

Jadilene Rodrigues Xavier

Mapeando órbitas ao redor de satélites naturais

Guaratinguetá
2022

Jadilene Rodrigues Xavier

Mapeando órbitas ao redor de satélites naturais

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como requisito para a obtenção do Título de Doutora em Física, na Área de Astronomia Dinâmica

Orientadora: Prof. Dra. Silvia Giuliatti Winter

Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Bertachini de Almeida Prado

**Guaratinguetá
2022**

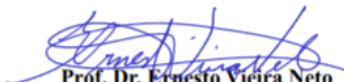
X3m	Xavier, Jadilene Rodrigues Mapeando órbitas ao redor de satélites naturais / Jadilene Rodrigues Xavier – Guaratinguetá, 2022. 170 f : il. Bibliografia: f. 14+-149 Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022. Orientadora: Profª. Drª. Silvia Giuliatti Winter Coorientador: Prof. Dr. Antônio Bertachini de Almeida Prado 1. Órbitas. 2. Satélites. 3. Métodos de simulação. I. Título. CDU 521.3(043)
-----	--

JADILENE RODRIGUES XAVIER

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTORADO EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Profa. Dra. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientador - UNESP

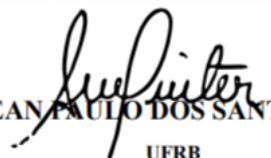
participou por videoconferência


Profa. Dra. ALESSANDRA FERRAZ DA SILVA FERREIRA
UNESP

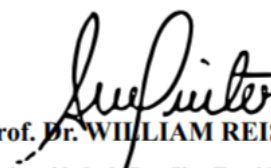
participou por videoconferência


Profa. Dra. PRYSCILLA MARIA PIRES DOS SANTOS
UNESP

participou por videoconferência


Prof. Dr. JEAN PAULO DOS SANTOS CARVALHO
UFRB

participou por videoconferência


Prof. Dr. WILLIAM REIS SILVA
Universidade de Brasília - Faculdade Gama

participou por videoconferência

Dados Curriculares

JADILENE RODRIGUES XAVIER

NASCIMENTO	24.07.1988 - JANUÁRIA / MG
FILIAÇÃO	Silvia Rodrigues Xavier
2008 - 2014	Licenciatura Plena em Física Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Norte de Minas Gerais
2016 - 2018	Mestrado em Física Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
2018 - 2022	Doutorado em Física Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Dedico este trabalho a minha família, que sempre acreditou que ele seria possível.

*Quando ela era apenas uma garota
Ela esperava conquistar o mundo
Mas isso voou para longe de seu alcance
E as balas se prenderam em seu dente
A vida continua, fica tão pesada
A roda corrompe a borboleta
Cada lágrima, uma cachoeira
Na noite, na noite de tempestade
Ela fecharia os olhos
Ela voaria para longe
E sonharia com o paraíso.*

(Coldplay - Paradise)

*Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.*

(Fernando Pessoa)

Agradecimentos

O que está diante dos seus olhos não é apenas uma tese de Doutorado, é a materialização de um dos sonhos mais lindos que já tive na vida. Nessas breves linhas, agradeço a todos que fizeram parte desse sonho e que tornaram essa jornada mais leve.

A Deus, por permanecer sempre ao meu lado nessa e em todas as fases da minha vida.

À minha mãe, Sílvia, por me permitir sonhar com um futuro melhor mesmo diante das adversidades. Por todo sacrifício que fez para que eu pudesse estudar e realizar meus sonhos. Por ter permanecido ao meu lado em todas as decisões tomadas e por me amar incondicionalmente.

Aos meus irmãos, Giane, Auri, Lico, Marcilene, Misael, Marlene e Cida. Obrigada por me apoiarem, serem presentes na minha criação e por serem minha principal inspiração. Obrigada por sonharem esse sonho comigo e por cuidarem tão bem de mim durante todo esse processo.

Ao meu noivo, André. Não caberia nessas poucas linhas tanta gratidão. Obrigada por toda ajuda com a programação (a pedra no meu caminho), com o Gnuplot, com as discussões sobre o meu trabalho e principalmente, obrigada pelo ombro amigo nos dias de desespero. Obrigada também por me mostrar sempre que desistir não é uma opção.

À minha orientadora, Sílvia Giuliatti Winter, por me conduzir durante todo esse processo de Mestrado e Doutorado. Obrigada por todo apoio, pela paciência e por acreditar no meu trabalho.

Ao meu co-orientador, Antônio Bertachini Prado, por aceitar fazer parte desse trabalho, pelas discussões e por toda troca de experiência.

À minha amiga, Rosana, por ter passado boa parte dessa caminhada ao meu lado e por sempre acreditar em mim.

Aos amigos que fiz durante toda essa jornada, Taís, Daniel e Bárbara. Obrigada por me ouvirem sempre e pela boa convivência.

Aos professores de graduação, Edinei e Joaquim. Obrigada por serem os primeiros a me mostrarem que eu poderia ir muito mais longe do que eu mesma imaginava. Para sempre, "o céu é o limite"!

A todos que torceram, oraram e acreditaram que esse dia chegaria. Obrigada!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES) - código de financiamento 001.

Resumo

As órbitas polares, circulares e de baixa altitude são de grande interesse para a exploração de satélites naturais, a razão é o fato de que, de uma órbita quase polar e circular, toda a superfície do satélite pode ser observada enquanto o satélite gira. Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre órbitas de baixa altitude ao redor de satélites naturais. O primeiro sistema estudado é o sistema sonda-Urano-Titânia. O satélite como corpo central, uma sonda em sua órbita, e Urano, como corpo perturbador. Através de uma expansão do potencial gravitacional até segunda ordem, considera-se a assimetria do campo gravitacional devido ao coeficiente C_{22} de Titânia, o coeficiente zonal J_2 e a perturbação gravitacional de Urano e de seus coeficientes gravitacionais J_2 e J_4 . Construímos um conjunto de mapas de tempo de vida para cinco valores diferentes da excentricidade da órbita em torno de Titânia. Analisamos também, a influência causada por pequenas porcentagens de erros nos valores dos coeficientes de gravidade. Propomos ainda algumas manobras orbitais com o intuito de evitar uma colisão da sonda com a superfície de Titânia. A fim de estender nossos resultados para outros sistemas, investigamos tempo de duração orbital para várias relações de massa e distância do terceiro corpo em função dos coeficientes J_2 e C_{22} . Nossos resultados mostram que órbitas quase circulares de baixa altitude têm vida útil mais longa. Mostramos ainda que, para órbitas próximas a Titânia, os termos J_2 e C_{22} de Titânia afetam muito mais a vida da sonda, em comparação ao efeito devido à atração gravitacional de Urano. Concluimos também que os valores de ω e Ω são essenciais para aumentar o tempo de vida das órbitas. Além disso, nossos resultados apontam que a realização de manobras orbitais para determinadas altitudes podem aumentar em quase 100% a duração da órbita. Por fim, observamos que a relação de massa e distância do perturbador pode produzir órbitas com tempo de vida diferentes.

Palavras-chave: simulações numéricas, missões espaciais, satélites de Urano.

Abstract

Polar, circular, and low-altitude orbits are of great interest for the exploration of natural satellites, the reason being the fact that from a nearly polar and circular orbit, the entire surface of the satellite can be observed as the satellite rotates. In this work, we present a study on low-altitude orbits around natural satellites. The first system studied is the probe-Uranus-Titania system. The satellite is the central body, a probe in its orbit, and Uranus is the perturber body. Through an expansion of the gravitational potential to second order, the asymmetry of the gravitational field is considered due to Titania's coefficient C_{22} and the zonal coefficient J_2 . In addition to the gravitational perturbation of Uranus and its gravitational coefficients J_2 and J_4 . We constructed a set of lifetime maps for five different values of the eccentricity of the orbit around Titania. We also analyzed the influence caused by uncertainties in the values of the gravity coefficients. We also propose some orbital maneuvers in order to avoid a collision between the probe and the surface of Titania. In order to extend our results to other systems, we investigated orbital duration time for various third-body mass and distance as a function of the coefficients J_2 and C_{22} . Our results show that low-altitude near-circular orbits have a longer lifetime. We also show that the Titania terms J_2 and C_{22} affect considerably the life of the probe, compared to the effect due to the gravitational coefficients of Uranus. We also conclude that the values of ω and Ω are essential to increase the lifetime of the orbits. In addition, our results indicate that performing orbital maneuvers at certain altitudes can increase the orbit duration by almost 100%. Finally, we observe that the mass and distance of the perturber can produce orbits with different lifetimes.

Keywords: numerical simulations, space missions, satellites of Uranus.

Lista de Figuras

1.1	Imagem de Titânia capturada pela Voyager 2.	24
2.1	Distância entre dois pontos P e P' em coordenadas esféricas.	32
2.2	Representação do sistema analisado.	34
2.3	Diagrama $a \times I$ para $e = 0$. a) Considerando somente os efeitos de Urano. b) Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. c) Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2, C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	39
2.4	Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-04}$. a) Considerando somente os efeitos de Urano. b) Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. c) Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2, C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	41
2.5	Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-03}$. a) Considerando somente os efeitos de Urano. b) Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. c) Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2, C_{22} de Titânia). $a = 810 - 2500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	42
2.6	Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-02}$. a) Considerando somente os efeitos de Urano. b) Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. $a = 810 - 2500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ and $\Omega = 0^\circ$	43

- 2.7 Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-01}$. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. $a = 810 - 2500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ and $\Omega = 0^\circ$ 44
- 2.8 Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-04}$. **a)** $a = 900$ km, $I = 70^\circ$. **b)** $a = 900$ km, $I = 80^\circ$. **c)** $I = 80^\circ$, $a = 1058$ km **d)** $I = 80^\circ$, $a = 1018$ km. $\omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$ 45
- 2.9 Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-04}$ incluindo valores de ω e Ω diferentes de zero. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2, C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 155^\circ$ e $\Omega = 55^\circ$ 47
- 2.10 Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-03}$. **a)** $a = 1265$ km, $I = 70^\circ$ **b)** $a = 1265$ km, $I = 80^\circ$. **c)** $I = 80^\circ$, $a = 834$ km **d)** $I = 80^\circ$, $a = 1000$ km, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$ 48
- 2.11 Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-3}$ incluindo valores de ω e Ω diferentes de zero. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2, C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 165^\circ$ e $\Omega = 205^\circ$ 50
- 2.12 Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-02}$. **a)** $a = 1000$ km, $I = 70^\circ$ **b)** $a = 1000$ km, $I = 80^\circ$ **c)** $I = 80^\circ$, $a = 1162$ km. **d)** $I = 80^\circ$, $a = 914$ km, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$ 51
- 2.13 Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-02}$ com ω e Ω . **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2, C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2, C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 145^\circ$ e $\Omega = 95^\circ$ 52

Lista de Figuras

- 2.14 Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-01}$. **a)** $a = 1200$ km, $I = 70^\circ$ **b)** $a = 1200$ km, $I = 80^\circ$ **c)** $I = 80^\circ$, $a = 900$ km **d)** $I = 80^\circ$, $a = 1000$ km, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$ 54
- 2.15 Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-01}$ com ω e Ω . **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 150^\circ$ e $\Omega = 115^\circ$ 55
- 2.16 $e \times t$ e $I \times t$ para diferentes perturbações. Considerando somente a perturbação de Urano, somente J_2 de Titânia, somente C_{22} de Titânia, Urano + J_2 de Titânia, Urano + C_{22} de Titânia e Urano + J_2 + C_{22} de Titânia. $a_i = 900$ km, $e_i = 10^{-03}$, $I_i = 80^\circ$, $\omega_i = \Omega = 0^\circ$ 57
- 2.17 $\omega \times t$ para diferentes perturbações. Considerando somente a perturbação de Urano, somente J_2 de Titânia, somente C_{22} de Titânia, Urano + J_2 de Titânia, Urano + C_{22} de Titânia e Urano + J_2 + C_{22} de Titânia. $a_i = 900$ km, $e_i = 10^{-03}$, $I_i = 80^\circ$, $\omega_i = \Omega = 0^\circ$ 59
- 2.18 Evolução dos elementos orbitais para $\omega = 100^\circ$ e $\omega = 145^\circ$. **a)** $a \times t$, **b)** $e \times t$. **c)** $I \times t$, **d)** $\omega \times t$. **e)** $\Omega \times t$. $a_i = 1162$ km, $e_i = 10^{-02}$, $I_i = 75^\circ$, $\Omega_i = 95^\circ$, Urano + J_2 + C_{22} de Titânia. 61
- 2.19 Trajetória simulada numericamente durante 991 dias, considerando o sistema completo, os efeitos gravitacionais do terceiro corpo (Urano) e os coeficientes gravitacionais de Titânia (J_2 e C_{22}). **(a)** Projeção da órbita em três dimensões (xyz). **(b)** Projeção da órbita no plano (xy). **(c)** Projeção da órbita no plano (yz). As condições iniciais são: $a = 898$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 81.4^\circ$, $= 140^\circ$, e $\Omega = 225^\circ$ 62
- 2.20 Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 0.0$ com $C_{22} = 1\%C_{22}$ **a)** Considerando $J_2 = -5\%J_2$. **b)** Considerando $J_2 = 10\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$ 64

2.21	Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 0.0$. a) $C_{22} = -5\%C_{22}$ e $J_2 = -10\%J_2$. b) $C_{22} = -5\%C_{22}$ e $J_2 = 5\%J_2$. c) $C_{22} = +5\%C_{22}$ e $J_2 = -1\%J_2$. d) $C_{22} = +5\%C_{22}$ e $J_2 = 5\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	65
2.22	Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 0.0$ com $C_{22} = +10\%C_{22}$. a) $J_2 = -10\%J_2$. b) $J_2 = +10\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	66
2.23	Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 10^{-03}$. a) $C_{22} = -1\%C_{22}$ e $J_2 = -5\%J_2$. b) $C_{22} = +1\%C_{22}$ e $J_2 = -5\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	68
2.24	Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 10^{-03}$ com $C_{22} = 10\%C_{22}$. a) $J_2 = -5\%J_2$. b) $J_2 = +5\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	69
2.25	Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 1, $R^2 = 0,84$	72
2.26	Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 2, $R^2 = 0,87$	73
2.27	Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 3, $R^2 = 0,89$	73
2.28	Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 4, $R^2 = 0,92$	74
3.1	Transferência de Hohmann. Manobra orbital entre duas órbitas circulares.	81
3.2	Transferência de uma órbita elíptica para uma órbita circular.	84
3.3	Transferências orbitais de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de raios 1000 e 1200 km, respectivamente.	87

Lista de Figuras

3.4	Transferências orbitais de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de raios 1400 e 1600 km, respectivamente.	88
3.5	Transferências orbitais de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de raios 1800 e 2000 km, respectivamente.	89
3.6	ΔV em função do raio da órbita circular final e da defasagem máxima da inclinação (esquerda). ΔV em função do raio da órbita circular final e da defasagem máxima do semieixo maior (direita). Analisando três valores iniciais de inclinação 70° , 80° e 90° , $a_i = 1000 - 2000$ km, $e_i = 0$ e $\omega = \Omega = 0^\circ$	91
3.7	ΔV mínimo em função do raio circular da órbita final pretendida. Analisando três valores iniciais de inclinação 70° , 80° e 90° em cores vermelho, verde e preto, respectivamente. $a_i = 1000 - 2000$ km, $e_i = 0$ e $\omega = \Omega = 0^\circ$. Raio das órbitas finais pretendidas 1000 – 2000 km.	94
3.8	Manobra entre duas órbitas elípticas.	96
3.9	Representação das órbitas elípticas finais pretendidas. Laranja para órbita final com excentricidade igual a 10^{-01} , verde para e igual a 10^{-02} , rosa para e igual a 10^{-03} e azul para e igual a 10^{-04}	98
3.10	Projeção das posições orbitais para as seis manobras realizadas m_P , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e m_5 para $e = 10^{-04}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do raio do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-4}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	99

- 3.11 Projeção das posições orbitais para as seis manobras realizadas m_P, m_1, m_2, m_3, m_4 e m_5 para $e = 10^{-03}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do raio do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. Tempo de simulação igual a 313 dias. 103
- 3.12 Projeção das posições orbitais para as seis manobras realizadas m_P, m_1, m_2, m_3, m_e e m_5 para $e = 10^{-02}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-2}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. Tempo de simulação igual a 153.2 dias. . 105
- 3.13 Projeção das posições orbitais para quatro manobras realizadas m_P, m_1, m_2 e m_3 para $e = 10^{-01}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do raio do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-1}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. Tempo de simulação igual a 52 dias. . . 108
- 3.14 Análise da economia de combustível de uma manobra orbital através da relação $\Delta V/t$ versus tempo de vida. Valor mínimo de $\Delta V/t$ para todos os casos analisados. **a)** Caso estudado para $e = 10^{-04}$. **b)** Caso estudado para $e = 10^{-03}$. **c)** Caso estudado para $e = 10^{-02}$. **d)** Caso estudado para $e = 10^{-01}$. Condições iniciais: $a = 1000$ km, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. 112
- 4.1 Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e de massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 870$ km, $e = 0.0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$ 120

Lista de Figuras

4.2	Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e da massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	123
4.3	Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e de massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 3870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	126
4.4	Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e de massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 0$, $I = 80^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	128
4.5	Tempo de vida com variação dos coeficientes gravitacionais J_2 e C_{22} . $D_P = 435000$ km, $M_P = 1M_U$. Condições iniciais da sonda: $a = 870$ km, $e = 0.0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	129
4.6	Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 10^{-03}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	131
4.7	Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 10^{-01}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$	132
4.8	Evolução temporal dos elementos orbitas de uma órbita ao redor de Umbriel. Condições iniciais da sonda: $a = 870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	138
4.9	Imagem ilustrativa de órbitas circulares ao redor dos cinco satélites clássicos de Urano. As cores representam o tempo de vida dessas órbitas para uma das condições iniciais investigadas. Parâmetros iniciais das órbitas: $a = 870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$	139

Lista de Tabelas

2.1	Coeficientes Gravitacionais de Urano e Titânia	36
2.2	Parâmetros do sistema Urano-Titânia usados nas simulações numéricas.	36
2.3	Melhor tempo de vida para cada sistema analisado	56
2.4	Melhores condições iniciais e variação do tempo de vida para uma mesma órbita com e sem acréscimo nos coeficientes gravitacionais. Para os casos $e = 0$	75
2.5	Melhores condições iniciais e variação do tempo de vida para uma mesma órbita com e sem acréscimo nos coeficientes gravitacionais. Para os casos $e = 10^{-3}$	76
3.1	Dados das órbitas circulares finais. Para todos os casos analisadas, $I_i = 80^\circ$.	86
3.2	Relação de incremento da velocidade por tempo de vida $\Delta V/t$ utilizado em cada transferência. Raios das órbitas circulares finais pretendidas 1000 km, 1200 km, 1400 km, 1600 km, 1800 km e 2000 km.	90
3.3	Valores de ΔV para manobras com valores significativos de defasagem na inclinação e no semieixo maior. Condições iniciais usadas nas manobras como inclinação inicial, tempo de duração orbital, raio do apocentro (r_{apo}), raio da órbita circular final (r_{circ}), defasagem do semieixo maior (Def_a) e da inclinação (Def_I) em porcentagem, e o ΔV equivalente. . . .	93

Lista de Tabelas

3.4	Valores de ΔV e condições iniciais usadas na realização das manobras m_P , m_1 , m_2 e m_3 para os quatro valores de excentricidade estudados, $e = 10^{-04}$, $e = 10^{-03}$, $e = 10^{-02}$ e $e = 10^{-01}$. $\mathbf{T}_{\text{manobra}}$ é o tempo que a manobra foi realizada e $\mathbf{T}_{\text{colisão}}$ é o tempo de colisão.	110
4.1	Valores usados nas simulações para massa (M_P), distância do perturbador (D_P), valores hipotéticos de J_2 e C_{22} . Condições iniciais da sonda para cada caso analisado	119
4.2	Parâmetros dos outros satélites clássicos de Urano	135
4.3	Parâmetros do sistema Urano-Umbriel	137

Sumário

1	Introdução	23
2	Procurando melhores órbitas ao redor de Titânia	31
2.1	Modelo Matemático	34
2.1.1	Metodologia	37
2.2	Análise dos Resultados	38
2.2.1	Análise dos ângulos ω e Ω	45
2.2.2	Órbitas de longa duração	57
2.3	Analisando os coeficientes gravitacionais de Titânia	63
2.3.1	Caso circular ($e = 0$)	63
2.3.2	Caso elíptico ($e = 10^{-03}$)	67
2.3.3	Encontrando uma equação para o tempo de vida	70
2.4	Conclusões	76
3	Manobras Orbitais	79
3.1	A transferência de Hohmann	80
3.2	A primeira manobra analisada	83
3.3	Transferência entre duas órbitas elípticas	95
3.4	Conclusões	113
4	Órbitas de sondas espaciais ao redor de satélites planetários	117
4.1	Analisando a influência da distância e massa do perturbador	119

Sumário

4.1.1	Analisando órbitas excêntricas	130
4.2	Estudo generalizado para outros satélites de Urano	134
4.2.1	Aplicando o estudo ao satélite Umbriel	136
4.3	Conclusões	139
5	Discussão Geral	143
	Referências	146
	Apêndice A - Artigo publicado	150

Capítulo 1

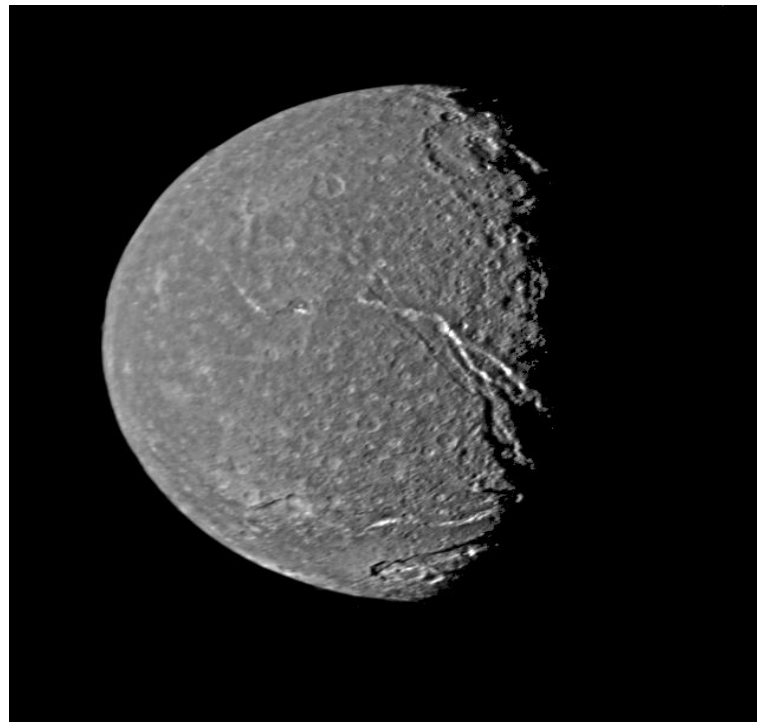
Introdução

Urano e seus satélites são um dos sistemas menos explorados em nosso sistema solar. A única missão enviada para visitar Urano ocorreu em 1986 com a Voyager 2. Uma missão para explorar o sistema de Urano seria extremamente importante para entender a formação e evolução do sistema solar.

As principais informações sobre o sistema de Urano vêm de observações feitas da Terra e dados enviados por telescópios espaciais, mas algumas questões importantes ainda permanecem sem resposta. As distâncias dos planetas gigantes de gelo ainda são um enigma, pois alguns modelos sugerem que eles deveriam estar mais próximos do Sol. Sua alta obliquidade e baixa luminosidade são intrigantes. Além de todas essas questões, informações sobre os satélites de Urano também seriam de grande importância, pois possuem superfícies irregulares e há evidências de formação oceânica [Jarmak et al. \(2020\)](#); [Cartwright et al. \(2021\)](#). De acordo com [Hofstadter et al. \(2019\)](#), a NASA (Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço) está trabalhando em parceria com a ESA (Agência Espacial Europeia) para planejar possíveis missões aos gigantes de gelo durante o período de 2024 a 2037. Essas possíveis missões podem ajudar a entender a origem e evolução desse sistema.

Titânia, como mostrada na Figura 1.1, o maior satélite natural de Urano, tem uma

Figura 1.1: Imagem de Titânia capturada pela Voyager 2.



Fonte: <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia00039-titania-highest-resolution-voyager-picture>.

Acessado em 12 de abril de 2022.

superfície com falhas que podem indicar atividade sísmica passada ou ainda ativa. Além disso, há indícios de que sua superfície possui uma mistura de água e gelo com dióxido de carbono (Cartwright et al., 2015, 2018; Fletcher et al., 2020).

Um orbitador em torno de Titânia poderia investigar, por exemplo, se este satélite é ou já foi um mundo oceânico, ou até mesmo determinar atividade geológica endógena recente (Cartwright et al., 2021).

A melhor maneira de estudar este satélite natural é enviar uma sonda ao seu redor. Portanto, é necessário procurar as melhores órbitas ao redor de Titânia. Na literatura, ainda não temos referências ao estudo de órbitas ao redor de Titânia que incluam perturbações devido à sua não esfericidade. Utilizando mapas que mostram a duração orbital, apresentamos neste trabalho um estudo para encontrar as melhores condições

para obter maiores tempos de vida de uma sonda ao redor de Titânia. Aqui, Titânia está no centro do sistema e é perturbada por Urano. Devido à assimetria causada pela elipticidade de Titânia, analisa-se o coeficiente C_{22} , bem como J_2 , que gera uma simetria vertical no campo gravitacional ao redor do satélite.

O mapeamento do tempo de vida é uma técnica usada para encontrar as melhores condições iniciais para órbitas em função de sua duração. O mapa fornece os melhores valores dos elementos orbitais para os quais as órbitas duram mais. Com isso, é possível extrair valores significativos do semieixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (I), argumento do pericentro (ω), longitude do nodo ascendente (Ω), e anomalia média (M) para analisar a trajetória de um veículo espacial.

Esta técnica é utilizada no trabalho de [Gomes e Domingos \(2016\)](#) para estudar um sistema hipotético, com massas e distâncias semelhantes ao sistema Terra-Lua. Neste trabalho, os autores buscaram a longevidade de uma sonda em torno de um satélite natural com alta excentricidade. O estudo foi feito através de uma expansão de segunda ordem do potencial do planeta perturbador, assumindo que ele está em uma órbita elíptica. Os resultados indicaram que a alta variação da excentricidade e inclinação reduzem significativamente a vida útil do orbitador. Os autores também mostraram que essa alta variação de excentricidade é responsável por uma diminuição de 7-8% na vida útil da sonda.

Esses mapas foram usados em [Cardoso et al. \(2017\)](#) para analisar as melhores órbitas para uma sonda em torno de Calisto. Neste estudo, os autores usaram o método da média dupla para investigar a importância dos valores hipotéticos de excentricidade para o perturbador, Júpiter. A não esfericidade de Calisto foi considerada e foi apresentada uma análise do efeito de seus coeficientes de gravidade. Mapas de tempo de vida foram usados para encontrar as melhores condições iniciais para órbitas de longa duração. Além disso, os autores destacaram a importância da adoção de valores específicos para ω e Ω a fim de aumentar a vida útil da sonda. Os resultados obtidos por eles mostraram

que para este sistema, as contribuições devidas aos coeficientes gravitacionais de Callisto J_2 e C_{22} são pequenas.

O método de média dupla também foi usado para estudar outro satélite galileano em [Carvalho et al.\(2012a\)](#). A dinâmica de órbitas ao redor de Europa foi analisada considerando a perturbação de Júpiter em uma órbita elíptica e os coeficientes gravitacionais J_2 , J_3 e C_{22} de Europa. O estudo usou dois processos para encontrar órbitas de longa duração: o método de média dupla e média simples. Os autores concluíram que mesmo não eliminando o coeficiente C_{22} , o processo de média simples foi mais realista e pode ser usado para encontrar órbitas que atingem até 80 dias de vida. Órbitas com aproximadamente 200 dias de duração também foram encontradas usando este método, porém, a excentricidade aumenta ligeiramente neste caso. As órbitas ao redor de Europa foram estudadas novamente em [Carvalho et al.\(2012b\)](#). Neste trabalho, os autores encontraram um conjunto de órbitas congeladas de longa duração com condições iniciais dadas por $a = 1850$ km, $e = 0,09$, $I = 40^\circ$, $\omega = 270^\circ$ e $\Omega = 90^\circ$.

Órbitas congeladas são de grande interesse para projetar futuras missões espaciais. Essas órbitas caracterizam-se por manter constante a variação de excentricidade, inclinação e argumento do pericentro. Para que essas órbitas sejam encontradas, o argumento de pericentro deve ser fixado em 90° ou 270° e os elementos orbitais de curto período, eliminados. Esses elementos são responsáveis por causar grandes variações na excentricidade e inclinação devido à dependência do termo C_{22} .

Em [Nie e Gurfil \(2018\)](#), órbitas congeladas ao redor da Lua foram investigadas considerando a perturbação da Terra e os efeitos dos coeficientes J_2 e C_{22} . Os autores realizaram uma transformação de forma fechada entre elementos osculadores e elementos médios para encontrar elementos osculantes iniciais para órbitas congeladas. Esta transformação foi feita apenas para órbitas circulares. Os resultados mostraram que foi necessário transformar os elementos médios em elementos osculadores para adicionar o coeficiente C_{22} , pois este termo causa grandes variações nas órbitas de grande altitude

e pode alterar totalmente o comportamento das órbitas.

Órbitas que mantêm sua excentricidade, inclinação e argumento de pericentro constantes durante um período se assemelham às órbitas congeladas. Em [Lara e Russell \(2006\)](#) foram encontradas três famílias de órbitas lunares periódicas. Os resultados mostraram que essas órbitas são muito sensíveis às condições iniciais e que essas condições apresentam pequenas diferenças em relação às órbitas congeladas. Famílias de órbitas congeladas ao redor da Lua também foram encontradas no trabalho de [Abd El-Salam e Abd El-Bar \(2016\)](#). Os autores eliminaram os termos de curto período e consideraram o achatamento da Lua na ordem 4 (J_4). Para órbitas excêntricas congeladas, todas as famílias tiveram uma inclinação crítica em torno de 64° . No caso de órbitas lunares quase circulares muito baixas, várias famílias com diferentes inclinações críticas foram obtidas, embora tenham desaparecido rapidamente devido a pequenas mudanças no semieixo maior e na excentricidade.

Apesar de causar grandes variações em alguns elementos orbitais, como inclinação, excentricidade e argumento de pericentro, o termo C_{22} tem um papel importante na dinâmica das órbitas em torno de satélites naturais. A combinação deste termo com o termo zonal J_2 é capaz de atenuar os efeitos causados pela perturbação devido ao terceiro corpo. Essa junção dos coeficientes gravitacionais atua como um “mecanismo de proteção” para prolongar/aumentar o tempo de vida da órbita desejada ([Carvalho et al., 2018](#); [De Saedeleer e Henrard, 2006](#)). Em [Tzirti et al. \(2009\)](#) a combinação deste coeficiente com o termo J_2 também foi investigada em órbitas ao redor da Lua. Os resultados mostraram que os valores de J_2 e C_{22} afetaram fortemente a inclinação quase crítica e a amplitude de libração do argumento do pericentro. Este trabalho também mostrou que esses efeitos foram maiores quando somados à contribuição da taxa de rotação.

Em vários trabalhos encontrados na literatura, a perturbação devida ao terceiro corpo foi considerada quando se trata de órbitas em torno de satélites naturais. Os

efeitos desta perturbação foram observados principalmente na excentricidade da órbita ao redor do satélite observado. Esses altos valores de excentricidade alcançados pela órbita da sonda estão relacionados ao efeito do mecanismo Kozai-Lidov. Este mecanismo foi estudado pela primeira vez em [Kozai \(1962\)](#); [Lidov \(1962\)](#). Esse fenômeno faz com que o argumento do pericentro libere em torno de um valor constante. Enquanto o argumento do pericentro libere em torno de um valor específico, a excentricidade e a inclinação sofrem oscilações periódicas (por exemplo, ver [Naoz \(2016\)](#); [Naoz et al. \(2017\)](#) e as referências neles contidas). Esse comportamento é comum principalmente nas órbitas congeladas, uma vez que o termo C_{22} é eliminado para que tais órbitas sejam encontradas. Sem a eliminação do C_{22} a excentricidade aumenta rapidamente e a inclinação experimenta grandes variações. Em alguns casos, essas altas variações causam a colisão da sonda com a superfície do corpo em um curto período de tempo.

Durante a realização de uma missão espacial o tempo de duração orbital deve ser priorizado para que a sonda permaneça pelo maior tempo possível em órbita. Uma maneira de evitar a colisão da sonda com a lua investigada é realizar manobras orbitais capazes de voltar a sonda para sua posição de origem. Porém, é importante analisar a viabilidade dessas manobras em termos de gasto de combustível e tempo de realização dessas manobras. Essas manobras são propostas no trabalho de [Ferreira et al. \(2022\)](#). Após uma análise sobre órbitas de longo período em torno do satélite natural de Saturno, Titã, os autores também apresentam os melhores resultados para que tais manobras possam ser realizadas. A transferência orbital é realizada através de uma manobra bi-impulsiva levando a sonda de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular, ambas coplanares. Os autores encontram os melhores valores de ΔV (incremento na velocidade da sonda) e mostram que as melhores manobras são aquelas realizadas poucos dias antes da colisão. Nestes casos, as manobras são mais econômicas.

A estrutura deste trabalho está dividida da seguinte forma: no Capítulo 2, investigamos as melhores condições para encontrar órbitas de longo período ao redor de Titânia.

Estudamos também a sensibilidade no tempo de vida da sonda devido a possíveis erros nos coeficientes gravitacionais de Titânia. No Capítulo 3, apresentamos algumas manobras orbitais para órbitas muito próximas da superfície de Titânia, o intuito é evitar a colisão e fazer com que o tempo de vida seja prolongado. No Capítulo 4, analisamos diferentes variações de massa e distância do corpo perturbador e seus efeitos sobre a órbita de uma sonda sujeita a diferentes valores de J_2 e C_{22} . Por fim, no Capítulo 5, fazemos uma discussão geral do trabalho.

Capítulo 2

Procurando melhores órbitas ao redor de Titânia

Quando se trata de órbitas ao redor de qualquer corpo, a não esfericidade deles provoca variações ao longo do tempo nos elementos orbitais dos objetos que vão orbitá-los. Por este motivo, é necessário considerar uma modelagem matemática que abranja essa não esfericidade através dos coeficientes gravitacionais. Os coeficientes considerados devem ser os de mais alta ordem, já que esses produzem maiores perturbações nas órbitas analisadas ao redor de corpos achatados/elipsoidais.

A lei da gravitação universal postulada por Newton (1687) diz que se dois corpos de massas diferentes m e M estão separados por uma distância r , esses corpos irão se atrair com uma força chamada de força de atração gravitacional, dada por:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

Sendo m a massa de um corpo pontual que é atraído por um corpo de massa maior M . $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{Kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ é a constante de gravitação universal e $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário que aponta na direção da força. Essa força pode ser escrita em termos do

gradiente do potencial, da forma:

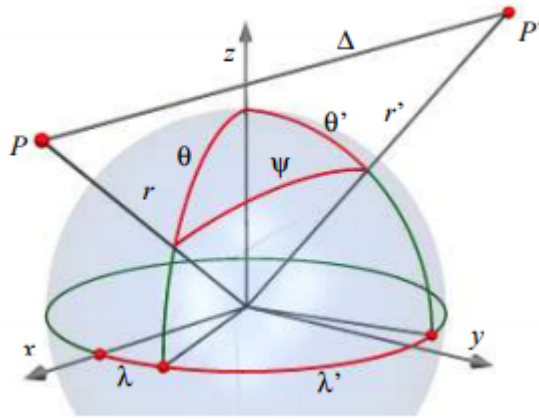
$$\mathbf{F}(r) = m \frac{\partial V}{\partial r} = m \nabla V \quad (2.2)$$

onde $V = \frac{GM}{r}$. Para o caso de uma partícula que é atraída por corpo com distribuição de massa não uniforme, cada elemento de massa (dM) irá exercer uma força de atração sob essa partícula. Portanto o potencial para um corpo atraído por um outro corpo com distribuição de massa não homogênea pode ser escrito da seguinte maneira:

$$V = G \frac{dM}{r} \quad (2.3)$$

A Figura 2.1 mostra o caso de dois corpos separados por uma distância Δ e representados pelos pontos P e P' e com coordenadas esféricas (r, θ, λ) e (r', θ', λ') , respectivamente.

Figura 2.1: Distância entre dois pontos P e P' em coordenadas esféricas.



Fonte: [Kuga et al. \(2011\)](#)
Acessado em 05 de maio de 2022.

onde $\cos \Psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda)$.

Usando a lei dos cossenos podemos definir Δ com a seguinte relação, onde $r' < r$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\Psi + \frac{r'^2}{r^2}}} \quad (2.4)$$

Fazendo uma expansão em série de potências da equação 2.4, os termos que acompanham r^n são os chamados polinômios de Legendre $P_n(x)$. Dessa forma, a equação 2.4 pode ser escrita da forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\Psi) \quad (2.5)$$

Substituindo a equação 2.5 na expressão 2.3, usando o teorema da adição de Legendre e fazendo algumas simplificações, encontramos a equação final do potencial gravitacional escrita de acordo com [Kaula \(1966\)](#):

$$V(r, \phi, \lambda) = G \frac{M_L}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin\phi) \cdot [(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda)] \quad (2.6)$$

onde C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos, M_L a massa da Lua, R_E o raio equatorial da Lua, r a distância entre o corpo central e a sonda, ϕ a latitude geocêntrica, λ a longitude geocêntrica e P_n^m são os polinômios associados de Legendre. Expandindo a expressão do potencial até a segunda ordem:

$$\begin{aligned} V_3(r, \phi, \lambda) = & \frac{GM_L}{r} + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \left[\frac{1}{2}(3\sin^2\phi - 1)C_2 \right] \\ & + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 [3\cos^2\phi(C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\sin 2\lambda)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Segundo [Rao \(1986\)](#), se a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa do corpo central os coeficientes $C_{10} = C_{11} = S_{11} = S_{00} = 0$, por esse motivo tais coeficientes não aparecem na expansão acima.

O coeficiente zonal C_{20} representa o achatamento nos polos da lua e é atribuído a ele

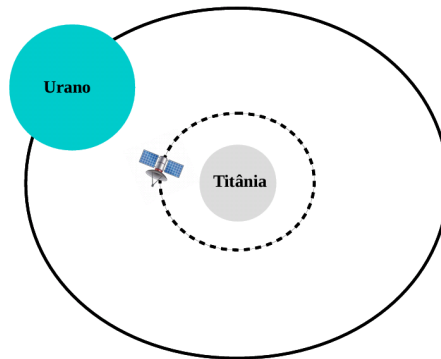
um valor positivo [Kuga et al. \(2011\)](#), dessa forma convencionou-se que o valor numérico deste achatamento é negativo no equador, ou seja, $C_{20} = -J_2$. Neste trabalho estamos interessados no potencial em função dos coeficientes J_2 e C_{22} de um satélite natural orbitado por uma sonda. Vamos considerar as conversões de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas e então podemos escrever o potencial em função de (x, y, z) da seguinte maneira:

$$V_3(x, y, z) = \frac{GM_L}{r} + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left[J_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2} \right) \right] + \frac{GM_L}{r} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left[3C_{22} \frac{(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \quad (2.8)$$

2.1 Modelo Matemático

O sistema abordado neste trabalho consiste em um corpo central (Titânia), uma sonda espacial e um perturbador (Urano), uma representação do sistema estudado é mostrado na Figura 2.2. Nesta figura apresentamos uma órbita elíptica ao redor de Titânia, no entanto, mostraremos também resultados para uma órbita circular. Assumimos que o corpo perturbador está em uma órbita Kepleriana ao redor de Titânia com os parâmetros dados na Tabela 2.2.

Figura 2.2: Representação do sistema analisado.



Fonte: Próprio autor.

Para fazer uma investigação precisa do problema, consideramos os principais coeficientes de gravidade (J_2 e C_{22}) de Titânia, que são os mais importantes no que diz respeito à obliquidade e elipticidade do corpo. Eles são os termos mais importantes do campo gravitacional de Titânia, após o termo kepleriano. Uma análise considerando os coeficientes zonais J_2 e J_4 de Urano também é feita. A partir de algumas simplificações da equação 2.8 temos as equações do movimento de acordo com [Paskowitz e Scheeres \(2006\)](#):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_T + m)\mathbf{r}}{r^3} + GM_U \left(\frac{\mathbf{r}_U - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_U - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_U}{r_U^3} \right) + \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_U \quad (2.9)$$

$$P_{Tx} = -\frac{G(M_T + m)J_2x}{2r^5} \left[3 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] + \frac{3G(M_T + m)C_{22}x}{r^5} \left[2 - \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \quad (2.10)$$

$$P_{Ty} = -\frac{G(M_T + m)J_2y}{2r^5} \left[3 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] - \frac{3G(M_T + m)C_{22}y}{r^5} \left[2 + \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \quad (2.11)$$

$$P_{Tz} = -\frac{G(M_T + m)J_2z}{2r^5} \left[9 - 15 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] - \frac{15G(M_T + m)C_{22}z}{r^7} (x^2 - y^2) \quad (2.12)$$

$$P_{Ux} = \frac{GM_U(x_U - x)}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} \left[\frac{J_2}{(r_U - r)^2} \left(\frac{15}{2} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{J_4}{(r_U - r)^4} \left(\frac{315}{8} \frac{(z_U - z)^4}{(r_U - r)^4} - \frac{105}{4} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$P_{Uy} = \frac{GM_U(y_U - y)}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} \left[\frac{J_2}{(r_U - r)^2} \left(\frac{15}{2} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{J_4}{(r_U - r)^4} \left(\frac{315}{8} \frac{(z_U - z)^4}{(r_U - r)^4} - \frac{105}{4} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$P_{Uz} = \frac{GM_U(z_U - z)}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} \left[\frac{J_2}{(r_U - r)^2} \left(\frac{15}{2} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} - \frac{9}{2} \right) + \frac{J_4}{(r_U - r)^4} \left(\frac{315}{8} \frac{(z_U - z)^4}{(r_U - r)^4} - \frac{175}{4} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} + \frac{75}{8} \right) \right] \quad (2.15)$$

onde $\vec{P}_T$ e $\vec{P}_U$ são as expansões do potencial gravitacional até segunda ordem para Titânia e até quarta ordem para Urano, respectivamente; P_{Tx} , P_{Ty} e P_{Tz} são componentes do vetor P_T e P_{Ux} , P_{Uy} e P_{Uz} são componentes do vetor P_U . m é a massa da sonda espacial, M_T a massa de Titânia e M_U a massa de Urano. $\vec{r}$ e $\vec{r}_U$ são o raio vetor da sonda e Urano, respectivamente.

Titânia tem uma massa de $35,27 \times 10^{20}$ kg e um raio igual a 788,9 km (<https://ssd.jpl.nasa.gov/>). Os valores dos coeficientes gravitacionais e outros parâmetros de Titânia são mostrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Coeficientes Gravitacionais de Urano e Titânia

Corpo	J_2	J_4	C_{22}
Urano ^a	$3,34343 \times 10^{-3}$	$-2,885 \times 10^{-5}$	-
Titânia ^b	$1,13 \times 10^{-4}$	-	$3,38 \times 10^{-5}$

^a French e Showalter (2012).

^b Chen et al. (2014).

Tabela 2.2: Parâmetros do sistema Urano-Titânia usados nas simulações numéricas.

Parâmetro	Valor
Semieixo maior (km)	$435,8 \times 10^3$
Excentricidade	$1,18 \times 10^{-3}$
Inclinação (°)	10^{-01}
Argumento do pericentro (°)	$1,64 \times 10^2$
Longitude do nodo ascendente (°)	$1,67 \times 10^2$
Anomalia média (°)	$2,05 \times 10^2$
Raio (km)	$25,362 \times 10^3$
Massa (kg)	$8,68 \times 10^{25}$

Fonte: JPL.Website: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>.

Acessado em 21 de fevereiro de 2020.

2.1.1 Metodologia

Para a órbita da sonda foi escolhido um intervalo de semieixo maior definido entre 810 – 2500 km e um intervalo de inclinação variando de $75^\circ - 90^\circ$. Mapas vitalícios para diferentes valores de excentricidade: $e = 0$, $e = 10^{-01}$, 10^{-02} , 10^{-03} e $e = 10^{-04}$ foram construídos. Além dos mapas de duração orbital, apresentamos também mapas de diferenças de tempo de vida, esses mapas serviram para comparar os efeitos do achatamento de Titânia e Urano na órbita da sonda. Dentro desse intervalo de semieixo maior e inclinação e para os diferentes valores de excentricidade, escolhemos as condições iniciais para órbitas com maior tempo de vida e construímos diagramas de Ω e ω versus t . A evolução temporal dos elementos orbitais de algumas órbitas de interesse também são apresentadas.

O objetivo é trabalhar com órbitas circulares, já que essas são melhores para observações. Órbitas excêntricas possuem perigeu mais baixo e então são mais propícias a colidirem em um curto intervalo de tempo. Órbitas com inclinações altas se aproveitam da rotação do corpo orbitado para fazer a observação do corpo por inteiro. Dessa forma, apesar de considerarmos algumas órbitas excêntricas, nosso foco maior será nas órbitas circulares ou próximas disso. Consideramos dois casos com relação ao argumento do pericentro e a longitude do nodo ascendente (ω , Ω , respectivamente). Primeiro, consideramos $\omega = \Omega = 0^\circ$ e, depois disso, escolhemos valores específicos em regiões com vidas mais longas, para explorar nossos melhores resultados.

Todos os casos foram simulados por ~ 1000 dias, que é o tempo suficiente para analisar a evolução orbital ao redor de Titânia. O tempo de vida da órbita é definido pelo tempo que a sonda espacial permanece em órbita ao redor de Titânia sem colidir com o corpo central. Usamos essa duração para a construção de mapas de vida com a_i versus I_i .

O caso em que analisamos os coeficientes J_2 e J_4 de Urano, para as altitudes estudadas, apresentou mudanças insignificantes no tempo de vida, em comparação ao

caso em que apenas a atração gravitacional de Urano é considerada, portanto, esses resultados não são mostrados aqui. .

Nosso propósito com esses mapas é encontrar as regiões onde as órbitas são afetadas pelos coeficientes de gravidade de Titânia e do terceiro corpo, de modo que esses efeitos estejam em direções opostas, cancelando um ao outro parcialmente, e as órbitas durem mais tempo sem colisão ou escape. A contribuição de cada perturbação (J_2 , C_{22} , terceiro corpo) na evolução temporal dos elementos orbitais a , e , I , ω e Ω das órbitas é apresentada no final do capítulo.

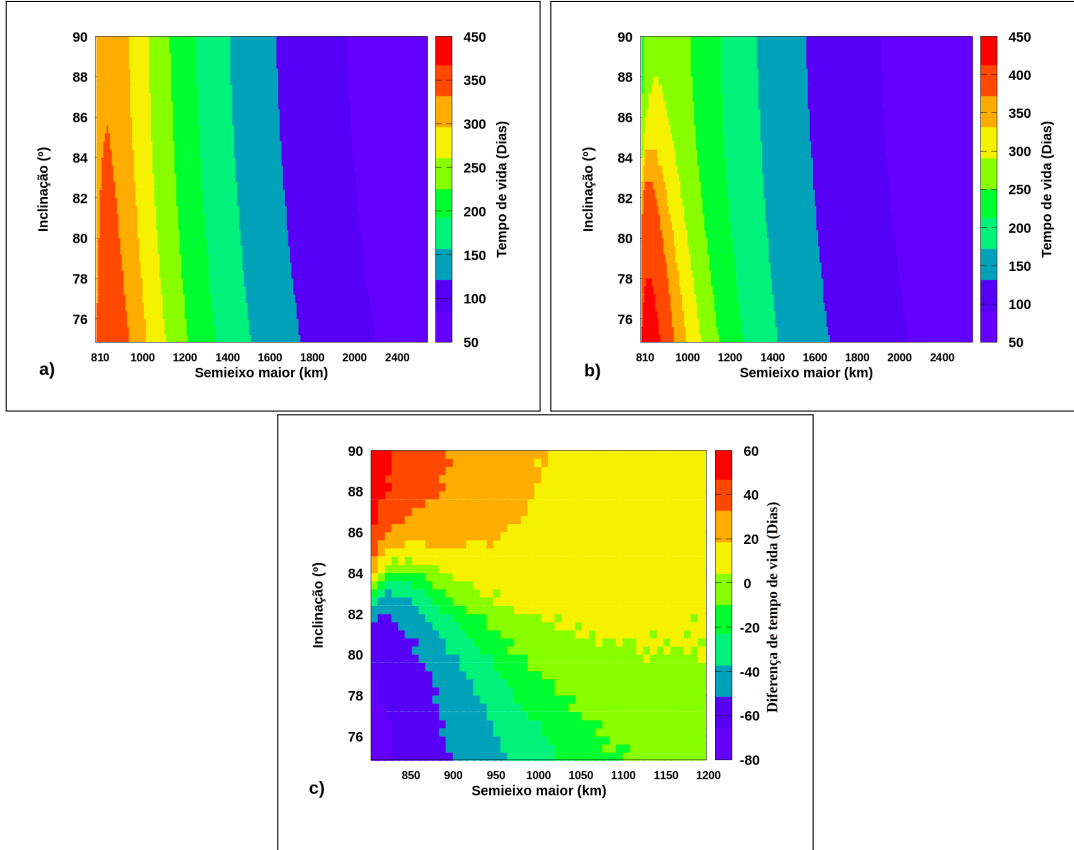
2.2 Análise dos Resultados

Os próximos resultados mostram os diagramas $a \times I$ considerando: i) Apenas a contribuição do corpo perturbador (Urano), modelado como uma massa pontual; ii) os coeficientes de gravidade de Titânia (J_2 , C_{22}) e iii) o modelo mais completo, onde ambos os efeitos são considerados. Nas figuras onde o tempo de vida é analisado, a barra colorida representa o tempo de vida das órbitas. Construímos os "mapas de diferença" subtraindo o tempo de vida das órbitas obtidas quando Urano é considerado e o tempo de vida das órbitas ao considerar os efeitos de Urano e os coeficientes de gravidade de Titânia.

Um ponto a ser destacado é que, nessas figuras, para diferenças nas vidas, um sinal positivo indica valores onde apenas a presença de Urano prolongou a vida da sonda, enquanto valores negativos indicam que os coeficientes de gravidade de Titânia ajudam a controlar naturalmente a terceira - perturbação causada por Urano e há um aumento do tempo de vida das órbitas.

A Figura 2.3 apresenta um mapa com a duração das órbitas onde consideramos somente terceiro corpo (a) e incluindo o terceiro corpo e os coeficientes de gravidade de Titânia (b) para $e = 0$. Para o caso em que consideramos os coeficientes de gravidade

Figura 2.3: Diagrama $a \times I$ para $e = 0$. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Próprio autor.

de Titânia, Figura 2.3b, há um aumento de 50 dias na vida da sonda para órbitas mais próximas da superfície de Titânia. Órbitas com vida útil de até 450 dias são observadas nas mesmas altitudes e inclinações, e vidas na faixa de 100-300 dias para todos os valores de inclinações ocorrem para o semieixo maior na faixa 1000 – 2200 km na Figura 2.3a, e $a = 1000 - 1800$ km na Figura 2.3b (quadrados verdes-claro, verdes e azuis).

Mostramos “mapas de diferença” de tempo de vida na Figura 2.3c. O semieixo

maior máximo usado nesta figura é $a = 1200$ km porque, depois disso, não há mudanças significativas no tempo de vida das órbitas porque a sonda espacial está muito longe de Titânia, e sua forma irregular não é capaz de equilibrar as perturbações do terceiro corpo vindas de Urano. A Figura 2.3c mostra que as maiores diferenças no tempo de vida aparecem para valores de $a = 810 - 1000$ km e $I = 75^\circ - 83^\circ$ (região azul), onde o equilíbrio entre os coeficientes de gravidade de Titânia e Urano ocorre. Encontramos aumentos no tempo de vida da ordem de 60 dias, o que não é desprezível. Além disso, essas órbitas estão mais próximas de Titânia, o que ajuda na observação deste corpo. Nota-se que os menores números negativos ocorrem para inclinações e semieixo maior com valores mais baixos. Nessas regiões, as perturbações do terceiro corpo são menores e os coeficientes de gravidade dominam a dinâmica e reduzem a duração das órbitas.

