1.1 quaisquer duas cartas são compatíveis.

Exemplo 1.1.7. As cartas $\phi_{U_1}(x, y) = x + iy$ e $\phi_{U_2}(x, y) = x/(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) + iy/(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$ sobre $X = \mathbb{R}^2$, vistas no Exemplo 1.1.1, não são compatíveis. De fato, suponha que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Temos definida a função de transição

$$\begin{aligned} T = \phi_{U_2} \circ \phi_{U_1}^{-1} : \phi_{U_1}(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \phi_{U_2}(U_1 \cap U_2) \\ x + iy &\longmapsto u(x, y) + iv(x, y), \end{aligned}$$

onde $u(x, y) = x/(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$ e $v(x, y) = y/(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$. Suponha que T é holomorfa; então, as equações de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas em todo ponto do domínio de T , isto é, $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$ sobre $\phi_{U_1}(U_1 \cap U_2)$. Com cálculos diretos verifica-se que a primeira condição de igualdade impõe $x^2 = y^2$ e a segunda $-xy = xy$. Mas estas igualdades só valem para $(x, y) = (0, 0)$ e, no entanto, $\phi_{U_1}(U_1 \cap U_2)$ é um subconjunto aberto do plano complexo, uma contradição. Portanto, ϕ_{U_1} e ϕ_{U_2} não são compatíveis.

O próximo exemplo é clássico e melhor formulado.

Exemplo 1.1.8. Seja S^2 a 2-esfera unitária em $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Podemos representar o subconjunto aberto $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sobre o plano complexo da seguinte maneira: associamos cada ponto $(x, y, w) \in S^2$ ao ponto de interseção entre a reta $(0, 0, 1) + \lambda(x, y, w - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e o plano $w = 0$; e vice-versa. Considerando o plano $w = 0$ como uma cópia do plano complexo $\mathbb{C}$ via a identificação $(x, y, 0) \mapsto x + iy$, obtemos um homeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_1 : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, w) &\longmapsto \phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w}, \end{aligned}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ z &\longmapsto \phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).\end{aligned}$$

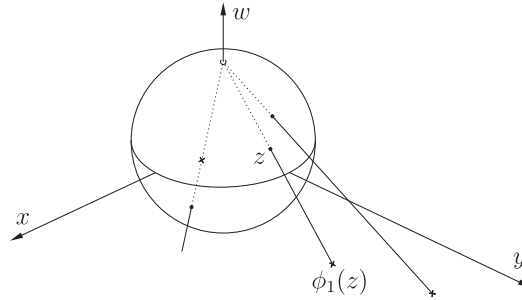


Figura 1.1.3. Projeção estereográfica.

Analogamente, podemos representar o subconjunto aberto $S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ sobre o plano complexo, obtendo um outro homeomorfismo

$$\begin{aligned}\phi_2 : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, w) &\longmapsto \phi_2(x, y, w) = \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w},\end{aligned}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned}\phi_2^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\ z &\longmapsto \phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{-2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} \right).\end{aligned}$$

Temos assim, duas cartas definidas sobre S^2 , cada uma delas chamada de *projeção estereográfica*. O domínio comum entre ϕ_1 e ϕ_2 é $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$, o qual é levado bijectivamente para $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ por qualquer uma das duas cartas. Como a composição $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ dada por $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = 1/z$ é holomorfa sobre todo o domínio, segue que ϕ_1 e ϕ_2 são duas cartas compatíveis.

Algumas observações à parte sobre este exemplo são importantes. Primeiro, com um cálculo direto podemos ver que se uma carta tem coordenada z , então a outra carta terá coordenada $1/z$. Segundo, apenas o ponto $(0, 0, 1)$ não pode ser representado pela carta $\phi_1(x, y, w) = z$, e conforme (x, y, z) se aproxima de $(0, 0, 1)$, $\phi_1(x, y, w)$ tende ao infinito.

1.1.2 Atlas Complexos

Estamos a um passo de dar a definição de uma superfície de Riemann. O que falta é definir uma estrutura que tenha a finalidade de fornecer para cada ponto do espaço

topológico X uma coordenada complexa local. Afinal, queremos que o espaço X seja visto, localmente, como um subconjunto aberto do plano complexo sobre cada um de seus pontos. No Exemplo 1.1.8 podemos ver que todo ponto da esfera S^2 possui uma coordenada complexa local, e mais, quaisquer duas cartas fornecendo uma coordenada local para o ponto são compatíveis. Esta é outra propriedade indispensável que a estrutura deve possuir: compatibilidade entre quaisquer duas cartas dadas.

Definição 1.1.3. Um *atlas complexo*, ou simplesmente *atlas*, sobre X é uma coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartas complexas sobre X duas a duas compatíveis e cujos domínios cobrem X , isto é, $X = \cup_\alpha U_\alpha$.

Exemplo 1.1.9. A coleção de todas as cartas do Exemplo 1.1.1 formam um atlas sobre $\mathbb{R}^2$. As duas cartas definidas sobre a 2-esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ no Exemplo 1.1.8 formam um atlas complexo sobre S^2 .

Exemplo 1.1.10. Se $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ é um atlas complexo sobre X e $Y \subset X$ é um subconjunto aberto não-vazio, então a coleção de subcartas $\mathcal{A}_Y = \{\phi|_{Y \cap U_\alpha} : Y \cap U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(Y \cap U_\alpha)\}$ é um atlas sobre Y . Isso segue do fato de que a restrição de uma função holomorfa é holomorfa.

Com a mesma intenção que definimos compatibilidade entre duas cartas complexas, definimos também uma equivalência entre dois atlas complexos. Não queremos que dois atlas sobre um mesmo espaço X informem propriedades diferentes para um mesmo subconjunto aberto em questão.

Definição 1.1.4. Dois atlas complexos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *equivalentes* se toda carta de um é compatível com toda carta do outro.

Note que a relação entre dois atlas complexos é uma relação de equivalência; isso porque compatibilidade entre cartas complexas é uma relação de equivalência.

Ainda com as notações da definição anterior, é imediato que os atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são equivalentes se, e somente se, a união $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é também um atlas complexo. Logo, a união de todos os atlas equivalentes a $\mathcal{A}$ é um atlas complexo. Portanto, pelo Lema de Zorn todo atlas complexo $\mathcal{A}$ está contido num atlas complexo maximal; e mais, dois atlas complexos são equivalentes se, e somente se, estão contidos num mesmo atlas complexo maximal.

Definição 1.1.5. Uma *estrutura complexa* sobre X é um atlas complexo maximal sobre X ou, equivalentemente, uma classe de equivalência de um atlas complexo sobre X .

Pela definição anterior a essa definição, todo atlas sobre X determina uma única estrutura complexa sobre X . Portanto, dado um atlas temos uma estrutura complexa induzida.

1.1.3 Definição de uma Superfície de Riemann

Finalmente estamos aptos a dar a definição formal de uma superfície de Riemann. Antes, recordemos alguns conceitos da topologia. Um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff se, para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$ existem vizinhanças disjuntas U e V de x e y , respectivamente. Dizemos que um espaço topológico X satisfaz o *segundo axioma de enumerabilidade* se existe uma base enumerável para sua topologia. Para mais detalhes desses e outros conceitos topológicos consulte [Mun00].

Definição 1.1.6. Uma *superfície de Riemann* é um espaço topológico de Hausdorff, conexo, com base enumerável e uma estrutura complexa definida.

Uma definição mais geral de superfície de Riemann pode ser dada excluindo a condição de existência de uma base enumerável para o espaço X . Aqui, impomos esta condição para evitar certos exemplos patológicos. A grande maioria dos exemplos que veremos de superfícies de Riemann são de subespaços de $\mathbb{C}^n$, a menos de homeomorfismo, e conseqüentemente, irão satisfazer automaticamente o segundo axioma de contabilidade, pois $\mathbb{C}^n$ o satisfaz.

Exemplo 1.1.11. Considere $X = \mathbb{C}$ topologicamente como $\mathbb{R}^2$ com a estrutura complexa induzida pelo atlas do Exemplo 1.1.1. Esta superfície de Riemann é o já conhecido *plano complexo*.

Exemplo 1.1.12. Tome $X = S^2$ a 2-esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ com a estrutura complexa induzida pelo atlas formado pelas duas cartas do Exemplo 1.1.8. Como S^2 é um espaço de Hausdorff, conexo e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, o espaço S^2 é uma superfície de Riemann. Esta superfície é chamada de *esfera de Riemann*, e é denotada por $\mathbb{C}_\infty$ ou $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com $\mathbb{C}$ representado por uma das cartas e ∞ um ponto extra no infinito. Note que a esfera de Riemann é uma superfície de Riemann *compacta*.

Exemplo 1.1.13. Todo subconjunto Y não-vazio e conexo de uma superfície de Riemann X é uma superfície de Riemann com a estrutura complexa induzida pelo atlas do Exemplo 1.1.10.

1.1.4 Variedades Reais

Vamos relacionar superfícies de Riemann com variedades reais e extrair alguns dos resultados clássicos da teoria das variedades. Adiantamos que, uma superfície de Riemann nada mais é do que uma variedade complexa conexa de dimensão 1, assim, esperamos relacioná-la com uma variedade real de dimensão 2.

Em certas ocasiões é conveniente considerarmos uma superfície de Riemann como uma 2-variedade real, deixando de lado as particulares propriedades sobre o corpo dos números

complexos. Passamos às definições relevantes. Denote por X um espaço topológico de Hausdorff.

Definição 1.1.7. Uma *carta real n -dimensional* sobre X é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde $U \subset X$ é um conjunto aberto em X , e $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Duas dessas cartas reais $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ são $\mathcal{C}^\infty$ -compatíveis se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ou

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é um difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$, isto é, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ e sua inversa têm derivadas parciais de todas as ordens em todo ponto do domínio. Um *atlas real $\mathcal{C}^\infty$* sobre X é uma coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartas reais sobre X duas a duas $\mathcal{C}^\infty$ -compatíveis e cujos domínios cobrem X . Dois desses atlas reais são *equivalentes* se a união deles é um atlas real $\mathcal{C}^\infty$. Uma *estrutura real $\mathcal{C}^\infty$* sobre X é uma classe de equivalência de um atlas real $\mathcal{C}^\infty$. Uma *variedade real $\mathcal{C}^\infty$* é um espaço topológico de Hausdorff, conexo, com base enumerável e uma estrutura $\mathcal{C}^\infty$ definida.

Lembre-se de que toda função holomorfa de uma variável complexa $z = x + iy$ é infinitamente diferenciável nas variáveis reais x e y , ou seja, é $\mathcal{C}^\infty$. Portanto, toda superfície de Riemann é uma variedade real $\mathcal{C}^\infty$ de dimensão 2, ou simplesmente uma 2-variedade real.

Para variedades reais, conexidade e conexidade por caminhos são equivalentes; portanto, toda superfície de Riemann é conexa por caminhos.

Proposição 1.1.1. Toda superfície de Riemann é orientável.

Demonstração. Para checar a orientabilidade de uma superfície de Riemann X temos que olhar para a estrutura real $\mathcal{C}^\infty$ da 2-variedade real induzida de X , e provar que se um ponto $p \in X$ pode ser coberto por duas cartas reais então a função de transição entre essas cartas tem determinante jacobiano positivo em p . Suponha então que $z = \phi_1(x)$ e $w = \phi_2(x)$ são duas coordenadas locais para um ponto $p \in X$. Se denotarmos $z = x + iy$, $w = s + it$ e $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} = u + iv$, então as coordenadas locais sobre $\mathbb{R}$ são dadas por (x, y) e (s, t) , e a função de transição é $T(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (s, t)$. A matriz Jacobiana desta função de transição é

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix},$$

e seu determinante é, pelas equações de Cauchy-Riemann, igual a $u_x^2 + v_x^2 = |T'(z)|^2 \geq 0$. Pelo Lema 1.1.1 temos $T'(z) \neq 0$ para todo ponto z do seu domínio; e portanto, o determinante jacobiano é $|T'(z)| > 0$ para todo z , em particular para $z = p$, como queríamos concluir. ■

1.1.5 O Gênero de uma Superfície de Riemann Compacta

Seja X uma superfície de Riemann compacta. Pelo que vimos anteriormente, X é uma 2-variedade real compacta orientável, e portanto pode ser classificada, segundo um resultado da teoria das variedades, como sendo um g -toro, para um único inteiro $g \geq 0$, a menos de difeomorfismo. Quando $g = 0$, a superfície é topologicamente uma 2-esfera. Quando $g = 1$, a superfície é topologicamente um toro, o qual é homeomorfo a $S^1 \times S^1$. Para $g \geq 2$, seguindo a intuição geométrica, a superfície é uma 2-esfera com g “alças” atadas. Este inteiro g é chamado de *gênero topológico* da superfície de Riemann compacta X . A seguinte proposição garante que g é um invariante topológico:

Proposição 1.1.2. Toda superfície de Riemann compacta é difeomorfa a um g -toro, para um único inteiro $g \geq 0$.

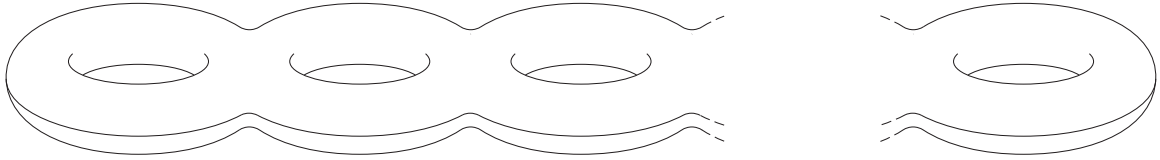


Figura 1.1.4. Superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 0$ vista como um g -toro, via um difeomorfismo.

Exemplo 1.1.14. A esfera de Riemann, vista no Exemplo 1.1.12, é uma superfície de Riemann compacta de gênero 0.

Na próxima seção veremos mais exemplos de superfícies de Riemann compactas.

1.1.6 Variedades Complexas

Do mesmo modo que relacionamos superfícies de Riemann com variedades reais, podemos relacioná-las com variedades complexas. Na verdade, uma superfície de Riemann é o mesmo que uma variedade complexa de dimensão 1. O que observamos aqui, é que uma definição de superfície de Riemann de dimensão superior a 1 também existe. Deixamos as definições relevantes.

Definição 1.1.8. Uma *carta complexa n -dimensional* sobre X é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde $U \subset X$ é um subconjunto aberto em X e $V \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto em $\mathbb{C}^n$. Duas dessas cartas complexas n -dimensionais $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ são *compatíveis* se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é holomorfa, isto é, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em cada uma das n variáveis separadamente em todo ponto do domínio. Um *atlas complexo n -dimensional* sobre X é uma coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ de cartas complexas n -dimensionais sobre X duas a duas compatíveis e cujos domínios cobrem X . Dois desses atlas são *equivalentes* se a união deles é um atlas complexo n -dimensional. Uma *estrutura complexa n -dimensional* sobre X é uma classe de equivalência de atlas complexos n -dimensionais. Uma *variedade complexa n -dimensional* é um espaço topológico de Hausdorff, conexo, com base enumerável e com uma estrutura complexa n -dimensional definida.

1.2 Exemplos de Superfícies de Riemann

Veremos nas próximas subseções, exemplos básicos e fundamentais de superfícies de Riemann. Daremos uma atenção maior para superfícies de Riemann compactas, as quais são objetos centrais deste trabalho.

1.2.1 Como Definir Superfícies de Riemann?

Antes de tudo, recordemos do seguinte fato: se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de um espaço topológico X , então um subconjunto $U \subset X$ é aberto em X se, e somente se, cada interseção $U \cap U_\alpha$ é um aberto de U_α com a topologia induzida de X . Ou então, se $\{U_\alpha\}$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de um conjunto X , cada um dos subconjuntos U_α com uma topologia definida, então podemos definir uma topologia sobre X declarando um subconjunto $U \subset X$ aberto em X se, e somente se, cada interseção $U \cap U_\alpha$ é um aberto de U_α .

Suponhamos agora que $\{U_\alpha\}$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de um conjunto X tal que $X = \cup_\alpha U_\alpha$, e que $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ é uma coleção de bijeções, onde cada V_α é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Cada subconjunto V_α tem a sua topologia induzida de $\mathbb{C}$, e então podemos definir uma topologia sobre todos V_α através das bijeções ϕ_α , declarando um subconjunto $U \subset U_\alpha$ aberto em U_α se, e somente se, $\phi_\alpha(U)$ é aberto em V_α ou, equivalentemente, aberto em $\mathbb{C}$.

Agora, definimos uma topologia sobre todo X , declarando um subconjunto $U \subset X$ aberto em X se, e somente se, cada interseção $U \cap U_\alpha$ é um aberto de U_α . Note que esta topologia sobre X é tal que cada U_α é aberto em X se, e somente se, para todos α e β , o subconjunto $U_\alpha \cap U_\beta$ é aberto em U_α . Mas isto ocorre se, e somente se, para todos α e β , o subconjunto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em V_α ou, equivalentemente, aberto em $\mathbb{C}$.

Diante destas observações, podemos seguir o seguinte roteiro para definirmos uma superfície de Riemann:

- Tome um conjunto X ;

- Encontre uma coleção enumerável $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de X que cobrem X ;
- Para cada α , encontre uma bijeção $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ com V_α um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$;
- Verifique que para todos α e β , $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em V_α . Assim, pelas observações anteriores, a topologia definida sobre X é tal que cada U_α é um aberto de X ; mais ainda, por definição cada ϕ_α é uma carta complexa sobre X ;
- Verifique que as cartas complexas são duas a duas compatíveis;
- Verifique que X é um espaço conexo e de Hausdorff.

Os exemplos que veremos a seguir serão construídos seguindo o roteiro acima.

1.2.2 Espaços Projetivos

Sejam $(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Diremos que estes dois pontos estão relacionados se existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(x_0, x_1, \dots, x_n) = (\lambda y_0, \lambda y_1, \dots, \lambda y_n)$. Esta relação, denotada por $\sim$, é claramente uma relação de equivalência.

Definição 1.2.1. O *espaço projetivo n -dimensional*, denotado por $\mathbb{P}^n$, é o quociente

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

A classe de equivalência em $\mathbb{P}^n$ de um ponto não-nulo $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ será denotada por $[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. As entradas x_i nesta notação são chamadas de *coordenadas homogêneas*.

Note que

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n],$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Isto mostra que as coordenadas homogêneas de um ponto de $\mathbb{P}^n$ não são únicas. No entanto, se uma coordenada homogênea é ou não nula é uma questão bem definida.

O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ pode ser visto como sendo o conjunto dos subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimensão igual a 1. Cada ponto $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ de $\mathbb{P}^n$ corresponde ao subespaço vetorial $\langle (x_0, x_1, \dots, x_n) \rangle$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, e vice-versa.

Preferimos manter a visão sobre $\mathbb{P}^n$ como foi apresentada na definição, pois assim fica claro que, por meio da aplicação natural

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n], \end{aligned}$$

podemos fornecer a $\mathbb{P}^n$ a topologia quociente. Esta topologia faz de $\mathbb{P}^n$ um espaço topológico de Hausdorff, conexo e com base enumerável.

Podemos cobrir o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ com $n + 1$ subconjuntos abertos, a saber

$$U_i := \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Cada aberto U_i é homeomorfo a $\mathbb{C}^n$ via aplicações

$$\begin{aligned} \phi_i : \quad U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [x_0 : x_1 : \cdots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Estes homeomorfismos são cartas complexas n -dimensionais sobre $\mathbb{P}^n$, e juntas elas formam um atlas complexo n -dimensional sobre $\mathbb{P}^n$, induzindo uma estrutura complexa n -dimensional sobre $\mathbb{P}^n$. Portanto, $\mathbb{P}^n$ é uma variedade complexa de dimensão n . Em particular, $\mathbb{P}^1$ é uma superfície de Riemann, conhecida como *reta projetiva complexa*.

Note que $\mathbb{P}^n$ é compacto. De fato, seja

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 = 1\}$$

e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \quad S^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]. \end{aligned}$$

Como π é uma aplicação contínua e S^n é compacto, a imagem $\pi(S^n)$ é compacta. Mas π é sobrejetiva: se $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ então $\lambda = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2 > 0$; assim, $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = [\lambda^{-1/2}x_0 : \lambda^{-1/2}x_1 : \cdots : \lambda^{-1/2}x_n]$; como $\|\lambda^{-1/2}x_0\|^2 + \|\lambda^{-1/2}x_1\|^2 + \cdots + \|\lambda^{-1/2}x_n\|^2 = 1$, $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \pi(S^n)$. Portanto $\mathbb{P}^n$ é compacto.

Outra maneira de verificar a compacidade de $\mathbb{P}^n$ é cobrindo-o com $n + 1$ subconjuntos compactos, a saber

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \phi_i^{-1}(\overline{D}),$$

onde $\overline{D} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|x_i\| \leq 1\}$.

1.2.3 Toros Complexos

Fixe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Seja L o reticulado gerado por ω_1 e ω_2 , isto é,

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Claramente L é um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{C}$, o qual é claramente comutativo. Sejam $X = \mathbb{C}/L$ o grupo quociente e $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ a aplicação natural. Através desta aplicação π podemos fornecer a X a topologia quociente, a qual declara um subconjunto $U \subset X$ aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Note que esta topologia torna π uma aplicação contínua, e como $\mathbb{C}$ é conexo, X também é conexo.

Observe que todo subconjunto aberto de X é a imagem de um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, pois se $U \subset X$ é aberto então $U = \pi(\pi^{-1}(U))$; e mais, π é uma aplicação aberta. De fato, se $V \subset \mathbb{C}$ é aberto, então o translado $\omega + V$, $\omega \in L$, é também um aberto de $\mathbb{C}$. Assim,

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + V)$$

é aberto em $\mathbb{C}$, e pela definição da topologia sobre X , $\pi(V)$ é aberto em X ; portanto, π é uma aplicação aberta.

Definimos o *paralelogramo fechado* com origem num ponto $z \in \mathbb{C}$ por

$$P_z := \left\{ z + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1] \right\}.$$

Quando $z = 0$, P_0 é chamado de *paralelogramo fundamental*. É fácil ver que todo ponto de $\mathbb{C}$ é congruente módulo L a um ponto de P_z , e por este motivo, $\pi(P_z) = X$. Portanto, como P_z é compacto, X também é compacto.

Como L é um subconjunto discreto de $\mathbb{C}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\omega| > 2\epsilon$ para todo $\omega \in L \setminus \{0\}$. Fixe um tal ϵ e um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$. Sobre a bola aberta $D_{z_0} = D(z_0, \epsilon)$ de raio ϵ em torno de z_0 , dois pontos distintos de D_{z_0} não podem diferir por um elemento do reticulado L .

Vamos mostrar que, para um tal ϵ e todo z_0 , a restrição $\pi|_{D_{z_0}} : D_{z_0} \rightarrow \pi(D_{z_0})$ é um homeomorfismo. Claramente esta restrição de π é sobrejetiva, contínua e aberta. Restamos apenas mostrar que esta aplicação é injetiva. Suponha que $z_1, z_2 \in D_{z_0}$ são tais que $\pi(z_1) = \pi(z_2)$; então $z_1 - z_2 = \omega \in L$, o que ocorre apenas quando $z_1 = z_2$.

Agora podemos definir um atlas complexo sobre X . Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, defina $\phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$ como sendo a aplicação inversa de $\pi|_{D_{z_0}}$. Afirmamos que a coleção $\{\phi_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ é um atlas complexo sobre X . De fato, já vimos que estas aplicações são cartas complexas sobre X , e que os domínios de tais cartas cobrem todo X é óbvio. Precisamos apenas provar que estas cartas são duas a duas compatíveis. Para isso, sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ pontos quaisquer, e considere as cartas $\phi_1 = \phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}$ e $\phi_2 = \phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}$. Suponha que $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$ é não-vazio, pois caso

contrário, nada temos a provar. Seja $T(z) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2 \circ \pi(z)$ a função de transição entre as cartas ϕ_1 e ϕ_2 . Observe que $\pi \circ T(z) = \pi(z)$ para todo $z \in \phi_1(U)$, e então $T(z) - z = \omega(z) \in L$ para todo $z \in \phi_1(U)$. A função $\omega : \phi_1(U) \rightarrow L$ é contínua e L é um conjunto discreto, o que implica que ω é uma função localmente constante sobre ϕ_1 . Então, localmente, $T(z) = z + \omega$ para algum $\omega \in L$ fixado, a qual é claramente uma função holomorfa, como queríamos provar.

Portanto, X é uma superfície de Riemann compacta, chamada de *toro complexo*. O gênero topológico de X é igual a 1. Um toro complexo depende do reticulado.

1.2.4 Gráficos de Aplicações Holomorfas

Sejam $g_1, g_2, \dots, g_n$ funções holomorfas e definidas sobre um subconjunto $V \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo. O *gráfico* da aplicação

$$\begin{aligned} g : V &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longmapsto (g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)), \end{aligned}$$

é o subconjunto

$$X = \{(z, g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)) \mid z \in V\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Com a topologia induzida de $\mathbb{C}^{n+1}$, o gráfico X é um subespaço topológico de Hausdorff satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade. Como cada uma das funções g_i é contínua e V é conexo, X também é conexo. A projeção $\pi : X \rightarrow V$ da primeira coordenada é um homeomorfismo, cuja inversa associa $z \in V$ a $n + 1$ -upla $(z, g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)) \in X$. Assim, π é uma carta complexa sobre X , cujo domínio é o próprio X . Temos então, um atlas complexo sobre X formado por uma única carta. Portanto, X é uma superfície de Riemann.

1.2.5 Curvas Planas Afins Suaves

Vimos que o gráfico de uma função holomorfa, definida sobre um conjunto conexo, é uma superfície de Riemann. Agora estamos interessados em considerar um espaço X , que é localmente o gráfico de uma função, mas não o é globalmente, e verificar sob quais condições X é uma superfície de Riemann. Faremos isto para um subespaço X de $\mathbb{C}^2$, consistindo dos pontos de $\mathbb{C}^2$ que satisfazem uma equação polinomial $f = 0$ de duas variáveis. Com a condição de anulamento do polinômio f , esperamos que a dimensão complexa de X caia de 2 com relação a dimensão complexa de $\mathbb{C}^2$. Assim, temos uma chance para que X seja uma superfície de Riemann, uma vez que esta é uma variedade complexa de dimensão 1.

Primeiro precisamos de uma condição sobre f para X ser, localmente, o gráfico de uma função. Esta condição é dada por um caso particular do Teorema da Função Implícita.

Teorema 1.2.1 (Teorema da Função Implícita). Seja $f \in \mathbb{C}[z, w]$ um polinômio. Considere $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$, o conjunto dos zeros de f . Seja $p = (z_0, w_0)$ um ponto de X , isto é, $f(p) = 0$. Se $\partial f / \partial w(p) \neq 0$ então existe uma função $g(z)$ definida e holomorfa numa vizinhança de z_0 tal que, próximo a p , X é o gráfico $w = g(z)$. Mais ainda, $g' = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial w}$ próximo a z_0 .

O mesmo resultado vale trocando as variáveis z e w , uma pela outra. Isto justifica a definição seguinte.

Definição 1.2.2. Uma *curva plana afim de grau d* é o conjunto dos zeros em $\mathbb{C}^2$ de um polinômio $f \in \mathbb{C}[z, w]$ de grau d . O *conjunto das singularidades* de um polinômio $f \in \mathbb{C}[z, w]$, denotado por $\text{sing}(f)$, é o conjunto dos pontos $p \in \mathbb{C}^2$ que são soluções do sistema de equações

$$f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w} = 0.$$

Uma curva plana afim definida por um polinômio $f \in \mathbb{C}[z, w]$ é singular num ponto $p \in \mathbb{C}^2$ se $p \in \text{sing}(f)$; caso contrário, X é não-singular em p . A curva plana afim X é *não-singular*, ou *suave*, se $\text{sing}(f) = \emptyset$.

O termo *singular* para um polinômio, ou para uma curva plana afim, significa que a condição de não-singularidade não é satisfeita.

Muitas vezes, para dizer que X é uma curva plana afim definida por um polinômio $f \in \mathbb{C}[z, w]$, escreveremos simplesmente $X : f(z, w) = 0$.

Seja $X : f(z, w) = 0$ uma curva plana afim suave. Pelo Teorema da Função Implícita, X é localmente o gráfico de uma função holomorfa. Mais especificamente, se $p = (z_0, w_0) \in X$ e $\partial f / \partial w(p) \neq 0$, então existe uma função holomorfa $g_p(z)$ tal que, numa vizinhança U de p , X é o gráfico $w = g_p(z)$. Assim, a projeção $\pi_z : U \rightarrow \pi_z(U)$ dada por $\pi_z(z, g_p(z)) = z$ é um homeomorfismo entre U e sua imagem, a qual é aberta em $\mathbb{C}$. Portanto, π_z é uma carta complexa sobre X . Caso $\partial f / \partial z(p) \neq 0$, o mesmo argumento se aplica, e neste caso obtemos uma carta complexa π_w dada pela projeção da segunda coordenada.

Como X é suave, ao menos uma das derivadas parciais de f é não-nula em cada ponto de X , e portanto, o domínio dessas cartas do tipo π_z e π_w cobrem X .

Para termos definido um atlas complexo formado por tais cartas, devemos mostrar a compatibilidade entre elas. Se duas cartas são do tipo π_z , ou do tipo π_w , e a interseção dos seus domínios é não-vazia, então a composição de uma com a inversa da outra é a função identidade, a qual é certamente holomorfa. Por isso, podemos assumir que uma

carta é do tipo π_z e outra é do tipo π_w . Seja $p = (z_0, w_0)$ um ponto do domínio comum U das duas cartas. Digamos que, próximo a p , os pontos de X são da forma $(z, g(z))$, para uma certa função g holomorfa. Então, próximo a $z_0 \in \pi_z(U)$, a inversa de π_z é dada por $\pi_z^{-1}(z) = (z, g(z))$. Portanto, $\pi_w \circ \pi_z^{-1}(z) = g(z)$, a qual é uma função holomorfa.

Concluimos que a coleção formada pelas cartas do tipo π_z e π_w é um atlas complexo sobre X .

A curva X é um espaço topológico de Hausdorff e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, pois X é subespaço topológico de $\mathbb{C}^2$, o qual possui estas mesmas propriedades. Assim, para concluirmos que X é uma superfície de Riemann, fica faltando verificar que X é conexo. Note que, se X é a união de duas retas paralelas distintas, por exemplo $X : f(z, w) = (z + w)(z + w - 1)$, então X não é conexo. No entanto, cada reta é uma superfície de Riemann. O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para uma curva plana afim ser conexa.

Teorema 1.2.2. Se $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ é um polinômio irredutível, então o conjunto X dos zeros de f é conexo. Portanto, se f é não-singular e irredutível, X é uma superfície de Riemann.

A prova deste teorema não é elementar, e exige mais conceitos sobre curvas planas afins. Sugerimos [Sha98a, p. 126] para uma prova deste teorema.

Uma curva $X : f(z, w) = 0$, onde f é um polinômio irredutível, é chamada de uma *curva plana afim irredutível*.

Exemplo 1.2.1. Seja $h \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio de uma variável. Então, $f(z, w) = w^2 - h(z)$ é irredutível se, e somente se, $h(z)$ não é um quadrado perfeito. Mais ainda, se $h(z)$ possui raízes distintas então $X : f(z, w) = 0$ é uma superfície de Riemann.

Veremos mais adiante que, se $f \in \mathbb{C}[z, w]$ é um polinômio irredutível, então o conjunto das singularidades de f é finito. Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ denotam os pontos singulares de $X : f(z, w) = 0$, então as componentes conexas de $X \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ são superfícies de Riemann com as mesmas cartas de X . O conjunto dos pontos não-singulares de X é chamado de *parte suave* da curva plana afim X .

Como última observação, note que nenhuma curva plana afim é compacta. De fato, como $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, uma curva $X : f(z, w) = 0$ seria compacta se, e somente se, X fosse fechada e limitada. Porém, dado qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$, a equação $f(z_0, w) = 0$ sempre possui solução, pois $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado. Portanto, X não é compacta.

1.3 Curvas Projetivas

1.3.1 Curvas Planas Projetivas Suaves

Um polinômio $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ é *homogêneo* de grau d se F pode ser escrito na forma

$$F = \sum_{i_0+i_1+\dots+i_n=d} a_{(i)} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \quad a_{(i)} \in \mathbb{C}.$$

Em outras palavras, um polinômio é homogêneo se cada um de seus termos tem o mesmo grau nas variáveis. Note que um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ de grau d satisfaz

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Isto mostra que a avaliação de F num ponto $p \in \mathbb{P}^n$ não está bem definida, mas se $F(p)$ é ou não nulo é uma questão bem definida. Portanto, faz sentido estudarmos o conjunto dos zeros em $\mathbb{P}^n$ de um polinômio homogêneo.

Vamos nos limitar ao estudo dos zeros de um polinômio homogêneo em apenas três variáveis. Neste caso, as variáveis x_0, x_1 e x_2 serão substituídas por x, y e z , respectivamente.

Definição 1.3.1. Uma *curva plana projetiva de grau d* é o conjunto dos zeros em $\mathbb{P}^2$ de um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grau d . O *conjunto das singularidades* de um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, denotado por $\text{sing}(F)$, é o conjunto dos pontos $p \in \mathbb{P}^2$ que são soluções do sistema de equações

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Uma curva plana projetiva definida por um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é *singular* num ponto $p \in \mathbb{P}^2$ se $p \in \text{sing}(F)$; caso contrário, X é *não-singular* em p . A curva plana projetiva X é *não-singular*, ou *suave*, se $\text{sing}(F) = \emptyset$.

Muitas vezes, para dizer que X é uma curva plana projetiva definida por um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, escreveremos simplesmente $X : F(x, y, z) = 0$.

Seja $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva. A interseção

$$X_i := X \cap U_i$$

é chamada de *parte afim da curva X com relação a i -ésima coordenada*. A imagem da

parte afim X_i de X pelo homeomorfismo ϕ_i em 1.2.1 é uma curva plana afim em $\mathbb{C}^2$. Por exemplo, temos

$$X_0 = X \cap U_0 \cong \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, u, v) = 0\},$$

onde $u = y/x$ e $v = z/x$. O processo sobre o polinômio homogêneo F para se obter a parte afim da curva X com relação a i -ésima coordenada é chamado de *desomogeneização* de F com relação a i -ésima coordenada.

Inversamente, uma curva plana afim, definida por um polinômio $f \in \mathbb{C}[x, y]$, é a parte afim da curva plana projetiva $X : F(x, y, z) = z^{\deg(f)} f(x/z, y/z) = 0$ com relação a nova coordenada z . O processo de obtenção do polinômio homogêneo F a partir de f é chamado de *homogeneização* de f .

Note que um polinômio $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ homogêneo de grau d satisfaz a *fórmula de Euler*

$$dF = \sum_{i=0}^d x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Lema 1.3.1. Suponha que $F(x, y, z)$ é um polinômio homogêneo de grau d . Então F é não-singular se, e somente se, cada X_i é uma curva plana afim suave em $\mathbb{C}^2$.

Demonstração. Suponha que umas das partes afins X_i de X não é suave. Podemos supor que X_0 não é suave, pois caso contrário permutamos as variáveis como for conveniente. Se $f(y, z) = F(1, y, z)$ então significa que $X_0 : f(y, z) = 0$. Como estamos supondo que X_0 não é suave, existe uma solução $(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^2$ para o sistema de equações

$$f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Note que,

$$\begin{aligned} F[1 : y_0 : z_0] &= f(y_0, z_0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}[1 : y_0 : z_0] &= \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}[1 : y_0 : z_0] &= \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = 0, \end{aligned}$$

e pela fórmula de Euler,

$$\frac{\partial F}{\partial x}[1 : y_0 : z_0] = \left(dF - y_0 \frac{\partial F}{\partial y} - z_0 \frac{\partial F}{\partial z} \right) [1 : y_0 : z_0] = 0.$$

Portanto, F é singular no ponto $[1 : y_0 : z_0] \in \mathbb{P}^2$.

Suponha agora que F é singular. Então existe uma solução $p \in \mathbb{P}^2$ para o sistema de equações

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Podemos supor que $p = [1 : y_0 : z_0]$. Se $f(y, z) = F(1, y, z)$ então $X_0 : f(y, z) = 0$ é singular no ponto $(y_0, z_0) \in \mathbb{C}^2$, pois

$$\begin{aligned} f(y_0, z_0) = 0 &= F[1 : y_0 : z_0], \\ \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial y}[1 : y_0 : z_0] = 0, \text{ e} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial z}[1 : y_0 : z_0] = 0. \end{aligned}$$

■

Seja $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva suave. Queremos mostrar que X é uma superfície de Riemann. Pelo Lema 1.3.1 que acabamos de ver, cada uma das partes afins X_i de X são curvas planas afins suaves. Como X é suave, F deve ser um polinômio irredutível. Isto é consequência do famoso Teorema de Bézout, o qual veremos futuramente. E como F é irredutível, cada X_i também é irredutível. Assim, pelo Teorema 1.2.2, cada parte afim X_i de X é uma superfície de Riemann, e suas cartas são as projeções. Por exemplo, as cartas sobre X_0 são, localmente, as composições

$$\begin{array}{ccccc} \pi_y \circ \phi_0 : & X_0 & \xrightarrow{\phi_0} & \phi_0(X_0) & \xrightarrow{\pi_y} \mathbb{C} \\ & [x : y : z] & \longmapsto & \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) & \longmapsto \frac{y}{x} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccc} \pi_z \circ \phi_0 : & X_0 & \xrightarrow{\phi_0} & \phi_0(X_0) & \xrightarrow{\pi_z} \mathbb{C} \\ & [x : y : z] & \longmapsto & \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) & \longmapsto \frac{z}{x}. \end{array}$$

Vamos verificar que as cartas sobre as partes afins X_i de X são compatíveis. Seja $p \in X$. Digamos que $p = [x : y : z]$ com $x, y \neq 0$, isto é, p é coberto por duas cartas, uma sobre X_0 e outra sobre X_1 . Suponha que $\phi_0 = y/x$ é uma carta sobre X_0 próximo a p , e que $\phi_1 = z/y$ é uma carta sobre X_1 próximo a p . Temos de mostrar que a composição $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ é holomorfa. Como X é localmente o gráfico de uma função holomorfa h , temos $\phi_0^{-1}(w) = [1 : w : h(w)]$ próximo de $\phi_0(p)$. Assim, $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(w) = h(w)/w$, a qual é uma função holomorfa, porque como $p \in X_1 = X \cap U_1$, temos $w \neq 0$. As demais compatibilidades entre outras duas cartas são verificadas de modo análogo.

Portanto, as cartas sobre as partes afins X_i de X induzem uma estrutura complexa sobre X .

Proposição 1.3.1. Toda curva plana projetiva suave X é uma superfície de Riemann compacta. Mais ainda, todo ponto de X possui uma coordenada local dada por um quociente de coordenadas homogêneas.

Demonstração. A discussão anterior a proposição provaram que X é uma superfície de Riemann. Resta-nos provar que X é compacta. Mas X é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}^2$, o qual é compacto; logo, X deve ser compacta. ■

1.3.2 Interseções Completas

Estamos interessados em fornecer exemplos de superfícies de Riemann dentro de um espaço projetivo $\mathbb{P}^n$. Vimos na subseção 1.2.2 que $\mathbb{P}^n$ é uma variedade complexa de dimensão n , isto é, $\mathbb{P}^n$ é localmente homeomorfo a um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Assim, um primeiro passo para definirmos uma superfície de Riemann dentro de $\mathbb{P}^n$ é impor $n - 1$ condições independentes aos pontos de $\mathbb{P}^n$ (intuitivamente, cada condição faz com que a dimensão complexa caia de 1). Faremos isso da maneira mais natural: impondo que $n - 1$ equações polinomiais homogêneas sejam satisfeitas. Observe que foi exatamente isso que fizemos no caso de curvas planas projetivas.

Assim como no caso de curvas planas projetivas, precisamos de uma condição análoga de não-singularidade sobre o conjunto dos zeros comuns a $n - 1$ polinômios homogêneos. Isto é baseado num caso particular do Teorema da Função Implícita para várias variáveis.

Teorema 1.3.1 (Teorema da Função Implícita para Várias Variáveis). Sejam $F_1, F_2, \dots, F_{n-1} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ polinômios. Considere $X = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid F_1(p) = F_2(p) = \dots = F_{n-1}(p) = 0\}$, o conjunto dos zeros comuns a $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja $p = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ um ponto de X , isto é, $F_1(p) = F_2(p) = \dots = F_{n-1}(p) = 0$. Se a matriz

$$(\partial F_i / \partial x_j)_{(n-1) \times n},$$

onde $1 \leq j \leq n$, tem posto máximo $n - 1$ em p , então existem funções $g_1(x_0), g_2(x_0), \dots, g_n(x_0)$ definidas e holomorfas numa vizinhança de z_0 tais que, próximo a p , X é o gráfico $(x_0, g_1(x_0), g_2(x_0), \dots, g_n(x_0))$.

