UNESP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA NA E ALÉM DA SALA DE AULA

Roger Ruben Huaman Huanca

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2006

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA NA E ALÉM DA SALA DE AULA

Roger Ruben Huaman Huanca

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Lourdes de la Rosa Onuchic

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2006

510.07 Huaman Huanca, Roger Ruben
H874r A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula / Roger Ruben Huaman Huanca. – Rio Claro : [s.n.], 2006
247 f. : il., gráfs., fots.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação matemática. 3. Trigonometria. 4. Ensino médio. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

COMISSÃO EXAMINADORA

_____
Prof. Dr. Geraldo Perez

_____
Profa. Dra. Edna Maura Zuffi

_____
Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
(Orientadora)

_____

_____

_____
Roger Ruben Huaman Huanca

Rio Claro, 13 de dezembro de 2006.

Resultado: _____

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Simón e Dionicia, à Hermelinda, madrinha e amiga, que souberam me orientar com firmeza, à minha esposa Marlene e a meus filhos Rubens e Raissa, minhas maiores fontes de inspiração para este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus Criador, pela proteção, e por colocar na minha caminhada pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que a realização deste trabalho fosse possível, sem o qual nada é possível.

À Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, querida amiga, pela compreensão e apoio ao escolher-me como seu orientando e por acreditar que pudéssemos realizar esta pesquisa visando à sala de aula e ver o que há por trás de cada problema - Fazer Matemática? Uma orientadora e educadora que não mede esforços para fazer de nós, professores de Matemática, verdadeiros profissionais da Educação Matemática.

Aos Professores Doutores Geraldo Perez e Edna Maura Zuffi, membros da Comissão Examinadora, pelas valiosas sugestões na época do Exame de Qualificação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro.

À Direção, Coordenação, professores e alunos da turma 2.7 do Ensino Médio da Escola Estadual Joaquim Ribeiro, de Rio Claro, que gentilmente colaboraram para a realização desta pesquisa.

Aos membros do Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas – GTERP, pelas discussões e sugestões sobre a minha pesquisa.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, pelo companheirismo e sugestões. Especialmente a Valdir, amigo, pela dedicação e disponibilidade em reservar parte do seu precioso tempo em meu favor.

Aos meus irmãos, Jaime e Rolando: Graças a eles, nunca estive sozinho mesmo de longe.

ÍNDICE

Introdução 10

CAPÍTULO 1 14

Meu relacionamento com a Educação Matemática

1.1. Introdução 14
1.2. Trajetória de Vida 14

CAPÍTULO 2 20

Resolução de Problemas

2.1. Introdução 20
2.2. Perspectivas históricas sobre Resolução de Problemas no currículo de Matemática 20
2.2.1. Problemas no currículo da matemática escolar 20
2.2.2. Mudanças no papel da Resolução de Problemas 24
2.2.3. O que se pode aprender do passado sobre o conceito de compreensão 26
2.2.4. Temas sobre Resolução de Problemas 28
2.3. Reformas sociais e mudanças no ensino de Matemática no século XX 31
2.4. Três caminhos diferentes de abordar Resolução de Problemas 33
2.4.1. Teorizar sobre Resolução de Problemas 33
2.4.2. Ensinar Matemática para resolver problemas 34
2.4.3. Ensinar Matemática através da resolução de problemas 37
2.5. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas 39
2.5.1. Um ensino eficiente de Matemática 41
2.5.2. Uma aprendizagem eficiente de Matemática 41
2.5.3. Uma Avaliação eficiente de Matemática 42
2.5.4. O "saber fazer" em Matemática 43
2.5.5. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas 43
2.6. O GTERP frente à Resolução de Problemas – Pesquisas existentes 45

CAPÍTULO 3 48

A Metodologia de Pesquisa

3.1. Introdução 48
3.2. A escolha da metodologia da pesquisa 48
3.3. A Metodologia de Pesquisa de Romberg 49
3.3.1. A Educação Matemática como um campo de estudo 49
3.3.2. As Atividades dos Pesquisadores 51
3.3.3. Os métodos usados pelos pesquisadores 58

CAPÍTULO 4 61

Identificando o problema de nossa pesquisa

4.1. Introdução 61
4.2. Nossa pesquisa dentro da Metodologia de Romberg 61
4.2.1. Identificando o Fenômeno de Interesse 61
4.2.2. O Modelo Preliminar 62
4.2.3. Relacionar com Idéias de Outros 64
4.2.3.1. A história da trigonometria 64
4.2.3.2. O ensino da trigonometria nos PCN–Ensino Médio 67
4.2.3.3. O ensino da trigonometria nos PCN_+ – Ensino Médio 69
4.2.3.4. O ensino da Trigonometria nos Standards 2000 72
4.2.3.5. O tratamento da Trigonometria em livros didáticos 76
4.2.3.6. O tratamento da Trigonometria em livros não didáticos 79
4.2.4. Estabelecendo uma pergunta ou conjectura 80

CAPÍTULO 5 82

A resolução do problema da pesquisa: estratégias e procedimentos

5.1. Introdução 82
5.2. Estratégias e procedimentos selecionados para a Pesquisa 82
5.2.1. P_1 em ação - As Instituições com Ensino Médio 83
5.2.2. P_2 em ação – Visita à instituição escolhida 84
5.2.3. P_3 em ação – Encontro com os professores - Alternativas de mudança 86
5.2.4. P_4 em ação – Os participantes, o período e a turma escolhidos 87
5.2.5. P_5 em ação – Termo de Compromisso 87
5.2.6. P_6 em ação – A metodologia adotada na sala de aula 90
5.2.7. P_G em ação – O projeto de trabalho: Trigonometria na e além da sala de aula 94
5.2.7.1. Introdução 94
5.2.7.2. O tema do projeto: o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Trigonometria no Ensino Médio através de resolução de problemas 97
5.2.7.3. Os objetivos deste projeto 99
5.2.7.4. A metodologia como dinâmica de trabalho deste projeto 99
5.2.7.5. A constituição do projeto 101
5.2.7.6. O Roteiro de Atividades 102

CAPÍTULO 6 139

A aplicação do Projeto

6.1. Introdução 139
6.2. O Projeto na e além da sala de aula 140

CAPÍTULO 7 219

Finalização da Pesquisa - Coletar evidências e dar sentido às informações obtidas

7.1. Introdução 219
7.2. Coletar Evidências 219
7.2.1. Técnicas utilizadas na coleta de evidências 219
7.2.1.1. Observações Diretas 220
7.2.1.2. Diário de campo 220
7.2.1.3. Atividades recolhidas por escrito 221
7.2.1.4. Entrevistas 222
7.2.2. Coleta de Evidências 232
7.2.2.1. Evidências coletadas através das entrevistas realizadas 233
7.2.2.2. Evidências coletadas durante o trabalho desenvolvido pela professora .. 235
7.2.2.3. Evidências coletadas durante o trabalho desenvolvido pelo pesquisador 236
7.2.2.4. Evidências coletadas durante a aplicação do projeto..... 237
7.3. Interpretação das Evidências Selecionadas frente à pergunta da pesquisa..... 238
7.4. Conclusões 244

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal verificar se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio. Dentro da Educação Matemática, atualmente, o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas é visto como uma metodologia alternativa, que visa a um trabalho centrado no aluno, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, levando-o a construir um conhecimento matemático através da resolução de problemas. Nessa metodologia, o aluno participa ativamente da construção do conhecimento com a orientação e supervisão do professor que, somente no final desse processo de construção, formaliza as idéias construídas, utilizando notação e terminologia corretas. As unidades temáticas trabalhadas com os alunos foram Conceitos básicos e Trigonometria no triângulo retângulo; A circunferência e arcos trigonométricos e Funções Trigonométricas e resolução de triângulos quaisquer. Constatei que, ao trabalhar com esta metodologia, em sala de aula houve um aumento na motivação, tanto da professora em ensinar quanto dos alunos em aprender. Além disso, em muitas oportunidades, foi possível observar os alunos relacionando suas atividades com alguns tópicos já trabalhados anteriormente. Todos esses fatos, retratados em minha aplicação, reforçam fortemente a relevância desse trabalho. A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é a Metodologia de Romberg.

Palavras-chave: 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática. 3. Ensino Médio. 4. Resolução de Problemas. 5. Trigonometria.

ABSTRACT

This thesis has as main goal the verification if the teaching-learning-assessment of Mathematics Methodology through the “Problem Solving” approach is a good alternative way to the construction of trigonometric concepts and contents by high school students. Currently, within Mathematics Education, teaching-learning-assessment of Mathematics through “problems solving” is seen as an alternative methodology, which aims to work in a student centered way, from problems that might produce new mathematics concepts and contents, leading them to construct mathematics knowledge through problem-solving. Within this methodology, students participate actively in the construction of knowledge with the teacher orientation and supervision who formalize the constructed ideas just at the end of this construction process, using right notation and terminology. The thematic units worked on with the students were: Basic concepts and trigonometry in the right-angled triangle; Circles and trigonometric arcs and Trigonometric functions and solution of problems involving general triangles. I have realized that, working with this methodology, there were a motivation increase in the classroom, both for the teacher to teach, and the students to learn. Furthermore, it was possible to see, in many opportunities, the students connecting their activities with some topics that had already been worked on. All those events happened in my research application, strongly reinforce the relevance of this work. The research methodology adopted in this work is the Romberg’s one.

Key words: 1. Mathematics – learning and teaching. 2. Teaching-Learning-Assessment of Mathematics. 3. High School. 4. Problem Solving. 5. Trigonometry.

Introdução

Em 1988 ingressei no curso de Bacharelado em Matemática na "Universidad Nacional de San Agustín", Arequipa – Peru. Durante esse curso de graduação, para poder me sustentar, tive que trabalhar. Foi, então, que comecei minhas atividades no Magistério. Lecionei em diversos cursinhos e colégios particulares na cidade de Arequipa. Nos cursinhos havia um programa a cumprir rigorosamente e o professor "passava" a matéria e o aluno tinha que, mecanicamente, "aprender" sem saber relacionar ou questionar sobre aquilo que fazia. Desse modo, o aluno esquecia o que aprendia, depois de ser aprovado nos vestibulares ou até mesmo após as provas escolares regulares.

Em 2000, já no Brasil, tive a oportunidade de trabalhar em São Paulo, em vários colégios particulares e, principalmente, na Rede de Escolas Adventistas de São Paulo, como docente, lecionando Matemática e Física para o Ensino Médio. Nesse período, trabalhando com meus alunos, pude perceber a dificuldade que muitos deles tinham em compreender Matemática.

Durante o primeiro semestre de 2003, cursei a Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (UNESP), campus de Rio Claro, na condição de aluno especial, e participei do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, em reuniões que ocorriam às quintas-feiras, no período vespertino, com o objetivo de buscar informações sobre ensino-aprendizagem de Matemática. Fortemente influenciado pela Profa. Lourdes Onuchic e pelas discussões desenvolvidas no GTERP, comecei a acreditar que **a compreensão em Matemática, por parte dos alunos, envolve a idéia de relacionar.** Na verdade, as indicações de que um aluno entende, interpreta mal ou não entende idéias matemáticas específicas, surgem freqüentemente quando ele está resolvendo um problema. Nesse sentido, quando o professor ensina Matemática através da resolução de problemas, ele dá aos seus alunos um meio poderoso de desenvolver sua própria compreensão.

Quando estava lecionando Trigonometria no Triângulo Retângulo para alunos da 1ª série do Ensino Médio, na Escola Adventista de Itapecerica da Serra, SP, tomei conhecimento de um trabalho destinado à construção de um instrumento para medir ângulos, tanto no plano horizontal quanto no plano vertical, o "teodolito". Propus aos alunos que construíssem um teodolito "modelo caseiro" e, em seguida, resolvessem alguns problemas envolvendo razões trigonométricas. A partir dessa construção, pude mostrar aos alunos aplicações da

Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis.

Em 2004 ingressei no curso de Mestrado em Educação Matemática na UNESP-Rio Claro e comecei a pensar no desenvolvimento de meu projeto de pesquisa, que poderia ser realizado numa escola pública ou particular. Qual seria o tema? Na verdade, pretendia ensinar funções trigonométricas através da resolução de problemas para alunos do Ensino Médio. E esse assunto gerou meu fenômeno de interesse: O ensino da Trigonometria através da Resolução de Problemas. Foi criado um modelo preliminar de trabalho, relacionei esse tópico com idéias de outros pesquisadores na área e identifiquei minha pergunta de pesquisa: "O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio?".

Com o problema identificado, criei uma estratégia geral: $\mathbf{E_G}$ e seu correspondente procedimento geral: $\mathbf{P_G}$ para resolver a proposta criada. Para isso, apoiado nas variáveis de meu modelo preliminar, precisei criar estratégias auxiliares e seus correspondentes procedimentos para chegar à criação de um Projeto para trabalhar, de maneira alternativa, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para trabalhar a trigonometria no Ensino Médio em uma Escola Pública de Rio Claro.

Pensando na aplicação desse projeto em sala de aula, fazendo uso de muitos problemas geradores de conceitos trigonométricos, montei um Roteiro de trabalho que foi desenvolvido ao longo de oito semanas nos meses de Fevereiro, Março, Abril e Maio de 2005.

Para o bom andamento do desenvolvimento do trabalho em sala de aula, criei um Termo de Compromisso, constituído por regras que podem orientar professor e aluno no decorrer das atividades estabelecidas para um trabalho organizado e eficiente. Esse documento, preparado para ser obedecido ao longo do ano letivo, tem por finalidade fazer com que o professor possa desenvolver seu trabalho dentro de um ambiente que compreende um conjunto de comportamentos do aluno esperados pelo professor e, de outro lado, um conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno.

Pesquisas apontam que o tema Trigonometria é apresentado aos alunos de maneira alienada das situações cotidianas e, além disso, é estudado através de fórmulas que os alunos usam sem produzir o menor significado a respeito delas.

Ao contrário, com meu projeto, pretendi dar oportunidade aos alunos de desenvolver sua capacidade de pensar frente a situações-problema envolvendo trigonometria.

No trabalho desenvolvido fora da sala de aula, os alunos puderam construir um teodolito "modelo caseiro". Após a construção desse instrumento, os alunos saíram para o pátio da Escola a fim de reconhecer que ele pode ser utilizado para medir ângulos e comprimentos, calcular a altura de objetos no espaço, defícil de medir sem se usar trenas ou réguas. Em outra atividade, os alunos puderam visitar um parque de recreações para observar os movimentos oscilatórios provocados pela movimentação de um balanço e identificà-los com funções trigonométricas.

O trabalho realizado em sala de aula, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, possibilitou que os alunos pudessem construir conceitos e conteúdos trigonométricos. Como parte da metodologia adotada, trabalhar com os alunos num processo cooperativo levou a uma socialização da construção do conhecimento.

No Capítulo 1 – Meu relacionamento com a Educação Matemática – apresento minha trajetória pessoal, escolar e acadêmica, e, também a profissional. Nele, expresso minha opção pela Educação Matemática depois de me envolver com outras possibilidades educacionais.

No Capítulo 2 – Resolução de Problemas – apresento perspectivas históricas sobre Resolução de Problemas no currículo de Matemática e, também, reformas sociais e mudanças no ensino de Matemática no século XX, evidenciando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como um caminho alternativo para possibilitar ao aluno a construção de conceitos e conteúdos matemáticos.

No Capítulo 3 - A Metodologia de Pesquisa – abordo e discuto a opção metodológica que delimita o processo de desenvolvimento de uma pesquisa em Educação Matemática. Entre as várias idéias de metodologia de pesquisa existentes, decidi optar pela Metodologia de Romberg.

No Capítulo 4 – Identificando o problema de nossa pesquisa – situo a pesquisa ao longo do fluxograma apresentado no modelo de Romberg.

No Capítulo 5 – A resolução do problema da pesquisa: estratégias e procedimentos – apresento a construção desse projeto para responder a pergunta de minha pesquisa: "O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através

da Resolução de problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos aluno do Ensino Médio?

No Capítulo 6 – A aplicação do projeto – faço uma descrição de como ocorreu essa aplicação.

No Capítulo 7 – Finalização da Pesquisa – Coletar evidências e dar sentido às informações obtidas – seguindo a Metodologia de Romberg, apresento evidências destacadas durante a aplicação do projeto. Essas evidências são analisadas e interpretadas em termos da pergunta da pesquisa. A partir dessa interpretação, relato resultados obtidos. Conclusões finais são tiradas e sugestões que possam antecipar ações de outros pesquisadores em Educação Matemática são apresentadas.

Respondendo à nossa pergunta de pesquisa podemos dizer que, em vista dos resultados obtidos, acreditamos fortemente que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para possibilitar ao aluno a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos.

Capítulo 1

Meu relacionamento com a Educação Matemática

1.1. Introdução

Neste capítulo inicial, apresentamos nossa trajetória pessoal, escolar e acadêmica, e, também, a profissional.

Expressamos nossa opção pela Educação Matemática depois de nos termos envolvido com outras possibilidades educacionais.

1.2. Trajetória de Vida

Nosso interesse por Matemática teve início já na Primária, no Peru, o equivalente no Brasil, hoje, ao período da 1ª série à 6ª série. Fomos bom aluno e muitas vezes sanávamos as dúvidas de nossos companheiros de classe quanto aos exercícios de matemática propostos pelo nosso professor. Na Secundária, correspondente ao período da 7ª série à 3ª série do Ensino Médio no Brasil, tivemos oportunidade de lecionar aulas particulares de Matemática e de trabalhar com marcenaria, onde ganhamos gosto pela geometria, que envolvia formas geométricas e medidas em diferentes escalas. Essas atividades foram, para nós, prazerosas e continuaram a ser feitas até ingressarmos em Engenharia de Minas na "Universidad Nacional del Altiplano", Puno – Peru, no ano de 1987. Essa universidade pública era a mais próxima de nossa cidade de origem, San Roman, onde não havia Licenciatura nem Bacharelado em Matemática. No ano seguinte, quando estávamos cursando o segundo ano de Engenharia, prestamos vestibular para fazer o Bacharelado em Matemática na "Universidad Nacional de San Agustín", Arequipa – Peru, onde ingressamos. Então mudamos para Arequipa, levando conosco o sonho de um dia lecionar Matemática, ser professor. Também nos formamos como Analista de Sistemas no "Instituto Superior de Ciencias Administrativas y Economicas", Programa de Especialización Superior – ESADE, prevendo a velocidade das mudanças na modernização dos meios de ensino, com o uso da tecnologia.

Durante nosso curso de graduação, nossa decisão se firmava cada vez mais. Para poder nos sustentar, tínhamos que trabalhar. Foi, então, que começamos nossas atividades no

Magistério, onde, ainda como estudante universitário, ensinamos em diversos cursinhos e colégios particulares na cidade de Arequipa. Nos cursinhos tínhamos um programa a cumprir rigorosamente e o professor ´passava` a matéria e o aluno tinha que, mecanicamente, 'aprender' sem saber relacionar ou questionar sobre aquilo que fazia. Aquilo nos incomodava, pois o aluno esquecia o que aprendia, depois de passar nos vestibulares ou até mesmo após as provas escolares regulares.

Antes de vir ao Brasil, já ouvíamos sobre as mudanças na educação brasileira, pois nós tínhamos companheiros peruanos que estavam trabalhando ou estudando na USP, São Paulo. Então, passamos a acreditar que, no Brasil, haveria mais chances de ser um pesquisador. É verdade que os problemas de ensino e aprendizagem no Peru também ocorriam no Brasil, por exemplo a dificuldade dos alunos em aprender Matemática, mas, no Brasil já se discutia sobre eles. Achamos, então, que para nós, seria uma condição oportuna, a de vir a este país.

Quando chegamos ao Brasil, o primeiro contato que tivemos foi com o IME, Instituto de Matemática e Estatística – USP – São Paulo, onde fizemos algumas disciplinas como aluno especial na Pós-Graduação. A partir daí conhecemos pesquisadores da área de Educação Matemática. Fomos indicado por eles para fazer o Mestrado no programa de Pós-graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista – UNESP, campus de Rio Claro, pois este curso, de acordo com eles, vinha ao encontro de nossa grande preocupação com a sala de aula. Isto se nos apresentava devido à:

- falta de interesse, da grande maioria dos alunos com relação à Matemática;
- falta de integração dos alunos em um trabalho colaborativo;
- falta de atenção e participação nas aulas expositivas;
- presença de dificuldades de aprendizagem.

O que estava acontecendo? Nos perguntávamos.

Em 2000 tivemos a oportunidade de trabalhar em São Paulo, em vários colégios particulares e, principalmente, na Rede de Escolas Adventistas de São Paulo, como docente, lecionando Matemática e Física para o Ensino Médio. Nesse período, trabalhando com nossos alunos, pudemos perceber claramente a dificuldade que muitos deles tinham em compreender Matemática.

Durante o primeiro semestre de 2003, cursando a Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, na condição de aluno especial, participamos do GTERP[1], que se reunia em todas as quintas-feiras à tarde, com o objetivo de buscar informações sobre ensino-aprendizagem visando construir base para nosso projeto de pesquisa que, até então, não estava bem definido.

A partir do estudo de livros e artigos, e, em especial, o Livro do Ano 2000 do NCTM[2] – National Council of Teachers of Mathematics – USA, muitas discussões de como fazer Matemática em sala de aula, aprender a pensar sobre o que nela se faz, reconhecer a Matemática que há por trás da resolução de cada problema, e outros assuntos envolvendo o ensino da Matemática e suas dificuldades foram realizadas. Também, dentre os vários materiais nacionais, entregues a nós pela coordenadora do grupo, chamaram-nos a atenção os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN.

A edição especial da Revista Nova Escola - PCN Fáceis de Entender – 5ª a 8ª séries, (1999 p.54) trazia uma matéria que, numa linguagem clara, relatava o questionamento de um aluno sobre a necessidade da Matemática para sua vida futura. Dizia a revista que, para que esse tipo de questionamento não interferisse negativamente no ensino da disciplina, o professor precisava, acima de tudo, inserir o "aprendizado escolar" em sua prática diária. Por estar trabalhando no Ensino Médio, acreditávamos que, ao mesmo tempo que devíamos inseri-lo era necessário dar continuidade ao que já fora visto pelo estudante no Ensino Fundamental. Caso contrário, corria-se o risco de o estudante achar que tudo o que aprendera até então de nada lhe valia. O estudante quando passa para o Ensino Médio tem a expectativa de projetar seu futuro. Desse modo, é pertinente trazer elementos do mundo extra-escolar, inclusive do mercado de trabalho, para suas atividades em sala de aula. Com aplicações diversas, o professor pode ressaltar o fato de a Matemática ser uma porta aberta para muitas áreas do conhecimento e, em especial, a literatura científica e tecnológica.

Nos PCNs Fáceis de Entender - 5ª a 8ª séries, há exemplos práticos de como se adaptar diferentes propostas ao seu dia-a-dia profissional, fazendo a teoria virar prática. O professor Fausto Arnaud Sampaio, de Campinas, dá, nessa revista página 55, dicas de como construir um aparelho sob medida para estudar ângulos. Para nós, essa leitura foi importante pois, nessa ocasião, nós estávamos trabalhando Trigonometria no Triângulo Retângulo com alunos da 1ª série do Ensino Médio. Nesse trabalho propusemos, então, aos alunos das primeiras séries do

[1] GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, coordenado pela profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.
[2] Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América

Ensino Médio do Colégio Adventista de Itapecerica da Serra – SP, que construíssem um teodolito "modelo caseiro" e, em seguida, resolvendo três problemas envolvendo relações trigonométricas, ver a aplicação desse conteúdo ao se construir um teodolito. Pudemos observar que vários objetivos podem ser explorados quando os teodolitos são utilizados, como veremos a seguir.

A Construção do Teodolito "modelo caseiro" e sua aplicação em Matemática

Ao desenvolver esse trabalho com alunos do Ensino Médio, em duas turmas de 1ª série, A e B, utilizamos o conceito da ZDP, zona de desenvolvimento proximal, de Vigotsky, para propor um novo método, de que o "bom aprendizado" é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento e não espera simplesmente que a maturação ocorra.

Para a construção do teodolito utilizamos tesoura; cola; um copo plástico **(a)** com tampa **(b)**; cópia de um transferidor alinhada e colada numa base quadrada de papelão de caixa de supermercado ou de madeira **(c)**; um pedaço de arame fino com cerca de 15 centímetros de comprimento **(d)**; e um pedaço de tubo de antena de TV ou de plástico, com cerca de 20 centímetros de comprimento **(e)**. Cada aluno do grupo construiu seu próprio teodolito.

Segundo o professor Fausto, no artigo da Revista Nova Escola, o teodolito no mercado pode custar entre 10 000 e 20 000 reais. Mas o modelo caseiro, construído pelos próprios alunos, saiu por menos de 2 reais.

Com o teodolito "modelo caseiro" pronto, os alunos partiram para resolver os três problemas dados que eram: medir a altura da caixa de água do Colégio; a altura da parede do prédio escolhido; e a altura de qualquer um dos alunos do grupo, sem usar trenas ou réguas. Um dos alunos levou para a escola um teodolito comercial, capacetes de proteção e trenas. Usamos esse material para conferir os resultados obtidos pelos alunos com seus teodolitos caseiros. Podemos afirmar que os erros cometidos foram, de fato, muito pequenos.

Apresentamos abaixo algumas fotos das atividades dos alunos com o teodolito.

Motivados pela resolução dos problemas dados, os alunos da 1º série do Ensino Médio, A e B, deixaram extravasar um pouco do que aprenderam de trigonometria em sala de aula e partiram em busca da aplicação, no pátio do colégio.

Foi uma experiência espetacular! Enquanto os alunos usavam os teodolitos feitos por eles mesmos, a Matemática ia se mostrando útil para aquilo que projetavam para seu futuro e fazendo acontecer naturalmente, o entusiasmo tomava conta desse momento. Sentimos grande alegria ao ver nossos alunos trabalhando e participando em equipe, desenvolvendo suas habilidades e, para nós, foi uma surpresa, pois não estávamos acreditando no que estava acontecendo.

Nesta aula prática de Matemática, que visava integrar os conceitos trabalhados em sala de aula a partir de um problema gerador, com a história sobre os teodolitos, pesquisa na internet e sua aplicação no dia-a-dia, os alunos puderam aprender e vivenciar valores em busca do conhecimento e da cidadania.

Alguns alunos expressaram-se sobre essa atividade relatando o seguinte:

“ ... certamente a experiência com o teodolito foi muito boa pelo fato de mostrar a muitos a aplicação real da matemática. Assim vários talentos (adormecidos) poderão despertar nos alunos do 1º A ...” (Denis)

“... eu gostei dessa atividade porque consegui aprender trigonometria de uma maneira diferente. E pude perceber que para tudo que vamos fazer, vamos usar a Matemática ....”

(Elaine)

“... para nós foi uma experiência super legal, deixou a nossa aula de Matemática mais interessante. Muitas pessoas pensam que a Matemática é uma coisa chata, que temos que ficar calculando, mas essa aula provou diferente. Ela provou que podemos brincar com a Matemática e mesmo brincando podemos adquirir conhecimento...” (Raissa e Patrícia)

Concluímos que com esse aparelho modelo caseiro foi possível medir ângulos e comprimentos, calcular a altura de objetos no espaço, difícil de medir sem se usar trenas ou réguas. Sentimos que a determinação e a força de vontade podem superar qualquer obstáculo, nos ensinando belas lições práticas de vida.

Quando, em 2003, cursamos a disciplina Conteúdos e Metodologias do Ensino Fundamental e Médio[3], o professor disse na classe que, em sua opinião, era muito interessante trabalhar-se de uma maneira diferenciada com os alunos, ou seja, levá-los a compreender melhor os conceitos trabalhados em sala de aula através da prática e da resolução de problemas. Foi então que, juntando a experiência de Itapecerica e a opinião desse professor, nasceu a idéia do nosso projeto de pesquisa, que poderia ser realizado em uma escola pública ou particular. Qual seria o tema? O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas: um trabalho com alunos do Ensino Médio.

Somente a partir de 2004 iniciamos uma outra fase dessa busca, quando ingressamos no curso de Mestrado em Educação Matemática na UNESP, com a finalidade de realizar um estudo voltado para questões que nos levassem a dar continuidade ao nosso trabalho como pesquisador em Educação Matemática visto que, a partir desse momento, seria possível testar uma proposta usando a resolução de problemas com algumas aplicações na vida diária.

[3] Disciplina ministrada pelo prof. Dr. Geraldo Perez

Capítulo 2

Resolução de Problemas

2.1. Introdução

Resolver problemas faz parte da natureza humana. Bem antes da invenção dos números, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, para tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, medir, quantificar, inferir os elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeia de Matemática.

Ao longo da história, matemáticos, filósofos, psicólogos, educadores e pesquisadores têm reconhecido a importância da resolução de problemas e da existência de diferenças pessoais na capacidade de se chegar a uma solução. A "era da resolução de problemas", fundamentada a partir de recomendação feita no documento "Uma Agenda para a Ação", do NCTM, em 1980, diz que Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80. No início da década de 90, a UNESCO, através da sua declaração mundial sobre Educação para todos, também declara claramente que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita e o cálculo.

Usaremos **R**esolução de **P**roblemas quando nos referirmos à teorização da resolução de problemas (Problem**-**Solving) e **r**esolução de **p**roblemas quando nos referirmos ao processo de resolução do problema (problem solving).

2.2. Perspectivas históricas sobre Resolução de Problemas no currículo de Matemática

2.2.1. Problemas no currículo da matemática escolar

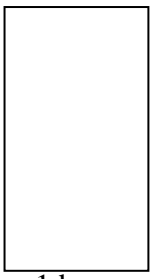
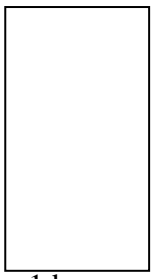
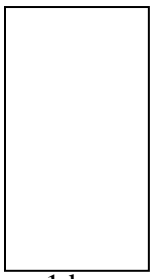
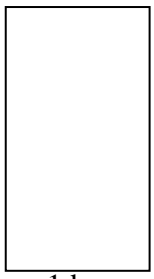
Problemas de matemática têm ocupado um lugar central no currículo de Matemática desde a Antigüidade. Mas, apesar disso, Onuchic (1999, p. 203) diz que a importância dada à Resolução de Problemas é recente e que, somente nas últimas décadas, é que os educadores

matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção.

Stanic & Kilpatrick (1989) descrevem o papel da resolução de problemas matemáticos desde a Antigüidade até o século XX. Eles relatam escritas de antigos Egípcios, Chineses e Gregos, apresentando problemas dessas épocas.

Nesse artigo, eles apresentam problemas como o do Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., de um documento ainda mais antigo e que fazia parte de uma coleção egípcia de problemas matemáticos. Também citam um **problema** dos antigos gregos que é uma primeira versão do problema da cisterna: **"Eu sou um leão de bronze; meus orifícios são meus dois olhos, minha boca e meu pé direito. Meu olho direito enche a cisterna em dois dias, meu olho esquerdo em três e meu pé em quatro. Minha boca é capaz de enchê-la em seis horas. Diga-me quanto tempo será preciso para enchê-la com os quatro juntos?"**.

A resolução desse problema não é apresentada no texto, nem alguma sugestão é feita. Para isso, num encontro do GTERP, esse problema foi colocado, discutido e trabalhado. A solução encontrada, com recursos de hoje, mostra-se assim:

Boca	Olho direito	Olho esquerdo	Pé
6 horas	48 horas	72 horas	96 horas
			
1 hora	1 hora	1 hora	1 hora
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{48}=\left(\frac{1}{8}\,de\,\frac{1}{6}\right)$	$\frac{1}{72}=\left(\frac{1}{12}\,de\,\frac{1}{6}\right)$	$\frac{1}{96}=\left(\frac{1}{16}\,de\,\frac{1}{6}\right)$

Então, em 1 hora, teriam enchido: $\frac{1}{6}+\frac{1}{48}+\frac{1}{72}+\frac{1}{96}=\frac{48+6+4+3}{288}=\frac{61}{288}\,da\ cisterna$

se $\frac{61}{288}\,da\ cisterna$ _____ $1h$

$1=\frac{288}{288}\,da\ cisterna$ _____ x

É proporcional? Sim, todos concordaram. Por quê? Há uma comparação multiplicativa entre as duas grandezas.

Montando a proporção, vem...

$$\frac{\cancel{\frac{61}{288}}}{\cancel{\frac{288}{288}}} = \frac{1h}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{61}{288} = \frac{1h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{288}{61}h$$

Sabendo que 1h = 60 min

1min = 60s

Então 288h | 61

- 244h 4h 43min 16s

44h

x 60min

2640min

- 2623min

17min

x 60s

1020s

- 976s resto 44s

44s 61

Portanto $x = 4h\ 43mim\ 16\frac{44}{61}s$ e a resposta correta seria: Para enchê-la com os quatro orifícios juntos será preciso $4h\ 43mim\ 16\frac{44}{61}s$.

Voltando ao problema original fizemos

Boca { 1 cisterna 6h ; y $\frac{288}{61}h$ } $y = \frac{\frac{288}{61}}{6} = \frac{288}{6 \cdot 61} = \frac{288}{366} \cong 0{,}787 da\ cisterna$

Olho direito { 1 cisterna 48h ; z $\frac{288}{61}h$ } $z = \frac{\frac{288}{61}}{48} = \frac{288}{48 \cdot 61} = \frac{288}{2928} \cong 0{,}098\ da\ cisterna$

Olho esquerdo { 1 cisterna 72h ; w $\frac{288}{61}h$ } $w = \frac{\frac{288}{61}}{72} = \frac{288}{72.61} = \frac{288}{4392} \cong 0{,}066\ da\ cisterna$

Pé { 1 cisterna 96h ; p $\frac{288}{61}h$ } $p = \frac{\frac{288}{61}}{96} = \frac{288}{96.61} = \frac{288}{5856} \cong 0{,}049\ da\ cisterna$

E, adicionando as partes

0,787 *da cisterna* + 0,098 *da cisterna* + 0,066 *da cisterna* + 0,049 *da cisterna* = 1 *cisterna*

O que verifica a validade da resposta.

No grupo questionamos o enunciado, a solução, os diferentes caminhos, identificamos a Matemática que estaria por trás dele, a fim de poder propô-lo em diferentes salas de aula. O conceito de proporcionalidade, como uma idéia unificadora na Matemática, foi discutido em primeiro lugar. Também foram importantes as noções de medida, com estimativas aproximadas e a análise dimensional necessária para se chegar a uma resposta correta.

Stanic & Kilpatrick, 1989, mostram ainda que métodos particulares de resolução de problemas têm também uma longa história. Por exemplo, uma técnica parecida com a Regra da Falsa Posição que aparece no papiro de Ahmes. Eles dizem que Vera Sanford (1927), em seu trabalho "a história de problemas de álgebra", deu um exemplo da regra da falsa posição usando um **problema** do século XV, trabalhado por Phillipo Calandri:

A cabeça de um peixe pesa $\frac{1}{3}$ do peso total dele, seu rabo pesa $\frac{1}{4}$ e seu corpo pesa 30 onças. Qual é o peso total do peixe?

Sanford explicou que a regra da falsa posição foi usada para resolver esse problema do seguinte modo: Se o peso total do peixe fosse 12 onças, então sua cabeça pesaria 4 onças, e o rabo 3 onças e, conseqüentemente, o corpo pesaria 5 onças. Evidentemente o peso total do peixe é o mesmo múltiplo de 12, que 30 é de 5. Então o peixe pesa 72 onças.

Seguindo no tempo, Stanic & Kilpatrick (1989) dizem que até o final do século XIX e começo do século XX encontram-se, nos livros-texto de Matemática, problemas muito semelhantes a esses da Antigüidade. Mas, realmente, eles chamam a atenção de que, nesses exemplos, é assumida uma visão muito limitada sobre aprendizagem de resolução de problemas.

Onuchic (1999) diz que, até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica. Um exemplo disso é o **problema**, apresentado na página 97 do livro-texto de William J. Milne (1897), A Mental Arithmetic:

"Quanto custará arar 32 acres de terra se por um acre pagaremos $3,75?".

Na solução apresentada eles dizem que $3,75 = 3/8.$10,00 e que, se se admitisse o custo $10,00/acre, os 32 acres custariam $320,00. Mas, como 1 acre custava 3/8 $10,00, então, os 32 acres custariam 3/8.$320,00 e, portanto, $120,00.

Observamos que dizer que $3,75 = 3/8.$10,00 não parece fácil de entender, ainda mais quando se fala em aritmética mental. Na verdade eles conduziam essa igualdade fazendo, mais uma vez, o uso do conceito de proporcionalidade $\frac{3,75}{10} = \frac{375}{1000} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{3}{8}$

Depois desse problema ter sido colocado e resolvido vem, no texto, uma lista com outros dez problemas que podem ser resolvidos segundo o mesmo modelo de solução adotado para o primeiro. O texto de G. A. Wentworth, de 1900, intitulado "A Álgebra da nova escola" é bastante semelhante a esse. Clifford B. Upton, num texto intitulado "A utilidade social da Aritmética", de 1939, tentou fazer as crianças pensarem sobre o processo de resolução de problemas ao apresentar problemas sem números, mas ele não foi avante com a discussão, procurando saber o que se pode aprender a partir desses problemas. Brooks (1871), pelo menos, falava sobre "o método para resolver um problema", mas mesmo textos escritos especificamente para professores apresentavam visões limitadas de resolução de problemas.

2.2.2. Mudanças no papel da Resolução de Problemas

Stanic & Kilpatrick (1989) afirmam que, como esses exemplos mostram, os problemas têm uma longa história no currículo de Matemática. Todavia, predominaram basicamente, neste último século, discussões sobre resolução de problemas para o ensino, em que se tem exigido simplesmente, dos estudantes, que resolvam problemas com regras, resolvam problemas específicos e desenvolvam abordagens mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino e a aprendizagem de resolução de problemas estejam agora recebendo uma grande ênfase, os educadores matemáticos não têm examinado completamente questões do porquê nós deveríamos ter que trabalhar resolução de problemas para todos. O papel da resolução de problemas nos currículos de matemática escolar é o resultado de forças conflitantes, ligadas e amarradas por idéias antigas e duradouras sobre os benefícios do conhecimento matemático e para uma variedade de eventos que interagiam e que aconteceram perto do início do século XX.

A principal razão dos educadores matemáticos darem ênfase ao ensino da resolução de problemas é que, até esse século, foi assumido que o conhecimento matemático, de qualquer área da Matemática e não só o que consideraríamos um problema, deveria, de um modo geral, melhorar o pensar das pessoas. Platão disse que "aqueles que por natureza são bons em cálculo são como se pode dizer, naturalmente aguçados em qualquer outro estudo e ... aqueles que são lentos em Matemática, se fossem educados e exercitados neste estudo, não obstante melhorariam e se tornariam mais afiados do que são". Partindo deste pensamento de Platão, Stanic & Kilpatrick aceitaram a idéia de que estudar Matemática melhorará a habilidade das pessoas em pensar, raciocinar, resolver problemas com os quais se confrontarão no mundo real. Num certo sentido, resolver problemas no currículo era simplesmente um meio para levar os estudantes a estudar Matemática. Os problemas eram um elemento dado do currículo de Matemática que contribuía, como todos os outros elementos, para o desenvolvimento de um raciocínio forte.

Nessa mesma perspectiva, Beatriz S. D'Ambrosio (2003) explica que, no final do século XIX, novos pontos de vista sobre aprendizagem começaram a desenvolver uma corrida contrária à da teoria da disciplina mental. Em particular, estudos publicados por Edward L. Thorndike, durante a virada do século XX, puseram descrédito aos conceitos da disciplina mental e da transferência de treinamento. Como os resultados dos estudos de Thorndike tornaram-se mais aceitos, a teoria da disciplina mental perdeu sua força e foi substituída pelo "conexionismo" de Thorndike. Entretanto, vestígios da teoria da disciplina mental permanecem mesmo, até hoje, na crença duradoura de que matérias abstratas, como Matemática, são valiosas porque elas afiam a mente.

Também, na virada do século XX, a Educação Matemática estava começando a ser considerada como um campo legítimo de estudo no nível universitário, por todo os Estados Unidos, com educadores de Matemática como David Eugene Smith e J. W. A. Young argumentando que a Matemática é uma área apropriada de estudo para todos os estudantes. Eles também argumentaram que a Matemática é uma ferramenta indispensável para desenvolver, nos alunos, o poder do raciocínio. Entretanto, Stanic e Kilpatrick (1988) observaram que "é irônico que quando o número de educadores matemáticos profissionais nas faculdades e universidades do país começou a aumentar, o lugar da Matemática no currículo escolar ficou sujeito a ataques". A controvérsia girou ao redor do papel de aplicações no currículo da matemática escolar. De um modo interessante, matemáticos como Felix Klein na Alemanha, John Perry na Inglaterra, e E. H. Moore nos Estados Unidos, argumentaram a favor de um maior papel para as aplicações, mas educadores matemáticos, liderados por

Smith, insistiam dizendo que substituir o estudo da Matemática pura com problemas aplicados seria errado. Obviamente o local de problemas e resolução de problemas no currículo de matemática escolar tem sido um tópico polêmico durante um longo tempo.

Onuchic (1999) enfatiza o trabalho de Felix Klein que, em 1892, se interessou pelo professor que deveria trabalhar Matemática com seus alunos, nas escolas. Começou a escrever monografias em que trabalhava a matemática elementar sob um ponto de vista avançado e, nelas, deixava aos professores a responsabilidade de desenvolver caminhos por ele sugeridos. Klein já sentia a preocupação com um ensino de matemática envolvendo a necessidade de professores melhor preparados.

Onuchic (1999) questiona: Será que as coisas mudaram ao longo do tempo? Não é assim que, na maioria das escolas, ainda hoje, se trabalha resolução de problemas? Há, atualmente, educadores matemáticos preocupados com um ensino-aprendizagem de melhor qualidade? Resolução de problemas se apresenta como um bom caminho para isso?

2.2.3. O que se pode aprender do passado sobre o conceito de compreensão

Lindquist, M. M. (1997), no prólogo do livro 'Making Sense: Teaching and learning mathematics with understanding', cita Thorndike e Dewey dizendo que, durante todo o século XX, psicólogos, educadores e outros pesquisadores têm se preocupado com "compreensão". Thorndike, na psicologia, e Dewey, na filosofia, influenciaram a educação na primeira terça parte do século XX. Dewey alertou que a prática de ensino sem compreensão danificava a habilidade dos alunos em refletir e dar sentido ao que eles estavam fazendo:

> Imitação pura, ditado de passos a serem tomados, exercícios mecânicos podem dar resultados mais rápidos e ainda reforçar prováveis traços como fatais para a força reflexiva. O aluno é obrigado a fazer esta e aquela coisa específica sem nenhum conhecimento de qualquer tipo exceto que, fazendo dessa forma, ele adquire seu resultado mais rapidamente; seus erros são apontados e corrigidos para ele, ele é mantido em pura repetição de certos atos até que eles se tornem automáticos. Mais tarde, os professores se surpreendem com o fato de os alunos lerem com tão pouca expressão e imaginam com tão pouca consideração inteligente os termos de seu problema.
>
> (DEWEY, 1910, 51-52)

Ela, Lindquist, continua dizendo que, para Dewey, aprender era resolver problemas que dependiam de interesses e objetivos do indivíduo. Ele via a aprendizagem como emergente de experiências ou atividades de resolução de problemas. O papel do professor era providenciar essas experiências para o indivíduo.

Esta visão de aprendizagem era freqüentemente contrastada e freqüentemente creditada com a queda do conexionismo de Thorndike. Contudo, reação ao movimento progressista, especialmente as interpretações errôneas de um aprendizado casual, estimulou a comunidade da educação a retornar ao que mais lembrava os princípios de aprendizagem de Thorndike. Entramos num período no qual havia mais ênfase em habilidade de fatos pequenos e isolados – exatamente sobre o que Dewey nos havia alertado.

Nos anos 30 e 40 e começo dos anos 50, como o pêndulo continuava a balançar mais para o lado do aprendizado mecânico, Brownell providenciou uma força alternativa quando escreveu sobre aprendizado significativo:

> De acordo com a teoria significativa, o propósito fundamental de instrução de aritmética é o desenvolvimento da habilidade de pensar em situações quantitativas. A palavra 'pensar' é usada com muita recomendação: a mera habilidade de realizar algumas operações mecanicamente e automaticamente não é o bastante. Crianças devem ser capazes de analisar situações quantitativas reais ou descritas.
>
> (BROWNELL, 1935, p. 28)

Durante os vinte anos seguintes, muitas das pesquisas de Brownell centraram-se num aprendizado com significado e ele propôs as dez seguintes razões para desenvolver o significado enquanto o aluno aprendia:

- Dar autoconfiança de retenção;
- Equipar o aluno com meios para reabilitar rapidamente habilidades que estão temporariamente fracas;
- Aumentar a probabilidade de que idéias e habilidades aritméticas serão usadas;
- Contribuir para facilitar a aprendizagem providenciando uma fundamentação sólida com compreensões transferíveis;
- Reduzir a quantidade de prática repetitiva necessária para completar a aprendizagem;
- Proteger o aluno de respostas que são matematicamente absurdas;
- Encorajar o aprendizado por meio da resolução de problemas ao invés de memorização e prática não inteligentes;
- Prover o aluno com uma versatilidade de ataque que o capacite a substituir igualmente procedimentos eficazes por procedimentos normalmente utilizados, porém não disponíveis no momento;
- Tornar o aluno relativamente independente para que ele encare novas situações quantitativas com confiança;
- Apresentar a matéria numa forma que a torne digna de respeito.

Um dos mais fortes defensores, porém menos conhecido, da teoria significativa durante esse tempo foi Wheat. Em seu livro, *Psychology and Teaching of Arithmetic* (1937), ele defendeu uma interpretação de crenças incidentalistas, dizendo que "aritmética fazia parte do mundo material em que as crianças vivem, e que ela pode ser extraída por elas na proporção de seus contatos com o mundo material".

2.2.4. Temas sobre Resolução de Problemas

Com o objetivo de reforçar as perspectivas históricas sobre resolução de problemas, recorremos novamente a Stanic & Kilpatrick (1989) que colocam três temas gerais que têm caracterizado o papel da resolução de problemas no currículo da matemática escolar: (1) resolução de problemas em contexto; (2) resolução de problemas como habilidade; e (3) resolução de problemas como arte.

1. Resolução de Problemas como contexto

O tema contexto tem pelo menos cinco sub-temas, todos os quais estão baseados sobre a idéia de que problemas e resolução de problemas são meios para alcançar outros fins importantes.

- *Resolução de Problemas como justificativa:* Historicamente, resolução de problemas tem, em parte, sido incluída no currículo de Matemática porque os problemas dão justificativa ao ensino de Matemática como um todo.
- *Resolução de Problemas como motivação:* Este sub-tema está relacionado àquele da justificativa onde os problemas justificam a Matemática que está sendo ensinada. Entretanto, no caso da motivação, a conexão é muito mais específica e a finalidade buscada é a de ganhar o interesse do aluno.
- *Resolução de Problemas como recreação:* Este está relacionado àquele da motivação porque o interesse do aluno está envolvido, mas, no caso da recreação, problemas são dados não tanto para motivar os alunos a aprender como para lhes permitir ter alguma alegria com a Matemática que já aprenderam.
- *Resolução de Problemas como um veículo:* Problemas são freqüentemente dados não apenas para motivar os alunos a se interessarem no ensino direto sobre um tópico, mas como um veículo através do qual um novo conceito ou habilidade deve ser aprendido. Em parte, descobrir técnicas reflete a idéia de que resolver problemas pode ser um veículo para se aprender novos conceitos e habilidades.

- *Resolução de problemas como prática:* Dos cinco sub-temas, resolver problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de Matemática. Neste sub-tema, os problemas não dão justificativa, motivação, recreação, ou servem como veículo, mas visam à prática necessária para reforçar habilidades e conceitos ensinados diretamente.

2. Resolução de Problemas como habilidade

Segundo esses mesmos autores, resolução de problemas é freqüentemente vista como uma das muitas habilidades a serem ensinadas no currículo escolar. De acordo com esta visão, a resolução de problemas não é necessariamente uma habilidade unitária, mas há uma clara orientação de habilidade.

Embora a resolução de problemas como contexto permaneça um tema forte e persistente, a resolução-de-problemas-como-habilidade tem se tornado dominante para aqueles que vêem resolução de problemas como um valioso fim curricular merecendo atenção especial, mais do que como simplesmente um meio para alcançar outros fins ou um inevitável resultado do estudo da Matemática.

Colocar resolução de problemas numa hierarquia de habilidades a serem adquiridas por estudantes conduz a certas conseqüências para o papel da resolução de problemas no currículo. Uma conseqüência é que, dentro da habilidade geral da resolução de problemas, distinções hierárquicas são feitas entre resolver problemas rotineiros e não rotineiros. Isto é, a ação de resolver problemas não rotineiros é caracterizada como um nível de habilidade mais alto a ser adquirido depois da habilidade de resolver problemas rotineiros, o que, por sua vez, é ser adquirido quando os alunos aprendem conceitos e habilidades matemáticos básicos. Esta visão adia a atenção para a resolução de problemas não rotineiros e, como resultado, somente alguns alunos, porque eles realizaram os pré-requisitos, são mesmo expostos a tais problemas. Resolução de problemas não rotineiros torna-se, então, uma atividade para os estudantes especialmente capazes ao invés de servir para todos os estudantes.

3. Resolução de Problemas como arte

Uma mais profunda, mais abrangente visão de resolução de problemas no currículo da matemática escolar - uma visão de resolução de problemas como arte - nasceu do trabalho de George Polya, com sua famosa idéia de heurística, a arte da descoberta, onde matemáticos como Euclides e Pappus, incluindo Descartes, Leibnitz e Bolzano, tinham discutido métodos e regras para descobertas e invenções na matemática, mas suas idéias nunca haviam chegado até o currículo escolar. Isto sobrou para Polya reformular, isto é, ampliar e ilustrar várias

idéias sobre descobertas matemáticas de uma maneira que os professores pudessem entender e aplicar.

A experiência de Polya em ensino e aprendizagem de Matemática levou-o aos seguintes questionamentos: Como surgiu a Matemática? Como as pessoas fazem descobertas matemáticas? Seria melhor se os alunos compreendessem a Matemática trabalhada, depois de eles verem como ela tinha sido feita de início pelo professor, ou seria melhor se eles pudessem sentir algum 'gosto' pela descoberta da Matemática feita por eles mesmos? A experiência de Polya como um matemático o levou a concluir que a face final da Matemática, apresentada dedutivamente em revistas de Matemática e livros texto, não faz justiça ao assunto. Ainda diz que a Matemática acabada requer argumentação demonstrativa, enquanto o processo de fazer Matemática requer raciocínio plausível.

Para Polya, a resolução de problemas era uma arte prática, "como nadar, ou esquiar, ou tocar piano". Um indivíduo aprende tais artes imitando e praticando.

Segundo Polya (1975), segunda edição tradução de Heitor Lisboa de Araújo (1978), "o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajuda demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos mas, de tal modo que, ao estudante, caiba uma parcela razoável do trabalho". Ele reconhece que estas técnicas de resolução de problemas precisam ser ilustradas pelo professor e discutidas pelos alunos, e praticadas de uma maneira não mecânica. Além disso, ele observou que, embora problemas rotineiros possam ser usados para completar certas funções pedagógicas, de ensinar o aluno a seguir um procedimento específico ou usar a definição corretamente, é somente através do uso prudente de problemas não rotineiros que os alunos podem desenvolver suas habilidades de resolver problemas.

Na formulação de Polya, o professor é a figura chave. Somente um professor sensível consegue determinar o tipo certo de problema a ser trabalhado e providenciar a quantidade apropriada de orientação. Porque o ensino também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino de resolução de problemas.

Hoje, há ainda aqueles que seguem o trabalho de Polya, mas que reduzem, a grosso modo, a heurística a habilidades de procedimento, quase tomando uma visão algorítmica de heurística (isto é, heurísticas específicas ajustadas a situações específicas). Uma heurística torna-se uma habilidade, uma técnica, mesmo, paradoxalmente, um algoritmo. De certa forma, resolução de problemas como arte fica reduzida à resolução de problemas como

habilidade quando tentativas são feitas para implementar idéias de Polya enfocando os passos e colocando-os em livros-texto.

Dos três temas apresentados por Stanic & Kilpatrick: contexto, habilidade e arte, vemos resolução de problemas como arte como o mais defensável, o mais justo e o mais promissor. Mas, ao mesmo tempo, é o tema mais problemático porque é o mais difícil de operacionalizar em livros-texto e em salas de aula.

2.3. Reformas sociais e mudanças no ensino de Matemática no século XX

Com permissão das autoras Onuchic, L.R. e Allevato, N.S.G. (2004), visando facilitar sua leitura e esclarecer os leitores sobre os caminhos percorridos pela Resolução de Problemas, transcrevemos aqui parte do artigo intitulado "Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas".

No início do século XX, o ensino de Matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado importante. Alguns anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender com compreensão, deviam entender o que faziam. Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não. Nessa época começou-se a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática mas, nas décadas de sessenta e setenta, o ensino de Matemática no Brasil e em outros países do mundo foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Essa reforma que, como as outras, não contou com a participação de professores de sala de aula, deixava de lado as anteriores. Ela apresentava uma Matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Nessa reforma o ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas.

Todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado. Os questionamentos continuavam: Estariam essas reformas voltadas para a formação de um cidadão útil à sociedade em que vivia? Buscavam elas ensinar Matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático? Os anos setenta marcaram uma era de crescimento preocupada com um currículo de Matemática projetado, inicialmente,

para um aumento no escore de testes de habilidades básicas, também chamados testes de habilidades computacionais.

Concomitantemente a isso, no início da década de 70, tiveram início investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares. A importância dada à resolução de problemas é, portanto, recente e somente nessas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização da Educação Matemática, em termos de resolução de problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam como um conjunto de fatos, como o domínio de procedimentos algorítmicos ou como um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. No fim dos anos 70, a resolução de problemas emerge, ganhando espaço no mundo inteiro.

Discussões no campo da Educação Matemática, no Brasil e no mundo, mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que poderiam levar a melhores formas de se ensinar e aprender Matemática.

Nos Estados Unidos, o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*)[4] respondeu àquela preocupação com uma série de recomendações para o progresso da Matemática escolar nos anos 80, no documento "*An Agenda for Action*" (NCTM, 1980). Foram chamados para colaborar neste trabalho todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo massivo, buscar uma melhor Educação Matemática para todos. A primeira dessas recomendações diz "resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 80". Havia, entre os educadores matemáticos, um interesse crescente em fazer da resolução de problemas um foco do currículo de matemática escolar.

[4] O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos. Tem mais de 125 000 membros e é a principal organização para professores de matemática desde K-12 (Pré-primário até a Escola Secundária).

2.4. Três caminhos diferentes de abordar Resolução de Problemas

Segundo Onuchic (1999, p. 206), durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material passou a ajudar os professores a fazer da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Porém, não deu o tipo de coerência e a direção necessária a um bom resultado porque havia pouca concordância na forma pela qual este objetivo era encarado. Essa falta de aceitação ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de "resolução de problemas ser o foco da matemática escolar".

Schroeder & Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes de abordar Resolução de Problemas, que ajudam a refletir sobre essas diferenças: (1) ensinar sobre Resolução de Problemas matemáticos; (2) ensinar para resolver problemas de Matemática; e (3) ensinar Matemática através da resolução de problemas. Eles ressaltam que, embora na teoria esses três caminhos de trabalhar Resolução de Problemas possam ser separados, na prática eles se superpõem e podem acontecer em várias combinações e seqüências.

2.4.1. Teorizar sobre Resolução de Problemas

Teorizar sobre Resolução de Problemas matemáticos significa trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, isto é, teorizar sobre Resolução de Problemas mostrando como, a partir da Matemática Moderna, o movimento de reforma se apresentou.

O desencanto de professores e educadores matemáticos com o fracasso da Matemática Moderna levou-os a buscar outras alternativas para o ensino de Matemática. Assim, passaram a trabalhar com heurísticas, e o modelo de resolução de problemas de Polya ou alguma sua variação foram considerados.

Para Schroeder & Lester (1989), o professor que ensina sobre resolução de problemas realça o modelo de Polya de 1945, ou alguma variação menor dele. Brevemente, esse modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos: compreender o problema; elaborar ou traçar um plano; levar avante esse plano e olhar de volta o problema original, para analisar a validade da solução encontrada. Aos estudantes explicitamente são ensinadas essas fases que, de acordo com Polya, experientes

resolvedores de problemas as usam quando estão resolvendo problemas matemáticos e eles são encorajados a tornarem-se conscientes de seu próprio progresso, através destas fases, quando eles mesmos resolvem problemas.

Problemas no ensino, que existem desde os primórdios da civilização como já foi dito antes, têm sido foco de pesquisas na área da Educação Matemática em muitos países. Krulik e Reys, em 1980, organizaram e lançaram o livro do ano do NCTM, inteiramente dedicado a temas relacionados à Resolução de Problemas, intitulado *Problem Solving in School Mathematics,* e traduzido para o português por Hygino H. Domingues e Olga Corbo, em 1998, com o nome de "A Resolução de Problemas na matemática escolar", apresentando 22 diferentes artigos. Percebe-se, em quase todos os artigos desse livro, a forte ênfase que se dava às heurísticas como forma de guiar os alunos na resolução de problemas.

É interessante notar que, mesmo antes dessa tradução, nosso grupo GTERP, desde 1992, já trabalhava com uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, com compreensão, através da resolução de problemas.

No livro de Krulik e Reys, o primeiro artigo é um texto de George Polya, de 1949, cujas idéias geraram discussões sobre a questão da resolução de problemas em Matemática, com seu clássico *How to Solve It*, traduzido, no Brasil, como "A Arte de Resolver Problemas". Nesse artigo, Polya caracteriza o homem como "o animal que resolve problemas". Diz também que a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas e que a Matemática é o único assunto, na escola secundária, em que o professor pode propor e os alunos podem resolver problemas em nível científico. Podemos notar que, ao longo de todo o livro, sente-se a forte influência que suas idéias apresentadas exerciam sobre as orientações para a implementação da resolução de problemas em sala de aula. O livro "A Arte de Resolver Problemas" pode ser considerado, talvez, o primeiro importante texto entre os trabalhos com normas essencialmente voltadas a ensinar sobre resolução de problemas. Polya teve, e ainda tem, muitos seguidores.

2.4.2. Ensinar Matemática para resolver problemas

Alba Thompsom (1989) afirma que resolução de problemas deve ser tratada como um novo conteúdo a ser ensinado. Nesse trabalho transparece a expressão da frustração que resultou do ensino da Matemática Moderna. Iniciava-se uma fase em que novas linhas poderiam promover mudanças e via-se a resolução de problemas como uma possível solução para os problemas encontrados no ensino da matemática. Thompsom, nesse artigo, trata das

dificuldades em relação a esse tema e reitera as idéias de Schoenfeld (1985), onde razões para a constatação da complexidade de aprender e ensinar resolução de problemas é devida às muitas interconexões que o aprendiz precisa fazer entre:

- seus recursos matemáticos (por exemplo o conhecimento de conceitos, fatos e procedimentos);
- heurísticas (métodos e regras de invenção e descoberta matemática);
- controle dos mecanismos necessários para gerenciar esses recursos e processos;
- crenças dos alunos sobre a natureza da Matemática, em geral, e sobre a resolução de problemas em particular;
- a variedade de fatores afetivos e contextuais que envolvem a resolução de problemas.

A autora ainda fala sobre a busca de respostas à seguinte questão: como ajudar os alunos em cada uma das áreas acima e como ajudá-los a estabelecer a necessária interconexão entre elas?

Segundo Schroeder & Lester (1989), 'ao ensinar para resolver problemas de Matemática', o professor se concentra sobre modos em que a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução tanto de problemas rotineiros como de não rotineiros. Embora a aquisição do conhecimento matemático seja de primeira importância, o propósito essencial para aprender Matemática é ser capaz de usá-la. Portanto, aos estudantes são dados muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre o que eles estão estudando e muitas oportunidades para aplicar aquela Matemática estudada na resolução de problemas. Posteriormente, o professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado com a habilidade dos estudantes em saber transferir o que eles aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte ligação desta abordagem pode afirmar que a única razão para aprender Matemática é ser capaz de usar o conhecimento ganho para resolver problemas.

Um grande risco da adoção desse aspecto é que ele pode levar a ver a resolução de problemas apenas como uma atividade que os alunos só podem realizar depois da introdução de um novo conceito ou depois de praticar habilidades de cálculo.

Como objetivo de reforçar essas idéias, recorre-se a Van de Walle (2001) que dá a esse tipo de caminho o nome de paradigma do *teach-then-solve* (ensine–então–resolva) onde há uma nítida separação entre o que é ensinar Matemática e o que é resolver problemas. Ainda, ele afirma que, nesse caminho, tradicionalmente o professor inicia o trabalho apresentando o novo conteúdo, e mostrando, em seguida, algumas aplicações através de exemplos. Depois o professor dá uma imensa lista de exercícios de fixação onde o aluno deverá aplicar o novo conhecimento. O aluno não fixando bem os conceitos, pois tem somente uma absorção

passiva de idéias, depende exclusivamente da ação do professor. Este caminho de ensino está separado do aluno e de seu aprendizado. A aprendizagem, segundo Van de Walle, deveria começar "onde o aluno está", isto é, partindo do que ele já sabe.

