UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Diana Yovani Rodriguez Villena

Teoria de Bifurcação e Aplicações

Dissertação de Mestrado

Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000

São José do Rio Preto - SP - Brasil

Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Diana Yovani Rodriguez Villena

Teoria de Bifurcação e Aplicações

Orientador
Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Campus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
8 de agosto de 2017

Villena, Diana Yovani Rodriguez.
Teoria de bifurcação e aplicações / Diana Yovani Rodriguez Villena . – São José do Rio Preto, 2017
101 f. : il.

Orientador: Sérgio L. Nascimento Neves
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais não lineares. 3. Teoria da bifurcação. 4. Grau topológico. 5. Teorema de Rabinowitz I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.911

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Diana Yovani Rodriguez Villena

Teoria de Bifurcação e Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio L. Nascimento Neves
Orientador
UNESP - São José do Rio Preto

Profa. Dra. Juliana C. Precioso Pereira
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto
UFSCAR - São Carlos

São José do Rio Preto, 8 de agosto de 2017

À minha mãe Rosa, minhas irmãs Nery, Ysela, Sonia e Yulisa,
minhas tias Mirian e Maria.
Finalmente aos meus pais Flor e Emérito,
exemplos de pilares implacáveis
Dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me guiado durante essa trajetória, sempre me mostrando que apesar das dificuldades e desafios, vale apena persistir e seguir em frente com nosso sonho.

Aos meus pais, Emérito e Flor, pelo esforço constante para promover uma boa estrutura emocional e educacional durante toda minha vida, com certeza eles são a minha referência e a base de tudo que consegui construir, por eles valem todos os meus esforços.

À minha avó, mãe Rosa, por ser o meu exemplo de vida e minha fortaleza nos momentos de angústia.

Às minhas tias Maria e Mirian, pela confiança e apoio incondicional.

Às minhas queridas irmãs Nery, Ysela, Sonia e Yulisa, por todos os conselhos, pela eterna amizade, ainda que estando longe, me deram apoio, incentivo, por sempre me estimularem a continuar.

Agradeço a meu orientador Prof. Sérgio Leandro Nascimento Neves, pela confiança, pelo conhecimento transmitido, pela amizade, a paciência e as observações valorosas na elaboração desta dissertação.

Aos professores Juliana e Adilson por aceitarem compor a banca examinadora.

A todos meus amigos, que sempre acreditaram em mim, que me incentivaram no decorrer deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

"Somos estimulados a fazer um brinde à sabedoria e a nunca desistir de nós mesmos, por piores que sejam nossos problemas por mais amargos que sejam as nossas dificuldades."

Augusto Cury

Resumo

Neste trabalho, estudamos a teoria de bifurcação e algumas das suas aplicações. Apresentamos alguns resultados básicos e definimos o conceito de ponto de bifurcação. Logo, estudamos a teoria do grau topológico. Em seguida, enunciamos dois teoremas importantes que são os teoremas de Krasnoselski e de Rabinowitz. Finalmente apresentamos um exemplo e duas aplicações do teorema de Rabinowitz nas quais os valores característicos com que lidamos são simples, no exemplo se consegue provar que a segunda alternativa do teorema ocorre, a primeira aplicação é um problema de autovalores não lineares de Sturm-Liouville para uma E.D.O de segunda ordem na qual se prova que a primeira alternativa do teorema de Rabinowitz é válida e a segunda aplicação é um problema de autovalores para uma equação diferencial parcial quase-linear a qual se prova que também ocorre a primeira alternativa do teorema.

Palavras-chave: Teoria de bifurcação, grau topológico, teorema de bifurcação de Krasnoselski, teorema de bifurcação de Rabinowitz.

Abstract

In this work, we study bifurcation theory and its applications. We present some basic results and define the concept of bifurcation point. Then we study the theory of topological degree. Next we state two important theorems that are Krasnoselski's theorem and Rabinowitz's theorem. Finally we present an example and two applications of Rabinowitz theorem in which the characteristic values we deal with are simple, in an example we can prove that the second item of theorem occurs and the first application is a nonlinear Sturm-Liouville eigenvalue problem for a second order ordinary differential equation were we prove that the first alternative of Rabinowitz's theorem holds and the second application is an eigenvalue problem for a quasilinear elliptic partial differential equation where we prove that the first alternative of the theorem also holds.

Keywords: Bifurcation theory, topological degree, the Krasnoselski bifurcation theorem, the Rabinowitz bifurcation theorem.

Sumário

Introdução

Seja E um espaço de Banach real com norma $\|\cdot\|$. Considere a seguinte equação

$$u = G(\lambda, u), \tag{1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in E$ e G é contínuo e compacto tal que $G(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Uma solução de (1) é um par $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$ tal que satisfaz (1) e o conjunto de soluções $\{(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times E : G(\lambda, 0) = 0\}$ é conhecido como soluções triviais de (1). A equação da forma (1) geralmente está associada a problemas de autovalores não lineares os quais surgem em muitas partes da física matemática. Problemas físicos como elasticidade, dinâmica de fluidos, transferência de calor etc. podem ser tratados como problemas de ponto fixo do tipo (1) e sob circunstâncias apropriadas podem ser estudados usando a teoria de bifurcação.

Nosso principal interesse neste trabalho é estudar a estrutura do conjunto de soluções não triviais $\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E, u \neq 0 : \; G(\lambda, u) = u\}$ de (1). Dizemos que λ^* é um ponto de bifurcação se $(\lambda^*, 0) \in \mathscr{S}$ onde $\mathscr{S}$ é o fecho do conjunto de soluções não triviais.

Estudaremos (1) sob a hipótese que

$$\begin{aligned} G : \mathscr{E} = \mathbb{R} \times E \;&\longrightarrow\; E \\ (\lambda, u) \;&\longrightarrow\; G(\lambda, u) = \lambda L u + H(\lambda, u) \end{aligned} \tag{2}$$

onde $L : E \longrightarrow E$ é um operador linear, compacto e $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$, quando $\|u\| \to 0$ uniformemente para λ em intervalos compactos.

Esta dissertação está organizada em 3 capítulos, a seguir faremos uma breve descrição do conteúdo de cada um deles.

No capítulo 1, apresentamos conceitos preliminares que servirão de base para a teoria que queremos estudar nos capítulos posteriores. Começamos lembrando brevemente a definição dos espaços L^p e dos espaços de Sobolev. Em seguida, enunciamos o teorema da função implícita, estudamos as equações elípticas, operadores lineares compactos, teorema do ponto fixo de Banach e os operadores crescentes. Para continuar os estudos preliminares, apresentamos a teoria de bifurcação, estabelecemos definições e uma condição necessária para que $(\lambda, 0)$ seja um ponto de bifurcação, em seguida estudamos o método de redução de Lyapunov-Schmidt, a bifurcação a partir do autovalores simples e demonstramos um resultado devido a Crandall e Rabinowitz que foi publicado em [10].

No capítulo 2, apresentamos uma teoria que tem sido desenvolvida como um método para estudar o conjunto das soluções de uma equação da forma $\phi(x) = b$ sobre um espaço de Banach adequado, obtendo informações sobre a existência, multiplicidade e a natureza destas soluções, esta teoria é conhecida como a teoria do grau e é usada principalmente em equações diferenciais ordinárias (E.D.O) e equações diferenciais parciais (E.D.P). Iniciamos este capítulo estudando a teoria do grau topológico de Brouwer para funções contínuas em espaços de Banach de dimensão finita, como consequência imediata temos o teorema do ponto fixo de Brouwer. Em seguida estudamos a extensão da teoria do grau para espaços de Banach de dimensão infinita onde define-se o grau de Leray-Schauder para operadores que são perturbações compactas da identidade, ou seja, da forma $I - T$ com T um operador compacto. A ideia central da definição do grau de Leray-Schauder que estudamos nesse capítulo consiste em aproximar a perturbação compacta mediante operadores de posto finito, e como consequência imediata temos o teorema do ponto fixo de Schauder, apresentamos propriedades da invariância homotópica e do índice de uma função com respeito a uma solução isolada que serão muito utilizadas nos resultados centrais desta dissertação (Teoremas de Krasnoselskii e Rabinowitz) e para finalizar o capítulo apresentamos algumas aplicações do grau de Leray-Schauder para equações elípticas.

No capítulo 3, apresentamos os memoráveis teoremas de Krasnoselskii [7] e Rabinowitz [15]. Estes teoremas relacionam o conceito de bifurcação com a multiplicidade algébrica de um valor característico do operador compacto L. O teorema de Krasnoselskii determina uma condição suficiente para que um ponto $(\mu, 0)$, seja um ponto de bifurcação da equação (1), ou seja, se μ é um valor característico de L com multiplicidade algébrica ímpar então $(\mu, 0)$ é um ponto de bifurcação da equação (1), e o teorema de Rabonowitz permite descrever o comportamento de um ramo de soluções de (1) que se bifurca a partir do ramo trivial no contexto do teorema de Krasnoselskii, isto é, se μ é um valor característico de L com multiplicidade algébrica ímpar e G com as hipóteses dadas anteriormente, então $\mathscr{S}$ possui uma componente conexa $\mathscr{C}_\mu$ que contém $(\mu, 0)$ e $\mathscr{C}_\mu$ ou é não limitado em $\mathscr{E}$ ou contém $(\widehat{\mu}, 0)$, onde $\widehat{\mu}$ é um valor característico de L diferente de μ. Em seguida, destacamos um exemplo e duas aplicações do teorema de Rabinowitz. No exemplo prova-se que ocorre a segunda alternativa do teorema de Rabinowitz, ou seja, a componente $\mathscr{C}_\mu$ de $\mathscr{S}$ contém $(\hat{\mu}, 0)$ com $\hat{\mu}$ valor característico diferente de μ, a primeira aplicação é um problema não linear de Sturm-Liouville para uma E.D.O de segunda ordem

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = -\left(p(x)u'\right)' + q(x)u = \lambda F(x, u, u'), & 0 < x < \pi, \\ a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0, \\ a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\left(a_0^2 + b_0^2\right)\left(a_1^2 + b_1^2\right) \neq 0$, $p : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é positiva e continuamente diferenciável, $q : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é contínua, $a : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é positiva e contínua e a função F é contínua em seus argumentos sobre $[0, \pi] \times \mathbb{R}^2$ e é definida como $F(x, \xi, \eta) = a(x)\xi + h(x, \xi, \eta)$ com $h(x, \xi, \eta) = o\left((\xi^2 + \eta^2)^{1/2}\right)$ quando $(\xi, \eta) \to (0, 0)$ uniformemente em x. Observe que neste caso os autovalores do problema linear

$$\begin{cases} \mathscr{L}v = \mu a v, & 0 < x < \pi, \\ a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0, \\ a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

formam uma sequência crescente de autovalores simples [8]. Como cada autovalor de $\mathscr{L}$ é um valor característico de L com multiplicidade algébrica ímpar, se consegue demonstrar que satisfazem todas as hipóteses do teorema de Rabinowitz e consequentemente existe uma componente $\mathscr{C}_k$ de $\mathscr{S}$ que contém a $(\mu_k, 0)$ e $\mathscr{C}_k$ é não limitada, ou seja, nesse caso ocorre a primeira alternativa do Teorema de Rabinowitz. A segunda aplicação é um problema de autovalores para equações diferenciais parciais elípticas quase-lineares. Considere o problema com valores na fronteira,

$$\begin{cases} \mathscr{L}u &= -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,u,Du)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u,Du)u_{x_i} \\ & \quad + c(x,u,Du)u = \lambda\left(a(x)u + F(x,u,\lambda)\right), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}, \tag{5}$$

onde Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^n$, Du denota o gradiente de u e as funções $a_{i,j}$, b_i, c, a, F são continuamente diferenciáveis em seus argumentos. Além disso, $c \geq 0$, $a \geq a_0 > 0$, $F \geq 0$, $F(x,u,\lambda) = o(|u|)$ quando $u \to 0$ uniformemente sobre $x \in \Omega$ e λ em intervalos limitados e o operador $\mathscr{L}$ é uniformemente elíptico. Pela Estimativa de Schauder [9] o problema (5) possui uma única solução $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ e satisfaz a e equação $u = G(\lambda, u)$. Considere o problema de valores característicos lineares $v = \mu L v$, a única solução de

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,0,0)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,0,0)v_{x_i} + c(x,0,0)v &= \mu a(x)\, v, \quad x \in \Omega \\ v &= 0, \ \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Veremos que pelo Teorema de Krein-Rutman [7], L possui uma única autofunção positiva normalizada correspondente ao valor característico μ_1 de L positivo e simples. Se prova que o valor característico μ_1 e G satisfazem as hipóteses do Teorema de Rabinowitz, assim existe uma componente conexa $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{S}$ que contém $(\mu_1, 0)$ e satisfaz uma das alternativas do Teorema de Rabinowitz. Finalmente, demonstramos que a primeira alternativa do Teorema de Rabinowitz ocorre, ou seja, a componente $\mathscr{C}_1$ é não limitada em $\mathscr{E}$.

Capítulo

1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados necessários para o desenvolvimento de todo nosso trabalho. Iniciamos com definições gerais de Análise, EDP e Teoria Variacional. Na seção 1.8 apresentamos o conceito de ponto de bifurcação assim como as noções básicas da teoria de bifurcação. Como referências para este capítulo, temos [2], [3], [5] e [11].

1.1 Definições e resultados básicos

Definição 1.1.1 *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço de Lebesgue L^p, é o conjunto de todas funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$, onde*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Para $p = \infty$, L^∞ é o conjunto de todas funções mensuráveis, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_\infty < \infty$, em que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess|f(x)| = \inf \{ B > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > B\}) = 0 \}.$$

Observação 1.1.1

- *Duas funções em L^p são consideradas iguais se elas são iguais q.t.p.*

- *Os espaços L^p são espaços de Banach.*

Ver demonstração em [5] (Cap. 4, Seção 4.2, Teorema 4.8).

Definição 1.1.2 *Seja $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a $\alpha-$ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega \varphi(x) v_\alpha(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.2}$$

Notação 1.1.1

$$D^\alpha u \; = \; v_\alpha.$$

Lema 1.1.1 *A derivada fraca de u, se existe, está unicamente definida salvo em um conjunto de medida nula.*

Ver demonstração em [11] (Cap. 5, pág. 243).

1.2 Espaço de Sobolev

Definição 1.2.1 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty]$ e $k \in \mathbb{N}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$, onde α é um multi-índice e $D^\alpha u$ denota a derivada no sentido fraco. Como $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, estamos assumindo que todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a k existem.*

Podemos representar o Espaço de Sobolev pelo seguinte conjunto:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ \forall\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N), \text{ com } |\alpha| \leq k, \exists\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ no sentido fraco}\}.$$

i. Para $1 \leq p < \infty$, a norma de $W^{k,p}(\Omega)$ é definida como

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{k,p} : W^{k,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ii. Para $p = +\infty$, a norma de $W^{k,p}(\Omega)$ é definida por

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{k,p} : W^{k,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \|u\|_{k,p} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p. \end{aligned}$$

- Um caso particular, é quando $p = 2$, então,

  $$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

  (Nesse caso utiliza-se H pois $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert) onde $\|\cdot\|_{k,2}$ está associada ao produto interno

  $$\langle u, v \rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

  Se $k = 0$, então

  $$H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

- $\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p}\right)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq +\infty$.

- $W^{k,p}(\Omega)$ é separável, para $1 \leq p < +\infty$. Em particular, $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

- $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo, para $1 < p < +\infty$.

- Uma observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Ver demonstrações em [11] (Cap. 8, Seção 8.2, Proposição 8.1)

Definição 1.2.2

1. *Sejam* $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ *e* $u \in W^{k,p}(\Omega)$, *dizemos que* $u_m \longrightarrow u$ *em* $W^{k,p}(\Omega)$, *se*

$$\lim_{m\to 0} \|u_m - u\|_{k,p} = 0.$$

2. $u_m \longrightarrow u$ *em* $W^{k,p}_{Loc}(\Omega)$ *se* $u_m \longrightarrow u$ *em* $W^{k,p}(\widetilde{\Omega})$, *para todo* $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ *(ou seja,* $\overline{\widetilde{\Omega}}$ *é um subconjunto compacto de* Ω*).*

3. *Denotamos por* $W_0^{k,p}(\Omega)$ *o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{k,p}(\Omega)$. *Isto é*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Concluímos que $u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \exists\, u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

- Em particular se $p = 2$ escrevemos

$$W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega).$$

- $\Big(W_0^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p}\Big)$ é um espaço de Banach para $1 \le p \le \infty$.

- $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < +\infty$.

- $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço separável se $1 \le p < \infty$. Em particular, $H_0^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

- $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Vale observar que quanto menor for a diferença de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ menor será a diferença $W^{k,p}(\Omega) \setminus W_0^{k,p}(\Omega)$. Em particular, se $U = \mathbb{R}^N$, então

$$W_0^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega).$$

Uma das propriedades importantes de $W_0^{k,p}(\Omega)$ é a seguinte:

Propriedades 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré) *Se* $p \in [1, +\infty)$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é aberto e limitado em uma direção, então* $\exists\, C > 0$, *que depende unicamente de* Ω, *tal que*

$$C \int_\Omega |u|^p \le \int_\Omega |\nabla u|^p, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.3}$$

Ver demonstração em [11] (Cap. 5, seção 5.6, Teorema 3). Como uma conseqüência, com as hipóteses da desigualdade de Poincaré, $\|\nabla \cdot\|_p$ é uma norma definida em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a qual é equivalente a $\|\cdot\|_{1,p}$.

Se $p = 2$, a norma $\|\nabla \cdot\|_2$ em $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ está associada ao produto interno

$$\langle u, v\rangle_1 \;=\; \int_\Omega \nabla u \nabla v, \;\; \text{para } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Estudamos os espaços $W_0^{k,p}(\Omega)$ para obter a formulação fraca das funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega$.

1.2.1 Teorema de imersão

Sejam X, Y espaços normados. O espaço normado X está imerso no espaço normado Y se existe $I : X \longrightarrow Y$ um operador linear, contínuo e injetivo (I é chamado operador imersão).

Notação:

$$X \hookrightarrow Y.$$

Dizemos que X está compactamente imerso no espaço Y, se $X \hookrightarrow Y$ onde I é linear, contínuo, compacto e injetivo.

Teorema 1.2.1 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto, com $\partial\Omega$ de classe C^1, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \le p < \infty$:*

(i) Se $k < \frac{N}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q \in \left[p, \frac{Np}{N-kp}\right]$.

(ii) Se $k = \frac{N}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $p \le q < \infty$.

(iii) Se $k > \frac{N}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde

$$\alpha = \begin{cases} k - \frac{N}{p} & \textit{se} \quad k - \frac{N}{p} < 1, \\ \textit{qualquer valor em } [0,1) & \textit{se} \quad k - \frac{N}{p} = 1, \\ 1 & \textit{se} \quad k - \frac{N}{p} > 1. \end{cases}$$

Se Ω é limitado, então todas as imersões são compactas exceto para $q = \dfrac{Np}{N-kp}$ no caso (i). Além disso, se substituirmos o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ por $W_0^{k,p}(\Omega)$ todas as imersões (também as compactas) se mantém sem precisar da regularidade da fronteira $\partial\Omega$.

Ver demonstração em [5] (Cap. 9, Corolário 9.13).

1.2.2 A diferencial de Fréchet

Sejam X, Y espaços de Banach, $u \in X$ e consideremos uma aplicação $F : X \longrightarrow Y$. No caso particular $Y = \mathbb{R}$, F é chamado de funcional.

Dizemos que F é diferenciável em $u \in X$ ao longo da direção $v \in X$, se existe

$$L_u(v) := \lim_{t \to 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

Nos cursos de cálculo aprendemos exemplos elementares em $X = \mathbb{R}^2$, que mostram que F pode ser diferenciável em todas as direções sem ser contínua.

Definição 1.2.3 *Dizemos que F é Fréchet diferenciável em $u \in X$, se existe uma aplicação linear e contínua $L_u : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$F(u+v) - F(u) = L_u(v) + o(\|v\|), \quad \textit{quando} \ \|v\| \to 0.$$

A aplicação L_u é unicamente determinada por F e u.

Notação 1.2.1

$$L_u = dF(u) \quad ou \quad L_u = F'(u).$$

– Se F é Fréchet diferenciável, então F é diferenciável ao longo de qualquer direção. Reciprocamente, se F é diferenciável ao longo de qualquer direção, $L_u \in L(X,Y)$ e se a aplicação $u \longrightarrow L_u$ é contínua de X a $L(X,Y)$, então F é Fréchet diferenciável.

– A derivada de Fréchet tem as mesmas propriedades que a diferencial usual nos espaços Euclidianos. Por exemplo:
Se X, Y e Z são espaços de Banach, $F : X \longrightarrow Y$ diferenciável em $u \in X$ e $G : Y \longrightarrow Z$ diferenciável em $F(u) \in Y$, então $G \circ F : X \longrightarrow Z$ é diferenciável em u, e vale a seguinte regra da cadeia
$$d(G \circ F)(u)[v] = dG(F(u))\,[dF(u)[v]]\,.$$

1.3 Teorema da Função Implícita

No estudo da existência de pares (u, h) que satisfazem a equação $F(u) = h$, pode ocorrer que uma solução (u_0, h_0) (ou seja, $F(u_0) = h_0$) seja conhecida. O teorema da inversão local é um resultado clássico que nos permite resolver uma equação $F(u) = h$ em uma vizinhança de (u_0, h_0).

Teorema 1.3.1 (Teorema da Inversão Local) *Sejam $F : X \longrightarrow Y$, $u_0 \in X$ e $h_0 \in Y$ tais que $F(u_0) = h_0$. Suponhamos que existe uma vizinhança $U_0 \subset X$ de u_0 tal que*

i) $F \in C^1(U_0, Y)$,

ii) $dF(u_0)$ *é invertível (como uma aplicação linear de X em Y).*

Então existem uma vizinhança $U \subset U_0$ de u_0 e uma vizinhança $V \subset Y$ de h_0 tais que a equação $F(u) = h$, tem uma única solução em U, $\forall\, h \in V$. Além disso, denotamos por $F^{-1} : V \longrightarrow U$ a inversa de $F\big|_U$ que satisfaz

- $F^{-1} \in C^1$
- *Para cada $u \in U$, $dF^{-1}(h) = [dF(u)]^{-1}$, onde $F(u) = h$.*

Ver demonstração em [2] (Cap. 3, seção 3.1, Teorema 3.1.1).

O teorema da função implícita trata de equações como $F(\lambda, u) = 0$, onde λ é um parâmetro. Para simplificar a notação, vamos supor que $\lambda \in \mathbb{R}$, embora o caso mais geral em que $\lambda \in \mathbb{R}^N$ é totalmente análogo.

Teorema 1.3.2 (Teorema da Função Implícita) *Seja $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ fixo e V uma vizinhança de (λ_0, u_0). Suponhamos que*

$$\begin{array}{rcl} F : V & \longrightarrow & Y \\ (\lambda, u) & \longrightarrow & F(\lambda, u), \end{array}$$

satisfaz $F \in C^1$, $F(\lambda_0, u_0) = 0$ e $d_u F(\lambda_0, u_0)$ é invertível. Então existe uma vizinhança Λ de λ_0 e uma vizinhança U de u_0 tal que $F(\lambda, u) = 0$ tem uma única solução $u = u(\lambda) \in U$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$. A função $u(\lambda) \in C^1$ e satisfaz o seguinte

$$u'(\lambda_0) = -\left[d_u F(\lambda_0, u_0)\right]^{-1} d_\lambda F(\lambda_0, u_0).$$

Observação 1.3.1 *Se $F \in C^k$, então $u(\lambda)$ também é de classe C^k.*

Ver demonstração em [2] (Cap. 3, Seção 3.2, Teorema 3.2.1).
A seguir enunciaremos o Teorema Global da Inversão, para mais detalhes ver [4].

Definição 1.3.1 *Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que $F : M \longrightarrow N$ é propria se $F^{-1}(C)$ é compacto (em M), para todo conjunto compacto $C \subset N$, onde F^{-1} denota a imagem inversa de C por F, isto é, $F^{-1}(C) = \{u \in M : F(u) \in C\}$.*

Teorema 1.3.3 (Teorema da Inversão Global) *Seja $F \in C(M, N)$ própria e localmente invertível em todo M. Suponhamos que M é conexo por caminhos e N é simplesmente conexo. Então F é um homeomorfismo de M em N.*

Ver demonstração em [4] (Cap. 3, Teorema 1.8).

1.4 Operadores de Nemitski

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. O operador de Nemitski associado a f é o operador superposição

$$f : u \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot))$$

definido sobre a classe das funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Se não houver qualquer possível ambiguidade, denotaremos por f o operador de Nemitski associado a f.

Suponhamos que $f(x, u)$ é Carathéodory, i.é.,

i) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$, em que

$$\begin{array}{rcl} f(x, \cdot) : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & f(x, u). \end{array}$$

ii) $f(\cdot, u)$ é mensurável em Ω para todo $u \in \mathbb{R}$, em que

$$\begin{array}{rcl} f(\cdot, u) : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x, u) \end{array}$$

A continuidade e a diferenciabilidade de Fréchet do operador de Nemitski são tratadas nos seguintes teoremas:

Teorema 1.4.1 *Suponhamos que f é Carathéodory e que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$|f(x,u)| \leq a + b\,|u|^{\frac{p}{q}}, \quad p, q \geq 1.$$

Então o operador de Nemitski f é contínuo de $L^p(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$.

Ver demonstração em [4] (Cap. 1, Seção 1.2, Teorema 2.2).

Teorema 1.4.2 *Suponhamos que f é Carathéodory e que $f(x,\cdot)$ é diferenciável com relação a u com derivada $f_u(x,u)$ a qual é Carathéodory. Além disso, seja $p > 2$ e suponhamos que existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que*

$$|f_u(x,u)| \leq c + d\,|u|^{p-2}.$$

Então o operador de Nemitski f é diferenciável sobre $L^p(\Omega)$ com diferencial

$$df(u) : v \longrightarrow f_u(u)v.$$

Ver demonstração em [4] (Cap. 3, Seção 1.2, Teorema 2.6).

1.5 Equações elípticas

1.5.1 O princípio de Dirichlet

Teorema 1.5.1 *Se $J : A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é um funcional semi-contínuo inferiormente definido sobre um espaço topologicamente compacto A, então J é limitado inferiormente e atinge seu mínimo.*

Demonstração: Provaremos somente o caso em que J é seqüencialmente semi-contínuo inferiormente e A é sequencialmente compacto. Defina

$$\alpha = \begin{cases} \inf\{J(v) :\, v \in A\} & \text{se} \quad \exists \inf\{J(v) :\, v \in A\} \\ -\infty & \text{se} \quad \nexists \inf\{J(v) :\, v \in A\}. \end{cases}$$

Para qualquer caso, podemos escolher a sequência $\{v_n\}$ em A tal que

$$\lim_{n \to +\infty} J(v_n) = \alpha.$$

Como A é sequencialmente compacto, então existe uma subsequência convergente, ou seja, $v_n \longrightarrow v \in A$ e como J é sequencialmente semi-contínuo inferiormente, então

$$J(v) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(v_n) = \lim_{n \to +\infty} J(v_n) = \alpha.$$

Pela definição de α, tem-se

$$J(v) = \alpha.$$

Em particular, temos que α é finito, isto é, J é limitado inferiormente. Além disso, o ínfimo α de J é atingido em v. ■

Se a dimensão de X é infinita, a hipótese da compacidade de A é muito restritiva se consideramos a topologia induzida pela norma. Para superar esta dificuldade, assumimos que X é reflexivo e J é coercivo, ou seja,

$$\lim_{\substack{u \in A \\ \|u\| \to +\infty}} J(u) = +\infty.$$

De fato, a coercividade nos permite reduzir a minimização em A para $A \cap \overline{B}(0, R)$ para algum $R > 0$ suficientemente grande. Como a bola fechada $\overline{B}(0, R)$ num espaço reflexivo é fracamente compacta, é fácil deduzir o seguinte resultado.

Corolário 1.5.1 *Se X é um espaço de Banach reflexivo, A é um subconjunto fechado em X e $J : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional coercivo e fracamente semi-contínuo inferiormente em A, então existe $u \in A$ tal que*

$$J(u) = \min\{J(v) : \ v \in A\}.$$

Agora, estamos prontos para provar o princípio de Dirichlet.

Corolário 1.5.2 (Princípio de Dirichlet) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Para cada $u_0 \in H^1(\Omega)$ fixo, existe uma única função $u \in H^1(\Omega)$ que satisfaz $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e*

i) *se $A = \{v \in H^1(\Omega) : \ v - u_0 \in H_0^1(\Omega)\}$, então*

$$\int |\nabla u|^2 = \min_{v \in A} \int |\nabla v|^2 .$$

ii) *u satisfaz*

$$\begin{aligned} &\int \nabla u \cdot \nabla v = 0, && \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ &u = u_0 && \textit{sobre} \ \ \partial\Omega. \end{aligned}$$

Observação 1.5.1 *A função $u \in H^1(\Omega)$ que satisfaz (ii) é chamada solução fraca para o problema com valores na fronteira*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u &=& 0, \quad x \in \Omega \\ u &=& u_0, \ \ x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Em geral temos a seguinte definição.

Definição 1.5.1 *Dado $h \in L^2(\Omega)$, dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca do problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u &=& h, \quad x \in \Omega \\ u &=& u_0, \ \ x \in \partial\Omega \end{array} \right. ,$$

se satisfaz

$$\int \nabla u \cdot \nabla v = \int hv, \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad e \quad u = u_0 \ \ em \ \partial\Omega.$$

Observação 1.5.2 *Note que $u = u_0$ em $\partial\Omega$ no sentido do operador traço (ver [11], Cap. 5, Seção 5.5, Teorema 1).*

Se $N \geq 3$, pela imersão dos espaços de Sobolev (ver Teorema 1.2.1), cada função em $L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ pertence ao espaço dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$. Então pode-se substituir o espaço $L^2(\Omega)$ por $L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ na definição anterior.

Demonstração: **(Do Corolário 1.5.2)**
Considere $X = H^1(\Omega)$ e defina o funcional de Dirichlet como

$$J : X \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$$

$$v \longrightarrow J(v) = \int |\nabla v|^2 .$$

Provemos que J é coercivo no conjunto fracamente fechado A. Da Desigualdade de Poincaré (ver a Propriedade 1.2.1), para qualquer $v \in A$ temos:

$$\begin{aligned}
\int v^2 &= \int [(v-u_0)+u_0]^2 \\
&\leq 2\int (v-u_0)^2 + 2\int {u_0}^2 \\
&\leq 2C_1 \int |\nabla (v-u_0)|^2 + 2\int {u_0}^2 \\
&\leq 4C_1 \int |\nabla v|^2 + 4C_1 \int |\nabla u_0|^2 + 2\int {u_0}^2 \\
\Rightarrow \int |\nabla v|^2 &\geq C_2 \int v^2 - C_3
\end{aligned}$$

onde C_1, C_2, C_3 são constantes diferentes positivas. Portanto, J é coercivo em A.
A prova de semi-continuidade de J é baseada na convexidade da função quadrada $|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Isto é,

$$|\xi|^2 \geq |\xi_0|^2 + 2\xi_0 \cdot (\xi - \xi_0), \quad \forall\, \xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Tome:

$\xi = \nabla w$, com $w \in H^1(\Omega)$.
$\xi_0 = \nabla u$, com $u \in H^1(\Omega)$.