Definição 1.3.2. Sejam $F_1, F_2, \dots, F_{n-1} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos. Seja $X = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F_1(p) = F_2(p) = \dots = F_{n-1}(p) = 0\}$, o conjunto dos zeros comuns a $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ em $\mathbb{P}^n$. Diremos que X é uma *curva de interseção completa* se a matriz

$$(\partial F_i / \partial x_j)_{(n-1) \times (n+1)}$$

tem posto máximo $n - 1$ em todo ponto de X .

Proposição 1.3.2. Toda curva de interseção completa em $\mathbb{P}^n$ é uma superfície de Riemann compacta. Mais ainda, todo ponto de X possui uma coordenada local dada por um quociente x_i/x_j de coordenadas homogêneas.

Demonstração. Antes de tudo, é necessário observar que esta proposição numa versão afim, sem a asserção da compacidade, é verdadeira: pela hipótese de não-singularidade, as cartas podem ser definidas utilizando os argumentos apresentados na subseção 2.1.1.

Para o caso projetivo, suponha que X é uma curva de interseção completa em $\mathbb{P}^n$. Cada parte afim X_i de X é uma curva afim não-singular em $\mathbb{C}^n$, e suas cartas são dadas por projeções. Compondo essas cartas com o isomorfismo ϕ_i , definido em 1.2.1, obtemos as cartas complexas sobre X dadas por quocientes x_i/x_j de coordenadas homogêneas. A compacidade de X segue pelo fato de X ser um subconjunto fechado do compacto $\mathbb{P}^n$. ■

1.3.3 Interseções Completas Locais

A condição de não-singularidade de uma curva de interseção completa é importante para conseguirmos definir as cartas complexas sobre tal curva. É interessante notar que essa condição, se satisfeita localmente em cada ponto, é suficiente para definirmos as cartas. A definição a seguir é motivada por essa observação.

Definição 1.3.3. Seja $\{F_\alpha\}_\alpha$ uma coleção de polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Seja $X = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F_\alpha(p) = 0\}$, o conjunto dos zeros comuns a todos polinômios F_α em $\mathbb{P}^n$. Diremos que X é uma *curva de interseção completa local* se, próximo a cada ponto $p \in X$, existem $n - 1$ polinômios $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_{n-1}}$ suficientes para descrever X , e tais que, a matriz

$$(\partial F_{\alpha_i} / \partial x_j)_{(n-1) \times (n+1)}$$

tem posto máximo $n - 1$ em p .

Proposição 1.3.3. Toda curva de interseção completa local conexa em $\mathbb{P}^n$ é uma superfície de Riemann compacta. Mais ainda, todo ponto de X possui uma coordenada local dada por um quociente x_i/x_j de coordenadas homogêneas.

Exemplo 1.3.1. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \nu : \quad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [x : y] &\longmapsto [x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]. \end{aligned}$$

A imagem desta aplicação é uma curva projetiva em $\mathbb{P}^3$ definida por três polinômios homogêneos, a saber

$$F_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \quad F_2 = x_0x_2 - x_1^2 \quad \text{e} \quad F_3 = x_1x_3 - x_2^2.$$

Esta curva, conhecida como *cúbica retorcida* em $\mathbb{P}^3$, não é uma curva de interseção completa, pois não pode ser descrita por apenas dois de seus polinômios satisfazendo a condição de não-singularidade. Por exemplo, F_1 e F_2 não são suficientes para descrever a cúbica retorcida porque a matriz das suas derivadas parciais

$$(\partial F_i / \partial x_j)_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ x_2 & 2x_1 & x_0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4},$$

não tem posto máximo em $[0 : 0 : 0 : 1]$. No entanto, esta curva é de interseção completa local. Por exemplo, próximo ao ponto $[1 : 0 : 0 : 0]$ apenas F_1 e F_2 são necessários para descrever a curva, pois pelo fato de termos $x_0 \neq 0$, a equação imposta por F_3 é obtida das duas primeiras, e além disso, a condição de não-singularidade é satisfeita.

CAPÍTULO 2

Funções e Mapas

2.1 Funções Sobre Superfícies de Riemann

Nesta seção vamos definir os conceitos de função holomorfa, singularidades de uma função e função meromorfa, sobre uma superfície de Riemann. Isso será feito por meio de cartas complexas. Como uma superfície de Riemann X é localmente homeomorfa a um subconjunto aberto do plano complexo, uma função sobre X pode ser vista, localmente, como uma função sobre um subconjunto aberto do plano complexo. Assim, tais conceitos podem ser estendidos naturalmente para funções definidas sobre X .

2.1.1 Funções Holomorfas

Sejam X uma superfície de Riemann e $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida numa vizinhança $W \subset X$ de um ponto $p \in X$.

Definição 2.1.1. Diremos que a função f é *holomorfa em p* se existe uma carta $\phi : U \rightarrow V$, com $p \in U$, tal que a composição $f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em $\phi(p)$. Diremos que f é *holomorfa sobre W* se f é holomorfa em todo ponto de W .

O lema a seguir mostra que este conceito independe da escolha da carta.

Lema 2.1.1. Sejam X uma superfície de Riemann e $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida numa vizinhança $W \subset X$ de um ponto $p \in X$. Então:

- (a) f é holomorfa em p se, e somente se, para toda carta $\phi : U \rightarrow V$, com $p \in U$, a composição $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(p)$;

- (b) f é holomorfa sobre W se, e somente se, existe uma coleção de cartas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$, com $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, tal que a composição $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_\alpha(W \cap U_\alpha)$ para cada α ;
- (c) se f é holomorfa em p , então f é holomorfa sobre uma vizinhança de p .

Demonstração. (a) Sejam $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ duas cartas sobre X com $p \in U_1 \cap U_2$. Suponha que $f \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em $\phi_1(p)$. Como

$$f \circ \phi_2^{-1} = (f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}),$$

onde cada uma das expressões entre parênteses é holomorfa, concluímos que $f \circ \phi_2^{-1}$ é holomorfa em $\phi_2(p)$. A recíproca desta afirmação é imediata.

(b) Se f é holomorfa sobre W então, para cada $p \in W$, existe uma carta $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, com $p \in U_\alpha$, tal que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ é holomorfa em $\phi_\alpha(p)$. Pelo item (a), $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_\alpha(W \cap U_\alpha)$. Assim, $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ é uma coleção de cartas, com $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, tal que $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_\alpha(W \cap U_\alpha)$. Reciprocamente, se $p \in W$ então $p \in U_\alpha$ para algum α e $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ é holomorfa sobre $\phi_\alpha(W \cap U_\alpha)$. Em particular, $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ é holomorfa em $\phi_\alpha(p)$. Portanto, pela arbitrariedade de p , f é holomorfa sobre W .

(c) Se f é holomorfa em p então existe uma carta $\phi : U \rightarrow V$, com $p \in U$, tal que $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(p)$, e portanto, holomorfa sobre uma vizinhança $W \subset V$ de $\phi(p)$. Logo, f é holomorfa sobre a vizinhança $\phi^{-1}(W) \subset U$ de p . ■

Fornecemos alguns exemplos de funções holomorfas sobre algumas superfícies de Riemann já conhecidas. Em alguns exemplos a verificação resume-se ao caso de funções holomorfas sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.1. Toda carta complexa $\phi : U \rightarrow V$ sobre X é uma função holomorfa sobre todo seu domínio U . De fato, dado $p \in U$, existe esta carta ϕ tal que a composição $\phi \circ \phi^{-1} = id$ é holomorfa em $\phi(p)$.

Exemplo 2.1.2. Considerando $\mathbb{C}$ como uma superfície de Riemann, vemos que a Definição 2.1.1 é compatível com a definição usual de função holomorfa sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.3. Se f e g são funções holomorfas em $p \in X$, então $f \pm g$ e fg são holomorfas em p . Se ainda $g(p) \neq 0$ então f/g é holomorfa em p .

Exemplo 2.1.4. Seja f uma função sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$, definida numa vizinhança de ∞ . Se z é uma coordenada local próxima a ∞ , então f é holomorfa em ∞ se, e somente se, $f(1/z)$ é holomorfa em $z = 0$. Em particular, uma função racional

$f(z) = p(z)/q(z)$ é holomorfa em ∞ se, e somente se, $\deg(p) \leq \deg(q)$. De fato, com as notações do Exemplo 1.1.12 o ponto ∞ representa o ponto $(0, 0, 1)$, e $z = \phi_2(x, y, w)$ é uma coordenada local próxima a ∞ . Então, f é holomorfa em ∞ se, e somente se, $f \circ \phi_2^{-1}$ é holomorfa em $\phi_2(\infty) = 0$. Mas segundo as observações finais do Exemplo 1.1.12, $\phi_2^{-1} = 1/z$, e portanto, a afirmação é verdadeira.

Exemplo 2.1.5. Considere a reta projetiva $\mathbb{P}^1$ com coordenadas homogêneas $[z : w]$. Sejam $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$ polinômios homogêneos, ambos de grau d . Seja $[z_0 : w_0] \in \mathbb{P}^1$ tal que $q(z_0, w_0) \neq 0$. Então $f[z : w] = p(z, w)/q(z, w)$ está bem definida e é uma função holomorfa em $[z_0 : w_0]$. De fato, f está bem definida porque se $[z : w] = [\lambda z : \lambda w]$, com $\lambda \in \mathbb{C}^*$, então

$$f[\lambda z : \lambda w] = \frac{p(\lambda z, \lambda w)}{q(\lambda z, \lambda w)} = \frac{\lambda^d p(z, w)}{\lambda^d q(z, w)} = \frac{p(z, w)}{q(z, w)} = f[z : w].$$

Sem perda de generalidade podemos supor $[z_0 : w_0] = [1 : w_0] \in U_0$. Então $u = \phi_0[z : w] = w/z$ é uma carta sobre $\mathbb{P}^1$, com $[1 : w_0]$ em seu domínio, tal que $f \circ \phi_0^{-1}(u) = f[1 : u] = p(1, u)/q(1, u)$ é holomorfa em $\phi_0[1 : w_0] = w_0$, pois $q(1, \phi_0[1 : w_0]) = q[1 : w_0] \neq 0$. Portanto a afirmação procede.

Exemplo 2.1.6. Considere um toro complexo $\mathbb{C}/L$ com a aplicação quociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$. Seja $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ uma função sobre um subconjunto aberto $W \subset \mathbb{C}/L$. Então f é holomorfa em $p \in W$ se, e somente se, existe $z \in \pi^{-1}(p) \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ \pi$ é holomorfa em z . Logo, f é holomorfa sobre W se, e somente se, $f \circ \pi$ é holomorfa sobre $\pi^{-1}(W)$. De fato, com as notações da Subseção 1.2.3, f é holomorfa em $p \in W$ se, e somente se, existe uma carta $\phi_w : \pi(D_w) \rightarrow D_w$ sobre o toro $\mathbb{C}/L$, com $p \in \pi(D_w)$, tal que $f \circ \phi_w^{-1}$ é holomorfa em $\phi_w(p)$. Mas ϕ_w é a inversa de $\pi|_{D_w}$, ou seja, $z = \phi_w(p) \in \pi^{-1}(p)$ e $f \circ \phi_w^{-1} = f \circ \pi|_{D_w}$, donde segue a afirmação.

Exemplo 2.1.7. Seja $X : f(z, w) = 0$ uma curva plana afim suave. Então toda função polinomial restrita à X é uma função holomorfa. De fato, seja $p = (z_0, w_0) \in X$. Como X é suave, podemos supor que, próximo a p , os pontos de X são da forma $(z, g(z))$, para alguma função holomorfa g . Assim, a projeção $\pi_z(z, g(z)) = z$ é uma carta sobre X , com p em seu domínio, tal que $h \circ \pi_z^{-1}(z) = h(z, g(z))$ é holomorfa em $\pi_z(z_0, w_0) = z_0$. Pela arbitrariedade de p , a função polinomial h é holomorfa sobre X .

Exemplo 2.1.8. Considere $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva suave. Sejam $G, H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinômios homogêneos, ambos de grau d . Seja $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$ tal que $H(p) \neq 0$. Então $f[x : y : z] = G(x, y, z)/H(x, y, z)$ está bem definida e é uma função holomorfa em p .

O próximo exemplo é uma generalização do anterior.

Exemplo 2.1.9. Considere $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva de interseção completa local. Sejam $G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos, ambos de grau d . Seja $p \in X$ tal que $H(p) \neq 0$. Então $f[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = G(x_0, x_1, \dots, x_n)/H(x_0, x_1, \dots, x_n)$ está bem definida e é uma função holomorfa em p . De fato, como X é uma curva de interseção completa local, existe uma vizinhança de p onde os pontos de X são os zeros de $n - 1$ polinômios homogêneos $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_{n-1}}$, e ainda $(\partial F_{\alpha_i}/\partial x_j)_{(n-1) \times (n+1)}$ tem posto máximo $n - 1$ em p . Logo, pelo Teorema da Função Implícita, os pontos de X suficientemente próximos a p são da forma $[1 : z : g_1(z) : \dots : g_{n-1}(z)]$, onde g_i são funções holomorfas. Assim, se o quociente x_i/x_j de coordenadas homogêneas é uma carta sobre X , com p em seu domínio, então a composição de f com a inversa dessa carta será o quociente de somas de potências das funções holomorfas g_i , e portanto f é holomorfa em p .

É conveniente introduzirmos a seguinte notação:

Definição 2.1.2. Seja X uma superfície de Riemann e $W \subset X$ um subconjunto aberto. Denotaremos por $\mathcal{O}_X(W)$, ou simplesmente por $\mathcal{O}(W)$, a $\mathbb{C}$ -álgebra das funções holomorfas sobre W . Em símbolos:

$$\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}(W) := \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa}\}.$$

Note que, se W é conexo, então $\mathcal{O}(W)$ é um domínio.

2.1.2 Singularidades de Funções e Funções Meromorfas

Sejam X uma superfície de Riemann e $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto $W \subset X$. Suponha que f é holomorfa sobre uma vizinhança reduzida $U \setminus \{p\} \subset W$ de um ponto $p \in X$, mas não-holomorfa neste ponto p .

Definição 2.1.3. Diremos que a função f tem uma *singularidade removível* (resp. um *pólo*, uma *singularidade essencial*) em p se existe uma carta $\phi : U \rightarrow V$, com $p \in U$, tal que a composição $f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$ tem uma singularidade removível (resp. um pólo, uma singularidade essencial) em $\phi(p)$.

O lema a seguir mostra que esta definição está bem definida, isto é, independe da particular carta escolhida.

Lema 2.1.2. Com as notações anteriores, f tem uma singularidade removível (resp. um pólo, uma singularidade essencial) em p se, e somente se, para toda carta $\phi : U \rightarrow V$, com $p \in U$, a composição $f \circ \phi^{-1}$ tem uma singularidade removível (resp. um pólo, uma singularidade essencial) em $\phi(p)$.

Demonstração. Sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas cartas cujos domínios contém o ponto p . Suponha primeiro que $f \circ \phi_1^{-1}$ tem uma singularidade removível em $\phi_1(p)$. Então, existe uma função holomorfa $g : D(\phi_1(p), r) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f \circ \phi_1^{-1}(z)$ para todo z no anel $0 < |z - \phi_1(p)| < r$. Assim, a função $g \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}) : D(\phi_2(p), r') \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa e $g \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(z) = f \circ \phi_2^{-1}(z)$ para todo z no anel $0 < |z - \phi_2(p)| < r'$, onde r' é tomado convenientemente. Suponha agora que $f \circ \phi_1^{-1}$ tem um pólo ou uma singularidade removível em $\phi_1(p)$. Em qualquer caso temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \phi_2(p)} |f \circ \phi_2(z)| &= \lim_{z \rightarrow \phi_2(p)} |(f \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(z)| \\ &= \lim_{z \rightarrow \phi_1(p)} |f \circ \phi_1^{-1}(z)|. \end{aligned}$$

Portanto, se $f \circ \phi_1^{-1}$ tem um pólo em $\phi_1(p)$, então $f \circ \phi_2^{-1}$ tem um pólo em $\phi_2(p)$ (o que é equivalente a ter o limite acima igual a ∞), e se $f \circ \phi_1^{-1}$ tem uma singularidade essencial em $\phi_1(p)$, então $f \circ \phi_2^{-1}$ tem uma singularidade essencial em $\phi_2(p)$ (o que é equivalente ao limite acima não existir). ■

Definição 2.1.4. Um função $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ é *meromorfa num ponto* $p \in X$ se f é holomorfa, ou tem uma singularidade removível, ou tem um pólo, em p . Diremos que f é *meromorfa sobre o subconjunto aberto* W se f é meromorfa em todos os pontos de W .

Fornecemos alguns exemplos de funções meromorfas sobre algumas superfícies de Riemann já conhecidas. As verificações de tais exemplos são feitas de maneira análoga àsquelas dos exemplos de funções holomorfas, quase sempre observando que o quociente de duas funções meromorfas é também uma função meromorfa.

Exemplo 2.1.10. Considerando $\mathbb{C}$ como uma superfície de Riemann, vemos que a Definição 2.1.4 é compatível com a definição usual de função meromorfa sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.11. Seja X uma superfície de Riemann. Se f e g são funções meromorfas em $p \in X$, então $f \pm g$ e fg são meromorfas em p . Se g não é identicamente nula numa vizinhança de p , então f/g é meromorfa em p .

Exemplo 2.1.12. Seja f uma função sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$, definida numa vizinhança de ∞ . Se z é uma coordenada local próxima a ∞ , então f é meromorfa em ∞ se, e somente se, $f(1/z)$ é meromorfa em $z = 0$. Toda função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ é meromorfa sobre $\mathbb{C}_\infty$.

Exemplo 2.1.13. Considere a reta projetiva $\mathbb{P}^1$ com coordenadas homogêneas $[z : w]$. Sejam $p, q \in \mathbb{C}[z, w]$ polinômios homogêneos, ambos de grau d e com q não identicamente nulo. Então $f[z : w] = p(z, w)/q(z, w)$ é uma função meromorfa sobre $\mathbb{P}^1$.

Exemplo 2.1.14. Considere um toro complexo $\mathbb{C}/L$ com a aplicação quociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$. Seja $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ uma função sobre um subconjunto aberto $W \subset \mathbb{C}/L$. Então f é meromorfa em $p \in W$ se, e somente se, existe $z \in \pi^{-1}(p) \subset \mathbb{C}$ tal que $f \circ \pi$ é meromorfa em z . Logo, f é meromorfa sobre W se, e somente se, $f \circ \pi$ é meromorfa sobre $\pi^{-1}(W)$.

Exemplo 2.1.15. Considere $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva suave. Sejam $G, H \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinômios homogêneos, ambos de grau d e com H não identicamente nulo sobre X . Então $f[x : y : z] = G(x, y, z)/H(x, y, z)$ é uma função meromorfa sobre X .

O próximo exemplo é uma generalização do anterior.

Exemplo 2.1.16. Considere $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva de interseção completa local. Sejam $G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos, ambos de grau d e com H não identicamente nulo. Então $f[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = G(x_0, x_1, \dots, x_n)/H(x_0, x_1, \dots, x_n)$ é uma função meromorfa sobre X .

É conveniente introduzirmos a seguinte notação:

Definição 2.1.5. Seja X uma superfície de Riemann e $W \subset X$ um subconjunto aberto. Denotaremos por $\mathcal{M}_X(W)$, ou simplesmente por $\mathcal{M}(W)$, a $\mathbb{C}$ -álgebra das funções meromorfas sobre W . Em símbolos:

$$\mathcal{M}_X(W) = \mathcal{M}(W) := \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é meromorfa}\}.$$

Note que se W é conexo então $\mathcal{M}(W)$ é um corpo.

2.1.3 Séries de Laurent e a Ordem de uma Função Meromorfa num Ponto

Sejam X uma superfície de Riemann e f uma função definida e holomorfa sobre uma vizinhança reduzida de um ponto $p \in X$, mas não-holomorfa em p . Escolha uma carta $\phi : U \rightarrow V$ sobre X , com $p \in U$, e denote $z = \phi(x)$ a coordenada complexa local de X próxima a p . Temos então $f \circ \phi^{-1}$ holomorfa sobre uma vizinhança reduzida de $z_0 = \phi(p)$, e portanto, podemos expandir $f \circ \phi^{-1}$ na série de Laurent em torno de z_0 , obtendo uma expressão do tipo

$$f \circ \phi^{-1}(z) = \sum_n a_n(z - z_0)^n.$$

Esta série é chamada de *série de Laurent de f em torno do ponto p com respeito a coordenada local z* .

A principal utilidade das séries de Laurent é identificar o tipo de singularidade que uma função tem num determinado ponto.

Lema 2.1.3. Com as notações anteriores, f tem uma singularidade removível em p se, e somente se, $a_n = 0$ para todo $n < 0$. A função f tem um pólo em p se, e somente se, $a_n \neq 0$ para uma quantidade finita e não-nula de $n < 0$. A função f tem uma singularidade essencial em p se, e somente se, $a_n \neq 0$ para uma quantidade infinita de $n < 0$.

Definição 2.1.6. Seja f uma função meromorfa num ponto $p \in X$. Suponha que $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ é a série de Laurent de f em torno do ponto p com respeito a uma coordenada local z . A *ordem de f em p* , denotada por $\text{ord}_p(f)$, é definida por

$$\text{ord}_p(f) := \min\{n \mid a_n \neq 0\}.$$

Vamos verificar que esta definição não depende da particular coordenada local usada para se obter a série de Laurent, e que portanto, este conceito está bem definido.

Sejam $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ duas cartas com $p \in U_1 \cap U_2$. Denote por $z = \phi_1(x)$ e $w = \phi_2(x)$ as coordenadas locais fornecidas pelas cartas próximas a p . Considere a função de transição $T(w) = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ que expressa z como função holomorfa de w . Pelo Lema 1.1.1 temos $T'(w_0) \neq 0$, onde $w_0 = \phi_2(p)$. Assim, a série de potências de T em torno de w_0 é uma expressão do tipo

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} b_n(w - w_0)^n,$$

onde $z_0 = \phi_1(p)$ e $a_1 = T'(w_0)$. Suponha agora que a série de Laurent de f em torno de p com respeito a coordenada local z é

$$a_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \text{t. o. m.},$$

com $a_{n_0} \neq 0$. Compondo essa série com a expressão $z - z_0 = \sum_{n \geq 1} b_n(w - w_0)^n$ obtemos a série de Laurent de f com respeito a coordenada local w , a qual é uma expressão do tipo

$$a_{n_0}b_1(w - w_0)^{n_0} + \text{t. o. m.},$$

com $a_{n_0}b_1 \neq 0$. Portanto $\text{ord}_p(f)$ não depende da particular coordenada local escolhida.

O próximo lema é basicamente o Lema 2.1.3 em termos da ordem da função no ponto.

Lema 2.1.4. Seja f uma função meromorfa num ponto $p \in X$. A função f é holomorfa em p se, e somente se, f está definida em p e $\text{ord}_p(f) \geq 0$. Neste caso, $f(p) = 0$ se, e somente se, $\text{ord}_p(f) > 0$. A função f tem um pólo em p se, e somente se, $\text{ord}_p(f) < 0$. A função f não tem um pólo nem um zero em p se, e somente se, $\text{ord}_p(f) = 0$.

A função ordem possui algumas propriedades imediatas:

Lema 2.1.5. Sejam f e g duas funções meromorfas num ponto $p \in X$. Então:

- (a) $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$;
- (b) $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$;
- (c) $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$;
- (d) $\text{ord}_p(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$.

Podemos ver que a função ordem comporta-se bem com relação ao produto, mas com respeito a soma nem tanto.

Diremos que f tem um *zero de ordem n em p* se $\text{ord}_p(f) = n > 1$. Diremos que f tem um *pólo de ordem n em p* se $\text{ord}_p(f) = -n < 0$.

Em algumas ocasiões será conveniente denotarmos o conjunto dos zeros de f por $\mathcal{Z}(f)$, e o conjunto dos pólos de f por $\mathcal{P}(f)$.

Exemplo 2.1.17. Como vimos no Exemplo 2.1.12, uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ é uma função meromorfa sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$. Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, se f é não-nula então podemos fatorar os polinômios p e q em fatores lineares, e portanto, podemos reescrever f como

$$f(z) = c \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i},$$

onde $c \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ dois a dois distintos, e $e_i \in \mathbb{Z}^*$. Temos $\text{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i$ para cada i , $\text{ord}_\infty(f) = \text{ord}_0(f(1/z)) = \deg(q) - \deg(p) = -\sum_i e_i$, e $\text{ord}_z(f) = 0$ se $z \neq \infty$ e $z \neq \lambda_i$ para todo i . Com isso, note que

$$\sum_{z \in \mathbb{C}_\infty} \text{ord}_z(f) = 0.$$

2.1.4 Teoremas sobre Funções Holomorfas e Meromorfas

Muitos teoremas envolvendo funções holomorfas ou meromorfas de uma variável complexa, podem ser estendidos para funções sobre uma superfície de Riemann. Veremos alguns desses teoremas, necessários para continuarmos a desenvolver este trabalho. As provas desses teoremas apoiam-se nos correspondentes teoremas no caso de uma variável complexa.

Antes de enunciarmos os teoremas, é importante observar que, se definirmos a avaliação de uma função meromorfa em um dos seus pólos como sendo ∞ , então f se estenderá

holomorficamente sobre todo o seu domínio. Essa observação está melhor descrita na Subseção 2.2.3.

Teorema 2.1.1 (Discrição de Zeros e Pólos). Seja f uma função meromorfa sobre um subconjunto aberto e conexo W de uma superfície de Riemann X . Se f não é identicamente nula, então o conjunto dos zeros e pólos de f é discreto.

Demonstração. Vamos provar que os zeros de f são isolados. Podemos supor que f é holomorfa. Sejam

$$U_1 = \{q \in W \mid f(x) \neq 0 \text{ numa vizinhança reduzida de } q\}, \text{ e}$$

$$U_2 = \{q \in W \mid f(x) = 0 \text{ numa vizinhança de } q\}$$

Por definição, U_1 e U_2 são subconjuntos abertos de W , e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Afirmamos que $W = U_1 \cup U_2$. De fato, sejam $p \in W$ e $\phi : U \rightarrow V$ uma carta sobre X com $p \in U$. Podemos supor que $U \subset W$ e que V é conexo. Se $f(p) \neq 0$ então $p \in U_1$, pela continuidade da f . Se $f(p) = 0$ então analisamos: se $f \circ \phi^{-1} \equiv 0$ sobre V , então $p \in U_2$; se $f \circ \phi^{-1} \not\equiv 0$, então $\phi(p)$ é um zero isolado, e portanto, $p \in U_1$. Agora, como W é conexo, $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$. Como a primeira das possibilidades não ocorre, já que f não é identicamente nula, temos $U_2 = \emptyset$, e portanto, os zeros de f são isolados. Para provar que os pólos de f são isolados, repetimos esse argumento para a função meromorfa $1/f$. ■

Corolário 2.1.1. Seja f uma função meromorfa sobre uma superfície de Riemann compacta. Se f não é identicamente nula, então f tem uma quantidade finita de zeros e pólos.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{Z}(f)$ é um subconjunto infinito. Então, $\mathcal{Z}(f)$ possui um ponto de acumulação a em X , pois X é compacta. Agora, como f corresponde a uma função contínua, os seus zeros formam um subconjunto fechado. Logo, $a \in \mathcal{Z}(f)$, uma contradição. De modo análogo prova-se que $\mathcal{P}(f)$ é finito. ■

Teorema 2.1.2 (Teorema da Identidade). Sejam f e g funções meromorfas sobre um subconjunto aberto e conexo W de uma superfície de Riemann X . Suponha que $f = g$ sobre um subconjunto $S \subset W$ que contém um ponto a de acumulação em W . Então $f = g$ sobre W .

Demonstração. Como f e g são funções meromorfas sobre W , a diferença $f - g$ é também meromorfa sobre W e tem um zero em $a \in S$. Logo, $f - g$ deve ser identicamente nula sobre W , pois caso contrário, o conjunto dos zeros de $f - g$ não seria discreto, o que contradiria o Teorema 2.1.1. ■

Teorema 2.1.3 (Teorema do Módulo Máximo). Seja f uma função holomorfa sobre um subconjunto aberto e conexo W de uma superfície de Riemann X . Suponha que existe um ponto $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para todo $x \in W$. Então f é constante sobre W .

Teorema 2.1.4. Seja f uma função holomorfa sobre uma superfície de Riemann compacta X . Então f é uma função constante.

Demonstração. Como f é holomorfa, o seu valor absoluto $|f|$ é uma função contínua sobre X . Logo, $|f|$ atinge um valor máximo, pois X é compacta. Portanto, pelo Teorema do Módulo Máximo f é uma função constante sobre X , pois X é conexa. ■

2.2 Mapas Holomorfos entre Superfícies de Riemann

Uma vez definido nossos objetos de estudo, que são as superfícies de Riemann, convém definirmos o tipo de aplicação entre tais objetos.

Definição 2.2.1. O mapa $F : W \rightarrow Y$ é holomorfo em $p \in W$ se existem cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sobre X , com $p \in U_1$, e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sobre Y , com $F(p) \in U_2$, tais que a composição $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ é holomorfa em $\phi_1(p)$. Diremos que F é holomorfo sobre W se F é holomorfo em todo ponto de W .

Lema 2.2.1. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa entre superfícies de Riemann. Então:

- (a) F é holomorfo em p se, e somente se, para todo par de cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sobre X , com $p \in U_1$, e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sobre Y , com $F(p) \in U_2$, a composição $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em $\phi_1(p)$;
- (b) F é holomorfo sobre W se, e somente se, existem duas coleções de cartas $\{\phi_1^{(i)} : U_1^{(i)} \rightarrow V_1^{(i)}\}$ sobre X , com $W \subset \cup_i U_1^{(i)}$, e $\{\phi_2^{(j)} : U_2^{(j)} \rightarrow V_2^{(j)}\}$ sobre Y , com $F(W) \subset \cup_j U_2^{(j)}$, tais que a composição $\phi_2^{(j)} \circ F \circ (\phi_1^{(i)})^{-1}$ é holomorfa para todos i e j .

Exemplo 2.2.1. Seja X uma superfície de Riemann. A função identidade $id : X \rightarrow X$ é um mapa holomorfo.

Exemplo 2.2.2. A definição de mapa holomorfo é compatível com a definição de função holomorfa sobre uma superfície de Riemann. Isto é, um mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ é simplesmente uma função holomorfa sobre X .

Lema 2.2.2. Sejam $F : X \rightarrow Y$ e $G : Y \rightarrow Z$ mapas holomorfos. Então:

- (a) o mapa F é contínuo;

- (b) a composição $G \circ F : X \rightarrow Z$ é um mapa holomorfo;
- (c) se $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa sobre $W \subset Y$, então a composição $g \circ F : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa;
- (d) se $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função meromorfa sobre $W \subset Y$ e $F(X) \not\subset \mathcal{P}(g)$, então a composição $g \circ F : X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função meromorfa.

2.2.1 Isomorfismos e Automorfismos

Vamos definir o tipo de aplicação que dirá quando duas superfícies de Riemann são consideradas as mesmas.

Definição 2.2.2. Sejam X e Y superfícies de Riemann. Um *isomorfismo*, ou *biholomorfismo*, entre X e Y é um mapa $F : X \rightarrow Y$ holomorfo, bijetivo e com inversa $F^{-1} : Y \rightarrow X$ holomorfa. Um *automorfismo* de X é um isomorfismo $F : X \rightarrow X$. Diremos que X e Y são *isomorfas* se existe um isomorfismo entre elas.

Lema 2.2.3. A reta projetiva $\mathbb{P}^1$ e a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ são isomorfas.

Demonstração. O mapa

$$F : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty = S^2$$

$$[z : w] \longmapsto F[z : w] = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z\bar{w})}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(z\bar{w})}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \right)$$

é um isomorfismo entre $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{C}_\infty$. ■

Proposição 2.2.1. Se X e Y são duas superfícies de Riemann isomorfas, então $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(Y)$.

Demonstração. Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo. Então

$$\bar{f} : \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

$$g \longmapsto g \circ f,$$

é um isomorfismo de corpos. De fato, claramente $\bar{f}$ é um homomorfismo de corpos. Se $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(Y)$ são tais que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, então $(g_1 - g_2) \circ f \equiv 0$ sobre X . Logo, pelo Teorema da Identidade, temos $g_1 = g_2$. Portanto, $\bar{f}$ é injetiva. Se $h \in \mathcal{M}(X)$, então $h \circ f^{-1} \in \mathcal{M}(Y)$ e $\bar{f}(h \circ f^{-1}) = h$. Portanto, $\bar{f}$ é sobrejetiva. ■

2.2.2 Teoremas sobre Mapas Holomorfos

Assim como fizemos para funções sobre uma superfície de Riemann, vamos aqui, estender alguns teoremas sobre funções holomorfas de uma variável complexa para mapas holomorfos sobre uma superfície de Riemann.

Teorema 2.2.1 (Teorema do Mapa Aberto). Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann. Então F é um mapa aberto, isto é, a imagem de todo subconjunto aberto de X por F é um subconjunto aberto de Y .

Proposição 2.2.2. Seja $F : X \rightarrow Y$ uma mapa holomorfo entre superfícies de Riemann. Se F é injetivo então F é um isomorfismo entre X e sua imagem $F(X)$.

Teorema 2.2.2 (Teorema da Identidade). Sejam $F : X \rightarrow Y$ e $G : X \rightarrow Y$ mapas holomorfos não-constantes entre superfícies de Riemann. Suponha que $F = G$ sobre um subconjunto $S \subset X$ que contém um ponto de acumulação em X . Então $F = G$ sobre X .

Proposição 2.2.3. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann. Se X é compacta então Y também é compacta e F é sobrejetiva.

Demonstração. Como F é uma mapa holomorfo e X é aberto, pelo Teorema do Mapa Aberto, $F(X)$ é aberto em Y . Como F é um mapa contínuo e X é compacta, $F(X)$ deve ser um subconjunto compacto de Y . Agora, como Y é um espaço de Hausdorff, $F(X)$ deve ser fechado em Y . Pela conexidade de Y , devemos ter $F(X) = Y$. Logo, F é sobrejetivo e Y é uma superfície de Riemann compacta. ■

Teorema 2.2.3 (Discrição de Pré-imagens). Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann. Então, para todo $y \in Y$, a pré-imagem $F^{-1}(y)$ é um subconjunto discreto de X . Em particular, se X é compacta então $F^{-1}(y)$ é um conjunto finito e não-vazio.

Demonstração. Fixe $y \in Y$ e w uma coordenada local sobre Y centrada em y . Se $F^{-1}(y) = \emptyset$ nada temos a provar. Suponha então que $F^{-1}(y) \neq \emptyset$. Tome $x \in F^{-1}(y)$ e z uma coordenada local sobre X centrada em x . Como F é holomorfo, a função $w = g(z)$ que representa o mapa F em termos das coordenadas locais z e w é holomorfa, e não-constante, pois caso contrário, pelo Teorema da Identidade, F seria constante sobre X . Note que g tem um zero em $z = 0$, pois x (correspondendo a $z = 0$) é levado para y (correspondendo a $w = 0$). Agora, como os zeros de uma função holomorfa não-constante formam um subconjunto discreto, numa vizinhança de x , a única pré-imagem de y é o ponto x . Portanto, $F^{-1}(y)$ é um subconjunto discreto de X .

Se X é compacta, a Proposição 2.2.3 nos diz que $F^{-1}(y) \neq \emptyset$. Se $F^{-1}(y)$ fosse infinito, como X é compacta, existiria um ponto de acumulação de $F^{-1}(y)$ em X , e pelo Teorema da Identidade, F seria constante sobre X , o que não é verdade. Logo, $F^{-1}(y)$ é um conjunto finito. ■

2.2.3 Funções Meromorfas e Mapas Holomorfos Associados

Existe uma correspondência entre funções meromorfas e mapas holomorfos para $\mathbb{C}_\infty$ que nos permite interpretar geometricamente alguns resultados sobre funções meromorfas,

e reciprocamente, nos servir da intuição geométrica para fazer certos argumentos.

Seja X uma superfície de Riemann e f uma função meromorfa sobre X . A função f está definida sobre o conjunto $X \setminus \mathcal{P}(f)$, sobre o qual assume valores complexos. Uma maneira natural de estendermos a função f sobre toda a superfície X é definir

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ x &\longmapsto F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \mathcal{P}(f); \\ \infty & \text{se } x \in \mathcal{P}(f). \end{cases} \end{aligned}$$

Este mapa F é claramente holomorfo. E, por outro lado, se temos um mapa holomorfo $G : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ não idêntico a ∞ , então a restrição de G ao conjunto $X \setminus G^{-1}(\infty)$ é uma função meromorfa sobre X , e seus pólos são exatamente os pontos de $F^{-1}(\infty)$, o qual é um subconjunto discreto de X pelo Teorema 2.2.3. Portanto, temos a correspondência

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{funções meromorfas} \\ f : X \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{c} \text{mapas holomorfos} \\ F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ \text{não idênticos a } \infty \end{array} \right\}.$$

Como $\mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}^1$, é claro que também existe uma correspondência entre funções meromorfas e mapas holomorfos para $\mathbb{P}^1$. Vamos descrevê-la. Sabemos que uma função meromorfa, em geral, não pode ser escrita globalmente como quociente de funções holomorfas, mas localmente isso é possível. Assim, se f é uma função meromorfa sobre uma superfície de Riemann X e $p \in X$, então, próximo a p , a função f pode ser escrita na forma $f = g/h$, com g e h funções holomorfas. O correspondente mapa holomorfo para $\mathbb{P}^1$, próximo a p , é dado por $F(x) = [g(x) : h(x)]$.

2.3 Propriedades Locais e Globais dos Mapas Holomorfos

2.3.1 Forma Normal Local e Multiplicidade

Vamos começar com uma propriedade local muito útil dos mapas holomorfos: em termos de coordenadas locais, um mapa holomorfo é como uma função polinomial; mais especificamente, como um monômio z^m .

Teorema 2.3.1 (Teorema da Forma Normal Local). Sejam $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante e $p \in X$. Então existe um único inteiro $m \geq 1$ com a seguinte propriedade: para toda carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sobre Y , centrada em $F(p)$, existe uma carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sobre X , centrada em p , tal que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m$.

Demonstração. Fixe uma carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sobre Y centrada em $F(p)$, e tome uma carta qualquer $\psi : U \rightarrow V$ sobre X centrada em p . Como F é um mapa holomorfo, a série de Taylor da função $T(w) = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}(w)$ deve ser uma expressão do tipo

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i,$$

com $c_m \neq 0$ e $m \geq 1$, pois $T(0) = 0$. Podemos então reescrever T como $T(w) = w^m S(w)$, onde $S(w)$ é uma função holomorfa em $w = 0$ e $S(0) \neq 0$. Neste caso, como $S(0) \neq 0$, existe uma função $R(w)$, holomorfa próximo a $w = 0$, tal que $R(w)^m = S(w)$ e, portanto, $T(w) = (wR(w))^m$. Denote $\eta(w) = wR(w)$. Como $\eta'(0) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, a função η é invertível próximo a $w = 0$, e claramente holomorfa. Por esta razão, a composição $\phi_1 = \eta \circ \psi$ é também uma carta sobre X centrada em p . Se denotarmos por z a coordenada local fornecida pela carta ϕ_1 , então $z = wR(w)$ e

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) &= \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1} \circ \eta^{-1}(z) \\ &= T \circ \eta^{-1}(z) \\ &= T(w) \\ &= (wR(w))^m \\ &= z^m, \end{aligned}$$

o que prova a existência do inteiro $m \geq 1$ com a propriedade descrita no enunciado do teorema. ■

Definição 2.3.1. Com as notações do Teorema 2.3.1, a *multiplicidade* de F em p , denotada por $\text{mult}_p(F)$, é o inteiro m .

Exemplo 2.3.1. Seja $\phi : U \rightarrow V$ uma carta sobre uma superfície de Riemann. Se considerarmos ϕ como sendo um mapa holomorfo para $\mathbb{C}$, vemos que $\text{mult}_p(\phi) = 1$ para todo ponto $p \in U$.