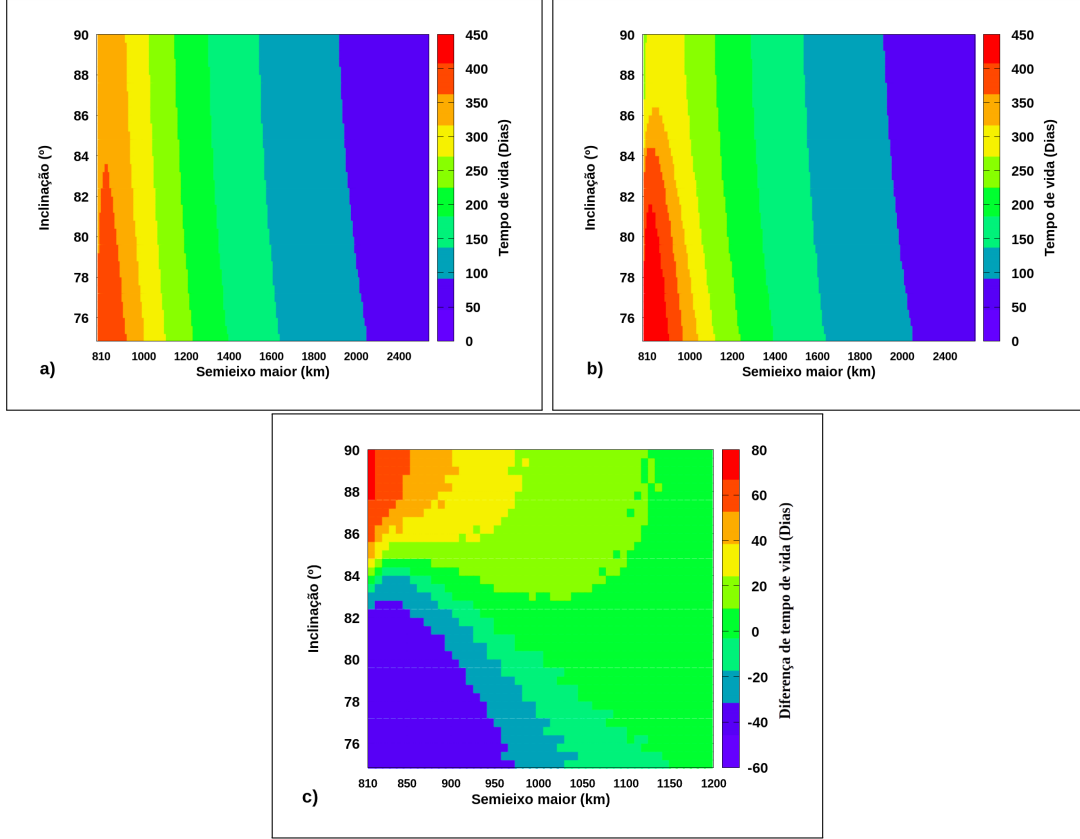
Para o caso $e = 10^{-04}$, Figura 2.4, os resultados apresentam comportamento semelhante ao descrito para $e = 0$. As simulações foram realizadas utilizando as mesmas condições iniciais utilizadas nas Figuras 2.3, exceto pela excentricidade, que agora é igual a $e = 10^{-04}$.

Encontramos uma vida útil máxima igual para as perturbações consideradas, terceiro corpo e J_2 , C_{22} de Titânia. No entanto, considerando apenas Urano como perturbador, a região com maior vida útil varia no intervalo $a = 810 - 900$ km e $I = 75^\circ - 84^\circ$. Nessa região, a vida útil é de aproximadamente 450 dias. Ao incluir os coeficientes de gravidade de Titânia, esta região aumenta de $a = 810 - 1000$ km e $I = 75^\circ - 84^\circ$. Outro fato é que as órbitas com vida útil entre 300-350 dias diminuem quando considerados os coeficientes de gravidade de Titânia.

Os resultados mostraram que as órbitas no intervalo $a = 810 - 1050$ km e $I = 75^\circ - 84^\circ$ aumentaram a vida da sonda entre 20 e 60 dias. Órbitas com $a = 810 - 900$ km e $I = 85^\circ - 90^\circ$ têm sua vida útil prolongada, graças ao efeito causado pelo equilíbrio das perturbações, em aproximadamente 40-80 dias.

Para o caso $e = 10^{-03}$, mostrado na Figura 2.5, nossos resultados para $a \times I$

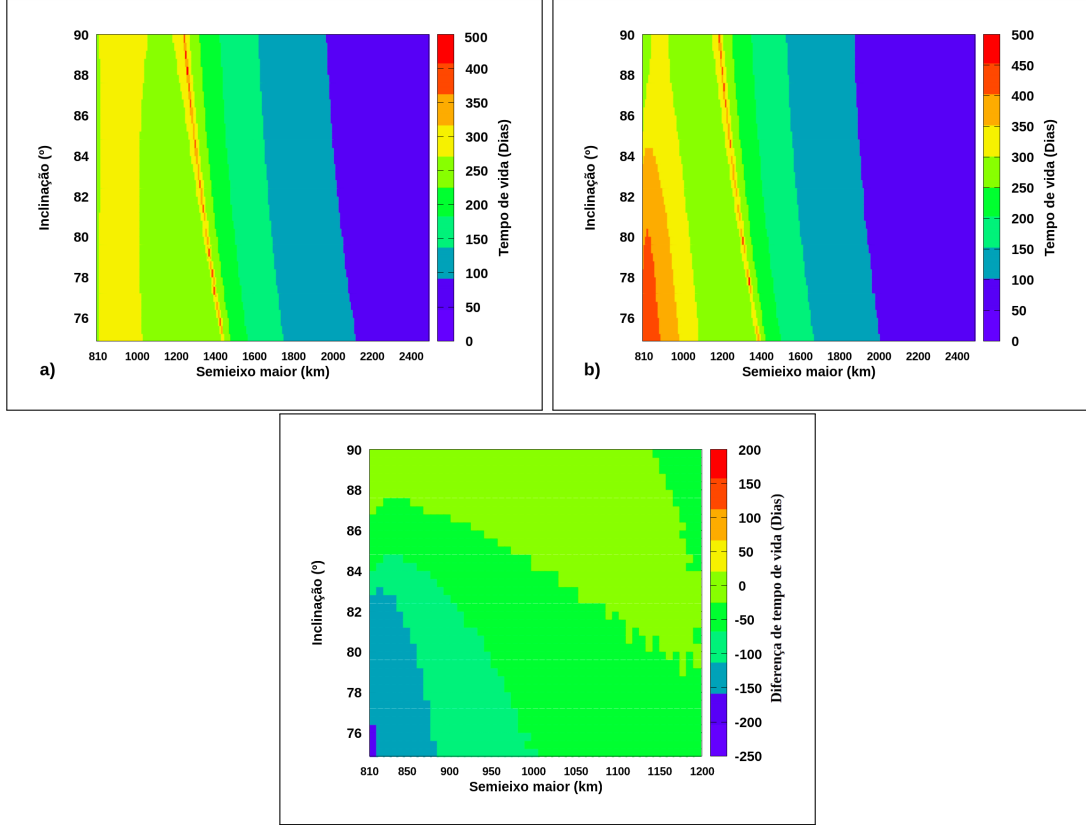
Figura 2.4: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-04}$. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Próprio autor.

considerando apenas a perturbação de Urano são semelhantes aos observados para $e = 0$ e $e = 10^{-03}$. Como já mencionado, os termos J_2 e C_{22} de Titânia são mais importantes para aumentar a vida útil da sonda, confirmando assim que o efeito causado pelos coeficientes de gravidade de Titânia compensam os efeitos causados pela atração gravitacional de Urano. Isso é esperado já que a sonda espacial está muito mais perto de Titânia, mas é importante medir esses efeitos. Os mapas de diferenças de tempo de vida mostrados na Figura 2.5c têm duas regiões próximas onde as mudanças nos tempos de

Figura 2.5: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-03}$. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 2500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$



Fonte: Próprio autor.

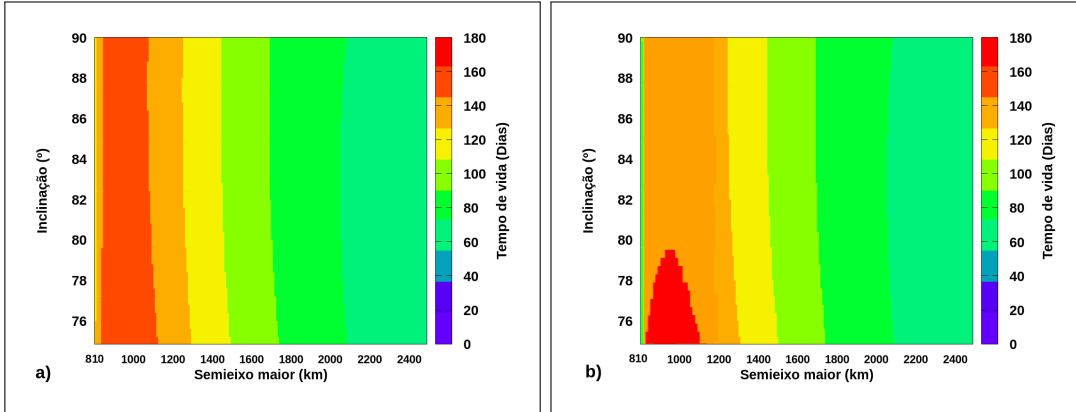
vida são expressivas (regiões com quadrados azuis-escuro, azuis-claro e verdes-claro). Na região com quadrados azuis-escuro, o tempo de vida das órbitas pode chegar a até 200 dias, quando os coeficientes J_2 , C_{22} de Titânia são considerados.

Na Figura 2.5b, incluindo os coeficientes de gravidade de Titânia, o gráfico apresenta uma região mais extensa com órbitas com vida útil de 350-500 dias. Esta região está localizada muito perto da superfície de Titânia ($a = 810 - 1000$) km, onde os termos J_2 e C_{22} anulam os efeitos do terceiro corpo. A Figura 2.5a, mostra as simulações onde

consideramos a perturbação de Urano. Órbitas com uma vida útil próxima a esses valores aparecem apenas em uma pequena ilha, para todas as inclinações, e semieixo maior próximo a 1400 km.

Nas regiões onde a sonda permanece em torno de Titânia por mais tempo, há um equilíbrio entre a perturbação causada pelo terceiro corpo e a perturbação devido aos coeficientes gravitacionais de Titânia, fazendo com que a vida útil da sonda seja estendida. Este equilíbrio é descrito em trabalhos anteriores (Carvalho et al., 2012; Carvalho et al., 2018), onde é mostrado que, quando combinado J_2 e C_{22} do corpo central, esta perturbação resultante atua como um “mecanismo de proteção” e é responsável por amenizar os efeitos causados pela perturbação do terceiro corpo na variação da excentricidade.

Figura 2.6: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-02}$. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. $a = 810 - 2500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ and $\Omega = 0^\circ$

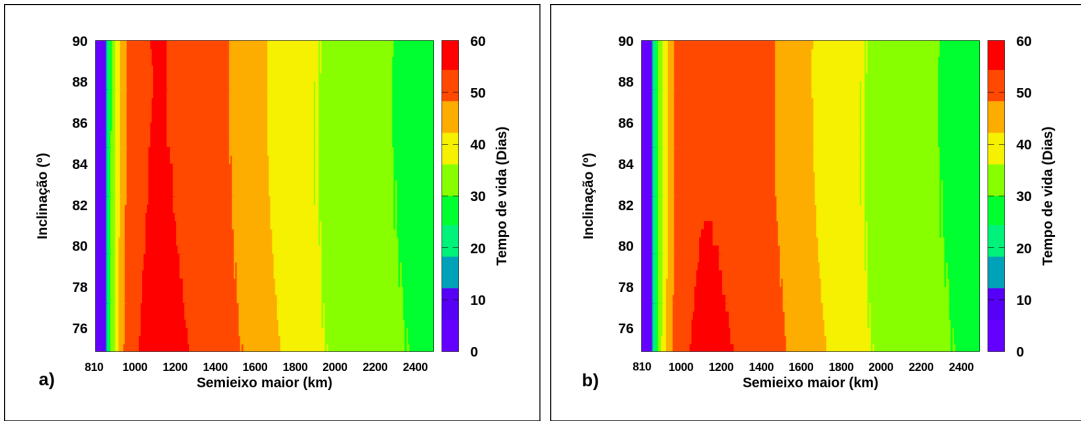


Fonte: Próprio autor.

A seguir, os resultados mostrados nas Figuras 2.6 e 2.7 são obtidos para os casos $e = 10^{-02}$ e $e = 10^{-01}$. É possível notar que não há grandes diferenças entre os resultados obtidos quando se considera apenas a perturbação do terceiro corpo Figura 2.6a e os resultados com J_2 e C_{22} de Titânia e terceiro corpo Figura 2.6b. Há apenas uma

diminuição na região com vida útil entre 160-180 dias, cobrindo todas as inclinações quando J_2 e C_{22} de Titânia são incluídos. Ele está localizado a aproximadamente $a = 900 - 1050$ km, e as inclinações estão na faixa de $75^\circ - 80^\circ$.

Figura 2.7: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-01}$. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. $a = 810 - 2500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ and $\Omega = 0^\circ$



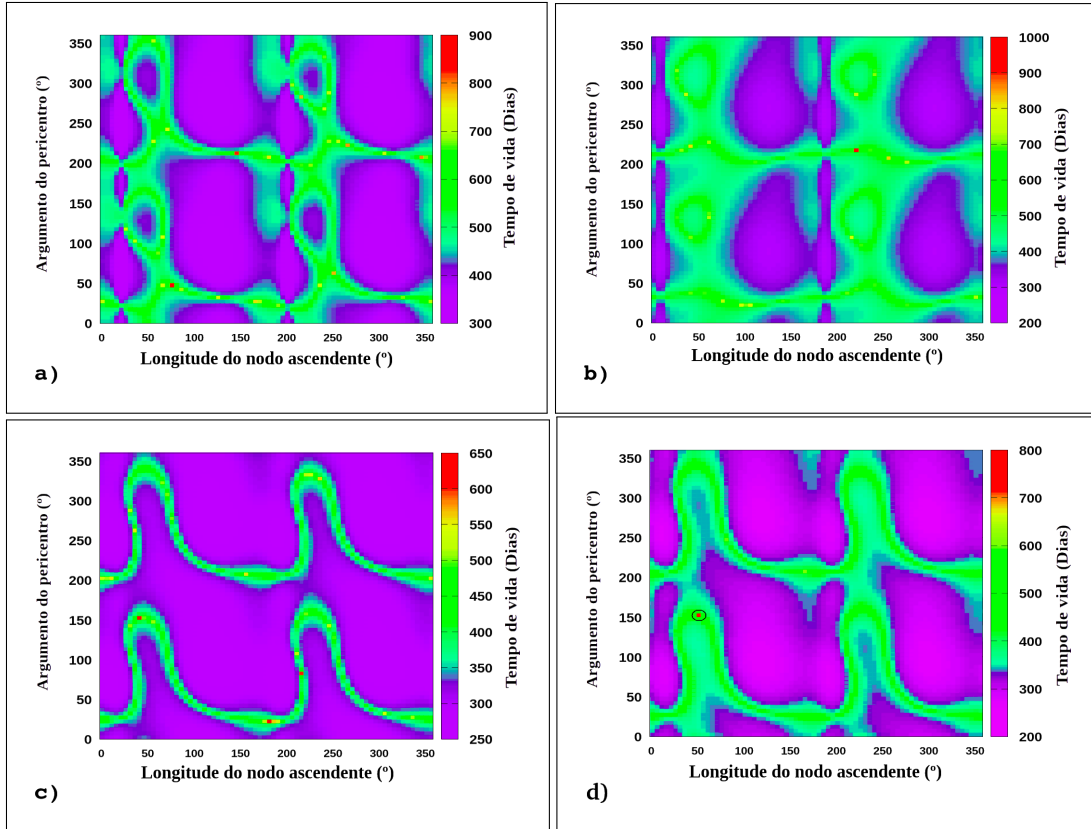
Fonte: Próprio autor.

Em relação aos resultados para $e = 10^{-01}$ apresentados na Figura 2.7, os mapas de duração orbital mostram resultados muito próximos quando todas as perturbações são consideradas, e comportamentos semelhantes aos obtidos para $e = 10^{-02}$. A diferença é que, para $e = 10^{-01}$, a vida útil máxima da sonda é muito mais curta, 60 dias, mas as regiões de maior e menor duração são muito semelhantes. Em estudos anteriores (Prado, 2003; Gomes e Domingos, 2016) podemos encontrar resultados semelhantes, onde órbitas mais excêntricas têm vida útil mais curta, como esperado, pois essas órbitas têm pericentro menor e, portanto, colidem com o corpo central em tempos mais curtos. Além disso, apresentam apocentro maior, portanto a perturbação do terceiro corpo é maior.

2.2.1 Análise dos ângulos ω e Ω

Em [Cardoso et al. \(2017\)](#) é mostrado a relevância da contribuição do argumento do pericentro (ω) e da longitude do nodo ascendente (Ω) na duração das órbitas. Em seguida, analisamos as regiões com tempo de vida maior mostradas nas Figuras 2.3 - 2.7 para essas variáveis. Dentro dessas regiões, escolhemos os melhores valores de a e I e construímos mapas de duração das órbitas em função de ω e Ω para quatro valores de excentricidades estudados neste trabalho: 10^{-04} , 10^{-03} , 10^{-02} e 10^{-01} . Para esta análise, consideramos a perturbação devida ao terceiro corpo e J_2, C_{22} de Titânia.

Figura 2.8: Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-04}$. **a)** $a = 900$ km, $I = 70^\circ$. **b)** $a = 900$ km, $I = 80^\circ$. **c)** $I = 80^\circ$, $a = 1058$ km **d)** $I = 80^\circ$, $a = 1018$ km. $\omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

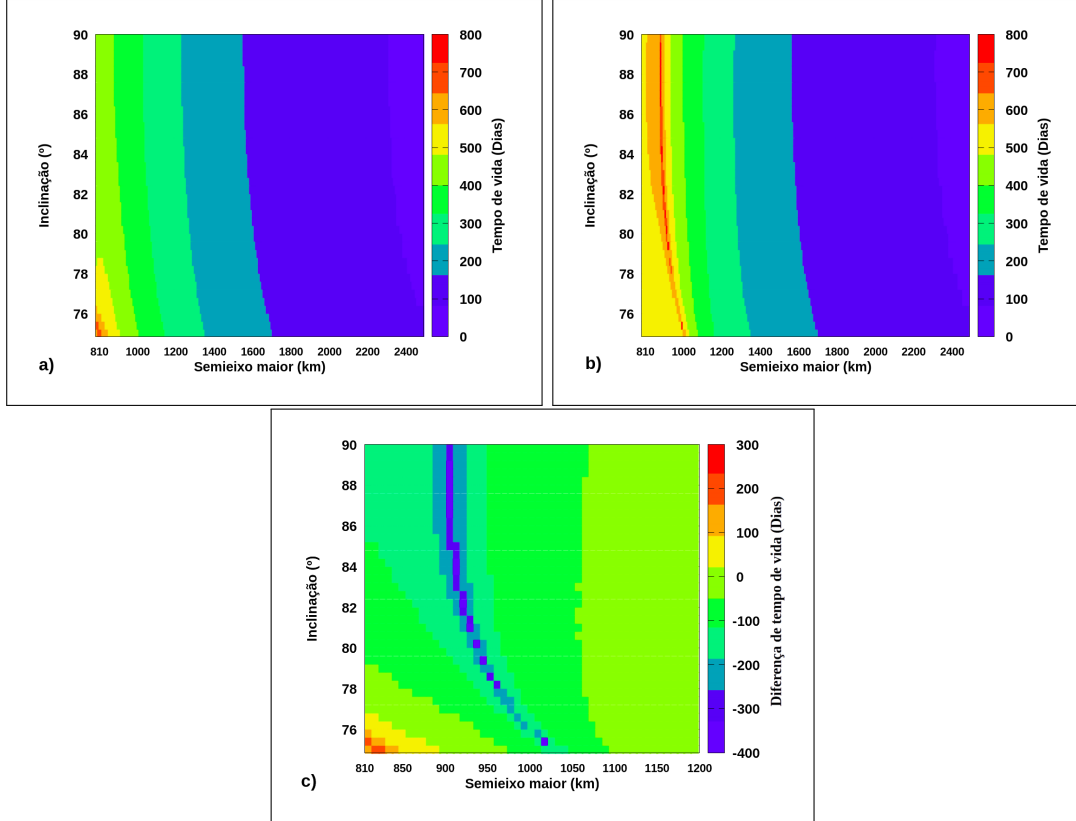
O primeiro caso a ser explorado é para $e = 10^{-04}$. A fim de obter uma análise mais detalhada da influência desses ângulos no tempo de vida das órbitas, escolhemos um valor de $a = 900$ km para valores de I : 70° , 80° . ω e Ω variando de 0° a 360° . Em seguida o diagrama $\omega \times \Omega$ foi construído para um valor fixo de $I = 80^\circ$ e para valores de $a = 1018$ km e $a = 1058$ km. O resultado desta análise é mostrado na Figura 2.8.

A Figura 2.8 apresenta regiões de interesse, onde o tempo de vida das órbitas são mais longos. Eles são mais frequentes para os valores de $\omega = 25^\circ - 150^\circ$ e $\Omega = 25^\circ - 100^\circ$ e, depois disso, para $\omega = 200^\circ - 350^\circ$ e $\Omega = 200^\circ - 275^\circ$.

Um ponto destacado (círculo preto) na Figura 2.8d, tem uma vida útil de até 800 dias nessas regiões. Este ponto possui valores de ω e Ω iguais a 155° e 55° , respectivamente. Para analisar o aumento causado pela inserção desses ângulos na vida orbital de uma sonda, fizemos uma nova simulação com esses ângulos para $a \times I$ com $e = 10^{-04}$. Nas Figuras 2.8a e 2.8b o tempo de vida é maior, no entanto, o objetivo desta análise é mostrar que o tempo de vida da órbita pode ser prolongado para qualquer valor de ω e Ω diferente de zero. As condições iniciais usadas são as mesmas para Figura 2.3 e o resultado é apresentado na Figura 2.9.

A inserção dos valores ω e Ω na nova simulação aumenta a vida útil da sonda em aproximadamente 78%, um valor muito grande. Estendemos o tempo de vida de integração para os dois casos analisados, terceiro corpo e J_2 , C_{22} de Titânia. No entanto, os novos resultados mostram regiões distintas com vida mais longa para cada perturbação considerada. No caso de Urano, uma pequena ilha de órbitas com uma vida útil de 600-800 dias aparece com um semieixo maior variando de 810 km a 900 km e inclinações de 75° a 78° . Se incluirmos os coeficientes de gravidade de Titânia, a vida útil máxima é de cerca de 600 dias. Essa região está localizado em $a = 810 - 1000$ km e pode ser visto para todos os valores de I , aumentando de $I = 78^\circ$ para 90° . Órbitas com vida útil de até 800 dias são encontradas para um valor de a próximo a 900 km e $I = 78^\circ - 90^\circ$.

Figura 2.9: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-04}$ incluindo valores de ω e Ω diferentes de zero. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 155^\circ$ e $\Omega = 55^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

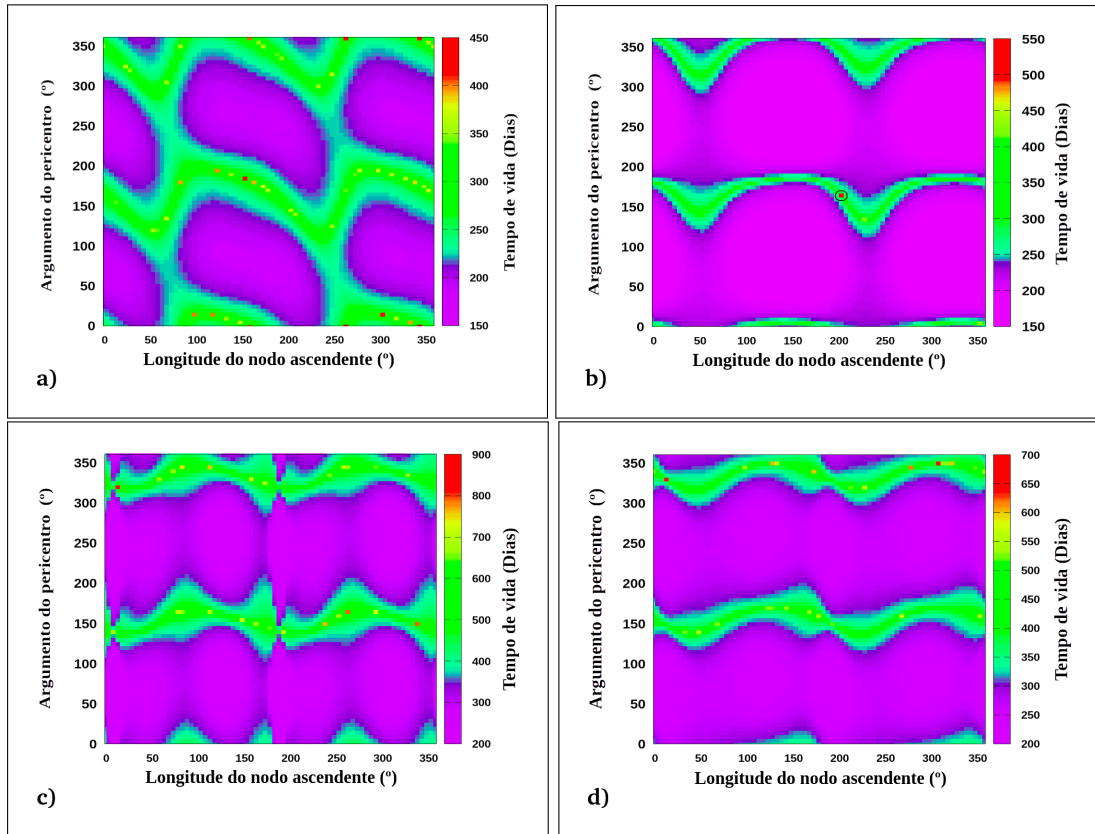
As diferenças apontadas na Figura 2.9c, indicam que após a inclusão de valores de ω e Ω diferentes de zero, os coeficientes de gravidade de Titânia mostraram-se mais relevantes para órbitas inclinadas, $I = 80^\circ - 90^\circ$.

Para $a = 875 - 950$ km, as órbitas alcançam vidas úteis entre 200-400 dias. Este tempo de vida também é experimentado para órbitas com um semieixo maior variando de $a = 950$ km a $a = 1050$ km e $I = 75^\circ - 80^\circ$, em uma ilha menor. De 810 km a $a = 1100$ km, os coeficientes de gravidade de Titânia ainda podem estender a duração das órbitas em até 100 dias para inclinações que variam de $80^\circ - 90^\circ$. Antes da inclusão de $\omega = 55^\circ$

e $\Omega = 155^\circ$, as órbitas que eram mais afetadas pelos coeficientes de gravidade de Titânia tinham uma vida máxima de até 60 dias. Mas, considerando esses valores específicos desses ângulos, esse tempo foi estendido para 400 dias, uma diferença notável.

No caso de Urano, as diferenças apontam que, quando os ângulos ω e Ω são diferentes de zero, há um desvio na localização das órbitas onde sua contribuição foi mais significativa. Quando $\omega = \Omega = 0^\circ$, as órbitas mais inclinadas foram as mais afetadas pelo terceiro corpo. Após a adição de valores específicos para ω e Ω , essas órbitas aparecem com inclinações entre $75^\circ - 76^\circ$ com vida útil de 100-300 dias.

Figura 2.10: Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-03}$. **a)** $a = 1265$ km, $I = 70^\circ$ **b)** $a = 1265$ km, $I = 80^\circ$. **c)** $I = 80^\circ$, $a = 834$ km **d)** $I = 80^\circ$, $a = 1000$ km, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

Para as condições iniciais mostradas na Figura 2.5, o melhor valor de semieixo maior para uma análise $\omega \times \Omega$ é $a = 1265$ km. Novamente, iremos fazer esse diagrama para dois diferentes valores de I , $I = 70^\circ$ e $I = 80^\circ$. Para valores de semieixo maior, $a = 834$ km e 1000 km fizemos $\omega \times \Omega$ com $I = 80^\circ$ e $e = 10^{-03}$ fixos. Ω e ω variando de 0° a 360° , como mostrado na Figura 2.10.

Na Figura 2.10b, um ponto com valores de $\omega = 165^\circ$ e $\Omega = 205^\circ$ é destacado (círculo preto), pois a órbita sobrevive por 550 dias. Os valores desses ângulos foram adicionados nas novas simulações para as condições iniciais da Figura 2.5, a fim de investigar como eles afetariam o tempo de vida da sonda. Novas simulações foram feitas para $a \times I$ com esses novos valores de ω e Ω e o resultado é mostrado na Figura 2.11.

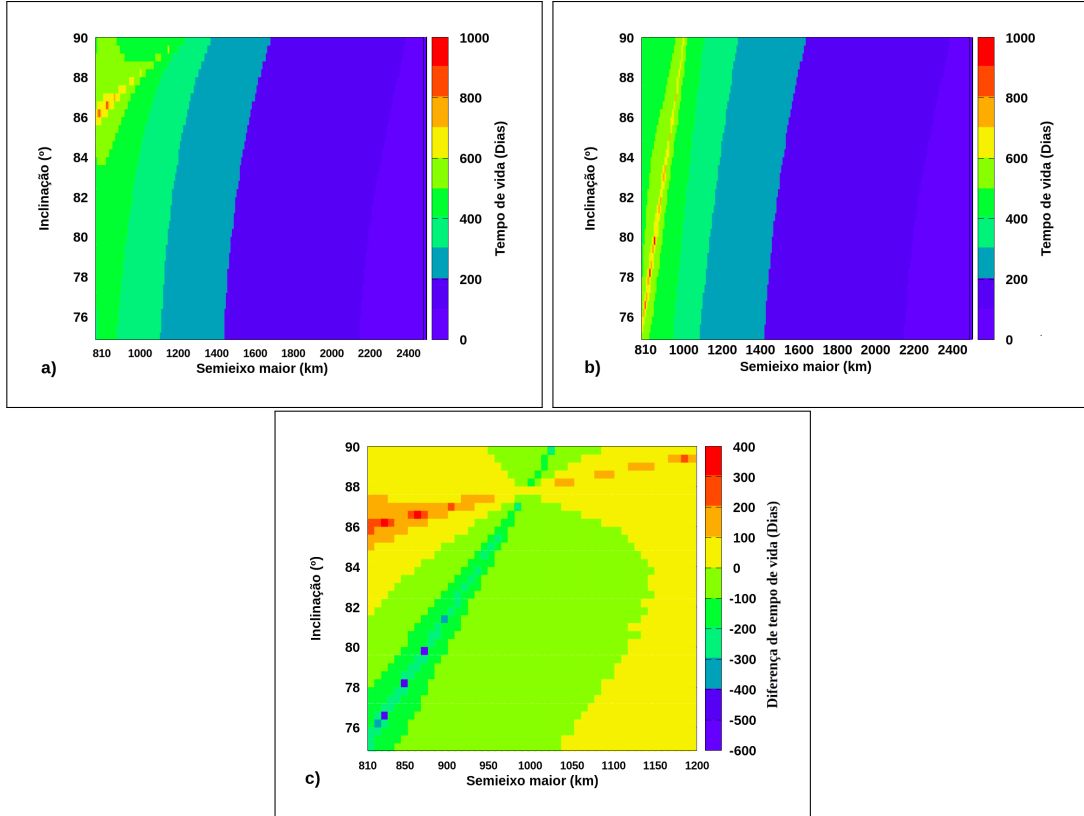
A relevância dos valores específicos de ω e Ω é evidente na Figura 2.11a e 2.11b. O uso de valores diferentes de zero para esses ângulos em $e = 10^{-03}$ aumentou em 100% a vida útil da sonda nos dois casos considerados. Ao usar a atração gravitacional de Urano e os coeficientes de gravidade de Titânia, o uso de valores diferentes de zero para ω e Ω também mudou as regiões onde o tempo de vida é mais longo. Órbitas com vida útil de até 600 dias são encontradas para inclinações que variam de 84° a 90° e $a = 810$ km a $a = 1000$ km (terceiro corpo).

Órbitas com este tempo de vida aparecem para um intervalo do semieixo maior igual a $a = 810 - 1050$ km e I variando de $75^\circ - 90^\circ$ (quadrados verdes-claro com os coeficientes de gravidade de Titânia). A localização das órbitas com uma vida útil de aproximadamente 400 dias é praticamente a mesma para ambos os casos, $a = 810 - 1000$ km e $I = 75^\circ - 90^\circ$ (quadrados verdes). A região de quadrados azuis tem vidas que variam de 200-300 dias, para todas as inclinações e com a variando de 1000 – 1600 km.

A Figura 2.11c mostra que Urano afeta o tempo de vida das órbitas mais inclinadas. Este efeito aparece em uma pequena ilha laranja que vai de $I = 84^\circ - 90^\circ$ para $a = 810 - 1300$ km. Nesta região, a duração das órbitas é de cerca de 400 dias,

considerando o tempo de vida da sonda afetado pelos coeficientes de gravidade de Titânia e Urano.

Figura 2.11: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-3}$ incluindo valores de ω e Ω diferentes de zero. **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 165^\circ$ e $\Omega = 205^\circ$.



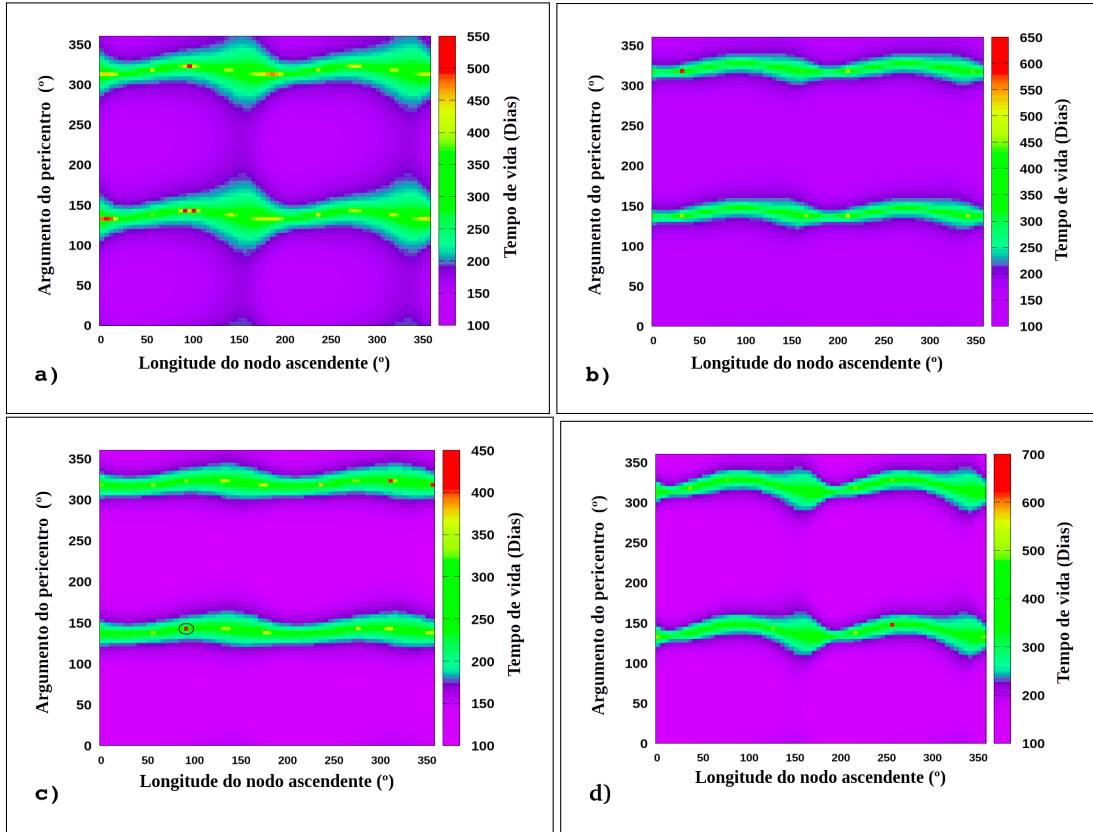
Fonte: Próprio autor.

O efeito de J_2 e C_{22} de Titânia e do terceiro corpo atua em órbitas com inclinações entre $75 - 90$ graus e semieixo maior variando de $810 - 1000$ km. O tempo de vida dessas órbitas varia de 100 a 600 dias, em comparação com a situação em que apenas o efeito de Urano é considerado para a mesma região. O valor limite de $a = 1400$ km nesta figura é usado porque não há mudanças significativas após este valor.

Na Figura 2.12 diagramas de $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-02}$ são apresentados para valores

diferentes de inclinações e $a = 1000$ km. Esse valor de semieixo maior escolhido se deve ao fato de que, na Figura 2.6 ele apresentava órbitas com tempo de vida longo. Assim como feito nos casos anteriores, os valores de inclinações considerados são: $I = 70^\circ$ e $I = 80^\circ$. Para I fixo e a variando foram analisados os casos, $I = 80^\circ$, $a = 914$ km e $a = 1162$ km. O diagrama $\omega \times \Omega$ é mostrado na Figura 2.12.

Figura 2.12: Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-02}$. **a)** $a = 1000$ km, $I = 70^\circ$ **b)** $a = 1000$ km, $I = 80^\circ$ **c)** $I = 80^\circ$, $a = 1162$ km. **d)** $I = 80^\circ$, $a = 914$ km, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$



Fonte: Próprio autor.

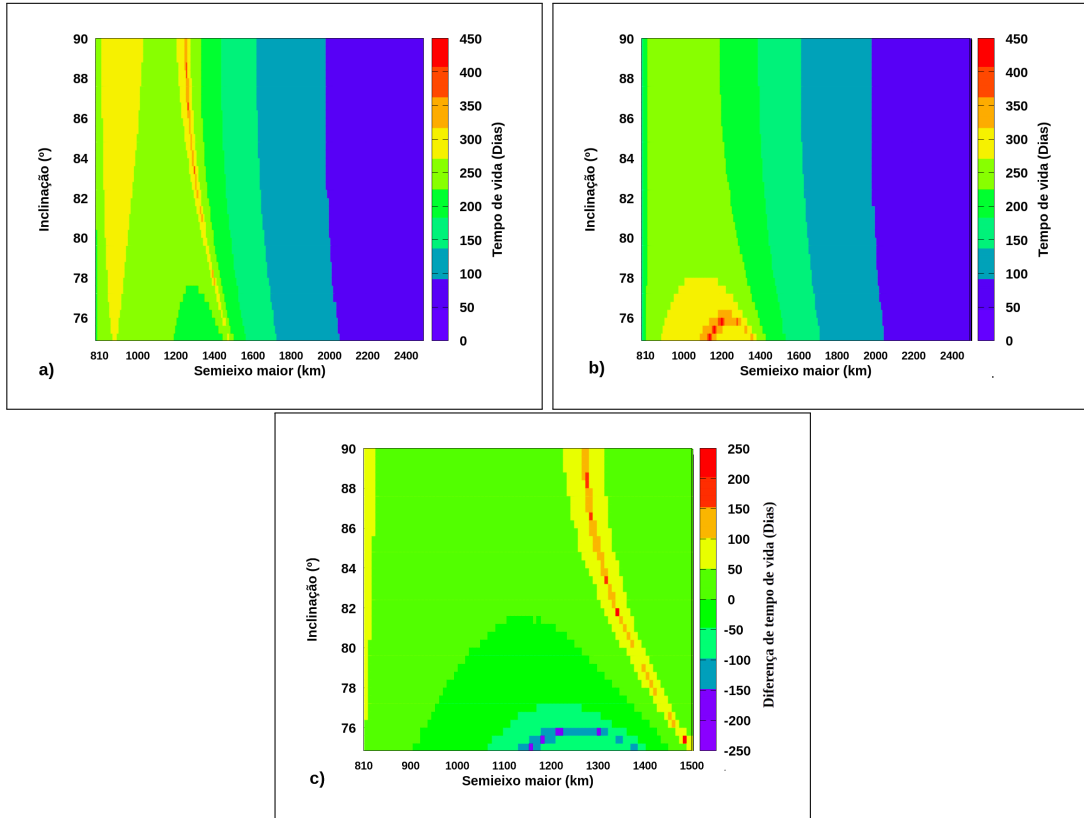
Para os casos analisados na Figura 2.13, a inclusão dos valores de ω e Ω foi feita de acordo com as condições iniciais do ponto destacado na Figura 2.12c, (círculo preto). Esse ponto tem elementos orbitais iguais a $a = 1162$ km, $I = 80^\circ$, $\omega = 145^\circ$ e $\Omega = 95^\circ$. Estes valores do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente foram

usados nas novas simulações com os mesmos valores de a , e e I usados na Figura 2.6.

Os resultados da inclusão desses novos valores de ω e Ω são mostrados na Figura 2.13.

Ao considerar ω e Ω diferentes de zero, o aumento da vida útil da sonda é 2,5 vezes maior em comparação com $\omega = \Omega = 0^\circ$. Os tempos de vida aumentaram de 180 para 450 dias.

Figura 2.13: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-02}$ com ω e Ω . **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1500$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 145^\circ$ e $\Omega = 95^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 2.13a, as órbitas mais próximas da superfície de Titânia têm vidas úteis de 250-300 dias com um semieixo maior variando de 810 – 1000 km. Ocorre para todas

as inclinações quando consideramos a perturbação de Urano. Ao combinar os efeitos de Urano e os coeficientes de gravidade de Titânia, Figura 2.13b, as órbitas com esse tempo de vida ocupam uma região ligeiramente maior, $a = 810 - 1350$ km, isso é visto também para todos os valores analisados de I . As ilhas com vida útil de até 450 dias são vistas em ambos os casos: quando apenas a perturbação de Urano é considerada, e quando os coeficientes de gravidade de Titânia também são levados em consideração. No entanto, essas órbitas mudam de localização de acordo com cada perturbação investigada. Na Figura 2.13a, essas órbitas podem ser vistas a partir de $I = 75^\circ - 90^\circ$ e $a = 1300 - 1500$ km, enquanto na Figura 2.13b, este tempo de vida é observado para órbitas que variam de $a = 1100 - 1400$ km e para $I = 75^\circ - 76^\circ$ (pontos laranja/vermelhos).

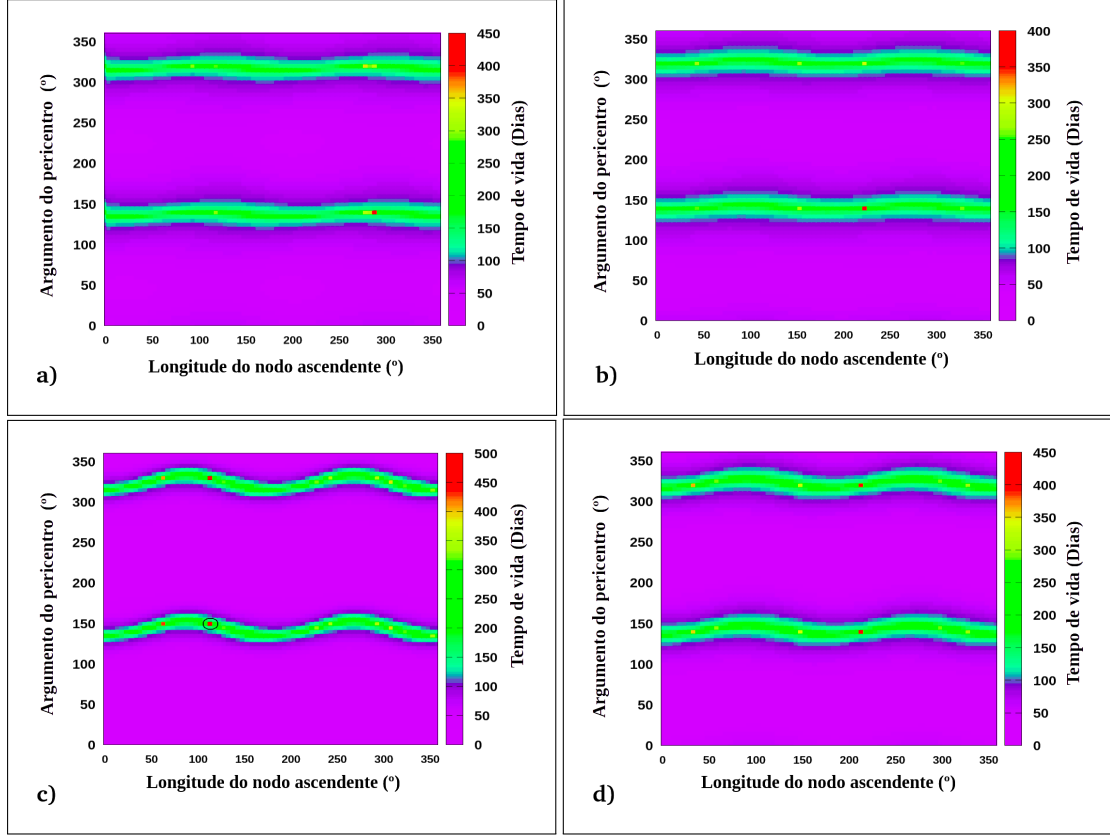
As órbitas com $a = 900 - 1450$ km e $I = 75^\circ - 82^\circ$ têm vidas úteis mais longas quando sujeitas ao efeito dos coeficientes de gravidade de Titânia. As diferenças nas vidas úteis é de até 50 dias, em comparação com a situação em que se considera apenas a influência do terceiro corpo. Essas órbitas podem ser vistas na Figura 2.13c (pontos verdes).

As integrações feitas para $e = 10^{-01}$ mostraram que uma boa aproximação para o semieixo maior seria algo próximo a 1200 km. Usamos esse valor de semieixo maior e variamos I com $I = 70^\circ$ e $I = 80^\circ$. Para os valores de semieixo maior variando os valores escolhidos foram: $a = 900$ km e 1000 km para $I = 80^\circ$. Plotamos $\omega \times \Omega$ em função do tempo de vida orbital, variando esses ângulos no intervalo $0^\circ - 360^\circ$. Os resultados desta análise são mostrados na Figura 2.14.

Nesta figura, duas regiões com vidas úteis mais longas podem ser vistas. Em uma dessas regiões, uma órbita com uma vida útil mais longa é destacada (círculo preto). Esta órbita tem uma vida útil de até 500 dias e os valores de seus elementos orbitais são: $a = 900$ km, $I = 80^\circ$, $e = 10^{-01}$, $\omega = 150^\circ$ e $\Omega = 115^\circ$ e pode ser visto na Figura 2.14c.

Usando os valores de ω e Ω do ponto destacado em novas simulações para a grade

Figura 2.14: Diagrama $\omega \times \Omega$ para $e = 10^{-01}$. **a)** $a = 1200$ km, $I = 70^\circ$ **b)** $a = 1200$ km, $I = 80^\circ$ **c)** $I = 80^\circ$, $a = 900$ km **d)** $I = 80^\circ$, $a = 1000$ km, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$.

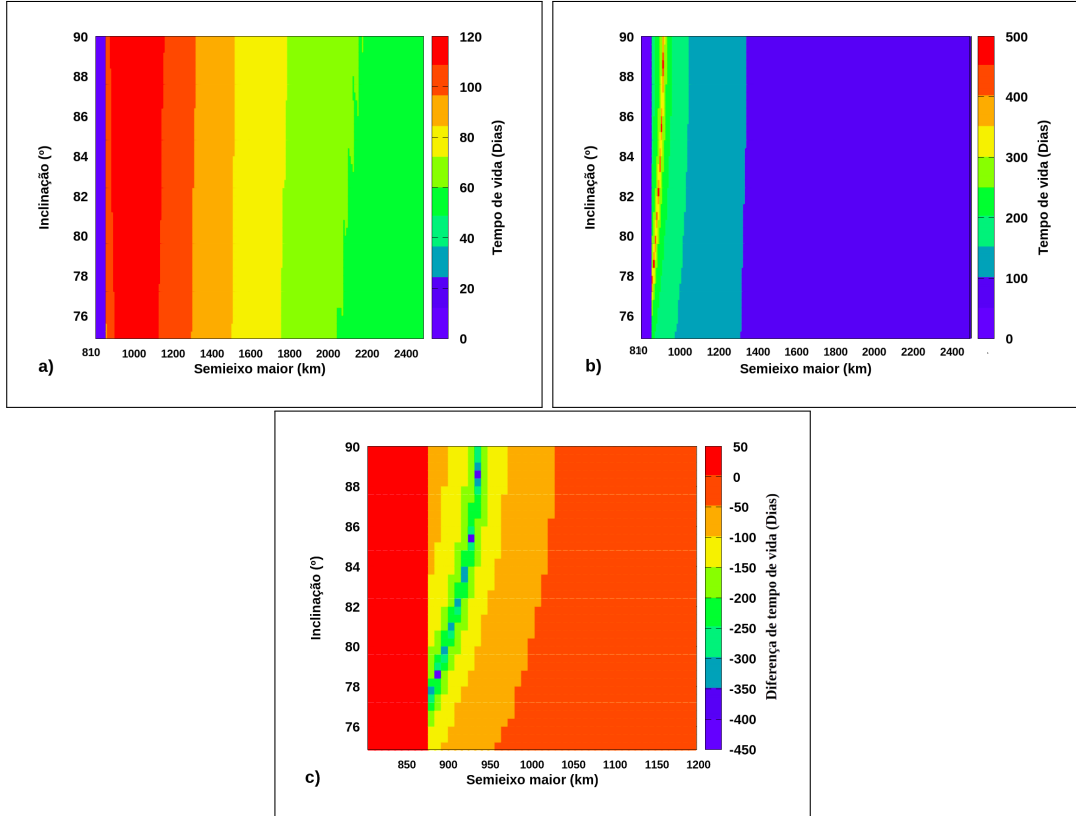


Fonte: Próprio autor.

$a \times I$ para $e = 10^{-01}$, através da Figura 2.15, vamos analisar a importância desses ângulos no aumento da duração do tempo de vida das órbitas. Os resultados apresentados apontam que os ângulos ω e Ω contribuem para o aumento do tempo de vida também para órbitas com altas excentricidades, como no caso $e = 10^{-01}$.

Com os valores encontrados para esses ângulos, a duração das órbitas em torno de Titânia aumentou em duas vezes ao considerar apenas a perturbação do terceiro corpo e mais de oito vezes quando os coeficientes de gravidade de Titânia também foram incluídos. Na análise envolvendo a contribuição da atração gravitacional de Urano, as

Figura 2.15: Diagrama $a \times I$ para $e = 10^{-01}$ com ω e Ω . **a)** Considerando somente os efeitos de Urano. **b)** Incluindo terceiro corpo e os efeitos de J_2 , C_{22} de Titânia. **c)** Diferenças de tempo de vida (Urano - J_2 , C_{22} de Titânia). $a = 810 - 1200$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 150^\circ$ e $\Omega = 115^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

regiões de maior e menor duração permaneceram semelhantes, aumentando apenas o tempo de vida máximo.

No entanto, explorando o cenário onde J_2 e C_{22} de Titânia foram adicionados ao modelo, as órbitas com valores zero e diferente de zero de ω e Ω tiveram tempos de vida máximos muito diferentes, bem como regiões maiores de vida mais longa. Sem a inclusão de valores específicos para esses ângulos, as órbitas com maior tempo de vida estavam localizadas em $I = 75^\circ - 90^\circ$ e $a = 900 - 1200$ km. Nesse intervalo, o tempo máximo atingido por essas órbitas foi de 60 dias. Com a adoção de melhores valores

para ω e Ω nas novas simulações, essas órbitas passaram a ter vidas úteis de 200 a 500 dias, para $a = 900 - 1000$ km e $I = 75^\circ - 90^\circ$.

Esse estudo mostra a importância de um estudo mais completo, incluindo variações em ω e Ω primeiro e, em seguida, mapear $a \times I$ para os melhores valores de ω e Ω .

A fim de reunir todas as melhores órbitas investigadas, um resumo da melhor expectativa de vida para cada condição inicial usada e para cada caso analisado é apresentado na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Melhor tempo de vida para cada sistema analisado

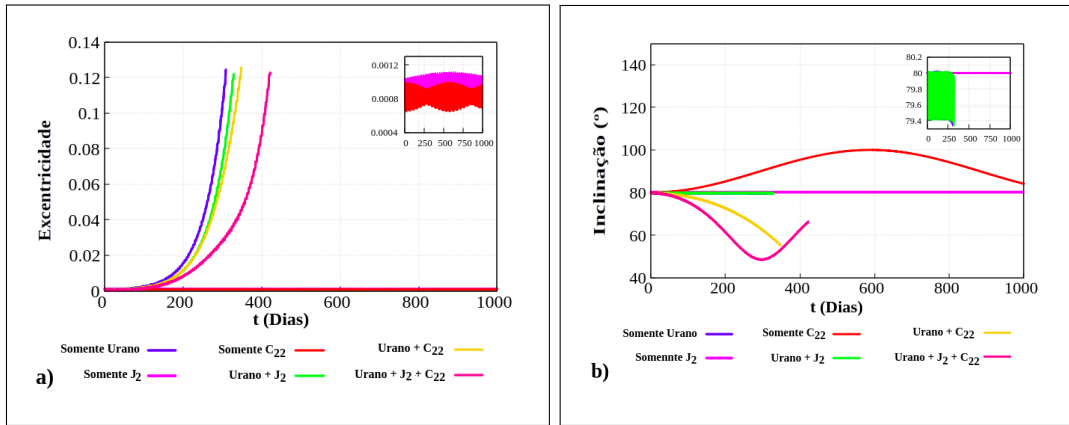
Sistema analisado	a_i (km)	e_i	I_i ($^\circ$)	ω ($^\circ$)	Ω ($^\circ$)	Melhor tempo de vida (Dias)
Terceiro corpo	858	0	75	0	0	365
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	842	0	75	0	0	450
Terceiro corpo	842	10^{-4}	75	0	0	405
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	842	10^{-4}	75	0	0	440
Terceiro corpo	1282	10^{-3}	88.2	0	0	435
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	1242	10^{-3}	86.6	0	0	500
Terceiro corpo	978	10^{-2}	75	0	0	160
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	922	10^{-2}	75.8	0	0	180
Terceiro corpo	1178	10^{-1}	75	0	0	57
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	1266	10^{-1}	75	0	0	57
Terceiro corpo	826	10^{-4}	75	155	55	720
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	922	10^{-4}	82.2	155	55	800
Terceiro corpo	826	10^{-3}	86.2	165	205	1000
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	874	10^{-3}	80	165	205	1000
Terceiro corpo	1282	10^{-2}	88.2	144.9	95	450
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	1186	10^{-2}	75	145	95	450
Terceiro corpo	970	10^{-1}	89.8	150	115	120
Terceiro corpo + J_2, C_{22} de Titânia	938	10^{-1}	88.6	150	115	520

Nesta tabela apresentamos as melhores condições iniciais para os valores de excentricidade estudados neste trabalho.