Logo, temos que

$$J(w) \geq J(v) + 2\int \nabla v \cdot (\nabla w - \nabla v), \tag{1.4}$$

para cada $v, w \in H^1(\Omega)$. Assim, J é convexo. Em particular, se $w = v_n$ converge fracamente para $v \in H^1(\Omega)$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int \nabla v \cdot (\nabla v_n - \nabla v) = 0$$

e portanto,

$$\liminf_{n\to+\infty} J(v_n) \geq J(v).$$

A unicidade é dada pela convexidade estrita de J (a qual é também devido à convexidade estrita de $|\xi|^2$). Para provar (ii) basta observar que, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ fixo, a função $u + tv \in A$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ e a função real

$$\varphi(t) = J(u+tv), \quad t \in \mathbb{R}$$

tem um mínimo em $t = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi'(0) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2t\displaystyle\int \nabla u \cdot \nabla v + t^2 \int |\nabla v|^2}{t}
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\int \nabla u \cdot \nabla v.$$

■

A aplicação a seguir será sobre o problema com valores na fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = h, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.5}$$

com $h \in L^2(\Omega)$. Neste caso o funcional de Euler é

$$\begin{array}{rcl} J : H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longrightarrow & J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega hv. \end{array} \tag{1.6}$$

Corolário 1.5.3 *Para cada $h \in L^2(\Omega)$ fixo, considere o funcional J definido em $H_0^1(\Omega)$ em* (1.6)*. Então existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Em particular, u é uma solução fraca para o problema (1.5)*.*

Demonstração: Considere $X = H_0^1(\Omega)$ e defina o funcional de Dirichlet como

$$\begin{array}{rcl} J : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longrightarrow & J(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int |\nabla v|^2 - \int fv. \end{array}$$

Das Desigualdades de Hölder e Poincaré (ver a Propriedade 1.2.1), para qualquer $v \in H_0^1$ temos:

$$\begin{aligned} \int |fv| &\leq \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \left(\int |v|^2\right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq c\|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 - \int fv \\ &\geq \int |\nabla v|^2 - c\|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1} \\ &\geq \|v\|_{H_0^1}^2 - C\|v\|_{H_0^1} \\ &\geq \|v\|_{H_0^1}(\|v\|_{H_0^1} - C), \end{aligned}$$

onde C é uma constantes positiva. Portanto, J é coercivo em $H_0^1(\Omega)$. Seja v_n uma sequência que converge fracamente para v em $H_0^1(\Omega)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int fv_n = \int fv, \text{ e } \int |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |\nabla v_n|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J(v_n) &= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\int|\nabla v_n|^2-\int fv_n\right)\\
&= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\int|\nabla v_n|^2-\liminf_{n\to\infty}\int fv_n\\
&\geq \frac{1}{2}\int|\nabla v|^2-\int fv=J(v).
\end{aligned}$$

Portanto, J é semi-contínuo inferiormente em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Corolário 1.5.1 existe $u\in H_0^1(\Omega)$ mínimo de J. Além disso, para cada $v\in H_0^1(\Omega)$ fixo, a função real

$$\varphi(t)=J(u+tv),\quad t\in\mathbb{R}$$

tem um mínimo em $t=0$. Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi'(0)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int(\nabla(u+tv))^2-\int f(u+tv)-\int|\nabla u|^2+\int fu}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2+t\int\nabla u\cdot\nabla v+t^2\frac{1}{2}\int|\nabla v|^2-\int fu-t\int fv-\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2+\int fu}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t\int\nabla u\cdot\nabla v+t^2\frac{1}{2}\int|\nabla v|-t\int fv}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int\nabla u\cdot\nabla v+t\frac{1}{2}\int|\nabla v|-\int fv,
\end{aligned}$$

então,

$$\int\nabla u\cdot\nabla v=\int fv.$$

Portanto, u é solução fraca de (1.5) em $H_0^1(\Omega)$. A seguir provaremos a unicidade de u, para isso suponhamos que $u,\widetilde{u}\in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u)=\min_{v\in H_0^1(\Omega)}J(v)\quad\text{e}\quad J(\widetilde{u})=\min_{v\in H_0^1(\Omega)}J(v)$$

Seja $\varepsilon\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
J(u-\varepsilon(\widetilde{u}-u)) &= \frac{1}{2}\int|\nabla(u-\varepsilon(\widetilde{u}-u))|^2-\int f(u-\varepsilon(\widetilde{u}-u))\\
&= \frac{1}{2}\int|\nabla u|^2-\varepsilon\int\nabla u\nabla(\widetilde{u}-u)+\varepsilon^2\frac{1}{2}\int|\nabla(u-\widetilde{u})|^2-\int fu+\varepsilon\int f(\widetilde{u}-u)\\
&= \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\int|\nabla(u-\widetilde{u})|^2\right)+\varepsilon\left(\int f(\widetilde{u}-u)-\int\nabla u\nabla(\widetilde{u}-u)\right)+J(u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon^2 a + \varepsilon b + c \\ &\geq J(u). \end{aligned}$$

Como o polinômio $p(\varepsilon) = \varepsilon^2 a + \varepsilon b + c$ atinge seu mínimo em $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon = 1$, então $p(\varepsilon)$ é constante, logo

$$a = \frac{1}{2}\int |\nabla(u - \widetilde{u})|^2 = 0,$$

pela Desigualdade de Poincaré 1.2.1, tem-se $u = \widetilde{u}$. Portanto, u é a única solução fraca de (1.5) em $H_0^1(\Omega)$. ■

Observação 1.5.3 *Em (1.5) tratamos do operador de Laplace apenas por uma questão de simplicidade. Pode-se substitui-lo por algum operador de segunda ordem uniformemente elíptico*

$$-\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u,$$

onde $a_{ij}(x)$, $c(x)$ são limitadas e mensuráveis sobre $\overline{\Omega}$, $c(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ é uniformemente elíptico, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que,

$$\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

1.5.2 Regularidade das soluções

A regularidade das soluções fracas de (1.5) são apresentadas no seguinte teorema.

Teorema 1.5.2

i) *Se $\partial\Omega$ é de classe $C^{1,1}$ e $h \in L^p(\Omega)$ para algum $p \in [2, +\infty)$, então a única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1.5) pertence a $W^{2,p}(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\|h\|_{L^p},$$

para algum $C > 0$. Em particular, se $h \in C(\overline{\Omega})$, então $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

ii) *Se $\partial\Omega$ é de classe $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$, e $h \in C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$, então $u \in C^{2,\nu}(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica de (1.5) e*

$$\|u\|_{C^{2,\nu}} \leq C\|h\|_{C^{0,\nu}},$$

para algum $C > 0$.

Ver demonstração em [12] (Cap.6, Seção 6.3, Teorema 6.14). A desigualdade de (i) é conhecida como estimativas de Agmon-Douglis-Nirenberg ou teoria L^p. A desigualdade em (ii) é conhecida como estimativa de Schauder.

1.5.3 O inverso do operador de Laplace

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Defina o operador linear

$$\begin{aligned} K : L^2(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ h &\longrightarrow K(h) = u, \end{aligned}$$

onde u é a solução de (1.5). Pela imersão compacta do Teorema 1.2.1, $K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é uma aplicação compacta. Além disso,

$$K\Big|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

é compacto.
Similarmente, podemos usar a estimativa de Schauder dada no Teorema 1.5.2, por exemplo, considerar a aplicação $K : C^{0,\nu}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{0,\nu}(\overline{\Omega})$, a qual pelo teorema de compacidade de Arzelá-Ascoli, implica que K é também compacto.

1.5.4 Problemas elípticos com autovalores lineares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ subconjunto aberto e limitado, $r \in \left(\frac{N}{2}, \infty\right) \cap (1, \infty)$ e a função (peso) $m \in L^r(\Omega)$. Considere o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x) u, & x \in \Omega \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.7}$$

Ou seja, procuramos $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (H_0^1(\Omega) \setminus \{0\})$ que satisfaz (1.7) no sentido fraco, isto é,

$$\int \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int m\, u\, v\, dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.8}$$

Neste caso, dizemos que λ é um autovalor do Laplaciano e u é uma autofunção do Laplaciano associada ao autovalor λ.

Pelo Teorema da Imersão dos espaços de Sobolev (ver Teorema 1.2.1), tem-se

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{2N/(N-2)}(\Omega), & \text{se} \quad N \geq 3 \\ L^t(\Omega), \quad (\forall\, t \geq 1) & \text{se} \quad N \leq 2. \end{cases}$$

Como $m \in L^r(\Omega)$, observamos que

$$m\, u \in \begin{cases} L^{2N/(N+2)}(\Omega), & \text{se} \quad N \geq 3 \\ L^t(\Omega), \quad (\forall\, t \in (1, r)) & \text{se} \quad N \leq 2. \end{cases}$$

E assim o lado direito de (1.8) está bem definido.

Observe que $\lambda = 0$ não é um autovalor de (1.7). Procuramos pelos autovalores diferentes de zero deste problema. Para isso, consideremos $H = H_0^1(\Omega)$ e para o número fixo $t_0 \in (0, r)$ escolhemos

$$p = \begin{cases} \dfrac{2N}{N+2}, & \text{se} \quad N \geq 3 \\ t_0 & \text{se} \quad N \leq 2. \end{cases}$$

Dada $f \in L^p(\Omega)$, seja $w = Kf$ a única solução (fraca) do problema

$$\begin{cases} -\Delta w &= f, \quad x \in \Omega \\ \quad w &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que, $K : L^p(\Omega) \longrightarrow H$ é linear e contínuo. Definimos também o operador

$$\begin{array}{rcl} T : H & \longrightarrow & H \\ u & \longrightarrow & Tu = K(m\,u) \end{array}$$

isto é, Tu é o único ponto em H, que satisfaz,

$$\int \nabla Tu \cdot \nabla v = \int m\,u\,v, \quad \forall\, v \in H. \tag{1.9}$$

Verifica-se que T é linear e simétrico (autoadjunto), isto é, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$, $\forall\, u, v \in H$.

1.5.5 Operadores lineares compactos

Nesta subseção damos uma pequena introdução sobre os operadores lineares compactos, os quais são importantes para o estudo dos problemas elípticos com valores na fronteira. Para mais detalhes ver [5], Capítulo 6.

Definição 1.5.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se*

i) T é contínuo,

ii) $T(A)$ é relativamente compacto, para todo subconjunto limitado $A \subset X$.

Observação 1.5.4 *A composição de um operador contínuo com um operador compacto é um operador compacto.*

Exemplo: *Seja* $H = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{array}{rcl} T : H & \longrightarrow & H \\ u & \longrightarrow & Tu = K(mu) \end{array}$$

em que $K : L^p(\Omega) \longrightarrow H$ é linear e contínuo e $m \in L^r$ com $r \in (\frac{N}{2}, \infty) \cap (1, \infty)$. Para

$$p = \begin{cases} \dfrac{2N}{N+2}, & se \quad N \geq 3 \\ t_0 & se \quad N \leq 2. \end{cases}$$

Tu satisfaz,

$$\int \nabla Tu \cdot \nabla v = \int m\,u\,v, \quad \forall\, v \in H.$$

Se $\{u_n\} \subset H$, $u \in H$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ (converge fracamente), usando a imersão compacta de

$$H \hookrightarrow L^t \ \ para \ \ t \in [1, 2^*),$$

deduzimos que $u_n \longrightarrow u$ converge fortemente em $L^t(\Omega)$, e aplicando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned} \int |mu_n - mu|^p &= \int |m(u_n - u)|^p \\ &= \int |m|^p |u_n - u|^p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int |m|^{p\frac{r}{p}}\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int |u_n - u|^{p\frac{r}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{r}}\\
&\leq \left(\int |m|^{r}\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int |u_n - u|^{t}\right)^{\frac{r-p}{r}}\\
&= \|m\|_{L^r}^{p/r} \|u_n - u\|_{L^t}^{(r-p)/r}.
\end{aligned}
$$

Como $u_n \longrightarrow u$ *em* L^t *e* $m \in L^r$, *temos*

$$\int |mu_n - mu|^p \longrightarrow 0, \quad \textit{quando } n \to \infty,$$

onde $t = \dfrac{rp}{r-p}$ *e* $t < 2^*$, *pois* $r > \frac{N}{2}$, p *é o expoente conjugado de* 2^*, *isto é,* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2^*} = 1$. *Portanto,*

$$\{mu_n\} \longrightarrow mu \in L^p(\Omega).$$

Como K *é contínua, então* $\{Tu_n\} \longrightarrow Tu$ *converge fortemente em* H. *Portanto,* T *é um operador compacto.* ■

Teorema 1.5.3 *Sejam* X *um espaço de Banach e* $T : X \longrightarrow X$ *um operador linear compacto. Então*

i) $\ker[I - T]$ *tem dimensão finita.*

ii) $\mathrm{Im[I - T]}$ *é fechado, tem codimensão finita e*

$$\mathrm{Im[I - T]} = \ker[\mathrm{I - T^*}]^{\perp}, \quad \textit{onde } \mathrm{T^*} \textit{é o adjunto de } \mathrm{T}.$$

iii) $\ker[I - T] = \{0\} \iff \mathrm{Im[I - T] = X}$.

Ver demonstração em [5] (Cap. 6, Teorema 6.6).

Definição 1.5.3 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach. Um operador linear* $L : X \longrightarrow Y$ *é chamado operador de Fredholm se*

a) $\dim(\ker L) < +\infty$.

b) Im L é fechado e tem codimensão finita.

O índice de L *se define por* $ind\, L = \dim(\ker\ L) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}\, L)$.

Exemplo: $L = I - T$, onde T é o operador definido em (1.9) é um operador de Fredholm de índice 0 (ver Teorema 1.5.3).

Definição 1.5.4 *Sejam* $T \in \mathscr{L}(X)$ *um operador compacto,* $\gamma \in \mathbb{R}$, *e*

$$
\begin{aligned}
A_\gamma : X &\longrightarrow X\\
u &\longrightarrow A_\gamma u = T(u) - \gamma u.
\end{aligned}
$$

i) O resolvente de T *é o conjunto* $\rho(T) = \{\gamma \in \mathbb{R} :\ A_\gamma \textit{ é bijetiva sobre } X\}$.

ii) *O espectro* $\sigma(T)$ *de* T *é definido como* $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

iii) $\gamma \in \mathbb{R}$ *é um autovalor se* $\ker[A_\gamma] \neq \{0\}$.

iv) $\ker[A_\gamma]$ *é chamado autoespaço associado ao autovalor* γ.

v) $\mu \in \mathbb{R}$ *é um valor característico de* T *se* $\ker[\mu T - I] \neq \{0\}$.

Observação 1.5.5 *Se* $\gamma \notin \sigma(T)$, *então pelo Teorema do gráfico fechado segue que* A_γ *é invertível e com inversa contínua (ver [5], Corolário 2.7).*

Com relação ao espectro de T, a teoria de Riesz-Fredholm fornece o seguinte resultado:

Teorema 1.5.4 *Seja* T *um operador linear compacto. Então* $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$. *Além disso, se* X *tem dimensão finita, então:*

1. $0 \in \sigma(T)$.
2. *Cada* $\gamma \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *é um autovalor de* T.
3. *Ou* $\sigma(T) = \{0\}$, *ou* $\sigma(T)$ *é finito, ou* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *é uma sequência que tende a* 0. *Além disso, para cada* $\gamma \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, *existe* $m \geq 1$ *tal que*

$$\begin{aligned} \ker[A_\gamma^k] &= \ker[A_\gamma^{k+1}], \quad \forall\, k \geq m, \\ Im[A_\gamma^k] &= Im[A_\gamma^{k+1}], \\ X &= \ker[A_\gamma^m] \oplus Im[A_\gamma^m]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ver demonstração em [5] (Cap. 6, Seção 6.3).

Definição 1.5.5 *A multiplicidade de um autovalor* γ *de* T *é o menor inteiro* m *que satisfaz* (1.10). *Se* $m = 1$, *dizemos que o autovalor é simples.*

Considere o problema não homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) + h(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Utilizando as propriedades do Teorema 1.5.4, deduzimos o seguinte.

Teorema 1.5.5

(i) *Se* $\lambda \neq \lambda_k \quad \forall\, k \geq 1$, *então* (1.11) *tem uma única solução para qualquer* $h \in L^2(\Omega)$.

(ii) *Se* λ_k *um autovalor de*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

e V_k *denota o núcleo correspondente, então, dado qualquer* $h \in L^2(\Omega)$, (1.11) *tem uma única solução se, e somente se,* $\displaystyle\int_\Omega hv\,dx = 0, \quad \forall\, v \in V_k$.

Observação 1.5.6 *Se trabalhamos em espaços de Hölder, os resultados indicados no Teorema 1.5.5 também são válidos com* $L^2(\Omega)$ *substituído por* $C^{0,\alpha}(\Omega)$.

1.5.6 Caracterização variacional dos autovalores

Seja T definido por (1.9). Então $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um autovalor de (1.7) se, e somente se, λ é um valor característico de T. Aplicando o Teorema 1.5.4, segue o seguinte resultado.

Teorema 1.5.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $r \in \left(\frac{N}{2}, +\infty\right) \cap (1, +\infty)$, e $m \in L^r(\Omega)$. Considere*

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \{x \in \Omega : m(x) > 0\} \\ \Omega_- &= \{x \in \Omega : m(x) < 0\} \end{aligned}$$

Então valem as seguintes afirmações:

1. *0 não é um autovalor de* (1.7).

2. a) *Se a medida de Lebesgue $|\Omega_+|$ de Ω_+ é zero, então a equação* (1.7) *não tem autovalor positivo.*

   b) *Se $|\Omega_+| > 0$, então os autovalores positivos de* (1.7) *definem uma sequência não decrescente ilimitada $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$. Além disso, λ_n é caracterizado por*

$$\frac{1}{\lambda_n} = \sup_{F \in \mathscr{F}_n} \inf \left\{ \int m(x)u^2(x)dx : \int |\nabla u(x)|^2 = 1, \quad u \in F \right\}$$

   onde $\mathscr{F}_n = \{F \subset H : F$ é um subespaço com $\dim F = n\}$.

3. a) *Se $|\Omega_-| = 0$, então* (1.7) *não tem autovalores negativos.*

   b) *Se $|\Omega_-| > 0$, então os autovalores negativos de* (1.7) *definem uma sequência não crescente ilimitada $\{\lambda_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 0)$. Além disso, λ_{-n} é caracterizado por*

$$\frac{1}{\lambda_{-n}} = \inf_{F \in \mathscr{F}_n} \sup \left\{ \int m(x)u^2(x)dx : \int |\nabla u(x)|^2 = 1, \quad u \in F \right\}.$$

Observação 1.5.7

i. *$u_n \in H_0^1(\Omega)$ são autofunções associadas aos autovalores λ_n, porém pelos resultados de regularidade, se $\partial\Omega$ e m são suaves, então $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ e, portanto, são autofunções no sentido clássico.*

ii. *Se $m \equiv 1$, então $\Omega = \Omega_+$ e $\dfrac{1}{\lambda_1} = \sup \left\{ \int u^2 dx : \int |\nabla u|^2 = 1 \right\}$ e, consequentemente, λ_1 é a melhor constante na desigualdade de Poincaré* (1.3) *para $p = 2$.*

Corolário 1.5.4 (Melhor constante para a Desigualdade de Poincaré) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado, então*

$$\lambda_1 = \min \left\{ \int |\nabla u|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \int u^2 = 1 \right\}.$$

Ver [11] (Cap. 6, Sec. 6.5, Teorema 2).

Observação 1.5.8 *Cada minimizador φ é uma autofunção.*

É possível provar que os autovalores de (1.7) dependem continuamente da função peso m. Por simplicidade, assumimos que $m > 0$.

Proposição 1.5.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $r \in \left(\frac{N}{2}, +\infty\right) \cap (1, +\infty)$ e $m \in L^r(\Omega)$.*

1. *Seja $\overline{m} \in L^r(\Omega)$ tal que $m(x) \leq \overline{m}(x)$, q.t.p. $x \in \Omega$, então para todo $j \geq 1$ tem-se*
$$\lambda_j(m) \geq \lambda_j(\overline{m}).$$
Além disso, se $m(x) < \overline{m}(x)$, com $|\{x \in \Omega : m(x) < \overline{m}(x)\}| > 0$, então
$$\lambda_j(m) > \lambda_j(\overline{m}), \quad \forall\, j \geq 1.$$

2. *Se $m_n \in L^r(\Omega)$, com $m_n > 0$, converge para m em $L^{t_1}(\Omega)$, com*
$$t_1 = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{se} \quad N \geq 3 \\ \in \left(\max\left\{\frac{N}{2}, 1\right\}, r\right] & \text{se} \quad N = 2, \end{cases}$$
então $\forall\, j \geq 1$, temos
$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_j(m_n) = \lambda_j(m).$$

Uma das propriedades principais dos primeiros autovalores positivos e negativos λ_1, λ_{-1} de (1.7) é que eles são simples e as respectivas autofunções associadas têm sinal definido.

Teorema 1.5.7 (Simplicidade dos Primeiros Autovalores) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $r \in \left(\frac{N}{2}, +\infty\right) \cap (1, +\infty)$ e $m \in L^r(\Omega)$.*

i) Se $|\Omega_+| > 0$, então o primeiro autovalor positivo λ_1 de (1.7) é simples (com multiplicidade algébrica e geométrica um) e o autoespaço associado a λ_1 é estendido por uma autofunção $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\phi_1(x) > 0$ q.t.p. $x \in \Omega$. Além disso, λ_1 é o único autovalor positivo, onde sua autofunção não muda de sinal.

ii) Se $|\Omega_-| > 0$, então o primeiro autovalor negativo λ_{-1} de (1.7) é simples e seu autoespaço associado é estendido por uma autofunção $\phi_{-1} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\phi_{-1}(x) > 0$ q.t.p., $x \in \Omega$. Além disso, λ_{-1} é o único autovalor negativo, cujas autofunções não mudam de sinal.

O Corolario 1.5.4, Proposição 1.5.1 e o Teorema 1.5.7 estão estreitamente relacionados com o Principio do Máximo (Ver [11], Cap. 6, Sec. 6.4, Teorema 4). Como referência para a caracterização variacional dos autovalores temos [2] (Cap. 1, sec 1.3, subsec. 1.3.2).

1.6 Teorema do ponto fixo de Banach

Nesta seção estudaremos o princípio de contração de Banach e o teorema de ponto fixo para operadores crescentes os quais serão relacionados com as sub e super soluções dos problemas elípticos com valores na fronteira.

Seja X um espaço métrico completo. Um operador $T : X \longrightarrow X$ é uma contração se existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que
$$\|T(u) - T(v)\| \leq \alpha \|u - v\|, \quad \forall\, u, v \in X.$$

Teorema 1.6.1 *Se X é um espaço de Banach e T é uma contração de X em X, então existe um único $z \in X$ tal que $T(z) = z$.*

Demonstração: Para qualquer $u_0 \in X$, fixo, defina u_k por $u_{k+1} = T(u_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Para cada $j \geq 1$

$$\begin{aligned} |u_{j+1} - u_j| &= |T(u_j) - T(u_{j-1})| \\ &\leq \alpha\,|u_j - u_{j-1}| \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^j\,|u_1 - u_0|\,, \end{aligned}$$

ou seja, $|u_{j+1} - u_j| \leq \alpha^j\,|u_1 - u_0|$. Daí,

$$\begin{aligned} |u_{k+1} - u_h| &\leq \sum_{j=h}^{k} |u_{j+1} - u_j| \\ &\leq \left[\sum_{j=h}^{k} \alpha^j\right] |u_1 - u_0|\,. \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, então u_k é uma sequência de Cauchy. Seja $z \in X$ tal que $u_k \longrightarrow z$. Como T é contínua, então $Tu_k \longrightarrow Tz = z$, pois $u_{k+1} = Tu_k$. Portanto,

$$Tz = z.$$

Unicidade: Sejam $z_1, z_2 \in X$ tal que $Tz_1 = z_1$, $Tz_2 = z_2$. Note que,

$$|z_1 - z_2| = |Tz_1 - Tz_2| \leq \alpha\,|z_1 - z_2|\,,$$

logo, $(1-\alpha)\,|z_1 - z_2| \leq 0$. Como $0 < \alpha < 1$, então $z_1 = z_2$. ■

Uma aplicação típica do Princípio de Contração de Banach é a prova da existência e unicidade do Problema de Cauchy para equações diferenciais de primeira ordem. Isto é possível mediante a transformação do problema diferencial em uma equação integral equivalente.

Seja $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Considere o problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

Entendemos por uma solução (local) de (1.12), uma função $y \in C^1$ definida em algum intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ tal que $(x, y(x)) \in \Omega$ e $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall\, x \in (a,b)$, a qual passa por (x_0, y_0), isto é, $y(x_0) = y_0$.

Lema 1.6.1 *O problema de Cauchy* (1.12) *é equivalente à equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.13}$$

Demonstração: Se y satisfaz (1.13), então $y(x_0) = y_0$. Além disso, derivando (1.13), temos

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Portanto, y é solução de (1.12). Reciprocamente, seja y uma solução da equação (1.12).

Integrando de x_0 a x em (1.12), temos:

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \\ y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \end{aligned}$$

Assim, como $y(x_0) = y_0$, temos

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

■

Definição 1.6.1 *$f(x, y)$ é localmente Lipschitziana com relação a y em (x_0, y_0) se existe uma vizinhança U de (x_0, y_0) e $L > 0$ tal que*

$$|f(x, y) - f(x, y_1)| \leq L\,|y - y_1|\,, \quad \forall\,(x, y), (x, y_1) \in U. \tag{1.14}$$

Observação 1.6.1

i) *Se (1.14) é válido no dominio Ω de f, então f é Lipschitziana (globalmente) sobre Ω com relação a y.*

ii) *Se $f \in C^1(\Omega)$, então pelo Teorema do Valor Médio f é localmente Lipschitziana sobre Ω com relação a y.*

iii) *Uma função Lipschitziana com relação a y é contínua na variável y (a recíproca é falsa).*

Teorema 1.6.2 *Suponhamos que $f(x, y)$ é contínua e localmente Lipschitziana com relação a y em (x_0, y_0). Então o problema de Cauchy (1.12) tem uma única solução $y(x)$ definida em uma vizinhança de x_0.*

Demonstração: Seja $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ com $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{a}{M}\right\}$, onde $a, L > 0$ são escolhidos de tal maneira que (1.14) é satisfeita em $U = [x_0 - a,\ x_0 + a] \times [y_0 - a,\ y_0 + a]$ e

$$M = \sup_{(x,y)\in U} |f(x, y)|\,.$$

Vamos usar o Principio de Ponto Fixo de Banach para provar que a equação integral equivalente (1.13) tem uma única solução em I.
Seja X um espaço de Banach e $C(I) = \{y : I \longrightarrow \mathbb{R} :\ y \text{ é contínua}\}$ com norma

$$\|y\| = \sup_{x\in I} |y(x)|\,.$$

Considere, $B = B(y_0, a) \subset X$. Defina

$$T : X \longrightarrow X$$

$$y(x) \quad \longrightarrow \quad T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Mostremos que $T(B) \subset B$. Seja $T[y] \in T(B)$, então

$$T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

ou seja,

$$T[y](x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} |T[y](x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \sup_{x \in I} |f(t, y(t))| \, dt \\ &\leq \sup_{x \in I} |f(t, y(t))| \int_{x_0}^{x} dt \\ &\leq M\delta < a, \end{aligned}$$

ou seja, $|T[y](x) - y_0| \leq a$. Portanto,

$$T[y] \in B.$$

Mostremos que T é uma contração sobre B. De fato:

$$\begin{aligned} \Big| T\,[y]\,(x) - T\,[y_1]\,(x) \Big| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, y_1(t))| \, dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} L\,|y(t) - y_1(t)| \, dt \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - y_1(t)| \, dt \\ &\leq L\,|y(t) - y_1(t)| \int_{x_0}^{x} dt \\ &= \delta L \|y - y_1\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T\,[y] - T\,[y_1]\,\| \;\leq\; \delta\, L\, \|y - y_1\|.$$

Como $\delta\, L < 1$, então T é uma contração. Pelo Principio de Contração de Banach, segue que

$$\exists\,!\, y^* \in B \;\; \text{tal que} \;\; Ty^* = y^*$$

ou seja,

$$y^*(x) = T\,[y^*]\,(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y^*(t))dt.$$

Portanto, y^* é (única) solução de (1.13). $\blacksquare$

Observação 1.6.2 *O resultado provado no Teorema 1.6.2 é local. Além disso, o intervalo* $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *depende de* L, M *e da condição inicial. O exemplo a seguir mostra que um resultado local é o melhor que podemos obter. Considere o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= p > 0 \end{cases}$$

Verifica-se que $y(x) = \frac{p}{1-px}$ *satisfaz o problema de Cauchy.*
O intervalo máximal de definição dessa solução é $(0, p^{-1})$ *e depende da condição inicial. Observe que* $f(y) = y^2$ *não é globalmente Lipschitziana.*

Observação 1.6.3 *Se* Ω *é uma faixa* $\Omega = \{(x, y) : a < x < b,\ y \in \mathbb{R}\}$ *e* f *é globalmente Lipschitziana sobre* Ω*, então* (1.12) *tem uma única solução definida em todo* (a, b) *(*a *pode ser* $-\infty$ *e/ou* b *pode ser* $+\infty$*).*

Observação 1.6.4 *Se* f *não é Lipschitziana, mas apenas contínua ainda é possível provar que* (1.12) *tem uma solução definida numa vizinhança de* x_0*, porém, a unicidade pode falhar (Teorema de Peano).*
Exemplo: *O problema*

$$\begin{cases} y' &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

tem infinitas soluções, uma delas é $y \equiv 0$*. Além disso, para qualquer* $a > 0$

$$\begin{cases} 0, & \textit{para} \quad |x| < a \\ \frac{1}{4}(x-a)|x-a|, & \textit{para} \quad |x| \geq a, \end{cases}$$

é também solução de (1.15)*.*

1.7 Operadores crescentes

Nesta seção estudaremos outro esquema de iteração sobre espaços de Banach ordenados.