Lema 2.3.1. Com as notações que antecedem este parágrafo, a multiplicidade de F em p é dada por

$$\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0}(dh/dz).$$

Em outras palavras, se $h(z) = h(z_0) + \sum_{i=m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$ com $c_m \neq 0$ e $m \geq 1$, então $\text{mult}_p(F) = m$.

Demonstração. Na demonstração do Teorema da Forma Normal Local, vimos que a multiplicidade de F em p é o menor expoente positivo com termo efetivo na série de potências

T em torno da origem, e essa série de potências era calculada usando coordenadas locais centradas em p e $F(p)$. Ainda com as notações anteriores a esta asserção, $z - z_0$ e $w - w_0$ são coordenadas locais centradas em p e $F(p)$, respectivamente. Portanto, como $w - w_0 = h(z) - h(z_0)$, a multiplicidade de F em p é o menor expoente positivo com termo efetivo na série de potências de $h(z) - h(z_0)$ em torno de $z = z_0$, mas esse número é exatamente $1 + \text{ord}_{z_0}(dh/dz)$. ■

O próximo lema relaciona a ordem de uma função meromorfa com a multiplicidade do seu mapa associado. A sua verificação é imediata utilizando o lema anterior.

Lema 2.3.2. Sejam X uma superfície de Riemann, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa sobre X e $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ o mapa holomorfo associado a f . Então:

- (a) se $p \in X$ é um zero de f , então $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$;
- (b) se $p \in X$ é um pólo de f , então $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$;
- (c) se $p \in X$ não é um zero e nem um pólo de f , então $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

Definição 2.3.2. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante. Um ponto $p \in X$ é um *ponto de ramificação* de F se $\text{mult}_p(F) \geq 2$. Um ponto $y \in Y$ é um *ponto de ramo* de F se y é a imagem de um ponto de ramificação de F .

Lema 2.3.3. (a) Seja $X : f(x, y) = 0$ uma curva plana afim suave. A função $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\pi(x, y) = x$, é ramificada em $p = (x_0, y_0) \in X$ se, e somente se, $\partial f / \partial y(p) = 0$;

(b) Seja $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva suave. O mapa $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, definido por $\pi[x : y : z] = [x : z]$, é ramificado em $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$ se, e somente se, $\partial F / \partial y(p) = 0$.

Demonstração. (a) Se $\partial f / \partial y(p) \neq 0$ então π é uma carta sobre X próximo a p , e portanto tem multiplicidade 1. Logo, π não é ramificada em p . Reciprocamente, se $\partial f / \partial y(p) = 0$ então devemos ter $\partial f / \partial x(p) \neq 0$, pois X é suave. Pelo Teorema da Função Implícita, próximo a p , a curva X é o gráfico de uma função holomorfa $x = g(y)$, donde segue que $f(g(y), y) \equiv 0$ numa vizinhança de y_0 . Derivando essa identidade com relação a y , obtemos $(\partial f / \partial x)g'(y) + \partial f / \partial y \equiv 0$ numa vizinhança de p . Avaliando essa identidade em p , vemos que $g'(y_0) = 0$, pois $\partial f / \partial y(p) = 0$ e $\partial f / \partial x(p) \neq 0$. Observando que $g(y)$ é na verdade a forma normal local de π próximo a p (lembre-se de que a projeção $(g(y), y) \mapsto y$ é uma carta sobre X próximo a p), pelo Lema 2.3.1, π é ramificada em p .

(b) Lembrando que X é localmente a curva plana afim suave $X_2 : F(x, y, 1) = 0$, aplicamos o item (a) a X_2 e concluimos o resultado. ■

2.3.2 Grau de um Mapa Holomorfo entre Superfícies de Riemann Compactas

Proposição 2.3.1. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann. Para cada $y \in Y$, defina

$$d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F).$$

Então, a função que associa cada $y \in Y$ ao inteiro positivo $d_y(F)$ é constante.

Demonstração. Como Y é conexa e $\mathbb{Z}$ é discreto, é suficiente mostrarmos que a função é localmente constante. Fixe então um ponto $y \in Y$ e suponha que $F^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Seja w uma coordenada local sobre Y centrada em y . Pelo Teorema da Forma Normal Local, existem coordenadas locais $z_1, z_2, \dots, z_n$ sobre X , com z_i centrada em x_i , tais que, em termos de coordenadas locais, o mapa F é dado por $w(z_i) = z_i^{m_i}$. Vamos mostrar que, suficientemente próximo a y , não existem pré-imagens que não estão nas vizinhanças das coordenadas x_i . Suponha o contrário, que arbitrariamente próximo a y , existem pré-imagens que não estão em nenhuma das vizinhanças das coordenadas x_i . Logo, existe uma sequência $\{p_n\}$ de pontos de X com nenhum dos p_n em nenhuma das vizinhanças das coordenadas x_i , e com $\{F(p_n)\}$ convergindo para y . Como X é compacta, existe uma subsequência $\{p_{n_k}\}$ convergindo para um ponto $x \in X$ e $\{F(p_{n_k})\}$ convergindo para y . Como F é contínua, devemos ter $F(x) = y$, donde segue que $x = x_i$ para algum i , o que é uma contradição, pois nenhum ponto p_n está na vizinhança da coordenada x_i .

Mostramos assim que, suficientemente próximo a y , as funções $w(z_i) = z_i^{m_i}$ são todas sobrejetivas. Agora note que, a única pré-imagem de $w(z_i) = 0$ é $z_i = 0$, a qual tem multiplicidade m_i ; e as pré-imagens de $w(z_i) \neq 0$ são as m_i -ésimas raízes de $w(z_i)$, cada uma com multiplicidade 1. Portanto, $d_{y'}(F) = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ para todo y' numa vizinhança de y . ■

Definição 2.3.3. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann compactas. O *grau de F* , denotado por $\deg(F)$, é o inteiro $d_y(F)$, para qualquer $y \in Y$.

Corolário 2.3.1. Um mapa holomorfo $F : X \rightarrow Y$ entre superfícies de Riemann compactas é um isomorfismo se, e somente se, $\deg(F) = 1$.

Demonstração. Se $\deg(F) = 1$ então F é injetiva, e de acordo com a Proposição 2.2.2 o mapa F é um isomorfismo entre X e sua imagem $F(X)$. Mas $F(X) = Y$ pela Proposição 2.2.3, e portanto F é um isomorfismo. ■

Corolário 2.3.2. Seja X uma superfície de Riemann. Se existe uma função meromorfa f sobre X com um pólo simples, e sem nenhum outro pólo, então X é isomorfa a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Por hipótese, o grau do mapa holomorfo associado a função meromorfa f tem grau 1, e pelo Corolário anterior, deve ser um isomorfismo. ■

2.3.3 A Soma das Ordens de uma Função Meromorfa

Proposição 2.3.2. Se f é uma função meromorfa sobre uma superfície de Riemann compacta, então

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

Demonstração. Se f for constante, o resultado é imediato. Suponha então que f não é constante. Seja $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ o mapa holomorfo associado a f . Descreva o conjunto dos zeros de f por $\mathcal{Z}(f) = \{x_i\}$, e o conjunto dos pólos de f por $\mathcal{P}(f) = \{y_j\}$. Claramente, $\mathcal{Z}(f) = F^{-1}(0)$ e $\mathcal{P}(f) = F^{-1}(\infty)$. Denote $d = \deg(F)$. Pela definição de grau de um mapa holomorfo, temos

$$d = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) \quad \text{e} \quad d = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F).$$

Pelo Lema 2.3.2, temos

$$\text{mult}_{x_i}(F) = \text{ord}_{x_i}(f) \quad \text{e} \quad \text{mult}_{y_j}(F) = \text{ord}_{y_j}(f).$$

Agora, como os únicos pontos de X onde f tem ordem não-nula são os seus zeros e pólos, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) &= \sum_i \text{ord}_{x_i}(f) + \sum_j \text{ord}_{y_j}(f) \\ &= \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) - \sum_j \text{mult}_{y_j}(F) \\ &= d - d \\ &= 0, \end{aligned}$$

que é a igualdade desejada. ■

2.3.4 Fórmula de Hurwitz

Seja S uma 2-variedade real compacta, possivelmente com fronteira. Uma *triangularização* de S é uma decomposição de S em subconjuntos fechados, cada um homeomorfo a um triângulo, e tais que, quaisquer dois desses triângulos são, ou disjuntos, ou intersectam-se em um único vértice, ou intersectam-se ao longo de uma única aresta em comum. Pode-se mostrar que toda 2-variedade real compacta é triangularizável.

Definição 2.3.4. Seja S uma 2-variedade real compacta, possivelmente com fronteira. Suponha que uma triangularização de S tem v vértices, a arestas e t triângulos. A *característica de Euler* de S , denotada por $\chi(S)$, com respeito a essa triangularização, é o inteiro

$$\chi(S) = v - a + t.$$

Proposição 2.3.3. A característica de Euler de uma 2-variedade real compacta não depende da triangularização. Se S é uma 2-variedade real compacta, orientável, sem fronteira e de gênero topológico g , então o número de Euler de S é

$$\chi(S) = 2 - 2g.$$

A teoria de grau de um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann compactas, junto com a teoria do número de Euler, nos fornece uma importante e útil relação aritmética entre os gêneros do domínio e da imagem, grau e ramificações do mapa.

Teorema 2.3.2 (Fórmula de Hurwitz). Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann compactas. Então

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1).$$

Demonstração. Vale a pena começarmos com uma rápida e simples observação: como X é compacta, o conjunto de pontos de ramificação de F é finito, e portanto, a soma $\sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$ é finita. Passamos agora à prova da fórmula. Tome uma triangularização de Y . Podemos supor que todo ponto de ramo de F é um vértice, pois podemos refinar qualquer outra triangularização de Y de modo a obter tal propriedade. Digamos que nessa triangularização existam v vértices, a arestas e t triângulos. Tome a imagem inversa dessa triangularização por F , obtendo uma triangularização de X com v' vértices, a' arestas e t' triângulos. Note que todo ponto de ramificação de F é um vértice dessa triangularização de X . Como não existem pontos de ramificação sobre qualquer ponto de qualquer triângulo em X , cada triângulo de Y é imagem inversa de $\deg(F)$ triângulos em

X , ou seja, $t' = \deg(F)t$. Similarmente, $a' = \deg(F)a$. Para determinarmos o número v' de vértices em X , fixe um vértice q em Y . O número de pré-imagens de q por F é

$$\begin{aligned} \#F^{-1}(q) &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 \\ &= \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - \text{mult}_p(F)). \end{aligned}$$

Portanto, o número total de pré-imagens de vértices em Y é

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\text{vértice } q \text{ em } Y} (\deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} (1 - \text{mult}_p(F))) \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{vértice } q \text{ em } Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \deg(F)v - \sum_{\text{vértice } p \text{ em } X} (\text{mult}_p(F) - 1). \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a fórmula da Proposição 2.3.3, obtemos

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -\chi(X) \\ &= -v' + a' - t' \\ &= -\deg(F)v + \sum_{\text{vértice } p \text{ em } X} (\text{mult}_p(F) - 1) + \deg(F)a - \deg(F)t \\ &= -\deg(F)\chi(Y) + \sum_{\text{vértice } p \text{ em } X} (\text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1), \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade se justifica pelo fato de que todo ponto de ramificação de F é um vértice em X . ■

Corolário 2.3.3. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann compactas. Então:

- (a) $g(X) \geq g(Y)$;
- (b) se $g(X) = g(Y) = 1$ então F não é ramificado;
- (c) se $g(Y) = 0$ e $\deg(F) \geq 2$, então F é ramificado;
- (d) se $g(X) = g(Y) \geq 2$ então F é um isomorfismo.

Demonstração. Os itens (a), (b) e (c) são resultados diretos da Fórmula de Hurwitz. (d) Seja $g = g(X) = g(Y)$. Pela Fórmula de Hurwitz, temos

$$(2g - 2)(\deg(F) - 1) = - \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) \leq 0.$$

Como $2g - 2 \geq 2 > 0$, devemos ter $\deg(F) - 1 \leq 0$, donde segue que $\deg(F) = 1$. Logo, pelo Corolário 2.3.1, F é um isomorfismo. ■

Exemplo 2.3.2. A curva de Fermat de grau d é a curva plana projetiva suave $X : F(x, y, z) = x^d + y^d + z^d = 0$. Sobre esta curva, considere o mapa $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ definido por $\pi[x : y : z] = [x : z]$. Pelo Lema 2.3.3, os pontos de ramificação de π são os pontos de X que satisfazem $\partial F / \partial y = dy^{d-1} = 0$. Claramente, se $d = 1$ então π não é ramificado. Se $d \geq 2$ então π é ramificado nos pontos $p = [x_0 : 0 : z_0] \in \mathbb{P}^2$ que satisfazem $F(p) = x_0^d + z_0^d = 0$. Como não podemos ter x_0 e y_0 ambos nulos, concluímos que os pontos de ramificação de π são os pontos da forma $[1 : 0 : z_0]$ tais que $z_0^d = -1$ (um total de d pontos), e pelo Lema 2.3.1, vemos que cada um desses pontos têm multiplicidade d .

Uma vez encontrado todos os pontos de ramificação de π , é fácil ver que $\deg(\pi) = d$, seja qual for d . Aplicando a Fórmula de Hurwitz ao mapa π , conseguimos determinar o gênero $g = g(X)$ apenas em função do grau da curva:

$$\begin{aligned} g &= \frac{-2d + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(\pi) - 1) - 2}{2} \\ &= \frac{-2d + d(d - 1) - 2}{2} \\ &= \frac{(d - 1)(d - 2)}{2}. \end{aligned}$$

2.4 Determinando Alguns Corpos de Funções Meromorfas

Na Subseção 2.1.2 vimos alguns exemplos de funções meromorfas sobre algumas superfícies de Riemann particulares. Vamos ver o quão abrangente são esses exemplos de funções meromorfas. Para algumas superfícies de Riemann conseguiremos determinar os seus corpo de funções meromorfas.

2.4.1 Funções Meromorfas sobre a Esfera de Riemann

Vamos provar a recíproca de que toda função racional sobre a esfera de Riemann é uma função racional.

Teorema 2.4.1. Toda função meromorfa sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ é uma função racional.

Demonstração. Suponha que f é uma função meromorfa sobre $\mathbb{C}_\infty$. Como $\mathbb{C}_\infty$ é uma superfície de Riemann compacta, f possui uma quantidade finita de zeros e pólos. Digamos que $\{\lambda_i\}$ é o conjunto dos zeros e pólos de f no plano complexo $\mathbb{C}$, e que $\text{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i$. Pelo Exemplo 2.1.17, a função racional

$$r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$$

tem os mesmos zeros e pólos que f tem em $\mathbb{C}$, e com as mesmas ordens. Considere então a função $g(z) = f(z)/r(z)$ meromorfa sobre $\mathbb{C}_\infty$. Observe que g não possui zeros e nem pólos em $\mathbb{C}$. Portanto g é holomorfa sobre $\mathbb{C}$, e sua série de Taylor é do tipo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

a qual converge sobre todo $\mathbb{C}$. Como g é meromorfa em ∞ , a composição

$$g(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

deve ser meromorfa em $z = 0$, o que implica que apenas um número finito de termos a_i são não-nulos, e portanto, g é um polinômio na variável z . Se g não fosse constante, então g teria um zero em $\mathbb{C}$, o que não é verdade. Logo, g é constante e f é uma função racional. ■

Este teorema, junto com o Exemplo 2.1.12, determina o corpo das funções meromorfas sobre a esfera de Riemann:

Corolário 2.4.1. O corpo das funções meromorfas sobre a esfera de Riemann é o corpo das funções racionais em uma variável.

2.4.2 Funções Meromorfas sobre um Toro Complexo

Tome $\tau \in \mathbb{C}$ com parte imaginária positiva e considere o toro complexo $X = \mathbb{C}/L$, onde $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Queremos fornecer exemplos de funções meromorfas sobre X . A primeira ideia que nos vem à mente é de fazer quocientes de funções holomorfas sobre $\mathbb{C}$ que são L -periódicas. Mas logo essa ideia se desfaz, pois uma função holomorfa sobre $\mathbb{C}$ que é L -periódica induz uma função holomorfa sobre X , e como X é compacta, tal função deve ser constante; assim, estaríamos fazendo o quociente de duas funções constantes sobre X . Portanto, temos que procurar por funções holomorfas sobre $\mathbb{C}$ que não são L -periódicas, mas que, ao tomarmos os seus quocientes, tornam-se L -periódicas. Fizemos algo parecido

para o caso de curvas planas projetivas: polinômios homogêneos de mesmo grau não são invariantes pela ação de $\mathbb{C}^*$, mas os seus quocientes sim.

Funções meromorfas sobre o toro complexo X são obtidas através das *funções teta*. Uma tal função é definida por

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\theta + 2nz)},$$

a qual converge absolutamente e uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Com cálculos diretos, vemos que $\theta(z+1) = \theta(z)$ e $\theta(z+\tau) = e^{-\pi i(\tau+2z)}\theta(z)$; ou seja, θ é uma função periódica, mas não L -periódica. Por estas igualdades, z_0 é um zero de θ se, e somente se, $z_0 + m + n\tau$ é um zero de θ , para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Mais ainda, $\text{ord}_{z_0}(\theta) = \text{ord}_{z_0+m+n\tau}(\theta)$, para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. E utilizando resultados da teoria de variáveis complexas, é possível mostrar que os zeros de θ são os pontos $(1/2) + (\tau/2) + m + n\tau$, para $m, n \in \mathbb{Z}$, sendo todos zeros simples.

Para $x \in \mathbb{C}$, defina um transladado de θ por

$$\theta^{(x)}(z) = \theta(z - (1/2) - (\tau/2) - x).$$

Note que os zeros de $\theta^{(x)}$ são todos os pontos $x + L$, os quais são todos simples. Note também que $\theta^{(x)}(z+1) = \theta^{(x)}(z)$ e $\theta^{(x)}(z+\tau) = -e^{-2\pi i(z-x)}\theta^{(x)}(z)$. Agora, faça o quociente

$$R(z) = \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^n \theta^{(x_j)}(z)},$$

onde $x_i, y_j \in \mathbb{C}$. Esta função R é meromorfa sobre $\mathbb{C}$ e periódica, pois $R(z+1) = R(z)$. A fim de que R seja L -periódica, é necessário e suficiente que $R(z+\tau) = R(z)$. Como

$$\begin{aligned} R(z+\tau) &= \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z+\tau)}{\prod_{j=1}^n \theta^{(x_j)}(z+\tau)} \\ &= (-1)^{m-n} \frac{\prod_{i=1}^m e^{-2\pi i(z-x_i)} \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^n e^{-2\pi i(z-y_j)} \theta^{(x_j)}(z)} \\ &= (-1)^{m-n} e^{-2\pi i((m-n)z + \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m x_i)} R(z), \end{aligned}$$

precisamos que o termo $(-1)^{m-n} e^{-2\pi i((m-n)z + \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m x_i)}$ seja identicamente igual a 1, para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, devemos impor $m = n$ e $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j$.

Proposição 2.4.1. Sejam $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ conjuntos de números complexos tais que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n y_j$. Então, o quociente de transladados de funções teta

$$R(z) = \frac{\prod_{i=1}^n \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^n \theta^{(x_j)}(z)},$$

é uma função meromorfa sobre $\mathbb{C}$ e L -periódica, e portanto, induz uma função meromorfa sobre $X = \mathbb{C}/L$.

Note que, sobre X , os zeros da função meromorfa R são os pontos $x_i + L$, e os seus polos são os pontos $y_j + L$.

O próximo resultado determina o corpo das funções meromorfas sobre o toro complexo.

Teorema 2.4.2. Toda função meromorfa sobre o toro complexo $X = \mathbb{C}/L$ é um quociente de translados de funções teta.

Demonstração. Seja f uma função meromorfa sobre X não-constante. Como X é compacta, a Proposição 2.3.2 nos diz que f possui a mesma quantidade de zeros e pólos, contados com suas devidas ordens. Sejam $\mathcal{Z}(f) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e $\mathcal{P}(f) = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$, onde os zeros e pólos aparecem tantas vezes quanto as ordens de f nestes. Afirmamos que $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^n q_j$ sobre X . Se isso ocorre, é possível tomar $x_i, y_j \in \mathbb{C}$ correspondendo a $p_i, q_j \in X$, respectivamente, tais que $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n y_j$. Pela Proposição 2.4.1, o quociente de translados de funções teta $R(z) = \prod_{i=1}^n \theta^{(x_i)}(z) / \prod_{j=1}^n \theta^{(x_j)}(z)$ é uma função meromorfa sobre X , e os zeros e pólos de R são os mesmos de f . Assim, a função f/R é holomorfa sobre X , e portanto deve ser constante, pois X é compacta. Logo, f é um quociente de translados de funções teta.

Suponha que a afirmação feita no parágrafo anterior é falsa, isto é, que $\sum_{i=1}^n p_i \neq \sum_{j=1}^n q_j$ sobre X . Tome $p_0, q_0 \in X$ tais que $\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{j=0}^n q_j$ sobre X . Assim, é possível tomar $x_i, y_j \in \mathbb{C}$ correspondendo a $p_i, q_j \in X$, respectivamente, tais que $\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{j=0}^n y_j$. Novamente pela Proposição 2.4.1, o quociente de translados de funções teta $S(z) = \prod_{i=0}^n \theta^{(x_i)}(z) / \prod_{j=0}^n \theta^{(x_j)}(z)$ é uma função meromorfa sobre X . Assim, a função $g = R/f$ é meromorfa sobre X com apenas um zero (em p_0) e um pólo (em q_0), ambos simples. Por esta razão, o mapa holomorfo $G : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ associado a g tem grau 1, e portanto, pelo Corolário 2.3.2, G é um isomorfismo. Mas $g(X) = 1 \neq 0 = g(\mathbb{C}_\infty)$, o que evidencia uma contradição e finaliza a prova. ■

2.5 Curvas Projetivas Suaves

Definição 2.5.1. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma superfície de Riemann compacta. Diremos que X é uma *curva projetiva suave em $\mathbb{P}^n$* se, para todo ponto $p \in X$ existe uma coordenada homogênea x_j tal que:

- (a) $x_j \neq 0$ em p ;

- (b) existe uma coordenada homogênea x_i tal que o quociente x_i/x_j é uma coordenada local sobre X próximo a p ;
- (c) para toda coordenada homogênea x_k , o quociente x_k/x_j é uma função holomorfa sobre X próximo a p .

Proposição 2.5.1. Seja X uma curva projetiva suave em $\mathbb{P}^n$. Se $G, H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ são polinômios homogêneos de mesmo grau d , com H não identicamente nulo sobre X , então $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = G(x_0, x_1, \dots, x_n)/H(x_0, x_1, \dots, x_n)$ é uma função meromorfa sobre X .

Demonstração. Como X é uma curva projetiva suave em $\mathbb{P}^n$, para cada ponto $p \in X$ existe uma coordenada homogênea x_j com as propriedades na Definição 2.5.1. Observe que a composição de f com a inversa da coordenada local x_i/x_j é uma função racional em quocientes $x_i/x_k = (x_i/x_j)/(x_k/x_j)$, os quais são funções meromorfas em p . Logo, a função f é meromorfa em p , e pela arbitrariedade do ponto $p \in X$, f é meromorfa sobre X . ■

Exemplo 2.5.1. A reta projetiva $\mathbb{P}^1$, curvas planas projetivas suaves, curvas de interseção completa e curvas de interseção completa local são exemplos de curvas projetivas suaves.

Vamos verificar o caso mais geral. Seja X uma curva de interseção completa local. Próximo a cada ponto $p \in X$, os pontos de X podem ser descritos, a menos de reordenação das coordenadas homogêneas, por

$$[1 : z : g_2(z) : \dots : g_n(z)], \quad (2.5.1)$$

onde $g_2, g_3, \dots, g_n$ são funções holomorfas de uma variável z . Claramente, a coordenada x_0 é não-nula em p , o quociente x_1/x_0 é uma coordenada local sobre X próximo a p , e todos os quocientes x_k/x_0 são funções holomorfas sobre X próximo a p . Logo, X é uma curva de interseção completa local.

Segue do exemplo anterior que, uma superfície de Riemann X é uma curva projetiva suave se, e somente se, X é localmente dada na forma de 2.5.1.

2.6 Formas Diferenciais

Embora não abordaremos a teoria de integração sobre superfícies de Riemann, definiremos nesta seção os objetos a serem integrados. Esses objetos, chamados de formas diferenciais, desempenharão um papel fundamental para o resultado principal deste trabalho: o Teorema de Riemann-Roch.

2.6.1 1-Formas Meromorfas

Primeiro vamos definir 1-formas meromorfas sobre subconjuntos abertos do plano complexo, e então, por meio das cartas complexas, transportaremos este conceito para uma superfície de Riemann.

Definição 2.6.1. Uma 1-forma meromorfa sobre um subconjunto aberto $V \subset \mathbb{C}$ é uma expressão ω do tipo

$$\omega = f(z)dz,$$

onde f é uma função meromorfa sobre V . Diremos que ω é uma 1-forma meromorfa na coordenada z .

Sabemos que sobre uma superfície de Riemann podem existir cartas complexas compartilhando parte de seus domínios, mas mesmo assim, fornecendo coordenadas complexas distintas. Portanto, se desejamos transportar o conceito de 1-formas meromorfas sobre $\mathbb{C}$ para superfícies de Riemann, então devemos saber quando duas 1-formas meromorfas em coordenadas distintas são iguais, a menos de algum tipo de transformação. Isso nos leva à próxima definição.

Definição 2.6.2. Sejam $\omega_1 = f(z)dz$ e $\omega_2 = g(w)dw$ 1-formas meromorfas sobre subconjuntos abertos $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$, respectivamente. Suponha que $z = T(w)$ é uma função holomorfa de V_2 para V_1 . Diremos que ω_1 transforma-se em ω_2 via T se $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Se lembrarmos que 1-formas meromorfas são objetos a serem integrados, vemos que esta definição é feita justamente para termos $dz = T'(w)dw$ ao mudarmos as coordenadas.

Definição 2.6.3. Seja X uma superfície de Riemann. Uma 1-forma meromorfa sobre X é uma coleção de 1-formas meromorfas $\{\omega_\phi\}$, uma para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ na variável $z = \phi(x)$, tal que se existem duas cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então ω_{ϕ_1} transforma-se em ω_{ϕ_2} via a função de transição $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Trocando-se o termo “meromorfa” por “holomorfa” nas definições anteriores, obtemos também a definição de uma 1-forma holomorfa, que nada mais é do que um caso particular de uma 1-forma meromorfa.

2.6.2 Operações entre 1-Formas Meromorfas

Sejam X uma superfície de Riemann, f uma função meromorfa, ω_1 e ω_2 duas 1-formas meromorfas. Em termos de uma coordenada local z , fornecida por uma carta complexa $\phi : U \rightarrow V$ sobre X , escreva $\omega_i = g_i(z)dz$, onde g_i é uma função meromorfa sobre V . A

soma $\omega_1 + \omega_2$ é localmente definida por $\omega_1 + \omega_2 = (g_1(z) + g_2(z))dz$, e o produto $f\omega_1$ é definido localmente por $f\omega_1 = (f \circ \phi^{-1})(z)g_1(z)dz$.

É fácil ver que estas operações estão bem definidas. Suponha que ψ é uma outra carta complexa sobre X com parte do seu domínio em U , fornecendo uma coordenada local w . Se $\omega_i = h_i(w)dw$ em termos dessa nova coordenada local, e se $z = T(w)$ é a função de transição entre w e z , então $(h_1(w) + h_2(w))dw = (g_1(T(w)) + g_2(T(w)))T'(w)dw = (g_1(z) + g_2(z))dz$ e $f \circ \psi^{-1}(w)h_1(w)dw = f \circ \psi^{-1}(w)g_1(T(w))T'(w)dw = f \circ \phi^{-1}(z)g_1(z)dz$.

É conveniente introduzirmos as seguintes notações:

Definição 2.6.4. Seja X uma superfície de Riemann. Denotaremos por $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ o conjunto das 1-formas meromorfas sobre X , e por $\Omega^1(X)$ o conjunto das 1-formas holomorfas sobre X .

Lembre-se de que $\mathcal{M}(X)$ é o corpo das funções meromorfas sobre a superfície de Riemann X . Com as operações acima, $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ é um $\mathcal{M}(X)$ -espaço vetorial, e $\Omega^1(X)$ é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. A dimensão $\dim \Omega^1(X)$ é chamada de *gênero analítico* da superfície de Riemann X .

Um resultado simples, porém importante, é o da proposição seguinte. Basicamente, esta nos diz que duas 1-formas meromorfas diferem uma da outra apenas pela multiplicação de uma função meromorfa.

Proposição 2.6.1. Sejam ω_1 e ω_2 1-formas meromorfas sobre uma superfície de Riemann X . Se ω_1 é não-nula então existe uma única função meromorfa f sobre X tal que $\omega_2 = f\omega_1$.

Demonstração. Denote por z a coordenada local fornecida por uma carta complexa $\phi : U \rightarrow V$ sobre X . Em termos dessa coordenada local, temos $\omega_i = g_i(z)dz$, onde g_i é uma função meromorfa sobre V . Defina $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ localmente dada por $f|_U = (g_2/g_1) \circ \phi$.

Para verificarmos que f está bem definida, suponha que ψ é uma outra carta complexa sobre X com parte de seu domínio em U , fornecendo uma coordenada local w . Em termos dessa coordenada local, temos $\omega_i = h_i(w)dw$, onde h_i é uma função meromorfa sobre a imagem de ψ . Se $z = T(w)$ é a função de transição entre as cartas ψ e ϕ , então $h_i(w) = g_i(T(w))T'(w)$. Portanto,

$$\frac{h_2(w)}{h_1(w)} = \frac{g_2(T(w))T'(w)}{g_1(T(w))T'(w)} = \frac{g_2(z)}{g_1(z)},$$

pois vimos no Lema 1.1.1 que a derivada da função de transição entre duas cartas nunca se anula.

Como o quociente g_2/g_1 e a carta ϕ são funções holomorfas sobre seus correspondentes domínios, a função f é holomorfa sobre X , e claramente temos $\omega_2 = f\omega_1$. A unicidade segue de comparações diretas. ■

Sejam ω uma 1-forma meromorfa sobre uma superfície de Riemann X , e $p \in X$. Escolha uma coordenada local z centrada em p . Localmente, temos $\omega = f(z)dz$, para alguma função meromorfa f .

Definição 2.6.5. A *ordem de ω em p* , denotada por $\text{ord}_p(\omega)$, é a ordem da função f em 0.

A ordem de ω não depende da escolha da coordenada local. De fato, suponha que $\omega = g(w)dw$ numa outra coordenada local w centrada em p . Se $z = T(w)$ é a função de transição entre w e z , então $g(w) = f(T(w))T'(w)$. Como $\text{ord}_0(T(w)) = 1$, segue que $\text{ord}_0(g) = \text{ord}_0(f)$.

Diremos ω tem um *zero de ordem n em p* se $\text{ord}_p(\omega) = n > 1$. Diremos que ω tem um *pólo de ordem n em p* se $\text{ord}_p(\omega) = -n < 0$.

Exemplo 2.6.1. Considere a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ com coordenadas locais z e $w = 1/z$ (veja Exemplo 1.1.12). A coleção $\omega = \{1dz, 1dw\}$ é uma 1-forma meromorfa sobre $\mathbb{C}_\infty$. Se $z \in \mathbb{C}$ então $\text{ord}_z(\omega) = \text{ord}_0(1) = 0$. Se $z = \infty$ então $\text{ord}_\infty(\omega) = \text{ord}_0(-z^{-2}) = -2$, pois $1dw$ transforma-se em $-z^{-2}dz$ via a função de transição $w = 1/z$.

De modo mais geral, a coleção $\omega = \{f(z)dz, f(w)dw\}$, onde $f(z) = c \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$ é uma função racional em z , é uma 1-forma meromorfa sobre $\mathbb{C}_\infty$. Se $z \in \mathbb{C}$ então $\text{ord}_z(\omega) = \text{ord}_z(f(z))$. Se $z = \infty$ então $\text{ord}_\infty(\omega) = \text{ord}_0(f(1/z)(-z^{-2}))$, pois $f(w)dw$ transforma-se em $f(1/z)(-z^{-2})dz$ via a função de transição $w = 1/z$.

2.6.3 Pullback de 1-Formas Meromorfas

Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann. Dada uma 1-forma meromorfa ω sobre Y , podemos associar ω a uma 1-forma meromorfa sobre X da seguinte maneira: sejam $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ uma carta sobre Y , e $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ uma carta sobre X tal que $F(U_1) \subset U_2$. Denote por z e w as coordenadas locais fornecidas pelas cartas ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente. Em termos destas coordenadas locais, o mapa F é dado por $w = h(z)$, onde h é uma função holomorfa. Suponha que $\omega = f(w)dw$ na coordenada w .

Definição 2.6.6. O *pullback de ω via F* , denotado por $F^*(\omega)$, é a 1-forma meromorfa sobre X definida localmente por

$$F^*(\omega) = f(h(z))h'(z)dz.$$

O lema a seguir calcula a ordem do *pullback* de uma 1-forma meromorfa num ponto em função da ordem da 1-forma meromorfa e da multiplicidade do mapa, em pontos correspondentes.

Lema 2.6.1. Sejam $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo não-constante entre superfícies de Riemann, e ω uma 1-forma meromorfa sobre Y . Fixe um ponto $p \in X$. Então

$$\text{ord}_p(F^*(\omega)) = (1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) \text{mult}_p(F) - 1.$$

Demonstração. Seja w uma coordenada local sobre Y centrada em $F(p)$. Pelo Teorema da Forma Normal Local, existe uma coordenada local z sobre X centrada em p tal que, em termos de coordenadas locais, o mapa F é dado por $w = z^n$, onde $n = \text{mult}_p(F)$. Com respeito a coordenada local w , temos $\omega = (aw^k + \text{t. o. m.})dw$, onde $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$. Assim, o *pullback* $F^*(\omega)$ com respeito a coordenada local z é $F^*(\omega) = (az^{nk} + \text{t. o. m.})(nz^{n-1})dz$, donde segue que $\text{ord}_p(F^*(\omega)) = (1 + k)n - 1$. ■

2.6.4 Teorema do Resíduo

Seja ω uma 1-forma meromorfa sobre uma superfície de Riemann X . Fixe um ponto $p \in X$ e escolha uma coordenada local z centrada em p . Em termos desta coordenada z podemos escrever $\omega = f(z)dz$, onde f é uma função meromorfa sobre X . Expandindo ω na série de Laurent em torno do ponto p com respeito a coordenada local z , obtemos uma expressão do tipo

$$\omega = f(z)dz = \left(\sum_{n=-M}^{\infty} a_n z^n \right) dz,$$

onde $\text{ord}_p(\omega) = -M$.

Definição 2.6.7. O *resíduo de ω em p* , denotado por $\text{Res}_p(\omega)$, é o coeficiente a_{-1} numa série de Laurent de ω em torno de p .

Uma série de Laurent de uma 1-forma meromorfa em torno de um ponto depende da particular coordenada local escolhida, mas o resíduo desta não depende. A prova dessa observação pode ser encontrada em [Mir97, p. 122].

Teorema 2.6.1 (Teorema do Resíduo). Se ω é uma 1-forma meromorfa sobre uma superfície de Riemann compacta X , então

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p(\omega) = 0.$$

Para a prova deste teorema são utilizadas técnicas de integração sobre superfícies de Riemann. Citamos [Gri89, p. 18] e [Mir97, p. 123] para a sua prova.

O Teorema do Resíduo será fortemente utilizado na demonstração da Dualidade de Serre, a qual fornecerá a segunda, e mais clássica, versão do Teorema de Riemann-Roch.

2.6.5 Diferenciais de Ordem Superior

Aqui, apenas observamos que 1-formas meromorfas podem ser, de um certo modo, generalizadas para ordens superiores.

Definição 2.6.8. Uma *n-diferencial meromorfa sobre um subconjunto aberto* $V \subset \mathbb{C}$ é uma expressão μ do tipo

$$\mu = f(z)(dz)^n,$$

onde f é uma função meromorfa sobre V . Diremos que μ é uma *n-diferencial meromorfa* na coordenada z .

Optamos pelo termo “diferencial” em vez de “forma” para não causar confusões com o conceito de *n-formas*, embora esse conceito não tenha sido tratado neste trabalho.

Definição 2.6.9. Sejam $\mu_1 = f(z)(dz)^n$ e $\mu_2 = g(w)(dw)^n$ *n-diferenciais meromorfas* sobre subconjuntos abertos $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$, respectivamente. Suponha que $z = T(w)$ é uma função holomorfa de V_2 para V_1 . Diremos que μ_1 *transforma-se em* μ_2 *via* T se $g(w) = f(T(w))T'(w)^n$.

Definição 2.6.10. Seja X uma superfície de Riemann. Uma *n-diferencial meromorfa sobre* X é uma coleção de *n-diferenciais meromorfas* $\{\mu_\phi\}$, uma para cada carta $\phi : U \rightarrow V$ na variável $z = \phi(x)$, tal que se existem duas cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ e $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então μ_{ϕ_1} transforma-se em μ_{ϕ_2} via a função de transição $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Trocando-se o termo “meromorfa” por “holomorfa” nas definições anteriores, obtemos também a definição de uma *n-diferencial holomorfa*, que nada mais é do que um caso particular de *n-diferencial meromorfa*.

O exemplo a seguir nos mostra como definir *n-diferenciais meromorfas* a partir 1-formas meromorfas.

Exemplo 2.6.2. Sejam $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 1-formas meromorfas sobre uma superfície de Riemann X . Se localmente $\omega_i = f_i(z)dz$, então o produto $\mu = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$, definido localmente por

$$\mu = f_1 f_2 \cdots f_n (dz)^n,$$

é uma *n-diferencial meromorfa* sobre X . Em particular, se ω é uma 1-forma meromorfa sobre X , então ω^n é uma *n-diferencial meromorfa* sobre X .

CAPÍTULO 3

Divisores e Mergulhos

3.1 Divisores

3.1.1 Definição de Divisor

Sejam X uma superfície de Riemann e $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função. O *suporte* de D , denotado por $\text{supp}(D)$, é o conjunto

$$\text{supp}(D) = \{p \in X \mid D(p) \neq 0\}.$$

Definição 3.1.1. Um *divisor* sobre X é uma função $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ cujo suporte é um subconjunto discreto de X . Denotaremos por $\text{Div}(X)$ o conjunto dos divisores sobre X .

A soma de dois divisores $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$, denotada por $D_1 + D_2$, é definida por

$$(D_1 + D_2)(p) = D_1(p) + D_2(p),$$

para todo $p \in X$. Note que, com relação a esta operação de adição, $\text{Div}(X)$ é um grupo.

Frequentemente, denotaremos um divisor D sobre X como sendo a soma formal

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p,$$

onde apenas os pontos do suporte de D aparecem efetivamente.

Note que, se X é uma superfície de Riemann compacta, então uma função $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ é um divisor se, e somente se, $\text{supp}(D)$ é finito. Portanto, quando X é compacta, o grupo $\text{Div}(X)$ é o grupo livre abeliano gerado pelos pontos de X .

Definição 3.1.2. O *grau* de um divisor D sobre uma superfície de Riemann compacta, denotado por $\deg(D)$, é a soma

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Observe que o grau de um divisor define um homomorfismo de grupos entre $\text{Div}(X)$ e $\mathbb{Z}$, e seu núcleo é o subgrupo $\text{Div}_0(X)$ dos divisores sobre X de grau 0.

Temos definida uma relação de ordem parcial sobre o grupo dos divisores. Sejam $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Diremos que $D_1 \geq D_2$ se $D_1(p) \geq D_2(p)$ para todo ponto $p \in X$. Se $D_1 \geq D_2$ e $D_1 \neq D_2$, então diremos que $D_1 > D_2$. Um divisor $D \in \text{Div}(X)$ é *efetivo* se $D \geq 0$.

Note que todo divisor D pode ser escrito unicamente na forma $D = P - N$, onde P e N são divisores efetivos e com suportes disjuntos.

3.1.2 Divisores Principais

Sejam X uma superfície de Riemann e f uma função meromorfa não-nula sobre X . Podemos utilizar a função ordem de uma função meromorfa para associar um divisor a f .

