UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JOÃO MIGUEL BATISTA MATZENBACHER

O teorema de Noether e o momento angular de Ondas Gravitacionais

Guaratinguetá
2022

João Miguel Batista Matzenbacher

O teorema de Noether e o momento angular de Ondas Gravitacionais

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física - Bacharelado da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estatual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física - Bacharelado .

Orientador: Profº Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves

Guaratinguetá
2022

Matzenbacher, João Miguel Batista
M446t O Teorema de Noether e o momento angular de ondas gravitacionais / João Miguel Batista Matzenbacher – Guaratinguetá, 2022.
79 f : il.
Bibliografia: f. 78-79

Trabalho de Graduação em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2022.
Orientador: Prof. Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves

1. Teorema de Noether. 2. Ondas gravitacionais. 3. Ondas (Física). 4. Teoria de campos (Física). I. Título.

CDU 534

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JOÃO MIGUEL BATISTA MATZENBACHER

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUANDO EM FÍSICA - BACHARELADO "**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA - BACHARELADO

Profº Dr. JULIO MARNY HOFF
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Profº Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves
Orientador/UNESP-ICT

Profº Dr. Denis Dalmazi
UNESP-FEG

Profº Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti
UNESP-FEG

Março , 2022

DADOS CURRICULARES

JOÃO MIGUEL BATISTA MATZENBACHER

NASCIMENTO	22/04/2000 - São Paulo / SP
FILIAÇÃO	Jaime Milton Matzenbacher Carmem Silvia Batista
2018 / 2021	Graduação (Física - Bacharelado) FEG-UNESP

Dedico este trabalho à todos que contribuíram para a minha formação.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Márcio Eduardo, quem sempre muito solícito, reservava o seu tempo para dar atenção a todas e quaisquer dúvidas que eu pudera ter ao longo desta jornada, não apenas sobre Ondas Gravitacionais, ou Álgebras de Lie, mas também questões relacionadas às perspectivas futuras dentro da área acadêmica. Ao sempre se preocupar com a qualidade dos trabalhos, me passou valorosos ensinamentos sobre o que é produzir ciência no papel de um futuro pesquisador.

Agradeço à minha mãe e a Baby, por sempre estarem ao meu lado, nunca me deixando desamparado. Por sempre terem me incentivado a estudar, fornecendo quaisquer subsídios e meios para esse fim. Por terem festejado todos os meus sucessos, mas também não deixarem as minhas frustrações me derrubarem.

Gostaria de agradecer, também à minha namorada e amigos, todos que sempre estiveram comigo, suportando todas as ansiedades, medos, aflições e desavenças ao longo de toda a graduação; uma epopeia de 4 anos de duração. Todos sempre muito solidários em todas as vezes que me ausentei para lidar com compromissos da faculdade.

Em especial, gostaria de agradecer ao meu pai, que por toda a vida se preocupou com a minha fluência na língua inglesa, e em 2016, através de um recorte de revista - uma reportagem sobre a primeira detecção direta da radiação gravitacional na história - me apresentou ao incrível mundo das Ondas Gravitacionais, ao mundo do pensamento científico e da investigação da natureza.

"...it's been a hard day's night, I should be sleepin' like a log..."
(Lennon and McCartney)

RESUMO

O Teorema de Noether é uma ferramenta poderosa dentro da mecânica analítica, esse consegue relacionar quantidades invariantes e simetrias dentro de um sistema físico. Todos os ferramentais advindos dos formalismos Lagrangianos e Hamiltonianos podem ser estendidos para a Teoria Clássica de Campos, a qual, através da implementação dos chamados Campos, se apresenta como uma perspectiva alternativa no estudo da natureza. Com base em estudos bibliográficos, valendo-se de resultados advindos dos Grupos de Transformação, foram estudados campos de Spin-0, Spin-1 e, em especial, Spin-2, sendo este último, o Campo referente às Ondas Gravitacionais. Veremos que as simetrias acarretarão na conservação das chamadas Cargas de Noether, no escopo da Teoria Clássica de Campos, dando principal atenção ao Momento Angular. No contexto das Ondas Gravitacionais, foi observado que durante as fases de coalescência de um sistema binário, todo o Momento Angular do sistema pode ser dissipado em forma de radiação gravitacional, e assim sendo, faz parte dos objetivos primários a realização de uma estimativa da quantidade de Momento Angular irradiada pelo primeiro sinal gravitacional detectado pelos Observatórios LIGO, o GW150914.

PALAVRAS-CHAVE: Teorema de Noether. Momento angular. Ondas gravitacionais.

ABSTRACT

Noether's theorem is a powerful tool inside Analytical Mechanics, which can relate invariant quantities and symmetries in a physical system. All the tooling from Lagrangian and Hamiltonian formalism could be extended to Field Theory, which, through the implementation of the objects called Fields, introduces themselves as a new point of view in nature research. Taking advantage of the results from Transformation Groups, we have studied Spin-0, Spin-1, and especially Spin-2 Fields, the last one referring to Gravitational Waves Field. We will see that symmetries would entail conserved Noether's Charges in the scope of Classical Field theory. On the Gravitational Waves context, observing the different stages of the coalescence of a binary system, angular momentum irradiations could be emitted in gravitational radiation waveform. Based on bibliographical research, part of the primary objectives of this work is to make estimations of how much angular momentum had been irradiated by the GW150914 gravitational wave signal, the first signal ever detected by Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO).

KEYWORDS: Noether's theorem. Angular momentum. Gravitational-waves.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Demonstração de alguns dos caminhos possíveis e o desvio $\eta(x)$. 18
Figura 2 Esquematização de um sistema binário, com orbita elíptica de semi-eixo maior igual a a e semi-eixo menor igual a b. 69
Figura 3 Sinal GW150914 detectado pelo LIGO em 2015. 69
Figura 4 Gráfico da frequência em função do tempo. 70
Figura 5 Gráfico da potencia $-8/3$ da frequência em função do tempo. 71
Figura 6 Gráfico do comportamento do semi-eixo maior em função do tempo. 74
Figura 7 Gráfico da taxa de momento angular irradiado em função do tempo. 75

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
TT	Transverso e sem Traço
GW	Gravitational Waves
OGs	Ondas Gravitacionais

LISTA DE SÍMBOLOS

índices gregos	cobrem as componentes espaciais e temporais
índices latinos	representam apenas os índices espaciais
$A_{,\alpha}; \partial_\alpha A$	derivada parcial do elemento A com respeito ao índice α

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

2 REVISÃO DA DINÂMICA HAMILTONIANA E O TEOREMA DE NOETHER 17
2.1 FUNCIONAL E A SUA EXTREMIZAÇÃO 17
2.2 NOTAÇÃO VARIACIONAL 20
2.3 A RELAÇÃO ENTRE SIMETRIAS E A CONSERVAÇÃO DE GRANDEZAS FÍSICAS 21
2.3.1 CONCEITOS INTRODUTÓRIOS DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO 21
2.3.2 SIMETRIA E INVARIÂNCIA 23
2.4 O TEOREMA DE NOETHER 25
2.4.1 FORMALIZAÇÃO DA INVARIÂNCIA EM CONCILIAÇÃO COM A EXTREMIZAÇÃO 25
2.4.2 QUANDO A INVARIÂNCIA ENCONTRA A EXTREMIZAÇÃO 27
2.4.3 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE NOETHER 28

3 INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS 31
3.1 GRUPOS, ÁLGEBRAS E OS ESCALARES 31
3.1.1 GRUPO DE LORENTZ 32
3.1.2 ÁLGEBRA DE LORENTZ 33
3.1.3 DEFINIÇÃO DE UM CAMPO ESCALAR E O MOMENTO ANGULAR 34
3.2 A DINÂMICA CLÁSSICA DOS CAMPOS 36
3.2.1 EXTREMIZAÇÃO DA AÇÃO E A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE PARA CAMPOS 37
3.2.2 AS IDENTIDADES DE RUND-TRAUTMAN E O TEOREMA DE NOETHER PARA CAMPOS 40
3.2.3 O TENSOR ENERGIA-MOMENTO 44
3.2.4 O CAMPO ESCALAR (SPIN-0) 45
3.2.5 O CAMPO ELETROMAGNÉTICO (SPIN-1) 48
3.2.6 O MOMENTO ANGULAR DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO 52

4 ONDAS GRAVITACIONAIS E O MOMENTO ANGULAR 56
4.1 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN 56
4.2 O CALIBRE TRANSVERSO E SEM TRAÇO 58
4.3 TENSOR MOMENTO DE QUADRUPOLO E A PROJEÇÃO PARA O CALIBRE TT 61
4.3.1 O TENSOR MOMENTO DE QUADRUPOLO 61
4.3.2 O OPERADOR PROJEÇÃO E SUAS PROPRIEDADES 62

4.4 O TEOREMA DE NOETHER E O MOMENTO ANGULAR PARA AS ONDAS GRAVITACIONAIS 64

5 ALGUMAS APLICAÇÕES PARA SISTEMAS BINÁRIOS 68
5.1 CARACTERIZAÇÃO DOS SISTEMAS BINÁRIOS E A ANÁLISE NEWTONIANA DO SINAL GW150914 68
5.2 O MOMENTO ANGULAR ORBITAL DISSIPADO EM FUNÇÃO DO TEMPO PARA UM SISTEMA BINÁRIO E O SISTEMA GW150914 71

6 CONCLUSÃO 76

REFERÊNCIAS 77

1 INTRODUÇÃO

Na segunda metade do século XVII, os grandes físicos da época, como Christiaan Huygens (1629 - 1695) e Sir Isaac Newton (1642 - 1727), preocupavam-se com a formalização de ideias sobre a natureza, que hoje, são imprescindíveis para a Física como a conhecemos. Nesta época, Huygens, apoiando-se nos princípios cartesianos, dá início à geometrização da ciência do movimento com fins de se entender o movimento de corpos pesados (CINDRA, 2021). Mais tarde, para o final daquele mesmo século, Newton publica o primeiro dentre três volumes do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (em português, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural). É neste conjunto de obras em que Newton inova, mas também condensa o entendimento sobre as leis da natureza manifestado por meio das relações geométricas.

Aproximadamente cem anos mais tarde, deu-se início, semeada na Inglaterra, a primeira revolução industrial, esta trouxe consigo, não apenas o capitalismo industrial, grandes corporações e o surgimento de uma nova classe social denominada proletariado, mas também uma visão mecanicista do mundo, a qual, atrelada ao progresso tecnológico desenfreado, abriu portas para o desenvolvimento de áreas na física como a mecânica e a química. Foi nesta mesma época em que as indústrias, pautadas na demanda gerada pela necessidade de inovação rápida, passaram a empregar os matemáticos e cientistas de formação (EVES, 2004), que agora, começaram a desempenhar um papel econômico importantíssimo na sociedade.

Neste contexto, viveu Willian Rowan Hamilton (1805 - 1865), um pródigo matemático irlandês, que com apenas vinte e dois anos de idade, tornou-se diretor do Observatório de Dunsink, tornando-se, também, professor de astronomia na universidade. Hamilton, também teve contribuições de suma importância no desenvolvimento da álgebra dos números complexos e dos quatérnions, recebendo o título de *Sir* em 1835.

Dentre as imensuráveis contribuições de Hamilton para a Física e Matemática, considerando o escopo do presente trabalho, nos interessa a formulação do princípio da mínima ação, o qual mais tarde, passaria a ser referido por Princípio de Hamilton. Este é considerado um dos mais importantes dentre os formalismos da Mecânica Analítica. O motivo é que para problemas suficientemente complexos, envolvendo um grande número de vínculos, por exemplo, a formulação vetorial das leis do movimento, proposta por Newton em meados do século XVII, torna-se refém destes vínculos desnecessários e é restringida pela geometria do sistema de coordenadas em uso, assim sendo, com fins de simplicidade e praticidade, faz-se necessária a busca por uma maior generalização das leis do movimento (THORNTON; MARION, 2004).

Neste contexto, o princípio variacional de Hamilton, sendo usado como meio de consecução das equações do movimento de Euler-Lagrange (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001), surge como um ferramental de grande valia na abordagem da dinâmica de um sistema, além das facilitações no tratamento de problemas com vínculos não-holonômicos, torna mais fácil a discussão acerca das propriedades de simetria dos sistemas físicos (FILHO, 2009).

Mais tarde, no ano de 1882, em Erlanger, na Alemanha, nasce Amalie Emmy Noether, quem

viria a se tornar uma genial algebrista, descrita nas próprias palavras de Einstein, por: "...the most significant creative mathematical genius..."(IAS. . . , 2017). Além de todas as contribuições no campo da Matemática, Emmy Noether também teve grandes importância no estudo da Física envolvendo a conservação de grandezas. Assim como veremos ao decorrer do trabalho, a algebrista desenvolveu o chamado Teorema de Noether, o qual é responsável por evidenciar a relação entre simetrias e leis de conservação de um sistema físico.

Foi em 1915, que Albert Einstein publicou uma das mais completas teorias a respeito da gravidade, a Teoria da Relatividade Geral, na qual, diferentemente do que fora proposto por Newton - a atração entre corpos regida por uma força gravitacional - Einstein infere que corpos massivos deformam a malha do espaço-tempo, e assim, como consequência dessa nova visão, corpos em movimento provocam perturbações na malha do espaço, que se propagam na velocidade da luz. Essas perturbações, nada mais são do que as Ondas Gravitacionais.

O fenômeno da radiação gravitacional, como também é referido, foi indiretamente detectado em 1974, por Russel Hulse (1950 - atualmente) e Joseph Taylor (1941 - atualmente), em que ao analisar o tempo de periastro do sistema binário catalogado como PSR 1913+16, notou-se que este sistema estaria perdendo energia e momento angular ao passar dos anos, e um dos motivos desta perda poderia estar atrelada a emissão de Ondas gravitacionais durante o movimento de espiralação do sistema (HULSE; TAYLOR, 1975).

Somente 100 anos após a publicação da Teoria da Relatividade Geral, este fenômeno pôde ser diretamente detectado pela primeira vez na história. A detecção ocorreu em 2015 e foi intermediada pelos detectores interferométricos do *Advanced LIGO* (ABBOTT et al., 2016). Constatou-se um padrão ondulatório cuja frequência e amplitude aumentavam com o tempo, atingindo cerca de 150 Hz, e havendo um corte abrupto do sinal por volta dos $0{,}12$s de duração. Valendo-se de técnicas da Relatividade Numérica e aproximações pós-Newtonianas, foram provados que estas características do sinal diziam respeito às fases de coalescência de um sistema binário composto por duas massas de, aproximadamente, $35M_{\odot}$ (35 massas solares) cada. Dessa forma, durante as fases mais agressivas de sua espiralação, o sistema perdia energia potencial, aumentando a frequência orbital, e ao se fundir (fase também chamada de *merger*) tinha a emissão de sinal cessada, este evento foi catalogado como GW150914 (ABBOTT et al., 2017). Atualmente, a colaboração *LIGO* se encontra na segunda parte da terceira rodada de observações, com cerca de 50 detecções oficiais, o que totaliza, aproximadamente 80 eventos no total, contabilizando sinais comprovados e possíveis candidatos (ABBOTT et al., 2021).

As inovações trazidas por Noether e Hamilton traduzem com excelência as leis do movimento de sistemas discretos de partículas, apresentando um ferramental rebuscado em seu formalismo. Observaremos que todo esse ferramental pode ser empregado no estudo dos campos, os quais, em detrimento da descrição de partículas pontuais feita nos clássicos exemplos de mecânica analítica, agora, podem ser entendidos como uma superfície caracterizada por determinada densidade Lagrangiana.

Em síntese, no segundo capítulo introduziremos os formalismos hamiltonianos e lagrangianos para sistemas com finitos graus de liberdade. Tomando como base as referências (LEMOS, 2013) e (NEUENSCHWANDER, 2011), foram contemplados os ferramentais necessários para a investigação dos aspectos qualitativos e quantitativos da mecânica analítica, culminando na apresentação do teorema

de Noether a partir das identidades de Rund-Trautman.

Seguindo para o terceiro capítulo, utilizaremos, principalmente, as referências (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019) e (MAGGIORE, 2005) para a introdução dos temas subjacentes à teoria de grupos, com foco no subgrupo de Lorentz, o qual, partindo do comportamento de objetos perante as leis de transformação, fornece subsídios para a definição formal dos Campos. Em seguida, por meio, ainda, das referências supracitadas, acrescidas de (GREINER; REINHARDT, 1996), todos os formalismos antes comentados serão estendidos dentro do contexto da Teoria Clássica de Campos, em que chegaremos nas Identidades de Rund-Trautman para campos, e como consequência, o teorema de Noether dentro dessa teoria. Ao final do capítulo, apresentaremos a aplicação dos conceitos vistos para os Campos Spin-0 (escalares) e Spin-1 (eletromagnético), culminando na consecução do Momento Angular como carga de Noether conservada. Em resumo, as cargas de Noether conservadas são constantes de movimento que podem ser utilizadas para compor as equações do movimento para cada campo, quanto mais constantes de movimento forem utilizadas, mais fácil torna-se a solução das equações do movimento.

Com base nas referências (MAGGIORE, 2008), (BAMBI, 2018) e (SCHUTZ, 2009), exploraremos os aspectos geométricos das Ondas Gravitacionais como uma decorrência das equações de campo de Einstein no regime linearizado. Mais adiante, serão apresentados conceitos como o tensor momento de quadrupolo e operadores de projeção que serão utilizados nas seções que compõem a conclusão do trabalho. Não diferente dos outros campos, o teorema de Noether também será aplicado para o campo Spin-2, obtendo informações importantes sobre a conservação do momento angular de um sistema binário genérico.