1. Seja X um espaço de Banach, dotado de uma ordem $\leq$ tal que

$$v \leq w \Longrightarrow \alpha v + z \leq \alpha w + z, \quad \forall\, v, w, z \in X,\ \forall\, \alpha \geq 0.$$

   Escrevemos $w \geq v$, se e somente se, $v \leq w$. Suporemos também que a norma em X está relacionada com a ordem pelo fato que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$0 \leq v \leq w \Longrightarrow \|v\| \leq C\|w\| \tag{1.16}$$

2. Um operador $T : X \longrightarrow X$ é crescente se $v \leq w$, então $T(v) \leq T(w)$, $\forall\, v, w \in W$.

3. Se $v \in X$ satisfaz $v \leq T(v)$, então v é chamada uma sub-solução da equação do ponto fixo de T, $T(u) = u$. Similarmente, $w \in X$ é uma super-solução se $T(w) \leq w$.
   Dada uma sub-solução, definimos um sistema de iteração como

$$\begin{cases} u_0 &= v \\ u_{k+1} &= T(u_k), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{1.17}$$

Lema 1.7.1 *Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador crescente e suponhamos que existe $v \in X$ sub-solução e $w \in X$ super-solução da equação do ponto fixo de T tal que $v \leq w$. Então a sequência u_k dada em (1.17) satisfaz*

$$v \leq u_k \leq u_{k+1} \leq w, \quad \forall\, k = 0, 1, \cdots$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução. Pela definição de sub-solução, para $k = 0$, tem-se

$$u_1 = T(u_0) = T(v) \geq v. \tag{1.18}$$

Além disso, se $u_k \geq u_{k-1}$, então $Tu_k \geq Tu_{k-1}$, pois T é um operador crescente. Logo

$$u_{k+1} = T(u_k) \geq T(u_{k-1}) = u_k. \tag{1.19}$$

Similarmente, temos que $u_0 = v \leq w$. Como T é um operador crescente, então

$$u_k \leq w \Longrightarrow T(u_k) \leq T(w). \tag{1.20}$$

Pela definição de super-solução temos

$$u_{k+1} = T(u_k) \overset{(1.20)}{\leq} T(w) \leq w.$$

De (1.18), (1.19) e (1.20), concluímos que $v \leq u_k \leq u_{k+1} \leq w$. ■

Teorema 1.7.1 *Seja $T \in C(X, Y)$ um operador compacto e crescente e suponhamos que existem $v \in X$, $w \in X$ sub e super-solução da equação do ponto fixo de T, respectivamente, tais que $v \leq w$. Então a sequência u_k dada em (1.17) converge para algum $u \in X$ tal que $T(u) = u$. Além disso, $v \leq u \leq w$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.7.1, $0 \leq u_k - v \leq w - v$. Pela propriedade (1.16), temos $u_k = u_k - v + v$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|u_k\| &= \|u_k - v + v\| \leq \|u_k - v\| + \|v\| \\
&\leq C\|w - v\| + \|v\| \\
&\leq C_1.
\end{aligned}$$

Como T é um operador compacto, a sequência $T(u_k)$ é relativamente compacta, então existe uma subsequência convergente, isto é,

$$Tu_k \longrightarrow u \in X.$$

(Na verdade, pela monotonicidade de u_k, toda a sequência converge). De $u_{k+1} = T(u_k)$, e da continuidade de T temos que $u = T(u)$. Além disso, pelo Lema 1.7.1, tem-se

$$v \leq u \leq w.$$

■

1.8 Introdução à teoria de bifurcação

Uma característica específica de muitos problemas não lineares é a existência de múltiplas soluções e, muitas vezes é útil introduzir um parâmetro λ para detectar quando uma nova solução surge. Do ponto de vista matemático, somos levados a considerar uma equação funcional $S(\lambda, u) = 0$, dependendo de λ, e tal que

$$S(\lambda, 0) = 0.$$

A teoria de bifurcação trata da existência de valores λ em que soluções não triviais se ramificam a partir da solução trivial $u = 0$. Vamos tratar de bifurcação de um autovalor simples.

1.8.1 Bifurcação: definição e condições necessárias

Sejam $X = (X, \|\cdot\|)$, $Y = (Y, \|\cdot\|)$ espaços de Banach. Vamos trabalhar com uma equação do tipo:

$$S(\lambda, u) = 0, \tag{1.21}$$

onde $S : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$ tal que $S(\lambda, 0) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.
A solução $u = 0$ é chamada de solução trivial de (1.21) e o conjunto

$$\Sigma_S = \{\, (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X :\ u \neq 0,\ S(\lambda, u) = 0 \,\}$$

é chamado de conjunto de soluções não triviais de (1.21). Muitos problemas podem ser modelados como em (1.21).

Exemplo 1.8.1 *Consideremos o problema de deformação de uma viga elástica de comprimento l, a qual é comprimida na extremidade por uma força de intensidade $\lambda > 0$. A correspondente equação é dada por*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u''(s) + \lambda\, sen\, u(s) & = & 0, \quad s \in [0, l] \\ u'(0) = u'(l) & = & 0 \end{array} \right., \tag{1.22}$$

onde s é o comprimento de arco, u é o ângulo entre a linha horizontal e a reta tangente à viga. Para reformular tal equação, na forma (1.21), *seja*

$$\begin{array}{l} X = \left\{ u \in C^2((0,l)) :\ u'(0) = u'(l) = 0 \right\}, 6 \\ Y = C\left((0,l)\right), \\ S(\lambda, u) = u''(s) + \lambda \sin u(s). \end{array}$$

A escolha dos espaços de funções é feita tendo em conta as condições de contorno de (1.22). *É claro que $u(s) \equiv 0$ é solução de* (1.22), *para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, e corresponde à posição horizontal da viga. Este é o equilíbrio estável se λ permanece pequeno e corresponde à solução trivial de nosso problema. Quando λ excede a um determinado ponto crítico, a viga se dobra e isto corresponde a uma solução não trivial. A solução trivial, que ainda existe, torna-se instável enquanto a nova solução é a estável. Esse limite é um ponto de bifurcação de* (1.22).

Voltando à (1.21), vamos dar a definição precisa de ponto de bifurcação.

Definição 1.8.1 *Um ponto de bifurcação para* (1.21), *é um número real λ^* tal que*

$$(\lambda^*, 0) \in \overline{\Sigma}_S,$$

ou seja, λ^* *é ponto de bifurcação para* (1.21)*, se existem sequências* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *e* $u_n \in X \setminus \{0\}$ *tais que*

i) $S(\lambda_n, u_n) = 0,$

i) $(\lambda_n, u_n) \longrightarrow (\lambda^*, 0).$

O propósito principal da teoria de bifurcação é estabelecer condições para encontrar os pontos de bifurcação e estudar a estrutura de Σ_S.

Se $S \in C^1(\mathbb{R} \times X, Y)$, uma condição necessária para que λ^* seja um ponto de bifurcação pode ser deduzida imediatamente a partir do Teorema da Função Implícita 1.3.2.

Proposição 1.8.1 *Se* λ^* *é um ponto de bifurcação da equação* (1.21)*, então* $S'_u(\lambda^*, 0) \in \mathscr{L}(X, Y)$ *é não invertível. Em particular, se* $S(\lambda, u) = \lambda u - Tu$*, então qualquer ponto de bifurcação de* (1.21) *pertence ao espectro de* $T'(0)$*.*

Demonstração: Suponhamos que $S'_u(\lambda^*, 0)$ é invertível, então pelo Teorema da Função Implícita 1.3.2, existe $\Lambda^* \times U^* \subset \mathbb{R} \times X$ vizinhança de $(\lambda^*, 0)$, tal que

$$S(\lambda, u) = 0 \Longleftrightarrow u = u(\lambda), \text{ onde } (\lambda, u) \in \Lambda^* \times U^*. \tag{1.23}$$

Se λ^* é ponto de bifurcação para S, então existe $(\lambda_n^*, u_n) \in \Sigma_S$ tal que $(\lambda_n^*, u_n) \longrightarrow (\lambda^*, 0)$, e $S(\lambda_n^*, u_n) = 0$, mas isto contradiz (1.23) (pois na vizinhança $\Lambda^* \times U^*$ teríamos duas soluções $S(\lambda_n^*, u_n) = 0$, $u_n \neq 0$ e $S(\lambda_n^*, 0) = 0$). Portanto, $S'_u(\lambda^*, 0)$ é não invertível.
Se

$$\begin{aligned} &S(\lambda, u) = \lambda u - T(u), \\ &S'_u(\lambda^*, u) = \lambda^* I - T'(u), \\ &S'_u(\lambda^*, 0) : v \longmapsto \lambda^* v - T'(0)v, \end{aligned}$$

$S'_u(\lambda^*, 0)$ não é invertível se, e somente se, $\lambda^* \in \sigma(T'(0))$ (ver Observação 1.5.5). ■

No caso da equação da viga (1.22), temos

$$S'_u(\lambda, 0) : v \longmapsto v'' + \lambda v, \quad v \in X$$

Assim, os valores de λ tais que $S'_u(\lambda, 0)$ é não invertível são autovalores do problema linear.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u''(s) + \lambda u(s) & = & 0, \quad s \in [0, l] \\ u'(0) = u'(l) & = & 0 \end{array} \right. , \tag{1.24}$$

ou seja $\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$, $k = 1, 2, \cdots$ são os únicos pontos de bifurcação de (1.22). Neste caso específico, uma análise de plano de fase elementar mostra que cada λ_k é de fato um ponto de bifurcação.

Entretanto, nem todo λ tal que S'_u é não invertível é um ponto de bifurcação. O seguinte exemplo prova que a recíproca da Proposição 1.8.1, não é verdadeira.

Exemplo 1.8.2 *Sejam* $X = Y = \mathbb{R}^2$ *e considere a aplicação*

$$S : \mathbb{R} \times X \longrightarrow Y$$

$$(\lambda, u) \longrightarrow S(\lambda, u) = \lambda u - Tu,$$

onde,

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow Y \\ u &\longrightarrow T(u) = T(x,y) = (x + y^3, y - x^3). \end{aligned}$$

Assim,

$$T'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$T'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Logo, $\lambda^* = 1$ *é um autovalor de* $T'(0)$*, mas não é ponto de bifurcação de* S*. De fato, se* $S(\lambda, u) = 0$ *então*

$$\begin{aligned} \lambda(x,y) - (x + y^3, y - x^3) = (0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda x - x - y^3 = 0 \\ \lambda y - y - x^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^3 = x(\lambda - 1) \\ -x^3 = y(\lambda - 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^4 = xy(\lambda - 1) \\ x^4 = -xy(\lambda - 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 + y^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = u = 0. \end{aligned}$$

Logo, a única solução de $S(\lambda, u) = 0$ é $u = 0$, ou seja, a solução trivial. Portanto, não existem pontos de bifurcação. Por outro lado, a derivada $T'(0)$ é a matriz identidade em $\mathbb{R}^2$, e portanto, $\lambda^* = 1$ é um autovalor de $T'(0)$, de fato o único. ■

1.8.2 A redução de Lyapunov- Schmidt

Seja $S \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ e seja $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$L = S'_u(\lambda^*, 0) \tag{1.25}$$

não é invertível. Vamos nos concentrar no caso em que o núcleo não é trivial. Sejam

$$\begin{aligned} V &= \ker(L), \\ R &= \text{Im(L)}. \end{aligned}$$

Suponhamos que

(V) V tem complemento topológico W em X.

(R) R é fechado e tem complemento topológico Z em Y.

Observação 1.8.1

(V) *significa que existe* $W \subset X$ *fechado tal que* $X = V \oplus W$*, e qualquer* $u \in X$ *pode ser escrito como* $u = v + w$ *com* $v \in V$ *e* $w \in W$*.*

(**R**) *significa que* $Y = Z \oplus R$, *com* Z *fechado.*

Observação 1.8.2 *Qualquer operador de Fredholm* L *satisfaz* V *e* R, *pois neste caso* $V = \ker(L)$ *tem dimensão finita,* $R = \mathrm{Im(L)}$ *é fechado e a dimensão de* Z *é finita. Mais ainda, se* L *é um operador de Fredholm com índice zero, então*

$$\dim V = \dim Z.$$

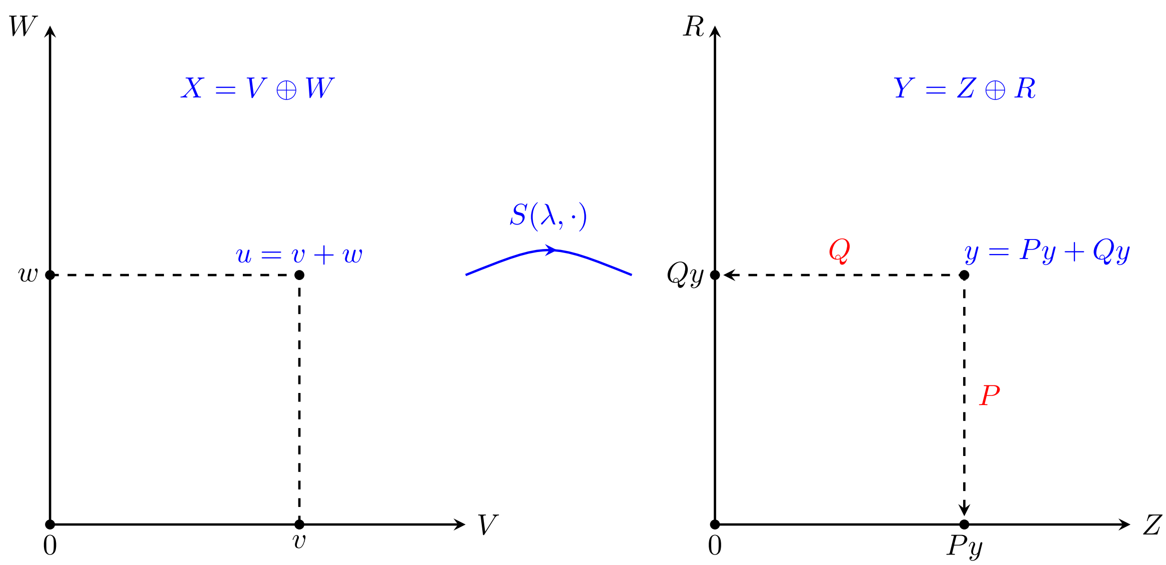
Agora, como $Y = Z \oplus R$ com Z fechado e $Z \cap R = \{0\}$, consideramos P e Q as projeções de Y em Z e R, respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} P : Y &\longrightarrow Z, \\ Q : Y &\longrightarrow R. \end{aligned}$$

Sendo $u = v + w$ e aplicando P e Q em $S(\lambda, u) = 0$, obtemos

$$PS(\lambda, v + w) = 0, \tag{1.26}$$
$$QS(\lambda, v + w) = 0. \tag{1.27}$$

A equação (1.27) é chamada de Equação Auxiliar.



Lema 1.8.1 *A equação auxiliar (1.27) possui uma única solução em* W, *para cada* (λ, v) *próximo de* $(\lambda^*, 0)$. *Mais precisamente, existem vizinhanças* Λ^* *de* λ^*, V_0 *de* $v = 0$ *em* V, W_0 *de* $w = 0$ *em* W, *e uma aplicação* $w = w(\lambda, v) \in C^2(\Lambda^* \times V_0, W)$ *tais que*

$$QS(\lambda, v + w) = 0, \quad (\lambda, v, w) \in \Lambda^* \times V_0 \times W_0 \Longleftrightarrow w = w(\lambda, v).$$

Além disso, temos que

$$w(\lambda, 0) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \Lambda^*, \tag{1.28}$$
$$w'_v(\lambda^*, 0) = 0. \tag{1.29}$$

Demonstração: Seja $\phi(\lambda, v, w) = QS(\lambda, v + w)$, temos que $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times V \times W, R)$ em que $\partial_w \phi(\lambda^*, 0, 0)$ é uma aplicação de W em R dada por

$$w \longrightarrow QS'_u(\lambda^*, 0)[w] = QLw = Lw, \quad \text{pois} \;\; Lw \in R.$$

Em outras palavras, $\partial_w \phi(\lambda^*, 0, 0)$, é a restrição de L a W e assim, é injetivo e sobrejetivo (como aplicação de W em R). Como R é fechado, então $\partial_w \phi(\lambda^*, 0, 0)$ é invertível.
Como $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times V \times W, \mathbb{R})$, por (1.27), tem-se $\phi(\lambda^*, v, w) = QS(\lambda^*, v+w) = 0$ e $\partial_w \phi(\lambda^*, 0, 0)$ é invertível. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças $\Lambda^* \subset V$ de λ^*, $V_0 \subset V$ de $v = 0$, $W_0 \subset W$ de $w = 0$, e uma aplicação $w = w(\lambda, v) \in C^2(\Lambda^* \times V_0, W_0)$ tal que

$$\phi(\lambda^*, v, w) = QS(\lambda^*, v + w) = 0, \quad (\lambda, v, w) \in \Lambda^* \times V_0 \times W_0 \Longleftrightarrow w = w(\lambda, v).$$

■

Agora, podemos substituir $w = w(\lambda, v)$ em (1.26), e assim obter a **Equação de Bifurcação**

$$PS(\lambda, v + w(\lambda, v)) = 0. \tag{1.30}$$

Suponhamos que existe uma sequência de soluções de (1.30),

$$(\lambda_n, v_n) \longrightarrow (\lambda^*, 0)\,, \quad \text{com} \;\; v_n \neq 0.$$

Considerando, $u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n)$ tem-se que

$$S(\lambda_n, u_n) = 0.$$

Como $v_n \neq 0$, então

$$u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n) \neq 0,$$

e assim, (λ_n, u_n) é uma solução não trivial de $S(\lambda, u) = 0$, e além disso $w(\lambda_n, v_n) \longrightarrow 0$, pois $(\lambda_n, v_n) \longrightarrow (\lambda^*, 0)$. Com isso, demonstramos o seguinte resultado.

Teorema 1.8.1 *Seja $S \in C^1(\mathbb{R} \times X, Y)$ satisfazendo (V) e (R). Suponhamos que a equação de bifurcação (1.30) possui uma sequência de soluções $(\lambda_n, v_n) \longrightarrow (\lambda^*, 0)$, com $v_n \neq 0$. Então*

$$u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n)$$

é tal que $(\lambda_n, u_n) \in \Sigma_S$, $u_n \longrightarrow 0$ e assim, λ^* é um ponto de bifurcação de $S(\lambda, u) = 0$.

1.8.3 Bifurcação a partir do autovalor simples

De acordo com o Teorema 1.8.1 é necessário impor condições de tal forma que a equação de bifurcação (1.30) tenha solução não trivial. Primeiramente, discutiremos o caso em que V tem dimensão um e a codimensão de R é também um. Por esta razão, este é chamado de caso de autovalor simples.
Precisamente, vamos supor $(\mathbf{V})$ e $(\mathbf{R})$ e ainda

$$(\mathbf{V\text{-}1}) \; \exists \, u^* \in X, \; u^* \neq 0 \;\text{ tal que }\; V = \text{span}\{u^*\}.$$
$$(\mathbf{R\text{-}1}) \; \exists \, \psi \in Y^*, \; \psi \neq 0 \;\text{ tal que }\; R = \{y \in Y : \; \langle \psi, y \rangle = 0\}.$$

Usando a mesma notação das seções anteriores, temos que $v = tu^*$, $t \in \mathbb{R}$, e portanto, a solução da equação auxiliar tem a forma $w(\lambda, v) = w(\lambda, tu^*)$. Além disso,

$$PS(\lambda, v + w(\lambda, v)) = PS(\lambda, t^*u + w(\lambda, tu^*)).$$

De acordo com (R-1), a equação de bifurcação $PS = 0$ torna-se

$$\beta(\lambda, t) \stackrel{def}{:=} \langle \psi, S\,(\lambda, tu^* + w(\lambda, tu^*)) \rangle = 0. \tag{1.31}$$

Logo, da propriedade (1.28) de w, deduzimos que

$$\begin{aligned} \beta(\lambda, 0) &= \langle \psi, S(\lambda, w(\lambda, 0)) \rangle \\ &= \langle \psi, S(\lambda, 0) \rangle \\ &= \langle \psi, S(\lambda, 0) \rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\beta(\lambda, 0) \equiv 0 \tag{1.32}$$

Em seguida, vamos avaliar a derivada parcial de β em relação à t. Note que

$$\beta'_t(\lambda, t) = \Big\langle\, \psi, S'_u(\lambda, tu^* + w(\lambda, tu^*)) \big[\, u^* + w'_v(\lambda, tu^*) u^* \,\big] \,\Big\rangle. \tag{1.33}$$

Em particular, para $\lambda = \lambda^*$, $t = 0$ e por (1.29) vem que

$$\begin{aligned} \beta'_t(\lambda^*, 0) &= \Big\langle\, \psi, S'_u(\lambda^*, 0) \,\big[\, u^* + w'_v(\lambda^*, 0\,) u^* \big] \,\Big\rangle \qquad (1.34) \\ \beta'_t(\lambda^*, 0) &= \Big\langle\, \psi, S'_u(\lambda^*, 0) \,\big[\, u^* \big] \,\Big\rangle \\ \beta'_t(\lambda^*, 0) &= \Big\langle\, \psi, Lu^* \,\Big\rangle \\ \beta'_t(\lambda^*, 0) &= 0, \qquad (1.35) \end{aligned}$$

pois $Lu^* \in \mathrm{Im}(L)$. Além disso, de (1.33) calculamos a segunda derivada mista $\beta''_{t,\lambda}$

$$\begin{aligned} \beta''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0) &= \Big\langle\, \psi, S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0) \,\big[\, u^* + w'_v(\lambda^*, 0\,) u^* \big] \,\Big\rangle + \Big\langle\, \psi, S'_u(\lambda^*, 0) \,\big[\, w''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0\,) u^* \big] \,\Big\rangle \\ &= \Big\langle\, \psi, S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0) \,\big[\, u^* \big] \,\Big\rangle + \Big\langle\, \psi, L\big[\, w''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0\,) u^* \big] \,\Big\rangle. \end{aligned}$$

Como $L\big[\, w''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0\,) u^* \big] \in R$, então $\Big\langle\, \psi, L\big[\, w''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0\,) u^* \big] \,\Big\rangle = 0$, e assim temos

$$\beta''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0) = \Big\langle\, \psi, S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0) \,\big[\, u^* \big] \,\Big\rangle. \tag{1.36}$$

Agora estamos em condições para enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 1.8.2 *Suponha que (V-1) e (R-1) são satisfeitas e suponha que*

$$S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0) \,\big[\, u^* \big] \notin R. \tag{1.37}$$

Então λ^* é um ponto de bifurcação de S.

Demonstração: Defina

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} \dfrac{\beta(\lambda, t)}{t} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ \beta'_t(\lambda, 0) & \text{se} \quad t = 0. \end{cases}$$

Claramente, h é de classe C^1 em uma vizinhança de $(\lambda^*, 0) \in \mathbb{R}^2$. De (1.35) segue que $h(\lambda^*, 0) = 0$. Além disso, de (1.36) temos

$$h'_\lambda(\lambda^*, 0) = \beta''_{t,\lambda}(\lambda^*, 0) = \left\langle \psi, S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0)\left[u^* \right] \right\rangle.$$

Então, da hipótese (1.37) temos que $h'_\lambda(\lambda^*, 0) \neq 0$. Aplicando o Teorema da Função Implícita para h, existe $\lambda = \lambda(t)$ definido em uma $\varepsilon-$vizinhança de $t = 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\lambda(0) = \lambda^*, \\ &h(\lambda(t), t) = 0, \quad \forall -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, se $h(\lambda(t), t) = 0$ com $t \neq 0$, então $\beta(\lambda(t), t) = 0$, e assim o par $(\lambda(t), u(t))$, com $u(t) = tu^* + w(\lambda(t), t)$ é uma solução da equação de bifurcação $PS = 0$ tal que

$$(\lambda(t), u(t)) \longrightarrow (\lambda^*, 0), \text{ quando } t \to 0.$$

Observe que, $u(t) \neq 0$, quando $t \neq 0$. Então deduzimos que λ^* é um ponto de bifurcação de S. ■

Observação 1.8.3

a) O Teorema (1.8.2) *é uma versão simplificada do Teorema de Crandall-Rabinowitz [10].*

b) O conjunto de soluções Σ_S é uma curva suave que tem uma representação cartesiana no núcleo V de L.

Podemos descrever Σ de maneira mais precisa, na verdade, temos que

$$\lambda'(0) = -\frac{h'_t(\lambda^*, 0)}{h'_\lambda(\lambda^*, 0)}.$$

Considere

$$h'_\lambda(\lambda^*, 0) = \left\langle \psi, \, S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0)\left[u^* \right] \right\rangle = a \neq 0$$

e além disso,

$$h'_t(\lambda^*, 0) = \tfrac{1}{2}\, \beta''_{t,t}(\lambda^*, 0) = b.$$

Assim, deduzimos que

$$b = \tfrac{1}{2}\left\langle \psi, \, S''_{u,u}(\lambda^*, 0)\left[u^* \right]^2 \right\rangle.$$

Desta forma, se $b \neq 0$ temos que

$$\lambda(t) = \lambda^* - \frac{b}{a} t + \theta(t), \quad \textit{quando } \; t \to 0, \; \textit{onde } \frac{\theta(t)}{|t|^2} \to 0.$$

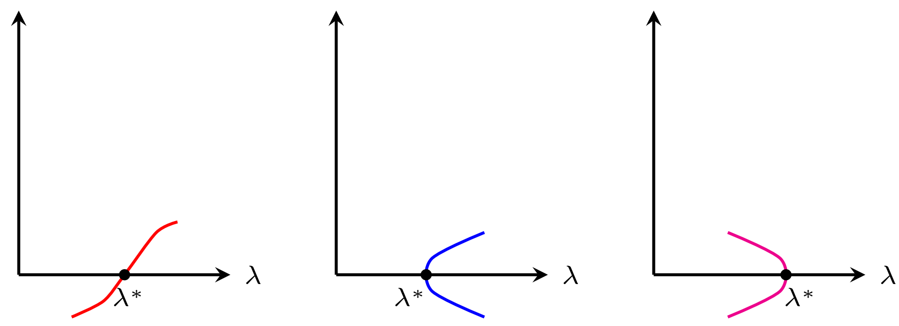
Isto implica que, existe uma curva de soluções não triviais que se bifurca a partir de $(\lambda^*, 0)$, que assume valores de λ tais que $\lambda > \lambda^*$ e $\lambda < \lambda^*$ (Isso é chamado de bifurcação transcrítica). Se $b = 0$ a estrutura Σ_S depende das derivadas de ordem superior de S em relação a u. Por exemplo, Se S é ímpar com respeito a u, temos

$$\lambda''(0) = -\frac{1}{3a}\left\langle \psi, \, S'''_{u,u,u}(\lambda^*, 0)\left[u^* \right]^3 \right\rangle.$$

e assim, se $\lambda''(0) \neq 0$, *vem que*

$$u = \pm \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{2c}\right)^{1/2} u^* + O(\lambda - \lambda^*), \ \ onde\ \ c = \lambda''(0).$$

Então, se $c > 0$ *as soluções não triviais ramificam-se para* $\lambda > \lambda^*$ *(bifurcação super-crítico), enquanto se* $c < 0$, *ramificam-se para* $\lambda < \lambda^*$ *(bifurcação subcrítico).*



$b{\neq}0$ $\qquad$ $b{=}0,\, c{>}0$ $\qquad$ $b{=}0,\, c{<}0$

Observação 1.8.4 *No caso especial em que* $X = Y$ *e*

$$S(\lambda, u) = u - \lambda Au - T(u),$$

com T *contínuo e tal que* $T(0) = 0$, $T'(0) = 0$ *e* $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ *é compacto, tem-se que* $L = I - \lambda^* A$, *onde* L *é definido na equação* (1.25). *Suponhamos que* λ^* *é um valor característico simples de* A (*isto é,* $\ker(I - \lambda^* A) \neq \{0\}$). *Então*

(*i*) $\ker(I - \lambda^* A)$ *tem dimensão 1.*

(*ii*) *A codimensão de* $\mathrm{Im(I - \lambda^* A)}$ *é 1, e* $\ker(I - \lambda^* A) \cap \mathrm{Im(I - \lambda^* A)} = \{0\}$.

Neste caso (*i*) *e* (*ii*) *são equivalentes a (V-1) e (R-1).*

Para referência futura, é conveniente indicar explicitamente o resultado no caso introduzido na Observação anterior, ou seja, quando $X = Y$ e supomos que S é da forma

$$S(\lambda, u) = u - \lambda Au - T(u)$$

onde $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ compacto. Neste caso, o Teorema 1.8.2 pode ser escrito da seguinte forma:

Teorema 1.8.3 *Seja* $T \in C^2(X, X)$ *tal que* $T(0) = 0$ *e* $T'(0) = 0$. *Além disso, considere* A *compacto. Então qualquer valor característico* λ^* *de* A *é um ponto de bifurcação para*

$$S(\lambda, u) = u - \lambda Au - T(u) = 0.$$

Demonstração: Como antecipado na Observação 1.8.4, para qualquer valor característico de A, as hipóteses (V-1) e (R-1) são satisfeitas. Além disso, $V = \ker(I - \lambda^* A) = \mathrm{span}\{u^*\}$ satisfaz $V \cap R = \{0\}$. Como

$$S''_{u,\lambda}(\lambda^*, 0)[u^*] = Au^* \in V,$$

a hipótese (1.37) do Teorema anterior é satisfeita, logo λ^* é ponto de bifurcação para S. ∎

Aplicações para Problemas de Autovalores não Lineares

Considere a equação da viga

$$\begin{cases} u''(s) + \lambda \operatorname{sen} u(s) &= 0, \qquad s \in [0,l] \\ \qquad u'(0) = u'(l) &= 0 \end{cases}.$$

Este problema pode ser estudado por meio da Teoria de Bifurcação com

$$\begin{aligned} &X = \left\{ u \in C^2((0,l)) : \; u'(0) = u'(l) = 0 \right\}, \\ &Y = C\left((0,l)\right), \\ &S : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ &\qquad (\lambda, u) \longrightarrow S(\lambda,u) = u''(s) + \lambda \text{ sen } u(s) \\ e \quad &S'_u(\lambda,0) : v \longrightarrow v'' + \lambda v, \end{aligned}$$

com os autovalores simples

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \;\; k = 1, 2, \cdots$$

de $v'' + \lambda v = 0$, que pelo Teorema 1.8.3 são pontos de bifurcação.

Um resultado similar vale para problemas de autovalores não lineares de Sturm-Liouville, como

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u &= \lambda u + f(x,u), \qquad x \in [a,b] \\ \quad u(a) = u(b) = 0 \end{cases},$$

onde, p, q, f são contínuas, $p, q > 0$ em $[a,b]$ e $f(x,0) \equiv 0$. Por exemplo, se $f'_u(x,0) = 0$ então os autovalores de

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u &= \lambda u, \qquad x \in [a,b] \\ \quad u(a) = u(b) \end{cases},$$

são pontos de bifurcação.

Estudaremos também a bifurcação para problemas elípticos semilineares de autovalores, como por exemplo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x,u), & x \in \Omega \\ \quad u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.38}$$

onde Ω é um domínio limitado suave, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$. Considere o espaço de Hölder

$$\begin{aligned} X &= \left\{ u \in C^{2,\alpha}(\Omega) : \; u\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ Y &= C^{0,\alpha}(\Omega). \end{aligned}$$

Defina,

$$S(\lambda, u) = \Delta u + \lambda u + f(x,u).$$

Se $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$ é solução de $S(\lambda,u) = 0$, então u é solução de (1.38). Suponhamos que $f(x,0) = f'_u(x,0) = 0$. Então $S(\lambda,0) \equiv 0$ e

$$S'_u(\lambda,0) : v \longrightarrow \Delta v + \lambda v.$$

Seja $\lambda^* = \lambda_k$ um autovalor do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.39}$$

isto é, $L = L_k : v \longrightarrow \Delta v + \lambda_k v$, tem núcleo não trivial $\ker V = V_k$. A hipótese (V-1) requer que V_k tenha dimensão um, isto é, que λ_k seja simples. Seja φ_k, com

$$\int_\Omega \varphi_k^2 dx = 1$$

uma autofunção correspondente a λ_k. Então $u^* = \varphi_k$ e $V_k = \text{span}\{\varphi_\text{k}\}$. Além disso, do Teorema 1.5.5 e também da Observação 1.5.6 temos que a imagem R_k de L_k tem codimensão 1 e é dada por

$$R_k = \left\{ u \in Y : \int_\Omega u\varphi_k dx = 0 \right\}.$$

Em outras, palavras $R_k = \ker(\psi)$, onde ψ é definido como

$$\langle \psi, u \rangle = \int_\Omega u\varphi_k dx.$$

Finalmente,

$$S''_{u,\lambda}(\lambda_k, 0) : v \longrightarrow v \quad \text{e} \quad S''_{u,\lambda}(\lambda_k, 0)[\varphi_k] = \varphi_k \notin R_k.$$

Portanto, o Teorema 1.8.2, garante que todo autovalor simples do Laplaciano (1.39) é um ponto de bifurcação para S, isto é para o problema de Dirichlet semilinear com valores na fronteira (1.38).