Definição 3.1.3. O *divisor da função meromorfa* f , denotado por $\text{div}(f)$, é o divisor

$$\text{div}(f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

Divisores desse tipo são chamados de *divisores principais* sobre X , e o conjunto consistindo de tais divisores é denotado por $\text{PDiv}(X)$. O *divisor dos zeros de* f , denotado por $\text{div}_0(f)$, é o divisor

$$\text{div}_0(f) = \sum_{p \text{ com } \text{ord}_p(f) > 0} \text{ord}_p(f) \cdot p.$$

Similarmente, o *divisor dos pólos de* f , denotado por $\text{div}_\infty(f)$, é o divisor

$$\text{div}_\infty(f) = \sum_{p \text{ com } \text{ord}_p(f) < 0} (-\text{ord}_p(f)) \cdot p.$$

Note que estes dois últimos divisores são efetivos, têm suportes disjuntos e

$$\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f).$$

O lema a seguir reúne algumas propriedades imediatas dos divisores principais, e como consequência, mostra que $\text{PDiv}(X)$ é um subgrupo de $\text{Div}(X)$.

Lema 3.1.1. Sejam f e g funções meromorfas não-nulas sobre X . Então:

- (a) $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$;
- (b) $\operatorname{div}(1/f) = -\operatorname{div}(f)$;
- (c) $\operatorname{div}(f/g) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$;
- (d) se X é uma superfície de Riemann compacta, então $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

Demonstração. Os itens (a), (b) e (c) seguem do Lema 2.1.5, e o item (d) segue da Proposição 2.3.2. ■

Exemplo 3.1.1. Seja f uma função meromorfa sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$. Se z é a coordenada local no plano complexo $\mathbb{C}$ e $f(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$, onde os e_i são inteiros e os λ_i são números complexos distintos, então $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - (\sum_{i=1}^n e_i) \cdot \infty$.

Exemplo 3.1.2. Seja θ uma função teta sobre o plano complexo $\mathbb{C}$, considerado como uma superfície de Riemann. A função θ é holomorfa sobre todo $\mathbb{C}$, com zeros nos pontos $(1/2) + (\tau/2) + \ell$, para todos pontos ℓ no reticulado $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Como todos esses zeros são simples, temos $\operatorname{div}(\theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau} 1 \cdot ((1/2) + (\tau/2) + \ell)$.

3.1.3 Divisores Canônicos

Sejam X uma superfície de Riemann e ω uma 1-forma meromorfa sobre X não-nula. Da mesma maneira que associamos um divisor a uma função meromorfa não-nula, associamos também um divisor a ω .

Definição 3.1.4. O *divisor da 1-forma meromorfa* ω , denotado por $\operatorname{div}(\omega)$, é o divisor

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Divisores desse tipo são chamados de *divisores canônicos* sobre X , e o conjunto consistindo de tais divisores é denotado por $\operatorname{KDiv}(X)$. O *divisor dos zeros de* ω , denotado por $\operatorname{div}_0(\omega)$, e o *divisor dos pólos de* ω , denotado por $\operatorname{div}_\infty(\omega)$, são definidos de maneira análoga aos de uma função meromorfa não-nula.

Exemplo 3.1.3. De acordo com o que vimos no Exemplo 2.6.1, o divisor da 1-forma meromorfa $\omega = 1dz$ sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ é $\operatorname{div}(\omega) = -2 \cdot \infty$. E o divisor da 1-forma meromorfa $\omega = f(z)dz$, onde $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$, é $\operatorname{div}(\omega) = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i - (2 + \sum_{i=1}^n e_i) \cdot \infty$. Em particular, estes divisores têm grau 2.

O lema a seguir é na verdade um corolário da Proposição 2.6.1.

Lema 3.1.2. Seja X uma superfície de Riemann e ω uma 1-forma meromorfa não-nula sobre X . Então, $\text{KDiv}(X)$ é a classe lateral, módulo $\text{PDiv}(X)$, determinada por ω . Em outras palavras,

$$\text{KDiv}(X) = \text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X),$$

para toda 1-forma meromorfa ω sobre X não-nula.

Demonstração. Para toda função meromorfa f não-nula sobre X vale a igualdade $\text{div}(\omega) + \text{div}(f) = \text{div}(f\omega)$. Portanto $\text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X) \subset \text{KDiv}(X)$. Por outro lado, se ω_1 é uma 1-forma meromorfa não-nula sobre X , então pela Proposição 2.6.1 existe uma função meromorfa f não-nula sobre X tal que $\omega_1 = f\omega$; logo, $\text{div}(\omega_1) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega)$. Portanto $\text{KDiv}(X) \subset \text{div}(\omega) + \text{PDiv}(X)$. ■

Proposição 3.1.1. Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Se existe uma função meromorfa f não-constante sobre X , então existe um divisor canônico sobre X de grau $2g - 2$.

Demonstração. Considere o mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ associado a função meromorfa f . Seja $\eta = F^*(\omega)$ o *pullback* da 1-forma meromorfa $\omega = dz$ sobre $\mathbb{C}_\infty$. Pela Fórmula de Hurwitz e pelo Lema 2.6.1, temos

$$\begin{aligned} \deg(\text{div}(\eta)) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\eta) \\ &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(F^*(\omega)) \\ &= \sum_{p \in X} ((1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)) \text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{\substack{q \neq \infty \\ p \in F^{-1}(q)}} (\text{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} (-\text{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2 \text{mult}_p(F) \\ &= 2g - 2 + 2 \deg(F) - 2 \deg(F) \\ &= 2g - 2. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{div}(\eta)$ é um divisor canônico sobre X de grau $2g - 2$. ■

Corolário 3.1.1. Seja X uma superfície de Riemann compacta de gênero g . Se existe uma função meromorfa f não-constante sobre X , então todo divisor canônico sobre X tem grau $2g - 2$.

Demonstração. Seja ω uma 1-forma meromorfa não-nula sobre X . Denote por $\text{div}(\eta)$ o divisor canônico sobre X de grau $2g - 2$. Pelo Lema 3.1.2, temos $\text{div}(\eta) = \text{div}(\omega) + \text{div}(f)$, para alguma função meromorfa f não-nula sobre X . Calculando o grau dos dois lados dessa igualdade, conclui-se que $\deg(\text{div}(\omega)) = 2g - 2$. ■

Como consequência do Teorema de Riemann-Roch, veremos que sempre existe uma função meromorfa não-constante sobre uma superfície de Riemann compacta. E que portanto, todo divisor canônico tem grau $2g - 2$.

3.1.4 Pullback de um Divisor

Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann. O objetivo é definir um divisor sobre X a partir de um divisor sobre Y . Desta forma, definiremos uma aplicação de $\text{Div}(Y)$ para $\text{Div}(X)$.

Definição 3.1.5. Seja $q \in Y$. O *divisor imagem inversa de q por F* , denotado por $F^*(q)$, é o divisor

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) \cdot p.$$

De maneira geral, seja $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ um divisor sobre Y . O *pullback de D para X via F* , denotado por $F^*(D)$, é o divisor

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q F^*(q).$$

Ou seja, em notação de função, $F^*(D)(p) = \text{mult}_p(F) D(F(p))$.

Algumas das propriedades relacionadas ao *pullback* de divisores estão reunidas no próximo lema.

Lema 3.1.3. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann, e $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q \in \text{Div}(Y)$. Então:

- (a) a aplicação pullback $F^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ é um homomorfismo de grupos;
- (b) o pullback de um divisor principal é principal; mais precisamente, se f é uma função meromorfa sobre Y , então $F^*(\text{div}(f)) = \text{div}(f \circ F)$;
- (c) se X e Y são compactas, então $\deg(F^*(D)) = \deg(F) \deg(D)$.

Demonstração. O item (a) é verificado com cálculos diretos. (b) Basta observar que

$$F^*(\text{div}(f))(p) = \text{mult}_p(F)(\text{div}(f)(F(p))) = \text{ord}_p(f \circ F).$$

(c) O *pullback* $F^*(D)$ numa expressão mais detalhada é definido por

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q \left(\sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) \cdot p \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \deg(F^*(D)) &= \sum_{q \in Y} n_q \left(\sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p(F) \right) \\ &= \deg(F) \sum_{q \in Y} n_q \\ &= \deg(F) \deg(D). \end{aligned}$$

■

Observe que, o item (b) do lema anterior mostra que a aplicação F^* induz um homomorfismo

$$\overline{F^*} : \frac{\text{Div}(Y)}{\text{PDiv}(Y)} \longrightarrow \frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)}.$$

3.1.5 Divisores de Ramificação e de Ramo de um Mapa Holomorfo

Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann. Vamos definir um divisor que guarda os pontos de ramificação de F e outro que guarda os pontos de ramo de F .

Definição 3.1.6. O *divisor de ramificação* de F , denotado por R_F , é o divisor

$$R_F = \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1) \cdot p.$$

O *divisor de ramo* de F , denotado por B_F , é o divisor

$$B_F = \sum_{q \in Y} \left(\sum_{p \in F^{-1}(q)} (\text{mult}_p(F) - 1) \right) \cdot q.$$

Observe que, se X e Y são compactas, então os divisores R_F e B_F têm o mesmos graus, o qual é exatamente o fator de correção na Fórmula de Hurwitz.

Lema 3.1.4. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann. Se ω é uma 1-forma meromorfa não identicamente nula sobre Y , então

$$\operatorname{div}(F^*(\omega)) = F^*(\operatorname{div}(\omega)) + R_F.$$

Em particular, o *pullback* de um divisor canônico é canônico se, e somente se, o mapa não é ramificado.

Demonstração. Utilizando o Lema 2.6.1, encontramos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F^*(\omega)(p)) - F^*(\operatorname{div}(\omega))(p) &= \operatorname{ord}_p(F^*(\omega)) - \operatorname{mult}_p(F) \operatorname{div}(\omega)(F(p)) \\ &= (1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega)) \operatorname{mult}_p(F) - 1 - \operatorname{mult}_p(F) \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega) \\ &= \operatorname{mult}_p(F) - 1, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade do lema. ■

3.1.6 Divisores de Interseção sobre uma Curva Projetiva Suave

Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva projetiva suave e $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo não identicamente nulo sobre X . Vamos definir um divisor $\operatorname{div}(G)$ sobre X que guarda os pontos $p \in X$ tais que $G(p) = 0$, com suas devidas ordens de anulamento.

Seja $p \in X$. Escolha $H \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo de mesmo grau que G e tal que $H(p) \neq 0$. Tal escolha é possível pois, como X é uma curva projetiva suave, existe uma coordenada homogênea x_j tal que $x_j \neq 0$ em p ; logo, $H = x_j^{\deg(G)}$ é uma de nossas opções de escolha. Note que o quociente G/H é uma função meromorfa sobre X , e $\operatorname{ord}_p(G/H) > 0$ se, e somente se, $G(p) = 0$. Por esta razão, definimos $\operatorname{div}(G)(p) = \operatorname{ord}_p(G/H)$.

É importante observar que o divisor $\operatorname{div}(G)$ não depende do particular polinômio H escolhido. De fato, se H' é outro polinômio com as mesmas propriedades de H , então, como $G/H' = (G/H)(H/H')$, temos $\operatorname{ord}_p(G/H') = \operatorname{ord}_p(G/H) + \operatorname{ord}_p(H/H') = \operatorname{ord}_p(G/H)$.

Definição 3.1.7. O divisor $\operatorname{div}(G)$ sobre X , definido nos parágrafos anteriores, é chamado de *divisor de interseção* de G sobre X . Quando $\deg(G) = 1$, o divisor $\operatorname{div}(G)$ recebe o nome particular de *divisor hiperplano* de G sobre X .

No lema a seguir temos algumas propriedades dos divisores de interseção.

Lema 3.1.5. Sejam $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos não identicamente nulos sobre uma curva projetiva suave X . Então:

(a) $\operatorname{div}(G_1 G_2) = \operatorname{div}(G_1) + \operatorname{div}(G_2)$;

- (b) se $\deg(G_1) = \deg(G_2)$ então $\operatorname{div}(G_1/G_2) = \operatorname{div}(G_1) - \operatorname{div}(G_2)$; em particular, se X é compacta então $\deg(\operatorname{div}(G_1)) = \deg(\operatorname{div}(G_2))$.

Demonstração. (a) Sejam $p \in X$ e x_j a coordenada homogênea tal que $x_j \neq 0$ em p . Tome $H = x_j^{\deg(G_1 G_2)}$. Como $G_1 G_2 / H = (G_1 / x_j^{\deg(G_1)})(G_2 / x_j^{\deg(G_2)})$, a propriedade segue calculando a ordem em p dos dois lados dessa igualdade. (b) Sejam $p \in X$ e H um polinômio homogêneo de mesmo grau que G_1 e G_2 tal que $H(p) \neq 0$. Como $G_1 / G_2 = (G_1 / H) / (G_2 / H)$, a propriedade segue calculando a ordem em p dos dois lados dessa igualdade. ■

3.1.7 Teorema de Bézout para Curvas Projetivas Suaves

Para demonstrarmos o Teorema de Bézout, precisamos antes definir o grau de uma curva projetiva suave, o qual é um invariante fundamental.

Definição 3.1.8. O *grau* de uma curva projetiva suave X , denotado por $\deg(X)$, é o grau de um divisor hiperplano sobre X .

O grau está bem definido, pois pelo Lema 3.1.5 quaisquer dois divisores hiperplanos sobre X têm o mesmo grau.

No Exemplo 2.5.1 vimos que curvas planas projetivas suaves são curvas projetivas suaves. Portanto, é de se esperar que as duas definições de grau de uma curva plana projetiva suave coincidam.

Proposição 3.1.2. Seja X uma curva plana projetiva suave definida por um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grau d . Então X tem grau d , no sentido de que todo divisor hiperplano sobre X tem grau d .

Demonstração. Seja $G \in \mathbb{C}[x, y, z]$ um polinômio homogêneo de grau 1 não identicamente nulo sobre X . Estamos interessados em mostrar que $\deg(\operatorname{div}(G)) = d$. Por meio de uma mudança de coordenadas projetiva, podemos supor que $G = x$ e que $[0 : 0 : 1] \notin X$. Assim, se tomarmos $H = y$, o divisor hiperplano $\operatorname{div}(G)$ será exatamente o divisor dos zeros da função meromorfa $f_1 = G/H$.

Considere $F_1 : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ o mapa holomorfo associado a função meromorfa f_1 . Como $\operatorname{div}_0(f_1) = F_1^*(1 \cdot 0)$, pelo Lema 3.1.3, $\deg(\operatorname{div}(G)) = \deg(F_1^*(1 \cdot 0)) = \deg(F_1) \deg(1 \cdot 0) = \deg(F_1)$. A fim de calcularmos o grau do mapa F_1 , escolha $\lambda \in \mathbb{C}^*$ qualquer, a princípio. Para que um ponto $p \in X$ satisfaça $F_1(p) = \lambda$, devemos ter $p = [\lambda y : y : z]$. Como $\lambda \neq 0$, temos $y \neq 0$, pois $[0 : 0 : 1] \notin X$. Portanto, todos os pontos de $F_1^{-1}(\lambda)$ são da forma $[\lambda : 1 : w]$ e satisfazem a equação $F(\lambda, 1, w) = 0$. Em geral, $F(\lambda, 1, w)$ é um polinômio na variável w de grau d . E mais, em geral, esse polinômio possui d raízes distintas. De fato, uma raiz dupla do polinômio $F(\lambda, 1, w)$ é também raiz da sua derivada, e pelo Lema 2.3.3,

tal raiz corresponde a um ponto de ramificação de F_1 . Como os pontos de ramificação de F_1 formam um subconjunto discreto de X , é possível escolher $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (a saber, um λ que não é ponto de ramo de F_1) tal que $F(\lambda, 1, w)$ tenha d raízes distintas, sendo que em cada uma dessas raízes a multiplicidade de F_1 é 1. Portanto, $\deg(\operatorname{div}(G)) = \deg(F_1) = d$. ■

Teorema 3.1.1 (Bézout). Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva projetiva suave de grau d , e $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ um polinômio homogêneo de grau e . Se G não se anula identicamente sobre X , então

$$\deg(\operatorname{div}(G)) = \deg(X) \deg(G) = de.$$

Em outras palavras, o polinômio G se anula em de pontos de X contados com suas devidas ordens.

Demonstração. Seja $\operatorname{div}(H)$ um divisor hiperplano sobre X . Note que H^e é um polinômio homogêneo de grau $e = \deg(G)$. Pelo Lema 3.1.5, temos $\operatorname{div}(H^e) = e \operatorname{div}(H)$ e $\deg(\operatorname{div}(H^e)) = \deg(\operatorname{div}(G))$, donde segue que $\deg(\operatorname{div}(G)) = e \deg(\operatorname{div}(H))$. Mas $\deg(\operatorname{div}(H))$ é, por definição, o grau da curva projetiva suave X , ou seja, $\deg(\operatorname{div}(H)) = \deg(X) = d$. Portanto, temos $\deg(\operatorname{div}(G)) = de$. ■

3.1.8 Fórmula de Plücker

Vamos aplicar o Teorema de Bézout para demonstrarmos a fórmula de Plücker para o gênero de uma curva plana projetiva suave. Antes, um resultado preliminar é necessário.

Lema 3.1.6. Seja $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva suave de grau d . Considere o mapa $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, definido por $\pi[x : y : z] = [x : z]$. Então o divisor de ramificação R_π de π é o divisor de interseção $\operatorname{div}(\partial F / \partial y)$ de $\partial F / \partial y$ sobre X .

Demonstração. Vimos no Lema 2.3.3 que os divisores R_π e $\operatorname{div}(\partial F / \partial y)$ têm o mesmo suporte. Temos apenas que mostrar que, se $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$ é um ponto do suporte desses divisores, então $R_\pi(p) = \operatorname{div}(\partial F / \partial y)(p)$. Faremos isso para a parte afim $X_2 : f(x, y) = F(x, y, 1) = 0$, para as demais o argumento é análogo. Para este caso, o mapa π é simplesmente a projeção $(x, y) \mapsto x$. Suponha então que $p = (x_0, y_0)$ é um ponto de ramificação de π , e que portanto $\partial f / \partial y(p) = 0$. Como X é suave, devemos ter $\partial f / \partial x(p) \neq 0$. Pelo Teorema da Função da Implícita, próximo a p , a curva X é o gráfico de uma função holomorfa $x = g(y)$, donde segue que $f(g(y), y) \equiv 0$ numa vizinhança de y_0 . Derivando essa identidade com relação a y , obtemos $(\partial f / \partial x)g'(y) + \partial f / \partial y \equiv 0$ numa vizinhança de p . Então $\partial f / \partial y = -(\partial f / \partial x)g'(y)$, próximo a p . Observando que $g(y)$ é na verdade a forma normal local de π próximo a p (lembre-se de que a projeção $(g(y), y) \mapsto y$ é uma carta sobre X próximo a p), ao calcularmos a ordem dos dois lados da última igualdade obtida, encontramos

$$\begin{aligned}
\text{ord}_p(\partial f / \partial y) &= \text{ord}_p(-\partial f / \partial x) + \text{ord}_p(g'(y)) \\
&= 0 + \text{ord}_p(g'(y)) \\
&= \text{mult}_p(\pi) - 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $\text{div}(\partial f / \partial y)(p) = R_\pi(p)$. ■

Proposição 3.1.3 (Fórmula de Plücker). O gênero g de uma curva plana projetiva suave de grau d é dado pela fórmula

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Demonstração. Seja $X : F(x, y, z) = 0$ uma curva plana projetiva suave de grau d e gênero g . Considere o mapa $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, definido por $\pi[x : y : z] = [x : z]$. No Exemplo 2.3.2 vimos que o mapa π tem grau d , e no Lema 3.1.6 vimos que $R_\pi = \text{div}(\partial f / \partial y)$. Pelo Teorema de Bézout, temos $\deg(\text{div}(\partial f / \partial y)) = \deg(X) \deg(\partial f / \partial y) = d(d-1)$. Portanto, aplicando a Fórmula de Hurwitz ao mapa π encontramos $2g - 2 = d(-2) + d(d-1)$, donde segue que $g = (d-1)(d-2)/2$. ■

3.2 Equivalência Linear de Divisores

3.2.1 Definição de Equivalência Linear

No decorrer do estudo de divisores, veremos que é um tanto comum que a diferença entre dois divisores é um divisor principal. Um exemplo deste fenômeno foi visto no Lema 3.1.2, o qual afirma que a diferença entre dois divisores canônicos é um divisor principal. Por esta razão, somos motivados a fazer a seguinte definição:

Definição 3.2.1. Sejam X uma superfície de Riemann e $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Diremos que D_1 é *linearmente equivalente* a D_2 , escrevendo $D_1 \sim D_2$, se existe uma função meromorfa f sobre X tal que $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$.

Algumas propriedades imediatas desta definição estão reunidas no próximo lema.

Lema 3.2.1. Sejam X uma superfície de Riemann e $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Então:

- (a) a equivalência linear sobre $\text{Div}(X)$ é uma relação de equivalência;
- (b) $D_1 \sim 0$ se, e somente se, D_1 é um divisor principal;
- (c) se X é compacta e $D_1 \sim D_2$, então $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Exemplo 3.2.1. Seja f uma função meromorfa não-nula sobre uma superfície de Riemann. Como $\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f)$, temos $\text{div}_0(f) \sim \text{div}_\infty(f)$.

Exemplo 3.2.2. Pelo Lema 3.1.2, quaisquer dois divisores canônicos são linearmente equivalentes, e todo divisor linearmente equivalente a um divisor canônico é um divisor canônico.

Exemplo 3.2.3. Quaisquer dois pontos sobre a esfera de Riemann, vistos como divisores, são linearmente equivalentes. De fato, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}_\infty$. Se $\lambda_1, \lambda_2 \neq \infty$, então $1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \lambda_2 = \text{div}(f)$, onde $f(z) = (z - \lambda_1)/(z - \lambda_2)$. Se $\lambda_2 = \infty$ então $1 \cdot \lambda_1 - 1 \cdot \infty = \text{div}(g)$, onde $g(z) = z - \lambda_1$.

Exemplo 3.2.4. Seja $F : X \rightarrow Y$ um mapa holomorfo entre superfícies de Riemann. Se $D_1, D_2 \in \text{Div}(Y)$ são linearmente equivalentes, então os *pullbacks* $F^*(D_1), F^*(D_2) \in \text{Div}(X)$ são linearmente equivalentes. Em particular, se $Y = \mathbb{C}_\infty$ então quaisquer dois divisores imagem inversa são linearmente equivalentes. De fato, se $D_1 \sim D_2$ então $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$, onde f é uma função meromorfa sobre Y . Pelo Lema 3.1.3, temos $F^*(D_1) - F^*(D_2) = \text{div}(f \circ F)$. Como $f \circ F$ é uma função meromorfa sobre X , temos $F^*(D_1) \sim F^*(D_2)$.

Exemplo 3.2.5. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva projetiva suave e $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos de mesmo grau, não identicamente nulos sobre X . Pelo Lema 3.1.5, os divisores de interseção $\text{div}(G_1)$ e $\text{div}(G_2)$ são linearmente equivalentes.

3.2.2 Equivalência Linear para Divisores sobre a Esfera de Riemann

Sabemos que sobre uma superfície de Riemann compacta todo divisor principal tem grau zero. No caso da esfera de Riemann, essa condição é suficiente para que um divisor seja principal.

Proposição 3.2.1. Um divisor D de grau zero sobre a esfera de Riemann é principal.

Demonstração. Escreva $D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$, onde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ são dois a dois distintos e $e_\infty = -\sum_{i=1}^n e_i$. Então $D = \text{div}(f)$, onde $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$. ■

Corolário 3.2.1. Dois divisores D_1 e D_2 sobre a esfera de Riemann são linearmente equivalentes se, e somente se, $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Corolário 3.2.2. Seja D um divisor sobre a esfera de Riemann, com $\deg(D) \geq 0$. Então D é linearmente equivalente a um divisor efetivo. Se $\deg(D) > 0$ então para todo $p \in \mathbb{C}_\infty$ existe um divisor positivo E tal que $D \sim E$ e $p \notin \text{supp}(E)$.

Demonstração. Seja $d = \deg(D)$ e $q \in \mathbb{C}_\infty$ um ponto qualquer. O divisor $E = d \cdot q$ é efetivo e $\deg(E) = \deg(D)$, logo, $D \sim E$. Para a segunda asserção basta tomar $q \neq p$. ■

3.2.3 Equivalência Linear para Divisores sobre um Toro Complexo

Tome $\tau \in \mathbb{C}$ com parte imaginária positiva e considere o toro complexo $X = \mathbb{C}/L$, onde $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Lembre-se de que X é um grupo com a operação de adição induzida de $\mathbb{C}$. Assim, faz sentido definirmos o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} A : \quad \text{Div}(X) &\longrightarrow X \\ \sum_{i=1}^m n_i \cdot p_i &\longmapsto \sum_{i=1}^m n_i p_i. \end{aligned}$$

Esta é a *aplicação de Abel-Jacobi* para o toro complexo X . Esta aplicação está envolvida com a condição de suficiência para que um divisor sobre X seja principal.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Abel para um Toro Complexo). Um divisor D sobre o toro complexo $X = \mathbb{C}/L$ é principal se, e somente se, $\deg(D) = 0$ e $A(D) = 0$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [Mir97, p. 141].

Corolário 3.2.3. Dois divisores D_1 e D_2 sobre o toro complexo $X = \mathbb{C}/L$ são linearmente equivalentes se, e somente se, $\deg(D_1) = \deg(D_2)$ e $A(D_1) = A(D_2)$.

Corolário 3.2.4. Seja D um divisor sobre o toro complexo X , com $\deg(D) > 0$. Então D é linearmente equivalente a um divisor positivo. Se $\deg(D) = 1$ então $D \sim q$, para um único ponto $q \in X$. Se $\deg(D) > 1$ então para todo $x \in X$ existe um divisor positivo E tal que $D \sim E$ e $x \notin \text{supp}(E)$.

Demonstração. Seja $d = \deg(D)$ e $p \in X$ um ponto qualquer. O divisor $E = (d-1) \cdot p + q$, onde $q = A(D - (d-1) \cdot p)$, é efetivo e $\deg(E) = \deg(D)$, logo, $D \sim E$. Para a última asserção tomamos $p \neq x$ e tal que $q \neq x$. ■

3.3 Espaços de Funções Meromorfas e de 1-Formas Meromorfas Associadas a um Divisor

Dado um divisor, podemos empregar a função ordem para associá-lo a dois espaços vetoriais complexos, de modo que essa associação organize as funções meromorfas e as 1-formas meromorfas. Antes, façamos a seguinte convenção: se f é uma função identicamente nula numa vizinhança de um ponto p , então definimos $\text{ord}_p(f) = \infty$, onde $\infty > n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3.3.1 Espaço $\mathcal{L}(D)$

Sejam X uma superfície de Riemann e $D \in \text{Div}(X)$.

Definição 3.3.1. O espaço das funções meromorfas sobre X com pólos limitados por D , denotado por $\mathcal{L}(D)$, é o conjunto

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \operatorname{div}(f) \geq -D\}.$$

Se $f \in \mathcal{L}(D)$ então $\operatorname{ord}_p(f) \geq -D(p)$, para todo $p \in X$. Isso significa que, se $D(p) = n > 0$ então f pode ter um pólo em p de ordem no máximo n , e se $D(p) = -n < 0$ então f deve ter um zero em p de ordem no mínimo n .

Exemplo 3.3.1. Seja X uma superfície de Riemann. Então $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(X)$. Em particular, se X é compacta então $\mathcal{L}(0) \cong \mathbb{C}$, pois as únicas funções holomorfas sobre uma superfície de Riemann compacta são as funções constantes.

Proposição 3.3.1. Sejam X uma superfície de Riemann e $D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(X)$. Então:

- (a) $\mathcal{L}(D_1)$ é um espaço vetorial complexo;
- (b) se $D_1 \leq D_2$ então $\mathcal{L}(D_1) \subset \mathcal{L}(D_2)$.

Demonstração. (a) Por convenção, $0 \in \mathcal{L}(D_1)$. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(D_1)$ e $c \in \mathbb{C}$. Então

$$\operatorname{ord}_p(cf + g) \geq \min\{\operatorname{ord}_p(cf), \operatorname{ord}_p(g)\} = \min\{\operatorname{ord}_p(f), \operatorname{ord}_p(g)\} \geq -D(p),$$

para todo $p \in X$. Portanto $\operatorname{div}(cf + g) \geq -D$, o que significa que $cf + g \in \mathcal{L}(D_1)$. Logo, $\mathcal{L}(D_1)$ é um espaço vetorial complexo. (b) Se $f \in \mathcal{L}(D_1)$ então $\operatorname{div}(f) \geq -D_1 \geq -D_2$, e portanto $f \in \mathcal{L}(D_2)$. Logo, $\mathcal{L}(D_1) \subset \mathcal{L}(D_2)$. ■

Proposição 3.3.2. Sejam D_1 e D_2 divisores linearmente equivalentes sobre uma superfície de Riemann X . Então, $\mathcal{L}(D_1)$ e $\mathcal{L}(D_2)$ são isomorfos como espaços vetoriais. Em particular, $\dim \mathcal{L}(D_1) = \dim \mathcal{L}(D_2)$.

Demonstração. Suponha que $D_1 = D_2 + \operatorname{div}(h)$, para alguma função meromorfa h não-nula sobre X . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \mu_h : \mathcal{L}(D_1) &\longrightarrow \mathcal{L}(D_2) \\ f &\longmapsto \mu_h(f) = fh. \end{aligned}$$

É fácil ver que a lei que define a aplicação μ_h é linear, e que a inversa desta é a multiplicação pela função meromorfa $1/h$, a qual é também não-nula sobre X . Talvez o que precisamos realmente mostrar é que a imagem de μ_h está contida em $\mathcal{L}(D_2)$. Para isso, seja $f \in \mathcal{L}(D_1)$. Então $\operatorname{div}(fh) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(h) \geq -D_1 + \operatorname{div}(h) = -D_2$, e portanto $\mu_h(f) = fh \in \mathcal{L}(D_2)$, como suposto. ■

O lema a seguir traz alguns critérios para que $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ quando a superfície de Riemann é compacta.

Lema 3.3.1. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $D \in \text{Div}(X)$. Então:

- (a) se $\deg(D) < 0$ então $\mathcal{L}(D) = \{0\}$;
- (b) se $\deg(D) = 0$ e $D \not\sim 0$, então $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

Demonstração. (a) Suponha que exista $f \in \mathcal{L}(D)$ não-nula. O divisor $E = \text{div}(f) + D$ é efetivo, e portanto $\deg(E) \geq 0$. Por outro lado, como $\deg(\text{div}(f)) = 0$, temos $\deg(E) = \deg(D) < 0$. Estas duas conclusões contraditórias mostram que devemos ter $\mathcal{L}(D) = \{0\}$. (b) Provaremos a contrapositiva desta afirmação. Para isso, suponha que exista $f \in \mathcal{L}(D)$ não-nula e considere o divisor efetivo $E = \text{div}(f) + D$. Se $\deg(D) = 0$ então $\deg(E) = 0$, donde segue que $E = 0$. Logo, $D \sim 0$. Se $D \not\sim 0$ então $E \neq 0$ e $\deg(E) > 0$. Logo, $\deg(D) = \deg(E) > 0$. ■

3.3.2 Espaço $\mathcal{L}^{(n)}(D)$

Seja X uma superfície de Riemann e $D \in \text{Div}(X)$.

Definição 3.3.2. O espaço das n -diferenciais meromorfas sobre X com pólos limitados por D , denotado por $\mathcal{L}^{(n)}(D)$, é o conjunto

$$\mathcal{L}^{(n)}(D) = \{n\text{-diferenciais meromorfas } \mu \mid \text{div}(\mu) \geq -D\}.$$

Com argumentos análogos aos da prova da Proposição 3.3.1, demonstra-se que $\mathcal{L}^{(n)}(D)$ é um espaço vetorial complexo, e que se $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ são tais que $D_1 \leq D_2$, então $\mathcal{L}^{(n)}(D_1) \subset \mathcal{L}^{(n)}(D_2)$.

Note que, $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ é o espaço das 1-formas meromorfas sobre X com pólos limitados por D , isto é,

$$\mathcal{L}^{(1)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \mid \text{div}(\omega) \geq -D\}.$$

Exemplo 3.3.2. Seja X uma superfície de Riemann. Então $\mathcal{L}(0) = \Omega^1(X)$.

Proposição 3.3.3. Sejam D_1 e D_2 divisores linearmente equivalentes sobre uma superfície de Riemann X . Então, $\mathcal{L}^{(1)}(D_1)$ e $\mathcal{L}^{(1)}(D_2)$ são isomorfos como espaços vetoriais. Em particular, $\dim \mathcal{L}^{(1)}(D_1) = \dim \mathcal{L}^{(1)}(D_2)$.

A prova desta proposição é análoga a da Proposição 3.3.2. Basicamente, consiste em mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned}\mu_h : \mathcal{L}^{(1)}(D_1) &\longrightarrow \mathcal{L}^{(1)}(D_2) \\ \omega &\longmapsto \mu_h(\omega) = h\omega,\end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais, onde $D_1 = D_2 + \operatorname{div}(h)$, para alguma função meromorfa h não-nula sobre X .

Um isomorfismo não tão imediato quanto este relaciona o espaço das n -diferenciais meromorfas com pólos limitados por um divisor com um espaço das funções meromorfas com pólos limitados por um outro divisor.

Proposição 3.3.4. Sejam X uma superfície de Riemann, $D \in \operatorname{Div}(X)$ e $K = \operatorname{div}(\omega) \in \operatorname{KDiv}(X)$. Então, $\mathcal{L}(D + nK)$ e $\mathcal{L}^{(n)}(D)$ são isomorfos como espaços vetoriais. Em particular, $\dim \mathcal{L}^{(n)}(D) = \dim \mathcal{L}(D + nK)$.

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\zeta : \mathcal{L}(D + nK) &\longrightarrow \mathcal{L}^{(n)}(D) \\ f &\longmapsto \zeta(f) = f\omega^n.\end{aligned}$$

Primeiro vamos verificar que de fato a imagem de ζ está contida em $\mathcal{L}^{(n)}(D)$. Para isso, seja $f \in \mathcal{L}(D + nK)$. Então $\operatorname{div}(f\omega^n) = \operatorname{div}(f) + n\operatorname{div}(\omega) \geq -(D + nK) + nK = -D$, e portanto, $f\omega^n \in \mathcal{L}^{(n)}(D)$. É fácil ver que a aplicação ζ é linear e injetiva. Para verificarmos a sobrejetividade de ζ , tome $\mu \in \mathcal{L}^{(n)}(D)$. Se localmente $\mu = h(z)(dz)^n$ e $\omega = g(z)dz$, então $f = h/g^n$ define uma função meromorfa em $\mathcal{L}(D + nK)$ (o caso $n = 1$ foi visto na Proposição 2.6.1). Portanto, ζ é um isomorfismo de espaços vetoriais. ■

3.3.3 Uma Cota Superior para a Dimensão de $\mathcal{L}(D)$

Para superfícies de Riemann compactas, existe uma cota superior para a dimensão do espaço $\mathcal{L}(D)$, o que mostra, em particular, que esse espaço tem dimensão finita.

Lema 3.3.2. Sejam X uma superfície de Riemann, $p \in X$ e $D \in \operatorname{Div}(X)$. Então $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$ ou $\operatorname{codim} \mathcal{L}(D - p) = 1$ em $\mathcal{L}(D)$.

Demonstração. Sejam z uma coordenada local centrada em p e $n = -D(p)$. Se $f \in \mathcal{L}(D)$, então a série de Laurent de f em torno de p com respeito a z é uma expressão do tipo $a_n z^n + \text{t. o. m.}$. Considere então, a aplicação

$$\begin{aligned}\alpha : \mathcal{L}(D) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \alpha(f) = a_n.\end{aligned}$$

Claramente α é uma aplicação linear e $\ker \alpha = \mathcal{L}(D - p)$. Se α é identicamente nula, então $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$. Do contrário, α é sobrejetiva, e então $\operatorname{codim} \mathcal{L}(D - p) = 1$ em $\mathcal{L}(D)$. ■

Proposição 3.3.5. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $D \in \text{Div}(X)$. Escreva $D = P - N$, onde P e N divisores efetivos e com suportes disjuntos. Então $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \deg(P)$. Em particular, $\dim \mathcal{L}(D) < \infty$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre o grau de P . Se $\deg(P) = 0$, então $P = 0$ e $\mathcal{L}(P) \cong \mathbb{C}$, como vimos no Exemplo 3.3.1. Como $D \leq P$, temos $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(P)$, e então $\dim \mathcal{L}(D) \leq \dim \mathcal{L}(P) = 1 = 1 + \deg(P)$. Faça a hipótese de indução, assumindo que a proposição é verdadeira para todo divisor sobre X cuja parte positiva tem grau $k - 1 \geq 0$. Suponha agora que D é um divisor sobre X cuja parte positiva P tem grau k . Escolha $p \in \text{supp}(P)$. A parte positiva do divisor $D - p$ é $P - p$, a qual tem grau $k - 1$. Pela hipótese de indução, temos $\dim \mathcal{L}(D - p) \leq 1 + \deg(P - p) = \deg(P)$, e pelo Lema 3.3.2, temos $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \dim \mathcal{L}(D - p)$. Destas duas igualdades segue que $\dim \mathcal{L}(D) \leq 1 + \deg(P)$, como queríamos. ■

O corolário a seguir é uma consequência imediata da proposição anterior e da Proposição 3.3.4.

Corolário 3.3.1. Se X é uma superfície de Riemann compacta e $D \in \text{Div}(X)$, então $\mathcal{L}^{(1)}(D)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão finita.

3.3.4 Cálculo de $\mathcal{L}(D)$ para a Esfera de Riemann

Seja $D \in \text{Div}(\mathbb{C}_\infty)$ com $\deg(D) \geq 0$. Escreva $D = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$, com $\lambda_i \in \mathbb{C}$ dois a dois distintos. Defina $f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-e_i}$. Esta é uma função meromorfa sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$, e o seu divisor associado é $\text{div}(f_D) = \sum_{i=1}^n -e_i \cdot \lambda_i + (\sum_{i=1}^n e_i) \cdot \infty$.

Proposição 3.3.6. Com as notações do parágrafo anterior, temos

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ g(z)f_D(z) \mid g \in \mathbb{C}[z] \text{ e } \deg(g) \leq \deg(D) \right\}.$$

Demonstração. Seja $g \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio de grau $d \leq \deg(D)$. Note que $\text{div}(g) \geq -d \cdot \infty$. Então $\text{div}(gf_D) = \text{div}(g) + \text{div}(f_D) \geq \sum_{i=1}^n -e_i \cdot \lambda_i + (\sum_{i=1}^n e_i - d) \cdot \infty \geq -D$. Logo, $gf_D \in \mathcal{L}(D)$.

Agora tome $h \in \mathcal{L}(D)$ e considere a função meromorfa $g = h/f_D$ sobre $\mathbb{C}_\infty$. Temos $\text{div}(g) = \text{div}(h) - \text{div}(f_D) \geq -D - \text{div}(f_D) = -\deg(D) \cdot \infty$, o que significa que g não possui pólos em $\mathbb{C}$, e pode possuir um pólo em ∞ de ordem no máximo $\deg(D)$. Logo, g deve ser um polinômio de grau no máximo $\deg(D)$, o que mostra a outra inclusão. ■

Corolário 3.3.2. Seja $D \in \text{Div}(\mathbb{C}_\infty)$. Se $\deg(D) \geq 0$ então $\dim \mathcal{L}(D) = 1 + \deg(D)$.

Demonstração. Basta observar que $\{f_D(z), zf_D(z), \dots, z^{\deg(D)}f_D(z)\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathcal{L}(D)$. ■

3.3.5 Cálculo da Dimensão de $\mathcal{L}(D)$ para um Toro Complexo

Tome $\tau \in \mathbb{C}$ com parte imaginária positiva e considere o toro complexo $X = \mathbb{C}/L$, onde $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$.

Proposição 3.3.7. Seja $D \in \text{Div}(X)$. Se $\deg(D) > 0$ então $\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D)$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre o grau do divisor D . Suponha que $\deg(D) = 1$. Pelo Corolário 3.2.4, o divisor D é linearmente equivalente a um divisor efetivo, e por isso podemos supor que $D = p$, para algum ponto $p \in X$. Claramente $\mathcal{L}(D)$ contém as funções constantes, e portanto $\dim \mathcal{L}(D) \geq 1$. Suponha que existe $f \in \mathcal{L}(D)$ não-constante. Então f possui um único pólo, a saber em p , o qual é simples. Assim, o mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ associado a f tem grau 1, e é portanto um isomorfismo, o que é um absurdo. Concluimos então que $\dim \mathcal{L}(D) = 1$.