Por fim, no capítulo 5, utilizaremos os resultados obtidos para o campo Spin-2 para investigar o momento angular orbital carregado para fora de sistemas binários em forma de Ondas Gravitacionais. Desta feita, aplicaremos os cálculos para investigar o comportamento do sistema GW150914 durante as fases de coalescência. Para alcançar estes fins, caracterizaremos os sistemas binários do ponto de vista físico, demonstrando como o estudo teórico realizado até o final do capítulo 4 pode ser aplicado em sistemas reais.

Parte deste trabalho, apresenta-se como uma conclusão dos estudos apresentados na primeira e segunda fase do XXXIII Congresso de Iniciação Científica da Unesp, em que foram tratados os aspectos subjacentes a dissipação de energia por sistemas binários, bem como os aspectos qualitativos e quantitativos referente as diferentes estratégias de detecção e análises dos dados obtidos pela colaboração *LIGO*, em específico para o sinal GW150914.

2 REVISÃO DA DINÂMICA HAMILTONIANA E O TEOREMA DE NOETHER

Nesta primeira parte do capítulo, será feita uma apresentação aos aparatos relativos ao princípio de Hamilton, tais como, os rudimentos do cálculo de variações e a introdução de uma função real - cujo domínio forma um espaço de funções - denominada funcional, ou ação para determinado caso especial.

Logo em seguida, a começar da segunda metade do capítulo, veremos conceitos valorosos subjacentes à mecânica analítica, tais como, simetria, invariância e leis de conservação, que serão utilizados para a obtenção do influente Teorema de Noether, que virá a ser traduzido para a linguagem da Teoria de Campos nos capítulos posteriores.

2.1 FUNCIONAL E A SUA EXTREMIZAÇÃO

Assim como conta (LEMOS, 2013), o princípio de Hamilton pode ser encarado como uma tentativa bem sucedida de reformular a lei da dinâmica fundamental através de um princípio integral, o qual leva em conta o movimento total de um sistema, do tempo t_1 até um tempo t_2, ambos conhecidos. É neste contexto em que enunciamos a ideia de um funcional, trata-se do mapeamento de um conjunto de funções bem definidas que nos retorna um número pertencente ao grupo dos reais (NEUENSCHWANDER, 2011).

Um dos exemplos mais simples de funcional surge ao analisar a trajetória de uma partícula de um ponto A até um ponto B, podemos computar a distância percorrida pela partícula como:

$$J = \int_A^B dS, \tag{2.1.1}$$

uma somatória de cada elemento infinitesimal de espaço percorrido durante o movimento. Para o mesmo evento, sendo analisado no plano cartesiano XY, do ponto inicial x_1 até x_2, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$J(y(x), y'(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{2.1.2}$$

considerando o elemento de linha $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e $y = y(x)$, uma função da coordenada x.

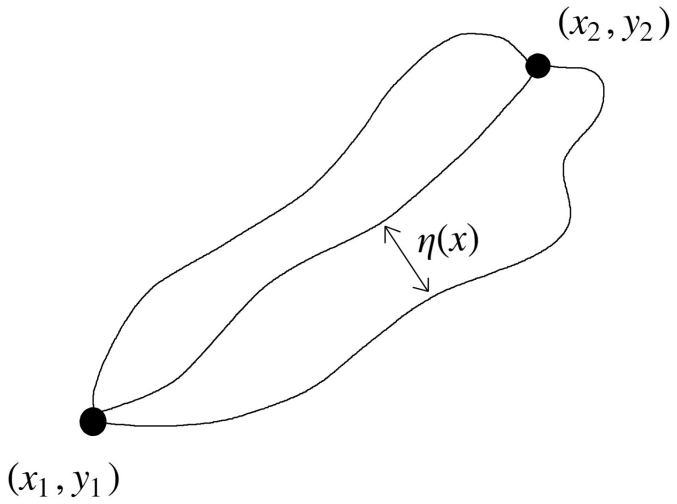
Uma pergunta simples, mas de vasta consequência cabe ser feita aqui: dentre uma miríade de caminhos possíveis para o movimento de uma partícula de um ponto a outro, qual é aquele em que o funcional J assume um valor extremo[1]?

Tratando-se de funções, a solução se assemelharia muito com problemas clássicos de cálculo, nos quais, ao tomar a primeira derivada de alguma função $f(x)$ em x e igualar o resultado a zero, encontraríamos os valores que maximizam ou minimizam a função, entretanto, no presente caso temos uma função de outras funções, um funcional. Para responder a esta pergunta, tomaremos como base a **??**, na qual, as marcações em preto representam o ponto de saída (x_1, y_1), e chegada (x_2, y_2), as linhas

[1] Perceba que ao utilizar a palavra extremo, engloba-se tanto máximos quanto mínimos. Na realidade, gozando de todo rigor, o funcional nunca assumirá um máximo global, apenas um mínimo ou um ponto de sela locais, vide a referência (GRAY; TAYLOR, 2007)

que conectam os pontos são três dos infinitos caminhos possíveis em que uma partícula pode optar trafegar ao se movimentar de um ponto a outro.

Figura 1 – Demonstração de alguns dos caminhos possíveis e o desvio $\eta(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Assumiremos que conhecemos o caminho para o qual o funcional que o descreve é extremizado, digamos que, nesta representação, é o caminho do meio e o chamaremos de $y(x)$. A função $\eta(x)$ é arbitrária e contínua, pode ser entendida como um desvio que difere a trajetória que queremos de qualquer outro percurso possível. Desta forma, podemos representar qualquer caminho entre um ponto e outro pela relação:

$$Y(\varepsilon, x) = y(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{2.1.3}$$

redefinindo a solução em termos do novo parâmetro ε, consideraremos este parâmetro muito pequeno ($|\varepsilon| \ll 1$). Pelo bom comportamento de $\eta(x)$, encontramos também a relação para a derivada de (2.1.3) em função de x,

$$Y'(\varepsilon, x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x). \tag{2.1.4}$$

Neste procedimento, o funcional descrito pela equação (2.1.2), que antes dependia das funções $y(x)$ e $y'(x)$, agora depende apenas do parâmetro ε, desta feita, $J(y(x), y'(x))$, torna-se $\tilde{J}(Y(\varepsilon), Y'(\varepsilon))$ e como sabemos que a solução para $Y(\varepsilon)$ deve ser um extremo em $\varepsilon = 0$ devido as nossas próprias premissas, então basta considerar $\left[\frac{d\tilde{J}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$.

Realizando uma generalização da equação (2.1.2) com respeito a (2.1.3), obtemos a seguinte expressão:

$$\tilde{J}(Y(\varepsilon), Y'(\varepsilon)) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y(\varepsilon, x), Y'(\varepsilon, x), x)dx, \tag{2.1.5}$$

portanto,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{J}(Y(\varepsilon), Y'(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\varepsilon}\left[f(Y(\varepsilon, x), Y'(\varepsilon, x), x)\right]_{\varepsilon=0} dx = 0, \tag{2.1.6}$$

utilizando a regra da cadeia e as relações, $\frac{dY(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \eta(x)$ e $\frac{dY'(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \eta'(x)$ a expressão (2.1.6), torna-se[2]:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\tilde{J}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial Y(\varepsilon,x)}\frac{\partial Y(\varepsilon,x)}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'(\varepsilon,x)}\frac{\partial Y'(\varepsilon,x)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} dx &= 0\\ \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial Y(\varepsilon,x)}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial Y'(\varepsilon,x)}\eta'(x)\right]_{\varepsilon=0} dx &= 0\\ \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y(x)}\eta(x)dx + \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\eta'(x)dx &= 0. \qquad (2.1.7)\end{aligned}$$

Usando integração por partes no segundo termo da equação (2.1.7) e assumindo as condições de contorno $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$ para impor que a solução $Y(\varepsilon)$ passe pelos pontos determinados, obtém-se:

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right)\right]dx = 0. \qquad (2.1.8)$$

Introduzindo o *lema fundamental do cálculo das variações*, o qual assegura que na equação $\int_a^b \zeta(x)\eta(x)dx = 0$, se a função arbitrária respeita as condições $\eta(a) = \eta(b) = 0$, com $\zeta(x)$ e $\eta(x)$ contínuos na primeira e segunda derivada dentro do intervalo fechado $[a,b]$, então $\zeta(x) \equiv 0$ por todo o intervalo. Assim sendo, a equação (2.1.8) recai diretamente sobre a relação

$$\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right) = 0, \qquad (2.1.9)$$

logo, a condição $\frac{\partial f}{\partial y(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right)$ é necessária para que o funcional seja extremizado.

Até o momento, apresentamos a extremização dos funcionais através de uma ideia geométrica, entretanto, para que seja possível a definição do princípio de Hamilton, devemos empregar as mesmas ideias apresentadas, mas desta vez para um sistema físico de N graus de liberdade e especificado no espaço de configurações caracterizado pelas coordenadas generalizadas $q_1, q_2, ..., q_N$. Assim como escrito em (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001), analisaremos o movimento deste sistema entre os intervalos de tempo t_1 e t_2, o que significa dizer que a nova coordenada temporal pode ser encarada como um parâmetro do sistema, sendo este inteiramente definido para cada instante de tempo t. Conforme a passagem do tempo, o sistema se movimenta no espaço de configuração, culminando em uma curva, em outras palavras, o caminho percorrido pelo movimento do sistema no próprio espaço de configurações.

Conforme evidenciado pela seguinte mudança de parâmetros,

$$\begin{cases} x \to t; \\ y(x) \to q(t); \\ y'(x) \to \dot{q}(t); \\ f(y(x), y'(x), t) \to L(q, \dot{q}, t); \\ J(y(x), y'(x)) \to S(q, \dot{q}), \end{cases}, \qquad (2.1.10)$$

[2] A partir deste ponto, alguns argumentos foram omitidos por simplicidade, vale sempre considerar que $f \to f(Y(\varepsilon,x), Y'(\varepsilon,x), x)$ e $\tilde{J} \to \tilde{J}(Y(\varepsilon), Y'(\varepsilon))$.

- sendo $L(q, \dot{q}, t)$ a Lagrangiana do sistema - definida como a energia cinética (T) menos a energia potencial (V) - e $S(q, \dot{q})$, a chamada ação do sistema - concluímos a apresentação das mudanças entre os casos geométricos tratados e os casos da mecânica analítica que ainda serão abordados.

Durante todo o procedimento descrito, na realidade, exploramos um dos exemplos clássicos de uma das áreas da matemática denominada *Cálculo das Variações*, a qual tem como escopo a preocupação com os máximos e mínimos de um funcional. Com a mudança de coordenadas descrita por (2.1.10), encontramos a equação de Euler-Lagrange[3],

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0, \tag{2.1.11}$$

como uma decorrência direta da extremização da ação, este fato nos leva ao *Princípio Variacional de Hamilton*, o qual pode ser, em um primeiro momento, grosseiramente[4] definido como: "dentre todos os caminhos possíveis a natureza escolhe sempre aquele em que a ação, agora definida como,

$$[S(q(t), \dot{q}(t))] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \tag{2.1.12}$$

assume um valor extremo. Nas próximas seções abordaremos uma definição mais formal do princípio da mínima ação de Hamilton por meio do uso de notações características do cálculo das variações.

2.2 NOTAÇÃO VARIACIONAL

Como mencionado anteriormente, o que estamos fazendo nos procedimentos descritos é a minimização de um funcional, ou seja, uma função que depende de outras funções, neste contexto cabe introduzir uma quantidade $\delta y(x)$, definida como $\delta y(x) = \varepsilon\eta(x)$, desta forma, a equação (2.1.3), pode ser reescrita como:

$$Y(x) = y(x) + \delta y(x), \tag{2.2.1}$$

perceba que devido a nova notação, a variável ϵ é eliminada da equação. Uma outra forma de interpretar este resultado é reescrevendo a última como

$$\delta y(x) = Y(x) - y(x), \tag{2.2.2}$$

assim, evidencia-se o carácter variacional de $\delta y(x)$, mas não qualquer variação: a variação de funções, a diferença entre $Y(x)$ e $y(x)$, ou seja, a diferença entre um dos infinitos caminhos possíveis nas vizinhanças e o caminho realmente tomado pela partícula.

Podemos também definir $\delta y(x)$ em termos do antigo parâmetro ε, pela equação (2.1.3), temos:

$$\delta y(x) = \varepsilon\eta(x) = \varepsilon\left(\frac{d}{d\varepsilon}Y(\varepsilon, x)\right)_{\varepsilon=0}, \tag{2.2.3}$$

[3] Podemos generalizar este resultado para k graus de liberdade a partir da consideração da equação $Y_k(\varepsilon, x) = y_k(x) + \varepsilon\eta_k(x)$, no lugar da expressão (2.1.3).

[4] Por grosseiramente, refiro-me à falta de rigor matemático na definição.

e a variação do funcional descrito por (2.1.5), com o auxílio da expressão (2.1.8), é agora, encarada como:

$$\begin{aligned}\delta J = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{J}(\varepsilon, x)\right)_{\varepsilon=0} &= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right)\right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'(x)}\right)\right] \delta y(x) dx, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

e assim chega-se a conclusão que, devido a arbitrariedade de $\delta y(x)$, a condição de extremo $\delta J = 0$ implica que a integral expressa por (2.2.4) vá para zero, logo a equação de Euler-Lagrange representa a condição de extremo para o funcional J (BARCELOS, 2004).

Segundo apresenta Nivaldo Lemos, uma variação $\delta y(x)$ da curva $y(x)$ deixa o funcional J estacionário, não necessariamente impondo que a curva retorne algum máximo ou mínimo do funcional, estas são chamadas de *curvas estacionárias* (LEMOS, 2013).

Analogamente para a ação, tomando as mudanças de variáveis apresentadas em (2.1.10), temos:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \tag{2.2.5}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\right)\right] \delta q(t) dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\right), \tag{2.2.6}$$

onde a expressão (2.2.5) é a definição formal do princípio de Hamilton em notação variacional para vínculos holônomos. Desta forma, o princípio de Hamilton pode ser apresentado como:

> Sendo um sistema físico descrito pela Lagrangiana $L(q(t), \dot{q}(t), t)$, o percurso escolhido pela natureza para o movimento de uma partícula de um ponto a outro, entre os instantes t_1 e t_2, é aquele em que a ação é mínima, ou de maneira mais geral, *estacionária*.

2.3 A RELAÇÃO ENTRE SIMETRIAS E A CONSERVAÇÃO DE GRANDEZAS FÍSICAS

Até o momento nos preocupamos essencialmente com a formulação Hamiltoniana das leis do movimento, foram introduzidos conceitos como funcional e apresentadas condições para que estes sejam extremizados. Nesta segunda parte do capítulo, nos preocuparemos em entender o que acontece com a energia e momento da partícula ao decorrer do movimento, analisaremos algumas leis de conservação que servirão de base para o entendimento de conceitos importantes como simetria e invariância. No mais tardar, todos estes conceitos, aliados às condições de extremização antes abordadas, terminam por revelar uma das relações mais importantes dentro deste estudo - determinadas simetria em algum sistema físico implicarão em grandezas conservadas - o teorema de Noether.

2.3.1 CONCEITOS INTRODUTÓRIOS DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Imaginemos a existência de um sistema físico com N graus de liberdade, descrito pela Lagrangiana

$$L(q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N, t) = T(\dot{q}) - V(q_1, ..., q_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{q}_j^2 - V(q_1, ..., q_N), \tag{2.3.1}$$

na qual a energia cinética depende apenas das velocidades e o termo correspondente a energia potencial, apenas, das coordenadas generalizadas. Podemos derivar a Lagrangiana em função da derivada temporal da k-ésima coordenada $\dot{q}_k$, o resultado encontrado é:

$$\frac{dL}{d\dot{q}_k} = m_k \dot{q}_k, \tag{2.3.2}$$

com o surgimento de uma espécie de momento da k-ésima coordenada no lado direito da equação. Considerando $q_k = x$, em coordenadas cartesianas, por exemplo, vemos que esta definição não ocorre à toa, dado que a Lagrangiana possui unidades de energia (em Joules) e $\dot{x}$ unidades de velocidade (metros por segundo), a análise dimensional do lado esquerdo corresponde ao de momento usual. Vale salientar que esta discussão não é sempre válida, para coordenadas que representam componentes angulares, por exemplo $\dot{\theta}$ no sistema de coordenadas esférico, o lado direito não apresentará mais unidades de momento. Entretanto, devido às semelhanças entre as ideias, a derivada presente no lado direito da equação (2.3.2) é nomeada como *momento generalizado*[5], e é definida como

$$p_k = \frac{dL}{d\dot{q}_k}. \tag{2.3.3}$$

De acordo com a equação de Euler-Lagrange, para os casos nos quais a Lagrangiana não depende explicitamente de uma certa coordenada generalizada q_k, emerge a relação:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) &= \frac{\partial L}{\partial q_k} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) &= 0 \\ \frac{dp_k}{dt} &= 0, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

a qual, nos informa que o momento generalizado permanece constante em função do tempo, seu valor será o mesmo para qualquer instante de tempo, e desta forma se conserva. As quantidades que respeitam as regras descritas em (2.3.4), isto é, conservam-se no tempo, são chamadas de *constantes de movimento*.

Abre-se margem para uma nova definição: quando a Lagrangiana do sistema não depende de determinada coordenada, mas apenas de sua derivada temporal, esta coordenada é dita *cíclica*, e é de imediato que a relação (2.3.4) será sempre verdadeira para estas coordenadas, e portanto, sempre nos retornarão uma conservação em relação as mesmas.