Brasil (1964) define este modo de ensinar como o "ensino atomístico", isto é, que consiste em empregar muitas aulas no preparo dos "átomos" necessários para a apresentação posterior de um problema. Ainda diz que as vantagens que se esperam do ensino "atomístico" são apenas aparentes, uma vez que os alunos, no momento de empregarem os 'elementos', geralmente fracassam, pela falta de estabilidade dos conhecimentos adquiridos sem funcionalidade inteligível.

Nessa mesma linha de investigação, Brasil (1964) explica que tradicionalmente o problema ou atividade é dado pelo professor na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando novamente, porém, para a história, notamos que o **problema** antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas. Ele questiona assim: Por que no início da Matemática, especialmente, invertemos a ordem natural das coisas? E ele mesmo responde dizendo que o professor costuma iniciar expondo a teoria que, historicamente, se estruturou na resolução de uma seqüência de problemas, e a desliga dos mesmos para ressaltar-lhe apenas os aspectos lógicos; depois, ele diz que se mostra sua aplicação na resolução de alguns daqueles problemas que, então, passam a ser empregados como meio de verificação, para ver se o aluno aprendeu a aplicar a teoria, ou como exercício para a fixação da aprendizagem.

Nesse período um outro aspecto enfatizado por Onuchic (1999), no ensino de Matemática, ao dizer que a resolução de problemas foi fundamentada na aplicação e no domínio de estratégias, é o fato de que muitos entenderam que esse posicionamento seria atingido pela repetição. No ensino por repetição, o aluno era submetido a uma série de listas de problemas, semelhantes uns aos outros, através dos quais o aluno treinava uma determinada técnica ou estratégia de resolução. Em tais listas, constituídas de problemas do mesmo tipo e que podiam ser resolvidos de modo semelhante, os alunos visavam promover a fixação do caminho adotado para chegar à solução. Ademais, se o aluno repetisse, nas avaliações, o que o professor havia feito, concluía-se que o aluno tinha aprendido. Ainda, nesse raciocínio, Onuchic esclarece esse aspecto, dizendo que a repetição de uma estratégia ou técnica operatória, mesmo que realizada corretamente, não garante a compreensão do conceito ou conteúdo matemático envolvido.

2.4.3. Ensinar Matemática através da resolução de problemas

No item anterior, foi dito por Brasil (1964) que, no ensino "atomístico", os "átomos" são preparados antes da apresentação de um problema, mas que o problema, poderia ter sido apresentado desde o começo, em seus casos mais simples, dando oportunidade ao estudo dos "átomos em funcionamento no todo", e esse seria um caminho diferenciado para a aprendizagem.

Para proceder assim, seria necessário ordenar a apresentação dos problemas de modo que as dificuldades fossem crescendo lentamente, forçando a aquisição de cada elemento, um a um, sempre em funcionamento dentro da resolução de problemas.

Atualmente, a partir da última década do século XX, somos confrontados com uma outra mudança no foco do uso da Resolução de Problemas no currículo escolar: ensinar Matemática através da resolução de problemas. Neste sentido D'Ambrósio, B. S. (2003) destaca um capítulo, do Livro do Ano de 1989 - NCTM, onde Schroeder e Lester (1989), insistindo, disseram que, desde que o papel da resolução de problemas é desenvolver a compreensão de Matemática nos alunos, ensinar via resolução de problemas é a abordagem mais apropriada. Eles argumentaram que proponentes desta abordagem consideram resolução de problemas não como um tópico, um padrão, ou parte de conteúdo, mas uma postura pedagógica. Hoje, este enfoque é referido como ensinar Matemática através da resolução de problemas. A influência das visões de Polya (1981) e de Dewey (1933), citado por D'Ambrósio, B. S. (2003, p.46) na resolução de problemas como arte são evidentes nesta visão do papel da resolução de problemas no currículo escolar.

Segundo D'Ambrósio, esta nova visão também aproxima o tema da resolução de problemas, de Stanic e Kilpatrick, como um veículo. Na verdade, problemas que servem como veículos para introduzir ou desenvolver conceitos de Matemática começaram a aparecer em materiais curriculares de Matemática nos anos 90. Proponentes do ensino da Matemática através da resolução de problemas baseiam sua pedagogia na noção de que alunos que confrontam situações problemáticas usam seus conhecimentos existentes para resolver aqueles problemas e, no processo de resolução de problemas, constroem novo conhecimento e nova compreensão. Para D'Ambrosio (2003), pesquisas recentes em psicologia e ciência cognitiva descrevem a aprendizagem como o processo de dar sentido às idéias do indivíduo com base em suas compreensões. Teorias que descrevem como as pessoas aprendem, ou constroem conhecimento, servem como base para ensinar Matemática através da resolução de problemas.

Para Schroeder e Lester (1989), ao ensinar Matemática através da resolução de problemas, os problemas são avaliados não somente como um propósito para aprender Matemática mas, também, como um meio importante de fazer isso. O ensino de um tópico matemático começa com uma situação problema que incorpora aspectos chaves do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de aprender Matemática é transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. A aprendizagem de Matemática, neste modo, pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito matemático ou da técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos).

Por isso o ensino de Matemática através da resolução de problemas é importante. Ele nos oferece uma experiência em profundidade, uma oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de conhecer as capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, nos processos de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado.

Pensar matematicamente é um dos aspectos destacados também no estudo comparativo apresentado por Schroeder e Lester. Esses mesmos autores construíram um diagrama, a seguir apresentado, para mostrar como se realizam os processos de pensamento quando problemas não rotineiros são resolvidos e quando o ensino através da resolução de problemas é utilizado.

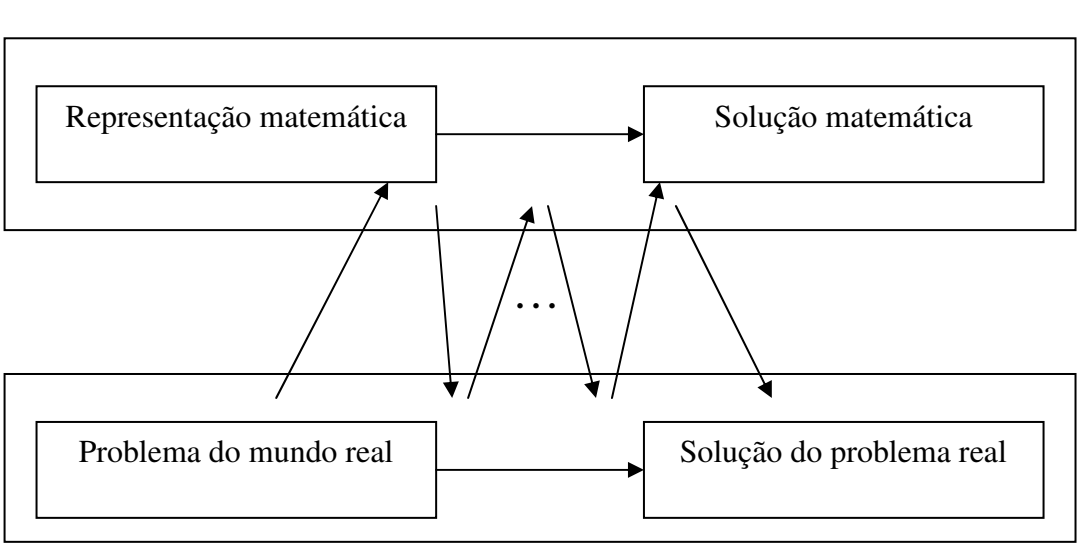


Figura 1 - apresentada por Schroeder e Lester, 1989, p. 36

Schroeder e Lester reforçam que o caminho "ensino via resolução de problemas" seja considerado não somente como um dos objetivos de se ensinar Matemática, mas, principalmente, como um meio de se fazer Matemática. Ao analisar os aspectos relevantes das diferentes maneiras de abordar esse assunto, eles ressaltam que o ensino via resolução de problemas é a abordagem mais coerente com as recomendações do NCTM, segundo as quais:

1. Habilidade e conceito matemático devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas.
2. O desenvolvimento de processos de pensamento de ordem superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas.
3. O ensino de Matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas.

Brasil já desejava, em (1964), mostrar a possibilidade de fazer com que o aluno chegasse à teoria através de problemas. Ele dizia que o professor deveria substituir a constante exibição de conhecimentos pela ordenação das conclusões oferecidas pelos alunos, sendo o papel do professor, ainda, focalizar a importância de:

- Assegurar a contínua atividade do aluno, tendo em vista que a aprendizagem só se realiza dentro dessa atividade;
- Preparar cadeias de perguntas, atividades e problemas que façam do aluno um pesquisador e não um ouvinte;
- Não suspender a atividade do aluno sob o pretexto de lhe fornecer informações mas oferecê-las, intercaladas nos enunciados dos problemas, em sugestões que se seguirão aos mesmos, nas respostas às suas indagações, ou na crítica de suas afirmações;
- Substituir a expressão "passar matéria" pelas situações e oferecer problemas adequados ao tópico abordado.

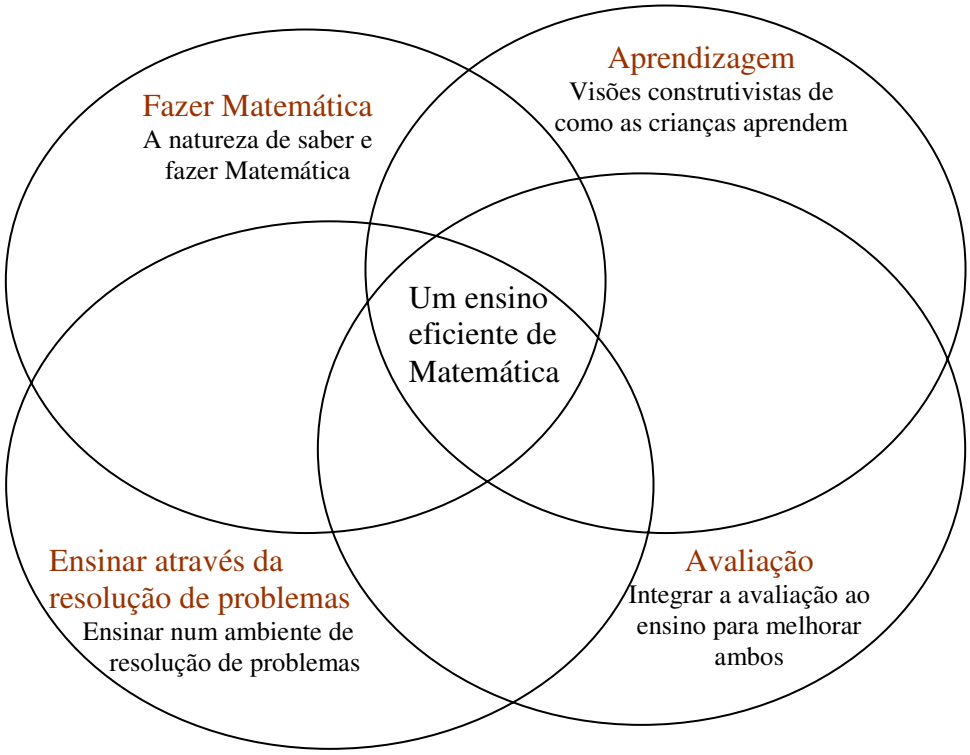
2.5. A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Para que os professores de Matemática sejam verdadeiramente eficientes em seu trabalho de ensinar, o diagrama abaixo, apresentado por Van de Walle (2001), envolve trazer juntos quatro componentes básicos:

1. Uma apreciação da disciplina Matemática - o que significa "fazer Matemática";
2. Uma compreensão de como os estudantes aprendem e constroem idéias;

3. Uma habilidade em projetar e selecionar tarefas, de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas;
4. A habilidade de integrar a avaliação com o processo de ensino para intensificar a aprendizagem e melhorar seu ensino, diariamente.

Nele, Van de Walle explica claramente, por meio de intersecções de quatro conjuntos, onde e como está apoiado um ensino eficiente de Matemática, dependendo das ações do professor e dos alunos.



Assim, para que haja aprendizagem, pode-se lançar mão de visões construtivistas de como as crianças aprendem. Para isso é importante saber fazer Matemática, isto é, reconhecer a natureza de saber e fazer Matemática. Também, é preciso que haja uma avaliação integrando-a ao ensino para melhorar ambos. Ainda, ensinar através da resolução de problemas, ou seja, ensinar num ambiente de resolução de problemas é uma forte recomendação.

Estas quatro idéias são melhor entendidas no contexto do movimento de reforma em Educação Matemática, uma revolução na Matemática escolar que começou em 1989, quando o NCTM publicou seu primeiro documento “Standards”.

Segundo Onuchic, na fala de Al Cuoco (1995), *"gente do mundo todo está trabalhando na reestruturação da Educação Matemática. Muitos esforços estão sendo feitos para tornar o ensino da Matemática mais eficiente. É preciso que a Matemática seja para todos e que todos a compreendam bem"*. Como conseguir isso? Que Matemática deve ser ensinada? Não será, como diz Al Cuoco, uma utopia querer mudar de um chavão: **detesto matemática** para outro: **adoro matemática?** Há, para muitos, uma grande preocupação com isso. Será que a Matemática que se quer para todos não será uma Matemática para ninguém?.

2.5.1. Um ensino eficiente de Matemática

> Um ensino de matemática eficiente requer compreensão do que os estudantes sabem e do que precisam aprender e, então, os desafia e os apóia para aprendê-la bem.
> (NCTM, 2000, p. 16)

Segundo Van de Walle (2001), o que os estudantes aprendem é quase que inteiramente dependente das experiências que os professores lhes dão, a cada dia, na sala de aula. As ações dos professores é que encorajam os estudantes a pensar, questionar, resolver problemas, e discutir suas idéias, estratégias e soluções. Ainda, Van de Walle diz que professores e distritos escolares precisam estar comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino. Os professores devem ter uma oportunidade continuada para refletir sobre sua prática e melhorar sua compreensão de estratégias pedagógicas, da aprendizagem do estudante e do conteúdo matemático. O desenvolvimento profissional não pode acabar junto com seu programa de treinamento inicial.

No mundo e no Brasil também há grupos trabalhando para melhorar, mas poucos para atender a todos os professores em todas as escolas.

2.5.2. Uma aprendizagem eficiente de Matemática

> Os estudantes precisam aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novo conhecimento a partir de sua experiência e conhecimento anterior.
> (NCTM, 2000, p.20)

Van de Walle (2001), na página 6, diz que o princípio da aprendizagem está baseado em duas idéias fundamentais:

Primeira - aprender Matemática com compreensão é essencial. A Matemática, hoje em dia, requer não somente habilidades computacionais mas, também, habilidade em pensar e

raciocinar matematicamente, para poder resolver novos problemas e aprender novas idéias com as quais os estudantes se depararão no futuro.

Segunda - o princípio da aprendizagem estabelece, bastante claramente, que os estudantes devem aprender Matemática com compreensão. A aprendizagem aumenta nas salas de aula onde, aos estudantes, se pede que avaliem suas próprias idéias e aquelas de outros; que sejam encorajados a fazer conjecturas matemáticas e testá-las; e desenvolver suas habilidades de raciocínio. A aprendizagem, como vista nesse princípio, depende claramente de um esforço ativo dos estudantes, que ocorre melhor num ambiente que enfatiza a resolução de problemas, o raciocínio e a interação plena entre eles.

2.5.3. Uma Avaliação eficiente de Matemática

> A avaliação deveria apoiar a aprendizagem de matemática essencial e fornecer informações úteis tanto aos professores quanto aos estudantes.
>
> (NCTM, 2000, p. 22)

Van de Walle diz que, nas palavras dos autores dessa citação, a avaliação não seria simplesmente feita para os estudantes. Mais do que isso, ela também seria feita pelos estudantes, para guiar e aumentar sua aprendizagem. Uma avaliação continuada transmite aos estudantes o quê de matemática é importante. A avaliação, que inclui observações paralelas e interação dos estudantes, os encoraja a se articularem e, assim, poder esclarecer suas idéias. Um retorno, a partir de avaliações diárias, ajuda os estudantes a estabelecerem objetivos e a se tornarem aprendizes mais independentes. A avaliação deveria também ser um fator importante para ajudar na tomada de decisões instrucionais. Por ganharem continuamente informações sobre o progresso e a compreensão do aluno, os professores podem tomar, diariamente, melhores decisões que apóiem a aprendizagem do estudante. Para a avaliação ser eficiente, os professores deveriam usar uma variedade de técnicas de avaliação, compreender seus objetivos matemáticos profundamente e ter uma boa idéia de como seus estudantes podem estar pensando sobre a Matemática que está sendo desenvolvida.

2.5.4. O "saber fazer" em Matemática?

> Como uma matéria prática, a matemática é uma ciência de padrão e ordem. Seu domínio não são moléculas ou células, mas números, chance, forma, algoritmos e mudança. Como uma ciência de objetos abstratos, a matemática se apóia sobre a lógica mais do que sobre a observação enquanto seu padrão de verdade. Ainda, emprega observação, simulação e mesmo experimentação como meio de descobrir a verdade.
>
> (MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD, 1989, p. 31)

A Matemática é a ciência de padrão e ordem. Esta definição desafia a visão social popular de matemática como uma disciplina dominada por cálculos e regras sem justificações. Ciência é um processo de imaginar coisas ou dar sentido às coisas. Ela começa com situações problemáticas. Embora nunca se possa ter pensado nela desta maneira, a Matemática é uma ciência de coisas que têm um padrão de regularidade e ordem lógica. Achar e explorar esta regularidade ou ordem e, então, dar sentido a ela, é o que significa fazer Matemática.

Trabalhar sobre partes e pedaços de Matemática não é fazer Matemática e nunca resultaria em compreensão. Exercícios resultantes de testes tradicionais podem produzir resultados a curto-prazo, mas os efeitos de longo-prazo devem produzir cidadãos capazes de admitir que não sabem Matemática. O simples domínio de habilidades não significa saber fazer Matemática.

2.5.5. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas

A abordagem metodológica, utilizada há algum tempo atrás, falava somente em Metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Passado algum tempo, falou-se em Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Hoje se está falando em Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Ao escrevermos Ensino-Aprendizagem-Avaliação, queremos dizer que essas três ações estão intimamente relacionadas por constituir um ser maior que ensino, aprendizagem e avaliação e que tem, por objetivo final, promover o crescimento do professor e a aprendizagem do aluno. O professor, responsável pelo ensino, trabalha para a aprendizagem do aluno que, como co-construtor do novo conhecimento, se apóia no professor como um guia. A avaliação, integrada ao ensino, melhora as ações de ambos.

Podemos sentir, no quadro abaixo, algumas das razões que nos levaram a essas mudanças.

	Ensino	**Aprendizagem**	**Avaliação**
Três processos distintos	Responsabilidade é do professor que visa a aprendizagem do aluno.	Os alunos devem aprender com compreensão. Responsabilidade é dos alunos. Como? Sabendo relacionar as idéias que têm com as novas idéias que se quer construir.	A avaliação apóia a aprendizagem e informa aos professores quanto ao crescimento dos alunos e, também, informa aos professores quanto ao seu próprio trabalho.
Um processo duplo	**Ensino-Aprendizagem** É um ser maior. É maior que o ensino. É maior que a aprendizagem. Acontece simultaneamente durante a construção do conhecimento, através da resolução de problemas, tendo os alunos como co-construtores desse conhecimento.		
Um processo triplo	**Ensino-Aprendizagem-Avaliação** É um ser ainda maior. É maior que o ensino, que a aprendizagem, que a avaliação, tendo a avaliação integrada ao processo de **ensino-aprendizagem**. O professor avalia o crescimento dos alunos. Os alunos fazem também sua avaliação destinada a guiar e aumentar sua aprendizagem.		

2.6. O GTERP frente à Resolução de Problemas – Pesquisas existentes

Na UNESP–Rio Claro/SP, o grupo de pesquisa GTERP tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica na linha de Resolução de Problemas.

Este grupo é constituído por alunos e ex-alunos do programa de Pós-graduação em Educação Matemática - PGEM que desenvolvem pesquisa nesta linha. É aberto à participação de outros alunos regulares do programa que têm interesse em aprofundar seus conhecimentos, alunos especiais em busca de amadurecimento de seus futuros projetos de pesquisa e a professores, em geral, que visam aprimorar sua prática docente.

O GTERP se reúne semanalmente, desde 1991, para estudar textos didáticos e científicos que configuram o quadro atual das investigações e pesquisas na linha de Resolução de Problemas. Também propõe e discute metodologias e propostas de ações didáticas com vistas ao aperfeiçoamento e à implementação de novas práticas em sala de aula de Matemática em todos os níveis de escolaridade.

Seus membros produzem trabalhos que são levados a apresentações em congressos regionais, nacionais e internacionais, e que são publicados em revistas de divulgação que circulam no meio científico e de ensino.

Um dos aspectos marcantes da filosofia de trabalho do grupo é buscar incessantemente desenvolver estudos que efetivamente atinjam a sala de aula, ou seja, que estejam relacionados com questões de ensino-aprendizagem-avaliação, tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor. O grupo tem colaborado, ainda, com projetos em parceria com instituições públicas de ensino fundamental e médio.

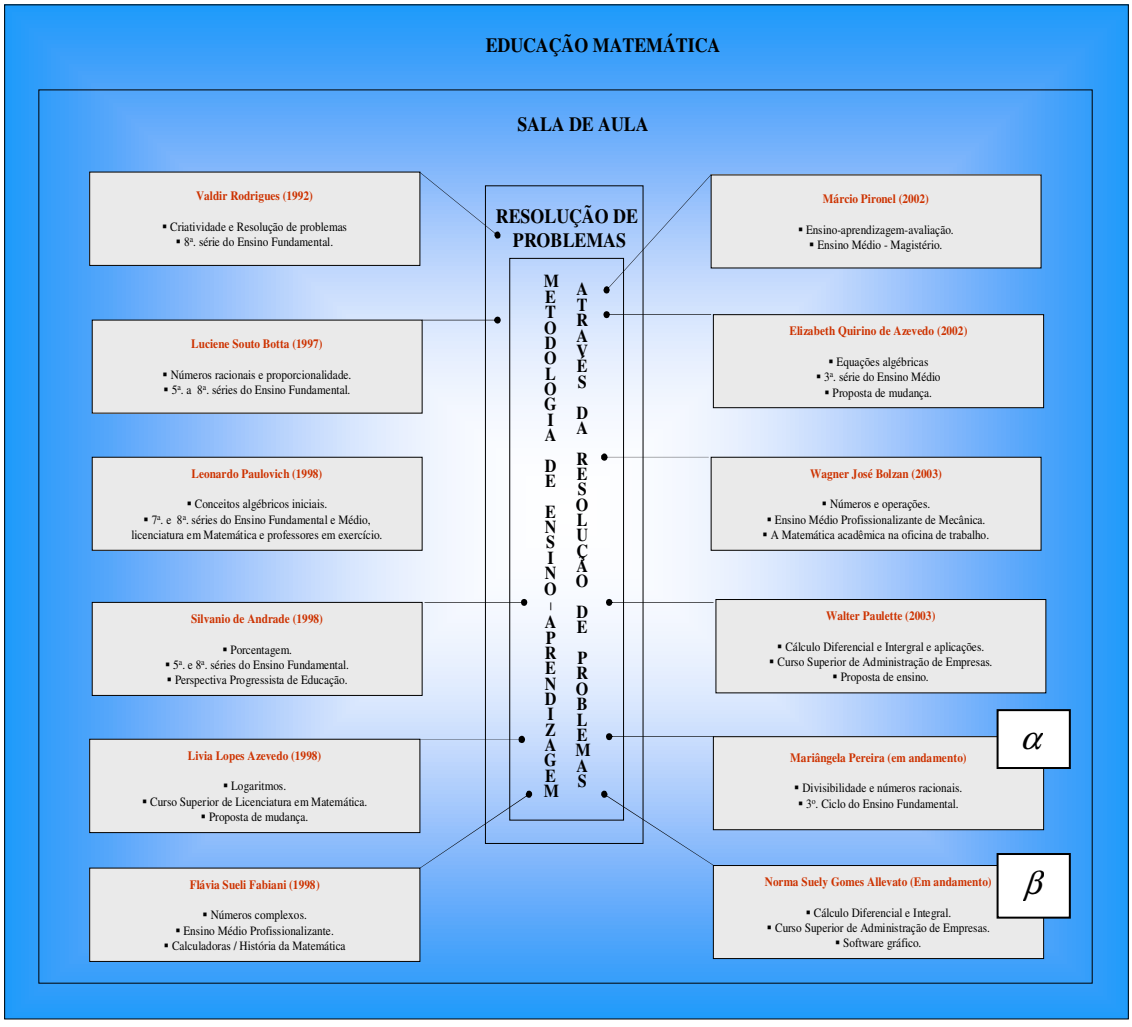
Procurando estar sempre em sintonia com as atuais concepções em Educação Matemática, o GTERP dedica-se atualmente a trabalhos na linha de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

As dissertações e teses já produzidas e em andamento, desenvolvidas por alunos do programa de PGEM ou por alunos de outras instituições, membros do GTERP, e sob a orientação da coordenadora do grupo, também se voltam a todos os níveis de ensino e abrangem este amplo espectro de possibilidades que o grupo visa contemplar na Educação Matemática. Uma descrição destas dissertações e teses, bem como do trabalho já realizado pelo grupo pode ser encontrada em Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2004).

O grupo GTERP apresentou no 20º aniversário do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, um pôster mostrando o trabalho do grupo desde 1992. O trabalho desse grupo em Educação Matemática se apresenta sempre refletindo trabalhos para a sala de aula. A maioria desses trabalhos foi realizada em Resolução de Problemas e, mais recentemente, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

A PÓS-GRADUAÇÃO E SUA VIDA PROFISSIONAL
O GTERP E A PESQUISA EM SALA DE AULA

GTERP – GRUPO DE TRABALHO E ESTUDOS SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
Sob a orientação da **Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic**, os pós-graduandos do grupo realizam todas as suas pesquisas em sala de aula. Suas atividades estão, deste modo, diretamente ligadas à atividade docente e, portanto, fortemente voltadas ao seu desenvolvimento profissional.



α - Defendida em 2004, com o título O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental.

β - Defendida em 2005, com o título Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência.

Os membros do GTERP costumam recomendar aos professores que trabalham em sala de aula que, após cada problema proposto aos alunos, se questionem a respeito desta série de perguntas: Isto é um problema? Que tópicos de matemática poderiam ser iniciados com este problema? Haveria necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele? Para que séries você acredita ser este problema adequado? Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução? A solução necessariamente é única? Como observar a razoabilidade das respostas obtidas? Você, como professor, teria dificuldade em trabalhar este problema? Que grau de dificuldade você acredita que seu aluno possa ter diante desse problema? Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Capítulo 3

A Metodologia de Pesquisa

3.1. Introdução

Neste capítulo, pretendemos abordar e discutir a opção metodológica que delimita o processo de desenvolvimento de uma pesquisa em Educação Matemática.

Entre as várias idéias de metodologia de pesquisa existentes decidimos optar pela Metodologia de Romberg.

3.2. A escolha da metodologia da pesquisa

Uma metodologia de pesquisa tem por objetivo guiar ou dar sentido à investigação da verdade. Pesquisar, então, seria promover o confronto entre os dados, as hipóteses, as evidências, as informações coletadas sobre um determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito desse assunto, entre outros aspectos. Nesse contexto, reúnem-se o pensamento e a ação do pesquisador. Toda pesquisa necessita ser definida para que se possa abordá-la com maior profundidade e eficácia. A metodologia de pesquisa possibilita ao pesquisador tratar o assunto dentro de limites fixos, circunscritos a uma determinada particularidade. A metodologia de pesquisa é de fundamental importância e faz com que o pesquisador não enverede por caminhos que o distanciem de seu tema.

A participação no Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas – GTERP, a disciplina Aprendizagem Matemática[5] e os trabalhos, produzidos, apresentados e discutidos nessa disciplina, foram de extrema importância para que fosse desenvolvido o tema 'A Metodologia de Pesquisa de Romberg' como trabalho final. O Modelo de Romberg, que tem sido utilizado em pesquisas mais recentes, discutido e analisado no GTERP, nos deu uma sustentação teórica, onde pudemos compreender os fundamentos de uma metodologia de pesquisa para um trabalho de investigação. Essa metodologia foi escolhida para guiar nosso trabalho.

[5] Disciplina ministrada pelo professor Dr. Geraldo Perez com a colaboração da professora. Dra. Miriam Godoy Penteado.

3.3. A Metodologia de Pesquisa de Romberg

Romberg, no Capítulo 3 do livro Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning[6], apresenta um artigo com o título: *Perspectives on Scholarship and Research Methods*[7], publicado em 1992.

Nesse artigo são colocadas por ele as seguintes idéias:

- Mostrar a Educação Matemática como um campo de estudo;
- Esclarecer como os pesquisadores enfrentam problemas comuns que pessoas não familiarizadas com pesquisa, também enfrentam em seus processos de investigação;
- Dar fundamentação à discussão sobre as tendências atuais de pesquisa, além de apresentar uma variedade de métodos de pesquisa que os pesquisadores usam.

No GTERP, o esquema das atividades que os pesquisadores seguem, apresentado por Romberg, ficou sendo chamado por nós de Metodologia de Pesquisa de Romberg. Esse esquema apresenta uma seqüência de dez atividades relacionadas entre si e distribuídas em três blocos. Ele procura orientar o pesquisador no que se refere a planejar, investigar e desenvolver seu trabalho. Romberg afirma que quase todos os textos de pesquisa esboçam atividades semelhantes.

3.3.1. A Educação Matemática como um campo de estudo

Segundo Romberg é importante ver a Educação Matemática como um campo de estudo, pois como Shulman, em 1988, argumentou, a escola é complexa e, assim, as perspectivas e os procedimentos de investigação, de muitas disciplinas, têm sido usados para pesquisar questões que surgem e que são inerentes aos processos envolvidos no ensino e na aprendizagem nas escolas.

Ele, também nesse artigo, apresenta o diagrama, de E. G. Begle, (1961), da matemática escolar que ilustra as inter-relações dos componentes (alunos, professores, matemática, escola e sociedade) no processo de escolaridade e a necessidade de múltiplas perspectivas e múltiplos procedimentos.

[6] Manual de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática
[7] Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa

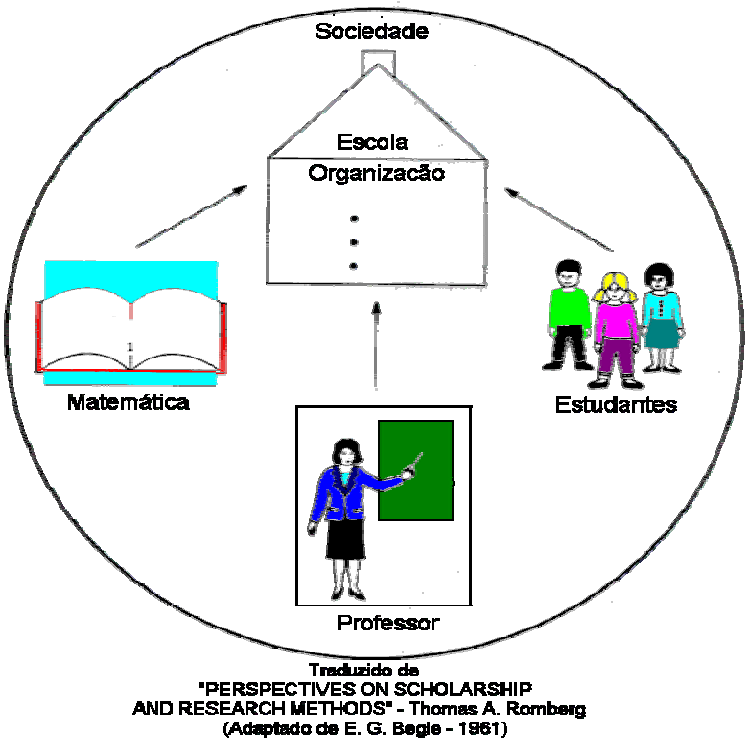


Figura 2

Nesse diagrama, o empreendimento de escolaridade está situado dentro de um contexto social; o currículo de ciências matemáticas envolve um subconjunto de matemática; e o ensino é levado adiante por um professor com um grupo de estudantes dentro de uma sala de aula, na escola, ao longo de um tempo. Ou seja, os professores atuando na escola, os alunos pertencentes a essa escola, a disciplina Matemática que está sendo trabalhada e tudo isso objetivando preparar o aluno para viver em sociedade.

Nesse cenário, segundo Romberg, esse diagrama foi esboçado para apresentar um ponto de vista relativo ao ensino da Matemática, pelo desenvolvimento de cinco pontos básicos:

1. As escolas foram criadas por grupos sociais para preparar seus jovens a viverem em sociedade.
2. Um ensino confiável de Matemática é abordado com a preocupação de identificar que idéias matemáticas são ensinadas e que usos lhes são indicados.
3. O ensino da Matemática pode ser eficiente se o aprendiz for levado em consideração.
4. Um ensino de Matemática eficiente pode ser realizado por meio de considerações de aspectos de educação escolar.

5. Os professores são os administradores e guias que fazem o processo instrucional funcionar.

A partir desses pontos básicos, Romberg diz que várias questões podem ser levantadas, conjeturas podem ser feitas e investigações podem ser, então, conduzidas. Ele diz que, por exemplo, as seguintes perguntas poderiam ser levantadas:

- Quem toma as decisões sobre que matemática deve ser incluída em um currículo matemático?
- Que concepções têm os professores sobre a forma como os alunos aprendem a resolver problemas matemáticos?
- Como o ensino de um dado conteúdo matemático pode ser ordenado e acompanhado?
- Quais as concepções dos alunos sobre um dado tema ou conceito matemático?
- Que impacto sobre o ensino tem o isolamento de um professor em relação ao trabalho de outros professores de Matemática?

Cada uma destas perguntas merece ser investigada. Romberg argumenta que cada pesquisador poderia usar métodos diferentes para responder a cada pergunta. Além disso, estudiosos de diferentes linhas de pesquisa poderiam trabalhar as mesmas perguntas de maneiras diferentes. Cada uma destas linhas de pesquisa produzem, às vezes, seu próprio conjunto de conceitos, métodos e procedimentos. Para entender as tendências atuais de pesquisa na Educação Matemática, deve-se estar ciente destas várias perspectivas e dos princípios sobre os quais elas se baseiam. Isto é importante porque diferenças de métodos não se constituem simplesmente de modos alternativos de investigar as mesmas perguntas. O que diferencia um método de outro não é só o modo pelo qual a informação é coletada, analisada e relatada mas, também, os tipos de perguntas tipicamente feitas e os princípios ou paradigmas sobre os quais os métodos estão baseados para investigá-las.

3.3.2. As Atividades dos Pesquisadores

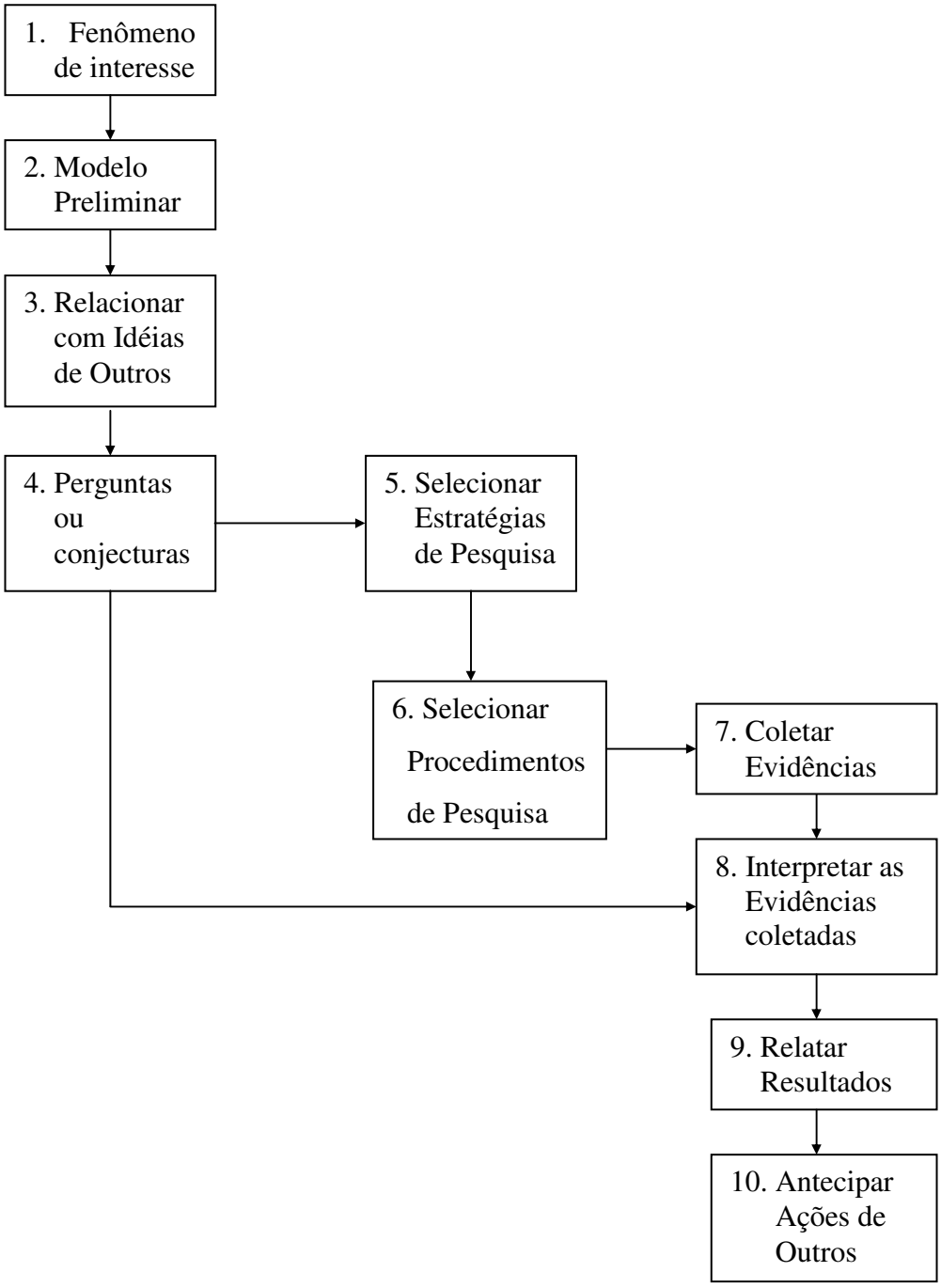
Entendemos por pesquisa o conjunto de atividades que tem por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio da investigação. Assim, assumir uma metodologia é ter capacidade de pôr em prática uma idéia na busca da verdade.

Para Romberg, na página 51,

> O termo pesquisa refere-se a processos, a coisas que se faz e não a objetos que se pode tocar e ver. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como um desempenho mecânico ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de um modo prescrito ou predeterminado. As atividades envolvidas em fazer pesquisa reúnem mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Como em todas as artes, há um consenso num amplo sentido

> sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado como um trabalho aceitável. Estes consensos provêm dos relacionamentos do dia-a-dia dos pesquisadores.

Visto que fazer pesquisa é uma arte, segue o esboço, proposto por Romberg, das dez atividades colocadas para o desenvolvimento de uma pesquisa.



Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas.

Figura 3

Na seqüência, essas dez atividades estão relacionadas entre si e distribuídas em três blocos.

No 1º bloco: Identificação do problema

1. Fenômeno de Interesse
2. Modelo Preliminar
3. Relacionar com Idéias de Outros
4. Perguntas ou Conjecturas

1. Fenômeno de interesse

Romberg diz que toda pesquisa se inicia com uma curiosidade, alguma coisa ou aquilo que nos interessa sobre um fenômeno determinado do mundo real. Em Educação Matemática, o fenômeno envolve professores e alunos, a forma como os alunos aprendem, como eles interagem com a Matemática, como respondem ao ensino e à aprendizagem, como os professores planejam seu trabalho e muitas outras questões. Então, no momento em que ficou posto o objeto de estudo, quando se diz: vou trabalhar sobre isto, o fenômeno de interesse fica conhecido.

2. Modelo Preliminar

Modelo preliminar é um fluxograma que mostra aspectos importantes, como as variáveis do fenômeno de interesse, e como estes aspectos estão relacionados. Não se sabe, ao certo, se o trabalho vai ser desenvolvido assim, seguindo essa ordem, mas foi assim que, pela primeira vez pensou-se fazer. Pode até ser alterado ao longo da pesquisa que, então, pode mudar completamente seu rumo. Nesse sentido, um modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis e das relações implícitas que há entre elas.

Segundo Romberg, 1992, página 51,

> Para a maioria dos estudiosos, um modelo é simplesmente um esquema heurístico para ajudar a esclarecer um fenômeno complexo. Situações reais são raramente bem definidas e freqüentemente estão envolvidas em um meio que torna difícil obter uma afirmação clara. Formular um modelo provisório normalmente ajuda, porque fazer isto envolve especificar as variáveis que se acredita estarem operando na situação real. Obviamente, o modelo é uma simplificação, visto que alguns aspectos da realidade serão significativos e outros irrelevantes. Apesar disso, o modelo serve de ponto de partida ou de orientação para a situação de interesse.

Jeremy Kilpatrick (1981), citado por Romberg na página 51 de seu artigo, afirmou que bons pesquisadores, assim como bons artistas em qualquer campo, são mais criativos ao identificar variáveis e relações que os capacitam a olhar novamente para fenômenos

familiares do que pessoas com menos imaginação. Assim, o modelo preliminar está ligado ao que estamos imaginando, vendo até onde a idéia pode nos levar.

Quase todos os textos de metodologia seguem os passos de Romberg. Mas esse, o do modelo preliminar, parece que só mesmo Romberg apresenta tão claramente. O modelo preliminar é interessante porque nos permite ver como, no início, o pesquisador pensava e onde sua pesquisa o levou, na realidade, a trabalhar. Então, quando são tiradas as conclusões, é interessante observar quanto se cresceu ao longo da pesquisa.

3. Relacionar com Idéias de Outros

Relacionar com idéias de outros significa ir em busca das idéias de quem já trabalhou sobre o nosso próprio fenômeno de interesse e poder determinar se suas idéias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou até mesmo alterar o modelo por nós proposto.

Num dos encontros de nossa orientação, ao discutir sobre a metodologia de Romberg, nossa orientadora disse que relacionar com idéias de outros não significa relacionar com todas as idéias de todos os outros, e até que, com esses outros, pode-se concordar ou discordar. Mais do que isso, às vezes, começa-se a aproveitar tantas coisas desses outros, que eles podem até se configurar como co-autores do trabalho. A partir de seus resultados pode-se ir para frente e perceber que, sem aquele resultado, não se poderia avançar. Então, nesse relacionar, faz-se uso de toda a literatura levantada, de tudo que foi lido e de todos os cursos e disciplinas feitas.

Segundo Romberg, em seu modelo, na página 51, para poder fazer isso o pesquisador precisa reconhecer que cada investigador é um membro de um particular grupo de pesquisa, que possui uma determinada "visão de mundo".

> Se alguém busca examinar a contribuição potencial das idéias alheias, deve relacionar as mesmas a uma visão particular do mundo. Por exemplo, um estudioso que vê a variedade de compreensões das crianças sobre os conceitos de fração sob um ponto de vista construtivista pode argumentar que as experiências típicas que as crianças têm com frações são pobres. Para construir este argumento, o pesquisador teria que ler e refletir sobre os trabalhos e os estudos de outros estudiosos construtivistas.

4. Perguntas ou Conjecturas

Com este passo acabará o primeiro bloco. Então, nosso problema ficará identificado. Pode-se saber a que se deve responder ou, se for uma afirmação, que conjectura quer-se defender. Assim, o problema se torna um desafio para o pesquisador.

Romberg diz que este é um passo muito importante no processo da pesquisa porque, à medida que se examina um fenômeno particular, várias perguntas potenciais aparecem e decidir que perguntas examinar não é fácil. Citando Lakatos (1976), ele diz que "A noção de fortes influências leva a uma característica importante da maioria dos programas de pesquisa, isto é, a natureza cumulativa de uma série de estudos dentro de uma determinada estrutura".

As perguntas geralmente tomam as seguintes formas: Como as coisas chegaram a ser assim? (orientadas no passado); Qual é a situação das coisas hoje? (orientadas no presente); ou O que acontecerá se eu fizer tal coisa? (orientadas no futuro).

A partir de uma observação específica, está o fato de que a maioria dos estudos orientados no passado e no presente são de caráter descritivo, enquanto que os orientados no futuro são preditivos. Esta distinção leva a uma discussão entre a possibilidade de se formular argumentos causais a partir de dados descritivos. Os experimentalistas afirmam que somente pela manipulação de variáveis sob situações controladas é possível construir com confiança argumentos causais. Outros estudiosos dizem que é possível construir tais argumentos a partir de dados descritivos baseados em campos teóricos.

Diz Romberg que, mais do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores fazem geralmente uma ou mais conjecturas (suposições ou previsões fundamentadas) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e as idéias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações delineadas no modelo.

No 2º bloco: Resolução do problema de Pesquisa

5. Selecionar estratégias de pesquisa
6. Selecionar procedimentos de pesquisa

Desde que o problema, como uma pergunta ou uma conjectura, seja identificado, é preciso buscar caminhos para poder resolvê-lo.

Apoiados nas variáveis do fenômeno de interesse levantadas no modelo preliminar, como bom estrategista, deve-se selecionar uma estratégia geral e outras mais que irão ajudar a trabalhar sobre ela.

5. Selecionar Estratégias de Pesquisa para coletar evidências

A decisão, segundo Romberg, sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo na qual aquelas questões estão situadas, do modelo preliminar que foi construído para explicar o fenômeno de interesse e da conjectura que se faz sobre a evidência necessária.

6. Selecionar Procedimentos específicos de Pesquisa

Para responder as questões específicas que foram levantadas, Romberg diz que evidência deve ser coletada. É neste passo que as técnicas normalmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que podem ser seguidos para diferentes tipos de questões. Deve-se tomar cuidado em selecionar procedimentos que irão ajudar a esclarecer as questões.

No 3º bloco: Coletar evidências, analisá-las e tirar conclusões

7. Coletar evidências
8. Interpretar as evidências coletadas
9. Relatar resultados a outros
10. Antecipar as ações de outros

7. Coletar evidências

Este passo, na fala de Romberg, pode ser direto, uma vez que se tenha decidido coletar certas informações para construir um argumento considerando as perguntas feitas. Por exemplo, se conduzir uma pesquisa é apropriado, os procedimentos para coletar dados podem ser planejados, embora freqüentemente complexos. Por outro lado, se se está examinando a cultura de uma sala de aula, os procedimentos para coletar informações podem se expandir ou tornarem-se mais focados à medida em que se coletem os dados.

8. Interpretar as evidências coletadas

Neste estágio, é feita a análise e a interpretação da informação que foi coletada. Em muitos estudos, como diz Romberg, o pesquisador esquematiza a informação, a agrupa e realiza testes estatísticos apropriados de importância sobre as propriedades dos dados. Estes são normalmente os chamados métodos quantitativos, visto que é comum atribuir números às informações (escala) e procedimentos matemáticos são seguidos para agregar e resumir a evidência. Em áreas, como um estudo histórico, o pesquisador categoriza, organiza e interpreta a informação relevante que foi coletada. É importante perceber, porém, que em toda investigação é coletada mais informação do que a necessária para responder a questão. Parte disto é relevante, parte é irrelevante e parte é incompreensível. Destacar a informação importante dentre toda aquela disponível é uma arte na qual certas pessoas são melhores que outras.

9. Relatar resultados a outros

Ser um membro de uma comunidade de estudo implica uma responsabilidade de informar aos seus outros membros sobre sua investigação completa e buscar seus comentários e críticas. Muito freqüentemente, diz Romberg, os pesquisadores só relatam procedimentos e descobertas, não o modelo ou a visão de mundo. Os resultados de um estudo específico e as descobertas de qualquer estudo particular são interpretáveis somente de acordo com a visão de mundo. Se isto não estiver garantido, os leitores usarão, sem dúvida, suas próprias noções para interpretar o estudo.

10. Antecipar as ações de outros

Dados os resultados de uma investigação específica, cada estudioso está interessado no que acontecerá depois e, então, deverá antecipar ações posteriores. Membros de uma comunidade de estudo discutem idéias entre si, reagem a idéias de outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaborações de procedimentos, e assim por diante.

3.3.3. Os métodos usados pelos pesquisadores

Para Romberg, as decisões sobre os métodos a utilizar são tomadas como uma conseqüência das atividades 1 a 4. As atividades 5 a 10 são aquelas em que o pesquisador decide:

- Que evidência é necessária para endereçar as perguntas ou conjecturas levantadas;
- Como coletar, analisar e interpretar essa evidência;
- Como relatar suas descobertas para outros.

Porém, para ele, os pesquisadores raramente iniciam uma pesquisa com uma estratégia fixada para reunir evidências ou com um método específico de análise em mente. Dado este aviso há dois aspectos para o uso do termo *métodos de pesquisa* que precisam ser entendidos. **Primeiro**, os métodos específicos discutidos na literatura de pesquisa devem incluir a maneira na qual a informação é coletada, o modo como ela é agregada e analisada, ou, às vezes como ela é relatada.

Segundo, os métodos atuais que um pesquisador usa para coletar evidência dependem de pelo menos cinco fatores: visão de mundo; a orientação de tempo das perguntas que estão sendo feitas; se a situação atualmente existe ou não; a fonte antecipada de informação; e produzir o julgamento. O fator "*visão de mundo"* situa os métodos utilizados dentro das crenças de uma particular comunidade de pesquisa. O fator "*orientação de tempo"* refere-se a reconhecer se as perguntas levantadas estão no passado, no presente ou no futuro. O terceiro fator trata de ver se as "*situações"* existem ou ainda precisam ser criadas. O fator *"fonte de evidência"* deve ser artefatos (livros, discursos e outros), ou respostas às perguntas feitas, ou observações de ações. O fator "*julgamento"* refere-se a avaliar os estudos como uma categoria distinta de métodos de pesquisa. Existe na literatura uma quantidade considerável de métodos específicos que estão baseados neles ou que utilizam esses cinco fatores citados.

Romberg apresenta dois casos diferentes de métodos usados pelos pesquisadores: (I) Métodos usados com evidência existente e (II) Métodos usados quando uma situação existe e evidência deve ser desenvolvida.

I. Métodos usados com evidência existente

Há três métodos nos quais os pesquisadores não têm poder para gerar novos dados; ou seja, eles devem encontrar o que já existe e não podem alterar a forma em que os dados aparecem. Esses métodos são: Historiografia; Análise de conteúdo; Análises de tendência.

- **Historiografia**.- Nesta abordagem, é feito um esforço para esclarecer condições e problemas atuais por meio de uma compreensão mais profunda e completa do que tenha sido feito ou do que tenha acontecido no passado.
- **Análise de conteúdo**.- Este método é usado para investigar questões orientadas no presente, quando as coisas feitas atualmente podem ser examinadas.
- **Análises de tendência**.- Este método é usado para extrapolar, a partir de informações sobre o passado ou o presente, para fazer previsões sobre o futuro.

II. Métodos usados quando uma situação existe e evidência deve ser desenvolvida

Há muitos métodos diferentes de investigação nos quais uma situação existe e a evidência específica precisa ser obtida. Em cada método, o pesquisador tem controle sobre a forma pela qual a informação é obtida e agregada. Dentre os citados por Romberg (1992), alguns deles são: pesquisa retrospectiva; pesquisa de massa descritiva; entrevistas estruturadas; observações estruturadas; estudos de casos; pesquisa-ação e etnografia.

- **Pesquisa retrospectiva**.- Este método é usado para estudar questões que são orientadas no passado – uma vez que a situação tenha existido, indivíduos que foram participantes na situação passada podem ser entrevistados usando-se este método.
- **Pesquisa de massa descritiva**.- Este método muito comum é usado para estudar questões orientadas no presente. O procedimento consiste em conseguir uma amostra de participantes cuidadosamente retirados da situação para responder a um conjunto de questões pré-determinadamente estruturadas.
- **Entrevistas estruturadas**.- Este método é semelhante ao da pesquisa de massa descritiva exceto que é assumido que, por ouvir (e codificar) respostas, os pesquisadores podem obter mais informações esclarecedoras do que usando pesquisas de massa.
- **Observações estruturadas**.- Este método é usado para estudar grupos nos quais as ações de diferentes membros possam ser vistas. Por exemplo, para documentar os tipos de interação, entre professor e aluno, que ocorrem durante uma aula de matemática e para determinar a extensão à qual os alunos se engajam em aprender.
- **Estudos de caso**.- Este método é usado para organizar e relatar informação sobre as ações, percepções e crenças de um indivíduo ou de um grupo sob condições ou circunstâncias específicas. O pesquisador está interessado em contar uma história detalhada sobre um caso particular. O que distingue um estudo de caso de outros métodos de estudo de campo é que os pesquisadores estão escrevendo uma história natural de uma particular situação. O

pesquisador não está interessado em fazer julgamentos sobre um programa ou em testar uma suposição teórica.

- **Pesquisa-ação**.- Este termo se refere a uma estratégia de pesquisa usada para investigar situações de escolaridade onde o pesquisador assume uma prática, que tem evoluído nas escolas e salas de aula, que precisa ser documentada e compreendida. A documentação é geralmente registrada pelo pesquisador.
- **Etnografia**.- O termo etnografia vem da antropologia e significa um retrato do modo de vida de alguns grupos identificáveis de pessoas. O rótulo é usado para referir-se tanto à combinação dos processos usados quando os antropólogos fazem um trabalho de campo quanto ao produto daquele esforço – o valor da escrita etnográfica. É um método usado para estudar a cultura complexa das escolas. Esta abordagem usualmente requer um observador participante altamente treinado para examinar coisas feitas, conduzir entrevistas, e fazer observações. Ela difere dos outros métodos na medida em que o pesquisador tenta interpretar as ações das pessoas de acordo com a cultura na qual elas vivem.

Capítulo 4

Identificando o problema de nossa pesquisa

4.1. Introdução

Vamos situar nossa pesquisa ao longo do fluxograma apresentado no modelo de Romberg. Inicialmente, neste capítulo, agruparemos as quatro atividades apresentadas no primeiro bloco: fenômeno de interesse; modelo preliminar; relacionar com idéias de outros; e pergunta ou conjectura, visando identificar o problema de nossa pesquisa. Apresentaremos os passos dados no decorrer da pesquisa, partindo do fenômeno de interesse até a determinação da pergunta ou conjectura. O fenômeno de interesse surgiu da vontade de buscar um caminho para trabalhar, em sala de aula, o tópico Trigonometria. Então, criamos um modelo preliminar que, acreditávamos, pudesse guiar nossa pesquisa. Fomos em busca do que outros pesquisaram sobre o assunto, para poder relacionar nossas próprias idéias com as idéias desses outros, a fim de encontrar justificativas para a proposta a ser colocada. Ao analisar o que outros pesquisaram sobre o assunto, sentimos que deveria surgir uma conjectura ou uma pergunta para ser trabalhada por nós.

4.2. Nossa pesquisa dentro da Metodologia de Romberg

4.2.1. Identificando o Fenômeno de Interesse

O ensino de Matemática tem-se tornado alvo de discussões nos meios acadêmicos preocupados com o caráter seletivo a ele impresso desde os primórdios de sua organização e sua implantação oficial nas escolas de todo o mundo. Essa preocupação tem gerado várias análises e interferências, por parte de pesquisadores em Educação Matemática, em busca de soluções para os problemas ligados ao ensino e à aprendizagem, a fim de contribuir para a melhoria do ensino oferecido à sociedade. Assim, pesquisadores nessa área em todo o mundo procuram solucionar dificuldades apontadas por professores e vivenciadas por estudantes de diferentes níveis de ensino e, porque não dizer também, de diferentes níveis sócio-culturais,

durante suas atividades escolares ou, até mesmo, diante de uma situação-problema de seu cotidiano que envolva o conhecimento matemático.

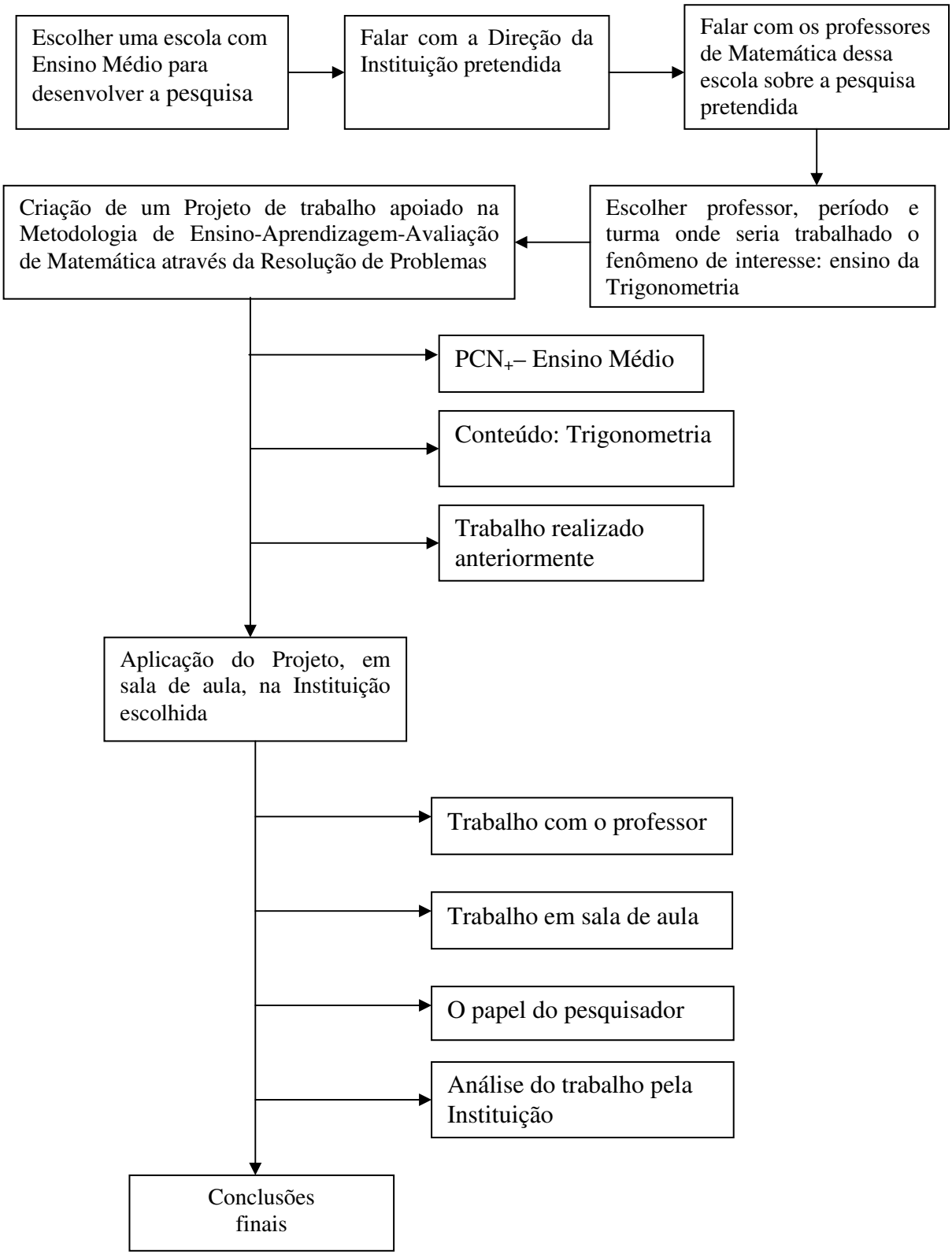
Com nosso trabalho desenvolvido com alunos de Itapecerica da Serra, durante as reuniões do GTERP e em conversas com nossa orientadora, o tópico matemático Trigonometria apareceu como de interesse ou como ponto de partida para um trabalho de pesquisa. Portanto, nosso fenômeno de interesse firmou-se como:

O ensino de Trigonometria através da resolução de problemas

Concordamos com os PCN+ Ensino Médio – quando dizem que a Trigonometria é, em geral, apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações trigonométricas, em detrimento de aspectos importantes das funções trigonométricas e das análises de seus gráficos. Assim, para nós, o que deve ser assegurado a esse trabalho são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. O interesse deste assunto também é justificado por nossa trajetória no magistério.

4.2.2. O Modelo Preliminar

O modelo preliminar nos deu uma primeira imagem da pesquisa que pretendemos fazer, sendo que o fluxograma abaixo mostra aspectos importantes que se constituem nas variáveis do fenômeno de interesse. O fluxograma serve como ponto de partida e sugere uma orientação que reflete a idéia inicial do pesquisador sobre o fenômeno que pretende trabalhar. Sendo assim, há uma possibilidade de que o fluxograma de pesquisa não seja seguido ao pé da letra, ou seja, que pode ser alterado de acordo com a realidade da pesquisa desenvolvida.