Faça a hipótese de indução, assumindo que a proposição é verdadeira para todo divisor de grau $d - 1 \geq 0$. Suponha agora que D é um divisor sobre X de grau d . Escreva $D = (D - p) + p$, para algum ponto $p \in X$. Por hipótese de indução, temos $\dim \mathcal{L}(D - p) = d - 1$, e pelo Lema 3.3.2, $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$ ou $\text{codim } \mathcal{L}(D - p) = 1$ em $\mathcal{L}(D)$. Vamos mostrar que a primeira destas duas possibilidades não ocorre, e que portanto, $\dim \mathcal{L}(D) = d = \deg(D)$.

Pelo Corolário 3.2.4, o divisor D é linearmente equivalente a um divisor E tal que $p \notin \text{supp}(E)$. Digamos que $E = D + \text{div}(f)$, para alguma função meromorfa f sobre X . Como E é efetivo, temos $f \in \mathcal{L}(D)$. Mas $f \notin \mathcal{L}(D - p)$, pois $\text{div}(f)(p) = E(p) - D(p) = -D(p) < -(D(p) - 1)$, e portanto, $\mathcal{L}(D - p) \neq \mathcal{L}(D)$, como queríamos mostrar. ■

3.3.6 Sistemas Lineares

Seja D um divisor sobre uma superfície de Riemann X .

Definição 3.3.3. O *sistema linear completo* de D , denotado por $|D|$, é o conjunto

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) \mid E \text{ é efetivo e } E \sim D\}.$$

Note que, se $E \in |D|$ então $|E| = |D|$. Note também que, se X é compacta e $\deg(D) < 0$, então $|D| = \emptyset$.

Um sistema linear completo $|D|$ torna-se mais interessante quando o relacionamos a projetivização do espaço vetorial $\mathcal{L}(D)$, pois estruturas geométrica e algébrica são agregadas a $|D|$. Essa relação é feita por meio da aplicação

$$\begin{aligned} S : \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) &\longrightarrow |D| \\ [f] &\longmapsto S[f] = \text{div}(f) + D. \end{aligned}$$

Esta é uma aplicação bem definida, pois $\text{div}(\lambda f) = \text{div}(f)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Note que S é sobrejetiva. De fato, seja $E \in |D|$. Então $E = D + \text{div}(f)$, para alguma função

meromorfa f sobre X . Como E é também efetivo, temos $\text{div}(f) \geq -D$, ou seja, $f \in \mathcal{L}(D)$. Como $S[f] = E$, mostramos que S é sobrejetiva.

Lema 3.3.3. Se X é uma superfície de Riemann compacta, então a aplicação S definida anteriormente é injetiva.

Demonstração. Suponha que $f, g \in \mathcal{L}(D)$ são tais que $S[f] = S[g]$, ou seja, $\text{div}(f) = \text{div}(g)$. Isso significa que f e g possuem os mesmos zeros e pólos sobre X , e com as mesmas ordens. Logo, o quociente f/g é uma função holomorfa sobre X . Como X é compacta, a função holomorfa f/g deve ser constante, digamos $f/g = \lambda \in \mathbb{C}^*$. Então $[f] = [\lambda g] = [g]$, o que mostra que S é injetiva. ■

É por meio da aplicação S que definimos um sistema linear geral:

Definição 3.3.4. Um *sistema linear* Q é um subconjunto de um sistema linear completo $|D|$ que é imagem de um subespaço linear de $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ por S . Se Q é um sistema linear sobre uma superfície de Riemann compacta, definimos: o *grau de* Q é o grau de um de seus divisores, e a *dimensão de* Q é a dimensão projetiva do subespaço linear correspondente a Q . Um sistema linear de grau d e dimensão r é denotado por g_d^r .

Observe que o grau de um sistema linear está bem definido, pois divisores linearmente equivalentes sobre uma superfície de Riemann compacta possuem o mesmo grau.

Exemplo 3.3.3. Seja D um divisor sobre uma superfície de Riemann compacta com $\deg(D) = d$. Então, o sistema linear completo $|D|$ é um sistema linear de grau d e dimensão $r = \dim \mathcal{L}(D) - 1$.

Lembre-se de que todo subespaço linear é a projetivização de um subespaço vetorial. Assim, se $Q \subset |D|$ é um sistema linear correspondente a um subespaço vetorial V de $\mathcal{L}(D)$, então $Q = \{\text{div}(f) + D \mid f \in V\}$.

3.3.7 Pontos de Base de Sistemas Lineares

Na próxima seção veremos como definir um mapa holomorfo de uma superfície de Riemann para um espaço projetivo a partir de um sistema linear completo. Isso será possível desde que o sistema linear completo seja livre de pontos de base, termo este que passamos a definir.

Definição 3.3.5. Seja Q um sistema linear sobre uma superfície de Riemann X . Um ponto $p \in X$ é um *ponto de base* do sistema linear Q se todo divisor $E \in Q$ satisfaz $E \geq p$. Diremos que o sistema linear Q é *livre de pontos de base* se Q não possui pontos de base.

Convencionamos que, se $Q = \emptyset$ então todo ponto é um ponto de base.

Exemplo 3.3.4. Se D é um divisor sobre a esfera de Riemann com $\deg(D) > 0$, então, pelo Corolário 3.2.2, o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base.

Exemplo 3.3.5. Se D é um divisor sobre um toro complexo com $\deg(D) > 1$, então, pelo Corolário 3.2.4, o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base.

Lema 3.3.4. Seja $Q \subset |D|$ um sistema linear sobre uma superfície de Riemann X . Seja V o subespaço vetorial de $\mathcal{L}(D)$ correspondente a Q . Então, um ponto $p \in X$ é um ponto de base do sistema linear Q se, e somente se, $V \subset \mathcal{L}(D - p)$. Em particular, p é um ponto de base do sistema linear completo $|D|$ se, e somente se, $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D)$.

Na forma contrapositiva desta afirmação, um ponto $p \in X$ não é um ponto de base do sistema linear Q se, e somente se, existe $f \in V$ tal que $\text{ord}_p(f) = -D(p)$.

Demonstração. Já havíamos notado que $Q = \{\text{div}(f) + D \mid f \in V\}$. Então, p é um ponto de base do sistema linear Q se, e somente se, $\text{div}(f) + D \geq p$, para toda $f \in V$. Como toda função f já pertence a $\mathcal{L}(D)$, temos $\text{div}(f) + D \geq 0$, e então a última condição é equivalente a ter $f \in \mathcal{L}(D - p)$. ■

Vimos que sobre uma superfície de Riemann compacta, o espaço $\mathcal{L}(D)$ tem dimensão finita. Então, o lema anterior juntamente com o Lema 3.3.2 fornece:

Proposição 3.3.8. Seja D um divisor sobre uma superfície de Riemann compacta X . Então, um ponto $p \in X$ é um ponto de base do sistema linear completo $|D|$ se, e somente se, $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D)$. Assim, o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base se, e somente se, $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D) - 1$, para todo ponto $p \in X$.

Os Exemplos 3.3.4 e 3.3.5 podem ser verificados mais facilmente com a proposição anterior, agora utilizando o Corolário 3.3.2 e a Proposição 3.3.7, respectivamente.

Lema 3.3.5. Seja $Q \subset |D|$ um sistema linear sobre uma superfície de Riemann X , livre de pontos de base. Então, para todo número finito de pontos $p_1, p_2, \dots, p_n \in X$, existe um divisor $E \in Q$ tal que $p_i \notin \text{supp}(E)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n . Para $n = 1$, como Q é livre de pontos de base, existe $E \in Q$ tal que $E(p_1) = 0$, o que é o mesmo que $p_1 \notin \text{supp}(E)$. Faça a hipótese de indução, assumindo que o lema é verdadeiro para quaisquer $n - 1 \geq 1$ pontos $p_1, p_2, \dots, p_n \in X$. Por tal hipótese, existe $E_1 \in Q$ tal que $p_i \notin \text{supp}(E_1)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Seja $E_2 \in Q$ tal que $p_n \notin \text{supp}(E_2)$. Digamos que $E_1 = \text{div}(f) + D$ e $E_2 = \text{div}(g) + D$, onde $f, g \in \mathcal{L}(D)$. Escolhendo $c \in \mathbb{C}^*$ adequadamente, o divisor $E = \text{div}(f + cg) + D \in Q$ é tal que $p_i \notin \text{supp}(E)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. ■

3.3.8 Como Remover Pontos de Base?

Descreveremos agora o processo de remoção de pontos de base de um sistema linear completo. Suponha que $|D|$ é um sistema linear completo com pontos de base. Seja F o divisor tal que $F(p) = \min\{E(p) \mid E \in |D|\}$. Claramente $|D| = F + |D - F|$, e ainda, o sistema linear completo $|D - F|$ é livre de pontos de base. De fato, seja p um ponto qualquer. Tome $E \in |D|$ tal que $F(p) = E(p)$. Então $E - F \in |D - F|$ e não satisfaz $E - F \geq p$.

O divisor F é chamado de *parte fixa de $|D|$* , e o sistema linear completo $|D - F|$ é chamado de *parte removida de $|D|$* .

Um fato interessante no resultado desse processo é que os espaços de funções meromorfas associados aos divisores $D - F$ e D não se alteram:

Lema 3.3.6. Se F é a parte fixa de um sistema linear completo $|D|$, então $\mathcal{L}(D - F) = \mathcal{L}(D)$.

Demonstração. Como F é efetivo, temos $D - F \leq D$, e então $\mathcal{L}(D - F) \subset \mathcal{L}(D)$. Para a inclusão contrária, seja $f \in \mathcal{L}(D)$. Como $\text{div}(f) + D \geq 0$, temos $\text{div}(f) + D \in |D| = F + |D - F|$. Escreva $\text{div}(f) + D = F + E$, para algum divisor $E \in |D - F|$. Então $\text{div}(f) + (D - F) = E \geq 0$, donde segue que $f \in \mathcal{L}(D - F)$. ■

3.4 Mergulhos

Estaremos interessados em definir mapas de uma superfície de Riemann X para um espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, de modo que X seja mergulhada holomorficamente em $\mathbb{P}^n$ como uma curva projetiva suave. Feito isso, poderemos utilizar as ferramentas da geometria algébrica para compreender melhor a superfície de Riemann X .

Definição 3.4.1. Seja X uma superfície de Riemann. Um mapa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é *holomorfo* em $p \in X$ se existem funções holomorfas $g_0, g_1, \dots, g_n$ sobre uma vizinhança U de p , não todas nulas em p , tais que $\phi(x) = [g_0(x) : g_1(x) : \dots : g_n(x)]$, para todo $x \in U$. Diremos que ϕ é *holomorfo sobre X* se ϕ é holomorfo em todo ponto de X .

Podemos utilizar funções meromorfas sobre uma superfície de Riemann X para definir mapas holomorfos para $\mathbb{P}^n$. Escolha uma $(n + 1)$ -upla $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ de funções meromorfas sobre X , não todas nulas. Sobre o conjunto $\overline{X}$ dos pontos $p \in X$ que não são zeros comuns das funções f_i e nem pólo de nenhuma delas, temos definida a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_f : \overline{X} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ p &\longmapsto \phi_f(p) = [f_0(p) : f_1(p) : \dots : f_n(p)]. \end{aligned}$$

Lema 3.4.1. A aplicação ϕ_f estende-se para um mapa holomorfo sobre toda a superfície de Riemann X .

Demonstração. Seja $p \in X$ e $k = \min\{\text{ord}_p(f_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Pela descrição dos zeros e pólos de uma função meromorfa, podemos supor que numa vizinhança de p não existem zeros comuns das f_i e nenhum pólo de nenhuma delas, exceto possivelmente em p . Assim, se z é uma coordenada local centrada em p , então $f_i(z)$ é uma função holomorfa numa vizinhança reduzida $U \setminus \{z = 0\}$, e mais, nessa vizinhança não existe um zero comum das funções $f_i(z)$. Portanto, para $z \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}\phi_f(z) &= [f_0(z) : f_1(z) : \cdots : f_n(z)] \\ &= [z^{-k}f_0(z) : z^{-k}f_1(z) : \cdots : z^{-k}f_n(z)] \\ &= [g_0(z) : g_1(z) : \cdots : g_n(z)],\end{aligned}$$

onde $g_i(z) = z^{-k}f_i(z)$, $0 \leq i \leq n$, é holomorfa sobre toda a vizinhança U de p . Deste modo, o valor de ϕ_f está bem definido em p , e é $\phi_f(p) = [g_0(0) : g_1(0) : \cdots : g_n(0)]$. Realizando este processo quantas vezes forem necessárias, estendemos ϕ_f para um mapa holomorfo sobre toda a superfície de Riemann X . ■

Proposição 3.4.1. Sejam X uma superfície de Riemann e $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa holomorfo. Então existe uma $(n+1)$ -upla $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ de funções meromorfas sobre X tais que $\phi = \phi_f$. Mais ainda, se existem duas $(n+1)$ -uplas $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ e $g = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ de funções meromorfas sobre X tais que $\phi_f = \phi_g$, então existe uma função meromorfa λ sobre X tal que $g_i = \lambda f_i$, para todo i .

Demonstração. Por meio de uma reordenação das coordenadas homogêneas $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ de $\mathbb{P}^n$, podemos supor que x_0 não é identicamente nula sobre a imagem $\phi(X)$. Para $0 \leq i \leq n$, defina funções f_i sobre X como sendo a composição $f_i = (x_i/x_0) \circ \phi$. Claramente estas funções f_i são meromorfas, pois x_0 não é identicamente nula sobre $\phi(X)$. Como $\phi = \phi_f$, onde $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$, fica provada a primeira parte da proposição.

Agora suponha que $\phi_f = \phi_g$. Então $[f_0(p) : f_1(p) : \cdots : f_n(p)] = [g_0(p) : g_1(p) : \cdots : g_n(p)]$, para todos os pontos de $p \in X$ que não são zeros comuns das f_i e g_i , e nem pólo de nenhuma delas. Portanto, existe $\lambda(p) \in \mathbb{C}^*$ tal que $g_i(p) = \lambda(p)f_i(p)$, para todo i . Como ao menos uma das funções f_i é não-nula, digamos f_j , a função $\lambda = g_j/f_j$ é meromorfa sobre X , o que conclui a prova. ■

De fato, a proposição anterior nos mostra que temos a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{mapas holomorfos} \\ \phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{P}(\mathcal{M}(X)^n).$$

Definição 3.4.2. Sejam X uma superfície de Riemann e $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa holomorfo definido por $\phi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n]$. Diremos que a imagem de ϕ é *não-degenerada*, se $\phi(X)$ não está contida em nenhum hiperplano de $\mathbb{P}^n$, ou equivalentemente, se $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ é um conjunto linearmente independente.

O motivo de tal definição é devido ao fato de que todo hiperplano H de $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}$, via um isomorfismo linear.

Definição 3.4.3. Sejam X uma superfície de Riemann e $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa holomorfo sobre X . Diremos que ϕ é um *mergulho de X em $\mathbb{P}^n$* , ou simplesmente um *mergulho*, se ϕ é um isomorfismo sobre sua imagem, a qual é uma curva projetiva suave em $\mathbb{P}^n$.

3.4.1 Sistema Linear de um Mapa Holomorfo

Seja X uma superfície de Riemann. Um mapa holomorfo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ possui um sistema linear associado, e a construção deste é feita da seguinte maneira:

Suponha que $\phi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n]$, onde cada f_i é uma função meromorfa sobre X . Seja D o divisor definido por $D(p) = -\min\{\text{ord}_p(f_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Como $\text{div}(f_i) \geq -D$, temos $f_i \in \mathcal{L}(D)$, para todo i . Assim, $V_f = \langle f_0, f_1, \dots, f_n \rangle = \{\sum_{i=0}^n a_i f_i \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(D)$. Logo, a projetivização $\mathbb{P}(V_f)$ de V_f é um subespaço linear, e corresponde ao sistema linear $|\phi| = \{\text{div}(g) + D \mid g \in V_f\} \subset |D|$.

O lema a seguir garante que $|\phi|$ não depende da escolha de f .

Lema 3.4.2. O sistema linear $|\phi|$ não depende da particular n -upla $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ usada para definir o mapa ϕ .

Demonstração. Suponha que ϕ é também definida por $\phi = [g_0 : g_1 : \cdots : g_n]$, onde cada g_i é uma função meromorfa sobre X . Pela Proposição 3.4.1, existe uma função meromorfa λ sobre X tal que $g_i = \lambda f_i$, para todo i . Sejam D e D' divisores definidos por $D(p) = -\min\{\text{ord}_p(f_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$ e $D'(p) = -\min\{\text{ord}_p(g_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Como $\text{div}(g_i) = \text{div}(\lambda) + \text{div}(f_i)$, temos $D' = D - \text{div}(\lambda)$, ou seja, $D \sim D'$. Logo, $|D| = |D'|$.

Para verificarmos a igualdade entre $|\phi_f|$ e $|\phi_g|$, seja $\text{div}(\sum_{i=0}^n a_i g_i) + D' \in |\phi_g|$. Como

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\sum_{i=0}^n a_i g_i \right) + D' &= \text{div} \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda f_i \right) + D' \\ &= \text{div} \left(\sum_{i=0}^n a_i f_i \right) + \text{div}(\lambda) + D' \\ &= \text{div} \left(\sum_{i=0}^n a_i f_i \right) + D, \end{aligned}$$

concluimos que $|\phi_g| \subset |\phi_f|$. Esta mesma igualdade mostra também a inclusão contrária, e que portanto, $|\phi_f| = |\phi_g|$. ■

Este lema nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 3.4.4. O sistema linear do mapa holomorfo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é o sistema linear $|\phi|$, definido anteriormente.

No próximo lema, temos a primeira propriedade de um sistema linear de um mapa holomorfo para $\mathbb{P}^n$.

Lema 3.4.3. Seja X um superfície de Riemann. O sistema linear $|\phi|$ de um mapa holomorfo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é livre de pontos de base.

Demonstração. Suponha que $\phi = [f_0 : f_1 : \dots : f_n]$, onde cada f_i é uma função meromorfa sobre X . Seja D o divisor definido por $D(p) = -\min\{\text{ord}_p(f_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Fixe $p \in X$ e suponha que $D(p) = -\text{ord}_p(f_j)$. Temos $E = \text{div}(f_j) + D \in |\phi|$, mas $E(p) = \text{ord}_p(f_j) + D(p) = 0$. Logo, $|\phi|$ é livre de pontos de base. ■

3.4.2 Divisores Hiperplanos de um Mapa Holomorfo

O que veremos nesta subseção, é na verdade um método alternativo para definirmos o sistema linear de um mapa holomorfo para $\mathbb{P}^n$. Esse método baseia-se na construção de divisores hiperplanos associados ao mapa holomorfo, o qual passamos a descrever.

Sejam X uma superfície de Riemann e $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa holomorfo. Seja também $H : L = 0$ um hiperplano em $\mathbb{P}^n$, ou seja, H é o conjunto dos zeros em $\mathbb{P}^n$ do polinômio linear homogêneo $L \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Suponha que $X \not\subset H$, mas que possivelmente $X \cap H \neq \emptyset$. Para cada $p \in X$, tome $M \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ tal que $M(\phi(p)) \neq 0$. A função $h = (L/M) \circ \phi$ é claramente holomorfa numa vizinha de p , pois $M(\phi(p)) \neq 0$.

Definimos um divisor $\phi^*(H)$ por $\phi^*(H)(p) = \text{ord}_p(h)$. Este divisor não depende da escolha de M , pois se M' é outro polinômio com as mesmas propriedades de M , então, como $L/M' = (L/M)(M/M')$, temos

$$\text{ord}_p((L/M') \circ \phi) = \text{ord}_p((L/M) \circ \phi) + \text{ord}_p((M/M') \circ \phi) = \text{ord}_p((L/M) \circ \phi).$$

Note que, como h é holomorfa em p , temos $\phi^*(H)(p) \geq 0$, e $\phi^*(H)(p) > 0$ se, e somente se, $\phi(p) \in H$.

Definição 3.4.5. Um *divisor hiperplano do mapa* ϕ é um divisor do tipo $\phi^*(H)$.

Lema 3.4.4. Seja $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa holomorfo sobre uma superfície de Riemann X , definido por $\phi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n]$. Sejam também $H : L = \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$ um hiperplano em $\mathbb{P}^n$ e D o divisor definido por $D(p) = -\min\{\text{div}(f_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Se $\phi(X) \not\subset H$, então

$$\phi^*(H) = \text{div} \left(\sum_{i=0}^n a_i f_i \right) + D.$$

Em particular, se a imagem de ϕ é não-degenerada, então o conjunto dos divisores hiperplanos $\phi^*(H)$ de ϕ forma o sistema linear $|\phi|$ de ϕ .

Demonstração. Fixe $p \in X$ e suponha que $\text{ord}_p(f_j) = -D(p) \leq \text{ord}_p(f_i)$, para todo i . Então a coordenada x_j não se anula em p , e então podemos tomar $M = x_j$ para definirmos o divisor hiperplano $\phi^*(H)$. A função $h = (L/M) \circ \phi$ é então $h = (\sum_{i=0}^n a_i f_i)/f_j$, a qual é não identicamente nula numa vizinhança de p , pois $\phi(X) \not\subset H$. Logo,

$$\begin{aligned} \phi^*(H)(p) &= \text{ord}_p(h) \\ &= \text{ord}_p \left(\sum_{i=0}^n a_i f_i \right) - \text{ord}_p(f_j) \\ &= \text{ord}_p \left(\sum_{i=0}^n a_i f_i \right) + D(p), \end{aligned}$$

como afirmado. ■

3.4.3 Como Definir Mapas Holomorfos via Sistemas Lineares?

Na Subseção 3.4.1 vimos que todo mapa holomorfo para $\mathbb{P}^n$ possui um sistema linear associado, e este é livre de pontos de base. É então natural nos perguntarmos se todos sistemas lineares livre de pontos de base estão associados a algum mapa holomorfo. A resposta para essa pergunta é positiva, como mostra a próxima proposição.

Proposição 3.4.2. Seja $Q \subset |D|$ um g_d^n sobre uma superfície de Riemann compacta X . Então existe um mapa holomorfo $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ com imagem não-degenerada e tal que $|\phi| = Q$. Mais ainda, ϕ é única a menos de mudança de coordenadas projetiva.

Demonstração. Seja V o subespaço vetorial de $\mathcal{L}(D)$ correspondente ao sistema linear Q . Então $Q = \{\text{div}(f) + D \mid f \in V\}$. Se $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ é uma base para V , então o mapa holomorfo $\phi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n]$ tem imagem não-degenerada e $|\phi| = Q$.

Agora suponha que $\phi' = [g_0 : g_1 : \cdots : g_n]$ é um mapa holomorfo com as mesmas propriedades de ϕ . Se D' é o divisor definido por $D'(p) = -\min\{\text{div}(g_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$ e

$V' = \langle g_0, g_1, \dots, g_n \rangle = \{ \sum_{i=0}^n a_i g_i \mid a_i \in \mathbb{C} \}$, então $|\phi'| = \{ \text{div}(g) + D' \mid g \in V' \}$. Como, por hipótese ϕ e ϕ' têm imagens não-degeneradas, e ainda $|\phi| = |\phi'|$, podemos realizar uma mudança de coordenadas projetiva de tal maneira que $\text{div}(f_i) + D = \text{div}(g_i) + D'$, para todo i . Assim, $\text{div}(f_i/g_i) = D' - D$, para todo i , o que significa que os quocientes f_i/g_i diferem apenas por fator constante. Multiplicando as funções g_i por fatores constantes não-nulos, podemos supor que existe uma função meromorfa h sobre X tal que $h = f_i/g_i$, para todo i . Portanto, $\phi = \phi'$ a menos de mudança de coordenadas projetiva. ■

Estabelecemos assim, a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_d^n \text{ sobre uma superfície de} \\ \text{Riemann compacta } X, \\ \text{livres de pontos de base} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{mapas holomorfos} \\ \phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{com imagem não-degenerada} \end{array} \right\}.$$

Daremos uma atenção maior para mapas holomorfos definidos a partir de sistemas lineares completos. Denotaremos por ϕ_D o mapa holomorfo para $\mathbb{P}^n$ associado ao sistema linear completo $|D|$ livre de pontos de base.

3.4.4 Critérios para ϕ_D ser um Mergulho

Vamos estabelecer critérios para que um mapa holomorfo ϕ_D seja um mergulho. O primeiro passo é verificar sobre quais condições, necessárias e suficientes, o mapa ϕ_D é injetivo.

Lema 3.4.5. Sejam X uma superfície de Riemann e $|D|$ um sistema linear completo sobre X , livre de pontos de base. Fixado $p \in X$, existe uma base $\{f_0, f_\alpha\}_\alpha$ para $\mathcal{L}(D)$ tal que $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$ e $\text{ord}_p(f_\alpha) > -D(p)$, para todo α .

Demonstração. Seja $\{f_\alpha\}_\alpha$ uma base para $\mathcal{L}(D - p)$. Então $\text{ord}_p(f_\alpha) \geq -(D(p) - 1) > -D(p)$, para todo α . Como o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base, pelo Lema 3.3.4 temos $\mathcal{L}(D - p) \neq \mathcal{L}(D)$, e então, pelo Lema 3.3.2 temos $\text{codim } \mathcal{L}(D - p) = 1$ em $\mathcal{L}(D)$. Portanto, podemos estender a base $\{f_\alpha\}_\alpha$ de $\mathcal{L}(D - p)$ para uma base para $\mathcal{L}(D)$, simplesmente acrescentando uma função $f_0 \in \mathcal{L}(D) \setminus \mathcal{L}(D - p)$. Para esta função f_0 temos $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$, pois caso contrário teríamos $\text{ord}_p(f_0) > -D(p)$, e então $f_0 \in \mathcal{L}(D - p)$, contrariando a escolha de f_0 . ■

Proposição 3.4.3. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $|D|$ um sistema linear completo sobre X , livre de pontos de base. Se $p, q \in X$ com $p \neq q$, então $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ se, e somente se, $\mathcal{L}(D - p - q) = \mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D - q)$. Assim, ϕ_D é injetivo se, e somente se, para todos $p, q \in X$ com $p \neq q$, tem-se $\dim \mathcal{L}(D - p - q) = \dim \mathcal{L}(D) - 2$.

Demonstração. Primeiramente, note que uma mudança de base para o espaço vetorial $\mathcal{L}(D)$ é uma mudança de coordenadas projetiva, e portanto, as coordenadas do mapa ϕ_D sofrem apenas uma mudança linear. Por esta razão, podemos provar a proposição usando qualquer base para $\mathcal{L}(D)$. Escolheremos uma base para $\mathcal{L}(D)$ com as propriedades descritas no Lema 3.4.5. Com esta base, temos $\phi_D(p) = [1 : 0 : \cdots : 0]$. Portanto, $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ se, e somente se, $\phi_D(q) = [1 : 0 : \cdots : 0]$, ou equivalentemente, se $\text{ord}_q(f_0) < \text{ord}_q(f_i)$, para todo $i \geq 1$. Esta última condição é equivalente a ter $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$ e $\text{ord}_p(f_i) > -D(p)$, para todo $i \geq 1$, pois o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base (veja Lema 3.3.4). E esta condição é o mesmo que ter $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ uma base para $\mathcal{L}(D - q)$. Mas esta base foi escolhida como base para $\mathcal{L}(D - p)$; portanto, esta condição ocorre se, e somente se, $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D - q)$.

A segunda igualdade entre os espaços de funções meromorfas ocorre simultaneamente a igualdade $\mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D - q)$. De fato, provamos no parágrafo anterior que todo função $f \in \mathcal{L}(D)$ com $\text{ord}_p(f) > -D(p)$ satisfaz também $\text{ord}_q(f) > -D(q)$. Logo, $\mathcal{L}(D - p) \subset \mathcal{L}(D - p - q)$, pois $p \neq q$, donde segue a igualdade afirmada. Portanto, $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ se, e somente se, $\mathcal{L}(D - p - q) = \mathcal{L}(D - p) = \mathcal{L}(D - q)$.

Como o sistema linear $|D|$ é livre de pontos de base, pela Proposição 3.3.8 temos $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D - q) = \dim \mathcal{L}(D) - 1$. Portanto, pelo Lema 3.3.2 a dimensão $\dim \mathcal{L}(D - p - q)$ é igual a $\dim \mathcal{L}(D) - 1$ ou $\dim \mathcal{L}(D) - 2$. Se ϕ_D é injetivo, então pelo o que provamos no primeiro parágrafo, $\dim \mathcal{L}(D - p - q) \neq \dim \mathcal{L}(D - p)$, para todos $p, q \in X$, e então $\dim \mathcal{L}(D - p - q) = \dim \mathcal{L}(D) - 2$. Reciprocamente, se $\dim \mathcal{L}(D - p - q) = \dim \mathcal{L}(D) - 2$ então $\mathcal{L}(D - p - q) \neq \mathcal{L}(D - p) \neq \mathcal{L}(D)$, para todos $p, q \in X$, e então ϕ_D é injetivo. ■

Apenas a hipótese de injetividade não é suficiente para que um mapa holomorfo para $\mathbb{P}^n$ seja um mergulho. De fato, o mapa

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ z &\mapsto [1 : z^2 : z^3] \end{aligned}$$

é holomorfo e injetivo, mas não é um mergulho de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{P}^2$, pois a sua imagem não é uma curva projetiva suave: em $z = 0$, a única coordenada homogênea não-nula em $\mathbb{P}^2$ é $x_0 = 1$, e nenhum dos quocientes $x_1/x_0 = z^2$ e $x_2/x_0 = z^3$ são coordenadas locais próximo a $z = 0$.

A condição para que, ao menos localmente, a imagem de um mapa holomorfo para $\mathbb{P}^n$ seja uma curva projetiva suave, é estabelecida segundo o próximo lema.

Lema 3.4.6. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $|D|$ um sistema linear completo sobre X , livre de pontos de base. Suponha que o mapa ϕ_D é injetivo e fixe $p \in X$. Então, próximo a $\phi_D(p)$, a imagem de ϕ_D é uma curva projetiva suave se, e

somente se, $\mathcal{L}(D - 2p) \neq \mathcal{L}(D - p)$.

Demonstração. Podemos supor que $\phi = [f_0 : f_1 : \dots : f_n]$, com $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ uma base para $\mathcal{L}(D)$ com as propriedades descritas no Lema 3.4.5. Se, próximo a p , a imagem de ϕ_D é uma curva projetiva suave, então existe j tal que $f_j(p) \neq 0$, todos os quocientes f_k/f_j são holomorfos em p , e para algum i , o quociente f_i/f_j é uma carta sobre X próximo a p . Temos então, $\text{ord}_p(f_k) - \text{ord}_p(f_j) = \text{ord}_p(f_k/f_j) \geq 0$, para todo $0 \leq k \leq n$, donde segue que $f_j = f_0$, pela escolha da base para $\mathcal{L}(D)$. Como f_i/f_0 é uma carta sobre X próximo a p , temos $\text{ord}_p(f_i/f_0) = 1$, donde segue que $\text{ord}_p(f_i) = -D(p) + 1$, ou seja, $f_i \in \mathcal{L}(D - p) \setminus \mathcal{L}(D - 2p)$. Portanto, $\mathcal{L}(D - 2p) \neq \mathcal{L}(D - p)$.

Reciprocamente, se $\mathcal{L}(D - 2p) \neq \mathcal{L}(D - p)$ então existe $f_i \in \mathcal{L}(D - p) \setminus \mathcal{L}(D - 2p)$, onde $1 \leq i \leq n$ (lembre-se de que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ é uma base para $\mathcal{L}(D - p)$); logo, $\text{ord}_p(f_i) = -D(p) + 1$. Multiplicando as coordenadas de ϕ_D pelo fator $z^{D(p)}$, obtemos novas coordenadas g_k para ϕ_D tais que $g_0(p) \neq 0$, todos os quocientes g_k/g_0 são holomorfos em p , e g_i/g_0 é uma carta sobre X próximo a p . Portanto, próximo a p , a imagem de ϕ_D é uma curva projetiva suave em $\mathbb{P}^n$. ■

Proposição 3.4.4. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $|D|$ um sistema linear completo sobre X , livre de pontos de base. Então, o mapa holomorfo ϕ_D é injetivo e um isomorfismo sobre sua imagem (a qual é uma curva projetiva suave em $\mathbb{P}^n$) se, e somente se, $\dim \mathcal{L}(D - p - q) = \dim \mathcal{L}(D) - 2$, para todos $p, q \in X$.

Demonstração. Seja $p \in X$. Pelo Lema 3.3.2, temos $\mathcal{L}(D - 2p) = \mathcal{L}(D - p)$ ou $\text{codim } \mathcal{L}(D - 2p) = 1$ em $\mathcal{L}(D - p)$. Como o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base, pelo Lema 3.3.4 temos $\text{codim } \mathcal{L}(D - p) = 1$ em $\mathcal{L}(D)$. Essas duas observações juntamente com a Proposição 3.4.3 e o Lema 3.4.6 provam a proposição. ■

Definição 3.4.6. Diremos que um divisor D é *muito amplo* se o seu sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base e ϕ_D é um mergulho.

Os dois exemplos a seguir são facilmente verificados calculando a dimensão do espaço $\mathcal{L}(D)$ e aplicando a Proposição 3.4.4.

Exemplo 3.4.1. Todo divisor D sobre a esfera de Riemann, com $\deg(D) > 0$, é muito amplo.

Exemplo 3.4.2. Todo divisor D sobre um toro complexo, com $\deg(D) \geq 3$, é muito amplo.

3.4.5 Grau da Imagem de um Mapa Holomorfo para $\mathbb{P}^n$

Quando $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é um mergulho de uma superfície de Riemann X num espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, este pode ser considerado um mapa holomorfo entre as superfícies de Riemann

X e $\phi(X)$, e portanto possui um grau definido. A curva projetiva suave $\phi(X)$ também possui um grau definido, e este é o grau de um de seus divisores hiperplanos. Esses dois graus relacionam-se com o grau de um divisor hiperplano de ϕ , vejamos:

Proposição 3.4.5. Sejam $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa holomorfo sobre uma superfície de Riemann X , e $H : L = 0$ um hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Suponha que ϕ é um mergulho, isto é, que a imagem $Y = \phi(X)$ de ϕ é uma curva projetiva suave. Então

$$\deg(\phi^*(H)) = \deg(\phi) \deg(Y),$$

onde $\deg(\phi)$ denota o grau do mapa $\phi : X \rightarrow Y$. Em particular, se D é um divisor muito amplo sobre X , então

$$\deg(\phi_D(X)) = \deg(D).$$

Demonstração. É uma simples e direta observação a veracidade da relação

$$\phi^*(H)(p) = \text{mult}_p(\phi) \text{div}(L)(\phi(p)),$$

para todo $p \in X$. Desta relação, conclui-se a primeira igualdade da proposição:

$$\begin{aligned} \deg(\phi^*(H)) &= \sum_{p \in X} \phi^*(H)(p) \\ &= \sum_{p \in X} \text{mult}_p(\phi) \text{div}(L)(\phi(p)) \\ &= \sum_{q \in Y} \left(\sum_{p \in \phi^{-1}(q)} \text{mult}_p(\phi) \text{div}(L)(q) \right) \\ &= \sum_{q \in Y} \text{div}(L)(q) \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} \text{mult}_p(\phi) \\ &= \sum_{q \in Y} \text{div}(L)(q) \deg(\phi) \\ &= \deg(\phi) \deg(\text{div}(L)) \\ &= \deg(\phi) \deg(Y). \end{aligned}$$

Para a segunda parte da asserção, temos $\deg(\phi_D) = 1$ e, pelo Lema 3.4.4, $\deg(\phi_D^*(H)) = \deg(D)$, donde segue a segunda igualdade. ■

CAPÍTULO 4

Curvas Algébricas e Teorema de Riemann-Roch

4.1 Curvas Algébricas

É um resultado não-trivial que toda superfície de Riemann compacta possui funções meromorfas não-constantes. Este resultado é de fundamental importância na prova de que toda superfície de Riemann compacta é uma variedade algébrica. O Teorema de Riemann-Roch, bem como a conexão entre variedades analíticas e algébricas que veremos neste trabalho, serão apresentados sobre a hipótese de uma superfície de Riemann compacta possuir muitas funções meromorfas não-constantes.

4.1.1 Definição de Curva Algébrica

Sejam X uma superfície de Riemann compacta, f uma função meromorfa sobre X , e $p \in X$. Diremos que f *tem multiplicidade 1 em p* se f é holomorfa em p e $\text{ord}_p(f - f(p)) = 1$, ou se f tem um pólo simples em p . Note que estas condições são equivalentes a ter $\text{mult}_p(F) = 1$, onde F é o mapa holomorfo associado a f .

A fim de uma superfície de Riemann compacta possuir muitas funções meromorfas não-constantes, definiremos curva algébrica da seguinte maneira:

Definição 4.1.1. Seja S um conjunto de funções meromorfas sobre uma superfície de Riemann compacta X . Diremos que S *separa pontos de X* se, para todos $p, q \in X$ com $p \neq q$, existe uma função meromorfa $f \in S$ tal que $f(p) \neq f(q)$. Diremos que S *separa tangentes de X* se, para todo $p \in X$ existe uma função meromorfa $f \in S$ com

multiplicidade 1 em p . Uma superfície de Riemann compacta X é uma *curva algébrica* se o seu corpo de funções meromorfas $\mathcal{M}(X)$ separa pontos e tangentes de X .

Esta definição de curva algébrica não é muito comum nas literaturas. Embora a definição que apresentamos é exclusiva para o corpo dos números complexos, esta se generaliza para variedades de dimensão superior a 1. Na verdade, esta é a verdadeira razão de tal definição. É por este motivo que a terminologia “separar tangente” é melhor compreendida em dimensões superiores, vejamos. Suponha que $F : X \rightarrow Y$ é um mapa holomorfo entre variedades complexas. A derivada de F num ponto $p \in X$ é uma aplicação linear F' do espaço tangente a X em p para o espaço tangente a Y em $F(p)$. Dizer que F separa tangentes de X significa que F' é injetiva. Quando X é uma superfície de Riemann compacta, uma função meromorfa f sobre X , definida num ponto $p \in X$, pode ser vista como um mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, o qual, em termos de coordenadas locais centradas em p e em $F(p)$, é uma função holomorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(0) = 0$. Como os espaços tangentes têm dimensão complexa 1, a derivada de g em 0 é simplesmente a multiplicação por um escalar $g'(0)$. Portanto, f separa tangentes em p se $g'(0) \neq 0$, o que é equivalente a ter $\text{mult}_p(F) = 1$.

Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $p \in X$. Se f é uma função meromorfa sobre uma superfície de Riemann X , tal que $\text{ord}_p(f - f(p)) = 1$, então f é uma coordenada local próximo a p . Portanto, $\mathcal{M}(X)$ separa tangentes de X se, e somente se, em todo ponto $p \in X$ existe uma coordenada local próxima a p que se estende para uma função meromorfa sobre X .

Exemplo 4.1.1. Toda curva projetiva suave $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva algébrica. De fato, se $p, q \in X$ e $p \neq q$, então ao menos uma das funções meromorfas x_i/x_j separam p e q . Como X é uma curva projetiva suave, em todo ponto $p \in X$ existe um quociente de coordenadas homogêneas x_i/x_j que pode ser utilizado como uma coordenada local sobre X próxima a p . Como este quociente se estende para uma função meromorfa sobre X , concluímos que $\mathcal{M}(X)$ separa tangentes de X . Portanto, X é uma curva algébrica.

Exemplo 4.1.2. Todo toro complexo $X = \mathbb{C}/L$ é uma curva algébrica.

4.1.2 Funções Meromorfas com Truncamentos de Laurent Específicos

Utilizando as funções meromorfas que separam tangentes de uma curva algébrica, não só podemos construir muitas outras funções meromorfas, como também, especificar seu comportamento numa quantidade finita de pontos.

Lema 4.1.1. Sejam X uma curva algébrica e $p \in X$. Então, para todo inteiro m existe uma função meromorfa f sobre X com $\text{ord}_p(f) = m$.

Demonstração. Como X é uma curva algébrica, existe uma função meromorfa g sobre X tal que g é holomorfa em p e $\text{ord}_p(g - g(p)) = 1$, ou g tem um pólo simples em p . No primeiro caso tome $f = (g - g(p))^m$, e no segundo tome $f = 1/g^m$. Em ambos os casos, temos $\text{ord}_p(f) = m$. ■

Um polinômio de Laurent $r(z) = \sum_{i=m}^n a_i z^i$ é um *truncamento de Laurent* de uma série de Laurent $h(z)$ se $h(z) = r(z) + \text{t. o. m.}$, ou equivalentemente, se $h - r$ possui apenas termos de ordem maior do que n .