Uma outra lei de conservação surge ao considerar um sistema fechado, ou seja, aquele que não interage com nada que não pertença ao próprio sistema, neste caso, a Lagrangiana que o descreve não deve depender do tempo, e pode ser representada como $L(q_k, \dot{q}_k)$ (THORNTON; MARION, 2004). Sendo um sistema de N-graus de liberdade assistido por esta Lagrangiana, a sua derivada temporal

[5] Também chamado de *momento conjugado*, ou *momento canônico conjugado*, como podemos encontrar em (LEMOS, 2013).

resulta em:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k, \tag{2.3.5}$$

Ao empregar a equação de Euler-Lagrange, realizando uma integração por partes, a equação (2.3.5) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) &= \frac{dL}{dt} \\ \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L\right) &= 0, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

de onde constatamos a manifestação de uma nova constante de movimento, expressa por:

$$H = \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L, \tag{2.3.7}$$

a qual chamaremos de *Hamiltoniana* do sistema. Esta é uma quantidade que merece a nossa atenção, pois, assim como relata (THORNTON; MARION, 2004), para uma grande maioria de situações em que a Lagrangiana do sistema não depende explicitamente do tempo, a energia cinética é uma função quadrática e homogênea em $\dot{q}_j$ e a energia potencial não depende explicitamente das velocidades, a Hamiltoniana é equivalente ao valor da energia total do sistema, e portanto, a equação (2.3.6) transforma-se em um certificado de conservação da energia do sistema físico.

2.3.2 SIMETRIA E INVARIÂNCIA

A partir dos resultados apresentados, conseguimos traçar uma relação entre a conservação de determinadas grandezas físicas e as simetrias, tanto espaciais, quanto temporais. Antes de qualquer coisa, trataremos de esclarecer o que é uma simetria, esta conceituação não é nada trivial, e assim como podemos encontrar em (WEYL, 1952), é um objeto de estudo repleto de significado e interesse desde a época dos pitagóricos, com a fundamentação da filosofia pré-socrática. Ademais, em sua preleção supracitada, levando em conta o carácter matemático, em detrimento ao filosófico, Hermann Weyl, também acusa a conexão íntima entre as simetrias e os grupos de rotação e translação, embora deixaremos os formalismos de lado por agora, demonstraremos esta relação nos parágrafos que se seguem.

Assim como conta a referência (FEYNMAN et al., 2011), a simetria nas leis físicas podem ser evidenciadas em algo, quando, mesmo após realizarmos transformações neste algo, permanece igual a antes do procedimento. Para ilustrar melhor esta ideia, imaginemos uma esfera com seu eixo central em posição coaxial ao eixo-Z de um plano cartesiano, podemos imprimir uma rotação na esfera em

relação a qualquer direção, por um ângulo θ, neste caso, não conseguiremos diferenciar a esfera antes e depois do processo.

Podemos realizar o mesmo procedimento com um cilindro, e neste caso, em relação às rotações em torno do eixo azimutal, teremos sempre uma simetria, entretanto, isto nem sempre será verdade para rotações em relação a outras direções, assim sendo, estaremos presenciando uma quebra de simetria. Outra forma de quebrar a simetria é fazer uma marcação no cilindro, de forma que agora, mesmo para rotações com respeito ao eixo-Z, conseguiremos distinguir o cilindro antes e depois do procedimento (NEUENSCHWANDER, 2011).

Para além das rotações, mantendo a direção e sentido, conseguimos movimentar estes objetos no espaço, configurando uma translação espacial. Nos casos apresentados, desde que mantendo a homogeneidade do espaço, isto é, se o espaço não apresentar variações qualitativas entre um ponto e outro, i.e. uma simetria, não importa se a esfera ou o cilindro estão posicionados "aqui"ou "ali", não conseguiremos discernir um caso do outro. Fundamentalmente, isto é o que acontece nos bastidores da conservação do momento generalizado na equação (2.3.4), é que por não conter explicitamente a coordenada q_k na Lagrangiana do sistema, o próprio sistema físico não é capaz de sentir a diferença durante a mudança das coordenadas espaciais, e portanto, mesmo depois de considerar

$$q_k \to q'_k = q_k + C_q, \tag{2.3.8}$$

sendo C_q uma constante, as equações do movimento do sistema permanecerão as mesmas e o momento conjugado é conservado.

Como foi dito, existem também as translações temporais, neste caso, o cilindro e a esfera também não são capazes de sentir a passagem do tempo, e consequentemente, ao submeter os corpos a uma evolução temporal, digamos, de meses, pela homogeneidade do tempo (uma simetria temporal), os corpos ainda serão indistinguíveis em relação ao início do processo. Analogamente ao que ocorre com a equação (2.3.4), a expressão (2.3.6) exemplifica o que foi apresentado, a Lagrangiana independe explicitamente do tempo, de tal forma que ao aplicar a mudança de coordenadas regrada por

$$t \to t' = t + C_t, \tag{2.3.9}$$

com C_t uma constante, as equações do movimento também permanecerão idênticas ao caso antes da translação.

Até o momento, nos preocupamos essencialmente em caracterizar o conceito de simetria tomando como base os casos de conservação de determinadas grandezas físicas. É importante apresentarmos uma maneira de quantificar a simetria, e faremos isto por intermédio da ideia de *invariância* de determinada quantidade; uma quantidade é dita invariante quando, mesmo após certa transformação de coordenadas, como aquelas descritas por (2.3.8) e (2.3.9), mantém o mesmo valor numérico (NEUENSCHWANDER, 2011). Olhando para os exemplos apresentados, para que as equações do movimento permaneçam as mesmas, é condição suficiente que a Lagrangiana seja invariante (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019).

É importante esclarecer que a invariância surge ao comparar uma mesma quantidade entre um referencial e outro, logo após a mudança de coordenadas, ao passo em que a conservação das grandezas

físicas aparecem ao constatar a não mudança de uma quantidade antes e depois de determinado processo, como uma translação ou uma colisão, em relação a um mesmo referencial.

2.4 O TEOREMA DE NOETHER

2.4.1 FORMALIZAÇÃO DA INVARIÂNCIA EM CONCILIAÇÃO COM A EXTREMIZAÇÃO

Nesta subseção, apresentaremos o teorema de Noether como uma conciliação de grande valia entre invariância e conservação, neste caso, consideraremos apenas transformações contínuas, isto é, nossas coordenadas dependerão de uma variável ϵ que variará continuamente partindo de zero. Redefinimos então as mudanças de coordenadas (2.3.8) e (2.3.9), como:

$$q^k \to q^{k\prime} = Q^k(t, q^i, \epsilon),$$

e

$$t \to t' = T(t, q^k, \epsilon),$$

respectivamente, com as quantidades $q^{k\prime}$ e t', as coordenadas após a transformação e o índice $k, i = 1, 2, ..., N$, indicando os N graus de liberdade do sistema.

Com fins de se estudar transformações infinitesimais, assumiremos que $|\epsilon| \ll 1$, assim, através de uma expansão em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$, as duas últimas transformações de coordenadas podem ser retratadas, respectivamente, como:

$$q^k \quad \to \quad q^{k\prime} = q^k + \epsilon\zeta^k(q^i, t) + ..., \tag{2.4.1}$$

$$t \quad \to \quad t' = t + \epsilon\tau(q^k, t) + ..., \tag{2.4.2}$$

em que os termos que acompanham o parâmetro ϵ, em primeira ordem, são chamados de geradores das transformações. Passaremos a utilizar estas relações no decorrer do desenvolvimento.

Na subseção passada, foi dito que para que as equações do movimento de um sistema permaneçam as mesmas, é condição suficiente que a Lagrangiana seja um invariante perante determinada transformação. Este conceito pode ser reunido ao princípio variacional de Hamilton, culminando no fato de que a ação é um invariante, se a Lagrangiana também for. Desta feita, a definição *rígida* de invariância da ação é dada por

$$S' - S \quad = \quad 0, \tag{2.4.3}$$

com S' definido como:

$$[S'(\epsilon)] = \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(t', q^{k\prime}(t'), \frac{dq^{k\prime}(t')}{dt'}\right) dt', \tag{2.4.4}$$

a ação após a transformação de coordenadas.

Entretanto, em detrimento da equação (2.4.3), é possível estabelecer uma definição menos rígida[6]

[6] A referência (LEMOS, 2013) chama esta situação de quase-invariância, ao passo que (NEUENSCHWANDER, 2011)

de invariância, isto é, sendo infinitesimal o parâmetro ϵ, então podemos corrigir a definição (2.4.3), para

$$S' - S = \epsilon^m; \;\; m > 1, \tag{2.4.5}$$

desta forma, incluí-se a equação (2.4.3) como um caso particular desta nova, atualizando a definição de invariância para os limites possíveis de serem detectados (NEUENSCHWANDER, 2011).

Substituindo as expressões (2.1.12) e (2.4.4), na equação (2.4.5), é possível retomar aos mesmos limites de integração e elementos de linha, escrevendo ambos em termos da variável t, assim encontramos

$$S' - S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L' \frac{dt'}{dt} - L \right] dt \sim \epsilon^m, \tag{2.4.6}$$

e então, pelo fato de que o valor desta integral deve ser proporcional a ϵ^m, é necessário que o integrando também seja;

$$L' \frac{dt'}{dt} - L \sim \epsilon^m; \;\; m > 1, \tag{2.4.7}$$

assim sendo, temos uma condição integral necessária para garantir a invariância da ação.

O próximo passo é explorar a condição (2.4.7), de sorte a encontrar um requerimento de invariância diferencial. Começaremos derivando a relação (2.4.7) em função do parâmetro ϵ, e em seguida, faremos $\epsilon = 0$, espera-se encontrar os valores de ϵ para os quais o lado esquerdo de (2.4.7) é um ponto de sela. Do procedimento descrito sucede que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\left(L' \frac{dt'}{dt} - L \right)_{\epsilon=0} &= (m\epsilon^{m-1})_{\epsilon=0} \\ \left[\frac{dL'}{d\epsilon} \frac{dt'}{dt} \right]_{\epsilon=0} + \left[L' \frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{dt'}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} - \left[\frac{dL}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Como $L' = L$ para $\epsilon = 0$ e ainda, sabendo que $dt'/dt = 1 + \epsilon\dot{\tau}$ pela expressão (2.4.2), a última expressão torna-se:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dL'}{d\epsilon}(1 + \epsilon\dot{\tau}) \right]_{\epsilon=0} + L \left[\frac{d}{d\epsilon}(1 + \epsilon\dot{\tau}) \right]_{\epsilon=0} &= 0 \\ \left[\frac{dL'}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} + L\dot{\tau} &= 0, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

na qual, podemos utilizar a regra da cadeira para a derivada contida no primeiro termo:

$$\left[\frac{dL'}{dt'} \frac{dt'}{d\epsilon} + \frac{dL'}{dq^{k\prime}} \frac{dq^{k\prime}}{d\epsilon} + \frac{dL'}{d\dot{q}^{k\prime}} \frac{d\dot{q}^{k\prime}}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} + L\dot{\tau} = 0, \tag{2.4.10}$$

e analogamente ao que fora feito anteriormente, pela relação (2.4.1) temos que $dq^{k\prime}/d\epsilon = \zeta^k$ e $dt'/d\epsilon = \tau$, logo reescrevemos a expressão anterior como

$$\left[\frac{dL'}{dt'} \tau + \frac{dL'}{dq^{k\prime}} \zeta^k + \frac{dL'}{d\dot{q}^{k\prime}} \frac{d\dot{q}^{k\prime}}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} + L\dot{\tau} = 0. \tag{2.4.11}$$

prefere o termo "invariância liberal".

Para o termo que contém $d\dot{q}^{k\prime}/d\epsilon$, faremos o procedimento que se segue:

$$\begin{aligned} \dot{q^{k\prime}} &= \frac{dq^{k\prime}}{dt'} = \frac{d(q^k + \epsilon\zeta^k)}{d(t + \epsilon\tau)} \\ &= \frac{dq^k + \epsilon d\zeta^k}{dt + \epsilon d\tau)} \\ &= \frac{dq^k + \epsilon d\zeta^k}{dt(1 + \epsilon d\tau/dt)} \\ &= \frac{\dot{q}^k + \epsilon\dot{\zeta}^k}{1 + \epsilon\dot{\tau}}, \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

e assim a equação (2.4.11) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}\tau + \frac{dL}{dq^k}\zeta^k + \frac{dL}{d\dot{q}^k}\left[\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{\dot{q}^k + \epsilon\dot{\zeta}^k}{1 + \epsilon\dot{\tau}}\right)\right]_{\epsilon=0} + L\dot{\tau} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q^k}\zeta^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(\dot{\zeta}^k - \dot{q}^k\dot{\tau}) + L\dot{\tau} = 0. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Substituindo as definições de momento generalizado (2.3.3) e hamiltoniana (2.3.7), a relação (2.4.13), é agora:

$$\frac{\partial L}{\partial q^k}\zeta^k + p_k\dot{\zeta}^k + \frac{\partial L}{\partial t}\tau - H\dot{\tau} = 0, \tag{2.4.14}$$

conhecida como *Identidade de Rund-Trautman*. Neste ponto, chamamos a atenção ao fato de que a identidade de Rund-Trautman emerge da invariância da ação, neste caso, podemos ver que, um funcional é invariante se, e somente se, a relação (2.4.14) é respeitada, temos então a condição de invariância procurada. É importante apontar que nas equações (2.4.13) e (2.4.14), passou-se a fazer uso da notação de somatória desenvolvida por Einstein, na qual abandona-se o símbolo de somatória convencional dado por $(\sum)$, passando a representar somas através da contração indicial entre índices covariantes (índices subscritos) e contravariantes (índices sobrescritos), de tal forma a respeitar a seguinte relação $A^iB_i = A^1B_1 + A^2B_2 + ... + A^NB_N$, com $\alpha = 1, 2, ..., N$.

2.4.2 QUANDO A INVARIÂNCIA ENCONTRA A EXTREMIZAÇÃO

Até o momento, apresentamos conceitos como conservação de grandezas físicas, invariância e simetria, chegando a requerimentos *sine qua non* para as duas últimas, sendo o cumprimento da equação de Euler-Lagrange responsável por garantir a extremização de um funcional e a identidade de Rund-Trautman como condição da invariância dos funcionais. A partir deste momento, nos interessa unir ambas condições, conciliando extremos e invariantes.

Partindo da equação de Euler-Lagrange para o k-ésimo grau de liberdade, e utilizando as definições apresentadas; o momento conjugado (2.3.3) e hamiltoniana (2.3.7), é possível encontrar a seguinte

relação para a derivada temporal do momento conjugado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q^k}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial q^k} \\ \dot{p}_k &= \frac{\partial L}{\partial q^k}, \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

a qual, nos ajudará a construir a subsequente expressão para a derivada temporal da hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\ddot{q}^k \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}(p_k)\dot{q}^k + p_k\ddot{q}^k \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(p_k\dot{q}^k - L\right) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Então, através de algumas manipulações algébricas, e acrescentando as novas relações encontradas (2.4.15) e (2.4.16) na identidade de Rund-Trautman (2.4.14), temos:

$$\frac{d}{dt}\left(H\tau - p_k\zeta^k\right) = 0, \tag{2.4.17}$$

o que implica diretamente em:

$$H\tau - p_k\zeta^k = const., \tag{2.4.18}$$

o conhecido *Teorema de Noether*, construído a partir da união entre extremização e simetria, implica que toda vez que a ação referente a determinado sistema físico for invariante perante certa transformação, teremos necessariamente uma constante de movimento descrita por (2.4.18). Todavia, ainda há uma forma mais geral do teorema de Noether a qual pode ser obtida por meio do fato de que a Lagrangiana não é unicamente determinada. Na próxima subseção, focaremos na apresentação desta nova generalização.

2.4.3 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE NOETHER

Começaremos a discussão demonstrando a não univocidade da Lagrangiana perante acréscimos de derivadas temporais de uma função $F(q,t)$. Para isso, sendo a ação descrita por (2.1.12) - uma quantidade que depende da integral da Lagrangiana no tempo - então, é necessário e suficiente demonstrar que admite-se a obtenção da mesma ação para duas formas distintas da Lagrangiana.

Seja a ação S', descrita como

$$S' = \int_{t_1}^{t_2}\left[L(q,\dot{q},t) + \frac{dG(q(t),t)}{dt}\right]dt, \tag{2.4.19}$$

onde a Lagrangiana associada a ação S' é posta como $L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{dF(q(t),t)}{dt}$, então recaímos

sobre a relação:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt + [G(q(t_2), t_2) - G(q(t_1), t_1)] \tag{2.4.20}$$

e pela própria definição de ação, o primeiro termo do lado direito desta última é interpretado como sendo a ação S associada à Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, resultando em

$$S' = S + [G(q(t_2), t_2) - G(q(t_1), t_1)]\,. \tag{2.4.21}$$

Como foi discutido na Seção (2.1), uma das características da variação de um funcional é a fixação dos seus pontos iniciais e finais, desta forma, a variação de qualquer coordenada generalizada nos pontos $t = t_1$ e $t = t_2$ vale zero, e consequentemente $\delta S' = \delta S$.

Ademais, pelo princípio de Hamilton, descrito pela equação (2.2.5), é seguro afirmar que $\delta S' = 0 = \delta S$, ou seja, mesmo acrescida de uma derivada total da função $G(q, t)$, L e L' produzem as mesmas equações do movimento e são ditas *equivalentes* (LEMOS, 2013).