2.2.2 Órbitas de longa duração

Nesta subseção apresentamos um estudo sobre o efeito isolado de cada perturbação na evolução de alguns elementos orbitais para alguns casos específicos. As perturbações consideradas são: o efeito de Urano, o coeficiente de gravidade J_2 de Titânia, a elipticidade de Titânia (C_{22}), Urano + J_2 de Titânia, Urano + C_{22} de Titânia e Urano + J_2 + C_{22} de Titânia. Esta análise é apresentada nas Figuras 2.16 e 2.17 com e , I e ω sendo os elementos orbitais estudados.

Figura 2.16: $e \times t$ e $I \times t$ para diferentes perturbações. Considerando somente a perturbação de Urano, somente J_2 de Titânia, somente C_{22} de Titânia, Urano + J_2 de Titânia, Urano + C_{22} de Titânia e Urano + J_2 + C_{22} de Titânia. $a_i = 900$ km, $e_i = 10^{-03}$, $I_i = 80^\circ$, $\omega_i = \Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

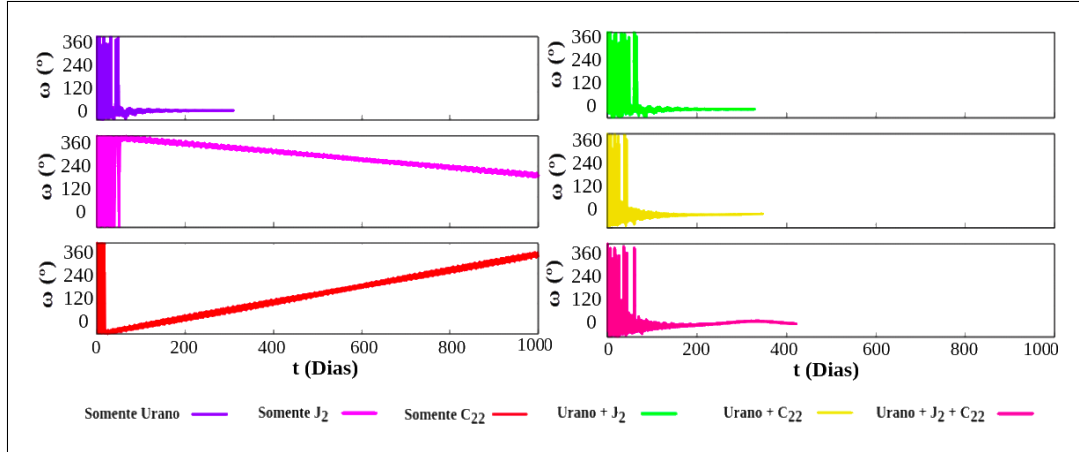
Na Figura 2.16a, é mostrada a evolução temporal da excentricidade sob o efeito dessas perturbações. É possível observar que o efeito dos coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} de Titânia são pequenos quando comparados ao efeito causado pela perturbação do terceiro corpo. A presença de Urano causa um rápido aumento da excentricidade. Isso é visto mesmo quando as outras perturbações são adicionadas. Quando J_2 e C_{22} são incluídos no sistema, o tempo de vida aumenta, como já mencionado, porém, a excentricidade continua aumentando devido à presença do terceiro corpo.

No problema circular restrito de três corpos, o efeito Kozai-Lidov é comum em alguns casos. Esse fenômeno está diretamente relacionado à presença do terceiro corpo, que, conforme mostrado na Figura 2.16, faz com que a excentricidade da sonda atinja valores elevados em um curto tempo de integração. O mecanismo de Kozai-Lidov ainda é capaz de fazer com que o argumento do pericentro oscile em torno de um valor constante. Esses valores são geralmente 90° ou 270° . Porém, nos casos em que a excentricidade cresce rapidamente, como é o caso apresentado na Figura 2.16, uma região de libração não é encontrada para um diagrama $e \times \omega$ (Carvalho et al., 2012). Quando J_2 e C_{22} de Titânia são incluídos, há um equilíbrio entre as perturbações causadas pelos coeficientes de gravidade de Titânia e aqueles causados pelo efeito Kozai-Lidov. Esse equilíbrio faz com que o crescimento da excentricidade seja mais lento e, consequentemente, o tempo de vida da órbita aumente.

No caso da evolução temporal da inclinação, mostrada na Figura 2.16b, o terceiro corpo e o coeficiente de gravidade J_2 não causam grandes variações na inclinação. A variação causada por J_2 é pequena e não excede 1° , mas o tempo de vida é de 1000 dias. Quando Urano é considerado, a variação é pequena e a vida útil é de pouco mais de 300 dias. Quando apenas Urano e J_2 são analisados juntos, nota-se que a presença do terceiro corpo reduz o tempo de vida que era longo quando apenas J_2 era considerado.

A perturbação responsável por causar grandes variações na inclinação é devido ao coeficiente tesseral C_{22} . Quando analisamos a dinâmica tendo apenas C_{22} , a inclinação aumenta de 80° para 100° e o tempo de vida é de 1000 dias. Em todos os casos em que C_{22} é considerado, a variação de I é grande. Isso pode ser visto nos casos Urano + C_{22} e Urano + J_2 + C_{22} . Nestes casos, a variação de I pode chegar a 30° . Este efeito causado por C_{22} na inclinação é esperado, conforme apresentado nos trabalhos anteriores (Carvalho et al., 2012; Tzirti et al., 2009, 2010; De Saeleleer e Henrard, 2006).

Figura 2.17: $\omega \times t$ para diferentes perturbações. Considerando somente a perturbação de Urano, somente J_2 de Titânia, somente C_{22} de Titânia, Urano + J_2 de Titânia, Urano + C_{22} de Titânia e Urano + J_2 + C_{22} de Titânia. $a_i = 900$ km, $e_i = 10^{-03}$, $I_i = 80^\circ$, $\omega_i = \Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

Na análise do argumento do pericentro, apresentado na Figura 2.17, é possível perceber que, assim como na evolução da excentricidade mostrada na Figura 2.16, o terceiro corpo é responsável por causar uma maior perturbação neste elemento. O comportamento de ω é semelhante em todos os casos em que Urano é adicionado. Nestes casos, o argumento sofre grande variação nos primeiros dias do movimento, com oscilações que variam de 0° a 360° . Depois de certo tempo, o argumento da pericentro começa a girar em torno de certo valor, aproximadamente 50° , comportamento esperado devido ao mecanismo de Kozai-Lidov.

Quando apenas os efeitos de J_2 de Titânia são analisados, o argumento de pericentro atinge 360° e então decai para aproximadamente 240° até que uma colisão ocorra em 1000 dias. Analisando o efeito isolado do C_{22} , o tempo de vida do argumento também é de 1000 dias, entretanto, o argumento do pericentro aumenta para aproximadamente 360° antes da colisão.

A importância dos ângulos ω e Ω já ficou evidente na apresentação dos mapas de

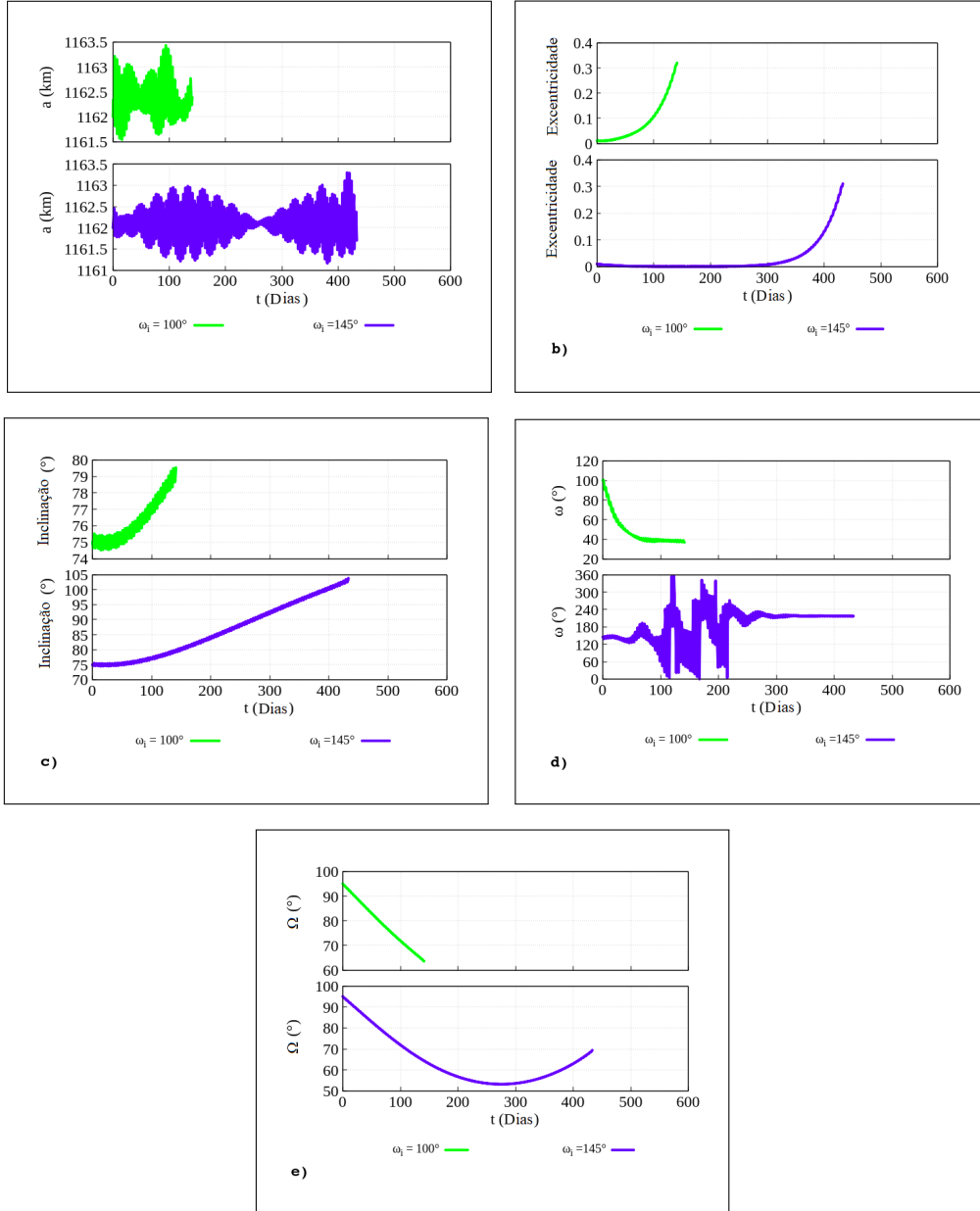
vida mostrados nas Figuras 2.8 - 2.15. Na Figura 2.18 é apresentada uma análise da influência desses ângulos sobre os elementos orbitais de duas órbitas. Os elementos orbitais analisados nessas Figuras têm diferentes valores de ω . O primeiro valor de ω adotado e os demais valores dos elementos orbitais foram retirados do ponto destacado na Figura 2.12c, (círculo preto). A segunda órbita tem as mesmas condições iniciais do ponto destacado, exceto ω . O valor de ω para o ponto destacado é 145° , e o uso deste valor já foi demonstrado ser capaz de aumentar significativamente o tempo de vida das órbitas. Para efeito de comparação, um valor de ω logo abaixo do ponto circulado foi escolhido, $\omega = 100^\circ$.

Em todos os casos mostrados na Figura 2.18 o valor de $\omega = 145^\circ$ causa um aumento na vida útil da sonda. A variação do semieixo maior, mostrado na Figura 2.18a, é muito pequena em ambos os casos. Para $\omega = 100^\circ$ e $\omega = 145^\circ$, as variações não ultrapassam 1 km. Para a excentricidade, mostrada na Figura 2.18b, o valor de $\omega = 145^\circ$ atenua seu rápido crescimento, permanecendo quase constante por 300 dias e só então começa a crescer, atingindo no máximo 0,3 em 430 dias. Usando $\omega = 100^\circ$, a excentricidade aumenta muito mais rápido, em apenas 135 dias, que é quando ocorre a colisão com a superfície de Titânia.

A evolução da inclinação, mostrada na Figura 2.18c, apresenta uma variação de 30° quando $\omega = 145^\circ$, mas tem um longo tempo de vida, 430 dias. Usando $\omega = 100^\circ$, a variação é de apenas 5° , mas a colisão acontece em poucos dias de integração.

No caso da evolução do argumento do pericentro, Figura 2.18d, o comportamento é semelhante ao mostrado na Figura 2.17 nos casos em que o terceiro corpo foi considerado. Para $\omega = 100^\circ$ e $\omega = 145^\circ$, o argumento do pericentro oscila em torno de um valor constante ao longo de algum tempo. Quando consideramos $\omega = 100^\circ$, o argumento decai e libra em torno de 40° por aproximadamente 80 dias. Para $\omega = 145^\circ$, o argumento do pericentro circula por aproximadamente 200 dias e então passa a librar em torno de 238° por quase 230 dias. Esse comportamento é esperado devido ao mecanismo de

Figura 2.18: Evolução dos elementos orbitais para $\omega = 100^\circ$ e $\omega = 145^\circ$. **a)** $a \times t$, **b)** $e \times t$. **c)** $I \times t$, **d)** $\omega \times t$. **e)** $\Omega \times t$. $a_i = 1162$ km, $e_i = 10^{-02}$, $I_i = 75^\circ$, $\Omega_i = 95^\circ$, Urano+ $J_2 + C_{22}$ de Titânia.



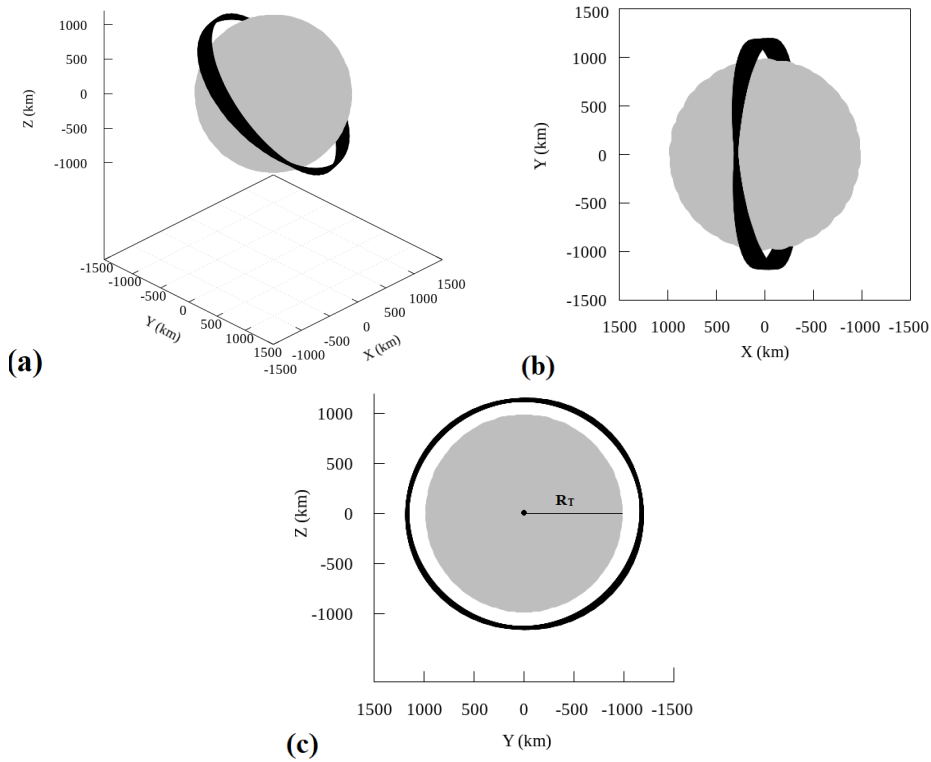
Fonte: Próprio autor.

Kozai (1962)-Lidov (1962) mencionado anteriormente.

Na Figura 2.18e, a evolução do nodo ascendente é apresentada para $\omega = 100^\circ$ e $\omega = 145^\circ$. Para $\omega = 100^\circ$, o nodo ascendente decai quase 25° em 140 dias, enquanto para $\omega = 145^\circ$ esta queda é de quase 45° durante os primeiros 250 dias de integração. Depois disso, o nodo passa a descrever um comportamento periódico até que ocorra a colisão.

Uma órbita de longa duração é mostrada na Figura 2.19 para diferentes projeções.

Figura 2.19: Trajetória simulada numericamente durante 991 dias, considerando o sistema completo, os efeitos gravitacionais do terceiro corpo (Urano) e os coeficientes gravitacionais de Titânia (J_2 e C_{22}). (a) Projeção da órbita em três dimensões (xyz). (b) Projeção da órbita no plano (xy). (c) Projeção da órbita no plano (yz). As condições iniciais são: $a = 898$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 81.4^\circ$, $\omega = 140^\circ$, e $\Omega = 225^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

Essa órbita foi integrada considerando as melhores condições iniciais encontradas

neste trabalho. A trajetória foi simulada numericamente durante 991 dias, considerando o sistema completo, os efeitos gravitacionais do terceiro corpo (Urano) e os coeficientes gravitacionais de Titânia (J_2 e C_{22}). As condições iniciais são: $a = 898$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 81,4^\circ$, $\omega = 140^\circ$ e $\Omega = 225^\circ$.

2.3 Analisando os coeficientes gravitacionais de Titânia

No trabalho de [Chen et al. \(2014\)](#) os valores de J_2 e C_{22} de Titânia são calculados através de suposição hidrostática. Nossos próximos resultados apresentam uma análise detalhada de possíveis valores de erros nesses coeficientes. Apresentamos também, modelos de regressão múltipla com o objetivo de encontrar uma relação em função dos coeficientes J_2 e C_{22} capaz de prever o erro no tempo de vida da sonda causado por esses valores.

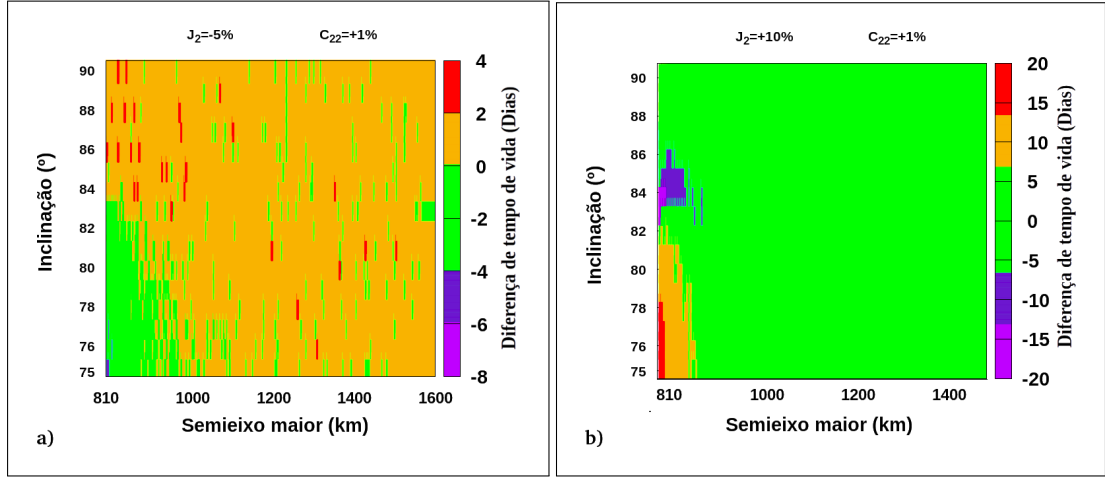
Analisamos um intervalo de -10% a 10% dos valores nominais de J_2 e C_{22} . Construímos mapas de diferenças de tempo de vida considerando esses erros para os casos $e = 0$, $e = 10^{-01}$ e $e = 10^{-03}$ e com a de 810 km a 1500 km e I de 75° a 90° . Apresentamos apenas os casos em que a variação do tempo de vida é significativa quando comparado aos casos onde usamos os valores retirados de [Chen et al. \(2014\)](#). É importante ressaltar que, essas diferenças foram feitas subtraindo o tempo de vida antes da adição dessas porcentagens do tempo de vida após feita a adição. Dessa forma, os números negativos na barra de cores indicam aumento no tempo de vida para a porcentagem considerada e os números positivos indicam diminuição desse tempo.

2.3.1 Caso circular ($e = 0$)

A Figura 2.20 mostra o resultado de mapas de diferença de tempo de vida após a adoção de valores de porcentagens nos termos J_2 e C_{22} . Na Figura 2.20a, temos $C_{22} = +1\%C_{22}$ e $J_2 = -5\%J_2$, nela, é possível perceber que as órbitas menos inclinadas e mais próximas

da superfície de Titânia sofrem um aumento de tempo de vida entre 2-8 dias.

Figura 2.20: Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 0.0$ com $C_{22} = 1\%C_{22}$ **a)** Considerando $J_2 = -5\%J_2$. **b)** Considerando $J_2 = 10\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.

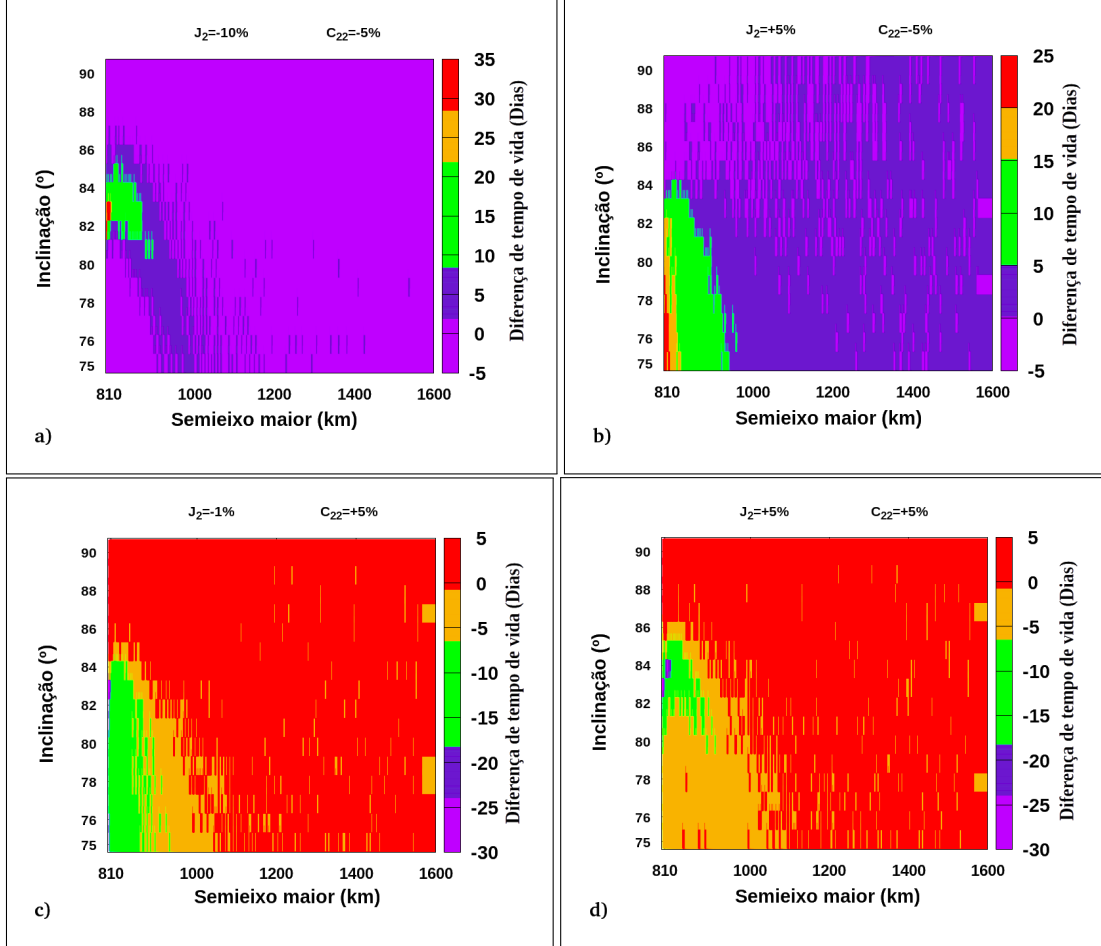


Fonte: Próprio autor.

As órbitas mais inclinadas, ($84^\circ - 90^\circ$), tem seu tempo de vida diminuído por aproximadamente 4 dias quando submetidos a essas percentagens. Para os demais valores de semieixo maior, até 1400 km, o que predomina é uma diminuição no tempo de vida de até 4 dias.

Na Figura 2.20b, $J_2 = 10\%J_2$ provocou um aumento de até 20 dias para as órbitas mais inclinadas, em torno de (84°) e diminuiu na mesma proporção o tempo de vida para órbitas menos inclinadas e mais próximas da superfície de Titânia. Apesar de ser maior a quantidade de órbitas com tempo de vida maior entre $a = 810 - 1400$ km, $J_2 = 10\%J_2$ aumenta o tempo de vida para todos os valores de semieixo maior analisados.

Figura 2.21: Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 0.0$. **a)** $C_{22} = -5\%C_{22}$ e $J_2 = -10\%J_2$. **b)** $C_{22} = -5\%C_{22}$ e $J_2 = 5\%J_2$. **c)** $C_{22} = +5\%C_{22}$ e $J_2 = -1\%J_2$. **d)** $C_{22} = +5\%C_{22}$ e $J_2 = 5\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

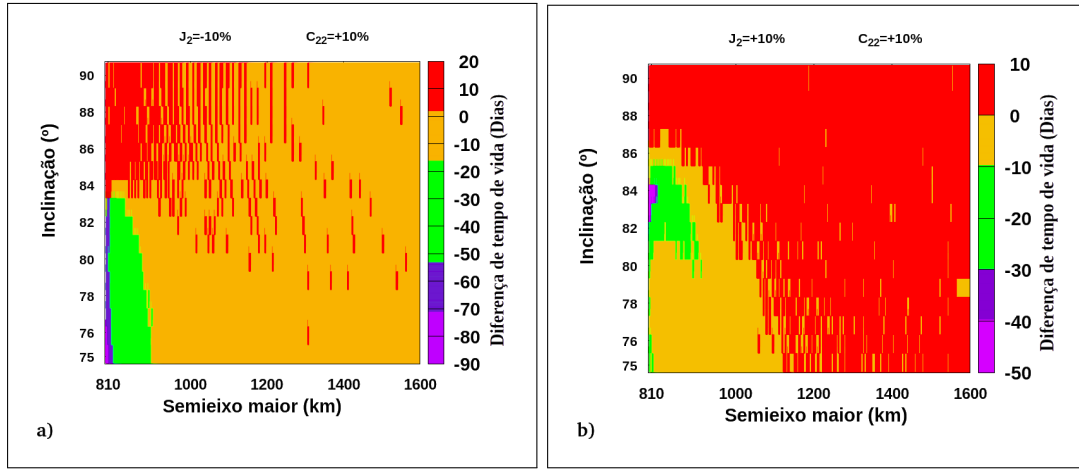
Os resultados apresentados na Figura 2.21 são para valores de C_{22} iguais a $-5\%C_{22}$ e $+5\%C_{22}$, com $e = 0$. Para um mesmo valor de $C_{22} = -5\%C_{22}$, as Figuras 2.21a e b, os diferentes valores de J_2 produzem órbitas com localização e tempo de vida diferentes.

Na Figura 2.21a, com $C_{22} = -5\%C_{22}$ e $J_2 = -10\%J_2$ as órbitas tem uma diminuição de até 35 dias em comparação com as órbitas com J_2 e C_{22} iguais a $1,13 \times 10^{-4}$ e $3,38 \times 10^{-5}$ respectivamente. Essa diminuição é maior para inclinações que vão de

82° a 86° . Para órbitas mais afastadas da superfície de Titânia, em aproximadamente $a = 1000$ km e $I = 75^\circ - 82^\circ$, esse decréscimo é de apenas 5 dias.

Aumentando o valor de J_2 para $5\%J_2$, Figura 2.21b, as órbitas que sofrem um aumento em seu tempo de vida são observadas de a indo de 810 a 1600 km e I de 84° a 90° , sendo mais intensa de 810-1200 km.

Figura 2.22: Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 0.0$ com $C_{22} = +10\%C_{22}$. **a)** $J_2 = -10\%J_2$. **b)** $J_2 = +10\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

Aumentando o valor de C_{22} para $+5\%C_{22}$ e para um valor de $J_2 = -1\%J_2$ o aumento no tempo de vida para órbitas que vão de 75° a 86° e de $a = 810 - 1100$ km é de até 30 dias, isso pode ser visto na Figura 2.22c. Órbitas mais inclinadas, até 90° tem seu tempo de vida reduzido de 0 a 5 dias. Considerando $J_2 = 5 + \%J_2$ as órbitas tem um comportamento parecido, mas as órbitas com redução de tempo para 5 dias predominam na região de 810-1000 km e $I = 75^\circ - 82^\circ$. Órbitas com redução maior de tempo de vida estão concentradas em $I = 82^\circ - 86^\circ$.

O valor de $C_{22} = +10\%C_{22}$ combinado a $J_2 = -10\%J_2$ produz mudanças significativas na vida útil da sonda, como mostrado na Figura 2.22. Ao usar essa combinação de valores dos coeficientes gravitacionais, o aumento do tempo de vida das órbitas mais

próximas da superfície de Titânia é até 90 dias. Para as órbitas mais afastadas, até 1600 km, esse aumento é de aproximadamente 10 dias. Nas órbitas com inclinações variando de 84° a 90° o tempo de vida diminui por até 20 dias quando consideradas essas porcentagens. Quando $J_2 = +10\%J_2$, Figura 2.22b, esse aumento no tempo de vida é de no máximo 50 dias para órbitas mais inclinadas. Para as órbitas com semieixo maior variando de 810 km a 1100 km esse aumento no tempo de vida é só de 10 dias. Como no caso de $J_2 = -10\%J_2$, as órbitas com tempo de vida reduzido aparecem para as inclinações mais altas.

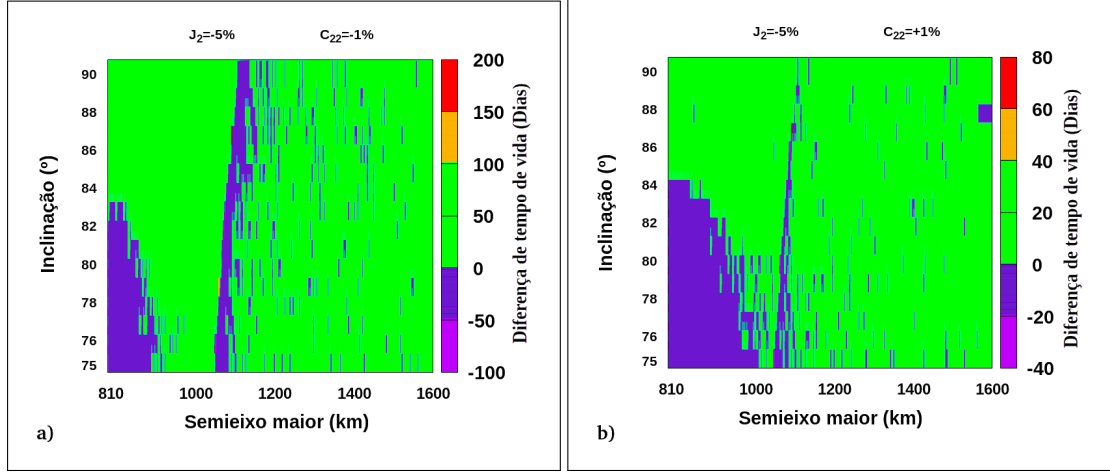
Diante do exposto, notamos que, para $e = 0$ todos os valores de porcentagens adotadas para J_2 e C_{22} produzem mudanças no tempo de vida da sonda, no entanto, algumas são mais significativas que outras. É possível notar ainda que, para todos os valores de porcentagens de C_{22} , a medida que aumentamos o valor de J_2 o tempo de vida de órbitas mais inclinadas é reduzido. Essa comportamento é esperado, já que esse coeficiente de gravidade representa o achatamento nos polos do corpo. Dessa forma, órbitas mais inclinadas são mais sensíveis a perturbação devido ao J_2 .

2.3.2 Caso elíptico ($e = 10^{-03}$)

A Figura 2.23 mostra uma análise dos casos considerando $C_{22} = -1\%C_{22}$ e $C_{22} = +1\%C_{22}$ para $e = 10^{-3}$.

Na Figura 2.23a, mostra a combinação das porcentagens $C_{22} = -1\%C_{22}$ e $J_2 = -5\%J_2$. O aumento no tempo de duração das órbitas é maior para regiões próximas a superfície de Titânia, esse aumento é de até 100 dias. Uma "ilha" menor com esse mesmo aumento de tempo de vida pode ser observada para valores de a que vão de 1080 km a 1150 km aproximadamente. Nessa região, aparecem também algumas órbitas que apresentam uma diminuição significativa em seu tempo de vida, algumas tem essa diminuição indo de 150 a 200 dias e é observada para todos os valores de inclinação.

Figura 2.23: Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 10^{-03}$. **a)** $C_{22} = -1\%C_{22}$ e $J_2 = -5\%J_2$. **b)** $C_{22} = +1\%C_{22}$ e $J_2 = -5\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.

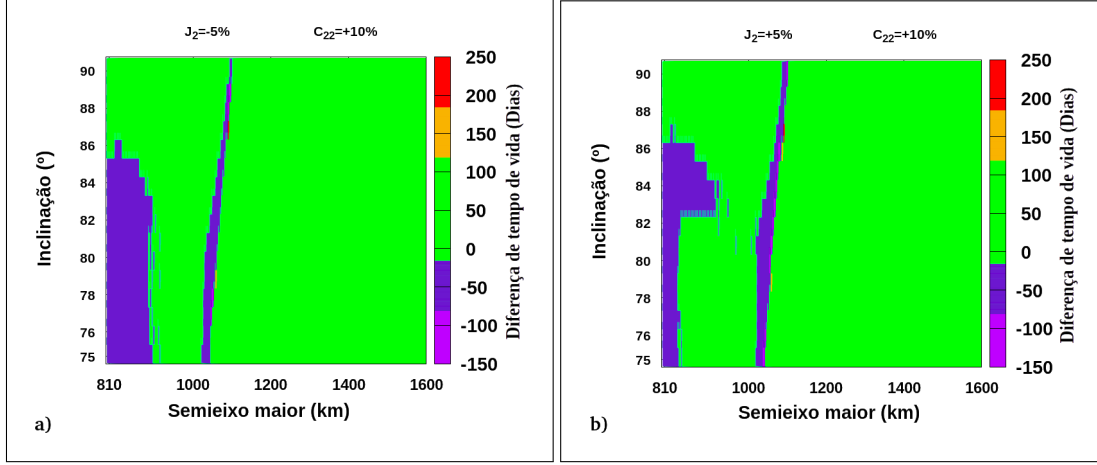


Fonte: Próprio autor.

Aumentando o valor de $C_{22} = +1\%C_{22}$ e mantendo $J_2 = -5\%J_2$, Figura 2.23b, o comportamento das órbitas é parecido para $C_{22} = -1\%C_{22}$, no entanto, o aumento no tempo de vida é de apenas 40 dias e a redução de até 80 dias para regiões semelhantes as apresentadas no caso anterior.

Os resultados das porcentagens de $C_{22} = \pm 5\%C_{22}$ apresentam semelhanças com os casos analisados quando considerados $C_{22} = \pm 1\%C_{22}$. Porém, quando analisamos $C_{22} = -5\%C_{22}$, o aumento no tempo de vida é observado principalmente nas órbitas mais inclinadas $86^\circ - 90^\circ$. Próximo a $a = 1000$ km algumas órbitas com redução no tempo de vida de até 200 dias são observadas. Considerando $C_{22} = +5\%C_{22}$ e $J_2 = -10\%J_2$ as órbitas com aumento de tempo de vida de até 100 dias estão localizadas em $a = 810 - 1000$ km e $I = 75^\circ - 84^\circ$. Assim como no caso anterior ($C_{22} = \pm 1\%C_{22}$), órbitas com redução de até 200 dias no tempo de vida da sonda são encontradas com semieixo maior próximo de 1000 km e para todos os valores de I analisados.

Figura 2.24: Mapa de diferenças. $a \times I$ para $e = 10^{-03}$ com $C_{22} = 10\%C_{22}$. **a)** $J_2 = -5\%J_2$. **b)** $J_2 = +5\%J_2$. $a = 810 - 1600$ km, $I = 75^\circ - 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 2.24a e b, apresenta análises feitas para $C_{22} = 10\%C_{22}$. O valor de porcentagem acrescida no coeficiente J_2 é de $\pm 5\%J_2$ e o comportamento das órbitas em ambos casos é semelhante. Próximo a superfície de Titânia são encontradas órbitas com aumento de tempo de vida de até 150 dias, enquanto órbitas com redução de até 250 dias aparecem novamente para um semieixo maior próximo de 1000 km e para inclinações variando de 75° a 90° .

Análises da influência dessas porcentagens em órbitas com uma excentricidade de 10^{-01} também foram realizadas. No entanto, não houveram mudanças consideráveis no tempo de vida e por esse motivo não foram apresentados aqui tais resultados. Após análise de todos os casos, conclui-se que, os possíveis erros na medida dos valores de J_2 e C_{22} apresentados em [Chen et al. \(2014\)](#) podem afetar significativamente a duração da órbita. As mudanças mais relevantes foram observadas para $e = 10^{-03}$, para todas as combinações de C_{22} e J_2 estudadas.

2.3.3 Encontrando uma equação para o tempo de vida

A partir dos resultados apresentados na seção anterior e de várias combinações de porcentagens investigadas, uma órbita com um grande aumento de tempo de vida foi usada para que uma função relacionando as variáveis J_2 e C_{22} e tempo de vida fosse encontrada. Nessa relação, consideramos J_2 e C_{22} em um range de -10% a +10% do valor nominal ([Chen et al., 2014](#)).

Para encontrar essa função usamos modelos de regressão múltipla, esse tipo de análise é usada quando precisamos encontrar uma relação matemática que envolva múltiplas variáveis. No caso abordado nesta seção, Y é a variável dependente, também conhecida como variável resposta. J_2 e C_{22} são as variáveis explicativas ou variáveis independentes. O modelo mais comum de uma regressão múltipla é o modelo clássico, descrito como [Chein \(2019\)](#):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_{1i} + \beta_2 Z_{2i} + \beta_3 Z_{3i} + \beta_4 Z_{4i} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

onde Y_i é a variável resposta, β_j os parâmetros desconhecidos, Z_{ji} variáveis independentes e ϵ_i o erro aleatório.

A equação 2.16 é usada para uma análise multivariada com relação de linearidade entre as variáveis. Para uma análise multivariada sem essa relação de linearidade a equação geral é dada de acordo com [Amaral et al. \(2018\)](#).

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (2.17)$$

onde Y é a resposta de interesse, k o número de variáveis independentes, β os coeficientes estimados, x os parâmetros e ϵ o termo de erro associado.

Em todas as regressões é estimado um valor para o coeficiente de determinação, chamado de R^2 . Esse termo é uma medida de ajuste de um modelo estatístico linear

generalizado, como a regressão linear simples ou múltipla, aos valores observados de uma variável aleatória. O R^2 varia entre 0 e 1. Nesse caso, expressa a quantidade da variância dos dados que é explicada pelo modelo linear. Assim, quanto maior o R^2 , mais preciso é o modelo, ou seja, melhor se ajusta à amostra. De maneira simplificada podemos dizer que esse termo é dado por:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \quad (2.18)$$

em que:

$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ a soma de quadrados de regressão

$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ a soma de quadrados total

onde n é o numero de observações, y_i é o valor observado, $\bar{y}$ é a média das observações e $\hat{y}_i$ é o valor estimado (previsão) de y_i .

Quanto maior o número de variáveis independentes no modelo, maior será o R^2 . Logo, uma medida que corrija este inconveniente se faz necessário. Portanto, o coeficiente de determinação múltiplo ajustado corrige este problema, pois leva em consideração o número de variáveis no modelo de regressão. O cálculo é o seguinte:

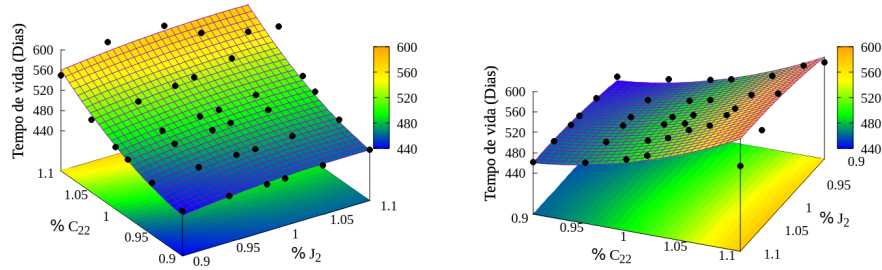
$$R_{ajust}^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p-1} \cdot (1 - R^2) \right) \quad (2.19)$$

Os próximos resultados mostram modelos de regressão múltipla para determinar uma função relacionando tempo de vida com valores de J_2 e C_{22} , adicionados ou subtraídos dos possíveis erros. Apresentamos 4 modelos de regressão para diferentes valores do coeficiente de determinação R^2 , para cada modelo apresentamos também uma superfície de resposta em duas projeções diferentes. Importante ressaltar que, o objetivo dessa análise é fornecer equações que podem prever o tempo de vida da sonda em função de variações nos valores de J_2 e C_{22} e o coeficiente R^2 de cada modelo, não apresentaremos aqui um estudo estatístico aprofundado. Esse estudo foi realizado utilizando o pacote

ExpStat-ExpAnalysis3d, um software estatístico escrito na linguagem R disponível em <https://www.expstat.com/pacotes-do-r/expanalysis3d>.

As condições iniciais para essas regressões foram retiradas das porcentagens analisadas para o caso $e = 10^{-03}$, já que os casos de maior aumento de tempo de vida foram verificados para esse valor de excentricidade. Todas as superfícies de respostas foram simuladas para $a = 1075$ km, $e = 10^{-03}$, $I = 76^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Os modelos, seus coeficientes de ajuste, bem como suas representações gráficas são apresentadas nas equações e figuras a seguir.

Figura 2.25: Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 1, $R^2 = 0,84$.



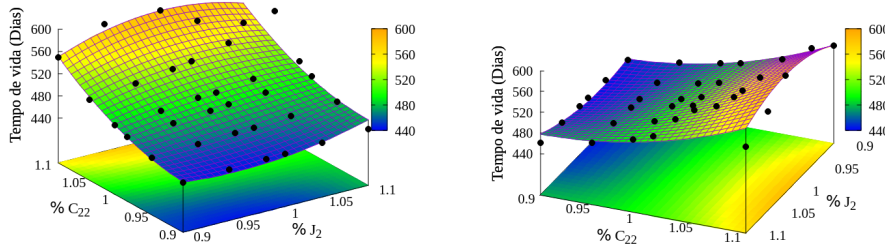
Fonte: Próprio autor.

$$Y = 1230 + 1469J_2 - 684J_2^2 - 3635C_{22} + 2115C_{22}^2, \quad (\text{Modelo 1}) \quad (2.20)$$

onde Y é a variável dependente tempo de vida, J_2 e C_{22} as variáveis independentes. A equação 2.20 apresenta uma relação para o tempo de vida em função dos valores das porcentagens de J_2 e C_{22} . Para tal modelo (Modelo 1) é possível observar que a superfície de resposta mostrada na Figura 2.25 deixa de passar por alguns pontos o que faz com que o termo R^2 tenha um valor de 0.84. Apesar do valor de R^2 não ser tão próximo de 1 e do modelo não apresentar um termo de interação entre J_2 e C_{22} , a função fornece uma boa aproximação do tempo de vida para valores de porcentagens

para os coeficientes gravitacionais de Titânia.

Figura 2.26: Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 2, $R^2 = 0,87$.

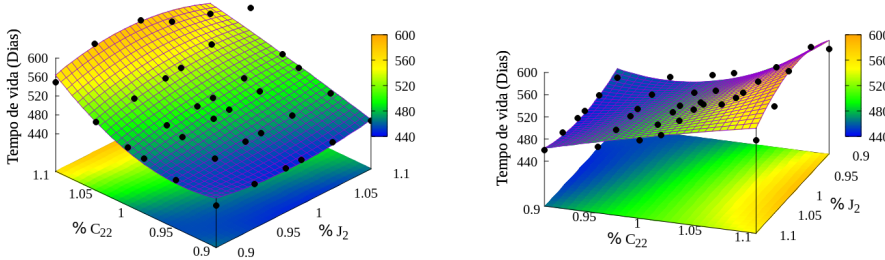


Fonte: Próprio autor.

$$Y = 24139 - 44921J_2 + 22699J_2^2 - 26544C_{22} + 2115C_{22}^2 + 4639J_2^2C_{22} - 23382J_2^2C_{22}, \quad (Modelo\ 2) \quad (2.21)$$

Já o Modelo 2, representado pela superfície de resposta mostrada na Figura 2.26 e modelado pela equação 2.21 tem um coeficiente de determinação R^2 mais preciso em comparação ao R^2 do Modelo 1. Isso também é verificado através da adaptação da superfície de resposta aos pontos, nesse modelo a superfície passa por mais pontos que no modelo anterior.

Figura 2.27: Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 3, $R^2 = 0,89$.

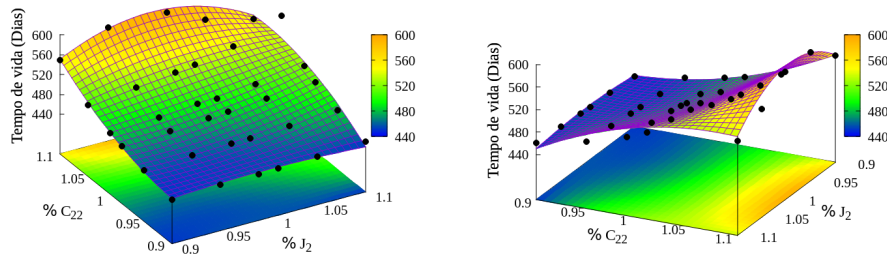


Fonte: Próprio autor.

$$\begin{aligned}
Y = & 48401 - 69183J_2 + 22699J_2^2 - 75272C_{22} + 26480C_{22}^2 \\
& + 95118J_2^2C_{22} - 23383J_2^2C_{22}^2 - 24364J_2C_{22}^2, \quad (\text{Modelo } 3)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

O Modelo 3, modelado pela equação 2.22 e representado pela superfície de resposta mostrada na Figura 2.27 tem uma precisão melhor que os Modelos 1 e 2. Para esse modelo, o R^2 é igual a 0.89, bem mais preciso que no Modelo 1 que era 0.84 e no Modelo 2 que tinha um valor de 0.87. A superfície de resposta também se ajusta melhor aos pontos deixando poucos deles fora da superfície.

Figura 2.28: Superfície de resposta para regressão múltipla com três variáveis. Modelo 4, $R^2 = 0,92$.



Fonte: Próprio autor.

$$\begin{aligned}
Y = & -348975 + 728920J_2 - 376353J_2^2 + 722831C_{22} \\
& - 372572C_{22}^2 - 1507821J_2C_{22} + 778087J_2^2C_{22} \\
& + 777105C_{22}^2J_2 + ((-400735.(J_2^2)).(-400735(C_{22}^2))), \quad (\text{Modelo } 4)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Por fim, a Figura 2.28 mostra a superfície de resposta para o modelo mais preciso desse estudo. A equação 2.23 descreve matematicamente esse modelo que tem um coeficiente de determinação R^2 igual a 0.92 e uma superfície de resposta que se ajusta melhor aos pontos. Com a função descrita nesse modelo, podemos prever com uma boa

precisão o tempo de vida de um veículo espacial ao redor de Titânia.

Com o intuito de mostrar todas as variações no tempo de duração das órbitas para todos os valores de porcentagens analisadas, as tabelas 2.4 e 2.5 foram construídas para os valores de $e = 0$ e $e = 10^{-03}$. Nessas tabelas é mostrado as condições iniciais de uma órbita com e sem as porcentagens dos coeficientes e o Δ_t (variação do tempo de vida) para cada combinação de porcentagem considerada.

Tabela 2.4: Melhores condições iniciais e variação do tempo de vida para uma mesma órbita com e sem acréscimo nos coeficientes gravitacionais. Para os casos $e = 0$.

$e = 0$		$J_2 = -1\%J_2$	$J_2 = -5\%J_2$	$J_2 = -10\%J_2$	$J_2 = +1\%J_2$	$J_2 = +5\%J_2$	$J_2 = +10\%J_2$
	$C_{22} = -1\%C_{22}$	$a = 838 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = 0 \text{ days}$	$a = 830 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -24 \text{ days}$	$a = 826 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = 0 \text{ days}$	$a = 826 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -15 \text{ days}$	$a = 850 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -50 \text{ days}$	$a = 846 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -50 \text{ days}$
	$C_{22} = -5\%C_{22}$	$a = 850 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -50 \text{ days}$	$a = 834 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = 0 \text{ days}$	$a = 834 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = 0 \text{ days}$	$a = 846 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -41 \text{ days}$	$a = 842 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -50 \text{ days}$	$a = 850 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -53 \text{ days}$
	$C_{22} = -10\%C_{22}$	$a = 854 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -49 \text{ days}$	$a = 850 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -45 \text{ days}$	$a = 846 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -37 \text{ days}$	$a = 842 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -50 \text{ days}$	$a = 846 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -54 \text{ days}$	$a = 838 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -59 \text{ days}$
	$C_{22} = +1\%C_{22}$	$a = 822 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = 0 \text{ days}$	$a = 830 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -20 \text{ days}$	$a = 822 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -10 \text{ days}$	$a = 834 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -31 \text{ days}$	$a = 830 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -37 \text{ days}$	$a = 842 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -44 \text{ days}$
	$C_{22} = +5\%C_{22}$	$a = 826 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -16 \text{ days}$	$a = 822 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -7 \text{ days}$	$a = 814 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = +7 \text{ days}$	$a = 830 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -20 \text{ days}$	$a = 834 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -28 \text{ days}$	$a = 834 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -16 \text{ days}$
	$C_{22} = +10\%C_{22}$	$a = 814 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = +3 \text{ days}$	$a = 810 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = +19 \text{ days}$	$a = 810 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = +45 \text{ days}$	$a = 814 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -2 \text{ days}$	$a = 818 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -14 \text{ days}$	$a = 826 \text{ km},$ $I = 75^\circ,$ $\Delta_t = -24 \text{ days}$

Tabela 2.5: Melhores condições iniciais e variação do tempo de vida para uma mesma órbita com e sem acréscimo nos coeficientes gravitacionais. Para os casos $e = 10^{-3}$.

$e = 10^{-3}$		$J_2 = -1\%J_2$	$J_2 = -5\%J_2$	$J_2 = -10\%J_2$	$J_2 = +1\%J_2$	$J_2 = +5\%J_2$	$J_2 = +10\%J_2$
	$C_{22} = -1\%C_{22}$	$a = 1078$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +213$ days	$a = 1082$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +96$ days	$a = 1086$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +83$ days	$a = 1118$ km, $I = 86^\circ$, $\Delta_t = +178$ days	$a = 1086$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +108$ days	$a = 1082$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +156$ days
	$C_{22} = -5\%C_{22}$	$a = 1086$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +115$ days	$a = 1090$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +138$ days	$a = 1082$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +118$ days	$a = 1086$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +116$ days	$a = 1082$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +182$ days	$a = 1078$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +121$ days
	$C_{22} = -10\%C_{22}$	$a = 1086$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +104$ days	$a = 1078$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +78$ days	$a = 1090$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +82$ days	$a = 1082$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +105$ days	$a = 1098$ km, $I = 80^\circ$, $\Delta_t = +136$ days	$a = 1090$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +92$ days
	$C_{22} = +1\%C_{22}$	$a = 1086$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +126$ days	$a = 1078$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +105$ days	$a = 1020$ km, $I = 82^\circ$, $\Delta_t = +199$ days	$a = 1086$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +108$ days	$a = 1082$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +126$ days	$a = 1078$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +134$ days
	$C_{22} = +5\%C_{22}$	$a = 1078$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +100$ days	$a = 1078$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +101$ days	$a = 1082$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +105$ days	$a = 1098$ km, $I = 82^\circ$, $\Delta_t = +252$ days	$a = 1114$ km, $I = 86^\circ$, $\Delta_t = +131$ days	$a = 1082$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +200$ days
	$C_{22} = +10\%C_{22}$	$a = 1078$ km, $I = 77^\circ$, $\Delta_t = +143$ days	$a = 1082$ km, $I = 78^\circ$, $\Delta_t = +118$ days	$a = 1086$ km, $I = 79^\circ$, $\Delta_t = +183$ days	$a = 1074$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +96$ days	$a = 1074$ km, $I = 76^\circ$, $\Delta_t = +113$ days	$a = 1070$ km, $I = 75^\circ$, $\Delta_t = +147$ days

2.4 Conclusões

Neste capítulo, estudamos a dinâmica de órbitas em torno do satélite natural, Titânia, a maior lua do sistema de Urano. A atração gravitacional devido a Urano é considerada, bem como os coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} de Titânia. Titânia está no centro do sistema, enquanto Urano está em uma órbita elíptica e atua como o terceiro corpo para perturbar o movimento da espaçonave em torno de Titânia.