Escolher uma escola com Ensino Médio para desenvolver a pesquisa
Falar com a Direção da Instituição pretendida
Falar com os professores de Matemática dessa escola sobre a pesquisa pretendida
Escolher professor, período e turma onde seria trabalhado o fenômeno de interesse: ensino da Trigonometria
Criação de um Projeto de trabalho apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
PCN+– Ensino Médio
Conteúdo: Trigonometria
Trabalho realizado anteriormente
Aplicação do Projeto, em sala de aula, na Instituição escolhida
Trabalho com o professor
Trabalho em sala de aula
O papel do pesquisador
Análise do trabalho pela Instituição
Conclusões finais

4.2.3. Relacionar com Idéias de Outros

Nesta etapa, ao relacionar com idéias de outros, o pesquisador se depara com quem já trabalhou sobre o seu fenômeno de interesse, onde se pode assumir que as idéias deles podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou até mesmo alterar o modelo preliminar construído.

Nesse sentido a Educação Matemática vem apresentando um grande número de pesquisas com tendências variadas que procuram, de acordo com seu fenômeno de interesse, contribuir para uma melhoria no ensino de Matemática. Essas tendências apresentam alguns eixos diretivos que norteiam o desenvolvimento de diferentes estratégias. Destacam-se, entre outros, como metodologias de ensino, a "Resolução de Problemas", o uso de "Jogos e Materiais Concretos", a "Etnomatemática", a "Modelagem Matemática", a "Informática Educativa" e o uso da "História da Matemática", além de alguns estudos de cunho psicológico, freqüentemente centrados numa perspectiva construtivista de ensino da Matemática.

Schifter e Fosnot (1993), na página 9, dizem que

> Se a criação de redes conceituais que constituem cada mapa da realidade de um indivíduo – incluindo sua compreensão matemática – é o produto de atividade construtiva e interpretativa, então segue que, não importa quão lucidamente e pacientemente os professores expliquem para seus estudantes, eles não podem compreender por seus estudantes.

Trabalhamos, dentro de nossa área de pesquisa, com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Assim, nossa pesquisa estará apoiada especificamente num trabalho sobre Trigonometria, como conteúdo matemático, e fundamentada na Resolução de Problemas, como procedimento de trabalho.

Como já pesquisamos, no Capítulo 2, as idéias de outros em Resolução de Problemas, nesta atividade nos relacionaremos com outros que trabalharam e trabalham sobre o ensino da Trigonometria em sala de aula. Suas idéias serão então apresentadas e, na hora de criarmos nosso projeto, destacadas aquelas nas quais nos apoiaremos.

4.2.3.1. A história da trigonometria

Segundo Kennedy, E. S. (1993), em sua publicação "Trigonometria", traduzida por Hygino H. Domingues, da série Tópicos da História da Matemática para uso em Sala de Aula, a trigonometria, talvez mais do que outros ramos da Matemática, desenvolveu-se como resultado de uma interação contínua e fértil entre oferta e demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única

ciência aplicada, a Astronomia. Essa relação era tão íntima que, só no século XIII, tornou-se proveitoso considerar os dois assuntos como tópicos separados.

Citando Kennedy (1993, p. 1) escrevemos

> O mesmo tipo de interação entre teoria e aplicação ocorreu continuamente dentro do próprio corpo do material teórico – interação entre análise numérica e geométrica. Considerações algébricas, no sentido de operações discretas efetuadas sobre classes de objetos, desempenharam um papel primordial e essencial, embora o simbolismo, freqüentemente considerado como sendo a marca da álgebra, só tenha sido introduzido no séc. XVI. Assim, a história da trigonometria mostra, em seu interior, o crescimento embrionário de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria.

Falando do início da História da Trigonometria, Kennedy (1993, p.1) diz que os primórdios de seu desenvolvimento perdem-se na pré-história. Podem ser identificados nas primeiras seqüências numéricas relacionando comprimentos de sombra com horas do dia. Depois disso, houve como que um hiato separando as obras de Hiparco para solução numérica de figuras planas. Essa trigonometria era baseada numa única função, a corda de um arco de círculo arbitrário que, com o teorema de Menelau, tornou possível a extensão dessa disciplina à esfera.

Sabe-se, através dos escritos de Kennedy (1993, p.2), que esses acontecimentos se originaram em geral na região do Mediterrâneo leste. Seus registros foram escritos em grego e ficaram bem estabelecidos por volta do século II de nossa era. Deslocou-se então para a Índia (onde a função corda transformou-se em variações do seno) e, então, percorreu parte do caminho de volta, no período do século IX ao século XV, na região que se estende da Síria à Ásia Central e a nova função seno e as antigas funções sombra (tangente, co-tangente, secante, etc.) foram tabuladas em sexagésimos. Com este desenvolvimento surgiu a primeira trigonometria genuína e o objeto de estudos tornou-se o *triângulo* plano ou esférico, seus lados e ângulos.

Ainda, com o centro das atividades em Astronomia deslocando-se para a Europa, ocorreu a mesma mudança com a nova Trigonometria. O mesmo tipo de trabalho que ocupara os cientistas orientais – a saber, o cálculo de tábuas e a descoberta de relações funcionais entre partes do triângulo – teve continuidade no Ocidente. Entretanto, uma nova contribuição européia foi a substituição de regras verbais por símbolos apropriados. Com a criação do Cálculo Infinitesimal já se podia ver o rápido fim da trigonometria como um ramo independente e em desenvolvimento da Matemática. Após a descoberta e exploração do domínio complexo, essa teoria passou a fazer parte da Análise Matemática. Com Leonhard

Euler e outros, no final do século XVIII, todos os teoremas da Trigonometria já se apresentavam como corolários da teoria das funções complexas.

Garnica, no prefácio do livro de Maria José L. Brighenti, intitulado Representações Gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos (2003), diz que "esse livro traz, além de uma sistematização de atividades plasmadas em David Ausubel e sua teoria cognitivista, um exame sobre formas de avaliação consistentes com sua proposta".

Garnica ainda afirma que, segundo Peirce, para desenvolver o significado do pensamento, precisamos somente determinar que hábito de ação ele produz. Diz ainda que, para Peirce, o aspecto central de toda aprendizagem é a produção de significados que se dá sempre no interior de atividades.

Em seu livro, Brighenti fala sobre uma proposta para trabalhar a Trigonometria em sala de aula. Sua proposta de trabalhar Trigonometria, em salas de escola pública de Ensino Médio, apresenta 16 atividades que foram desenvolvidas com fortes mudanças em relação ao que normalmente é ensinado nesse nível de ensino. As atividades sugeridas por ela envolvem os principais conceitos trigonométricos e procura 'ancorar' um novo conhecimento em conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno.

No livro de Brighenti, na página 35, entre outras, encontramos uma interessante fala sobre origem, importância e aplicação dos conceitos trigonométricos, que aqui reproduzimos

> A Trigonometria surgiu, no século V a.C., para resolver problemas práticos oriundos das necessidades humanas como, por exemplo, solucionar problemas ligados ao transporte e à comunicação, exigindo do homem criatividade.
> Tentando resolver problemas ligados à navegação, os gregos interessaram-se pela Astronomia e chegaram a determinar a medida da Terra, a distância da Terra à Lua, etc.

Segundo ela, a Trigonometria que surgiu para atender as necessidades do homem, resolvendo problemas específicos de Astronomia, Agrimensura, Geodésia e outros, revelou-se depois mais útil do que inicialmente foi pensada. Junto com outros conceitos básicos da Matemática, também, diz ela que foi utilizada em situações bem mais complexas do que as iniciais. Ampliou as possibilidades de resolução de problemas que apenas utilizavam as "relações métricas" nos triângulos, permitindo relacionar as medidas de lados e de ângulos. Atualmente, com a evolução de outras teorias, a Trigonometria desempenha um papel de grande importância em áreas como Cálculo e Matemática Aplicada.

Sua origem foi marcada pelo uso de conceitos geométricos. Aos poucos, esses conceitos estão sendo substituídos pelo uso de procedimentos algébricos que privilegiam as ações mecânicas e sem muito significado para o aluno.

Em seu livro, na página 35, Brighenti, afirma que no século XVII, com o surgimento do Cálculo Infinitesimal, com Euler (1748),

> a Trigonometria passou a ter a forma atual, surgindo uma nova dimensão para as noções do seno, do cosseno e da tangente. A medida do raio foi adotada como unidade e as funções trigonométricas podem, então, ser aplicadas a todo número real e não apenas a um ângulo, como era feito até então.

4.2.3.2. O ensino da trigonometria nos PCN–Ensino Médio

> A compreensão da Matemática é essencial para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.
>
> (PCN, 1999, p. 80)

Segundo os PCN–Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (1999, p.82), a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo mas, também, desempenha um papel instrumental, porque é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em praticamente todas as atividades humanas. Em seu papel de formação, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance estão além da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas, gerando hábitos de investigação, proporcionando segurança e liberdade para analisar e enfrentar situações novas. Quanto ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, o aluno deve vê-la como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas em outras áreas do conhecimento.

Todavia, a Matemática, no Ensino Médio, não possui apenas o caráter de formação ou instrumental mas, também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É de extrema importância que o aluno entenda que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros, utilizados para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

Ainda, os PCN–EM dizem que a essas concepções da Matemática, no Ensino Médio, une-se a idéia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter tido contato com vários campos do conhecimento matemático e, agora, estão em condições de usá-los e ampliá-los, desenvolvendo de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de variados tipos, investigação, análise e compreensão de fatos que envolvem a Matemática e a interpretação da realidade.

Finalmente, cabe à Matemática no Ensino Médio apresentar ao aluno, o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que lhe seja possível continuar

aprendendo. Dizem os PCN–EM que saber aprender é a base para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Certamente cabe, a todas as áreas do Ensino Médio, ajudar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

Dadas essas considerações sobre a importância da Matemática no Ensino Médio, agora podemos citar alguns objetivos indicados, nos PCN–EM, para colaborar com a aprendizagem real e significativa pretendida para o aluno.

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar, com confiança, procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão de conceitos matemáticos;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos, e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo.

Para os PCN–EM, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos, em Matemática, escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento das atitudes e habilidades já descritas.

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático.

Um exemplo claro disso pode ser observado com relação às funções. Uma parte importante da Trigonometria refere-se às funções trigonométricas e seus gráficos. Outro tema que exemplifica a relação aprendizagem de matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem as medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

Os PCN–EM, em 1999, na página 81, escrevem que

> à medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. [...]
> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

4.2.3.3. O ensino da trigonometria nos PCN$_+$ – Ensino Médio

No jornal Folha de S. Paulo, do dia 30 de janeiro de 2006, caderno A, página 3, no artigo "O caminho da excelência", escrito por Arnaldo Niskier, encontramos uma sua mensagem que diz:

> Acreditamos que uma direção eficiente, professores valorizados e alunos incentivados são a base indispensável para fazer a educação acontecer. A importância desses três elementos é a mesma, pois, se qualquer um dos pilares falhar, o processo educacional fatalmente será prejudicado.

Pesquisadores da Educação acreditam que o Ensino Médio deve preparar o aluno para responder as seguintes questões:

> Qual a relação entre ciência e humanidades?
> Quão importante é essa relação para o bem estar dos seres humanos?

Os sistemas e os estabelecimentos de Ensino Médio devem criar e desenvolver, com a participação de professores e da comunidade, alternativas institucionais com identidade própria, baseadas na missão de educação do jovem, usando as várias possibilidades de organização pedagógica, espacial e temporal.

Em 2002 foram lançados os PCN$_+$–EM, buscando contribuir para a implementação das reformas educacionais, definidas pela nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e regulamentadas por Diretrizes do Conselho Nacional de Educação. Essa publicação tem, entre seus objetivos centrais, o de facilitar a organização do trabalho da escola, em termos da área de ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Além de abrir um diálogo sobre o projeto pedagógico escolar e de apoiar o professor em seu trabalho, o texto traz elementos para a continuidade da formação profissional docente na escola.

Como, em nossa sociedade atual, dizem os PCN_+–EM, o conhecimento de Matemática é essencial em todas as ocasiões, quer como ferramenta para trabalhar em outras áreas, quer como instrumento para tratar situações cotidianas na escola e fora dela, assim, no Ensino Médio, etapa final da educação básica, faz-se necessário um trabalho exigente para professores e alunos.

Nos PCN_+–EM, na página 111, podemos ler que

> aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Para alcançar esses objetivos, a resolução de problemas é fundamental, é peça central para o ensino de Matemática, pois pensamento e ação se unem e se desenvolvem quando se está frente a um desafio. Na resolução de problemas, o aluno deve se deparar com situações complexas e diversificadas, muitas até relacionadas ao cotidiano, onde ele pode pôr em prática o que já aprendeu.

Para uma forma alternativa do ensino de Trigonometria, na 2ª série do Ensino Médio, o professor deve estar ciente de que é necessário, ao aluno, conhecer vários tópicos matemáticos já trabalhados ao longo de sua escolaridade.

Nos PCN_+–EM, na página 120, podemos ler que "um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas, com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos, pode ser sistematizado nos três eixos seguintes: (1) Álgebra: números e funções; (2) Geometria e medidas; (3) Análise de dados".

(1). Álgebra: números e funções

Para o desenvolvimento deste eixo, Álgebra, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria. Os procedimentos básicos desse tema referem-se a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações, no conjunto dos números reais, e as operações válidas para o cálculo algébrico. Dentro da unidade temática **variação de grandezas** temos a noção de função; representação e análise gráfica; funções seno, cosseno e tangente; e taxa de variação de grandezas ... O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema. ... Os PCN_+–EM ainda dizem que tradicionalmente, o ensino

de funções estabelece como pré–requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações. ... Na unidade **trigonometria**, o trabalho deve ser feito sobre triângulos retângulos e triângulos quaisquer.

(2). Geometria e medidas

Segundo os PCN_+–EM, usar formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e a construção de modelos para a resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, Geometria e medidas, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

Para este eixo vê-se que parte do trabalho da Trigonometria com Geometria está estritamente ligado às medidas, que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas.

(3). Análise de dados

Os PCN_+–EM dizem que a Matemática do Ensino Médio pode ser determinante para a leitura das informações que circulam na mídia e em outras áreas do conhecimento, na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico. Contudo, espera-se do aluno, nessa fase da escolaridade, que ultrapasse a leitura de informações e reflita mais criticamente sobre seus significados. Assim, o tema proposto, análise de dados, deve ir além da simples descrição e representação de dados, atingindo a investigação sobre esses dados e a tomada de decisões.

Uma combinação desses três tópicos é o essencial para cada uma das três séries do Ensino Médio. Podem ser acrescentados outros temas ou dar mais enfoque a alguns dos temas já apresentados, uma vez que esta é apenas uma sugestão e cada escola deve se adequar a suas necessidades e as da comunidade a que serve.

Também é útil lembrar que o modo como o professor prepara e executa suas aulas é importantíssimo e influencia muito na maneira como os alunos enxergam a disciplina. A utilização do trabalho em grupo e formas alternativas de avaliação contribuem, e muito, para uma melhor aprendizagem e levam o estudante a tomar gosto pela disciplina, ao invés de enxergá-la como uma simples obrigação.

Ainda, nos PCN_+–EM, página 132, encontramos

> [...] é importante lembrar que o projeto pedagógico escolhido pelo professor deve ter como alvo o desenvolvimento das competências eleitas pela área e que os temas de trabalho se articulem entre si por meio delas. Competências como a da comunicação oral e aquelas relativas à contextualização sócio-cultural dependem da forma como se desenvolverá o trabalho. Se aos alunos não forem apresentadas propostas de análise de situações em contextos sociais ou culturais, ou se lhes for negada a oportunidade de falar e se posicionar, essas competências dificilmente serão desenvolvidas pelo projeto pedagógico da escola.

4.2.3.4. O ensino da Trigonometria nos Standards 2000

O NCTM, em busca de uma reforma na Educação Matemática publicou três documentos:

- Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, em 1989;
- Professional Standards for Teaching Mathematics, em 1991;
- Assessment Standards for School Mathematics, em 1995,

sempre lembrando que o propósito da Educação é preparar os estudantes a não só fazer disso um meio de vida mas, sim, de fato, poder construir para uma vida como se pode ver no documento Mathematics - making a living, making a life, destinado a informar, à comunidade toda, sobre as mudanças ocorridas em Educação Matemática.

A partir de 1995 começou, nos Estados Unidos, uma verdadeira "guerra matemática". Alguns matemáticos e um certo número de pais de alunos iniciaram uma série de críticas à reforma pretendida pelo NCTM. Essa luta continuou por certo tempo e, com matéria paga, o jornal "Washington Post" publicou uma página inteira pronunciando-se contra essa reforma. O NCTM, então, após uma década de aplicação das idéias defendidas pelos Standards, trabalhou sobre as críticas e sugestões recebidas e produziu a publicação "Principles and Standards for School Mathematics[8]", conhecida por Standards 2000, que foi lançada em abril de 2000 no Encontro Anual do NCTM em Chicago. Esta publicação refina e elabora as mensagens detalhadas nos Standards originais mas conserva intacta sua visão básica.

> No percurso todo do século XX a comunidade matemática americana se deparou com a necessidade de investigar que matemática os estudantes deveriam aprender, por que eles deveriam aprendê-la e como a mesma lhes deveria ser ensinada.
>
> KILPATRICK (2000)

Nos Standards 2000, na página 287, dirigindo-se a estudantes dos graus 9–12, lê-se que os estudantes da escola secundária enfrentam escolhas e decisões que determinam o curso de suas vidas. Enquanto eles abordam o fim de uma escolaridade requerida, devem ter

[8] Princípios e Padrões para a Matemática Escolar - NCTM

oportunidade de explorar os interesses de uma carreira que pode mudar durante a "High School". Ainda, o NCTM coloca, na página 288, que se espera que todos os estudantes estudem matemática em cada um dos quatro anos em que se sentem envolvidos com a High School.

O NCTM, nos Standards 2000, com a finalidade de atingir um ensino de matemática de qualidade, nos apresenta 6 (seis) princípios: Eqüidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia, que devem reger toda a Educação Matemática escolar. Nele podemos ler que excelência em Educação Matemática requer eqüidade.

O **Princípio da Eqüidade** requer altas expectativas e apoio forte para todos os estudantes. A eqüidade requer acomodações e diferenças para ajudar cada um a aprender matemática. Acomodação, nesse sentido, não significa dar moradia ou outras vantagens, mas são aulas de reforço para alunos que não conseguem aprender dentro do tempo planejado. Se o professor puder dar um tempo especial para que haja aprendizagem, isto faz diferença. A eqüidade requer recursos e apoio para todas as salas de aula e todos os alunos. Ainda deve haver material necessário para trabalhar com todos.

O **Princípio do Currículo** deve ser coerente e enfocar sobre a matemática essencial e estar bem articulado através das séries. Um currículo é mais do que uma coleção de atividades.

O **Princípio do Ensino** diz que um ensino de matemática eficiente requer conhecimento do que os estudantes sabem e do que precisam aprender e, então, passa a desafiá-los e a apoiá-los a saber bem.

O **Principio da Aprendizagem** diz que os estudantes precisam aprender matemática com compreensão e, para isso, devem ativamente construir novo conhecimento a partir de experiência e conhecimento anterior.

O **Princípio da Avaliação** afirma que a avaliação apoiaria a aprendizagem de matemática essencial e daria informações úteis tanto a professores quanto a alunos.

O **Princípio da Tecnologia** diz que a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática. Ela influencia a matemática que está sendo ensinada e aumenta a aprendizagem dos alunos.

Também, os Standards 2000 apresentam 5 (cinco) **Padrões de Conteúdo (0 quê?)**: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; e Análise de Dados e Probabilidade, que explicitamente descrevem o conteúdo que os estudantes devem aprender.

Os Standards 2000 dizem, sobre o padrão "**Número e Operações**", que os programas de ensino de Matemática, ao longo de treze anos de estudo, deveriam tornar todos os estudantes capazes de:

- Compreender números, modos de representar números, relações entre números e sistemas de numeração;
- Compreender os significados das operações e como elas se relacionam umas com as outras;
- Calcular fluentemente e fazer estimativas razoáveis.

Sobre o padrão "**Álgebra**", os Standards 2000 dizem que os programas de ensino para os treze anos de escolaridade deveriam tornar os estudantes capazes de:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar mudanças em vários contextos.

Sobre o padrão "**Geometria**", dizem que os programas de ensino, nos treze anos de escolaridade, deveriam capacitar todos os alunos a:

- Analisar características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas;
- Especificar locais e descrever relações espaciais usando geometria analítica e outros sistemas representacionais;
- Aplicar transformações e usar simetria para analisar situações matemáticas;
- Usar visualização, raciocínio espacial e modelagem geométrica para resolver problemas.

Colocam também que, sobre o padrão "**Medida**", os programas de ensino, nos treze anos de escolaridade, deveriam capacitar os alunos a:

- Compreender atributos de objetos mensuráveis e unidades, sistemas e processos de medição;
- Aplicar adequadamente técnicas, ferramentas e fórmulas para determinar medidas.

Ainda, quanto ao padrão "**Análise de dados e Probabilidade**", eles dizem que os programas de ensino de Matemática, ao longo de treze anos de estudo, deveriam tornar todos os estudantes capazes de:

- Formular questões que podem ser relacionadas com dados e coletas, organizar e mostrar dados relevantes para respondê-las;
- Relacionar e usar métodos estatísticos adequados para analisar dados;
- Compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.

Prosseguindo, os Standards 2000 apresentam 5 (cinco) **Padrões de Procedimento (Como?)**: resolução de problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação, que realçam os caminhos de adquirir e saber usar o conhecimento de conteúdo construído.

Entendemos que o procedimento **resolução de problemas** significa o engajamento numa tarefa para a qual o método de solução não é de início conhecido. Para achar uma solução, o estudante busca em seu conhecimento existente e, através desse processo, desenvolve novas compreensões matemáticas. Resolver problemas não é somente o objetivo da aprendizagem Matemática mas, também, um meio importante de fazer Matemática.

Raciocínio e Prova em matemática oferece poderosos meios de desenvolver e expressar percepções sobre um grande número de fenômenos. Gente que raciocina e pensa analiticamente, com facilidade, descobre padrões e reconhece estruturas ou regularidades tanto em situações do mundo real como com objetos simbólicos. Uma prova matemática é um meio formal de poder expressar tipos particulares de raciocínio e justificativa.

Comunicação é uma parte essencial da Matemática e da Educação Matemática. É um meio de compartilhar idéias e dar clareza à compreensão.

Através da comunicação, as idéias se tornam objetos de reflexão, refinamento, discussão e mudança. O processo de comunicação também ajuda a dar sentido e continuidade às idéias e as torna públicas. Quando os estudantes são desafiados a pensar e raciocinar em Matemática e a comunicar os resultados de seu pensamento a outros, oralmente ou por escrito, aprendem a ser claros e mais convincentes. Ouvir as explicações de outros lhes dá oportunidade de desenvolver sua própria compreensão.

Conexões - Quando os estudantes conseguem fazer **conexões** entre idéias matemáticas, sua compreensão se torna mais profunda e mais duradoura. Essas conexões podem ocorrer entre tópicos matemáticos, nos contextos que relacionam a matemática a outras disciplinas e dentro de seus próprios interesses. Ao dar ênfase às conexões matemáticas, os professores podem ajudar os estudantes a usá-las na resolução de problemas matemáticos, mais do que em ver a matemática como um conjunto de conceitos e habilidades desconectados e isolados. A oportunidade de os estudantes experimentarem a Matemática num determinado contexto é importante.

Representação – Quando os estudantes têm acesso às representações matemáticas e às idéias que elas representam, eles têm um conjunto de ferramentas que, de um modo significativo, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. O termo representação refere-se tanto a processo quanto a produto. O modo no qual as idéias matemáticas são

representadas é fundamental para mostrar como se pode entender e usar essas idéias. Os modelos permitem uma visão do fenômeno de um mundo real.

Para nossa comunidade de pesquisa, trabalhar Matemática através da resolução de problemas se apresenta como um bom padrão de procedimento. Damos destaque ao padrão de procedimento resolução de problemas, mas deixamos claro que não se deixa de fazer uso dos demais padrões apresentados, sempre que esses processos se mostrem necessários dentro da resolução do problema proposto, dado como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos.

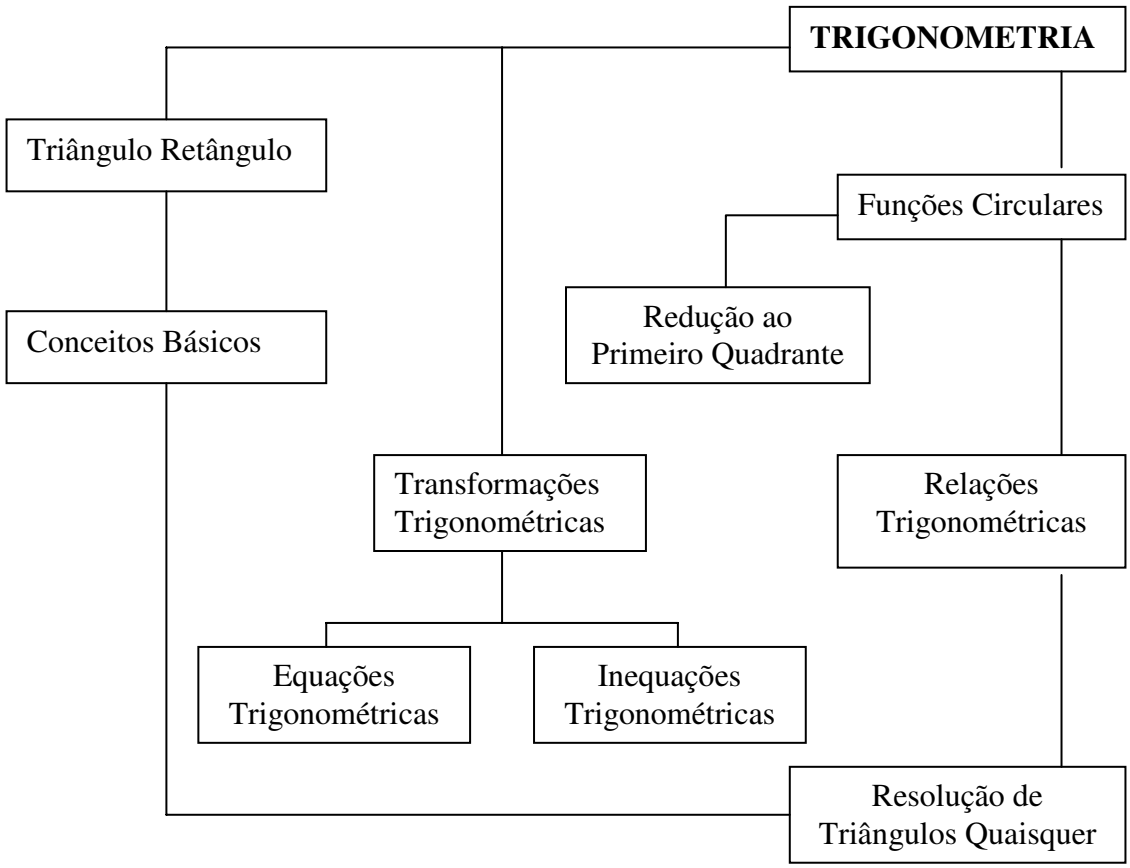
Nos Standards 2000, pode-se ver que a **Trigonometria** não está relacionada como um padrão de conteúdo mas pode-se reconhecer que está bastante ligada aos cinco padrões mencionados. Chamamos a atenção para a importância e a necessidade de os alunos conhecerem a matemática pertinente a esses padrões para, num tratamento de situações que envolvem medidas inacessíveis ou fenômenos periódicos entre outros, seja feito um bom e coerente trabalho em Trigonometria.

4.2.3.5. O tratamento da Trigonometria em livros didáticos

Consultamos vários livros didáticos que, como sabemos, na verdade se constituem como base do trabalho da maioria dos professores que ministram Trigonometria no Ensino Médio. Entre eles:

- Livro A: GIOVANNI, J.R; BONJORNO J.R. – "Matemática 2", Editora F.T.D., São Paulo, 1992.
- Livro B: DANTE, L.R. – "Matemática 2: contexto e aplicações", Editora Ática, São Paulo, 2002.
- Livro C: PIERRO NETTO, S. DI e ORSI FILHO, S. "Quanta - Matemática em fascículos para o Ensino Médio", Editora Saraiva, São Paulo, 2000.
- Livro D: LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. Precalculus with limits – A Graphing Approach – Editora Houghton Mifflin, Boston - U.S.A., 2001.
- Livro E: LARSON, R.; BOSWELL, L.; STIFF, L. Geometry – Measuring, Reasoning and Applying. Editoria Mc Dougal Littell, - U.S.A., 2004.

Os autores do **Livro A**, para a 2ª série do Ensino Médio, apresentam Trigonometria no início do livro e dizem que, atualmente, a Trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como a Análise e outras áreas da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil, etc. O livro apresenta, além de um enfoque histórico, o esquema abaixo de como trabalhar a Trigonometria. É um livro bastante adotado, mas que não foge da linha tradicional. É rico em testes de vestibulares.



No **Livro B** a proposta é diferente. Este trabalha a partir de situações-problema resolvidas segundo as linhas de Polya. Nesse livro a Trigonometria, para os alunos do 2º ano do Ensino Médio, está exposta em sete capítulos. Sua seqüência de apresentação começa revendo a trigonometria no triângulo retângulo; define o ciclo trigonométrico; dá as idéias de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico; faz um estudo das funções circulares; trabalha relações trigonométricas, transformações trigonométricas e a resolução de triângulos

quaisquer. No final de alguns capítulos fala sobre a história da Trigonometria e de sua aplicação.

O **Livro C** integra uma coleção de fascículos, com conteúdos matemáticos distribuídos por assunto e não por série escolar, cabendo ao professor dividir este conteúdo nas três séries. Escolhemos, para nosso trabalho de pesquisa, o fascículo 4 – Trigonometria, que começa com exemplos, situações-problema resolvidas através de diálogos com alunos e professor. Apresenta também grande parte de fenômenos físicos periódicos e, para estudar estas situações, trabalha funções trigonométricas; relações entre as funções circulares de um mesmo arco; operações com arcos; resoluções de triângulos e funções trigonométricas inversas. São trabalhados exercícios variados, segundo o grau de dificuldade apresentada e, também, alguns problemas já oferecidos nos grandes vestibulares do país. Um gabarito é dado no final do fascículo.

No **Livro D**, especificamente no capítulo 4, a partir da página 283, os autores apresentam uma forma de trabalhar Funções Trigonométricas seguindo as seguintes idéias:

- Descrever um ângulo e convertê-lo usando medidas em graus e radianos.
- Identificar o círculo unitário e sua relação com os números reais.
- Estudar aTrigonometria do triângulo retângulo.
- Avaliar funções trigonométricas de qualquer ângulo.
- Usar identidades trigonométricas fundamentais.
- Esboçar gráficos de funções trigonométricas.
- Avaliar funções trigonométricas inversas.
- Avaliar a composição de funções trigonométricas.
- Usar funções trigonométricas para modelar e resolver problemas da vida real.

A partir do capítulo 5, página 375 para frente, o livro trabalha com Trigonometria Analítica. Estudam-se aí, as definições básicas, propriedades, gráficos e aplicações das funções trigonométricas. A partir desse estudo aprende-se a usar as identidades fundamentais para calcular funções trigonométricas; simplificar expressões trigonométricas; desenvolver identidades trigonométricas adicionais; e resolver equações trigonométricas.

No capítulo 6, desse livro D, trabalhando com triângulos quaisquer, tópicos adicionais em trigonometria são apresentados: Lei dos senos; Lei dos cossenos; Vetores no plano; Vetores e produtos vetoriais; Forma trigonométrica de um número complexo. Problemas de origem social iniciam cada atividade.

O **Livro E**, a partir da página 191, no capítulo 4, discute sempre a partir de problemas, em geral ligados a situações sociais, começa sua exposição analisando tópicos geométricos:

congruências de triângulos; discute triângulos e prova coordenada[9]. A partir da página 261, no capítulo 5, o livro trabalha com propriedades de triângulos. No capítulo 7, o livro trata de transformações. As figuras num plano podem ser refletidas, rotacionadas ou transladadas para produzir novas figuras. A nova figura é chamada **imagem** e a figura original é chamada **pré-imagem**. A operação que leva, ou move, a pré-imagem à imagem é chamada uma **transformação**. Este capítulo 7 trabalha com movimento rígido no plano; reflexões; rotações; translações e vetores; deslizamentos; e composição de transformações.

O capítulo 8 define o conceito de semelhança onde começa por analisar razões e proporções. O conceito de **razão** é fundamental no trabalho com a Trigonometria. Nesse capítulo são feitas aplicações desse conceito. Aí também é trabalhada uma forma de transformação não rígida chamada dilatação.

O capítulo 9 estuda a Trigonometria nos triângulos retângulos; o Teorema de Pitágoras e seu recíproco; triângulos retângulos especiais; razões trigonométricas e vetores.

4.2.3.6. O tratamento da Trigonometria em livros não didáticos

Ainda foram consultados, por nós, alguns livros não didáticos de vários autores e revistas relacionadas a proposições de ensino de Trigonometria:

- Livros da Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática
  - "A Matemática no Ensino Médio – volume 1" – 1996, de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. Em seu capítulo 9, os autores discutem funções trigonométricas considerando esse tópico como um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações, que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na ciência e na tecnologia, como pelo papel central que desempenham na Análise. Os autores, nesse livro, dizem que uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são adaptadas para descrever os fenômenos da natureza periódica, oscilatória ou vibratória, que existem em abundância no universo, como o movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.
  - "Temas e Problemas – 2001", dos mesmos autores acima. Este livro trabalha com aplicações da Trigonometria, no capítulo 4. Eles dizem que são poucas as distâncias que podem ser medidas diretamente. Por isso, praticamente tudo o que desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da Trigonometria.

[9] A prova coordenada envolve colocar figuras geométricas num plano coordenado.

- "Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos" – Maria José Lourenção Brighenti, 2003.

  Seguindo a trajetória histórica por ela descrita, Brighenti diz que foi possível encontrar um fio condutor para que a aprendizagem dos conceitos acontecesse de forma significativa "bem natural". Daí, fica clara a necessidade de se trabalhar com os alunos. Primeiramente, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, explorando a idéia de semelhança entre triângulos. Em seguida, inserir esse triângulo num lugar geométrico (a circunferência) que, posteriormente, seria definido como ciclo trigonométrico de raio unitário, explorando os conceitos trabalhados anteriormente no triângulo. Desta forma, aos poucos, define-se o ciclo trigonométrico e as razões trigonométricas estudadas são inseridas nesse ciclo, sendo possível até determinar seus valores trigonométricos para arcos dos limites dos quadrantes, 0º ou 90º, quando já não existem mais triângulos.

4.2.4. Estabelecendo uma pergunta ou conjectura

> Levantar questões ou fazer uma conjectura aceitável é um passo chave no processo da pesquisa porque, enquanto se examina um fenômeno particular, muitas questões potenciais inevitavelmente surgem.
>
> ROMBERG (1992, p.52)

Seguindo os passos do primeiro bloco do modelo de pesquisa de Romberg, a pergunta a ser definida deve estar diretamente relacionada ao nosso fenômeno de interesse e, de certa forma, ligada ao nosso modelo preliminar e a todas as consultas feitas àqueles que trabalham ou trabalharam com Trigonometria. Acreditamos que seja possível dar significado ao ensino da Trigonometria, no Ensino Médio, a partir de um trabalho diferenciado em sala de aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e levando em conta os conhecimentos anteriores dos alunos em sua caminhada escolar.

Optamos por estabelecer uma pergunta. Apoiados nessas idéias e com o desejo de poder motivar alunos e professores diante de situações trigonométricas, a pergunta de nossa pesquisa assim se configura: **O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio**?

Nosso problema está assim definido. Na verdade o que queremos, ao responder a essa pergunta, é mostrar que resolução de problemas é, entre outros, um dos principais caminhos para ensinar, aprender e avaliar a Matemática trabalhada em sala de aula pois, como afirmou Van de Walle (2001, p. 40), a maioria, se não todos, os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Ou seja, tarefas ou problemas podem e devem ser propostos de modo a engajar os estudantes no pensar e desenvolver aquela Matemática importante que eles precisam aprender.

Capítulo 5

A resolução do problema da pesquisa: estratégias e procedimentos

5.1. Introdução

Seguindo o modelo de Romberg, daremos continuidade à nossa pesquisa descrevendo as duas atividades apresentadas no segundo bloco de seu modelo: selecionar estratégias e selecionar correspondentes procedimentos. Escolhida uma estratégia geral, será preciso selecionar estratégias menores necessárias à sua definição. Trabalho análogo será feito para o procedimento geral. Estes procedimentos serão, depois, postos em ação.

Ao ressaltar o papel da Matemática no Ensino Médio, como base para força de trabalho ou para ingresso à universidade, passaremos a defender nossa pergunta: **"O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio?"**.

Temos um problema e buscaremos caminhos para resolvê-lo. Para a resolução deste problema é necessário que se faça uma seleção de estratégias e procedimentos que, postos em ação, levem à criação de um Projeto de Trabalho.

5.2. Estratégias e procedimentos selecionados para a Pesquisa

> A decisão sobre que métodos usar decorre diretamente das questões selecionadas, da visão do mundo onde as questões estão situadas, do 'modelo preliminar' que foi construído para explicar o 'fenômeno de interesse', e das conjecturas que se faz sobre a evidência necessária.
>
> (ROMBERG, 1992, p. 52)

O que é estratégia?

Segundo o Dicionário Aurélio – Básico da Língua Portuguesa, (1988), estratégia é a arte de planejar, aplicando os meios disponíveis com vista à consecução de objetivos específicos.

Que estratégias podem ser levantadas para resolver o nosso problema?

O que é procedimento?

Procedimento é um processo. É um método para cumprir os atos planejados e percorrer os caminhos do processo.

Que procedimentos podemos adotar para resolver o nosso problema?

Recorrendo a nosso modelo preliminar, reconhecemos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e como esses aspectos estão relacionados. Inicialmente selecionamos uma estratégia geral: $\mathbf{E_G}$, seu correspondente procedimento geral: $\mathbf{P_G}$, sua aplicação e buscar sobre ela evidências que atendam à nossa pergunta.

Segundo Romberg, para responder a questões específicas que tenham sido levantadas, evidência deve ser obtida. Neste ponto, que técnicas ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes?

Para responder à nossa pergunta de pesquisa, dentre várias idéias foi selecionada, como estratégia geral, criar um projeto de trabalho. E, para entender como se poderia agir sobre essa idéia, passaríamos, através de um processo, à sua criação.

Para chegar a essa estratégia geral, apoiadas nas variáveis do Modelo Preliminar selecionamos determinadas estratégias menores: $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$, $\mathbf{E_4}$, $\mathbf{E_5}$, $\mathbf{E_6}$, e seus correspondentes procedimentos de ação: $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_5}$, $\mathbf{P_6}$.

Para tornar evidente o fenômeno estudado, fez-se necessário seguir etapas importantes que determinaram os procedimentos adequados à realização das estratégias selecionadas, sendo que, para cada uma delas, foi selecionado um procedimento correspondente. Este é o momento em que colocamos os procedimentos em ação. Foi criado o projeto e, em seguida, feita sua aplicação.

Assim,

$\mathbf{E_1}$. Escolher uma instituição com Ensino Médio para desenvolver nosso Projeto de pesquisa.

$\mathbf{P_1}$. A escolha da instituição.

5.2.1. $\mathbf{P_1}$ em ação - As Instituições com Ensino Médio

A idéia de desenvolver as atividades, com alunos do Ensino Médio, surgiu devido à nossa participação no GTERP, a uma das Disciplinas cursada na PGEM e por termos trabalhado, durante um bom tempo, com alunos do Ensino Médio. Por outro lado, acreditamos que os alunos do Ensino Médio, já possuindo uma certa maturidade, podem chegar a um

ponto de compreensão que os leve a aceitar com mais facilidade a necessidade de aprender Matemática.

Para nossa pesquisa de campo havia três possibilidades: uma instituição particular com Ensino Médio regular, ou pública com Ensino Médio regular ou, ainda, uma instituição com Ensino Médio técnico.

Os alunos das instituições particulares, muitas vezes conseguem sucesso porque têm melhores condições para complementar seu conhecimento, quer por parte da escola ou mesmo da família ou, ainda, de outros cursos paralelos. Já os alunos de escola pública, sem esses recursos, acabam muitas vezes por fracassar, visto que o conhecimento oferecido por ela é, em geral, deficiente, não lhes dando, muitas vezes, oportunidade de crescer. Mesmo que a educação seja encarada como uma esperança para o futuro, ainda persistem desigualdades de oportunidades educacionais, o que é preocupante!

Para a realização desta pesquisa, escolhemos uma instituição pública com Ensino Médio regular, por senti-la um espaço onde se encontram predominantemente as classes menos favorecidas e, por isso mesmo, o ensino se constitui em seu maior desafio.

Assim, definimos que nossa pesquisa seria realizada na Escola Estadual Joaquim Ribeiro, de Rio Claro, SP, escola respeitada, que recebe alunos, na grande maioria, provenientes de classes menos privilegiadas.

E_2. Falar, com a Direção da instituição pretendida, sobre o projeto de pesquisa que desejávamos realizar, através de uma metodologia de ensino alternativa, para o trabalho em sala de aula de Matemática, no Ensino Médio.

P_2. Fazer uma visita à instituição escolhida para solicitar permissão de nela aplicar nosso projeto de pesquisa.

5.2.2. P_2 em ação – Visita à instituição escolhida

Uma vez definida a instituição, fomos visitar essa escola. Havíamos obtido informações dessa instituição por um dos professores de Matemática que lá trabalhara e que, então no doutorado, fazia parte da PGEM da UNESP–Rio Claro. Isso nos ajudou no contato com a Direção e a Coordenação da Escola, facilitando, de certa maneira, nosso trabalho. Essa instituição se localiza no centro da cidade de Rio Claro, na Rua 6, número 437, estado de São Paulo. Na escola funcionam: o Ensino Médio nos três turnos: matutino, vespertino e noturno e o Magistério nos períodos matutino e vespertino.

A escola conta com 20 salas de aula, um anfiteatro, sala de teatro, sala de vídeo, vários laboratórios: um de Física, um de Química, um de Biologia e dois de Informática. Conta também, com uma sala para a Diretoria, duas salas para a Vice-Diretoria, uma sala de Coordenação Pedagógica, uma Secretaria, uma Sala de Professores, uma Cozinha, uma Cantina, uma Biblioteca, uma Sala de Vídeo e instalações sanitárias.

Em relação aos recursos humanos, a escola possui uma Diretora, dois Vice-Diretores, duas Coordenadoras Pedagógicas (uma no período diurno e outra no período noturno), um Secretário, seis Agentes de Organização Escolar, seis Agentes de Serviço Escolar, 52 Docentes, sendo 35 efetivos e 17 ACT (admitido em caráter temporário).

A Escola Estadual Joaquim Ribeiro é considerada de porte médio, com aproximadamente mil e quinhentos alunos matriculados no ano letivo de 2005. Nesse ano eram 45 classes: 16 no período matutino, com quatro classes de 1ª série, cinco de 2ª série, seis de 3ª série e uma 4ª série de Magistério; no período vespertino funcionaram 14 classes, sendo oito de 1ª série, quatro de 2ª série, duas de 3ª série; no período noturno havia 15 classes, sendo quatro de 1ª série, cinco de 2ª série e seis de 3ª série.

Soubemos que, no Plano Pedagógico da escola, a verificação do rendimento escolar abrangia provas e trabalhos de pesquisa. A avaliação era, em geral, expressa por notas inteiras de 0 a 10 e, em relação ao critério de freqüência, os alunos estavam obrigados a atender no mínimo a 75% da carga horária do período letivo.

Segundo a Coordenadora Pedagógica, há um comprometimento dos professores na participação das reuniões de HTPC (horas de trabalho pedagógico coletivo). Para os professores que ministram um número superior a 28 horas/aula, era obrigatória a participação em três HTPC por mês. Caso esse número fosse inferior a 28, a obrigatoriedade passava a ser de apenas duas reuniões, e, se o professor ministrasse aulas em mais escolas, havia obrigatoriedade de participação em pelo menos uma HTPC.

Quando expusemos à Direção a idéia de nosso trabalho de pesquisa, a Diretora concordou conosco prontamente e solicitou um documento por escrito sobre o projeto (documento em anexo). Também, ela pediu que se conversasse com a Coordenadora sobre ele. Segundo a Coordenadora, a escola possui um tipo de trabalho bastante flexível quanto a formas diferenciadas de ensino. Ela, prontamente, concordou com o conteúdo Trigonometria e disse que gostaria que esse trabalho se apoiasse nos PCN_+–EM, especificamente visando à aplicação com o cotidiano. Na conversa com a Coordenadora, ouvimos dela "... toda vez que eu falo, numa reunião de educação, sobre a abordagem de um tópico, dou sempre como exemplo 'para que serve a trigonometria?', porque esse foi problema meu ...".

E_3. Falar com os professores de Matemática dessa instituição sobre a pesquisa pretendida.

P_3. Após a concordância da Direção, falar com os professores de Matemática sobre nossa pesquisa.

5.2.3. P_3 em ação – Encontro com os professores - Alternativas de mudança

O primeiro contato com os professores de Matemática deveria ser estabelecido na semana anterior ao início das aulas. Isso nos possibilitaria conhecê-los, investigar suas disponibilidades em participar de nossa pesquisa e, também, verificar quais eram suas expectativas em relação ao nosso projeto.

Foi também cogitado que, talvez num segundo momento, fosse possível marcar alguns encontros, convidando todos os professores de Matemática da instituição, para poder discutir o projeto que envolvia o ensino da Trigonometria. Decidimos que os encontros seriam gravados em fita de vídeo, fotografados e registrados em diário de campo pelo pesquisador, com a possível ajuda de um dos membros do GTERP, que poderia auxiliar na descrição desses encontros.

Como nossa intenção era chegar a uma forma diferente de ensino, lembramos que os PCN_+–EM, na página 141, dizem que "há uma questão que é preciso responder, quando se pretende que a escola seja espaço formativo do professor". E continuam dizendo:

> Na realidade os próprios ambientes de formação, no ensino superior, nem sempre se caracterizaram como culturalmente ricos, seja pelas condições materiais, seja pela ausência de discussões, debates, participação em movimentos sociais, ..., ao lado da tão prejudicial separação entre aquilo que o professor aprendeu em sala de aula ou nos estágios que fez, e o que de fato necessitaria para seu trabalho efetivo. Por isso, nem faz sentido, de imediato, propor que os professores retornem a seus centros formadores.
> Para suprir carências crônicas de caráter técnico e cultural, seria essencial oferecer a um grande número de professores uma oportunidade de desenvolvimento em condições regulares de trabalho na escola, pois muitos deles, desde sua formação inicial e ao longo de sua vida profissional, têm acesso limitado a livros, revistas, vídeos, jornais, filmes e outros produtos culturais.

Com a exposição de nosso projeto, acreditávamos que, de certa forma, a universidade, através do GTERP, poderia estar participando diretamente com os professores de Matemática nessa instituição. E, ainda, segundo os PCN_+–EM, isso poderia ser dito de maneira ainda mais radical, ou seja, se há algo de realmente importante que o professor possa fazer para seus alunos é lhes ensinar a aprender e isto significa dar exemplo da necessidade e da possibilidade do permanente aprendizado e testemunho de que este aprendizado é prazeroso.

A bem da verdade, não foi possível realizar o encontro pretendido com os professores de Matemática dessa instituição, pois já se havia programado dar início ao ensino de Trigonometria, na 2ª série do Ensino Médio, no 1º bimestre do ano letivo.

Assim, também, a escolha do professor aconteceu rapidamente, pois um dos professores da Escola Estadual Joaquim Ribeiro, que trabalharia Trigonometria, havia sido membro do GTERP e, portanto, já conhecia um pouco o trabalho de ensinar Matemática através da resolução de problemas.

E_4. Buscar uma turma e conhecer o período onde poderia ser trabalhada a Trigonometria nessa instituição.

P_4. Escolher período e turma onde seria trabalhada a trigonometria.

5.2.4. P_4 em ação – Os participantes, o período e a turma escolhidos

Os participantes de nossa pesquisa serão a professora da turma, a turma 2.7 de estudantes do período vespertino e o pesquisador.

A professora participante leciona na instituição escolhida e está fazendo o Mestrado em Educação Matemática, na Unesp – Rio Claro, o que facilitou nossa escolha da turma.

Para definir o perfil de nossos estudantes, buscamos dados junto à secretaria da escola e informações da professora. A escolha da turma foi feita pela professora. Inicialmente estavam matriculados 35 alunos. No primeiro bimestre foram transferidos alguns alunos, restando 27 alunos presentes.

Uma característica da Instituição escolhida é a de ter uma heterogeneidade no perfil dos alunos, muito possivelmente por sua localização central. Observamos que alguns dos alunos vêm de famílias um pouco menos carentes. São pais que se esforçam para poder dar estudo a seus filhos, o que para eles é muito importante. Por outro lado, há alunos cujos pais não se preocupam tanto. Devido a isso, é provável que alguns alunos apresentem problemas, tanto com a aprendizagem quanto com a disciplina.

E_5. Apresentar um Termo de Compromisso, entre professor e alunos, com o objetivo de disciplinar o trabalho em sala de aula.

P_5. Criar um Termo de Compromisso.

5.2.5. P_5 em ação – Termo de Compromisso

Iniciando nosso trabalho com os alunos da turma escolhida, fizemos um debate com a classe buscando esclarecer alguns pontos sobre a dinâmica de sala de aula adotada para o

nosso trabalho, destacando a importância da Matemática em suas vidas e a necessidade que eles têm em utilizá-la sempre.

Preparamos uma primeira versão de um Termo de Compromisso. A apresentamos, aos alunos, dizendo que ele se constitui num acordo feito entre professor e alunos, que serve para dar diretrizes ao nosso empenho na construção de conceitos e conteúdos matemáticos e, também, de disciplinar todas as atividades em sala de aula.

O Termo de Compromisso refere-se às regras que podem orientar professor e aluno no decorrer das atividades estabelecidas para um trabalho organizado e eficiente. Esse documento, preparado para ser obedecido ao longo do ano letivo, tem, por finalidade, fazer com que o professor possa desenvolver seu trabalho dentro de um ambiente que compreende um conjunto de comportamentos do aluno esperados pelo professor e, de outro lado, um conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno.

O Termo de Compromisso tem, como objetivo principal, a formação do cidadão. Um cidadão que conhece seus direitos e seus deveres. Nesse sentido, compreende-se a cidadania como participação social que adota, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, respeito e cooperação.

Depois de entregue e após o debate, professor e alunos analisaram a primeira versão do Termo de Compromisso e sugestões foram feitas de ambos os lados. Foram apresentados direitos e deveres de professor e de alunos. Os alunos perceberam que havia vantagens em se trabalhar dessa maneira, mas sentiam que teriam, também, muitos deveres a cumprir. Sua forma definitiva foi redigida e entregue a cada aluno que, ao concordar com seus dizeres, assinou esse documento juntamente com o professor. Após assinado, esse documento ficou de posse do professor.

Termo de Compromisso

Introdução: Este Termo de Compromisso tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado com a turma 2.7 do Ensino Médio da Escola Estadual Joaquim Ribeiro, na disciplina Matemática.

Conteúdo e Metodologia: A disciplina Matemática será ministrada pela professora da casa, utilizando, sempre que possível, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Normas: O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos com o objetivo de explorar e resolver atividades programadas:

- Todo aluno do grupo deverá engajar-se na exploração dos problemas apresentados;
- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se três na impossibilidade de completar o grupo;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do seu grupo;
- A exploração final e a formalização dos conceitos e conteúdos construídos serão de responsabilidade da professora.

Avaliação: Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V–a, da L.D.B. da Educação Nacional, lei Nº 9394 de 20/12/1996, nos seguintes itens:

- FREQÜÊNCIA – **1 ponto** – "Todos deverão estar presentes no local e horário estipulados."
- TAREFA – **1 ponto** – "As tarefas extra classe serão recolhidas no início de cada aula."
- TRABALHO NO GRUPO – **2 pontos** – "Os trabalhos de grupo serão observados e avaliados pela professora durante toda a atividade."
- PARTICIPAÇÃO – **1 ponto** – "Participação nas discussões e desenvolvimento de atividades propostas."
- PROVA – **5 pontos** – "A avaliação escrita, é constituída de uma prova individual, requerida por Lei e pela Instituição."

Outras resoluções: Questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos e professora, a fim de chegar-se a um comum acordo, ficando estabelecido que essas normas deverão ser cumpridas pelos alunos e pela professora.

Ciente dessas normas, de pleno acordo com todas as condições propostas, assinam abaixo.

Rio Claro, _____ de _____ de 2005.

_____ _____

Professor (a) Aluno (a):

E_6. Utilizar uma metodologia alternativa de ensino para trabalhar Trigonometria.

P_6. A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas será adotada em nosso trabalho de sala de aula.

5.2.6. P_6 em ação – A metodologia adotada na sala de aula

No ensino tradicional vigente, o problema é apresentado, nos livros, no final dos capítulos. Mas, se olharmos na história do homem a Matemática que foi sendo construída, vemos que o problema sempre apareceu primeiro, então, ia-se em busca de sua solução e, a partir daí, construía-se uma teoria.

Como uma grande dificuldade dos alunos em Matemática é a de saber resolver problemas, acreditamos que devemos mudar nossa prática de ensino e buscar novos caminhos para trabalhar a Matemática em sala de aula. Há, atualmente, muitos educadores matemáticos preocupados com um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade. Acreditamos que resolução de problemas se apresenta como um bom caminho para isso.

Acabando a década de oitenta, a Resolução de Problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção de conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno. E, a Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, passa a ser o lema de pesquisas e estudos a partir dos anos noventa.

Schroeder & Lester, em 1989, afirmaram que Ensino de Matemática através da resolução de problemas não tinha sido ainda adotado por muitos professores, autores de livros e promotores de currículos, mas reconheceram que essa linha de trabalho constitui-se numa abordagem mais consistente com as recomendações do NCTM, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução de problemas.

A razão mais importante de se trabalhar a sala de aula usando essa metodologia é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias no trabalho feito, em cada unidade temática, através da resolução de problemas.

Na visão de Onuchic (1999), a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a idéia de que entender é essencialmente **relacionar**. As indicações de que um aluno entende, interpreta mal ou não entende idéias matemáticas específicas surgem freqüentemente quando ele está resolvendo um problema. É importante notar que fazer compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de Matemática, pelos alunos, é mais forte quando auto-gerado do que quando lhes é imposto por um professor ou por um livro-texto. Quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar Matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

Ainda, Onuchic diz que colocando o foco em resolução de problemas, defendemos que: o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória. A atividade matemática escolar não se resume a olhar para coisas prontas e definitivas mas para a construção e a apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade. Não entender um problema é não saber "que ação deve ser executada". Explicar, pois, é fazer o aluno escolher o esquema de ação adequado. É como ensinar a sair de um labirinto. Preparar o aluno para a aprendizagem consiste, assim, em ativar seus esquemas de ação.

Numa sociedade cheia de contrastes, como a que temos hoje, constantemente nos deparamos com situações que nos obrigam a tomar uma decisão. Assim, a capacidade de raciocinar, analisar e refletir faz a diferença. Por isso, acreditamos que o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de resolução de problemas completa um trabalho produtivo, como também possibilita ao indivíduo adquirir o poder de decisão. Assim,

a visão do ensino da Matemática com compreensão lança mão de problemas como geradores de novos conceitos e novos conteúdos.

Para elaborarmos os problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos, necessários ao nosso projeto, usamos livros didáticos, revistas especializadas e calendários de problemas contidos em revistas de Educação Matemática, isto é, situações-problema adequadas à construção de novos conceitos e de novos conteúdos pertinentes à Trigonometria.

Em nossa opinião, é importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada sempre através da resolução de problemas. Tarefas envolvendo problemas são o veículo pelo qual um currículo deve ser desenvolvido. A aprendizagem será uma conseqüência do processo da resolução do problema.

Para implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sala de aula, Onuchic (1999) elaborou um roteiro contendo uma seqüência de atividades:

- **Formar Grupos** – Entregar uma atividade

  Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros.

- **O papel do professor**

  Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

- **Resultado na lousa**

  Com o trabalho dos alunos terminado e entregue por escrito, o professor anota ou pede aos alunos que coloquem na lousa os resultados obtidos por diferentes grupos: resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.

- **Plenária**

  Os alunos todos, de todos os grupos, participam de uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

- **Análise dos resultados**

  Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

- **Consenso**

  A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se consenso sobre o resultado pretendido.

- **Formalização**

  Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto considerado.

Tendo trabalhado cada uma dessas estratégias selecionadas, criamos condições para realizar a estratégia geral $\mathbf{E_G}$.

$\mathbf{E_G}$. Criar um projeto de trabalho e, usando os procedimentos auxiliares trabalhados, chegar ao procedimento geral $\mathbf{P_G}$ que, quando posto em ação, leva à criação de um projeto de trabalho, para a sala de aula de uma turma de alunos da 2ª série do Ensino Médio, da Escola Estadual Joaquim Ribeiro.

$\mathbf{P_G}$. Criação do projeto de trabalho

5.2.7. P_G em ação – O projeto de trabalho: Trigonometria na e além da sala de aula

5.2.7.1. Introdução

Keith Devlin, no Yearbook 2000–NCTM–"Learning Mathematics for a new Century", em seu artigo[10], diz que a Matemática apresenta quatro faces para o mundo: (1) Matemática como cálculo, raciocínio formal e resolução de problemas; (2) Matemática como uma forma de conhecimento; (3) Matemática como um meio criativo; e (4) Aplicações de Matemática.

Diz ela que, para a maioria das pessoas, a educação atual dos graus K-12, na escola americana, concentra-se na primeira face e faz alguma referência à quarta, mas dá pouca ou nenhuma atenção às outras duas faces restantes. Ela diz ainda que, ao entrar no século XXI, a Educação Matemática deveria exibir todas essas quatro faces.

(1) Matemática como cálculo, raciocínio formal e resolução de problemas

Devlin argumenta, dizendo que a primeira face da Matemática é bem familiar à maioria das pessoas. Essa é a face na qual geralmente nos concentramos quando pensamos em Educação Matemática. Embora isso seja tão familiar, a autora diz que não está de forma alguma advogando que abandonemos esse aspecto da Matemática, mesmo que as calculadoras de bolso e o computador tenham tornado desnecessário gastar muito tempo com cálculos.

(2) Matemática como uma forma de conhecimento

Segundo a mesma autora, para a segunda face, é dito que pensar é uma atividade humana e que Matemática é um modo particular de entender os diferentes aspectos do mundo em que vivemos. A Matemática não é, de modo algum, o único meio de conhecer esse mundo. Biologia, Química, Física, Psicologia, Sociologia, Lingüística, Poesia, Pintura, Escultura, Dramaturgia e Literatura são também algumas das muitas outras formas de conhecimento. A Matemática, todavia, é uma forma de conhecimento que tem provado ser desordenadamente bem sucedida. Hoje, raramente, qualquer aspecto de nossas vidas, num modo abrangente e fundamental, não é afetado pelos produtos da Matemática.

[10] The four faces of mathematics

(3) Matemática como um meio criativo

A terceira face é usada como um meio criativo. Pouca gente percebe que a Matemática pode também ser usada como um meio criativo, do mesmo modo que um escultor usa a pedra, um pintor usa tinta e tela, ou um escritor usa a linguagem. Usada como um meio criativo, a Matemática torna visível o invisível. Neste caso, ela toma as idéias criativas produzidas em nossas mentes, que são invisíveis para outros, e as torna acessíveis à percepção pública. Assim, outros podem compartilhá-las e experienciar nossas idéias.

Segundo Devlin, o primeiro uso criativo importante da Matemática ocorreu na Renascença, quando os artistas descobriram como mostrar profundidade numa pintura bidimensional.

(4) Aplicações de Matemática

Obviamente, o uso da Matemática como um meio criativo é uma aplicação da Matemática e assim também seu uso como um meio de conhecer. Então, já entramos em contacto com a quarta face da matemática: aplicações de matemática.

Mas, a autora quer considerar a aplicação de Matemática separadamente, como uma face com características próprias.

Para Devlin, na quarta face, a Educação Matemática deve incluir aplicações e ela diz que, para viver uma vida plena, todos devem ter consciência do que é preciso para tornar essa vida possível. A sociedade moderna depende das muitas aplicações da Matemática que foram desenvolvidas ao longo dos séculos, especialmente ao longo da última metade do século XX.

Devlin relaciona a Matemática com nosso dia-a-dia, dando vários exemplos. De fato muito da Matemática, que está por trás de nosso mundo diário, é avançada e altamente especializada e não há, certamente, necessidade para todos, exceto para um pequeno número de especialistas que querem entender aquela Matemática. Mas, nem todas as aplicações são inacessíveis. Além do mais, com o avanço da tecnologia informática, está se tornando mais fácil fazer com que nossos estudantes efetivamente possam executar algumas aplicações bem escolhidas da Matemática. Desse modo, não estamos somente restritos a falar sobre aplicações. Podemos fazer com que nossos alunos executem algumas aplicações – uma atividade que deveria, definitivamente, estar incluída no conjunto das outras aplicações que a autora está advogando.