Lema 4.1.2. Sejam X uma curva algébrica e $p \in X$. Fixe uma coordenada local z próxima a p . Então, para todo polinômio de Laurent $r(z)$ existe uma função meromorfa f sobre X cuja série de Laurent em torno de p com respeito a z tem $r(z)$ como um truncamento de Laurent.

Demonstração. Escreva $r(z) = \sum_{i=m}^n a_i z^i$, com $a_m, a_n \neq 0$. Faremos a prova por indução sobre o número de termos de r , ou seja, sobre $m - n + 1$. Se $r(z) = a_m z^m$ então, pelo Lema 4.1.1 existe uma função meromorfa f sobre X com $\text{ord}_p(f) = m$. A menos de fator constante, f é a função desejada. Suponha agora que $r(z)$ tem k termos. Seja h uma função meromorfa sobre X cuja série de Laurent em torno de p com respeito a z tem $a_m z^m$ como um truncamento de Laurent. Considere o truncamento de Laurent $s(z)$ da série $h(z) - r(z)$, com termos de grau até n . Este truncamento possui no máximo $k - 1$ termos, pois $h(z)$ e $r(z)$ possuem o mesmo termo de menor grau $a_m z^m$. Pela hipótese de indução, existe uma função meromorfa g cuja série de Laurent em torno de p com respeito a z tem $s(z)$ como um truncamento de Laurent. Portanto, a série de Laurent da função $f = h - g$ em torno de p com respeito a z tem $r(z)$ como um truncamento de Laurent. ■

Lema 4.1.3. Seja X uma curva algébrica. Então, para todo número finito de pontos $p, q_1, q_2, \dots, q_n \in X$, existe uma função meromorfa f sobre X com um zero em p e pólos em $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n . Para $n = 1$, seja g uma função meromorfa sobre X tal que $g(p) \neq g(q_1)$. Substituindo g por $1/g$, se necessário, podemos supor que p não é um pólo de g , e substituindo g por $g - g(p)$, se necessário, podemos supor que p é um zero de g . Se q_1 é um pólo de g , finalizamos; caso contrário, $f = g/(g - g(q_1))$ possui um zero em p e um pólo em q_1 . Seja g uma função meromorfa sobre X com um zero em p e pólos em $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$. Seja também, h uma função meromorfa sobre X com um zero em p e um pólo em q_n . Afirmamos que a função $f = g + h^m$, para m suficientemente grande, tem as propriedades descritas no lema. De fato, para $m > 0$ a função f possui um zero em p . Fixe q_i , com $i \leq n - 1$. Se h é holomorfa em q_i , então f possui um pólo em q_i , para todo $m > 0$. Se h possui um pólo em q_i , tome $m > 0$ de modo que $\text{ord}_{q_i}(h^m) < \text{ord}_{q_i}(g)$. Assim, f possui um pólo em q_i . Para q_n , o comportamento da função g não importa. Para $m > 0$ suficientemente grande, f possui um pólo em q_n . ■

Corolário 4.1.1. Seja X uma curva algébrica. Então, para todo número finito de pontos $p, q_1, q_2, \dots, q_n \in X$, e todo inteiro $m \geq 1$, existe uma função meromorfa f sobre X com $\text{ord}_p(f - 1) \geq m$ e $\text{ord}_{q_i}(f) \geq m$, para todo i , $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Pelo Lema 4.1.3, existe uma função meromorfa g sobre X com um zero em p e pólos em $q_1, q_2, \dots, q_n$. Defina $f = 1/(1 + g^m)$. Temos

$$\text{ord}_p(f - 1) = \text{ord}_p\left(\frac{-g^m}{1 + g^m}\right) = \text{ord}_p(g^m) - \text{ord}_p(1 + g^m) \geq m - 0 = m$$

e

$$\text{ord}_{q_i}(f) = \text{ord}_{q_i}\left(\frac{1}{1 + g^m}\right) = \text{ord}_{q_i}(1) - \text{ord}_{q_i}(1 + g^m) = 0 - m \text{ord}_{q_i}(g) \geq m,$$

para todo i , $1 \leq i \leq n$. Portanto, f é uma função meromorfa sobre X com as propriedades descritas no lema. ■

Lema 4.1.4 (Aproximação de Séries de Laurent). Sejam X uma curva algébrica e $p_1, p_2, \dots, p_n \in X$. Fixe $z_1, z_2, \dots, z_n$ coordenadas locais sobre X próximas a $p_1, p_2, \dots, p_n$, respectivamente. Então, para quaisquer polinômios de Laurent $r_1(z_1), r_2(z_2), \dots, r_n(z_n)$ existe uma função meromorfa f sobre X tal que, para todo i , $0 \leq i \leq n$, a série de Laurent de f em torno de p_i com respeito a z_i tem $r_i(z_i)$ como um truncamento de Laurent.

Demonstração. Seja $N = 1 + \max\{\deg(r_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Para que a série de Laurent de uma função meromorfa f em torno de p_i com respeito a z_i tenha $r_i(z_i)$ como um truncamento de Laurent, é necessário e suficiente que $\text{ord}_{p_i}(f - r_i) \geq N$. Pelo Lema 4.1.2, existem funções meromorfas $g_1, g_2, \dots, g_n$ sobre X tais que, para cada i , $1 \leq i \leq n$, a série de Laurent de g_i em torno de p_i com respeito a z_i tem $r_i(z_i)$ como um truncamento de Laurent. Seja $M = \min\{\text{ord}_{p_j}(g_i) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Pelo Lema 4.1.1, existem funções meromorfas $h_1, h_2, \dots, h_n$ sobre X tais que $\text{ord}_{p_i}(h_i - 1) \geq N - M$ e $\text{ord}_{p_j}(h_i) \geq N - M$, para todos i e j , $1 \leq i, j \leq n$ e $j \neq i$. Defina $f = \sum_{i=1}^n g_i h_i$. A série de Laurent do termo $g_i h_i$ em torno de p_i com respeito a z_i é uma expressão do tipo

$$r_i(z_i) + \text{termos de ordem} \geq N,$$

e para $j \neq i$, temos $\text{ord}_{p_i}(g_j h_j) \geq N$. Logo, $\text{ord}_{p_i}(f - r_i) \geq N$, e portanto, f é uma função meromorfa sobre X com as propriedades do lema. ■

É importante notar que, embora consigamos uma função meromorfa com um comportamento esperado numa quantidade finita de pontos, não temos controle nenhum da função nos demais pontos; se a função é, ou não, holomorfa nos demais pontos, não sabemos.

Corolário 4.1.2. Seja X uma curva algébrica. Então, para todo número finito de pontos $p_1, p_2, \dots, p_n \in X$, e $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, existe uma função meromorfa f sobre X tal que $\text{ord}_{p_i}(f) = m_i$, $1 \leq i \leq n$.

4.1.3 Grau de Transcendência do Corpo de Funções Meromorfas $\mathcal{M}(X)$

Nesta seção veremos algumas propriedades do corpo de funções meromorfas $\mathcal{M}(X)$ de uma curva algébrica X . A primeira é sobre o grau de transcendência sobre os números complexos.

Proposição 4.1.1. Se X é uma curva algébrica, então o grau de transcendência do corpo de funções meromorfas $\mathcal{M}(X)$ sobre $\mathbb{C}$ é

$$\text{tr. deg}(\mathcal{M}(X)) = 1.$$

Demonstração. Como X é uma curva algébrica, existe uma função $f \in \mathcal{M}(X)$ não-constante, pois $\mathcal{M}(X)$ separa pontos de X . Então, $\text{tr. deg}(\mathcal{M}(X)) \geq 1$. De fato, se $\text{tr. deg}(\mathcal{M}(X)) = 0$ então $\mathcal{M}(X)$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{C}$, e portanto, para toda função $f \in \mathcal{M}(X)$ existe um polinômio não-nulo $p \in \mathbb{C}[t]$ tal que $p(f) = 0$. Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, devemos ter $f \in \mathbb{C}$. Mas assim, $\mathcal{M}(X)$ não separa pontos de X , uma contradição.

Suponha $\text{tr. deg}(\mathcal{M}(X)) > 1$. Então existem $f, g \in \mathcal{M}(X)$ algebricamente independentes. Seja D um divisor sobre X tal que $D(p) > \max\{\text{div}_\infty(f)(p), \text{div}_\infty(g)(p)\}$, para todo $p \in X$. Claramente, temos $f, g \in \mathcal{L}(D)$, e para todo inteiro $n > 0$ e todos $i, j \geq 0$ com $i + j \leq n$, temos $f^i g^j \in \mathcal{L}(nD)$. Como f e g são algebricamente independentes, o conjunto $B = \{f^i g^j \mid i, j \geq 0 \text{ e } i + j \leq n\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$, donde segue que $\dim \mathcal{L}(nD) \geq \#B = (n^2 + 3n + 2)/2$. Por outro lado, pela Proposição 3.3.5 temos $\dim \mathcal{L}(nD) \leq 1 + \deg(nD) = 1 + n \deg(D)$, pois D e nD são divisores efetivos. Mas para n suficientemente grande, esta cota superior é incompatível com a cota inferior encontrada. Portanto, $\text{tr. deg}(\mathcal{M}(X)) = 1$. ■

Os lemas a seguir nos ajudarão a demonstrar que o corpo de funções meromorfas $\mathcal{M}(X)$ de uma curva algébrica X é uma extensão finitamente gerada de $\mathbb{C}$.

Lema 4.1.5. Sejam X uma curva algébrica e $A \in \text{Div}(X)$. Seja também, f uma função meromorfa não-constante sobre X e $D = \text{div}_\infty(f)$. Então existem um inteiro $m > 0$ e uma função meromorfa g sobre X tal que $A - \text{div}(g) \leq mD$. Mais ainda, $g = r(f)$ para algum polinômio $r \in \mathbb{C}[t]$.

Demonstração. Sejam $p_1, p_2, \dots, p_k \in \text{supp}(A) \setminus \mathcal{P}(f)$ tais que $A(p_i) \geq 1$ (se não existem tais pontos, tome $m = \max\{A(p), 1 \mid p \in X\}$ e $g = 1$). Então, para todo i , $1 \leq i \leq k$, temos $f(p_i) \in \mathbb{C}$ e $f - f(p_i)$ possui um zero em p_i ; mais ainda, $\mathcal{P}(f - f(p_i)) = \mathcal{P}(f)$. Portanto, $(f - f(p_i))^{A(p_i)}$ possui um zero em p_i de ordem no mínimo $A(p_i)$, e $\mathcal{P}((f - f(p_i))^{A(p_i)}) \subset \mathcal{P}(f)$. Portanto, o inteiro $m = \max\{A(p) - \text{div}(g)(p) \mid p \in X\}$ e a função $g = \prod_{i=1}^k (f - f(p_i))^{A(p_i)}$ satisfazem as propriedades descritas no lema. ■

Corolário 4.1.3. Sejam X uma curva algébrica, f e g funções meromorfas não-constantes sobre X . Então, existem um inteiro $m > 0$ e um polinômio $r \in \mathbb{C}[t]$ tais que $\mathcal{P}(r(f)h) \subset \mathcal{P}(f)$ e $r(f)h \in \mathcal{L}(mD)$, onde $D = \text{div}_\infty(f)$.

Demonstração. Pelo Lema 4.1.5, existe um inteiro $m > 0$ e um polinômio $r \in \mathbb{C}[t]$ tais que $-\text{div}(h) - \text{div}(r(f)) \leq mD$. Portanto, $\text{div}(r(f)h) \geq -mD$. Logo, $\mathcal{P}(r(f)h) \subset \mathcal{P}(f)$ e $r(f)h \in \mathcal{L}(mD)$. ■

Lema 4.1.6. Sejam X uma curva algébrica, f uma função meromorfa não-constante sobre X e $D = \text{div}_\infty(f)$. Suponha que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$. Então existe um inteiro $m_0 > 0$ tal que

$$\dim \mathcal{L}(mD) \geq (m - m_0 + 1)k,$$

para todo inteiro $m \geq m_0$.

Demonstração. Como $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$, existem $g_1, g_2, \dots, g_k \in \mathcal{M}(X)$ linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(f)$. Pelo Corolário 4.1.3, para cada i , $1 \leq i \leq k$, existem um inteiro $m_i > 0$ e um polinômio não-nulo $r_i \in \mathbb{C}[t]$ tais que $\mathcal{P}(h_i) \subset \mathcal{P}(f)$ e $h_i \in \mathcal{L}(m_i D)$, onde $h_i = r_i(f)g_i$. Claramente, as funções $h_1, h_2, \dots, h_k$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(f)$, e $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathcal{L}(m_0 D)$, onde $m_0 = \max\{m_i \mid 1 \leq i \leq k\}$. Como $f \in \mathcal{L}(D)$, para todo inteiro $m \geq m_0$ e todo $i \leq m - m_0$ temos $f^i h_j \in \mathcal{L}(mD)$. Como estas funções são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, concluímos que $\dim \mathcal{L}(mD) \geq (m - m_0 + 1)k$, para todo inteiro $m \geq m_0$. ■

Proposição 4.1.2. Se X é uma curva algébrica, então o corpo de funções meromorfas $\mathcal{M}(X)$ é uma extensão finitamente gerada do corpo $\mathbb{C}$.

Demonstração. Como X é uma curva algébrica, existe $f \in \mathcal{M}(X)$ não-constante. É suficiente provar que $\mathcal{M}(X)$ é uma extensão finitamente gerada do corpo $\mathbb{C}(f)$. Seja $D = \text{div}_\infty(f)$. Afirmamos que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$. De fato, se $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq 1 + \deg(D)$ então, pelo Lema 4.1.6, existe um inteiro $m_0 > 0$ tal que $\dim \mathcal{L}(mD) \geq (m - m_0 + 1)(1 + \deg(D))$, para todo inteiro $m \geq m_0$. Por outro lado, para todo inteiro m tal que mD é efetivo, a Proposição 3.3.5 nos diz que $\dim \mathcal{L}(mD) \leq 1 + \deg(mD) = 1 + m \deg(D)$. Mas para n suficientemente grande, esta cota superior é incompatível com a cota inferior

encontrada. Portanto, $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$, donde segue que $\mathcal{M}(X)$ é uma extensão finitamente gerada do corpo $\mathbb{C}$. ■

Ainda no contexto da demonstração da proposição anterior, podemos ser mais precisos em relação ao grau da extensão de $\mathcal{M}(X)$ sobre $\mathbb{C}(f)$. Vejamos:

Proposição 4.1.3. Seja X uma curva algébrica. Se f é uma função meromorfa não-constante sobre X , então

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D),$$

onde $D = \operatorname{div}_\infty(f)$.

Demonstração. Na demonstração da Proposição 4.1.2, vimos que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$. Resta-nos apenas mostrar que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq \deg(D)$. Escreva $D = \sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i$, com $n_i \geq 1$. Pelo Corolário 4.1.2, podemos obter um conjunto de funções meromorfas $B = \{g_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i\}$, onde cada função g_{ij} possui um pólo em p_i de ordem j e ordem nula em todo p_k , para $k \neq i$. Vamos mostrar que B é um conjunto linearmente independente sobre $\mathbb{C}(f)$, e que portanto, $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq \#B = \deg(D)$. Suponha que existe uma relação não-trivial

$$\sum_{i,j} c_{ij}(f) g_{ij} = 0, \quad \text{com } c_{ij}(f) \in \mathbb{C}(f).$$

Podemos supor que cada $c_{ij}(f)$ é um polinômio em f , pois podemos multiplicar a relação pelo denominador de $c_{ij}(f)$. Note que, se c_{ij} tem grau d então $\operatorname{ord}_{p_k}(c_{ij}(f)) = -dn_k$. Tome i_0 e j_0 índices tais que o grau d_0 de $c_{i_0 j_0}$ é o maior de todos (se existirem mais índices com tal propriedade, tome aqueles cujo índice j é o maior de todos). Renumere os coeficientes c_{ij} de modo que $i_0 = 1$, e divida a relação por $c_{i_0 j_0}(f)$, obtendo assim, uma nova relação

$$\sum_{i,j} d_{ij}(f) g_{ij} = 0,$$

com $d_{1j_0} = 1$ e todos os demais $d_{ij}(f)$ funções racionais em f com o grau do denominador maior ou igual que o grau do numerador. Note que $\operatorname{ord}_{p_k}(d_{ij}(f)) \geq 0$.

Vamos analisar as ordens dos termos $d_{ij}(f)g_{ij}$ em p_1 . Para $i \neq 1$ temos $\operatorname{ord}_{p_1}(d_{ij}(f)g_{ij}) \geq 0$. Para $i = 1$ temos $\operatorname{ord}_{p_1}(d_{1j}(f)g_{1j}) = \operatorname{ord}_{p_1}(d_{1j}(f)) + \operatorname{ord}_{p_1}(g_{1j}) = \operatorname{ord}_{p_1}(d_{1j}(f)) - j$. Da maneira que tomamos os índices i_0 e j_0 , podemos ver que $\operatorname{ord}_{p_1}(d_{1j_0}(f)g_{1j_0}) = -j_0 < \operatorname{ord}_{p_1}(d_{1j}(f)g_{1j})$, para todo $j \neq j_0$. Portanto, a série de Laurent da soma $\sum_{i,j} d_{ij}(f)g_{ij}$ em torno de p_1 possui um termo não-nulo de ordem $-j_0$, o que é uma contradição, pois esta soma é identicamente nula. Então $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq \deg(D)$, o que conclui a prova. ■

4.2 Divisores de Truncamento de Laurent

O Lema de Aproximações de Séries de Laurent no motiva a definir um novo tipo de divisor.

Definição 4.2.1. Seja X uma superfície de Riemann. Para cada ponto $p \in X$, fixe uma coordenada local z_p próxima a p . Um *divisor de truncamento de Laurent* sobre X é uma soma formal finita

$$\sum_{p \in X} r_p(z_p) \cdot p,$$

onde $r_p(z_p)$ é um polinômio de Laurent. Os divisores de truncamento de Laurent formam um grupo com relação a adição, denotado por $\mathcal{T}(X)$.

Normalmente, as coordenadas locais z_p na expressão de um divisor de truncamento de Laurent são omitidas.

Seja X uma superfície de Riemann. A cada divisor $D \in \text{Div}(X)$ associamos um subgrupo de $\mathcal{T}(X)$, definido por

$$\mathcal{T}[D](X) = \left\{ \sum_{p \in X} r_p \cdot p \mid \deg(r_p) < -D(p), \text{ para todo } r_p \neq 0 \right\}.$$

Exemplo 4.2.1. Se $D = 0$ então $\mathcal{T}[0](X) = \{\sum_{p \in X} r_p \cdot p \mid \deg(r_p) < 0, \text{ para todo } r_p \neq 0\}$.

A seguir, definiremos algumas aplicações muito importantes entre os subgrupos $\mathcal{T}[D](X)$ de $\mathcal{T}(X)$, as quais serão fundamentais na demonstração do Teorema de Riemann-Roch. A primeira é a aplicação natural de truncamento

$$\begin{aligned} t_D : \quad \mathcal{T}(X) &\longrightarrow \mathcal{T}[D](X) \\ \sum_{p \in X} r_p \cdot p &\longmapsto \sum_{p \in X} (r_p - \text{termos de ordem} \geq -D(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

A segunda é definida de maneira similar. Fixados $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ com $D_1 \leq D_2$, temos definida a aplicação truncamento

$$\begin{aligned} t_{D_2}^{D_1} : \quad \mathcal{T}[D_1](X) &\longrightarrow \mathcal{T}[D_2](X) \\ \sum_{p \in X} r_p \cdot p &\longmapsto \sum_{p \in X} (r_p - \text{termos de ordem} \geq -D_2(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

Claramente, estas duas aplicações, t_D e $t_{D_2}^{D_1}$, são homomorfismos de grupos.

Fixados $D \in \text{Div}(X)$ e f uma função meromorfa sobre X , temos também definida uma aplicação de multiplicação

$$\begin{aligned}\mu_f^D : \quad \mathcal{T}[D](X) &\longrightarrow \mathcal{T}[D - \operatorname{div}(f)](X) \\ \sum_{p \in X} r_p \cdot p &\longmapsto \sum_{p \in X} (f r_p - \text{termos de ordem } \geq -D(p) + \operatorname{div}(f)(p)) \cdot p.\end{aligned}$$

Esta aplicação é na verdade um isomorfismo de grupos, e seu inverso é $\mu_{1/f}^{D - \operatorname{div}(f)}$.

Por último, a aplicação truncamento de Laurent

$$\begin{aligned}\alpha_D : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{T}[D](X) \\ f &\longmapsto \sum_{p \in X} r_p \cdot p,\end{aligned}$$

onde r_p é o truncamento de Laurent com termos de ordem menor que $-D(p)$ da série de Laurent de f em torno de p com respeito a coordenada local z_p fixada. Claramente, esta é uma aplicação linear.

Note que, se $D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(X)$ e $D_1 \leq D_2$, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{T}[D_1](X) & \xrightarrow[t_{D_2}^{D_1}]{} & \mathcal{T}[D_2](X) \\ \alpha_{D_1} \uparrow & \nearrow \alpha_{D_2} & \\ \mathcal{M}(X) & & \end{array}$$

é comutativo, isto é, $\alpha_{D_2} = t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1}$. Note também que, se $D \in \operatorname{Div}(X)$ e f é uma função meromorfa sobre X , então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\alpha_{D - \operatorname{div}(f)}} & \mathcal{T}[D - \operatorname{div}(f)](X) \\ \cdot f \uparrow & & \uparrow \mu_f \\ \mathcal{M}(X) & \xrightarrow{\alpha_D} & \mathcal{T}[D](X)\end{array}$$

é comutativo, isto é, $\mu_f(\alpha_D(g)) = \alpha_{D - \operatorname{div}(f)}(fg)$, para toda função g meromorfa sobre X .

A aplicação α_D está diretamente relacionada com o espaço $\mathcal{L}(D)$: seja f uma função meromorfa sobre X ; temos $f \in \ker(\alpha_D)$ se, e somente se, em todo ponto $p \in X$, a série de Laurent de f em torno de p com respeito a coordenada local z_p fixada possui apenas termos de ordem maior ou igual a $-D(p)$, o que é equivalente a ter $f \in \mathcal{L}(D)$. Portanto,

$$\ker(\alpha_D) = \mathcal{L}(D).$$

4.2.1 Espaço $\mathcal{H}^1(D)$

Sejam X uma superfície de Riemann e $D \in \operatorname{Div}(X)$. No Lema de Aproximação de Séries de Laurent, vimos como construir uma função meromorfa sobre X com trunca-

mentos de Laurent específicos para um número finito de pontos de X . Agora, então, nos perguntamos: dado um divisor de truncamento de Laurent $Z \in \mathcal{T}[D](X)$, existe uma função meromorfa f sobre X tal que $\alpha_D(f) = Z$? Em caso afirmativo, como construí-la? Problemas deste tipo são chamados de *Problemas de Mittag-Leffler* para a superfície de Riemann X .

Os Problemas de Mittag-Leffler podem ser mensurados pelo conúcleo de α_D , o qual recebe a seguinte notação:

$$\mathcal{H}^1(D) := \text{coker}(\alpha_D) = \frac{\mathcal{T}[D](X)}{\text{im}(\alpha_D)}.$$

Note que, Z é a imagem de uma função meromorfa f por α_D se, e somente se, $\bar{Z} = \bar{0} \in \text{coker}(\alpha_D)$. Portanto, quanto maior o espaço $\mathcal{H}^1(D)$, menores são as chances de se resolver um Problema de Mittag-Leffler.

4.2.2 Finitude da Dimensão de $H^1(D)$

Como vimos na subseção anterior, os Problemas de Mittag-Leffler estão mensurados pelo espaço vetorial $\mathcal{H}^1(D)$. Provaremos nesta subseção que, se a superfície de Riemann em questão é uma curva algébrica, então este espaço tem dimensão finita. Mas antes, alguns resultados preliminares.

Lema 4.2.1 (Lema da Serpente). Sejam R um anel comutativo e

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

um diagrama comutativo de R -módulos e homomorfismos, com linhas exatas. Então existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow \ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{h} \text{coker}(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} \text{coker}(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} \text{coker}(\gamma) \rightarrow 0,$$

onde $\bar{f}$ e $\bar{g}$ são restrições de f e g ; $\bar{f}'$ e $\bar{g}'$ são homomorfismos induzidos por f' e g' , respectivamente.

A demonstração deste lema pode ser encontrado em [AM69, p. 23].

Sejam X uma superfície de Riemann e $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ com $D_1 \leq D_2$. Pelas observações da Seção 4.2, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_1) & \xrightarrow{\alpha_{D_1}} & \mathcal{T}[D_1](X) & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{H}^1(D_1) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \varphi & & \downarrow t_{D_2}^{D_1} & & \downarrow \varrho \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_2) & \xrightarrow{\alpha_{D_2}} & \mathcal{T}[D_2](X) & \xrightarrow{\beta_2} & \mathcal{H}^1(D_2) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Neste diagrama, as aplicações $\beta_1, \beta_2, \varphi$ e ϱ denotam os homomorfismos naturais entre seus espaços. Defina

$$\mathcal{H}^1(D_1/D_2) := \ker(\varrho).$$

Lema 4.2.2. Se X é uma superfície de Riemann compacta, então

$$\dim \mathcal{H}^1(D_1/D_2) = (\deg(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_2)) - (\deg(D_1) - \dim \mathcal{L}(D_1)).$$

Demonstração. Pelo Lema da Serpente, o diagrama comutativo descrito anteriormente, possui uma sequência exata

$$0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow \ker(t_{D_2}^{D_1}) \rightarrow \mathcal{H}^1(D_1/D_2) \rightarrow \operatorname{coker}(\varphi) \rightarrow \operatorname{coker}(t_{D_2}^{D_1}) \rightarrow \operatorname{coker}(\varrho) \rightarrow 0.$$

Como φ é sobrejetiva, temos $\operatorname{coker}(\varphi) = \{0\}$. Logo, desta sequência podemos extrair a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow \ker(t_{D_2}^{D_1}) \rightarrow \mathcal{H}^1(D_1/D_2) \rightarrow 0.$$

Claramente, temos $\ker(\varphi) = \mathcal{L}(D_2)/\mathcal{L}(D_1)$. Como X é compacta, a dimensão dos espaços de funções meromorfas $\mathcal{L}(D_1)$ e $\mathcal{L}(D_2)$ são finitas, e portanto, $\dim \ker(\varphi) = \dim \mathcal{L}(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_1)$. Também é fácil ver que

$$\ker(t_{D_2}^{D_1}) = \left\{ \sum_{p \in X} r_p \cdot p \mid r_p \in \langle z_p^{-D_2(p)}, z_p^{-D_2(p)+1}, \dots, z_p^{-D_1(p)-1} \rangle \right\}.$$

Como as condições impostas sobre r_p são independentes daquelas impostas sobre r_q , para todo $q \neq p$, temos $\dim \ker(t_{D_2}^{D_1}) = \sum_{p \in X} (D_2(p) - D_1(p)) = \deg(D_2) - \deg(D_1)$. Agora, utilizando a sequência exata curta obtida anteriormente, concluímos que

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{H}^1(D_1/D_2) &= \dim \ker(t_{D_2}^{D_1}) - \dim \ker(\varphi) \\
&= (\deg(D_2) - \dim \mathcal{L}(D_2)) - (\deg(D_1) - \dim \mathcal{L}(D_1)),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 4.2.3. Sejam X uma curva algébrica, f uma função meromorfa sobre X e $D = \text{div}_\infty(f)$. Então, a partir de um inteiro $m_0 > 0$ a dimensão $\dim \mathcal{H}^1(0/mD)$ é constante.

Demonstração. Aplicando o Lema 4.2.2 para $D_1 = 0$ e $D_2 = mD$, com $m > 0$ inteiro, obtemos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}^1(0/mD) &= (\deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD)) - (\deg(0) - \dim \mathcal{L}(0)) \\ &= m \deg(D) - \dim \mathcal{L}(mD) + 1, \end{aligned}$$

visto que $\dim \mathcal{L}(0) = 1$ porque X é compacta. Pela Proposição 4.1.3, $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(D)$. Com esta igualdade, o Lema 4.1.6 garante a existência de um inteiro $m'_0 > 0$ tal que

$\dim \mathcal{L}(mD) \geq (m - m'_0 + 1) \deg(D)$, para todo inteiro $m \geq m'_0$. Então

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}^1(0/mD) &\leq m \deg(D) - (m - m'_0 + 1) \deg(D) + 1 \\ &= 1 + \deg(D)(m'_0 - 1), \end{aligned}$$

para todo inteiro $m \geq m'_0$. Note que esta desigualdade não depende de m .

Suponha que m_1 e m_2 são inteiros tais que $0 < m_1 < m_2$. Como $0 < m_1 D_1 < m_2 D_2$, os homomorfismos naturais do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(m_1 D) & \xrightarrow{\varrho_1} & \mathcal{H}^1(m_2 D) \\ \varrho_1 \uparrow & \nearrow \varrho_3 & \\ \mathcal{H}^1(0) & & \end{array}$$

estão bem definidos; e como este diagrama é comutativo, temos

$$\mathcal{H}^1(0/m_1 D) = \ker(\varrho_1) \subset \ker(\varrho_3) = \mathcal{H}^1(0/m_2 D).$$

Isto significa que a dimensão $\dim \mathcal{H}^1(0/mD)$ é não-decrescente. Por esta razão, e pelo fato da dimensão $\dim \mathcal{H}^1(0/mD)$ estar limitada por uma constante que independe de m , a partir de um inteiro $m_0 > 0$ a dimensão $\dim \mathcal{H}^1(0/mD)$ é constante. ■

Lema 4.2.4. Se X é uma curva algébrica, então existe um inteiro $M \geq 0$ tal que

$$\deg(A) - \dim \mathcal{L}(A) \leq M,$$

para todo divisor $A \in \text{Div}(X)$.

Demonstração. Sejam f uma função meromorfa não-nula sobre X e $D = \text{div}_\infty(f)$. Na demonstração do Lema 4.2.3, vimos que existe um inteiro $M \geq 0$ tal que

$$\deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD) \leq M,$$

para todo inteiro $m \geq 0$ (lembre-se de que a dimensão $\dim \mathcal{H}^1(0/mD)$ é não-decrescente).

Suponha que $A \in \text{Div}(X)$ é um divisor qualquer. Pelo Lema 4.1.5, existem um inteiro $m > 0$ e uma função meromorfa g sobre X tal que $B = A - \text{div}(g) \leq mD$. Por definição, $B \sim A$, donde segue que $\deg(B) = \deg(A)$ e $\mathcal{L}(B) \cong \mathcal{L}(A)$. Como $B \leq mD$, pelo Lema 4.2.2,

$$\deg(B) - \dim \mathcal{L}(B) = (\deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD)) - \dim \mathcal{H}^1(B/mD).$$

Então,

$$\begin{aligned} \deg(A) - \dim \mathcal{L}(A) &= \deg(B) - \dim \mathcal{L}(B) \\ &= (\deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD)) - \dim \mathcal{H}^1(B/mD) \\ &\leq \deg(mD) - \dim \mathcal{L}(mD) \\ &\leq M, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Assim, o lema anterior garante a existência de um divisor A_0 sobre uma curva algébrica, tal que $\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)$ é maximal.

Lema 4.2.5. Sejam X uma curva algébrica e $A_0 \in \text{Div}(X)$ tal que $\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)$ é maximal. Então $\mathcal{H}^1(A_0) = \{0\}$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{H}^1(A_0) \neq \{0\}$. Logo, existe um divisor de truncamento de Laurent $Z \in \mathcal{T}[A_0](X) \setminus \{0\}$ tal que $Z \notin \text{im}(\alpha_{A_0})$. Tome um divisor $B \in \text{Div}(X)$ tal que $A_0 \leq B$ e $t_B^{A_0}(Z) = 0 \in \mathcal{T}[B](X)$. Então $\overline{t_B^{A_0}(Z)} = \bar{0} \in \mathcal{H}^1(B)$, e portanto, $\bar{Z} \in \mathcal{H}^1(A_0/B)$. Em particular, $\dim \mathcal{H}^1(A_0/B) \geq 1$. No entanto, pelo Lema 4.2.2,

$$\dim \mathcal{H}^1(A_0/B) = (\deg(B) - \dim \mathcal{L}(B)) - (\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)) \leq 0,$$

pois $\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)$ é maximal. Esta contradição mostra que $\mathcal{H}^1(A_0) = \{0\}$. ■

Proposição 4.2.1. Se X é uma curva algébrica e $D \in \text{Div}(X)$, então $\mathcal{H}^1(D)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão finita.

Demonstração. Seja $A_0 \in \text{Div}(X)$ tal que $\deg(A_0) - \dim \mathcal{L}(A_0)$ é maximal. Escreva $D - A_0 = P - N$, onde P e N são divisores efetivos com suportes disjuntos. Como

$A_0 \leq A_0 + P$, o homomorfismo natural $\mathcal{H}^1(A_0) \rightarrow \mathcal{H}^1(A_0 + P)$ está bem definido e é sobrejetivo. Então $\mathcal{H}^1(A_0 + P) = \{0\}$, pois $\mathcal{H}^1(A_0) = \{0\}$, como vimos no Lema 4.2.5. Da mesma forma, como $A_0 + P - N \leq A_0 + P$, o homomorfismo natural $\mathcal{H}^1(A_0 + P - N) \rightarrow \mathcal{H}^1(A_0 + P) = \{0\}$ também está bem definido e é sobrejetivo. Logo, $\mathcal{H}^1((A_0 + P - N)/(A_0 + P)) = \mathcal{H}^1(A_0 + P - N)$, o que nos permite concluir que $\mathcal{H}^1(D)$ tem dimensão finita, pois $D = A_0 + P - N$ e $\mathcal{H}^1(D/(A_0 + P))$ tem dimensão finita, pelo Lema 4.2.2. ■

4.3 Teorema de Riemann-Roch e Dualidade de Serre

4.3.1 Primeira Forma do Teorema de Riemann-Roch

Finalmente temos todas as ferramentas e resultados necessários para demonstrarmos a primeira forma do Teorema de Riemann-Roch.

Teorema 4.3.1 (Primeira Forma do Teorema de Riemann-Roch). Seja X uma curva algébrica. Então, para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ temos

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{H}^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim \mathcal{H}^1(0).$$

Demonstração. Sejam $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Tome $D' \in \text{Div}(X)$ tal que $D_i \leq D'$, para $i = 1, 2$. Pela Proposição 4.2.1, os espaços vetoriais $\mathcal{H}^1(D_i)$ e $\mathcal{H}^1(D')$ têm dimensão finita, o que nos permite calcular a dimensão do núcleo $\mathcal{H}^1(D_i/D')$ utilizando o Teorema de Núcleo e Imagem, com o qual encontramos

$$\dim \mathcal{H}^1(D_i/D') = \dim \mathcal{H}^1(D_i) - \dim \mathcal{H}^1(D').$$

Substituindo $\dim \mathcal{H}^1(D_i/D')$ pela fórmula do Lema 4.2.2, obtemos

$$\dim \mathcal{L}(D_i) - \deg(D_i) - \dim \mathcal{H}^1(D_i) = \dim \mathcal{L}(D') - \deg(D') - \dim \mathcal{H}^1(D'),$$

para $i = 1, 2$. Portanto, $\dim \mathcal{L}(D_1) - \deg(D_1) - \dim \mathcal{H}^1(D_1) = \dim \mathcal{L}(D_2) - \deg(D_2) - \dim \mathcal{H}^1(D_2)$, para quaisquer $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Em outras palavras,

$$\dim \mathcal{L}(D) - \deg(D) - \dim \mathcal{H}^1(D)$$

é constante. Em particular, para $D = 0$,

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{H}^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim \mathcal{H}^1(0).$$

■

A dimensão $\dim \mathcal{H}^1(D)$ é chamada de *gênero aritmético* da curva algébrica X .

4.3.2 Aplicação Resíduo

Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $D \in \text{Div}(X)$. Se $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$, então, por definição, $\text{ord}_p(\omega) \geq D(p)$, para todo $p \in X$. Isto significa que, se fixarmos uma coordenada local z_p próxima a um ponto $p \in X$, a 1-forma meromorfa ω é, em termos dessa coordenada local, uma expressão do tipo $\left(\sum_{n=D(p)}^{\infty} c_n z_p^n\right) dz_p$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Res}_\omega : \quad \mathcal{T}[D](X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \sum_{p \in X} r_p \cdot p &\longmapsto \sum_{p \in X} \text{Res}_p(r_p \omega). \end{aligned}$$

Suponha que f é uma função meromorfa sobre X , e que sua série de Laurent em torno de p com respeito a z_p é $\sum_k a_k z_p^k$. Então, o resíduo da 1-forma meromorfa $f\omega$ em p é

$$\text{Res}_p(f\omega) = \sum_{n=D(p)}^{\infty} c_n a_{-1-n},$$

o qual depende apenas dos coeficientes a_i da série de Laurent de f , com $i < -D(p)$. Esta observação mostra que $\sum_{p \in X} \text{Res}_p(f\omega) = \text{Res}_\omega(\alpha_D(f))$. Como X é compacta, pelo Teorema do Resíduo temos $\sum_{p \in X} \text{Res}_p(f\omega) = 0$, e então, $\text{Res}_\omega(\alpha_D(f)) = 0$, para toda função meromorfa f sobre X . Logo, Res_ω induz um funcional linear

$$\text{Res}_\omega : \mathcal{H}^1(D) = \frac{\mathcal{T}[D](X)}{\text{im}(\alpha_D)} \longrightarrow \mathbb{C},$$

ou seja, $\text{Res}_\omega \in \mathcal{H}^1(D)^*$, o espaço dual de $\mathcal{H}^1(D)$. Portanto, temos a *aplicação resíduo*

$$\begin{aligned} \text{Res} : \mathcal{L}^{(1)}(-D) &\longrightarrow \mathcal{H}^1(D) \\ w &\longmapsto \text{Res}_\omega. \end{aligned}$$

4.3.3 Dualidade de Serre

O Teorema da Dualidade de Serre afirma que a aplicação resíduo Res , definida no final da subseção anterior, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Com este resultado em mãos, conseguiremos identificar melhor a dimensão do espaço $\mathcal{H}^1(D)$, de maneira a obter a segunda forma do Teorema de Riemann-Roch.

Lema 4.3.1. Sejam X uma curva algébrica e $A \in \text{Div}(X)$. Se ϕ_1 e ϕ_2 são funcionais lineares sobre $\mathcal{H}^1(A)$, então existem um divisor efetivo $C \in \text{Div}(X)$ e funções meromorfas f_1 e f_2 não-nulas sobre X , tais que

$$\phi_1 \circ t_A^{A-C-\text{div}(f)} \circ \mu_{f_1} = \phi_2 \circ t_A^{A-C-\text{div}(f)} \circ \mu_{f_2},$$

como funcionais lineares sobre $\mathcal{H}^1(A - C)$.

Demonstração. Suponha que este resultado é falso. Então, para todo divisor efetivo $C \in \text{Div}(X)$, a aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(C) \times \mathcal{L}(C) &\longrightarrow \mathcal{H}^1(A - C)^* \\ (f_1, f_2) &\longmapsto \phi_1 \circ t_A^{A-C-\text{div}(f)} \circ \mu_{f_1} - \phi_2 \circ t_A^{A-C-\text{div}(f)} \circ \mu_{f_2} \end{aligned}$$

é injetiva, e portanto, $\dim \mathcal{H}^1(A - C) = \dim \mathcal{H}^1(A - C)^* \geq 2 \dim \mathcal{L}(C)$. Aplicando o Teorema de Riemann-Roch para o divisor C , $\dim \mathcal{L}(C) \geq \deg(C) + 1 - \dim \mathcal{H}^1(0)$. Logo,

$$\dim \mathcal{H}^1(A - C) \geq 2(1 - \dim \mathcal{H}^1(0)) + 2 \deg(C).$$

Aplicando novamente o Teorema de Riemann-Roch, para o divisor $A - C$,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}^1(A - C) &= \dim \mathcal{L}(A - C) - \deg(A - C) - 1 + \dim \mathcal{H}^1(0) \\ &\leq (\dim \mathcal{L}(A) - \deg(A) - 1 + \dim \mathcal{H}^1(0)) + \deg(C). \end{aligned}$$

Para $C \in \text{Div}(X)$ efetivo e com $\deg(C)$ suficientemente grande, estas cotas, inferior e superior, para a dimensão $\dim \mathcal{H}^1(A - C)$ são incompatíveis. Esta contradição prova a veracidade do lema. ■

Lema 4.3.2. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ com $D_1 \leq D_2$. Suponha que exista $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D_1)$, e então, que $\text{Res}_\omega : \mathcal{T}[D_1](X) \rightarrow \mathbb{C}$ está definida. Se $\ker(t_{D_2}^{D_1}) \subset \ker(\text{Res}_\omega)$, então $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$.