Por meio de integrações numéricas das equações de movimento, construímos mapas de tempo de vida para diferentes excentricidades da órbita da espaçonave. A construção desses mapas nos permitiu encontrar valores de a , e , I , ω e Ω capazes de prolongar esse tempo de duração orbital. Também construímos "mapas de diferenças" de tempo de vida para analisar as regiões onde o efeito do terceiro corpo e os coeficientes de

gravidade de Titânia estavam em equilíbrio, permitindo uma vida mais longa para a espaçonave.

Também apresentamos uma análise abordando a importância dos ângulos ω e Ω na vida útil da sonda. Além disso, estudamos os efeitos isolados de cada perturbação considerada neste trabalho sobre os elementos orbitais de um caso específico.

Nossos resultados mostraram que, para as altitudes adotadas neste trabalho, os coeficientes de obliquidade J_2 e J_4 de Urano não afetam as órbitas da sonda espacial. Também mostramos que as órbitas com uma vida útil mais longa têm um semieixo maior próximo a 900 km, enquanto a melhor excentricidade está entre 10^{-3} e 10^{-4} . Os resultados também apontam que a inclusão de valores específicos para os ângulos ω e Ω são extremamente importantes no aumento da vida útil da sonda, uma vez que em todos os casos analisados os aumentos na vida útil foram superiores a 50% depois de usar valores específicos para esses ângulos.

Analisando o efeito de cada perturbação considerada, mostramos que o terceiro corpo é responsável por causar na excentricidade e argumento do pericentro uma maior variação, enquanto o coeficiente de elipticidade C_{22} de Titânia causa grandes oscilações na inclinação. O coeficiente zonal J_2 , quando atuando sozinho, tem pouca influência sobre os elementos orbitais, porém, quando adicionado as demais perturbações, ajuda a promover um equilíbrio entre o terceiro corpo e os coeficientes de gravidade, e assim temos o chamado “ mecanismo de proteção”, prolongando a vida útil das órbitas.

Investigamos também possíveis erros nos valores de J_2 e C_{22} através de valores atribuídos a esses coeficientes. Nosso estudo mostrou que, para um valor de excentricidade igual a 10^{-03} , as variações no tempo de vida são significativas quando considerados valores de J_2 e C_{22} indo de -10% a +10% dos valores nominais, em alguns casos o tempo de vida chega a aumentar 160 dias e para algumas órbitas diminui até 250 dias. Para outros valores de excentricidades existe também uma pequena variação para algumas combinações de valores dos coeficientes de gravidade, porém não são tão grandes quanto

para $e = 10^{-03}$.

Por fim, usamos o processo de regressão multivariável para encontrar funções capazes de determinar o tempo de vida em função das porcentagens dos coeficientes gravitacionais. Um modelo de regressão, com coeficiente de determinação igual a 0.92 foi apresentado e pode fornecer uma boa aproximação do tempo de vida em função dos possíveis erros desses coeficientes.

Diante do exposto, os resultados apresentados neste capítulo auxiliam no planejamento de missões a Titânia, o que pode fornecer dados científicos importantes, principalmente considerando que o sistema de Urano será estudado da Terra.

Alguns resultados apresentados nesse capítulo foram publicados na revista *Symmetry* e uma cópia do artigo está no Apêndice A.

Capítulo 3

Manobras Orbitais

Enviar uma sonda ao espaço é um processo que demanda muito tempo e investimento. É desejável que durante uma missão a sonda permaneça por um longo período em órbita ao redor do corpo observado. Dessa forma, a procura por órbitas com tempo de vida longo e por maneiras de evitar colisões com o alvo da missão é de suma importância para que se tenha sucesso durante a observação do objeto desejado.

Diversos trabalhos procuram por melhores órbitas ao redor de satélites naturais. No entanto, essas órbitas são analisadas até sua colisão com o corpo central. Uma das maneiras de evitar essa colisão e fazer com que o tempo de vida dessas órbitas seja prolongado é através de manobras orbitais.

Segundo [Prado e Kuga \(2001\)](#), uma manobra orbital pode ser entendida como o processo de levar uma sonda de um ponto a outro no espaço entre órbitas diferentes, fazendo com que suas condições iniciais sejam modificadas (posição, velocidade e massa) saindo de r_0 , v_0 e m_0 no instante t_0 , para r_f , v_f e m_f no instante t_f .

Para que uma manobra seja eficiente o gasto de combustível durante a transferência deve ser mínimo. Esse consumo é dado de acordo com ([Zanardi, 1990](#)):

$$m = m_0 - m_f \tag{3.1}$$

$$m_f = m_0 e^{\left(\frac{\Delta V}{c}\right)} \quad (3.2)$$

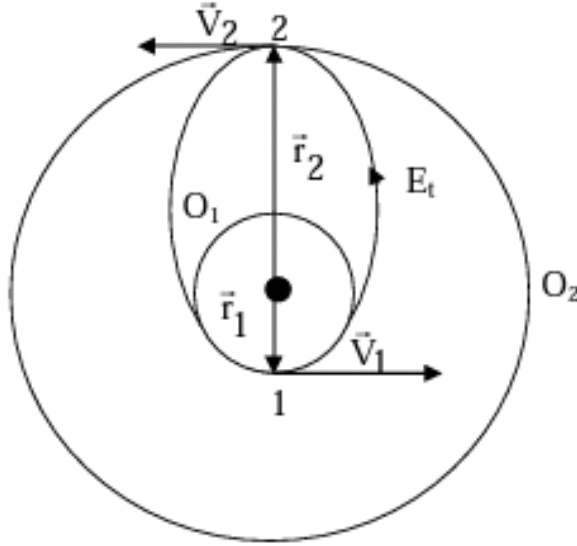
onde m_0 e m_f são a massa inicial e a massa final da sonda, respectivamente. ΔV é o incremento total de velocidade e c é a velocidade de ejeção dos gases propelentes do motor.

Em seu trabalho publicado em 1925, Hohmann apresentou um método com boa eficiência de combustível capaz de mudar a trajetória de uma sonda de uma órbita para outra. Esse método ficou conhecido como transferência de Hohmann. Ele resolve o problema de transferir um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares com dois impulsos. Ele se mostrou ótimo, do ponto de vista de mínimo consumo de combustível, quando a razão entre o raio da órbita final e inicial for menor que 11,94. Neste trabalho, usaremos uma derivação dessa transferência para realização das manobras propostas.

3.1 A transferência de Hohmann

A transferência de Hohmann é um método usado para levar uma sonda de uma órbita circular baixa para uma outra órbita circular mais alta, ambas com a mesma inclinação. Nessa transferência os propulsores da sonda são acionados uma vez, quando a sonda está na órbita mais baixa, realizando assim o primeiro impulso, ela então passa a ocupar uma órbita elíptica chamada de órbita de transferência, ou elipse de transferência. Essa elipse de transferência é tangente às órbitas inicial e final. Quando a sonda está no apogeu da órbita de transferência, os propulsores são novamente acionados realizando assim, o segundo impulso, ela então passa a ocupar a órbita circular mais alta. A soma desses dois impulsos resulta no impulso total requerido para realizar a manobra. Essa transferência apresenta uma boa eficiência energética e pode ser aplicada em qualquer ponto do espaço. Onde O_1 é a órbita circular inicial de baixa altitude, O_2 é a órbita circular final e E_t é a elipse de transferência. r_1 raio da órbita circular inicial, r_2

Figura 3.1: Transferência de Hohmann. Manobra orbital entre duas órbitas circulares.



Fonte: [Jacob \(2009\)](#)

apocentro da elipse de transferência. V_1 e V_2 são os impulsos dados nas órbitas 1 e 2, respectivamente. O tempo para realização da manobra é de meio período orbital da elipse de transferência. Um esquema dessa transferência é mostrado na Figura 3.1. As equações para realização da manobra descrita na Figura 3.1 são dadas por [Chobotov \(2002\)](#).

O semieixo maior da elipse de transferência será a média do raio da órbita de baixa altitude r_1 e o raio do apogeu da órbita 2 r_2 , ficando:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (3.3)$$

A velocidade no ponto 1 da elipse de transferência é dada por:

$$V_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a}} \quad (3.4)$$

A velocidade da órbita inicial de raio r_1 :

$$V_1' = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (3.5)$$

Logo,

$$\Delta V_1 = V_1 - V_1' \quad (3.6)$$

Desenvolvendo as equações, temos:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[\sqrt{\frac{2 \frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} + 1} - 1} \right] \quad (3.7)$$

No ponto 2, a velocidade da elipse de transferência é dada por:

$$V_2 = \sqrt{2 \left[\frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1 + r_2} \right]} \quad (3.8)$$

A velocidade da órbita de raio r_2 fica:

$$V_2' = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (3.9)$$

Então, o segundo impulso pode ser escrito como:

$$\Delta V_2 = V_2 - V_2' \quad (3.10)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\frac{r_2}{r_1} + 1}} \right] \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad (3.11)$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (3.12)$$

O tempo de manobra é:

$$t = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{2} \right]^{3/2} 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{\mu}} \quad (3.13)$$

onde μ é o parâmetro gravitacional do sistema.

A transferência de Hohmann pode ser generalizada e aplicada para manobras entre diferentes tipos de órbitas coplanares. Uma adaptação dessa transferência é o caso de uma manobra entre uma órbita elíptica baixa para uma órbita circular mais alta. Para que se tenha um baixo consumo de combustível nesse tipo de transferência, é recomendável que o primeiro impulso seja dado no apocentro da órbita elíptica inicial (Gobet e Doll, 1969).

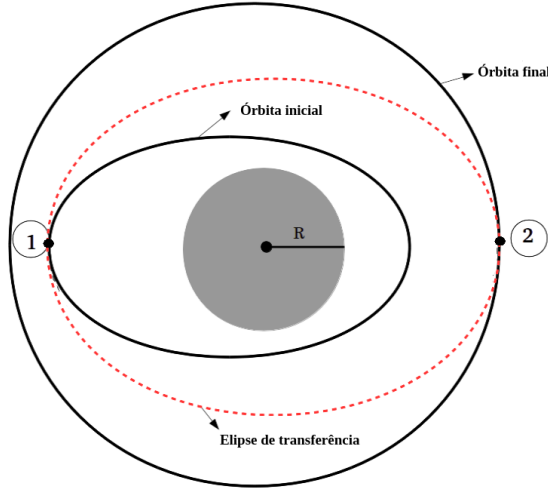
Neste capítulo apresentamos algumas manobras para transferência de uma órbita próxima a superfície de Titânia para sua órbita de origem. Para isso, analisamos o tempo de decaimento dessa órbita de origem e então escolhemos fazer a manobra quando ela estiver próxima a atingir um pericentro de 800 km. A escolha desse valor de pericentro está relacionada ao fato de Titânia ter um raio de 788.9 km. Dessa forma, esta órbita estaria muito próxima da superfície de Titânia, ou seja, perto de colidir.

Nosso objetivo com essa manobra é impedir que uma sonda colida com a superfície do satélite observado, permanecendo assim mais tempo em órbita. Para que uma manobra seja viável é fundamental que o consumo de combustível seja pequeno, dessa forma, pretendemos apresentar aqui manobras realizadas com ΔV mínimo.

3.2 A primeira manobra analisada

Durante o processo de decaimento de uma órbita, seus elementos orbitais variam. Sendo assim, ao tentar realizar uma manobra, devemos considerar algumas dessas variáveis, como semieixo maior, excentricidade e inclinação. Se uma manobra for realizada próximo

Figura 3.2: Transferência de uma órbita elíptica para uma órbita circular.



Fonte: Próprio autor.

a colisão de uma sonda com a superfície do alvo da missão, a órbita terá uma alta excentricidade e possivelmente uma variação considerável do semieixo maior. Dessa forma, apresentamos nesta seção manobras de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular. Os raios das órbitas finais pretendidas foram escolhidos de acordo com as regiões de maior duração orbital, conforme análise apresentada no Capítulo 2. Uma ilustração dessa transferência pode ser vista na Figura 3.2.

As equações para realização da manobra descrita na Figura 3.2 são escritas como:

Da mecânica celeste temos que energia é dada por:

$$\epsilon = \frac{-\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (3.14)$$

O apocentro e o pericentro da órbita inicial descrita na 3.2 valem

$$r_p = a(1 - e) \quad (3.15)$$

$$r_a = a(1 + e) \quad (3.16)$$

Com a sendo o semieixo maior e e a excentricidade da órbita inicial. Assim a velocidade no apocentro da órbita inicial será:

$$V_{ap} = \sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)} - \frac{\mu}{a}} \quad (3.17)$$

O semieixo maior da elipse de transferência é a média entre o raio da órbita circular final (r_{cir}) e o raio do apogeu da órbita inicial. Dessa forma, a velocidade no ponto 1 na órbita de transferência:

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{a(1+e)} - \frac{2\mu}{a(1+e) + r_{cir}}} \quad (3.18)$$

E o primeiro impulso então pode ser escrito como:

$$\Delta V_1 = V_{p1} - V_{ap} \quad (3.19)$$

Para a velocidade final na órbita circular final, temos:

$$V_{cir} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{cir}}} \quad (3.20)$$

E então o segundo impulso é dado por:

$$\Delta V_2 = V_{cir} - V_2 \quad (3.21)$$

onde V_2 é a velocidade do segundo impulso no ponto 2 da órbita de transferência e é dada por:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{cir}} - \frac{2\mu}{a(1+e) + r_{cir}}} \quad (3.22)$$

E por fim, o impulso total para realização da transferência é escrito como:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \quad (3.23)$$

Essas equações foram inseridas na subrotina **MFO_USER** do pacote Mercury (Chambers, 1999), nessa subrotina perturbações extras podem ser inseridas sem prejuízo das perturbações já presentes no pacote. Escolhemos seis órbitas circulares com diferentes valores de raio, analisamos seu tempo de decaimento e escolhemos o instante em que seu raio do pericentro alcançasse um valor próximo de 800 km para aplicarmos o primeiro impulso e levá-la de volta a órbita de origem. Os dados das órbitas circulares finais escolhidas são apresentados na tabela 3.1

Durante a realização das manobras os coeficientes gravitacionais J_2 e C_{22} de Titânia e a atração gravitacional de Urano foram considerados. Utilizando a equação 3.23 realizamos as manobras para órbitas desejadas e os resultados são mostrados nas figuras a seguir, que mostram algumas manobras realizadas para órbitas próximas a superfície de Titânia. Essas manobras são do tipo bi-impulsiva e coplanares, ou seja, a órbita circular final terá a mesma inclinação da órbita elíptica inicial. A elipse “preta” é a órbita inicial que, está próximo da colisão com Titânia; a linha “rosa” é a elipse de transferência, responsável por levar a sonda a sua órbita de destino; e o “círculo verde” é a órbita circular final pretendida.

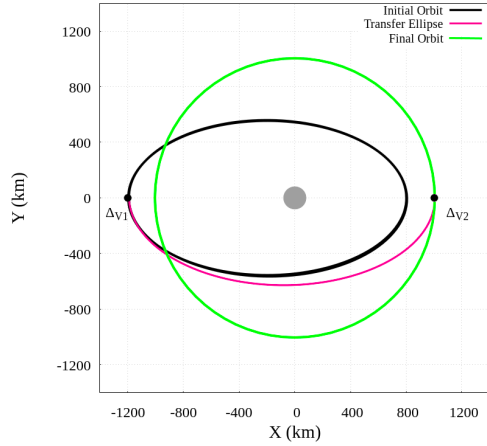
Tabela 3.1: Dados das órbitas circulares finais. Para todos os casos analisadas, $I_i = 80^\circ$.

Tempo de Decaimento (Dias)	r_{cir} (km)
285,7	1000
208,3	1200
160,1	1400
125,7	1600
102,2	1800
82,2	2000

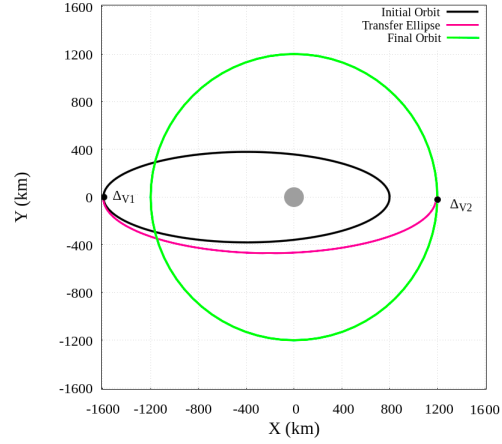
Em todas as manobras estudadas, a inclinação inicial tem um valor de 80° . A

Figura 3.3: Transferências orbitais de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de raios 1000 e 1200 km, respectivamente.

(a) Manobra 1. Órbita inicial: $a = 999$ km, $e = 0,199$, $I = 55^\circ$, $r_P = 800,121$ km, $r_{apo} = 1199$ km.



(b) Manobra 2. Órbita inicial: $a = 1199$ km, $e = 0,33$, $I = 70^\circ$, $r_P = 800,714$ km, $r_{apo} = 1597$ km.



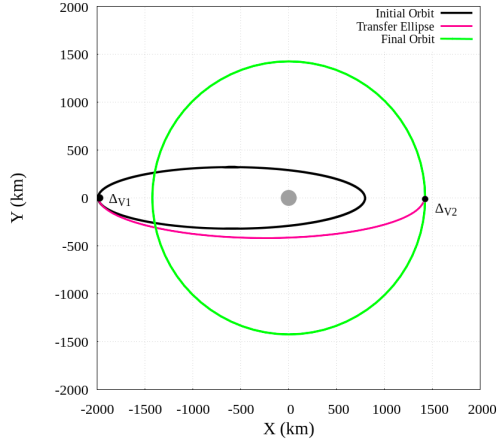
Fonte: Próprio autor.

manobra mostrada na Figura 3.3a tem como objetivo transferir uma sonda que está em uma órbita inicial elíptica (preta), para uma órbita circular final (verde), de raio igual a 1000 km. A órbita inicial tem uma excentricidade de 0,19, uma inclinação de 55° e um apocentro de 800,121 km. Para a realização desta manobra o ΔV requerido foi de $4,76428 \times 10^{-02}$ km/s. Considerando que, o tempo de decaimento da órbita é de 285,7 dias, podemos concluir que após a realização da transferência a sonda terá mais 285,7 dias de vida permanecendo assim por mais de 1 ano em órbita.

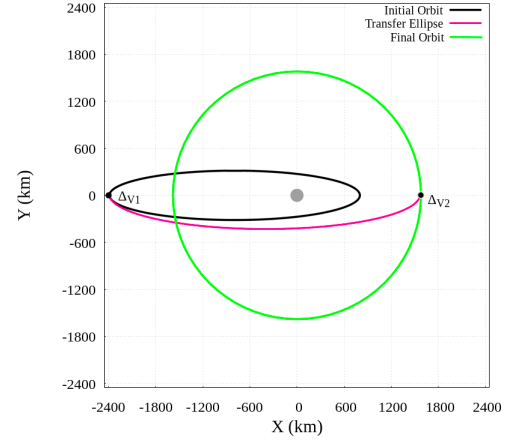
Para a manobra descrita na Figura 3.3b, a órbita final pretendida tem um raio de 1200 km e um tempo de decaimento igual a 208,3 dias. Ao atingir um pericentro de 800,714 km durante seu decaimento, uma transferência é realizada e a sonda passa a ter novamente uma órbita circular de 1200 km de raio. Nesta manobra, o ΔV total foi de $7,22965 \times 10^{-2}$ km/s. Analisando o tempo de decaimento e o tempo após a manobra,

Figura 3.4: Transferências orbitais de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de raios 1400 e 1600 km, respectivamente.

(a) Manobra 3. Órbita inicial $a = 1396$ km, $e = 0,43$, $I = 75^\circ$, $r_P = 797,3$ km, $r_{apo} = 1994$ km.



(b) Manobra 4. Órbita inicial: $a = 1597$ km, $e = 0,49$, $I = 76^\circ$, $r_P = 801,124$ km, $r_{apo} = 2392$ km.



Fonte: Próprio autor.

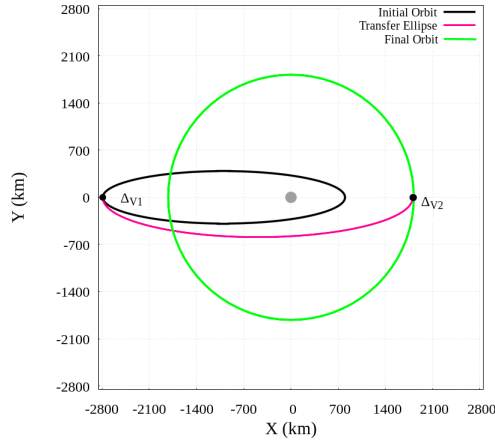
encontramos um tempo total de duração da órbita de 416,6 dias. Comparando o ΔV total usado na Manobra 1 e 2, notamos que a Manobra 1 é mais econômica que a 2, já que quanto menor o ΔV , menor será o gasto de combustível.

Na Figura 3.4a, temos uma órbita circular de raio igual a 1400 km e que demora 160,1 dias para atingir um pericentro de 797,3 km. Ao alcançar esse valor de pericentro, a excentricidade da órbita é de 0,43 e sua inclinação 75° . Assim como nos casos anteriores, quando a órbita está muito próximo de colidir com o corpo central, aplica-se um ΔV e a órbita retorna para a órbita circular de origem. Nessa manobra o ΔV usado foi de $8,68291 \times 10^{-02}$ km/s. Considerando o tempo de decaimento da órbita "verde" mais o tempo que ela vai demorar para decair novamente, concluímos que o tempo de vida total da órbita foi em torno de 320 dias.

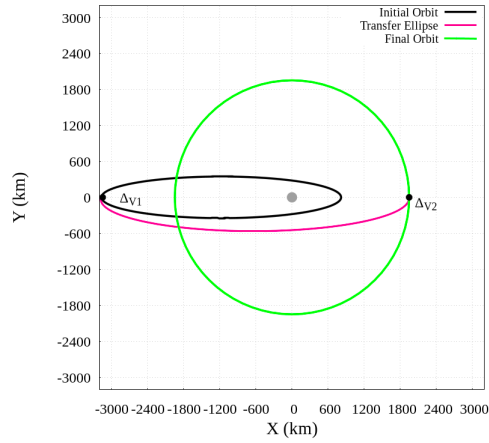
Na Manobra 4, mostrada na Figura 3.4b, o ΔV utilizado para fazer a transferência de órbita foi de $9,49833 \times 10^{-2}$ km/s. No momento da manobra a órbita "preta" com

Figura 3.5: Transferências orbitais de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de raios 1800 e 2000 km, respectivamente.

(a) Manobra 5. Órbita inicial: $a = 1797$ km, $e = 0,55$, $I = 74,8^\circ$, $r_P = 800,855$ km, $r_{apo} = 2793$ km.



(b) Manobra 6. Órbita inicial: $a = 1996$ km, $e = 0,56$, $I = 77,5^\circ$, $r_P = 817,585$ km, $r_{apo} = 3176$ km.



Fonte: Próprio autor.

semieixo maior de 1597 km, excentricidade igual a 0,49, inclinação de 76° e um raio de pericentro de 801,124 km. O tempo total de duração da órbita foi de aproximadamente 252,4 dias.

Nossos resultados anteriores mostraram que, para todos os valores de e analisados, as órbitas com maior tempo de vida se encontravam próximas a superfície de Titânia. No entanto, é importante estudarmos manobras realizadas para altitudes maiores, pois pode ser de interesse da missão analisar outros pontos nas proximidades da lua em questão. Dessa forma, as manobras 5 e 6 pretendem levar a sonda para órbitas com raios de 1800 e 2000 km de altitude, respectivamente, e elas são mostradas nas Figuras 3.5a e 3.5b. As órbitas circulares (verde), mostradas nas Figuras 3.5a, e 3.5b, tem tempo de decaimento de 102,2 e 82,2 dias, respectivamente. O ΔV total para realização das duas manobras mencionadas foi de $1,00389 \times 10^{-1}$ km/s para a Manobra 5 e $1,02089 \times 10^{-1}$ km/s para a Manobra 6. O tempo de vida total da órbita descrita na Manobra 5 foi de 204,4 dias e

para manobra 6 de 164,4 dias. A economia de uma manobra pode ser estimada através da relação $\Delta V/t$, em que t é o tempo decorrido até a manobra. Essa relação aponta o quanto de ΔV será gasto por dia de vida, quanto menor esse valor, mais econômica será a manobra. A tabela 3.2 mostra essa relação para cada manobra realizada.

Através da Tabela 3.2 é possível notar que a melhor transferência é a apresentada na Manobra 1. Ela tem o menor valor de $\Delta V/t$ ($1,667 \times 10^{-4}$ km/(s.Dias)) em comparação aos demais valores usados nas outras manobras. Além disso, considerando a manobra e o tempo de decaimento da órbita circular inicial, o tempo de duração orbital para essa manobra é de mais de um ano. Um bom tempo quando se trata de uma missão espacial.

Tabela 3.2: Relação de incremento da velocidade por tempo de vida $\Delta V/t$ utilizado em cada transferência. Raios das órbitas circulares finais pretendidas 1000 km, 1200 km, 1400 km, 1600 km, 1800 km e 2000 km.

Manobra	$\Delta V/t$ km/(s.Dias)
1	$1,667 \times 10^{-4}$
2	$3,470 \times 10^{-4}$
3	$5,423 \times 10^{-4}$
4	$7,556 \times 10^{-4}$
5	$9,822 \times 10^{-4}$
6	$1,241 \times 10^{-3}$

Pequenas mudanças nas condições iniciais de uma órbita podem fazer com que o seu tempo de vida seja curto e a órbita alcance altos valores de excentricidades e inclinações. Algumas manobras são realizadas depois de uma grande mudança em sua posição inicial com o intuito de corrigir essa defasagem e retornar a órbita para sua posição de origem. Os próximos resultados analisam os maiores valores de defasagem na inclinação e no semieixo maior para então, efetuar a manobra. Para isso, três valores iniciais de inclinação foram considerados, 70° , 80° e 90° . O objetivo dessa escolha é investigar para qual valor de inclinação inicial a defasagem é maior. Para tal análise, adotou-se os seguintes passos:

I- integração das órbitas iniciais circulares;

II- análise do decaimento dessas órbitas;

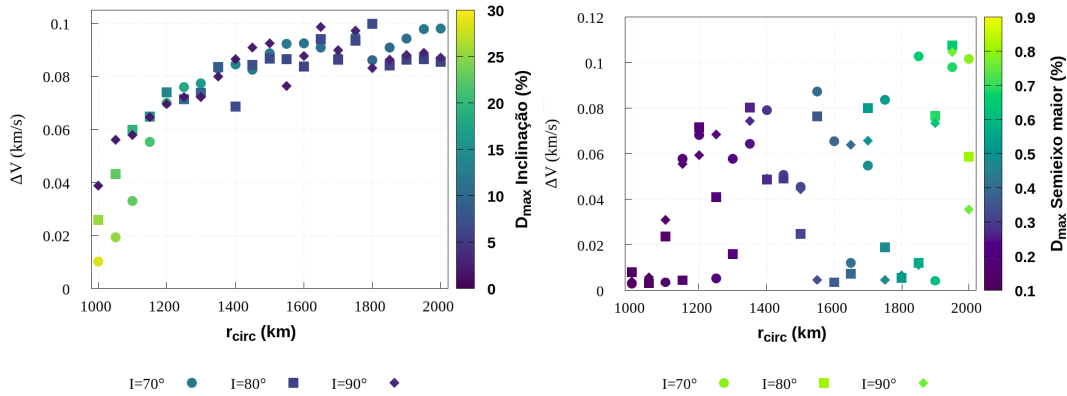
III- encontrar nessas órbitas os pontos de máxima defasagem na inclinação e no semieixo maior;

IV- realização das manobras para os casos apontados em III) para retornar o veículo espacial de volta para posição de origem (órbitas circulares iniciais).

As equações usadas nas manobras são descritas nas equações 3.14-3.23.

Nas figuras abaixo, apresentamos os resultados de algumas dessas manobras.

Figura 3.6: ΔV em função do raio da órbita circular final e da defasagem máxima da inclinação (esquerda). ΔV em função do raio da órbita circular final e da defasagem máxima do semieixo maior (direita). Analisando três valores iniciais de inclinação 70° , 80° e 90° , $a_i = 1000 - 2000$ km, $e_i = 0$ e $\omega = \Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 3.6 (lado esquerdo), apresenta valores de ΔV mínimo para três valores de inclinação 70° , 80° e 90° em função do raio da órbita circular final pretendida e da máxima defasagem da inclinação. É possível observar que as órbitas com maior defasagem, de 20-30% do valor inicial, são as que tem uma inclinação inicial de 70° e 80° . Nesse caso, quando as órbitas atingem essa defasagem o tempo de vida chega próximo de 240-250 dias e o ΔV requerido para atingir novamente a órbita circular de raio igual a 1000 km é em torno de $1 \times 10^{-2} - 6 \times 10^{-2}$ km/s. Considerando que as órbitas com esse valor de inclinação tem um tempo total de vida de 252 dias, conclui-se

que a máxima defasagem da inclinação acontece dias antes da colisão do "objeto" com a superfície do corpo central.

No caso de uma órbita com inclinação inicial de 90° a máxima defasagem de I é de até 5% para todas as órbitas finais. No entanto, o ΔV varia de $4 \times 10^{-2} - 1 \times 10^{-1}$ km/s e o tempo de decaimento vai de 1-17 dias. Os menores valores de ΔV são para as manobras realizadas para alcançar órbitas finais com raios entre 1000-1200 km. São essas órbitas também a apresentarem a maior taxa de defasagem na inclinação.

Na Figura 3.6 (lado direito), a taxa de defasagem apresentada é com relação ao semieixo maior. Essa taxa é bem pequena, entre 0,1-0,9 % do valor inicial. Para os três casos de inclinação analisados, 70° , 80° e 90° existem casos de máxima variação do semieixo maior 0,6-0,9 %. Nesses casos, o ΔV varia de $8 \times 10^{-2} - 1,1 \times 10^{-1}$ km/s. Assim como no caso da Figura da esquerda, os casos com menor valor de ΔV são para órbitas finais de raio entre 1000-1200 km.

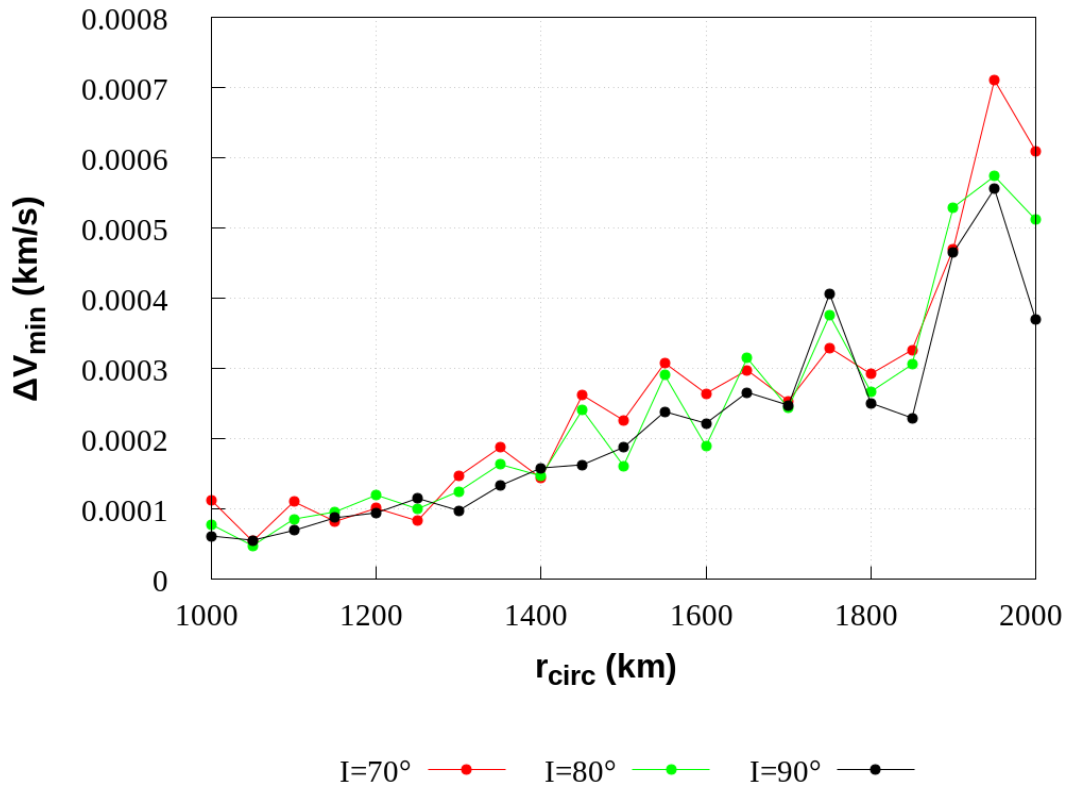
A fim de analisar os melhores valores de ΔV utilizados para realização de manobras orbitais, a Tabela 3.3 mostra alguns valores de ΔV usados para órbitas defasadas em inclinação e semieixo maior. Para cada valor de inclinação, $I = 70^\circ$, $I = 80^\circ$ e $I = 90^\circ$, dois valores de ΔV são apresentados, assim como as condições iniciais para realização das manobras. Os casos são apresentados para órbitas finais com raios iguais a 1000, 1200, 1400, 1600, 1800 e 2000 km. Na tabela, o período orbital é medido a partir do período da órbita mais próxima da superfície do corpo central.

Tabela 3.3: Valores de ΔV para manobras com valores significativos de defasagem na inclinação e no semieixo maior. Condições iniciais usadas nas manobras como inclinação inicial, tempo de duração orbital, raio do apocentro (r_{apo}), raio da órbita circular final (r_{circ}), defasagem do semieixo maior (Def_a) e da inclinação (Def_I) em porcentagem, e o ΔV equivalente.

I ($^\circ$)	Tempo (Períodos Orbitais*)	r_{Apo} (km)	r_{circ} (km)	Def_a (%)	Def_I (%)	ΔV (km/s)
$I_i = 70^\circ$	2172	1042	1000	0,44	28,3	$1,01924 \times 10^{-2}$
	1490	1014	1000	0,1	18,8	$3,64307 \times 10^{-3}$
$I_i = 80^\circ$	2264	1107	1000	0,07	25,4	$2,58233 \times 10^{-2}$
	1709	1034	1000	0,05	15,1	$8,37701 \times 10^{-3}$
$I_i = 90^\circ$	2236	1145	1000	0,06	2,0	$3,5056 \times 10^{-2}$
	2036	1088	1000	0,06	1,8	$2,13379 \times 10^{-2}$
$I_i = 70^\circ$	2136	1585	1200	0,06	20	$7,00389 \times 10^{-2}$
	1818	1385	1200	0,07	16	$3,39091 \times 10^{-2}$
$I_i = 80^\circ$	1872	1562	1200	0,13	13	$6,61089 \times 10^{-2}$
	1518	1325	1200	0,07	8	$2,29661 \times 10^{-2}$
$I_i = 90^\circ$	1800	1538	1200	0,04	1,8	$6,14487 \times 10^{-2}$
	1481	1320	1200	0,07	1,4	$2,21336 \times 10^{-2}$
$I_i = 70^\circ$	1581	1990	1400	0,11	13,3	$8,56530 \times 10^{-2}$
	1272	1605	1400	0,14	7,6	$3,00371 \times 10^{-2}$
$I_i = 80^\circ$	1436	1948	1400	0,11	7,6	$7,94813 \times 10^{-2}$
	1272	1700	1400	0,12	5,0	$4,35522 \times 10^{-2}$
$I_i = 90^\circ$	1400	1912	1400	0,09	1,9	$7,41071 \times 10^{-2}$
	1281	1716	1400	0,16	1,7	$4,59638 \times 10^{-2}$
$I_i = 70^\circ$	1227	2383	1600	0,19	11	$9,38662 \times 10^{-2}$
	1154	2172	1600	0,3	8,0	$6,82032 \times 10^{-2}$
$I_i = 80^\circ$	1118	2302	1600	0,18	6,0	$8,37429 \times 10^{-2}$
	1000	2006	1600	0,18	4,0	$4,83667 \times 10^{-2}$
$I_i = 90^\circ$	1127	2332	1600	0,3	2,2	$8,76695 \times 10^{-2}$
	927	1880	1600	0,18	1,8	$3,35513 \times 10^{-2}$
$I_i = 70^\circ$	963	2653	1800	0,5	8,6	$8,64782 \times 10^{-2}$
	881	2383	1800	0,4	6	$5,85486 \times 10^{-2}$
$I_i = 80^\circ$	918	2784	1800	0,3	6,8	$9,98393 \times 10^{-2}$
	845	2447	1800	0,4	4,3	$6,49976 \times 10^{-2}$
$I_i = 90^\circ$	890	2626	1800	0,3	2,4	$8,31088 \times 10^{-2}$
	809	2325	1800	0,3	2,2	$5,26781 \times 10^{-2}$
$I_i = 70^\circ$	800	3125	2000	0,4	12	$9,8090 \times 10^{-2}$
	718	2751	2000	0,3	6,4	$6,4183 \times 10^{-2}$
$I_i = 80^\circ$	727	2990	2000	0,4	6,0	$8,55579 \times 10^{-2}$
	645	2609	2000	0,2	4,0	$5,1819 \times 10^{-2}$
$I_i = 90^\circ$	727	3006	2000	0,4	3,2	$8,71594 \times 10^{-2}$
	572	2352	2000	0,26	2,3	$3,02839 \times 10^{-2}$

Algumas missões optam por corrigir a posição do veículo espacial com pouco tempo de vida, anterior a uma grande defasagem de sua posição. Na Figura 3.7 apresentamos um estudo que busca encontrar um ΔV mínimo para realizar um transferência orbital antes de uma grande variação de sua posição inicial. Dessa forma, agora as manobras de interesse não são as manobras com uma grande taxa de defasagem na inclinação ou no semieixo maior. Assim como feito nos casos anteriores, para os três valores de inclinação analisados, os valores mínimos de ΔV são calculados para os casos em que as órbitas finais tem raios de 1000-2000 km.

Figura 3.7: ΔV mínimo em função do raio circular da órbita final pretendida. Analisando três valores iniciais de inclinação 70° , 80° e 90° em cores vermelho, verde e preto, respectivamente. $a_i = 1000 - 2000$ km, $e_i = 0$ e $\omega = \Omega = 0^\circ$. Raio das órbitas finais pretendidas 1000 – 2000 km.



Fonte: Próprio autor.

Como mostrado na Figura 3.7, o menor valor de ΔV encontrado é de aproximadamente $5,4 \times 10^{-5}$ km/s para uma órbita final com raio de 1050 km, para todos os valores de inclinação. No caso da órbita com inclinação de 70° essa manobra foi realizada depois de 14 dias de decaimento, no tempo mencionado, a e e assumidos na realização da manobra são $1,0492 \times 10^3$ km e $2,3 \times 10^{-4}$, respectivamente. A taxa de defasagem da inclinação para esse valor de ΔV é de 0,4% e do semieixo maior, de 0,01 %.

Para I igual a 80° e 90° , esse valor de ΔV mínimo é encontrado depois de 5 dias de vida. No caso de $I = 80^\circ$, no momento da manobra o valor do semieixo maior é de $1,0497 \times 10^3$ km e da excentricidade $2,0 \times 10^{-4}$. As taxas de defasagens na inclinação e no semieixo maior são 0,36 % e 0,02 %, respectivamente.

Para uma inclinação de 90° , a manobra é realizada quando $a = 1,0497 \times 10^3$ km e $e = 2,03 \times 10^{-4}$. A defasagem na inclinação é aproximadamente 0,3 % e no semieixo maior 0,023 %

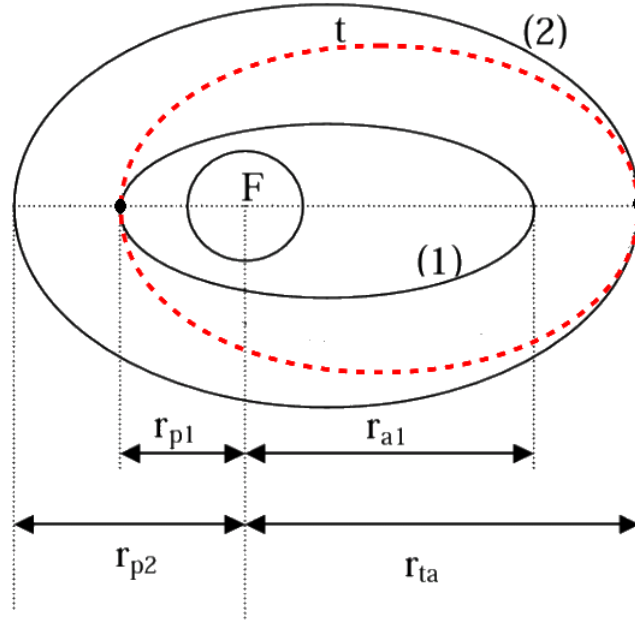
Dentro desse range de valor mínimo, é possível identificar que para uma órbita final de raio igual a 1950 km, o ΔV necessário para realizar a manobra é maior em comparação aos outros casos analisados. Para as órbitas com inclinação inicial de 80° e 90° . Esses valores são próximos de $5,7 \times 10^{-4}$ km/s para $I = 80^\circ$ e $5,55 \times 10^{-4}$ km/s para $I = 90^\circ$. Para $I = 70^\circ$ essa órbita pode ser alcançada com um ΔV igual a $7,1 \times 10^{-4}$ km/s.

3.3 Transferência entre duas órbitas elípticas

A próxima manobra realizada será de uma órbita inicial elíptica para outra órbita final também elíptica, essas órbitas são coplanares. A Figura 3.8 abaixo mostra como será a manobra realizada.

Na Figura 3.8, a órbita (1) é a órbita elíptica inicial, r_{p1} a distância do pericentro

Figura 3.8: Manobra entre duas órbitas elípticas.



Fonte: Adaptado de [Jacob \(2009\)](#)

ao foco (F), r_{a1} a distância do apocentro ao foco, ambas relativas à órbita (1). A órbita (t) é órbita elíptica de transferência que tangencia o pericentro da órbita (1). Para esta órbita de transferência temos que a distância do apocentro ao foco é r_{ta} . A órbita (2) é a órbita elíptica final desejada. Onde r_{p2} é a distância do pericentro ao foco e $r_{a2} = r_{ta}$ é a distância do apocentro ao foco, ambas com relação à órbita (2).

As equações para a realização de uma manobra desse tipo são dadas por:

Para a órbita inicial 1 no pericentro, temos:

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{\mu}{a}} \quad (3.24)$$

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{a1}}} \quad (3.25)$$

Para a órbita de transferência, no pericentro, temos:

$$V_{pt} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{ta}}} \quad (3.26)$$

Logo,

$$\Delta V_1 = V_{pt} - V_{p1} \quad (3.27)$$

No apocentro da elipse de transferência, a velocidade é:

$$V_{at} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ta}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{ta}}} \quad (3.28)$$

Com relação à órbita 2, temos:

$$V_{a2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ta}} - \frac{2\mu}{r_{p2} + r_{ta}}} \quad (3.29)$$

Logo,

$$\Delta V_2 = V_{a2} - V_{at} \quad (3.30)$$

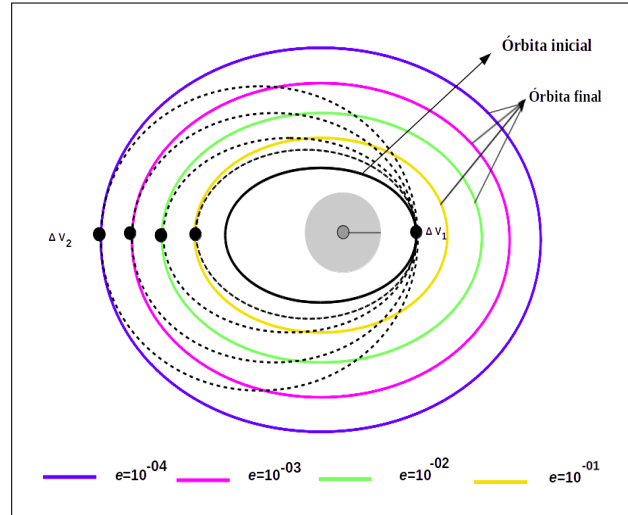
E portanto:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \quad (3.31)$$

As próximas discussões são acerca dos resultados de simulações feitas para manobras entre duas órbitas elípticas. No capítulo 2 analisamos o decaimento orbital de objetos com valores de excentricidade (e) iguais a 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} e 10^{-1} . Concluimos que o tempo de vida era maior para órbitas com um valor de excentricidade igual a 10^{-3} .

Dessa forma, as órbitas finais pretendidas possuem os mesmos valores de excentricidade das órbitas estudadas no referido capítulo (10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} e 10^{-1}). A Figura 3.9 mostra a representação dessas órbitas.

Figura 3.9: Representação das órbitas elípticas finais pretendidas. Laranja para órbita final com excentricidade igual a 10^{-01} , verde para e igual a 10^{-02} , rosa para e igual a 10^{-03} e azul para e igual a 10^{-04} .



Fonte: Próprio autor.

Para cada valor de excentricidade foi feito um conjunto de simulações para a realização das manobras. O processo pode ser descrito da seguinte maneira:

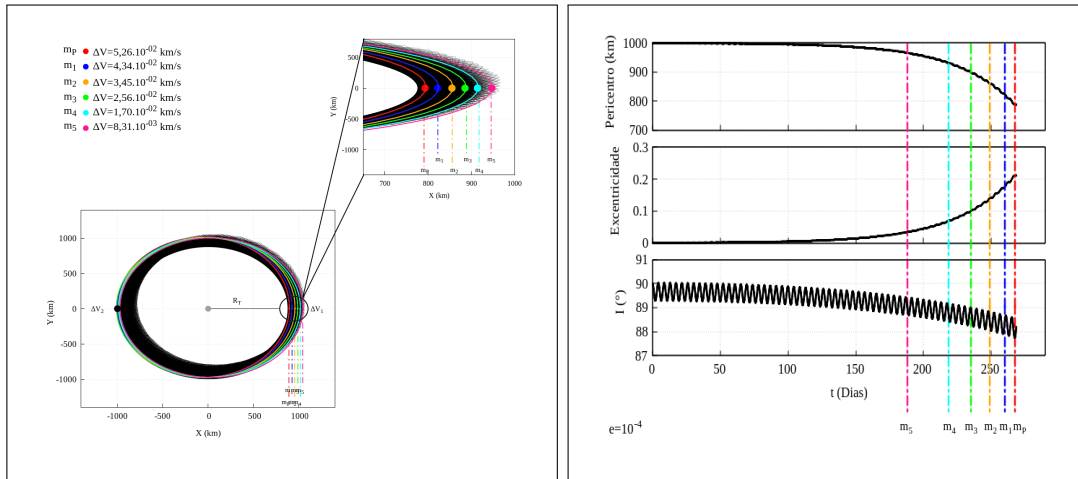
- I- É feita uma simulação de uma órbita com valor inicial de excentricidade;
- II- O decaimento é analisado e pontos da órbita são escolhidos para realizar a manobra;
- III- As manobras são realizadas voltando o "objeto" para órbita inicial, com o mesmo valor de excentricidade do início.
- IV- O valor de ΔV para cada manobra é encontrado.

Foram escolhidos seis pontos da órbita para realização das manobras, para cada valor de e investigado. O objetivo dessa escolha é analisar se é mais viável fazer várias manobras sucessivas antes da colisão, ou uma única manobra momentos antes da colisão do veículo espacial com a superfície da lua. Tais manobras são descritas como $\mathbf{m_P}$, $\mathbf{m_1}$,

m_2, m_3, m_4 e m_5 . Sendo m_P , a manobra principal, isso se deve ao fato desta manobra ser realizada no ponto mais próximo da superfície de Titânia, ou seja, mais próximo da colisão acontecer. O valor aproximado de pericentro para essa manobra é 790 km para todos os valores de e . O ponto para a manobra m_5 é o mais afastado da superfície da lua, uma manobra realizada com poucos dias de decaimento em comparação com m_P e o valor do pericentro para m_5 é de aproximadamente 965 km. As manobras m_1, m_2, m_3 e m_4 são realizadas em pontos intermediários entre m_P e m_5 . O pericentro de m_1 está em torno de 825 km, de $m_2 \approx 860$ km, $m_3 \approx 895$ km, $m_4 \approx 930$ km e $m_5 \approx 965$ km. Os pontos variam de 35 em 35 km.

Todas as simulações foram feitas considerando $a = 1000$ km, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$ e os coeficientes gravitacionais de J_2 e C_{22} de Titânia. Além da atração gravitacional de Urano.

Figura 3.10: Projeção das posições orbitais para as seis manobras realizadas m_P, m_1, m_2, m_3, m_4 e m_5 para $e = 10^{-04}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do raio do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-4}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

O primeiro conjunto de manobras foi feito para $e = 10^{-4}$, nesse caso, o tempo de

vida total foi de 268,536 dias. Todos os pontos da órbita considerados para a realização das manobras são representados na Figura 3.10 (lado esquerdo). A fim de relacionar a variação de alguns parâmetros no momento da realização das manobras, a 3.10 (lado direito) mostra o dia e o valor de alguns elementos orbitais e do pericentro para cada manobra realizada.

Para a manobra principal m_P , os parâmetros considerados foram: $a = 9,993 \times 10^{02}$ km, $e = 2,094 \times 10^{-01}$, $I = 87,9^\circ$, pericentro= 790,0 km, apocentro= 1208,59 km e tempo de realização da manobra igual a 267,26 dias. Considerando esses valores temos um decaimento de aproximadamente 21% no valor do pericentro, 2,3% no valor da inclinação e de 0,1 % no semieixo maior. Além de um aumento em 3 ordens de grandeza na excentricidade. A manobra m_P foi realizada cerca de um dia antes da colisão. O ΔV estimado para essa transferência foi $\approx 5,26 \times 10^{-02}$ km/s. A representação da localização desta manobra pode ser vista na Figura 3.10 com o ponto na cor vermelha.

A segunda manobra para $e = 10^{-4}$ (m_1) foi realizada com 259,87 dias de integração, 8 dias antes da colisão, aproximadamente. Nesse ponto escolhido, o pericentro da órbita era de 825,09 km, aproximadamente 17,5% do seu valor inicial. As outras condições iniciais foram: $a = 9,989 \times 10^{02}$ km, $e = 1,740 \times 10^{-01}$, $I = 88,3^\circ$, e apocentro = 1172,88 km. Para a realização dessa manobra o ΔV empregado foi aproximadamente, $4,34 \times 10^{-02}$ km/s. Analisando a variação dos elementos orbitais para esta manobra, é possível observar que durante 259,87 dias o pericentro diminuiu quase 180 km, a inclinação $1,4^\circ$ e o semieixo maior 2 km. A manobra m_1 é representada pelo ponto e linha azul no gráfico da Figura 3.10.

A manobra (m_2) foi realizada em 248,59 dias, cerca de 19 dias antes da colisão. Nessa manobra, o ΔV requerido para que a órbita com excentricidade de 10^{-4} fosse alcançada foi de $3,45 \times 10^{-02}$ km/s. Foram usadas as seguintes condições iniciais para a execução da manobra: $a = 9,991 \times 10^{02}$ km, $e = 1,392 \times 10^{-01}$, $I = 88,5^\circ$, pericentro=860,01 km, e apocentro=1138,35 km. De todas as variações dos elementos orbitais durante o

decaimento da órbita, o pericentro foi o que teve uma maior porcentagem de alteração, decaiu quase 14% do seu valor inicial. O semieixo maior e a inclinação diminuíram 0,1% e 1,66% respectivamente. No caso da excentricidade houve um aumento em três ordens de grandeza com relação ao seu valor inicial. A cor que representa esta manobra na 3.10 é a cor laranja.

Na 3.10 a cor que representa a manobra (m_3) para $e = 10^{-4}$ é a cor verde. O tempo de vida para esta manobra foi de 234,86 dias, quase 33 dias antes da colisão. Nesta manobra, o decaimento do pericentro foi de aproximadamente 10%, passou de um valor inicial de 999,9 km para 895 km. A excentricidade aumentou duas ordens de grandeza, $e = 9,970 \times 10^{-02}$ e o apocentro aumentou em quase 103 km. O semieixo maior e inclinação tiveram uma variação pequena, 0,1% e 1,22%, respectivamente. A manobra m_3 tem uma defasagem menor dos elementos orbitais, com relação às manobras anteriores, no entanto, o ponto de realização da manobra pode ser de interesse de uma missão e o ΔV necessário para essa mudança de órbita é de $2,56 \times 10^{-02}$ km/s.