Assim, com base na discussão apresentada, imaginemos que exista uma função $F(q(t), t)$ (veja (LEMOS, 2013)), tal que a equação 2.4.7, torna-se:

$$L'\frac{dt'}{dt} - \left(L + \epsilon\frac{dF(q(t), t)}{dt}\right) \sim \epsilon^m; \;\; m > 1, \tag{2.4.22}$$

a qual, através do emprego do mesmo procedimento descrito no prenúncio da expressão (2.4.8), pode-se obter:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\left(L'\frac{dt'}{dt} - L - \epsilon\frac{dF(q(t), t)}{dt}\right)_{\epsilon=0} &= (m\epsilon^{m-1})_{\epsilon=0} \\ \left[\frac{dL'}{d\epsilon}\frac{dt'}{dt} + L'\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{dt'}{dt}\right) - \frac{dL}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} &= \frac{dF(q(t), t)}{dt}. \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

A equação (2.4.23), é na verdade, idêntica a equação (2.4.8), diferindo apenas de uma derivada temporal total no lado direito do sinal de igualdade, como o lado esquerdo permanece inalterado, novamente, podemos reproduzir fidedignamente os mesmos passos percorridos para obtenção da identidade de Rund-Trautmann, culminando em:

$$\frac{\partial L}{\partial q^k}\zeta^k + p_k\dot{\zeta}^k + \frac{\partial L}{\partial t}\tau - H\dot{\tau} = \frac{dF(q(t), t)}{dt}, \tag{2.4.24}$$

e ao aplicar as condições de extremização dadas por (2.4.15) e (2.4.16), têm-se:

$$\frac{d}{dt}\left(H\tau - p_k\zeta^k - F\right) = 0, \tag{2.4.25}$$

o que implica diretamente na nova constante de movimento:

$$H\tau - p_k\zeta^k - F = const., \tag{2.4.26}$$

uma generalização para o Teorema de Noether. Podemos entender melhor o teorema apresentado

quando observamos que as constantes de movimento retratadas em (2.3.4) e (2.3.6), são casos particulares da identidade (2.4.26), com $F(q,t) = 0$. No modelo do cilindro apresentado, a homogeneidade do espaço ou do tempo implicam diretamente em simetrias espaciais ou temporais, respectivamente, e a relação (2.4.26) nos retornará as constantes de movimento associadas a essas simetrias. De maneira conclusiva, uma simetria implica na descoberta de invariantes que culminam na conservação de alguma grandeza física.

3 INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Ao decorrer do último capítulo, nos preocupamos exclusivamente com o uso dos ferramentais apresentados para obter simetrias e leis de conservação de sistemas compostos por partículas discretas com graus de liberdade finitos, neste capítulo estenderemos os formalismos Lagrangianos e Hamiltonianos para sistemas com infinitos graus de liberdade, descrito por funções contínuas nas coordenadas espaço-temporais (NEUENSCHWANDER, 2011).

Esta nova maneira de pensar a natureza, o faz através da introdução de um objeto de estudo valoroso; os *campos*. De fato, estas quantidades não são incomuns na Física, ao tratarmos de um campo gravitacional newtoniano, por exemplo, estamos falando de um campo vetorial $\vec{g}$ descrito pelo potencial gravitacional Φ. Tratando-se do eletromagnetismo, temos os campos Elétricos ($\vec{E}$) e os magnéticos ($\vec{B}$), descritos, respectivamente, pelo potencial escalar V e vetor $\vec{A}$. Assim sendo, ainda que em uma definição pouco rigorosa, os campos são como uma espécie de mapeamento do espaço, de tal forma que podemos associar um valor de potencial para cada ponto do espaço e o estudo desta disposição de valores nos retornarão preciosas informações sobre o sistema em questão.

Com todo rigor, a definição de um campo está diretamente atrelada à teoria por trás dos *Grupos e Álgebras de Lie*, entretanto, para este fim, daremos atenção total a um subgrupos especial, pertencente a este último; o *Grupo de Lorentz*, o qual, assim como colocado nas referências (MAGGIORE, 2005) e (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019), culminará na introdução do Operador Momento Angular e nos fornecerá subsídios para o estudo que será feito ao longo do capítulo.

O objetivo principal desta parte é a investigação dos campos escalares (Spin-0) e campo de Spin-1. Começaremos pelo campo escalar, pois, além de ser o mais simples, faremos uso deste como um guia para a apresentação e construção das ferramentas que utilizaremos ao decorrer do capítulo, bastando pequenas adaptações e adequações dos conceitos vistos para os demais campos. Devido a extensão da dinâmica Hamiltoniana e Lagrangiana à Teoria de Campos, também trataremos da busca pela nova forma do Teorema de Noether, bem como a exploração das simetrias e conservações de grandezas físicas dos campos perante transformações.

3.1 GRUPOS, ÁLGEBRAS E OS ESCALARES

No capítulo anterior exploramos em demasia a invariância de quantidades físicas perante certa transformação, em específico, nos atentamos para as translações, tanto espaciais quanto temporais. O que faremos nesta primeira seção, nada mais é do que formalizar e generalizar o nosso entendimento sobre as transformações e os geradores que as caracterizam, todo o entendimento virá através da análise dos grupos e álgebras de Lorentz.

Estes objetos que analisaremos aqui, podem ser traduzidos como conjuntos de elementos que satisfazem determinados axiomas, e portanto, constituem um grupo sob a ótica matemática (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019). Estes conjuntos possuem uma íntima relação com as transformações, isto pelo fato de que cada integrante dos grupos supracitados são, no fundo, matrizes de transformação

associadas aos seus devidos geradores. Como veremos, estas transformações podem ser, translações, rotações e até os chamados *boosts*.

3.1.1 GRUPO DE LORENTZ

Assim como introduz a referência (MAGGIORE, 2005), o grupo de Lorentz é definido como o grupo composto por elementos que satisfazem a seguinte transformação linear de coordenadas:

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{3.1.1}$$

as quais devem manter invariante a quantidade[1],

$$\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2, \tag{3.1.2}$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski, expressa como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Vale chamar atenção ao uso de índices gregos em detrimento dos índices latinos empregados no último capítulo, agora estamos envolvendo a coordenada temporal, e portanto, trabalhando com quadrivetores, assim sendo $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$.

Se a expressão (3.1.2) é satisfeita, então, por meio do emprego de (3.1.1) segue-se que:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} &= \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} \\ &= \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{\mu}{}_{\sigma} x^{\sigma})(\Lambda^{\nu}{}_{\kappa} x^{\kappa}) \\ &= (\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda^{\nu}{}_{\kappa}) x^{\sigma} x^{\kappa}, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

e sabendo que esta última é válida para qualquer x^{μ} arbitrário, é condição necessária aos elementos do grupo de Lorentz que a seguinte expressão seja satisfeita:

$$\eta_{\sigma\kappa} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda^{\nu}{}_{\kappa}. \tag{3.1.5}$$

Podemos realizar a soma nos índices da expressão (3.1.5), de forma a explicitar a componente η_{00},

[1] Devido a esta propriedade, este grupo de transformações é denominado Grupo Ortogonal O(3,1), sendo o número 3 referente às coordenadas espaciais, e o 1 à coordenada temporal.

o resultado é

$$\begin{aligned}
\eta_{00} &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} \\
-1 &= \eta_{\mu 0}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0} + \sum_{i=1}^{3}\eta_{\mu i}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} \\
-1 &= \eta_{00}\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0} + \sum_{i=1}^{3}\eta_{0i}\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} + \sum_{j=1}^{3}\eta_{j0}\Lambda^{j}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\eta_{ji}\Lambda^{j}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} \\
-1 &= -(\Lambda^{0}{}_{0})^{2} + \sum_{k=1}^{3}(\Lambda^{k}{}_{0})^{2}, \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

o que implica diretamente em $(\Lambda^{0}{}_{0}) \geq 1$ ou $(\Lambda^{0}{}_{0}) \leq -1$. Neste estudo consideraremos apenas os elementos do grupo de Lorentz que satisfazem a relação $(\Lambda^{0}{}_{0}) \geq 1$, estes constituem um subgrupo importante para nós, o chamado *Grupo de Rotação Ortócrono Próprio* $SO^{\uparrow}(3,1)$ (MAGGIORE, 2005).

3.1.2 ÁLGEBRA DE LORENTZ

Podemos considerar uma transformação infinitesimal em Λ,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \qquad (3.1.7)$$

com $|\omega| \ll 1$ e $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ representando o delta de kronecker. Aplicando esta última em (3.1.5), obtemos:

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}, \qquad (3.1.8)$$

isto é, a matriz $\omega^{\mu\nu}$ é antissimétrica e, portanto, tratando-se de uma matriz 4×4, existem apenas 6 termos a serem determinados, os quais constituem os geradores da transformação, sendo 3 destes referentes à rotações espaciais em torno dos planos (x, y), (x, z) e (y, z) e as outras três, referentes à rotações em torno de ângulos imaginários relativos aos planos (t, x), (t, y) e (t, z), os chamados Boosts de Lorentz.

De acordo com as referências (MAGGIORE, 2005) e (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019), podemos representar quaisquer elementos Λ como:

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}, \qquad (3.1.9)$$

em que $J^{\mu\nu}$ também é antissimétrico em μ e ν, e é chamado de gerador da transformação, espelhando os elementos que compõem a matriz $\omega_{\mu\nu}$. Note que o fator $1/2$ presente nesta nova representação se deve ao fato de que expandindo a somatória indicial no expoente, estaríamos contando duas vezes cada termo.

Voltando a atenção para a relação (3.1.1), sob a perspectiva da representação (3.1.9), um conjunto

de N objetos ϕ^i, com $i = 1, 2, ..., N$ se transformará como

$$\begin{aligned} \phi^{i\prime} &= [\Lambda]^{\ i}{}_j \phi^j \\ \phi^{i\prime} &= \left[e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\right]^{\ i}{}_j \phi^j, \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

e retomando as ideias de variação do capítulo anterior, com uma expansão em primeira ordem em ω, é possível analisar o que ocorre com a variação dos elementos ϕ^i perante as transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} \phi^{i\prime} &= \left[e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\right]^{\ i}{}_j \phi^j \\ \phi^{i\prime} &= \left[\mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right]^{\ i}{}_j \phi^j \\ \phi^{i\prime} &= \phi^i - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}\right]^{\ i}{}_j \phi^j \\ \delta\phi^i &= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left[J^{\mu\nu}\right]^{\ i}{}_j \phi^j. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Tendo em vista o apresentado, diferentes quantidades apresentarão propriedades de transformação específicas perante as transformações de Lorentz, e é sob esta luz que conseguimos traçar a definição de uma grandeza física escalar; se um elemento permanece invariante perante a atuação de alguma transformação, então temos um escalar. Para escalares, esta definição implica diretamente em:

$$\phi' = \phi, \tag{3.1.12}$$

e, portanto,

$$\delta\phi = 0. \tag{3.1.13}$$

3.1.3 DEFINIÇÃO DE UM CAMPO ESCALAR E O MOMENTO ANGULAR

Nesta subseção, exploraremos os resultados apresentados nas subseções passadas de sorte a encontrar novas representações para $J^{\mu\nu}$. O resultado encontrado servirá de piso, principalmente, para a subseção 3.2.4, em que será demonstrado a relação existente entre os campos e suas propriedades perante rotações espaciais infinitesimais, para com o valor esperado do momento angular orbital do sistema.

Começaremos por imaginar um objeto genérico[2] W^μ, desta forma, pela equação (3.1.1), este novo objeto se transformará como:

$$W'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu W^\nu, \tag{3.1.14}$$

e pela transformação infinitesimal (3.1.7), a última torna-se

$$\begin{aligned} W'^\mu &= (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)W^\nu \\ W'^\mu &= W^\mu + \omega^\mu{}_\nu W^\nu \\ \delta W^\mu &= \omega^\mu{}_\nu W^\nu. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

[2] Este elemento genérico pode ser um tensor, por exemplo. Os tensores também são definidos de acordo com as suas propriedades perante as transformações de Lorentz.

Neste contexto, a equação (3.1.11) pode ser reescrita para esta nova quantidade, resultando em

$$\delta W^{\rho} = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}]^{\rho}{}_{\sigma}W^{\sigma}. \tag{3.1.16}$$

Podemos, por fim, comparar os resultados (3.1.15) e (3.1.16), de sorte a obter uma representação matricial para $(J^{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}$. Desta forma, para que seja satisfeita a expressão

$$\omega^{\rho}{}_{\nu}W^{\nu} = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}]^{\rho}{}_{\sigma}W^{\sigma}, \tag{3.1.17}$$

encontramos:

$$(J^{\mu\nu})^{\rho}{}_{\sigma} = i(\eta^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} - \eta^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}). \tag{3.1.18}$$

Sabendo que podemos definir grandezas físicas tirando como base o seu comportamento perante as transformações de Lorentz, rigorosamente, para os campos não é diferente e esta mesma regra se aplica. Começaremos por estudar o campo escalar, o qual depende de uma única coordenada e é a manifestação mais simples deste objeto na natureza.

Haja vista que os escalares mantém-se invariantes após as transformações, os campos escalares devem ser também, isto implica em

$$\phi'(x') = \phi(x), \tag{3.1.19}$$

e assim sendo, um campo escalar é chamado de invariante de Lorentz (MAGGIORE, 2005).

Utilizando (3.1.16), podemos também praticar uma transformação infinitesimal nas coordenadas deste objeto, expressa por

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \delta x^{\rho} = x^{\rho} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}, \tag{3.1.20}$$

e pelo fato de que o campo escalar deve ser invariante por definição, então

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) = 0, \tag{3.1.21}$$

e por isso, cabe a introdução da variação modificada $\delta_0\phi(x)$, definida por

$$\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x), \tag{3.1.22}$$

chamando atenção para a diferença entre as variações (3.1.21) e (3.1.22), na primeira analisamos um único grau de liberdade, estamos interessados em saber como se transforma a coordenada x que descreve o nosso campo, e analisamos a diferença entre o campo original e transformado em um ponto fixo do espaço, já na segunda equação, estamos analisando o campo em dois pontos distintos do espaço-tempo, e portanto, comparando a diferença entre infinitos graus de liberdade.

Voltaremos nossos esforços para uma investigação desta variação modificada. Por intermédio das relações (3.1.19) e (3.1.21) é possível demonstrar que

$$\delta_0\phi \;\; = \;\; -\delta x^{\rho}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^{\rho}}, \tag{3.1.23}$$

a qual, tendo em vista a representação (3.1.11), pode ser reescrita como:

$$\delta_0\phi = \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^{\rho}}. \tag{3.1.24}$$

Neste momento, devemos chamar atenção para uma quantidade que emerge em nossos cálculos naturalmente, definiremos esta quantidade pela relação

$$L^{\mu\nu} = -[J^{\mu\nu}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}, \tag{3.1.25}$$

a qual não aparenta nada familiar, entretanto, aplicando a representação (3.1.18), obtêm-se

$$L^{\mu\nu} = i\left(x^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} - x^{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right), \tag{3.1.26}$$

que ao identificar o momento linear, $p^{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$, então, esta última torna-se

$$L^{\mu\nu} = x^{\mu}p^{\nu} - x^{\nu}p^{\mu}, \tag{3.1.27}$$

em que é possível identificar alguma semelhança entre esta útlima e o momento angula, usualmente caracterizado pelo produto vetorial $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$. Aqui, nos interessa as rotações espaciais, e assim sendo, teremos

$$L^{ij} = x^{i}p^{j} - x^{j}p^{i} \tag{3.1.28}$$

$$L^{ij} = i(x^{i}\partial^{j} - x^{j}\partial^{i}), \tag{3.1.29}$$

podendo ainda organizar os elementos de L^{ij} em dois outros vetores espaciais (MAGGIORE, 2005):

$$L^{k} = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}L^{ij}, \tag{3.1.30}$$

e

$$\tilde{L}^{i} = L^{0i}, \tag{3.1.31}$$

com ϵ_{ijk} o tensor de Levi-Civita, logo, a equação (3.1.28) transforma-se em:

$$L^{k} = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}L_{ij} = \epsilon^{kij}x_{i}p_{j}, \tag{3.1.32}$$

ou seja, o *Momento Angular Orbital* do sistema, devendo relembrar o fato de que esta última emerge naturalmente ao explorar o comportamento do campo escalar, quando submetido à transformações do grupo de Lorentz, no presente caso, especificamente tratando-se de rotações infinitesimais.

3.2 A DINÂMICA CLÁSSICA DOS CAMPOS

Feita a conceitualização matemática de um campo, o próximo passo é realizar a implementação dos ferramentais Hamiltonianos e Lagrangianos para a descrição da dinâmica desses objetos. Com todo

esse procedimento, espera-se encontrar análogos para as equações de Euler-Lagrange e, principalmente, para o Teorema de Noether, de sorte a averiguarmos novas condições de invariância do sistema e novas grandezas conservadas.

Assim como comentado no início deste capítulo, e muito bem pontuado por (GREINER; REINHARDT, 1996), a principal diferença entre o que apresentaremos aqui e o que fora implementado no capítulo anterior, é que este último condizia a um sistema composto por N massas pontuais caracterizadas pelo conjunto de coordenadas discretas $q_k(t)$, enquanto que a partir de agora, cada ponto de uma determinada região do espaço estará diretamente associado aos valores das variáveis contínuas de algum campo expresso por $\phi(x,t)$. Sendo o índice discreto k, substituído pelo índice contínuo x (LEMOS, 2013).

3.2.1 EXTREMIZAÇÃO DA AÇÃO E A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE PARA CAMPOS

Para introduzir o estudo de maneira ainda mais clara, comecemos por considerar um dos exemplos mais elementares no escopo da Teoria de Campos, uma onda propagando-se em uma corda esticada. Neste caso, é interessante perceber que podemos muito bem pensar a corda como composta por elementos discretos de massa m cada, entretanto, ao tomar o limite contínuo deste sistema, recaímos sobre o problema usual novamente. Se quisermos computar a Lagrangiana deste sistema, devemos integrá-la por todo o comprimento da corda, somando todas as contribuições de cada elemento infinitesimal que a constitui.

Desta feita, com fins de se encontrar a ação para este sistema, temos:

$$[S] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}\, dx \right) dt, \tag{3.2.1}$$

na qual fora empregada uma nova representação para a Lagrangiana, isso se deve ao fato de que ao realizar a análise dimensional dessa última, em detrimento da equação (2.1.12), constata-se que, para que as Ações apresentem as mesmas unidades físicas, $\mathcal{L}$ deve possuir unidades $\mathrm{J\,m^{-1}}$, uma espécie de distribuição de energia por metro, ou melhor, uma densidade, portanto, $\mathcal{L}$ é conhecida por *Densidade Lagrangiana*. Por fim, podemos reescrever a última equação, de sorte a generalizá-la e apresentar a nova notação utilizada:

$$[S] = \int_{A}^{B} \mathcal{L}\, d^4x, \tag{3.2.2}$$

sendo $d^4x = dx^1dx^2dx^3dt$, o elemento de volume do quadriespaço, o qual indica integração em todas as coordenadas espaciais, mais a coordenada temporal.