Devlin questiona sobre o propósito da educação escolar. Em tempos idos, teria sido possível responder que, pelo menos, uma sua função era a de prover as pessoas jovens com o conhecimento e as aptidões requeridas para as diferentes ocupações. Mesmo que essa visão

tivesse sido um dia defensável, certamente não se aplicaria aos dias de hoje, quando a maioria das ocupações requer conhecimento e aptidões muito especializados e onde a velocidade da mudança é tal que ninguém pode predizer, mais do que uns poucos anos adiante, quais serão o conhecimento e as aptidões mais importantes para esse novo tempo.

No dizer de Onuchic (2004), mudar nosso sistema de educação matemática radicalmente, como primeiro objetivo para a vasta maioria dos estudantes, é criar uma consciência do quê, do como e do porquê da Matemática. É mais do que desenvolver habilidades que somente uma pequena minoria de estudantes irá usar. E isso nos faz chegar a duas importantes razões para mudar: que os cidadãos de amanhã apreciem o papel penetrante da Matemática na cultura onde vivem e que os indivíduos que têm talento e interesse por ela sejam expostos à verdadeira natureza e extensão dela.

Em sua tese de mestrado, Azevedo (2002, p. 89), afirma que

> Não é fácil a construção de um projeto de trabalho em Matemática para a sala de aula. É um trabalho que requer ajuste e concordância de um conjunto de fatores que vão desde a construção do projeto até a obtenção de um espaço físico, passando por um conjunto de ações como preparação de material instrucional, localização de um ambiente adequado e a administração do tempo destinado à sua aplicação. Para a elaboração de uma proposta de ensino-aprendizagem de Matemática, no contexto de um projeto de trabalho para a sala de aula, é necessário levar-se em conta alguns pontos de vista como:
> - a escolha do tema;
> - os objetivos do projeto;
> - a escolha da metodologia adotada; e
> - a elaboração de um roteiro de atividades.

Trabalhar com um projeto representa uma forma disciplinada de se construir conteúdos matemáticos com significado para os alunos. Fazer um projeto de trabalho em Matemática significa estar ligado à investigação, sendo que uma idéia subjacente à realização de um trabalho de projeto é a de aproximar, por um lado, os processos de aprendizagem e, por outro, a metodologia a ser utilizada. Para Skovsmose, o paradigma dos exercícios não pode continuar sendo um dado adquirido no ensino da Matemática. Diz ele que, como os exercícios têm dominado a prática de sala de aula, ao fazer um projeto de trabalho deveríamos abandonar o paradigma dos exercícios e adotar cenários num ambiente de resolução de problemas.

Um cenário de resolução de problemas convida os alunos a formularem questões e a procurarem explicações dos porquês e dos comos com foco em uma prática, onde o professor está constantemente num processo de busca de aquisição de novos conhecimentos e de entender e conhecer os alunos. Quando os alunos se apropriam, desta forma, do processo de

exploração e explicação, o cenário de resolução de problemas constitui-se num veículo de aprendizagem.

A Matemática em ação é uma forma de olhar a Matemática em diferentes contextos

5.2.7.2. O tema do projeto: o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Trigonometria no Ensino Médio através de resolução de problemas

Ao escolher o tema, pensamos na possibilidade de apresentar, aos professores do Ensino Médio, uma proposta de trabalho em Trigonometria para a sala de aula, desde que fosse constatada a importância desse tópico.

Segundo Lima e outros (1996, p.209), como já dissemos,

> As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia), como pelo papel central que desempenham na Análise.

Esses autores ainda dizem que

> O objetivo inicial da trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real.

E continuam dizendo que desde a Antiguidade e até hoje, o homem sempre teve necessidade de avaliar distâncias inacessíveis. Na verdade, são muito poucas as distâncias que podem ser medidas diretamente, com uma trena, por exemplo. Praticamente tudo o que desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da Trigonometria. Apesar dessa importância, eles afirmam que os livros didáticos, para o Ensino Médio, dedicam muitas páginas ao ensino de trigonometria, não deixando claro, nem para o aluno, nem para o professor, para que serve este abundante material trabalhado.

Onuchic (1999) considera que o trabalho de ensino de matemática e particularmente da Trigonometria deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, o problema deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para obter a solução.

O tema Trigonometria vem ocupando lugar de destaque no currículo das disciplinas de Matemática nas escolas de Ensino Médio e Superior. Porém, pesquisas apontam que o mesmo

é apresentado de maneira alienada das situações cotidianas e, além disso, é estudado através de fórmulas que os alunos usam sem produzir o menor significado a respeito delas.

Ao contrário, com nosso projeto, queremos dar oportunidade aos alunos de poderem fazer reflexões que lhes dêem condições para desenvolver sua capacidade de pensar frente a situações-problema envolvendo Trigonometria.

Para trabalhar esse tema, na 2ª série do Ensino Médio, devemos estar conscientes de que conhecimento matemático, já trabalhado com esses alunos, poderemos dispor. Ao reconhecer que certos conceitos são absolutamente necessários para realizar esse trabalho, fizemos um levantamento do que é preciso rever e do que de novo devemos construir, distribuindo-os em três unidades:

Unidade 1: Conceitos básicos e Trigonometria no triângulo retângulo

1.1. Razão e proporção

1.2. Congruências e semelhanças

1.3. Relações métricas no triângulo retângulo e aplicações do teorema de Pitágoras

1.4. O recíproco do teorema de Pitágoras

1.5. Triângulos retângulos especiais

1.6. A idéia de seno, cosseno e tangente

1.7. Propriedades e relações do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

1.8. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

1.9. Medidas indiretas utilizando Trigonometria

1.10. Aplicação além da sala de aula: construção de um teodolito caseiro e resolução de problemas

Unidade 2: A Circunferência e Arcos trigonométricos

2.1. Medidas de um arco de circunferência (ângulos)

2.2. O comprimento de uma circunferência

2.3. O comprimento de um arco de circunferência

2.4. Ciclo trigonométrico e arcos côngruos

2.5. Simetria de Arcos e Redução ao 1^{o} quadrante

Unidade 3: Funções Trigonométricas e resolução de triângulos quaisquer

3.1. Relação Fundamental da Trigonometria e outras relações trigonométricas

3.2. Equações trigonométricas

3.3. Inequações trigonométricas

3.4. Transformações trigonométricas

3.5. Aplicação além da sala de aula: balanço no playground

3.6. Estudo das funções: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante

3.7. Lei dos senos

3.8. Lei dos cossenos

5.2.7.3. Os objetivos deste projeto:

Nosso principal objetivo ao criar este projeto foi o de promover a participação do aluno na construção de seu conhecimento. Essa participação, porém, deve ser orientada tendo em vista os novos conceitos e conteúdos a serem construídos, a partir das atividades propostas pelo professor que deve caminhar junto a eles para que essa construção seja eficiente.

Para tanto, a função do professor deve ser a de orientador da aprendizagem, isto é, a de instigador de idéias, mediador no transcorrer do trabalho e criador de situações de caráter motivador.

A proposta de desenvolvimento do tema, com os alunos, deve ter como ponto de partida a proposição de um problema gerador[11], por meio do qual o trabalho dos alunos poderá levar à discussão de idéias centrais ao tema, levando sempre em conta os objetivos que se quer atingir:

- Desenvolver no aluno tanto as aptidões básicas tradicionais como as aptidões de ordem mais elevada, em um ambiente agradável de resolução de problemas;
- Provocar no aluno uma reflexão sobre seu envolvimento na sociedade, levando-o a compreender seu valor de inserção nela, propiciando uma relação amistosa e, às vezes, até polêmica, levando-o a adquirir confiança em si mesmo, enquanto trabalha em grupo;
- Chegar, a partir da solução do problema, à formalização de novos conceitos e conteúdos relativos à Trigonometria;
- Motivar o aluno a construir conceitos matemáticos através da resolução de problemas;
- Poder construir conhecimento matemático a partir de aspectos práticos do cotidiano (teodolito e balanço).

[11] Como diz Brasil (1964) tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Porém, na história das ciências, notamos que sempre o problema antecede as descobertas, é o provocador dos estudos, o orientador das construções teóricas e o gerador de novos conceitos e novos conteúdos.

5.2.7.4. A metodologia como dinâmica de trabalho deste projeto

Escolhemos para nosso trabalho em sala de aula, como já dissemos, a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas. Os alunos, de posse dessa metodologia, pelo menos desde o início do ano letivo, estarão capacitados a trabalhar conceitos trigonométricos de forma produtiva.

O professor que irá trabalhar Trigonometria, no 2º ano do Ensino Médio, da Escola Estadual Joaquim Ribeiro será responsável por todo o programa curricular dessa série. Como defendíamos um trabalho em Trigonometria apoiado na metodologia citada, esperávamos que esse professor pudesse, desde o início do ano letivo, trabalhar Matemática, utilizando-a. Assim, quando fossem trabalhados os conceitos e conteúdos trigonométricos, os alunos já estariam familiarizados com essa dinâmica.

Aos alunos seria apresentado, na primeira semana de aula, e com eles discutido, um Termo de Compromisso para a disciplina Matemática e que, depois de acordo entre professor e alunos, seria assinado por todos.

Acreditamos que com essa metodologia podem-se criar oportunidades para os alunos desenvolverem as competências e habilidades necessárias para avançar na busca de novos conhecimentos. Essa forma de trabalho lhes dará discernimento e confiança quando colocado frente a situações de escolha.

Não é nosso propósito dar uma receita para o "ensino" desse tópico. Nosso objetivo é apresentar uma forma diferente de trabalhar Matemática com os alunos em sala de aula, sabendo que nesse trabalho podem ser usados recursos como a história da matemática, a tecnologia e até mesmo, quando necessário, uma aula expositiva, com lousa e giz.

Essa Metodologia usa tudo o que havia de bom nas reformas ocorridas em Educação Matemática no século XX: repetição, compreensão, a linguagem matemática da teoria dos conjuntos, a resolução de problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional.

Como dinâmica de trabalho, faremos uso do roteiro apresentado nas páginas 92 e 93, que pode ser usado em sala de aula ao se desenvolver um Ensino-Aprendizagem-Avaliação, que pretende levar à compreensão e significado de matemática através da resolução de problemas.

Na visão dessa dinâmica, é sumamente importante que os alunos desenvolvam habilidades que propiciem um trabalho cooperativo, pois este é o primeiro passo em direção ao ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas. A cooperação é decisiva para o progresso de qualquer atividade humana. Um trabalho cooperativo envolve

um pequeno grupo de aprendizes que trabalham juntos com um objetivo comum e isto é, resolver problemas.

5.2.7.5. A constituição do projeto

Este projeto foi estruturado para ser desenvolvido na Escola Estadual Joaquim Ribeiro-Rio Claro/SP, com estudantes da turma 2.7 do Ensino Médio de 2005. Seriam participantes do projeto 37 alunos, que, em sua aplicação, seriam divididos em grupos. O projeto foi previsto para 40 aulas de 45 minutos.

Inicialmente nosso projeto foi pensado para ser aplicado no 2º semestre de 2005 e, então, haveria tempo para a sua elaboração. Nossa orientadora, por razões de trabalho, foi para os Estados Unidos, deixando-nos a incumbência de preparar o roteiro de atividades a ser aplicado nesse período. Poucas idéias a respeito haviam sido discutidas.

Em contatos havidos, entre Pesquisador e Direção da Escola, soubemos que a Trigonometria seria trabalhada, nesse ano, no primeiro semestre. Ao saber, nossa orientadora, das mudanças ocorridas, tratou de nos enviar, por correio eletrônico, sugestões para a composição desse roteiro. Aceitando algumas dessas sugestões e buscando ajuda na literatura pesquisada, elaboramos um Roteiro de Atividades.

Como a professora da turma já havia feito seu planejamento anual para a disciplina, ela já havia escolhido problemas, em diferentes livros didáticos, para trabalhar a trigonometria no triângulo retângulo. Assim, ao criarmos nosso Roteiro de Atividades, na parte do trabalho envolvendo triângulos retângulos, vários dos problemas planejados pela professora foram incluídos no projeto.

Para nós, todas as atividades oferecidas aos alunos como trabalho, desde que eles não as saibam resolver mas que estejam interessados em resolvê-las, serão vistas como problemas, mesmo que não haja um enunciado formal para elas ou que elas se apresentem nas formas “resolver” ou “simplificar”.

ROTEIRO DE ATIVIDADES

Unidade 1 – Conceitos básicos e Trigonometria no triângulo retângulo

Para trabalhar esta unidade, em três semanas, as seguintes atividades foram idealizadas para serem desenvolvidas em 12 horas/aula. Além disso, outras 3 aulas seriam reservadas para a realização de uma atividade complementar: a construção de um teodolito caseiro e sua aplicação na resolução de problemas fora da sala de aula.

1ª semana (aulas 1-5)

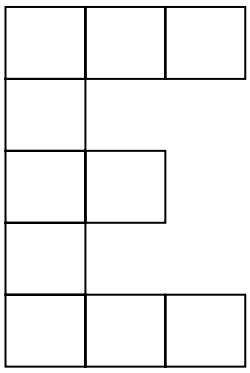
Objetivos das aulas

- Provocar os alunos com problemas, para os quais é necessário relacionar conhecimentos, trazidos da matemática já construída, com atividades de sua prática;
- Fazer uma revisão dos conjuntos numéricos;
- Aprofundar o conceito de número racional e analisar algumas das diferentes personalidades que ele assume: ponto na reta, quociente, fração e número decimal;
- Reconstruir e aprofundar o conceito de razão, outra personalidade do número racional, vista como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, e o conceito de proporção, como igualdade de duas razões;
- Utilizar a semelhança de triângulos para determinar medidas indiretas;
- Perceber, com compreensão, o significado do Teorema de Pitágoras e seu recíproco em triângulos retângulos.

Visando a uma breve revisão de conjuntos numéricos vamos apresentar o Problema 1.

Problema 1[12]

A letra **E**, na figura abaixo, é formada por dez unidades quadradas. Corte essa figura em quatro partes que possam ser rearranjadas formando um quadrado.



[12] Esse problema foi publicado na "Revista de Educação Matemática" - SBEM/SP, ano 8, N° 8, 2003 – p. 28.

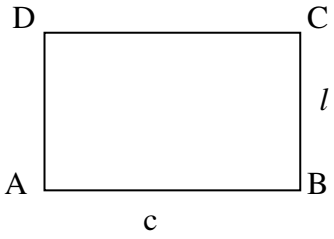
Os problemas abaixo apresentados serão geradores de discussão sobre os conceitos de razão e proporção; congruência e semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo; e aplicações do Teorema de Pitágoras.

Problema 2

Um pedreiro usa 5 latas de areia e 2 latas de cimento para fazer uma "massa" de construção. Para obter a mesma "massa" sabe-se que, sempre, para cada 2 latas de cimento deve colocar 5 latas de areia. Se quiser preparar 63 latas dessa "massa", quantas latas de cimento deve colocar? E quantas latas de areia?

Problema 3[13]

O perímetro do retângulo ABCD é 60 centímetros. A razão de AB:BC é 3:2. Ache o comprimento e a largura do retângulo.

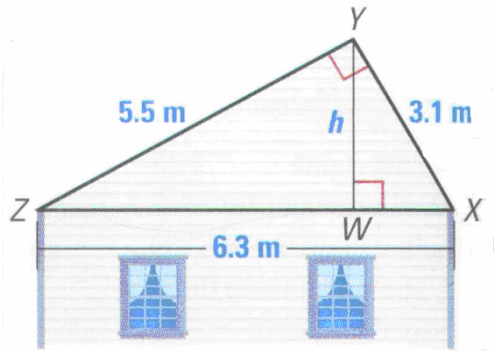


Problema 4[14]

Um telhado tem uma secção transversal que é um triângulo retângulo. A figura mostra as dimensões aproximadas desta secção transversal.

a) Identifique os triângulos semelhantes.

b) Ache a altura h do telhado.

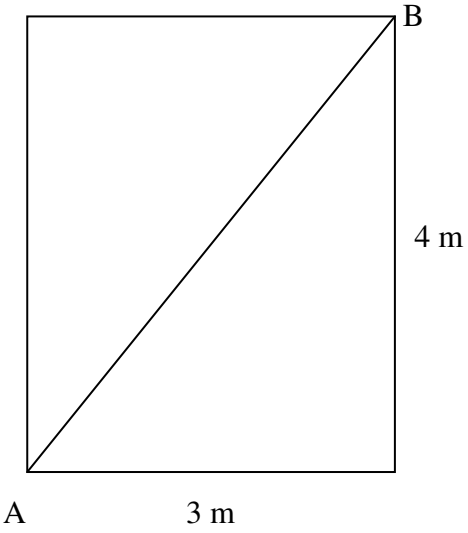


[13] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 458, 2004.
[14] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 528, 2004.

Problema 5[15]

Carolina está parada em um dos cantos de um pequeno jardim retangular de lados 3m e 4m. Ela deseja caminhar até o canto oposto, indo do ponto A até o ponto B (como mostra a figura abaixo) e decide caminhar acompanhando os lados do jardim. Se Carolina houvesse decidido caminhar pela diagonal, indo de A até B diretamente em linha reta, quanto ela caminharia a menos?

a) 1 m
b) 2 m
c) 3 m
d) 4m



Tarefas extraclasse para a 1ª semana

Os problemas seguintes serão dados como atividades de fixação de conceitos já conhecidos e, também, como oportunidade de construção ou reconstrução de outros conceitos, que serão trabalhados em aulas posteriores, individualmente e fora de sala de aula.

***Tarefa 1*:** Dividir igualmente três pizzas entre 5 pessoas. Que parte de pizza come cada pessoa?

***Tarefa 2*:** Suponha que a altura de uma criança seja 1,5m e que, em pé, ele projete uma sombra de 3 m ao mesmo tempo em que uma árvore projeta uma sombra de 12 m. Qual é a altura dessa árvore?

Tarefa 3[16]**:** Encontre a medida da altura de um trapézio retângulo sabendo que suas bases e o lado oblíquo medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 13 cm.

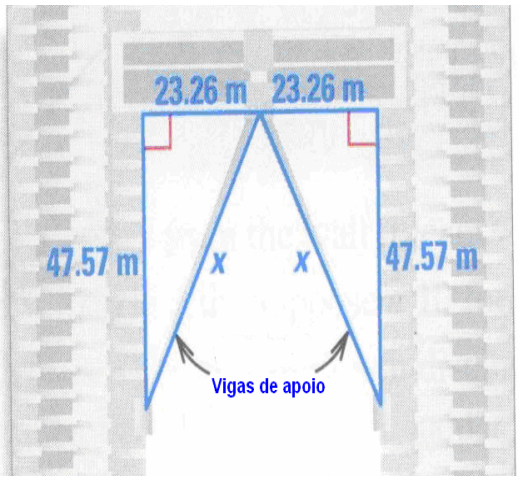
Tarefa 4[17]**:** Sabendo que a altura de um triângulo equilátero mede $4\sqrt{3}$ cm. Pede-se:

a) o seu perímetro b) a sua área.

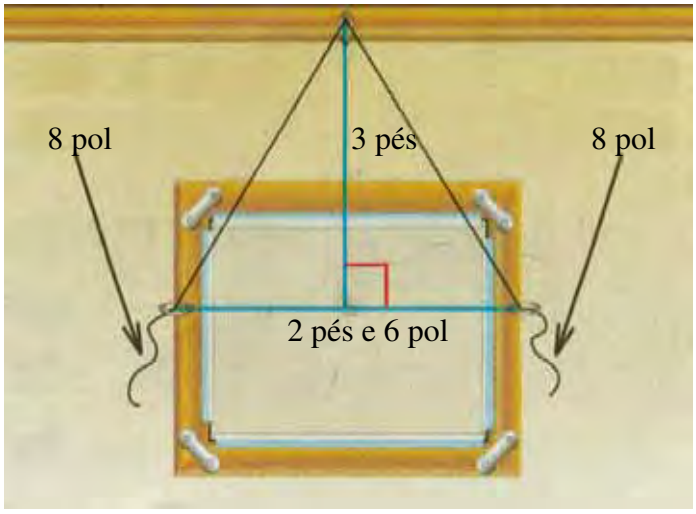
[15] Extraído de SARESP 2005
[16] Extraído do livro "Matemática – Volume único", de Walter Facchini, 1996, p. 282.
[17] Adaptado do livro "Matemática – Volume único", de Walter Facchini, 1996, p. 282.

Tarefa 5[18]**:** Dois aviões partiram do mesmo aeroporto às 9 h. Um dos aviões voa para o Norte a uma velocidade constante de 248 km/h. O outro avião voa para Oeste a uma velocidade constante de 356 km/h. Quão distantes um do outro estarão às 12h 30min?

Tarefa 6[19]**:** Os arranha-céus, mostrados na figura abaixo, estão conectados por uma passarela com vigas de apoio. Você pode usar o Teorema de Pitágoras para achar o comprimento aproximado de cada viga de apoio. Ache o comprimento de cada viga de apoio.



Tarefa 7[20]**:** Você quer pendurar um quadro a 3 pés de um gancho perto do teto de uma galeria de arte, como mostra a figura. Além do comprimento de arame necessário para pendurá-lo, você precisa mais 16 polegadas de arame para amarrar o arame na parte de trás do quadro. Ache o comprimento total de arame necessário para pendurar esse quadro.

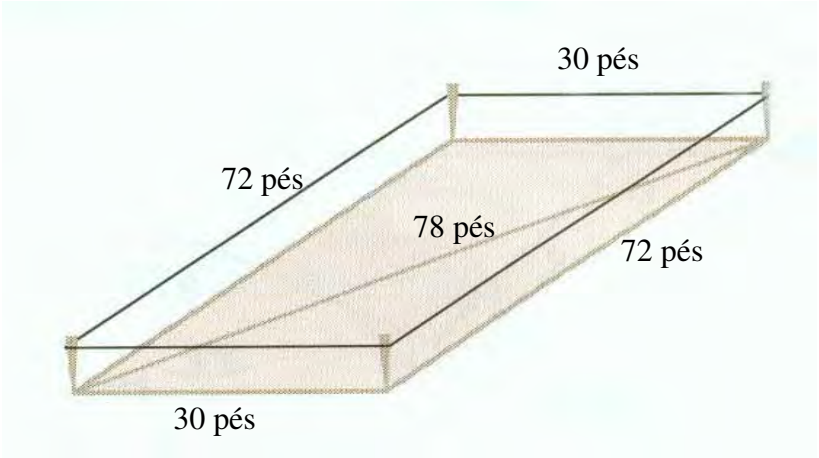


[18] Adaptado do livro: "Matemática Interativa" – Reis e Trovon, 2004, p. 141.
[19] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 537, 2004.
[20] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 539, 2004.

***Tarefa 8[21]*:** Você usa quatro estacas e barbante para marcar a fundação de uma casa. Você quer ter certeza de que a fundação é retangular.

a). Um amigo mede os quatro lados com 30 pés, 30 pés, 72 pés, e 72 pés. Ele diz que estas medidas provam que a fundação é retangular. Ele está correto?

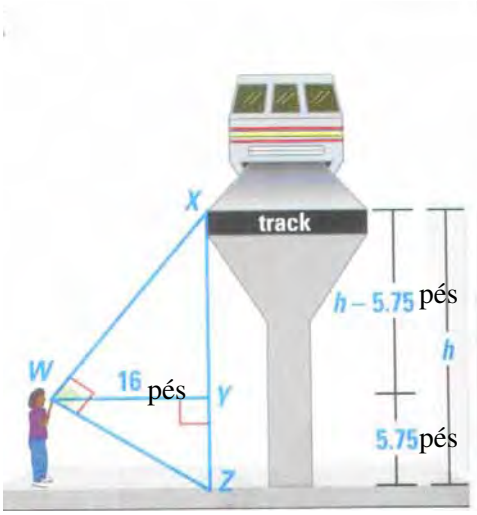
b). Você mede uma das diagonais com 78 pés. Explique como você pode usar esta medida para dizer que a fundação será retangular.



***Tarefa 9[22]*:** Para estimar a altura h da pista de um monotrilho, seu amigo segura um quadrado de papelão no nível do olho. Seu amigo alinha a extremidade superior do quadrado de papelão com a pista e a extremidade inferior com o chão.

Você mede a distância do chão até o olho de seu amigo e a distância de seu amigo até a pista do monotrilho.

Na figura, XY = h – 5,75 pés que é a diferença entre a altura da pista *h* e o nível do olho de seu amigo. Escreva uma proporção envolvendo XY. Então, como você pode determinar h?



[21] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 545, 2004.
[22] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 530, 2004.

2ª semana (aulas 6 - 10)

Objetivos das aulas

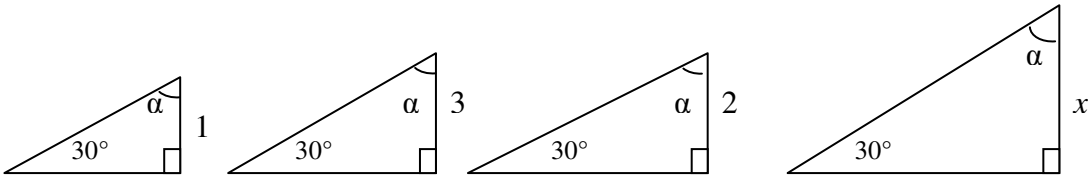
- Reconhecer os elementos de um triângulo retângulo;
- Achar os comprimentos dos lados de triângulos retângulos especiais;
- Compreender o que é seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo;
- Identificar as razões trigonométricas como um caso particular de razão;
- Mostrar a importância das razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Avaliar o desempenho dos alunos, individualmente ou em grupos, de forma continua ao longo da resolução de problemas.

Num triângulo retângulo, seus lados são chamados hipotenusa, o maior, e catetos os que ladeiam o ângulo reto. Os triângulos retângulos cujas medidas de seus ângulos são 45º-45º-90º ou 30º-60º-90º são chamados triângulos retângulos especiais.

Os problemas abaixo apresentados serão geradores de discussão sobre triângulos retângulos especiais. Os conceitos de seno, cosseno e tangente, suas propriedades, relações e as razões trigonométricas no triângulo retângulo serão trabalhados a partir desses problemas.

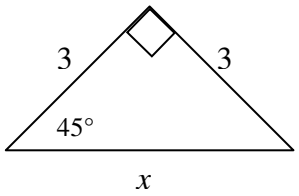
Problema 6

Observem os triângulos abaixo. Eles são de tamanhos diferentes. Entretanto, em todo triângulo retângulo cujo comprimento do cateto menor dividido pelo comprimento do cateto maior seja ½, o ângulo oposto ao lado menor mede 30°. Qual é o valor de x? Qual é o valor de α?



Problema 7[23]

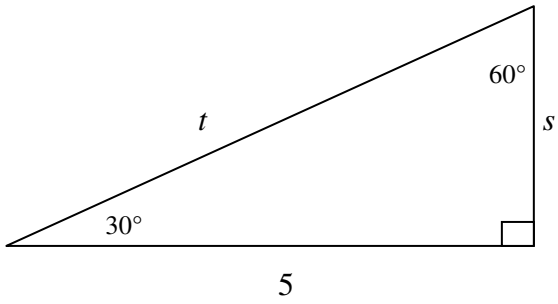
No triângulo retângulo dado ache o valor de x.



[23] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 551, 2004.

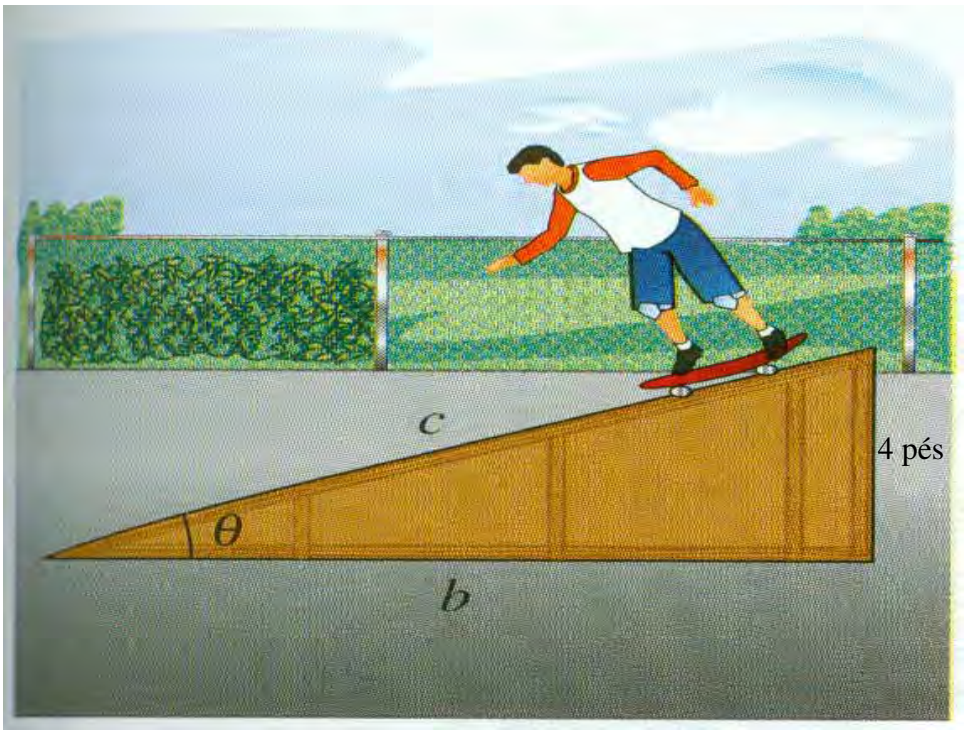
Problema 8[24]

Ache os valores de *s* e *t* (comprimentos de dois lados de um triângulo 30°-60°-90°) e justifique os resultados.



Problema 9[25]

Uma rampa de skate requer uma elevação de um pé para cada três pés de comprimento horizontal. Na figura abaixo, ache os comprimentos de lados b e c e a medida de θ.



Problema 10[26]

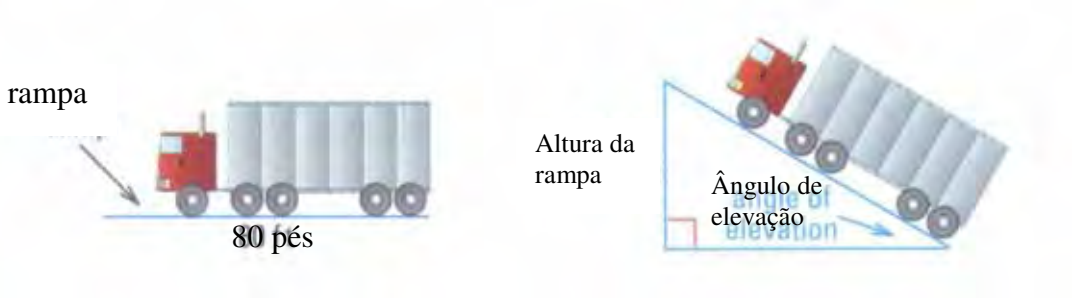
Uma rampa lisa, de 20 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe esta rampa inteira eleva-se verticalmente, em metros:

a) 17 b) 10 c) 15 d) 5 e) 8

[24] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 552, 2004.
[25] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 309, 2001.
[26] Vunesp

Problema 11[27]

Uma plataforma basculante é uma rampa usada para descarregar caminhões, como mostra a figura abaixo. Que altura uma rampa de 80 pés atinge quando é inclinada por um ângulo de 30°? de um ângulo de 45°?



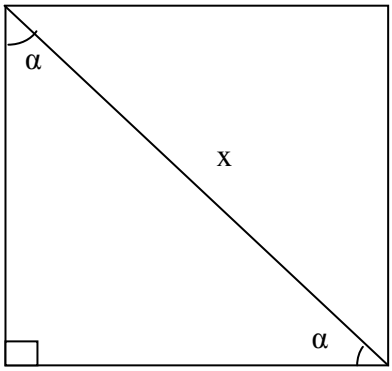
Tarefas extraclasse para a 2ª semana

***Tarefa 10*:** No quadrado abaixo determine:

a) O valor de x;

b) O valor de α;

c) Seno, cosseno e tangente de α.

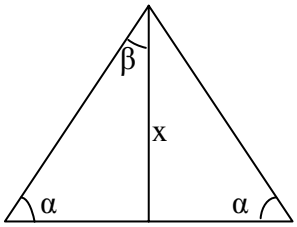


***Tarefa 11*:** O triângulo eqüilátero tem 3 lados de mesma medida e 3 ângulos de mesma medida. Determine:

a) A altura x;

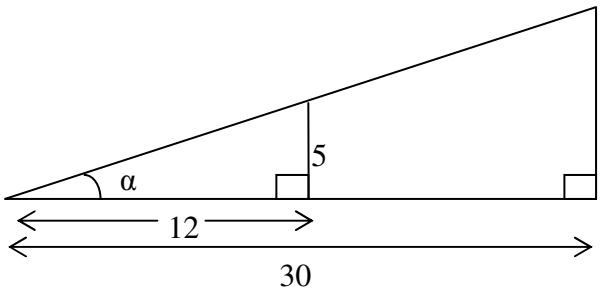
b) Os ângulos α e β;

c) Seno, cosseno e tangente de α e de β.



[27] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 553, 2004.

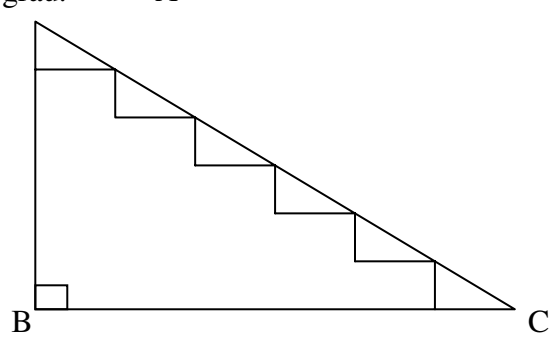
***Tarefa 12*:** Calcule seno, cosseno e tangente de α nos dois triângulos:



O que é possível concluir?

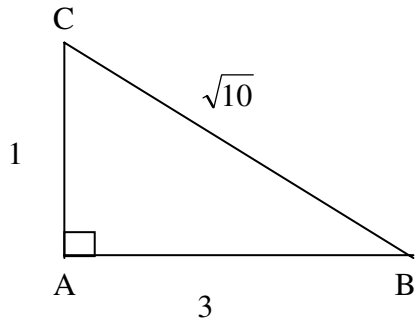
***Tarefa 13*:** Um móvel parte de A e segue numa direção que forma com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ um ângulo de 30°. Sabe-se que o móvel caminha com uma velocidade constante de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a qual distância o móvel se encontra de $\overleftrightarrow{AC}$?

***Tarefa 14*:** A figura abaixo representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão e a mesma altura. Se AB = 2 m e $B\hat{C}A$ mede 30°, encontre a medida da extensão de cada degrau.



***Tarefa 15*[28]:** Um garoto está empinando uma pipa, e o fio forma com a horizontal um ângulo de 30°. A que altura do solo se achará a pipa quando estiver na vertical que passa por uma árvore situada a 300 m do garoto. Sabe-se que tg 30° = 0,57.

***Tarefa 16*:** No triângulo retângulo abaixo, calcule $\text{sen}\,\hat{B}$; $\cos\hat{B}$; $tg\hat{B}$; $\text{sen}\,\hat{C}$; $\cos\hat{C}$; $tg\hat{C}$.

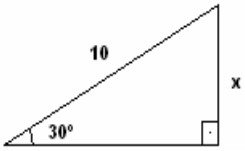


[28] Extraído do livro "Matemática – Volume único", de Walter Facchini, p. 282, 1996.

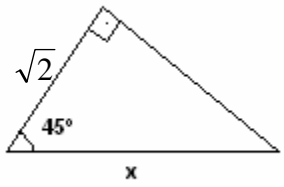
***Tarefa 17*:** Um avião levanta vôo em B e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com a horizontal. A que altura estará e qual será a distância percorrida quando alcançar a vertical que passa por uma igreja situada a 2 Km do ponto de partida? (sen 15°=0,26; cos 15°=0,97 e tg 15°=0,27).

***Tarefa 18*:** Calcule o valor de x, nos triângulos abaixo:

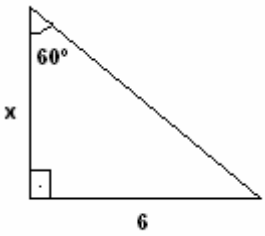
a)



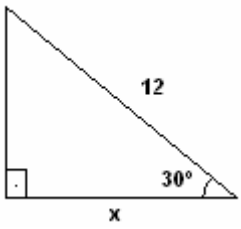
b)



c)



d)



3ª semana (aulas 11 - 13)

Objetivos das aulas

- Mostrar a importância das razões trigonométricas no triângulo retângulo quanto às aplicações;
- Avaliar as razões trigonométricas de ângulos agudos;
- Encontrar medidas indiretas utilizando trigonometria;
- Mostrar, com problemas, diferentes, aplicações da trigonometria.

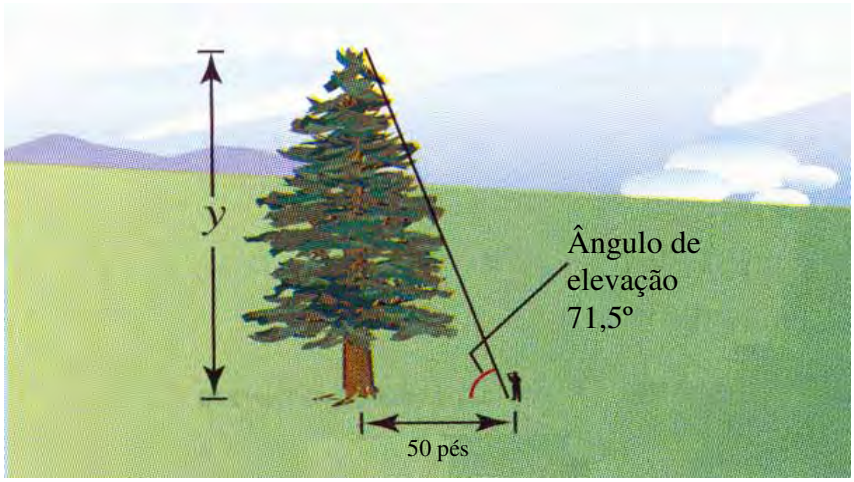
***Problema 12*[29]**

Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10º com o plano horizontal (medindo com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14º. Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

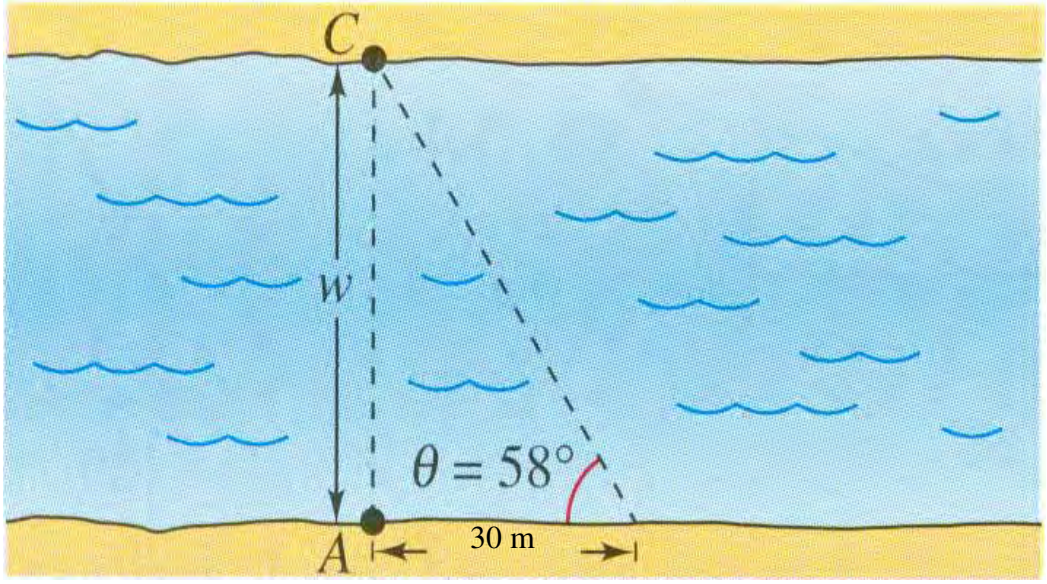
[29] Extraído da Coleção do Professor de Matemática da SBM - Temas e Problemas –Elon Lages Lima e outros 2001.

Problema 13[30]

Um topógrafo está posicionado a 50 pés da base de uma árvore grande, como mostra a figura abaixo. Ele mede o ângulo de elevação ao topo da árvore como 71,5º. Quão alta é a árvore?



Problema 14[31]**:** Um biólogo quer saber a largura w de um rio para colocar adequadamente os instrumentos para estudar os poluentes na água. Do ponto A, o biólogo caminha rio abaixo 30 metros e vê o ponto C. A partir desta visada está determinado que θ = 58°. Quão largo é o rio? Verifique seu resultado numericamente usando uma calculadora ou uma tabela trigonométrica.



[30] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 308, 2001.
[31] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" Larson, Hostetler & Edwards, p. 312, 2001.

3ª semana (aulas 14 - 15)

Objetivos das aulas

- Construção de um ou dois teodolitos por grupo;
- Os alunos deverão determinar a altura de árvores, de um dos prédios pertencentes à escola, altura do poste da rua, etc;
- Compreender melhor os conceitos trabalhados em sala de aula através da prática.

Uma proposta para além da sala aula

Com o objetivo de verificar os conceitos construídos sobre proporcionalidade, semelhança e razões trigonométricas, inicialmente serão distribuídos, aos grupos, cópias de um roteiro, contendo o procedimento de trabalho a ser desenvolvido.

***Roteiro para atividade*:**

Escola Estadual "Joaquim Ribeiro"

Curso: Ensino Médio
Série: 2.7

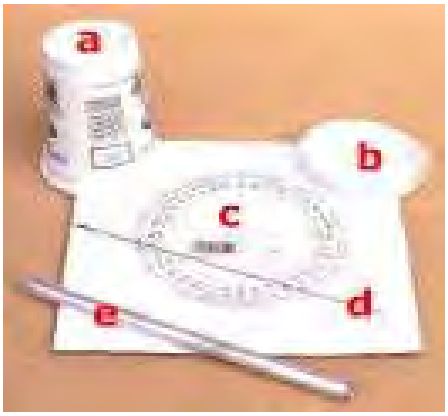
Disciplina: Matemática

- **Assunto:** A Construção de um Teodolito "*Modelo Caseiro*" e sua aplicação matemática.

NOME	N°

- **Objetivos:**
  - Construir um ou dois teodolitos por grupo.
  - Reconhecer o funcionamento do teodolito
  - Observar as semelhanças entre triângulos
  - Compreender melhor os conceitos trabalhados em sala de aula, através da prática.

- **Material necessário**



Esta aula prática pretende construir o teodolito com tesoura, cola, um copo plástico (**a**) com tampa (**b**), cópia xerox de um transferidor de 360^0 alinhada e colada numa base quadrada de 20cm de lado, que pode ser de madeira ou de papelão (caixa de supermercado, por exemplo) (**c**), um pedaço de arame fino, com cerca de 15 centímetros de comprimento (**d**) e um pedaço de tubo de antena de TV ou de qualquer cano fino, com cerca de 20 centímetros de comprimento (**e**), para permitir mirar o objeto.

Procedimento: a construção do teodolito

1 – A precisão: Cole a tampa do copo sobre o xerox do transferidor. Ela será a base de rotação do teodolito. O centro da tampa deve coincidir com o do transferidor. Alinhe os dois pontos usando o arame fino como guia.	
2 – O ponteiro: O arame fino é o ponteiro do teodolito. Ele permitirá fazer a leitura, em graus, no transferidor. Para instalá-lo, faça dois furos diametralmente opostos na lateral do copo, próximo de sua boca, e passe o arame por eles, deixando-o atravessado no copo.	
3 – A mira: O tubo de antena será a mira por onde se avistarão os pontos a medir. Cole o tubo ou o cano fino na base do copo, de forma que ele fique paralelo ao ponteiro.	
4 – Pronto para usar: Encaixe o copo na tampa. Já será possível medir o ângulo entre dois pontos. Basta alinhar a indicação 0^o do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará em graus essa variação.	

Após a construção do teodolito os grupos sairão para o pátio da Escola, um grupo por vez, a fim de reconhecer a função do teodolito e poder resolver os problemas abaixo utilizando o teodolito e fazendo uso da trigonometria já conhecida.

Problema 15

Utilizando o teodolito construído e uma trena, determinar a altura de um prédio pertencente à Escola, justificando todos os passos dados.

Problema 16

Utilizando o teodolito construído e uma trena, determinar a altura do poste da rua ao lado da Escola, justificando todos os passos dados.

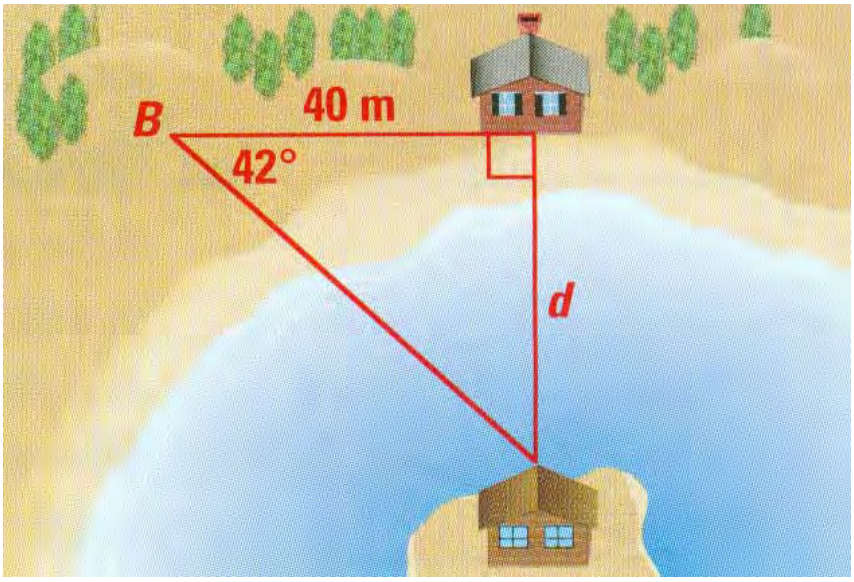
Problema 17

Medir a altura, desde o chão até o topo, de uma antena parabólica situada no telhado do corredor da Escola.

Tarefas extraclasse para a 3ª semana

Para fixar os conceitos e conteúdos construídos serão propostos mais problemas, como tarefas, para serem trabalhadas durante a 3ª semana, justificando todos os passos dados.

Tarefa 19[32]**:** Para achar a distância d de uma casa na praia até uma casa na ilha, um topógrafo mede a distância da casa da praia até o ponto B, como mostra a figura abaixo. Um instrumento chamado teodolito é usado para encontrar a medida de $\hat{B}$. Calcule a distância d.



[32] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring, Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 563, 2004.

***Tarefa 20*:** Um navegador viaja em linha reta ao encontro de um farol. Num determinado instante ele avista a luz desse farol sob um ângulo de 30º em relação à sua trajetória e, depois de percorrer 150m, passa a avistá-la sob um ângulo de 45º. Qual a altura do farol em relação ao nível do mar?

***Tarefa 21*[33]:** O ângulo de elevação da base para o topo de um deslizamento de água é aproximadamente 13°. O deslizamento de água se estende horizontalmente cerca de 58,2 m. Calcule a altura h do deslizamento.

***Tarefa 22*:** Ao meio dia, sol a pino, um garoto empina um papagaio, e a linha que o segura, bem esticada, forma com o chão um ângulo de 60º. Como a sombra do papagaio está distante 20 m de onde se encontra o garoto, podemos afirmar que o papagaio está a uma altura de:

a) 17,40 m b) 28,10 m c) 34,60 m d) 38,50 m e) 35,14 m

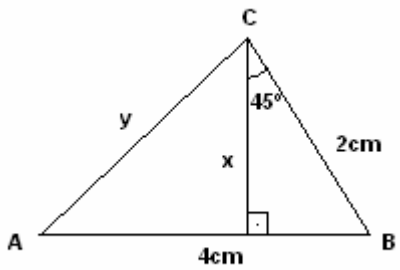
Tarefa 23:

Uma canoa atravessa um rio, num trecho onde a largura é 100 m, seguindo uma direção que forma 60º com a margem.

a) Qual é a distância percorrida pela canoa?

b) Quantos metros desvia-se do rio abaixo em relação ao ponto de partida?

Tarefa 24: Qual é a área do triângulo ABC da figura, na qual AB = 4 cm e BC = 2cm ?



[33] Traduzido do livro: "Geometry – Reasoning, Measuring , Applying", Larson, Boswell & Stiff, p. 563, 2004.

Unidade 2 – A circunferência e os arcos trigonométricos

Para trabalhar esta unidade, em duas semanas, idealizamos as seguintes atividades para serem desenvolvidas em 10 horas/aula.

4ª semana (aulas 16-20)

Objetivos das aulas

- Provocar os alunos com problemas envolvendo ângulos e suas medidas;
- Identificar notação e terminologia sobre ângulos;
- Descrever ângulos – ângulos positivos e negativos;
- Utilizar as medidas "grau" e "radiano";
- Utilizar o conceito de ângulo para resolver problemas da vida real.

Os problemas abaixo apresentados serão geradores de discussão sobre o conceito de medida de um arco de circunferência; sobre o comprimento de um arco e de uma circunferência.

Problema 18

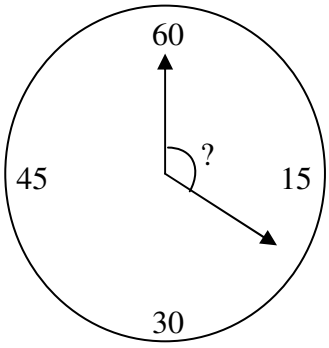
Qual é a medida, em radianos, de um arco de 225º?

Problema 19

Em que quadrante se localiza um arco de $\frac{7\pi}{6}$ rad?

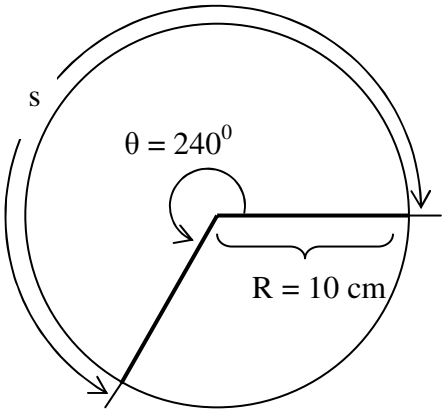
Problema 20

O ponteiro dos minutos de um relógio ao percorrer 20 minutos descreve um arco de quantos graus?



Problema 21[34]

Um círculo tem um raio de 10 centímetros. Ache o comprimento do arco interceptado por um ângulo central de 240º, como mostra a figura abaixo.

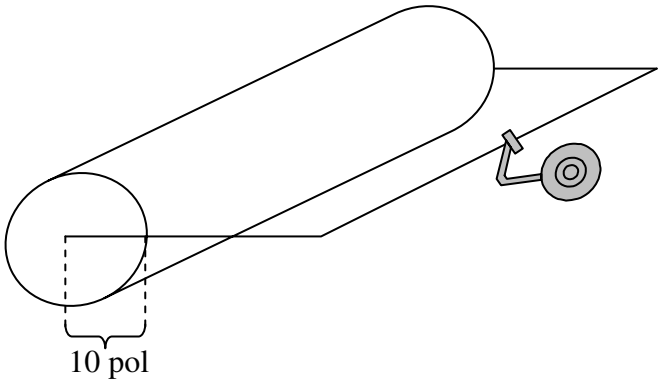


Problema 22[35]

Um rolo cortador de grama cujo raio mede 10 polegadas faz 1,2 revoluções por segundo, como mostra a figura abaixo.

a) Ache a velocidade angular do rolo em radianos por segundo.

b) Ache a velocidade do trator que está puxando o rolo.



Tarefas extraclasse para a 4ª semana

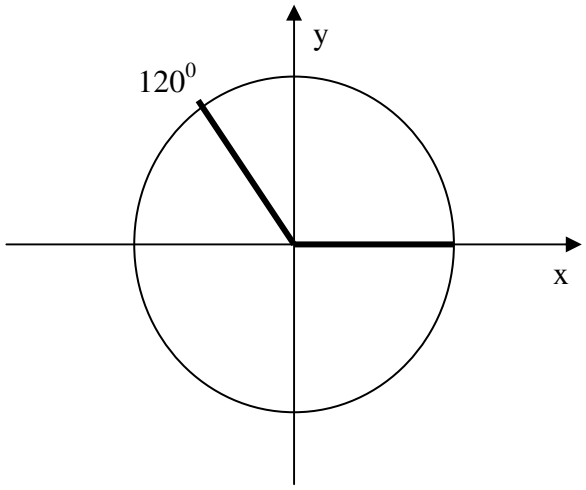
***Tarefa 25*:** Complete a tabela abaixo

Graus	360º	350º	45º	120º				
Radianos					$\frac{3\pi}{2}$	5π	$\frac{7\pi}{2}$	

[34] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 289, 2001.

[35] Idem anterior.

***Tarefa 26*:** Marque os arcos da tabela da atividade anterior num círculo trigonométrico, conforme o exemplo dado, se α = 120º



***Tarefa 27*:** Num dia, o relógio marcava12 horas. Se assinalássemos 15h30min no relógio nesse dia, qual seria a medida, em graus, percorrida pelo ponteiro

a) dos minutos b) das horas

***Tarefa 28*[36]:** Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\frac{\pi}{12}$rad, o ponteiro maior percorre um arco de:

a) $\frac{\pi}{6}$rad. b) $\frac{\pi}{4}$rad. c) $\frac{\pi}{3}$rad. d) $\frac{\pi}{2}$rad. e) π rad.

***Tarefa 29*:** Qual é o comprimento de uma circunferência de raio 5 cm?

***Tarefa 30*:** Quanto percorre a roda de uma bicicleta de raio 30 cm em 200 voltas?

***Tarefa 31*:** Qual é o comprimento do arco AB de raio 5cm cujo ângulo central é 90º?

***Tarefa 32*[37]:** O raio do disco magnético num disquete de 3,5 polegadas mede 1,68 polegadas. Ache a velocidade linear de um ponto na circunferência do disco se ele está girando numa velocidade de 360 revoluções por minuto.

***Tarefa 33*[38]:** Determine se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) Um grau é uma unidade de medida maior do que o radiano.

b) Um ângulo que mede (– 1260º) está situado no III quadrante.

c) Os ângulos de um triângulo podem ter por medidas $\frac{2\pi}{3} rad$, $\frac{\pi}{4} rad$ e $\frac{\pi}{12} rad$.

[36] UFGRS-RS

[37] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 294, 2001.

[38] Idem anterior.

Tarefa34[39]**:** O ponteiro dos segundos de um relógio tem 10,2 centímetros de comprimento, como mostra a figura abaixo. Ache a velocidade linear da extremidade deste ponteiro dos segundos.

5ª semana (aulas 21-25)

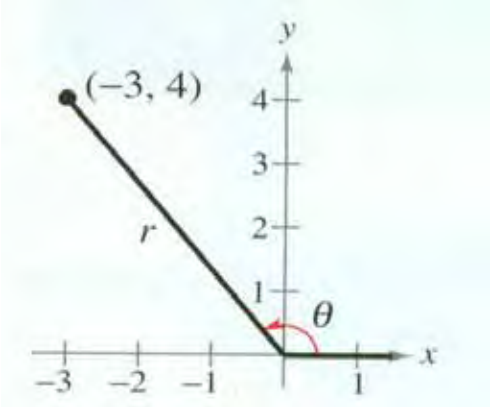
Objetivos das aulas

- Provocar os alunos com problemas visando à identificação do círculo unitário e suas relações com os números reais;
- Avaliar as funções trigonométricas (ou circulares) usando o círculo unitário;
- Usar o domínio e o período para avaliar as funções seno e cosseno;
- Falar sobre o uso da calculadora para funções trigonométricas.

Os problemas abaixo apresentados serão geradores de discussão sobre o ciclo trigonométrico. A simetria de arcos e a redução de arcos ao 1º quadrante serão trabalhados a partir desses problemas.

Problema 23[40]

Seja (-3, 4) um ponto do lado terminal de θ. Ache o seno, cosseno, e tangente de θ.



[39] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 290, 2001.
[40] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 314, 2001.

Problema 24

Uma rampa reta e plana de 12 m de comprimento une dois pisos horizontais de uma praça. A medida α do ângulo obtuso que a rampa forma com o piso inferior é tal que cos α = - 4/5.

Qual é a altura do piso superior, em relação ao piso inferior.

Problema 25[41]

Calcule as funções seno e cosseno nos quatro ângulos quadrantes 0, π/2, π e 3π/2.

Problema 26

Resolver as questões abaixo:

a) Qual é o valor de $sen120^0 + \cos 510^0$?

b) Qual é o valor de $sen^2 \frac{5\pi}{4} + sen^2 \frac{3\pi}{4}$?

c) Calcule $\frac{tg945^0 + 2 \cdot sen210^0}{1 + \cos 720^0}$.

d) Qual é o valor de $sen450° - \cos 13\pi + tg1845°$

Problema 27

Dê o sinal de cada um dos seguintes números reais; fazendo sua representação no círculo trigonométrico.

a) $sen50^0$ b) $sen110°$ c) $\cos 200°$

d) $\cos 400°$ e) $\cos 310°$ f) $sen600°$

Tarefas extraclasse para a 5ª semana

***Tarefa 35*:** Divida uma circunferência em 8 partes iguais e localize sobre ela as extremidades dos seguintes arcos:

a) $\frac{\pi}{3} rad$ b) -120º c) π *rad* d) $-\frac{4\pi}{3} rad$ e) 330º

[41] Idem anterior.

***Tarefa 36*:** Desenhe uma circunferência e localize sobre ela as extremidades dos seguintes arcos:

a) $\frac{3\pi}{4} rad$ b) 225º c) - 45º d) $-\frac{5\pi}{4} rad$ e) $\frac{7\pi}{4} rad$ f) – 360º

***Tarefa 37*:** Há alguns valores que, devido à sua aplicação, são chamados de valores notáveis. Tomando por base as definições de seno e cosseno e as atividades anteriores, complete a tabela abaixo.

x	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
sen (x)								
cos (x)								

***Tarefa 38*:** Usando a tabela da tarefa anterior e lembrando que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, complete a tabela dos valores notáveis da tangente. (lembre-se de que não existe divisão por zero.)

X	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
tg (x)								

***Tarefa 39*:** Você verificou que, para alguns valores de x, a tangente não existe. Usando o círculo trigonométrico, justifique a não existência da tangente nesses valores de x.

***Tarefa 40*:** Calcule o valor de $A = \frac{\cos 0^0 \cdot sen0^0 + \cos 90^0 + sen90^0}{sen270^0}$

***Tarefa 41*:** Determine o valor da expressão $B = \frac{sen\pi - \cos\frac{\pi}{2} + (tg\pi)^2}{\cos(720^0) \cdot sen(450^0)}$

***Tarefa 42*:** Qual é o valor de $\frac{sen\pi + \cos\pi}{2 + tg\pi}$?

***Tarefa 43*[42]:** Dentre os números a seguir, o mais próximo de sen 50º é:

a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6 d) 0,8 e) 1,0

[42] Fuvest-SP

***Tarefa 44*:** Encontre os arcos correspondentes a cada ângulo nos outros três quadrantes e determine o seno e cosseno de:

a) 30º c) 150º e) 120º

b) 45º d) 315º f) 225º

***Tarefa 45*:** Dado um arco que mede $\frac{13\pi}{3}$ rad,

a) Transforme essa medida em graus.

b) Encontre a menor determinação.

c) Em que quadrante se localiza esse arco?

d) Localize aproximadamente esse arco $A\overset{\frown}{M}$ no círculo trigonométrico.

e) Encontre a medida (negativa) em graus do arco $A\overset{\frown}{M}$ da questão anterior.

Unidade 3 – As funções trigonométricas e a resolução de triângulos quaisquer

Para trabalhar esta unidade idealizamos atividades destinadas para um período de 15 horas/aula, sendo que 2 aulas seriam reservadas para a realização de uma atividade, relacionada com o cotidiano, fora da sala de aula: visita a um lugar público, um playground.

6ª semana (aulas 26-30)

Objetivos das aulas

- Provocar os alunos com problemas que envolvem o uso de identidades trigonométricas fundamentais;
- Fazer uso de técnicas algébricas, já trabalhadas, na resolução de equações e inequações trigonométricas;
- Fazer uso de identidades trigonométricas para calcular funções trigonométricas e simplificar expressões trigonométricas;
- Reforçar o trabalho com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

Problema 28[43]

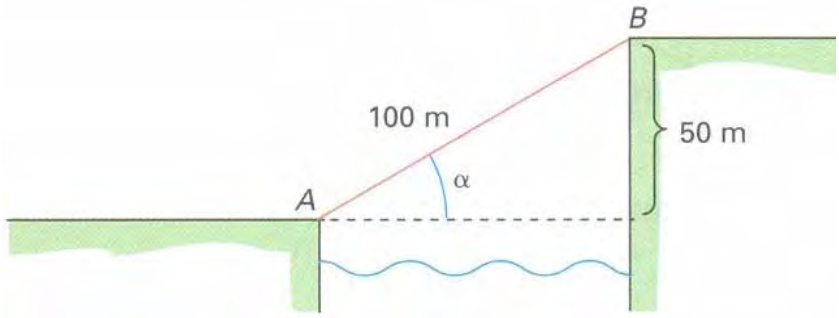
Usar os valores sec $u = -\frac{3}{2}$ e $tg\ u > 0$ para achar os valores de todas as seis funções trigonométricas.