No caso da manobra (m_4), representada na Figura 3.10 pela cor azul claro, o tempo para realização da manobra foi de 218,20 dias. A manobra antecedeu 50,336 dias da colisão e seu pericentro era de 930,16 km, quase 7% de defasagem comparado ao seu valor inicial. No caso da inclinação a defasagem era pequena, em torno de 1,33%. A excentricidade com um valor de $6,951 \times 10^{-02}$ e um ΔV de $1,70 \times 10^{-02}$ km/s foi empregado para atingir a mesma posição de origem.

A última manobra para $e = 10^{-4}$ mostrada no gráfico da Figura 3.10 na cor rosa, foi realizada quando a órbita atingiu 187,84 dias de vida. Como já mencionado, essa manobra é feita com menos dias de vida em relação as outras e, portanto, tem um decaimento de pericentro menor. As condições iniciais desse ponto da órbita são: $a = 9,991 \times 10^{02}$ km, $e = 3,420 \times 10^{-02}$, $I = 89^\circ$, pericentro = 965,01 km e apocentro = 1033,37 km. A defasagem do pericentro foi de $\approx 3,5\%$ e da inclinação $\approx 1,11\%$ e o incremento da velocidade de $\Delta V = 8,31 \times 10^{-03}$ km/s.

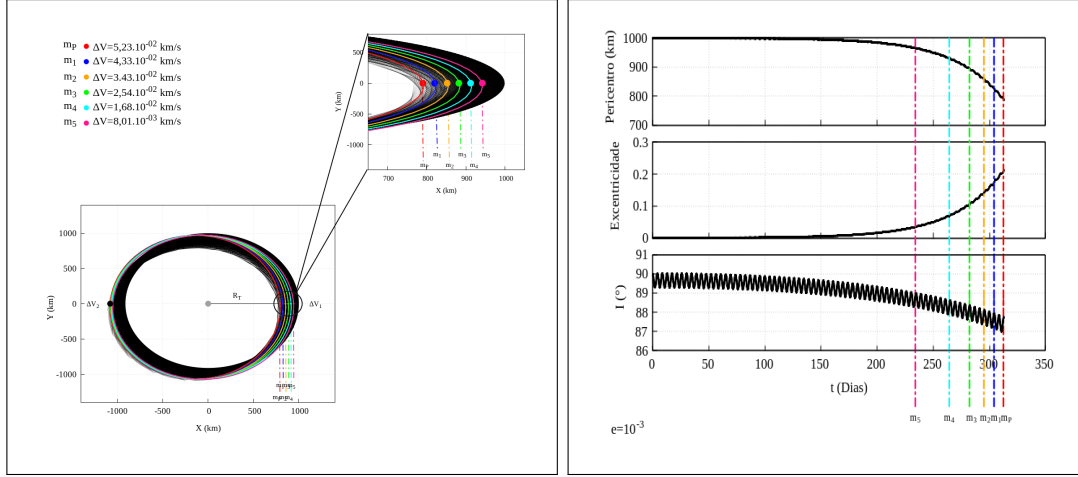
Fazendo uma comparação de todas as manobras realizadas para $e = 10^{-04}$ é possível observar que a melhor manobra é a (m_5). O ΔV de $8,31 \times 10^{-03}$ km/s é bem menor para a quantidade de dias de vida. Em comparação com as outras manobras, (m_P) por exemplo, se duas manobras (m_5) forem feitas a órbita pode ter um tempo de vida de até 374 dias com $2 \times \Delta V$ igual a $1,662 \times 10^{-02}$ km/s. Enquanto duas manobras (m_P) terá um tempo de vida de ≈ 534 dias mas um ΔV total de $1,052 \times 10^{-01}$ km/s, quase $6 \times$ maior que o ΔV total usado em (m_5). Se fizermos 6 manobras no ponto para a manobra (m_5) teríamos um tempo de vida maior e com um gasto de combustível menor. Essa comparação vale para as outras manobras também.

O próximo conjunto de simulações para a realização das manobras foi feito para $e = 10^{-3}$. Assim como no caso anterior, foram escolhidos seis pontos da órbita para fazer a manobra. Nesse caso, o tempo de duração orbital foi de 313 dias. A representação dos pontos orbitais e das variações dos elementos orbitais para essa manobra são apresentados na Figura 3.11.

A primeira manobra, m_P foi realizada 1 dia antes da colisão, em 312,57 dias. O pericentro da órbita era de 790,15 km, quase 20,4% menor que seu valor inicial, 999,9 km e o apocentro 1207,56 km, em torno de 205 km maior. O semieixo maior sofreu um decaimento pequeno, um pouco mais de 1 km e a inclinação, em torno de $2,6^\circ$. No caso da excentricidade a variação foi de duas ordens de grandeza para mais em seu valor inicial, $2,089 \times 10^{-01}$. O ΔV para a realização desta manobra foi de $\approx 5,23 \times 10^{-02}$ km/s. Comparando a mesma manobra realizada para $e = 10^{-4}$ ($\approx 5,26 \times 10^{-02}$) km/s, é possível afirmar que a diferença de um caso para outro é mínima.

A manobra m_1 aconteceu com 304,44 dias de duração ou seja, 8,56 dias antes da colisão. Para essa manobra, considerou-se um pericentro de 825,18 km, 17,4% menor que seu valor inicial e um apocentro de 1157 km, quase 15% maior que o valor anterior ao decaimento. As outras condições iniciais foram: $a = 9,999 \times 10^{02}$ km, $e = 1,747 \times 10^{-01}$, $I = 87,9^\circ$. O valor de ΔV encontrado foi aproximadamente $4,33 \times 10^{-02}$ km/s. Fazendo

Figura 3.11: Projeção das posições orbitais para as seis manobras realizadas m_P , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e m_5 para $e = 10^{-03}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do raio do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. Tempo de simulação igual a 313 dias.



Fonte: Próprio autor.

uma comparação com o valor de ΔV encontrado para m_1 no caso anterior, nota-se que os valores são bem próximos e a diferença é irrelevante.

Para a manobra m_2 usamos as condições iniciais: tempo de realização da manobra de 295,15 dias, quase 18 dias anteriores a colisão. $a = 9,996 \times 10^{02}$ km, $e = 1.396 \times 10^{-01}$, $I = 88,0^\circ$, pericentro = 860,10 km e apocentro = 1139,22 km. Em relação à variação dos parâmetros, tivemos um decaimento de quase 14% no pericentro e 2,2% para a inclinação. Com essas condições iniciais, encontramos um ΔV de $\approx 3,43 \times 10^{-02}$ km/s. Assim como nas manobras anteriores, o valor de ΔV para m_2 é muito próximo do valor de ΔV encontrado para a mesma manobra analisada no caso de $e = 10^{-4}$.

Em m_3 o ΔV encontrado foi de $2,54 \times 10^{-02}$ km/s em um tempo de 282,04 dias, que antecedeu 30,96 dias da colisão. Nesse ponto, a órbita possui um valor de semieixo maior igual a $9,990 \times 10^{02}$ km, excentricidade $1,041 \times 10^{-01}$ e inclinação igual a $88,2^\circ$. Pericentro com defasagem de 10,4% e apocentro com aumento de quase 10,2 %. A

manobra m_3 também tem valor similar ao analisado para $e = 10^{-4}$. Para m_4 o valor de ΔV encontrado foi de $\approx 1,68 \times 10^{-02}$ km/s para um tempo de vida de 264,93 dias. Nessa manobras o pericentro teve um decaimento de quase 7% e a inclinação de $\approx 1,5\%$. Pericentro = 930,03 km, apocentro = 1069,74 km e uma excentricidade igual a $6,986 \times 10^{-02}$. Para a mesma manobra analisada em 10^{-04} , podemos dizer que os valores de ΔV são próximos.

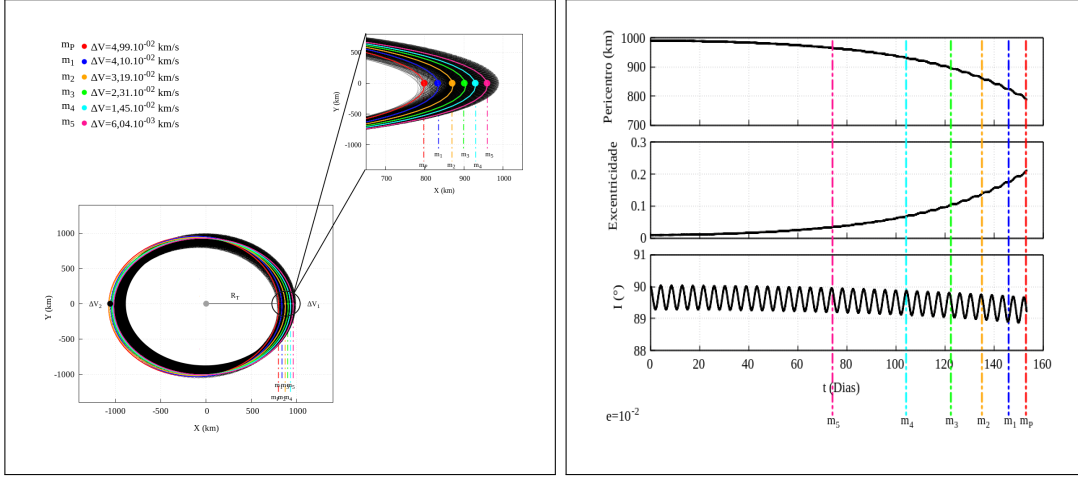
Esse conjunto de simulações para $e = 10^{-03}$ se encerra com a manobra m_5 , representada na Figura 3.11 com a cor rosa. Para a transferência orbital, considerou-se as seguintes condições iniciais: $a = 9,989 \times 10^{02}$ km, $e = 3,388 \times 10^{-02}$, $I = 88,9^\circ$, pericentro = 965,05 km e apocentro = 1032,76 km. Para encontrar o ΔV de $8,01 \times 10^{-03}$ km/s foi considerado um decaimento de $\approx 3,4\%$ do pericentro e de $\approx 1,22\%$ da inclinação e um tempo de vida de 234,19 dias, quase 79 dias antes da colisão. É possível ver a relação da variação desses elementos com o dia de realização da manobra na Figura 3.11 (lado direito) representada pela cor rosa.

Fazendo uma análise semelhante a que foi feita para as simulações de $e = 10^{-04}$, dessa vez entre m_5 e m_1 , notamos que a manobra m_5 é a mais viável de todas. Enquanto m_5 gastou $8,01 \times 10^{-03}$ km/s para realizar uma manobra após 234 dias de vida, em m_1 o gasto foi de $4,33 \times 10^{-02}$ km/s para 304,44 dias de vida. Se fizermos duas manobras m_5 teremos a sonda em órbita por 468,38 dias gastando um ΔV total de $1,602 \times 10^{-02}$ km/s. No caso de duas manobras m_1 o ΔV total seria de $8,66 \times 10^{-02}$ km/s para um pouco mais que 608 dias de vida, quase 5,4 vezes maior que o ΔV usado para duas manobras m_5 .

A Figura 3.12 mostra os pontos escolhidos na órbita para a realização das manobras m_P , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e m_5 para o caso $e = 10^{-02}$. O tempo total de integração é de 153,2 dias. Assim como nos casos anteriores, a cor vermelha (m_P), azul (m_1), laranja (m_2), verde (m_3), azul claro (m_4) e rosa (m_5) mostradas na Figura 3.12 representam os pontos da órbita onde as manobras foram feitas e os dias de vida que as órbitas tinham

no momento da transferência.

Figura 3.12: Projeção das posições orbitais para as seis manobras realizadas m_P , m_1 , m_2 , m_3 , m_e e m_5 para $e = 10^{-02}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-2}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. Tempo de simulação igual a 153.2 dias.



Fonte: Próprio autor.

Para esse valor de excentricidade, a manobra m_P foi realizada com um ΔV de $4,99 \times 10^{-02}$ km/s. Em comparação aos valores de ΔV para m_P encontrados nos casos para e igual a 10^{-4} e 10^{-3} , esse valor é levemente menor, em torno de $\approx 5\%$. Nessa manobra, a defasagem do pericentro foi de 20,2%, e de apenas 0,6% para a inclinação. As outras condições iniciais usadas foram: $a = 9,988 \times 10^{02}$, $e = 2,089 \times 10^{-01}$, $I = 89,4^\circ$, apocentro=1207,00 km. A manobra aconteceu em 152,68 dias, 0,5 dia antes da colisão com o corpo central.

No caso de m_1 o tempo de manobra antecedeu quase sete dias da colisão (145,90 dias). Com um decaimento de quase 17% no pericentro (825,01 km) e de 1,2% na inclinação, o ΔV necessário para realizar a transferência foi de $\approx 4,10 \times 10^{-02}$ km/s. O semieixo maior foi de $9,995 \times 10^{02}$ km, excentricidade igual a $1,745 \times 10^{-01}$ e apocentro = 1174,00 km. A manobra m_1 também tem um valor um pouco menor que as manobras

analisadas nos casos anteriores, também em torno de 5%, para os mesmos valores de pericentro.

O tempo de manobra para m_2 foi de 135,00 dias, 18 dias antes do fim da integração. Para a realização dessa manobra foi encontrado um ΔV de $\approx 2,92 \times 10^{-02}$ km/s. Fazendo uma comparação com os valores de ΔV encontrados para os casos $e = 10^{-04}$ e $e = 10^{-03}$, ΔV agora tem um valor quase 15% menor. A órbita elíptica inicial tem um $a = 9,991 \times 10^{02}$ km, $e = 1,389 \times 10^{-01}$, $I = 89,6^\circ$, pericentro=860,26 km ($\approx 13\%$ menor que o valor inicial) e apocentro=1137,90 km ($\approx 13\%$ maior que o valor inicial).

Para a manobra m_3 realizada aproximadamente 30 dias antes da colisão, a órbita possuía as seguintes condições iniciais: $a = 9,989 \times 10^{02}$ km, $e = 1,039 \times 10^{-01}$, $I = 89,5^\circ$, pericentro=895,07 km, com um decaimento de quase 9% e um apocentro de 1102,80 km, quase 93 km maior que seu valor inicial. O impulso total na velocidade foi de $\approx 2,31 \times 10^{-02}$ km/s, esse valor é quase 10% menor que os valores de ΔV encontrados nos casos $e = 10^{-04}$ e $e = 10^{-03}$.

A manobra de cor azul claro, m_4 , aconteceu em 104,85 dias. Para encontrar o acréscimo de velocidade ΔV neste ponto, considerou-se um pericentro com uma defasagem de 6% em relação ao seu valor anterior. A inclinação teve uma variação pequena, $\approx 0,3\%$ desde o início da integração até o momento da manobra. O semieixo maior igual a $9,993 \times 10^{02}$ km, excentricidade = $6,931 \times 10^{-02}$, $I = 89,7^\circ$, pericentro = 930,07 km e apocentro= 1068,6 km. Com esses valores de condições iniciais encontrou-se um ΔV de $1,45 \times 10^{-02}$ km/s. Esse valor de ΔV também é consideravelmente menor que os valores encontrados para m_4 nos casos anteriores.

A última manobra m_5 para $e = 10^{-02}$ foi realizada depois de 74,11 dias de vida. Na Figura 3.12 essa manobra pode ser vista com a cor rosa. Para essa manobra as condições iniciais consideradas foram: $a = 9,999 \times 10^{02}$ km, $e = 3,482 \times 10^{-02}$, $I = 89,8^\circ$, pericentro = 965,14 km com decaimento de 2,5% e apocentro = 1034,7 km. Nesse caso, o ΔV calculado foi de $6,04 \times 10^{-03}$ km/s.

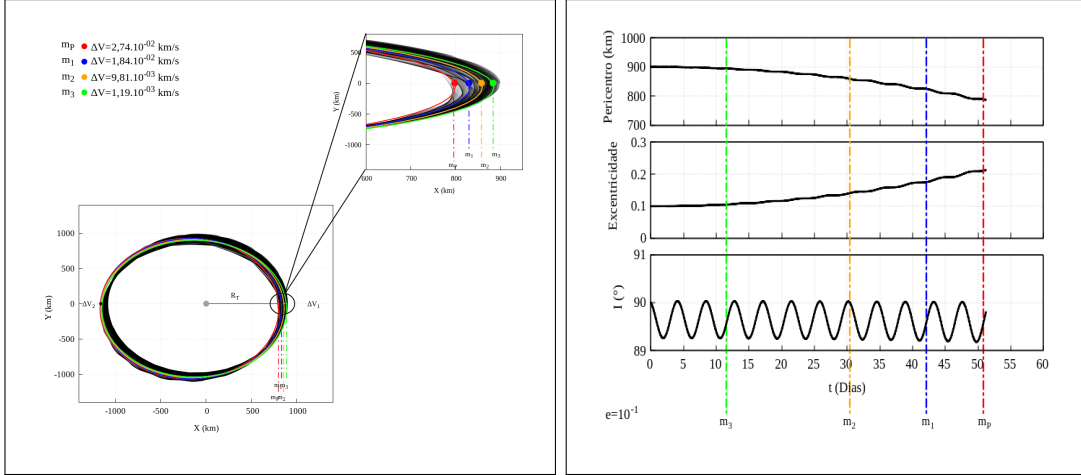
Em todas as manobras, m_P , m_1 , m_2 , m_3 , m_4 e m_5 realizadas para uma órbita final com excentricidade igual a 10^{-02} , os valores encontrados para ΔV apresentam valores menores que aos encontrados para as mesmas manobras analisadas para $e = 10^{-04}$ e $e = 10^{-03}$. Em termos de porcentagem podemos dizer que $m_P \approx 5\%$, $m_1 \approx 5\%$, $m_2 \approx 15\%$, $m_3 \approx 9\%$, m_4 entre 15 e 17% e m_5 entre 25 e 27 % menor para $e = 10^{-02}$ em relação as casos anteriores.

A manobra m_5 se apresenta, novamente, como a melhor das outras cinco manobras encontradas. Aqui, faremos uma comparação dessa manobra com m_2 . Fazendo duas manobras m_5 teremos um órbita com tempo de vida de aproximadamente 148 dias e para isso um ΔV total de $1,208 \times 10^{-02}$ km/s. Porém, fazendo duas manobras m_2 a órbita terá um tempo de vida de 270 dias de vida para um ΔV total de $6,38 \times 10^{-02}$ km/s. Apesar do tempo de vida ser maior para m_2 , o incremento na velocidade para m_5 é quase 5,2 vezes menor.

Por fim, apresentamos na Figura 3.13 os resultados para as manobras realizadas para $e = 10^{-01}$. Para esse caso, consideramos apenas quatro manobras, m_P , m_1 , m_2 e m_3 . Essa escolha se justifica pelo fato do pericentro inicial das órbitas começarem em 990 km, ou seja, os pontos para as manobras m_4 (pericentro = 930 km) e m_5 (pericentro = 965 km) não podem ser avaliados. As cores e pontos são os mesmos considerados nos casos anteriores de m_P até m_3 . O tempo total de integração nesse caso foi de 52 dias.

A manobra m_P foi realizada considerando um pericentro de 790 km e um apocentro=1209,5 km. O semieixo maior com um valor de $9,998 \times 10^{02}$ km, excentricidade igual a $2,098 \times 10^{-01}$ e inclinação $I = 89,5^\circ$. O impulso total de $2,74 \times 10^{-02}$ km/s foi dado quase um dia antes da colisão com o corpo central e no momento da manobra a defasagem do pericentro era de aproximadamente 12,2% e de 0,55% para a inclinação. Em comparação aos valores de ΔV analisados para m_P nos casos anteriores, o valor encontrado é 45% menor ao valor encontrado para $e = 10^{-02}$, quase 48% menor para $e = 10^{-03}$ e para $e = 10^{-04}$.

Figura 3.13: Projeção das posições orbitais para quatro manobras realizadas m_P , m_1 , m_2 e m_3 para $e = 10^{-01}$ (lado esquerdo). Variação dos elementos orbitais e e I e do raio do pericentro em função do tempo de vida e do tempo de realização das manobras (lado direito). Condições iniciais: $a = 1000$ km, $e = 10^{-1}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. Tempo de simulação igual a 52 dias.



Fonte: Próprio autor.

No caso de m_1 o acréscimo na velocidade foi dado quase oito dias antes da colisão, em 42,12 dias. O valor de $\Delta V = 1,84 \times 10^{-02}$ km/s é aproximadamente 55% menor ao valor encontrado para o caso $e = 10^{-02}$, 57% menor para $e = 10^{-03}$ e 57,6% menor para $e = 10^{-04}$. Para essa transferência, o valor de a da órbita era de $9,994 \times 10^{02}$ km, e igual $1,744 \times 10^{-01}$, $I = 89,5^\circ$, pericentro = 825,07 km, apocentro = 1173,7 km e tempo de manobra 42,12 dias.

O tempo de realização da manobra m_2 foi em 30,46 dias, um pouco mais que 21 dias antes da colisão. O valor de ΔV usado para realizar a transferência de órbita foi de $\approx 9,81 \times 10^{-03}$ km/s. A órbita inicial possuía, no momento da manobra, um pericentro de 860,0 km, 4,44% de defasagem em relação ao seu valor inicial. O valor de a igual a $1,0 \times 10^{03}$ km, $e = 1,399 \times 10^{-01}$, $I = 89,9^\circ$ e apocentro = 1140,0 km, quase 4% maior que seu valor inicial. O ΔV usado nessa manobra é significativamente menor que os encontrados para m_2 nos casos anteriores. Em relação às manobras m_2 realizadas para

os casos anteriores, essa manobra teve um ΔV 71,5% e 71,4% menor para os casos $e = 10^{-04}$ e $e = 10^{-03}$, respectivamente. Para $e = 10^{-02}$ essa diferença foi 66,4% menor.

A última manobra (m_3) para $e = 10^{-01}$ teve o menor valor de ΔV encontrado em relação a todos os casos analisados, $\approx 1,19 \times 10^{-03}$ km/s. O alto valor da excentricidade faz com que a colisão com o corpo central aconteça com poucos dias de integração, com isso, a manobra é realizada com poucos dias de vida. Nesse caso, a transferência aconteceu com apenas 11,53 dias de duração orbital. Para fazer essa manobra as seguintes condições iniciais foram consideradas, $a = 9,998 \times 10^{02}$ km, $e = 1,048 \times 10^{-01}$, $I = 89,5^\circ$, apocentro = 895,0 km e pericentro = 1104,0 km. Como já mencionado, essa manobra apresentou o menor gasto para fazer uma transferência de uma órbita elíptica para outra, comparando com a mesma manobra realizada para $e = 10^{-04}$, essa manobra tem um ΔV 95% menor, para $e = 10^{-03}$ essa porcentagem é de 95,3% e 94,8% para $e = 10^{-02}$.

Fazendo duas manobras m_P teremos um ΔV de $5,48 \times 10^{-02}$ km/s e um pouco mais de 100 dias de vida. Enquanto duas manobras m_3 teria um ΔV de $2,38 \times 10^{-03}$ km/s para ≈ 23 dias. O gasto com a manobra m_P é muito maior em comparação com m_3 , uma vez que o ΔV usado na manobra com poucos dias de vida é 23 vezes menor. Fazendo mais uma análise de m_P com outra manobra, agora m_2 confirmamos que para esse caso m_3 também é mais econômica. Para realizar duas manobras m_2 o ΔV encontrado é de $\approx 1,962 \times 10^{-02}$ km/s para conseguir um tempo de vida um pouco maior que 60 dias. Esse valor é 8 vezes maior que o ΔV de duas manobras m_3 . Dessa forma, conclui-se que a melhor manobra para $e = 10^{-01}$ é m_3 .

Todos os parâmetros usados na realização das manobras discutidas nessa seção e mostradas nas Figuras 3.10-3.13 são mostrados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Valores de ΔV e condições iniciais usadas na realização das manobras m_P , m_1 , m_2 e m_3 para os quatro valores de excentricidade estudados, $e = 10^{-04}$, $e = 10^{-03}$, $e = 10^{-02}$ e $e = 10^{-01}$. $\mathbf{T}_{\text{manobra}}$ é o tempo que a manobra foi realizada e $\mathbf{T}_{\text{colisão}}$ é o tempo de colisão.

Casos Analisa- dos	ΔV (km/s)	a_1 (km)	e_1	$I_1(^{\circ})$	r_{p1} (km)	r_{ap1} (km)	$\mathbf{T}_{\text{manobra}}$ (Dias)	$\mathbf{T}_{\text{colisão}}$ (Dias)
$e = 10^{-1}$	$2,74 \times 10^{-02}$ (m_P)	$9,998 \times 10^{02}$	$2,098 \times 10^{-01}$	89,5	790,0	1209,5	50,83	52
	$1,84 \times 10^{-02}$ (m_1)	$9,994 \times 10^{02}$	$1,744 \times 10^{-01}$	89,5	825,07	1173,7	42,12	
	$9,81 \times 10^{-03}$ (m_2)	$1,0 \times 10^{03}$	$1,399 \times 10^{-01}$	89,9	860,0	1140,0	30,46	
	$1,19 \times 10^{-03}$ (m_3)	$9,998 \times 10^{02}$	$1,048 \times 10^{-01}$	89,5	895,0	1104,0	11,53	
$e = 10^{-2}$	$4,99 \times 10^{-02}$ (m_P)	$9,988 \times 10^{02}$	$2,089 \times 10^{-01}$	89,4	790,0	1207,0	152,68	153,2
	$4,10 \times 10^{-02}$ (m_1)	$9,995 \times 10^{02}$	$1,745 \times 10^{-01}$	88,9	825,01	1174,0	145,9	
	$2,92 \times 10^{-02}$ (m_2)	$9,991 \times 10^{02}$	$1,389 \times 10^{-01}$	89,6	860,26	1137,90	135,0	
	$2,31 \times 10^{-02}$ (m_3)	$9,989 \times 10^{02}$	$1,039 \times 10^{-01}$	89,5	895,07	1102,80	122,35	
	$1,45 \times 10^{-02}$ (m_4)	$9,993 \times 10^{02}$	$6,931 \times 10^{-02}$	89,7	930,07	1068,60	104,85	
	$6,04 \times 10^{-03}$ (m_5)	$9,999 \times 10^{02}$	$3,482 \times 10^{-02}$	89,8	965,14	1034,70	74,110	
10^{-3}	$5,23 \times 10^{-02}$ (m_P)	$9,988 \times 10^{02}$	$2,089 \times 10^{-01}$	87,6	790,15	1207,56	312,57	313
	$4,33 \times 10^{-02}$ (m_1)	$9,999 \times 10^{02}$	$1,747 \times 10^{-01}$	87,9	825,18	1174,67	304,44	
	$3,43 \times 10^{-02}$ (m_2)	$9,996 \times 10^{02}$	$1,396 \times 10^{-01}$	88,0	860,10	1139,22	295,15	
	$2,54 \times 10^{-02}$ (m_3)	$9,99 \times 10^{02}$	$1,041 \times 10^{-01}$	88,2	895,0	1103,01	282,04	
	$1,68 \times 10^{-02}$ (m_4)	$9,998 \times 10^{02}$	$6,986 \times 10^{-02}$	88,6	930,03	1069,74	264,93	
	$8,01 \times 10^{-03}$ (m_5)	$9,989 \times 10^{02}$	$3,388 \times 10^{-02}$	88,9	965,05	1032,76	234,19	
10^{-4}	$5,26 \times 10^{-02}$ (m_P)	$9,993 \times 10^{02}$	$2,094 \times 10^{-01}$	87,7	790,0	1208,59	267,26	268,536
	$4,34 \times 10^{-02}$ (m_1)	$9,989 \times 10^{02}$	$1,74 \times 10^{-01}$	88,3	825,09	1172,88	259,87	
	$3,45 \times 10^{-02}$ (m_2)	$9,991 \times 10^{02}$	$1,392 \times 10^{-01}$	88,5	860,01	1138,35	248,59	
	$2,56 \times 10^{-02}$ (m_3)	$9,988 \times 10^{02}$	$9,97 \times 10^{-02}$	88,9	895,0	1103,21	234,86	
	$1,7 \times 10^{-02}$ (m_4)	$9,996 \times 10^{02}$	$6,951 \times 10^{-02}$	88,8	930,16	1069,15	218,20	
	$8,31 \times 10^{-03}$ (m_5)	$9,991 \times 10^{02}$	$3,42 \times 10^{-02}$	89,0	965,01	1033,37	187,40	

Os resultados discutidos nessa seção foram essenciais para mostrarem as melhores condições para realização de manobras envolvendo duas órbitas elíptica coplanares. Nossas simulações apontaram que as manobras mais econômicas são aquelas realizadas com pouca variações dos elementos orbitais, ou seja, com pouca variação da sua posição inicial. Nas figuras onde a relação da variação desses elementos com o tempo de manobra é apresentada, fica evidente que essas manobras são as mais viáveis.

Outro fato importante retirado dos resultados apresentados nessa seção é que as

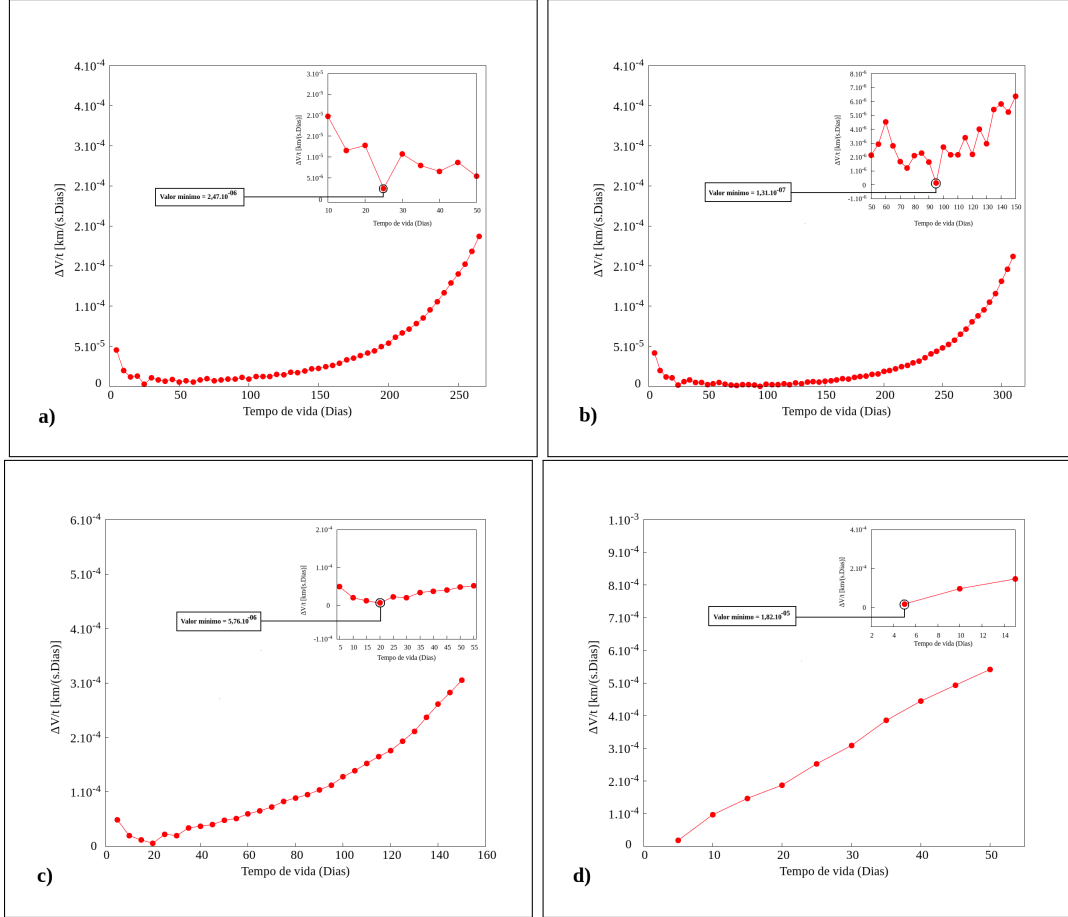
manobras com menores custos são aquelas para órbitas finais com valores de excentricidade iguais a 10^{-02} e 10^{-01} . As manobras realizadas com intuito de alcançar uma órbita final com esses valores de e apresentaram valores de ΔV baixos em comparação com as outras manobras realizadas para órbitas finais com valores de e iguais a 10^{-04} e 10^{-03} . As manobras que tinham como destino final uma órbita com $e = 10^{-01}$ apresentaram um valor de ΔV até 95% menor que as manobras realizadas para os outros valores de e analisados. Além disso, fica evidente que as manobras para orbitas finais com $e = 10^{-03}$ e $e = 10^{-04}$ possuem valores de ΔV muito próximos. Dessa forma, é mais vantajoso realizar a transferência para uma órbita final com $e = 10^{-03}$, uma vez que o tempo de vida para uma órbita com esse valor de excentricidade é maior, cerca de 45 dias a mais em relação a uma órbita com $e = 10^{-04}$.

Uma outra maneira de mostrar o quanto uma manobra é econômica em relação às demais é avaliar o ΔV gasto por dia de realização da manobra $\Delta V/t$, em função do tempo de vida, essa análise é mostrada em trabalhos anteriores como o de [Ferreira et al. \(2022\)](#) para encontrar melhores pontos para a realização de manobras orbitais de veículos em torno de satélites naturais. A Figura 3.14 mostra essa relação em função do tempo de vida para os quatro valores de excentricidade estudadas.

A Figura 3.14 mostra o quanto de combustível por dia uma manobra requer para corrigir a posição de uma órbita. A figura apresenta também um valor de $\Delta V/t$ mínimo, no entanto, é preciso analisar a viabilidade desse valor em função da quantidade de dias de vida. Quanto mais próximo de zero for essa razão, mais econômica será a manobra. Essa figura é capaz de complementar de maneira eficaz os resultados apresentados nas Figuras 3.10-3.13. É possível observar que os menores valores de $\Delta V/t$ são para um tempo de vida bem anterior ao de colisão.

No caso da Figura 3.14a, em que a excentricidade considerada é $e = 10^{-04}$, os melhores valores se encontram em um intervalo de 20-100 dias. Em 25 dias é encontrado um valor mínimo de $2,47 \times 10^{-06}$ km/(s.Dias). Nesse ponto o ΔV é de $6,19 \times 10^{-05}$ km/s.

Figura 3.14: Análise da economia de combustível de uma manobra orbital através da relação $\Delta V/t$ versus tempo de vida. Valor mínimo de $\Delta V/t$ para todos os casos analisados. **a)** Caso estudado para $e = 10^{-04}$. **b)** Caso estudado para $e = 10^{-03}$. **c)** Caso estudado para $e = 10^{-02}$. **d)** Caso estudado para $e = 10^{-01}$. Condições iniciais: $a = 1000$ km, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

Com 12 manobras com esse valor, já conseguimos o mesmo tempo de vida da manobra m_P realizada um dia antes da colisão e com um gasto mínimo de combustível.

O mesmo comportamento é verificado para a Figura 3.14b, para $e = 10^{-03}$. Nesse caso, a duração orbital é maior, isso faz com a variação dos elementos orbitais seja mais lenta. Com isso, o valor de $\Delta V/t$ mínimo se encontra em um intervalo de 25-150 dias,

mais precisamente em 95 dias. Esse valor de $1,37 \times 10^{-07}$ km/(s.Dias) é equivalente a um ΔV de $1,31 \times 10^{-05}$ km/s, assim como no caso anterior, esse é o melhor valor de ΔV em função do tempo de vida. Seriam necessárias poucas manobras com esse valor para obter um significativo aumento no tempo de vida. É possível verificar também que os melhores pontos para efetuar a manobra são para órbitas com tempo de vida bem menor que o tempo de colisão.

Na análise apresentada na Figura 3.14c para $e = 10^{-02}$, os menores valores de $\Delta V/t$ são vistos para poucos dias de integração. Devido ao alto valor da excentricidade, os valores mínimos de $\Delta V/t$ se encontram em torno de 5 a 40 dias. Em 20 dias temos o menor valor, $5,76 \times 10^{-06}$ km/(s.Dias). Nesse ponto, o ΔV é de $1,15 \times 10^{-04}$ km/s. Fazendo uma comparação entre o ΔV encontrado para a manobra m_P feita dias antes da colisão e com o valor de ΔV relacionado ao ponto destacado na Figura 3.14c, é muito mais viável fazer várias manobras com o valor mínimo encontrado do que realizar a manobra dias antes da colisão. Com 8 manobras de valor $1,15 \times 10^{-04}$ km/s conseguimos a duração orbital da manobra m_P gastando muito menos.

Os valores de $\Delta V/t$ mostrados na Figura 3.14d, são para órbitas com excentricidade igual a 10^{-01} . Nessa figura é possível notar que os valores de $\Delta V/t$ tem comportamento semelhante aos apresentados nos casos anteriores. O valor mínimo encontrado é de $1,82 \times 10^{-05}$ km/(s.Dias) em cinco dias de integração. O ΔV relacionado é de $9,11 \times 10^{-05}$ km/s e nesse caso esse também é o melhor valor de ΔV para esse caso.

3.4 Conclusões

Neste capítulo apresentamos algumas manobras orbitais para órbitas próximas a superfície de Titânia. Essas manobras foram realizadas considerando a perturbação do terceiro corpo e dos coeficientes gravitacionais de Titânia J_2 e C_{22} .

A primeira manobra considerada é do tipo bi-impulsiva e foi realizada transferindo

uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular de mesma inclinação. Para realização da manobra, dois impulsos foram aplicados, o primeiro impulso no apocentro da órbita elíptica inicial e o segundo impulso no pericentro da elipse de transferência, pontos 1 e 2 da Figura 3.2, respectivamente. A soma dos dois impulsos fornece o ΔV total usados nas manobras.

Escolhemos fazer a manobra quando as órbitas alcançassem um pericentro na faixa de $795 \leq r_p \leq 805$ km. Escolhemos esse intervalo de valores para que a manobra desejada pudesse acontecer momentos antes da colisão com a superfície de Titânia, já que seu raio é de 788.9 km. Consideramos 6 órbitas circulares com raios de 1000, 1200, 1400, 1600, 1800 e 2000 km, respectivamente. Analisamos o tempo de decaimento dessas órbitas separadamente e quando elas alcançaram um valor r_p dentro do intervalo mencionado, realizamos a manobra. Nossos resultados mostraram que as transferências podem prolongar o tempo de vida da órbita. A Manobra 1 se mostrou muito eficiente, pois apresenta o menor valor para relação $\Delta V/t = 1,667 \times 10^{-04}$ km/(s.Dias). Dessa forma, temos uma transferência que pode deixar a órbita em sua trajetória de origem usando um ΔV baixo.

Em seguida apresentamos um estudo sobre manobras para órbitas com alta defasagem na inclinação e no semieixo maior. Com o objetivo de investigar qual órbita apresenta uma maior defasagem ao longo de sua duração orbital, consideramos três valores iniciais de inclinação, 70, 80 e 90 graus. Os raios das órbitas finais pretendidas eram 1000-2000 km. Nossos resultados mostraram que as órbitas com valor inicial de inclinação igual a 70° eram as que apresentavam uma maior defasagem com relação aos outros valores de inclinação. Foi observado também que as melhores manobras encontradas foram para órbitas com raios menores, entre 1000-1050 km. Encontramos ainda um valor de ΔV mínimo igual a $5,4 \times 10^{-05}$ km/s comum para todos os valores de inclinação.

Mostramos ainda um conjunto de simulações para manobras entre duas órbitas

elípticas coplanares. As órbitas finais possuem excentricidades de 10^{-04} , 10^{-03} , 10^{-02} e 10^{-01} , valores estes estudados no Capítulo 2 e por esse motivo são considerados aqui. Consideramos alguns pontos na órbita para comparar a viabilidade de uma manobra para outra.

Para os valores de 10^{-04} , 10^{-03} , 10^{-02} consideramos seis pontos nas órbitas e para 10^{-01} três pontos.

Os resultados desse conjunto de simulações mostraram que as manobras efetuadas com poucos dias de vida eram mais econômicas que as manobras realizadas perto da colisão. Esses resultados são confirmados analisando a relação $\Delta V/t$ que mostrou que a velocidade por tempo de manobra era realmente menor para órbitas com poucos dias de vida e consequentemente, com uma variação menor dos elementos orbitais.

Diante do que foi apresentado aqui, podemos afirmar que o uso de manobras orbitais são de grande importância para futuras missões espaciais para o satélite Titânia, pois, seu uso pode aumentar significativamente o tempo de vida das órbitas.

Capítulo 4

Órbitas de sondas espaciais ao redor de satélites planetários

Alguns satélites naturais possuem características únicas e fazem parte de sistemas também peculiares. Por exemplo, enquanto todas as principais luas saturnianas orbitam o planeta acompanhando o plano orbital de seus anéis, Jápeto tem inclinação diferente das outras luas [Nesvorný et al. \(2014\)](#). Tritão, maior lua de Netuno, viaja em torno do planeta em uma órbita circular, em direção oposta àquela de Netuno. Isso pode indicar que a lua não se formou perto do planeta, de modo que, talvez ela seja simplesmente um objeto que foi capturado pela gravidade do planeta e por ali permaneceu [Agnor e Hamilton \(2006\)](#). Além disso, alguns desses satélites são extremamente achatados ou alongados, como a lua de Saturno, Atlas. Fobos e Deimos, luas de Marte também têm coeficientes gravitacionais elevados o que faz com o formato de ambos seja mais próximo de um corpo irregular, tal como um asteroide. Além disso, esses satélites se encontram a uma distância pequena de Marte.

Essas particularidades influenciam na duração orbital de qualquer veículo espacial que tenha como alvo satélites com essas particularidades. Diante do exposto, investigar variações de distância e massa do terceiro corpo em função de vários valores dos

coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} pode ajudar a projetar diferentes cenários para órbitas ao redor desses corpos.

No Capítulo 2, apresentamos as melhores órbitas ao redor de Titânia considerando a perturbação de Urano. Nesse caso, a distância entre os dois corpos é de $435,8 \times 10^3$ km e a razão de massa entre eles (M_U/m_T), é da ordem de 10^4 . Sendo m_T e M_U as massas de Titânia e Urano respectivamente.

Neste capítulo, analisamos a perturbação na órbita de uma sonda causada por diversos valores de massa e de distância do perturbador em função de alguns valores de J_2 e C_{22} . Para isso, atribuímos valores hipotéticos a J_2 e C_{22} . Esses valores foram atribuídos considerando a ordem de grandeza de coeficientes gravitacionais já conhecidos de alguns corpos do Sistema Solar. Faremos também algumas aplicações das análises extraídas deste capítulo para alguns sistemas de interesse.

Consideramos cinco valores para os coeficientes J_2 e C_{22} , 11 valores de distância e 11 valores de massa do perturbador. Para as variações na distância do perturbador (D_P), fixamos a massa do terceiro corpo em uma massa de Urano (M_U) e fizemos D_P variando de 0,4 a $19,7 R_U$. Para variações na massa (M_P), fixamos a distância até Urano em 435×10^3 km, que é aproximadamente a distância real Urano-Titânia e variamos a massa M_P de 0,1 a $2,0 M_U$. O corpo central continua com os parâmetros relacionados a Titânia. Os valores desses parâmetros são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores usados nas simulações para massa (M_P), distância do perturbador (D_P), valores hipotéticos de J_2 e C_{22} . Condições iniciais da sonda para cada caso analisado

	D_P (R_U)	M_P (M_U)	J_2	C_{22}	
	0,4	0,1	10^{-01}	10^{-01}	
	2,0	0,3	10^{-02}	10^{-02}	
	4,0	0,5	10^{-03}	10^{-03}	
	6,0	0,7	10^{-04}	10^{-04}	
	7,8	0,9	10^{-05}	10^{-05}	
	9,8	1,1	-	-	
	11,8	1,3	-	-	
	13,8	1,5	-	-	
	15,8	1,7	-	-	
	17,8	1,9	-	-	
	19,7	2,0	-	-	
Condições iniciais da sonda					
Caso	a (km)	e	I ($^{\circ}$)	ω ($^{\circ}$)	Ω ($^{\circ}$)
1	870	0	90	0	0
2	1870	0	90	0	0
3	3870	0	90	0	0
4	1870	0	80	0	0
5	1870	10^{-03}	90	0	0
6	1870	10^{-01}	90	0	0

Os demais valores de condições iniciais para o terceiro corpo como, e , I , ω , Ω e M , são os mesmos dados na Tabela 2.2. Para a órbita da sonda, analisamos alguns casos específicos. Todas as condições iniciais para órbita da sonda para os casos analisados são mostrados na Tabela 4.1.

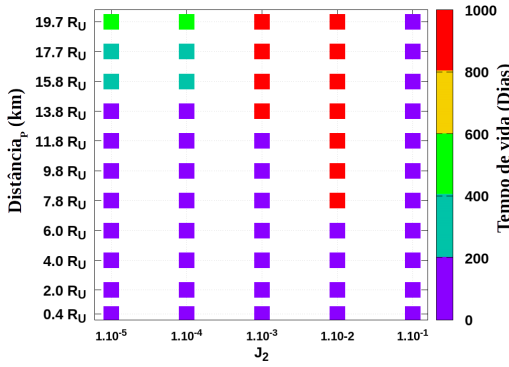
4.1 Analisando a influência da distância e massa do perturbador

Nesta seção, apresentaremos mapas de tempos de vida para órbitas com as condições iniciais mostradas na Tabela 4.1 em função da distância e da massa do perturbador e dos coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} . Para isso, fixamos a massa do perturbador em

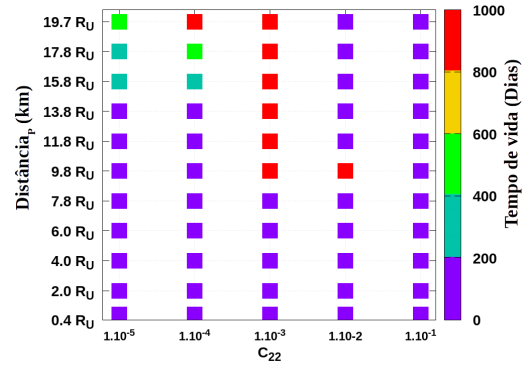
1 massa de Urano (M_U) e as condições iniciais da sonda são $a = 870$ km, $e = 0$ e 90° e $\omega = \Omega = 0^\circ$.

Figura 4.1: Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e de massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 870$ km, $e = 0.0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.

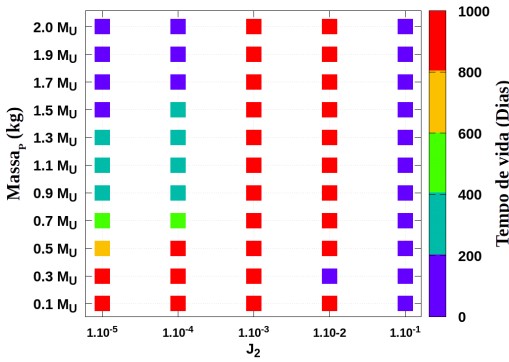
(a) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



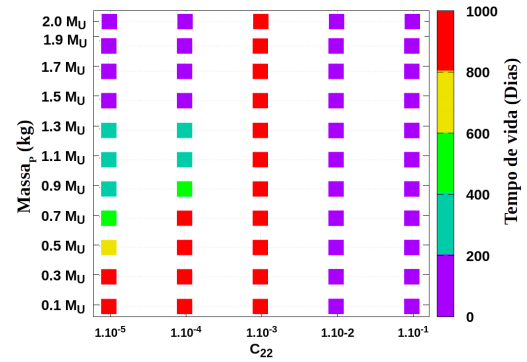
(b) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



(c) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Distância do perturbador igual a 435000 km.



(d) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Distância do perturbador igual a 435000 km.



Fonte: Próprio autor.

A partir da Figura 4.1 é possível analisar quais valores de distância do perturbador

se equilibram melhor com os valores dos coeficientes de gravidade e produzem um aumento no tempo de vida da sonda.

A Figura 4.1a, mostra a variação do tempo de vida em função da variação da distância do perturbador e do coeficiente de achatamento J_2 . É possível notar que, para todos os valores de distância do perturbador antes de $7,8 R_U$, combinados com todos os valores de J_2 fornecem órbitas com tempos de vida curto. A partir de $7,8$ raios de Urano, existe um equilíbrio entre todas as distâncias do perturbador com o valor de $J_2 = 10^{-2}$ e esse par de perturbação faz com que a órbita tenha um tempo de vida de até 1000 dias.

O valor de $J_2 = 10^{-3}$ também pode ser usado para encontrar órbitas com até 1000 dias de vida, para um perturbador com distância de $13,8 R_U$. Para valores mais baixos de J_2 como 10^{-5} e 10^{-4} podemos encontrar um tempo de vida entre 200 e 600 dias quando o terceiro corpo se encontrar entre $15,8$ e $19,7 R_U$.

Na Figura 4.1b, a variação da distância do perturbador é relacionada com as variações do coeficiente de elipticidade C_{22} . Para todas D_P a partir de $9,8 R_U$, o valor de $C_{22} = 10^{-3}$ aparece como um bom coeficiente no aumento de tempo de vida da sonda.

Para $C_{22} = 10^{-2}$, a única combinação capaz de aumentar o tempo de vida da sonda é com um perturbador distante em $9,8 R_U$. Considerando um perturbador a $19,7$ raios de Urano para um valor de $C_{22} = 10^{-4}$ também é possível encontrar uma órbita com até 1000 dias de vida. Para outros valores de C_{22} iguais a 10^{-4} e 10^{-5} a órbita passa a ter um tempo de vida entre 200 e 600 dias para uma distância entre $15,8$ e $19,7 R_U$ do perturbador.

Para os dois coeficientes de gravidade $J_2 = C_{22} = 10^{-4}$, o tempo de vida da sonda é longo quando o perturbador está situado a uma distância de $19,7 R_U$. Uma das luas de Saturno, Rhea, tem termos gravitacionais com essa mesma ordem de grandeza [Carvalho et al. \(2017\)](#). A distância entre ela e Saturno é próxima de $19,7$ raios de Urano. Dessa forma, as análises apresentadas nas Figuras 4.1a e 4.1b, podem ser aplicadas

para investigar possíveis órbitas ao redor da referida lua. Vale ressaltar que, a razão de massa entre Rhea e seu perturbador, Saturno, é duas ordens de grandeza menor que razão de massa entre Titânia e Urano. Diante do exposto, podemos dizer que nossos resultados fornecem uma aproximação de órbitas com longos tempos de duração ao redor de Rhea e que esses valores estariam entre 200-600 dias.

Os resultados mostrados nas Figuras 4.1c e 4.1d mostram o tempo de vida de órbitas ao redor de um satélite natural para diferentes valores de massa do perturbador (M_P). Para esta análise, fixaremos a distância do terceiro corpo em 435000 km, os demais elementos orbitais são os mesmos apresentados na Tabela 4.1.

O cenário descrito nas Figuras 4.1c e 4.1d é semelhante para os dois termos gravitacionais J_2 e C_{22} . Um caso particular é observado para J_2 e C_{22} iguais a 10^{-3} . Para todos os valores de massa do perturbador, a órbita sujeita a esse valor de coeficiente, tem um tempo de vida longo.

Um outro valor de J_2 que apresenta um equilíbrio com as variações de massa do terceiro corpo, é $J_2 = 10^{-2}$. Para quase todas as relações de massa com esse coeficiente, o tempo de vida da sonda é de 1000 dias, exceto para $M_P = 0,3M_U$, que nesse caso tem um tempo de duração entre 0 e 200 dias.

[Chen et al. \(2014\)](#), sugere que os valores dos termos gravitacionais de umas das luas de Saturno, Tethys, seja de $J_2 = 4,17 \times 10^{-3}$ e $C_{22} = 1,25 \times 10^{-3}$. A razão de massa entre Tethys e Saturno é próxima da máxima razão de massa analisada neste trabalho, neste caso, como já mencionado, a combinação dos valores desses dois coeficientes podem atenuar a perturbação do terceiro corpo e fazer com que a órbita da sonda dure por até 1000 dias. A distância Tethys-Júpiter é de aproximadamente $11,8R_U$.

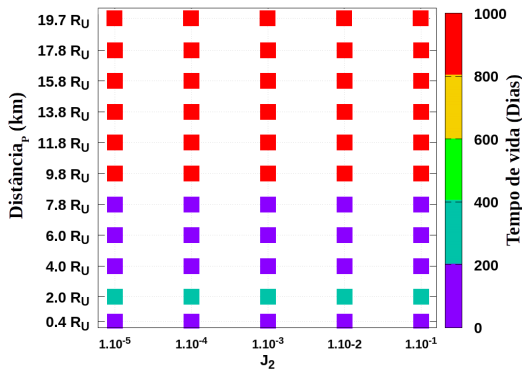
Quando o perturbador passa a ter uma massa entre 0,5 e 1,3 M_U é possível encontrar um tempo de duração variando entre 200-600 dias para valores de J_2 e C_{22} indo de 10^{-5} a 10^{-4} .

Analisamos também alguns casos com valores específicos de semieixo maior da

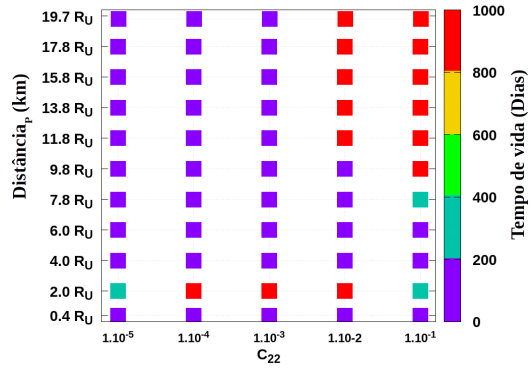
sonda. O objetivo é analisar as mudanças nos parâmetros mostrados na Figura 4.1a e 4.1b para órbitas com valores diversos de semieixo maior.