Voltando-se para a interpretação de que um campo escalar pode ser visto como uma espécie de mapeamento de determinada região do espaço, atribuindo um valor numérico a cada conjunto de elementos (q,t), podemos traçar um paralelo interessante entre a extremização da ação para o caminho percorrido por uma partícula pontual e a extremização da ação dentro da Teoria de Campos. Para o problema vigente, a pergunta correta a ser respondida é; dentre uma miríade de *superfícies* possíveis responsáveis por conectar dois pontos do espaço, qual é aquela em que a ação assume um valor

extremo?

Antes de prosseguirmos, cabe uma pequena consideração, na expressão (3.2.2), introduzimos a ação, que por sua vez depende da densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$, todavia, ainda não foram apontados quais seriam os novos argumentos dessas quantidades. Para visualizar estas ideias de um jeito didático e direto, utilizaremos a referência (RYDER, 1996). No caso anterior tínhamos a posição das partículas pontuais ditadas pelas coordenadas generalizadas q como função do tempo. Na presente situação, cada ponto da superfície é vinculado pela função ϕ, dependente das coordenadas espaciais e temporais, portanto, é de imediato a analogia ditada pela troca de variáveis a seguir[3]:

$$\begin{cases} t \to x^\mu = (x^1, x^2, x^3, t); \\ q(t) \to \phi(x^\mu) = \phi(x^1, x^2, x^3, t); \\ L(q(t), \dot{q}(t), t) \to \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu)); \end{cases} , \tag{3.2.3}$$

e a ação dada em (3.2.2), transforma-se em:

$$[S] = \int_A^B \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu \phi(x^\mu))\ d^4x. \tag{3.2.4}$$

Retornando ao problema inicial, o seu tratamento será inteiramente análogo ao caso anterior, assumiremos que a superfície responsável por extremizar a ação é conhecida e é expressa por $\phi(x,t)$, em seguida, seguiremos a abordagem proposta por (NEUENSCHWANDER, 2011), isto é, qualquer diferente configuração da superfície pode ser alcançada por meio de uma deformação contínua, em outras palavras, uma espécie de "desvio"infinitesimal. Podemos representar essa ideia pela equação:

$$\Phi(x,t,\epsilon) = \phi(x,t) + \epsilon\eta(x,t), \tag{3.2.5}$$

sendo $|\epsilon| \ll 1$ e $\eta(x,t)$ podendo ser interpretado como uma espécie de erro, o qual difere a solução exata de qualquer outra solução próxima.

Evidentemente, se quisermos que Φ retome a solução original ϕ, então, as condições de contorno $\eta(x,t_1) = 0 = \eta(x,t_2)$ e $\eta(x_1,t) = 0 = \eta(x_2,t)$ devem ser respeitadas. Ademais, devido ao bom comportamento de $\eta(x,t)$ por toda a região em investigação, podemos lançar mão da derivada da relação (3.2.5) em função de x^μ, obtendo:

$$\partial_\mu \Phi(x,t,\epsilon) = \partial_\mu \phi(x,t) + \epsilon \partial_\mu \eta(x,t). \tag{3.2.6}$$

Dando sequência, em termos de $\Phi(x,t,\epsilon)$ a ação descrita por (3.2.4) pode ser colocada como:

$$[S(\epsilon)] = \int \mathcal{L}(\Phi(x^\mu,\epsilon), \partial_\mu \Phi(x^\mu,\epsilon))\ d^4x, \tag{3.2.7}$$

[3] Note que a partir deste ponto, simbolizaremos derivadas por intermédio da notação encurtada, neste caso, $\partial_\mu \phi$ é idêntico a $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ ou ainda $\phi_{,\mu}$, como também $\partial_1 \phi$ é o mesmo que $\frac{\partial \phi}{\partial x^1}$ e $\phi_{,1}$, e assim por diante.

e para que a ação seja um extremo, deve-se tomar a sua derivada com respeito a ϵ, igualando-a a zero:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dS(\epsilon)}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} &= 0 \\ \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\frac{\partial \Phi_{,\mu}}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0} d^4x &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

na qual, empregando as equações (3.2.5) e (3.2.6), encontramos:

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}}\eta_\mu\right]_{\epsilon=0} d^4x = 0. \tag{3.2.9}$$

Podemos aplicar uma integração por partes no segundo termo da equação (3.2.9), assim, teremos:

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right)\right]\eta\, d^4x + \int \partial_\mu\left[\eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right]\, d^4x = 0, \tag{3.2.10}$$

na qual destacamos que o segundo termo trata-se da integral de uma derivada, e portanto, o integrando é computado nos limites de integração regidos pela região do espaço comentada anteriormente, assim, haja vista as condições de contorno de η, este elemento vai para zero. Já para o primeiro termo, é possível a aplicação do Lema Fundamental do Cálculo das Variações (veja a Seção 2.1), desta feita, de imediato, recaímos sobre a condição de extremização

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right) = 0. \tag{3.2.11}$$

Segundo a referência (MAGGIORE, 2005), podemos retomar a condição anterior através da aplicação do Princípio de Hamilton na ação expressa por (3.2.4), para isso, basta computar a variação δS de maneira completamente análoga ao caso investigado durante a Seção(2.1) e igualá-la a zero:

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\phi(x^\mu), \partial_\mu\phi(x^\mu))\, d^4x = 0, \tag{3.2.12}$$

desta forma, equivalentemente a equação (2.2.4), encontraremos

$$\begin{aligned} \delta S = \epsilon\left(\frac{d}{d\epsilon}S\right)_{\epsilon=0} &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right) = 0 \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi = 0, \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

tendo sido aplicada integração por partes entre uma passagem e outra, retiramos novamente a identidade

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}, \tag{3.2.14}$$

também conhecida como *Equação de Euler-Lagrange para Campos*, a qual, surge novamente como uma condição necessária para garantir que o funcional da ação seja um extremo.

E como um último comentário desta subseção, assim como no último capítulo, a densidade

Lagrangiana não é unicamente determinada, e para demonstrar isso, é necessário, apenas, demonstrar que podemos ter a mesma ação, associada a duas Lagrangianas[4] diferentes. Assumindo uma nova Lagrangiana introduzida por:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu V^\mu, \tag{3.2.15}$$

em que $\partial_\mu V^\mu = \partial_0 V^0 + \partial_1 V^1 + \partial_2 V^2 + \partial_3 V^3$ representa a divergência quadridimensional de um funcional genérico $V^\mu = V^\mu(\phi)$, também referida por quadri-divergência. Então, a ação (3.2.4), torna-se:

$$[S'] = \int (\mathcal{L} + \partial_\mu V^\mu) d^4x, \tag{3.2.16}$$

na qual, ao lançar mão do Teorema de Gauss, definido pela identidade

$$\int_\Sigma d^4x \partial_\mu V^\mu = \int_{\partial\Sigma} dA\ n_\mu V^\mu, \tag{3.2.17}$$

responsável por relacionar a integral do quadri-divergente de V delimitada por um volume finito Σ, com a integral de V em uma superfície fechada $\partial\Sigma$ orientada por n_μ, então a equação (3.2.16) é reescrita como

$$[S'] = \int \mathcal{L}\ d^4x + \int_{\partial\Sigma} dA\ n_\mu V^\mu. \tag{3.2.18}$$

E aqui, será apontada uma ideia, que nos acompanhará para todo o restante do trabalho, de acordo com (MAGGIORE, 2005), para que tenhamos um princípio variacional bem definido, devemos impor que os campos sejam mantidos constantes na superfície fechada $\partial\Sigma$, desta forma, o termo do lado esquerdo na equação (3.2.17) deve ser nulo, ou dado por uma constante genérica, assim sendo, é imediato que as condições que tornam estacionária a ação S' referente a Lagrangiana $\mathcal{L}'$, também satisfazem S, correspondente a Lagrangiana $\mathcal{L}$, portanto, são equivalentes.

3.2.2 AS IDENTIDADES DE RUND-TRAUTMAN E O TEOREMA DE NOETHER PARA CAMPOS

O objetivo, neste momento, passa a ser a investigação do comportamento dos campos perante transformações em suas coordenadas. Vimos na Seção (2.3.1), que utilizando-se da própria equação de Euler-Lagrange, associada a análise de sistemas descritos por Lagrangianas específicas, conseguiríamos obter duas leis de conservação, que mais especificamente podem ser colocadas como dois casos especiais do Teorema de Noether. A primeira dizia respeito à conservação do momento conjugado, ao passo em que a segunda nos informava que a Hamiltoniana seria a quantidade a ser conservada.

Fato é, que é possível seguir a exata mesma linha de raciocínio para os campos, entretanto, este não será o caminho a ser percorrido, trataremos diretamente o caso mais geral possível, isto é, assumiremos transformações nas coordenadas x^μ e $\phi(x^\mu)$, caracterizadas por geradores genéricos, de sorte a culminar na nova identidade de Rund-Trautman.

Fazendo uma breve recapitulação, a ação é dita invariante, se, e somente se, seu valor numérico permanece o mesmo após a transformação ($\delta S = 0$), ou de forma mais abrangente, mesmo que esta variação não seja nula, também é aceitável que a variação seja proporcional a algum parâmetro

[4] A partir deste momento, com fins de simplificação, chamaremos a densidade Lagrangiana apenas de Lagrangiana.

infinitesimal ϵ^m, com $m > 1$, e isso se explica pelos seus limites detectáveis (veja a definição liberal de invariância comentada na Seção(2.4.1)). Também, é importante colocar que a identidade de Rund-Trautman apresenta-se como condição *sine qua non* da invariância da ação, portanto, procuramos encontrar alguma condição parecida aqui.

Primeiramente, tomando como base as transformações de coordenadas descritas por:

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \varepsilon\tau^\mu(x^\rho, \phi); \tag{3.2.19}$$

$$\phi \to \phi' = \phi(x^\rho) + \varepsilon\zeta(x^\rho, \phi); \tag{3.2.20}$$

em que τ e ζ correspondem aos geradores das coordenadas espaço-temporais e do campo, respectivamente, então seguiremos por levar em consideração a não univocidade da densidade Lagrangiana e a definição abrangente de invariância, de sorte a formular uma representação de invariância para a ação, a qual será utilizada nesta seção. Começaremos pela seguinte relação:

$$S' - S \sim \varepsilon^m; \;\; m > 1, \tag{3.2.21}$$

na qual empregaremos:

$$[S'] = \int_{\mathcal{R}'} \mathcal{L}' \; d^4x', \tag{3.2.22}$$

a ação transformada, e

$$[S] = \int_{\mathcal{R}} (\mathcal{L} + \varepsilon\partial_\mu F^\mu) \; d^4x, \tag{3.2.23}$$

a ação original, na qual, em analogia com o apresentado na Subseção (2.4.3), foi assumida a não univocidade da densidade lagrangiana a menos de um termo $\varepsilon\partial_\mu F^\mu$.

A equação (3.2.21) torna-se, então:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}'} \mathcal{L}' \; d^4x' - \int_{\mathcal{R}} (\mathcal{L} + \varepsilon\partial_\mu F^\mu) \; d^4x \;\; &\sim \;\; \epsilon^m \\ \int_{\mathcal{R}} [\mathcal{L}' \; \mathcal{J} - \mathcal{L} - \varepsilon\partial_\mu F^\mu] \, d^4x \;\; &\sim \;\; \varepsilon^m, \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

em que, com o objetivo de combinar as integrais em função do mesmo limite de integração na região $\mathcal{R}$, fora empregado o Jacobiano da transformação $\mathcal{J}$, computado pelo determinante da matriz $|\partial x^{\mu\prime}/\partial x^\nu|$, o qual, levando em consideração a transformação caracterizada por (3.2.19), e termos de até primeira ordem em ε, assume a forma $1 + \varepsilon\partial_\mu\tau^\mu$.

Analisando a equação (3.2.24) e lembrando dos mesmo argumentos empregados durante a discussão acerca da expressão (2.4.7), nos restará a identidade que se segue:

$$\mathcal{L}' \; \mathcal{J} - \mathcal{L} = \varepsilon\partial_\mu F^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^m). \tag{3.2.25}$$

O próximo passo é realizar a derivação da equação (3.2.25) em função do parâmetro ε, tomando o

ponto em que $\varepsilon = 0$, desta forma, encontra-se:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varepsilon}\mathcal{J} + \mathcal{L}'\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \partial_\mu F^\mu, \tag{3.2.26}$$

na qual devemos computar as derivadas parciais de todo os elementos contidos no argumento de $\mathcal{L}'$, bem como utilizar a forma explícita de $\mathcal{J}$, também fazendo a sua derivada em função de ε. O resultado de todo este procedimento pode ser organizado em sua forma final, na seguinte relação:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\zeta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}(\partial_\mu \zeta) + (\partial_\mu \mathcal{L})\tau^\mu - \left[\phi_{,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L}\right](\partial_\nu \tau^\mu) = \partial_\mu F^\mu, \tag{3.2.27}$$

a chamada *Identidade de Rund-Trautman para Campos*. É interessante notar que esta última identidade possui, em sua composição, alguns outros conceitos do formalismo tratado no último capítulo e que não obtivera a sua extensão para a Teoria de Campos. Em particular, definiremos a *Densidade de Momento Conjugado para Campos* como:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}, \tag{3.2.28}$$

e assim sendo, também somos capazes de reconhecer outra nova quantidade; o *Tensor Energia-Momento*[5], definido por:

$$\theta^\nu{}_\mu = \phi_{,\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L} = \phi_{,\mu}\Pi^\nu - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L}, \tag{3.2.29}$$

vale o comentário, que assim como contido em (NEUENSCHWANDER, 2011), para aplicações no espaço-tempo, como aquelas que faremos nas três últimas subseções, o momento deve ser computado pela relação,

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,0}}, \tag{3.2.30}$$

e a Hamiltoniana, pela integral em um volume V da componente 00 do tensor energia-momento, ou seja:

$$H = \int_V \theta^0{}_0 \, d^3x. \tag{3.2.31}$$

Como o objetivo é a consecução do Teorema de Noether, devemos unir as condições de extremização, isto é, a equação (3.2.14) e as condições de invariância, ou seja, a identidade de Rund-Trautman. Valendo-se de procedimentos de integração por partes, e algumas manipulações algébricas simples, é possível reorganizar a equação (3.2.27) de sorte a encontrar:

$$-\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right)\right](\zeta - \phi_{,\mu}\tau^\mu) = \partial_\mu(\Pi^\mu \zeta - \theta^\mu{}_\nu \tau^\nu - F^\mu), \tag{3.2.32}$$

assim, conseguimos reconhecer a presença da equação de Euler-Lagrange no lado esquerdo desta última, fazendo com que o lado esquerdo inteiro da expressão vá para zero. Então, temos por fim, o

[5] Na referência (NEUENSCHWANDER, 2011), esta quantidade é referida como *Tensor Densidade Hamiltoniana* $\mathcal{H}^\mu{}_\nu$.

Teorema de Noether para Campos, identificado por:

$$\partial_\mu(\Pi^\mu\zeta - \theta^\mu{}_\nu\tau^\nu - F^\mu) = 0, \tag{3.2.33}$$

em outras palavras, o que encontramos aqui, é que o Teorema de Noether resume-se ao quadri-divergente de uma quantidade física, ou seja, a relação entre extremização e invariância de um funcional, neste caso a ação, acarreta necessariamente na conservação de alguma quantidade física do sistema, no presente caso, essa relação de conservação é ditada por uma equação de continuidade na forma covariante (NEUENSCHWANDER, 2011).

Empregando a igualdade $j^\mu = \Pi^\mu\zeta - \theta^\mu{}_\nu\tau^\nu - F^\mu$, a equação (3.2.33), pode ser escrita de uma maneira geral, como:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{3.2.34}$$

ou ainda,

$$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0, \tag{3.2.35}$$

em um primeiro momento, esta simples equação parece não conter muitas informações, entretanto, seu sentido físico é poderoso, e faz desse último, um resultado importantíssimo dentro do estudo dos campos (MAGGIORE, 2005).

Como um guia para a obtenção de uma interpretação física para o resultado (3.2.34), podemos utilizar como base a equação de continuidade no contexto do eletromagnetismo, esta é expressa por:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.\vec{J} = 0, \tag{3.2.36}$$

sendo ρ, a densidade de carga e $\vec{J}$, a densidade de corrente, a equação de continuidade infere que dentro de alguma região do espaço, se é constatada a diminuição de cargas, então deve haver uma corrente transportando estas cargas para longe. Também vemos que o contrário é verdadeiro, se é aferido um aumento de cargas nesta região, logo, temos cargas fluindo para esta mesma região em forma de correntes. O grande sentido representado pela equação de continuidade, para o eletromagnetismo, é que cargas não podem ser criadas ou destruídas, ou seja, em um sistema físico, devem se conservar!

Para a equação (3.2.34), não é diferente, olhando para a sua forma contraída (3.2.35), vemos a derivada temporal de j^0 acrescida do divergente de j^i, e assim, é de imediato a relação simbólica que pode ser feita entre, j^0 e a densidade de carga ρ, e a quantidade j^i e a densidade de corrente $\vec{J}$, e devido a essas semelhanças, é conveniente chamar j^0 de *Cargas de Noether* e j^i de *Densidade de Corrente de Noether*.