Problema 29

Para escorar um muro vertical localizado em um terreno plano e horizontal, foi usada uma barra de ferro de 2,6m de comprimento, reta, apoiada em um ponto ***P*** do terreno e em um ponto ***Q*** do muro. A medida α do ângulo obtuso que a barra forma com o terreno é tal que $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Determine a distância entre o ponto ***Q*** e o solo.

Problema 30

Uma rampa reta e plana, com 100m de comprimento, deve ser construída unindo dois pontos com um desnível de 50m. Qual será a inclinação dessa rampa?



Problema 31

A partir do meio-dia, considere todos os arcos de medida x rad, com $0 \le x < 2\pi$, descritos pela extremidade móvel do ponteiro dos minutos de um relógio, de modo que $tg^4 x - tg^2 x = 0$.

a) Esboce um esquema representando, no mostrador de um relógio, as posições desse ponteiro para cada arco de x rad que é raiz da equação.

b) Qual é o tempo necessário para que esse ponteiro atinja a posição correspondente ao maior arco possível do item a?

[43] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 377, 2001.

Problema 32

Em um certo trecho, a largura de um rio é 40 m e suas margens são paralelas. Uma ponte será construída em linha reta, oblíqua às margens do rio, ligando dois pontos A e B dessas margens. A medida α do ângulo agudo que a ponte formará com cada uma das margens é tal que $\sec\alpha = 2 \cdot tg\alpha$. A distância entre os pontos A e B é:

a) $45\sqrt{3}m$ b) $\frac{45\sqrt{3}}{2}m$ c) $80m$ d) $60m$ e) $60\sqrt{3}m$

Problema 33[44]

Simplifique a expressão $senx\cos^2 x - senx$

Problema 34[45]

Fatore cada expressão:

a) $\sec^2\theta - 1$

b) $4tg^2\theta + tg\theta - 3$

c) $\cos\sec^2 x - \cot gx - 3.$

Problema 35

É dada a equação $2senx \cdot \cos x = senx$

a) Resolver a equação no intervalo $0 \le x < 2\pi$

b) Obter o número de raízes da equação no intervalo $0 \le x < 2\pi$

c) Obter a soma das raízes da equação no intervalo $0 \le x < 2\pi$

Problema 36[46]

a) Resolva $2senx - 1 = 0$

b) Resolva $3tg^2 x - 1 = 0$

c) Resolva $\cot gx\cos^2 x = 2\cot gx$

[44] Idem anterior.
[45] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 379, 2001.
[46] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 392, 2001.

Problema 37[47]

a) Resolva $2sen^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

b) Ache todas as soluções de $\cos x + 1 = senx$ no intervalo [0 , 2π[

c) Ache todas as soluções de $3\ tg\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0$

Tarefas extraclasse para a 6ª semana

***Tarefa 46*:** Resolver as questões abaixo:

a) Sabendo que $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$, determine o valor de $\cos x$

b) Dado $\cos x = \frac{4}{5}$, com $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, calcule $senx$ e tgx

c) Se $\sec x = \sqrt{2}$, com $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, determine $\cos x, senx, tgx$ e $\cot gx$

d) Dado $\sec x = -2$, com $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$, determine $\cos ecx$

e) Sendo $\cos x = a - 1$ e $senx = \sqrt{a-2}$, determine o valor de a.

Tarefa 47

Resolva as questões abaixo:

a) Determine o valor de m que satisfaz, simultaneamente, as igualdades: $sen(x) = \frac{m\sqrt{3}}{3}$ e $\cos(x) = \frac{\sqrt{6m}}{3}$.

b) Sendo $\cos x = \frac{5}{13}$, x do 4º quadrante, calcule o valor de y = sen x + tg x.

c) Calcule m real tal que sen x = m e cos x = m +1.

d) Simplifique a expressão $\frac{\left(\sec^2 x - 1\right) \cdot \left(\cos ec^2 x - 1\right)}{1 + tg^2 x}$

[47] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 395, 2001.

***Tarefa 48*[48]:** Resolver os testes abaixo:

1) Se $\text{sen}\, x$ é igual a 0,707, então qual é o valor de $(\text{sen}\, x)(\cos x)(tgx)$?

a) 1,0 b) 0,707 c) 0,5 d) 0,4 e) 0,207

2) Se $\text{sen}\, a = 0{,}4$ e $1 - \cos^2 a = x$, então qual é o valor de x?

a) 0,8 b) 0,6 c) 0,44 d) 0,24 e) 0,16

3) Quanto vale $(1 - \text{sen}\, x)(1 + \text{sen}\, x)$?

a) $\cos x$ b) $\text{sen}\, x$ c) tgx d) $\cos^2 x$ e) $\text{sen}^2 x$

4) $\dfrac{tgx - \text{sen}\, x \cdot \cos x}{tgx} = ?$

a) $1 - \cos x$ b) $1 - \text{sen}\, x$ c) $tgx + 1$ d) $\cos^2 x$ e) $\text{sen}^2 x$

***Tarefa 49*[49]:** Use os valores dados para avaliar (se possível) as demais funções trigonométricas.

a) $sen x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos\sec\theta = \dfrac{5}{3}$, $tg\theta = \dfrac{3}{4}$

c) $\sec\theta = \sqrt{2}$, $sen\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $tgx = \dfrac{7}{24}$, $\sec x = -\dfrac{25}{24}$

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{3}{5}$, $\cos x = \dfrac{4}{5}$

f) $sen(-x) = -\dfrac{2}{3}$, $tgx = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

***Tarefa 50*[50]:** Verifique que valores de x são soluções das equações abaixo.

1) $2\cos x - 1 = 0$

(a) $x = \dfrac{\pi}{3}$ (b) $x = \dfrac{5\pi}{3}$

2. $\cos\sec x - 2 = 0$

(a) $x = \dfrac{\pi}{6}$ (b) $x = \dfrac{5\pi}{6}$

[48] Traduzido do livro: "SAT II Math – The Princeton Review", p. 162, 2003-2004.

[49] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 381, 2001.

[50] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 400, 2001.

3. $3tg^2 2x - 1 = 0$

(a) $x = \frac{\pi}{12}$ (b) $x = \frac{5\pi}{12}$

4. $4\cos^2 2x - 2 = 0$

(a) $x = \frac{\pi}{8}$ (b) $x = \frac{7\pi}{8}$

5. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

(a) $x = \frac{4\pi}{3}$ (b) $x = \pi$

6. $\sec^4 x - 3\sec^2 x - 4 = 0$

(a) $x = \frac{2\pi}{3}$ (b) $x = \frac{5\pi}{3}$

***Tarefa 51*[51]:** Usando a substituição $x = 2tg\ \theta$, $0 < \theta < \pi/2$, expressar $\sqrt{4 + x^2}$ como uma função trigonométrica de θ.

7ª semana (aulas 31-33)

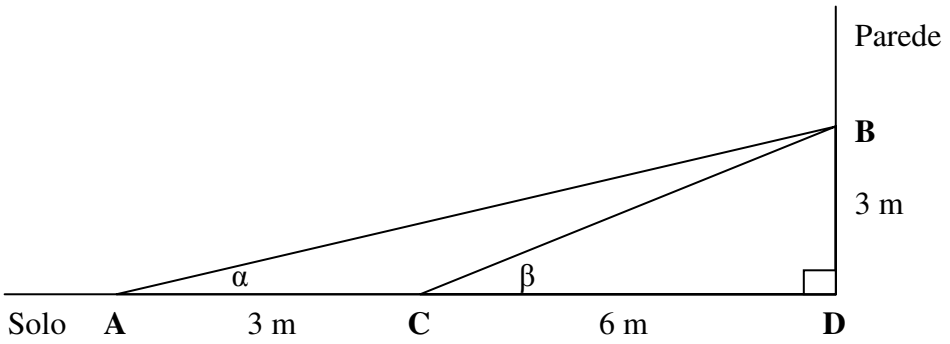
Objetivos das aulas

- Provocar os alunos com problemas que envolvam as fórmulas de soma e diferença de arcos;
- Saber usar as fórmulas de soma e diferença de arcos para calcular funções trigonométricas;
- Saber usar as fórmulas de soma e diferença de arcos para verificar identidades e resolver equações trigonométricas;
- Usar as fórmulas de soma e diferença de arcos para reescrever expressões trigonométricas;
- Saber fazer uso de fórmulas de ângulos múltiplos, fórmulas de redução, fórmulas de soma-produto para reescrever e calcular funções trigonométricas.

[51] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 380, 2001.

Problema 38

Duas vigas, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos A e C do solo estejam em uma reta horizontal que passa por um ponto D da parede, conforme mostra a figura:



Determine a soma das medidas α e β, em graus, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.

Problema 39[52]

a) Ache o valor exato de cos75°.

b) Ache o valor exato de $sen\frac{\pi}{12}$.

Problema 40[53]

Ache o valor exato de $sen(u+v)$, dado que $senu = \frac{4}{5}$, com $0 < u < \frac{\pi}{2}$, e $\cos v = -\frac{12}{13}$, com $\frac{\pi}{2} < v < \pi$.

Problema 41[54]

Simplifique cada expressão:

(a). $\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ (b). $tg(\theta + 3\pi)$

[52] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 404 - 405, 2001.
[53] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 405, 2001.
[54] Idem anterior.

7ª semana (aulas 34 - 35)

Objetivos das aulas

- Visitar um lugar público para poder visualizar movimentos oscilatórios e periódicos;
- Compreender melhor os conceitos trabalhados em sala de aula ao relacionar com o trabalho feito na prática;
- Construir gráficos das funções trigonométricas.

Uma proposta para além da sala aula

Com a visita a um lugar público – playground – levar alguns alunos da turma 2.7 da Escola Estadual Joaquim Ribeiro, para observar e analisar os movimentos oscilatórios provocados pela movimentação de um balanço, identificados como funções trigonométricas.

Como resultado desse trabalho feito fora da sala de aula, levar para essa sala as idéias lá construídas para resolver, analiticamente, problemas que fazem uso dessas funções trigonométricas observadas.

Tarefas extraclasse para a 7ª semana

***Tarefa 52*[55]:** Ache o valor exato de cada expressão:

1. (a) $sen\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $sen\frac{7\pi}{6}-sen\frac{\pi}{3}$

2. (a) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$ (b) $\cos\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}$

3. (a) $\cos(0^0+135^0)$ (b) $\cos 0^0+\cos 135^0$

4. (a) $\cos(240°-0°)$ (b) $\cos 240°-\cos 0°$

***Tarefa 53*[56]:** Use as fórmulas de soma e diferença para achar os valores exatos do seno, cosseno, e tangente do ângulo.

1) 75° = 30° + 45° 4) 15° = 45° - 30°

2) 105° = 60° + 45° 5) 195° = 225° - 30°

3) $\frac{11\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ 6) $-\frac{19\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}-\frac{9\pi}{4}$

***Tarefa 54*[57]:** Se x – y = 60º, então o valor de $(sen\ x+sen\ y)^2+(\cos\ x+\cos\ y)^2$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

***Tarefa 55*[58]**

a) Verifique que $\frac{sen(x+h)-senx}{h}=(\cos x)\left(\frac{senh}{h}\right)-(senx)\left(\frac{1-\cosh}{h}\right)$, onde $h\neq 0$.

b) Ache todas as soluções de $sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ no intervalo [0 , 2π[.

8ª semana (aulas 36-40)

Objetivos das aulas

- Fazer uso dos resultados obtidos, com os alunos no playground, em sala de aula;
- Apresentar problemas nos quais fica evidente o uso da trigonometria em ambientes de fora de sala de aula;

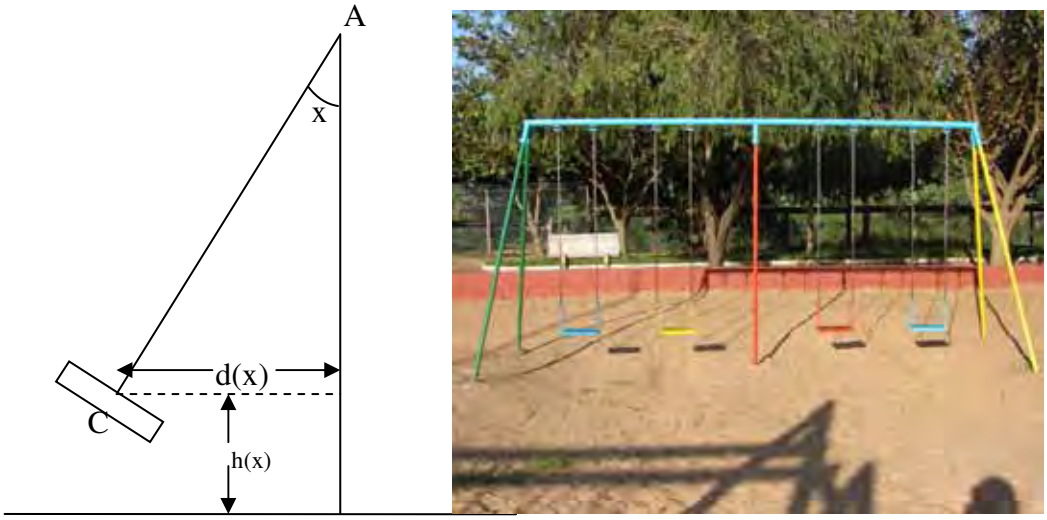
[55] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 408, 2001.
[56] Idem anterior.
[57] Fatec-SP
[58] Idem anterior.

- Esboçar os gráficos das funções básicas seno e cosseno;
- Usar a amplitude e o período para ajudar na construção dos gráficos das funções seno e cosseno;
- Analisar as translações dos gráficos das funções seno e cosseno;
- Usar as funções seno e cosseno para modelar dados da vida real
- Trabalhar trigonometria em triângulos quaisquer – lei dos senos e lei dos cossenos.

Os problemas abaixo apresentados serão geradores de discussão sobre funções: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, lei dos senos; e lei dos cossenos.

Problema 42

Imagine um balanço no playground. Quando nos movimentamos no balanço, na verdade temos duas funções: a altura h(x) do banco do balanço em relação ao chão, que varia em função do ângulo x, e a distância d(x) do banco do balanço em relação à reta perpendicular ao chão, que passa pelo ponto A do varão, onde a corda do balanço está amarrada, que, também, varia com o ângulo x. As duas funções variam de forma cíclica, o que sugere sua investigação por uma função trigonométrica.



Vale destacar que a situação limita o domínio da função ao intervalo $[-\pi/2 , \pi/2]$. Para investigar o problema, em detalhes, responder as seguintes questões:

(a) Qual a altura do varão onde a corrente do balanço está amarrada?

(b) Qual a medida do comprimento da corrente do balanço?

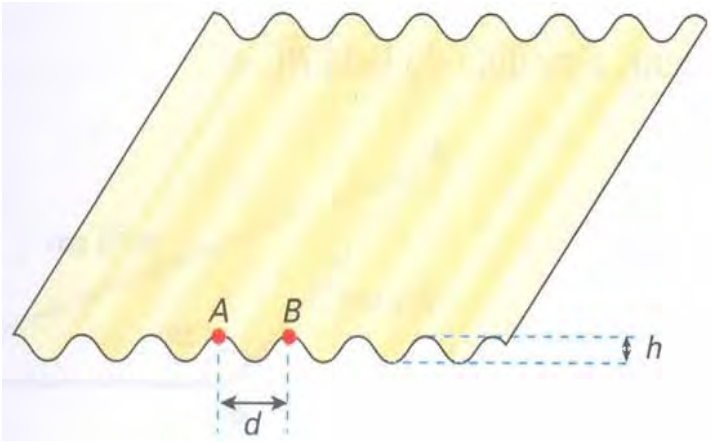
(c) Como utilizar a tabela construída, a partir dos dados coletados no parque, tanto para a altura h(x) como para a distância d(x) para cada ângulo x medido?

(d) Como reconhecer, no experimento, as funções h(x) e d(x)?

(e) Como construir o gráfico dessas funções?

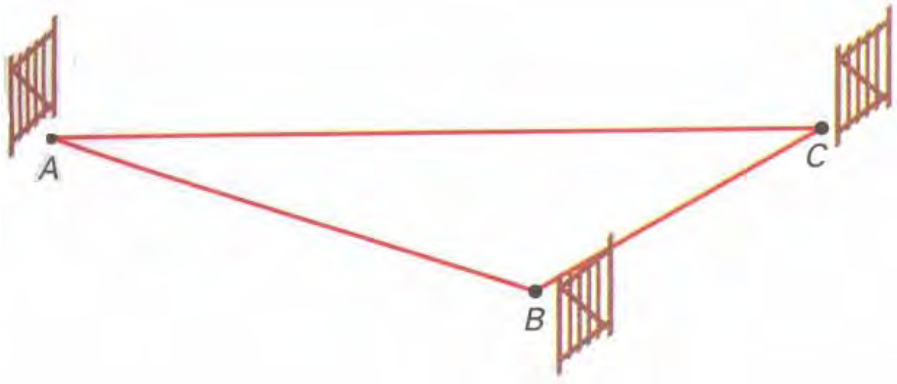
Problema 43

O perfil da telha ondulada, representada na figura abaixo, pode ser descrito pela função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$, em que os valores absolutos de x e f(x) indicam medidas em centímetros. Determine as medidas h e d, indicadas na figura, sendo que A e B são cristas de ondas.



Problema 44

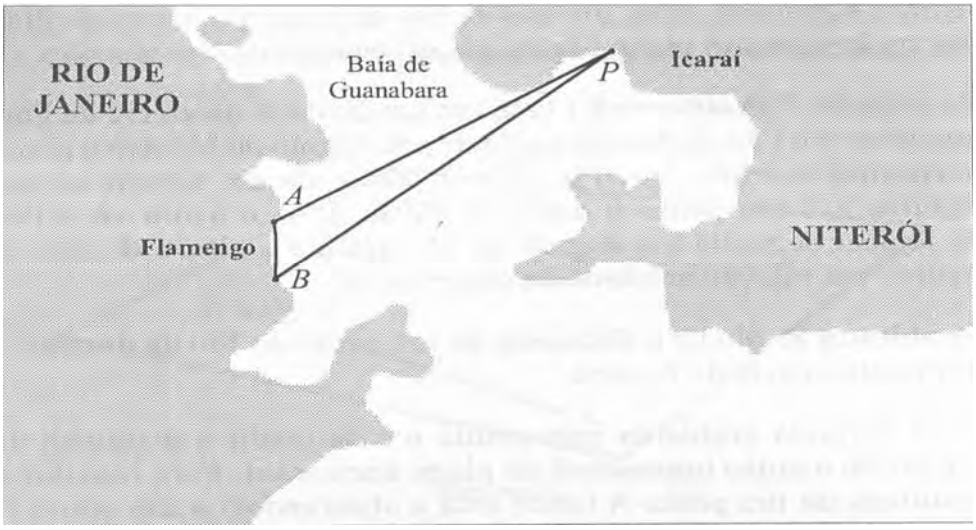
Em uma fazenda, uma estrada reta liga duas porteiras A e B; outra estrada reta liga B a uma porteira C, sendo CB = 5 km, $m(B\hat{A}C) = 30^0$ e $m(C\hat{B}A) = 105^0$.



Ache a distância entre os pontos A e B.

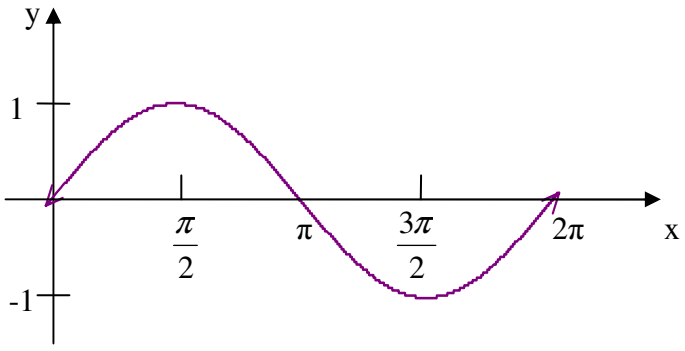
Problema 45[59]

De um ponto A na praia do Flamengo, no Rio de Janeiro, avista-se um ponto P na praia de Icaraí em Niterói (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B na praia do Flamengo, distante 1 km de A, também se avista o ponto P (figura abaixo). Um observador no Rio de Janeiro mediu os ângulos BAP = 119º e ABP = 52º. Qual é a distância entre A e P?



Problema 46

A função f(x) = sen *x,* **x** real, tem como gráfico a senóide que, no intervalo $[0,360^0]$, está representada na figura abaixo.



Se g(x) = a sen 3x, onde a real é diferente de zero, assinale como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir:

( ) O domínio da função g é igual ao domínio da função f, independente do valor de a.
( ) Para todo a, o conjunto imagem da função f está contida no conjunto imagem da função g.
( ) O período da função g é maior que o período da função f.

[59] Extraído da Coleção do Professor de Matemática da SBM - Temas e Problemas –Elon Lages Lima e outros 2001.

Problema 47

a) Construa o gráfico da função $y = -1 + \text{sen}\, x$, dando o domínio, a imagem e o período:

b) Determinar o domínio, a imagem, o período e o gráfico da função definida por $y = \text{sen}(2x)$.

c) Construa o gráfico da função $y = 3 + 2.\cos x$, dando o domínio, a imagem e o período:

d) Construa o gráfico, dê o período, o domínio e o conjunto imagem da função:

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Tarefas extraclasse para a 8ª semana

***Tarefa 56*:** Construa o gráfico, dê o período, o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = -5 + \text{sen}\, x$ b) $y = 2 + \text{sen}\, 3x$ c) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ d) $y = -1 + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

***Tarefa 57*:** Construa o gráfico de f(x) = 1 + cos x e responda às questões a seguir.

a) Qual é o domínio de f(x) = 1 + cos x?

b) Qual e a imagem da função f(x) = 1 + cos x?

c) Para que valores de "x" a função y = 1 + cos x é crescente?

***Tarefa 58*:** Construa o gráfico de y = 2.sen x e responda às questões a seguir.

a) Qual é o domínio de y?

b) Qual e a imagem de f(x)?

c) Quando a função é crescente?

***Tarefa 59*[60]:** Sobre os mesmos eixos coordenados, esboce o gráfico de cada função.

a) $y = \frac{1}{2}\cos x$ b) $y = 3\cos x$

***Tarefa 60*[61]:** Esboce o gráfico de $y = sen\frac{x}{2}$.

***Tarefa 61*[62]:** Use uma calculadora gráfica para analisar o gráfico de $y = 2 + 3\cos 2x$.

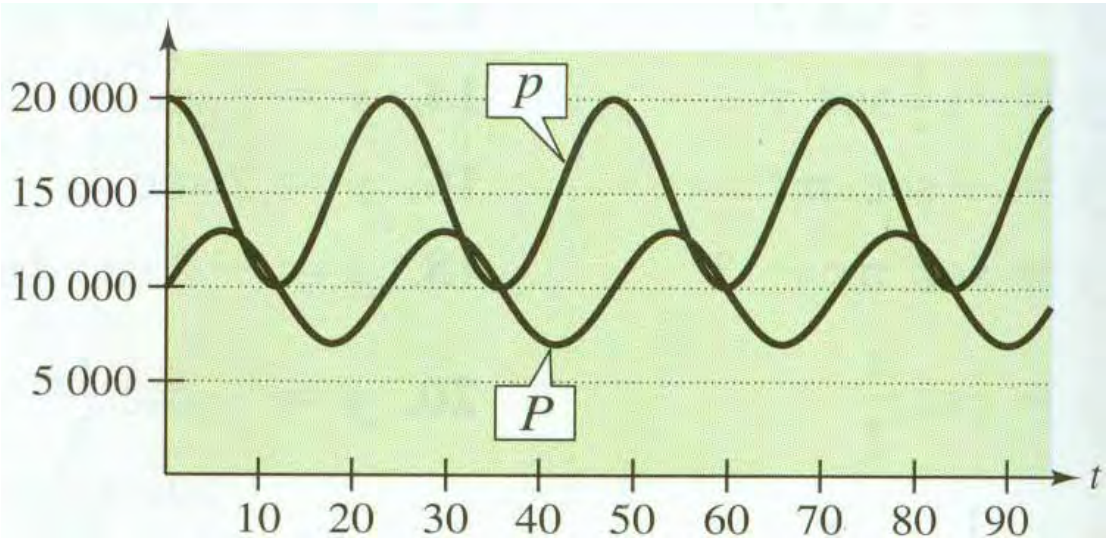
***Tarefa 62*:** Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30^0$. Após navegar mais 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75^0$. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

[60] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 325, 2001.
[61] Idem anterior.
[62] Idem anterior.

Tarefa 63[63]**:** A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa de água a 50 metros de distância. A casa está a 80 metros de distância da caixa de água e o ângulo formado pelas direções caixa de água – bomba – e caixa de água – casa é de 60º. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

Tarefa 64[64]**:**

Suponha que a população de um certo predador, no tempo t (em meses), numa região é dada por $P = 10000 + 3000 sen\left(\frac{2\pi\ t}{24}\right)$ e a população de sua fonte principal de alimento (sua presa) é dada por $P = 15000 + 5000\cos\frac{2\pi\ t}{24}$. Use o gráfico dos modelos abaixo para explicar as oscilações no tamanho de cada população.



Tarefa 65[65]

De uma praia é possível ver duas ilhas X e Y. Um observador assinala nesta praia dois pontos A e B distantes 1 km entre si e, com seu instrumento, mede os seguintes ângulos: XAY = 62º, YAB = 54º, ABX = 46º e XBY = 74º. Qual é a distância entre X e Y?

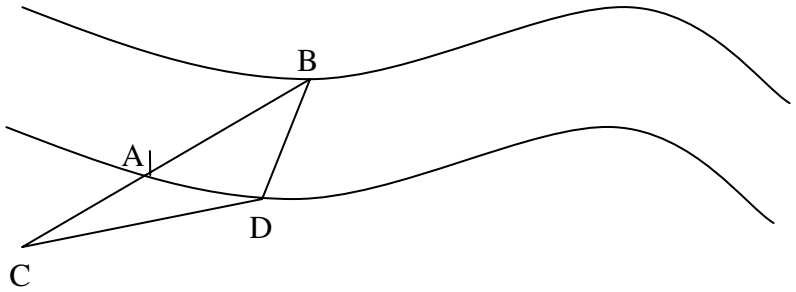
[63] Unicamp-SP

[64] Traduzido do livro: "Precalculus with limits – A graphing Approach" – Larson, Hostetler & Edwards, p. 342, 2001.

[65] Extraído da Coleção do Professor de Matemática da SBM - Temas e Problemas –Elon Lages Lima e outros 2001.

Tarefa 66[66]

Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a A afasta-se 20 m da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a 40 m de C, do qual ainda pode ver as árvores.



Tendo verificado que os ângulos DCB e BDC medem, respectivamente, cerca de 15º e 120º, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação da raiz quadrada de 6 = 2,4?

[66] Vunesp

Capítulo 6

A aplicação do Projeto

6.1. Introdução

Todos sabemos que entre escrever um projeto e aplicar esse projeto há uma diferença muito grande. Ainda mais, em nosso caso, onde pretendíamos aplicá-lo no segundo semestre mas que, devido ao planejamento da Escola, o trabalho com Trigonometria deveria ser feito no primeiro semestre.

A idealização de um projeto depende de muitas variáveis: local de aplicação, tempo destinado para essa aplicação, a turma com quem ele seria trabalhado, a dinâmica organizada para ela, o planejamento do professor da turma, os recursos destinados a ele, etc.

Assim, dentro das idéias que já tínhamos para organizar esse trabalho, foi preciso que, junto à professora da turma, que havia sido membro do GTERP mas que nunca havia posto em prática a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas em suas salas de aula, fosse criado nosso projeto.

Inicialmente, avaliado o tempo destinado ao trabalho com Trigonometria nessa escola, apoiados nas sugestões enviadas por nossa orientadora e no planejamento da professora da turma e usando literatura nacional e estrangeira, levantamos as idéias centrais e muitas situações-problemas que as gerassem.

Como se pode ver, nem todos os problemas selecionados por nós, no roteiro de atividades, poderão ser trabalhados, com os alunos, dentro do período de tempo a ele destinado. Assim, durante nosso trabalho, em sala de aula, muitos dos problemas propostos no projeto, assim como muitas das tarefas escolhidas não puderam ser, de fato, trabalhadas em sala, ou como trabalho fora dela. Entretanto, dentre os apresentados no projeto, apesar de não terem sido trabalhados, mantiveram-se nele por os considerarmos bastante interessantes.

Faremos agora uma descrição de como ocorreu essa aplicação. Serão trabalhados, com detalhes, alguns episódios ocorridos em cada semana de aulas onde, usando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas, novos conceitos e novos conteúdos trigonométricos foram construídos com os alunos. A habilidade de trabalhar algebricamente esses conceitos foi, muitas vezes, levada em consideração.

6.2. O Projeto na e além da sala de aula

As aulas de Matemática para essa turma, em 2005, estavam programadas para terças-feiras: 2 aulas, quartas-feiras: 1 aula e sextas-feiras: 2 aulas.

1ª semana – aulas 1 – 2 – 3 – 4 – 5

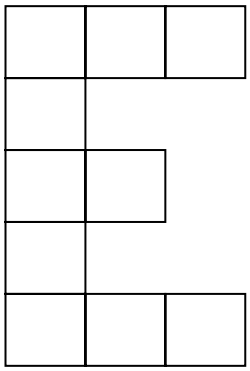
Na primeira semana de trabalho, observamos a preocupação da professora em revisar alguns tópicos do conteúdo programático de Matemática já trabalhados com os alunos, tais como: equação do 1º grau, equação do 2º grau e análise de gráficos.

Na 3ª aula dessa semana o pesquisador foi apresentado à classe. Falou sobre seu projeto, pediu a colaboração dos alunos, falou que iria trabalhar dentro de uma metodologia diferente, que trabalhariam em grupos e sempre a partir de um problema.

O pesquisador distribuiu os alunos em grupos e entregou, a cada grupo, uma cópia do Problema 1 do projeto. Ele tinha por objetivo, ao pedir que resolvessem esse problema, fazer uma revisão dos conjuntos numéricos, desde **N** até **R**.

Problema 1

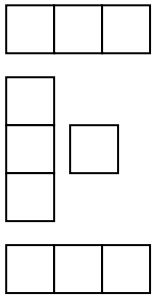
"A letra **E**, na figura abaixo, é formada por dez unidades quadradas. Corte essa figura em quatro partes que possam ser rearranjadas formando um quadrado".



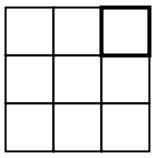
O problema pedia que a letra **E**, na figura acima, formada por dez unidades quadradas, fosse cortada em quatro partes que pudessem ser rearranjadas formando um quadrado.

Os alunos, de início, fizeram tentativas para resolver esse problema. Ficaram interessados por ele, mas não conseguiam chegar a uma resposta. Um dos grupos sugeriu que se cortasse o **E** em 4 partes: dois retângulos 3x1, um retângulo 1x3 e um quadrado 1x1.

Assim,



Com essas partes montariam um quadrado 9x9 e o quadradinho 1x1, no dizer deles, seria colocado sobre um dos quadrados menores componentes do quadrado 9x9. Assim,



Não foi aceita como correta essa solução.

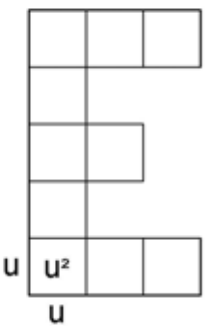
Os alunos então começaram a reclamar que o problema era muito difícil.

Nesse momento, o pesquisador foi à lousa e pediu a alguns alunos que lhes desse um número. Respostas obtidas eram 2, 3, 5, 8 , ..., um se atreveu a dizer 80, mas não passaram de números naturais. O pesquisador forçando lhes disse: – vocês não conhecem outros tipos de números? e, tentando fazer com que se lembrassem, chegou à expansão dos conjuntos numéricos escrevendo na lousa

$$R\begin{cases} \bullet\ Q\begin{cases} \bullet\ Z\begin{cases} N \\ negativos \end{cases} \\ \bullet\ fracionários \end{cases} \\ \bullet\ Irracionais \end{cases}$$

O pesquisador, então, pediu aos alunos que todos, não mais em grupos, junto com ele buscassem pensar num outro caminho para resolver o problema dado.

Questionou-os dizendo: – se o quadrado menor tiver lado u, qual será a área de **E**?



Alguns alunos responderam: $10u^2$.

O pesquisador continuou: se queremos quebrar o E em quatro partes e com essas partes queremos montar um quadrado, qual será a área desse quadrado?

Responderam: $10u^2$.

De fato. Dado **E** e sendo a área de cada quadrado unitário u^2, então, a área de **E** é 10 u^2.

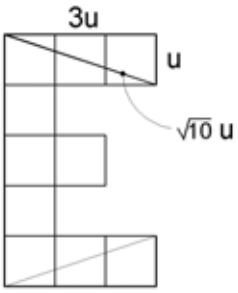
Queremos quebrar esse **E** em quatro partes e ao rearranjá-las obter um quadrado de área $10u^2$. Assim, nosso quadrado seria

Mais uma vez o pesquisador perguntou: então, qual será o lado desse quadrado se sua área vale $10u^2$?

Demos tempo para que pensassem, mas, mesmo assim, ninguém conseguiu responder.

Lembrei aos alunos que já havia falado com eles sobre números irracionais e que se a área era $10u^2$ e a área do quadrado sendo $l \times l = l^2 = 10u^2$, então $l = \sqrt{10}u$.

Mais uma vez, o pesquisador intervindo perguntou: – onde na figura **E** podemos encontrar $\sqrt{10}u$? Ele precisou mostrar que a figura é formada por quadrados de lado u e também por retângulos de lados 2u e u, 3u e u e 5u e u Considerando um dos retângulos 3u x u , pudemos, pesquisador e alunos, perceber que ele pode ser decomposto em dois triângulos retângulos, ao traçarmos sua diagonal d. Lembrando o Teorema de Pitágoras, vimos que:



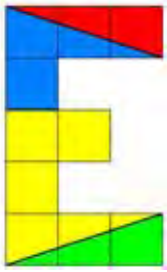
$(3u)^2 + u^2 = d^2$

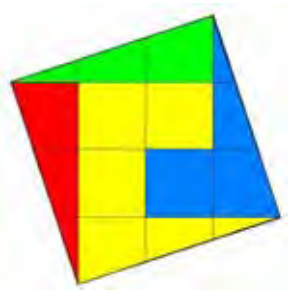
$9u^2 + u^2 = d^2$ e, então, $d^2 = 10u^2$ e $d = \sqrt{10}\ u$

Assim, na figura, chegamos a um segmento que é o lado do quadrado procurado.

Motivados por essa explicação, alguns alunos conseguiram perceber que se cortassem o outro retângulo 3u x u da mesma maneira ficariam com quatro triângulos retângulos de catetos u e 3u, e hipotenusa $\sqrt{10}u$.

Os alunos tentaram vários cortes e chegaram a perceber que

cortando o **E** assim  obtinham-se as quatro partes pedidas

e, montando convenientemente essas partes, obtivemos 

Nas aulas 4 e 5, a professora, fazendo um gancho com o problema dado, ao falar sobre números racionais, fez questão de destacar o significado de razão como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas.

Foi necessário, para isso, que ela fizesse uma forte revisão sobre o conceito de número racional e suas diferentes personalidades: número racional, ponto na reta, quociente, fração, número decimal e razão. O preparo desse trabalho deu-se na UNESP–Rio Claro quando o pesquisador apresentou à professora uma forma diferente de trabalhar números racionais.

Em sala de aula, foi exposto este material, construído com a participação dos alunos.

Sabe-se que o conjunto dos números racionais é dado por

$$Q = \left\{ x = \frac{a}{b},\ \ a \in \mathrm{Z}\ \ e\ \ b \in \mathrm{Z},\ \ b \neq 0 \right\}$$

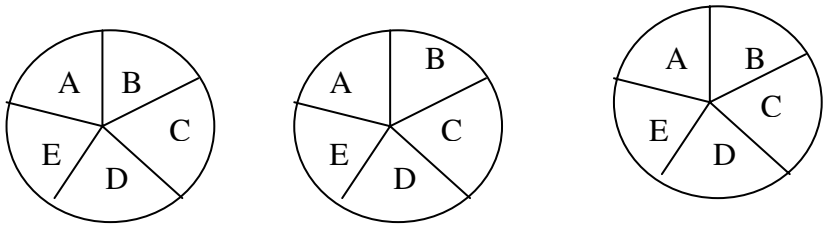
Há diferentes personalidades do número racional, associadas aos diferentes significados da barra fracionária.

a) **Divisão:** a barra fracionária é vista com o significado de divisão: $\div$ ou :

Problema: Dividir igualmente três pizzas entre 5 pessoas. Que parte de pizza come cada uma?

$$\begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{pois} \quad \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$$

$$\frac{3}{5}$$



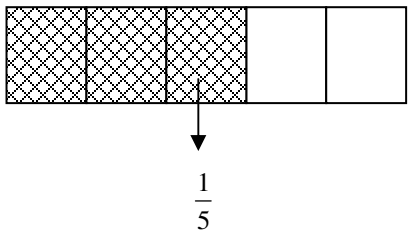
3 pizzas | 5 pessoas

$$\frac{3}{5}\ \frac{pizza}{pessoa}$$

Resposta: cada pessoa comeu $\frac{3}{5}$ de uma pizza inteira.

b) **Fração**: é uma relação da parte com o todo.

Numa fração, identificar o todo é muito importante e representá-lo numa forma geométrica é útil. $\frac{3}{5}$ desse todo pode ser visto assim:



- tomo o todo = 1
- divido em 5 partes iguais
- dou nome à parte = $\frac{1}{5}$
- tomo 3 dessas partes = $\frac{3}{5}$

5 é o **denominador** da fração que diz em quantas partes iguais o todo foi dividido (5) e dá nome à parte (1/5)

3 é o **numerador** que diz quantas dessas partes iguais foram tomadas.

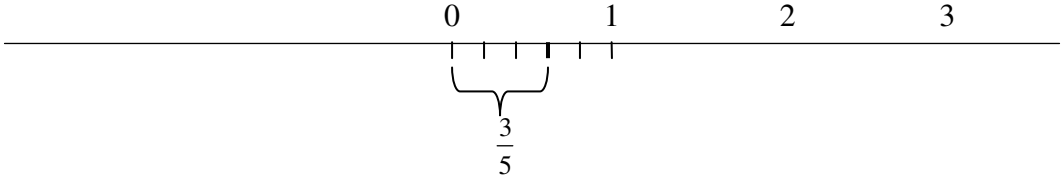
c) **número decimal** é o número fracionário escrito na horizontal. A parte inteira é separada da parte fracionária por uma vírgula.

O número decimal pode ser uma decimal exata ou decimal não exata. O número decimal é um número racional, pois pode sempre ser escrito na forma barra fracionária.

$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

A decimal não exata será um número racional quando for uma dízima periódica simples ou uma dízima periódica composta, pois as dízimas têm suas frações geratrizes.

d) Um ponto bem definido na reta racional é um número racional.



e) **Razão** é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas.

Notação $\frac{a}{b} = a:b$ e lê-se a para b

Problema 2

Um pedreiro usa 5 latas de areia e 2 latas de cimento para fazer uma "massa" de construção. Para obter a mesma "massa" sabe-se que, sempre, para cada 2 latas de cimento deve colocar 5 latas de areia. Se ele quiser preparar 63 latas dessa "massa", quantas latas de cimento deve colocar? E quantas latas de areia?

As grandezas, no problema, são latas de cimento e latas de areia.

A professora escreveu $\frac{latas\ de\ cimento}{latas\ de\ areia} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \frac{12}{30} = \frac{14}{35} = \frac{18}{45}$

dizendo o número de latas de cimento está para o número de latas de areia assim como 2 está para 5 e disse isto $\frac{2 \text{ latas de cimento}}{5 \text{ latas de areia}}$ é uma razão, uma das personalidades do número racional, que expressa uma comparação multiplicativa entre as duas grandezas: latas de cimento e latas de areia.

Com duas latas de cimento e cinco de areia, disse ela, faço 7 latas de massa e, se quero 63 latas dessa massa, o que devo fazer? Quantas latas de cimento coloco? E quantas de areia?

Ao fazer $63 \div 7$, reconheço que multipliquei por 9 a quantidade de massa. Assim, devo multiplicar por 9 a quantidade de cimento e a quantidade de areia. Logo $2 \times 9 = 18$ e $5 \times 9 = 45$.

Resposta: O pedreiro usará 18 latas de cimento e 45 latas de areia.

A professora chamou a atenção de que, a partir do conceito de razão, muitos outros conceitos matemáticos são construídos:

- Proporção é uma igualdade entre duas razões: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, onde **a** e **d** são os extremos e **b** e **c** são os meios da proporção. Um resultado importante que já é conhecido é que "em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Portanto, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção, vale sempre ad = bc.

- Divisão em partes proporcionais
- Regra de três: simples e composta
- Misturas
- Porcentagem
- Descontos
- Juros simples e Juros compostos
- Taxas
- Escalas
- Semelhanças de triângulos
- Razões Trigonométricas
- Etc.

Somente no final da quinta aula é que tarefas extra classe foram selecionadas: tarefas 1, 2, 3, 4 ,5 e 6. Assim, somente no início da segunda semana é que a professora fez a correção de algumas na lousa.

2ª semana – aulas 6 – 7 – 8 – 9 – 10

O início desta semana (**aulas 6 e 7**) foi marcante, quando o pesquisador, apoiado pela professora, ao falar sobre seu projeto, falou com os alunos sobre um contrato, que seria acordado entre professora e alunos, para estabelecer parâmetros necessários ao desenvolvimento e à organização de um trabalho diferenciado nas aulas de Matemática. Esse contrato, que chamamos Termo de Compromisso, apontaria os direitos e deveres de professora e alunos.

Foi dito que, nesse Termo de Compromisso, cada aluno seria avaliado individualmente nos itens: freqüência, tarefa, trabalho em grupo, participação nas diversas atividades e a prova requerida por lei e pela instituição.

Uma primeira versão desse documento foi apresentada aos alunos e discutida, em detalhes, com eles. Houve concordância e alunos e professora o assinaram.

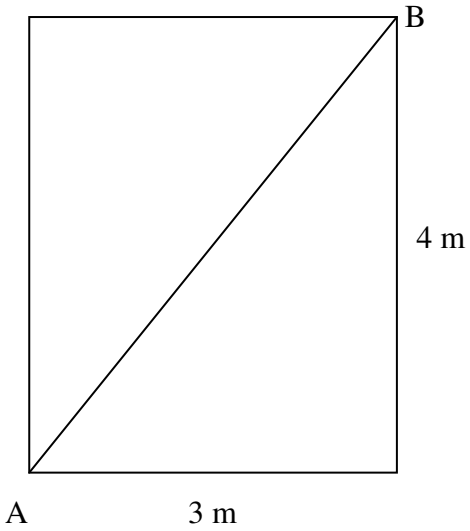
Depois disso, o pesquisador apenas observou o trabalho da professora, embora tivessem programado juntos o transcorrer das aulas dentro da metodologia adotada.

A professora começou seu trabalho apresentando, na lousa, o problema 5. Deu tempo para que os alunos, em grupos, lessem o problema e fossem em busca de sua solução. Ela tinha por meta, com esse problema, trabalhar o Teorema de Pitágoras.

Problema 5

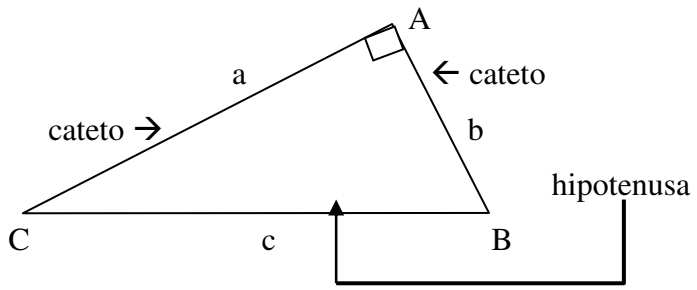
Carolina está parada em um dos cantos de um pequeno jardim retangular de lados 3m e 4m. Ela deseja caminhar até o canto oposto, indo do ponto A até o ponto B (como mostra a figura abaixo) e decide caminhar acompanhando os lados do jardim. Se Carolina tivesse decidido caminhar pela diagonal, indo de A até B diretamente, em linha reta, quanto ela caminharia a menos?

a) 1 m
b) 2 m
c) 3 m
d) 4m



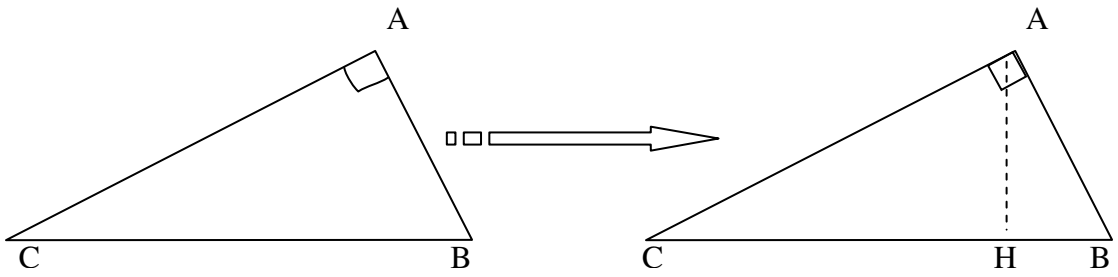
A aula acabou. Não houve tempo para os alunos resolverem esse problema em classe.

Na Aula 8, a professora, ao iniciar seu trabalho, não retomou o Problema 5, não resolvido na aula anterior, porque acreditava que os alunos deviam aprender antes conceitos e conteúdos necessários à resolução daquele problema. Ela ainda não estava muito envolvida com nossa metodologia de trabalho. Então, desenhou, na lousa, e comentou sobre o desenho feito, dizendo que os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa. Os outros lados são chamados catetos. Na figura desenhada, **a** e **b** representam o comprimento dos catetos e **c** é o comprimento da hipotenusa.

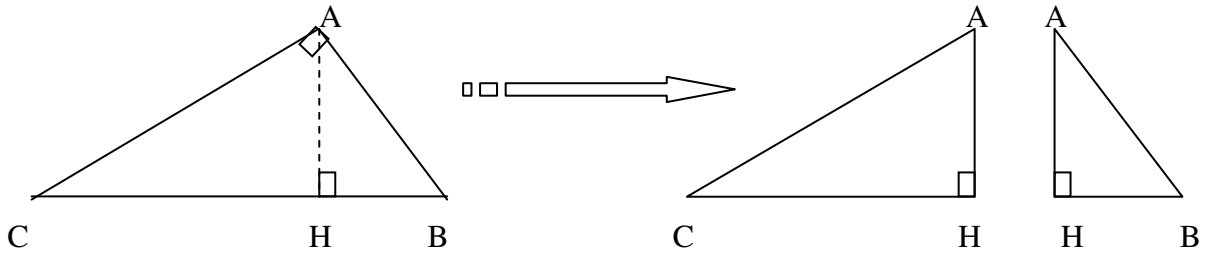


$$\hat{A} = 90°$$
$$\hat{B} + \hat{C} = 90°$$
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

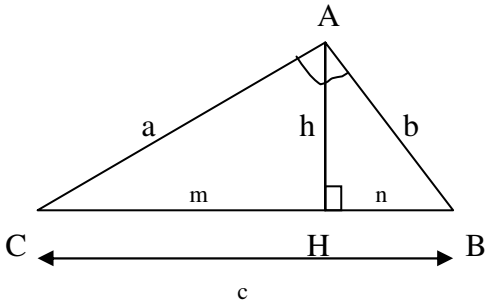
Disse também que, utilizando o que haviam aprendido a respeito de semelhança de triângulos, iam estabelecer algumas relações entre medidas num triângulo retângulo. Disse que na figura abaixo, partindo do vértice A, no triângulo retângulo ABC, traçariam a altura desse triângulo em relação à hipotenusa, encontrando o ponto H.



Dividindo este triângulo com a linha pontilhada, obtiveram dois novos triângulos:



Utilizando então semelhança de triângulos, disse ela, podemos encontrar relações entre as medidas dos lados destes dois novos triângulos e o triângulo original. Para isso, vamos dar nomes às medidas dos lados destes dois novos triângulos, conforme mostra a figura a seguir:



- h é a medida do segmento AH, que é a altura do triângulo ABC relativa à hipotenusa.
- m é a medida do segmento CH.
- n é a medida do segmento HB.

Pela forma como as figuras foram construídas, disse ela, observem que m + n = c.

Utilizando então semelhança de triângulos, a professora colocou na lousa as propriedades a seguir:

Propriedade 1

Vamos começar considerando os triângulos HBA e ABC: $\hat{H} \cong \hat{A}$, pois ambos são ângulos retos. Pela propriedade AA, temos então: Δ HBA ~ Δ ABC. Da semelhança dos triângulos, devemos ter então $\frac{b}{n} = \frac{c}{b}$, de onde obtemos a relação: $b^2 = c \cdot n$.

Propriedade 2

Vamos agora considerar os triângulos HCA e ACB: observe que $\hat{H} \cong \hat{A}$, pois ambos são ângulos retos e $\hat{C}$ pertence aos dois triângulos. Então, a propriedade AA garante que Δ HCA ~ Δ ACB. Da semelhança dos triângulos, devemos ter então $\frac{a}{m} = \frac{c}{a}$, de onde obtemos a relação: $a^2 = c \cdot m$.

Propriedade 3

Vamos calcular a área s do triângulo ABC. Como sua altura é h, devemos ter: $s = \frac{c \cdot h}{2}$. Entretanto, podemos colocar este triângulo em outra posição. Neste caso, sua altura é b e a área s é dada por: $s = \frac{a \cdot b}{2}$. Comparando as duas relações obtidas para a área s, encontramos $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$, multiplicando ambos os lados por 2, obtemos a relação: $c \cdot h = a \cdot b$.

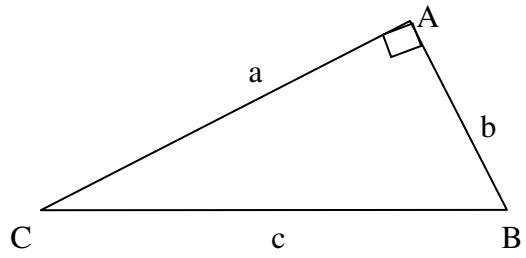
Propriedade 4

Pela propriedade anterior, disse a professora, sabemos que $c \cdot h = a \cdot b$. Isolando *h* nesta igualdade, temos $h = \frac{a \cdot b}{c}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos: $h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}$. Pelas propriedades 1 e 2, sabemos que $a^2 = c \cdot m$ e $b^2 = c \cdot n$. Substituindo essas expressões na igualdade $h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}$, temos: $h^2 = \frac{c \cdot m \cdot c \cdot n}{c^2}$. Simplificando então o termo c^2, que aparece no numerador e denominador, obtemos a relação: $h^2 = m \cdot n$.

Um dos alunos disse: professora, parece que a semelhança de triângulos foi usada somente para deduzir as propriedades 1 e 2. O que a semelhança tem a ver com as áreas?

Disse, então, a professora: parece que não precisou mesmo. Mas, vejam que para provar a propriedade 4, usamos as propriedades 1 e 2. Além disso, a propriedade 4 pode também ser deduzida por semelhança. Para isso, verifique que os triângulos AHC e BHA são semelhantes.

Para terminar, observem que, disse ela, pelas propriedades 1 e 2 temos $a^2 = c \cdot m$ e $b^2 = c \cdot n$. Assim, substituindo as expressões de a^2 e b^2 temos: $a^2 + b^2 = c \cdot m + c \cdot n$ e, colocando o fator comum c em evidência, obtemos $a^2 + b^2 = c \cdot (m + n)$. Como $m + n = c$, temos $a^2 + b^2 = c \cdot c$. Desta forma, obtemos a expressão: $a^2 + b^2 = c^2$, que é o **Teorema de Pitágoras,** para um triângulo retângulo com catetos medindo a e b e hipotenusa c, respectivamente, mostrando o triângulo.



A partir dessas construções todas, a professora convenceu-se de que os alunos estavam preparados para resolver o Problema 5, que não havia sido resolvido. Depois disso, na verdade, esse problema foi, então, facilmente trabalhado pelos alunos.

No final da aula foram selecionadas e dadas as tarefas extra classe 8 e 13.

Aulas 9 e 10

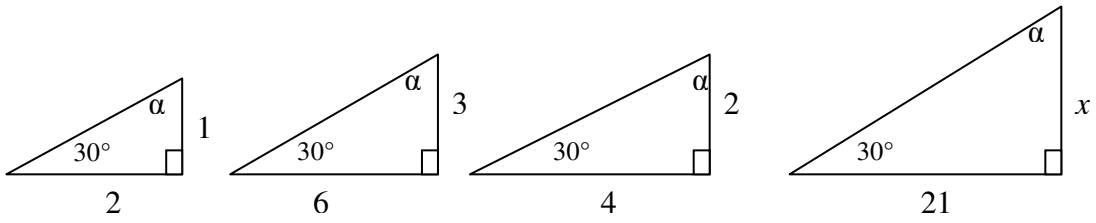
Como já haviam sido revistos o conceito de razão, o Teorema de Pitágoras, e a semelhança de triângulos retângulos, a professora, ao iniciar o tópico Trigonometria no triângulo retângulo, chamou a atenção da importância dos conceitos que seriam trabalhados nos problemas 6, 7 e 8, tanto para a matemática quanto para as ciências físicas, biológicas, astronomia, engenharia e mais outras. Na vida prática disse ela, a aplicação destes conhecimentos pode nos auxiliar na construção de objetos, como móveis, casas; na demarcação de terrenos e áreas planas; na compreensão dos fenômenos óticos e em vários outros tipos de cálculos que envolvam medidas de lados e ângulos num triângulo retângulo.

Nesse trabalho, buscando utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas, a professora apresentou o problema 6 na lousa, objetivando que os alunos percebessem a razão existente entre os três lados de um triângulo em relação a um determinado ângulo agudo.

Os alunos se reuniram em grupos, de no máximo 4 alunos, começaram a resolver o problema proposto pela professora.

Problema 6

Observem os triângulos abaixo. Eles são de tamanhos diferentes. Entretanto, em todo triângulo retângulo cujo comprimento do cateto menor dividido pelo comprimento do cateto maior seja ½, o ângulo oposto ao lado menor mede 30°. Qual é o valor de x? Qual é o valor de α?



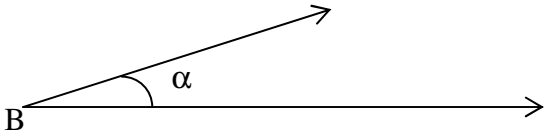
Os alunos, como já conheciam os lados de um triângulo retângulo: cateto, cateto e hipotenusa, ao comparar os quatro triângulos dados puderam chegar ao valor de x, comparando as razões $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{x}{21}$. Chegando a x = 10,5.

De posse desse resultado, a professora passou a definir os conceitos de sen α, cos α e tg α.

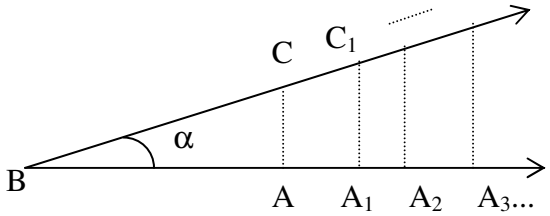
Formalizando, na lousa, ela escreveu:

Razões Trigonométricas do ângulo α

Considere o ângulo α, de vértice B, indicado na figura.



Sobre um dos lados do ângulo α, tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2, A_3,..., e por estes pontos, traçamos perpendiculares ao lado $\overline{BA}$, as quais encontram o outro lado do ângulo, respectivamente, nos pontos C, C_1, C_2, C_3,...



Obtemos, assim, os triângulos retângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, ..., todos semelhantes entre si. A partir deles, estabelecemos as seguintes proporções:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = ... = r_1$$

Vejam que a razão de semelhança r_1 é a mesma, para todo triângulo semelhante a ABC, com ângulo reto em A, A_1, A_2...

Analogamente

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = ... = r_2$$

$$\frac{AC}{BA} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = ... = r_3$$

O número r_1, assim obtido, é chamado ***seno*** do ângulo agudo α e indicado por:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{BC}$$

O número r_2, assim obtido, é chamado ***cosseno*** do ângulo agudo α e indicado por:

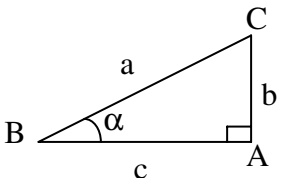
$$\cos\alpha = \frac{BA}{BC}$$

O número r_3 é chamado ***tangente*** do ângulo agudo α e indicado por:

$$tg\,\alpha = \frac{AC}{BA}$$

Os números $sen\alpha$, $cos\alpha$ e $tg\alpha$ são chamados razões trigonométricas do ângulo α e não dependem dos pontos A, A_1, A_2, ... Só variam quando variar o ângulo.

Considerando o triângulo retângulo ABC ($\hat{A} = 90°$), temos:



$$sen\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{BA}{BC} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{AC}{BA} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

Analogamente, temos que:

$$sen\hat{C} = \frac{c}{a};\quad \cos\hat{C} = \frac{b}{a};\quad tg\hat{C} = \frac{c}{b}$$

A partir daí, a professora perguntou: – qual das razões trigonométricas definidas é a mais adequada para o Problema 6?

Os alunos responderam: – o seno não serve porque depende da hipotenusa. O cosseno também não serve. A que serve é a tangente.

Nesse momento a professora pediu que calculassem tangente de 30º. Eles não sabiam identificar esse número, pois diziam $tg30^0 = \frac{co}{ca} = \frac{x}{21}$. Ela deixou esse problema em aberto, dizendo que nas próximas aulas isso seria trabalhado.

3ª semana – aulas 11 – 12 – 13 – 14 – 15

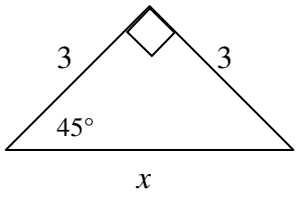
Aulas 11 e 12

Para trabalhar com triângulos retângulos especiais: (30º-60º-90º) e (45º-45º-90º), os problemas 7, 8 e 10 foram selecionados.

Os alunos não tiveram dificuldade em perceber que no

Problema 7

No triângulo retângulo abaixo ache o valor de x.



para achar a hipotenusa nesse triângulo especial (45º-45º-90º) bastava aplicar o Teorema de Pitágoras.

$$3^2 + 3^2 = x^2$$
$$9 + 9 = x^2$$
$$18 = x^2$$
$$x = \sqrt{18}$$

Chegando a esse ponto, os alunos, em sua maioria, ainda não sabiam identificar que tipo de número era esse encontrado para x.

Foi preciso que a professora interviesse e mostrasse que fatorando

18	2
9	3
3	3
1	

$18 = 2 \text{ x } 3^2$ e $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\cong 3 \times 1{,}414 = 4{,}242$

Ainda precisou dizer que esse $3\sqrt{2}$ é um número irracional e, então, real.

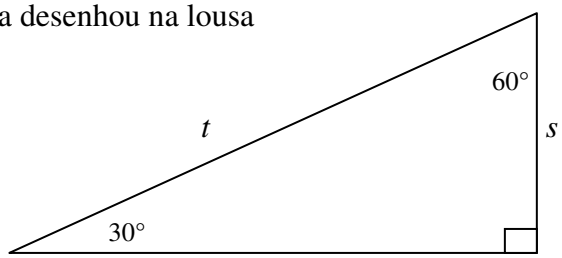
Um aluno[67], que já trabalhara Trigonometria antes, deixando seus colegas curiosos, enveredou por outro caminho. Lembrando-se que $sen45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que $sen45^0 = \frac{co}{h}$, escreveu $sen45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{x}$ então $\sqrt{2}x = 6$. Portanto $x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \cong 4{,}242$.

[67] Esse aluno veio de uma Escola privada onde tivera Trigonometria na 1ª série do Ensino Médio.

Problema 8

Ache os valores de *s* e *t* (comprimentos de dois lados de um triângulo 30°-60°-90°) e justifique os resultados.

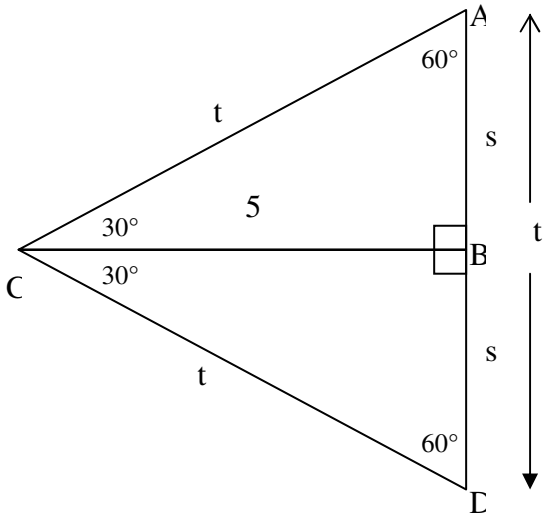
A professora desenhou na lousa



Já, no problema 8, houve mais dificuldade para os alunos pois, nesse triângulo retângulo, pedia-se para encontrar os valores de s e t.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, os alunos chegaram a $s^2 + 5^2 = t^2$ mas, diante de uma equação com duas incógnitas, se assustaram e pediram ajuda.