Figura 4.2: Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e da massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.

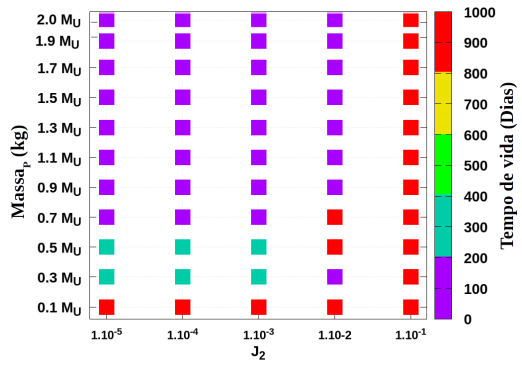
(a) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



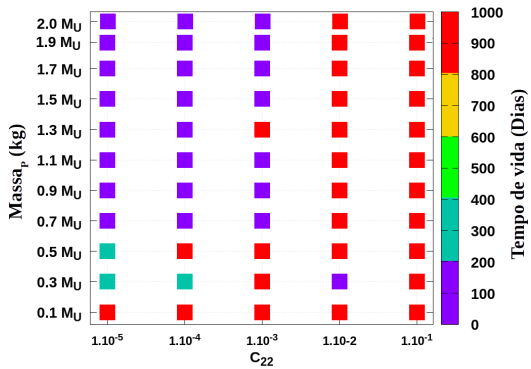
(b) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



(c) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Distância do perturbador igual a 435000 km.



(d) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Distância do perturbador igual a 435000 km.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 4.2a apresenta um cenário diferente para as mesmas variações de D_P e J_2 apresentadas na Figura 4.1a. Ao considerar $a = 1870$ km para sonda, observa-se que, para todos os valores de distância do perturbador a partir de $9,8 R_U$ o tempo de duração da órbita é de 800-1000 dias para todos os valores de J_2 .

A uma distância de $2,0 R_U$, qualquer sistema que tenha um valor de J_2 entre 10^{-5} e 10^{-1} terá em sua órbita uma sonda com tempo de vida entre 200-400 dias.

Na Figura 4.2b, conseguimos verificar também que a órbita passa a ter um tempo de vida longo para todos os valores de C_{22} quando $D_P = 2,0 R_U$. Para C_{22} igual a 10^{-4} , 10^{-3} e 10^{-2} esse tempo de vida é de até 1000 dias. Para os outros valores de 200 a 400 dias. Corpos com uma elipticidade alta, em torno de 10^{-2} e 10^{-1} , sujeitos a uma perturbação que se encontra a partir $11,8 R_U$ podem ter em sua órbita sondas com tempo de vida de até 1000 dias como mostrado na Figura 4.2b.

As Figuras 4.2c e 4.2d mostram os resultados da análise feita para uma órbita com $a = 1870$ km. É possível notar que, o maior tempo de vida da sonda é quando J_2 é considerado.

De $0,1 M_U$ a $0,5 M_U$ é possível encontrar longos períodos de duração orbital para todos os cinco valores de J_2 considerados, esse tempo varia entre 300-1000 dias. Um caso particular é o valor de $J_2 = 10^{-1}$. Para esse valor, o tempo de vida é máximo para todas as relações de massas analisadas.

Isso também pode ser visto para o mesmo valor do coeficiente de elipticidade C_{22} , que também promove um equilíbrio com todas as relações de massa e faz com que a vida da sonda dure por 1000 dias. Para $C_{22} = 10^{-2}$, a órbita também dura o tempo máximo de integração para quase todos os valores de M_P . A combinação desses termos pode ser eficaz para encontrar órbitas de longo período para uma sonda com condições próximas das apresentadas aqui.

Uma aplicação interessante para esses altos valores de J_2 e C_{22} é para órbitas ao redor de corpos muito achatados como Prometheus e Pandora, satélites de Saturno.

Esses corpos possuem valores de $J_2 = 2,6 \times 10^{-01}$ para Prometheus e $J_2 = 1,5 \times 10^{-01}$ para Pandora. A elipticidade para Prometheus é de $C_{22} = 7,9 \times 10^{-02}$ e $C_{22} = 3,2 \times 10^{-02}$ para Pandora (Lainey et al., 2019). Porém, a razão de massa entre essas luas e Saturno não é tão próxima das apresentadas neste trabalho, sendo assim, um estudo mais direcionado é necessário para obter resultados mais realistas do tempo de vida para órbitas ao redor desses corpos.

Nas Figuras 4.3a e 4.3b a análise é para uma sonda com $a = 3870$ km. Analisando as figuras, fica evidente que a variação do semieixo maior da sonda muda completamente o cenário apresentado nas Figuras 4.1a, 4.1b, 4.2a e 4.2b.

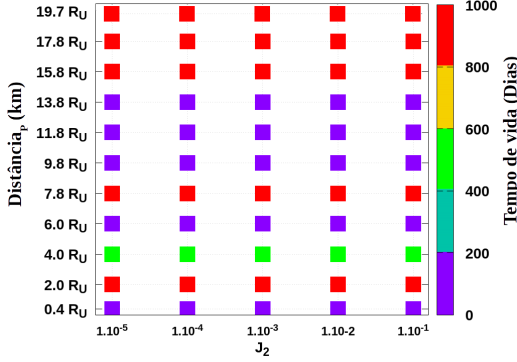
No caso da Figura 4.3a, a órbita da sonda passa a ter um maior tempo de vida quando o perturbador está entre 15,8 e 19,7 R_U , para as distâncias 2,0 R_U e 7,8 R_U . Também é possível encontrar um tempo de duração orbital de até 1000 dias para todos os valores de J_2 analisados. Um caso peculiar acontece para $D_P = 4,0 R_U$. Para esta distância o tempo de vida da sonda é de 400-600 dias e também se mantém para todos os valores de achatamento. Quando consideramos D_P entre 9,8 e 13,8 R_U , a duração orbital da sonda é de 0 a 200 dias.

Os melhores valores de tempo de vida para variações do perturbador em função do coeficiente tesseral C_{22} mostrados na Figura 4.3b, podem ser vistos para $D_P = 2,0 - 4,0 R_U$ para todos os valores de C_{22} . Quando $D_P = 6,0 R_U$ e $D_P = 11,8 R_U$ o tempo de vida também é longo mas não é observado para todos os valores de C_{22} . Para distâncias maiores do perturbador, 17,8 e 19,7 R_U , esse tempo de vida é encontrado quando $C_{22} = 10^{-1}$. Apenas corpos com seu equador extremamente achatado possuem um valor de C_{22} dessa magnitude, como por exemplo o objeto transnetuniano Arrokoth, que tem um valor de $C_{22} = 2,570 \times 10^{-01}$ (Amarante e Winter, 2020).

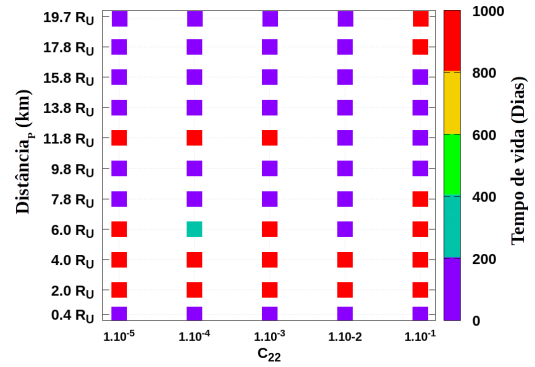
Na Figura 4.3d, é possível notar uma semelhança entre os dois casos analisados. Mas, para um valor de $C_{22} = 10^{-1}$ a órbita da sonda chega a ter um tempo de vida de 1000 dias para valores de M_P indo de 0,1 M_U a 1,1 M_U . Para 0,1 M_U , a sonda também

Figura 4.3: Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e de massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 3870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.

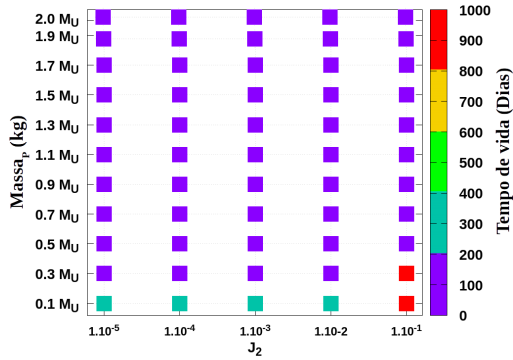
(a) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



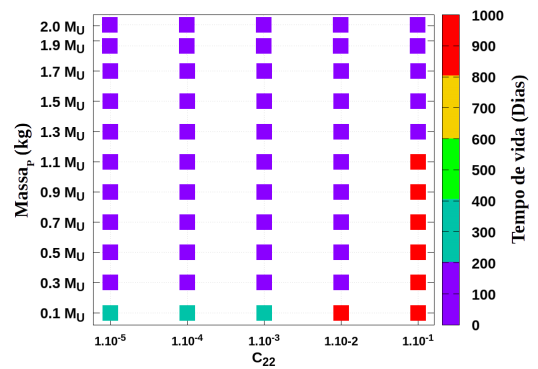
(b) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



(c) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Distância do perturbador igual a 435000 km.



(d) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Distância do perturbador igual a 435000 km.



Fonte: Próprio autor.

atinge valores interessantes de tempo de vida para todos os valores de C_{22} .

Um satélite peculiar do Sistema Solar é Tritão, maior lua de Netuno. Sua particularidade se deve ao fato dele ser o maior satélite do Sistema Solar com uma órbita

retrógrada e apresentar evidências de já ter pertencido a um sistema de binários antes de ter sido capturado por Netuno, [Agnor e Hamilton \(2006\)](#). A massa de Tritão é apenas uma ordem de grandeza maior que a de Titânia, sua razão de massa com Netuno é da ordem de 10^3 , esta razão é aproximadamente $0,1M_U/m_T$ e sua distância de Netuno é de $\approx 13,8R_U$.

De acordo com [Chen et al. \(2014\)](#), os coeficientes gravitacionais de Tritão são: $J_2 = 2,07 \times 10^{-4}$ e $C_{22} = 6,20 \times 10^{-5}$. De posse dessas informações, podemos dizer que uma sonda com condições iniciais próximas das apresentadas nas Figuras 4.3c e 4.3d, poderiam orbitar Tritão com um tempo de vida de aproximadamente 200-400 dias.

O tempo de duração orbital de alguns sistemas é sensível à variação de algumas condições iniciais. Com o intuito de fornecer um estudo mais abrangente, analisamos outro valor de inclinação. Agora, a órbita da sonda tem uma inclinação de 80° , $a = 1870$ km, $e = 0$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. Apresentamos na Figura 4.4 os resultados dessa análise e posteriormente nossas discussões sobre os mesmos.

A partir da Figura 4.4 podemos fazer uma comparação com as Figuras 4.2a 4.2b que possuem quase as mesmas condições iniciais, exceto pela inclinação da sonda que nas Figuras 4.2a e 4.2b é de 90° . Começando pela Figura 4.4a, em que a distância do perturbador versus o termo J_2 é analisada, a principal diferença entre esses dois casos é com relação à distância $2,0R_U$. Quando a inclinação diminui para 80° , Figura 4.4a o tempo de vida aumenta para 800-1000 dias. Já na Figura 4.2a, para essa mesma distância do terceiro corpo, o tempo de vida está em torno de 200-400 dias.

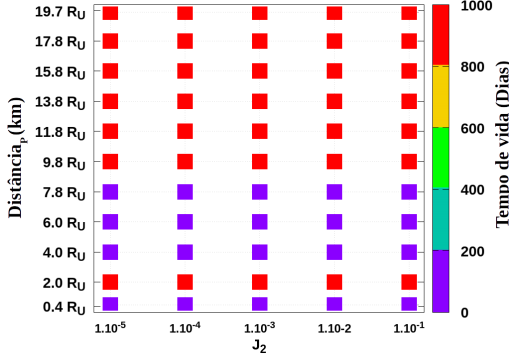
Quando o coeficiente C_{22} é considerado na Figura 4.4b, para essa mesma distância do terceiro corpo ($2,0R_U$), a diferença está para $C_{22} = 10^{-05}$ e $C_{22} = 10^{-01}$. O tempo de vida vai de 200-400 dias para 800-1000 dias quando $C_{22} = 10^{-05}$.

A partir das Figuras 4.4c e 4.4d analisamos as diferenças entre as inclinações da sonda considerando as variações de massa do perturbador.

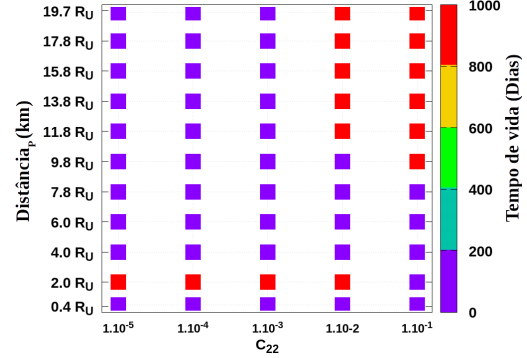
Quando $C_{22} = 10^{-04}$ em $0,5M_U$ o tempo de vida diminui em aproximadamente 600

Figura 4.4: Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e de massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 0$, $I = 80^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.

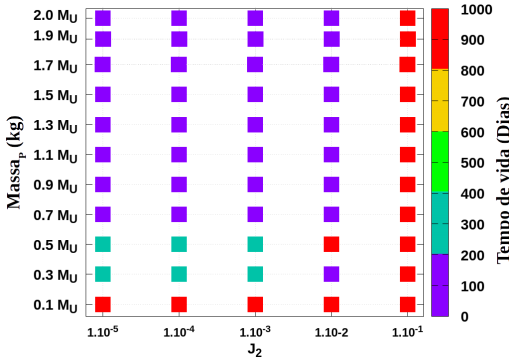
(a) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



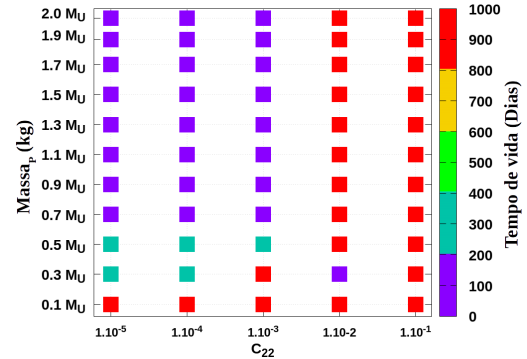
(b) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



(c) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Distância do perturbador igual a 435000 km.



(d) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Distância do perturbador igual a 435000 km.

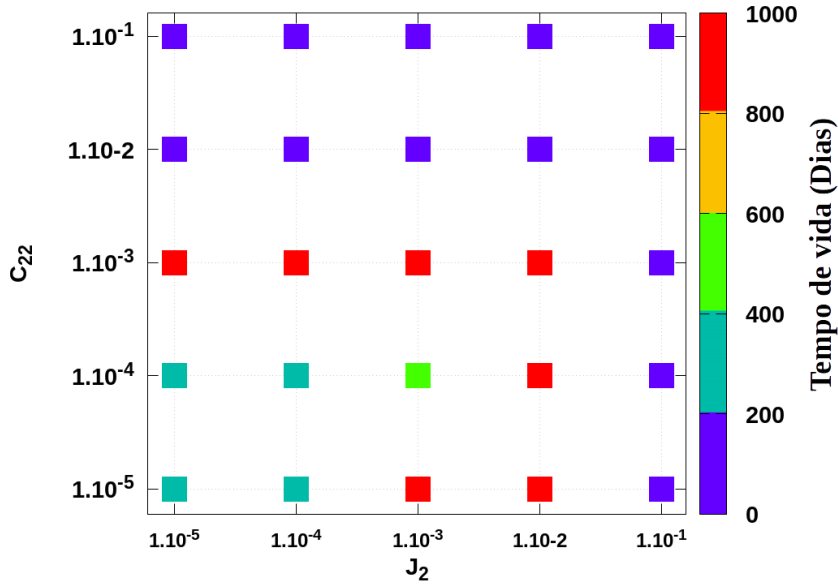


Fonte: Próprio autor.

dias para uma mudança de inclinação de 90 para 80 graus. Com $C_{22} = 10^{-03}$ também é observado mudanças para $0,5M_U$. É verificada a mesma diminuição de dias que ocorreu para $C_{22} = 10^{-04}$. Ainda para $C_{22} = 10^{-03}$, em $1,3M_U$ o tempo continua diminuindo

e passa de 800-1000 dias para 0-200 dias de vida. De uma maneira geral, observou-se que a diminuição da inclinação contribuiu para um decaimento do tempo de vida da sonda. Na maioria dos casos analisados a diferença no tempo de vida era sempre de aproximadamente 600 dias.

Figura 4.5: Tempo de vida com variação dos coeficientes gravitacionais J_2 e C_{22} . $D_P = 435000$ km, $M_P = 1M_U$. Condições iniciais da sonda: $a = 870$ km, $e = 0.0$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

A fim de encontrar a melhor relação entre os coeficientes J_2 e C_{22} , a Figura 4.5 mostra o tempo de vida de uma sonda em função desses termos gravitacionais. As condições iniciais da sonda são as mesmas da Figura 4.1a e os parâmetros do perturbador: $D_P = 435000$ km e $M_P = 1M_U$.

É possível verificar que, os melhores valores de coeficientes para que a órbita da sonda tenha um tempo maior é $J_2 = 10^{-2}$ e $C_{22} = 10^{-3}$. Para valores abaixo desses mencionados, a órbita da sonda pode ter seu tempo de vida entre 200-600 dias, a

dependem da combinação dos dois termos.

4.1.1 Analisando órbitas excêntricas

Investigamos também dois casos particulares onde consideramos o caso onde a órbita da sonda tem excentricidades de 10^{-03} e 10^{-01} . Em nossos resultados mostrados no Capítulo 2, as órbitas com melhores tempo de vida tinham um valor de excentricidade 10^{-03} , decidimos então analisar um segundo valor de excentricidade com o intuito de ampliar nossa investigação. Usamos $a = 1870$ km, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$. As Figuras 4.6a e 4.6b mostram os resultados dessa análise para $e = 10^{-03}$.

Para a Figura 4.6a, onde a análise é feita para o coeficiente de achatamento J_2 . É possível notar que o tempo de vida não muda muito do que foi observado na Figura 4.2a, que mostrava o caso com o mesmo a e I da sonda. A principal diferença é que agora, na Figura 4.6a, quando o perturbador está a uma distância de $2,0R_U$ a órbita tem um tempo de duração de 1000 dias para quase todos os valores de J_2 , exceto para $J_2 = 10^{-4}$ que o tempo de vida é de 200-400 dias.

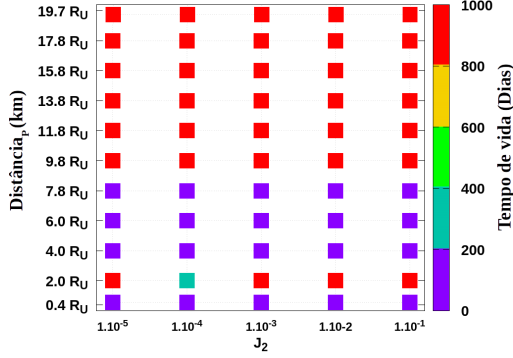
Para o termo C_{22} Figura 4.6b, as diferenças também são poucas comparando com a 4.2b e o que se observa é um aumento no tempo de vida para valores de $C_{22} = 10^{-5}$ e $C_{22} = 10^{-1}$ que antes era de 200-400 dias e para esse valor de excentricidade passou a ter até 1000 dias.

Para as variações na massa do perturbador consideradas nas Figuras 4.6c e 4.6d também não há diferenças significativas com relação ao observado nas Figuras 4.1c e 4.2d. O que se observa é apenas a diminuição no tempo de vida para alguns valores de J_2 e C_{22} , porém, os maiores tempos de vida continuam os mesmos para as relações de M_P estudadas.

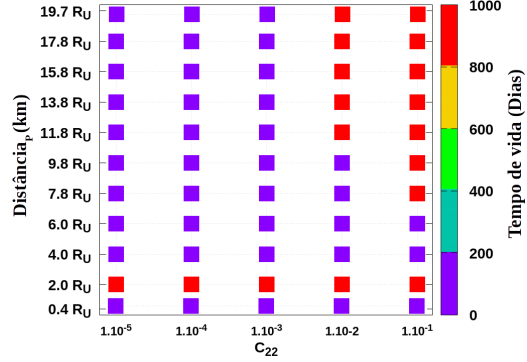
Por meio dos resultados apresentados na Figura 4.7 podemos analisar como uma órbita com excentricidade igual 10^{-01} tem seu tempo de vida variando em função da distância e massa de um perturbador versus os coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} do

Figura 4.6: Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 10^{-03}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.

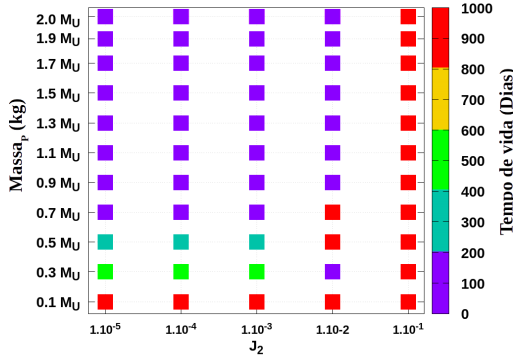
(a) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



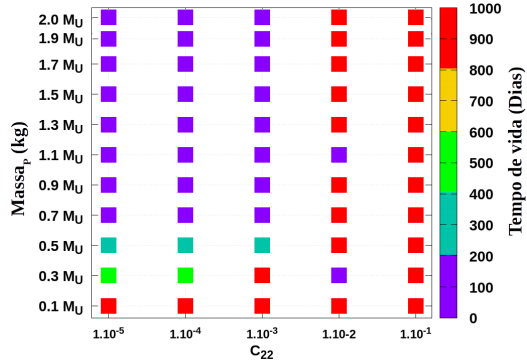
(b) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



(c) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Distância do perturbador igual a 435000 km.



(d) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{21} . Distância do perturbador igual a 435000 km.

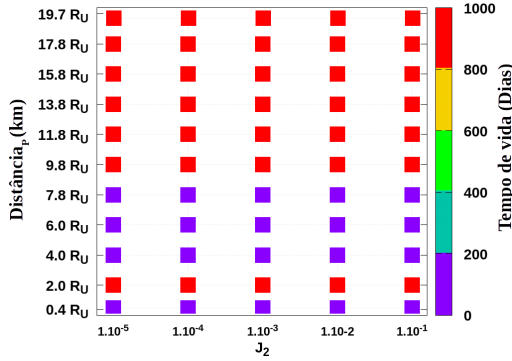


Fonte: Próprio autor.

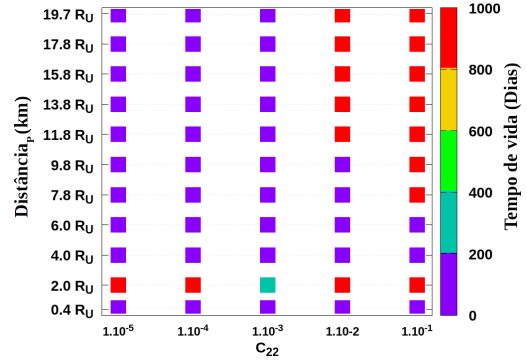
corpo central. Uma comparação das Figuras 4.7a e 4.6a se faz necessária uma vez que na Figura 4.6a mostramos os resultados de uma órbita com excentricidade igual a 10^{-03} . Essa comparação mostra que para uma distância igual a $2,0R_U$ o tempo de vida

Figura 4.7: Mapas de tempo de vida considerando as variações de distância e massa do corpo perturbador. Condições iniciais da sonda: $a = 1870$ km, $e = 10^{-01}$, $I = 90^\circ$, $\omega = \Omega = 0^\circ$.

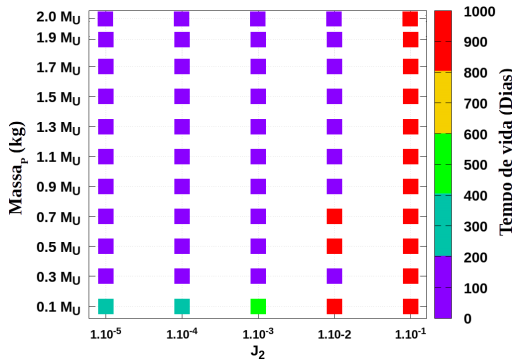
(a) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



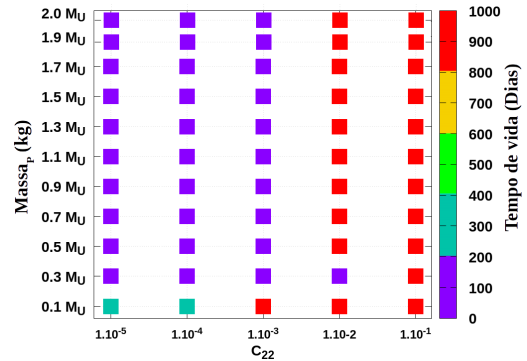
(b) Tempo de vida com variação da distância do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Massa do perturbador igual a 1 massa de Urano.



(c) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade J_2 . Distância do perturbador igual a 435000 km.



(d) Tempo de vida com variação da massa do terceiro corpo e do coeficiente de gravidade C_{22} . Distância do perturbador igual a 435000 km.



Fonte: Próprio autor.

aumenta com $e = 10^{-01}$ para um valor de $J_2 = 10^{-04}$. Nessa mesma distância o tempo de vida diminui 800-1000 dias para 200-400 dias quando considera-se $C_{22} = 10^{-03}$. Para as variações de distância do perturbador, essas foram as únicas mudanças observadas.

O cenário muda quando analisamos as variações de massa do perturbador versus J_2 mostradas na Figura 4.7a. Órbitas com valores de J_2 iguais a 10^{-05} , 10^{-04} e 10^{-03} tem grandes variações em seu tempo de vida para massas iguais a $0,1M_U$, $0,3M_U$ e $0,5M_U$.

Para $J_2 = 10^{-05}$ e massa igual a $0,1M_U$ o tempo de vida quando $e = 10^{-01}$ diminui de 800-1000 dias para 200-400 dias. Em $0,3M_U$ o tempo diminui de 400-600 para 0-200 dias e em $0,5M_U$ esse decaimento é de aproximadamente 200 dias.

No caso de $J_2 = 10^{-04}$ as variações ocorrem para os mesmos valores de massa. Em $0,1M_U$ a diminuição do tempo de vida é de ≈ 200 dias, enquanto para $0,3M_U$ esse decréscimo é de ≈ 400 dias. Para $0,5M_U$ o tempo passa de 200-400 dias para 0-200 dias. Por fim, quando consideramos $J_2 = 10^{-03}$ encontramos diferenças no tempo de vida também para M_P igual a variações $0,1M_U$, $0,3M_U$ e $0,5M_U$. Em $0,1M_U$ e $0,3M_U$ as órbitas experimentam uma diminuição de ≈ 400 dias de vida, já em $0,5M_U$ esse tempo decai em ≈ 200 dias.

O coeficiente de elipticidade C_{22} também provoca mudanças no tempo de vida da sonda com excentricidade igual a 10^{-01} , essas diferenças ocorrem para $0,1M_U$, $0,3M_U$ e $0,5M_U$. Através da comparações entre as Figuras 4.7b e 4.6b observamos que, quando consideramos $e = 10^{-01}$ há uma diminuição no tempo de vida para $C_{22} = 10^{-05}$, $C_{22} = 10^{-04}$, $C_{22} = 10^{-04}$, $C_{22} = 10^{-03}$ e $C_{22} = 10^{-01}$. No caso de $C_{22} = 10^{-05}$ e $C_{22} = 10^{-04}$ as diferenças são as mesmas, decaimento de ≈ 600 dias para $0,1M_U$, ≈ 400 dias para $0,3M_U$ e ≈ 200 dias para $0,5M_U$.

Já para $C_{22} = 10^{-03}$ ocorre um decréscimo de quase 800 dias no tempo de vida em relação à uma massa de $0,3M_U$, para uma massa de $0,5M_U$ esse decaimento é menor, em torno de 200 dias.

No caso de $C_{22} = 10^{-02}$ a única diferença observada é para uma massa de $1,1M_U$. Dessa vez o tempo de vida aumenta quando tem-se $e = 10^{-01}$ saindo de 0-200 dias para 800-1000 dias.

Em resumo, podemos concluir que a mudança nos valores da excentricidade da sonda

produz maiores variações quando sujeita à diferentes valores de massa do perturbador. Os valores de massa mais afetados foram $0,1M_U$, $0,3M_U$ e $0,5M_U$ principalmente para os coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} iguais a 10^{-05} , 10^{-04} e 10^{-03} . No caso das variações da distância do perturbador as diferenças no tempo de vida da órbita foram pequenas e em sua maioria para $D_P = 2,0R_U$.

4.2 Estudo generalizado para outros satélites de Urano

Os cinco satélites clássicos de Urano, Titânia, Miranda, Ariel, Umbriel e Oberon, apresentam características parecidas em termos de massa e coeficientes gravitacionais. A fim de generalizar o estudo feito na seção anterior para os outros 4 satélites de Urano, apresentamos nessa seção uma análise sobre tempo de vida para órbitas ao redor desses corpos. Na Tabela 4.2 mostramos os elementos orbitais desses satélites, a razão de suas massas com a massa de Urano M_U/M_S , bem como os valores de seus termos gravitacionais J_2 e C_{22} . Desses 5 satélites, o que tem a menor massa é Miranda. Ele também é a que tem uma inclinação mais alta com relação aos outros. Dessa forma, vamos analisar o tempo de vida para uma sonda ao redor de Miranda considerando apenas os casos D_P versus J_2, C_{22} . De acordo com os dados apresentados na Tabela 4.2, o semieixo maior de Miranda é de aproximadamente $5,12 R_U$.

Para o primeiro caso analisado onde a órbita da sonda tem um valor de $a = 870$ km, podemos dizer que o tempo de vida de uma sonda ao redor de Miranda seria algo em torno de 0-200 dias considerando J_2 e C_{22} da ordem de 10^{-3} . Para o segundo caso, com a da sonda igual a 1870 km, o cenário é o mesmo. Quando consideramos $a = 3870$ km, o tempo de vida da sonda aumenta para até 1000 dias para $C_{22} = 10^{-3}$.

No caso de Ariel, que está a $7,5 R_U$ de Urano e com uma razão de massa no valor de $2,4 \times 10^4$ que é próximo da relação $(2,0M_U/m_T)$, conseguimos fazer uma análise mais próxima já que sua razão de massa e sua distância do perturbador se encontram

nos valores aqui analisados. Para as condições iniciais da sonda estudadas no primeiro e segundo caso, na distância em que Ariel se encontra o tempo de vida é de 0-200 dias. Apenas no terceiro caso, $a = 3870$ km, o tempo de vida aumenta em até 1000 dias para seu valor de J_2 e em até 200 dias para C_{22} . Para uma razão de massa próxima de $2,4 \times 10^4$, o tempo de vida encontrado é de 0 a 200 dias tanto para J_2 quanto para C_{22} .

A razão de massa entre Umbriel e Urano também é bem próxima de $(2,0M_U/m_T)$. Com coeficientes J_2 e C_{22} da ordem de 10^{-4} e uma distância de $10,5 R_U$ de Urano, é possível também fazer um boa aproximação da duração orbital de uma sonda ao redor desse satélite para os casos analisados.

Tabela 4.2: Parâmetros dos outros satélites clássicos de Urano

Satélite	$a (R_U)$	e	$I (^\circ)$	$\omega (^\circ)$	$\Omega (^\circ)$	M_U/M_S	J_2	C_{22}
Miranda	5,12	$1,4 \times 10^{-3}$	4,22	328	169	$1,3 \times 10^6$	$6,1 \times 10^{-3b}$	$1,8 \times 10^{-3b}$
Ariel	7,5	$5,8 \times 10^{-4}$	0,31	170	1,68	$2,4 \times 10^4$	$1,4 \times 10^{-3b}$	$4,2 \times 10^{-4b}$
Umbriel	10,5	$3,3 \times 10^{-3}$	0,36	46	168	$7,4 \times 10^4$	$6,1 \times 10^{-4b}$	$1,8 \times 10^{-4b}$
Oberon	23	$2,5 \times 10^{-3}$	0,10	178	168	$2,9 \times 10^4$	$4,1 \times 10^{-5b}$	$1,5 \times 10^{-5b}$

JPL.Website: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>.

^b Chen et al. (2014).

Com relação ao valor correspondente a relação de massa Urano-Umbriel, em todos os casos estudados, o tempo de vida da sonda é de 0-200 dias tanto para J_2 considerado quanto para C_{22} .

Para uma distância D_P próxima da distância Umbriel-Urano, quando a sonda tem um semieixo maior de 870 km, o tempo de vida é de 0-200 dias para os valores de J_2 e C_{22} , aumentando o valor de a para 1870 km, já é possível encontrar órbitas de até 1000 dias de duração considerando J_2 e de 0-200 dias considerando C_{22} . No último caso, $a = 3870$ km, o tempo de vida é 0-200 dias para os dois termos gravitacionais considerados.

Por fim, aplicaremos as análises feitas nesse capítulo ao satélite Oberon, o mais distante dos 5 satélites mencionados. Seus coeficientes de gravidade são da ordem de 10^{-5} e sua razão de masa com Urano está próxima de $1,1M_U/m_T$.

Analisando a distância que Oberon se encontra de Urano, nossa aproximação nos

permite dizer que, o tempo de vida para uma sonda com as condições iniciais apresentadas na Figura 4.1a e 4.1b, é em torno de 400-600 dias para os dois termos gravitacionais estudados. Para $a = 1870$ km o tempo de vida passa a ser de até 1000 dias quando somente J_2 é considerado e de 0-200 dias para o termo C_{22} .

Analisando o valor de massa mais próximo a de Urano-Oberon, percebe-se que para $M_P = 1,1M_U$, o tempo de vida é o mesmo para os valores de J_2 e C_{22} . Ou seja, para a ordem de grandeza dos termos gravitacionais de Oberon, 10^{-5} , o tempo de vida da órbita é de 0-200 dias.

4.2.1 Aplicando o estudo ao satélite Umbriel

Com o intuito de aplicar e confirmar os estudos mostrados neste capítulo, analisamos o tempo de vida de órbitas ao redor de mais um satélite clássico de Urano, Umbriel. A escolha de Umbriel se justifica pelo fato desse satélite possuir coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} com mesma ordem de grandeza, 10^{-04} , isso facilita a aplicação uma vez que esse termos foram analisados separadamente neste capítulo. As simulações numéricas foram realizadas considerando as condições iniciais apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros do sistema Urano-Umbriel

Dados de Urano usados nas simulações numéricas	
Parâmetro	Valor
Semieixo maior (km)	$266,3 \times 10^3$
Excentricidade	$3,3 \times 10^{-03}$
Inclinação ($^\circ$)	0,36
Argumento do pericentro ($^\circ$)	46
Longitude do nodo ascendente ($^\circ$)	168
Anomalia média ($^\circ$)	3,12
Raio (km)	$25,362 \times 10^3$
Massa (kg)	$8,68 \times 10^{25}$
Dados de Umbriel usados nas simulações numéricas	
Parâmetro	Valor
Massa (kg)	$1,27 \times 10^{21}$
Raio (km)	584,7
Coeficiente de Gravidade J_2	$6,1 \times 10^{-04}$ ^b
Coeficiente de Gravidade C_{22}	$1,8 \times 10^{-04}$ ^b

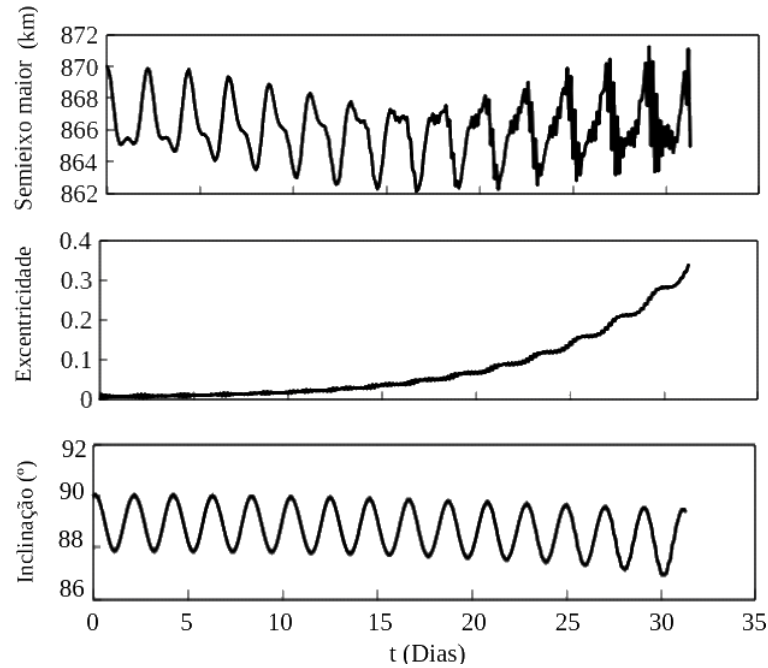
Fonte: JPL.Website: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>. Acessado em 03 de março de 2022.

^b Chen et al. (2014).

A partir dos dados apresentados na Tabela 4.3, simulamos um único caso para uma órbita ao redor de Umbriel.

O sistema analisado consiste em Umbriel-Sonda-Urano. Umbriel como corpo central e considerando seus coeficientes de gravidade J_2 e C_{22} , além da perturbação causada pelos termos gravitacionais, considera-se também a atração gravitacional de Urano. As condições iniciais para órbita da sonda foram as mesmas usadas na análise apresentada na Figura 4.1, ou seja, $a = 870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$. As equações de movimento são as usadas no Capítulo 2.

Figura 4.8: Evolução temporal dos elementos orbitais de uma órbita ao redor de Umbriel. Condições iniciais da sonda: $a = 870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

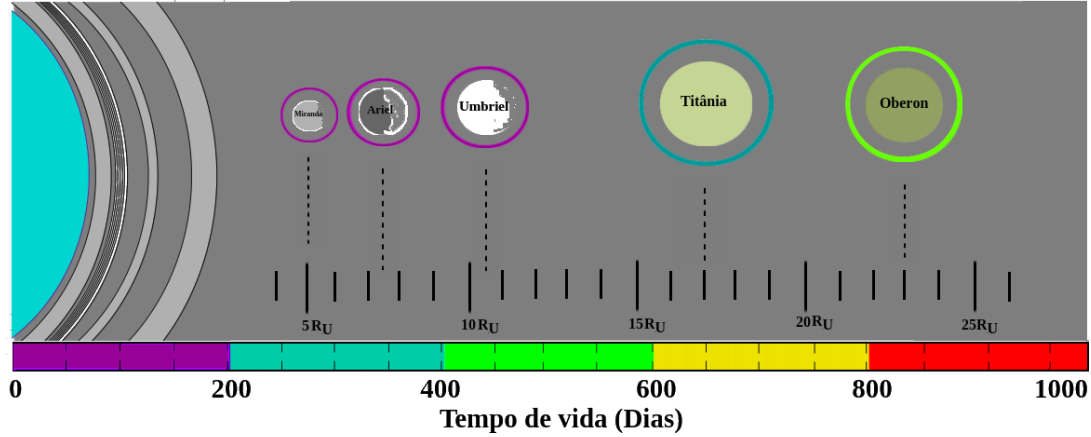
As condições iniciais da sonda consideradas na Figura 4.1 são usadas para investigar o tempo de vida para uma órbita ao redor de Umbriel. A análise feita neste capítulo apontou que para a distância Umbriel-Urano ($10.5R_U$), para coeficientes gravitacionais da ordem 10^{-04} e considerando os parâmetros iniciais indicados Figura 4.8, o tempo de vida da sonda seria de 0-200 dias.

A Figura 4.8 mostra a evolução temporal dos elementos orbitais dessa órbita. É possível notar que o tempo de vida está dentro do previsto com o estudo abordado neste capítulo, já que o tempo de vida máximo é de 33 dias.

Por fim, apresentamos um resumo deste capítulo através da Figura 4.9. A Figura apresenta uma imagem ilustrativa de órbitas circulares ao redor de todos os satélites clássicos de Urano. As cores das órbitas representam o tempo de vida que essas órbitas

têm de acordo com a investigação feita neste capítulo para órbitas com as condições iniciais apresentadas na Figura 4.8.

Figura 4.9: Imagem ilustrativa de órbitas circulares ao redor dos cinco satélites clássicos de Urano. As cores representam o tempo de vida dessas órbitas para uma das condições iniciais investigadas. Parâmetros iniciais das órbitas: $a = 870$ km, $e = 0$, $I = 90^\circ$, $\omega = 0^\circ$ e $\Omega = 0^\circ$.



Fonte: Próprio autor.

É importante ressaltar que as aplicações feitas neste capítulo são aproximações. Alguns satélites possuem características peculiares, como a alta inclinação de Miranda por exemplo, que podem fazer com que os resultados aqui apresentados destoem dos demais que possam surgir.

4.3 Conclusões

Neste capítulo, analisamos o tempo de vida de uma sonda sobre a influência de vários valores de massa e distância do corpo perturbador. O intuito deste estudo é encontrar órbitas de longo período para diversas relações entre massa, distância e as perturbações causadas pelos termos gravitacionais J_2 e C_{22} .

Investigamos como o tempo de vida de uma órbita é afetado quando sujeito a vários valores de massa do perturbador (M_P). A massa M_P varia em um intervalo de 0,1-

$2,0M_U$, em que M_U significa massa de Urano. Também investigamos órbitas sujeitas a valores de distância do perturbador D_P em um intervalo de $0,4-19,7R_U$, onde R_U significa raios de Urano. Todas as simulações foram feitas considerando a variação do tempo de vida em função da variação da distância do perturbador (D_P), da massa do perturbador (M_P), e dos coeficiente J_2 e C_{22} que variam de 10^{-05} a 10^{-01} .

Analizamos alguns casos específicos para órbita da sonda, variando semieixo maior, excentricidade e inclinação.

Pelos resultados obtidos nesse estudo, conseguimos identificar órbitas com tempo de vida longo para diversas combinações entre os coeficientes J_2 , C_{22} e o perturbador. Mostramos também que, para o caso com um valor de $e = 10^{-03}$ o tempo de vida das órbitas é semelhante para o caso onde $e = 0$ e que para $e = 10^{-01}$ esse tempo decaía na maioria dos casos, principalmente para os valores de M_P iguais a $0,1M_U$, $0,3M_U$ e $0,5M_U$ e para os coeficientes gravitacionais da ordem de 10^{-04} , 10^{-03} e 10^{-02} .

O tempo de vida também se mostrou mais sensível para diferentes valores de semieixo maior. No entanto, fazendo comparações para inclinações de 80° e 90° , nota-se diferenças bem sutis no tempo de vida. Para efeito de comparação, aplicamos os resultados obtidos neste capítulo para alguns sistemas com características semelhantes às relações aqui exploradas e foi possível encontrar órbitas com longos períodos orbitais.

Ao final, aplicamos a pesquisa feita neste capítulo aos quatro satélites clássicos de Urano, Oberon, Umbriel, Ariel e Miranda, uma vez que Titânia já foi estudada no Capítulo 2. Para alguns satélites projetamos órbitas com um tempo de vida significativa, com duração de até 1000 dias.

A fim de analisar a precisão dos resultados apontados, realizamos uma integração para uma órbita ao redor de Umbriel. Os resultados vão de acordo com o tempo de vida estimado.

Os resultados aqui apresentados são de extrema importância no estudo de órbitas ao redor de satélites planetários. Existem sistemas onde a distância do perturbador

D_P é muito pequena ou muito grande e essa diferença causa variações no tempo de vida das órbitas, assim como também existem sistemas com corpos extremamente achatados e alongados, com altos valores de J_2 e C_{22} . Dessa forma, conclui-se que o estudo apresentados neste capítulo podem contribuir com pesquisas relacionadas a esses sistemas.

Capítulo 5

Discussão Geral

O objetivo deste trabalho foi investigar órbitas de longo período para uma sonda ao redor de satélites naturais.

O primeiro sistema analisado consiste em Titânia como corpo central, uma sonda em sua órbita, e Urano, como corpo perturbador. A órbita da sonda é perturbada pelos coeficientes gravitacionais de segunda ordem J_2 e C_{22} de Titânia e pela atração gravitacional de Urano. Analisamos também a influência dos coeficientes de gravidade J_2 e J_4 de Urano.

Para validar nossos resultados, construímos mapas de tempo de vida para cinco valores de excentricidade da sonda 0 , 10^{-04} , 10^{-03} , 10^{-02} e 10^{-01} . As análises desses mapas mostraram órbitas com longos períodos de duração para algumas combinações de valores de J_2 , C_{22} e para alguns valores de excentricidade. Nossos resultados sugerem que, o melhor valor de excentricidade para uma órbita com um tempo de vida longo é 10^{-03} . Mostramos ainda que, para as altitudes das órbitas estudadas, os coeficientes de achatamento de Urano não afetam o tempo de vida da órbita.

Valores específicos de ω e Ω podem prolongar o tempo de vida da sonda em até 50% em comparação aos casos onde $\omega = \Omega = 0^\circ$. Os melhores valores para esses ângulos estão em torno de $145^\circ - 165^\circ$ para ω e para Ω entre $55 - 205^\circ$. Em alguns casos, incluir

esses valores resultou no aumento do tempo de vida da sonda em até oito vezes em comparação com casos com $\omega = \Omega = 0^\circ$.

Uma margem de erro dentro dos valores de J_2 e C_{22} considerados, pode aumentar ou diminuir bastante o tempo de vida da órbita, principalmente quando a excentricidade for igual a 10^{-3} . Para tentar prever o tempo de vida em função desses possíveis erros, apresentamos quatro modelos de regressão múltipla a fim de encontrar relações para o tempo de vida em função dos coeficientes J_2/C_{22} . Mostramos ainda superfícies de resposta para os quatro modelos apresentados.

Propomos dois exemplos de manobras orbitais para evitar a colisão da sonda com a superfície de Titânia. A primeira manobra analisada foi a do tipo bi-impulsiva coplanar que tem como objetivo transferir um veículo espacial de uma órbita inicial elíptica para uma órbita final circular. Antes de encontrar valores interessantes de ΔV , estudamos a defasagem na inclinação e no semieixo maior dessas órbitas e só então, realizamos as manobras. Valores de ΔV capazes de corrigir essa mudança na posição orbital foram calculados. Posteriormente, encontramos novos valores de ΔV para órbitas menos defasadas, nesse caso, conseguimos um valor de ΔV mínimo igual $5,4 \times 10^{-5}$ km/s para uma órbita final de raio igual a 1050 km. Esse valor mínimo foi encontrado para todos os valores de inclinação analisados.

Manobras entre duas órbitas elípticas coplanares também são investigadas. As órbitas elípticas finais possuem valores de excentricidade iguais a 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} e 10^{-1} . Com o objetivo de encontrar um valor baixo para o incremento da velocidade, além de realizar manobras na iminência de uma colisão, escolhemos vários pontos da órbita para que outras transferências fossem analisadas. Com esse estudo, concluímos que as manobras mais econômicas são aquelas realizadas bem antes da colisão, quando a posição da órbita ainda não sofreu grandes variações ao longo do tempo. A relação $\Delta V/t$ é usada para confirmar esses resultados, através dela encontramos um valor mínimo de ΔV para o qual as manobras se mostraram muito econômicas em relação ao tempo de

vida. Os estudos apontaram que, a aplicação dessas manobras são eficientes e podem prolongar o tempo de vida da sonda.

Por fim, mostramos um estudo relacionando vários valores de massa e distância do corpo perturbador em função de valores hipotéticos dos coeficientes J_2 e C_{22} . Investigamos cenários diferentes para a órbita da sonda com valores variados de semieixo maior, excentricidade e inclinação. Conseguimos encontrar órbitas com tempos de vida longos para várias relações de massa e distância. Aplicamos nossa análise para alguns sistemas conhecidos com características semelhantes às analisadas aqui e também para os outros satélites clássicos de Urano. Por fim, mostramos que nossos resultados estão de acordo com o previsto através de uma simulação para o sistema sonda-Umbriel-Urano.

As discussões e resultados apresentados neste trabalho, podem contribuir para projeção de futuras missões espaciais para luas do sistema de Urano e também para outros sistemas de interesse.

Referências

- ABD EL-SALAM, F. e ABD EL-BAR, S. (2016). **Families of frozen orbits of lunar artificial satellites.** Applied Mathematical Modelling, 40(23):9739–9753.
- AGNOR, C. B. e HAMILTON, D. P. (2006). **Neptune’s capture of its moon Triton in a binary-planet gravitational encounter.** Nature, 441(7090):192–194.
- AMARAL, F.; ALMEIDA, F.; COSTA, S.; LEME, R. e PAIVA, A. (2018). **Aplicação da Metodologia de Superfície de Resposta para Otimização do Processo de Solda a Ponto no Aço Galvanizado AISI 1006.** Soldagem & inspeção, 23.
- AMARANTE, A. e WINTER, O. (2020). **Surface Dynamics, Equilibrium Points and Individual Lobes of the Kuiper Belt Object (486958) Arrokoth.** MNRAS, 496(4):4154–4173.
- CARDOSO, J.; CARVALHO, J. P. S.; PRADO, A. F. B. A. e VILHENA de MORAES, R. (2017). **Lifetime maps for orbits around Callisto using a double-averaged model.** Ap&SS, 362(12):227.
- CARTWRIGHT, R.; EMERY, J.; RIVKIN, A.; TRILLING, D. e PINILLA-ALONSO, N. (2015). **Distribution of CO₂ ice on the large moons of Uranus and evidence for compositional stratification of their near-surfaces.** Icarus, 257:428–456.
- CARTWRIGHT, R. et al. (2018). **Red material on the large moons of Uranus: Dust from the irregular satellites?** Icarus, 314:210–231.
- CARTWRIGHT, R. J. et al. (2021). **The science case for spacecraft exploration of the Uranian satellites: Candidate ocean worlds in an ice giant system.** arXiv.
- CARVALHO, J.; FERREIRA, B. e SANTOS, D. (2017). **Analysis of the Critical Inclination in Orbit of Planetary Moons.** CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, São José do Rio Preto. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, p. 1-7.

CARVALHO, J. P. S.; CARDOSO, J. d. S.; PRADO, A. F. B. A. e De MORAES, R. V. (2018). **Some characteristics of orbits for a spacecraft around Mercury.** Computational & Applied Mathematics, 37:267–281.

CARVALHO, J. P. S.; ELIPE, A.; VILHENA de MORAES, R. e PRADO, A. F. B. A. (2012). **Low-altitude, near-polar and near-circular orbits around Europa.** Advances in Space Research, 49(5):994–1006.

CARVALHO, J. P. S.; MOURÃO, D.; ELIPE, A.; VILHENA De MORAES, R. e PRADO, A. F. B. A. (2012). **Frozen orbits around Europa.** International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 22.

CHAMBERS, J. E. (1999). **A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies.** MNRAS, 304(4):793–799.

CHEIN, F. (2019). **Introdução aos modelos de regressão linear: um passo inicial para compreensão da econometria como uma ferramenta de avaliação de políticas públicas.** Brasília: Enap - Fundação Escola Nacional de Administração Pública, pg. 76.

CHEN, E. M. A., NIMMO, F., e GLATZMAIER, G. A. (2014). **Tidal heating in icy satellite oceans.** Icarus, 229:11–30.

CHOBOTOV (2002). **Orbital Mechanics 3rd Edition.** American Institute of Aeronautics and Astronautics, Virginia.

DE SAEDELEER, B. e JACQUES, H. (2006). **The combined effect of J_2 and C_{22} on the critical inclination of a lunar orbiter.** Advances in Space Research, 37(1):80–87.

FERREIRA, T. C. F. C.; PRADO, A. F. B. A.; WINTER, S. M. G. e FERREIRA, L. S. (2022). **Mapping Natural Orbits around Io.** Symmetry, 14(7).

FLETCHER, L. N. et al. (2020). **Ice Giant Systems: The scientific potential of orbital missions to Uranus and Neptune.** Planetary and Space Science, 191:105030.

FRENCH, R. S. e SHOWALTER, M. R. (2012). **Cupid is doomed: An analysis of the stability of the inner uranian satellites.** Icarus, 220(2):911–921.

GOBETZ, F. W. e DOLL, J. R. (1969). **A survey of impulsive trajectories.** AIAA Journal, 7:801–834.

GOMES, V. e DOMINGOS, R. d. C. (2016). **Studying the lifetime of orbits around Moons in elliptic.** JO- Computational and Applied Mathematics, 35(3):653–661.

HOFSTADTER, M. et al. (2019). **Uranus and Neptune missions: A study in advance of the next Planetary Science Decadal Survey.** Planetary and Space Science, 177:104680.

JACOB, R. R. (2009). **Manobra orbital terra-lua-terra.** Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá.

JARMAK, S. et al. (2020). **QUEST: A New Frontiers Uranus orbiter mission concept study.** Acta Astronautica, 170:6–26.

KAULA, W. (1966). **Theory of satellite Geodesy.**

KOZAI, Y. (1962). **Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity.** AJ, 67:591–598.