Demonstração. Se $\omega \notin \mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$, então existe um ponto $p \in X$ tal que $k = \text{ord}_p(\omega) < D_2(p)$. Então $Z = z_p^{-k-1} \cdot p \in \ker(t_{D_2}^{D_1})$, mas $\text{Res}_\omega(Z) \neq 0$, e isso contradiz a hipótese de que $\ker(t_{D_2}^{D_1}) \subset \ker(\text{Res}_\omega)$. Portanto, devemos ter $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D_2)$. ■

Os dois lemas anteriores já são suficientes para demonstrarmos o Teorema da Dualidade de Serre.

Teorema 4.3.2 (Dualidade de Serre). Se X é uma curva algébrica, então, para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$, a aplicação resíduo $\text{Res} : \mathcal{L}^{(1)}(-D) \rightarrow \mathcal{H}^1(D)^*$ é um isomorfismo de espaços vetoriais complexos. Em particular, $\dim \mathcal{L}^{(1)}(-D) = \dim \mathcal{H}^1(D)^* = \dim \mathcal{H}^1(D)$.

Demonstração. Primeiro provaremos a injetividade da aplicação resíduo. Suponha que exista uma 1-forma meromorfa não-nula $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$ tal que $\text{Res}(\omega) \equiv 0$ sobre $\mathcal{H}^1(D)$. Então $\sum_{p \in X} \text{Res}_p(r_p \omega) = 0$, para todo divisor de truncamento de Laurent $\sum_{p \in X} r_p \cdot p \in \mathcal{T}[D](X)$. Fixe $p \in X$ e uma coordenada local $z = z_p$ próxima a p . Como $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$, temos $k = \text{ord}_p(\omega) \geq D(p)$, ou equivalentemente, $-1-k < -D(p)$. Claramente, $z^{-1-k} \cdot p \in$

$\mathcal{T}[D](X)$, mas, se escrevermos a 1-forma meromorfa ω em termos da coordenada local z como $(\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n) dz$, onde $c_k \neq 0$, vemos que

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\omega}(z^{-1-k} \cdot p) &= \text{Res} \left(\left(z^{-1-k} \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \right) dz \right) \\ &= c_k \neq 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, a aplicação resíduo é injetiva.

Para a sobrejetividade, seja $\phi : \mathcal{H}^1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Tome 1-forma meromorfa ω não-nula sobre X e denote $K = \text{div}(\omega)$. Tome também, um divisor $A \in \text{Div}(X)$ tal que $A \leq D$ e $A \leq K$. Assim, $\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-A)$, e então, o funcional linear $\text{Res}_{\omega} : \mathcal{T}[A](X) \rightarrow \mathbb{C}$ está definida. Seja $\phi_A : \mathcal{T}[A](X) \rightarrow \mathbb{C}$ o funcional linear definido por $\phi_A(Z) = \phi(\overline{t_D^A(Z)})$, para todo $Z \in \mathcal{T}[A](X)$. Pelo Lema 4.3.1, existem um divisor efetivo $C \in \text{Div}(X)$ e funções meromorfas não-nulas $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(C)$, tais que

$$\phi_A \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_1)} \circ \mu_{f_1} = \text{Res}_{\omega} \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_2)} \circ \mu_{f_2},$$

como funcionais sobre $\mathcal{H}^1(A-C)$. Com cálculos diretos, é fácil ver que a composição $\text{Res}_{\omega} \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_2)}$ é na verdade o funcional linear Res_{ω} restrito a $\mathcal{T}[A-C-\text{div}(f_2)](X)$, e que $\text{Res}_{\omega} \circ \mu_{f_2}$ é exatamente o funcional linear $\text{Res}_{f_2\omega}$ sobre $\mathcal{T}[A-C](X)$. Portanto,

$$\phi_A \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_1)} \circ \mu_{f_1} = \text{Res}_{f_2\omega},$$

como funcionais lineares sobre $\mathcal{T}[A-C](X)$. Compondo os dois lados desta igualdade com a inversa μ_{1/f_1} de μ_{f_1} , obtemos

$$\phi_A \circ t_A^{A-C-\text{div}(f_1)} = \text{Res}_{f_2\omega} \circ \mu_{1/f_1} = \text{Res}_{(f_2/f_1)\omega},$$

como funcionais sobre $\mathcal{T}[A-C-\text{div}(f_1)](X)$. Esta igualdade nos mostra que

$$\ker(t_A^{A-C-\text{div}(f_1)}) \subset \ker(\text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}).$$

Portanto, pelo Lema 4.3.2, temos $(f_2/f_1)\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-A)$, visto que $(f_2/f_1)\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-A + C + \text{div}(f_1))$. Logo, $\phi_A = \text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}$. Como $\text{Res}_{(f_2/f_1)\omega}(Z) = \phi_A(Z) = \phi(\overline{t_D^A(Z)})$, para todo $Z \in \mathcal{T}[A](X)$, vemos que $\ker(t_D^A) \subset \ker(\text{Res}_{(f_2/f_1)\omega})$, e então, novamente pelo Lema 4.3.2, temos $(f_2/f_1)\omega \in \mathcal{L}^{(1)}(-D)$. Como $\phi = \text{Res}_{(f_2/f_1)\omega} = \text{Res}((f_2/f_1)\omega)$, provamos que a aplicação resíduo é sobrejetiva. ■

Corolário 4.3.1. Sejam X uma curva algébrica e $K \in \text{KDiv}(X)$ um divisor canônico qualquer. Então, para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$, temos $\dim \mathcal{L}^{(1)}(-D) = \dim \mathcal{H}^1(D) = \dim \mathcal{L}(K-D)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.4, $\mathcal{L}^{(1)}(-D) \cong \mathcal{L}(K - D)$. Combinando esta informação com o Teorema da Dualidade de Serre, conclui-se o resultado. ■

4.3.4 Segunda Forma do Teorema de Riemann-Roch

Vamos combinar a primeira forma do Teorema de Riemann-Roch com o Teorema da Dualidade de Serre e obter a segunda, e mais clássica, versão do Teorema de Riemann-Roch. A importância deste teorema fundamenta-se na classificação de certas curvas algébricas, pois relaciona propriedades algébricas com propriedades topológicas.

Teorema 4.3.3 (Segunda Forma do Teorema de Riemann-Roch). Seja X uma curva algébrica de gênero g . Então, para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ e todo divisor canônico $K \in \text{KDiv}(X)$, temos

$$\dim \mathcal{L}(D) - \dim \mathcal{L}(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Demonstração. Aplicando o Corolário 4.3.1 para $D = K$, obtemos $\dim \mathcal{H}^1(K) = \dim \mathcal{L}(0) = 1$, pois X é uma superfície de Riemann compacta. Este mesmo resultado, para $D = 0$, fornece $\dim \mathcal{H}^1(0) = \dim \mathcal{L}(K)$. Aplicando a primeira forma do Teorema de Riemann-Roch para o divisor canônico K , obtemos $\dim \mathcal{L}(K) - \dim \mathcal{H}^1(K) = \deg(K) + 1 - \dim \mathcal{H}^1(0)$. Substituindo as igualdades anteriores nesta última, e lembrando que $\deg(K) = 2g - 2$, encontramos $\dim \mathcal{H}^1(0) = g$. Esta igualdade, juntamente a relação encontrada no Corolário 4.3.1, quando substituídas na primeira forma do Teorema de Riemann-Roch fornecem a relação do teorema. ■

Note que na demonstração do teorema anterior, mostramos que, se X é uma curva algébrica, então

$$g = \dim \mathcal{H}^1(0) = \dim \mathcal{L}^{(1)}(0) = \dim \Omega^1(X).$$

Em outras palavras, mostramos que os gêneros topológico, analítico e aritmético de uma curva algébrica são iguais.

Corolário 4.3.2. Seja X uma curva algébrica de gênero g . Então, para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ e todo divisor canônico $K \in \text{KDiv}(X)$, temos

$$\dim |D| - \dim |K - D| = \deg(D) + 1 - g.$$

Corolário 4.3.3. Seja X uma curva algébrica de gênero g . Se $D \in \text{Div}(X)$ é um divisor de grau $\deg(D) \geq 2g - 1$, então $\mathcal{H}^1(D) = \{0\}$ e

$$\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Demonstração. Se $\deg(D) \geq 2g - 1$, então $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) \leq (2g - 2) - (2g - 1) = -1$. Portanto, $\dim \mathcal{H}^1(D) = \dim \mathcal{L}(K - D) = 0$. Logo, informando este valor na Segunda Forma do Teorema de Riemann-Roch, obtemos a relação desejada. ■

CAPÍTULO 5

Aplicações do Teorema de Riemann-Roch

5.1 Primeiras Aplicações

Nesta seção, veremos algumas das mais elementares aplicações do Teorema de Riemann-Roch. Mostraremos que toda curva algébrica pode ser mergulhada num espaço projetivo, e classificaremos as curvas algébricas de gêneros 0, 1 e 2. Também veremos o Teorema de Clifford, o qual fornece uma cota superior para a dimensão do espaço $\mathcal{L}(D)$ quando $\dim \mathcal{L}(K - D) \neq 0$.

5.1.1 Critério para um Divisor ser Muito Amplo

A primeira aplicação do Teorema de Riemann-Roch que apresentamos, fornece um critério para um divisor ser muito amplo.

Proposição 5.1.1. Seja X uma curva algébrica de gênero g . Se $D \in \text{Div}(X)$ é um divisor tal que $\deg(D) \geq 2g + 1$, então D é muito amplo, isto é, o sistema linear completo $|D|$ não possui pontos de base e o mapa holomorfo ϕ_D mergulha X em $\mathbb{P}^n$, onde $n = \dim |D|$, como uma curva projetiva suave de grau igual a $\deg(D)$.

Demonstração. Sejam $p, q \in X$. Como D e $D - p - q$ são divisores de graus no mínimo $2g - 1$, pelo Corolário 4.3.3,

$$\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{L}(D - p - q) = \deg(D - p - q) + 1 - g.$$

Logo, $\dim \mathcal{L}(D - p - q) = \dim \mathcal{L}(D) - 2$. Portanto, pela Proposição 3.4.4, o mapa $\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ é um mergulho de X em $\mathbb{P}^n$. O fato de que a curva projetiva suave $\phi_D(X)$ tem grau igual a $\deg(D)$ já foi visto na Proposição 3.4.5.

A verificação de que o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base é similar. Como D e $D - p$ são divisores de graus no mínimo $2g - 1$, aplicamos novamente o Corolário 4.3.3 para concluir que $\dim \mathcal{L}(D - p) = \dim \mathcal{L}(D) - 1$. Então, pela Proposição 3.3.8, o sistema linear completo $|D|$ é livre de pontos de base. ■

Como consequência imediata da proposição anterior, temos:

Corolário 5.1.1. Toda curva algébrica X pode ser mergulhada num espaço projetivo como uma curva projetiva suave. Se $p \in X$, então $X \setminus \{p\}$ pode ser mergulhada num espaço afim.

Demonstração. Seja g o gênero da curva algébrica X . Tome $p \in X$ arbitrário. Segundo a proposição anterior, o divisor $D = (2g + 1) \cdot p$ é muito amplo, e portando, o mapa holomorfo $\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}^n$, onde $n = \dim |D|$, é um mergulho de X em $\mathbb{P}^n$.

Pelo Lema 3.4.4, existe um divisor hiperplano H em $\mathbb{P}^n$ tal que $\phi_D^*(D) = D = (2g + 1) \cdot p$. Isto significa que a imagem inversa de H é simplesmente o ponto p . Portanto, ϕ_D mergulha $X \setminus \{p\}$ em $\mathbb{P}^n \setminus H \cong \mathbb{C}^n$. ■

5.1.2 Curvas Algébricas de Gênero $g = 0$

Para classificarmos as curvas algébricas de gênero $g = 0$, vamos nos basear no seguinte resultado:

Lema 5.1.1. Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se existe um ponto $p \in X$ tal que $\dim \mathcal{L}(p) > 1$, então X é isomorfa a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Se $\dim \mathcal{L}(p) > 1$, então existe uma função meromorfa não-constante $f \in \mathcal{L}(p)$. Como X é compacta, a função f deve possuir pólos; na verdade, um único e simples pólo em p , pois os pólos de f estão limitados pelo divisor p . Portanto, o mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, associado a função f , tem grau 1. Logo, pelo Corolário 2.3.1, o mapa F é um isomorfismo, ou seja, $X \cong \mathbb{C}_\infty$. ■

Como o gênero de uma curva algébrica é um invariante, a contrapositiva do lema anterior pode ser escrita da seguinte maneira:

Corolário 5.1.2. Se X é uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 1$, então $\mathcal{L}(p) \cong \mathbb{C}$, para todo $p \in X$.

Proposição 5.1.2. Se X é uma curva algébrica de gênero $g = 0$, então X é isomorfa a uma cônica projetiva suave.

Demonstração. Sejam K um divisor canônico sobre X e $p \in X$ um ponto arbitrário. Como $g = 0$, temos $\deg(K - p) = (2g - 2) - 1 = -3 < 0$, e portanto, $\mathcal{L}(K - p) = \{0\}$. Aplicando o Teorema de Riemann-Roch para o divisor p , obtemos

$$\dim \mathcal{L}(p) = \dim \mathcal{L}(K - p) + \deg(p) + 1 - g = 2 > 1.$$

Logo, pelo Lema 5.1.1, X é isomorfa a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$. Agora defina

$$\begin{aligned} G : \quad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C : xz - y^2 = 0 \\ [r : s] &\longmapsto [r^2 : rs : s^2]. \end{aligned}$$

Claramente, G é um isomorfismo. Como a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$ é isomorfa a reta projetiva $\mathbb{P}^1$, concluímos que X é isomorfa a cônica projetiva $C : xz - y^2 = 0$. ■

Ainda no contexto da demonstração da proposição anterior, notemos que o isomorfismo G é uma inspiração geométrica. Seja $L : z = 0$. Claramente $\mathbb{P}^1 \cong L$. Para cada $\ell \in L$, seja M_ℓ a reta passando pelos pontos ℓ e $p = [0 : 0 : 1]$. Pelo Teorema de Bézout, a reta M_ℓ intercepta a cônica C em dois pontos: p e um outro ponto x_ℓ . O isomorfismo G , nada mais é do que a aplicação $\ell \mapsto x_\ell$. A inversa de G também pode ser interpretada geometricamente. Dado $x_\ell \in C$, seja M_ℓ a reta que passa por x_ℓ e p (se $x_\ell = p$, a reta M_ℓ é a reta tangente a C em p). Pelo Teorema de Bézout, as retas M_ℓ e L se interceptam em apenas um ponto ℓ . A inversa de G é a aplicação $x_\ell \mapsto \ell$.

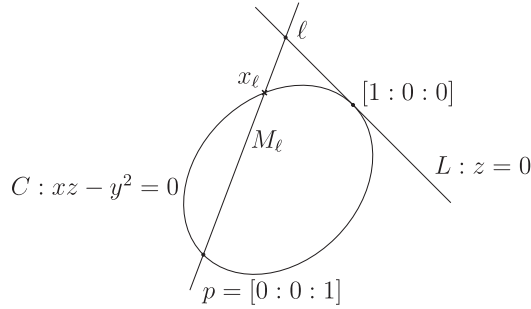


Figura 5.1.1. Interpretação geométrica de um isomorfismo entre $L : z = 0$ e a cônica $C : xz - y^2 = 0$.

5.1.3 Equações de Curvas Algébricas

Sejam X uma curva algébrica e $D \in \text{Div}(X)$ um divisor muito amplo. Então, o mapa holomorfo $\phi_D : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ mergulha X em $\mathbb{P}^n$ como uma curva projetiva suave de grau $\deg(D)$. Identificando X com sua imagem $\phi_D(X)$, podemos supor que $X \subset \mathbb{P}^n$. Nosso objetivo é determinar todas as hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n$ que contém a curva projetiva suave X .

Denote por $\mathcal{P}(n, k)$ o $\mathbb{C}$ -espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k e $n + 1$ variáveis $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $\mathbb{P}^n$. Note que

$$\dim \mathcal{P}(n, k) = \binom{n+k}{k}.$$

Fixe um grau k e um polinômio homogêneo $F_0 \in \mathcal{P}(n, k)$ não identicamente nulo sobre X (por exemplo, $F_0 = x_i^k$, onde x_i é uma coordenada não-nula da curva projetiva suave X). Pelo Lema 3.4.4, os divisores hiperplanos sobre X formam o sistema linear completo $|D|$, e portanto,

$\operatorname{div}(F_0) \sim kD$, pois $\deg(F_0) = k$. Digamos que $\operatorname{div}(F_0) = kD + \operatorname{div}(h)$, onde h é uma função meromorfa sobre X .

Se $F \in \mathcal{P}(n, k)$, então o quociente $f = F/F_0$ é uma função meromorfa sobre X , e os pólos de f estão limitados pelo divisor $\operatorname{div}(F_0)$, isto é, $f \in \mathcal{L}(\operatorname{div}(F_0))$. Defina

$$\begin{aligned} R_k : \mathcal{P}(n, k) &\longrightarrow \mathcal{L}(kD) \\ F &\longmapsto \frac{F}{F_0} h. \end{aligned}$$

Claramente, R_k é uma aplicação linear. Note que $F \in \ker(R_k)$ se, e somente se, F é identicamente nulo sobre X . Portanto, $\ker(R_k)$ consiste de todas as equações de hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$ que contém X . O lema a seguir fornece uma cota inferior para a dimensão deste núcleo.

Lema 5.1.2. Sejam X uma curva algébrica de gênero g , e $D \in \operatorname{Div}(X)$ um divisor muito amplo. Se $\deg(D) \geq g$, então para todo $k \geq 2$, temos

$$\dim \ker(R_k) \geq \binom{n+k}{k} - k \deg(D) - 1 + g.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Núcleo e Imagem, temos

$$\dim \ker(R_k) = \dim \mathcal{P}(n, k) - \dim \operatorname{im}(R_k) \geq \binom{n+k}{k} - \dim \mathcal{L}(kD).$$

Pelo Teorema de Riemann-Roch, obtemos

$$\dim \mathcal{L}(kD) = \dim \mathcal{L}(K - kD) + k \deg(D) + 1 - g.$$

Como $\deg(D) \geq g$, para todo $k \geq 2$,

$$\deg(K - kD) = (2g - 2) - \deg(kD) \leq (2g - 2) - 2g = -2 < 0,$$

e então, pelo Lema 3.3.1, $\dim \mathcal{L}(K - kD) = 0$. Logo, $\dim \mathcal{L}(kD) = k \deg(D) + 1 - g$. O resultado agora segue substituindo esta expressão na primeira desigualdade obtida. ■

É possível mostrar que, quando D é um divisor canônico, a aplicação R_k é sobrejetiva (veja [Gri89, p. 148]). Portanto, no lema anterior, vale a igualdade para a dimensão do núcleo de R_k .

Um resultado devido a Riemann, mostra algo muito além do que apenas determinar as hipersuperfícies que contém uma curva algébrica:

Teorema 5.1.1 (Riemann). Seja X uma superfície de Riemann compacta. Então, X é uma variedade projetiva algébrica, isto é, X pode ser mergulhada num espaço projetivo como um conjunto de zeros de polinômios homogêneos.

Alguns comentários e referências sobre a prova deste teorema podem ser vistos em [Har77, p. 441].

5.1.4 Curvas Algébricas de Gênero $g = 1$

Proposição 5.1.3. Se X é uma curva algébrica de gênero $g = 1$, então X é isomorfa a uma cúbica plana projetiva suave.

Demonstração. Seja $D \in \text{Div}(X)$ tal que $\deg(D) = 2g + 1 = 3$. Pela Proposição 5.1.1, o divisor D é muito amplo, e pelo Corolário 4.3.3,

$$\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g = 3.$$

Portanto, o mapa holomorfo ϕ_D mergulha X em $\mathbb{P}^2$ como uma curva projetiva suave de grau 3. Aplicando o Lema 5.1.2 para $k = 3$ e $n = 2$, obtemos

$$\dim \ker(R_3) \geq \binom{2+3}{3} - 3 \deg(D) - 1 + 1 = 1.$$

Isto significa que existe um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ não-nulo de grau 3 que se anula identicamente sobre X , ou seja, $X \subset C = \{p \in \mathbb{P}^2 \mid F(p) = 0\}$. Afirmamos que este polinômio F é irredutível. De fato, suponha que $F = L_1 L_2 L_3$, onde L_1, L_2 e L_3 são polinômios homogêneos de grau 1. Como F se anula identicamente sobre X , ao menos um dos fatores lineares deve se anular num número infinito de pontos de X , digamos que seja L_1 . Então, como X é compacta, a função meromorfa L_1/x deve ser identicamente nula sobre X , donde segue que X está contida no hiperplano $H : L_1 = 0$, o que é um absurdo, pois X é não-degenerada. Suponha que $F = LG$, onde L é um polinômio homogêneo de grau 1 e G é um polinômio homogêneo irredutível de grau 2. Pelos mesmos argumentos apresentados anteriormente, G deve se anular num número infinito de pontos de X . Então, a função meromorfa G/x deve ser identicamente nula sobre X , donde segue que $X \subset Q = \{p \in \mathbb{P}^2 \mid G(p) = 0\}$. Mas isto não pode ocorrer, pois $\deg(X) = 3 > 2 = \deg(Q)$. Portanto, F é irredutível. Como $X \subset C$ e $\deg(X) = \deg(C)$, temos $X = C$. ■

5.1.5 Sistema Linear Canônico

Seja K um divisor canônico sobre uma superfície de Riemann. O sistema linear completo $|K|$ é chamado de *sistema linear canônico*. Vamos verificar que o sistema linear canônico $|K|$ sobre uma curva algébrica é livre de pontos de base.

Lema 5.1.3. Sejam X uma curva algébrica de gênero $g \geq 1$, e $K \in \text{Div}(X)$. Então, o sistema linear canônico $|K|$ é livre de pontos de base.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.8, o sistema linear canônico $|K|$ é livre de pontos de base se, e somente se, $\dim \mathcal{L}(K - p) = \dim \mathcal{L}(K) - 1 = g - 1$, para todo $p \in X$. Como $g \geq 1$, pelo Corolário 5.1.2, $\dim \mathcal{L}(p) = 1$. Aplicando o Teorema de Riemann-Roch para o divisor p , obtemos

$$1 = \dim \mathcal{L}(p) = \dim \mathcal{L}(K - p) + \deg(p) + 1 - g,$$

donde segue que $\dim \mathcal{L}(K - p) = g - 1$. ■

Na próxima seção veremos o quão importante é um sistema linear canônico.

5.1.6 Curvas Algébricas de Gênero $g = 2$

Seja $h \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio com raízes simples de grau $\deg(h) = 2g + 1 + \epsilon$, onde $\epsilon \in \{0, 1\}$. Seja $k(z) = z^{2g+2}h(1/z)$. Note que k é também um polinômio com raízes simples. Agora, considere as curvas planas afins suaves $X : y^2 - h(x) = 0$ e $Z : w^2 - k(z) = 0$. Entre os abertos $U = \{(x, y) \in X \mid x \neq 0\}$ e $V = \{(z, w) \in Z \mid z \neq 0\}$, temos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}} \right). \end{aligned}$$

A colagem das curvas planas afins X e Z via ϕ , denotada por $\frac{X \coprod Y}{\phi}$, é chamada de *superfície de Riemann hiperelíptica*.

Lema 5.1.4. Com as notações do parágrafo anterior, a colagem $H = \frac{X \coprod Y}{\phi}$ é uma superfície de Riemann compacta de gênero g , e a função meromorfa x sobre X estende-se a um mapa holomorfo $\pi : H \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de grau 2.

Demonstração. A colagem H é uma superfície de Riemann compacta, pois é a união dos subconjuntos compactos

$$\{(x, y) \in X \mid |x| \leq 1\} \quad \text{e} \quad \{(z, w) \in Y \mid |z| \leq 1\}.$$

Pelas equações que definem as curvas X e Y , vemos que π tem grau 2. Então, a imagem inversa de qualquer ponto pelo mapa π são dois pontos, sobre os quais π tem multiplicidade 1, ou apenas um ponto, sobre o qual π tem multiplicidade 2. Se h possui grau par, então os pontos de ramo de π são as $2g + 2$ raízes de h ; se h possui grau ímpar, então os pontos de ramo de π são as $2g + 1$ raízes de h e o ponto ∞ . Em ambos os casos, $\sum_{p \in H} (\text{mult}_p(\pi) - 1) = 2g + 2$. Pela fórmula de Hurwitz, temos

$$\begin{aligned} 2g(H) - 2 &= \deg(\pi)(2g(\mathbb{C}_\infty) - 2) + (2g + 2) \\ &= 2(-2) + (2g + 2) \\ &= 2g - 2. \end{aligned}$$

Portanto, $g(H) = g$. ■

A existência de um mapa holomorfo de grau 2 entre uma superfície de Riemann compacta X e a esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$, é suficiente para identificar X como uma superfície de Riemann hiperelíptica. Formalizando, temos:

Proposição 5.1.4. Seja X uma superfície de Riemann compacta. Se existe um mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de grau 2, então X é uma superfície de Riemann hiperelíptica.

A demonstração desta proposição pode ser vista em [Gri89, p. 137–141] e [Mir97, p. 92].

Agora estamos aptos a classificar as curvas algébricas de gênero $g = 2$. Antes, note que, uma superfície de Riemann hiperelíptica H é uma curva algébrica. De fato, as funções meromorfas x e y são suficientes para separar pontos e tangentes de H .

Proposição 5.1.5. Se X é uma curva algébrica de gênero $g = 2$, então X é hiperelíptica.

Demonstração. Seja K um divisor canônico sobre X , o qual possui grau $2g - 2 = 2$. Como $\dim |K| = g - 1 = 1$ e $|K|$ é livre de pontos de base, pelo Lema 3.3.5, podemos assumir que $K > 0$. Como $\dim \mathcal{L}(K) = g = 2$, existe uma função meromorfa não-constante $f \in \mathcal{L}(K)$. Claramente, o mapa holomorfo $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ associado a f possui grau 2. Portanto, pela Proposição 5.1.4, X é hiperelíptica. ■

5.1.7 Teorema de Clifford

No Corolário 4.3.3, vimos um critério para que $\dim \mathcal{L}(K - D) = 0$, onde K é um divisor canônico. Neste caso, obtemos uma fórmula bastante simples para a dimensão do espaço $\mathcal{L}(D)$. Quando $\dim \mathcal{L}(D) \neq 0$ e $\dim \mathcal{L}(K - D) \neq 0$, o problema de calcular $\dim \mathcal{L}(D)$ pode se tornar uma tarefa árdua. Para este caso especial, o Teorema de Clifford fornece uma cota superior para $\dim \mathcal{L}(D)$.

Definição 5.1.1. Sejam X uma curva algébrica e $K \in \text{KDiv}(X)$. Um divisor efetivo $D \in \text{Div}(X)$ é *especial* se $\dim \mathcal{L}(D) \neq 0$ e $\dim \mathcal{L}(K - D) \neq 0$.

O lema a seguir fornece uma cota superior para a soma das dimensões de dois espaços de funções meromorfas com pólos limitados.

Lema 5.1.5. Sejam X uma superfície de Riemann compacta e $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$. Sejam também, $M, N \in \text{Div}(X)$ tais que $M(p) = \min\{D_1(p), D_2(p)\}$ e $N(p) = \max\{D_1(p), D_2(p)\}$, para todo $p \in X$. Então

$$\dim \mathcal{L}(D_1) + \dim \mathcal{L}(D_2) \leq \dim \mathcal{L}(M) + \dim \mathcal{L}(N).$$

Demonstração. Por definição, temos $M \leq D_i$, $i = 1, 2$. Logo, $\mathcal{L}(M) \subset \mathcal{L}(D_1) \cap \mathcal{L}(D_2)$. Reciprocamente, se $f \in \mathcal{L}(D_1) \cap \mathcal{L}(D_2)$, então $\text{div}(f)(p) \geq -D_i(p) \geq -M(p)$, para todo $p \in X$ e para todo $i = 1, 2$. Portanto, $f \in \mathcal{L}(M)$. Então, $\mathcal{L}(D_1) \cap \mathcal{L}(D_2) = \mathcal{L}(M)$.

Também por definição, $D_i \leq N$, $i = 1, 2$. Logo, $\mathcal{L}(D_i) \subset \mathcal{L}(N)$, $i = 1, 2$. Como $\mathcal{L}(N)$ é um espaço vetorial, temos $\mathcal{L}(D_1) + \mathcal{L}(D_2) \subset \mathcal{L}(N)$. Aplicando a fórmula da dimensão da soma de dois espaços vetoriais para $\mathcal{L}(D_1)$ e $\mathcal{L}(D_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(D_1) + \dim \mathcal{L}(D_2) &= \dim(\mathcal{L}(D_1) \cap \mathcal{L}(D_2)) + \dim(\mathcal{L}(D_1) + \mathcal{L}(D_2)) \\ &\leq \dim \mathcal{L}(M) + \dim \mathcal{L}(N), \end{aligned}$$

como afirmado. ■

O próximo lema aplica o lema anterior para os divisores D e $K - D$, vejamos:

Lema 5.1.6. Seja X uma curva algébrica de gênero g . Se $D \in \text{Div}(X)$ é um divisor tal que $\dim \mathcal{L}(D) \geq 1$ e $\dim \mathcal{L}(K - D) \geq 1$, então

$$\dim \mathcal{L}(D) + \dim \mathcal{L}(K - D) \leq 1 + g.$$

Demonstração. Se $\dim \mathcal{L}(D) \neq 0$ e $\dim \mathcal{L}(K - D) \neq 0$, então os sistemas lineares completos $|D|$ e $|K - D|$ são não-vazios. Tome $D_1 \in |K - D|$ e escreva $|D| = F + |D - F|$, onde F é a parte fixa de $|D|$ e $|D - F|$ é a parte removida de $|D|$. Como $|D - F|$ é livre de pontos de base, pelo Lema 3.3.5, existe um divisor $D_2 \in |D - F|$ tal que $\text{supp}(D_1) \cap \text{supp}(D_2) = \emptyset$. Como $D_2 \sim D - F$, temos

$$\dim \mathcal{L}(D_2) = \dim \mathcal{L}(D - F) = \dim \mathcal{L}(D),$$

sendo que esta última igualdade é verdadeira pelo Lema 3.3.6. Note que $D_1 + D_2 \leq D_1 + D_2 + F \sim (K - D) + D = K$, e portanto,

$$\dim \mathcal{L}(D_1 + D_2) \leq \dim \mathcal{L}(K) = g.$$

Sejam $M, N \in \text{Div}(X)$ tais que $M(p) = \min\{D_1(p), D_2(p)\}$ e $N(p) = \max\{D_1(p), D_2(p)\}$, para todo $p \in X$. Como $\text{supp}(D_1) \cap \text{supp}(D_2) = \emptyset$, temos $M = D_1 + D_2$ e $N = 0$. Reunindo todas estas informações, e utilizando a desigualdade do lema anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(D) + \dim \mathcal{L}(K - D) &= \dim \mathcal{L}(D_2) + \dim \mathcal{L}(D_1) \\ &\leq \dim \mathcal{L}(N) + \dim \mathcal{L}(M) \\ &= \dim \mathcal{L}(0) + \dim \mathcal{L}(D_1 + D_2) \\ &\leq 1 + g. \end{aligned}$$

■

Teorema 5.1.2 (Clifford). Seja X uma curva algébrica. Se $D \in \text{Div}(X)$ é um divisor especial, então

$$2 \dim \mathcal{L}(D) \leq \deg(D) + 2.$$

Demonstração. Seja g o gênero da curva algébrica X . Sabemos do Teorema de Riemann-Roch que $\dim \mathcal{L}(K - D) = \dim \mathcal{L}(D) - \deg(D) - 1 + g$, para todo divisor $D \in \text{Div}(X)$ e para todo divisor canônico $K \in \text{KDiv}(X)$. Substituindo esta igualdade na desigualdade do lema anterior, conclui-se o teorema. ■

Corolário 5.1.3. Seja X uma curva algébrica. Se $D \in \text{Div}(X)$ é um divisor especial, então

$$\dim |D| \leq \frac{1}{2} \deg(D).$$

5.2 Mapa Canônico

5.2.1 Mapa Canônico de uma Curva Algébrica de Gênero $g \geq 3$

Sejam X uma curva algébrica de gênero $g \geq 3$ e $K \in \text{KDiv}(X)$. No Lema 5.1.3, vimos que o sistema linear canônico $|K|$ é livre de pontos de base. Portanto, temos o mapa holomorfo

$$\phi_K : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1},$$

associado a $|K|$. Este mapa é chamado de *mapa canônico* de X .

Proposição 5.2.1. Seja X uma curva algébrica de gênero $g \geq 3$. Então, o mapa canônico de X é um mergulho se, e somente se, X não é hiperelíptica. Se X não é hiperelíptica, então o mapa canônico mergulha X em $\mathbb{P}^{g-1}$ como uma curva projetiva suave de grau $2g - 2$.

Demonstração. Seja $K \in \text{KDiv}(X)$. Pela Proposição 3.4.3, o mapa canônico ϕ_K para X não é um mergulho se, e somente se, existem $p, q \in X$ tais que $\dim \mathcal{L}(K - p - q) \neq \dim \mathcal{L}(K) - 2$. Como o sistema linear canônico $|K|$ é livre de pontos de base, ϕ_K é um mergulho se, e somente se, existem $p, q \in X$ tais que $\dim \mathcal{L}(K - p - q) = \dim \mathcal{L}(K) - 1$. Pelo Teorema de Riemann-Roch, para todos $p, q \in X$,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(K - p - q) &= \deg(K - p - q) + 1 - g + \dim \mathcal{L}(p + q) \\ &= g - 3 + \dim \mathcal{L}(p + q). \end{aligned}$$

Portanto, ϕ_K não é um mergulho se, e somente se, existem $p, q \in X$ tais que $\dim \mathcal{L}(p + q) = 2$. Se isto ocorre, então toda função não-constante $f \in \mathcal{L}(p + q)$ terá um mapa holomorfo associado $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ de grau 2, e então X é hiperelíptica, pela Proposição 5.1.4. Reciprocamente, se X é hiperelíptica e $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tem grau 2, então o *pullback* $p + q$ de ∞ possui grau 2 e $\dim \mathcal{L}(p + q) = 2$. ■

Definição 5.2.1. Sejam X uma curva algébrica não-hiperelíptica e $K \in \text{KDiv}(X)$. Pela proposição anterior, a imagem $\phi_K(X)$ de X pelo mapa canônico ϕ_K é uma curva projetiva suave. A curva $\phi_K(X)$ será chamada de *curva canônica*.

5.2.2 Mapa Canônico de uma Curva Algébrica Hiperelíptica

Na Proposição 5.2.1, vimos que o mapa canônico de uma curva algébrica hiperelíptica não é um mergulho. Vamos investigar o mapa canônico para este caso.

Sejam X uma curva algébrica hiperelíptica de gênero $g \geq 2$ e $K \in \text{KDiv}(X)$. Em geral, pelo Lema 3.1.2, o sistema linear canônico $|K|$ é o conjunto de todos os divisores de 1-formas holomorfas sobre uma superfície de Riemann. É possível mostrar que, se X é hiperelíptica, então

$$\Omega^1(X) = \left\{ \frac{p(x)}{y} dx \mid \deg(p) \leq g - 1 \right\}.$$

Assim, se tomarmos $K = (1/y)dx$, então $\{1, x, x^2, \dots, x^{g-1}\}$ será uma base para $\mathcal{L}(K)$. Logo, a aplicação canônica ϕ_K para a curva hiperelíptica de X de gênero $g \geq 2$ é dada por

$$\phi_K(x) = [1 : x : x^2 : \dots : x^{g-1}].$$

Observe que o mapa canônico ϕ_K é a composição da aplicação $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}^1$, dada por $\pi(x, y) = x$, com o *mapa de Veronese*

$$\begin{aligned} \nu_{g-1} : \quad \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^{g-1} \\ [r : s] &\longrightarrow [r^{g-1} : r^{g-2}s : \dots : rs^{g-2} : s^{g-1}], \end{aligned}$$

A imagem de um mapa de Veronese é chamada de *curva normal racional*. Para esta curva, é possível determinar as equações polinomiais homogêneas que a definem (veja [Har92, p. 11]).

5.2.3 Curvas Algébricas de Gênero $g = 3$

Vamos utilizar o mapa canônico para descrever as curvas algébricas de gênero $g = 3$. Utilizaremos o Lema 5.1.2, para determinar a hipersuperfície que contém a curva algébrica em questão.

Proposição 5.2.2. Seja X uma curva algébrica de gênero $g = 3$. Se X é hiperelíptica, então X é a colagem de duas curvas planas afins suaves, definidas pelas equações $y^2 - h(x) = 0$ e $w^2 - z^{2g+2}h(1/z) = 0$, onde h é um polinômio de grau 7 ou 8 e com raízes simples. Se X é não-hiperelíptica, então o mapa canônico de X mergulha X em $\mathbb{P}^2$ como uma curva projetiva suave de grau 4, definida pelos zeros de uma equação polinomial de grau 4.

Demonstração. Suponha que X é não-hiperelíptica. Pelo Lema 5.1.2,

$$\dim \ker(R_4) \geq \binom{2+4}{4} - 4 \cdot 4 - 1 + 3 = 1.$$

Portanto, existe um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ não-nulo de grau 4 que se anula identicamente sobre X , ou seja, $X \subset Q = \{p \in \mathbb{P}^2 \mid F(p) = 0\}$. Com argumentos análogos aos da demonstração da Proposição 5.1.3, verifica-se que F é irredutível e que $X = Q$. ■

5.2.4 Curvas Algébricas de Gênero $g = 4$

Vamos descrever as curvas algébricas de gênero $g = 4$. Utilizaremos o Lema 5.1.2, para determinar as hipersuperfícies quem contém a curva algébrica em questão.

Proposição 5.2.3. Seja X uma curva algébrica de gênero $g = 4$. Se X é hiperelíptica, então X é a colagem de duas curvas planas afins suaves, definidas pelas equações $y^2 - h(x) = 0$ e $w^2 - z^{2g+2}h(1/z) = 0$, onde h é um polinômio de grau 9 ou 10 e com raízes simples. Se X é não-hiperelíptica, então o mapa canônico de X mergulha X em $\mathbb{P}^3$

como uma curva projetiva suave de grau 6, definida pelos zeros comuns a duas equações polinomiais de graus 2 e 3.

Demonstração. Suponha que X é não-hiperelíptica. Segundo o Lema 5.1.2,

$$\dim \ker(R_2) \geq \binom{3+2}{2} - 2 \cdot 6 - 1 + 4 = 1.$$

Portanto, existe um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z, w]$ não-nulo de grau 2 que se anula identicamente sobre X . Este polinômio é irredutível, pois do contrário, X seria degenerada. Novamente, pelo Lema 5.1.2,

$$\dim \ker(R_3) \geq \binom{3+3}{3} - 3 \cdot 6 - 1 + 4 = 5.$$

Portanto, existem cinco polinômios homogêneos não-nulos de grau 3 que se anulam identicamente sobre X . Já conhecemos quatro destes polinômios homogêneos: xF , yF , zF e wF . Então, existe um polinômio homogêneo $G \in \mathbb{C}[x, y, z, w]$ não-nulo de grau 3, não múltiplo de F , que se anula identicamente sobre X . Sejam $Q = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid F(p) = 0\}$ e $C = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid G(p) = 0\}$. Mostramos que $X \subset Q \cap C$. Afirmamos que existe um hiperplano $H_0 \subset \mathbb{P}^3$ tal que $H_0 \cap Q$ e $H_0 \cap C$ não possuem componentes em comum. Para verificarmos a veracidade desta afirmação, é suficiente provarmos que existe um hiperplano $H_0 \subset \mathbb{P}^3$ tal que $H_0 \cap Q$ é irredutível e $H_0 \cap Q \not\subset H_0 \cap C$. Como $Q \not\subset C$, existe $p \in Q \setminus C$. Assim, se H é um hiperplano passando por p , então $H \cap Q \not\subset H \cap C$. A equação que define tal hiperplano é do tipo

$$a_0x + a_1y + a_2z + a_3w = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq i \leq 3.$$

Podemos supor que $a_0 = 1$. Como $p \in H$, a equação que define H depende apenas de dois parâmetros, os quais serão denotados por λ e μ . Seja $C_H = H \cap Q$. Então C_H é uma cônica em H . Denote por $T_{\lambda\mu}$ a matriz associada à cônica C_H . É fácil ver que, C_H é redutível se, e somente se, $\det(T_{\lambda\mu}) = 0$. Então, se escolhermos λ_0 e μ_0 tais que $\det(T_{\lambda_0\mu_0}) \neq 0$, teremos um hiperplanos H_0 com as propriedades desejadas. Por meio de uma mudança de coordenadas projetivas, podemos supor que $H_0 = \{[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3 \mid w = 0\} \cong \mathbb{P}^2$. Então, $H_0 \cap Q$ e $H_0 \cap C$ são, respectivamente, uma cônica e uma cúbica em $\mathbb{P}^2$ sem componentes em comum. Pelo Teorema de Bézout,

$$\begin{aligned} \#(H_0 \cap (Q \cap C)) &= \#((H_0 \cap Q) \cap (H_0 \cap C)) \\ &= \deg(H_0 \cap Q) \cdot \deg(H_0 \cap C) \\ &= 2 \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

Então, $\deg(Q \cap C) = 6$. Como $X \subset Q \cap C$ e $\deg(X) = 6$, temos $X = Q \cap C$. ■

5.2.5 Forma Geométrica do Teorema de Riemann-Roch

Para obtermos uma descrição de curvas de gênero 5, precisamos interpretar geometricamente o teorema de Riemann-Roch para curvas canônicas.