A professora precisou mostrar que se agregassem ao triângulo retângulo dado um outro triângulo retângulo congruente a ele poderiam obter um triângulo equilátero.



Assim, ela desenhou a figura ao lado, nomeando todos os seus lados e ângulos. O triângulo CBD, agregado ao triângulo ABC, é congruente a ele (caso LAL). O triângulo ACD formado é equilátero, pois seus três ângulos medem 60º. Então, seus três lados são iguais a t.

Como num triângulo equilátero altura, mediana e bissetriz coincidem então CB é altura, mediana e bissetriz no triângulo ACD, relativamente ao ângulo C.

AB = BD = s. Portanto AB + BD = 2s = t e, então s = t/2. Substituindo esse valor em $s^2 + 5^2 = t^2$, vem $\frac{t^2}{4} + 5^2 = t^2$ logo, $t^2 + 100 = 4t^2$

$$100 = 3t^2$$

$$t^2 = \frac{100}{3}, \text{ assim, } t = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ e } t = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ e ainda } s = \frac{t}{2} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Como problema de fixação, a professora apresentou o problema 10.

Problema 10

Uma rampa lisa, de 20 m de comprimento, faz ângulo de 30^o com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe esta rampa inteira eleva-se verticalmente, em metros:

a) 17 b) 10 c) 15 d) 5 e) 8

É interessante notar que, neste problema, os alunos perceberam que sua resolução era semelhante à do Problema 8.

Assim, os grupos, em sua maioria, trabalharam com mais confiança. Fizeram um desenho representando o problema. Montaram um triângulo equilátero e perceberam que se o lado era 20 m, então s = 10 m.

Observamos que, apesar de aparecerem no projeto, os problemas 9 e 11, aplicações interessantes do mundo real e que poderiam agradar os alunos, não foram trabalhados. A professora acreditava que ainda era necessário trabalhar bem as bases da Trigonometria no triângulo retângulo. Tarefas extra classe 10, 11, 12 foram deixadas no final da aula.

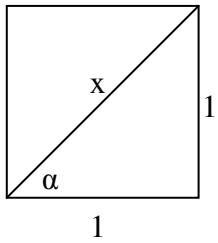
Aula 13

Nas tarefas deixadas 10 e 11, os alunos se apoiaram nos problemas feitos em classe para realizá-las.

O objetivo desta aula para a professora era resolver essas tarefas fazendo uso dos conceitos de razões trigonométricas nesses mesmos problemas.

Aproveitando a tarefa 10, a professora levou os alunos à construção de uma tabela, para valores notáveis dos ângulos 30º, 45º e 60º.

Construiu o quadrado de lado 1 e traçou sua diagonal. Fazendo



$\rightarrow x = \sqrt{2}$

$\rightarrow \alpha = 45º$

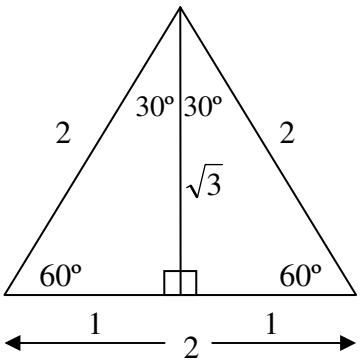
A professora então pediu: – quanto vale seno, cosseno e tangente de α = 45º?

Eles fizeram $sen45^0 = \frac{co}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45^0 = \frac{ca}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,45^0 = \frac{co}{ca} = \frac{1}{1} = 1$$

Para a Tarefa 11, a professora construiu o triângulo eqüilátero e atribuiu ao lado o valor 2. Como já havia sido trabalhado o triângulo equilátero e confirmado que nele altura, mediana e bissetriz se confundem, os alunos completaram os dados do triângulo dodo.



Assim

$$sen30^0 = \frac{co}{h} = \frac{1}{2} \qquad sen60^0 = \frac{co}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{ca}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^0 = \frac{ca}{h} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,30^0 = \frac{co}{ca} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tg\,60^0 = \frac{co}{ca} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Alguns alunos questionaram a professora sobre a escolha dos valores dados aos lados: ora 1, ora 2.

Justificativa: qualquer valor serviria. Esses foram escolhidos para facilitar os cálculos.

Com esses resultados foi construída a seguinte tabela:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Como tarefa foi deixado o problema 12.

Problema 12

Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10º com o plano horizontal (medido com o teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14º. Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

Aulas 14 e 15

O objetivo principal para estas aulas era o de fazer com que os alunos compreendessem melhor os conceitos trigonométricos trabalhados em sala de aula, através de suas aplicações.

A atividade construção do teodolito foi aplicada na aula 14 com a orientação direta do pesquisador.

Segundo Elon Lima e outros (2001), um teodolito é um instrumento que mede ângulos, tanto no plano horizontal quanto no plano vertical.

Para medir uma distância inacessível, necessita-se de uma trena, que nada mais é do que uma fita métrica comprida que possa medir distâncias relativamente pequenas no plano horizontal e de um teodolito. A trena e o teodolito são instrumentos equivalentes à régua graduada e ao transferidor quando trabalhamos no papel.

Os alunos já haviam sido avisados antes de que deveriam trazer o material necessário para a construção de um teodolito caseiro.

Na sala de aula, com os alunos em grupos, o pesquisador distribuiu um roteiro para a atividade construção do teodolito.

***Roteiro para atividade*:** construção do teodolito

Escola Estadual "Joaquim Ribeiro"

Curso: Ensino Médio
Série: 2.7

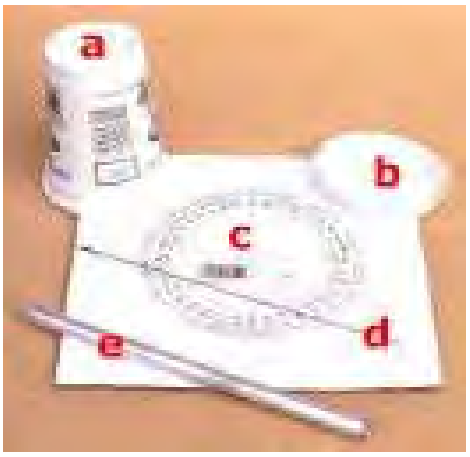
Disciplina: Matemática

- **Assunto:** A Construção de um Teodolito "*Modelo Caseiro*" e sua aplicação matemática.

NOME	N°

- **Objetivos:**
  - Construir um ou dois teodolitos por grupo.
  - Reconhecer o funcionamento do teodolito
  - Observar as semelhanças entre triângulos
  - Compreender melhor os conceitos trabalhados em sala de aula, através da prática.

- **Material necessário**



Esta aula prática pretende construir o teodolito com tesoura, cola, um copo plástico (**a**) com tampa (**b**), cópia xerox de um transferidor de 360^0 alinhada e colada numa base quadrada de 20cm de lado, que pode ser de madeira ou de papelão (caixa de supermercado, por exemplo) (**c**), um pedaço de arame fino, com cerca de 15 centímetros de comprimento (**d**) e um pedaço de tubo de antena de TV ou de qualquer cano fino, com cerca de 20 centímetros de comprimento (**e**), para permitir mirar o objeto.

Procedimento: a construção do teodolito

1 – A precisão: Cole a tampa do copo sobre o xerox do transferidor. Ela será a base de rotação do teodolito. O centro da tampa deve coincidir com o do transferidor. Alinhe os dois pontos usando o arame fino como guia.	
2 – O ponteiro: O arame fino é o ponteiro do teodolito. Ele permitirá fazer a leitura, em graus, no transferidor. Para instalá-lo, faça dois furos diametralmente opostos na lateral do copo, próximo de sua boca, e passe o arame por eles, deixando-o atravessado no copo.	
3 – A mira: O tubo de antena será a mira por onde se avistarão os pontos a medir. Cole o tubo ou o cano fino na base do copo, de forma que ele fique paralelo ao ponteiro.	
4 – Pronto para usar: Encaixe o copo na tampa. Já será possível medir o ângulo entre dois pontos. Basta alinhar a indicação 0^o do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará em graus essa variação.	

Seguindo os passos indicados no roteiro, os alunos iniciaram a construção do teodolito. Nem todos souberam completar essa construção sem que pedissem ajuda ao pesquisador ou à professora. Infelizmente dois grupos não conseguiram chegar a um bom final. Houve imprecisões na construção de seus instrumentos por não seguirem bem o roteiro dado.

Na aula 15, os alunos saíram em grupos, um grupo por vez, para fazer aplicações do teodolito em locais externos à sala de aula. A cada grupo era deixada uma situação-problema para ser resolvida.

Enquanto cada grupo saía, os demais alunos resolviam, com a professora, na sala de aula, o problema 12 e os que voltavam, queriam tirar dúvidas sobre as situações criadas com o teodolito. Só depois é que trabalharam o problema 12

Para o Grupo 1 foi dado o problema 15

Problema 15

Utilizando o teodolito construído e uma trena, determinar a altura de um prédio pertencente à Escola, justificando todos os passos dados.

Grupo 1:

Posicionados no pátio, os alunos receberam instruções do pesquisador sobre o funcionamento do teodolito para resolverem o problema dado.

Aluno observando com o teodolito o prédio escolhido

Grupo 2:

Para o Grupo 2 foi dado, a pedido deles, um problema não constante do projeto. Os alunos desse grupo fizeram um pedido inusitado: ao serem informados pelo pesquisador de que teriam que medir a altura de algum objeto de difícil alcance, escolheram a fachada da escola. Uma vez posicionados, os alunos receberam as mesmas instruções que o pesquisador dera ao Grupo 1.

Fachada da E.E. Joaquim Ribeiro

Grupo 3:

Vendo que o primeiro grupo já havia comentado o procedimento de sua atividade e vendo que o segundo grupo tinha realizado suas medições fora da escola, este grupo, com muitas meninas, também queria sair da escola. Atendendo a esse pedido, o pesquisador apresentou o problema 16.

Problema 16

Utilizando o teodolito construído e uma trena, determinar a altura do poste da rua ao lado da Escola, justificando todos os passos dados.

As meninas mirando o poste.

Grupo 4:

O pesquisador, após dar as instruções, entregou o seguinte problema:

Problema 17

Medir a altura, desde o chão até o topo, de uma antena parabólica situada no telhado do corredor da Escola.

Alunos medindo a antena parabólica “invisível” na foto.

Evidências surgidas dessa aplicação:

Ficou evidente quanto ao trabalho da construção do teodolito que, como os alunos tinham várias dúvidas, principalmente com relação ao uso do instrumento, tanto o pesquisador quanto a professora deveriam ter verificado a precisão de todos os instrumentos construídos, já que não queriam explicar antecipadamente seu funcionamento, objetivando aguçar a curiosidade dos alunos. Devido a isso, dois grupos construíram o teodolito de maneira imprecisa, ou seja, quando o teodolito era posicionado na vertical, a haste não ficava alinhada com o ângulo zero. No entanto, eles acreditavam ter feito de maneira correta, pois achavam que o teodolito seria usado na horizontal. Assim, quando foram a campo, não puderam medir corretamente os ângulos.

No Grupo 1, como mostra a foto, vemos os alunos recebendo instruções do pesquisador sobre o manuseio do teodolito e de como proceder para com a coleta de dados ao resolver o problema.

A foto seguinte mostra os alunos em ação. Um dos integrantes observa o topo do prédio a fim de conseguir o ângulo de elevação.

E, na foto, abaixo com a trena, os outros integrantes medem a distância do teodolito ao prédio.

Este foi um dos grupos que teve ótimo desempenho. Os alunos resolveram o problema com o mínimo de erro. Porém, perguntaram ao pesquisador: – está certo? O pesquisador disse: – perguntem, ao responsável pela manutenção da escola, qual é a altura desse prédio. A resposta dada por ele apresentava uma pequena diferença da altura obtida pelos alunos. Como garantir quem errou? Foram os alunos ou o responsável pela manutenção da escola que forneceu a medida? O pesquisador disse que seria interessante usar um teodolito moderno para se obter uma medida realmente precisa para os padrões atuais.

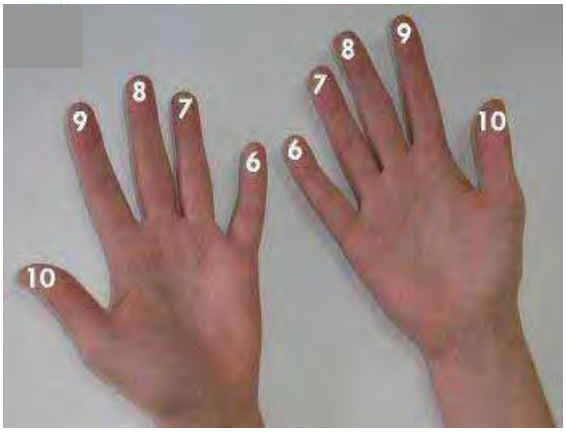
No Grupo 2, para resolver o problema, que era o de conhecer a altura da fachada, os alunos precisaram se afastar da entrada da escola até atingir um ângulo de elevação satisfatório. Foi um dos grupos que mais preocupou o pesquisador pois, para tanto, tiveram que ir para a rua, como é possível observar na foto. Apesar de todos os inconvenientes, eles conseguiram medir o ângulo para determinar a altura pedida.

Também, com a trena, mediram a distância do teodolito até à entrada. Porém, diferente do Grupo 1, a distância era maior, ocasionando mais erros.

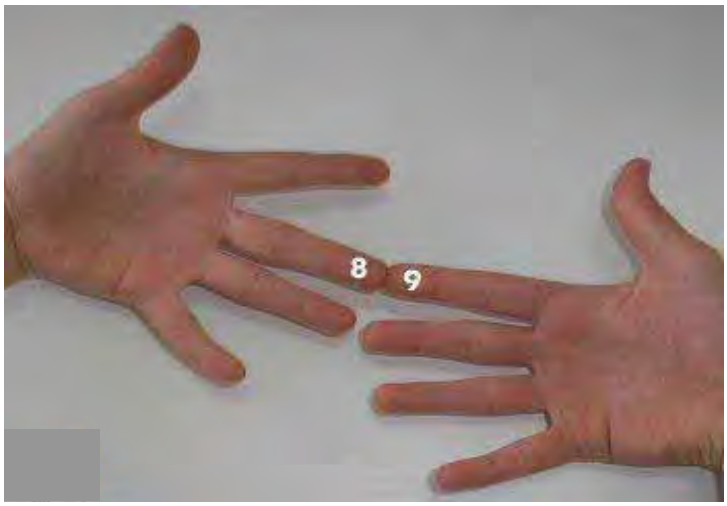
Além da distância, a fachada não estava no mesmo nível, ou seja, eles tiveram que desconsiderar os degraus. Por preguiça, mediram um único degrau e multiplicaram pelo número de degraus, esquecendo-se de que estes poderiam não ser de mesma altura.

Foi uma surpresa para o pesquisador quando para efetuar a multiplicação, um dos alunos usou um método que eu lhes havia ensinado, no dia de minha apresentação para a turma, como pesquisador: a tabuada com os dedos. Nesse dia, o pesquisador lhes havia dito que conhecia um processo rápido de multiplicação com os dedos. Ficaram curiosos. O pesquisador falou que geralmente as tabuadas de 1 a 5 são de fácil aprendizagem. Mas que alguns alunos têm problemas com as demais. Então, perguntou como utilizar os dedos para realizar multiplicações nas tabuadas de 6 a 10? Como fazer 8x9 com os dedos? E apresentou os seguintes passos:

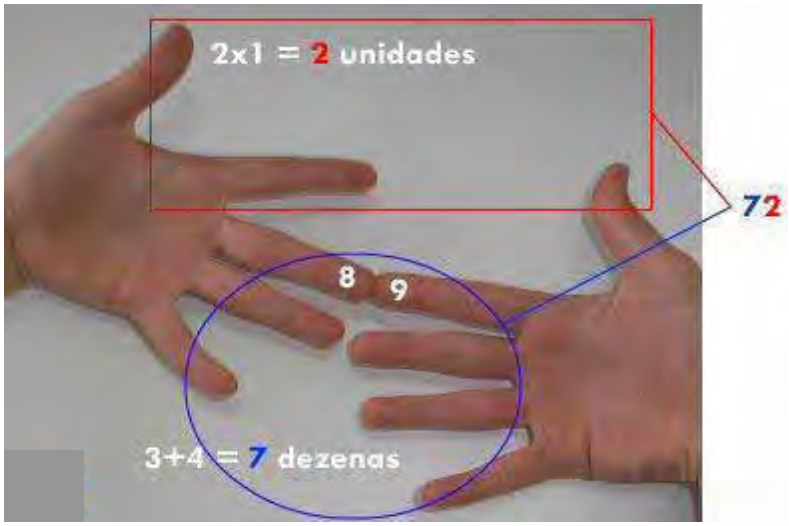
1º) Identificar os dedos da mão da seguinte forma: atribuir o valor 6 para o menor dedo, 7 para o seguinte e assim sucessivamente até o valor 10 para o polegar, como mostra a figura.



2º) Encostar o dedo equivalente ao 8 no dedo equivalente ao 9 da outra mão, como mostra a figura.



3º) O resultado será um número de dois dígitos, onde o número de dezenas será igual à soma de todos os dedos que estiverem abaixo deles incluindo os que estão em contato, e o número de unidades será igual ao produto do número de dedos que estiverem acima, como mostra a figura abaixo. O resultado será a soma das dezenas com as unidades.



Outras situações foram testadas.

Não satisfeitos em medir um único objeto, os alunos do Grupo 2 insistiram em medir também uma peça de decoração existente no jardim da Escola. Dessa vez eles resolveram

"jogar sujo": mediram o objeto com a trena para verificar se o teodolito realmente funcionava. Deu certo!

Foi um grupo que surpreendeu o pesquisador, porque eles gostaram da atividade e a levaram a sério, não se contentando com uma única medida e nem confiando prontamente na funcionalidade do teodolito.

Preocupado com a possibilidade de que eles ficassem decepcionados, pois o teodolito poderia apresentar problemas. Por sorte o teodolito deles estava de acordo com as instruções dadas, proporcionando igualdade nas medidas. Outra surpresa, foi o fato de eles terem discutido entre si quais das razões trigonométricas poderiam ser utilizadas para se obter o resultado.

O Grupo 3 teve certas dificuldades para trabalhar. A primeira delas foi a de a aplicação ter sido feita na rua, devido ao cruzamento e ao trânsito movimentado do horário. Segunda, seu instrumento não estava devidamente ajustado, prejudicando os dados coletados. Mesmo assim eles efetuaram as medidas. Infelizmente, eles também não perceberam que o resultado conseguido era incompatível com a realidade: acharam que o poste poderia medir menos de dois metros.

Os alunos desse grupo também tiveram dificuldade em usar a trena, por causa do trânsito. Devido às falhas relatadas, esse grupo não alcançou sucesso com esse experimento.

Ficou evidente, para nós, que se deveria providenciar antecipadamente uma corda de isolamento junto à CET (Companhia de Engenharia de Tráfego). Com ela, garantidamente, o trabalho teria sido mais seguro e, portanto, teria atingido melhores resultados.

Grupo 4: outro grupo que não teve sucesso devido à falha na construção do teodolito foi este.

Não temos mais registros desse grupo porque a bateria da câmara fotográfica acabou naquela hora. Foi realmente uma pena. Por outro lado, sempre aprendemos com os erros: é sempre útil levar uma bateria de reserva.

4ª semana – aulas 16 – 17 – 18 – 19 – 20

Enquanto que, na 1ª e 2ª semanas, o pesquisador foi apenas um observador em sala de aula, na 3ª semana, ele passou a ser um observador-participante, sendo que, nessa semana, teve uma participação ativa com a construção e aplicação do teodolito. A partir desse instante, professora, pesquisador e alunos passaram a atuar num ambiente mais propício a um trabalho de Matemática através da resolução de problemas. Respeitando o Termo de Compromisso e seguindo o mais de perto possível o projeto planejado, a metodologia adotada em nossa área de trabalho estava se firmando, tornando possível ensinar, aprender e avaliar através da resolução de problemas.

Nesta quarta semana, o compromisso professora e pesquisador foi se consolidando e a aceitação, por parte de ambos, da metodologia adotada para a sala de aula, se refletiu no trabalho com os alunos, seguindo mais comprometidamente o roteiro de aula, elaborado por Onuchic que, em seqüência, diz: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; resultados na lousa; plenária; análise dos resultados; consenso; e formalização (ver p. 92 e 93).

Aulas 16 e 17 – Para estas aulas, o pesquisador participou mais ativamente no trabalho de sala de aula. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi se firmando. Então, graus e radianos e suas medidas foram trabalhadas a partir dos problemas 18, 19 e 20.

Atendendo aos objetivos do projeto, selecionamos esses problemas a fim de que pudessem provocar nos alunos uma boa participação num trabalho envolvendo ângulos e suas medidas. A professora colocou, ao mesmo tempo, os três problemas na lousa, pretendendo comparar as duas diferentes unidades de medida.

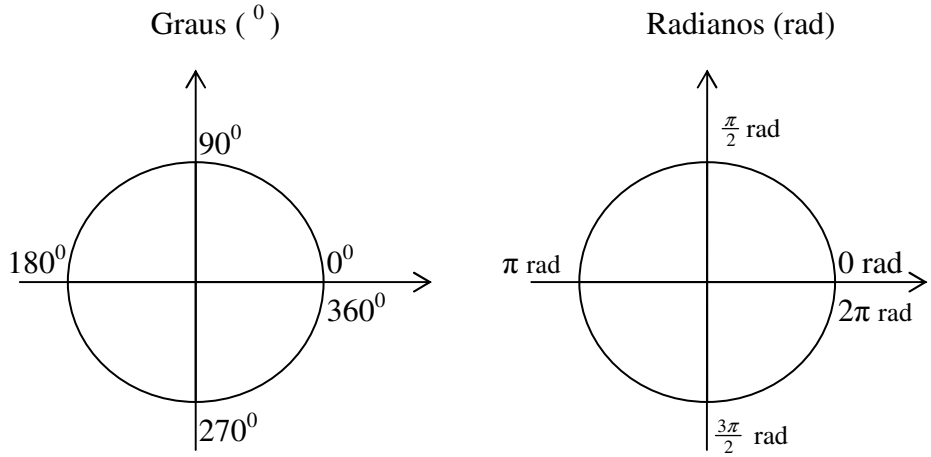
Problema 18

Qual é a medida, em radianos, de um arco de 225º?

Problema 19

Em que quadrante se localiza um arco de $\frac{7\pi}{6}$ rad?

Devido a interesses da professora, os alunos trabalharam individualmente. Eles copiaram os problemas e, quase que imediatamente, perguntaram: o que é radiano? A professora, num trabalho expositivo, desenhou duas circunferências, reservou uma para graus e outra para radianos.



Marcou, na primeira circunferência, sempre esperando pela manifestação dos alunos, os pontos que cortam os eixos: 0^0, 90º, 180º, 270º e 360º, destacando que, numa volta inteira, o ângulo descrito mede 360º.

Daí, a professora, sempre dentro de suas crenças e hábitos, passou à segunda circunferência, dizendo que há outra unidade de medida de arcos, chamada radiano (rad). Disse que 0^0 é 0 rad, o ponto de partida de orientação de arcos, medidos no sentido anti-horário. Disse, também, que, numa volta completa, há 2π rad. Depois disso completou os demais pontos, como partes de 2π rad.

Pediu que olhassem para essas circunferências e, comparando os ângulos com as duas diferentes unidades de medida, escreveu a relação 180º −−−− π rad, dizendo que a 180º corresponde π rad. A partir daí, os alunos puderam resolver os problemas 18 e 19.

Observamos que, para o problema 18, passando de graus para radianos, os alunos conseguiram trabalhar bem, sempre contando com a ajuda da professora e do pesquisador.

Entretanto, no problema 19, houve dificuldade. Agora não havia uma relação imediata. O problema pedia que identificassem o quadrante no qual o arco $\frac{7\pi}{6}$ rad se localizava. A dificuldade ocorreu porque os alunos não sabiam o que significava π rad.

A professora, junto com os alunos, usando a relação π rad = 180º, conseguiu mostrar que o arco $\frac{7\pi}{6}$ rad se localizava no 3º quadrante, pois $\frac{7\pi}{6} rad = \pi rad + \frac{\pi}{6} rad$.

No final da aula foram deixadas, como tarefa extraclasse, as tarefas 25, 26 e 27.

Preparando a aula seguinte, a professora pediu aos alunos que trouxessem objetos com forma circular, de diferentes tamanhos, para poder trabalhar o conceito de radiano, que desde o enunciado do Problema 19, já incomodava os alunos.

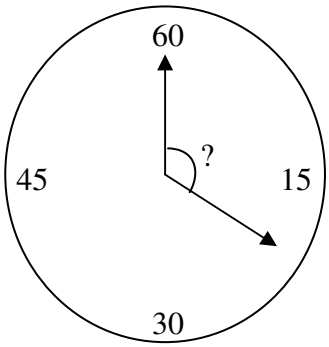
Aula 18

Nesta aula foi pedido aos alunos que formassem grupos. O problema 20 foi escrito na lousa. Como os alunos haviam trazido variados objetos circulares, a professora lhes pediu que, com um pedaço de barbante, levado por ela, medissem o comprimento da circunferência e de seu diâmetro. Como os objetos eram diferentes, os alunos encontraram diferentes valores para a circunferência e o diâmetro. Depois das medidas feitas a professora pediu que eles dividissem o comprimento da circunferência pelo diâmetro e, então, os alunos perceberam que os valores obtidos era muito parecidos entre si. Esse número obtido, na realidade, se houver precisão nas medidas, é sempre o mesmo, é constante e vale 3,14159... e, como decimal não exata e não periódica é um número irracional. O nome dado a esse número é π, lê-se pi, que é a letra grega correspondente ao nosso P.

Assim, chamando de C o comprimento da circunferência de raio r e de d o seu diâmetro, ela escreveu $\frac{C}{d} = \pi$ e como d = 2r, então, $\frac{C}{2r} = \pi \quad \therefore \; C = 2\pi\, r$

Problema 20

O ponteiro dos minutos de um relógio ao percorrer 20 minutos descreve um arco de quantos graus?



Foi resolvido pelos alunos. Explorando, a professora pôde levantar muitas questões, como por exemplo: a cada 5 minutos qual é o ângulo percorrido? Em que sentido o tempo é percorrido?

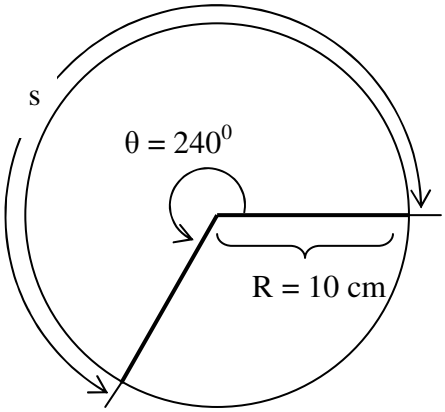
Foi deixada a tarefa 28.

Aulas 19 e 20

Com os alunos em grupos, foi enunciado na lousa o problema 21

Problema 21

Um círculo tem um raio de 10 centímetros. Ache o comprimento do arco interceptado por um ângulo central de 240º, como mostra a figura abaixo.



A professora tinha, por objetivo, a fazer uso, com os alunos, da fórmula do comprimento de uma circunferência e a relação da circunferência com seus arcos.

Com a ajuda do pesquisador e da professora, recordando o trabalho que haviam feito com os objetos circulares, os alunos puderam chegar à resposta do problema:

Fazendo uso de alguns livros didáticos, professora e pesquisador quiseram abordar o problema usando uma outra relação entre arcos e ângulos.

Na lousa, a professora mostrou que, a partir de $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, chega-se neste problema a $C = 2 \cdot \pi \cdot r \cong 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10cm = 6{,}28 \cdot 10cm = 62{,}8cm$.

Então

Ângulo	Comprimento
360º	62,8 cm
240º	x

Há proporcionalidade entre essas duas grandezas. Assim,

$$\frac{360^0}{240^0} = \frac{62{,}8cm}{x} \qquad \text{logo, } x = \frac{62{,}8cm \cdot 240^0}{360^0}$$

e, simplificando, $x = \frac{62{,}8cm \cdot 2}{3} = \frac{125{,}6cm}{3} \cong 41{,}9cm$

No livro didático consultado lê-se que o arco aumenta proporcionalmente ao aumento do raio pois vale a relação $\alpha = \frac{l}{r}$

De fato, considerando α medido em radianos, pode-se ver que, num círculo de raio 1,

$360^0 \cong 6{,}28rad \;\therefore\; 1^0 \cong \frac{6{,}28rad}{360} \cong 0{,}0174rad$ logo $240^0 = 240 \cdot 0{,}0174rad \cong 4{,}19rad$

Como no nosso caso, $r = 10cm$, então $l = \alpha \cdot r$

$$l = 10\alpha$$

Assim $C_{arco} \cong 10 \cdot 4{,}19cm = 41{,}9cm$

Não houve tempo para a resolução do problema 22.

Foram deixadas as tarefas 29 a 34.

5ª semana – aulas 21 – 22 – 23 – 24 – 25

Como diz Rodrigues (1992, p. 66), em sua dissertação de mestrado,

> Daremos particular destaque à pesquisa–ação, definida como um tipo de pesquisa social com base empírica, que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

Romberg (1992, p.56) também diz que o termo pesquisa–ação refere-se a uma estratégia de pesquisa usada para investigar situações de escolaridade, onde o pesquisador assume o que precisa ser documentado e compreendido.

Nesta semana o pesquisador passou a atuar dentro da linha de pesquisa–ação. Ele foi, a partir desse momento, um professor–pesquisador que trabalhou para produzir conhecimento novo, contribuindo para discutir as ações sobre as questões abordadas e assumindo o que foi preciso para ser documentado.

Aulas 21 e 22

Um objetivo para estas aulas era o de provocar os alunos com problemas apropriados para a identificação do círculo unitário, a simetria de arcos e a redução de arcos ao 1º quadrante.

Nas atividades programadas para estas aulas, nosso interesse primeiro foi o de adotar, inteiramente, como dinâmica de trabalho, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Seis grupos foram formados. Foi entregue, por escrito, aos alunos o problema 24.

Problema 24

Uma rampa reta e plana de 12 m de comprimento une dois pisos horizontais de uma praça. A medida α do ângulo obtuso que a rampa forma com o piso inferior é tal que cos α = - 4/5. Qual é a altura do piso superior, em relação ao piso inferior?

Os grupos reunidos leram o problema e, como primeira ação, resolveram fazer uma representação da situação.

O professor-pesquisador observou os grupos, acompanhando suas discussões sem intervir nelas. Nesse momento, a professora da turma era observadora. Ela estava surpresa, imaginando como os alunos poderiam ir em busca da solução sem que se lhes dissesse nada sobre como proceder.

Visando à construção do conteúdo simetria de arcos trigonométricos e querendo que os alunos soubessem reduzir arcos maiores a arcos do primeiro quadrante, o pesquisador esperou receber, por escrito, as resoluções dos grupos para, então, na plenária, poder explorar erros e acertos, antes de formalizar qualquer conhecimento construído.

O que parecia surpreendente para a professora aconteceu. Quando o pesquisador começou a dar atenção aos questionamentos dos alunos nos grupos, eles queriam respostas. Muitas vezes, o pesquisador precisou fazer uma revisão rápida sobre a classificação dos ângulos: agudos, obtusos, complementares, suplementares, conceitos já conhecidos do Ensino Fundamental.

Os grupos haviam desenhado a rampa e, só depois da fala do pesquisador, é que compreenderam qual era o ângulo obtuso α, no desenho. Também conseguiram encontrar a medida do ângulo suplementar de α, isto é, 180º - α, um ângulo agudo na figura.

Como já haviam trabalhado a trigonometria no triângulo retângulo, aplicaram a esse ângulo uma das razões trigonométricas e escreveram sen (180º - α).

Diante das perguntas dos alunos, o pesquisador, já sabendo que conhecimento queria construir com eles, fez uso de um caminho que imaginara para atingir seus objetivos. Falando sobre o plano cartesiano, situou o triângulo no segundo quadrante e pediu aos componentes do grupo, com o qual trabalhava, que procurassem dar sentido àquele dado do problema: cosα = - 4/5. Parece que alguns entenderam o que foi dito e, então, souberam justificar a posição do triângulo no segundo quadrante.

Os seis grupos entregaram, por escrito, suas resoluções. Notando que o tempo corria rapidamente, o pesquisador pediu que dois, dos seis grupos, colocassem suas resoluções na lousa. Todos os alunos foram chamados, como um grande grupo, para participar da plenária,

onde o pesquisador, tomando as rédeas do trabalho, começou a explorar, com todos juntos, as resoluções colocadas na lousa.

O Grupo 2 apresentou sua resolução, correta, mostrando ter entendido o problema quando o pesquisador lhes falou sobre a congruência de ângulos e sobre ângulos suplementares. Usou a relação fundamental da trigonometria e, partindo de cos α = -4/5, encontrou o valor de sen α.

GRUPO 2

Problema

Uma rampa reta e plana de 12 m de comprimento une dois pisos horizontais de uma praça. A medida α do ângulo obtuso que a rampa forma com o piso inferior é tal que cos α = - 4/5.

Qual é a altura do piso superior, em relação ao piso inferir

cos α = -4/5 y = 12 m x β

Obs:

180°

cos 180° = -1

I) α + β = 180° ⇒ α = 180 − β

II) cos β = − cos α

cos β = cos(180 − α)

cos β = cos 180 · cos α + sen α · sen 180

cos β = − cos α

cos β = 4/5

sen² β = 1 − cos² β

sen² β = 1 − 16/25

sen² β = 25 − 16/25 = 9/25

sen β = 3/5

sen β = x/12

3/5 = x/12

x = 12 3/5

x = 36/5

x = 7,2 m ∴ A altura é 7,2 m

16

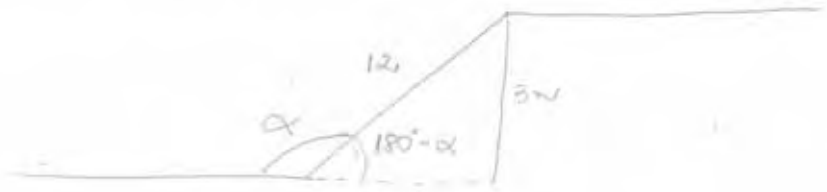
O Grupo 3 não conseguiu chegar à solução correta do problema. O grupo desenhou um triângulo retângulo pitagórico: 3, 4, 5 e sobre ele os alunos trabalharam, nada havendo que se relacionasse ao problema dado.

Grupo 3

Problema

Uma rampa reta e plana de 12 m de comprimento une dois pisos horizontais de uma praça. A medida α do ângulo obtuso que a rampa forma com o piso inferior é tal que cos α = - 4/5.

Qual é a altura do piso superior, em relação ao piso inferir.



$h^2 = ca^2 + co^2$

$5^2 = (-4)^2 + co^2$

$25 = 16 + co^2$

$co^2 = 25 - 16$

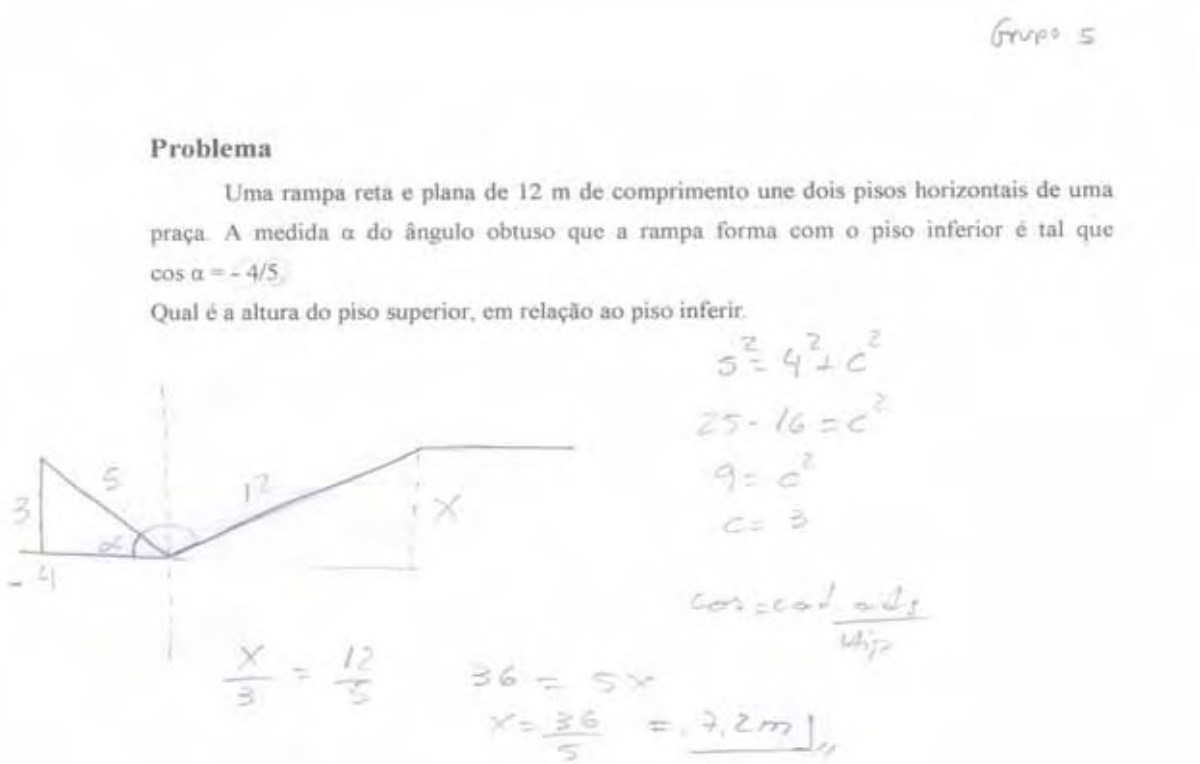
$co = \sqrt{9}$

$co = 3\,m$

A altura entre o piso inferior e superior é de 3 m.

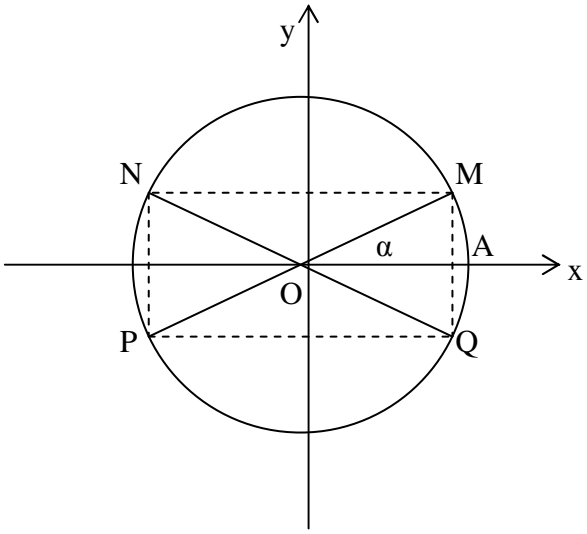
169

O Grupo 5 trabalhou esse problema, a partir de informações que o pesquisador havia dado sobre a localização de cos α = -4/5, e aplicando o Teorema de Pitágoras chegou à solução



Chegando todos a um consenso quanto à solução do problema, o pesquisador foi à lousa para formalizar o conteúdo matemático novo que fora construído.

Consideremos o círculo trigonométrico no plano cartesiano e um arco AM. Unindo O a M formamos o ângulo agudo α.



Traçando por M uma paralela ao eixo Ox, obtemos o ponto N simétrico de M em relação ao eixo Oy. Ligando N a O obtemos um ângulo obtuso AÔN. Por N traçamos uma paralela ao eixo Oy que encontra a circunferência no ponto P, simétrico de N em relação ao eixo Ox. O ângulo AÔP é também obtuso. Por P traçamos uma paralela ao eixo Ox encontrando a circunferência no ponto Q, simétrico de P em relação ao eixo Oy, gerando o ângulo obtuso AÔQ.

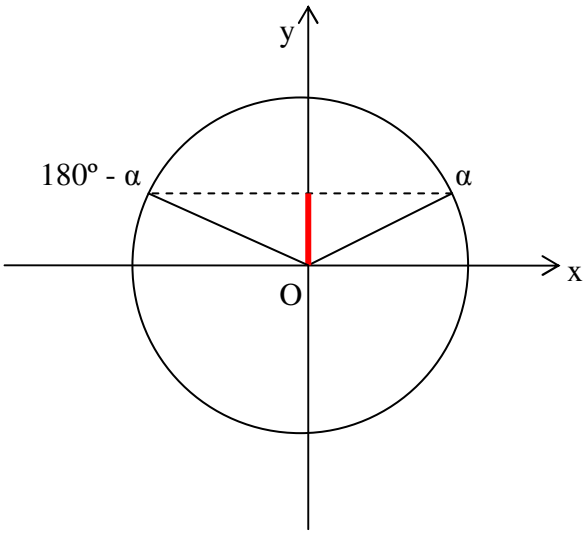
Também vemos que M é simétrico de P e N é simétrico de Q em relação ao ponto O.

Com essa fala, os alunos perceberam que, na trigonometria, não tratamos somente com ângulos agudos α, $0^0 < \alpha < 90º$. Agora, podem sentir que é possível trabalhar com a trigonometria num triângulo qualquer.

Para visualizar esse fato, apresentamos um material concreto, por nós construído, semelhante a um carrossel, onde, num movimento circular, podiam constatar a existência de ângulos maiores que 360º.

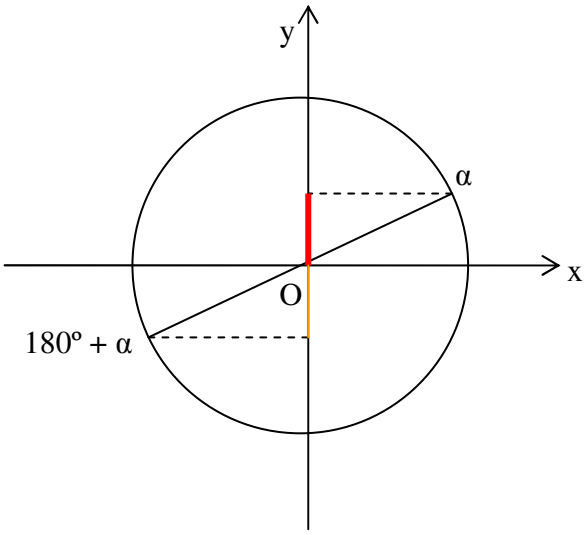
Um recurso para determinar o seno de arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes, usando os valores do 1º quadrante, é o da redução ao 1º quadrante.

- Do 2º para o 1º quadrante (simetria em relação ao eixo Oy)



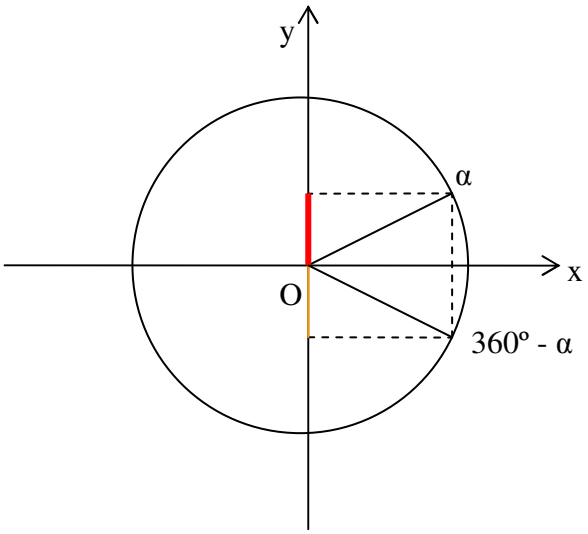
Se α = 30º, então $\begin{cases} sen(180^0 - 30^0) = sen150^0 = sen30^0 \\ sen(90^0 + 60^0) = sen150^0 = sen30^0 \end{cases}$

- Do 3º para o 1º quadrante (simetria em relação ao ponto O)



Se α = 30º, então $sen(180^0 + 30^0) = sen210^0 = -sen30^0$

- Do 4º para o 1º quadrante (simetria em relação ao eixo Ox)



Se α = 30º, então $sen(360^0 - 30^0) = sen330^0 = -sen30^0$

Generalizando

- $sen(\pi - \alpha) = sen(180^0 - \alpha) = sen\alpha$
- $sen(\pi + \alpha) = sen(180^0 + \alpha) = -sen\alpha$
- $sen(2\pi - \alpha) = sen(360^0 - \alpha) = -sen\alpha$

Analogamente pode-se analisar para cosα e tgα.

Aula 23

Foram corrigidas as tarefas 35 e 36. Parece que não houve dúvidas.

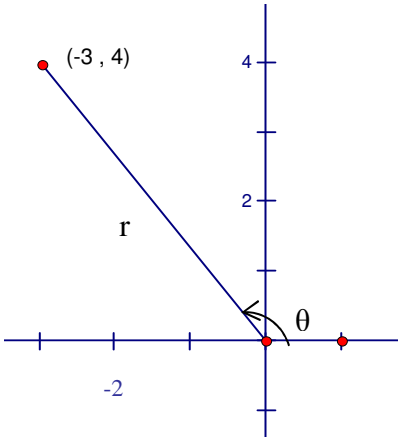
Nesta aula, nosso objetivo era o de trabalhar com ângulos especiais: 0^0, 90º, 180º, 270º e 360º.

Além de seno, cosseno e tangente serão trabalhadas as funções recíprocas cotangente, secante e cossecante.

Inicialmente, aos alunos em grupos, o pesquisador colocou na lousa o Problema 23, fazendo com que eles calculassem funções trigonométricas de ângulos maiores do que 90º.

Problema 23

Seja (-3, 4) um ponto do lado terminal de θ. Ache o seno, cosseno e tangente de θ.

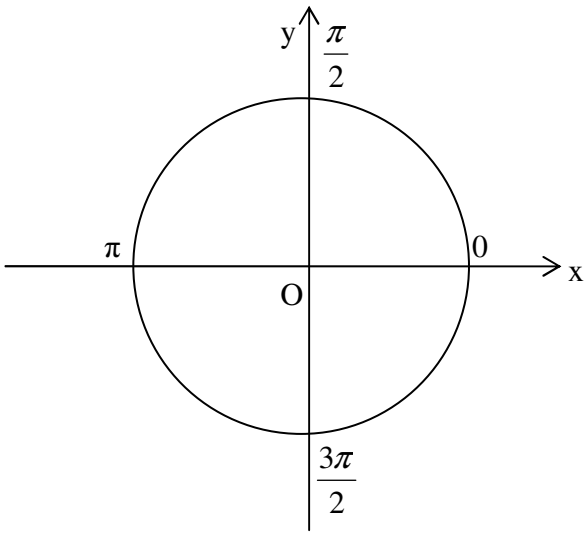


Este problema não ofereceu dificuldade à maioria dos alunos e não houve necessidade de ajuda.

O Problema 25, também posto na lousa, tem por objetivo trabalhar os ângulos notáveis, isto é, os ângulos quadrantes, aqueles que terminam nos eixos coordenados.

Problema 25

Calcule as funções seno e cosseno nos quatro ângulos quadrantes: 0rad, (π/2)rad, π rad e (3π/2) rad.



Para calcular os valores de seno e cosseno no ponto 0 (zero), os alunos encontraram dificuldade. Buscaram aplicar as definições de seno e cosseno conhecidas. Assim, olhando no círculo trigonométrico que tinham construído, ficaram confusos porque não viam o ângulo mas, simplesmente, um segmento de reta.

Uma aluna, buscando sen 0, disse: – Professor, eu acho que é zero mas não sei justificar.

O professor-pesquisador, então, perguntou: – Por que você acha isso?

Mais uma vez, os alunos olhando no círculo trigonométrico desenhado, puderam ver que o seno, no primeiro quadrante, cresce de 0 até 1 e o cosseno decresce de 1 até 0.

Então, usando as definições de seno e cosseno escreveram

$$sen0 = \frac{co}{h} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 0 = \frac{ca}{h} = \frac{1}{1} = 1$$

$$sen\frac{\pi}{2} = \frac{co}{h} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \frac{ca}{h} = \frac{0}{1} = 0$$

$$sen\pi = \frac{co}{h} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos\pi = \frac{ca}{h} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$sen\frac{3\pi}{2} = \frac{co}{h} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{ca}{h} = \frac{0}{1} = 0$$

Foram deixadas as tarefas 37, 38 e 39. Na tarefa 37 pedia-se para completar a tabela de ângulos especiais. Na tarefa 38 pedia-se para completar a tabela com valores da tangente.

Aulas 24 e 25

Começamos estas aulas com a correção das tarefas 37, 38 e 39. A tarefa 37, completar a tabela, exigia apenas colocar valores conhecidos. Já a tarefa 38 exigia o conhecimento do conceito de tangente e, como não havíamos trabalhado essa função na aula anterior, houve uma pequena dificuldade. Os alunos precisavam substituir, na definição, tg x por $\frac{senx}{\cos x}$, com $\cos x \neq 0$, e, precisavam também fazer uso da tabela anterior. Assim, houve operações com frações e racionalização de números irracionais. Por exemplo:

$$tg0^0 = \frac{sen\ 0^0}{\cos\ 0^0} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{e} \quad tg30^0 = \frac{sen30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para estas aulas, os problemas 26 e 27 foram selecionados. O pesquisador os escolheu visando a um trabalho de compreensão e significado do comportamento das funções $y = senx$, $y = \cos x$ e $y = tgx$ em triângulos quaisquer.

Dentro de nossa metodologia, como já dissemos, o trabalho da construção de conhecimento novo começou com problemas. Assim, nestas aulas onde oferecíamos

problemas de fixação de conceitos já construídos, pudemos perceber um ambiente agradável, de confiança e de interesse para os alunos.

Problema 26

Resolver as questões abaixo:

a) Qual é o valor de $sen120^0 + \cos 510^0$?

b) Qual é o valor de $sen^2 \frac{5\pi}{4} + sen^2 \frac{3\pi}{4}$?

c) Calcule $\frac{tg945^0 + 2 \cdot sen210^0}{1 + \cos 720^0}$.

d) Qual é o valor de $sen450° - \cos 13\pi + tg1845°$?

Este problema foi feito pela maioria dos alunos pois exigia apenas conhecimento já construído. Escolhemos discutir com detalhes apenas a questão (d).

Nessa questão, acompanhando o trabalho dos grupos, o professor-pesquisador percebeu, ao andar pela sala de aula, que a maioria começou reduzindo 450º ao primeiro quadrante, fazendo $450º \,|\, \underline{360º}$ e, portanto, 1 volta mais $90º$.

$090º \quad 1$

Daí $sen450^0 = sen90^0 = 1$.

Analogamente, ao reduzir 13π ao primeiro quadrante, fizeram $13\pi \,|\, \underline{2\pi}$, obtendo

$1\pi \quad 6$

portanto 6 voltas + π. Daí, $\cos 13\pi = \cos \pi = -1$.

Observamos que um dos grupos foi fazendo subtrações sucessivas de 2π em 13π. Assim, esse grupo fez 13 π - 2 π - 2 π - 2 π -2 π - 2 π - 2 π = π. Assim deu 6 voltas e, ainda restou π.

Alguns alunos, fizeram apelo à conversão de radianos para graus e, outros, usando a calculadora, fizeram $13\pi = 13 \cdot 180$, pensando em $13\pi rad = 13 \cdot 180^0 = 2340^0$.

Depois fizeram $2340º \,|\, \underline{360º}$ obtendo portanto, 6 voltas + 180º.

$180º \quad 6$ Logo $\cos 13\pi rad = \cos 180^0$

E, sabendo que cos 180º = -1, concluíram que cos 13π = -1.

Para a parcela tg (1845º), fizeram $1845º \,|\, \underline{360º}$

$045º \quad 5$ voltas

Logo, tg (1845º) = tg 45º = 1.

Depois de terem achado os valores das parcelas foram, na maioria, quase que obrigados pelo professor-pesquisador a apresentar a resposta do problema dado.

sen (450º) – cos(13π) + tg(1845º) = 1 – (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3

Deixamos as tarefas 40, 41 e 42.

6ª semana – aulas 26 – 27 – 28 – 29 – 30

As tarefas deixadas, 40, 41 e 42, foram analisadas e avaliadas, dentro do colocado no Termo de Compromisso. Essas tarefas quase não apresentaram dificuldade aos alunos, embora alguns deles não as houvessem feito. Esse fato foi registrado no diário de classe da professora.

Os objetivos desta semana eram o de levar os alunos a trabalharem sobre problemas envolvendo relações e identidades trigonométricas. Esses problemas também visam o fazer uso de variadas técnicas algébricas, já trabalhadas por eles, na resolução de equações trigonométricas. Esses objetivos serão alcançados fazendo sempre uso da metodologia de ensino-aprendizagam-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

Aulas 26 e 27

Para essas aulas foram selecionados, na ordem, os problemas 29 e 28. O objetivo desses problemas é o de trabalhar identidades trigonométricas.

Com alunos já agrupados, por vontade própria, foi entregue aos grupos o problema 29.

Problema 29

Para escorar um muro vertical localizado em um terreno plano e horizontal, foi usada uma barra de ferro de 2,6m de comprimento, reta, apoiada em um ponto ***P*** do terreno e em um ponto ***Q*** do muro. A medida α do ângulo obtuso que a barra forma com o terreno é tal que $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Determine a distância entre o ponto ***Q*** e o solo.

Os alunos conseguiram fazer, num desenho, uma representação do problema, embora, nem todos tenham chegado a uma boa interpretação de seu enunciado, pois a palavra escorar parecia não fazer parte de seu vocabulário.

Esclarecida essa dúvida, o desenho foi feito por todos.

Partindo de $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e sabendo que $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$, os alunos puderam escrever $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ mas lembrando que $\cos\alpha = \frac{ca}{h}$, fizeram $\cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{2{,}6m} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Então, $\overline{OP} = \frac{-\sqrt{3}\cdot 2{,}6m}{2} = -\sqrt{3}\cdot 1{,}3m$ e aí pararam.

Muitos deles não se lembraram, nem olhando para a figura, do Teorema do Pitágoras com o qual poderiam ter trabalhado assim:

$\overline{OP}^2 + d^2 = (2{,}6m)^2$ onde d é a distância do ponto Q ao solo.

Assim, $(-\sqrt{3}\cdot 1{,}3m)^2 + d^2 = (2{,}6m)^2$ e, então, $d^2 = (2{,}6m)^2 - (-\sqrt{3}\cdot 1{,}3m)^2$

Portanto $d^2 = 6{,}76m^2 - 5{,}07m^2 = 1{,}69m^2$

Logo, $d = \sqrt{1{,}69m^2} = 1{,}3m$.

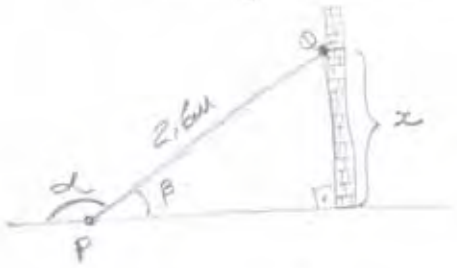
Mas esse caminho não foi percorrido.

O Grupo 2, trabalhando muito bem esse problema, fez, com algumas correções do pesquisador, assim:

Grupo 2

Problema

Para escorar um muro vertical localizado em um terreno plano e horizontal, foi usada uma barra de ferro de 2,6m de comprimento, reta, apoiada em um ponto P do terreno e em um ponto Q do muro. A medida α do ângulo obtuso que a barra forma com o terreno é tal que $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ Determine a distância entre o ponto Q e o solo.



① $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ∴ $\beta = 180° - \alpha$

2) $\operatorname{sen}\beta = \frac{x}{2,6}$ $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\operatorname{Sen}(180° - \alpha) = \frac{x}{2,6}$ $\cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 2,6\operatorname{sen}(180° - \alpha)$ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

→ $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pela simetria ou pela suplementaridade

→ $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$

Obs $\operatorname{sen}\beta = \frac{x}{2,6m}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{2,6m}$

$x = \frac{2,6m}{2}$

$x = 1,3m$

2,6 | 20
20 | 1,3
6

Em compensação, o Grupo 4 só pôde exibir um desenho e escreveu assim:

GRUPO 4

Problema

Para escorar um muro vertical localizado em um terreno plano e horizontal, foi usada uma barra de ferro de 2,6m de comprimento, reta, apoiada em um ponto P do terreno e em um ponto Q do muro. A medida α do ângulo obtuso que a barra forma com o terreno é tal que $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Determine a distância entre o ponto Q e o solo.

NOS DO GRUPO ESTAMOS EM DUVIDA SOBRE A FORMULA DO SECANTE...
NÃO CONSEGUIMOS RESOLVER.

Como o propósito do professor-pesquisador era o de trabalhar, nesse problema, com identidades trigonométricas, ao acompanhar o trabalho do Grupo 1, ele pôde perceber que os alunos haviam chegado ao valor de cos α, ao partir de $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Daí para a frente o grupo pôde continuar a resolução do problema seguindo sugestões do professor-pesquisador: a de fazer uso de identidades trigonométricas.

Grupo 1

Problema

Para escorar um muro vertical localizado em um terreno plano e horizontal, foi usada uma barra de ferro de 2,6m de comprimento, reta, apoiada em um ponto P do terreno e em um ponto Q do muro. A medida α do ângulo obtuso que a barra forma com o terreno é tal que $\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Determine a distância entre o ponto Q e o solo.

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Com sugestões, de usar identidades trigonométricas, fizeram

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$

Como o valor de $\sin\alpha$ é positivo, $\sin\alpha > 0$: $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

Sendo $\alpha + \beta = 180°$ temos : $\sin\alpha = \sin\beta$. Logo,

$\sin\beta = \frac{h}{2,6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{2,6} \Leftrightarrow h = \frac{2,6}{2} \Rightarrow h = 1,3\,m$

Os grupos 2 e 1 colocaram suas resoluções na lousa. O professor-pesquisador, apoiado nessas resoluções, as analisou na plenária, explorou bastante as relações entre as funções trigonométricas, questionou os caminhos percorridos nas duas resoluções e, por fim, formalizou esse conteúdo na lousa, colocando todas as identidades trigonométricas.

Quanto à formalização, o professor-pesquisador fez questão de mostrar que o problema 29 poderia ter sido resolvido usando as definições de razões trigonométricas e o Teorema de Pitágoras. Mas que, se tivessem feito uso das identidades trigonométricas, o trabalho seria menor, como foi trabalhado pelo Grupo 1.

Não houve tempo para resolver o problema 28. Ele foi deixado para tarefa além das tarefas 46 e 47.

Aula 28

As tarefas deixadas foram trabalhadas no início dessa aula.

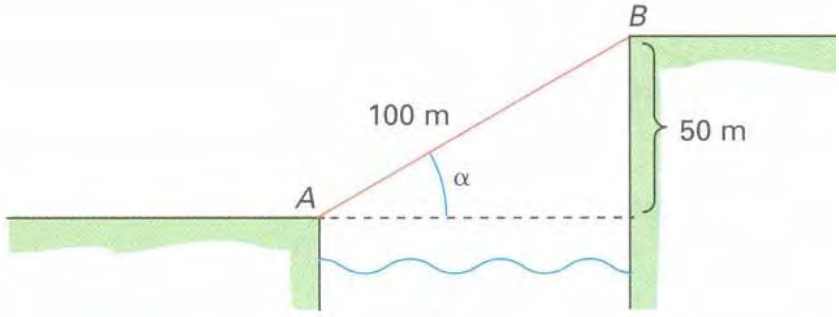
Os alunos não tiveram dificuldade em trabalhar o problema 28 e as tarefas 46 e 47.

O objetivo desta aula é mostrar a diferença entre identidades e equações trigonométricas.

Com os alunos formados em grupos foi entregue o problema 30.

Problema 30

Uma rampa reta e plana, com 100m de comprimento, deve ser construída unindo dois pontos com um desnível de 50m. Qual será a inclinação dessa rampa?