Capítulo

2

Grau Topológico

Neste capitulo, faremos um resumo da teoria do grau topológico, evidenciando aquelas propriedades que nos serão mais necessárias. O grau topológico de uma aplicação é uma ferramenta clássica que é muito útil para resolver equações funcionais. Foi introduzida por L. Brouwer para espaços de dimensão finita e estendida por J. Leray e J. Schauder para dimensão infinita. As principais referencias são [2], [3] e [4].

2.1 O grau de Brouwer e suas propriedades

Vamos supor que:

Ω é um aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$. (2.1)

f é uma aplicação contínua de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^n$; as componentes de f serão denotadas por f_i. (2.2)

$p \in \mathbb{R}^n$ é tal que $p \notin f(\partial\Omega)$. (2.3)

Para cada tripla (f, Ω, p) satisfazendo (2.1)-(2.3) podemos associar um inteiro $deg(f, \Omega, p)$ chamado de **grau de f** (com respeito a Ω e p) com as seguintes propriedades básicas.

(P-1) Normalização: Se $I_{\mathbb{R}^n}$ denota a aplicação identidade em $\mathbb{R}^n$, então

$$deg(I_{\mathbb{R}^n}, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad p \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(P-2) Propriedade da Solução: Se $deg(f, \Omega, p) \neq 0$, então existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = p$.

(P-3) $deg(f, \Omega, p) = deg(f - p, \Omega, 0)$.

(P-4) Aditividade: Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, então

$$deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p)$$

Abaixo, faremos um procedimento fora do usual para definir o grau, omitindo a consistência da definição e da verificação de (P-1)-(P-4). A construção completa, com provas, será realizada na seção 3.3. Para mais detalhes acerca da construção usual, ver as referencias [6] e [7]. Primeiramente, considere f uma aplicação de classe C^1. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f, se Df_q for sobrejetora $\forall\, q \in f^{-1}(p)$, ou equivalentemente

$$Jf(q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(q) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(q) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(q) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(q) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(q) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(q) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall\, q \in f^{-1}(p).$$

Provemos que, se p é um valor regular de f, então o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito. De fato, suponha que $f^{-1}(p)$ é infinito, então existe $(x_n) \subset f^{-1}(p) \subset \Omega$. Como Ω é limitado, então (x_n) é limitada e pelo Teorema de Stone-Weierstrass, existe uma subsequência convergente (x_{n_k}) de (x_n), ou seja, $x_{n_k} \to x_0$, com $x_0 \in f^{-1}(p)$. Note que, na bola centrada em x_0 e raio r a equação $f(x) = p$, tem infinitas soluções. Além disso, como p é um valor regular de f, então pelo Teorema da Função Inversa, $f : B_r(x_0) \longrightarrow f(B_r(x_0))$ ($r > 0$ suficientemente pequeno) é um difeomorfismo, ou seja, a equação $f(x) = p$ tem uma única solução, isto contradiz o fato que $f(x) = p$ tem infinitas soluções na bola $B_r(x_0)$. Portanto, $f^{-1}(p)$ é finito.

Assim, para p valor regular de f, faz sentido definir o grau de Brouwer da seguinte maneira:

Definição 2.1.1 *Sejam $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$ um valor regular de f. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação f em relação a Ω no ponto p, como sendo o número inteiro*

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[Jf(x)], \tag{2.4}$$

onde, para $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sgn é a função sinal que é definida por

$$\operatorname{sgn}[b] = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b > 0 \\ -1 & \text{se} \quad b < 0. \end{cases}$$

É fácil ver que a definição do grau de f em (2.4), satisfaz (P-1)-(P-4). De fato:

- $I_{\mathbb{R}^n} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, então $JI_{\mathbb{R}^n}(x) = 1$, para todo $x \in I^{-1}_{\mathbb{R}^n}(x)$. Assim

$$\operatorname{sgn}[JI_{\mathbb{R}^n}(x)] = 1, \quad \forall\, x \in I^{-1}_{\mathbb{R}^n}(x) = \{x\}.$$

  Se $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\deg(I_{\mathbb{R}^n}, \Omega, x) = \sum_{x \in I^{-1}_{\mathbb{R}^n}(x)} \operatorname{sgn}[JI_{\mathbb{R}^n}(x)] = 1.$$

  Se $x \notin \Omega$, $deg(I_{\mathbb{R}^n}, \Omega, x) = 0$.

- Se não existe $z \in \Omega$, tal que $f(z) = p$, então $f^{-1}(p) = \emptyset$. Assim,

$$\sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[Jf(x)] = deg(f, \Omega, p) = 0$$

- $deg(f,\Omega,p) = \displaystyle\sum_{x\in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[Jf(x)]$, se $x \in f^{-1}(p)$, então $x \in \Omega$ é tal que

$$f(x) = p \Longrightarrow \underbrace{f(x) - p}_{g(x)} = 0.$$

Logo, $x \in g^{-1}(0)$, onde $g(x) = f(x) - p$, então

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - p = 0 &\Longrightarrow f(x) = p \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(p), \end{aligned}$$

isto é, $g^{-1}(0) = f^{-1}(p)$. Portanto,

$$\begin{aligned} deg(f,\Omega,p) &= \sum_{x\in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[Jf(x)] \\ &= \sum_{x\in g^{-1}(0)} \operatorname{sgn}[Jg(x)] \\ &= deg(g,\Omega,0) \\ &= deg(f-p,\Omega,0). \end{aligned}$$

- Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, então

$$deg(f,\Omega_1\cup\Omega_2,p) = deg(f,\Omega_1,p) + deg(f,\Omega_2,p).$$

Exemplo 2.1.1 *Calcular o grau de $f(x,y) = (e^{x+y}-1,\ e^{x-y}-1)$ em uma vizinhança da origem.*
Solução: Primeiro encontraremos os zeros de f. Assim,

$$\begin{aligned} &f(x,y) = (e^{x+y}-1,\ e^{x-y}-1) = (0,0) \\ &\Rightarrow e^{x+y} = 1 \quad e \quad e^{x-y} = 1 \\ &\Rightarrow x+y = 0 \ e \ x-y = 0 \\ &\Rightarrow x = y = 0. \end{aligned}$$

$p = (0,0)$ é um valor regular de f e o conjunto $f^{-1}(p)$ só tem a solução $(0,0)$. Agora vamos calcular $Jf(x,y)$. Note que

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

assim,

$$|Jf(x,y)| = -e^{x+y}e^{x-y} - e^{x+y}e^{x-y} = -2e^{x+y}, \quad \forall\, q \in f^{-1}(p),$$

então, $Jf(0,0) = -2$, ou seja, $deg(f,\Omega,p) = -1$. ■

Exemplo 2.1.2 *Calcular o grau da seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} f:\Omega\subset\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longrightarrow f(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2, y^2, -z^2) \end{aligned}$$

$p = (1,1,-1)$ é um valor regular de f.

O conjunto $f^{-1}(p) = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ *tem 8 soluções e são* $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ *e* $(-1,-1,-1)$. *Logo,*

$$|Jf(q)| = \begin{vmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & -2z \end{vmatrix} = -8xyz, \quad \forall\, q \in f^{-1}(p).$$

Daí,

$$deg(f, \Omega, p) = \sum_{(x,y,z)\in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[Jf(x,y,z)] = -1+1-1+1-1+1-1+1 = 0.$$

$p = (-1,0,0)$ *é valor regular de* f, *e* $f^{-1}(-1,0,0) = \emptyset$, *logo*

$$deg(f, \Omega, (-1,0,0)) = \sum_{(x,y,z)\in f^{-1}(-1,0,0)} \operatorname{sgn}[Jf(x,y,z)] = 0.$$

■

Afim de estender a definição acima a qualquer função f contínua e qualquer ponto p, vamos usar um procedimento de aproximação . Primeiro, para aproximar p por valores regulares p_k aplicamos o Teorema de Sard.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Sard) *Seja* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *e seja*

$$S_f = \{x \in \Omega : \ Jf(x) = 0\}.$$

Então $f(S_f)$ *é um conjunto de medida nula.*

Ver demonstração em [7] (Cap. 3, pag. 130). O conjunto S_f é chamado o conjunto dos pontos singulares (ou críticos) de f. Qualquer u tal que $f(u) = p$ é chamado de solução não singular da equação $f(u) = p$ se $u \notin S_f$. Pelo Teorema de Sard, $f(S_f)$ tem medida nula. Portanto, o complemento de $f(S_f)$ é denso em $\mathbb{R}^n$. Logo, existe uma sequência $\{p_k\} \nsubseteq f(S_f)$ tal que $p_k \longrightarrow p$. Quando p_k é suficientemente próximo de p, então p_k verifica (2.3) e assim faz sentido definir $deg(f, \Omega, p_k)$ dado em (2.4). Além disso, pode-se mostrar que para $k \gg 1$, $deg(f, \Omega, p_k)$ é constante e é independente da escolha da sequência $\{p_k\}$. Assim, pode-se definir o grau de $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ em qualquer $p \notin f(\partial\Omega)$ por

$$deg(f, \Omega, p) = \lim_{k\to\infty} deg(f, \Omega, p_k).$$

Similarmente, dado $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma sequência $f_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que f_k converge uniformemente a f em $\overline{\Omega}$. Se $k \gg 1$, então para qualquer (f_k, Ω, p) que satisfaça (2.1)-(2.3) pode-se considerar o grau $\deg(f_k, \Omega, p_k)$. Note que, $\lim deg(f_k, \Omega, p)$ não depende da escolha da sequência f_k e daí define-se o grau de f por $deg(f, \Omega, p) = \lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega, p)$.

Definição 2.1.2 *Seja* $f \in C(\overline{\Omega})$, *e* $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência tal que* $f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *converge uniformemente a* f *em* $\overline{\Omega}$. *Se define o grau de* f *em* Ω *com respeito a* p *da seguinte maneira*

$$deg(f, \Omega, p) = \lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega, p). \tag{2.5}$$

Uma Homotopia é uma aplicação $h = h(\lambda, x)$ tal que $h \in C\left([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$.

Definição 2.1.3 *Uma homotopia h é admissível (com respeito a Ω e p), se $h(\lambda, x) \neq p$, $\forall\,(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega$.*

(P-5) Invariância Homotópica: Se h é uma homotopia admissível, então

$$deg(h(\lambda, \cdot), \Omega, p) \equiv \text{constante}, \ \ \forall\,\lambda \in [0,1].$$

Em particular, se $f(x) = h(0,x)$ e $g(x) = h(1,x)$, então

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p).$$

Como consequência imediata da invariância homotópica, podemos deduzir o seguinte

Teorema 2.1.2 (Dependência da Fronteira)
Sejam $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = g(x)$, $\forall\,x \in \partial\Omega$. Então, $\forall\,p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$ tem-se que $\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p)$.

Demonstração: Considere a homotopia

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] \times \overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) & \longrightarrow & h(\lambda, x) = \lambda g(x) + (1-\lambda) f(x). \end{array}$$

Como $f(x) = g(x)$, $\forall\,x \in \partial\Omega$.

$$h(\lambda, x) = f(x) \neq p, \quad \forall\,x \in [0,1] \times \partial\Omega.$$

Assim, h é uma homotopia admissível e por (P-5) vem que

$$\begin{array}{rcl} \deg(f, \Omega, p) & = & \deg(h(\cdot, 0), \Omega, p) \\ & = & \deg(h(\cdot, 1), \Omega, p) \\ & = & \deg(g, \Omega, p). \end{array}$$

■

(P-6) Continuidade: Se $f_k \stackrel{unif}{\longrightarrow} f$ em $\overline{\Omega}$, então

$$\deg(f_k, \Omega, p) \longrightarrow \deg(f, \Omega, p).$$

Além disso, $\deg(f, \Omega, p)$ é contínuo com respeito a p.

(P-7) Propriedade de Excisão: Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um aberto tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, então

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_0, p).$$

Esta propriedade nos permite definir o índice de uma solução isolada de $f(x) = p$. Seja $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$ e suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq p$, $\forall\,x \in \overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$. Usando a propriedade (P-7), com $\Omega = B_r(x_0)$ e $\Omega_0 = B_\rho(x_0)$, $\rho \in (0, r)$ deduzimos que

$$\deg(f, B_\rho(x_0), p) = \deg(f, B_r(x_0), p).$$

Este valor comum é definido como sendo o índice de f com respeito a x_0 :

$$i(f,x_0) = \lim_{\rho\to 0} deg(f, B_\rho(x_0), p), \qquad p = f(x_0).$$

Além disso, se $f^{-1}(p) = \{x_1, \cdots, x_k\}$, $x_j \in \Omega$, então
(P-8)

$$\deg(f,\Omega,p) = \sum_{j=1}^{k} i(f,x_j).$$

Para ver isto, basta tomar $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_j) = \emptyset, \quad \forall\, i \neq j$. Seja

$$\Omega_0 = B_\rho(x_1) \cup \cdots \cup B_\rho(x_k)$$

Usando a propriedade de (P-7) e a propriedade de decomposição (P-4), obtemos

$$\begin{aligned}
\deg(f,\Omega,p) &= \deg(f,\Omega_0,p) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \deg(f, B_\rho(x_j), p) \\
&= \sum_{j=1}^{k} i(f,x_j),
\end{aligned}$$

o que prova (P-8).

Seja $f \in C^1$ e seja p valor regular de f (isto é, $|Jf(x)| \neq 0, \quad \forall\, x \in f^{-1}(p)$). Como dito anteriormente, se p é um valor regular de f, então o conjunto $f^{-1}(p)$ é discreto. Em particular, qualquer solução x_0 de $f(x) = p$ é isolada. Desta forma faz sentido considerar o índice $i(f,x_0)$.

Lema 2.1.1 *Suponhamos que $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e seja $x_0 \in \Omega$ tal que $p = f(x_0)$ é um valor regular de f. Então*

$$i(f,x_0) = (-1)^\beta, \tag{2.6}$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de $f'(x_0)$.

Demonstração: Seja $r > 0$ tal que x_0 é a única solução isolada de $f(x) = p$ na bola $B_r = B_r(x_0)$. Então

$$\begin{aligned}
& i(f,x_0) = deg(f, B_r, p) \\
\overset{(2.4)}{\Longrightarrow}\quad & i(f,x_0) = sgn\,[\, Jf_p(x_0)\,]\,.
\end{aligned}$$

Usando a forma normal de Jordan, sabemos que o determinante da Jacobiana $Jf(x_0)$ é dado por

$$Jf_p(x_0) = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n,$$

onde λ_j são autovalores de $f'(x_0)$, repetidos de acordo com sua multiplicidade algébrica. Agora observemos que:

- Cada λ_j é diferente de zero, pois x_0 é ponto regular.
- Se um autovalor é complexo, digamos igual a $a + ib$, então $a - ib$ também é um autovalor

de $f'(x_0)$, e o produto

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 > 0,$$

com isso é fácil ver que $\operatorname{sgn}[\,|Jf_p(x_0)|\,] = (-1)^\beta$. Portanto,

$$i(f, x_0) = (-1)^\beta$$

$\blacksquare$

Observação 2.1.1 *Na referência [1] foi mostrado que o grau topológico*

$$deg(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$$

é unicamente determinado pelas propriedades (P-1), (P-4) e (P-5).

2.2 Aplicação: Teorema do ponto fixo de Brouwer

Nesta seção vamos supor que o grau $\deg(f, \Omega, p)$ satisfaz as propriedades listadas anteriormente, e bem definido e mostraremos como isto pode ser usado para obter o clássico teorema do ponto fixo de Brouwer. Começamos com um resultado preliminar.
Seja $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ a bola unitária aberta em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.1 *A esfera unitária $\partial\overline{B}_1$ não é um "retrato" da bola unitária $\overline{B}_1$. Isto é, não existe uma aplicação contínua $f : \overline{B}_1 \longrightarrow \partial\overline{B}_1$ tal que $f(x) = x, \;\; \forall\, x \in \partial\overline{B}_1$.*

Demonstração: Suponhamos que existe $f : \overline{B}_1 \longrightarrow \partial\overline{B}_1$ tal que $f(x) = g(x), \; \forall\, x \in \partial\overline{B}_1$ com $g(x) = x$. Como $0 \notin f(\partial\overline{B}_1) = g(\partial\overline{B}_1)$, então pelo Teorema 2.1.2, temos

$$\Longrightarrow \deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0) = 1$$

Usando a propriedade da solução temos que $\exists\, x \in B_1$ tal que $f(x) = 0$, isto é uma contradição com a suposição de que $f(\overline{B}_1) \subseteq \partial\overline{B}_1$. $\blacksquare$

Observação 2.2.1 *De maneira mais geral, é possível ver que, se Ω é qualquer conjunto aberto limitado e convexo ou se Ω é um domínio limitado homeomorfo a um conjunto convexo, então não é possível "retratar" Ω sobre sua fronteira $\partial\Omega$.*

Teorema 2.2.2 (Teorema do ponto fixo de Brouwer) *Se $f : C \longrightarrow C$ é uma aplicação contínua sobre um conjunto fechado, convexo e limitado $C \subset \mathbb{R}^n$, então existe $z \in C$ tal que $f(z) = z$.*

Demonstração: Suponha que C o fecho da bola unitária B_1 em $\mathbb{R}^n$. Se $f(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{B_1}$, definimos $\widetilde{f} : \overline{B}_1 \longrightarrow \partial\overline{B}_1$ onde $\widetilde{f}(x)$ é a intersecção de $\partial\overline{B}_1$ com a semi-reta que passa por $f(x)$ e x. Note que, $\widetilde{f}(x)$ é contínua e tal que $\widetilde{f}(x) = x, \forall\, x \in \partial\overline{B}_1$, o que contradiz o Teorema 2.2.1. No caso em que C é qualquer conjunto convexo limitado e fechado segue similarmente da Observação 2.2.1. $\blacksquare$

Observação 2.2.2

(a) *De acordo com a Observação 2.2.1, pode-se estender o Teorema do ponto fixo de Brouwer 2.2.2, provando que se Ω é um domínio limitado homeomorfo a um conjunto convexo então qualquer aplicação contínua de $\overline{\Omega}$ em $\overline{\Omega}$ tem um ponto fixo $z \in \overline{\Omega}$.*

(*b*) *Outra prova do Teorema 2.2.2 é utilizando a invariância homotópica do grau, isto é, sejam* $C = \overline{B}_1(0)$, $f : \overline{B}_1(0) \longrightarrow \overline{B}_1(0)$. *Defina*

$$\begin{aligned} h : \overline{B}_1(0) \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longrightarrow h(x,t) = x - tf(x). \end{aligned}$$

Provaremos que h é uma homotopia admissível, ou seja, $h(x,t) \neq 0$, $\forall\, (x,t) \in \partial B_1(0) \times [0,1]$. *De fato, o caso* $t = 0$ *é imediato, enquanto o caso* $t = 1$ *segue da hipótese:* $f(x) \neq x$ *com* $x \in \partial B_1(0)$. *Além disso,* $0 \notin h(\partial B_1(0) \times [0,1])$, *pois*

$$\|h(x,t)\| = \|x - tf(x)\| \geq \|x\| - t\|f(x)\| \geq (1-t) > 0,$$

em $\partial B_1(0) \times (0,1)$. *Portanto,* $h(x,t) \neq 0$ *para todo* $(x,t) \in \partial B_1(0) \times [0,1]$, *então pela Propriedade (P-5) da invariância homotópica, tem-se*

$$deg(h(\cdot,1), B_1, 0) = deg(I, B_1, 0) = 1.$$

Logo pela Propriedade da Existência de Solução segue que existe $x \in B_1(0)$ *tal que* $h(x,1) = x - f(x) = 0$. *Portanto, existe* $x \in B_1(0)$ *tal que* $f(x) = x$.

2.3 Uma definição analítica do grau

A seguir vamos fazer uma construção do grau topológico e de suas propriedades. A definição que daremos abaixo não é a que foi esboçada na Seção 2.1.
Em vez disso, vamos seguir uma abordagem mais analítica devido a E. Heinz [13], que é um pouco mais simples do ponto de vista técnico.

2.3.1 Grau para aplicações C^2

Vamos começar com aplicações C^2. Sempre suponha que as condições (2.1)-(2.3) são satisfeitas. Seja $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e seja $Jf(x)$ a matriz jacobiana de f. Pela propriedade (2.3) (p é um ponto em $\mathbb{R}^n$ tal que $p \notin f(\partial\Omega)$), temos que

$$\min\{|f(x) - p| : \ x \in \partial\Omega\} > 0.$$

Então escolha $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha < \min_{x \in \partial\Omega} |f(x) - p|\,.$$

Considere a função $\varphi \in C([0,\infty))$ de valores reais definida em $[0,\infty)$ e tal que

i) $\operatorname{supp}(\varphi) \subset (0,\alpha)$.

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)dx = 1.$

Definição 2.3.1 *Para* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *defina*

$$\deg(f, \Omega, p) = \int_\Omega \varphi\left(|f(x) - p|\right) Jf(x) dx.$$

Observação 2.3.1 *Claramente, temos que*

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,0),$$

o que mostra a propriedade (P-3).

Vamos justificar a definição acima, ou seja, mostraremos que a escolha de α e φ satisfazendo (i) e (ii) não interfere na definição, a definição independe da escolha de α e φ que satisfaz (i) e (ii). Mais precisamente vamos mostrar que se $\alpha_1,\varphi_1,\alpha_2,\varphi_2$ satisfazem (i) e (ii) então

$$\int_\Omega \varphi_1\left(|f(x)-p|\right)Jf(x)dx=\int_\Omega \varphi_2\left(|f(x)-p|\right)Jf(x)dx. \tag{2.7}$$

Vamos tomar $p=0$ e $\widetilde{\varphi}=\varphi_1-\varphi_2$ e assim (2.7) torna-se

$$\int_\Omega \widetilde{\varphi}\left(|f(x)|\right)Jf(x)dx=0.$$

Por (ii), temos que

$$\int_0^\infty r^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(r)\,dr=0. \tag{2.8}$$

Além disso, como $\operatorname{supp}(\varphi_i)\subset(0,\alpha_i)$, para $i=1,2$, temos que $\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi})\subset(0,\alpha)$, $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Considere

$$\psi(r)=\left\{\begin{array}{ll} r^{-n}\displaystyle\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds, & r>0\\ \quad 0, & r=0\end{array}\right..$$

Como $\operatorname{supp}(\varphi)\subset(0,\alpha)$, por (2.8) para $r>\alpha$, vem que

$$\begin{aligned}\psi(r) &= r^{-n}\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds\\ &= r^{-n}\int_0^\infty s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds\\ &= 0.\end{aligned}$$

Desta forma, $\operatorname{supp}(\psi)\subset(0,\alpha)$. Além disso, $\psi\in C^1$. Veja agora que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtém-se

$$\begin{aligned}\psi'(r) &= -n\,r^{-n-1}\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds+r^{-n}\frac{d}{dr}\left(\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds\right)\\ &= -n\,r^{-n-1}\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds+r^{-n}r^{n-1}\widetilde{\varphi}(r)\\ &= -n\,r^{-n-1}\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds+r^{-1}\widetilde{\varphi}(r),\end{aligned}$$

ou seja,

$$r\psi'(r)=-n\,r^{-n}\int_0^r s^{n-1}\widetilde{\varphi}\,(s)\,ds+r^1r^{-1}\widetilde{\varphi}(r).$$

Logo, $r\psi'(r) = -n\psi(r) + \widetilde{\varphi}(r)$, e assim,

$$r\psi'(r) + n\psi(r) \; = \; \widetilde{\varphi}(r).$$

Seja A_{ij} o cofactor de $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ da matriz jacobiana Jf e considere o campo de vetores $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com componentes

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}(x)\psi\left(|f(x)|\right) f_j(x)$$

Tendo em conta a seguinte propriedade dos cofactores A_{ij}:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_i} = 0, \quad \forall\, j = 1, \cdots, n,$$

fazendo um cálculo direto segue que

$$\begin{aligned} div(V(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji}\psi(|f(x)|) f_j(x) + A_{ji}(x)\psi'(|f(x)|) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{f_j}{|f(x)|} f_j + A_{ji}(x)\psi(|f(x)|) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right] \\ &= Jf(x) \left[|f(x)| \psi'(|f(x)|) + n\psi(|f(x)|) \right] \\ &= \widetilde{\varphi}(|f(x)|) Jf(x). \end{aligned}$$

Integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_{\Omega} \widetilde{\varphi}(|f(x)|) Jf(x) dx = \int_{\partial\Omega} V(x) \cdot \nu d\sigma, \tag{2.9}$$

onde ν denota o campo normal unitário a $\partial\Omega$. Agora note que para $x \in \partial\Omega$ temos que

$$|f(x)| \geq \min\{|f(x)| : \, x \in \partial\Omega\} > \alpha,$$

e assim,

$$V(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.10}$$

Usando (2.10) em (2.9), tem-se

$$\int_{\Omega} \widetilde{\varphi}(|f(x)|) Jf(x) dx = 0,$$

o que prova que (2.7) é verdadeiro.

Exemplo 2.3.1 *Seja $f = A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ com A não singular. Então*

$$\deg(f, \Omega, p) \;\; = \;\; \int_{\Omega} \varphi(|Ax - p|) JA(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} \varphi(|Ax-p|) \cdot \det(A)dx \\ &= sgn[\det(A)] \int_{\Omega} \varphi(|Ax-p|)|\det(A)|dx \\ &= \int_{A(\Omega)} \varphi(|y-p|) sgn[\det(A)]dy. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Podemos tomar $\alpha < \min\limits_{\partial\Omega} |Ax-p|$, *tal que*

$$\begin{array}{lll} B_\alpha(p) \subset A(\Omega) & se & p \in A(\Omega) \\ B_\alpha(p) \cap A(\overline{\Omega}) = \emptyset & se & p \notin A(\Omega). \end{array}$$

Como o suporte de $\varphi(\cdot - p)$ *está contido na bola* $B_\alpha(p)$, *então temos que*

$$\deg(f, \Omega, p) = \begin{cases} sgn(\det(A)) & se \quad p \in A(\Omega) \\ 0 & se \quad p \notin A(\Omega) \end{cases},$$

pois o suporte de φ *esta fora de* $A(\Omega)$ *então* (2.11) *é* 0. *Em particular,*

$$\deg(I_{\mathbb{R}^n}, \Omega, p) = \begin{cases} 1 & se \quad p \in (\Omega) \\ 0 & se \quad p \notin (\Omega) \end{cases},$$

e segue a propriedade $(P-1)$. ∎

Para um segundo exemplo, vamos considerar o caso em que p é um valor regular de f.