Definição 5.2.2. Sejam X uma curva canônica de gênero g e $D \in \text{Div}(X)$. O gerado de $D \in \text{Div}(X)$, denotado por $\text{span}(D)$, é a interseção de todos os hiperplanos $H \subset \mathbb{P}^{g-1}$ tais que $\text{div}(H) \geq D$:

$$\text{span}(D) = \bigcap_{\substack{H \subset \mathbb{P}^{g-1} \\ \text{div}(H) \geq D}} H.$$

Se não existe nenhum hiperplano com tal propriedade, definimos $\text{span}(D)$ como sendo todo o espaço projetivo $\mathbb{P}^{g-1}$. A dimensão de $\text{span}(D)$ é a sua dimensão como subespaço linear de $\mathbb{P}^{g-1}$.

Teorema 5.2.1 (Forma Geométrica do Teorema de Riemann-Roch). Seja X uma curva canônica de gênero g . Então, para todo $D \in \text{Div}(X)$ efetivo,

$$\dim |D| = \deg(D) - 1 - \dim \text{span}(D),$$

ou equivalentemente,

$$\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) - \dim \text{span}(D).$$

Demonstração. Aplicando o Lema 3.4.4 para o mapa canônico, vemos que o sistema linear canônico $|K|$ é o conjunto de todos os divisores hiperplanos sobre X . Para $D \in \text{Div}(X)$ fixo, a aplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{divisores hiperplanos } \text{div}(H) \\ \text{tais que } \text{div}(H) \geq D \end{array} \right\} \longrightarrow |K - D|$$

$$K + \text{div}(f) \longmapsto \text{div}(f) + K - D,$$

é claramente uma bijeção. Pela definição do gerado de D , o conjunto dos divisores hiperplanos $\text{div}(H)$ tais que $\text{div}(H) \geq D$ é igual ao conjunto dos divisores hiperplanos $\text{div}(H)$ tais que $\text{div}(H) \geq \text{span}(D)$. Conforme vimos acima, este conjunto é um subespaço linear do espaço projetivo dual $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ de codimensão $\dim \text{span}(D) + 1$. Pelo Corolário 4.3.2,

$$\begin{aligned} \dim \text{span}(D) + 1 &= (g - 1) - \dim |K - D| \\ &= (g - 1) - \dim |D| + \deg(D) + 1 - g \\ &= -\dim |D| + \deg(D). \end{aligned}$$

■

5.2.6 Curvas Algébricas de Gênero $g = 5$

Vamos utilizar a forma geométrica do Teorema de Riemann-Roch para descrevermos as curvas algébricas de gênero $g = 5$.

Definição 5.2.3. Uma curva não-hiperelíptica é chamada de *curva trigonal* se possui um g_3^1 .

Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva trigonal, Q um g_3^1 sobre X e $D = p + q + r$ um divisor de Q . Pela forma geométrica do Teorema de Riemann-Roch,

$$\begin{aligned} \dim \text{span}(D) &= \deg(D) - 1 - \dim |D| \\ &= 3 - 1 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, os três pontos p , q e r são colineares. Então existe uma família de retas parametrizada pelos divisores de Q . A união de tais retas é chamada de *scroll*.

Proposição 5.2.4. Seja X uma curva algébrica de gênero $g = 5$. Se X é hiperelíptica, então X é a colagem de duas curvas planas afins suaves, definidas pelas equações $y^2 - h(x) = 0$ e $w^2 - z^{2g+2}h(1/z) = 0$, onde h é um polinômio de grau 11 ou 12 e com raízes simples. Se X é não-hiperelíptica, então o mapa canônico de X mergulha X em $\mathbb{P}^4$ como uma curva projetiva suave de grau 8. Neste caso, se X é não-trigonal, então X é interseção completa de três hipersuperfícies, cada uma de grau 2. Se X é trigonal, então X está contida numa *scroll*, a qual é interseção de três hipersuperfícies contendo X , cada uma de grau 2.

Demonstração. Suponha que X é não-hiperelíptica. Utilizando o Lema 5.1.2, vemos que

$$\dim \ker(R_2) \geq \binom{4+2}{2} - 2 \cdot 8 - 1 + 5 = 3.$$

Portanto, existem polinômios homogêneos $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ não-nulos e de grau 2 se anulando identicamente sobre X . Sejam $Q_i = \{p \in \mathbb{P}^4 \mid F_i(p) = 0\}$, $1 \leq i \leq 3$.

Então, $X \subset \bigcap_{i=1}^3 Q_i$. Se estes três polinômios definem uma curva de interseção completa,

então, pela Proposição 2.2.3, $X = \bigcap_{i=1}^3 Q_i$. Isto ocorre exatamente quando X é não-trigonal

(a prova deste fato pode ser encontrada em [GH78, p. 535]). Se X é trigonal, então existe um g_3^1 sobre X . Seja Q este sistema linear e $D = p + q + r$ um divisor de Q . Conforme vimos anteriormente, os pontos p , q e r estão sobre uma reta L_D de $\mathbb{P}^4$. Como, em geral, a interseção de uma hipersuperfície de grau 2 e uma reta pode conter no máximo dois

pontos, vemos que X está contida na *scroll* de todas as retas L_D , $D \in Q$, a qual é a interseção $\bigcap_{i=1}^3 Q_i$. ■

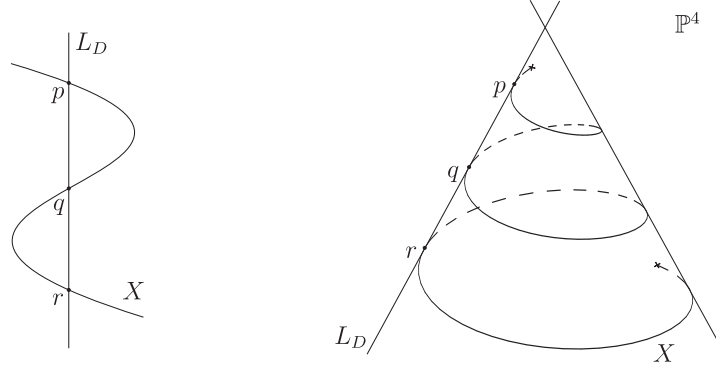


Figura 5.2.1. Curva trigonal X de gênero 5, contida na *scroll* de todas as retas L_D .

5.3 Pontos de Inflexão e Pontos de Weierstrass

Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva projetiva suave, $H \subset \mathbb{P}^n$ um hiperplano e $p \in X$. Diremos que H é *tangente* a X em p se $\text{div}(H) \geq 2 \cdot p$. Se $\text{div}(H) \geq 3 \cdot p$, diremos que H é *tangente inflexionário* a X em p . Se todo hiperplano tangente a X em p for inflexionário, diremos que p é um *ponto de inflexão*.

5.3.1 Números de Lacunas e Pontos de Inflexão de um Sistema Linear

Seja X uma curva algébrica de gênero g . Suponha que X está mergulhada num espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ por meio de um mapa holomorfo associado a um sistema linear completo $|D|$. Vimos no Lema 3.4.4, que o conjunto dos hiperplanos passando por um ponto $p \in X$ com multiplicidade $k \geq 1$ corresponde ao espaço $\mathcal{L}(D - k \cdot p)$. Portanto, o estudo de hiperplanos tangentes e hiperplanos tangentes inflexionários pode ser reduzido ao estudo dos subespaços $\mathcal{L}(D - 2 \cdot p)$ e $\mathcal{L}(D - 3 \cdot p)$ de $\mathcal{L}(D)$, respectivamente. Como estes subespaços correspondem a sistemas lineares, é natural que queiramos generalizar o estudo destes para todos os sistemas lineares $Q \subset |D|$.

Seja $Q \subset |D|$ um sistema linear não-vazio. Então, o subespaço vetorial $V \subset \mathcal{L}(D)$ correspondente a Q também é não-vazio. Para cada $p \in X$, defina

$$V(-n \cdot p) := V \cap \mathcal{L}(D - n \cdot p) = \{f \in V \mid \text{ord}_p(f) \geq -D(p) + n\}.$$

Como $\mathcal{L}(D - n \cdot p) \subset \mathcal{L}(D - (n - 1) \cdot p)$, temos $V(-n \cdot p) \subset V(-(n - 1) \cdot p)$. Note que $V(-n \cdot p) = V(-(n - 1) \cdot p)$ ou $\dim V(-n \cdot p) = \dim V(-(n - 1) \cdot p) - 1$. De fato, aplicando o Teorema de Riemann-Roch para os divisores $D - n \cdot p$ e $D - (n - 1) \cdot p$, vemos que

$$\dim \mathcal{L}(D - (n - 1) \cdot p) - \dim \mathcal{L}(D - n \cdot p) = \dim \mathcal{L}(K - D + (n - 1) \cdot p) - \dim \mathcal{L}(K - D + n \cdot p) + 1 \leq 1.$$

Portanto, $\dim V(-(n - 1) \cdot p) - \dim V(-n \cdot p) \leq 1$, donde segue o afirmado. Note também, que a cadeia de subespaços vetoriais $V(-n \cdot p) \subset V(-(n - 1) \cdot p)$ sempre alcança o subespaço $\{0\}$. De fato, se $k > \deg(D)$ então $\mathcal{L}(D - k \cdot p) = \{0\}$, pois $\deg(D - k \cdot p) < 0$. Logo, $V(-n \cdot p) = \{0\}$, para todo $n \geq k$.

Denotaremos por $Q(-n \cdot p)$ o sistema linear correspondente ao espaço vetorial $V(-n \cdot p)$. Por definição, temos

$$Q(-n \cdot p) = \{E \in Q \mid E \geq n \cdot p\}.$$

Definição 5.3.1. Um inteiro $n \geq 1$ é um *número de lacuna* de Q em p se $V(-n \cdot p) \neq V(-(n - 1) \cdot p)$, ou equivalentemente, se $\dim V(-n \cdot p) = \dim V(-(n - 1) \cdot p) - 1$. O conjunto dos números de lacunas de Q em p será denotado por $G_p(Q)$.

Em termos da dimensão de sistemas lineares, um inteiro $n \geq 1$ é um número de lacuna de Q em p se, e somente se, $\dim Q(-n \cdot p) = \dim Q(-(n - 1) \cdot p)$.

Lema 5.3.1. Seja $Q \subset |D|$ um g_d^r não-vazio sobre uma curva algébrica X . Fixe $p \in X$. Então:

- (a) $\#G_p(Q) = r + 1$; em particular, o conjunto dos números de lacuna de Q é finito;
- (b) $G_p(Q) \subset \{1, 2, \dots, d + 1\}$;
- (c) p é um ponto de base de Q se, e somente se, $1 \notin G_p(Q)$;
- (d) $d + 1 \in G_p(Q)$ se, e somente se, $d \cdot p \in Q$;
- (e) $G_p([0]) = \{1\}$.

Demonstração. (a) Seja V o espaço vetorial correspondente ao sistema linear Q . Como $\dim Q = r$, temos $\dim V = r + 1$. Logo, na cadeia de subespaços vetoriais $V(-n \cdot p) \subset V(-(n - 1) \cdot p)$ podem aparecer no máximo $r + 1$ números de lacunas. Agora, como esta cadeia alcança o subespaço $\{0\}$ e $V(-n \cdot p) = V(-(n - 1) \cdot p)$ ou $\dim V(-n \cdot p) = \dim V(-(n - 1) \cdot p) - 1$, a quantidade de números de lacunas de Q em p deve ser exatamente igual a $r + 1$.

(b) Conforme havíamos observado anteriormente, para todo $k > 1 + d$ temos $V(-k \cdot p) = V(-(k-1) \cdot p) = \{0\}$. Portanto, não existem números de lacunas maiores do que $d+1$.

(c) Pelo Lema 3.3.4, p é um ponto de base do sistema linear Q se, e somente se, $V \subset \mathcal{L}(D-p)$. Isto é equivalente a $V(-p) = V(0)$, o que significa que $1 \notin G_p(Q)$.

(d) O inteiro $d+1$ é um número de lacuna de Q em p se, e somente se, $V(-(d+1) \cdot p) \neq V(-d \cdot p)$. Como $V(-(d+1) \cdot p) = \{0\}$, esta última condição é equivalente a existir $f \in V \cap \mathcal{L}(D-d \cdot p)$ tal que $\text{ord}_p(f) = -D(p) + n$, o que também é equivalente a ter $\text{div}(f) + D = d \cdot p \in Q$.

(e) Segue dos itens (a) e (b). ■

Definição 5.3.2. Seja Q um g_d^r não-vazio sobre uma curva algébrica X . Diremos que $p \in X$ é um *ponto de inflexão* de Q , se $G_p(Q) \neq \{1, 2, \dots, r+1\}$.

Sejam $Q \subset |D|$ um g_d^r não-vazio sobre uma curva algébrica X e $p \in X$. Suponha que V é o espaço vetorial correspondente ao sistema linear Q . Escreva $G_p(Q) = \{n_1 < n_2 < \dots < n_{r+1}\}$. Para cada $i = 1, 2, \dots, r+1$, tome $f_i \in V(-(n_i-1) \cdot p) \setminus V(-n_i \cdot p)$. Por tal escolha, temos $\text{ord}_p(f_i) = n_i - 1 - D(p)$, para todo $i = 1, 2, \dots, r+1$. Claramente, $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ é uma base para o espaço vetorial V . Toda base para o espaço V com estas propriedades será chamada de *base inflexionária* para V com respeito a p . Note que, p não é um ponto de inflexão de Q se, e somente se, existe uma base inflexionária $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ para V , onde $\text{ord}_p(f_i) = i - 1 - D(p)$, para todo $i = 1, 2, \dots, r+1$.

5.3.2 Critério do Wronskiano

Sejam X uma superfície de Riemann e $g_1, g_2, \dots, g_n$ funções meromorfas num ponto $p \in X$. Se ϕ é uma carta local sobre X centrada em p , denotaremos a composição $g_i \circ \phi^{-1}(z)$ simplesmente por $g_i(z)$. O *Wronskiano* das funções $g_1, g_2, \dots, g_n$ com respeito a coordenada local z , denotado por $W_z(g_1, g_2, \dots, g_n)$, é a função

$$W_z(g_1, g_2, \dots, g_n)(z) = \det \begin{pmatrix} g_1(z) & g_1'(z) & g_1^{(2)}(z) & \cdots & g_1^{(n-1)}(z) \\ g_2(z) & g_2'(z) & g_2^{(2)}(z) & \cdots & g_2^{(n-1)}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(z) & g_n'(z) & g_n^{(2)}(z) & \cdots & g_n^{(n-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Claramente, o Wronskiano é uma função meromorfa em $z = 0$. Se $g_1, g_2, \dots, g_n$ são funções holomorfas em p , então o Wronskiano é uma função holomorfa em $z = 0$.

Lema 5.3.2. Sejam X uma curva algébrica e $Q \subset |D|$ um g_d^r não-vazio. Suponha que $V \subset \mathcal{L}(D)$ é o subespaço vetorial correspondente ao sistema linear Q . Fixe $p \in X$ e z uma coordenada local centrada em p . Então, p é um ponto de inflexão de Q se, e somente se,

para qualquer base $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ de V , o Wronskiano $W_z(z^{D(p)}f_1, z^{D(p)}f_2, \dots, z^{D(p)}f_{r+1})(0) = 0$.

Demonstração. Seja $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ uma base de V . Como $V \subset \mathcal{L}(D)$, temos $\text{ord}_p(f_i) \geq -D(p)$, para todo $i = 1, 2, \dots, r+1$. Portanto, para cada $i = 1, 2, \dots, r+1$, a função $g_i = z^{D(p)}f_i$ é holomorfa em p . Note que, p não é um ponto de inflexão se, e somente se, existem combinações lineares $h_j = \sum_{i=1}^{r+1} a_{ij}f_i$, tais que $\{h_1, h_2, \dots, h_{r+1}\}$ é uma base para V , onde $\text{ord}_p(h_j) = j-1$, para todo $j = 1, 2, \dots, r+1$. De fato, esta última condição é equivalente a ter $\{z^{-D(p)}h_1, z^{-D(p)}h_2, \dots, z^{-D(p)}h_{r+1}\}$ uma base inflexionária para V , onde $\text{ord}_p(z^{-D(p)}h_j) = j-1-D(p)$, para todo $j = 1, 2, \dots, r+1$. Fixe um índice k , onde $1 \leq k \leq r+1$. Como g_k é holomorfa em p , a série de Laurent de g_k em torno de $z = 0$ é

$$g_k(z) = g_k(0) + g'_k(0)z + \frac{g_k^{(2)}(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{g_k^{(r)}(0)}{r!}z^r + \text{t. o. m.}$$

Agora é fácil ver que, $\{h_1, h_2, \dots, h_{r+1}\}$ é uma base para V , onde $\text{ord}_p(h_j) = j-1$, para todo $j = 1, 2, \dots, r+1$, se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} g_1(0) & g'_1(0) & g_1^{(2)}(0) & \dots & g_1^{(r)}(0) \\ g_2(0) & g'_2(0) & g_2^{(2)}(0) & \dots & g_2^{(r)}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(0) & g'_n(0) & g_n^{(2)}(0) & \dots & g_n^{(r)}(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

e este determinante é, por definição, o Wronskiano $W_z(g_1, g_2, \dots, g_n)(z)$ avaliado em $z = 0$. ■

Lema 5.3.3. Sejam X uma superfície de Riemann e $p \in X$. Fixe uma coordenada local z centrada em p . Se $g_1, g_2, \dots, g_n$ são funções holomorfas em $z = 0$ e linearmente independentes, então o Wronskiano $W_z(g_1, g_2, \dots, g_n)(z)$ é não identicamente nulo numa vizinhança de $z = 0$.

Corolário 5.3.1. Seja $Q \subset |D|$ um g_d^r não-vazio sobre uma curva algébrica X . Então, existe apenas uma quantidade finita de pontos de inflexão de Q .

Demonstração. Pelo Lema 5.3.2, os pontos de inflexão do sistema linear Q correspondem aos zeros de um Wronskiano de funções holomorfas, o qual também é holomorfo. Logo, o conjunto dos pontos de inflexão do sistema linear Q é fechado. Como X é compacta, para que este conjunto seja finito é suficiente provar sua discrição. Sejam $p \in X$ um ponto de inflexão de Q e U uma vizinhança de p tal que $D(q) = 0$, para todo $q \in U \setminus \{p\}$ (lembre-se de que o suporte de um divisor é um subconjunto discreto de X). Fixe uma base $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ para o espaço vetorial V correspondente a Q . Para cada $i = 1, 2, \dots, r+1$, defina $g_i = z^{D(p)}f_i$. Claramente, $g_1, g_2, \dots, g_n$ são holomorfas em p e linearmente independentes. Se z denota uma coordenada local próximo a p , então

pelo lema anterior, o Wronskiano $W_z(g_1, g_2, \dots, g_{r+1})(z)$ é não identicamente nulo numa vizinhança de $z = 0$, e portanto, pelo Teorema 2.2.3, seus zeros são isolados. Logo, reduzindo a vizinha U de p , se necessário, o ponto p será o único ponto de inflexão de Q em U . ■

Lema 5.3.4. Sejam X uma superfície de Riemann e $p \in X$. Fixe uma coordenada local z próxima a p . Se $g_1, g_2, \dots, g_\ell$ são funções meromorfas sobre X , então $W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(z)(dz)^{\ell(\ell-1)/2}$ é uma $\ell(\ell-1)/2$ -diferencial meromorfa sobre X .

Demonstração. Como $g_1, g_2, \dots, g_\ell$ são funções meromorfas, o Wronskiano $W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(z)$ é uma função meromorfa sobre X , e portanto, define uma $\ell(\ell-1)/2$ -diferencial meromorfa sobre X . Vamos verificar que, se w é uma outra coordenada local próxima a p , então $W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(z)(dz)^{\ell(\ell-1)/2}$ transforma-se em $W_w(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(w)(dw)^{\ell(\ell-1)/2}$ via a função de transição $z = T(w)$. Note que, para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, temos

$$\frac{d^k g_i(T(w))}{dw^k} = T'(w)^k \frac{d^k g_i(z)}{dz^k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{jk}(z) \frac{d^j g_i(z)}{dz^j},$$

onde cada $\alpha_{jk}(z)$ é uma função holomorfa. Portanto, efetuando as convenientes operações elementares nas colunas da matriz $(d^k g_i(T(w))/dw^k)$, vemos que esta é equivalente a matriz $(T'(w)^k d^k g_i(z)/dz^k)$. Logo,

$$\begin{aligned} W_w(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(w) &= \det \left(\frac{d^k g_i(T(w))}{dw^k} \right) \\ &= \det \left(T'(w)^k \frac{d^k g_i(z)}{dz^k} \right) \\ &= T'(w)^{1+2+\dots+(\ell-1)} \det \left(\frac{d^k g_i(z)}{dz^k} \right) \\ &= T'(w)^{\ell(\ell-1)/2} W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(z), \end{aligned}$$

e então, $W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(z)(dz)^{\ell(\ell-1)/2}$ transforma-se em $W_w(g_1, g_2, \dots, g_\ell)(w)(dw)^{\ell(\ell-1)/2}$ via a função de transição $z = T(w)$. ■

Lema 5.3.5. Sejam X uma superfície de Riemann e $D \in \text{Div}(X)$. Se $g_1, g_2, \dots, g_\ell \in \mathcal{L}(D)$, então $W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell) \in \mathcal{L}^{\ell(\ell-1)/2}(\ell D)$.

Demonstração. Pela hipótese, $\text{ord}_p(g_i) \geq -D(p)$, para todo $p \in X$ e todo $i = 1, 2, \dots, \ell$. Fixe $p \in X$ e z uma coordenada local próxima a p . Como $z^{D(p)} g_i$ é holomorfa em p , para todo $i = 1, 2, \dots, \ell$, o Wronskiano $W_z(z^{D(p)} g_1, z^{D(p)} g_2, \dots, z^{D(p)} g_\ell)$ também é holomorfo em p , e portanto, $\text{ord}_p(W_z(z^{D(p)} g_1, z^{D(p)} g_2, \dots, z^{D(p)} g_\ell)) \geq 0$. Como o Wronskiano é uma

função multilinear,

$$W_z(z^{D(p)}g_1, z^{D(p)}g_2, \dots, z^{D(p)}g_\ell) = z^{\ell D(p)}W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell).$$

Calculando a ordem em p dos dois lados desta igualdade, concluímos que $\text{ord}_p(W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell)) \geq -\ell D(p)$. Portanto, $W_z(g_1, g_2, \dots, g_\ell) \in \mathcal{L}^{(\ell(\ell-1)/2)}(\ell D)$. ■

5.3.3 Número de Pontos de Inflexão

Seja $Q \subset |D|$ um g_d^r sobre uma superfície de Riemann compacta X . Suponha que $V \subset \mathcal{L}(D)$ é o espaço vetorial correspondente ao sistema linear Q , e que $B = \{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ e $B' = \{g_1, g_2, \dots, g_{r+1}\}$ são duas bases para V . É fácil verificar que

$$W(f_1, f_2, \dots, f_{r+1}) = \det(M_{B'}^B)W(g_1, g_2, \dots, g_{r+1}),$$

onde $M_{B'}^B$ é a matriz mudança de base de B para B' . Portanto, o lugar dos zeros do Wronskiano não depende da escolha da base do sistema linear. Denotaremos por $W(Q)$ o Wronskiano do sistema linear Q .

Lema 5.3.6. Seja X uma curva algébrica de gênero g . Se $Q \subset |D|$ é um g_d^r não-vazio sobre X , então

$$\deg(\text{div}(W(Q))) = r(r+1)(g-1).$$

Demonstração. Seja $n = r(r+1)/2$. No Lema 5.3.4, vimos que $W(Q) \in \mathcal{L}^{(n)}((r+1)D)$. Então, pelo Lema 3.3.4, existem uma função meromorfa f e uma 1-forma meromorfa sobre X , tais que $W(Q) = f\omega^n$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} \text{ord}_p(W(Q)) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f\omega^n) \\ &= \sum_{p \in X} (\text{ord}_p(f) + n \text{ord}_p(\omega)) \\ &= n \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega) \\ &= n(2g-2) \\ &= r(r+1)(g-1), \end{aligned}$$

visto que $\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0$ e $\sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega) = 2g-2$. ■

Lema 5.3.7. Sejam X uma curva algébrica, $Q \subset |D|$ um g_d^r não-vazio sobre X e $p \in X$. Se $G_p(Q) = \{n_1 < n_2 < \dots < n_{r+1}\}$ e $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ é uma base para o espaço vetorial

$V \subset \mathcal{L}(D)$ correspondente a Q , então

$$\text{ord}_p(W_z(z^{D(p)}f_1, z^{D(p)}f_2, \dots, z^{D(p)}f_{r+1})) = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i).$$

Demonstração. Pela observação feita no início desta subseção, podemos supor que $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ é uma base inflexionária para V com respeito a p , onde $f_i = z^{n_i-1-D(p)} + \text{t.o.m.}$, para todo $i = 1, 2, \dots, r+1$. Então, estamos querendo calcular a ordem do Wronskiano

$$W(z) = W_z(z^{n_1-1} + \text{t.o.m.}, z^{n_2-1} + \text{t.o.m.}, \dots, z^{n_{r+1}-1} + \text{t.o.m.}),$$

no ponto p . Note que, se o coeficiente de menor grau possível do Wronskiano $Y(z) = W_z(z^{n_1-1}, z^{n_2-2}, \dots, z^{n_{r+1}-1})$ é não-nulo, então $\text{ord}_p(Y(z)) = \text{ord}_p(W(z))$. Expandindo o determinante $Y(z)$, vemos que

$$Y(z) = \det(N) z^{\sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i)},$$

onde N é a matriz cuja j -ésima coluna é

$$N_j = \begin{pmatrix} 1 \\ n_j - 1 \\ (n_j - 1)(n_j - 2) \\ \vdots \\ (n_j - 1)(n_j - 2) \cdots (n_j - r - 1) \end{pmatrix}.$$

Efetuada operações elementares nas linhas da matriz N , vemos que esta é equivalente a matriz de Vandermonde $V = (n_j^{i-1})$, cujo determinante é dado por $\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} (n_j - n_i)$. Como os números de lacunas são dois a dois distintos, $\det(N) \neq 0$. Portanto, $\text{ord}_p(W(z)) = \text{ord}_p(Y(z)) = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i)$. ■

O lema anterior motiva a seguinte definição:

Definição 5.3.3. Sejam X uma curva algébrica e Q um g_d^r não-vazio sobre X . O *peso* de um ponto $p \in X$ com respeito a Q , denotado por $w_p(Q)$, é a soma

$$w_p(Q) = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i),$$

onde $G_p(Q) = \{n_1 < n_2 < \dots < n_{r+1}\}$.

Teorema 5.3.1. Sejam X uma curva algébrica de gênero g e $Q \subset |D|$ um g_d^r não-vazio. Então,

$$\sum_{p \in X} w_p(Q) = (r+1)(d+rg-r).$$

Demonstração. Seja $\{f_1, f_2, \dots, f_{r+1}\}$ uma base para o subespaço vetorial $V \subset \mathcal{L}(D)$ correspondente a Q . Pelos Lemas 5.3.7 e 5.3.6, temos

$$\begin{aligned} \sum_{p \in X} w_p(Q) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p \left(W_z \left(z^{D(p)} f_1, z^{D(p)} f_2, \dots, z^{D(p)} f_{r+1} \right) \right) \\ &= \sum_{p \in X} ((r+1)D(p) + \text{ord}_p(W(Q))) \\ &= (r+1)d + r(r+1)(g-1) \\ &= (r+1)(d+rg-r). \end{aligned}$$

■

5.3.4 Pontos de Inflexão de Curvas Planas Projetivas Suaves

Vamos aplicar o Teorema 5.3.1 para calcular o número de pontos de inflexão sobre uma curva plana projetiva suave.

Corolário 5.3.2. Seja X uma curva plana projetiva suave de grau d . Então, X possui $3d(d-2)$ pontos de inflexão, contados com suas multiplicidades: se a reta tangente a X num ponto de inflexão p encontra X com multiplicidade k , então p é contado $k-2$ vezes.

Demonstração. Naturalmente, a curva plana projetiva X está mergulhada em $\mathbb{P}^2$ por meio da aplicação identidade, a qual é holomorfa e está associada ao sistema linear hiperplano Q , isto é, ao sistema linear formado por todos os divisores hiperplanos sobre X . Claramente, Q é um g_d^2 . Pela fórmula de Plücker, o gênero g de X é $g = (d-1)(d-2)/2$. Portanto, pelo Teorema 5.3.1,

$$\sum_{p \in X} w_p(Q) = 3d(d-2).$$

Vejamos como são contados os pontos de inflexão. Seja $p \in X$. Como Q é livre de pontos de base, pelo Lema 5.3.1, o primeiro número de lacuna é $n_1 = 1$. Como uma reta passando por p , em geral não é tangente a X em p , o segundo número de lacuna é $n_2 = 2$. Agora considere o subsistema linear $Q(-2 \cdot p)$. Este subsistema linear é constituído de apenas um divisor hiperplano $\text{div}(H)$, pois X é suave. Se a reta tangente a X em p que define $\text{div}(H)$ encontra X com multiplicidade k , então $\text{div}(H) \in Q(-k \cdot p)$, mas $\text{div}(H) \notin Q(-(k+1) \cdot p)$. Então $Q(-(k+1) \cdot p) = \emptyset$. Portanto, o terceiro e último número de lacuna é $n_3 = k+1$. Assim, o peso de p com respeito a Q é $w_p(Q) = k-2$. ■

5.3.5 Pontos de Weierstrass

Vamos investigar os pontos de inflexão de um sistema linear muito importante: o sistema linear canônico. Conforme observamos no início desta seção, a investigação de tais pontos se resume ao estudo do comportamento inflexionário dos hiperplanos tangentes a uma curva canônica.

Os pontos de inflexão de sistemas lineares canônicos são chamados de *pontos de Weierstrass*.

Corolário 5.3.3. Seja X uma curva algébrica de gênero $g \geq 1$. Então, existem

$$g^3 - g = g(g-1)(g+1)$$

pontos de Weierstrass sobre X , cada um contado com seu peso.

Demonstração. Basta lembrar que $|K|$ é um sistema linear de grau $2g-2$ e dimensão $g-1$, e então, aplicar o Teorema 5.3.1. ■

Seja X uma curva canônica. Por definição, um ponto $p \in X$ é um ponto de Weierstrass do sistema linear canônico $|K|$ se, e somente se, $G_p(|K|) \neq \{1, 2, \dots, g\}$. Verificaremos quando um inteiro n é um número de lacuna de $|K|$ em p . Pelo Teorema de Riemann-Roch,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(K - \ell p) &= (2g - 2 - \ell) + 1 - g + \dim \mathcal{L}(\ell p) \\ &= g - 1 - \ell + \dim \mathcal{L}(\ell p), \end{aligned}$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\dim \mathcal{L}(K - (n-1) \cdot p) - \dim \mathcal{L}(K - n \cdot p) = 1 + \dim \mathcal{L}((n-1) \cdot p) - \dim \mathcal{L}(n \cdot p),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, n é um número de lacuna de $|K|$ em p se, e somente se, $\dim \mathcal{L}((n-1) \cdot p) = \dim \mathcal{L}(n \cdot p)$. Em outras palavras, podemos determinar os números de lacunas de $|K|$ em p analisando a cadeia de subespaços vetoriais

$$\{0\} \subset \mathcal{L}(0) \subset \mathcal{L}(p) \subset \mathcal{L}(2 \cdot p) \subset \dots \subset \mathcal{L}((n-1) \cdot p) \subset \mathcal{L}(n \cdot p) \subset \dots$$

Como $\mathcal{L}((n-1) \cdot p) = \mathcal{L}(n \cdot p)$ ou $\dim \mathcal{L}((n-1) \cdot p) = \dim \mathcal{L}(n \cdot p) - 1$, vemos que n é um número de lacuna de $|K|$ em p se, e somente se, não existe uma função meromorfa f sobre X tal que $\text{ord}_p(f) = -n$.

Note que o complementar do conjunto dos números de lacunas do sistema linear canônico é um semigrupo: se $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$ não são números de lacunas de $|K|$

num ponto p , então $m + n$ também não é um número de lacuna. De fato, se m e n não são números de lacunas, então existem funções meromorfas f e g sobre X , tais que $\text{ord}_p(f) = -m$ e $\text{ord}_p(g) = -n$. Então fg é uma função meromorfa sobre X tal que $\text{ord}_p(fg) = -(m + n)$. Portanto, $m + n$ não é um número de lacuna.

Referências Bibliográficas

- [AM69] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1st edition, 1969.
- [Con86] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1986.
- [Eis04] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1st edition, 2004.
- [For81] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1st edition, 1981.
- [Ful08] William Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. 3rd edition, 2008.
- [GH78] Phillip A. Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1st edition, 1978.
- [Gri89] Phillip A. Griffiths. *Introduction to Algebraic Curves*, volume 76 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1st edition, 1989.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1st edition, 1977.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic Geometry, A First Course*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1st edition, 1992.
- [Hef90] Abramo Hefez. *Introdução à Geometria Projetiva*, volume 46 of *Monografias de Matemática*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1ª edition, 1990.

- [Jän84] Klaus Jänich. *Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2nd edition, 1984.
- [Kir95] Frances Kirwan. *Complex Algebraic Curves*, volume 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 1st edition, 1995.
- [Mar05a] A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*, volume 1. AMS Chelsea Publishing, 2nd edition, 2005.
- [Mar05b] A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*, volume 2. AMS Chelsea Publishing, 2nd edition, 2005.
- [Mar05c] A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*, volume 3. AMS Chelsea Publishing, 2nd edition, 2005.
- [Mir97] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1st edition, 1997.
- [Mun00] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.
- [Sha98a] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry: Schemes and Complex Manifolds*, volume 2. Springer-Verlag, 2nd edition, 1998.
- [Sha98b] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry: Varieties in Projective Space*, volume 1. Springer-Verlag, 2nd edition, 1998.
- [Vai05] Israel Vainsencher. *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. Coleção Matemática Universitária. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2ª edition, 2005.

Índice Remissivo

- 1-forma
 - holomorfa, 62
 - meromorfa, 62
- n -diferencial
 - holomorfa, 66
 - meromorfa, 66
- Pullback*
 - de um divisor, 71
 - de uma 1-forma meromorfa, 64
- Scroll*, 127
- Aplicação
 - de Abel-Jacobi, 78
 - resíduo, 109
- Atlas
 - complexo, 21
 - complexo n -dimensional, 25
 - real C^∞ , 23
- Automorfismo, 48
- Base inflexionária, 130
- Biholomorfismo, 48
- Cúbica retorcida, 37
- Característica de Euler, 55
- Carta
 - centrada num ponto, 16
 - complexa, 16
 - complexa n -dimensional, 24
 - domínio, 16
 - real n -dimensional, 23
- Compatibilidade
 - de cartas complexas, 18
 - de cartas complexas n -dimensionais, 24
 - de cartas reais, 23
- Coordenadas homogêneas, 26
- Curva
 - algébrica, 96
 - canônica, 123
 - de Fermat, 57
 - de interseção completa, 35
 - local, 36
 - plana afim, 30
 - irredutível, 31
 - não-singular, 30, 32
 - suave, 30
 - plana projetiva, 32
 - suave, 32
 - projetiva suave, 60
 - trigonal, 127
- Desomogeneização, 33
- Dimensão
 - de um sistema linear, 84
- Divisor, 67
 - canônico, 69
 - de ramificação de um mapa holomorfo, 72
 - de ramo de um mapa holomorfo, 72
 - de truncamento de Laurent, 102
 - de uma 1-forma meromorfa, 69

- de uma função meromorfa, 68
- dos pólos
 - de uma 1-forma meromorfa, 69
 - de uma função meromorfa, 68
- dos zeros
 - de uma 1-forma meromorfa, 69
 - de uma função meromorfa, 68
- efetivo, 68
- especial, 121
- hiperplano, 73
- imagem inversa, 71
- interseção, 73
- muito amplo, 93
- principal, 68
- Equivalência
 - de atlas complexos, 21
 - de atlas complexos n -dimensionais, 25
 - de atlas reais $\mathcal{C}^\infty$, 23
- Equivalência linear de divisores, 76
- Esfera de Riemann, 22
- Espaço Projetivo
 - n -dimensional, 26
- Estrutura
 - complexa, 21
 - complexa n -dimensional, 25
 - real $\mathcal{C}^\infty$, 23
- Fórmula
 - de Euler, 33
 - de Hurwitz, 55
 - de Plücker, 76
- Função
 - de transição entre cartas, 18
 - holomorfa, 38
 - meromorfa, 42
 - teta, 59
- Gênero
 - analítico, 63
 - aritmético, 109
 - topológico, 24
- Gráfico de uma aplicação, 29
- Grau
 - de um divisor, 68
 - de um mapa, 53
 - de um sistema linear, 84
 - de uma curva plana afim, 30
 - de uma curva plana projetiva, 32
 - de uma curva projetiva suave, 74
- Hiperplano
 - tangente, 128
 - inflexionário, 128
- Homogeneização, 33
- Imagem não-degenerada, 88
- Isomorfismo, 48
- Lema
 - da Aproximação de Séries de Laurent, 98
- Mapa
 - canônico, 122
 - de Veronese, 124
 - holomorfo
 - para $\mathbb{P}^n$, 86
- Mergulho, 88
- Mudança
 - de coordenadas complexas, 17
- Multiplicidade
 - de um mapa holomorfo, 51
 - de uma função meromorfa, 95
- Número de lacuna, 129
- Ordem
 - de uma 1-forma meromorfa, 64
- Ordem de uma função meromorfa num ponto, 44

- Pólo, 41
- Paralelogramo
 - fechado, 28
 - fundamental, 28
- Parte afim de uma curva plana projetiva, 32
- Parte fixa de um sistema linear completo, 86
- Parte removida de um sistema linear completo, 86
- Parte suave
 - de uma curva plana afim, 31
- Peso
 - de pontos de inflexão, 134
- Plano complexo, 22
- Polinômio
 - homogêneo, 32
- Ponto
 - de inflexão, 128
 - de um sistema linear, 130
 - de ramificação, 52
 - de ramo, 52
 - de Weierstrass, 136
- Ponto de base, 84
- Projeção estereográfica, 20
- Resíduo
 - de uma 1-forma meromorfa, 65
- Reta projetiva complexa, 27
- Série de Laurent, 43
- Separação
 - de pontos, 95
 - de tangente, 95
- Singularidade
 - de uma curva plana afim, 30
 - de uma curva plana projetiva, 32
 - essencial, 41
 - removível, 41
- Sistema linear, 84
 - canônico, 119
 - completo, 83
- Subcarta, 17
- Superfície de Riemann, 22
 - hiperelíptica, 119
- Suporte, 67
- Teorema
 - da Dualidade de Serre, 110
 - da Forma Normal Local, 50
 - da Função Implícita, 30
 - para Várias Variáveis, 35
 - de Abel para um toro complexo, 78
 - de Bézout, 75
 - de Clifford, 122
 - de Riemann, 118
 - de Riemann-Roch, 108, 112, 126
 - do Resíduo, 65
- Toro complexo, 29
- Transformação
 - de uma 1-forma meromorfa em outra, 62
 - de uma n -diferencial meromorfa em outra, 66
- Triangularização, 55
- Truncamento de Laurent, 97
- Variedade
 - complexa n -dimensional, 25
 - real C^∞ , 23
- Wronskiano, 130