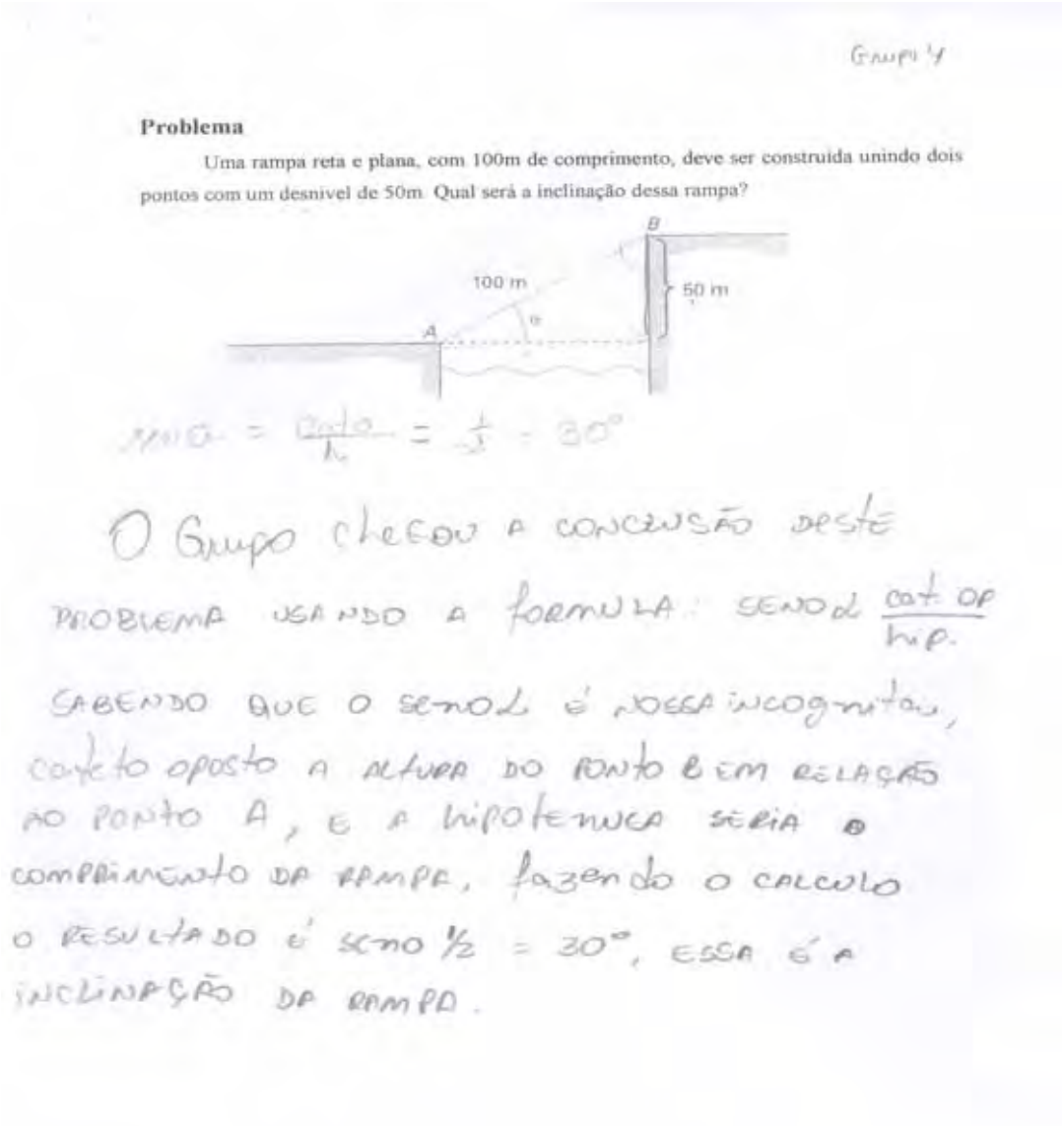


Os alunos gostaram desse problema, parecido com aquele resolvido em sala de aula, mas que pedia não uma distância mas um ângulo de inclinação.

Todos os grupos chegaram à solução do problema, apenas um deles precisou de ajuda. As resoluções foram muito semelhantes.

O enfoque do professor foi o de chamar a atenção para o fato de que, neste problema, resolveu-se uma equação trigonométrica $sen\alpha = \frac{50m}{100m} = \frac{1}{2}$ e buscando o valor de α, chegaram a 30º.

O Grupo 4 soube, com palavras, resolver o problema.


GRUPO 4

Problema

Uma rampa reta e plana, com 100m de comprimento, deve ser construída unindo dois pontos com um desnível de 50m. Qual será a inclinação dessa rampa?

sen α = cat. op. / hip. = 1/2 = 30°

O GRUPO CHEGOU A CONCLUSÃO DESTE PROBLEMA USANDO A FORMULA: SENO α = cat. op. / hip.

SABENDO QUE O SENO α É NOSSA INCOGNITA, CATETO OPOSTO A ALTURA DO PONTO B EM RELAÇÃO AO PONTO A, E A HIPOTENUSA SERIA O COMPRIMENTO DA RAMPA, FAZENDO O CALCULO O RESULTADO É SENO ½ = 30°, ESSA É A INCLINAÇÃO DA RAMPA.

Apenas a tarefa 48 foi deixada.

Aulas 29 e 30

Para estas aulas foram selecionados os problemas 31 e 32 e as tarefas 49 e 50, constantes do roteiro de atividades. A idéia central, nessas atividades, foi a de resolução de equações trigonométricas que, como se sabe, dependem muito da álgebra já construída.

Com os alunos distribuídos naturalmente em grupos foi entregue, por escrito, o problema 31.

Problema 31

A partir do meio-dia, considere todos os arcos de medida x rad, com $0 \leq x < 2\pi$, descritos pela extremidade móvel do ponteiro dos minutos de um relógio, de modo que $tg^4 x - tg^2 x = 0$.

a) Esboce um esquema representando no mostrador de um relógio as posições desse ponteiro para cada arco de x rad que é raiz da equação.

b) Qual é o tempo necessário para que esse ponteiro atinja a posição correspondente ao maior arco possível do item a?

Em todos os grupos vimos que aparecia primeiramente o desenho de um relógio e que se mostrava diferente do trabalho com círculos trigonométricos em que o ponto de partida não era mais aquele indicado no círculo por A. Agora, o ponto de partida era meio-dia.

Ao lerem o enunciado do problema, houve muita discussão nos grupos. Que números deveriam colocar no mostrador do relógio? 1, 2, 3, ... , 12 para as horas ou 15, 30, 45, 60 para os minutos?

Era dada uma equação trigonométrica. Como achar suas raízes?

Alunos disseram: - Parece uma equação do 4º grau. Nunca ouvimos falar nisso. Um dos grupos chegou até escrever SOCORRO. Foi preciso que o professor-pesquisador fizesse intervenções fortes e levantasse muitos questionamentos, apelando para conhecimentos matemáticos do Ensino Fundamental.

Vocês enxergam uma equação no problema?

Sim, há um sinal de igual entre os dois membros $tg^4 x - tg^2 x = 0$.

O que vocês querem descobrir nessa equação?

O valor de x.

Como descobrir esse valor?

Responderam: - Aí é que está o problema. “Se fosse do 2º grau, aplicaríamos o Báskara e buscaríamos o Δ”.

O pesquisador disse: – Mas não é do segundo grau, e agora? Vocês não se lembram do que já estudaram antes?

Trabalhando com um dos grupos, o professor-pesquisador pediu: – Escrevam a equação do problema.

Eles fizeram $tg^4x - tg^2x = 0$ e o professor-pesquisador perguntou: – O que há de comum nessas parcelas do primeiro membro? Vocês se lembram dos casos estudados em fatoração algébrica? Qual era o primeiro caso?

Alguém respondeu: – pôr o fator comum em evidência?

Lembrando disso, escreveram $tg^2x\ (tg^2x - 1) = 0$.

E o professor-pesquisador novamente perguntou: – Vocês se lembram que se um produto é zero, pelo menos um dos fatores deve ser zero? Ou seja, se $a \cdot b = 0$, então, ou a = 0 ou b = 0 ou ambos são zero.

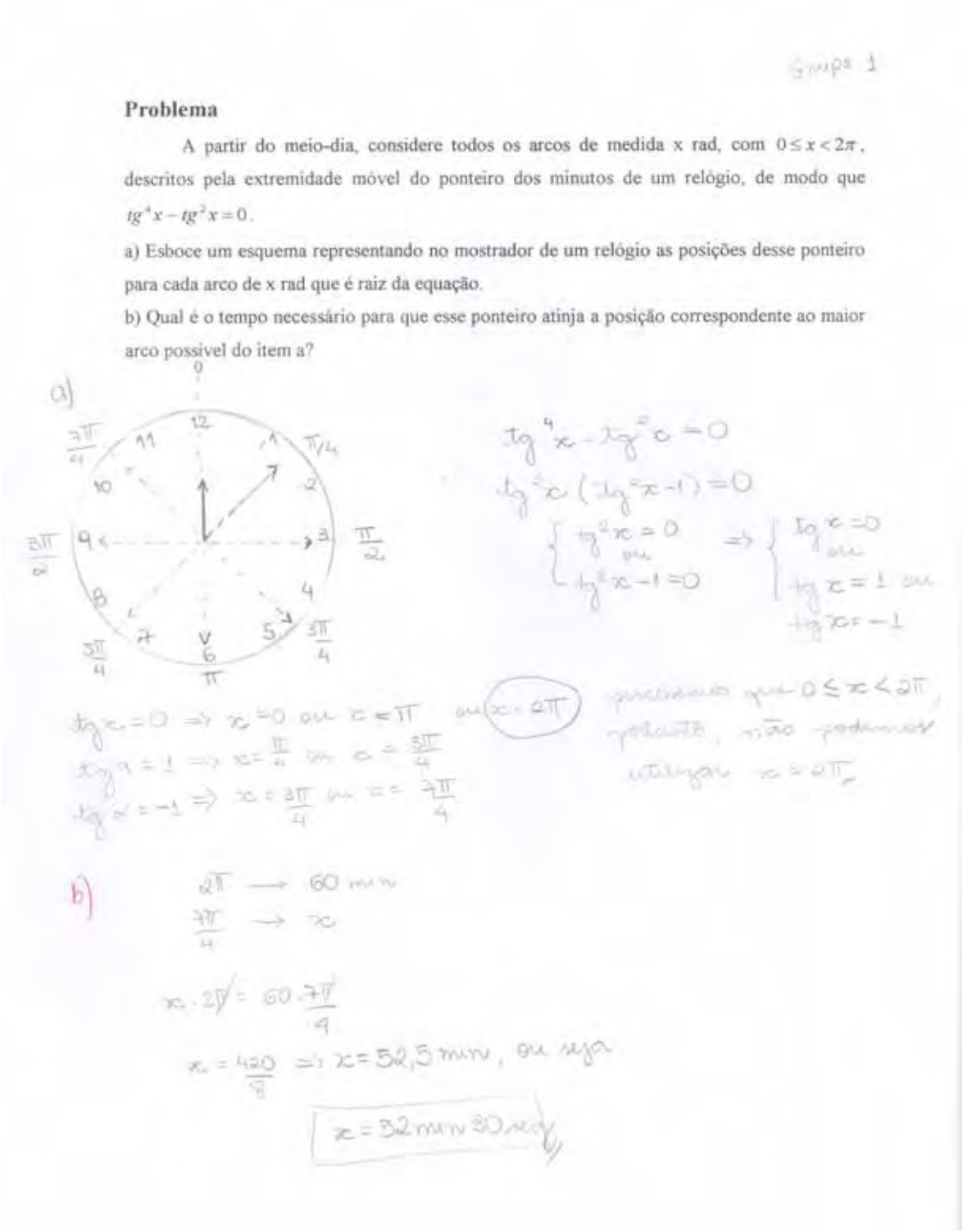
Isso não é visível em nossa equação?

Responderam, prontamente, sim!

Como nossa equação é $tg^2x\ (tg^2x - 1) = 0$, então, para a questão (a), podemos separar as seguintes possibilidades:

ou $tg^2x = 0$ $\sqrt{tg^2x} = \sqrt{0}$ $tgx = 0$ Qual o valor de x tal que $tgx = 0$ Disseram se $tgx = \frac{senx}{\cos x} = 0$, então $\begin{cases} senx = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$, então $\begin{cases} x = 0\ rad \\ x = \pi\ rad \end{cases}$ Como o problema pede $0 \leq x < 2\pi$, vemos que os dois valores servem. Ainda mais, que eles são simétricos.	ou $tg^2x - 1 = 0$ $tg^2x = 1$ $\sqrt{tg^2x} = \sqrt{1}$ $tgx = \pm 1$ Em que ponto, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$, $tgx = 1$? Sabendo que $tgx = 1$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e vendo que, devido à simetria pontual, $x = \pi\ rad + \frac{\pi}{4} rad = \frac{5\pi}{4} rad$ é também solução. Em que pontos, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$, $tgx = -1$? Viram que, para $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$, a $tgx = -1$.

Para a questão (a) o Grupo 1 apresentou sua resolução.



Grupo 1

Problema

A partir do meio-dia, considere todos os arcos de medida x rad, com $0 \le x < 2\pi$, descritos pela extremidade móvel do ponteiro dos minutos de um relógio, de modo que $tg^4 x - tg^2 x = 0$.

a) Esboce um esquema representando no mostrador de um relógio as posições desse ponteiro para cada arco de x rad que é raiz da equação.

b) Qual é o tempo necessário para que esse ponteiro atinja a posição correspondente ao maior arco possível do item a?

a)

$tg^4 x - tg^2 x = 0$

$tg^2 x (tg^2 x - 1) = 0$

$tg^2 x = 0$ ou $tg^2 x - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $tg x = 0$ ou $tg x = 1$ ou $tg x = -1$

$tg x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

$tg x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

$tg x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

precisamos que $0 \le x < 2\pi$, portanto, não podemos utilizar $x = 2\pi$.

b)

$2\pi \longrightarrow 60$ min

$\frac{7\pi}{4} \longrightarrow x$

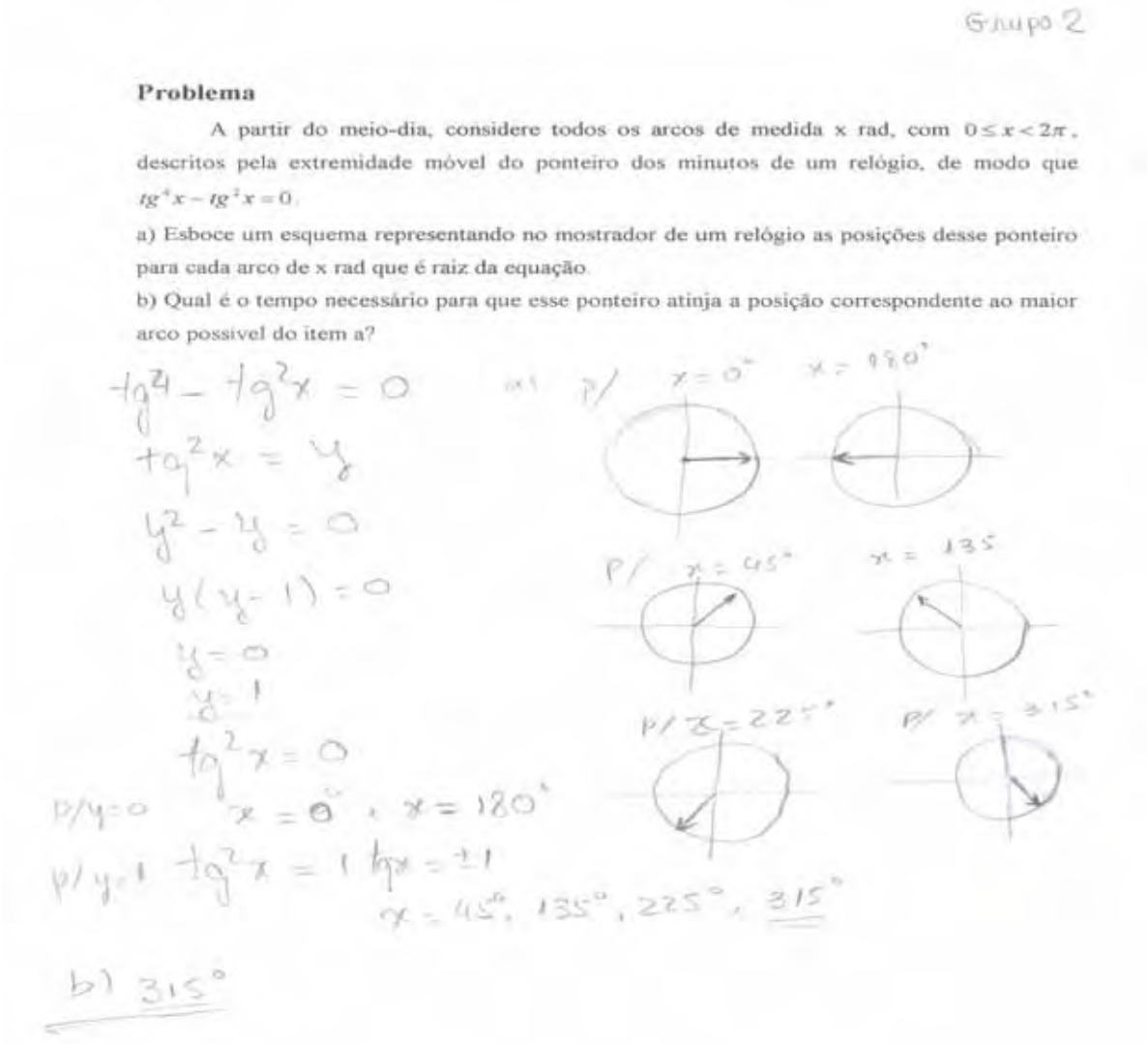
$x \cdot 2\pi = 60 \cdot \frac{7\pi}{4}$

$x = \frac{420}{8} \Rightarrow x = 52{,}5$ min, ou seja

$x = 32$ min 30 seg

No desenho do relógio parece que eles, nesse grupo, indicaram a possibilidade de $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, que não são raízes da equação. Mas, com segurança, dispensaram a solução $x = 2\pi$ pois disseram que o intervalo dado no problema é $0 \le x < 2\pi$, excluindo 2π.

O Grupo 2 trabalhou sozinho, sem pedir ajuda, fazendo a substituição $tg^2 x = y$.



Grupo 2

Problema

A partir do meio-dia, considere todos os arcos de medida x rad, com $0 \le x < 2\pi$, descritos pela extremidade móvel do ponteiro dos minutos de um relógio, de modo que $tg^4 x - tg^2 x = 0$.

a) Esboce um esquema representando no mostrador de um relógio as posições desse ponteiro para cada arco de x rad que é raiz da equação.

b) Qual é o tempo necessário para que esse ponteiro atinja a posição correspondente ao maior arco possivel do item a?

$tg^4 - tg^2 x = 0$

$tg^2 x = y$

$y^2 - y = 0$

$y(y-1) = 0$

$y = 0$

$y = 1$

$tg^2 x = 0$

p/ $y=0$ $x = 0°$, $x = 180°$

p/ $y=1$ $tg^2 x = 1$ $tgx = \pm 1$

$x = 45°, 135°, 225°, 315°$

b) 315°

Na parte (b), que pedia o tempo necessário para que o ponteiro dos minutos atingisse a posição correspondente ao maior arco possível do item (a), o Grupo 2 indicou apenas o maior arco 315º.

Na verdade eles deveriam ter percebido que a 360º --------- 60 min

então 315º ---------- x

Como há proporcionalidade entre essas grandezas, existe a proporção $\frac{360^0}{315^0} = \frac{60\,\text{min}}{x}$

e simplificando $\frac{360}{315} = \frac{60\,\text{min}}{x}$. Logo $x = \frac{60\,\text{min} \cdot 315}{360} = \frac{315\,\text{min}}{6}$

ou seja, 315 min | 6

15 min 52 min 30s

3min

3x60s

180s Resposta: 52 min 30s

00

7ª semana – aulas 31 – 32 – 33 – 34 – 35

Esta semana teve as três primeiras aulas realizadas em sala de aula. As aulas 34 e 35 foram reservadas para uma atividade extra classe.

Aulas 31 e 32

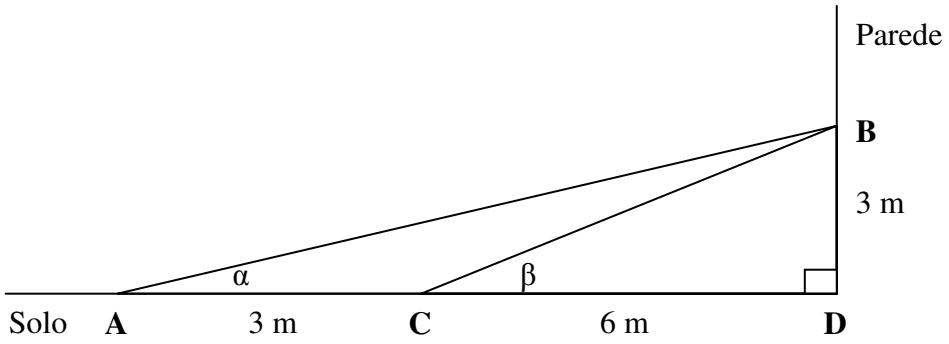
Os objetivos para estas aulas eram os de, através da resolução de problemas, chegar às fórmulas de soma e diferença de arcos.

Nossos alunos, nessa turma, já estavam bastante animados com o trabalho em grupos e sempre a partir de problemas. Havia interesse, da parte deles, em contribuir para o bom desenrolar da construção de novos conceitos e novos conteúdos.

O professor-pesquisador entregou aos grupos, por escrito, o problema 38.

Problema 38

Duas vigas, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos A e C do solo estejam em uma reta horizontal que passa por um ponto D da parede, conforme mostra a figura:



Determine a soma das medidas α e β, em graus, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.

Os grupos leram, como já era hábito, o problema sem perguntar nada ao professor-pesquisador. Um dos alunos disse: – Que bom, o problema já veio com o desenho pronto. Vai ser mais fácil para nós.

Apesar disso, não foi tão fácil assim.

O professor-pesquisador queria chegar, com esse problema, à fórmula do seno, do cosseno e da tangente da soma e da diferença de ângulos, assunto que ainda não fazia parte do conhecimento dos alunos.

Deu-se tempo aos alunos para pensarem mas, o professor-pesquisador dando chance aos alunos de consultarem alguns livros existentes na sala de aula, fez com que esses alunos identificassem algumas fórmulas que poderiam levá-los a resolver o problema mas, sempre consultando o professor-pesquisador.

Três grupos entregaram ao professor-pesquisador suas resoluções.

O Grupo 4 resolveu o problema, sem saber da existência de fórmulas embora usando a calculadora científica. A partir da definição de tangente, calculou a tg β e, depois, com a calculadora um valor aproximado de β. Calculou a tg α e, da mesma maneira, o valor aproximado de α, adicionando depois esses valores, chegou à resposta aproximada do problema.

Problema

Duas vigas, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos A e C do solo estão em uma reta horizontal que passa por um ponto D da parede, conforme mostra a figura.

Parede

B

3 m

Solo A 3 m C 6 m D

Determine a soma das medidas α e β, em graus, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.

$\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 0{,}5 \Rightarrow \beta \cong 26{,}56°$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \cong 18{,}43$

$26{,}56 + 18{,}43$

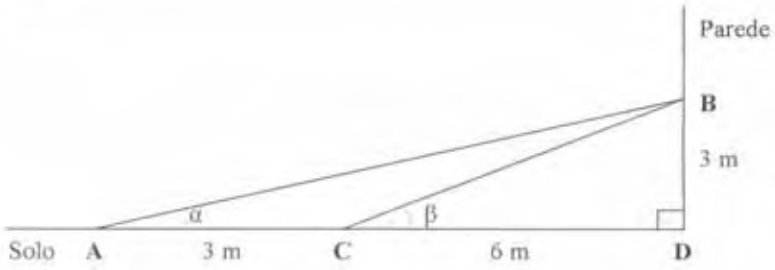
$44{,}99$

O triângulo BED tem que [illegible] pela tangente β que é $\frac{\text{cat opost}}{\text{cat adj}}$ que é $26{,}5K$ e tangente K que é $18{,}43$. E somando os dois valores em graus é $44{,}99$

O Grupo 1, com as consultas ao livro, à professora e ao professor-pesquisador, sentiu-se seguro e colocou sua resolução na lousa.

Problema Grupo 1

Duas vigas, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos A e C do solo estão em uma reta horizontal que passa por um ponto D da parede, conforme mostra a figura:



Determine a soma das medidas α e β, em graus, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.

$tg\,\beta = \frac{3}{6} \Leftrightarrow tg\,\beta = \frac{1}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{3}{9} \Leftrightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$

$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} \Leftrightarrow tg\,(\alpha+\beta) = \frac{\frac{2+3}{6}}{1-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\,(\alpha+\beta) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow tg\,(\alpha+\beta) = 1$

Logo, $\alpha+\beta = 45°$

O Grupo 5 já se apresentava mais inseguro mesmo consultando o livro. A pedido do pesquisador também colocou sua resolução na lousa. Errou no final da questão.

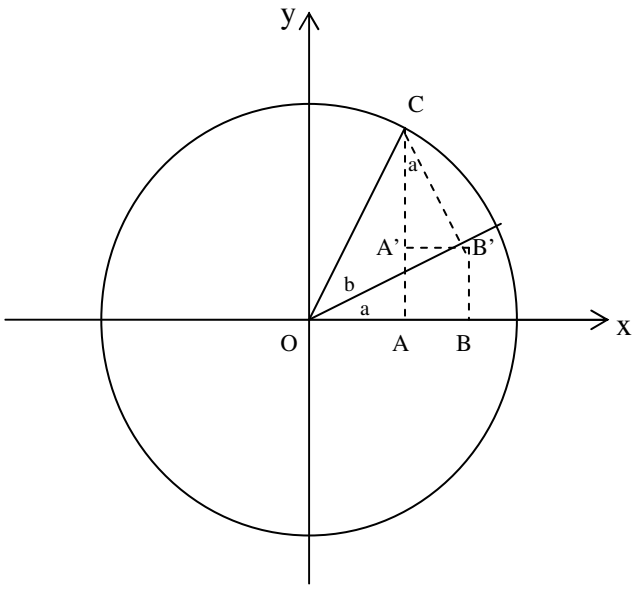
Chamados todos à plenária, o pesquisador, analisando as resoluções postas na lousa, chamou a atenção de todos que $sen(a \pm b) \neq sena \pm senb$ e que $\cos(a \pm b) \neq \cos a \pm \cos b$.

Disse que há fórmulas trigonométricas para calcular $sen(a \pm b)$ e $\cos(a \pm b)$.

O pesquisador, pedindo muita atenção aos alunos, disse que juntos iriam encontrar expressões trigonométricas para $sen(a+b)$, $sen(a-b)$, $\cos(a+b)$ e $\cos(a-b)$, em função de $sena$, $\cos a$, $senb$ e $\cos b$.

Desenhou na lousa um círculo unitário e marcou nele dois ângulos adjacentes: a e b.

Os pontos O, A, B, C, A', e B' foram marcados como mostra a figura abaixo.



Na figura vemos que

No Δ OAC, $\overline{OA} = \cos(a+b)$

No Δ OB'C, $\begin{cases} \overline{OB'} = \cos b \\ \overline{B'C} = senb \end{cases}$

No Δ CA'B', $sena = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}}$

No Δ OB'C, $senb = \overline{CB'}$

Então $sena \cdot senb = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}} \cdot \overline{CB'} = \overline{A'B'}$ e como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ Então $\overline{AB} = sena \cdot senb$

No Δ OBB', $\cos a = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$

No Δ OB'C, $\cos b = \overline{OB'}$

Então $\cos a \cdot \cos b = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \cdot \overline{OB'} = \overline{OB}$. Portanto $\overline{OB} = \cos a \cdot \cos b$

e como $\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb$

Portanto $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb}$

O pesquisador disse aos alunos que, se em vez de (b) se tomasse (-b), sabendo-se que cos(-b) = cos b e sen(-b) = - sen b, então,

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos(-b) - sena \cdot sen(-b) = \cos a \cdot \cos b + sena \cdot senb$

Assim, $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + sena \cdot senb}$

Sabendo que $\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}+d\right) = \cos d & (1) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+d\right) = -send & (2) \end{cases}$

Então, a fórmula que encontramos para cos(a + b) nos leva a calcular sen (a + b).

De (2) , fazendo $d = a + b$, $sen(a+b) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right)$ .....(3)

Como $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb$, então,

$-\cos(a+b) = -\cos a \cdot \cos b + sena \cdot senb$.

Em (3), $-\cos\left(\frac{\pi}{2}+a+b\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)\cos b + sen\left(\frac{\pi}{2}+a\right)senb$

Mas, por (1) e (2), $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -sena$ e $sen\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$

Então, $\boxed{sen(a+b) = sena \cdot \cos b + senb \cdot \cos a}$

Não houve tempo para trabalhar as outras expressões. Mas, mostramos aos alunos que há uma Matemática que prova todas elas.

Novamente, se em vez de (b) tomássemos (-b), viria

$sen(a-b) = sena \cdot \cos(-b) + sen(-b) \cdot \cos a$

Como cos(-b) = cos b e $sen(-b) = -senb$

Então, $\boxed{sen(a-b) = sena \cdot \cos b - senb \cdot \cos a}$

Para a função tangente pode-se trabalhar assim:

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sena\cdot\cos b+senb\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b-sena\cdot senb}$$

Dividindo-se os dois termos dessa fração por $\cos a\cdot\cos b$ vem

$$tg(a+b)=\frac{\frac{sena\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\frac{senb\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{1-\frac{sena\cdot senb}{\cos a\cdot\cos b}}=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}$$

Assim, $\boxed{tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\cdot tgb}}$

Se em vez de b tomássemos (-b), então,

$$tg(a-b)=\frac{sen(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{sena\cdot\cos b-senb\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b+sena\cdot senb}$$

Dividindo-se os dois termos da fração por $\cos a\cdot\cos b$ vem

$$tg(a-b)=\frac{\frac{sena\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\frac{senb\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{1+\frac{sena\cdot senb}{\cos a\cdot\cos b}}=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb}$$

Assim, $\boxed{tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\cdot tgb}}$.

Aula 33

Foi apresentado, na lousa, como fixação, o problema 39.

Problema 39

a) Ache o valor exato de $\cos 75°$.

b) Ache o valor exato de $sen\frac{\pi}{12}$.

Os alunos em grupos trabalharam esse problema e, como já conheciam as fórmulas de adição e subtração de arcos, não tiveram dificuldade em resolvê-lo. Houve alunos que se ofereceram para apresentar suas resoluções na lousa.

Problema 40

Ache o valor exato de $sen(u+v)$, dado que $senu = \frac{4}{5}$, com $0 < u < \frac{\pi}{2}$, e $\cos v = -\frac{12}{13}$, com $\frac{\pi}{2} < v < \pi$.

O problema 40 foi posto na lousa, mas por falta de tempo, foi deixado como tarefa.

A tarefa 54 também foi deixada

Aulas 34 e 35 - Atividade no playground

O objetivo para essa atividade era que os alunos pudessem ver, na prática, a ocorrência de funções trigonométricas.

Nestas duas aulas, nossa intenção era a de desenvolver mais um trabalho fora da sala de aula, com algumas situações que envolvessem funções trigonométricas. Num primeiro momento surgiram dificuldades, não parecia tão fácil fazer isso. Mas não desanimamos e fomos em busca de alguma situação que pudesse atender à nossa intenção.

Num dos encontros do GTERP, o pesquisador fez comentários sobre essa idéia.

Durante as discussões, foram surgindo sugestões interessantes mas, a que mais vingou, foi aquela de um dos membros do grupo que disse: – li num jornal de São Paulo um artigo que falava sobre movimentos oscilatórios periódicos. Ele levantou a possibilidade de amarrar uma corda numa árvore na qual uma pessoa se pendurasse e produzisse movimentos oscilatórios.

Uma outra participante do grupo argumentou que não seria fácil encontrar uma árvore, nas redondezas, que permitisse fazer isso. Todos, interessados, procuravam achar um modo de fazer a idéia dar certo. Até que uma outra participante do grupo sugeriu ir-se até um parque que tivesse balanços. Disse que ela conhecia um desses parques. Sabia onde ficava e até seu nome: Parque Municipal Lago Azul.

Na quinta-feira feira, 5 de maio de 2005, pela manhã, fomos: o pesquisador e um membro do GTERP fazer o reconhecimento do local. Lá, localizamos alguns balanços e avaliamos os que estavam em condições para a coleta de dados.

Procuramos a administração do parque a fim de pedir autorização para executar nossa pesquisa.

Solicitamos a ajuda de alguém que pudesse preparar a infra-estrutura necessária para ela, dizendo que esse trabalho seria feito na tarde desse mesmo dia.

Percebemos que iríamos precisar de uma régua de medidas topográficas e de um transferidor grande para fazer as medidas. Fomos ao Departamento de Geologia, da UNESP Rio Claro, e lá prontamente conseguimos a régua. Já para o transferidor não tivemos a mesma sorte. Depois do almoço fomos à Escola Joaquim Ribeiro e lá a professora da turma nos cedeu um transferidor de madeira grande.

Como combinado pela professora e pelo pesquisador, alguns alunos seriam escolhidos para a pesquisa no playground. Os demais alunos ficariam, em sala de aula, trabalhando com a professora. Acompanhando os alunos iriam o pesquisador e um dos membros do GTERP.

Antes de deixarem a Escola, o pesquisador entregou, à professora, material variado para ser trabalhado com os alunos que lá ficaram: problemas, desafios e jogos.

Deixamos a Escola por volta de 13h 45min e, em dois carros, fomos, oito alunos, o pesquisador e dois membros do GTERP: um para participar da pesquisa e outro para fotografar.

Foto: chegada ao parque

No playground contamos com a colaboração de um de seus funcionários que nos orientou na colocação de um pontalete para a fixação do transferidor. Ao lado deste fixamos a régua como mostra a foto.

Esse funcionário nos emprestou ferramentas para nivelar o chão e fixar o pontalete. Também nos acompanhou durante todo desenvolvimento dessa atividade. Alguns alunos se prontificaram a ajudar nessas tarefas.

Quando tudo já estava acertado: solo, pontalete, régua e transferidor,

o pesquisador pediu a uma aluna que se sentasse num dos balanços e se balançasse, fazendo movimentos tanto no sentido horário quanto no anti-horário, tomando como referência o transferidor.

Então, foi apresentado, pelo pesquisador, aos alunos o seguinte problema: Quando nos movimentamos no balanço, o que está acontecendo?

Esperando que eles fizessem referência ao ângulo indicado no transferidor, o que eles responderam foi: – a menina está se levantando do chão.

Nesse momento, o membro do GTERP presente puxou um dos banquinhos do balanço

e disse: – olhem, vejam que estou levantando o banquinho. Ao levantá-lo, pôde-se ver que a altura h(x) do banco do balanço em relação ao chão variava em função do ângulo x marcado no transferidor e, também, a distância d(x) do banco do balanço variava em ralação à reta perpendicular ao chão (pontalete). Isso sugeria um trabalho com funções trigonométricas.

Os alunos, aos poucos, foram se desenvolvendo nas atividades e alguns se posicionaram para fazer anotações enquanto outros queriam medir.

Para investigar o problema em detalhes, os alunos anotaram os seguintes dados:

- A altura do balanço é 2 m.
- As correntes que suportam o balanço, uma de cada lado do banquinho, medem 1,6m cada.
- A altura h(x), do balanço em relação ao chão, varia em função do ângulo x (em graus).
- A distância d(x) do balanço em relação ao pontalete varia, também, em função do ângulo x, como indicados na foto abaixo.

Os alunos identificaram, entre os ângulos marcados, alguns ângulos notáveis, em ambos os sentidos: horário e anti-horário. Esses dados coletados foram todos anotados.

Um dos membros do GTERP perguntou: – Se para cada medida do ângulo tem-se uma medida correspondente da altura do banquinho em relação ao chão, tem-se aí uma função?

Todos estavam cientes de que se estava trabalhando com funções, um conteúdo que eles haviam aprendido desde a 8ª série do Ensino Fundamental. Sentiam-se animados por "ver" que a cada valor de x marcado no transferidor eles tinham um valor para a altura h(x), do banquinho até o chão, e um valor para a distância d(x) do mesmo em relação ao pontalete.

O membro do GTERP enfatizou que qualquer medida feita por eles não seria exata, mas que o erro cometido deveria ser o menor possível. Para ser mais precisa, deveriam ser feitas várias medidas e obter-se a média dela.

Terminada a coleta de dados, retornamos à Escola. Quando chegamos, um dos alunos se dirigiu ao membro do GTERP dizendo que a altura máxima ocorre quando o ângulo era de 90º. Esse aluno ainda estava pensando na atividade extraclasse que acabara de desenvolver. Um outro aluno disse que se já conhecíamos as medidas no sentido horário, foi desnecessário fazer as medidas no sentido anti-horário, pois havia simetria.

Os dados obtidos pelos oito alunos que participaram da atividade de campo no playground estão refletidos na tabela abaixo.

x – (em graus)	h(x) - (em metros)	d(x) - (em metros)
30° negativos	0,66	0,83 (s.h.)
45° negativos	0,75	1,03 (s.h)
60° negativos	1,20	1,43 (s.h)
30° positivos	0,65	0,85 (s.a)
45° positivos	0,78	1,03 (s.a)
60° positivos	1,19	1,43 (s.a)

Legenda:

h – altura do banquinho em relação ao chão

d – distância do banquinho em relação pontalete

s.a – sentido anti-horário

s.h. – sentido horário

Essa tabela mostra a variação da altura e da distância do banquinho ao pontalete em função dos ângulos medidos, usando como referencial essa estaca (pontalete).

Os alunos, no parque, devido à impossibilidade de medir até 2m, não cogitaram medir quando x = 90º, embora um dos alunos, na volta à Escola, tenha dito ao membro do GTERP que "a altura máxima ocorria quando o ângulo era de 90º".

8ª semana – aulas 36 – 37 – 38 – 39 – 40

Devido aos feriados e eventos escolares ocorridos nesse bimestre, nosso calendário escolar ficou de certa forma prejudicado. No planejamento da professora da turma, a partir de maio ela deveria iniciar um outro tópico do programa. Então, com trigonometria, o pesquisador pôde somente usar três das aulas do projeto em duas semanas. Depois disso, a sala voltou integralmente às mãos da professora da turma.

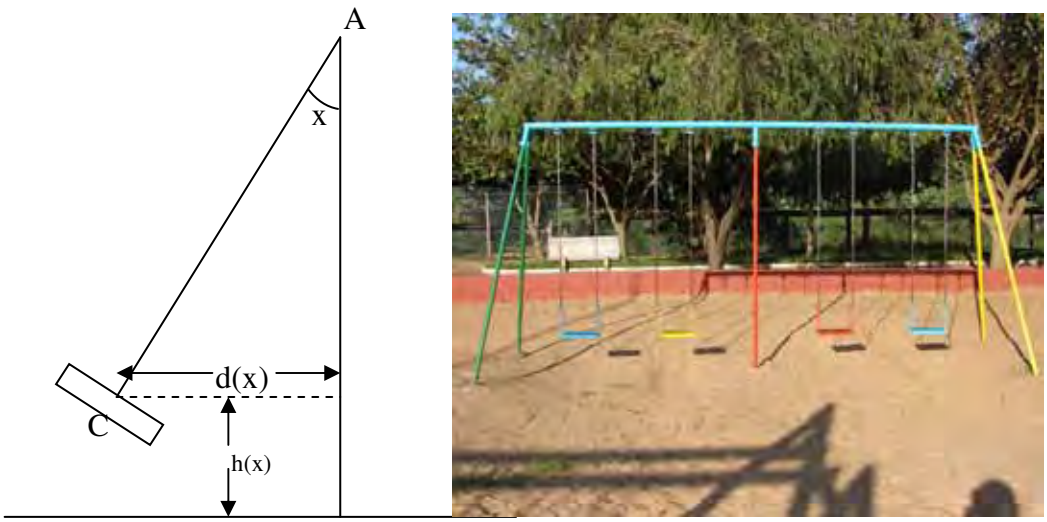
O pesquisador, que iria trabalhar as idéias centrais da parte final de seu roteiro, não teve oportunidade de fazer isso. Parece que vencer todo programa ou quase todo é um objetivo forte nas escolas. Assim, para nosso projeto foram destinadas as aulas 36, 37 e 38.

Aulas 36 e 37

Para essas aulas foi selecionado o problema 42. O objetivo desse problema era o de fazer com que os alunos que foram ao parque, juntamente com seus colegas que não foram, pudessem ver, agora, dentro de sala de aula, aqueles conceitos lá trabalhados.

Problema 42

Imagine um balanço no playground. Quando nos movimentamos no balanço, na verdade temos duas funções: a altura h(x) do banco do balanço em relação ao chão, que varia em função do ângulo x, e a distância d(x) do banco do balanço em relação à reta perpendicular ao chão, que passa pelo ponto A do varão, onde a corda do balanço está amarrada, que, também, varia com o ângulo x. As duas funções variam de forma cíclica, o que sugere sua investigação por uma função trigonométrica.



Vale destacar que a situação analisada limita o domínio da função ao intervalo [- π/2 , π/2].

Para investigar o problema, em detalhes, os alunos deverão responder as seguintes questões:

(a) Qual a altura do varão onde a corrente do balanço está amarrada?

(b) Qual a medida do comprimento da corrente do balanço?

(c) Como utilizar a tabela construída, a partir dos dados coletados no parque, tanto para a altura h(x) como para a distância d(x) para cada ângulo x medido?

(d) Como reconhecer, no experimento, as funções h(x) e d(x)?

(e) Como construir o gráfico dessas funções?

Os alunos, em grupos, na sala de aula, faziam perguntas àqueles que participaram da atividade no parque. Esses alunos, que presenciaram o movimento do balanço, coletaram dados e mediram ângulos, sentiram-se confortáveis diante do problema dado. Passaram os dados obtidos no playground para seus colegas, para que todos pudessem discutir e resolver o problema proposto.

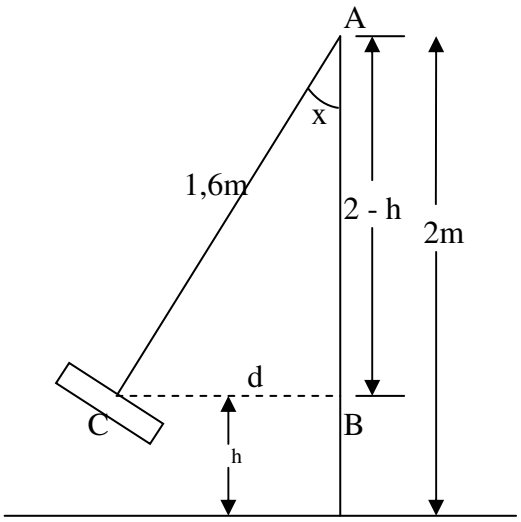
Nos grupos eles apresentaram a tabela feita com os dados que haviam coletado, buscando trabalhar com ângulos mais conhecidos.

Depois dessa fala toda, o professor-pesquisador pediu que os grupos começassem a resolver o problema 42.

O pesquisador foi levantando questões, esperou respostas dos alunos nos grupos e foi conduzindo a resolução do problema.

Foi dito que a situação do balanço limitava o domínio da função ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e que, para chegar à solução do problema, os alunos deveriam responder, item por item, às questões levantadas na página anterior.

Depois de ter sido dado um tempo, a todos os alunos, para pensarem nas possíveis respostas aos questionamentos feitos, o pesquisador desenhou, na lousa, o balanço de frente e de perfil. E foi preenchendo o desenho, em perfil, com os dados obtidos pelos alunos. Para as questões (a), (b) e (c).



Na questão (d), observando o desenho feito na lousa, os alunos puderam reconhecer que h(x) e d(x) poderiam ser obtidos usando as funções trigonométricas $sen x$ e $\cos x$.

No triângulo ABC desenhado acima foi identificado o ângulo x que variava. Aplicando a função $\cos x$ obtiveram $\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2m-h}{1{,}6m}$. O pesquisador disse que havia proporcionalidade e eles usaram o produto cruzado. Assim, $2m - h = \cos x \cdot 1{,}6m$. Portanto $h = 2m - \cos x \cdot 1{,}6m$. E como h varia com o ângulo x, então $h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot \cos x$.

Para achar d(x), olhando no desenho, escreveram $sen x = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{d}{1{,}6m}$ e, devido à proporcionalidade, $d = sen x \cdot 1{,}6m$. Como d varia em função do ângulo x, então $d(x) = sen x \cdot 1{,}6m$.

A questão (e) pedia a construção dos gráficos. Nessa questão os alunos se mostraram mais confusos. Esqueceram-se dos dados da tabela construída no parque e não sabiam o que fazer.

Com ajuda do pesquisador, a maioria dos alunos, dando valores a x, buscavam obter valores para h(x) e d(x). Um dos alunos, ao buscar valores que gerassem pontos para o gráfico de d(x), usando a calculadora, chegou a seguinte tabela:

x rad	$senx$	$d(x) = senx \cdot 1{,}6m$	d(x) em metros
0	0	d(x) = 0x1,6m	0
$30º = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$d(x) = 0{,}5 \cdot 1{,}6m$	0,80
$45º = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$	$d(x) = 0{,}7 \cdot 1{,}6m$	1,12
$60º = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8$	$d(x) = 0{,}8 \cdot 1{,}6m$	1,28
$90º = \frac{\pi}{2}$	1	$d(x) = 1 \cdot 1{,}6m$	1,60

O pesquisador, então, pediu que todos comparassem os resultados obtidos nesta tabela com os resultados da tabela construída a partir dos dados coletados.

Eles perceberam que os resultados eram um pouco diferentes. Como justificar essas diferenças perguntou o pesquisador? Qual das tabelas é mais confiável?

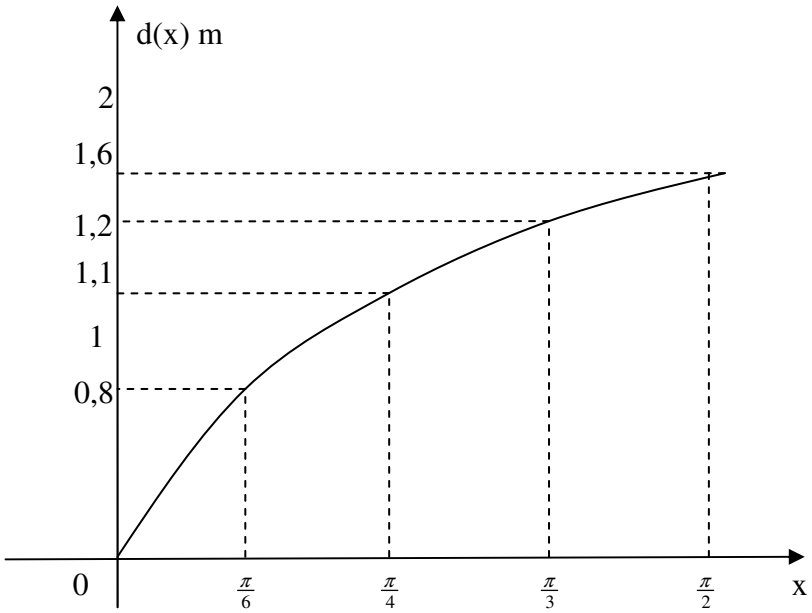
Responderam que se os cálculos, feitos em sala de aula, estivessem corretos, eles confiariam mais no cálculo matemático pois, argumentaram, que quando se mede com as mãos podemos cometer erros.

Faltou, na tabela feita em sala de aula computar os ângulos negativos: - 30º, - 45º, - 60º, - 90º que seriam uma fonte para perceber a simetria das curvas.

Também não foi muito explorado o conceito de periodicidade dessas curvas nem no parque, nem na sala de aula, embora um aluno, que foi ao parque, na volta à escola, tenha dito ao membro do GTERP que "se conhecíamos as medidas no sentido horário era desnecessário fazer as medidas no sentido anti-horário, pois havia simetria".

Para a construção do gráfico da função d(x) os alunos utilizaram os valores dados na tabela feita em sala de aula, conhecidos os valores de *sen x* para determinados valores do ângulo.

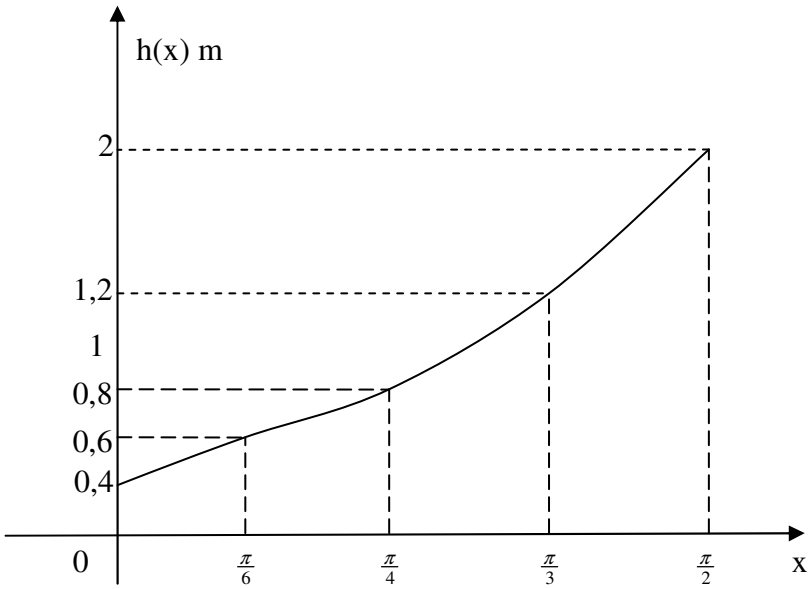
O gráfico para d(x) mostrou-se assim:



Analogamente, para construir o gráfico de h(x), foi preciso construir uma tabela, utilizando valores de cos x, em sala de aula com a ajuda do pesquisador.

x rad	$\cos x$	$h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot \cos x$	h(x) em metros
0	1	$h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot 1$	0,4
$30º = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8$	$h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot 0{,}8$	0,6
$45º = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$	$h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot 0{,}7$	0,8
$60º = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot 0{,}5$	1,2
$90º = \frac{\pi}{2}$	0	$h(x) = 2m - 1{,}6m \cdot 0$	2

A partir dessa tabela foi traçada o gráfico de h(x).



E verificamos que através desses gráficos muito do que aconteceu no parque pôde ser relatado.

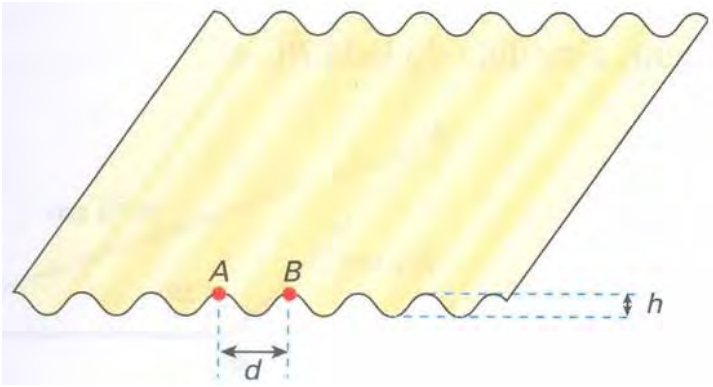
Aula 38

Esta seria a última aula nossa para o desenvolvimento do projeto.

Aos alunos, em grupos, foi entregue o problema 43, cujo objetivo era o de construir gráficos de funções.

Problema 43

O perfil da telha ondulada, representada na figura abaixo, pode ser descrito pela função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$, em que os valores absolutos de x e y = f(x) indicam medidas em centímetros. Determine as medidas h e d, indicadas na figura, sendo que A e B são cristas de ondas.



Como tínhamos, nesse dia, uma única aula, e os alunos, que não sabiam trabalhar com arco metade, estavam confusos, o pesquisador, para não perder tempo, chamou todos os alunos para juntos trabalharem na resolução desse problema.

O pesquisador perguntou: – O que este problema está pedindo? Quais são seus dados? Como relacioná-los?

Chamou à lembrança deles, o que havia acontecido no parque. Perguntou: – Aqui também precisamos falar em altura e distância? Há alguma função trigonométrica expressa neste problema?

Nesse momento, responderam: – Sim, é a função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$.

Vocês saberiam construir uma tabela para essa função, com os valores de ângulos notáveis: 0rad, $\frac{\pi}{2}$rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$rad e 2πrad, como fizeram para as funções $y = senx$ e $y = \cos x$ onde o argumento era x e a amplitude 1?

Juntos com os alunos, na lousa, o pesquisador registrou uma tabela para a função $y = \cos x$.

Dizendo que o argumento, no problema dado, era $\frac{x}{2}$, e então, a tabela deveria registrar também isso, desde que na função na função o argumento era dado pela metade de x.

Passou-se a construção da tabela para $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$ vendo que, a amplitude agora era 5 e o argumento $\frac{x}{2}$.

O que isso significa perguntou o pesquisador?

Vamos construir o gráfico de $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$ e buscar resposta a esse problema.

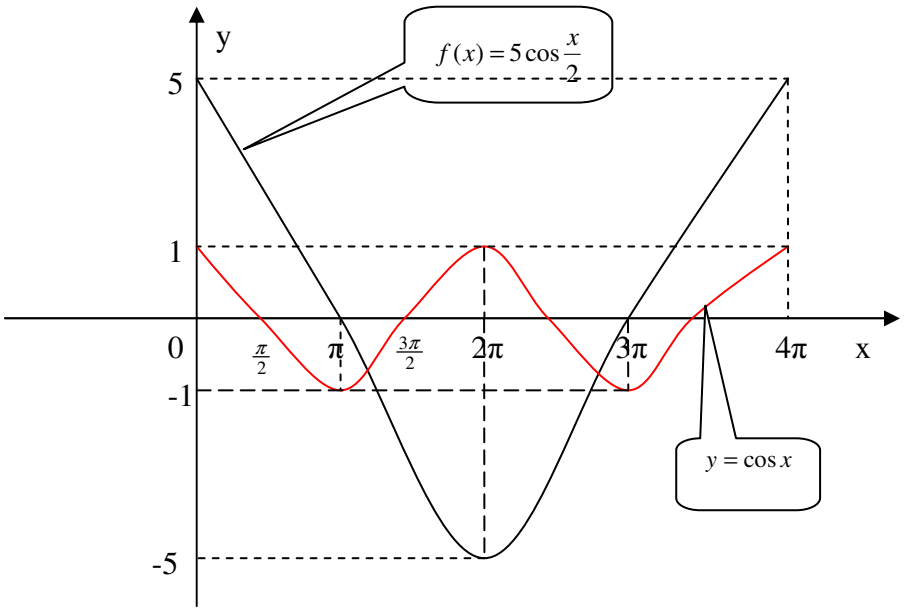
Queremos construir o gráfico de $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$.

Sabendo que o domínio da função $y = \cos x$ é o conjunto dos números reais e sua amplitude é 1, quando tomarmos, para argumento, a metade do arco temos que a amplitude continua a mesma mas o argumento se modifica proporcionalmente.

No nosso problema, $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$. Então, a amplitude se altera. É agora 5, isto é, $-5 \le y \le 5$, e o argumento $\frac{x}{2}$ leva a um período de 0 a 4π, porque metade cabe duas vezes

dentro do todo $\left(x = \frac{X}{2} \Rightarrow X = 2x \right)$. Então os pontos notáveis dos períodos se mostram assim:

para x	*para X*	$f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$	f(x) em centímetros
$x = 0$	0	$f(x) = 5 \cdot 1$	5
$x = \frac{\pi}{2}$	π	$f(x) = 5 \cdot 0$	0
$x = \pi$	2π	$f(x) = 5 \cdot (-1)$	-5
$x = \frac{3\pi}{2}$	3π	$f(x) = 5 \cdot 0$	0
$x = 2\pi$	4π	$f(x) = 5 \cdot 1$	5



Os gráficos foram construídos. Passamos a analisá-los ao olhar para eles.

Queremos encontrar h. Sendo a amplitude da onda y, $-5 \le y \le 5$, y medido em cm, e como h é medido em valor absoluto, temos h = 2y = 2.5cm = 10cm.

Também, no gráfico, pode se ver que $d = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ onde d é o período da função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$.

Assim, h = 10cm e d = 4π rad.

Foram deixadas as tarefas 56 e 57.

Apesar de considerar o trabalho com trigonometria aí encerrado, o pesquisador continuou a freqüentar essa sala de aula como observador, a pedido da professora e dos alunos, por mais três semanas.

Capítulo 7

Finalização da Pesquisa - Coletar evidências e dar sentido às informações obtidas

7.1. Introdução

Nos capítulos 5 e 6, trabalhamos a construção e a aplicação de nosso projeto de pesquisa.

Neste capítulo 7, seguindo a metodologia de Romberg, damos início às atividades do terceiro bloco de seu modelo, onde estaremos coletando as evidências destacadas durante a aplicação do projeto. Essas evidências serão analisadas e interpretadas em termos de nossa pergunta de pesquisa. Os resultados obtidos, a partir dessa interpretação, serão, então, relatados. Conclusões finais serão tiradas e sugestões que possam antecipar ações de outros pesquisadores em Educação Matemática serão apresentadas.

7.2. Coletar Evidências

Para esta atividade, buscaremos o que ficou evidente depois de colocado em ação nosso procedimento geral - a aplicação do projeto de trabalho em sala de aula, com tudo o que se refere às ações dos alunos, da professora e do pesquisador.

Sobre coletar evidências, Romberg diz que este passo pode ser dado livremente, desde que se tenha decidido coletar informações suficientes para a construção de um argumento que leve em consideração a pergunta feita.

7.2.1. Técnicas utilizadas na coleta de evidências

A primeira vez que conversamos com a professora da turma, com relação ao projeto de trabalho para a sala de aula e definição da data de sua aplicação, foi no mês de fevereiro de 2005. A partir daí, o pesquisador, de forma adequada na pesquisa, desempenhou um papel determinante na coleta de dados.

A coleta de dados deu-se em todos os momentos oportunos de trabalho em sala de aula e fora dela e, também, durante a aplicação do projeto. Para ela recorreu-se a várias técnicas próprias da pesquisa qualitativa, especificamente: observações diretas; diário de campo do pesquisador; material escrito de trabalhos de alunos; entrevistas semi-estruturadas; e conversas informais. A utilização destes diferentes instrumentos constituiu-se como uma forma de obtenção de dados de diferentes tipos, proporcionando a possibilidade de cruzamento de informações.

7.2.1.1. Observações Diretas

As observações foram conduzidas com o intuito de perceber as relações interpessoais entre os componentes dos grupos, entre os alunos e a Professora, e também a participação e a interação dos alunos nos grupos durante a realização das atividades. Efetuadas no âmbito deste estudo, elas ocorreram, sobretudo, durante o transcorrer de nossas aulas. O papel que assumimos durante estas observações foi, primeiramente, o de um observador e, depois, de observador-participante. Na prática, isso significa que, durante a aplicação do projeto de trabalho, nossas intervenções foram importantes, cabendo-nos, muitas vezes, a função de orientador. Como a professora da classe era a responsável pelo trabalho direto, procuramos assumir uma postura discreta e não direta, apenas formulando questões e dando sugestões que não apontassem para uma solução imediata do problema.

Sobre a observação das atividades em sala de aula, nossa postura esteve dependente dos momentos em que se desenrolava um processo de ensino-aprendizagem-avaliação. Durante o trabalho dos alunos em grupo, assumimos apenas o papel de um observador-participante.

7.2.1.2. Diário de campo

Utilizamos o diário de campo para retratar as aulas de modo descritivo, visando à obtenção de elementos que nos levassem a interpretar e refletir sobre o desenvolvimento das atividades, tanto escritas como orais, dos alunos em relação às atividades desenvolvidas pela professora e à resolução de problemas envolvendo Trigonometria.

O diário de campo foi um dos principais instrumentos deste trabalho, pois ele pretendeu ser um instrumento sobre o qual o pesquisador reuniria as anotações tiradas de suas observações. Estas anotações são relatos escritos daquilo que o pesquisador ouviu, viu e

experimentou. Retrata o que o pesquisador pensou, no percurso da coleta de dados, ao refletir sobre os dados de um estudo qualitativo. O diário de campo representa assim uma fonte importante de dados que pôde ajudar o pesquisador, no acompanhamento do projeto, a visualizar como o modelo preliminar criado foi afetado pelos dados coletados e conscientizá-lo sobre como as variantes desse modelo foram influenciadas por eles.

Neste trabalho, as anotações foram feitas em uma ficha, relatando o que ocorreu durante cada atividade. Elas refletiam o que acontecera em sala de aula em termos das interações verbais entre aluno e professor, aluno–aluno, registros na lousa e, ainda, registros escritos de atividades desenvolvidas pelos alunos, assim como reflexões acerca das próprias aulas e de como o pesquisador, como professor, estava vendo sua prática. Muitas vezes a professora responsável pela classe ajudou o pesquisador no preenchimento dessas fichas.

Ele foi utilizado principalmente para registrar os progressos no conhecimento e as atitudes que os alunos manifestaram durante as atividades. Registramos os acontecimentos bem como algumas reflexões sobre o sucedido.

O registro das aulas foi necessário para que se pudesse ter um número maior de dados e, também, para analisar e refletir sobre o desenvolvimento dos alunos, em sala de aula, enfrentando assim a diversidade deles, os conflitos do dia-a-dia do professor e do ambiente escolar.

7.2.1.3. Atividades recolhidas por escrito

Pedimos aos alunos, em cada grupo, que entregassem, por escrito, cada atividade trabalhada. Apoiado nelas, o professor passava à formalização dos tópicos matemáticos planejados para o dia. Esse material constituiu-se em mais um conjunto de dados, este com o objetivo de auxiliar na análise dessa atividade. Desta forma garantia-se ter um registro mais completo. Além disso, pediu-se aos alunos que fizessem reproduções escritas, em seus cadernos, dessas atividades concluídas.

Acreditávamos que, para avaliar o progresso dos alunos, não seria suficiente atribuir-lhes uma "nota", por meio de uma prova bimestral, como a lei exige. Então, como estava combinado com eles, no Termo de Compromisso, haveria outros componentes para sua avaliação. Assim, durante o decorrer das aulas ficávamos, professora e pesquisador, observando com freqüência as reações e as maneiras de os alunos se portarem durante as atividades e, por esse motivo, principalmente, fizemos uso dessa produção escrita.