KUGA, H. K.; CARRARA, V. e RAO, K. R. (2011). **Satélites artificiais: Movimento Orbital.** sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25-PUD.

LAINEY, V.; NOYELLES, B.; COOPER, N.; RAMBAUX, N.; MURRAY, C. e PARK, R. S. (2019). **Interior properties of the inner Saturnian moons from space astrometry data.** Icarus, 326:48–62.

LARA, M. e RUSSEL, R. (2006). **On the design of a science orbit about Europa.** Advances in the Astronautical Sciences, 124.

LIDOV, M.L. (1962). **The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies.** Planetary and Space Science, 9(10):719 – 759.

NAOZ, S. (2016). **The Eccentric Kozai-Lidov Effect and Its Applications.** Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 54(1):441–489.

- NAOZ, S.; LI, G.; ZANARDI, M.; CARLOS, G. d. E. e P. Di SISTO, R. (2017). **The Eccentric Kozai–Lidov Mechanism for Outer Test Particle.** The Astronomical Journal, 154(1):18.
- NESVORNÝ, D.; VOKROUHLICKY, D.; DEIENNO, R. e WALSH, K. (2014). **Excitation of the Orbital Inclination of Iapetus during Planetary Encounters.** The Astronomical Journal, 148.
- NIE, T. e GURFIL, P. (2018). **Lunar frozen orbits revisited.** Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 130(10):61.
- PASKOWITZ, M. E. e SCHEERES, D. J. (2006). **Design of Science Orbits About Planetary Satellites: Application to Europa.** Journal of Guidance Control Dynamics, 29(5):1147–1158.
- PRADO, A. F. B. A. (2003). **Third-Body Perturbation in Orbits Around Natural Satellites.** Journal of Guidance Control Dynamics, 26(1):33–40.
- PRADO, A. F. B. A. e KUGA, H. K. (2001). **Fundamentos de Tecnologia Espacial.** INPE.
- RAO, K. R. (1986). Um estudo dos métodos de perturbação na determinação de órbitas de satélites artificiais de baixa altitude. INPE —3781 —RPI/151.
- TZIRTI, S.; TSIGANIS, K. e VARVOGLIS, H. (2009). **Quasi-critical orbits for artificial lunar satellites.** Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 104(3):227–239.
- TZIRTI, S.; TSIGANIS, K. e VARVOGLIS, H. (2010). **Effect of 3rd-degree gravity harmonics and Earth perturbations on lunar artificial satellite orbits.** Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 108(4):389–404.
- ZANARDI, M. (1990). **Fundamentos de Astronáutica.** ITA.

Apêndice A - Artigo publicado

Neste anexo incluímos o artigo publicado durante o doutorado, intitulado "Mapping Long-Term Natural Orbits about Titania, a Satellite of Uranus".

Article

Mapping Long-Term Natural Orbits about Titania, a Satellite of Uranus

Jadilene Xavier ^{1,*} , Antônio Bertachini Prado ^{2,3} , Silvia Giuliatti Winter ¹  and Andre Amarante ⁴ 

¹ Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia (GDOP), São Paulo State University (UNESP), Guaratinguetá 12516-410, SP, Brazil; giuliatti.winter@unesp.br

² Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Street, 117198 Moscow, Russia; antonio.prado@inpe.br

³ Postgraduate Division, National Institute for Space Research (INPE), São José dos Campos 12227-010, SP, Brazil

⁴ Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo (IFSP), São José dos Campos 12227-010, SP, Brazil; andre.amarante@unesp.br

* Correspondence: jadilene.rodrigues@unesp.br

Abstract: Close polar and circular orbits are of great interest for the exploration of natural satellites. There are still no studies in the literature investigating orbits around Titania, the largest satellite of Uranus. In this work, we present results of a set of numerical simulations carried out to obtain long-duration orbits for a probe around Titania. Through an expansion of the gravitational potential up to second order, the asymmetry of the gravitational field due to Titania's coefficient C_{22} , the zonal coefficient J_2 , and the gravitational perturbation of Uranus is considered. The analysis of lifetime sensitivity due to possible errors in the values of J_2 and C_{22} is investigated using multiple regression models. Simulations were performed for different eccentricity values, and lifetime maps were constructed. The results show that low-altitude and near-circular orbits have longer lifetimes due to the balance between the disturbance of Uranus and the gravitational coefficients of Titania. The results also show that non-zero values of the longitude of periapsis (ω) and longitude of the ascending node (Ω) are essential to increase the lifetime up to eight times compared to cases where $\omega = \Omega = 0^\circ$. We also show that an orbit with eccentricity 10^{-3} is the most affected by errors in the values of J_2 and C_{22} .

Keywords: orbits; lifetime; celestial mechanics; astrodynamics; numerical simulations; planetary satellite



Citation: Xavier, J.; Prado, A.B.; Winter, S.G.; Amarante, A. Mapping Long-Term Natural Orbits about Titania, a Satellite of Uranus. *Symmetry* **2022**, *14*, 667. <https://doi.org/10.3390/sym14040667>

Academic Editors: Jan Awrejcewicz and Igor V. Andrianov

Received: 28 January 2022

Accepted: 21 March 2022

Published: 24 March 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Uranus and its satellites are one of the least explored systems in our solar system. The only mission sent to visit Uranus took place in 1986 with Voyager 2. A mission to explore the Uranus system would be extremely important to understanding the formation and evolution of the solar system.

The main information about the Uranus system comes from observations made from Earth and data sent by space telescopes, but some important questions still remain unanswered. The distances of the ice giant planets are still an enigma, as some models suggest they should be closer to the Sun. Their high obliquity and low luminosity are intriguing. In addition to all these issues, information about Uranus' satellites would also be of great importance, as they have irregular surfaces and there is evidence of oceanic formation [1,2]. According to [3], NASA is working in partnership with ESA to plan possible missions to the ice giants during the period 2024–2037. These possible missions can help to understand the origin and evolution of this system.

Titania, Uranus' largest natural satellite, has a surface with flaws that could indicate past or still active seismic activity. In addition, there are indications that its surface has a mixture of water and ice with carbon dioxide [4–6]. An orbiter around Titania could

investigate, for example, whether this satellite is or once was an ocean world, or even determine recent endogenous geological activity [2].

The best way to study this natural satellite is to send a probe around it. Therefore, it is necessary to look for the best orbits around Titania. In the literature, we still do not have references to the study of orbits around Titania that include perturbations due to its non-sphericity. Using maps that show the orbital duration, we present in this work a study to find the best conditions to obtain longer lifetimes of a probe around Titania. Here, Titania is at the center of the system and is perturbed by Uranus. Due to the asymmetry caused by Titania's ellipticity, the coefficient C_{22} is analyzed, as well as J_2 , which generates a vertical symmetry in the gravitational field around the satellite.

Lifetime mapping is a technique used to find the best initial conditions for orbits as a function of their duration. The map provides the best values of the orbital elements for which orbits last the longest. With this, it is possible to extract significant values of the semi-major axis (a), eccentricity (e), inclination (I), argument of periapsis (ω), longitude of ascending node (Ω), and mean anomaly (M) to analyze the trajectory of a space vehicle.

This technique is used in the work of [7] to study a hypothetical system, with masses and distances similar to the Earth-Moon system. In this work, the authors looked for the longevity of a probe around a natural satellite with high eccentricity. The study was done through a second-order expansion of the potential of the perturbing planet, assuming that it is in an elliptical orbit. The results indicated that the high variation of the eccentricity and inclination significantly reduce the useful life of the probe. The authors also showed that this high eccentricity variation is responsible for a 7–8% decrease in the probe lifetime.

These maps were used in [8] to analyze the best orbits for a probe around Callisto. In this study, the authors used the double-averaged method to investigate the importance of hypothetical eccentricity values for the perturber, Jupiter. Callisto's non-sphericity was considered and an analysis of the effect of its gravity coefficients was presented. Lifetime maps were used to find the best initial conditions for long-life orbits. In addition, the authors highlighted the importance of adopting specific values for ω and Ω in order to increase the useful life of the probe. The results obtained by them showed that for this system, the contributions due to Callisto gravitational coefficients J_2 and C_{22} are small.

The double-averaging method was also used to study another Galilean satellite in [9]. The dynamics of orbits around Europa were analyzed considering the perturbation of Jupiter in an elliptical orbit and the gravity coefficients J_2 , J_3 , and C_{22} of Europa. The study used two processes to find long-duration orbits: the double-average and single-average methods. The authors concluded that even with not eliminating the coefficient C_{22} , the simple-average process was more realistic and can be used to find orbits that reach 80 days of life. Orbits up to 200 days of duration have also been found using this method, however, the eccentricity increases slightly in this case. Orbits around Europa were studied again in [10]. In this work, the authors found a set of long-lived frozen orbits with initial conditions given by $a = 1850$ km, $e = 0.09$, $I = 40^\circ$, $\omega = 270^\circ$, and $\Omega = 90^\circ$.

Frozen orbits are of great interest for projecting future space missions. These orbits are characterised by keeping the variation of eccentricity, inclination, and argument of periapsis constant. For these orbits to be found, the argument of periapsis must be fixed at 90° or 270° and the short period elements eliminated. These elements are responsible for causing large variations in eccentricity and inclination due to the dependence on the term C_{22} .

In [11], frozen orbits around the Moon were investigated considering the Earth perturbation and the effects of the coefficients J_2 and C_{22} . The authors performed a closed-form transformation between osculating elements and averaged elements in order to find initial osculating elements for frozen orbits. This transformation was done only for circular orbits. The results showed that it was necessary to transform the average elements into osculating elements in order to add the C_{22} coefficient, as this term caused large variations in high-altitude orbits and can totally change the behaviour of the orbits.

Orbits that keep their eccentricity, inclination, and argument of periapsis constant over a period resemble frozen orbits. In [12] three families of periodic lunar orbits were found. The results showed that these orbits are very sensitive to the initial conditions and that these conditions have small differences with respect to the frozen orbits. Families of frozen orbits around the Moon were also found in the work of [13]. The authors eliminated the short period terms and considered the oblateness of the Moon to order 4 (J_4). For eccentric frozen orbits, all families had a critical inclination around 64° . In the case of very low quasi-circular lunar orbits, several families with different critical inclinations were obtained, although they quickly disappeared due to small changes in the semi-major axis and eccentricity.

Despite causing large variations in some orbital elements, such as inclination, eccentricity, and argument of periapsis, the term C_{22} has an important role in the dynamics of orbits around natural satellites. The combination of this term with the zonal term J_2 is able to attenuate the effects caused by the perturbation due to the third body acting as a “protection mechanism” to prolong/increase the lifetime of the desired orbit [14,15]. In [16] the combination of this coefficient with the J_2 term was also investigated in orbits around the Moon. The results showed that the values of J_2 and C_{22} strongly affected the near-critical inclination and the libration amplitude of the argument of periapsis. This work also showed that these effects were greater when added to the contribution of the rotation rate.

In several works found in the literature, the perturbation due to the third body was considered when it comes to orbits around natural satellites. The effects of this perturbation were mainly observed in the eccentricity of the orbit around the observed satellite. These high eccentricity values achieved by the probe’s orbit are related to the effect of the Kozai–Lidov mechanism. This mechanism was studied for the first time in [17,18]. This phenomenon causes the argument of periapsis to oscillate at a constant value. Whereas the argument of periapsis oscillates around a specific value, the eccentricity and inclination suffer periodic oscillations (e.g., see [19,20] and the references therein).

The structure of this work is organised as follows: in Section 2 the mathematical model adopted to analyze the system is described, as well as the methodology. In Section 3 we discuss the results obtained. In Section 4 we show the isolated effect of each perturbation through the analysis of the orbital elements of each specific case. In this same section, we also present the mechanism for obtaining long-time orbits through the evolution of the orbital elements. In Section 5 we present an estimate of the probe’s lifetime when affected by possible errors in the values of Titania’s gravitational coefficients. Finally, in Section 6, we present our conclusions.

2. Mathematical Model

The system addressed in this work consists of a central body (Titania), a space probe, and a perturber (Uranus). We assume that the perturber body is in a Keplerian orbit around Titania with a radius of 25.362×10^3 km and mass 8.68×10^{25} kg, (<https://ssd.jpl.nasa.gov/>), accessed on 5 April 2021. The orbital parameters are given in Table 1. To make an accurate investigation of the problem, we consider the main gravity coefficients (J_2 and C_{22}) of Titania, regarding the oblateness and ellipticity of the body. These terms are the most important in the gravitational field, after the Keplerian term. Previous work [11,16,21,22] shows that these coefficients are the most relevant to the perturbative effects caused on a probe by a satellite and, in most cases, the most significant to model the irregular shape of a body. It is important to note that these two coefficients are the only coefficients available in the literature. As our focus is to analyze orbits very close to the surface of this satellite, these will be the main terms to be considered in this work. Titania has a mass of 35.27×10^{20} kg and a radius of 788.9 km, (<https://ssd.jpl.nasa.gov/>), accessed on 5 April 2021. The other

parameters of Titania are shown in Table 2. The equations of motion are described according to [22]:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M_T + m)\vec{r}}{\vec{r}^3} + GM_U \left(\frac{\vec{r}_U - \vec{r}}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_U}{\vec{r}_U^3} \right) + \vec{P}_T + \vec{P}_U \quad (1)$$

$$P_{Tx} = -\frac{G(M_T + m)J_2x}{2r^5} \left[3 - 15\left(\frac{z}{r}\right)^2 \right] + \frac{3G(M_T + m)C_{22}x}{r^5} \left[2 - \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \quad (2)$$

$$P_{Ty} = -\frac{G(M_T + m)J_2y}{2r^5} \left[3 - 15\left(\frac{z}{r}\right)^2 \right] - \frac{3G(M_T + m)C_{22}y}{r^5} \left[2 + \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2} \right] \quad (3)$$

$$P_{Tz} = -\frac{G(M_T + m)J_2z}{2r^5} \left[9 - 15\left(\frac{z}{r}\right)^2 \right] - \frac{15G(M_T + m)C_{22}z}{r^7} (x^2 - y^2) \quad (4)$$

$$P_{Ux} = \frac{GM_U(x_U - x)}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} \left[\frac{J_2}{(r_U - r)^2} \left(\frac{15}{2} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{J_4}{(r_U - r)^4} \left(\frac{315}{8} \frac{(z_U - z)^4}{(r_U - r)^4} - \frac{105}{4} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} \right) \right] \quad (5)$$

$$P_{Uy} = \frac{GM_U(y_U - y)}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} \left[\frac{J_2}{(r_U - r)^2} \left(\frac{15}{2} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{J_4}{(r_U - r)^4} \left(\frac{315}{8} \frac{(z_U - z)^4}{(r_U - r)^4} - \frac{105}{4} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} \right) \right] \quad (6)$$

$$P_{Uz} = \frac{GM_U(z_U - z)}{|\vec{r}_U - \vec{r}|^3} \left[\frac{J_2}{(r_U - r)^2} \left(\frac{15}{2} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} - \frac{9}{2} \right) + \frac{J_4}{(r_U - r)^4} \left(\frac{315}{8} \frac{(z_U - z)^4}{(r_U - r)^4} - \frac{175}{4} \frac{(z_U - z)^2}{(r_U - r)^2} + \frac{75}{8} \right) \right], \quad (7)$$

where $\vec{P}_T$ and $\vec{P}_U$ are the expansions of the gravitational potential up to second order for Titania and up to fourth order for Uranus, respectively; P_{Tx} , P_{Ty} , and P_{Tz} are components of the $\vec{P}_T$ vector and P_{Ux} , P_{Uy} , and P_{Uz} the components of the $\vec{P}_U$ vector; m is the mass of the space probe, M_T the mass of Titania, and M_U the mass of Uranus. The terms $\vec{r}$ and $\vec{r}_U$ are the radius vector of the probe and Uranus, respectively.

The investigation of orbits around natural satellites with a non-uniform mass distribution has been the subject of several studies in recent years. Studies [8,9,14,22–24] emphasise the importance of considering the oblateness and ellipticity of the body to be orbited by the probe. However, it is understood that analyzing the influence of higher oblateness coefficients of the disturbing body can provide a much more accurate study of the orbits.

Uranus is very far from Earth, approximately 3 billion km, and the time to send signals from Earth is on the order of 2.8 h; therefore it takes approximately 5.6 h to send a command and receive a signal back. Because of this time lag, orbital maneuvering is a logistical problem. An important reason to search for long-term natural orbits in which to place a space probe is because they do not require frequent orbital maneuvers, thereby saving fuel and simplifying the orbit control. For the sake of comparison, we did a single test considering the highest order gravity coefficients J_2 and J_4 of the disturbing body. This implementation was made through an adaptation of the Mercury package [25], which was used in our numerical simulations.

Table 1. Parameters of Titania with respect to Uranus.

Parameter	Value
Semi-major axis (km)	435.8×10^3
Eccentricity	1.18×10^{-3}
Inclination ($^\circ$)	10^{-1}
Argument of periapsis ($^\circ$)	1.64×10^2
Longitude of ascending node ($^\circ$)	1.67×10^2
Mean anomaly ($^\circ$)	2.05×10^2

JPL. Website: <https://ssd.jpl.nasa.gov/>, accessed on 5 April 2021.

Table 2. Gravity coefficients of Titania and Uranus.

Body	J_2	J_4	C_{22}
Uranus ¹	3.34343×10^{-3}	-2.885×10^{-5}	-
Titania ²	1.13×10^{-4}	-	3.38×10^{-5}

¹ [26]; ² [27].

Our main goal is to study circular orbits with high inclinations. Circular orbits are better for observations as eccentric orbits have a lower perigee and are more susceptible to collisions. Highly inclined orbits take advantage of the central body's rotation to observe the entire natural satellite. However, we understand that analyzing other values of eccentricities can contribute to a more complete approach to the problem, giving more choices for the mission designers. Therefore, we considered the following eccentricity values for the probe's orbit: $e = 0$, $e = 10^{-1}$, $e = 10^{-2}$, $e = 10^{-3}$, and $e = 10^{-4}$. In order to analyze those orbits very close to the surface of Titania, we adopted a semi-major axis interval (a) ranging from 810 km to 2500 km for each value of the eccentricity. The inclination is in the range between 75° and 90° .

We considered two cases regarding the argument of periapsis and the longitude of the ascending node (ω and Ω , respectively). First, we consider $\omega = \Omega = 0^\circ$ and, after that, we choose specific values in regions with longer lifetimes, to explore best results.

All cases were simulated for 1000 days, equivalent to approximately 10^4 orbital periods for the closest orbit to Titania's surface and 10^3 revolutions for the farthest orbit. For our purposes, this time is adequate, sufficient to analyze the orbital evolution of a space probe and collect and send data for analysis. The lifetime of the orbit is defined by the time that the space probe remains in orbit around Titania without colliding with the central body. Therefore, the maps of a_i versus I_i show the lifetime of the probes numerically simulated up to 1000 days. Our main goal is looking for longer lived orbits around Titania under the effects of its gravitational coefficients and Uranus.

In order to analyze the influence of the gravity coefficients of Titania and the third body, we constructed life maps considering two cases. Point mass models are considered without taking into account the gravity coefficients of both bodies, with gravity coefficients for both bodies, Titania and Uranus, and including J_2 and C_{22} of Titania. "Difference maps" (third body— J_2 , C_{22} from Titania) are also presented. The case in which we analyzed the J_2 and J_4 coefficients showed insignificant changes in lifetimes compared to the case where these coefficients are not included. Therefore, we will adopt Uranus as a point of mass. Our purpose with these maps is to find regions where the orbits are affected by the gravity coefficients of Titania and the third body. These effects are in opposite directions, and the orbits can last longer without collision or escape. The time evolution of the orbital elements a , e , I , ω , and Ω of the orbits with a long lifetime are shown Section 4.

3. Analyzing the Results

The results show diagrams $a \times I$ considering: (i) only the contribution of the disturbing body (Uranus), modelled as a point of mass; (ii) the gravity coefficients of Titania (J_2 and C_{22}), and (iii) the more complete model, where both effects are considered. In the figures,

the color bar represents the lifetimes of the orbits. We constructed “difference maps” by subtracting the lifetime of the orbits obtained when Uranus is considered. The lifetime of the orbits when considering both effects, the gravitational effects of Uranus, and the gravity coefficients of Titania, are presented in Section 3.

It should be noted that, in these figures showing the differences in the lifetimes, a positive sign indicates those values where only the presence of Uranus prolonged the probe’s life, whereas negative values indicate that the gravity coefficients of Titania helps to naturally control the third-body perturbations Uranus, thus increasing the lifetime of the orbits.

Figure 1 presents a map where we considered only the third body (a) and the third-body and the gravity coefficients of Titania (b). For the case where only the gravity coefficients of Titania are considered, Figure 1b shows an increase of 50 days in the life of the probe for orbits closer to the surface of Titania. Orbits with lifetimes up to 450 days are observed in the same altitudes and inclinations. Lifetimes in the range 100–300 days for all values of inclinations occur for the semi-major axis in the range 1000–2200 km (Figure 1a), and $a = 1000$ –1800 km (Figure 1b) (shown in light green, green, and blue squares).

We show lifetime “difference maps” in Figure 1c. The maximum value of the semi-major axis is $a = 1200$ km; after that, there are no significant changes in the orbits’ lifetime because the space probe is too far from Titania. Its irregular shape is unable to balance the third-body perturbations from Uranus. Figure 1c shows that the largest differences in lifetime appear for values of $a = 810$ –1000 km and $I = 75$ –83° (blue region), where the equilibrium between the gravity coefficients of Titania and Uranus occurs. We found increases in the lifetime on the order of 60 days, which is not negligible. In addition, those orbits are closer to Titania, which helps in the observation of this body. It is noted that the most negative numbers occur for lower values of inclinations and semi-major axes. In these regions, the third body perturbations are smaller, and the gravity coefficients dominate the dynamics and reduce the duration of the orbits.

For $e = 10^{-4}$, the results present similar behaviour compared to $e = 0$. The simulations were performed using the same initial conditions used in Figure 1, except for the eccentricity, which now equals $e = 10^{-4}$.

We found an equal maximum lifetime when the third body and the J_2 and C_{22} coefficients of Titania are considered. However, when considering only Uranus as a perturber, the region with the longest orbit life ranges in the interval $a = 810$ –900 km and $I = 75$ –80°. In this region, the longest lifetime is approximately 450 days. When including the gravity coefficients of Titania, this region increases to $a = 810$ –1000 km and $I = 75$ –84°. Another fact is that the number of orbits with a lifetime between 300–350 days decreases when the gravity coefficients of Titania are considered.

The results showed that the orbits in the range $a = 810$ –1050 km and $I = 75$ –84° have increased by 60 and 20 days. Orbits with $a = 810$ –900 km and $I = 85$ –90° have their lifetime extended by approximately 40–80 days, thanks to the effect caused by the equilibrium of the perturbations.

For $e = 10^{-3}$, shown in Figure 2, our results, given in the diagram $a \times I$ when only the gravitational effect of Uranus is considered, are similar to those observed for $e = 0$ and $e = 10^{-4}$. As already noted, the terms J_2 and C_{22} of Titania are more important to increasing the lifetime of the probe, confirming that the effects caused by the gravity coefficients of Titania compensate for the effects caused by Uranus’ gravitational attraction, as expected.

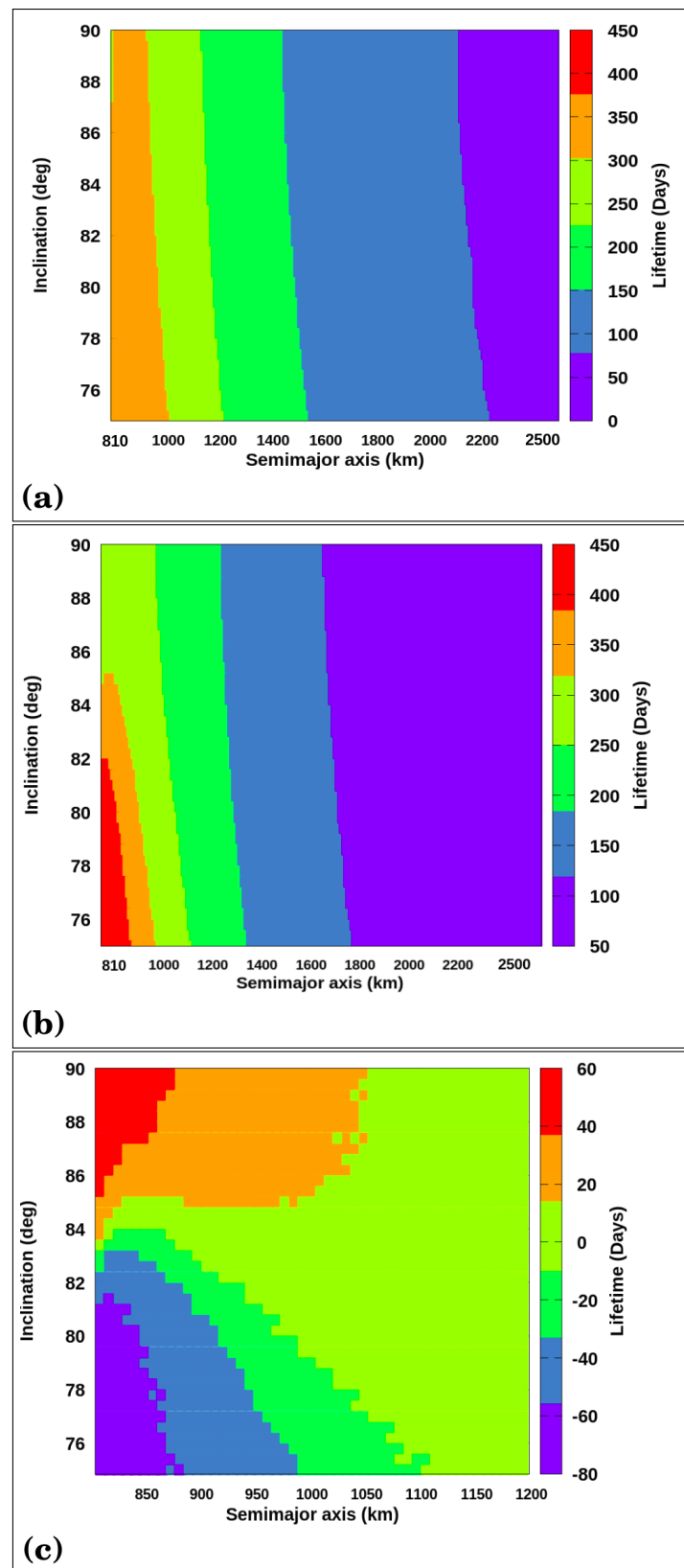


Figure 1. Diagram of a versus I for $e = 0$: (a) considering only the effects from Uranus; (b) including the third-body and the effects of J_2 and C_{22} of Titania; (c) lifetime differences (third body $-J_2$ and C_{22} of Titania). Initial values are $a = 810\text{--}1200$ km, $I = 7\text{--}90^\circ$, $\omega = 0^\circ$, and $\Omega = 0^\circ$.

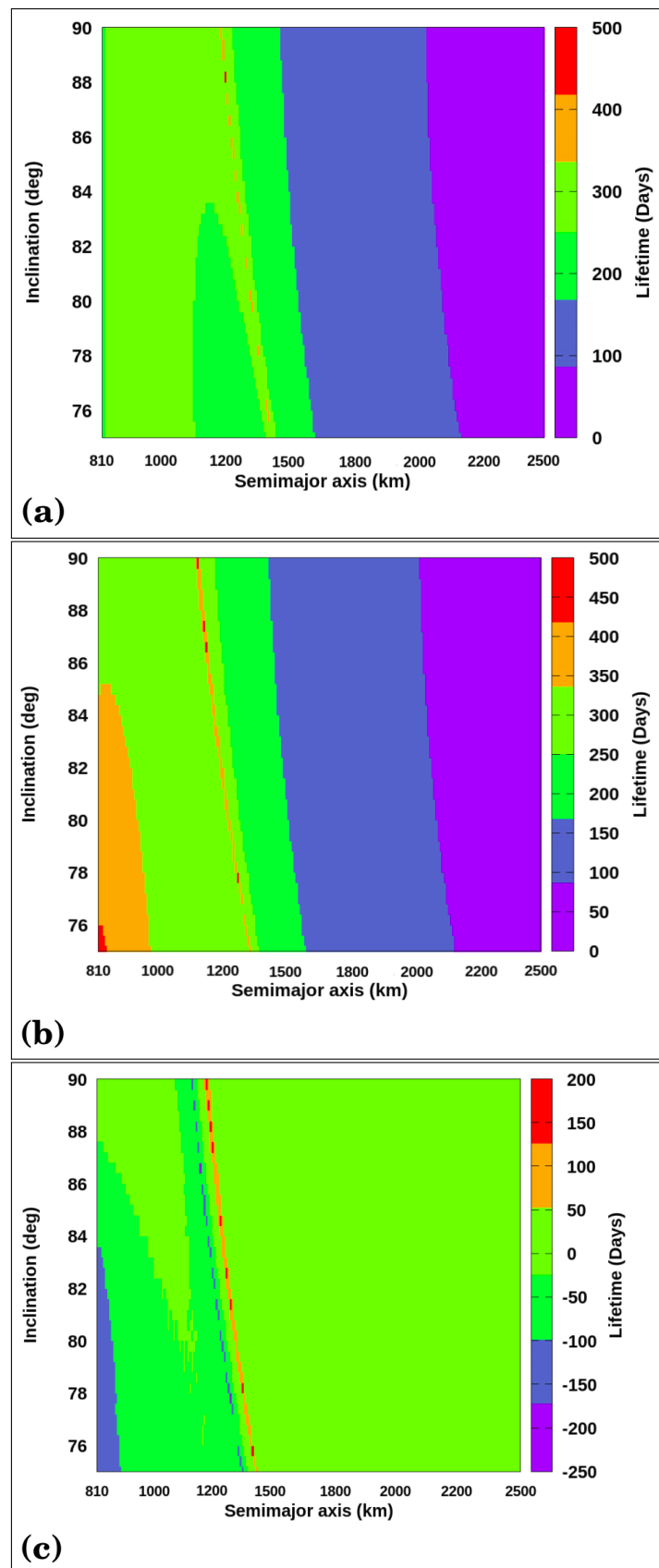


Figure 2. Diagram of a versus I for $e = 10^{-3}$: (a) considering only the effects from Uranus; (b) including the third-body and the effects of J_2 and C_{22} of Titania; (c) lifetime differences (third body $- J_2$ and C_{22} of Titania). Initial values are $a = 810\text{--}1200$ km, $I = 75\text{--}90^\circ$, $\omega = 0^\circ$, and $\Omega = 0^\circ$.

The lifetime differences maps presented in Figure 2c have two nearby regions where the changes in the lifetimes are expressive (regions in purple, red, and orange squares). In the region with purple squares, the lifetime for those orbits only considering the third body is up to 250 days. At the red dots, the probe's lifetime can reach up to 200 days when J_2 , C_{22} coefficients of Titania are considered.

Figure 2b, including the gravity coefficients of Titania, presents a more extensive region with lifetimes of 350–500 days. This region is located very close to the surface of Titania ($a = 810$ – 1000 km), where the terms J_2 and C_{22} cancel the effects of the third body. Figure 2a shows the numerical simulations where the gravitational effects of Uranus are considered. Orbits with a lifetime close to these values appear only on a small island, for all inclinations, and a semi-major axis closer to 1400 km.

In the regions where the probe remains around Titania for longer times, there is a balance between the perturbation caused by the third body and the perturbation due to the gravitational coefficients of Titania, causing the probe's lifetime to be extended. This balance is described in previous work [9,14], where it is shown that, when combined with J_2 and C_{22} of the central body, this resultant perturbation acts as a “protection mechanism” responsible for softening the effects caused by the third body perturbation on the variation of the eccentricity.

The results presented in Figure 3 are obtained for $e = 10^{-2}$. Note that there are no large differences between the results obtained when considering only the third body perturbation (a) and those when the J_2 and C_{22} from Titania are added in the system (b). There is only a decrease in the region with lifetimes between 160 and 180 days, covering all the inclinations, when J_2 and C_{22} of Titania are included. This region is located in the range $a = 900$ – 1050 km and $I = 75$ – 80° .

For $e = 10^{-1}$, the orbital duration maps show that the results are very close when all the perturbations are considered, and the behaviour is similar to the one obtained for $e = 10^{-2}$. The difference is that for $e = 10^{-1}$, the probe's maximum lifetime is much shorter, 60 days, but the regions of greater and lesser duration are very similar. Previous studies [7,28] found similar results, where more eccentric orbits have shorter lifetimes, as expected, as these orbits have smaller periapsis and, therefore, collide with the central body in less time. In addition, they have larger apoapsis, which increases the effect of the third body.

Previous work [8,29,30] shows the relevance of the contribution of the argument of periapsis (ω) and longitude of the ascending node (Ω) in the duration of highly inclined orbits. In [8], the initial conditions capable of increasing the lifetime of the probe are $\omega = 180^\circ$ and $\Omega = 90^\circ$. In [29], the best values found for these angles are $\omega = 140.5$ – 148° , $\omega = 321$ – 327° , and $\Omega = 165^\circ$. Given the above, we analyzed the regions with longer lifetimes, shown in Figures 1–3, in a range of values of the periapsis argument and the node longitude. Within these regions, we chose the best values of a and I and built maps as a function of ω and Ω with the four values of eccentricities adopted earlier. For this analysis, we consider the perturbation due to the third body and also the gravity coefficients of Titania.

The first case to explore is for $e = 10^{-4}$. The results provided by the simulations showed that the longest orbits occurred for $a = 900$ – 1058 km and $I = 70$ – 80° . The result of this analysis can be seen in Figure 4.

We fixed a semi-major axis value, 900 km, and varied the inclination to 70° (Figure 4a) and 80° (Figure 4b). We then fixed the inclination at 80° and vary the semi-major axis to 1018 km, (Figure 4c) and 1058 km (Figure 4d). The angles ω and Ω range from 0° to 360° .

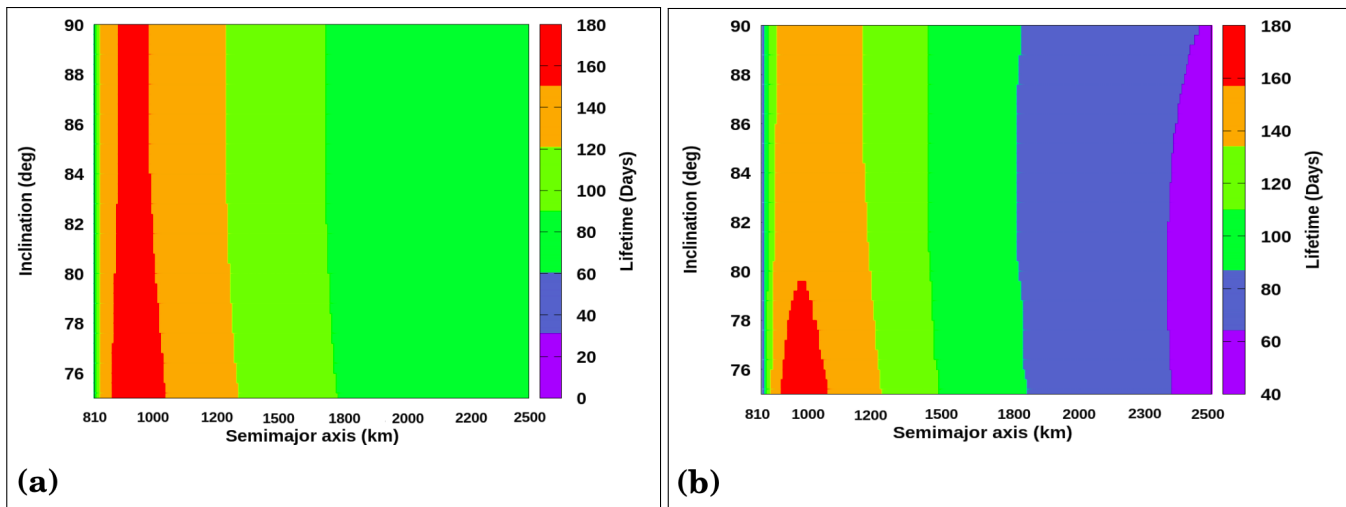


Figure 3. Diagram of a versus I for $e = 10^{-2}$: (a) considering only the effects from Uranus; (b) including the third-body and the effects of J_2 and C_{22} of Titania. Initial values are $a = 810$ – 2500 km, $I = 75$ – 90° , $\omega = 0^\circ$, and $\Omega = 0^\circ$.

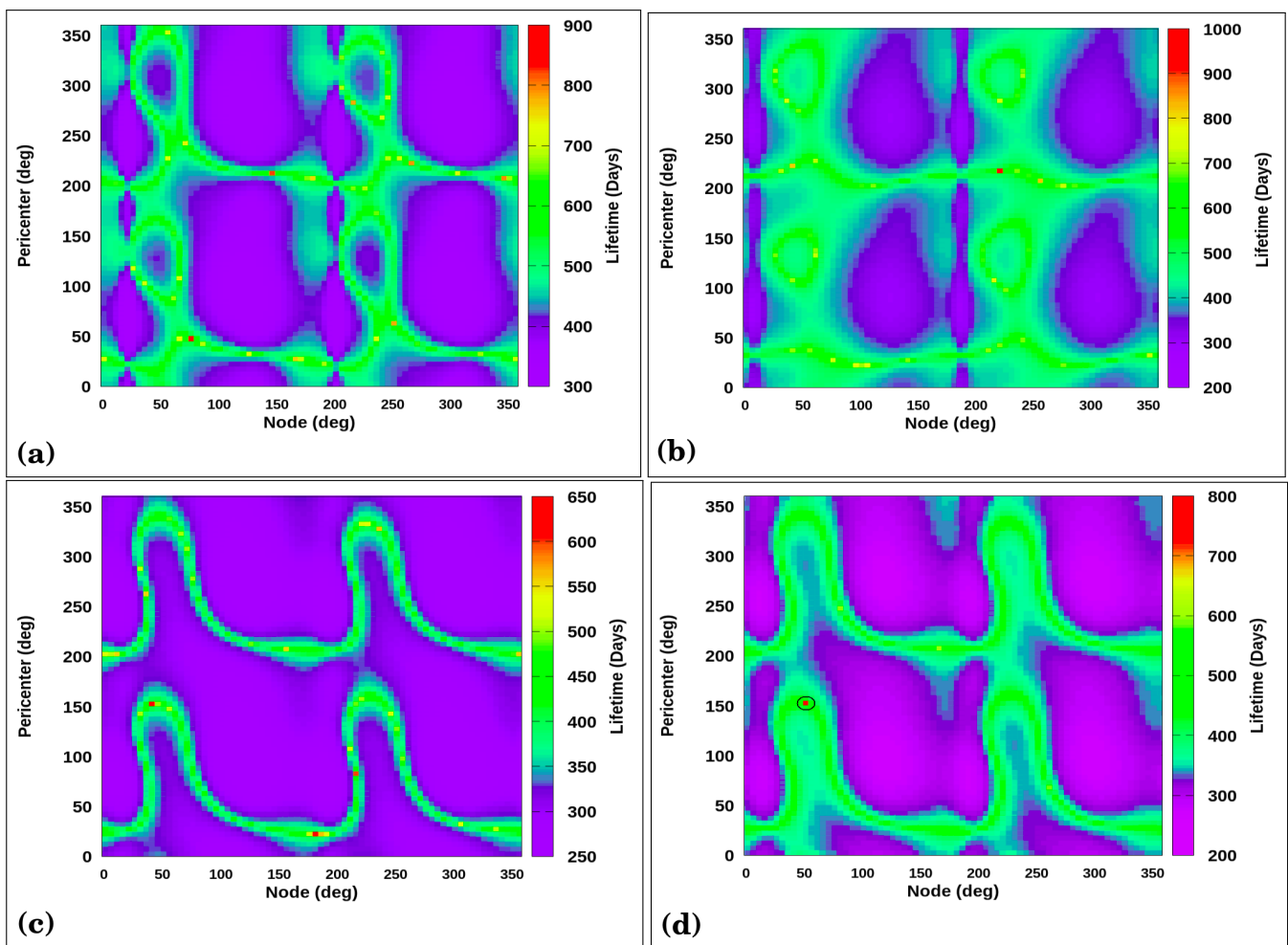


Figure 4. Diagram of $\omega \times \Omega$ for $e = 10^{-4}$ considering the effects of third-body and J_2 and C_{22} of Titania: (a) $a = 900$ km, $I = 70^\circ$; (b) $a = 900$ km, $I = 80^\circ$; (c) $I = 80^\circ$, $a = 1058$ km; (d) $I = 80^\circ$, $a = 1018$ km; $\omega = 0$ – 360° , $\Omega = 0$ – 360° .

Figure 4a,b show similar regions for longer life orbits, $\omega = 0\text{--}150^\circ$, $\omega = 220\text{--}360^\circ$ and $\Omega = 0\text{--}100^\circ$, $\Omega = 200\text{--}300^\circ$. In Figure 4a, where the considered inclination is 70° , the longer duration orbits have a lifetime of up to 900 days. As we increase the inclination by 10° , the lifetime increases by 100 days (Figure 4b). This is due to the action of the gravitational coefficients J_2 and C_{22} , which are responsible for attenuating the effects caused by the third body for more inclined orbits.

The regions with longer duration orbits present in Figure 4c,d, have values of $\omega = 25\text{--}150^\circ$, $\Omega = 50\text{--}100^\circ$, and $\Omega = 150\text{--}200^\circ$. Orbits with a semi-major axis of 1058 km have a maximum lifetime of up to 650 days, whereas, in Figure 4d, this time is 800 days for $a = 1018$ km.

We chose the initial conditions of a specific point within these longer life regions to redo the simulations for $e = 10^{-4}$. The chosen point is highlighted in Figure 4d (black circle), and has values of $\Omega = 155^\circ$, $\Omega = 55^\circ$, $a = 1018$ km, and $I = 80^\circ$. Figure 4a,b present orbits with longer lifetimes compared to the point chosen in Figure 4d. However, our main objective is to show that the adoption of these angles can increase the lifetime of the orbit even for regions with shorter orbits. In order to analyze the importance of these angles in the lifetimes, we made a new simulation with values of $\Omega = 155^\circ$, $\Omega = 55^\circ$ for $e = 10^{-4}$.

The insertion of the values ω and Ω in the new simulation for $e = 10^{-4}$ increase the probe's life by approximately 78%, a very large value. We extended the numerical integration for the two cases analyzed: third body and J_2 and C_{22} from Titania. However, the new results show distinct regions with more extended life for each perturbation considered. In the case of the gravitational effects of Uranus, a small island of orbits with a lifetime of 600–800 days appears with a semi-major axis ranging from $a = 810$ km to 900 km and inclinations from 75° to 78° . If we include the gravity coefficients of Titania, the maximum lifetime is approximately 600 days. It is located in the region $a = 810\text{--}1000$ km and can be seen for all values of I , increasing from $I = 78^\circ$ to 90° . Orbits with a lifetime of 800 days are found for a value of a close to 900 km and $I = 78\text{--}90^\circ$.

The differences indicate that after the inclusion of the angles ω and Ω , the gravity coefficients of Titania are more relevant for inclined orbits, $I = 80\text{--}90^\circ$.

For $a = 875\text{--}950$ km, the orbits reach lifetimes between 200 and 400 days. This lifetime is also experienced for orbits with a semi-major axis ranging from 950 km to 1050 km and $I = 75\text{--}80^\circ$, shown in the smaller island. From 810 km to 1100 km, the gravity coefficients of Titania can still extend the duration of the orbits up to 100 days for inclinations in the range of $80\text{--}90^\circ$. Before the inclusion of $\omega = 55^\circ$ and $\Omega = 155^\circ$, the orbits that were most affected by the gravity coefficients of Titania had a maximum lifetime up to 60 days. Considering these specific values of those angles, this time has been extended to 400 days, a very large difference.

In the case of Uranus, the differences point out that, when ω and Ω angles are not zero, there is a deviation in the location of the orbits where their contribution was most significant. When $\omega = \Omega = 0^\circ$, the most inclined orbits were the most affected by the third body. After that there are orbits with inclinations between 75 and 76° with lifetimes of 100–300 days.

For the case $e = 10^{-3}$, the best initial conditions presented in Figure 2 point to a semi-major axis in the range of 834–1265 km and an inclination of $70\text{--}80^\circ$. In Figure 5 we present a diagram $\omega \times \Omega$ for some specific cases. In Figure 5a, $a = 1265$ km and $I = 70^\circ$, whereas in Figure 5b, the initial conditions are $a = 1265$ km and $I = 80^\circ$.

Figure 5a shows large islands with orbits that reach 450 days. These islands are located at $\omega = 100\text{--}200^\circ$, $\omega = 300\text{--}360^\circ$, $\Omega = 50^\circ\text{--}200^\circ$, and $\Omega = 250\text{--}360^\circ$. In the case of Figure 5b, where the inclination is 80° , the “protection mechanism” caused by the combination of the terms J_2 and C_{22} increases the orbital duration to 550 days. However, these islands are much smaller and can be seen at $\omega = 125\text{--}180^\circ$, $\omega = 300^\circ\text{--}360^\circ$ and $\Omega = 50^\circ$ and $\Omega = 250^\circ$.

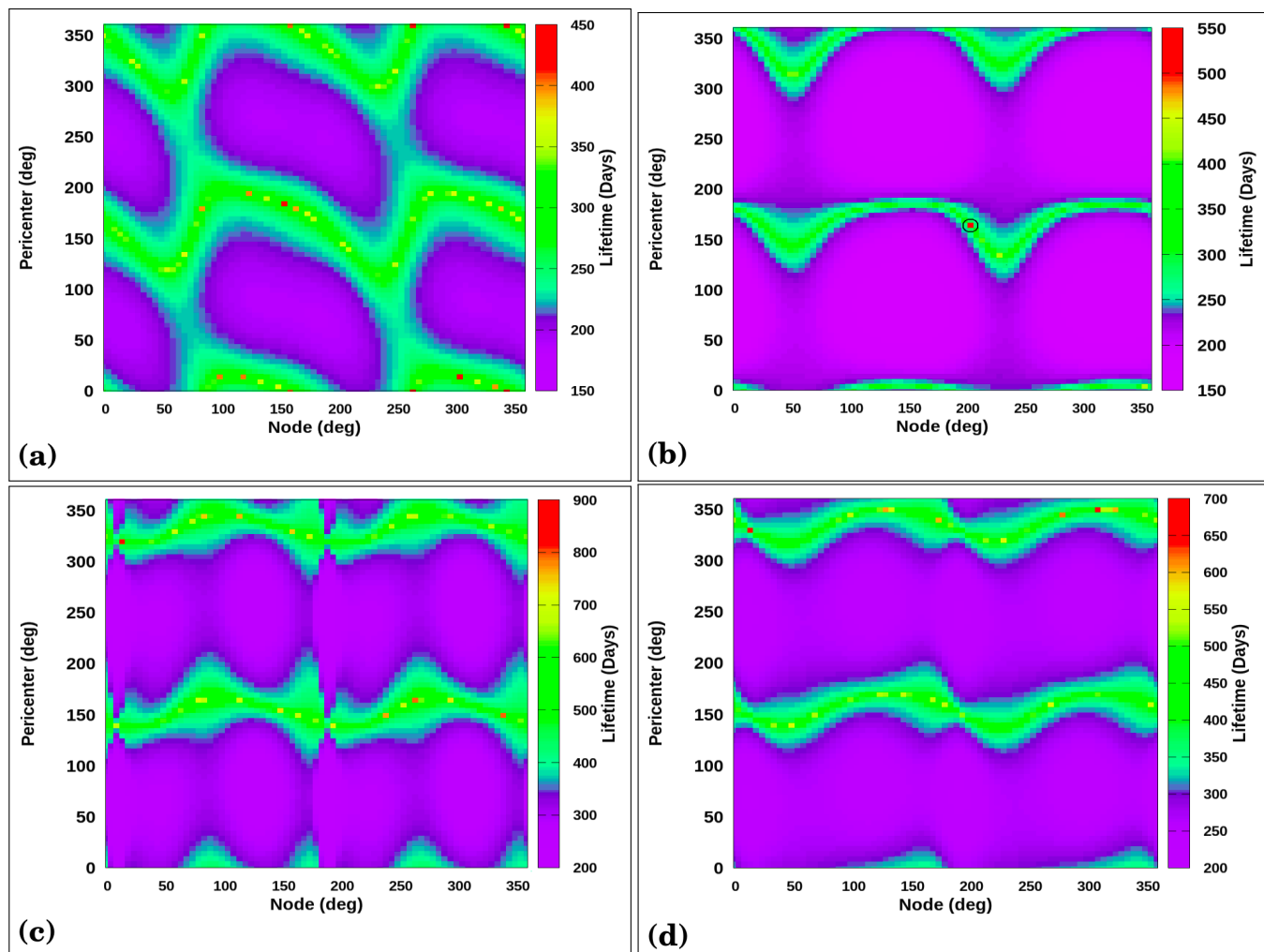


Figure 5. Diagram of $\omega \times \Omega$ for $e = 10^{-3}$ considering the effects of third-body and J_2 and C_{22} of Titania: (a) $a = 1265$ km, $I = 70^\circ$; (b) $a = 1265$ km, $I = 80^\circ$; (c) $I = 80^\circ$, $a = 834$ km; (d) $I = 80^\circ$, $a = 1000$ km; $\Omega = 0^\circ - 360^\circ$, $\omega = 0^\circ - 360^\circ$

Figure 5c,d have the same inclination 80° , but different semi-major axes. In Figure 5c, with $a = 834$ km, the maximum lifetime is almost 3 years. However, the regions are smaller compared to those seen in Figure 5a,b. They are found with ω around 150° and Ω close to 325° . More distant orbits, with a semi-major axis equal to 1000 km, (Figure 5d), it is noted that the lifetime decreases, and the values of ω and Ω for orbits with the longest duration are 100° and 275° , respectively.

An initial condition (a point) with values of $\omega = 165^\circ$ and $\Omega = 205^\circ$ is highlighted (black circle) in Figure 5b. The values of these angles were added in the new simulations for the initial conditions of Figure 2, in order to investigate how they would affect the lifetime of the probe. The new investigation was carried out by considering only the perturbation of the third body and with the complete system, third body plus the J_2 , C_{22} coefficients of Titania. Shown in Figure 6, it is observed that the use of the non-zero values for these angles in $e = 10^{-3}$ increases by 100% of the lifetime of the probe in both cases. When both effects are included, the gravitational attraction of Uranus and the gravity coefficients of Titania, the use of non-zero values for ω and Ω also changed those regions where the lifetimes are longer. Orbits with a lifetime up to 600 days are found for inclinations ranging from 84° to 90° and $a = 810$ km to $a = 1000$ km (third-body effects).

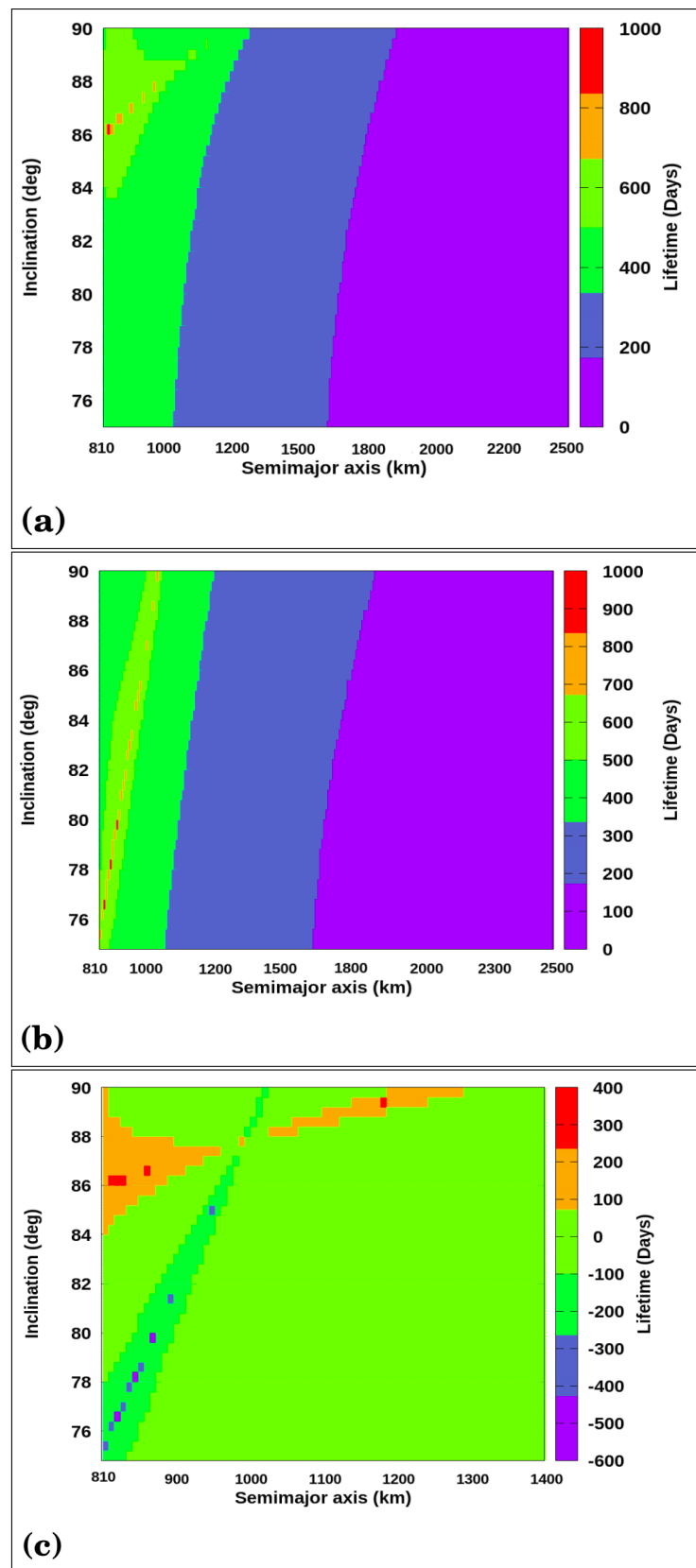


Figure 6. Diagram of a versus I for $e = 10^{-3}$: (a) considering only the effects from Uranus; (b) including the third-body and the effects of J_2 and C_{22} of Titania; (c) lifetime differences (third body $-J_2$ and C_{22} of Titania). Initial values are $a = 810\text{--}1400$ km, $I = 75\text{--}90^\circ$, $\omega = 165^\circ$, and $\Omega = 205^\circ$.