Exemplo 2.3.2 *Seja* D *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, *considere* $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$ *e* $x_0 \in D$ *tal que* $f(x_0) = p$ *é um valor regular de* f, *então pelo Teorema da Função Inversa,* $f : B_\varepsilon(x_0) \longrightarrow U_\varepsilon$ *é um difeomorfismo, com* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno e* $U_\varepsilon = f(B_\varepsilon(x_0))$. *Vamos provar que* Jf *tem sinal constante em* $B_\varepsilon(x_0)$. *De fato, seja*

$$\begin{array}{rcl} g : B_\varepsilon(x_0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longrightarrow & g(q) = |Jf(q)|. \end{array}$$

Note que g *é uma função contínua. Suponha que, existem* $q_1, q_2 \in B_\varepsilon(x_0)$ *tal que* $g(q_1) < 0$ *e* $g(q_2) > 0$. *Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe* $\widetilde{q} \in B_\varepsilon(x_0)$ *tal que* $g(\widetilde{q}) = 0$, *ou seja,* $Jf(\widetilde{q}) = 0$, *isto é uma contradição pois* p *é valor regular de* f. *Portanto* Jf *tem sinal constante em* $B_\varepsilon(x_0)$. *Agora vamos calcular* $deg(f, B_\varepsilon(x_0), p)$.

$$\begin{aligned} deg(f, B_\varepsilon(x_0), p) &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(|f(x)-p|) Jf(x)dx \\ &= sgn[Jf(x_0)] \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(|f(x)-p|)|Jf(x)|dx \\ &= sgn[Jf(x_0)] \int_{U_\varepsilon} \varphi(|y-p|)dy. \end{aligned}$$

Na definição do grau podemos tomar α *tal que* $B_\alpha(p) \subset U_\varepsilon$. *Como* $\varphi(|y-p|) = 0$ *para* $|y-p| > \alpha$, *então*

$$\int_{U_\varepsilon} \varphi(|y-p|)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|y-p|)dy = 1.$$

Portanto,

$$\deg(f, B_\varepsilon(x_0), p) = sgn[Jf(x_0)].$$

■

2.3.2 Grau para aplicações contínuas

Agora vamos definir o grau para aplicações contínuas f satisfazendo (2.1)-(2.3) da Seção 2.1. Para isso precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.3.1 *Para $i = 1, 2$, seja $f_i \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que $|f_i(x) - p| > \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega$. Dado $\varepsilon \in \left(0, \frac{\alpha}{6}\right)$, suponhamos que $|f_2(x) - f_1(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}$. Então*

$$deg(f_1, \Omega, p) = deg(f_2, \Omega, p).$$

Demonstração: De acordo com a Observação 2.3.1 podemos tomar $p = 0$. Seja $X \in C^1(0, \infty)$ um função não decrescente tal que

$$X(r) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le r \le 2\varepsilon \\ 0 & \text{se} \quad r \ge 3\varepsilon \end{cases},$$

e defina $f_3 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ como

$$f_3(x) = (1 - X(|f_1(x)|))f_1(x) + X(|f_1(x)|)f_2(x).$$

Daí, vem que

$$f_3(x) = f_1(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} : \ |f_1(x)| > 3\varepsilon, \tag{2.12}$$
$$f_3(x) = f_2(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} : \ |f_1(x)| < 2\varepsilon, \tag{2.13}$$

Em particular, como $|f_1(x)| > \alpha$, para todo $x \in \partial\Omega$ e $\alpha > 6\varepsilon$, então $|f_3(x)| = |f_1(x)| > \alpha$ para todo $x \in \partial\Omega$. Além disso, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, temos que

$$\begin{aligned} f_3(x) - f_1(x) &= X(|f_1(x)|)(f_2(x) - f_1(x)), \\ f_3(x) - f_2(x) &= [1 - X(|f_1(x)|)]\,(f_1(x) - f_2(x)), \end{aligned}$$

e portanto, para $i = 1, 2$

$$|f_3(x) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.14}$$

Escolha duas função $\varphi_i \in C(0, \infty)$ com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &i) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i(|x|)dx = 1 \quad i = 1, 2, \\ &ii) \quad supp[\varphi_1] \subset (4\varepsilon, 5\varepsilon), \\ &ii) \quad supp[\varphi_2] \subset (0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Da definição do grau, podemos usar φ_1 e φ_2 para calcular o grau de f_i, $i = 1, 2$. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} deg(f_3,\Omega,0) &= \int_\Omega \varphi_1(|f_3(x)|)Jf_3(x)dx, \\ deg(f_1,\Omega,0) &= \int_\Omega \varphi_1(|f_1(x)|)Jf_1(x)dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, como $supp[\varphi_1] \subset (4\varepsilon, 5\varepsilon)$, temos que $\varphi_1(|f_3(x)|) \neq 0$, ou seja, $4\varepsilon < |f_3(x)| < 5\varepsilon$. De (2.14) temos $|f_3(x) - f_1(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então, disto e de $4\varepsilon < |f_3(x)| < 5\varepsilon$, vem que

$$\begin{aligned} & ||f_3(x)| - |f_1(x)|| \leq |f_3(x) - f_1(x)| < \varepsilon \\ \Rightarrow \;& -\varepsilon < |f_3(x)| - |f_1(x)| < \varepsilon \\ \Rightarrow \;& -|f_3(x)| - \varepsilon < -|f_1(x)| < \varepsilon - |f_3(x)| \\ \Rightarrow \;& |f_3(x)| - \varepsilon < |f_1(x)| < \varepsilon + |f_3(x)| \\ \Rightarrow \;& 4\varepsilon - \varepsilon < |f_3(x)| - \varepsilon < |f_1(x)| < \varepsilon + |f_3(x)| < \varepsilon + 5\varepsilon \\ \Rightarrow \;& 3\varepsilon < |f_1(x)| < 6\varepsilon. \end{aligned}$$

Então de (2.12), segue que $f_3(x) = f_1(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ tal que $4\varepsilon < |f_3(x)| < 5\varepsilon$. Logo,

$$\varphi_1(|f_3(x)|)Jf_3(x) = \varphi_1(|f_1(x)|)Jf_1(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.16}$$

Substituindo (2.16) em (2.15), tem-se

$$\begin{aligned} deg(f_3,\Omega,0) &= \int_\Omega \varphi_1(|f_3(x)|)Jf_3(x)dx \\ &= \int_\Omega \varphi_1(|f_1(x)|)Jf_1(x)dx \\ &= deg(f_1,\Omega,0). \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que

$$deg(f_3,\Omega,0) = deg(f_2,\Omega,0), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

o que conclui o Lema. ■

Estamos agora em condições de definir o grau de qualquer aplicação contínua

$$f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(x) \neq p, \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Pela densidade, existe uma sequência de funções $f_k \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ convergindo uniformemente para f em $\overline{\Omega}$. Como $f(x) \neq p$ para todo $x \in \partial\Omega$ e da convergência uniforme de $f_k \longrightarrow k$, vem que $f_k \neq p, \forall\, x \in \partial\Omega$ e k suficientemente grande, e assim temos bem posto o grau de f_k para todo $k \gg 1$, isto é, $deg(f_k,\Omega,p)$ está bem definido. Além disso, pelo Lema 2.3.1 temos que $deg(f_k,\Omega,p)$ é constante para $k \gg 1$. Desta forma podemos definir o grau de f com respeito a Ω e p, como

$$deg(f,\Omega,p) = \lim_{k\to\infty} deg(f_k,\Omega,p).$$

2.3.3 Propriedades do grau

A seguir mostraremos que as propriedades (P-1) - (P-7) são válidas. Já mostramos (P-1) e (P-3). De acordo com a definição e o Lema 2.3.1 é suficiente realizar as provas das propriedades com a suposição de que $f \in C^2$. Veja que, $p \notin f(\partial\Omega)$ então $p \notin f_k(\partial\Omega)$ para $k \gg 1$, como $q \notin f(\partial\Omega)$ para q suficientemente próximo de p, de modo que faz sentido considerar

$$deg(f_k, \Omega, p) \text{ e } deg(f, \Omega, q).$$

Prova de (P-2) [Propriedade da solução]: Se $f(x) \neq p, \ \ \forall \in \Omega$, então $f(x) \neq p$ em todo o conjunto compacto $\overline{\Omega}$. Assim,

$$\exists\, \delta > 0,\ \delta \leq \alpha \ \text{ tal que } \ |f(x) - p| > \delta, \ \ \forall \in \overline{\Omega}.$$

Escolha φ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)dx = 1$ e $supp(\varphi) \subset (0, \delta)$. Assim, $\varphi(|f(x) - p|) \equiv 0$ em Ω (uma vez que $|f(x) - p| > \delta$, para todo $x \in \overline{\Omega}$) e com isso vem que

$$deg(f, \Omega, p) = \int_{\Omega} \varphi(|f(x) - p|)Jf(x)dx = 0.$$

■

Prova de (P-4) [Aditividade]: Se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, então pela Definição 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi(|f(x) - p|)Jf(x)dx \\ &= \int_{\Omega_1} \varphi(|f(x) - p|)Jf(x)dx + \int_{\Omega_2} \varphi(|f(x) - p|)Jf(x)dx \\ &= deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p). \end{aligned}$$

■

Prova de (P-5) [Invariância Homotópica]: Para $\alpha \in [0, 1]$ fixado, dado $\varepsilon > 0$ pequeno, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\lambda \in [0, 1], \ |\lambda - \alpha| < \delta \Longrightarrow |h(x, \lambda) - h(x, \alpha)| < \varepsilon.$$

Usando o Lema 2.3.1, a aplicação $\lambda \longrightarrow deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, p)$ é localmente constante. Sendo $[0, 1]$ um conjunto compacto e conexo, segue que a função $\lambda \longrightarrow deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, p)$ é constante, isto é,

$$deg(h(\cdot, \lambda), \Omega, p) \equiv \text{ constante}, \ \ \forall\, \lambda \in [0, 1].$$

■

Prova de (P-6) [Continuidade]: A primeira parte segue diretamente do Lema 2.3.1. A continuidade segue de

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f - p, \Omega, 0).$$

■

Prova de (P-7) [Propriedade de Excisão]

Como $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_0$, $f(x) \neq p$ em todo o compacto $\overline{\Omega} \setminus \Omega_0$, e existe $\alpha_1 > 0$ tal que $|f(x) - p| > \alpha_1$, para todo $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_0$. Na definição do grau, vamos escolher φ de tal forma que $supp(\varphi) \subset (0, \alpha_1)$. Então $\varphi(|f(x)-p|) = 0$, para todo $\overline{\Omega} \setminus \Omega_0$ o que implica que

$$\int_{\Omega} \varphi(|f(x)-p|)Jf(x)dx = \int_{\Omega_0} \varphi(|f(x)-p|)Jf(x)dx.$$

Portanto,

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_0, p)$$

■

Vamos ressaltar que a definição de índice depende de (P-1)-(P-7) somente. Em particular, (P-8) vale. Argumentando da mesma forma como no Exemplo 2.3.2 prova-se o seguinte Corolário, que nada mais é a equivalência entre as definições do grau para valores regulares e aplicações contínuas de classe C^1 dado em (2.4).

Corolário 2.3.1 *Se p é um valor regular de $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, então*

$$deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} sgn[Jf(x)].$$

Finalizamos esta seção concluindo que $deg(f, \Omega, p)$ definido em 2.3.1 é de fato um inteiro. É suficiente considerar $f \in C^1$. Se p é um valor regular então o fato de $deg(f, \Omega, p)$ ser um número inteiro segue do Corolário anterior. Caso contrario, se p não for valor regular considere o conjunto

$$S_f = \{x \in \Omega : \; Jf(x) = 0\}.$$

Pelo Teorema de Sard 2.1.1, $f(S_f)$ tem medida nula, e assim, existe uma sequência $\{p_k\}$ de valores regulares tal que $p_k \longrightarrow p$ e $deg(f, \Omega, p_k)$ é um inteiro e portanto, pela continuidade do grau segue que $deg(f, \Omega, p)$ é também um inteiro.

2.4 O grau de Leray-Schauder

Em equações diferenciais os espaços de funções em que se trabalha são geralmente espaços de dimensão infinita. A partir daí surgiu a necessidade de generalizar o conceito do grau a espaços de dimensão infinita. Isto é conhecido como o grau de Leray-Schauder, que é definido para operadores da forma $I - f$, onde f é um operador compacto. A idéia é aproximar f por operadores de posto finito, o que nos permite encontrar um espaço de dimensão finita onde podemos aplicar o grau topológico de Brouwer.

2.4.1 Definindo o grau de Leray-Schauder

Seja D um aberto limitado do espaço de Banach X. Vamos trabalhar com perturbações compactas da identidade, ou seja, com operadores $S \in C(\overline{D}, X)$ tais que $S = I - T$, onde T é compacto.

Provemos que, se G é um subconjunto fechado de $\overline{D}$, então $S(G)$ é fechado em X. De fato, seja $G \subset \overline{D}$ fechado e $\{u_n\} \subset G$ tal que $S(u_n) \longrightarrow u_0$ em X. Nosso objetivo é mostrar que $u_0 \in S(G)$. Como T é um operador compacto, existe uma subsequência $\{u_{n_i}\}$ de $\{u_n\}$ e $v_0 \in X$ tal que $Tu_{n_i} \longrightarrow v_0$ em X. Sendo $S = I - T$, temos que

$$S(u_{n_i}) = I(u_{n_i}) - T(u_{n_i}),$$

ou seja, $u_{n_i} = S(u_{n_i}) + T(u_{n_i})$. Desde que,

$$Tu_{n_i} \longrightarrow v_0 \text{ e } S(u_n) \longrightarrow u_0,$$

tem-se, $u_{n_i} \longrightarrow u_0 + v_0$ em X. Agora, pela continuidade de S, obtém-se

$$S(u_{n_i}) \longrightarrow S(u_0 + v_0),$$

e pela unicidade dos limites, temos

$$S(u_0 + v_0) = u_0.$$

Como G é um conjunto fechado em X, $\{u_{n_i}\} \subset G$ e $u_{n_i} \longrightarrow u_0 + v_0$, então $u_0 + v_0 \in G$. Portanto, $u_0 \in S(G)$, ou seja, $S(G)$ é fechado, com G conjunto fechado. Em particular, $S(\partial D)$ é fechado, pois ∂D é fechado.

Seja $p \notin S(\partial D)$ e $S(\partial D)$ é fechado, então

$$r = dist(p, S(\partial D)) > 0. \tag{2.17}$$

Como T é compacto, existe uma sequência $T_k \in C(\overline{D}, X)$ tais que $T_k \longrightarrow T$ uniformemente em $\overline{D}$ e

$$T_k(\overline{D}) \subset E_k \subset X, \text{ com } dim(E_k) < \infty. \tag{2.18}$$

(Ver [5], Seção 6.1). Vamos definir o grau de $I - T$ como sendo o limite dos graus de $I - T_k$ os quais introduziremos agora. Primeiramente, vejamos alguns conceitos preliminares:

Considere uma aplicação $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $m \leq n$, onde $\phi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Identifique $\mathbb{R}^m$ como subespaço de $\mathbb{R}^n$ cujos pontos tem $n - m$ coordenadas nulas, ou seja,

$$\mathbb{R}^m = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

Então a função ϕ, pode ser considerada como uma aplicação com valores em $\mathbb{R}^n$, cujas $n-m$ últimas componentes são iguais a zero, isto é:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longrightarrow & \phi(x) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_m(x), 0, \cdots, 0) \end{array} \tag{2.19}$$

Sejam $g(x) = x - \phi(x)$ e $g_m \in C(\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, em que g_m denota a restrição de g em $\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$, ou seja,

$$g_m = g\Big|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}.$$

Mostremos que se $p \in \mathbb{R}^m \setminus g(\partial\Omega)$, então

$$deg\,(g, \Omega, p) = deg\,(g_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p)\,. \tag{2.20}$$

De fato, seja, $x \in \Omega$ tal que $g(x) = p$, então $x = \phi(x) + p$. Como ϕ tem posto finito em $\mathbb{R}^m$ e $p \in \mathbb{R}^m \setminus g(\partial\Omega)$, então $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$, ou seja,

$$g_m(x) = g(x) = p.$$

Com isto mostramos que $g^{-1}(p) \subset g_m^{-1}(p)$. Como a outra inclusão é trivial, vem que

$$g^{-1}(p) = g_m^{-1}(p). \tag{2.21}$$

Podemos supor que $\Omega \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset$. Caso contrario teríamos $g_m^{-1}(p) = \emptyset$ e assim por (2.21), $g^{-1}(p) = \emptyset$. Como antes, vamos tomar $\phi \in C^1$ definido como em (2.19), além disso p valor regular de g_m. Então de acordo com a definição (2.4), temos

$$deg\,(g, \Omega, p) = \sum_{x \in g^{-1}(p)} sgn\,[J_g(x)]\,,$$

e, por hipótese,

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \phi(x) \\ &= (\,\underbrace{x_1 - \phi_1(x)}_{G_1(x)}, \cdots, \underbrace{x_m - \phi_m(x)}_{G_m(x)}, x_{m+1}, \cdots, x_n\,) \\ &= (G_1(x), \cdots, G_m(x), x_{m+1}, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

ou seja,

$$Jg(x) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_m} & \frac{\partial G_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \frac{\partial G_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_m} & \frac{\partial G_m}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $sgn\,[J_g(x)] = sgn\,[J_{g_m}(x)]$ e

$$\begin{aligned} deg(g, \Omega, p) &= \sum_{x \in g^{-1}(p)} sgn\,[J_g(x)] \\ &\overset{2.21}{=} \sum_{x \in g_m^{-1}(p)} sgn\,[J_{g_m}(x)] \\ &= deg\,(g_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p)\,, \end{aligned}$$

o que prova (2.20) com p valor regular de g_m. No caso geral usamos o Teorema de Sard 2.1.1 e o argumento segue como no final da seção anterior. Portanto,

$$deg(g, \Omega, p) = deg\,(g_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p)\,.$$

■

A discusão anterior nos permite definir o grau, para aplicações g tais que $g(x) = x - \phi(x)$, onde $\phi(\overline{D})$ está contida em um subespaço de dimensão finita E de X. Seja $p \in X$, $p \notin g(\overline{D})$ e E_1 um subespaço de X contendo E e p. Considere, $g_1 = g\big|_{\overline{D} \cap E_1}$. Define-se o grau de g em D, com respeito a p, como

$$deg(g, D, p) = deg(g_1, D \cap E_1, p). \tag{2.22}$$

Mostraremos que (2.22) não depende de E_1. Seja E_2 outro subespaço de X tal que $E \subset E_2$ e $p \in E_2$, então $E \subset E_1 \cap E_2$ e $p \in E_1 \cap E_2$. Por (2.20), vem que

$$deg(\, g_i, D \cap E_i, p\,) = deg(\, g\big|_{\overline{D} \cap E_1 \cap E_2}, D \cap E_1 \cap E_2,\, p\,), \qquad i = 1, 2.$$

Isto prova que a definição (2.22), não depende da escolha dos subespaços E_i.

Agora voltemos à aplicação $S = I - T$, com T compacto. Seja $T_k \longrightarrow T$ satisfazendo (2.18) e $S_k = I - T_k$, onde k é tal que:

$$\sup_{x \in \overline{D}} \|T(x) - T_k(x)\| < \frac{r}{2}. \tag{2.23}$$

Logo, segue que $p \notin S_k(\overline{D})$, assim faz sentido considerar $deg(\, S_k, D, p)$, definido em (2.22).

Definição 2.4.1 *Seja $p \notin S(\partial D)$, onde $S = I - T$ com T compacto. Definimos*

$$deg(\, S, D, p) = deg(I - T_k, D, p),$$

para todo T_k satisfazendo (2.18) *e* (2.23).

Para justificar a definição acima, vamos mostrar que o grau independe da aproximação T_k. Para isto, seja T_i, como $i = 1, 2$ tal que (2.18)$-$(2.23) são válidas. Sejam E_i subespaços de dimensão finita tais que

$$T_i(\overline{D}) \subset E_i.$$

Se E é o subespaço gerado por E_1 e E_2 usamos a definição (2.22) e obtemos

$$deg(S_i, D, p) = deg(\, S_i\Big|_{\overline{D} \cap E}, D \cap E,\, p\,), \text{ com } i = 1, 2. \tag{2.24}$$

Considere a homotopia,

$$h(\lambda, \cdot) = \lambda S_1\Big|_{\overline{D} \cap E} + (1 - \lambda) S_2\Big|_{\overline{D} \cap E}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Suponhamos que h não é admissivel, então $h(\lambda, x) = p$, para algum $x \in \partial(D \cap E)$ e algum $\lambda \in [0, 1]$, daí,

$$\begin{aligned}
& \lambda S_1(x) + (1 + \lambda) S_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & \lambda(x - T_1(x)) + (1 + \lambda)(x - T_2(x)) = p \\
\Leftrightarrow\ & \lambda x - \lambda T_1(x) + x - T_2(x) - \lambda x + \lambda T_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & x - \lambda T_1(x) - (1 - \lambda) T_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & x - T(x) + T(x) - \lambda T_1(x) - (1 - \lambda) T_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & S(x) + \lambda(T(x) - T_1(x)) + (1 - \lambda)(T(x) - T_2(x)) = p \\
\Leftrightarrow\ & p - S(x) = \lambda(T(x) - T_1(x)) + (1 - \lambda)(T(x) - T_2(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \|p - S(x)\| = \|\lambda(T(x) - T_1(x)) + (1 - \lambda)(T(x) - T_2(x))\|.
\end{aligned}$$

Como $x \in \partial(D \cap E)$, então por (2.18) e pela condição (2.23), tem-se

$$r \leq \|p - S(x)\| \ \leq\ \|\lambda(T(x) - T_1(x))\| + \|(1 - \lambda)(T(x) - T_2(x))\|$$

$$\begin{aligned} &= \lambda\|(T(x)-T_1(x))\| + (1-\lambda)\|(T(x)-T_2(x))\| \\ &< \lambda\frac{r}{2} + (1-\lambda)\frac{r}{2} = r \ \text{(Absurdo).}\end{aligned}$$

Portanto, h é admissivel em $D \cap E$, então $p \notin h(\lambda, x)$ para $x \in \partial(D \cap E)$ e assim,

$$deg\,(\,S_1\Big|_{\overline{D}\cap E},\, D\cap E,\, p\,) = deg\,(\,S_2\Big|_{\overline{D}\cap E},\, D\cap E,\, p\,).$$

Esta condição e (2.23) prova que a Definição 2.4.1 está justificada. ■

O grau de Leray-Schauder satisfaz as mesmas propriedades (P-1)$\cdots$ (P-8) como o grau em dimensão finita (com Ω no lugar de D). Com respeito a propriedade (P-5) temos que lidar com homotopias $h(\lambda, x) \in C([0,1] \times \overline{D}, X)$ tais que para todo $\lambda \in [0,1]$, $h(\lambda, \cdot)$ é uma perturbação compacta da identidade.

É claro que também podemos estender a noção de índice de uma solução isolada x_0 de $S(x) = x - Tx = p$, por

$$i(S, x_0) = \lim_{r\to 0} deg\,(S, B_r(x_0), p), \quad p = S(x_0),$$

onde $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$.

Finalizaremos esta subseção, provando o análogo do Lema 2.1.1. Primeiramente é preciso ver alguns conceitos preliminares. Relembre que:

(a) $\mu \neq 0$ é um valor característico da aplicação linear $A \iff \mu^{-1}$ é un autovalor de A.

(b) 1 não é um valor característico de $T'(x_0) \Longrightarrow S'(x_0)$ é invertível.

(c) Nos referimos a estas soluções isoladas como soluções não singulares de $S = 0$.

(d) Em particular, o teorema da aplicação inversa local é válido, então x_0 é uma solução isolada de $x - T(x) = p$.

Lema 2.4.1 *Seja $T \in C(X,X)$ um operador compacto e diferenciável em x_0. Então $T'(x_0)$ é um operador linear compacto, por isso existe somente um número finito de valores característicos de $T'(x_0)$ contidos em $(0,1)$ e cada um tem multiplicidade finita.*

Demonstração: Seja $\{x_n\} \subset X$ uma sequência limitada, então existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam, $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq M$, então

$$\begin{aligned} \|x_0 + \frac{x_n}{k}\| &\leq \|x_0\| + \frac{\|x_n\|}{k} \\ &\leq \|x_0\| + \frac{M}{k} \\ &\leq \|x_0\| + 1 = C, \ \forall n,\end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante, ou seja, $\{x_0 + \dfrac{x_n}{k}\}$ é uma sequência limitada. Como T é compacto, então $T(x_0 + \frac{x_n}{k})$ possui uma subsequência convergente. Em particular, chamemos a subsequência por $\{T(x_0 + \frac{x_n}{k})\}$ e como é convergente, então é uma subsequência de Cauchy.

Provaremos que $\{T'(x_0)x_n)\} \subset X$ é uma sequência de Cauchy. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Como T é diferenciável em $x_0 \in X$, então existe $T'(x_0) \in \mathscr{L}(X, X)$ tal que

$$T(x_0 + h) = T(x_0) + T'(x_0)h + r(h),$$

onde $\dfrac{r(h)}{\|h\|} \to 0$, quando $\|h\| \to 0$, isto é, para $\dfrac{\varepsilon}{2M} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|h\| < \delta$, então

$$\left\| \frac{r(h)}{\|h\|} \right\| < \frac{\varepsilon}{2M} \Longrightarrow \|r(h)\| < \frac{\varepsilon}{2M}\|h\| = \varepsilon_1,$$

ou seja, dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|h\| < \delta$, então $\|r(h)\| < \varepsilon_1$. Note que, se $\|h\| < \delta$, implica que

$$\|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h\| = \|r(h)\| < \varepsilon_1.$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} T'(x_0)x_n - T'(x_0)x_m &= k\left[T'(x_0)\frac{x_n}{k} - T'(x_0)\frac{x_m}{k}\right] \\ &= k\left[T(x_0 + \frac{x_n}{k}) - T(x_0) - r\left(\frac{x_n}{k}\right) - \left(T(x_0 - \frac{x_m}{k}) - T(x_0) - r\left(\frac{x_m}{k}\right)\right)\right] \\ &= k\left[r\left(\frac{x_n}{k}\right) - r\left(\frac{x_m}{k}\right) + T(x_0 + \frac{x_n}{k}) - T(x_0 - \frac{x_m}{k})\right]. \end{aligned}$$

Tome $\widehat{k} = \max\{k, \frac{M}{\delta}\}$, então

$$\begin{aligned} \|T'(x_0)x_n - T'(x_0)x_m\| &= \widehat{k}\left\|r\left(\frac{x_n}{\widehat{k}}\right) - r\left(\frac{x_m}{\widehat{k}}\right) + T(x_0 + \frac{x_n}{\widehat{k}}) - T(x_0 - \frac{x_m}{\widehat{k}})\right\| \\ &\leq \widehat{k}\left\|r\left(\frac{x_n}{\widehat{k}}\right) - r\left(\frac{x_m}{\widehat{k}}\right)\right\| + \widehat{k}\left\|T(x_0 + \frac{x_n}{\widehat{k}}) - T(x_0 - \frac{x_m}{\widehat{k}})\right\| \\ &\leq \widehat{k}\frac{\varepsilon}{2M}\frac{x_n}{\widehat{k}} - \widehat{k}\frac{\varepsilon}{2M}\frac{x_m}{\widehat{k}} + \widehat{k}\left\|T(x_0 + \frac{x_n}{\widehat{k}}) - T(x_0 - \frac{x_m}{\widehat{k}})\right\| \\ &\leq \varepsilon + \widehat{k}\left\|T(x_0 + \frac{x_n}{\widehat{k}}) - T(x_0 - \frac{x_m}{\widehat{k}})\right\|. \end{aligned}$$

Como $\{T(x_0 + \frac{x_n}{k})\}$ é de Cauchy, então $\{T'(x_0)x_n\}$ é uma sequência de Cauchy e já que X é um espaço de completo, então $\{T'(x_0)x_n\}$ é uma sequência convergente. Portanto, $T'(x_0)$ é um operador linear e compacto. ■

Lema 2.4.2 *Seja $T \in C^1(\overline{D}, X)$ operador compacto e suponha que 1 não é um valor característico de $T'(x_0)$. Sejam $S(x) = x - T(x)$ e, $x_0 \in X$, tal que $S(x_0) = p$. Então temos que,*

$$i(S, x_0) = deg\,(S'(x_0), B_r(x_0), p), \quad r \ll 1.$$

Demonstração: Para simplificar a notação, tome

$$x_0 = 0 \quad \text{e} \quad p = 0.$$

Como $S(x) = x - T(x)$, então $S'(0) = I - T'(0)$, daí temos que

$$S(x) = S'(0)[x] + R(x),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} R(x) &= S(x) - S'(0)[x] \\ &= x - T(x) - S'(0)[x] \\ &= x - T(x) - (I - T'(0))[x] \\ &= T'(0)[x] - T(x). \end{aligned}$$

onde $R(x) = o(\|x\|)$, com $\|x\| \to 0$. Considere a homotopia

$$h(\lambda, x) = x - T'(0)[x] + \lambda R(x).$$

Do Lema 2.4.1, segue que $h(\lambda, \cdot)$ é uma perturbação compacta da identidade. Vamos verificar que existe $r > 0$ suficientemente pequeno tal que h é admissivel em $D = B_r(0)$. Caso contrário, existiria $x_i \to 0$ e $\lambda_i \in [0, 1]$ tais que $h(x_i, \lambda_i) = 0$ ou seja,

$$x_i - T'(0)[x_i] + \lambda_i R(x_i) = 0.$$

Tome $z_i = \|x_i\|^{-1} x_i$, que satisfaz

$$z_i = T'(0)[z_i] - \lambda \frac{R(x_i)}{\|x_i\|}.$$

Sem nova reformulação para os índices, podemos assumir que, $z_i \longrightarrow z^*$ fracamente em X (X espaço reflexivo) e $\lambda_i \longrightarrow \lambda^* \in [0, 1]$. Como $R(x) = o(\|x\|)$ e usando o fato que $T'(0)$ e R são operadores compactos, vem que

$$z_i \longrightarrow z^* \text{ fortemente,}$$

e assim, $\|z^*\| = 1$, com $z^* = T'(0)[z^*]$. Isto contradiz a hipótese de que $\mu = 1$ não é um valor característico de $T'(0)$. Pela propriedade de invariância homotópica, obtemos que

$$\begin{aligned} deg(S, D, 0) &= deg\,(h(1, \cdot), D, 0) \\ &= deg\,(h(0, \cdot), D, 0) \\ &= deg\,(S'(0), D, 0). \end{aligned}$$

■

Lema 2.4.3 *Seja L um operador compacto em X e suponha que 1 não é um valor característico de L. Então*

$$deg\,(I - L, B_r(0), 0) = (-1)^{\beta}, \quad r > 0,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de L contidos em $(0, 1)$

Demonstração: Para cada valor característico μ_i de L, considere

$$N_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} N[(I - \mu_i L)^m].$$

Denote por $q_i = dim[N_i]$ a multiplicidade algébrica de μ_i, onde μ_i para todo $i = 1, \cdots, k$, são os valores característicos de L contidos em $(0,1)$. Sendo

$$N = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i,$$

temos que $dim[N] = q_1 + q_2 + \cdots + q_k = \beta$. (Se não existir valor característico em $(0,1)$ então $N = \{0\}$ e portanto, $\beta = 0$). Sejam W tal que $X = N \oplus W$ e P, Q projeções em N e W, respectivamente. Consideremos agora a homotopia

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] \times \overline{X} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) & \longrightarrow & h(\lambda, x) = x - L[Px] - \lambda L[Qx]. \end{array}$$

Para cada λ temos que h é uma perturbação compacta da identidade pois como P e Q são funções contínuas, então LP é compacto e λLQ é compacto e, assim, $h = I - T$ com $T = LP + \lambda LQ$ um operador compacto. Suponhamos que, existem $r > 0$ e (λ, x) tais que $h(\lambda, x) = 0$, com $\lambda \in [0,1]$ e $\|x\| = r$, isto é,

$$x - L[Px] + \lambda L[Qx] = 0, \quad \lambda \in [0,1] \quad \|x\| = r. \tag{2.25}$$

Pela definição de X e P, Q, temos que $Px - L[Px] = \lambda L[Qx] - Qx$. Como

$$\left\{ \begin{array}{c} Px - L[Px] \in N \\ \lambda L[Qx] - Qx \in W \end{array} \right.$$

e $N \cap W = \{0\}$, tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{c} Px = L[Px] \\ Qx = \lambda L[Qx] \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Como 1 não é valor característico de L, e de $Px = L[Px]$, vem que $Px = 0$. Então se $x = Qx$ da segunda equação de (2.26) obtemos que $x = \lambda Lx$, e pela equação (2.25) $\|x\| = r$ com $r > 0$, então λ não pode ser 0 nem 1, portanto $\lambda \in (0,1)$. Mas ainda, λ deve coincidir com um dos $\mu_i \in (0,1)$ e, assim, $x \in N$, o que contradiz o fato que $x = Qx \in W$. Portanto, $h(\lambda, x) \neq 0$, isto é, h é admissível. Usando a invariância homotópica, vem que

$$deg(I - L, B_r(0), 0) = deg(I - LP, B_r(0), 0).$$

Este último é uma perturbação da identidade de dimensão finita, portanto do Lemma 2.1.1, deduzimos que

$$i(h, 0) = deg(I - LP, B_r(0), 0) = (-1)^{\beta}.$$

■

Agora estamos prontos para provar o seguinte teorema.

Teorema 2.4.1 *Seja $T \in C^1(\overline{D}, X)$ um operador compacto e tal que 1 não seja um valor característico de $T'(x_0)$, para algum $x_0 \in D$. Então sendo*

$$S(x) = x - T(x) \quad e \quad S(x_0) = p,$$

temos que x_0 é uma solução isolada de $S(x) = p$ e vale

$$i(S, x_0) = (-1)^{\beta},$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os valores característicos de $T'(x_0)$ contidos em $(0, 1)$.

Demonstração: A demonstração segue de maneira direta dos Lemas (2.4.2) e (2.4.3). ■

2.5 O teorema do ponto fixo de Schauder

Antes de ver aplicações em equações diferenciais, vamos mostrar como o grau nos permite obter um resultado clássico sobre a existência de pontos fixos de uma aplicação compacta.