Mais precisamente, em completa analogia com a equação (3.2.36), a nossa carga definida como $\Pi^\mu\zeta - \theta^\mu{}_\nu\tau^\nu - F^\mu$ será sempre conservada no tempo. Podemos demonstrar essa conservação integrando a equação (3.2.35) sobre um volume definido V, obteremos:

$$\int_V \partial_0 j^0 d^3x + \int_V \partial_i j^i d^3x = 0, \tag{3.2.37}$$

e como o segundo termo desta equação, envolve a integral de um divergente, podemos lançar mão

do teorema de Gauss (3.2.17), e em seguida assumir que a corrente conservada j^i cai para zero rapidamente no infinito;

$$\begin{aligned} \int_V \partial_0 j^0 d^3x + \int_A j^i \hat{n}.dA &= 0 \\ \int_V \partial_0 j^0 d^3x &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\int_V j^0 d^3x\right) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

e o resultado desse procedimento, implica que a integral de j^0 pelo volume, ou ainda, a somatória de toda a contribuição infinitesimal das cargas de Noether por todo o volume espacial é uma constante de movimento (não varia com o tempo).

3.2.3 O TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Na seção (3.1), foi comentado que os campos devem ser invariantes perante translações espaço-temporais, assim sendo, $\delta\phi(x^\mu) = 0$ (GREINER; REINHARDT, 1996). Ao analisar estes casos em específico, assumiremos as transformações expressas por:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\nu \delta_\nu{}^\mu, \tag{3.2.39}$$

para as coordenadas espaço-temporais, e

$$\phi'(x^{\mu\prime}) = \phi(x^\mu), \tag{3.2.40}$$

para os campos. Estas novas transformações são um caso particular das transformações (3.2.19) e (3.2.20), em que $\epsilon\tau^\mu \to \epsilon^\nu \delta_\nu{}^\mu$ e $\zeta \to 0$.

Se substituirmos as definições de tensor energia-momento e momento conjugado para campos na relação (3.2.33) (com $F^\mu = 0$), obteremos uma forma explícita e geral para corrente de Noether, em termos dos geradores ζ e τ^μ, dada por:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi \tau^\nu - \zeta) - \mathcal{L}\tau^\mu, \tag{3.2.41}$$

sendo que neste caso de translações de Lorentz, esta última torna-se:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{3.2.42}$$

na qual presenciamos mais uma vez o surgimento do Tensor Energia-Momento, mas desta vez obtido diretamente como um caso especial da quadri-corrente de Noether[6].

As consequências desta nova definição são vastas, como $\theta^{\mu\nu}$ éum caso particular de j^μ, então,

[6] Muitas vezes também é referido como Tensor Energia-Momento Canônico

também satisfaz a relação

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0, \tag{3.2.43}$$

e naturalmente, assim como o resultado obtido em (3.2.38), a integral da carga de Noether $\theta^{0\nu}$ em um volume V, é uma constante de movimento expressa por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P^\nu = \frac{d}{dt}\left(\int_V \theta^{0\nu} d^3x\right) = 0, \\ P^\nu = \int_V \theta^{0\nu} d^3x = const. \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

mas diferentemente de j^μ, nossa carga agora possui dois índices contravariantes, podendo ter até quatro valores possíveis para ν, o qual varre uma componente temporal e três espaciais, logo, podemos quebrar P^ν em duas outras partes:

$$P^0 = \int_V d^3x\theta^{00}; \tag{3.2.45}$$

$$P^i = \int_V d^3x\theta^{0i}; \tag{3.2.46}$$

estas quantidades formam as componentes do chamado tensor *quadri-momento para campos*[7], sendo a componente temporal, referente à Energia **E** e as três componentes espaciais, referentes ao vetor momento ($\vec{p}$) (GREINER; REINHARDT, 1996). No fundo, esse resultado está de acordo com o esperado, o Tensor Energia-Momento carrega informações sobre as densidade de momento e energia do sistema em suas componentes, desta feita, sua integral em um volume retorna o momento e energia do mesmo.

Devemos observar que o tensor $\theta^{\mu\nu}$, no geral, não é sempre simétrico com respeito a μ e ν, desta forma, pode ser interessante definir um *Tensor Energia-Momento Simétrico*, como:

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho W^{\rho\mu\nu}, \tag{3.2.47}$$

com W sendo um tensor antissimétrico com respeito a ρ e μ. Note que a quadri-divergencia $\partial_\mu\partial_\rho W^{\rho\mu\nu}$ vale zero pela contração de operações antissimétricas em índices, também, antissimétricos. Assim, a relação (3.2.43) é restaurada, e $T^{\mu\nu}$ é fisicamente equivalente a $\theta^{\mu\nu}$ (MAGGIORE, 2005). Ainda, é importante salientar que o Tensor Energia-Momento não é sempre invariante de calibre, discutiremos mais sobre este fato ao decorrer da Subseção (3.2.5).

3.2.4 O CAMPO ESCALAR (SPIN-0)

Voltaremos nossa atenção para a aplicação de todo o formalismo Hamiltoniano abordado até o momento, objetivando encontrar as quadri-correntes de Noether, explorando as quantidades conservadas para cada um. Conforme mencionado no início do capítulo, começaremos este processos pelo campo escalar, em seguida, para o campo eletromagnético e, por fim, para o campo responsável pela descrição das Ondas Gravitacionais.

[7] Considerando unidades geometrizadas, as quais serão utilizadas até o final deste capítulo.

De acordo com as referências (GREINER; REINHARDT, 1996) e (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019), os campos escalares são os exemplos mais simples no escopo da Teoria de Campos Relativística. Estes são responsáveis por descrever partículas de Spin-0, como por exemplo, o Méson neutro. A ação para este campo, livre de potenciais, é dada por (MAGGIORE, 2005), e assume a seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right), \tag{3.2.48}$$

sendo, $\phi \to \phi(x,t)$, o campo com massa m, de onde retiramos a Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2). \tag{3.2.49}$$

Uma vez que conhecemos a Lagrangiana responsável por descrever o campo, temos o que é preciso para consecução da equação de movimento do sistema através da equação de Euler-Lagrange (3.2.14), o que tem como resultado:

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x,t) = 0, \tag{3.2.50}$$

a chamada equação de Klein-Gordon.

Partindo da equação (3.2.43), podemos calcular qual o valor de $\theta^{\mu\nu}$, que é igual a:

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{3.2.51}$$

este, será utilizado para obtenção das cargas de Noether, as quais conforme a discussão subjacente à equação (3.2.44), podem ser colocadas como:

$$\int \theta^{0\nu}d^3x = const., \tag{3.2.52}$$

em que, para a componente 00 de $\theta^{0\nu}$, teremos

$$\theta^{00} = \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 - \partial_\alpha\partial^\alpha + m^2\phi^2\right], \tag{3.2.53}$$

e portanto, comparando esta com (3.2.31), percebemos que a componente temporal da carga de Noether é justamente a própria Hamiltoniana do sistema. Por (3.2.45) e (3.2.31), temos então:

$$\begin{aligned} P^0 &= \int_V \theta^{00}d^3x \\ &= H. \end{aligned} \tag{3.2.54}$$

Já para a componente θ^{0i}, por ser associada às translações espaciais, devemos recorrer ao início deste capítulo, onde tratamos da Teoria de Grupos e suas transformações; a ideia é que conseguimos representar a variação nas coordenadas x^μ por intermédio do elemento antissimétrico $\omega^{\mu\nu}$, introduzido a primeira vez em (3.1.7).

Tomaremos como base a seguinte representação:

$$\delta x^{\mu} = \sum_{\alpha<\beta} \tau^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} \omega^{\alpha\beta}, \tag{3.2.55}$$

sendo a somatória com o papel de evitar somas de índices repetidos, a qual pode ser substituída por um fator $1/2$. Perceba que esta regra geral de transformação é exatamente a mesma mostrada em (3.1.15), o que difere visualmente as duas representações, é que aqui, os elementos x^{μ} foram embutidos em $\tau^{\mu}{}_{(\alpha\beta)}$, assim como apresentado em (3.1.18), o gerador $\tau^{\mu}{}_{(\alpha\beta)}$, assume a forma:

$$\tau^{\mu}{}_{(\alpha\beta)} = \delta^{\mu}{}_{\alpha} x_{\beta} - \delta^{\mu}{}_{\beta} x_{\alpha}, \tag{3.2.56}$$

Para melhor visualizar o que está sendo feito aqui, a ideia é bem similar a relação apresentada (3.1.11), em que representamos a variação de alguma entidade pelo produto entre a matriz antissimétrica ω e os geradores desta transformação, no presente caso, τ^{μ}.

Em decorrência das novas representações utilizadas, prosseguiremos abrindo a equação (3.2.41), com $\zeta = 0$ e $\tau^{\mu} \to \tau^{\mu}_{(\alpha\beta)}$. Dessa feita, ao comparar o resultado obtido com (3.2.42), temos a nova representação da corrente de Noether:

$$j^{\mu(\alpha\beta)} = x^{\alpha}\theta^{\mu\beta} - x^{\beta}\theta^{\mu\alpha}. \tag{3.2.57}$$

Com o último resultado, conseguimos computar as cargas de Noether devido às rotações espaciais, por (3.2.44) e (3.2.46), encontraremos:

$$P^{0(ij)} = \int_V d^3x (x^i \theta^{0j} - x^j \theta^{0i}), \tag{3.2.58}$$

em que, através de (3.2.51), é encontrado o valor de θ^{0k}:

$$\theta^{0k} = \partial^0\phi\partial^k\phi - \eta^{0k}\mathcal{L} = \partial^0\phi\partial^k\phi, \tag{3.2.59}$$

assim, a (3.2.58) deve ser reescrita como

$$P^0_{(ij)} = \int_V d^3x \partial_0\phi(x_i\partial_j - x_j\partial_i)\phi. \tag{3.2.60}$$

De acordo com a expressão (3.1.30), é possível contrair a última com o símbolo de Levi-Civita,

conseguindo o momento angular total para este campo:

$$\begin{aligned} J^m &= \frac{1}{2}\epsilon^{mij}P^0_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\int_V d^3x\partial_0\phi\epsilon^{mij}(x_i\partial_j - x_j\partial_i)\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_V d^3x\partial_0\phi(\epsilon^{mij}x_i\partial_j + \epsilon^{mij}x_i\partial_j)\phi \\ &= \epsilon^{mij}\int_V d^3x[\partial_0\phi x_i\partial_j\phi]. \end{aligned} \tag{3.2.61}$$

Para entender melhor o que o resultado anterior representa, faz-se necessário a definição, no espaço de campo, do seguinte produto interno:

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \frac{i}{2}\int d^3x\phi_1\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_2, \tag{3.2.62}$$

com $A\overleftrightarrow{\partial_0}B = A(\partial_0 B) - (\partial_0 A)B$, então, podemos tomar o valor esperado do operador momento angular orbital definido em (3.1.32), assim, teremos:

$$\begin{aligned} \langle\phi|\hat{L}^k|\phi\rangle &= \frac{i}{2}\int d^3x(\phi L^k\partial_0\phi - \partial_0\phi L^k\phi) \\ &= \frac{i}{2}\epsilon^{kij}\int d^3x[\phi(x_ip_j)\partial_0\phi - \partial_0\phi(x_ip_j)\phi] \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^{kij}\int d^3x\left[\phi(x_i\partial_j)\partial_0\phi - \partial_0\phi(x_i\partial_j)\phi\right], \end{aligned} \tag{3.2.63}$$

na qual usaremos a seguinte relação para o primeiro termo no interior da integral,

$$\partial_j(\phi x_i\partial_0\phi) = \partial_j\phi x_i\partial_0\phi + \phi\delta^j{}_i\partial_0\phi + \phi x_i\partial_j\partial_0\phi, \tag{3.2.64}$$

e a equação (3.2.63), assume a forma:

$$\langle\phi|\hat{L}^k|\phi\rangle = \epsilon^{kij}\int d^3x\left[\partial_0\phi(x_i\partial_j)\phi\right]. \tag{3.2.65}$$

Comparando as expressões (3.2.61) e (3.2.65), temos que o momento angular total do sistema, emerge das cargas conservadas de Noether ($P^0_{(ij)}$), e é equivalente ao valor esperado do operador Momento Angular $\hat{L}^k$ perante o produto interno supracitado.

3.2.5 O CAMPO ELETROMAGNÉTICO (SPIN-1)

Nesta subseção, exploraremos o campo vetorial eletromagnético em sua forma covariante, repetindo um processo análogo ao aplicado anteriormente para o campo escalar. Buscaremos, novamente, explorar os formalismos Hamiltonianos a partir da Lagrangiana do sistema.

Por estarmos trabalhando com a forma covariante do eletromagnetismo, então as equações de campo podem ser expressas de forma tensorial pelo chamado *Tensor das Tensões de Maxwell* (GREINER;

REINHARDT, 1996), definido como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.2.66}$$

sendo A_μ o quadri-vetor potencial.

O tensor de Maxwell relaciona-se com os campos elétrico e magnético, respectivamente, da seguinte forma:

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E^i, \tag{3.2.67}$$

e

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k, \tag{3.2.68}$$

e portanto, sua representação matricial é expressa por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.69}$$

A ação que descreve o campo eletromagnético é dada por

$$S = -\frac{1}{4} \int F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} d^4x, \tag{3.2.70}$$

e portanto, a sua Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \tag{3.2.71}$$

a qual, por meio do emprego das equações de Euler-Lagrange para campos, nos fornece a seguinte equação do movimento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{3.2.72}$$

valendo comentar que para este caso, utilizamos A_μ no lugar de ϕ para a equação (3.2.14), derivando as quantidades em função do tensor potencial e, assim, é costumeiro referir-se a A_μ como sendo o campo para o eletromagnetismo.

É possível verificar que o tensor de Maxwell (3.2.66) é invariante perante transformações de calibre, e esta propriedade, chamada invariância de calibre, tem como consequência o fato de que temos mais graus de liberdade para escolher o campo (ALDROVANDI; PEREIRA, 2019), por exemplo, seja $\chi(x)$ uma função arbitrária e regular, então, ao performar a transformação

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \chi, \tag{3.2.73}$$

$F^{\mu\nu}$ permanecerá o mesmo:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\chi) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\chi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\chi + \partial_\nu\partial_\mu\chi = F_{\mu\nu}, \tag{3.2.74}$$

e o problema disso, é que A_μ torna-se redundante na descrição do campo eletromagnético (MAGGIORE, 2005), e por redundante, queremos dizer que sempre haverá infinitas configurações responsáveis pela caracterização do mesmo campo eletromagnético.

Para solucionar este problema, o procedimento a ser seguido consiste em utilizar a liberdade de calibre de sorte a restringir as componentes de A_μ, sem que as grandezas físicas descritas por essa última - como $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ - sofram quaisquer modificações. Como resultado deste processo, espera-se encontrar uma forma de A_μ, tal que esta seja unicamente determinada. Entretanto, o cobrimento destes métodos, não farão parte do nosso interesse aqui, a lição realmente importante a ser absorvida com esse comentário, é que: se queremos descrever observáveis físicos, os responsáveis por esta descrição, devem ser invariantes de calibre, assim, garantiremos que todas as quantidades representadas não terão suas componentes alteradas de acordo com uma determinada mudança de coordenadas (GARFINKLE, 2006).

Prosseguindo, utilizaremos a expressão (3.2.42), para encontrar o tensor energia-momento para o campo eletromagnético, o resultado será:

$$\theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}\partial^\nu A_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \tag{3.2.75}$$

chamando atenção ao fato de que este não é invariante de calibre, e ao performar a troca proposta em (3.2.73), o tensor energia-momento assumirá a nova forma:

$$\begin{aligned}
\theta^{\mu\nu\prime} &= -F^{\mu\alpha}\partial^\nu(A_\alpha - \partial_\alpha\chi) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \\
&= -F^{\mu\alpha}\partial^\nu A_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} - F^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial_\alpha\chi \\
&= \theta^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha}\partial^\nu\partial_\alpha\chi \\
&= \theta^{\mu\nu} - \partial_\alpha(F^{\mu\alpha}\partial^\nu\chi),
\end{aligned} \tag{3.2.76}$$

tendo sido utilizada manipulações algébricas por meio da regra do produto derivativo e a equação do movimento $\partial_\alpha F^{\mu\alpha} = 0$ para a passagem entre a penúltima linha e a última.

Note que, de acordo com a equação (3.2.44), ao computar as cargas conservadas de Noether, teremos:

$$P^{\nu\prime} = P^\nu - \int_V d^3x\partial_i(F^{0i}\partial^\nu\chi), \tag{3.2.77}$$

sendo o último termo, o quadri-divergente de $F^{0i}\partial^\nu\chi$, o qual, pelo teorema de Gauss, e o fato de que o campo vai à zero suficientemente rápido nos limites do infinito, conclui-se que este tende, também, a zero. A conclusão importante que chegamos, é que embora o tensor energia-momento não seja invariante de calibre, a carga de Noether o é, e assim sendo, é um forte candidato na descrição de observáveis físicos.

Retomando a discussão feita ao final da subseção (3.2.3), podemos construir um novo tensor energia-momento em uma forma invariante de calibre, para isso, basta acrescentar o termo $\partial_\alpha(F^{\mu\alpha}A^\nu)$ em (3.2.75). Agora, ao performar a mesma transformação de calibre (3.2.73) no novo tensor $T^{\mu\nu}$

definido por

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\alpha(F^{\mu\alpha}A^\nu), \tag{3.2.78}$$

teremos:

$$T^{\mu\nu\prime} = \theta^{\mu\nu\prime} + \partial_\alpha[F^{\mu\alpha}(A^\nu + \partial^\nu\chi)], \tag{3.2.79}$$

e pelo resultado (3.2.76):

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\prime} &= \theta^{\mu\nu} - \partial_\alpha(F^{\mu\alpha}\partial^\nu\chi) + \partial_\alpha[F^{\mu\alpha}(A^\nu + \partial^\nu\chi)] \\ &= \theta^{\mu\nu} - \partial_\alpha(F^{\mu\alpha}\partial^\nu\chi) + \partial_\alpha F^{\mu\alpha}(A^\nu + \partial^\nu\chi) + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha(A^\nu + \partial^\nu\chi) \\ &= \theta^{\mu\nu} - \partial_\alpha(F^{\mu\alpha}\partial^\nu\chi) + \partial_\alpha F^{\mu\alpha}A^\nu + \partial_\alpha F^{\mu\alpha}\partial^\nu\chi + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha A^\nu + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial^\nu\chi, \end{aligned} \tag{3.2.80}$$

mas, pela equação do movimento (3.2.72);

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\prime} &= \theta^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial^\nu\chi + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha A^\nu + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial^\nu\chi \\ &= \theta^{\mu\nu} + F^{\mu\alpha}\partial_\alpha A^\nu \\ &= \theta^{\mu\nu} + \partial_\alpha(F^{\mu\alpha}A^\nu) \\ &= T^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.2.81}$$

e está demonstrada a invariância de calibre do novo tensor energia-momento proposto.