When considering the gravity coefficients of Titania, orbits with this lifetime appear for an interval of semi-major axes equal to $a = 810\text{--}1050$ km and I in the range $75\text{--}90^\circ$ (light green squares). The location of the orbits with a lifetime of approximately 400 days is practically the same for both cases, $a = 810\text{--}1000$ km and $I = 75\text{--}90^\circ$ (green squares). The blue dot region has lifetimes in the range 200–300 days for all inclinations and with a in the range 1000–1600 km.

Figure 6c shows that Uranus affects the lifetime of the more inclined orbits. This effect appears in a small orange island that goes from $I = 84\text{--}90^\circ$ for $a = 810\text{--}1300$ km. In this region, the duration of the orbits is approximately 400 days, considering the lifetime of the probe affected by the gravity coefficients of Titania and Uranus. The effect of J_2 and C_{22} of Titania and the third-body acts on orbits with inclinations of $75\text{--}90^\circ$ and semi-major axes of 810–1000 km. The lifetimes of these orbits range from 100 to 600 days compared to the case where only the effect of Uranus is considered; there are no significant changes for a larger than 1400 km.

For $e = 10^{-2}$, the longest-lived orbits are located in the range 900–1160 km and $I = 70\text{--}80^\circ$. Therefore, the initial conditions used to build the $\omega \times \Omega$ graphs are within this range of values. In Figure 7 we present four scenarios for analysis of these angles. In Figure 7a, the semi-major axis considered is 1000 km and the inclination is 70° , whereas in Figure 7b, a also assumed the value 1000 km and $I = 70^\circ$.

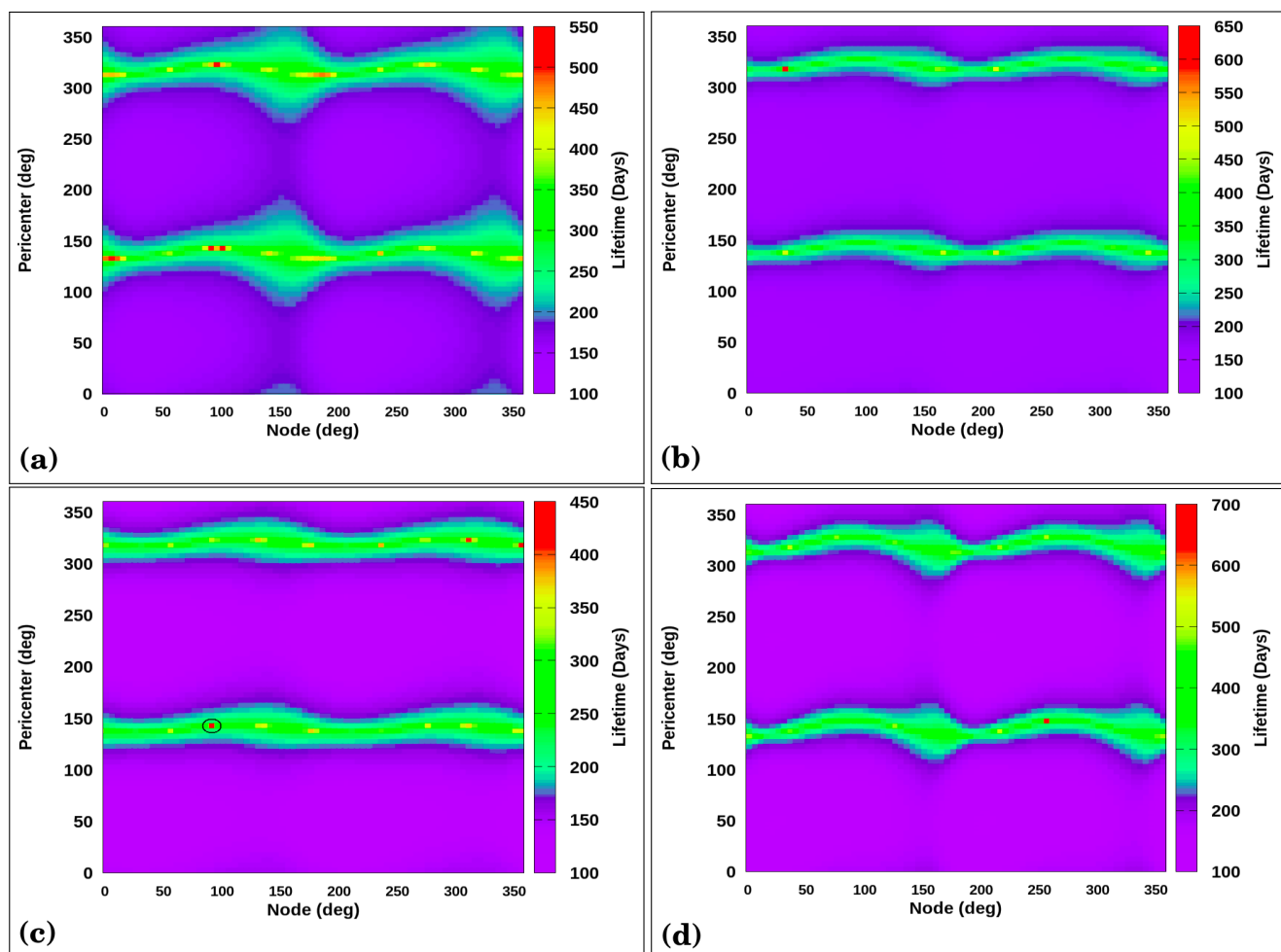


Figure 7. Diagram of $\omega \times \Omega$ for $e = 10^{-2}$ considering the effects of third-body and J_2 and C_{22} of Titania: (a) $a = 1000$ km, $I = 70^\circ$; (b) $a = 1000$ km, $I = 80^\circ$; (c) $I = 80^\circ$, $a = 1162$ km; (d) $I = 80^\circ$, $a = 914$ km; $\omega = 0\text{--}360^\circ$, $\Omega = 0\text{--}360^\circ$.

There is a similarity between the regions of orbits with longer orbital duration shown in Figure 7a,b. In both cases, the islands with the longest lifetime are located for values of Ω close to 150° , whereas for ω the best values are around 140° and 325° . Despite the high value of the eccentricity, with the combination of Titania's gravity terms with the third body perturbation, long-lived orbits can be found. In Figure 7a the maximum lifetime is 550 days, whereas in Figure 7b, where the inclination is greater, the duration of the orbits is up to 650 days.

The best orbits for $I = 80^\circ$ (Figure 7c,d), are for $\Omega = 150^\circ$ and for ω close to 140° and 325° . Due to the proximity to the surface of Titania, the lifetime for the cases analyzed in Figure 7d is longer, 700 days.

New numerical simulations for $e = 10^{-2}$ were made according to the initial condition highlighted in Figure 7c (black circle), where the orbital elements are equal to $a = 1162$ km, $I = 80^\circ$, $\omega = 145^\circ$, and $\Omega = 95^\circ$. These values for the argument of periapsis and the longitude of the ascending node were used in the new simulations with the same values of a , e , and I used in Figure 3. The results of the inclusion of these new values of ω and Ω are shown in Figure 8.

When considering ω and Ω non-zero, the increase of the lifetime of the probe is 2.5 times greater in comparison with $\omega = \Omega = 0^\circ$. The lifetimes increased from 180 to 450 days.

In Figure 8a, the orbits closer to the surface of Titania have lifetimes of 250–300 days with a semi-major axis in the range 810–1000 km. It occurs for all inclinations when we considered the perturbation of Uranus. When combining the effects of Uranus and the gravity coefficients of Titania, Figure 8b, orbits with this lifetime occupy a slightly larger region, $a = 810$ –1350 km, also for all analyzed values of I . The islands with lifetimes up to 450 days are seen in both cases: when only the perturbation of Uranus is considered, and when the gravity coefficients of Titania are also taken into account. However, these orbits change locations according to each perturbation investigated. In Figure 8a, these orbits can be seen from $I = 75$ – 90° and $a = 1300$ –1500 km, whereas in Figure 8b, this lifetime is observed for orbits in the range $a = 1100$ –1400 km and $I = 75$ – 76° (orange and red dots).

The orbits with $a = 900$ –1450 km and $I = 75$ – 82° have longer lifetimes when subjected to the effect of the gravity coefficients of Titania. The difference in the lifetimes is up to 50 days, in comparison with the situation where only the influence of the third body is considered. These orbits can be seen in Figure 8c (green dots).

Numerical integration for $e = 10^{-1}$ showed that the best values for a and I would be 900 km and $I = 80^\circ$, respectively. We use these values and plot the lifetimes as a function of $\omega \times \Omega$ varying these angles over the range 0 – 360° . The results of this analysis are not shown here in this work, as they are similar to the case $e = 10^{-2}$. However, it is important to note that the adoption of specific values for ω and Ω also increased the orbit lifetime.

The results shown in Figure 6b point out that the angles ω and Ω contribute to the increase in the lifetimes for orbits with high eccentricities, as in the case $e = 10^{-1}$. With the values found for these angles, the duration of the orbits around Titania increased by two times when considering only the third body perturbation and more than eight times when the gravity coefficients of Titania were also included. In the analysis involving the contribution from Uranus gravitational attraction, the regions of greater and smaller duration remained similar, increasing only the maximum lifetime.

However, exploring the scenario where J_2 and C_{22} of Titania were added to the model, the orbits with zero and non-zero values of ω and Ω had very different maximum lifetimes as well as larger regions with longer lifetimes. Without the inclusion of specific values for these angles, the orbits with the longest lifetime were located at $I = 75$ – 90° and $a = 900$ –1200 km. In this interval, the maximum times reached by these orbits were 60 days. With the adoption of better values for ω and Ω in the new simulations, these orbits started to have lifetimes from 200 to 500 days, for $a = 900$ –1000 km and $I = 75$ – 90° .

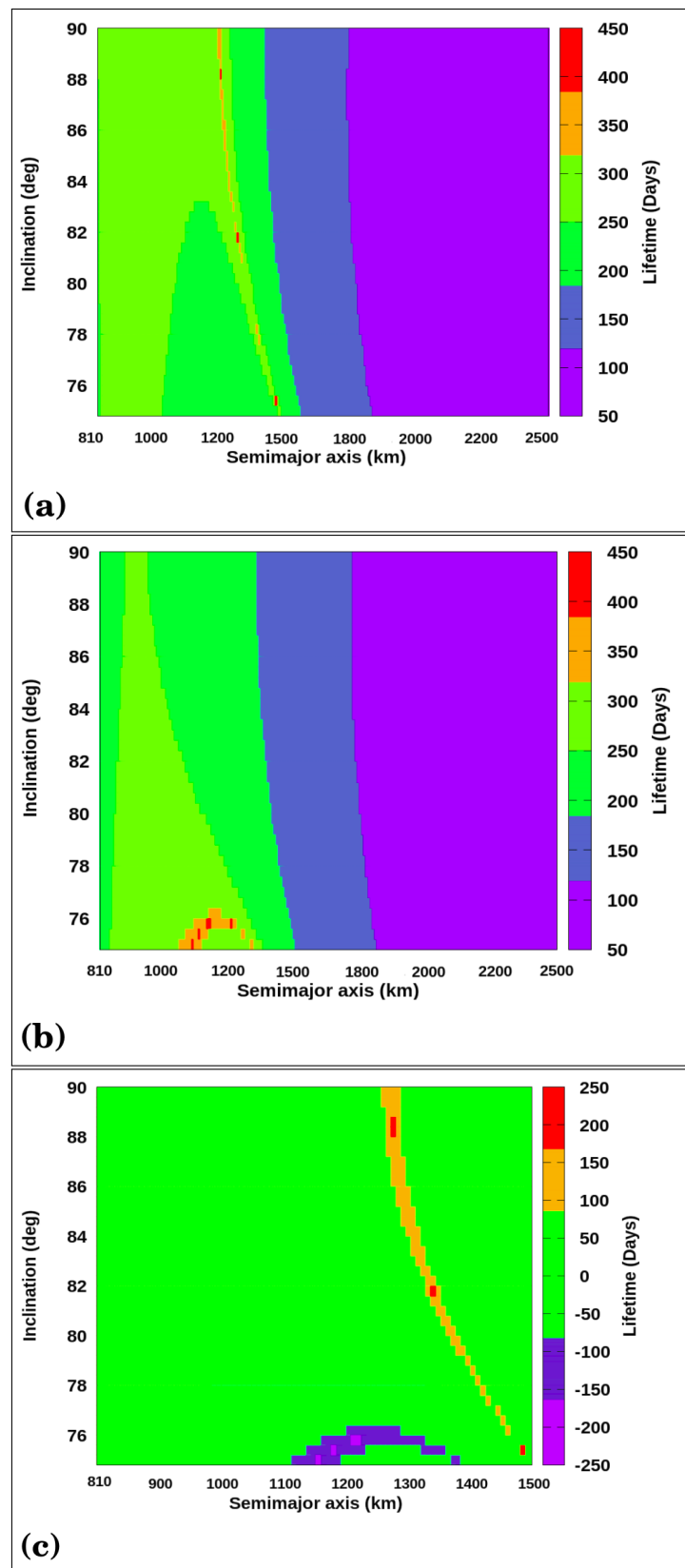


Figure 8. Diagram of a versus I for $e = 10^{-2}$: (a) considering only the effects from Uranus; (b) including third-body and effects from J_2 and C_{22} of Titania; (c) lifetime differences (third body - J_2 and C_{22} of Titania). Initial values are $a = 810$ – 1500 km, $I = 75$ – 90° , $\omega = 145^\circ$, and $\Omega = 95^\circ$.

The analysis carried out in this section shows the importance of a different approach, first including variations in ω and Ω , and then mapping $a \times I$ for the best values of ω and Ω . In all cases investigated, the best values for ω can be found in two regions, in the ranges $100\text{--}150^\circ$ and $27\text{--}360^\circ$. In the case of the ascending node longitude, the best values are close to $50\text{--}100^\circ$ and $250\text{--}360^\circ$. The orbits that had their lifetimes extended were those orbits closer to Titania's surface and with the greatest inclination. The reason for this is associated with the fact that lower and more inclined orbits are subject to the action of the zonal oblateness coefficient J_2 , which, added to the term C_{22} and the perturbation caused by the third body, promotes an equilibrium capable of increasing the duration of the orbit.

4. Long-Duration Orbits

Previous studies of systems similar to the one presented here often use the double averaging method to find frozen orbits. According to the work of [9], in order to find a frozen orbit, the relations $\frac{de}{dt} = 0$, $\frac{di}{dt} = 0$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$ must be satisfied. For such relationships to be met, it is common in the literature to define $\omega = \pi/2$ or $\omega = 3\pi/2$, because, according to the Kozai–Lidov mechanism, under the presence of the third body, the argument of periapsis librate around these values as the eccentricity and inclination oscillate [17,18]. However, when these values are fixed, $\frac{di}{dt}$ is non-zero due to the term C_{22} , which causes the inclination to increase significantly and hence the eccentricity. In other work, where the double mean model is used, it is possible to eliminate the short period terms that contain the C_{22} coefficient and then obtain the necessary conditions to find the frozen orbits.

In this work, we are not interested in finding frozen orbits, whose noted derivatives are equal to zero. Despite showing similarity to a frozen orbit, orbits that last longer are our main interest, independently of the value of these derivatives. This is because our goal is to analyze more realistic models and investigate the isolated effect of the term C_{22} on the desired orbits.

In this section, we present a study on the isolated effect of each perturbation on the evolution of some orbital elements of a probe for some specific cases. The perturbations considered here are: the gravitational effect of Uranus, the gravity coefficient J_2 from Titania, the ellipticity of Titania (C_{22}), Uranus + J_2 from Titania, Uranus + C_{22} of Titania, and Uranus + J_2 + C_{22} of Titania. This analysis is presented in Figures 9 and 10, where the temporal evolution of the orbital elements e , I , and ω are shown. In all cases analyzed, the numerical integration stops when the probe collides with the surface of Titania.

Figure 9a shows the temporal evolution of the eccentricity under the effect of these perturbations. It can be observed that the effect of the J_2 and C_{22} gravity coefficients of Titania are small compared to the effect caused by the third body. This is seen even when the other perturbations are added. When J_2 and C_{22} are included in the system, the lifetime increases, as already noted; however, the eccentricity continues to increase due to the presence of the third body.

In the circular restricted three body problem, the Kozai–Lidov effect is common in some cases. This phenomenon is directly related to the presence of the third body, which, as shown in Figure 9, causes the eccentricity of the probe to reach high values in a short period of time. The Kozai–Lidov mechanism is still capable of making the argument of periapsis librate around a constant value. These values are usually 90° or 270° . However, in cases where the eccentricity grows rapidly, as is the case of the present work, a region of libration is not found for the diagram $e \times \omega$ (e.g., see [9]). When J_2 and C_{22} of Titania are included, there is a balance between the effects caused by the gravity coefficients of Titania and those caused by the Kozai–Lidov effect. This balance causes a slow increase in the eccentricity and, consequently, the lifetime of the orbit increases.

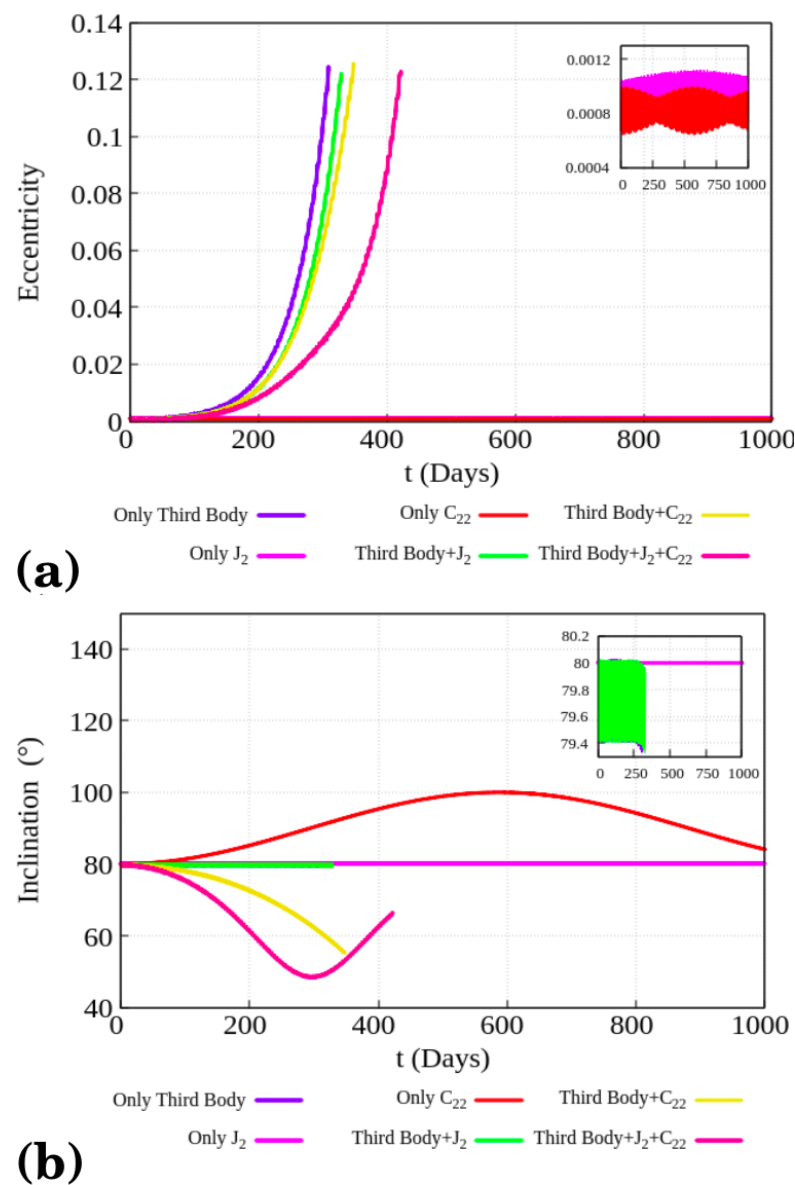


Figure 9. Diagram of $e \times t$ and $I \times t$ showing different perturbative effects: considering only the perturbations by Uranus, only J_2 from Titania, only C_{22} from Titania, Uranus + J_2 from Titania, Uranus + C_{22} from Titania, and Uranus + J_2 + C_{22} from Titania. Initial values are $a_i = 900$ km, $e_i = 10^{-3}$, $I_i = 80^\circ$, $\omega_i = \Omega_i = 0^\circ$.

Regarding the evolution of the inclination, shown in Figure 9b, the third body and the J_2 coefficient do not cause large variations in the probe inclination. The variation caused by J_2 is small and does not exceed 1° , although the lifetime is 1000 days. When Uranus is considered, the variation is small and the lifetime is just 300 days. When only Uranus and J_2 are taken into account, it is noted that the presence of the third body reduces lifetime compared to the case when only the J_2 coefficient was considered.

The effect responsible for causing large variations in the inclination is the tesseral coefficient C_{22} . When we analyze the dynamics only assuming C_{22} , the inclination increases from 80° to 100° degrees and the lifetime is 1000 days. In all cases in which C_{22} is considered, the variation of I is large. This can be seen in the cases Uranus + C_{22} and Uranus + J_2 + C_{22} , in which the variation of I can reach 30° . This effect caused by C_{22} is expected, as shown in previous work [9,15,16,21].

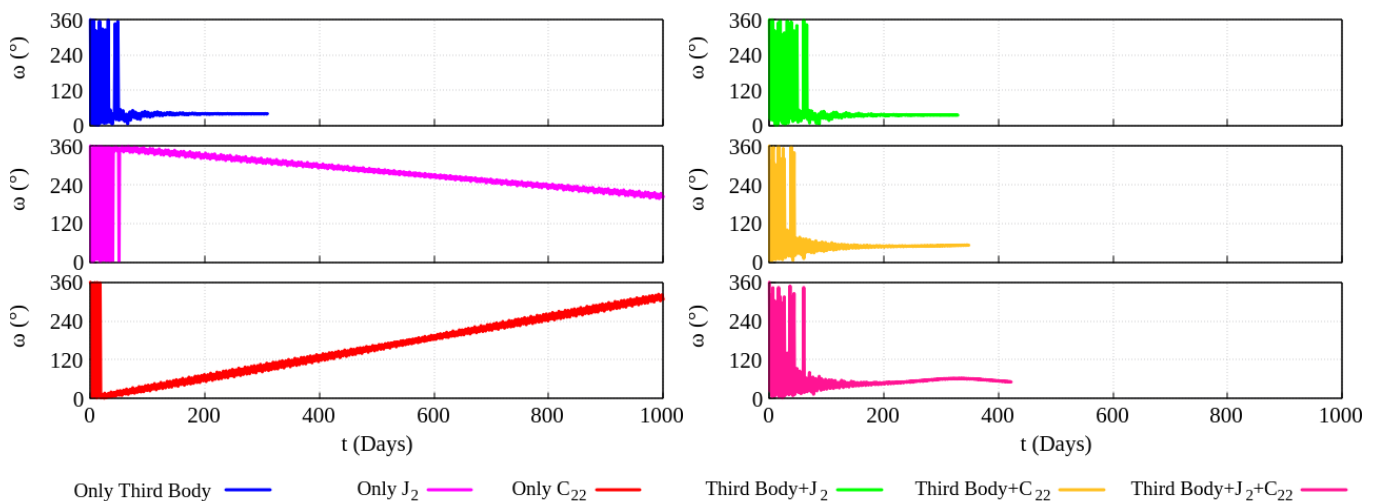


Figure 10. Diagram of $\omega \times t$ showing different perturbative effects: considering only the perturbations by Uranus, only J_2 from Titania, only C_{22} from Titania, Uranus + J_2 from Titania, Uranus + C_{22} from Titania, and Uranus + J_2 + C_{22} from Titania. Initial values are $a_i = 900$ km, $e_i = 10^{-3}$, $I_i = 80^\circ$, $\omega_i = \Omega_i = 0^\circ$.

In the analysis of the argument of periaapsis, presented in Figure 10, it is possible to note that, as well as in the evolution of the eccentricity shown in Figure 9a, the third body is responsible for causing a greater perturbation in this element. The behaviour of ω is similar in all cases where Uranus is added. The argument undergoes a great variation in the first days, with oscillations ranging from 0° to 360° . After a certain time, the argument of periaapsis begins to librate around $\sim 50^\circ$ for a short period of time. An expected behaviour for ω would be its libration around $\pi/2$ or $3\pi/2$, as described by Kozai–Lidov [17,18]. However, as the short period terms that contain the C_{22} coefficient were not eliminated, the inclination grows very quickly and, as the eccentricity depends on the slope, it also reaches high values in a few days.

When only the effects of J_2 of Titania are assumed, the argument of periaapsis reaches 360° and then decays to approximately 240° until a collision occurs in 1000 days. When only the perturbation due to C_{22} is considered, the lifetime of the argument of periaapsis is also 1000 days; however, the argument of periaapsis increases to approximately 360° before the collision.

The relevance of the ω and Ω angles have already been evident in the lifetime maps shown in Figures 1–8. In Figure 11, an analysis of the influence of these angles on the orbital elements of two orbits is presented. The orbital elements analyzed in Figure 11 have different values of ω . The first adopted value of ω and the other values of the orbital elements were taken from the point highlighted in Figure 7 (black circle).

The second orbit has the same initial conditions as the highlighted initial condition, except ω . The value of ω for the highlighted point is 145° . The use of this value is able to significantly increase the lifetimes of the orbits. For the sake of comparison, a value of ω just below the circled point was chosen, $\omega = 100^\circ$.

In all cases shown in Figure 11, the value of $\omega = 145^\circ$ causes an increase in the lifetimes of the probe. The variation of the semi-major axis, shown in Figure 11a, is very small in both cases. For $\omega = 100^\circ$ and $\omega = 145^\circ$, the variations are no more than 1 km. For the eccentricity, shown in Figure 11b, the value of $\omega = 145^\circ$ attenuates its rapid growth. It remains almost constant for 300 days and only then begins to grow, reaching a maximum of 0.3 in 430 days. Using $\omega = 100^\circ$, the eccentricity increases much faster, and in just 135 days, the collision with the surface of Titania occurs.

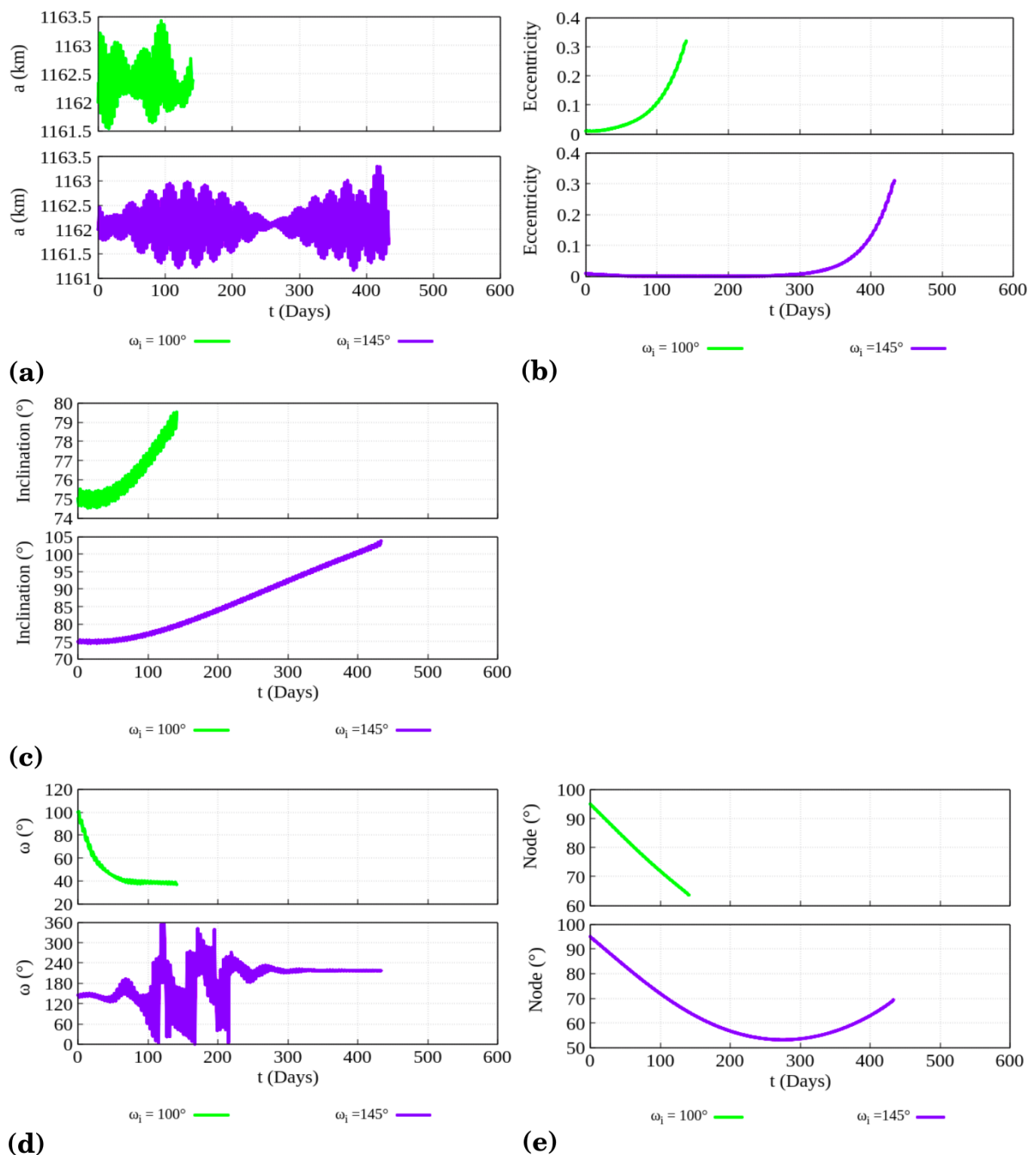


Figure 11. Temporal evolution of the orbital elements considering $\omega = 100^\circ$ and $\omega = 145^\circ$: (a) $a \times t$, (b) $e \times t$, (c) $I \times t$, (d) $\omega \times t$, and (e) $\Omega \times t$. Initial conditions are $a_i = 1162$ km, $e_i = 10^{-2}$, $I_i = 75^\circ$, $\Omega_i = 95^\circ$. In these figures the effects considered are the perturbation by Uranus, $+J_2$ and C_{22} of Titania.

The evolution of the inclination, shown in Figure 11c, presents a variation of 30° when $\omega = 145^\circ$, but has a long lifetime, 430 days. Using $\omega = 100^\circ$, the variation is only 5° , but the collision happens in a few days.

In the case of the evolution of the argument of periapsis, Figure 11d, the behaviour is similar to the one shown in Figure 11 in the cases where the third body was considered. For both $\omega = 100^\circ$ and $\omega = 145^\circ$, the argument of periapsis oscillates around a constant value for some time. When we consider $\omega = 100^\circ$, the argument decays and librates around 40° for approximately 80 days. For $\omega = 145^\circ$, the argument of periapsis circulates for about 200 days and then proceeds to librate around 238° for almost 230 days. This behaviour is expected due to the aforementioned Kozai–Lidov mechanism.

In Figure 11e, the evolution of the ascending node is presented for $\omega = 100^\circ$ and $\omega = 145^\circ$. For $\omega = 100^\circ$, the ascending node decays almost 25° in 140 days, whereas for $\omega = 145^\circ$ this decay is almost 45° during the first 250 days of integration. After that, the node starts to describe a periodic behaviour until the collision occurs.

In order to gather all the best orbits investigated, a summary of the best lifetimes for each initial condition and for each case analyzed is presented in Table 3. This table presents the best initial conditions for the five values of the eccentricity studied in this work. In addition to the results for $\omega = \Omega = 0^\circ$, the results considering ω and Ω different from 0° are also presented. The table shows the best initial conditions obtained for long-duration orbits, with these conditions given by: $a = 826$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 86.2^\circ$, $\omega = 165^\circ$, and $\Omega = 205^\circ$ considering only the third body perturbation. For the system, third-body + J_2, C_{22} of Titania, we have $a = 874$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 80^\circ$, $\omega = 165^\circ$, and $\Omega = 205^\circ$. In both cases, the orbits have a lifetime of 1000 days.

Table 3. Best lifetime for each system analyzed.

System	a_i (km)	e_i	I_i ($^\circ$)	ω_i ($^\circ$)	Ω_i ($^\circ$)	Optimum Lifetime (Days)
Third-body	858	0	75	0	0	365
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	842	0	75	0	0	450
Third-body	842	10^{-4}	75	0	0	405
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	842	10^{-4}	75	0	0	440
Third-body	1282	10^{-3}	88.2	0	0	435
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	1242	10^{-3}	86.6	0	0	500
Third-body	978	10^{-2}	75	0	0	160
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	922	10^{-2}	75.8	0	0	180
Third-body	1178	10^{-1}	75	0	0	57
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	1266	10^{-1}	75	0	0	57
Third-body	826	10^{-4}	75	155	55	720
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	922	10^{-4}	82.2	155	55	800
Third-body	826	10^{-3}	86.2	165	205	1000
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	874	10^{-3}	80	165	205	1000
Third-body	1282	10^{-2}	88.2	144.9	95	450
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	1186	10^{-2}	75	145	95	450
Third-body	970	10^{-1}	89.8	150	115	120
Third-body + J_2, C_{22} of Titania	938	10^{-1}	88.6	150	115	520

In Figure 12 we present different projections of one of the orbits with the best initial conditions found in this work. The trajectory was numerically simulated for 991 days, considering the complete system, the gravitational effects of the third body (Uranus), and Titania's gravitational coefficients (J_2 and C_{22}). The initial conditions are: $a = 898$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 81.4^\circ$, $\omega = 140^\circ$, and $\Omega = 225^\circ$.

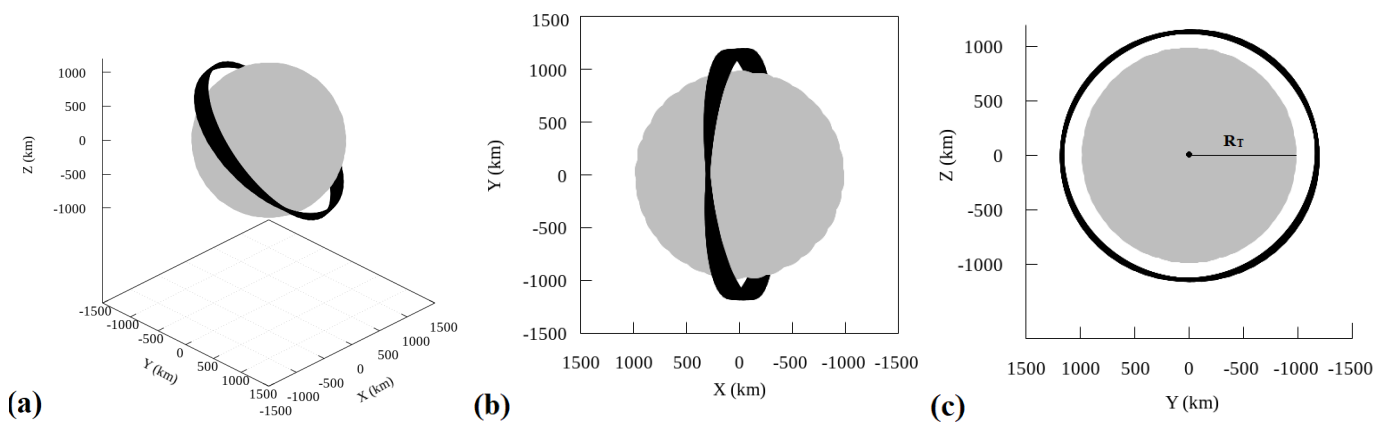


Figure 12. Trajectory numerically simulated for 991 days, considering the complete system, the gravitational effects of the third body (Uranus), and Titania's gravitational coefficients (J_2 and C_{22}). (a) Projection of the orbit in three dimensions (xyz). (b) Projection of the orbit in the plane (xy). (c) Projection of the orbit in the plane (yz). The initial conditions are: $a = 898$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 81.4^\circ$, $\omega = 140^\circ$, and $\Omega = 225^\circ$.

5. Analyzing the Gravitational Coefficients of Titania

In order to analyze how possible errors in the values of Titania's gravitational coefficients can affect the probe's lifetime, our next results present a detailed analysis of possible error values in both coefficients. We also present multiple regression models in order to find a relationship as a function of the coefficients J_2 and C_{22} capable of predicting error in the probe's lifetime. Figure 13 shows the response surface found for the more complete regression model that matches the equation.

We investigate a range from -10% to 10% for J_2 and C_{22} . To find the noted function, we consider only the case where the lifetime variation is significant compared to the cases obtained from [27]. The initial conditions for the regression were taken from the percentages analyzed for $e = 10^{-3}$, as it shows the largest increasing in the lifetime. We present four multiple regression models for different values of the coefficient of determination R^2 . The models and their fit coefficients are presented in Equations (8)–(11).

$$Y = 1230 + 1469J_2 - 684J_2^2 - 3635C_{22} + 2115C_{22}^2, \quad (R^2 = 0.84) \quad (8)$$

$$Y = 24139 - 44921J_2 + 22699J_2^2 - 26544C_{22} + 2115C_{22}^2 + 4639J_2^2C_{22} - 23382J_2^2C_{22}^2, \quad (R^2 = 0.87) \quad (9)$$

$$Y = 48401 - 69183J_2 + 22699J_2^2 - 75272C_{22} + 26480C_{22}^2 + 95118J_2^2C_{22} - 23383J_2^2C_{22}^2 - 24364J_2C_{22}^2, \quad (R^2 = 0.89) \quad (10)$$

$$Y = -348975 + 728920J_2 - 376353J_2^2 + 722831C_{22} - 372572C_{22}^2 - 1507821J_2C_{22} + 778087J_2^2C_{22} + 777105C_{22}^2J_2 + ((-400735 \cdot (J_2^2)) \cdot (-400735(C_{22}^2))) \quad (R^2 = 0.92) \quad (11)$$

where Y is the lifetime dependent variable, and J_2 and C_{22} are independent variables. It is important to highlight that in the values of J_2 and C_{22} were added percentages ranging from -10% to $+10\%$ with respect to the nominal value.

Equation (8) presents a relationship for the lifetime as a function the percentages of J_2 and C_{22} . For this model (Model 1), the coefficient of determination R^2 has a value of 0.84. Although the value of R^2 is not as close as to 1 and the model does not present an

interaction term between J_2 and C_{22} , the function provides a good approximation of the lifetime as a function of the percentage values of Titania's gravitational coefficients.

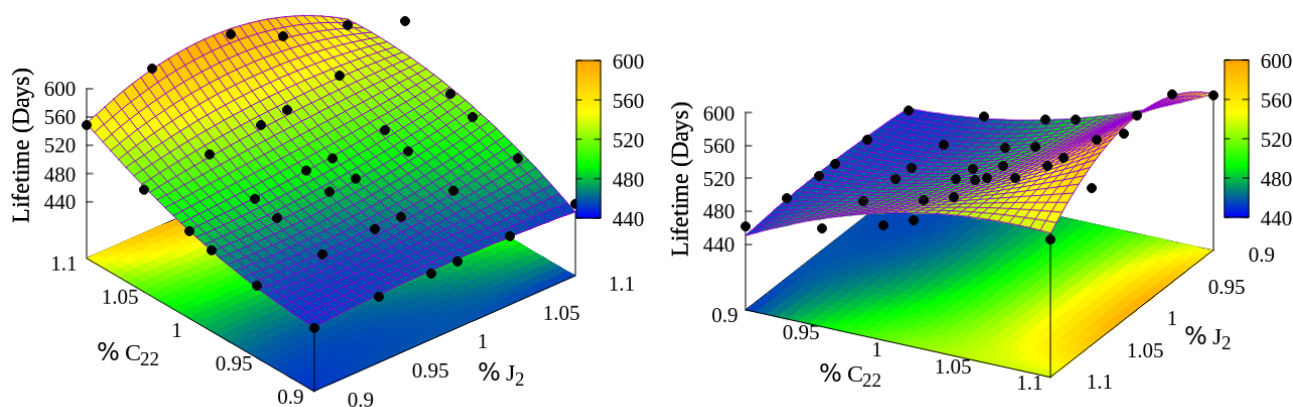


Figure 13. Response surface for multiple regression with three variables. This figure represents the most complete model in two different angles, with $R^2 = 0.92$. This model is represented by Equation (11). Initial conditions are $a = 1075$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 76^\circ$, $\omega = 0^\circ$, and $\Omega = 0^\circ$.

For Equations (9)–(11), the interactions between the percentages of the coefficients are analyzed. With a coefficient $R^2 = 0.92$, Equation (11) (Model 4) presents a better precision for estimating the lifetime as a function of J_2 and C_{22} . The graphical representation of this model is shown in Figure 13.

6. Final Comments

In this work we study the dynamics of orbits around the natural satellite Titania, the largest moon in the Uranus system. The gravitational attraction due to Uranus is considered, as well as the gravity coefficients J_2 and C_{22} of Titania. Titania is at the center of the system, and Uranus is in an elliptical orbit and acts as the third body to perturb the motion of the space probe around Titania.

Through a set of numerical simulations of the equations of motion, we build lifetime maps for different values of eccentricities of the orbit of the space probe. The construction of these maps allowed us to find values of a , e , I , ω , and Ω capable of increasing the lifetime of the probe. We also constructed lifetime “difference maps” in order to analyze the regions where the effect of the third body and the gravity coefficients of Titania were in equilibrium, allowing longer life for the space probe.

We also present an analysis of the importance of the angles ω and Ω in the lifetime of the probe. In addition, we studied the response of each effect on the orbital element.

Our results showed that, for the altitudes adopted in this work, the oblateness coefficients J_2 and J_4 of Uranus do not affect the orbits of the space probe. We also showed that the orbits with a longer lifetime had a semi-major axis close to 900 km, whereas the best eccentricity is between 10^{-3} and 10^{-4} when considering $\omega = \Omega = 0^\circ$. The results also point out that the inclusion of specific values of ω and Ω are extremely important in increasing the lifetime of the probe. In all cases, the increase in the lifetime was more than 50% after adopting specific values for these two angles. The best values for ω are around 145 – 165° and for Ω around 55 – 205° . In some cases, including these values resulted in the probe lifetime increasing up to eight times compared to cases with $\omega = \Omega = 0^\circ$.

Our main objective is to find long-duration orbits around Titania. After analyzing the results including the values of ω and Ω , we found ideal initial conditions for an orbit lasting up to 1000 days. This orbit has initial orbital elements given by: $a = 874$ km, $e = 10^{-3}$, $I = 80^\circ$, $\omega = 165^\circ$, and $\Omega = 205^\circ$.

Analyzing the effect of each perturbation, we show that the third body is responsible for causing a greater perturbation in the eccentricity and argument of periapsis, whereas the ellipticity coefficient C_{22} of Titania causes great oscillations in the inclination. The zonal

coefficient J_2 , when acting alone, has little influence on the orbital elements; however, when added to the other perturbations, it helps to promote a balance between third body and gravity coefficients, and then we have the so-called “protection mechanism” prolonging the lifetimes of the orbits.

The gravitational coefficients of Titania have not yet been used to investigate orbits close to its surface. Thus, we present an original study on the sensitivity of the lifetime as a function of some possible errors attributed to the values of J_2 and C_{22} . Our results show that the hypothetical errors in the values of Titania’s gravitational coefficients can greatly increase or decrease the lifetime of the orbit, especially when the eccentricity is equal to 10^{-3} . To try to predict the lifetime as a function of these errors, we present multiple regression models for the lifetime as a function of the coefficients J_2 and C_{22} . We found a function with a value of R^2 equals to 0.92, capable of providing a good approximation of the lifetime for values of J_2 and C_{22} between -10% and $+10\%$ of the values given in [27].

The results presented in this paper can help plan missions to Titania, which can bring important scientific data, in particular considering that the Uranus system has been studied mostly from Earth.

Author Contributions: Conceptualization, J.X., A.B.P. and S.G.W.; methodology, J.X. and A.A.; formal analysis, J.X., A.B.P., S.G.W. and A.A.; writing—preparation of original draft, J.X., A.B.P. and S.G.W.; writing—review and editing, J.X., A.B.P. and S.G.W.; visualization, J.X., A.B.P. and S.G.W.; supervision, A.B.P. and S.G.W. All authors read and agreed with the published version of the manuscript.

Funding: Improvement Coordination Higher Education Personnel—Brazil (CAPES)—Financing Code 001. The Center for Mathematical Sciences Applied to Industry (Ce-MEAI), funded by FAPESP (grant 2013/07375-0) and the project 2016/23542-1 from FAPESP. CNPq (Proc 313043/2020-5). This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: All data generated or analyzed during this study are included in this published article in the form of figures.

Acknowledgments: The authors thank Improvement Coordination Higher Education Personnel—Brazil (CAPES)—Financing Code 001. The Center for Mathematical Sciences Applied to Industry (Ce-MEAI), funded by FAPESP (grant 2013/07375-0) and the project 2016/23542-1 from FAPESP. SMGW thanks CNPq (Proc 313043/2020-5) for the financial support. This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.

Conflicts of Interest: The authors declare that they have no conflict of interest with research institutions, professionals, researchers, and/or financial supports.

Ethical Approval: The submitted work is original and has not been published elsewhere in any form or language. The work presents the results of a single study. The results are presented clearly, honestly, and without fabrication, falsification, or inappropriate data manipulation. No data, text, or theories by others are presented as if they were the authors’ own.

References

1. Jarmak, S.; Leonard, E.; Akins, A.; Dahl, E.; Cremons, D.R.; Cofield, S.; Curtis, A.; Dong, C.; Dunham, E.T.; Journaux, B.; et al. QUEST: A New Frontiers Uranus orbiter mission concept study. *Acta Astronaut.* **2020**, *170*, 6–26. [\[CrossRef\]](#)
2. Cartwright, R.J.; Beddingfield, C.B.; Nordheim, T.A.; Elder, C.M.; Castillo-Rogez, J.C.; Neveu, M.; Bramson, A.M.; Sori, M.M.; Buratti, B.J.; Pappalardo, R.T.; et al. The science case for spacecraft exploration of the Uranian satellites: Candidate ocean worlds in an ice giant system. *arXiv* **2021**, arXiv:2105.01164.
3. Hofstadter, M.; Simon, A.; Atreya, S.; Banfield, D.; Fortney, J.J.; Hayes, A.; Hedman, M.; Hospodarsky, G.; Mandt, K.; Masters, A.; et al. Uranus and Neptune missions: A study in advance of the next Planetary Science Decadal Survey. *Planet. Space Sci.* **2019**, *177*, 104680. [\[CrossRef\]](#)
4. Cartwright, R.; Emery, J.; Rivkin, A.; Trilling, D.; Pinilla-Alonso, N. Distribution of CO₂ ice on the large moons of Uranus and evidence for compositional stratification of their near-surfaces. *Icarus* **2015**, *257*, 428–456.
5. Cartwright, R.J.; Emery, J.P.; Pinilla-Alonso, N.; Lucas, M.P.; Rivkin, A.S.; Trilling, D.E. Red material on the large moons of Uranus: Dust from the irregular satellites? *Icarus* **2018**, *314*, 210–231. [\[CrossRef\]](#)

6. Fletcher, L.N.; Helled, R.; Roussos, E.; Jones, G.; Charnoz, S.; André, N.; Andrews, D.; Bannister, M.; Bunce, E.; Cavalié, T.; et al. Ice Giant Systems: The scientific potential of orbital missions to Uranus and Neptune. *Planet. Space Sci.* **2020**, *191*, 105030. [\[CrossRef\]](#)
7. Gomes, V.; Domingos, R.d.C. Studying the lifetime of orbits around Moons in elliptic. *JO—Comput. Appl. Math.* **2016**, *35*, 653–661. [\[CrossRef\]](#)
8. Cardoso, J.; Carvalho, J.P.S.; Prado, A.F.B.A.; Vilhena de Moraes, R. Lifetime maps for orbits around Callisto using a double-averaged model. *Astrophys. Space Sci.* **2017**, *362*, 227. [\[CrossRef\]](#)
9. Carvalho, J.P.S.; Elipe, A.; Vilhena de Moraes, R.; Prado, A.F.B.A. Low-altitude, near-polar and near-circular orbits around Europa. *Adv. Space Res.* **2012**, *49*, 994–1006. [\[CrossRef\]](#)
10. Carvalho, J.; Mourão, D.; Elipe, A.; Vilhena de Moraes, R.; Prado, A. Frozen orbits around Europa. *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.* **2012**, *22*, 12502409. [\[CrossRef\]](#)
11. Nie, T.; Gurfil, P. Lunar frozen orbits revisited. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **2018**, *130*, 61. [\[CrossRef\]](#)
12. Elipe, A.; Lara, M. Frozen Orbits About the Moon. *J. Guid. Control Dyn.* **2003**, *26*, 238–243. [\[CrossRef\]](#)
13. Abd El-Salam, F.; Abd El-Bar, S. Families of frozen orbits of lunar artificial satellites. *Appl. Math. Model.* **2016**, *40*, 9739–9753. [\[CrossRef\]](#)
14. Carvalho, J.; Cardoso dos Santos, J.; Prado, A.; Moraes, R. Some characteristics of orbits for a spacecraft around Mercury. *Comput. Appl. Math.* **2018**, *37*, 267–281. [\[CrossRef\]](#)
15. De Saedeleer, B.; Henrard, J. The combined effect of J2 and C22 on the critical inclination of a lunar orbiter. *Adv. Space Res.* **2006**, *37*, 80–87.
16. Tzirti, S.; Tsiganis, K.; Varvoglis, H. Quasi-critical orbits for artificial lunar satellites. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **2009**, *104*, 227–239. [\[CrossRef\]](#)
17. Kozai, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astron. J.* **1962**, *67*, 591–598. [\[CrossRef\]](#)
18. Lidov, M. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planet. Space Sci.* **1962**, *9*, 719–759. [\[CrossRef\]](#)
19. Naoz, S. The Eccentric Kozai-Lidov Effect and Its Applications. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **2016**, *54*, 441–489. [\[CrossRef\]](#)
20. Naoz, S.; Li, G.; Zanardi, M.; de Elía, G.C.; Sisto, R.P.D. The Eccentric Kozai–Lidov Mechanism for Outer Test Particle. *Astron. J.* **2017**, *154*, 18. [\[CrossRef\]](#)
21. Tzirti, S.; Tsiganis, K.; Varvoglis, H. Effect of 3rd-degree gravity harmonics and Earth perturbations on lunar artificial satellite orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **2010**, *108*, 389–404. [\[CrossRef\]](#)
22. Paskowitz, M.E.; Scheeres, D.J. Design of Science Orbits About Planetary Satellites: Application to Europa. *J. Guid. Control Dyn.* **2006**, *29*, 1147–1158. [\[CrossRef\]](#)
23. Lara, M.; Russell, R. On the design of a science orbit about Europa. *Adv. Astronaut. Sci.* **2006**, *124*.
24. Carvalho, J.; Vilhena de Moraes, R.; Prado, A. Some orbital characteristics of lunar artificial satellites. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **2010**, *108*, 371–388. [\[CrossRef\]](#)
25. Chambers, J.E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **1999**, *304*, 793–799. [\[CrossRef\]](#)
26. French, R.S.; Showalter, M.R. Cupid is doomed: An analysis of the stability of the inner uranian satellites. *Icarus* **2012**, *220*, 911–921. [\[CrossRef\]](#)
27. Chen, E.M.A.; Nimmo, F.; Glatzmaier, G.A. Tidal heating in icy satellite oceans. *Icarus* **2014**, *229*, 11–30. [\[CrossRef\]](#)
28. Prado, A.F. Third-Body Perturbation in Orbits Around Natural Satellites. *J. Guid. Control Dyn.* **2003**, *26*, 33–40. [\[CrossRef\]](#)
29. Cinelli, M.; Ortore, E.; Circi, C. Long Lifetime Orbits for the Observation of Europa. *J. Guid. Control Dyn.* **2019**, *42*, 123–135.
30. Gupta, S. Effect of Altitude, Right Ascension of Ascending Node and Inclination on Lifetime of Circular Lunar Orbits. *Int. J. Astron. Astrophys.* **2011**, *1*, 155–163. [\[CrossRef\]](#)