Teorema 2.5.1 *Seja $D \subset X$ um subconjunto aberto, limitado e convexo do espaço de Banach X tal que $0 \in D$, e seja $T \in C(\overline{D}, X)$ um operador compacto tal que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Então T tem um ponto fixo em $\overline{D}$, isto é, existe*

$$x \in \overline{D} \ \text{ tal que } \ T(x) = x.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$T(x) \neq x, \quad \forall\, x \in \partial D. \tag{2.27}$$

Caso contrário, não teríamos o que fazer. Assim, podemos definir o grau de $deg(I - T, D, 0)$ e portanto, o teorema ficará demonstrado se conseguimos provar que $deg(I - T, D, 0) \neq 0$. Defina

$$h(\lambda, x) = x - \lambda T(x), \ \ \lambda \in [0, 1],\, x \in \overline{D}.$$

Para cada $\lambda \in [0, 1]$, $x \longrightarrow h(\lambda, x)$ é uma perturbação compacta da identidade em X. Afirmação:

$$h(\lambda, x) \neq 0, \quad \forall\, (\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial D.$$

De fato: Suponhamos por absurdo que, existem $x^* \in \partial D$ e $\lambda^* \in [0, 1]$ tais que $h(\lambda^*, x^*) = 0$, assim $x^* = \lambda^* T(x^*)$. De (2.27) segue que $\lambda^* < 1$. Como $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$, temos que $T(x^*) \in \overline{D}$, então $\lambda^* < 1$ e da convexidade de D vem que $\lambda^* T(x^*) \in D$ o que contradiz o fato que $\lambda^* T(x^*) = x^* \in \partial D$. Portanto, $h(\lambda, x) \neq 0$, $\forall\, (\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial D$. Isto é, h é uma homotopia admissível. Pela propriedade da invariância homotópica do grau, tem-se

$$deg(I - T, D, 0) = deg(I, D, 0) = 1,$$

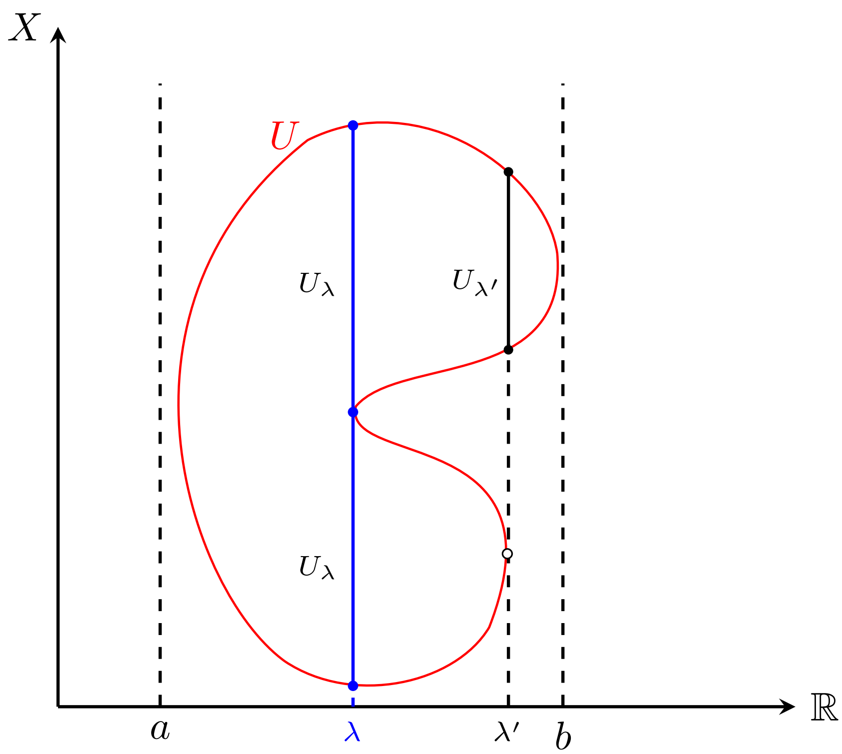
pois $0 \in D$. Usando a Propriedade da Existência da Solução, temos que existe $x \in D$ tal que $x - T(x) = 0$. ■

2.6 Propriedade da invariância homotópica generalizada

O propósito desta seção é provar uma versão mais geral da Propriedade (P-5) da invariância homotópica, o qual será muito útil no capitulo seguinte. Seja X um espaço de Banach e um subconjunto $U \subset [a, b] \times X$ aberto limitado. Defina

$$U_\lambda = \{x \in X : \ (\lambda, x) \in U\},$$

onde a fronteira de U_λ será denotada por ∂U_λ. Observe que, em geral temos $\partial U_\lambda \subset (\partial U)_\lambda$. Considere, $h(\lambda, x) = x - K(\lambda, x)$ tal que $K(\lambda, \cdot)$ é compacto e $0 \notin h(\partial U)$. A aplicação h é também chamada uma homotopia admissível sobre U, se h é uma homotopia admissível para todo $\lambda \in [a, b]$ e para todo $x \in \partial U_\lambda$, ou seja, $h_\lambda(x) := h(\lambda, x) \neq 0$ para todo $\lambda \in [a, b]$ e para todo $x \in \partial U_\lambda$ e, assim, faz sentido avaliar $deg(h_\lambda, U_\lambda, 0)$.



Teorema 2.6.1 *Se h é uma homotopia admissível sobre $U \subset [a, b] \times X$, então*

$$deg(h_\lambda, U_\lambda, 0) \equiv constante, \quad \forall\, \lambda \in [a, b].$$

Demonstração: Para $\lambda \in (a, b)$ fixo, defina

$$H_\lambda = \{x \in U_\lambda : \; h(\lambda, x) = 0\}.$$

Vamos provar que H_λ é um conjunto compacto. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de H_λ, então $x_n \in U$ tal que $h(\lambda, x_n) = 0, \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja não limitada, então para todo $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| > M$. Como $h(\lambda, x_n) = x_n - K(\lambda, x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí

$$\begin{aligned} & x_n = K(\lambda, x_n) \\ \Longrightarrow \quad & \frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{K(\lambda, x_n)}{\|x_n\|} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{x_n}{\|x_n\|} \longrightarrow \overline{x}, \text{ ou seja, } \; \|\overline{x}\| = 1, \; (\text{pois } K \text{ é compacto}). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\|x_n\| \to \infty$, então

$$\frac{K(\lambda, x_n)}{\|x_n\|} \to 0.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{K(\lambda, x_n)}{\|x_n\|} = 0.$$

Isto contradiz o fato que $\|\overline{x}\| = 1$. Portanto, (x_n) é limitada. Agora, como (x_n) é limitada e $K(\lambda, x_n)$ é compacto, então $K(\lambda, x_n)$ possui uma subseqüência convergente, isto é,

$$x_{n_j} = K(\lambda, x_{n_j}) \longrightarrow x_0$$

Além disso, $x_0 = K(\lambda, x_0)$ implica que $h(\lambda, x_0) = x_0 - K(\lambda, x_0) = 0$, então $x_0 \in H_\lambda$. Portanto, H_λ é compacto. Também pode-se provar que $H_\lambda \cap \partial(U_\lambda) = \emptyset$. Assim, existe uma vizinhança aberta $\mathscr{O}_\lambda$ de H_λ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \times \mathscr{O}_\lambda \subset U.$$

Mostremos que, se ε for suficientemente pequeno,

$$\{(l, x) :\ h(l, x) = 0,\ l \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]\} \subset [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \times \mathscr{O}_\lambda. \tag{2.28}$$

Caso contrario existem $\varepsilon_i \downarrow 0$, $l_i \in [a, b]$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$|l_i - \lambda| \leq \varepsilon_i,\ \ h(l_i, x_i) = 0,\ \ (l_i, x_i) \notin [\lambda - \varepsilon_i, \lambda + \varepsilon_i] \times \mathscr{O}_\lambda.$$

Pela compacidade, também podemos supor que a subsequência $(l_i, x_i) \longrightarrow (\lambda, x^*)$. Por continuidade

$$h(\lambda, x^*) = \lim_{i\to\infty} h(l_i, x_i) = 0.$$

Dai, $x^* \in H_\lambda$ e como $H_\lambda \subset \mathscr{O}_\lambda$, então $x^* \in \mathscr{O}_\lambda$. Por outro lado tem-se que $x^* \notin \mathscr{O}_\lambda$, o que é uma contradição. Então a equação (2.28) mostra que h é uma homotopia admissível sobre $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \times \mathscr{O}_\lambda$. Pela propriedade (P-5) da invariância homotópica, deduzimos que

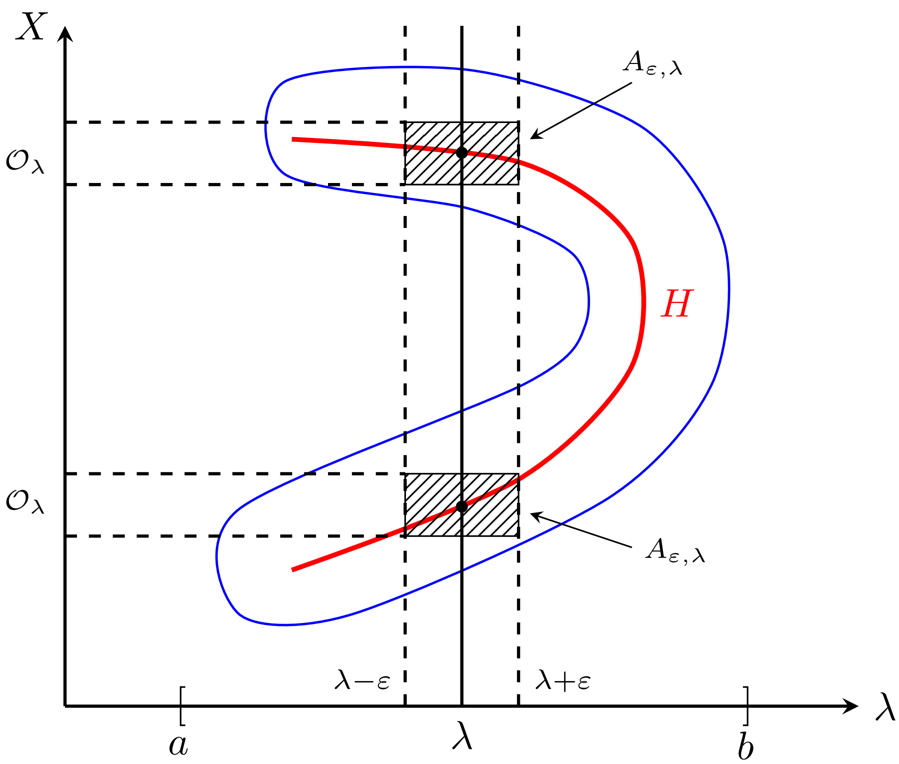
$$deg(h_l, \mathscr{O}_\lambda, 0) = \text{constante}, \quad \forall\, l \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon].$$

Como $H_l \subset \mathscr{O}_\lambda$ e $U_l \subset H_l$, então $U_l \subset \mathscr{O}_\lambda$, e pela propriedade de excisão (P-7), tem-se

$$deg(h_l, U_l, 0) = deg(h_l, \mathscr{O}_\lambda, 0), \quad \forall\, l \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon].$$

Com pequenas mudanças podemos lidar com os casos $\lambda = a$ e $\lambda = b$. Assim $deg(h_\lambda, U_\lambda, 0)$ é localmente constante sobre $[a, b]$. Já que o grau é um inteiro, segue que

$$deg(h_\lambda, U_\lambda, 0) = \text{constante}, \quad \forall\, \lambda \in [a, b].$$



$$H = \{(\lambda, x) \in U : h_\lambda(x) = 0\}\,;\ A_{\varepsilon,\lambda} = [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon] \times \mathscr{O}_\lambda.$$

■

2.7 Algumas aplicações do grau de Leray-Schauder para equações elípticas

A primeira aplicação que discutiremos nesta seção do grau de Leray-Schauder é o problema elíptico não linear com valores na fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.29}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$. A estratégia será a seguinte:

Escolher um espaço de Banach e converter o problema com valores na fronteira em uma equação funcional como

$$u = T(u), \quad u \in X, \text{ onde } T \text{ é compacto.}$$

Se $u \in H_0^1(\Omega)$, satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

então u é uma solução fraca de (2.29). Dada $f \in L^2(\Omega)$, considere

$$\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longrightarrow \varphi(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Como $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^*$, então pelo Teorema de Representação de Riesz existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\langle u, v\rangle = \varphi(v)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, ou seja

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, para todo $f \in L^2(\Omega)$, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco. Isso define o operador

$$\begin{aligned} K = (-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ f &\longrightarrow u = (-\Delta)^{-1} f, \end{aligned} \tag{2.30}$$

linear e contínuo. Ainda pelo teorema de Representação de Riesz tem-se

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|\varphi\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} \\ &= \sup_{v \in H_0^1, \|v\| \le 1} \left| \int_\Omega f v \right| \\ &\le \sup_{v \in H_0^1, \|v\| \le 1} \int_\Omega |fv| \\ &\le \sup_{v \in H_0^1, \|v\| \le 1} \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \right)^{1/2} \\ &= C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{C=cte.} \end{aligned}$$

Considerando

$$K : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

temos que $K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é compacto (pois K é continua e i é compacto), então da equação (2.29) temos que $u = (-\Delta)^{-1}(f(x,u)) = K(f(x,u))$, isto é,

$$u = Tu, \quad \text{com } T \text{ operador compacto.}$$

Uma abordagem possível é usar a invariância homotópica do grau para provar que $u = T(u)$ tem uma solução. Geralmente, toma-se a homotopia

$$\begin{aligned} h : \lambda \times X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) &\longrightarrow h(\lambda, x) = u - \lambda T(u), \end{aligned}$$

e prova-se que existe $R > 0$ tal que $u \neq \lambda T(u)$, $\forall\, (\lambda, u) \in [0,1] \times X$ com $\|u\| = R$. A estratégia é considerar:

$$X = L^2(\Omega)$$

$$\begin{aligned} K &= \text{inversa de } -\Delta \text{ sobre } H_0^1(\Omega) \\ K &: X \longrightarrow X \text{ compacto.} \end{aligned}$$

Observação: O operador da Laplace $-\Delta$ pode ser substituído por um operador uniformemente elíptico de segunda ordem tal que

$$-Lu = -\sum a(x)_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b(x)_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

com $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \leq 0$, em $\overline{\Omega}$ e

$$\sum a(x)_{ij}\xi_i\xi_j \geq k\,|\xi|^2\,, \;\; \forall\, x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ para algum } k > 0.$$

Se L não é variacional, então é conveniente trabalhar em espaços de Hölder $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Os argumentos usados anteriormente precisam de mudanças pequenas e fazem uso de estimativas de Schauder (ver Teorema 1.5.2 item (ii) e observação 1.5.3).

2.7.1 Problemas sublineares

Teorema 2.7.1 *Suponhamos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Hölder contínua e satisfaz*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = 0 \tag{2.31}$$

uniformemente com respeito a $x \in \Omega$. Então (2.29) tem uma solução(clássica).

Demonstração: De (2.31), tem-se que para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C_\varepsilon + \varepsilon|s|. \tag{2.32}$$

Então, pelo Teorema 1.4.1, f induz um operador de Nemitski sobre sobre $X = L^2(\Omega)$ que será denotado por f. Sendo $T(u) = Kf(u)$, $T \in C(X,X)$ é compacto e (2.29) pode ser escrito como $u = T(u)$, $u \in X$. Provaremos que existe $R > 0$ tal que

$$h(t,u) = u - tT(u)$$

é uma homotopia admissível em $B_R = \{u \in X \;:\; \|u\| < R\}$. Caso contrário, existe $u_j \in X$, com $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty$ e $t_j \in [0,1]$ tais que $u_j = t_jT(u_j)$. Isto é equivalente a

$$-\Delta u_j = t_j f(x,u_j), \quad\; u_j \in H_0^1(\Omega).$$

Considere u_j como função teste, usando (2.32) e o fato que $t_j \leq 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx &\leq t_j \int_\Omega |f(x,u_j)u_j| dx \\ &\leq C_\varepsilon \int_\Omega |u_j| dx + \varepsilon \int_\Omega |u_j|^2 dx, \end{aligned}$$

da Desigualdade de Hölder e Poincaré 1.2.1, temos

$$\lambda_1 \|u_j\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^2} + \varepsilon \|u_j\|_{L^2}^2. \tag{2.33}$$

Se tomamos ε tal que $\varepsilon < \lambda_1$, então em (2.33), tem-se

$$\lambda_1 \|u_j\|_{L^2}^2 < C_\varepsilon \|u\|_{L^2} + \lambda_1 \|u_j\|_{L^2}^2,$$

ou seja, $\|u_j\|_{L^2} \leq C$ para algum $C > 0$, (isto é uma contradição). Assim a homotopia

$$h(t,u) = u - tT(u)$$

é admissível sobre alguma bola B_R. Usando a Propriedade (P-5) da invariância homotópica, tem-se

$$deg(I - T, B_R, 0) = deg(I, B_R, 0) = 1,$$

logo, pela Propriedade da Solução (P-2), existe $u \in B_R$ tal que $u = T(u)$, dando origem a uma solução de (2.29). ■

Observação 2.7.1 *O mesmo resultado de existência vale quando a equação em* (2.29) *é substituída por*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \beta u + f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.34}$$

onde $\beta < \lambda_1$, o primeiro autovalor de $-\Delta$ sobre Ω com condições na fronteira de Dirichlet igual a zero. Notemos que o operador linear elíptico $-\Delta - \beta$ é invertível sobre $H_0^1(\Omega)$, com inversa K_β o qual é compacto em X. Repetimos o procedimento da prova com K substituindo por K_β.

Capítulo

3

Teoremas de Bifurcação

Neste capítulo apresentamos dois resultados que nos permitem relacionar o conceito de bifurcação com a multiplicidade algébrica de um autovalor de um operador compacto. Na Seção 3.3 estudamos um exemplo e duas aplicações do Teorema de Rabinowitz 3.2.1, a primeira aplicação é um problema não linear de Sturm-Liouville para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, a segunda aplicação é um problema de autovalores para uma equação diferencial parcial quase-linear. As principais referencias são [7], [15], [16] e [18].

3.1 Teorema de bifurcação de Krasnoselskii

Nesta seção vamos provar um notável resultado de bifurcação devido a M.A Krasnoselski.

Seja $X = (X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Defina

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, x) &\longrightarrow F(\lambda, x) = Lx - \lambda x + N(\lambda, x), \end{aligned}$$

onde L é um operador linear e compacto, $\|N(\lambda, x)\| = o(\|x\|)$ quando $x \to 0$ uniformemente sobre intervalos limitados de λ.

Dizemos que, $\lambda_0 \neq 0$ é um autovalor com multiplicidade algébrica β, se

$$\beta = \dim \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker[(L - \lambda_0 I)^k].$$

Pela Proposição 1.8.1 temos que se $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação então $\lambda_0 \in \sigma(L)$ (isto é, λ_0 pertence ao espectro de L) o que nos dá uma condição necessária para bifurcação. O seguinte teorema determina uma condição suficiente para que um ponto $(\lambda_0, 0)$ seja um ponto de bifurcação da equação $F(\lambda, x) = 0$.

Teorema 3.1.1 (Krasnoselkii) *Suponha que L é um operador linear, compacto sobre X e que $\lambda_0 \neq 0$ é um autovalor de L com multiplicidade algébrica ímpar. Se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda, \cdot)$ é compacto, N é contínua em x e λ, e satisfaz*

$$\|N(\lambda, x)\| = o(\|x\|),$$

uniformemente em um intervalo limitado de λ, então $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação da equação $F(\lambda, x) = 0$.

Demonstração: Sejam,

$$S = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X : \ F(\lambda, x) = 0\} \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \quad \text{e}$$

$$\mathscr{S} = \overline{S}.$$

Suponha que $(\lambda_0, 0)$ não é um ponto de bifurcação, então existe um intervalo $[\lambda_-, \lambda_+]$ que não inclui o 0 e satisfaz

$$\begin{array}{ll} (a) & \sigma(L) \cap [\lambda_-, \lambda_+] = \{\lambda_0\}, \\ (b) & \exists\, r > 0 \text{ tal que } \big([\lambda_-, \lambda_+] \times \overline{B}_r(0) \big) \cap \mathscr{S} = \emptyset, \end{array}$$

onde $B_r(0) = \{x \in X : \ \|x\| < r\}$, e escreveremos $B_r = B_r(0)$. Defina:

$$\begin{aligned} \Phi : [0,1] \times \overline{B_r} &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longrightarrow \Phi(t, x) = x - \frac{1}{\lambda(t)} \left(Lx + N(\lambda(t), x) \right), \end{aligned}$$

com $\lambda(t) = t\lambda_- + (1-t)\lambda_+$. Assim, $0 \notin \Phi([0,1] \times \partial B_r)$, caso contrário se $0 \in \Phi([0,1] \times \partial B_r)$, então existe $(t, x) \in [0,1] \times \partial B_r$ tal que $\Phi(t, x) = 0$, ou seja, para algum $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & 0 = x - \frac{1}{\lambda(t)} \left(Lx + N(\lambda(t), x) \right), \\ & \Leftrightarrow \lambda(t) x = Lx + N(\lambda(t), x), \\ & \Leftrightarrow Lx - \lambda(t) x + N(\lambda(t), x) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F(\lambda(t), x) = 0 \quad \text{para algum} \quad t \in [0,1].$$

Como $\lambda(t) = t\lambda_- + (1-t)\lambda_+$ e $t \in [0,1]$, então $\lambda(t) \in [\lambda_-, \lambda_+]$. Assim, $F(\lambda, x) = 0$ para algum $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$ e $x \in \partial B_r$, isto é, $(\lambda, x) \in \mathscr{S}$. Como $(\lambda, x) \in [\lambda_-, \lambda_+] \times \partial B_r$ e $(\lambda, x) \in \mathscr{S}$, então $\big([\lambda_-, \lambda_+] \times \overline{B}_r \big) \cap \mathscr{S} \neq \emptyset$. Isto contradiz o item (b). Portanto, $0 \notin \Phi([0,1] \times \partial B_r)$, então

$$\Phi(t, x) \neq 0, \quad \forall\, (t, x) \in [0,1] \times \partial B_r.$$

Como Φ é uma homotopia admissível na bola B_r e pela Propriedade da Invariância Homotópica (P-5), temos

$$deg\left(I - \frac{1}{\lambda_+}(L + N(\lambda_+, \cdot)), B_r, 0 \right) = deg\left(I - \frac{1}{\lambda_-}(L + N(\lambda_-, \cdot)), B_r, 0 \right).$$

Para $r > 0$ suficientemente pequeno, e outra vez pela invariância homotópica, obtemos

$$deg\left(I - \frac{1}{\lambda_+} L, B_r, 0 \right) = deg\left(I - \frac{1}{\lambda_-} L, B_r, 0 \right),$$

pois $\|N(\lambda, x)\| = o(\|x\|)$. Portanto, pelo Lema 2.4.3, temos

$$(-1)^{m_+} = (-1)^{m_-},$$

com

$$m_+ = \sum_{\substack{\lambda_j > 1 \\ \lambda_j \in \sigma(\frac{1}{\lambda_+} L)}} \beta_j \quad \text{e} \quad m_- = \sum_{\substack{\lambda_j > 1 \\ \lambda_j \in \sigma(\frac{1}{\lambda_-} L)}} \beta_j$$

onde, β_j é a multiplicidade algébrica do autovalor λ_j de $\frac{1}{\lambda_+}L$ ou de $\frac{1}{\lambda_-}L$, respectivamente. Mas,

$$\begin{aligned} \lambda_j \text{ é um autovalor de } \frac{1}{\lambda_-}L &\iff \ker[\lambda_j I - \tfrac{1}{\lambda_-}L] \neq \{0\}, \\ &\iff \exists\, x \neq 0, x \in X \text{ tal que } \frac{1}{\lambda_-}Lx = \lambda_j x, \\ &\iff \ker[\lambda_j \lambda_- I - L] \neq \{0\}, \\ &\iff \lambda_j \lambda_- \text{ é um autovalor de } L. \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{\substack{\lambda_j > 1 \\ \lambda_j \in \sigma(\frac{1}{\lambda_-} L)}} \beta_j = \sum_{\substack{\lambda_j > 1 \\ \lambda_j \lambda_- \in \sigma(L)}} \beta_j.$$

Vamos supor que $\lambda_- > 0$, de $\lambda_j > 1$, temos que $\widetilde{\lambda}_j = \lambda_j \lambda_- > \lambda_-$. Então

$$\sum_{\substack{\lambda_j > 1 \\ \lambda_j \in \sigma(\frac{1}{\lambda_-} L)}} \beta_j = \sum_{\substack{\widetilde{\lambda}_j > \lambda_- \\ \widetilde{\lambda}_j \in \sigma(L)}} \widetilde{\beta}_j.$$

Utilizando o mesmo processo, temos que

$$\sum_{\substack{\lambda_j > 1 \\ \lambda_j \in \sigma(\frac{1}{\lambda_+} L)}} \beta_j = \sum_{\substack{\widetilde{\lambda}_j > \lambda_+ \\ \widetilde{\lambda}_j \in \sigma(L)}} \widetilde{\beta}_j$$

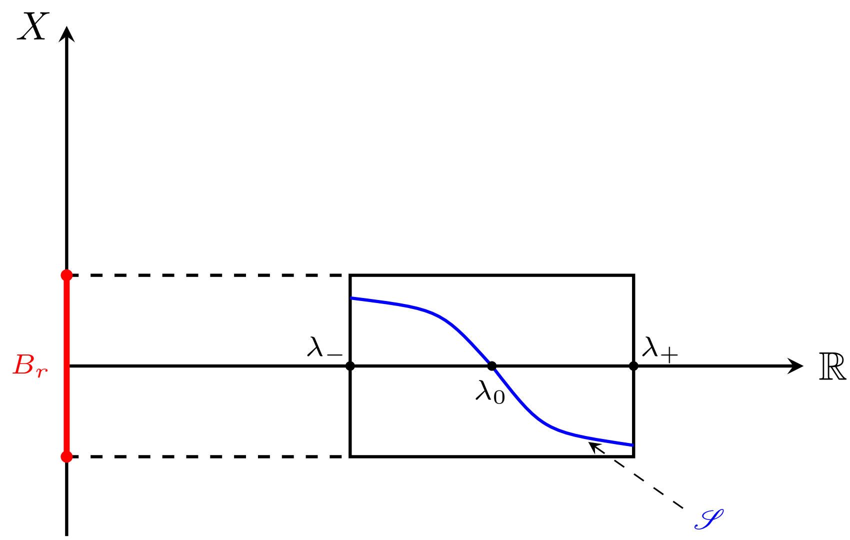
onde $\widetilde{\lambda}_j$ é um autovalor de L, e $\widetilde{\beta}_j$ é a multiplicidade algébrica de $\widetilde{\lambda}_j$. Assim

$$\Longrightarrow (-1)^{\sum_{\substack{\widetilde{\lambda}_j > \lambda_+ \\ \widetilde{\lambda}_j \in \sigma(L)}} \widetilde{\beta}_j} = (-1)^{\sum_{\substack{\widetilde{\lambda}_j > \lambda_- \\ \widetilde{\lambda}_j \in \sigma(L)}} \widetilde{\beta}_j}.$$

Como $\displaystyle\sum_{\substack{\widetilde{\lambda}_j > \lambda_- \\ \widetilde{\lambda}_j \in \sigma(L)}} \widetilde{\beta}_j = \beta + \sum_{\substack{\widetilde{\lambda}_j > \lambda_+ \\ \widetilde{\lambda}_j \in \sigma(L)}} \widetilde{\beta}_j$, onde β é a multiplicidade algébrica de λ_0. Daí, tem-se

$$(-1)^{\beta} = 1. \tag{3.1}$$

Mas por hipótese, β é ímpar, então $(-1)^{\beta} = -1$, o que contradiz (3.1).
Portanto, $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação da equação $F(\lambda, x) = 0$. O caso onde $\lambda_+ < 0$ é análogo.



$\mathscr{S}$ é o conjunto solução $\{(\lambda, x) \in [\lambda_-, \lambda_+] \times B_r : \; F(\lambda, x) = 0\}$

■

3.2 Teorema global de bifurcação de Rabinowitz

Nesta seção enunciaremos um resultado importante que permite descrever o comportamento de um ramo de soluções que se bifurca do ramo trivial no contexto do Teorema de Krasnoselski. Sejam $\mathscr{E}$ e E espaços de Banach reais e considere uma equação da forma

$$u = G(\lambda, u), \tag{3.2}$$

onde, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in E$, o espaço de Banach $\mathscr{E} = \mathbb{R} \times E$, com norma $\|(\lambda, u)\| = (|\lambda|^2 + \|u\|^2)^{1/2}$ e

$$\begin{array}{rcl} G : \mathscr{E} = \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longrightarrow & G(\lambda, u) = \lambda L u + H(\lambda, u) \end{array}$$

um operador contínuo e compacto, com $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ quando $u \to 0$ uniformemente sobre intervalos limitados de λ e L é um operador linear e compacto sobre E. Sejam,

$\{(\lambda, 0) : \; G(\lambda, 0) = 0\}$ conjunto das soluções triviais,
$S := \{(\lambda, u), u \neq 0 : \; G(\lambda, u) = u\}$ conjunto das soluções não triviais,
$\mathscr{S} = \overline{S}$,
$r(L)$ denota o conjunto dos valores característicos de L,
$\mathcal{B}_\varepsilon$ é a bola em $\mathscr{E}$ com centro em $(\mu, 0)$ e raio ε, e
B_ε é a bola em E com centro em 0 e raio ε.

Lema 3.2.1 *Seja K um espaço métrico compacto, A e B subconjuntos disjuntos e fechados de K. Então ou*

(a) Existe um subconjunto fechado conexo de K que intersecta A e B ou

(b) $K = K_A \cup K_B$, *onde* K_A *e* K_B *são disjuntos e compactos em* K *tal que* $A \subset K_A$ *e* $B \subset K_B$.

Demonstração ver [7] (Cap. 3, seção 3.5, Lema 3.5.2).

Lema 3.2.2 *Seja* $\mu \in r(L)$. *Suponhamos que não existe um subconjunto fechado e conexo de* $\mathscr{S} \cup \{(\mu, 0)\}$ *contendo* $(\mu, 0)$ *e que satisfaz uma das alternativas a seguir:*

(i) *esse subconjunto é não limitado em* $\mathscr{E}$ *ou*

(ii) *contém* $(\widehat{\mu}, 0)$ *onde* $\mu \neq \widehat{\mu} \in r(L)$.

Então existe um conjunto aberto limitado $\mathscr{O} \subset \mathscr{E}$ *tal que* $(\mu, 0) \in \mathscr{O}$ *e*

(a) $\partial\mathscr{O} \cap \mathscr{S} = \emptyset$,

(b) $\mathscr{O}$ *não contém soluções triviais além das que estão na bola* $\mathcal{B}_\varepsilon$ *para algum* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *onde*

$$\varepsilon_0 = dist\,(\mu, (r(L) \setminus \{\mu\}))$$

Demonstração: Seja $\mathscr{C}_\mu$ a componente conexa de $\mathscr{S} \cup \{(\mu, 0)\}$ que contém $(\mu, 0)$, isto é, $\mathscr{C}_\mu$ é um o subconjunto conexo maximal de $\mathscr{S} \cup \{(\mu, 0)\}$ que contém $(\mu, 0)$.
Por (i) $\mathscr{C}_\mu$ é limitado em $\mathscr{E}$ e pela continuidade e compacidade de G, $\mathscr{C}_\mu$ é compacto. Provaremos que $\mathscr{C}_\mu$ é compacto. De fato, seja $(\lambda_n, x_n) \subset \mathscr{C}_\mu$uma sequência. Como

$$\mathscr{C}_\mu \subset \mathscr{S} \cup \{(\mu, 0)\} = \overline{S} \cup \{(\mu, 0)\}$$

então para cada n existe uma sequência $(\lambda_n^k, x_n^k) \subset S \cup \{(\mu, 0)\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda_n^k, x_n^k) = (\lambda_n, x_n).$$

Para $n = 1$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(\lambda_1, x_1) - (\lambda_1^{k_1}, x_1^{k_1})\| < \frac{1}{2}.$$

Para $n = 2$, existe $k_2 > k_1$ tal que

$$\|(\lambda_2, x_2) - (\lambda_2^{k_2}, x_2^{k_2})\| < \frac{1}{2^2}.$$

Continuando o proceso, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n > k_{n-1} > \cdots$ tal que

$$\|(\lambda_n, x_n) - (\lambda_n^{k_n}, x_n^{k_n})\| < \frac{1}{2^n}.$$

Considere a sequência $(\lambda_n^{k_n}, x_n^{k_n}) \subset S \cup \{(\mu, 0)\}$. Como $(\lambda_n^{k_n}, x_n^{k_n})$ é limitada e G é compacto, então existe uma subsequência $(\lambda_{n_j}^{k_{n_j}}, x_{n_j}^{k_{n_j}})$ tal que $G(\lambda_{n_j}^{k_{n_j}}, x_{n_j}^{k_{n_j}})$ é convergente. Mas

$$G(\lambda, u) = \lambda Lu + H(\lambda, u) \text{ e}$$

$$G(\lambda_{n_j}^{k_{n_j}}, x_{n_j}^{k_{n_j}}) = x_{n_j}^{k_{n_j}}.$$

Portanto, $(x_{n_j}^{k_{n_j}})$ é convergente, isto é,

$$x_{n_j}^{k_{n_j}} \longrightarrow x_0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Então $x_{n_j} \longrightarrow x_0$, pois

$$\begin{aligned} \|x_{nj} - x_0\| &\leq \|x_{nj} - x_{nj}^{k_{n_j}} + x_{nj}^{k_{n_j}} - x_0\| \\ &\leq \|x_{nj} - x_{nj}^{k_{n_j}}\| + \|x_{nj}^{k_{n_j}} - x_0\| \\ &\leq \frac{1}{2^{n_j}} + \|x_{nj}^{k_{n_j}} - x_0\| \longrightarrow 0, \text{ quando } j \to \infty. \end{aligned}$$

Agora como (λ_{n_j}) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, então possui uma subsequência convergente, $\lambda_{n_{j_l}} \longrightarrow \lambda_0$. Logo

$$(\lambda_{n_{j_l}}, x_{n_{j_l}}) \longrightarrow (\lambda_0, x_0), \;\; l \to \infty.$$

Portanto, $\mathscr{C}_\mu$ é compacto.