Ainda, podemos traçar um comentário útil para a discussão sobre a invariância do tensor energia-momento, até o momento estivemos muito preocupados com a energia total de um ponto localizado, entretanto, devemos repensar essa ideia ao analisar a energia, ou o momento, carregados por uma onda. É que para as ondas no geral, como ondas eletromagnéticas, ou as Ondas Gravitacionais (como será abordado na Seção(**??**)), a energia carregada não é bem definida para menos de alguns comprimentos de onda, dessa forma, faz-se necessário tomar a média da equação (3.2.47) em um dado volume V, resultando em:

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle = \langle\theta^{\mu\nu}\rangle + \langle\partial_\rho W^{\rho\mu\nu}\rangle, \tag{3.2.82}$$

e certamente, a equação (3.2.78), torna-se:

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle = \langle\theta^{\mu\nu}\rangle + \langle\partial_\alpha(F^{\mu\alpha}A^\nu)\rangle = \langle\theta^{\mu\nu}\rangle, \tag{3.2.83}$$

pelo fato de que, uma vez definidas as condições de contorno do termo $\partial_\alpha(F^{\mu\alpha}A^\nu)$, sua média pelo espaço vai para zero suficientemente rápido.

Continuando, valendo-se da forma explícita de $\theta^{\mu\nu}$ na equação (3.2.78), alcançamos a representação

de $T^{\mu\nu}$ que se segue:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\alpha}\partial^{\nu}A_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + \partial_{\alpha}(F^{\mu\alpha}A^{\nu}) \\ &= -F^{\mu\alpha}\partial^{\nu}A_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + F^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}A^{\nu} \\ &= -F^{\mu\alpha}(\partial^{\nu}A_{\alpha} - \partial_{\alpha}A^{\nu}) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \\ &= F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \end{aligned} \tag{3.2.84}$$

e com esse resultado, podemos computar as cargas de Noether:

$$\begin{aligned} P^{\nu} &= \int_{V} d^{3}x T^{0\nu} \\ &= \int_{V} d^{3}x \left(F^{0\alpha}F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{0\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \right), \end{aligned} \tag{3.2.85}$$

e a carga de Noether temporal pode ser encontrada:

$$\begin{aligned} P^{0} &= \int_{V} d^{3}x \left(F^{0\alpha}F^{0}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{00}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \right) \\ &= \int_{V} d^{3}x \left(F^{0\alpha}F^{0}_{\alpha} - \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{V} d^{3}x \left(\vec{E}^{2} + \vec{B}^{2} \right), \end{aligned} \tag{3.2.86}$$

descobrindo que esta é a energia total do campo eletromagnético (GRIFFITHS, 1999), lembrando que estamos trabalhando com unidades geometrizadas e, portanto, a permeabilidade magnética μ_0 e permissividade elétrica ϵ_0 são iguais a 1.

Já para a carga de Noether espacial:

$$\begin{aligned} P^{i} &= \int_{V} d^{3}x \left(F^{i\alpha}F^{i}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{ii}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \right) \\ &= \int_{V} d^{3}x \left(F^{i\alpha}F^{i}{}_{\alpha} + \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \right) \\ &= \int_{V} d^{3}x \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)^{i}, \end{aligned} \tag{3.2.87}$$

obtemos a integral no volume espacial do *Vetor de Poynting* (GRIFFITHS, 1999), é conservada.

3.2.6 O MOMENTO ANGULAR DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Na seção passada utilizamos o tensor energia-momento para o cálculo das quantidades conservadas no sistema, neste momento, faremos uma análise parecida com a feita para o campo escalar. Partiremos da verificação do comportamento das quadri-cordenadas x^{μ} e do campo $A^{\mu}(x^{\mu})$ perante as transformações de Lorentz, assim, encontraremos os geradores das transformações e aplicaremos estes na quadri-corrente de Noether (3.2.41).

Assumiremos que as coordenadas se transformam da seguinte forma:

$$\delta x_\mu = \sum_{k<l} \tau_{\mu(kl)} \omega^{kl}, \tag{3.2.88}$$

e o campo transforma-se como:

$$\delta A_\mu = \sum_{k<l} \zeta_{\mu(kl)} \omega^{kl}, \tag{3.2.89}$$

sendo, $\tau_{\mu(kl)}$ e $\zeta_{\mu(kl)}$, os geradores das respectivas transformações.

De acordo com o procedimento feito para o campo escalar (3.2.56) e com o que fora apresentado acerca da equação (3.1.18), podemos encontrar os geradores de (3.2.88) e (3.2.89), obtendo, nesta ordem:

$$\tau_{\mu(kl)} = \delta^\mu{}_k x_l - \delta^\mu{}_l x_k, \tag{3.2.90}$$

e

$$\zeta_{\mu(kl)} = \delta^\mu{}_k A_l - \delta^\mu{}_l A_k. \tag{3.2.91}$$

Utilizaremos os geradores encontrados na equação (3.2.41);

$$j^\mu_{(kl)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}[\partial^\nu A_\sigma \tau_{\nu(kl)} - \zeta_{\sigma(kl)}] - \mathcal{L}\tau^\mu{}_{(kl)}, \tag{3.2.92}$$

a qual pode ser manipulada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} j^\mu_{(kl)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial^\nu A_\sigma \tau_{\nu(kl)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\zeta_{\sigma(kl)} - \mathcal{L}\tau^\mu{}_{(kl)} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\zeta_{\sigma(kl)} - \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial^\nu A_\sigma \tau_{\nu(kl)} + \mathcal{L}\tau^\mu{}_{(kl)}\right] \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\zeta_{\sigma(kl)} - \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial^\nu A_\sigma + \mathcal{L}\eta^{\mu\nu}\right]\tau_{\nu(kl)}, \end{aligned} \tag{3.2.93}$$

resultando no surgimento do tensor energia-momento (3.2.42) no segundo termo desta última:

$$j^\mu_{(kl)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\zeta_{\sigma(kl)} - \theta^{\mu\nu}\tau_{\nu(kl)}. \tag{3.2.94}$$

Utilizando-se da lagrangiana definida em (3.2.71), em conjunto com os geradores (3.2.90) e (3.2.91), a quadri-corrente torna-se

$$j^\mu_{(kl)} = F^{\mu\sigma}(\delta_{\sigma k}A_l - \delta_{\sigma l}A_k) - (\theta^\mu{}_k x_l - \theta^\mu{}_l x_k), \tag{3.2.95}$$

a qual, em comparação com o que fora apresentado em (3.2.38), tiramos a carga de Noether conservada:

$$\begin{aligned} P^0_{(kl)} &= \int_V d^3x \left[F^{0\sigma}(\delta_{\sigma k}A_l - \delta_{\sigma l}A_k) - (\theta^0{}_k x_l - \theta^0{}_l x_k)\right] \\ &= \int_V d^3x \left[(F^{0k}A_l - F^{0l}A_k) + (\theta^0{}_l x_k - \theta^0{}_k x_l)\right], \end{aligned} \tag{3.2.96}$$

dessa forma, finalmente, obtemos o momento angular total pelo mesmo argumento exposto nos arredores da equação (3.1.32), o qual é dado por

$$\begin{aligned} J^m &= \frac{1}{2}\epsilon^{mkl}P^0_{(kl)} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{mkl}\int_V d^3x\left[F^{0\sigma}(\delta_{\sigma k}A_l - \delta_{\sigma l}A_k) - (\theta^0{}_k x_l - \theta^0{}_l x_k)\right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{mkl}\int_V d^3x\left[(\theta^0{}_l x_k - \theta^0{}_k x_l) + (F^{0k}A_l - F^{0l}A_k)\right] \\ &= \epsilon^{mkl}\int_V d^3x\left[(\theta^0{}_k x_l) + (F^{0k}A_l)\right]. \end{aligned} \tag{3.2.97}$$

Comparando esta última com o momento angular total encontrado para o campo de Spin-0 (3.2.61), percebemos a presença de dois termos ao invés de apenas um único. Para entender um pouco melhor o resultado obtido, bem como as semelhanças e divergências em detrimento ao campo escalar, devemos trabalhar separadamente com cada termo e aplicar as condições do calibre radioativo, caracterizadas por $A_0 = 0$ e $\nabla.\vec{A} = 0$[8] (MAGGIORE, 2008), assim, encontramos respectivamente:

$$\begin{aligned} L^m &= \epsilon^{mkl}\int_V d^3x(\eta^{00}\theta_{0k}x_l) \\ &= \epsilon^{mkl}\int_V d^3x\partial^0 A_i x_k \partial_l A^i, \end{aligned} \tag{3.2.98}$$

e

$$\begin{aligned} S^m &= \epsilon^{mkl}\int_V d^3x[(\partial^0 A^k - \partial^k A^0)A_l] \\ &= \epsilon^{mkl}\int_V d^3x(A_l\partial^0 A_k). \end{aligned} \tag{3.2.99}$$

A expressão 3.2.98 pode ser diretamente comparada com a equação (3.2.61), e assim notamos que, bem como para o campo escalar, a primeira quantidade é o momento angular orbital para o campo Spin-1. Com mais rigor, é possível reproduzir os passos feitos na discussão que sucede (3.2.61), mostrando assim que L^m é o valor esperado do operador momento angular orbital para este campo $\langle A_\mu|\hat{L}^m|A^\mu\rangle$.

A diferença entre o momento angular total para os campos de Spin-1 e Spin-0, reside no segundo termo da expressão (3.2.97), o qual contém apenas quantidades que dependem do campo A^i. É como se este termo especial constituísse uma quantidade intrínseca ao campo, mas com dimensão de momento angular. Assim, temos o chamado *Momento Angular Intrínseco*, ou também referido como *Momento Angular de Spin*.

Haja vista as expressões (3.2.98) e (3.2.99), é parte da discussão compreender a origem da divergência supracitada. Acontece que, ao analisar os geradores empregados na corrente de Noether para o campo escalar, tínhamos apenas transformações referentes às rotações espaciais (3.2.56),

[8] Perceba que o momento angular total (3.2.97) não é invariante de calibre, e portanto, não é capaz de descrever observáveis físicos. Contudo, a projeção do Spin na direção do movimento, também chamada de *Helicidade*, é uma quantidade bem definida e invariante de calibre (veja as páginas 165 e 166 de (GREINER; REINHARDT, 1996).

ao passo em que o campo escalar mantinha-se invariante. Já para o campo eletromagnético, a transformação das coordenadas espaciais é semelhante ao caso anterior, explicando a semelhança para com o momento angular orbital nos dois casos, entretanto, agora o nosso campo transforma-se de acordo com o gerador expresso em (3.2.91), e como consequência, pelo teorema de Noether, é natural que isso se reflita em uma quantidade conservada associada a invariância do campo em si, no caso, o momento angular de Spin (3.2.99)[9].

[9] Mais discussões sobre o momento angular total dos campos será feita ao final da Seção (4.4), em que será calculado o momento angular total para o campo Spin-2.

4 ONDAS GRAVITACIONAIS E O MOMENTO ANGULAR

Neste capítulo, nos preocuparemos essencialmente com a análise do campo de Spin-2. Este campo, em específico, é de grande interesse dentro deste trabalho, pois, é aquele que descreve a propagação de informação gravitacional pelo espaço. Mais especificamente, assim como brevemente comentado no primeiro capítulo, segundo a Teoria da Relatividade Geral, massas em movimento perturbam a malha do espaço-tempo e estas deformações se propagam no espaço à velocidade da luz, temos então o fenômeno das Ondas Gravitacionais.

Começaremos a discussão pela introdução da radiação gravitacional como consequência da linearização das equações de campo de Einstein. Em seguida, apresentaremos um importante calibre, conhecido como calibre da radiação, ou ainda, calibre de Lorentz, em completa analogia àquele existente no eletromagnetismo. Outros conceitos importantes que serão abordados, são: os tensores de projeção, que como o próprio nome sugere, são responsáveis por projetar quantidades no calibre de Lorentz, e o Tensor Momento de Quadrupolo, que como veremos, se apresenta como uma qualidade atrelada a capacidade de emissão de radiação gravitacional por sistemas binários (SCHUTZ, 2009).

Dessa feita, teremos o necessário para a investigação das cargas de Noether por meio da ação de Einstein (MAGGIORE, 2008). Os procedimentos seguirão as mesmas abordagens anteriores; objetivamos explorar o comportamento do campo de Spin-2 perante as transformações do grupo de Lorentz, de sorte a encontrar a carga de Noether conservada para este caso, obtendo os elos entre conservação e o Momento Angular Total carregado pela radiação gravitacional.

4.1 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Nesta seção introdutória, o objetivo principal será mostrar como as Ondas Gravitacionais podem ser obtidas diretamente a partir das equações de campo de Einstein, e portanto, cabe uma breve introdução desta última. As equações de campo de Einstein não são lineares e apresentam-se como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{4.1.1}$$

sendo $g_{\mu\nu}$, a métrica do espaço tempo curvo, G a constante de gravitação universal de Newton (em unidades físicas, definida por $6,67 \times 10^{-11} \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$), $T_{\mu\nu}$ o Tensor Energia-Momento, e por fim, $R_{\mu\nu}$ e R o *Tensor de Ricci* e o *Escalar de Curvatura*, respectivamente (WEINBERG, 1972).

Considerando o *Tensor de Riemann*:

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}, \tag{4.1.2}$$

sendo $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, a chamada *Conexão Afim*, dada por

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \tag{4.1.3}$$

então, define-se o tensor de Ricci, como:

$$R_{\nu\sigma} = R^{\alpha}{}_{\nu\alpha\sigma}, \tag{4.1.4}$$

e o escalar de curvatura, por:

$$R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}. \tag{4.1.5}$$

Como um breve comentário sobre a equação (4.1.1), podemos evidenciar a maior inovação empregada pela Teoria da Relatividade Geral, o lado esquerdo da expressão de campo de Einstein refere-se às características geométricas do espaço-tempo, ao passo em que o lado direito, como na discussão feita em (HARTLE, 2003), às densidades de energia e momento de um sistema ($T^{\mu\nu}$), sendo estas as fontes da curvatura do espaço-tempo.

Devido ao carácter perturbativo das Ondas Gravitacionais a estratégia passa a ser linearizar as equações de Einstein, e para isso, consideraremos que em um ponto suficientemente distante de quaisquer fontes de massas, a métrica $g_{\mu\nu}$ possa ser computada como sendo a métrica de Minkowski (para espaços-tempos planos) acrescida de uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$, com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, i. e.,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{4.1.6}$$

e portanto, devemos redefinir as quantidades (4.1.2), (4.1.4) e (4.1.5), em termos desta nova métrica. Com efeito, é suficiente que estas expansões sejam feitas em primeira ordem de $h_{\mu\nu}$, entretanto, pelo motivo que ainda será abordado nas seções subsequentes, apresentaremos também um esboço para a expansão em segunda ordem do escalar de curvatura.

Em primeira ordem, o tensor de Riemann, com todos os seus índices abaixados[1], torna-se:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma}), \tag{4.1.7}$$

e então, o tensor de Ricci torna-se:

$$R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial^\mu h_{\mu\sigma} + \partial^\rho\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h - \Box_\eta h_{\nu\sigma}), \tag{4.1.8}$$

sendo $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, o traço de $h_{\mu\nu}$ e $\Box_\eta = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, o D'Alembertiano para o espaço-tempo plano. Por último, o escalar de curvatura torna-se

$$R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} = \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \Box_\eta h. \tag{4.1.9}$$

Para encontrar o escalar de curvatura até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, devemos repetir os cálculos que nos levaram a expressão (4.1.7), conservando os termos perturbativos em até segunda ordem. Em seguida, se atentar ao fato de que, nas aproximações (4.1.8) e (4.1.9), considerou-se $R_{\nu\sigma} = \eta^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ e $R = \eta^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}$, portanto, haja vista que a versão contravariante da expressão (4.1.6) é $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$,

[1] Neste regime linearizado, utilizamos a própria métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ para levantar e abaixar os índices.

a nova aproximação para o escalar de curvatura em segunda ordem é dada por:

$$R \;=\; g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma} = (\eta^{\nu\sigma} - h^{\nu\sigma})(R^{(1)}_{\nu\sigma} + R^{(2)}_{\nu\sigma}) \tag{4.1.10}$$

onde $R^{(1)}_{\nu\sigma}$ é dado por (4.1.8) e $R^{(2)}_{\nu\sigma}$, sua respectiva expansão em segunda ordem.