O recurso das atividades recolhidas por escrito, individualmente ou em grupo, tem tido uma aceitação crescente por parte dos professores que procuram implementar um sistema de avaliação coerente com o trabalho realizado na aula. Contudo, há um conjunto de questões que se colocam ao professor quando ele pretende pedir uma atividade por escrito aos seus alunos: O que é uma atividade por escrito em Matemática? Que indicações podem ser dadas para a sua realização? Como os avaliar nessas atividades por escrito?

Com os alunos, durante o horário normal de atividades, foram levantados questionamentos, sempre com o objetivo de que o trabalho desenvolvido por eles, nos grupos, estivesse relacionado às atividades de resolução de problemas a serem entregues por escrito.

Para nós, uma atividade recolhida por escrito é uma produção escrita em forma de texto. Estes textos, elaborados pelos grupos de alunos, com o objetivo de comunicar, de maneira escrita, o processo de resolução do problema, servem para reconhecer de que modo cada atividade pode contribuir para sua aprendizagem e, também, para registrar o desenvolvimento do grupo durante sua realização.

7.2.1.4. Entrevistas

Um dos aspectos peculiares desta pesquisa é a importância que é dada às entrevistas. Em pesquisa qualitativa, um dos tipos de entrevistas mais utilizados é a semi-estruturada. Nestas entrevistas, além de o entrevistador ter uma maior margem de manobra, podendo alterar, acrescentando ou suprimindo algumas perguntas, o tipo de questões a formular tem um caráter mais aberto. Esta característica permite que os entrevistados expressem suas próprias compreensões nos seus próprios termos, o que facilita o entendimento de suas percepções e experiências pessoais por parte do entrevistador.

As entrevistas constituíram-se em um elemento muito importante na coleta de dados, pois as questões formuladas requeriam a obtenção de informações.

Uma entrevista, com a Direção e a Coordenação do estabelecimento de ensino trabalhado, ocorreu quando, por escrito, o pesquisador quis conhecer o que essas entidades esperavam de sua pesquisa, procurando extrair delas informações mais específicas. As respostas foram, também, entregues por escrito.

As respostas da Coordenadora, colocadas após aplicação de nosso projeto, são registradas a seguir:

1. **Que mudanças a senhora acredita serem necessárias para haver eficiência na "nova escola" pretendida?**

   Vontade política, reflexão profunda da Universidade, no que se refere à formação inicial das Licenciaturas, e parcerias dos mais diversos segmentos da sociedade com a escola pública.
2. **Quanto é dever da Direção e da Coordenação da escola, amparadas pela Diretoria de Ensino, propor um trabalho efetivo, junto aos professores, para mudanças em conteúdo (O quê) e métodos (como) na Matemática?**

   Orientar, dar suporte, acompanhar o Plano de Trabalho dos componentes da matriz curricular principalmente durante os períodos de planejamento, replanejamento, HTPCs (horas de trabalho pedagógico coletivo). Possibilitar e disponibilizar tempo para orientação técnica e/ou cursos oferecidos pela Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino. Manter um acervo específico de cada disciplina sempre disponível para a utilização do professor, tanto para seus estudos, como para utilização em sala de aula.
3. **A senhora acredita que as propostas colocadas, para a Matemática do Ensino Médio nos PCNs, se apresentam razoáveis para a prática de sala de aula?**

   Sim, entretanto ainda falta maior preparação dos professores. Sua formação inicial está (ainda) voltada à visão do conteúdo como fim e os PCNs colocam o conteúdo como meio para desenvolvimento de competências e habilidades no educando.
4. **Os projetos, apresentados por estudantes do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP, colaboraram, de alguma forma, para uma mudança importante para o trabalho nas salas de aula desta instituição?**

   Com certeza. Pena que aconteceu em apenas uma sala e, como o professor não foi formado para um trabalho coletivo, não apresentou o projeto para seus companheiros de disciplina.
5. **Em sua instituição nosso projeto fez com que os alunos se animassem diante da nova metodologia, por nós aplicada em sala de aula. Como vocês respondem a isso?**
6. **Como Resolução de Problemas, na sua opinião, pode contribuir para a criação de uma "nova Escola"?**
7. **Como vê a senhora um trabalho diferenciado partindo de problemas do cotidiano e aplicações para serem explorados em sala de aula?**

5. / 6. / 7. – Um projeto diferenciado, a partir de problemas do cotidiano do aluno e principalmente que considere o conteúdo como meio e o aluno como centro da aprendizagem, certamente contribui para o que você chama de "construção de uma escola nova". Entretanto para que isso realmente aconteça, se faz necessário que haja um trabalho realmente coletivo e um sentido de co-responsabilidade entre toda a equipe da escola.

8. **Quais são os principais problemas que está enfrentando a sua escola em relação a um ensino de qualidade?**

   Além do jovem desta sociedade em que vivemos não ter muito compromisso com a aprendizagem escolar, e aqui poderíamos envolver uma série de outras discussões, ainda há a falta de compromisso dos profissionais da Educação, da sociedade, das políticas públicas. Isso dificulta sobremaneira o trabalho que a escola deve desenvolver: formar cidadãos capazes de agir e modificar o seu meio.

9. **Como vocês sentiram nosso trabalho em sala de aula com a metodologia usada na resolução de problemas?**

   Muito bom ... pena que não possa atingir a toda escola.

Também, depois da aplicação do projeto, foi feita uma entrevista com a professora da turma.

1. **Qual foi sua reação quando lhe fizemos a proposta para desenvolver parte de nossa pesquisa em suas aulas de Matemática?**

Quando você falou que iria à escola e eu fiquei sabendo que iria dar aulas para as turmas da tarde, que não eram tão voltadas para o Vestibular... que os alunos não eram tão esforçados... que não eram "bons alunos"... fiquei preocupada. Não era o que eu esperava pois, até então, acreditava que eu daria aulas de manhã, onde os alunos, não que sejam melhores, mas sim mais esforçados, que geralmente têm objetivos de prestar o Vestibular... continuar seus estudos... e isso implica num maior esforço na disciplina.

Quando você confirmou que iria fazer sua pesquisa e eu recebi a confirmação de que daria aulas para algumas turmas da tarde, fiquei com certo receio de até comprometer sua pesquisa ou de que você não conseguisse o resultado esperado, até sabendo que você queria apenas observar o que iria acontecer.

Na minha primeira reação, fiquei assustada, com medo de decepcionar, porque a classe era considerada "fraca" e eu não a conhecia. O período da tarde é tido, em geral, como fraco e

há muita evasão. As classes são muito "rotativas", isto é, com muita mudança de alunos, e, por isso, minha primeira reação foi de receio.

Depois que eu vi que você aceitou encarar...que a dona Lourdes gostou da idéia de os alunos terem dificuldades em Matemática, de não serem "alunos ideais", então percebi que era uma oportunidade de eu aprender mais até como professora, de estar oferecendo a eles, os alunos, alguma coisa diferente e de estar ajudando você, mas sabendo que mais me ajudando do que o ajudando. Então, passei a ver com bons olhos... o receio deu lugar a uma expectativa grande quanto à experiência.

2. Em sua opinião, que participação você acredita ter tido no desenvolvimento dessa pesquisa?

Não sei se eu ajudei muito na sua pesquisa. Só sei que, em sala de aula ou quando estávamos em campo, minha participação foi no sentido de seguir suas orientações, de maneira a ajudar. Mas não acredito que eu tenha tido uma participação muito grande. Fiz meu papel de professora normal, orientando os alunos e tentando fazer o possível para que você pudesse fazer seu trabalho de pesquisa.

3. Você já havia utilizado antes a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através de resolução de problemas em suas aulas, com seus alunos?

Acredito que eu devo ter usado indiretamente. Gosto de começar a aula com uma situação-problema. Por exemplo, para ensinar potenciação, eu sempre começo com um exercício que implica numa seqüência de potências. Então, eu acho que já trabalhei mas não explicitei o modo, porque eu acredito que, se você começa com um problema, o aluno já vai associar mais aquela situação ao cotidiano dele e vai assimilar melhor do que se você dissesse: potenciação é isso..., faça isso..., e isso se torna mecânico. Agora, se ele consegue fazer uma ponte com uma situação, na hora em que ele fizer um exercício que exija potenciação, aquilo vai fazer mais sentido para ele.

Eu penso que muitos professores, às vezes, usam essa metodologia, mas nem sempre. Nem sempre eu começo o conteúdo com uma situação-problema para chegar à formalização como você usou. Mas acredito que muitos professores a usam sem saber o que é, e se eles conhecessem mais as coisas que estão por trás disso, eles poderiam aperfeiçoar sua prática. Assim, como eu, com certeza, repensei a minha depois que você falou sobre Resolução de Problemas e poderia até melhorar as aulas, fazendo uma coisa mais profunda sobre resolução de problemas.

4. Se não havia ainda usado essa metodologia, de que forma ocorria seu trabalho com Trigonometria em suas aulas de Matemática?

Como falei, eu acho que a usava sem explicitar e não de uma maneira tão correta como deveria ser. Mas, quando fiz o trabalho, com essa turma, em Trigonometria, geralmente começava com muitos problemas envolvendo triângulo retângulo, atividades com eles medindo, usando régua, transferidor e esquadro. Fiz uma atividade com eles para que constatassem algumas coisas como as medidas de uma árvore, de um prédio, distâncias ... são situações-problema e, por isso, são essenciais. Mas o problema era dar continuidade ... que, de repente, isso se "quebrasse"... e começava aquela matemática formal. Acho que isso ficou a desejar. Mas, no início do ensino de Trigonometria, eu trabalhava bastante com problemas e depois formalizava as propriedades.

5. Você já teve oportunidade de trabalhar com seus alunos dispostos em pequenos grupos ou normalmente desenvolvia as atividades individualmente?

Na maioria das vezes, desenvolvia a atividade individualmente, mas já trabalhei em grupos. Por exemplo, em uma das turmas da tarde eu tinha 20 alunos. Dividindo-os em grupos de 5 ficava fácil percorrer os 4 grupos para tirar dúvidas, porque acredito que, no trabalho em grupo, a intenção não é só a de resolver problemas mas, sim, discutir, chamar o professor para tirar dúvidas. Nessa turma da tarde funcionava. Agora, numa turma da noite, eu tinha 45 alunos. Dividi-los em grupos de 5 alunos, dá 9 grupos e uma sala com 9 grupos não é fácil ... você desanima e, assim, você acaba optando por trabalhar individualmente. Os alunos interessados que têm dúvidas perguntam e, quando eles as não têm, você corrige na lousa, tentando explicar.

É muito bom trabalhar em grupo, mas tem suas limitações: o professor é sozinho, não tem auxílio de outros nem de um coordenador. Talvez houvesse outras soluções que eu desconheça e que poderiam ter sido utilizadas, mas acho que o trabalho em pequenos grupos funciona desde que o número de alunos na classe ajude ... que você tenha apoio da coordenação ...que tenha tempo para preparar suas aulas ... porque esse trabalho exige muito mais preparação. Não é só chegar lá, na sala, e falar "vamos resolver o exercício, sentem-se em grupos", isso é uma coisa, outra é você ter que preparar a atividade para eles discutirem e tentar tirar as dúvidas deles depois. Para tirá-las é preciso ter postura, posição, porque se não, os alunos vêem que você não tira as dúvidas, deixam de fazer, começam a se dispersar e a conversa fica alta.

Então, já tentei trabalhar em grupos, poucas vezes, porque algumas experiências acabaram me desanimando e fizeram com que eu continuasse com o método tradicional.

6. Depois do trabalho desenvolvido com Trigonometria no triângulo retângulo, em sua opinião, como julgou o envolvimento dos alunos na atividade com o teodolito, que possibilitou a medida de distâncias inacessíveis?

Achei que a atividade foi muito boa porque eles se envolveram. Alunos, que nunca faziam os exercícios pedidos, trouxeram o material do pátio para a sala de aula ... aqueles que não trouxeram foram até o pátio encontrar algum material para poder fazer ... aí, a partir do momento que eles fazem aquele teodolito, eles querem saber para que serve ... como usar.

Julgo a atividade como muito enriquecedora, mas acho que faltou uma coisa: explicar melhor que, quanto maior a precisão no fazer, no colocar aquele "ferrinho", quanto mais "certinho" ele for em relação ao ângulo, quanto mais reto ele for, quanto melhor ele colar, melhor será a medida que eles vão obter. Mas isso não foi motivo de desânimo para eles. Pelo contrário, a construção os incentivou a querer saber mais sobre seu uso, e o uso implicou em saber resolver o problema.

O desenho também acho que ajudou. O fato de eles fazerem o desenho e verem que aqueles traços são os lados de um triângulo fictício, que aqueles traços eram medidas, algumas que eles poderiam encontrar e outras eram impossíveis, então, entenderam que eles deveriam usar as razões trigonométricas.

O envolvimento deles foi muito legal e, quando voltaram pra sala de aula, queriam tirar dúvidas e perguntavam muito.

7. Considerando os dados coletados, no playground, a respeito do movimento do balanço, como você descreveria a formalização dos conceitos das funções trigonométricas envolvidas e a construção de seus gráficos?

Infelizmente não estive presente nessa aula, porque eu tinha compromisso com minha pesquisa. Mas os alunos falaram que a atividade foi muito boa, porque eles se envolveram e aplicaram os conceitos de razões trigonométricas, já trabalhados por mim, nos dados coletados no playground. Nas aulas seguintes pude constatar que a maioria dos alunos não tinha dificuldade em construir gráficos envolvendo funções trigonométricas.

Acredito que a atividade no playground e a formalização por parte do professor-pesquisador foi significativa para os alunos.

8. Depois das atividades desenvolvidas pelo pesquisador em sua sala de aula, como você gostaria de abordar o trabalho, com Trigonometria, com alunos de Ensino Médio?

Com certeza vou rever meu trabalho com trigonometria. Acho que, por enquanto, não vou dar aulas para o Ensino Médio, mas já pensei em trabalhar a parte de medidas e construção do teodolito. Até aprendi a fazer um outro, usando compasso que é bem preciso.

Acho que esse trabalho, com material concreto, onde os alunos vão e fazem medidas e vêem que aquilo é uma situação do dia-a-dia, é importante e quando eu for trabalhar com esse assunto de novo, se for possível, se eu tiver condições, na classe, de me preparar para fazer um trabalho diferente, envolvendo material manipulativo, diferente do tradicional, onde você só explica e o aluno capta, onde aqueles que têm mais condição conseguem entender e os que não têm acabam "boiando" ... mas isso envolve muita coisa ... eu teria que estudar tudo isso, ver a quantidade de alunos, material ... , falta material ... você quer construir o teodolito. Você manda que tragam ... mas um transferidor eles não vão trazer, eles não vão comprar. A escola, às vezes, também não oferece xerox, não oferece nada. Há coisas que você não pode pegar e tem que oferecer fichas de trabalho que, às vezes, você tem que tirar do seu salário, que é um salário horrível.

Às vezes, para um trabalho como esse, o professor é acomodado. A gente se acomoda ... eu me acomodei .... Não estou querendo justificar essa inércia, mas a gente se acomoda porque se você vai fazer uma coisa diferente, ela pode não funcionar, as classes estão lotadas e você vê que é melhor ficar no tradicional. Há alunos que não respeitam o trabalho que você faz e, então, você se acomoda por que é mais fácil. Material e recursos não se tem. Tudo isso faz você se limitar. Atividades desse tipo exigem planejamento. Quanto tempo você, Roger, não se preparou para ir para lá? E você é um professor experiente.... Exige um tempo para você parar e refletir para preparar uma aula. Muitas vezes, o professor dá 40 aulas por semana. É sobre-humano. Eu conheço um professor que dá 60 aulas. Quando um professor vai ter tempo ou vontade de fazer alguma coisa diferente? Esse tempo era para estar incluído na carga horária dele ... um tempo para preparar a aula dentro da escola.

Enquanto não tivermos condição acho que será difícil mudar. Por outro lado se tivermos vontade e não desanimarmos, podemos fazer um trabalho legal e eu vou tentar ... vou tentar fazer um trabalho diferente.

Também entrevistamos um dos componentes do GTERP que esteve presente em uma de nossas aulas e em uma das atividades além da sala de aula.

1. **Inicialmente, nesta entrevista, gostaria que você falasse um pouco sobre o que ocorreu antes de realizarmos uma das atividades de campo por nós escolhida.**

Em março de 2005, a nossa orientadora viajou para os Estados Unidos para participar de um congresso do NCTM, e eu fiquei, a pedido dela, acompanhando de perto seu trabalho de pesquisa. Fomos em busca de problemas de Trigonometria vinculados ao cotidiano.

Num primeiro momento, tivemos dificuldade em localizar problemas desse tipo. Como sugestão de nossa orientadora, tivemos a oportunidade de ir até o campus da USP, em São Carlos. Lá, conversamos com uma professora[68] do Departamento de Matemática do ICMC – USP, que havia desenvolvido um trabalho de Matemática com resolução de problemas, num projeto FAPESP, voltado para alunos do Ensino Médio de uma escola pública de São Carlos, visando ao nosso interesse em trabalhar Trigonometria.

Ela nos recebeu muito bem e de pronto, para nossa decepção, nos informou que os problemas sobre trigonometria, dos quais ela tinha conhecimento eram, na realidade, muito artificiais. Era uma decepção, pois nesse encontro estávamos em busca de problemas envolvendo funções trigonométricas associados a uma matemática que está além da sala de aula. Dissemos a ela que, na verdade, acreditávamos que as aplicações das funções trigonométricas pudessem ser muito interessantes. Ela, a professora, reconheceu isso e nos ajudou, de certa maneira, fornecendo algumas fitas de vídeo que traziam problemas associados a lançamentos de foguetes, mas que fugiam um pouco do cotidiano.

Na volta, quando chegamos ao campus da UNESP em Rio Claro, disse ao pesquisador: - está difícil de encontrar problemas desse tipo que queremos, mas me lembro de um que vi, na Folha de S. Paulo, que pode servir. Esse problema é sobre um balanço, amarrado no galho de uma árvore, cujo movimento é periódico ... talvez interesse a você. Vou tentar me lembrar do enunciado desse problema e depois vamos pensar em colocá-lo em prática.

Esse problema foi levado para o GTERP. A idéia começou a ganhar força. Recordei do enunciado e chegamos à conclusão de que amarrar as cordas do balanço no galho de uma árvore era pouco viável e que usar os balanços de um *playground* seria mais conveniente. Então, propus que levássemos os alunos para um parque em Rio Claro, onde houvesse

[68] Dra. Edna Maura Zuffi.

balanços, para que eles mesmos percebessem que o movimento feito pelo balanço é oscilatório e periódico e coletassem os dados. Depois, como sugestão, que em sala de aula fossem construídos gráficos das funções que representam o movimento do balanço e que, na verdade, são funções trigonométricas envolvendo seno e cosseno.

Essa idéia era interessante. Mas para sua prática tínhamos algumas dúvidas, tanto que a discutimos em uma das reuniões do GTERP, com vários membros do grupo, incluindo Marcos e Raquel que, com entusiasmo, levantaram as condições que teríamos de impor para realizar esse evento com os alunos. Por exemplo, como deveríamos visualizar os ângulos, se seriam ângulos notáveis ou não, quais instrumentos deveríamos usar: régua, esquadro, transferidor, compasso ... . Enfim, o que nos seria útil nessa situação de fora da sala de aula.

Ouvimos as considerações dos elementos do grupo. Anotamos da melhor maneira possível, e realizamos, no dia 5 de maio de 2005 esse atividade com os alunos.

Por outro lado, para desenvolver o trabalho em sala de aula, já tínhamos vários problemas que nossa orientadora havia sugerido, por correio eletrônico, visto que estava nos Estados Unidos. Tínhamos uma correspondência bastante freqüente com ela e ela nos pediu que fôssemos até sua casa para retirar dois livros que tratavam a Trigonometria em geral, tanto no triângulo retângulo quanto no círculo trigonométrico e cujos problemas eram bastante apropriados ao trabalho para a sala de aula.

Como já dissemos, nossa intenção era a de desenvolver trabalhos também para fora da sala de aula, com situações que tratassem funções trigonométricas. Podemos dizer que, num primeiro momento, surgiram muitas dificuldades para tornar isso possível. Mas não desanimamos e pudemos ir em busca de uma situação que fosse desenvolvida fora da sala de aula, já que, para a sala de aula, tínhamos alguns problemas já elaborados, com enunciados conhecidos e que não apresentavam dificuldades para o desenvolvimento do trabalho em sala de aula.

2. Como foi desenvolvida a atividade com o balanço no playground?

Inicialmente fomos ao parque de recreação para fazer o reconhecimento do local. Verificamos quais balanços estariam disponíveis para o nosso uso. Também, procuramos funcionários desse parque que poderiam nos auxiliar quando estivéssemos realizando a atividade com os alunos.

De início necessitávamos de uma estaca, onde seria fixado o transferidor de madeira que seria utilizado. Depois de passarmos pelo parque, nos dirigimos ao Departamento de Geologia da UNESP, com a intenção de conseguirmos uma régua usada por topógrafos,

justamente para possibilitar a medida da altura onde o balanço estava fixado. Prontamente fomos atendidos e conseguimos essa régua. O técnico que nos atendeu até chegou a montá-la para nós. Depois nos dirigimos ao Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, buscando conseguir um transferidor grande de madeira. Não o encontramos lá. Achamos, então que ele poderia ser encontrado na Escola Estadual Joaquim Ribeiro. De fato, lá o encontramos.

Uma vez que havíamos conseguido a régua, fomos à Escola e encontramos a professora que nos cedeu o transferidor. Os alunos já estavam em sala de aula, dispostos em grupos. O pesquisador, que me acompanhava, havia levado alguns problemas. Distribuiu-os entre os grupos e os alunos logo se empenharam em resolvê-los. Também estava presente, nessa ocasião, a professora Luciana, participante do GTERP, que, a pedido do pesquisador portava uma câmara fotográfica para documentar, não só a nossa presença, mas, também, a atividade que seria desenvolvida no parque.

Depois de alguns instantes, conversando com a professora da turma, nos retiramos da sala de aula com um grupo formado por apenas oito alunos, pois só tínhamos dois carros para nos levar. A professora permaneceu em sala de aula para trabalhar com os demais alunos um problema curioso deixado pelo pesquisador, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Dirigimo-nos, então, ao parque e ao chegarmos, procuramos um funcionário que nos auxiliasse. O senhor Noel foi designado para essa função e, bastante solícito, nos acompanhou durante todo o desenvolvimento da atividade.

Durante a parte da manhã já havíamos escolhido uma estaca, que ele (senhor Noel) fixou para servir de suporte para o transferidor de madeira. Ao lado deste, fixamos a régua usada pelos topógrafos.

Naturalmente tínhamos uma preocupação com o solo, pois este se mostrava arenoso e com alguns desníveis, mas para nossa atividade esse deveria ser o mais plano possível. Com um pouco de trabalho, alguns alunos ajudaram o senhor Noel a puxar a areia e deixaram o solo nas condições que desejávamos.

Na seqüência, pedimos a uma aluna que se dirigisse ao balanço, se sentasse no banquinho e se balançasse periodicamente. Esse movimento foi desenvolvido tanto no sentido horário como no anti-horário, tomando como referência o transferidor.

Os alunos, aos poucos, foram se envolvendo com a atividade. Alguns se posicionaram para fazer anotações e outros queriam medir. Medir o quê? Quando o balanço se deslocava em relação à estaca vertical, tínhamos uma variação em relação a esta e a altura do banquinho

em relação ao solo, já que o balanço estava fixado a aproximadamente 2 metros do solo. Dois alunos, um de cada lado, seguravam o banquinho na marca do ângulo desejado. Identificamos alguns ângulos notáveis em ambos os sentidos: horário e anti-horário, 30º, 45º e 60º, justamente para que os dados pudessem ser coletados.

Numa das situações, recordo que um aluno disse "se nós já tivermos as medidas no sentido horário, pra que fazer no sentido anti-horário? Elas serão as mesmas". Perceba que o aluno já estava compreendendo muito bem aquilo que estava acontecendo.

De certa maneira, todos os alunos se envolveram. Todos estavam cientes de que estávamos trabalhando com funções, um conteúdo que eles já haviam aprendido na 1ª série do Ensino Médio, e eles notavam que, a cada valor da medida do ângulo em relação à estaca vertical, tínhamos um valor para a medida da distância do banquinho em relação a ela e um valor para a medida da altura dele em relação ao solo.

Voltando à escola, alguns alunos foram refletindo sobre a situação desenvolvida no parque. Um deles me perguntou: - "Quando o ângulo era de 90°, naturalmente o banquinho estaria na altura máxima em relação ao solo, não é verdade?" Respondi que sim. Ele havia sozinho refletido sobre essa possibilidade.

Os alunos se envolveram de tal maneira que certamente essa atividade marcou a todos eles que tiveram a oportunidade de participar dessa aula de Matemática fora da sala de aula.

Aproveitando os dados coletados, o pesquisador nos disse que desenvolveria, com esses alunos, a construção dos gráficos das funções relacionadas com o movimento do balanço, que nada mais são do que funções trigonométricas.

7.2.2. Coleta de Evidências

Na formulação de Polya, o professor é a figura chave no processo de ensino-aprendizagem. Somente um professor consciente de sua responsabilidade para com o ensino consegue determinar o tipo certo de problema a ser trabalhado e providenciar a quantidade apropriada de orientação para resolvê-lo.

No dizer de Van de Walle, tarefas devem ser selecionadas de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas.

Em nosso trabalho de pesquisa, sempre tivemos em mente a condição de estimular o aluno a pensar e a participar ativamente da construção de novos conhecimentos. Assim, ao trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, durante a aplicação do projeto, ficou bastante claro que, ao trabalhar

partindo de um problema, estávamos provocando os alunos de tal modo que, enquanto trabalhassem em sua resolução, pensassem, refletissem e, com segurança, buscassem sua solução.

Considerando as idéias colocadas acima, vamos apresentar alguns momentos onde elas ficaram evidentes.

7.2.2.1. Evidências coletadas através das entrevistas realizadas

Na entrevista realizada com a Coordenação da escola envolvida em nossa pesquisa, segundo a Coordenadora as seguintes posições podem ser evidenciadas:

- Deve haver uma reflexão profunda da Universidade, no que se refere à formação inicial do professor, para que haja uma mudança necessária que permita eficiência na "nova escola" pretendida.
- A Direção e a Coordenação da Escola devem dar suporte e acompanhar o plano de trabalho dos componentes da matriz curricular durante os períodos de planejamento, replanejamento e horas de trabalho pedagógico coletivo. Ainda, a Direção e a Coordenação da Escola, amparadas pela Diretoria de Ensino, devem possibilitar e disponibilizar tempo para orientação técnica e/ou cursos oferecidos pela Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino.
- Falando sobre o papel dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a Coordenadora reconheceu que falta maior preparação dos professores para lecionar Matemática no Ensino Médio de acordo com as recomendações dos PCN–EM, sendo que sua formação inicial está ainda voltada à visão do conteúdo como fim.
- Ao responder às questões 5 , 6 e 7 da entrevista, a Coordenadora disse que um projeto diferenciado, partindo de problemas do cotidiano do aluno, que considerando o conteúdo como meio e o aluno como centro de aprendizagem contribui para a "construção de uma escola nova". Entretanto, para que isso realmente aconteça faz-se necessário que haja um trabalho realmente coletivo que congregue toda a equipe da escola.
- Ao ser questionada sobre problemas que a Escola enfrenta com relação a um ensino de qualidade, a Coordenadora destacou que além de o jovem de nossa sociedade não ter muito compromisso com a aprendizagem escolar, falta compromisso dos profissionais da Educação, da Sociedade e das Políticas Públicas. Ainda disse que "isso dificulta

sobremaneira o trabalho que a Escola deve desenvolver: formar cidadãos capazes de agir e modificar seu meio".

Na entrevista com a professora da turma foram evidenciadas as seguintes colocações:

- Ao perguntar à professora da turma qual havia sido sua reação ao lhe fazermos a proposta de desenvolver nossa pesquisa em sua sala de Matemática, a professora respondeu: – "quando você confirmou que iria fazer sua pesquisa e eu recebi a confirmação de que daria aulas para turmas da tarde, fiquei com receio de até comprometer essa pesquisa. Na minha primeira reação, fiquei assustada, com medo de decepcionar, porque a classe escolhida era considerada 'fraca' e eu não a conhecia". Mas, "depois que eu vi que você aceitou encarar ... que a Dona Lourdes gostou da idéia de os alunos terem dificuldade em Matemática, de não serem 'alunos ideais', então percebi que era uma oportunidade de eu aprender mais até como professora, de estar oferecendo a eles alguma coisa diferente e de estar ajudando você, mas sabendo que mais me ajudando do que o ajudando. Então, passei a ver com bons alhos ... o receio deu lugar a uma expectativa grande quanto à experiência.
- Ao responder a pergunta: você já havia utilizado antes a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas em suas aulas, com seus alunos?, a professora disse que possivelmente pudesse tê-la usado indiretamente mas que, de fato, pensava que muitos professores, às vezes, usam essa metodologia, mas nem sempre. Ela disse: "Nem sempre eu começo o conteúdo com uma situação-problema para chegar à formalização como você usou. Mas acredito que muitos professores a usam sem saber o que é, e se eles conhecessem mais as coisas que estão por trás disso, poderiam aperfeiçoar sua prática. Assim, como eu, com certeza, repensei a minha depois que você falou sobre Resolução de Problemas e poderia até melhorar as aulas, fazendo uma coisa mais profunda sobre resolução de problemas".
- Nova questão: Você já teve oportunidade de trabalhar com seus alunos dispostos em pequenos grupos ou, normalmente, desenvolve suas atividades individualmente?

  Ao respondê-la, a professora afirmou que é muito bom trabalhar em grupo, mas tem suas limitações. Esse tipo de trabalho funciona desde que o número de alunos na classe não seja tão grande e o professor tenha tempo para preparar suas aulas.
- A professora ao ser questionada sobre a construção do teodolito em sala de aula e sua aplicação no pátio da Escola disse que o envolvimento dos alunos na atividade com o teodolito foi muito legal e que, quando os alunos voltaram para a sala de aula, queriam

tirar dúvidas e perguntavam muito. Pena foi, disse ela, que dois grupos não foram capazes de construir corretamente o teodolito e, conseqüentemente, os resultados não foram bons. Em sua fala, o trabalho de construção deveria ter sido acompanhado mais de perto.

Na entrevista realizada com um membro do GTERP, filmada gravada e transcrita, foram coletadas as seguintes evidências:

- Os problemas idealizados no projeto para abordar Trigonometria, tanto no triângulo retângulo quanto no ciclo trigonométrico, eram bastante apropriados para um trabalho diferenciado em sala de aula, através de suas resoluções.
- Situações-problema envolvendo trigonometria, para um trabalho em sala de aula foram encontradas em literatura nacional e estrangeira. Mas surgiram, para o pesquisador, muitas dificuldades para tornar possível o desenvolvimento de trabalhos fora da sala de aula, com situações que envolvessem funções trigonométricas.
- Todos os alunos que tiveram oportunidade de participar da aula de Matemática realizada no playground (fora da sala de aula) envolveram-se com a coleta de dados. Alguns se posicionaram para fazer anotações e outros queriam medir. Medir o quê? Com esses dados coletados o pesquisador pretendia construir, em sala de aula, gráficos das funções trigonométricas relacionadas ao movimento do balanço.

7.2.2.2. Evidências coletadas durante o trabalho desenvolvido pela professora

Surgiram como evidências no trabalho da professora os seguintes pontos a destacar:

- No final da aula 7, a professora propôs o Problema 5 aos alunos. A aula acabou e não houve tempo para que os alunos resolvessem esse problema em classe. Na aula seguinte, a professora, ao iniciar seu trabalho, não o retomou, porque acreditava que os alunos deviam aprender antes todos os conceitos e conteúdos necessários à resolução daquele problema. Ela não estava, ainda, muito envolvida com nossa metodologia. Também os problemas 9 e 11, que envolviam aplicações interessantes do mundo real, não foram trabalhados pela professora. Ela, mais uma vez, mostrou que acreditava que ainda era necessário trabalhar bem as bases da trigonometria no triângulo retângulo, antes que os alunos pudessem resolvê-los.
- Para resolver o Problema 10, os grupos, em sua maioria, trabalharam com mais confiança. É interessante notar que, neste problema, os alunos perceberam que sua

resolução era semelhante à do Problema 8. Ficou evidente que, ao enfrentar coisas parecidas, eles se sentem mais confiantes. Eles têm medo do desconhecido.

- Na construção do teodolito, alguns alunos pediram ajuda ao pesquisador ou à professora para completar sua construção, embora todos os passos estivessem indicados no roteiro entregue pelo pesquisador. Ficou evidente a má interpretação dos dados do roteiro por alguns alunos.

- Para resolver o Problema 19, com os alunos trabalhando individualmente, o problema foi copiado da lousa, a pedido da professora. Um dos alunos perguntou: - O que é radiano? A professora, imediatamente, foi à lousa e, num trabalho expositivo, passou a falar sobre graus e radianos. Marcou pontos sobre duas circunferências, numa em graus e na outra em radianos. Chegou a escrever a relação 180º --- π rad. Mas, apesar de todo esse trabalho feito, ficou evidente que a resposta à pergunta feita não foi dada.

7.2.2.3. Evidências coletadas durante o trabalho desenvolvido pelo pesquisador

- Ficou evidente, a partir da 5ª semana, a mudança de papel do pesquisador em sala de aula, quando o pesquisador passou a atuar dentro da linha de pesquisa-ação. Como um professor-pesquisador, trabalhou para produzir, com os alunos, conhecimentos novos além de relatar o que ocorreu, em sala de aula, em ensino e aprendizagem.
- Ficou evidente, com o trabalho do pesquisador no Problema 24, ao usar com mais vigor a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de problemas, o fato de haver mexido sobre as crenças da professora, que acreditava que os alunos só poderiam resolver esse problema desde que se lhes dissesse como proceder.
- Nas aulas 24 e 25, mais uma vez ficou evidente que, quando os alunos resolviam problemas de fixação de conceitos já construídos, podia-se perceber um ambiente agradável, de confiança e interesse entre eles.

  Nas aulas 31 e 32, em mais uma vez se comprova a alegria dos alunos ao trabalhar com coisas conhecidas: com o Problema 38, que apresentava uma figura, os grupos leram seu enunciado sem perguntar nada ao professor-pesquisador. Mas, um dos alunos, então, disse que o problema proposto seria facilmente resolvido, por logo de inicio apresentar um desenho. Não foi bem assim.

- Ficou evidente que o Termo de Compromisso, entregue à professora e aos alunos na segunda semana de aulas, foi bastante significativo para o estabelecimento de parâmetros norteadores do desenvolvimento e da organização de um trabalho diferenciado em ensino e aprendizagem de Matemática.
- Ficou, também, evidente o bom procedimento de incluir, no projeto do pesquisador, tanto problemas constantes do planejamento inicial da professora quanto problemas constantes nesse projeto.
- Muitas vezes ficou evidente a necessidade de se fazer a distinção entre o professor na sala de aula e o pesquisador na pesquisa.

7.2.2.4. Evidências coletadas durante a aplicação do projeto

Na aplicação de nosso Projeto ficou evidente que:

- A boa acolhida do Projeto, em uma instituição de ensino, é fundamental.
- A disponibilidade da professora da turma em colaborar com o projeto de pesquisa apresentado foi relevante para o bom desenvolvimento da pesquisa.
- O planejamento da disciplina Matemática, na instituição de ensino, no início do ano letivo, é muito importante e deve ser seguido regularmente.
- A aceitação, por parte de professor e alunos, de um Termo de Compromisso é essencial para o bom andamento do desenvolvimento do trabalho em sala de aula.
- A metodologia adotada para o trabalho em sala de aula é de importância capital para atingir os objetivos de ensino, de aprendizagem e de avaliação.
- Como parte da metodologia adotada, trabalhar com os alunos num processo cooperativo leva a uma socialização da construção do conhecimento.
- O trabalho a partir de problemas permite, aos alunos, assumirem uma postura de investigadores, no processo de construção de novo conhecimento.
- A escolha de problemas e tarefas, geradores de novos conceitos e novos conteúdos, é competência dos professores preocupados com o aprendizado.
- As ações dos professores podem encorajar os estudantes a pensar, questionar, discutir suas idéias, resolver problemas e buscar suas soluções. Os professores precisam estar comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino.
- Os professores devem ter uma oportunidade continuada para refletir sobre sua prática e melhorar sua compreensão de estratégias pedagógicas, da aprendizagem do estudante e do conteúdo matemático.

- A habilidade de integrar a avaliação com o processo de ensino é decisiva para intensificar a aprendizagem e melhorar o ensino.
- Os papéis assumidos pelo pesquisador no transcorrer da pesquisa: observador e professor-pesquisador.
- Um ensino eficiente de Matemática requer trabalhar com um número de alunos menor do que o usual; um tempo maior para o preparo das atividades; e recursos necessários para um bom trabalho em sala de aula.
- O dever da Direção e da Coordenação de uma instituição de ensino, amparadas pela Diretoria de Ensino, é propor um trabalho efetivo, junto aos professores, para mudanças em conteúdo e métodos na Matemática.

7.3. Interpretação das Evidências Selecionadas frente à pergunta da pesquisa

A pergunta de nossa pesquisa ficou assim configurada: **O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos pelos alunos do Ensino Médio?**

Na verdade o que queremos, ao responder essa pergunta, é mostrar que Resolução de Problemas é, entre outros, um dos principais caminhos para ensinar, aprender e avaliar a Matemática trabalhada em sala de aula.

De uma maneira geral, o sistema de ensino de Matemática, no Brasil e na maioria dos países do mundo, é caracterizado por uma tradição de aulas expositivas. Essas aulas, chamadas convencionais, isto é, consagradas pelo uso, são aquelas que sofrem uma forte influência dos livros didáticos, ou seja, aulas onde o único instrumento de ensino é o livro didático. Temos visto um número considerável de experiências inovadoras, de trabalhos práticos que muitos professores desenvolvem, mas que não são habitualmente considerados, pela maioria dos professores, como apropriados para suas salas de aula. Na verdade, muitos professores dizem não saber trabalhar a partir de problemas.

Atualmente, diversas dissertações e teses têm enfocado alternativas didáticas para a sala de aula, mas essas dissertações e teses muitas vezes não chegam às mãos dos professores. Aqui reside a nossa preocupação. O que esses trabalhos estão contribuindo para melhorar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática? O que nós, enquanto pesquisador, podemos fazer para contribuir com tal processo? Acreditamos que não basta defender uma brilhante dissertação em que se focaliza a sala de aula. Temos que ir além, ou seja, fazer com

que essas dissertações ou partes delas cheguem às mãos dos professores que estão atuando nos Ensinos Fundamental e Médio, contribuindo assim para uma reflexão desses professores sobre suas próprias práticas.

Das evidências coletadas, foram selecionadas aquelas que atendem melhor à pergunta norteadora de nossa pesquisa.

Um **planejamento anual** bem organizado, preocupado com conteúdo, metodologia, número de aulas, disponibilidade de tempo para preparo de material didático e cumprimento de exigências legais torna-se necessário para o desenvolvimento de um trabalho que quer fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Iniciando nosso trabalho com os alunos da turma escolhida, fizemos um debate com a classe buscando esclarecer alguns pontos sobre a dinâmica de sala de aula adotada, destacando a importância da Matemática para suas vidas e a necessidade que se tem em utilizá-la sempre.

O **Termo de Compromisso** refere-se às regras que podem orientar professor e aluno no decorrer das atividades estabelecidas para um trabalho organizado e eficiente. Esse documento, preparado para ser obedecido ao longo do ano letivo, tem, por finalidade, fazer com que o professor possa desenvolver seu trabalho dentro de um ambiente que compreende um conjunto de comportamentos do aluno esperados pelo professor e, de outro lado, um conjunto do professor esperados pelo aluno.

A necessidade do **Termo de Compromisso** é justificada pelo fato de **o jovem de nossa sociedade não ter muito compromisso com a aprendizagem escolar**. Também podemos notar que há **falta de compromisso dos profissionais da Educação** para formar **cidadãos capazes de agir e modificar o seu meio**.

O **Termo de Compromisso** tem como objetivo principal a formação do cidadão. Um cidadão que conhece seus direitos e seus deveres. Nesse sentido, compreende-se a cidadania como participação social que adota, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, respeito e cooperação.

Na realização desta pesquisa, durante a coleta de dados na aplicação do projeto, demos destaque especial às atividades produzidas pelos alunos durante o desenvolvimento das tarefas propostas, pois seguramente acreditamos que a **Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas** constitui-se num bom caminho para a construção de conceitos e conteúdos trigonométricos.

A razão mais importante de se trabalhar a sala de aula usando essa **metodologia** é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias ao trabalho feito, em cada unidade temática, em especial na Trigonometria, através da resolução de problemas.

Para implementar a **Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas** em sala de aula, com base no roteiro sugerido por Onuchic (1999), foi elaborada uma seqüência de atividades para o trabalho em sala de aula: Na 1ª etapa (antes), o professor deve fazer com que os alunos estejam preparados para trabalhar sobre o problema proposto, além de que os dados que levem à realização do problema estejam claros. Na 2ª etapa (durante), enquanto os grupos trabalham, o professor deve lhes dar a chance de trabalharem sozinhos. O professor deve observar dando oportunidade aos alunos de pensar. Depois de um certo instante o professor deve ouvir os alunos e, sempre que possível, responder as perguntas feitas com outras perguntas colocadas como possíveis pistas ou até trabalhar com problemas secundários que surjam. Na 3ª etapa (depois), o professor deve envolver a classe toda, numa plenária, visando tirar dúvidas e ajudar os alunos a trabalhar num espírito colaborativo. Os estudantes devem contribuir participando de todas as discussões conduzidas pelo professor. Após a plenária, depois de consenso sobre a solução encontrada, o professor, na lousa, formaliza os novos conceitos criados. Isso ficou bastante evidente quando aplicamos o projeto.

A seguir apresentamos um episódio que mostra o desenvolvimento de uma seqüência de atividades em sala de aula. Tal episódio focaliza o processo de resolução do Problema 24 como feito nas páginas 176, 177, 178, 179, 180, 181 e 182.

Nas aulas 21 e 22, nosso objetivo era provocar os alunos com problemas apropriados para identificação do círculo unitário, a simetria de arcos e a redução de arcos ao 1º quadrante.

Seguindo o roteiro sugerido por Onuchic (1999) para implementar a **Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas** em sala de aula foram desenvolvidas as seguintes atividades:

Primeiro, os alunos formaram 6 grupos. Foi entregue, por escrito, a eles o enunciado do Problema 24. Os grupos reunidos leram esse enunciado e resolveram fazer uma representação da situação.

Segundo, o professor-pesquisador observou os grupos, acompanhando suas discussões sem intervir nelas. Quando o professor-pesquisador deu atenção aos questionamentos dos alunos nos grupos, eles queriam respostas. Muitas vezes, o pesquisador precisou resolver problemas secundários. Por exemplo, foi feita uma revisão rápida sobre a classificação dos ângulos, já

conhecida do Ensino Fundamental. Só depois da fala do professor-pesquisador, é que os alunos puderam avançar na busca da solução do problema.

Terceiro, com o trabalho dos alunos terminado e entregue por escrito, o professor-pesquisador pediu que dois, dos seis grupos, colocassem suas resoluções na lousa.

Quarto, todos os alunos foram chamados, como um grande grupo, para participar de uma plenária. Como todos haviam trabalhado sobre o problema dado, estavam ansiosos quanto a análise de seus resultados.

Quinto, a partir da análise dos resultados, os pontos de dificuldades encontrados pelos alunos foram abordados pelo pesquisador. Novamente foram resolvidos problemas secundários. Um dos pontos de dificuldade foi a utilização inadequada do desenho de um triângulo retângulo pitagórico: 3, 4, e 5 para resolver o problema dado.

Sexto, a partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, chegou-se a um consenso quanto à solução do problema.

Sétimo, o professor-pesquisador formalizou o conteúdo matemático novo que fora construído pelos alunos. A resolução do Problema 24 permitiu que os alunos identificassem o círculo unitário, a simetria de arcos e a redução de arcos ao 1º quadrante. Aproveitando a resolução correta do problema, num trabalho conjunto de professor-pesquisador e alunos, com o professor-pesquisador dirigindo o trabalho, foi feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado.

Schroeder & Lester, em 1989, reconheceram que essa linha de trabalho constitui-se numa abordagem mais consistente com as recomendações do NCTM, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução de problemas. O mesmo se pode dizer com relação aos PCNs.

Como parte da metodologia adotada, trabalhar com os alunos num **processo cooperativo** leva a uma socialização da construção do conhecimento.

Na visão dessa dinâmica de trabalho, é sumamente importante que os alunos desenvolvam habilidades que propiciem um **trabalho colaborativo**, pois este é o primeiro passo em direção ao ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. A cooperação é decisiva para o progresso de qualquer atividade humana. Um **trabalho cooperativo** envolve um pequeno grupo de aprendizes que trabalham juntos com um objetivo comum, o de resolver um problema.

Além disso, o trabalho a partir de problemas permite aos alunos sentirem-se como verdadeiros **investigadores** no processo de construção de conhecimento novo.

As atividades propostas por nós foram encaradas como ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos trigonométricos. Estas atividades consistiam de **problemas geradores**, que tinham como finalidade propiciar a criação de um ambiente de aprendizagem, na sala de aula, em que a partir de problemas os alunos construíam os conceitos, promoviam discussões em grupos e reflexões, com a turma toda, sobre o trabalho realizado e favoreciam o aprendizado.

As pesquisas realizadas por Holdan (1995) mostraram que o tempo gasto em **tarefas extraclasse** contribui, de maneira modesta, mas significativa, para melhorar o desempenho dos alunos. As **tarefas extraclasse** constituem uma parte essencial do processo de ensino. Alguns elementos para uma prática eficaz são: distribuir a prática ao longo do tempo é preferível a concentrá-la; tarefas que incluem oportunidades de exploração de tópicos futuros são preferíveis àquelas que não as incluem; a prática, no mesmo contexto, facilita a aprendizagem inicial e a prática de conteúdos múltiplos facilita a transferência.

A seguir, analisamos duas **atividades extraclasse,** uma envolvendo a **construção do teodolito** e outra focalizando o **movimento do balanço no playground**.

Na **construção do teodolito**, os alunos tiveram várias dúvidas, principalmente com relação ao uso do instrumento. Tanto o pesquisador quanto a professora deveriam ter verificado a precisão de todos os instrumentos construídos, já que não queriam explicar antecipadamente seu funcionamento, objetivando aguçar a curiosidade dos alunos. Devido a isso, dois grupos construíram o teodolito de maneira imprecisa, ou seja, quando o teodolito era posicionado na vertical, a haste não ficava alinhada com o ângulo zero. No entanto, eles acreditavam ter feito de maneira correta, pois achavam que o teodolito seria usado na horizontal. Assim, quando foram medir distâncias inacessíveis no pátio da Escola e numa rua próxima à mesma, não puderam medir corretamente os ângulos.

A professora ao ser questionada sobre a **construção do teodolito** em sala de aula e sua aplicação no pátio da Escola disse que o envolvimento dos alunos na atividade com o teodolito foi muito legal e que, quando os alunos voltaram para a sala de aula, queriam tirar dúvidas e perguntavam muito. Em sua fala, o trabalho de construção deveria ter sido acompanhado mais de perto.

Na aula de Matemática realizada no **playground**, ao movimentarmos o **balanço**, foi possível perceber que ele se deslocava em relação à estaca vertical. Assim, tínhamos uma variação em relação a esta e à altura do banquinho em relação ao solo, já que o **balanço** estava fixado a aproximadamente 2 metros do solo. Todos os alunos que tiveram oportunidade de participar dessa aula mostraram-se bastante envolvidos com a coleta de

dados. Eles estavam cientes de que estávamos trabalhando com funções, um conteúdo que já haviam aprendido na 1ª série do Ensino Médio. Também notaram que a cada valor da medida do ângulo em relação à estaca vertical, tínhamos um valor para a medida da distância do banquinho em relação a ela e um valor para a medida da altura dele em relação ao solo. Alguns deles se posicionaram para fazer anotações, enquanto outros realizavam medições. Com os dados coletados o pesquisador pretendia construir, em sala de aula, gráficos das funções trigonométricas relacionadas ao **movimento do balanço**.

É preciso que os professores estejam realmente comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino. Sabemos que as **ações dos professores** podem encorajar ou desencorajar os estudantes quanto a pensar, questionar, discutir suas idéias, resolver problemas e buscar suas soluções. Nesse sentido, deveria haver uma reflexão profunda da **Universidade,** no que se refere à **formação inicial do professor**, para que possa haver uma mudança necessária que permita eficiência na "nova escola" pretendida. Além disso, os diretores e coordenadores das escolas deveriam **dar suporte** e **acompanhar o plano de trabalho** de cada disciplina durante os períodos de **planejamento, replanejamento** e **horas de trabalho pedagógico coletivo**. Amparados pela Diretoria de Ensino, também deveriam possibilitar e disponibilizar tempo para orientação técnica e/ou cursos oferecidos pela Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino.

Nos Standards 2000, na página 22, está escrito "A **avaliação** deveria apoiar a aprendizagem de matemática essencial e dar informações úteis tanto aos professores quanto aos estudantes". Van de Walle diz que mais do que isso, ela deveria ser feita pelos estudantes, para guiar e aumentar sua aprendizagem.

Uma **avaliação** continuada transmite aos alunos o quê de Matemática é importante. Com **avaliações constantes**, os alunos podem estabelecer objetivos e se tornarem aprendizes mais independentes. Por ganharem continuamente informações sobre o progresso e a compreensão do aluno, os professores podem tomar melhores decisões que apóiem a aprendizagem do estudante. A habilidade de integrar a **avaliação** com o processo de ensino é decisiva para aumentar a aprendizagem e melhorar o ensino.

Em sua tese de doutorado, Celi Aparecida Espasandin Lopes (2003), FE/UNICAMP, cita Denzin (1989), que chamou de **triangulação** as abordagens diversificadas, utilizadas para se conseguir resultados mais abrangentes, mais fidedignos e mais rigorosos ao realizar a análise das informações.

> As estratégias de **triangulação** permitem exercer um controle de qualidade sobre os processos de investigação qualitativa oferecendo provas de confiança e garantias de que os resultados e descobertas que ali emergem reúnem requisitos mínimos de credibilidade, rigor e veracidade. (BUENDÍA et al.,1999)

. Para Denzin (1989), a **triangulação** é o uso de múltiplos métodos no estudo do mesmo objeto, ou seja, podemos utilizá-la para obter maior clareza quanto à identificação de diferentes formas de se ver um fenômeno.

No nosso caso, a **triangulação** se dá cruzando informações produzidas por entrevistas, depoimentos sobre o trabalho em sala de aula e a visão do pesquisador.

Levando em conta as entrevistas feitas, os depoimentos de alunos e da professora e nossa forma de ver e analisar os resultados apresentados pelos alunos, nos sentimos preparados para responder à pergunta por nós colocada nesta pesquisa.

Acreditamos fortemente que **sim**. O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho para trabalhar Trigonometria com alunos do Ensino Médio.

Gostaríamos que muitos professores e professoras se interessassem por esta linha de trabalho. Sabemos que não é fácil trabalhar Matemática através da resolução de problemas, mas como diz Van de Walle, nas salas de aula em que os professores adotaram essa abordagem a excitação de professor e alunos é alta e nenhum deles quer voltar ao ensino tradicional.

7.4. Conclusões

Ao concluir nossa pesquisa, destacamos aspectos relevantes do trabalho com Trigonometria no Ensino Médio apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O tema Trigonometria vem ocupando lugar de destaque no currículo das disciplinas de Matemática nas escolas de Ensino Médio e Superior. No estudo desse tema, as funções trigonométricas têm grande importância, pois podem ser aplicadas tanto no dia-a-dia quanto na Ciência e na alta Tecnologia.

Tradicionalmente o trabalho com Trigonometria em sala de aula não tem envolvido situações cotidianas. Além disso, em seu estudo predominam as fórmulas que os alunos usam sem produzir o menor significado a respeito delas.

Assim como Onuchic (1999), acreditamos que o trabalho de ensino de Matemática e particularmente da Trigonometria deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, o problema deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para obter a solução.

Em nossa pesquisa, proporcionamos oportunidades para que os alunos pudessem pensar sobre situações-problema envolvendo Trigonometria.

Numa das atividades desenvolvidas, os alunos construíram teodolitos "modelo caseiro" e aplicaram os conceitos de razões trigonométricas trabalhados em sala de aula para medir distâncias inacessíveis. Em outra atividade, os alunos visitaram um parque de recreações com a intenção de obter dados sobre o movimento periódico de um balanço. Os dados obtidos foram utilizados na construção de gráficos de funções trigonométricas relacionadas a esse movimento. Sem dúvida foi uma experiência marcante para os alunos.

Para trabalhar com Trigonometria em sala de aula utilizamos vários problemas geradores de conceitos e conteúdos trigonométricos, apresentados em nosso roteiro de atividades. Nesse caso, os problemas foram dados não apenas para motivar os alunos a se interessarem no ensino direto sobre a Trigonometria, mas como um veículo através do qual um novo conceito trigonométrico poderia ser aprendido.

Ouvimos vários depoimentos dos alunos elogiando o trabalho a partir de problemas e aplicações práticas. Um deles disse: "Eu gostei desta experiência de aprender trigonometria de uma forma diferente. É muito bom, o assunto fica interessante!"

Ao trabalharmos Trigonometria em sala de aula utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A razão mais importante de se trabalhar de acordo com essa metodologia é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias no trabalho feito, em cada unidade temática, em especial na Trigonometria, através da resolução de problemas.

O trabalho realizado permitiu a participação ativa dos alunos no processo de resolução de problemas e nas discussões com colegas, ajudou-os a ter mais confiança, a dar sentido ao

que estavam aprendendo, a estabelecer relações, a obter mais profundas percepções acerca da Matemática e a aumentar suas habilidades em resolução de problemas.

Acreditamos que a Matemática deve levar os alunos a pensar, a levantar idéias matemáticas, a comunicar-se ao falar e escrever sobre elas, a desenvolver formas de raciocínio, a estabelecer conexões entre temas matemáticos e não matemáticos e a desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

Em nossa pesquisa, os alunos, ao resolver problemas em sala de aula, se engajaram em todos os cinco padrões de procedimento descritos nos Standards 2000, ou seja, resolveram problemas, raciocinaram matematicamente, compartilharam idéias e desenvolveram sua própria compreensão na construção de conhecimentos matemáticos, fizeram conexões entre idéias matemáticas, tornando sua compreensão mais profunda e mais duradoura e utilizaram representações matemáticas. Na verdade, esses alunos tiveram a oportunidade de conhecer Matemática e de fazer Matemática.

Não há dúvida de que ensinar a partir de problemas é difícil. As atividades precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades de atender ao conteúdo programático.

Poderíamos ter aplicado nosso projeto de trabalho, idealizado para estudar Trigonometria na e além da sala de aula, desde o começo do trabalho com Trigonometria, mas não foi bem assim que aconteceu, porque a professora já havia começado a abordar o tema de acordo com seu planejamento da disciplina.

Não conseguimos trabalhar com todos os problemas planejados, por falta de tempo especialmente no final da aplicação do projeto. Por dificuldade de conseguir problemas para realizar aplicações de matemática fora da sala de aula, fizemos uso de situações-problema que simulavam problemas do cotidiano.

Embora estivéssemos mais preocupados com o processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática, no trabalho realizado em sala de aula consideramos a avaliação integrada a esse processo. A avaliação foi contínua e exigiu uma investigação sobre os procedimentos adotados para cada aula, a partir de cada problema trabalhado, visando melhorar o progresso tanto dos alunos quanto o do professor. Através da resolução de problemas pudemos prover dados de avaliação contínua que foram usados para tomar decisões instrucionais.

A experiência com os alunos e a professora envolvidos em parte de nossa pesquisa foi muito boa e eles puderam perceber uma nova forma em aprender e fazer Matemática através da resolução de problemas.

Assim, tomando como referência as evidências coletadas em nossa pesquisa, acreditamos fortemente que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num bom caminho alternativo para possibilitar ao aluno a construção de conceitos e conteúdos matemáticos através da busca e aproveitamento de seu próprio potencial e de suas próprias habilidades. Para os professores, acreditamos ser uma boa alternativa para a prática docente. A resolução de problemas se torna, assim, um recurso não só para aplicar, mas para aprender e fazer Matemática.

Finalmente, esperamos que nossa pesquisa possa levantar novos questionamentos que ajudem os professores a perceber o valor da Matemática na formação de um cidadão crítico e reflexivo, necessário para uma sociedade em mudança.

Referências

AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.** 2002. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964. 98p.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei n.9394/96. Brasília, 1996.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio –Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília, MEC, 1999. 113p.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio – Matemática**, Brasília, MEC, 2002.144p.

BRIGHENTI, M. J L. **Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos**. Bauru, SP: EDUSC, 2003. 148p.

BURKE, M. J.; CURCIO, F. R. (Ed.) **Learning mathematics for a new century** (Yearbook 2000). Reston: NCTM, 2000. 240p.

CUOCO, A. Some Worries about Mathematics Education. **Mathematics Teacher**, Reston, v.88, n.3, p. 186-187, 1995.

D'AMBROSIO, B. S. Teaching Mathematics through Problem Solving: A Historical Perspective. In: SCHOEN, H. L. (Ed.) **Teaching Mathematics through Problem Solving: grades 6-12**. Reston: NCTM, 2003. cap.4, p.39-52.

DANTE, L. R. **Matemática 2 : Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2002, 526p.

DEVLIN, K. The Four Faces of Mathematics. In: BURKE, M. J.; CURCIO, F. R. (Ed.) **Learning mathematics for a new century**. Reston: NCTM, 2000, p. 17-27. (Yearbook)

FACCHINI, W. **Matemática – Volume Único**, São Paulo: Saraiva, 1996. 620p.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio – Básico da Língua Portuguesa**, Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1988, 687p.

FUNDAÇÃO VICTOR CIVITA. Nova Escola – Edição Especial. **Parâmetros Curriculares Nacionais Fáceis de Entender, de 5ª a 8ª série.** São Paulo: Fundação Victor Civita, 1999. 66p.

GARNICA, A. V. M. Prefácio. In: BRIGHENTI, M. J. L. **Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos**. Bauru, SP: EDUSC, 2003, p. 9-16.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J.R. **Matemática 2**. São Paulo: FTD, 1992.

HOLDAN, G. Tornando as tarefas de casa de álgebra mais eficazes. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Ed.) **As Idéias da Álgebra**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 278-284.

KENNEDY, E. S. **Trigonometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1993. 48p. (Série "Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula")

KRULIK, S.; REYS, R. E. (Ed.) **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1998. 360p.

LARSON, R.; BOSWELL, L.; STIFF, L. **Geometry – Measuring, Reasoning and Applying**. Evanston: Mc Dougal Littell, 2004. 923p.

LARSON, R.; HOSTETLER, R. P.; EDWARDS, B. H. **Precalculus with limits – A Graphing Approach**. Boston: Houghton Mifflin, 2001. 858p.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 1**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. 233p. (Coleção do Professor de Matemática)

_____. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001, 193p. (Coleção do Professor de Matemática)

LINDQUIST, M. M. Prólogo. In: **Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding**. Portsmouth: Heinemann, 1997, p. vii-xvii.

LOPES, C. A. E. **O Conhecimento Profissional dos professores e suas relações com a Estatística e a Probabilidade na Educação Infantil**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action**. Reston: NCTM, 29p.

_____. **Curriculum and Evaluation Standards for Teaching Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. 257p.

_____. **Professional Standards for Teaching Mathematics**. Reston: NCTM, 1991.196p.

_____. **Assessment Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1995. 102p.

_____. **Principles and Standards for Mathematics Education**. Reston: NCTM, 2000. 402p.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD. **Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education**. Washington, D. C.: National Academy Press, 1989. 129p.

NISKIER, A. O caminho da excelência. **Folha de São Paulo**, São Paulo, 30 de abr. 2006. Caderno A, p. 3.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções** e **Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap. 12, p.199-218.

_____. Um problema gerador de novo conteúdo. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, n. 8, p. 27-30, 2003.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

ONUCHIC, L. R.; RODRIGUES, V.; HUAMAN, R. R. A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas como uma prioridade de pesquisa em Educação Matemática e como ela responde aos próximos desafios. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EBRAPEM, 8., 2004, Londrina. **Anais do VIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2004, v. único, p. 1-8.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. 179p.

_____. On Solving Mathematical Problems in High School. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Ed.) **Problem solving in school mathematics.** Reston: NCTM, 1980. p. 1-2 (Yearbook)

PIERRO NETTO, S. D.; ORSI FILHO, S. **Quanta - Matemática em fascículos para o Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2000.

RODRIGUES, V. **Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a Criatividade dos alunos na Prática Educativa Matemática**. 1992. 183f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) **–** Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1992.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.3, p. 49-64.

SCHIFTER, D.; FOSNOT, C. T. **Reconstructing Mathematics Education: Stories of Teachers Meeting the Challenge of Reform**. New York: Teachers College Press, 1993.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42 (Yearbook)

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1990, p. 1-22.

THOMPSON, A. G. Learning toTeach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1990, 232-243.

TROVON, A. L.; REIS, L. F. **Matemática Interativa**. São Paulo: Editora Casa Publicadora Brasileira, 2004. 269p.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001. 478p.