Seja U_δ uma $\delta-$vizinhança de $\mathscr{C}_\mu$, para $\delta < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno. Por (ii) e pelo fato que $(\lambda, 0)$ é uma solução isolada de (3.2) se $\lambda \notin r(L)$, podemos supor que U_δ não contém $(\lambda, 0)$ solução de (3.2) para $|\lambda - \mu| > \delta$.

- Seja $K = \overline{U}_\delta \cap \mathscr{S}$. Como $\mathscr{S}$ é localmente compacto em $\mathscr{E}$, então K é um espaço métrico compacto com a topologia induzida de $\mathscr{E}$.

- $\mathscr{C}_\mu \cap (\partial U_\delta \cap \mathscr{S}) = \emptyset$, pois se houver um subconjunto fechado, conexo C de $\mathscr{S}$ intersectando a ambos $\mathscr{C}_\mu$ e $(\partial U_\delta \cap \mathscr{S})$ então $\mathscr{C}_\mu \cup C$ é um subconjunto conexo de $\mathscr{S}$ (união de dois subconjuntos conexos com interseção não vazia é conexo). Isto contradiz o fato que $\mathscr{C}_\mu$ é maximal.

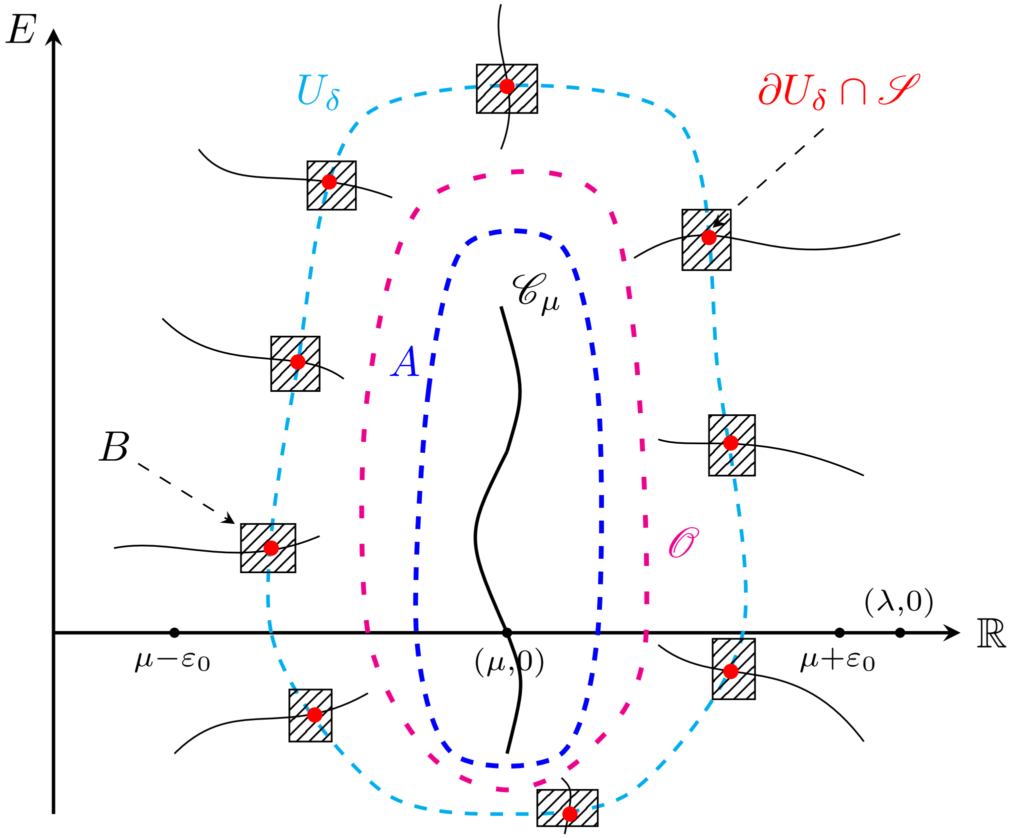
- Como K é um espaço métrico compacto, $\mathscr{C}_\mu \subset K$, $\partial U_\delta \cap \mathscr{S} \subset K$ e $\mathscr{C}_\mu \cap (\partial U_\delta \cap \mathscr{S}) = \emptyset$, então pelo Lema 3.2.1,

$$\begin{aligned} &K = A \cup B, \;\; A, B \text{ disjuntos e compactos de } K \text{ tais que} \\ &\mathscr{C}_\mu \subset A, \quad \text{e} \quad \partial U_\delta \cap \mathscr{S} \subset B. \end{aligned}$$

Seja $\mathscr{O}$ qualquer $\varepsilon-$vizinhança de A em $\mathscr{E}$ e $\varepsilon < d$, onde $d = dist(A, B)$. Como $\mathscr{O}$ contém $\mathscr{C}_\mu$, então $(\mu, 0) \in \mathscr{O}$. Para demonstrar que $\partial\mathscr{O} \cap \mathscr{S} = \emptyset$, suponhamos pelo absurdo, então existe uma solução (λ, u) de $G(\lambda, u) = u$ tal que $(\lambda, u) \in \partial\mathscr{O}$ e $(\lambda, u) \in \partial\mathscr{S}$, como $\partial\mathscr{O} \subset U_\delta$, então $(\lambda, u) \in K = \overline{U_\delta} \cap \mathscr{S}$, por outro lado $K = A \cup B$ com A, B conjuntos disjuntos e como $(\lambda, u) \in \mathscr{O}$ e $\mathscr{O}$ é uma vizinhança de A, então $(\lambda, u) \notin A$, então $(\lambda, u) \in B$. Logo,

$$\varepsilon < d = dist(A, B) \leq dist((\lambda, u), A) = \varepsilon$$

isto é uma contradição. Portanto, $\partial\mathscr{O} \cap \mathscr{S} = \emptyset$. Por construção, $\mathscr{O}$ satisfaz o item (b), ou seja, não contém soluções triviais além das que estão na bola com centro em $(\mu, 0)$ com raio $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Portanto, existe um conjunto aberto limitado $\mathscr{O} \subset \mathscr{E}$ tal que $(\mu, 0) \in \mathscr{O}$ e satisfaz as condições especificadas no Lema.



■

Vejamos alguns conceitos preliminares para demonstrar o Teorema de Rabinowitz

- A multiplicidade algébrica do valor característico μ é a dimensão de

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \ker[(\mu L - I)^j],$$

onde, $I : E \longrightarrow E$ é o operador identidade e $\ker(P)$ é o núcleo de P.

- Se L é compacto, então μ tem multiplicidade algébrica finita.

- Seja $\Omega \subset E$ aberto limitado, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ um operador contínuo e compacto, sejam $\psi(u) = u - T(u)$ e $b \in E,\ b \notin \psi(\partial\Omega)$, então

$$deg(\psi, \Omega, b) \text{ está bem definido}$$

Se $b = 0$, denotamos o grau de Leray- Schauder como $deg(\psi, \Omega)$.

- O índice de um zero isolado u_0, de ψ é denotado por $i(\psi, u_0)$.

- Seja $\Phi(\lambda, u) = u - G(\lambda, u)$. Quando a dependência u de Φ não for importante, nós escrevemos $\Phi(\lambda)$. Para λ fixo, $\Phi(\lambda)$ é da forma apropriada para o uso do grau de Leray-Schauder.

Teorema 3.2.1 (Rabinowitz) *Se $\mu \in r(L)$ é de multiplicidade algébrica ímpar, então $\mathscr{S}$ possui um subconjunto $\mathscr{C}_\mu$ fechado, conexo e maximal tal que $(\mu, 0) \in \mathscr{C}_\mu$, e $\mathscr{C}_\mu$ ou* *i) é não limitado em $\mathscr{E}$, ou*

ii) contém $(\widehat{\mu}, 0)$, onde $\mu \neq \widehat{\mu} \in r(L)$.

Demonstração: Por um conjunto $\mathscr{C}_\mu$ maximal, entendemos que $\mathscr{C}_\mu$ não é um subconjunto próprio, fechado e conexo de algum conjunto $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$ com as propriedades do Teorema. Suponhamos por contradição que, não existe $\mathscr{C}_\mu$ como no Teorema, então existem $\mathscr{O}$ e δ como no Lema 3.2.2. Seja

$$\mathscr{O}_\lambda = \{u \in E : \ (\lambda, u) \in \mathscr{O}\}.$$

Para $0 < |\lambda - \mu| \leq \delta$, $(\lambda, 0)$ é uma solução isolada de (3.2). Portanto, existe $\rho(\lambda) > 0$ tal que $(\lambda, 0)$ é uma única solução de (3.2) em $\{\lambda\} \times \overline{B}_{\rho(\lambda)}$. Seja

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \rho(\mu + \delta) \text{ para } \lambda > \mu + \delta, \\ \rho(\lambda) &= \rho(\mu - \delta) \text{ para } \lambda < \mu - \delta. \end{aligned}$$

Escolhendo $\rho(\lambda)$ suficientemente pequeno, podemos assumir que $\overline{B}_{\rho(\lambda)} \cap \overline{\mathscr{O}}_\lambda = \emptyset$ se $|\lambda - \mu| \geq \delta$. Para $\lambda \neq \mu$, não existem soluções de (3.2) sobre $\{\lambda\} \times \partial(\mathscr{O}_\lambda \setminus \overline{B}_{\rho(\lambda)})$, e portanto,

$$deg(\Phi(\lambda), \mathscr{O}_\lambda \setminus \overline{B}_{\rho(\lambda)}) \text{ é bem-definido.}$$

Provaremos que

$$deg(\Phi(\lambda), \mathscr{O}_\lambda \setminus \overline{B}_{\rho(\lambda)}) = 0, \quad \lambda \neq \mu, \tag{3.3}$$

e depois mostraremos que a equação (3.3) não pode ser satisfeita para λ próximo de μ, então com ajuda desta contradição o teorema será provado.

Seja $\lambda > \mu$. Escolhemos $\lambda^* > \lambda$ tão grande que $(\nu, u) \in \mathscr{O}$ implica que $\nu < \lambda^*$. Seja

$$\rho = \inf\{\rho(\theta) : \ \lambda \leq \theta \leq \lambda^*\}.$$

Vemos que $\rho > 0$. Então

$$U = \mathscr{O} \setminus [\lambda, \lambda^*] \times \overline{B}_\rho,$$

é aberto limitado em $\mathscr{E} = [\lambda, \lambda^*] \times E$ e $\Phi(\theta, u) \neq 0$ para $(\theta, u) \in \partial U$ (em $\mathscr{E}$). Portanto, pelo Teorema 2.6.1 da invariância homotópica do grau, tem-se

$$deg(\Phi(\theta), \mathscr{O}_\theta \setminus \overline{B}_\rho) \equiv \text{constante}, \quad \theta \in [\lambda, \lambda^*]. \tag{3.4}$$

Como $\mathscr{O}_{\lambda^*} \setminus \overline{B}_\rho = \emptyset$, então

$$deg(\Phi(\lambda^*), \mathscr{O}_{\lambda^*} \setminus \overline{B}_\rho) = 0. \tag{3.5}$$

Das equações (3.4) e (3.5) temos que

$$deg(\Phi(\lambda), \mathscr{O}_\lambda \setminus \overline{B}_\rho) = 0. \tag{3.6}$$

Como $\Phi(\lambda)$ não tem zeros em $\{\lambda\} \times (\overline{B}_\rho \setminus \overline{B}_{\rho(\lambda)})$, da equação (3.6) e da propriedade da aditividade do grau obtemos a equação (3.3) para $\lambda > \mu$. Para $\lambda < \mu$ utilizamos um argumento similar. Outra vez usando o Teorema da invariância homotópica 2.6.1 do grau, tem-se

$$deg(\Phi(\lambda), \mathscr{O}_\lambda) \equiv \text{constante}, \quad |\lambda - \mu| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Seja $\mu - \varepsilon < \underline{\lambda} < \mu < \overline{\lambda} < \mu + \varepsilon$. Pela propriedade da aditividade do grau e o fato que $(\lambda, 0)$ é um zero isolado de $\Phi(\lambda)$ para $\lambda \notin r(L)$,

$$\begin{array}{rcl} deg(\Phi(\underline{\lambda}), \mathscr{O}_{\underline{\lambda}}) & = & i(\Phi(\underline{\lambda}), (\underline{\lambda}, 0)) + deg(\Phi(\underline{\lambda}), \mathscr{O}_{\underline{\lambda}} \setminus \overline{B}_{\rho(\underline{\lambda})}) \\ deg(\Phi(\overline{\lambda}), \mathscr{O}_{\overline{\lambda}}) & = & i(\Phi(\overline{\lambda}), (\overline{\lambda}, 0)) + deg(\Phi(\overline{\lambda}), \mathscr{O}_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B}_{\rho(\overline{\lambda})}) \end{array} \tag{3.8}$$

substituindo (3.3) em (3.8), obtém-se

$$\begin{array}{rcl} deg(\Phi(\underline{\lambda}), \mathscr{O}_{\underline{\lambda}}) & = & i(\Phi(\underline{\lambda}), (\underline{\lambda}, 0)) \\ deg(\Phi(\overline{\lambda}), \mathscr{O}_{\overline{\lambda}}) & = & i(\Phi(\overline{\lambda}), (\overline{\lambda}, 0)). \end{array} \tag{3.9}$$

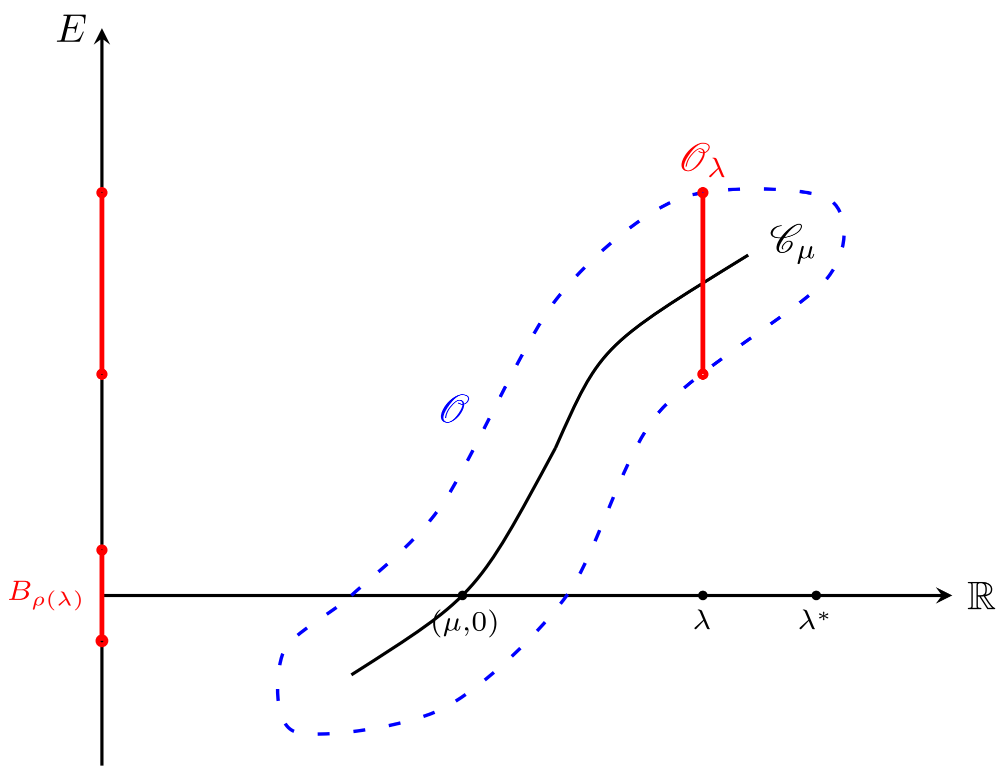
Por (3.7) temos que

$$i\left(\Phi(\underline{\lambda}), (\underline{\lambda}, 0)\right) = i\left(\Phi(\overline{\lambda}), (\overline{\lambda}, 0)\right).$$

Porém como μ é um valor característico de L com multiplicidade algébrica ímpar, então

$$i\left(\Phi(\underline{\lambda}), (\underline{\lambda}, 0)\right) = -i\left(\Phi(\overline{\lambda}), (\overline{\lambda}, 0)\right) \neq 0,$$

pela demonstração do Teorema de Krasnoselskii, mas isto é uma contradição.



■

3.3 Aplicações do teorema de Rabinowitz

Nesta seção apresentamos um exemplo e duas aplicações do Teorema de Rabinowitz 3.2.1. No exemplo demonstraremos que a segunda alternativa do Teorema 3.2.1 é satisfeita, a primeira aplicação é um problema não linear de Sturm-Liouville para uma E.D.O de segunda ordem e se consegue provar que a primeira alternativa ocorre, a segunda aplicação é um problema de autovalores para uma equação diferencial parcial quase-linear a qual se prova também que a primeira alternativa do teorema ocorre. Em todos esses resultados, os valores característicos com os quais lidamos serão simples.

Exemplo: Seja $E=\mathbb{R}^2$ e $u\in E$ com norma $\|u\|=(u_1^2+u_2^2)^{1/2}$. Considere

$$Au=\lambda\left(u-B(u)u\right), \tag{3.10}$$

onde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(u)=\begin{pmatrix}4u_1^2+6u_2^2 & -2u_1u_2\\ -2u_1u_2 & 6u_1^2+4u_2^2\end{pmatrix}.$$

Os valores característicos de $L=A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ são $\mu=1$ e $\mu=2$. Ao tomar o produto interno da equação (3.10) com u, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle Au,u\rangle &= \langle \lambda u,u\rangle-\langle\lambda B(u)u,u\rangle\\
\Rightarrow \lambda\langle B(u)u,u\rangle &= \lambda\langle u,u\rangle-\langle Au,u\rangle\\
&= \lambda\left(u_1^2+u_2^2\right)-\left\langle\begin{pmatrix}u_1\\ 2u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= \lambda\left(u_1^2+u_2^2\right)-\left(u_1^2+2u_2^2\right)\\
\Rightarrow\ \langle B(u)u,u\rangle &\leq 2\left(u_1^2+u_2^2\right)-\left(u_1^2+2u_2^2\right), \quad \text{para } 1\leq\lambda\leq 2\\
&= u_1^2\leq u_1^2+u_2^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle B(u)u,u\rangle\leq u_1^2+u_2^2. \tag{3.11}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle B(u)u,u\rangle &= \left\langle\begin{pmatrix}4u_1^2+6u_2^2 & -2u_1u_2\\ -2u_1u_2 & 6u_1^2+4u_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= \left\langle 4\begin{pmatrix}(u_1^2+u_2^2)\ u_1\\ (u_1^2+u_2^2)\ u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= \left\langle 4\left(u_1^2+u_2^2\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&= 4\left(u_1^2+u_2^2\right)\left(u_1^2+u_2^2\right)=4\left(u_1^2+u_2^2\right)^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$\left(u_1^2+u_2^2\right)^2\leq 4\left(u_1^2+u_2^2\right)^2=\langle B(u)u,u\rangle. \tag{3.12}$$

Então de (3.11) e (3.12), obtém-se

$$\left(u_1^2+u_2^2\right)^2\leq\ \langle B(u)u,u\rangle\ \leq\ u_1^2+u_2^2$$

Daí, temos que $\|u\|\leq 1$, para todas as soluções da equação (3.10). Considere a equação (3.2) onde $E=\mathbb{R}^2$, $L=A^{-1}$, $H(\lambda,u)=-\lambda LB(u)u$ e

$$\begin{aligned}
G:\mathbb{R}\times E &\longrightarrow E\\
(\lambda,u) &\longrightarrow G(\lambda,u)=\lambda Lu-\lambda LB(u)u
\end{aligned}$$

é compacto e como $\mu = 1$ e $\mu = 2$ são valores característicos de L com multiplicidade algébrica ímpar, então pelo Teorema de Rabinowitz 3.2.1, existe uma componente $\mathscr{C}_\mu$ tal que $(\mu, 0) \in \mathscr{C}_\mu$ e ou $\mathscr{C}_\mu$ é não limitado em $\mathscr{E} = \mathbb{R} \times E$ ou $(\widehat{\mu}, 0) \in \mathscr{C}_\mu$ com $\widehat{\mu}$ um valor característico diferente de μ. A seguir provaremos que só a segunda alternativa do Teorema de Rabinowitz 3.2.1 ocorre. Para isso suponhamos que o primeiro item é satisfeito, isto é, $\mathscr{C}_\mu$ é não limitado em $\mathscr{E}$, então existe uma sequência (λ_n, u_n) de soluções não triviais de (3.2) com $\lambda_n \geq n$, então $\lambda_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Dividindo a equação (3.10) por λ_n, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Au_n}{\lambda_n} &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n}(u_n - B(u_n)u_n) \\ \frac{Au_n}{\lambda_n} &= (u_n - B(u_n)u_n). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{Au_n}{\lambda_n} &= \lim_{n\to\infty} (u_n - B(u_n)u_n) \\ 0 &= \lim_{n\to\infty} (u_n - B(u_n)u_n). \end{aligned}$$

Como $\|u_n\| \leq 1$, podemos supor que a sequência dos u_n converge para uma solução u_0 da equação limite

$$B(u)u = u,$$

com $u_0 \neq 0$. Para ver que $u_0 \neq 0$, suponha que $u_n \to u_0 = 0$, quando $n \to \infty$. Então dividindo a equação (3.10) por $\|u_n\|$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{Au_n}{\|u_n\|} &= \frac{\lambda_n}{\|u_n\|}(u_n - B(u_n)u_n) \\ \iff \frac{1}{\lambda_n}\frac{Au_n}{\|u_n\|} &= \frac{u_n}{\|u_n\|} - B(u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}\frac{Au_n}{\|u_n\|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{\|u_n\|} - B(u_n)\frac{u_n}{\|u_n\|}\right),$$

e como $\dfrac{1}{\lambda_n} \to 0$, quando $n \to \infty$, $\dfrac{u_n}{\|u_n\|} \to \overline{u}$ com $\|\overline{u}\| = 1$, então

$$0 = \overline{u} - B(0)\overline{u}.$$

Logo, $\overline{u} = 0$, mas isto é uma contradição, pois $\|\overline{u}\| = 1$. Portanto, $u_0 \neq 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} B(u)u = u &\iff \langle B(u)u, u\rangle = \langle u, u\rangle \\ &\iff 4\|u\|^4 = \|u\|^2 \\ &\iff u = 0 \end{aligned}$$

o que contradiz o fato que $u_0 \neq 0$ ser uma solução de $B(u)u = u$. Portanto, o item (i) do Teorema 3.2.1 não se satisfaz, então $\mathscr{C}_\mu$ contém $(\widehat{\mu}, 0)$ com $\widehat{\mu}$ valor característico de L diferente de μ.

■

3.3.1 Problema não linear de Sturm-Liouville

Considere o seguinte problema não linear de Sturm-Liouville para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$\begin{cases} \mathscr{L}u := -\left(p(x)u'\right)' + q(x)u = \lambda F(x,u,u'), & 0 < x < \pi \\ a_0 u(0) + b_0 u'(0) = 0, & \\ a_1 u(\pi) + b_1 u'(\pi) = 0, & \end{cases}, \tag{3.13}$$

onde $\left(a_0^2 + b_0^2\right)\left(a_1^2 + b_1^2\right) \neq 0$. Daqui em diante as condições de fronteira de (3.13) serão denotadas por B.C. Como é usual vamos supor que $p : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é positiva e continuamente diferenciável, $q : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ contínua, $a : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é positiva e contínua, a função F é contínua em $[0,\pi] \times \mathbb{R}^2$ e além disso,

$$\begin{aligned} F : [0,\pi] \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\xi,\eta) &\longrightarrow F(x,\xi,\eta) = a(x)\xi + h(x,\xi,\eta), \end{aligned}$$

com $h(x,\xi,\eta) = o\left((\xi^2+\eta^2)^{1/2}\right)$ quando $(\xi,\eta) \to (0,0)$ uniformemente em $x \in [0,\pi]$.

Para $h \equiv 0$, (3.13) torna-se um problema de autovalores lineares de Sturm-Liouville.

$$\begin{cases} \mathscr{L}v = \mu a(x) v, & 0 < x < \pi \\ \text{com as B.C} & \end{cases}. \tag{3.14}$$

Como é bem conhecido, a equação (3.14) possui uma sequência crescente de autovalores simples

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \cdots$$

com $\mu_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Além disso, se v_n é uma autofunção associada a μ_n, então v_n tem exatamente $n-1$ zeros em $(0,\pi)$, além disso, todos os zeros são simples ($x \in [0,\pi]$ é um zero simples de v se $v(x) = 0$ e $v'(x) \neq 0$). Ver [8] (Capítulo 8, Teorema 2.1). Por conveniência supomos que 0 não é um autovalor de (3.13). Então pelo Teorema 2.3 da referência [14] pag. 147, existe uma função contínua $g : [0,\pi] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2([0,\pi])$ é uma solução de (3.13) se, e somente se

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi g(x,y) F(y,u(y),u'(y))dy.$$

A função g é conhecida como a função de Green associada ao operador $\mathscr{L}$. Com a ajuda desta função provaremos que

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_0^\pi g(x,y) F(y,u(y),u'(y))dy \\ &= \lambda \int_0^\pi g(x,y) \left[a(y)u(y) + h(y,u(y),u'(y))\right] dy \\ &= \lambda \int_0^\pi g(x,y) a(y) u(y) dy + \lambda \int_0^\pi g(x,y) h(y,u(y),u'(y))dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u = G(\lambda, u) := \lambda L u + H(\lambda, u) \tag{3.15}$$

satisfaz as hipóteses do Teorema de Rabinowitz 3.2.1. Considere $E = C^1([0,\pi])\cap$B.C um espaço de Banach, com a norma

$$\|u\|_1 = \max_{x\in[0,\pi]} |u(x)| + \max_{x\in[0,\pi]} |u'(x)|.$$

Vamos demonstrar que $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$, quando $u \to 0$ uniformemente sobre intervalos limitados de λ. De fato, Seja, $\varepsilon > 0$, como $h(y,\xi,\eta) = o\left((\xi^2+\eta^2)^{1/2}\right)$, quando $(\xi,\eta)\to(0,0)$ uniformemente em y, segue que, para $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\max\{|\lambda|\}\|\phi\|} > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|u\| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{h(y,u(y),u'(y))}{\|u\|}\right| < \varepsilon_1, \quad \forall\, y \in [0,\pi].$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{H(\lambda,u)}{\|u\|}\right| &= \left|\frac{1}{\|u\|}\lambda\int_0^\pi g(x,y)\,h(y,u(y),u'(y))dy\right| \\
&\leq |\lambda|\int_0^\pi g(x,y)\left|\frac{h(y,u(y),u'(y))}{\|u\|}\right|dy \\
&< \varepsilon_1|\lambda|\int_0^\pi g(x,y)dy \\
&= \varepsilon_1|\lambda|\,\phi, \qquad \text{onde } \phi \text{ é tal que } \begin{cases} \mathscr{L}\phi(x) = 1 \\ \phi \in \text{B.C} \end{cases} \\
&< \frac{\varepsilon}{\max\{|\lambda|\}\|\phi\|}|\lambda|\|\phi\|, \ \text{ para } \lambda \text{ num intervalo limitado.} \\
&< \frac{\varepsilon}{\max\{|\lambda|\}\|\phi\|}\max\{|\lambda|\}\|\phi\| = \varepsilon, \ \text{ para todo } \lambda \text{ num intervalo limitado.}
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|u\| < \delta$, então $\left|\dfrac{H(\lambda,u)}{\|u\|}\right| < \varepsilon$, para todo λ em intervalos limitados. Agora, vamos provar que

$$\begin{aligned}
G : \mathscr{E} = \mathbb{R}\times E &\longrightarrow E \\
(\lambda, u) &\longrightarrow G(\lambda,u) = \lambda L u + H(\lambda,u)
\end{aligned}$$

é compacto. Como $G(\cdot,u) : \mathbb{R} \longrightarrow E$ é compacto, então para provar que G é compacto demonstraremos que $G(\lambda,\cdot)$ é compacto. De fato, seja, $v \in E$, $G(\lambda,v) = \varphi$, onde $\mathscr{L}\varphi = \lambda F(x,v,v')$ e como $v \in E$, $v \in C^1([0,\pi])$, então $\lambda F(x,v,v') \in C([0,\pi])$. Por [14] pág. 147, $\mathscr{L}\varphi = \lambda F(x,v,v')$ tem uma única solução $\varphi \in C^2([0,\pi])$, e como

$$E \xrightarrow{G(\lambda,\cdot)} C^2 \cap \text{B.C} \overset{i}{\hookrightarrow} C^1 \cap \text{B.C} = E$$

$G(\lambda,\cdot)$ é contínua e por Arzelá -Ascoli i é compacto, então $i \circ G(\lambda,\cdot)$ é compacto. Portanto, $G(\lambda,\cdot) : E \longrightarrow E$ é compacto. Como G é compacto, então pelo Lema 2.4.1 $L : E \longrightarrow E$ é compacto (pois L é a derivada do operador compacto G).

Seja S_k^+ o conjunto das funções $\varphi \in E$ tal que φ tem exatamente $k-1$ zeros em $(0,\pi)$, φ é positiva numa vizinhança de $x = 0$ e todos os zeros em $[0, \pi]$ são simples. Defina:

$$\begin{aligned} S_k^- &= -S_k^+ \\ S_k &= S_k^+ \cup S_k^-. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que S_k é aberto. Para $v \in E$. Provaremos que existe $r > 0$ tal que $B_r(v) \subset S_k$. De fato, sejam $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1}$ os zeros de v em $[0, \pi]$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $A = \bigcup_{j=1}^{k-1} B_\delta(x_j)$ e $B = [0, \pi] \setminus A$. Seja, $\min_{x \in B} |v(x)| = m_0 > 0$ e $r < \dfrac{m_0}{2}$. Se $u \in B_r(v)$, então

$$\begin{aligned} |u(x)| = |u(x) - v(x) + v(x)| &= |v(x) - (v(x) - u(x))| \\ &\geq |v(x)| - |u(x) - v(x)| \\ &\geq m_0 - \frac{m_0}{2} > 0, \quad \forall\, x \in B. \end{aligned}$$

Seja $\min_{x \in A} |v'(x)| = m_1 > 0$ e $r < \dfrac{m_1}{2}$. Se $u \in B_r(v)$, então

$$\begin{aligned} |u'(x)| = |u'(x) - v'(x) + v'(x)| &= |v'(x) - (v'(x) - u'(x))| \\ &\geq |v'(x)| - |u'(x) - v'(x)| \\ &\geq m_1 - \frac{m_1}{2} > 0, \quad \forall\, x \in A. \end{aligned}$$

Como u é contínua em $B_\delta(x_j)$ para todo $j = 1, \cdots, k-1$ e muda de sinal nos extremos de $B_\delta(x_j)$ (pois u e v são bem próximos), então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $y_j \in B_j(x_j)$ tal que

$$u(y_j) = 0,$$

e como $|u'(y_j)| \neq 0$, para todo $y_j \in B_\delta(x_j)$, então y_j é único. Portanto, u tem $k-1$ zeros simples em $(0, \pi)$ e são os únicos zeros em $(0, \pi)$. Então $u \in S_k$. Portanto S_k é aberto.

Os autovalores de $\mathscr{L}$ com peso a são iguais aos valores característicos de L. Portanto, todos os $\mu_k \in r(L)$ tem multiplicidade algébrica ímpar, satisfazem as hipóteses do Teorema de Rabinowitz 3.2.1 e consequentemente existe uma componente $\mathscr{C}_k$ de $\mathscr{S}$ a qual contém $(\mu_k, 0)$ e ou $\mathscr{C}_k$ é não limitado ou contém $(\mu_j, 0)$ com $j \neq k$. A seguir mostraremos que apenas o item (i) do Teorema é possível.

Teorema 3.3.1 *$\mathscr{C}_k$ é não limitada em $\mathbb{R} \times S_k$.*

Para provar o Teorema 3.3.1, precisamos de dois Lemas.

Lema 3.3.1 *Se (λ, u) é uma solução de (3.13) e u tem um zero duplo (isto é, $u(\tau) = 0 = u'(\tau)$ para algum $\tau \in [0, \pi]$), então $u \equiv 0$.*

Demonstração: Se $F(x, \xi, \eta)$ for Lipschitz contínua com relação a ξ, η o resultado segue do Teorema de Existência e Unicidade de um P.V.I para uma equação diferencial ordinária.
No caso geral, suponhamos que para $\tau \in [0, \pi]$, $u(\tau) = 0 = u'(\tau)$. Seja $w = pu'$, então pode-se escrever (3.13) como um sistema de primeira ordem, da seguinte forma

$$\begin{cases} u' &= \dfrac{w}{p} \\ w' &= qu - \lambda F(x, u, \frac{w}{p}) \end{cases} \tag{3.16}$$

$$u(\tau) = 0 = w(\tau) = 0.$$

Multiplicando a primeira equação de (3.16) por u e a segunda equação por w, tem-se

$$\begin{cases} u'u &= \dfrac{w}{p}u \\ w'w &= quw - \lambda F(x,u,\frac{w}{p})w \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(u^2) &= \dfrac{w}{p}u \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(w^2) &= quw - \lambda F(x,u,\frac{w}{p})w \end{cases}.$$

Somando temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[u^2+w^2] &= \frac{w}{p}u + quw - \lambda F(x,u,\frac{w}{p})w \\ &\leq \left|\frac{w}{p}u + quw - \lambda F(x,u,\frac{w}{p})w\right| \\ &\leq |\frac{w}{p}u| + |quw| + |\lambda F(x,u,\frac{w}{p})w| \\ &\leq |\frac{1}{p}||w||u| + |q||u||w| + |\lambda||a(x)uw + h(x,u,\frac{w}{p})w| \\ &\leq c|w||u| + c|u||w| + |\lambda||a(x)||u||w| + |\lambda|\left|h(x,u,\frac{w}{p})\right||w| \\ &\leq c|w||u| + c|u||w| + c|u||w| + c\left|h(x,u,\frac{w}{p})\right||w| \\ &\leq 3c|u||w| + c\left|h(x,u,\frac{w}{p})\right||w|, \end{aligned}$$

como $u(\tau) = 0 = u'(\tau)$, por continuidade existe $r_1 > 0$, tal que

$$|x-\tau| < r_1 \Longrightarrow \left|h(x,u(x),\frac{w(x)}{p(x)})\right| < \left(u^2(x) + \left(\frac{w(x)}{p(x)}\right)^2\right)^{1/2},$$

pois $h(x,\xi,\eta) = o\left((\xi^2+\eta^2)^{1/2}\right)$, quando $(\xi,\eta) \to (0,0)$ uniformemente em $x \in [0,\pi]$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[u^2+w^2] &\leq 3c|u||w| + c\left|\left(u^2 + (\frac{w}{p})^2\right)^{1/2}\right||w|, \quad |x-\tau| < r_1 \\ &\leq \hat{c}\left[|u||w| + \left(|u| + |\frac{w}{p}|\right)|w|\right], \quad |x-\tau| < r_1 \\ &\leq \hat{c}\left[2|u||w| + \frac{|w|^2}{|p|}\right], \quad |x-\tau| < r_1 \\ &\leq \widehat{C}\left[2|u||w| + |w|^2\right], \quad |x-\tau| < r_1 \\ &\leq \widehat{C}\left[|u|^2 + |w|^2 + |w|^2\right], \quad |x-\tau| < r_1 \\ &\leq C\left(|u|^2 + |w|^2\right), \quad |x-\tau| < r_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}\left[u^2 + w^2\right] \leq C\left(u^2 + w^2\right), \quad \forall\, |x - \tau| < r_1,$$

onde C é uma constante. Seja $\phi(x) = u^2(x) + w^2(x)$, então

$$\begin{aligned} & \phi'(x) \leq C\phi(x) \\ \Longrightarrow\ & \int_\tau^x \phi'(s)ds \leq C\int_\tau^x \phi(s)ds \\ \Longrightarrow\ & \phi(x) - \phi(\tau) \leq C\int_\tau^x \phi(s)ds \\ \Longrightarrow\ & \phi(x) \leq \phi(\tau) + C\int_\tau^x \phi(s)ds. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall [11] (Apêndice B, pág. 625),

$$\phi(x) \leq \phi(\tau)e^{C(x-\tau)},$$

como $\phi(x) = u^2(x) + w^2(x)$ e $u(\tau) = 0 = u'(\tau)$, tem-se

$$u^2(x) + p^2(x)(u'(x))^2 \leq \left(u^2(\tau) + p^2(\tau)(u'(\tau))^2\right)e^{C(x-\tau)} = 0,$$

para todo x tal que $|x - \tau| < r_1$. Como r_1 não depende de τ o resultado segue por continuação. ■

Lema 3.3.2 *Para cada $j > 0$, existe uma vizinhança N_j de $(\mu_j, 0)$ tal que, se $(\lambda, u) \in N_j \cap \mathscr{S}$ e $u \not\equiv 0$, então $u \in S_j$.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que existe $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathscr{S}$ uma sequência tal que $(\lambda_n, u_n) \longrightarrow (\mu_j, 0)$, quando $n \to \infty$ e $0 \not\equiv u_n \notin S_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De (3.15), tem-se

$$u_n = \lambda_n L u_n + H(\lambda_n, u_n),$$

ou seja,

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_1} = \lambda_n L\frac{u_n}{\|u_n\|_1} + \frac{H(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|_1},$$

e como L é compacto e $\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|_1}\right\}$ é uma sequência limitada em E, então existe uma subsequência $\left\{L\frac{u_{n_j}}{\|u_{n_j}\|_1}\right\}$ de $\left\{L\frac{u_n}{\|u_n\|_1}\right\}$ tal que $L\frac{u_{n_j}}{\|u_{n_j}\|_1}$ converge em E. Como $H(\lambda, u) = o(\|u\|)$ uniformemente em intervalos limitados de λ, então

$$\frac{H(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|_1} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

e $\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|_1}\right\}$ tem uma subsequência convergente para algum w em E tal que $\|w\| = 1$. Então

$$\lim_{j\to\infty} \frac{u_n}{\|u_n\|_1} = \lim_{j\to\infty} \lambda_n L\frac{u_n}{\|u_n\|_1} + \lim_{j\to\infty} \frac{H(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|_1}$$

$$w = \mu_j Lw + 0,$$

isto é, $w = \mu_j Lw$. Logo $w = v_j$ ou $w = -v_j$, onde v_j é a autofunção de (3.14) associada a μ_j tal que $v_j \in S_j^+$ e $\|v_j\| = 1$. Em qualquer caso $w \in S_j$. Como S_j é aberto e

$$w_{n_i} = \frac{u_{n_i}}{\|u_{n_i}\|_1} \longrightarrow w,$$

segue que w_{n_i} e $u_{n_i} \in S_j$ para i grande. Isto é uma contradição pois $u_n \notin S_j$ para todo n. ■

Demonstração: [Do Teorema 3.3.1] Suponha que $\mathscr{C}_k \subset (\mathbb{R} \times S_k) \cup \{(\mu_k, 0)\}$, então como $S_j \cap S_k = \emptyset$ para $j \neq k$, do Lema 3.3.2 e do Teorema de Rabinowitz 3.2.1 segue $\mathscr{C}_k$ deve ser não limitado em $\mathbb{R} \times S_k$. Portanto a prova do Teorema 3.3.1 será concluída uma vez que mostrarmos que

$$\mathscr{C}_k \not\subset (\mathbb{R} \times S_k) \cup \{(\mu_k, 0)\}$$

implica em um absurdo. Pelo Lema 3.3.2, tem-se

$$N_k \cap \mathscr{C}_k \subset (\mathbb{R} \times S_k) \cup \{(\mu_k, 0)\}$$

para alguma vizinhança N_k de $(\mu_k, 0)$. Portanto, se $\mathscr{C}_k \not\subset (\mathbb{R} \times S_k) \cup \{(\mu_k, 0)\}$, então existe $(\lambda, u) \in \mathscr{C}_k \cap (\mathbb{R} \times \partial S_k)$ com $(\lambda, u) \neq (\mu_k, 0)$ e

$$(\lambda, u) = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n, u_n), \;\; u_k \in S_k.$$

Como $u \in \partial S_k$, então u possui algum zero duplo e pelo Lema 3.3.1, $u \equiv 0$. Daí,

$$\lambda = \mu_j, \quad j \neq k.$$

Além disso, pelo Lema 3.3.2, tem-se

$$(\lambda_n, u_n) \in N_j \cap (\mathbb{R} \times S_k), \text{ para } n \text{ grande},$$

o que é uma contradição pois $S_j \cap S_k = \emptyset$. ■

3.3.2 Problema de autovalores para uma E.D.P elíptica quase-linear

Concluímos este capítulo com uma aplicação para uma classe de equações diferenciais parciais quase-lineares elípticas. Para problemas de autovalores para equações diferenciais parciais elípticas, não existe um análise geral das propriedades de zeros simples, como usada anteriormente, exceto pela positividade, e isso deve ser explorado de forma semelhante ao caso tratado na Seção anterior.

Seja Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^n$. Considere o problema com valores na fronteira,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}u &=& -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,u,Du)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u,Du)u_{x_i} \\ && + c(x,u,Du)u = \lambda\left(a(x)u + F(x,u,\lambda)\right), \quad x \in \Omega \\ u &=& 0, \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.17}$$

onde Du denota o gradiente de u. Vamos supor que as funções $a_{i,j}$, b_i, c, a, F são continuamente diferenciáveis em seus argumentos. Além disso, $c \geq 0$, $a \geq a_0 > 0$ (a_0 é uma constante), $F \geq 0$, $F(x,u,\lambda) = o(|u|)$, quando $u \to 0$ uniformemente sobre $x \in \Omega$ e λ em intervalos limitados. Vamos supor também que a equação (3.17) é uniformemente elíptica, isto é,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,\eta,p)\xi_i\xi_j \geq \beta|\xi|^2, \quad \forall\, x \in \Omega,\ \eta \in \mathbb{R},\ p,\xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.18}$$

com β uma constante positiva. Seja, $\alpha \in (0,1)$ e seja

$$E = \{u \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}) :\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

um espaço de Banach, onde $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ denota o espaço de funções continuamente diferenciáveis em Ω cuja primeira derivada é Hölder continua com expoente α. A norma em E é

$$\|u\|_{1+\alpha} = \max_{x\in\Omega}|u(x)| + \max_{1\leq i\leq n}\max_{x\in\Omega}|u_{x_i}(x)| + \max_{1\leq i\leq n}\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|u_{x_i}(x)-u_{x_i}(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

Sejam,

$$\begin{aligned} P^+ &= \left\{u \in E :\ u > 0 \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e } \ \frac{\partial u}{\partial w} < 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\right\} \\ P^- &= -P^+ \quad \text{e} \quad P = P^+ \cup P^-, \end{aligned}$$

onde, $\dfrac{\partial}{\partial w}$ é a derivada direcional normal exterior à $\partial\Omega$. Observe que P^+ e P^- são subconjuntos abertos de E. De fato, provaremos que para $u \in P^+$, existe $r > 0$ tal que $B_r(u) \subset P^+$. Sejam $v \in E$, e $\delta > 0$ tais que $\|u-v\|_{1+\alpha} < \dfrac{\delta}{2}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial w}(x) \leq -\delta < 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial w}(x) &= \frac{\partial u}{\partial w}(x) - \left(\frac{\partial u}{\partial w}(x) - \frac{\partial v}{\partial w}(x)\right) \\ &< -\delta + \left|\frac{\partial u}{\partial w}(x) - \frac{\partial v}{\partial w}(x)\right| \\ &\leq -\delta + \|u-v\|_{1+\alpha} \\ &\leq -\delta + \frac{\delta}{2} = -\frac{\delta}{2} < 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{\partial v}{\partial w}(x) < 0$ para todo $v \in B_r(u)$ se $r > 0$ é suficientemente pequeno. Como a função $\left|\dfrac{\partial u}{\partial w}(x)\right|$ é positiva para todo $x \in \partial\Omega$, vamos mostrar que, existe uma vizinhança da $\partial\Omega$, ou seja,

$$\partial\Omega \subset \Omega_1 = \{x \in \Omega :\ \text{dist}(x,\partial\Omega) < r_1\},$$

tal que $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega_1$. Caso contrário, existe uma sequência x_n próximo à $\partial\Omega$ tal que $v(x_n) \leq 0$, para todo n. Seja, $x_n^* \in \partial\Omega$ tal que $\dfrac{x_n^* - x_n}{\|x_n^* - x_n\|} = w_n$, vetor normal unitário exterior à $\partial\Omega$ em x_n^*. Como $v(x_n) \leq 0$ e $v(x_n^*) = 0$, defina

$$f(t) = v(x_n + t(x_n^* - x_n)),$$

onde $f(0) = v(x_n) \leq 0$, e $f(1) = v(x_n^*) = 0$. Então pelo Teorema do Valor Médio existe $t_n \in (0,1)$ tal que $f'(t_n) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(t_n) = \frac{\partial v}{\partial \overline{w}_n}(\overline{x}_n) \\ &= \nabla v(\overline{x}_n) \cdot (w_n \|x_n^* - x_n\|). \end{aligned}$$

Logo,

$$0 = \nabla v(\overline{x}_n) \cdot w_n$$

para alguma subsequência $w_n \longrightarrow w$ e $\overline{x}_n \longrightarrow x_0 \in \partial\Omega$, então

$$\frac{\partial v}{\partial w_n}(\overline{x}_n) = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial w}(x_0) = 0,$$

que é uma contradição pois $\dfrac{\partial v}{\partial w}(x_0) < 0$. Portanto, $v(x) > 0$, para todo $x \in \Omega_1$. Agora vamos provar que $v > 0$ em Ω_0, onde $\Omega_0 \subset \Omega$ e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$. Sejam $x \in \Omega_0$ e $\delta_0 > 0$ tal que $[u(x)] \geq \delta_0 > 0$, se $v \in B_{\frac{\delta_0}{2}}(u)$, então $\|u - v\|_{1+\alpha} < \dfrac{\delta_0}{2}$.

$$\begin{aligned} v(x) &= u(x) - (u(x) - v(x)) \\ &\geq u(x) - \max_{x \in \Omega_0} |u(x) - v(x)| \\ &\geq u(x) - \|u - v\|_{1+\alpha} \\ &\geq \delta_0 - \frac{\delta_0}{2} = \frac{\delta_0}{2} > 0, \ \ \forall\, x \in \Omega_0. \end{aligned}$$

Portanto, $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, desde que $v \in B_r(u)$ com r suficientemente pequeno. Isso mostra que P^+ é aberto em E.

A aplicação G de $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ pode ser definida como: para $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$, seja $v = G(\lambda, u)$ a solução de

$$\left\{ \begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,u,Du) v_{x_i x_j} &+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u,Du) v_{x_i} + c(x,u,Du) v \\ &= \lambda \left(a(x)u + F(x,u,\lambda)\right), \quad x \in \Omega \\ v &= 0, \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \right. \tag{3.19}$$

Como $u \in E$, neste caso a equação (3.19) é uma equação linear em v uniformemente elíptica com coeficientes em C^α. Portanto, pela estimativa de Schauder [9] (Teorema do capítulo 4, seção 4.7 página 336) a equação (3.19) possui uma única solução $v \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|v\|_{2+\alpha} \leq M \|\lambda(a(x)u + F(x,u,\lambda))\|_\alpha, \tag{3.20}$$

onde M é uma constante que não depende de u. Qualquer solução de (3.17) satisfaz $u = G(\lambda, u)$ e reciprocamente. Pela estimativa de Schauder e pela imersão compacta de $C^{2+\alpha} \hookrightarrow C^{1+\alpha}$,

$G : \mathscr{E} = \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ é contínuo e compacto.

Seja $w = Lu$, a única solução de

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,0,0)w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,0,0)w_{x_i} + c(x,0,0)w &= a(x)u, \quad x \in \Omega \\ w &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Então $L : E \longrightarrow E$ é linear e pela estimativa de Schauder $w \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, assim

$$L : E \xrightarrow{f} C^{2+\alpha} \cap \mathrm{B.C} \xhookrightarrow{i} C^{1+\alpha} \cap \mathrm{B.C} = E$$

onde f é contínua e por Arzelá -Ascoli i é compacto, então $L = i \circ f$ é compacto. Portanto, $L : E \longrightarrow E$ é compacto. Seja $u \in \overline{P^+}$, $u \not\equiv 0$, então $\mathscr{L}w = au \geq 0$, pelo principio do máximo forte [11] (Cap. 6, Seção 6.4, Teorema 4), $w > 0$ em Ω e $\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0$, isto é, $w \in P^+$. Então L é um operador estritamente positivo em $\overline{P^+}$. Considere o problema de valores característicos lineares $v = \mu L v$ a única solução de

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,0,0)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,0,0)v_{x_i} + c(x,0,0)v &= \mu a(x)v, \quad x \in \Omega \\ v &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.22}$$

Como L é compacto e estritamente positivo em $\overline{P^+}$, então pelo Teorema de Krein-Rutman [7] (Cap. 3, Seção 3.6, Teorema 3.6.12), segue que, o valor característico μ_1 de L é positivo e simples e possui uma única autofunção correspondente v_1 em P^+ com $\|v_1\|_{1+\alpha} = 1$.

Provaremos que $H(\lambda, u) = G(\lambda, u) - \lambda L u = o(\|u\|_{1+\alpha})$, para $u \longrightarrow 0$ uniformemente sobre intervalos limitados de λ. De fato, suponhamos que, existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\lambda_n, u_n) \longrightarrow (\lambda, 0)$ em $\mathbb{R} \times E$ tal que

$$\left\| \frac{H(\lambda_n, u_n)}{\|u\|_{1+\alpha}} - 0 \right\| > \varepsilon. \tag{3.23}$$

Sejam, $v_n = G(\lambda_n, u_n)$ e $w_n = \lambda_n L u_n$. Então

$$V_n = \frac{v_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}} \text{ e } W_n = \frac{w_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}$$

satisfazem, respectivamente,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,u,Du)V_{n x_i x_j} &+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,u,Du)V_{n x_i} + c(x,u,Du)V_n \\ &= \lambda_n \left(a(x)u_n + F(x,u_n,\lambda_n)\right) \cdot \|u_n\|_{1+\alpha}^{-1}, \quad x \in \Omega & (3.24) \\ \mathscr{L}W_n &= \lambda_n\, a\, u_n \, \|u_n\|_{1+\alpha}^{-1}, \qquad x \in \Omega & (3.25) \\ V_n &= W_n = 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega. & (3.26) \end{aligned}$$

Do lado direito de (3.24) e (3.25) e da hipótese de $F(x,u,\lambda) = o(|u|)$, quando $u \to 0$

uniformemente sobre intervalos limitados de λ, tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\lambda_n a(x)u_n + \lambda_n F(x,u_n,\lambda_n)}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha &\leq \left\|\frac{\lambda_n a(x)u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha + \left\|\frac{\lambda_n F(x,u_n,\lambda_n)}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha \\
&= |\lambda_n|\|a(x)\|_\alpha \left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha + |\lambda_n| \left\|\frac{F(x,u_n,\lambda_n)}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha \\
&\leq \max\{|\lambda_n|\}\|a(x)\|_\alpha \left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha + \max\{|\lambda_n|\} \left\|\frac{F(x,u_n,\lambda_n)}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha \\
&< \lambda_0 C, \quad \forall\, n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\lambda_n a(x)u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha &= |\lambda_n| \left\|\frac{a(x)u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha \\
&\leq \max\{|\lambda_n|\}\|a(x)\|_\alpha \left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}}\right\|_\alpha \\
&< \lambda_0 c, \quad \forall\, n.
\end{aligned}$$

Portanto, o lado direito de (3.24) e (3.25) são uniformemente limitados com relação a n em $C^\alpha(\overline{\Omega})$. Pela estimativa de Schauder (3.20), e como a sequência $(\lambda_n, u_n) \longrightarrow (\lambda, 0)$ em $\mathbb{R}\times E$, então

$$\begin{aligned}
\|V_n\|_{2+\alpha} &< \widetilde{C} \quad \forall\, n. \\
\|W_n\|_{2+\alpha} &\leq \widetilde{c} \quad \forall\, n.
\end{aligned}$$

Portanto, V_n e W_n são uniformemente limitadas em $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequencia

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}} \longrightarrow \phi \in C^1(\overline{\Omega}),$$

e as subseqüências V_n e W_n convergem em $C^2(\overline{\Omega})$ a V e W, e ambas satisfazem

$$\left\{\begin{aligned} \mathscr{L}\psi &= \lambda a\phi, \quad x\in\Omega \\ \psi &= 0, \quad x\in\partial\Omega \end{aligned}\right. . \tag{3.27}$$

Assim, $V = W$, então

$$\|V_n - W_n\|_{1+\alpha} = \frac{H(\lambda_n,u_n)}{\|u_n\|_{1+\alpha}} \longrightarrow 0.$$

Isto contradiz (3.23). Portanto $H(\lambda,u) = o(\|u_n\|_{1+\alpha})$, quando $u \longrightarrow 0$ uniformemente sobre intervalos limitados de λ.

Como μ_1 e $G(\lambda,u)$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Rabinowitz 3.2.1, então existe uma componente $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{S}$ que contém $(\mu_1,0)$ e ou $\mathscr{C}_1$ é não limitada em $\mathscr{E}$ ou contém $(\hat{\mu},0)$ com $\hat{\mu}$ valor característico de L diferente de μ_1. O teorema a seguir demonstra que só a primeira alternativa é possível.

Teorema 3.3.2 *Existe uma componente $\mathscr{C}_1$ de $\mathscr{S}$ em $(\mathbb{R}^+\times P)\cup\{(\mu_1,0)\}$ que contém $(\mu_1,0)$ e é não limitada.*

Para provar o Teorema 3.3.2 precisamos dos seguintes lemas análogos a os Lemas 3.3.1 e 3.3.2.

Lema 3.3.3 *Existe uma vizinhança N de $(\mu_1, 0)$ tal que, se $(\lambda, u) \in N \cap \mathscr{S}$ e $u \not\equiv 0$, então $u \in P$. Além disso, se $\hat{\mu} \in r(L)$, $\hat{\mu} \neq \mu_1$, então existe uma vizinhança $\hat{N}$ de $(\hat{\mu}, 0)$ tal que se $(\lambda, u) \in \hat{N} \cap \mathscr{S}$ e $u \not\equiv 0$, então $u \notin P$.*

Demonstração: A prova da primeira afirmacão é completamente similar ao Lema 3.3.2 e portanto será omitida. Suponhamos que a segunda afirmacão não é verdadeira, então existe uma sequência $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathscr{S} \cap (\mathbb{R} \times P)$ com

$$(\lambda_n, u_n) \longrightarrow (\hat{\mu}, 0), \text{ quando } n \to \infty,$$

tal que $u_n \in P$ e $\dfrac{u_n}{\|u_n\|_{1+\alpha}} \longrightarrow w$, satisfazendo

$$w = \hat{\mu} L w.$$

Como $w \in \overline{P}$ e $\|w\|_{1+\alpha} = 1$, então $w = v_1$ ou $w = -v_1$. Isto é uma contradição pois pelo Teorema de Krein-Rutman [7] (Cap. 3, Seção 3.6, Teorema 3.6.12) μ_1 é o único autovalor de L com autofunção em P, e $\hat{\mu} \neq \mu_1$. ■

Lema 3.3.4 *Suponhamos que $(\lambda, u) \in \mathscr{C}_1$, com $(\lambda, u) \neq (\mu_1, 0)$ e*

$$(\lambda, u) = \lim_{n \to \infty} (\lambda_n, u_n),$$

onde $(\lambda_n, u_n) \in (\mathbb{R}^+ \times P) \cap \mathscr{S}$. Então $(\lambda, u) \in (\mathbb{R}^+ \times P)$.

Demonstração: Observe que $(\lambda, u) \in \mathscr{C}_1$, implica que $\lambda > 0$, pois $\lambda = 0$ não é autovalor de (3.17). De fato, se $(0, w) \in \mathscr{C}_1$ para algum $w \in E$, então w satisfaz (3.17) com o lado direito igual a 0. Pela afirmacão da unicidade do Teorema da estimativa de Schauder [9] (Teorema do capítulo 4, seção 4.7 página 336) segue que $w = 0$. Isto é uma contradição, pois $(0, 0)$ não é um ponto de bifurcação para uma equação da forma (3.2). Assim, $\lambda > 0$.

A seguir, suponhamos que (λ, u) é como na afirmacão do Lema 3.3.4 e $u \notin P$, então $\lambda > 0$ e $u \in \partial P = \partial P^+ \cup \partial P^-$. O argumento é o mesmo seja para $u \in \partial P^+$ ou ∂P^- assim consideramos o primeiro caso. A definição de P^+ implica que ou

i) existe $\xi \in \Omega$ tal que $u(\xi) = 0$ ou

ii) $\frac{\partial u(\eta)}{\partial \nu} = 0$, para algum $\eta \in \partial \Omega$.

Suponhamos que (i) ocorre. Pela forma de F, existe uma vizinhança U de ξ tal que

$$|F(x, u(x), \lambda)| \leq \frac{a_0 u(x)}{2} \text{ em } U.$$

Portanto, da equação (3.17) segue que

$$\begin{aligned} \mathscr{L} u &= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x, u, Du) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, u, Du) u_{x_i} \\ &\quad + c(x, u, Du) u = \lambda \left(a(x) u + F(x, u, \lambda) \right) \\ &\geq a(x) u - \frac{a_0 u(x)}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \ a_0u(x) - \frac{a_0u(x)}{2}, \ \text{onde} \ \ a_0 = \inf_{x\in\Omega} a(x) \\
&\geq \ \frac{a_0u(x)}{2} \geq 0, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

então

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{L}u & \geq & 0, \quad x \in \Omega \\ u & \geq & 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{3.28}
$$

Como u tem um mínimo local em $x = \xi$, o Princípio do máximo [11] (Cap. 6, Seção 6.4, Teorema 2), implica que $u \equiv 0$ em U. Por um argumento de continuação se prova que

$$u \equiv 0 \text{ em } \Omega.$$

Isso implica que $(\lambda, 0)$ é um ponto de bifurcação e como $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ com $u_n \in P^+$, então pelo Lema 3.3.3 temos que $(\lambda, u) = (\mu_1, 0)$, isso contradiz a hipótese.

Se (ii) ocorre, então por argumentos similares, existe uma vizinhança U de $\eta \in \partial\Omega$ a qual (3.28) é satisfeita. Como u tem um mínimo local em η e $\frac{\partial u(\eta)}{\partial \nu} = 0$, o Princípio do máximo e o Lema de Hopf [11] (Cap. 6, Seção 6.4, pág. 330) implicam que $u \equiv 0$ em U. Isto é uma contradição como em (i). ■

Demonstração: [Do Teorema 3.3.2] Se $\mathscr{C}_1$ não está contido em $(\mathbb{R}^+ \times P) \cup \{(\mu_1, 0)\}$, pela conectividade de $\mathscr{C}_1$ e pelo Lema 3.3.3, existe $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times \partial P$ tal que

$$(\lambda, u) \neq (\mu_1, 0) \ \text{ e } \ (\lambda, u) = \lim_{n\to 0} (\lambda_n, u_n),$$

onde $(\lambda_n, u_n) \in (\mathbb{R}^+ \times P) \cap \mathscr{C}_1$. Mas pelo Lema 3.3.4 $(\lambda, u) \in (\mathbb{R}^+ \times P)$. Isto é uma contradição. Portanto, $\mathscr{C}_1 \subset (\mathbb{R}^+ \times P) \cup \{(\mu_1, 0)\}$ é não limitada nesse conjunto. ■

Referências Bibliográficas

[1] Amann, H. and Weiss, S., *On the Uniqueness of the Topological degree*, Math. Z. 130 (1973), 39–54.

[2] Ambrosetti, A. and Arcoya, D., *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 82, Springer, New York, 2011.

[3] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A., *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press , 2007.

[4] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press , 1993.

[5] Brezis, H., *Funtional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[6] Brown, R. F., *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, 3rd Edition, Birkhauser, 2014.

[7] Chang, K. C., *Methods in Nonlinear Analysis*, School of Mathematical Sciences, Peking University, Springer, New York, 2005.

[8] Coddington, E. A. and Levinson N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[9] Courant, R. and Hilbert D., *Methods of mathematical physics*, Interscience, Vol. 2, New York, 1962.

[10] Crandall M. G Rabinowitz, P. H., *Bifurcation from Simple Eigenvalue* , J. Functional Analysis 8 (1971) 321-340.

[11] Evans, L. C., *Partial Diferential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, 1998.

[12] Gilbarg D. and Trudinger N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, New York, 1998.

[13] Heinz E., *An elementary analytic theory of the degree of mapping in n-dimensional space*, J. Math. Mech. 8 (1959), 231–247.

[14] Hönig, C. S., *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970.

[15] Rabinowitz, P. H., *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, J. Functional Analysis 7 (1971) 487-513.

[16] Rabinowitz, P. H., *Some aspects Nonlinear Eigenvalue Problems*, Rocky Mountain, J. of Mathematics, Vol. 3, Number 2, Springer, (1973) 161-202.

[17] Sattinger, D. H., *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 309, Berilin: Springer, 1973.

[18] ———, *A Global Theorem for Nonlinear Eigenvalue Problems and Applications*, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, edited by Zarantonello E. H., Academic Press, New York, (1984) 11-36.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 08 de Agosto de 2017

Diana Yovani Rodríguez Villena