Retornando todas as expansões em primeira ordem em (4.1.1), encontramos as equações de campo de Einstein no regime linearizado:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial^\sigma h_{\sigma\nu} + \partial^\sigma\partial_\nu h_{\nu\sigma} - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box_\eta h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\sigma\partial^\rho h_{\sigma\rho} - \Box_\eta h) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{4.1.11}$$

No entanto, é possível realizar uma definição apropriada, de sorte a simplificar a forma dessa última (BAMBI, 2018), faremos isso por intermédio da *perturbação de traço-reverso*, apresentada como:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{4.1.12}$$

e como o próprio nome sugere, verifica-se de imediato que $\tilde{h} = \eta^{\mu\nu}\tilde{h}_{\mu\nu} = -h$. É natural observar que a recíproca também é verdadeira

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\tilde{h}, \tag{4.1.13}$$

e ao introduzir (4.1.13) em (4.1.11), obtemos:

$$\partial_\mu\partial^\rho\tilde{h}_{\rho\nu} + \partial^\rho\partial_\nu\tilde{h}_{\mu\rho} - \Box_\eta\tilde{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\partial^\rho\tilde{h}_{\rho\sigma} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{4.1.14}$$

completando-se assim a linearização das equações de Einstein. Atente-se ao fato de que esta expressão vale na presença de uma fonte, com uma densidade de energia-momento $T^{\mu\nu}$.

4.2 O CALIBRE TRANSVERSO E SEM TRAÇO

Assumiremos a mudança infinitesimal de coordenadas guiada por $x^{\mu\prime} = x^\mu + \xi^\mu$, sendo $\xi^\mu = \xi^\mu(x^\mu)$, uma função genérica das coordenadas do espaço e tempo, da mesma ordem de grandeza de $h_{\mu\nu}$. Então, por meio da transformação da métrica (4.1.6), encontramos a relação existente entre $h'_{\mu\nu}$ nas novas coordenadas, e $h_{\mu\nu}$, nas antigas:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu. \tag{4.2.1}$$

Uma vez que a expressão (4.1.12) nas novas coordenadas é dada por

$$\tilde{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h', \tag{4.2.2}$$

valendo-se de (4.2.1), podemos introduzir as quantidades $h'_{\mu\nu}$ e h' nesta última, assim encontramos

$$\tilde{h}'_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\xi_\alpha, \tag{4.2.3}$$

a conexão existente entre a perturbação de traço reverso nas novas coordenadas e nas coordenadas antigas. Então, podemos substituir esta última em (4.1.14), com isso, contataremos que a equação linearizada de Einstein é invariante perante transformações de calibre. Ademais, um argumento mais direto que nos conduz a mesma conclusão é apresentado por (GARFINKLE, 2006), no qual vemos que em primeira instância, o próprio tensor de Riemann (4.1.7) é um invariante de calibre, e assim sendo, todo o lado esquerdo das equações de Einstein também será, dado que é inteiramente construído a partir de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Tomando o quadri-divergente de (4.2.3),

$$\begin{aligned} \partial^\mu \tilde{h}'_{\mu\nu} &= \partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu - \partial^\mu \partial_\nu \xi_\mu + \partial^\mu \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \xi_\alpha \\ &= \partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \partial^\alpha \xi_\alpha + \partial_\nu \partial^\alpha \xi_\alpha \\ &= \partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} - \Box_\eta \xi_\nu, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

e igualando esta última a zero:

$$\partial^\mu \tilde{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu} - \Box_\eta \xi_\nu = 0, \tag{4.2.5}$$

podemos extrair a conclusão importante de que, como a equação de Einstein é invariante perante transformações de calibre, é sempre possível escolher de forma conveniente os valores para as funções arbitrárias $\xi^\mu(x^\mu)$, de sorte a impor que $\partial^\mu \tilde{h}'_{\mu\nu} = 0$, tal que

$$\Box_\eta \xi_\nu = \partial^\mu \tilde{h}_{\mu\nu}, \tag{4.2.6}$$

seja satisfeita. A imposição $\partial^\mu \tilde{h}'_{\mu\nu} = 0$ é chamada de *condição do calibre harmônico* e a sua importância mora no fato de que quando implementada na equação de Einstein (4.1.14), esta assume a forma:

$$\Box_\eta \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

uma equação de onda não homogênea para o campo $\tilde{h}_{\mu\nu}$, cuja solução é conhecida.

Sumariamente, assim como apresenta (BAMBI, 2018), as escolhas consistirão em um ξ^0, responsável por fazer com que o traço de $\tilde{h}_{\mu\nu}$ desapareça, e como consequência, pela relação (4.1.13), temos que a perturbação métrica $h_{\mu\nu}$ coincide com a perturbação de traço reverso $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Podemos também realizar escolhas acerca das três funções ξ^i, de forma que $h^{0i} = 0$. Já a consequência da segunda escolha é refletida ao tomar a componente $\nu = 0$, na condição $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$:

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{i0} = 0, \tag{4.2.7}$$

e, portanto,

$$\partial^0 h_{00} = 0 \Rightarrow h_{00} = 0, \tag{4.2.8}$$

ademais, ao expandir a condição de Lorentz, valendo-se da simetria de $h_{\mu\nu}$, emerge a relação:

$$\begin{aligned} \partial^0 h_{0\nu} + \partial^i h_{i\nu} &= 0 \\ \partial^0 h_{00} + \partial^i h_{i0} + \partial^0 h_{0j} + \partial^i h_{ij} &= 0 \\ \partial^i h_{ij} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Assim, temos todas as relações que caracterizam o novo calibre:

$$h_{0\mu} = 0;\ h = 0;\ \partial^i h_{ij} = 0, \tag{4.2.10}$$

e a equação de Einstein, torna-se

$$\Box_\eta \tilde{h}^{TT}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{4.2.11}$$

na qual, os índices TT indicam o calibre transverso e sem traço vigente.

Objetivando o estudo da propagação das Ondas Gravitacionais dentro do contexto da teoria perturbativa linearizada, estamos interessados em pontos do espaço suficientemente distantes de quaisquer fontes de densidades de energia-momento (MAGGIORE, 2008), assim, é suficiente que $T^{\mu\nu} = 0$, e a equação de campo (4.2.11), torna-se:

$$\Box_\eta \tilde{h}^{TT}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.2.12}$$

e esta se resume a uma equação de onda para o vácuo, cuja solução é

$$\tilde{h}^{TT}_{ij}(k^\mu) = \varepsilon_{ij} e^{ik^\mu x_\mu}, \tag{4.2.13}$$

sendo ε_{ij}, o tensor de polarização, e $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$, o tensor de propagação, com ω igual a frequência angular do sinal.

Certamente, assim como para o eletromagnetismo, podemos representar a solução de uma onda plana (4.2.13) como função de senos e cossenos, propagando-se na direção $\hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$:

$$\tilde{h}^{TT}_{ij}(t, \hat{n}) = \varepsilon_{ij} \left[\cos(\omega(t - |\hat{n}|/c)) + i \sin(\omega(t - |\hat{n}|/c))\right], \tag{4.2.14}$$

contudo, sabemos que toda a informação física desta última reside na parte real (GRIFFITHS, 1999), logo,

$$\tilde{h}^{TT}_{ij}(t, \hat{n}) = \varepsilon_{ij} \left[\cos(\omega(t - |\hat{n}|/c))\right], \tag{4.2.15}$$

é uma das representações mais comuns a ser utilizada. Perceba que o termo $t_r = t - \hat{n}/c$ representa o tempo retardado, e isso deve-se ao fato de que quando a informação gravitacional alcança determinado ponto do espaço, carrega as características da fonte no momento da emissão.

4.3 TENSOR MOMENTO DE QUADRUPOLO E A PROJEÇÃO PARA O CALIBRE TT

Nas próximas duas subseções faz-se necessário o cobrimento de dois temas importantes para o estudo da radiação gravitacional. Estes temas serão utilizados durante as tratativas sobre a investigação das cargas conservadas para este campo.

Começaremos pelo *Tensor Momento de Quadrupolo*, o qual será obtido a partir da solução da equação (4.2.11). Veremos que esta quantidade refere-se à contribuição para com o campo $h_{\mu\nu}$, referente a uma determinada densidade de energia-momento no espaço.

4.3.1 O TENSOR MOMENTO DE QUADRUPOLO

A solução da equação (4.2.11) é dada por

$$\tilde{h}^{\mu\nu}(t,r) = \frac{4G}{c^4}\int d^3x' \frac{T^{\mu\nu}(t-r/c,x')}{r}, \tag{4.3.1}$$

com $r = |x - x'|$, a distância euclidiana entre um ponto e outro do espaço. O que faremos a seguir, consiste na manipulação desta relação, de sorte a dar cabo para definição do tensor momento de quadrupolo.

Começaremos por explorar a equação (3.2.43) para este campo, sendo o primeiro passo atentar-se à uma das suas consequências diretas, de acordo com a discussão acerca do resultado (3.2.44), temos que

$$\int_V T^{0\nu} d^3x = const.,$$

e assim sendo, por (4.3.1), $h^{0\nu}$ também será uma constante, como estamos interessados na propagação das ondas gravitacionais, as componentes constantes no tempo podem ser postas iguais a zero sem qualquer perda de generalidade, i.e., $h^{0\nu} = 0$.

Multiplicando a (3.2.43) por x^k, encontramos:

$$\int_V d^3x\ \partial_0 T^{0\nu} x^k = -\int_V d^3x\ \partial_i T^{i\nu} x^k, \tag{4.3.2}$$

a qual, tomando apenas os valores de ν contemplados pelas coordenadas espaciais (3.2.46), podemos utilizar a regra da cadeia no termo presente ao lado direito, obtendo,

$$\int_V d^3x\ \partial_0 T^{0j} x^k = -\int_V d^3x\ \partial_i (T^{ij} x^k) + \int_V d^3x\ T^{ij}\partial_i x^k. \tag{4.3.3}$$

Pelo teorema de Gauss (3.2.17), o termo

$$\int_V d^3x\ \partial_i (T^{ij} x^k) = \int_{\partial V} dA\ \hat{n} T^{ij} x^k = 0, \tag{4.3.4}$$

e considerando que $\partial_i x^k = \delta_i^k$, a equação (4.3.3), torna-se

$$\int_V d^3x\ \partial_0 T^{0j} x^k = \int_V d^3x\ T^{kj}, \tag{4.3.5}$$

notando que pela simetria do tensor $T^{\mu\nu}$, podemos intercambiar os índices de forma a atingir a equação

$$\int_V d^3x \left(\partial_0 T^{0j} x^k + \partial_0 T^{0k} x^j\right) = 2\int_V d^3x\, T^{kj}. \tag{4.3.6}$$

Da exata mesma maneira, agora valendo-se do valor de ν o qual contempla a coordenada temporal, e multiplicando ambos os lados por x^k e x^l, a equação (4.3.2) se transformará em:

$$\begin{aligned}\int_V d^3x\, \partial_0 T^{00} x^k x^l &= -\int_V d^3x\, \partial_i (T^{i0} x^k x^l) + \int_V d^3x\, T^{i0}\left(\delta_i^k x^l + x^k \delta_i^l\right) \\ &= \int_V d^3x\, \left(T^{k0} x^l + T^{l0} x^k\right), \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

em que, ao tomar a derivada temporal em ambos os lados, nos retornará:

$$\int_V d^3x\, \partial_0^2 T^{00} x^k x^l = \int_V d^3x\, \left(\partial_0 T^{k0} x^l + \partial_0 T^{l0} x^k\right), \tag{4.3.8}$$

a qual pode ser diretamente comparada com a relação (4.3.6), provendo

$$\int_V d^3x\, \partial_0^2 T^{00} x^k x^l = 2\int_V d^3x\, T^{kl}. \tag{4.3.9}$$

A partir da equação (4.3.9), define-se o *Tensor Momento de Quadrupolo* Q^{kl}, por:

$$Q^{kl} = \int_V d^3x\, T^{00} x^k x^l, \tag{4.3.10}$$

e como consequência de toda a discussão, temos que a solução (4.3.1) pode ser quebrada em duas outras soluções;

$$h^{0\nu} = 0, \tag{4.3.11}$$

e

$$h^{ij}(t,r) = \frac{4G}{c^4 r}\int d^3x' \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{ij}(t - r/c), \tag{4.3.12}$$

as chamadas aproximações quadrupolares da radiação gravitacional (SCHUTZ, 2009).

É de importância notar que a equação (4.3.12) expressa a relação direta entre o tensor momento de quadrupolo e as componentes espaciais do campo h_{ij}. Caso Q_{ij} de algum sistema seja constante ou linear no tempo, não haverá emissão de radiação.

4.3.2 O OPERADOR PROJEÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

Uma questão também importante de ser comentada, a qual também será recorrente nas próximas seções, é que as soluções (4.3.11) e (4.3.12) não se encontram no calibre transverso e sem traço, dessa feita, cabe apresentar uma maneira de projetar as componentes do campo no calibre TT, fazendo uma ponte entre as quantidades h_{ij} e h_{ij}^{TT}.

Considerando uma solução de onda plana $h_{\mu\nu}$, propagando-se na direção $\hat{n}$, sob as condições do

calibre de Lorentz, mas não ainda no calibre TT. Introduziremos o operador

$$P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j, \tag{4.3.13}$$

o qual, como expõem (MAGGIORE, 2008), goza das propriedades de simetria em i e j. Esse último também é transverso:

$$\begin{aligned} n^i P_{ij}(\hat{n}) &= n^i \delta_{ij} - n^i n_i n_j \\ &= n^j - n^j = 0, \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

atua como um projetor:

$$\begin{aligned} P_{ik}(\hat{n}) P_{kj}(\hat{n}) &= (\delta_{ik} - n_i n_k)(\delta_{kj} - n_k n_j) \\ &= \delta_{ik}\delta_{kj} - \delta_{ik} n_k n_j - \delta_{kj} n_i n_k + n_i n_k n_k n_j \\ &= \delta_{ij} - n_i n_j - n_i n_j + n_i n_j \\ &= P_{ij}, \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

e o seu traço equivale a:

$$\begin{aligned} P^i_i(\hat{n}) &= \eta^{ij} P_{ij}(\hat{n}) = \eta^{ij}\delta_{ij} - \eta^{ij} n_i n_j \\ &= 2. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Através do que fora apresentado, podemos unir as representações e propriedades, em uma nova entidade $\mathcal{P}_{ijkl}$, a qual é transversa por todos os seus índices e sem traço com respeito aos índices (i, j) e (k, l), definida como:

$$\mathcal{P}_{ijkl} = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}. \tag{4.3.17}$$

O que será interessante sobre esta nova representação, é que ela, naturalmente, continua sendo um projetor:

$$\mathcal{P}_{ijkl}\mathcal{P}_{klmn} = \mathcal{P}_{ijmn}, \tag{4.3.18}$$

e também continua simétrica perante a troca de índices (i, j) por (k, l) e vice-versa.

Feita toda essa introdução, podemos levar a equação (4.3.12) para o calibre transverso e sem traço pela relação:

$$h^{TT}_{ij}(t, r) = \mathcal{P}_{ijkl} h_{kl}(t, r), \tag{4.3.19}$$

e as equações (4.3.11) e (4.3.12) projetadas no calibre TT, tornam-se:

$$h^{TT}_{0\nu}(t, r) = 0, \tag{4.3.20}$$

e

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT}(t,r) &= \mathcal{P}_{ijkl}\frac{4G}{c^4 r}\int d^3x' \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{kl}(t-r/c) \\ &= \frac{4G}{c^4 r}\int d^3x' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}_{ijkl} Q_{kl}(t-r/c) \\ &= \frac{4G}{c^4 r}\int d^3x' \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{ij}^{TT}(t-r/c), \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

com o tensor momento de quadrupolo projetado para o calibre transverso e sem traço, definido por $Q_{ij}^{TT} = \mathcal{P}_{ijkl}Q_{kl}$. A importância desta relação é justificada ao perceber que esta última carrega a relação entre o campo e o tensor momento de quadrupolo dentro do calibre TT.

4.4 O TEOREMA DE NOETHER E O MOMENTO ANGULAR PARA AS ONDAS GRAVITACIONAIS

Até o presente momento, tratamos as Ondas Gravitacionais por uma visão geométrica, na qual apresentamos o fenômeno como uma consequência das equações de campo de Einstein, responsável por relacionar a geometria do espaço à uma distribuição de energia momento. O nosso objetivo nesta seção passará a ser a aplicação dos formalismos hamiltonianos para o campo de Spin-2, em que, assim como nos casos anteriores, teremos um foco principal na investigação do Momento Angular deste campo por meio do teorema de Noether.

Como de praxe, a discussão é pautada na ação referente ao campo em análise, no caso do campo de Spin-2, utilizaremos a ação de Einstein-Hilbert, dada por:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-\mathrm{g}}R, \tag{4.4.1}$$

sendo g, o determinante da métrica (4.1.6), e R, o escalar curvatura perturbado até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, expresso por (4.1.10).

O procedimento para encontrar a perturbação em segunda ordem do escalar de curvatura já foi mencionado anteriormente e a sua forma final é bem conhecida pela literatura, portanto, não cobriremos o método neste trabalho[2]. Dessa feita, temos o necessário para encontrar a forma final da ação de Einstein (MAGGIORE, 2008):

$$S = -\frac{c^4}{64\pi G}\int d^4x \left(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\rho h_\nu^\rho\right), \tag{4.4.2}$$

e naturalmente, desta última, emerge a densidade lagrangiana definida por:

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{64\pi G}\left(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\rho h_\nu^\rho\right), \tag{4.4.3}$$

[2] Podemos encontrar este resultado em (MAGGIORE, 2008), onde, valendo-se do uso das derivadas covariantes, existe a representação de uma generalização desta quantidade para espaços descritos por geometrias não-planas. Como estamos trabalhando com uma geometria plana, basta a troca das derivadas covariantes pelas derivadas parciais usuais.

que no calibre harmônico ($\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$ e $h = 0$), torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{64\pi G}\left(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta}\right), \tag{4.4.4}$$

e de imediato, no calibre transverso e sem traço;

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{64\pi G}\left(\partial_\mu h^{TT}_{ij}\partial^\mu h^{TT}_{ij}\right), \tag{4.4.5}$$

considerando as componentes temporais constantes e iguais a zero (4.3.11).

Neste momento, tomando como base a equação (3.2.33), computaremos a corrente de Noether para este campo. De início, como já é conhecido, as coordenadas e o campo se transformam, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\delta x^\nu = \sum_{k<l} \tau^\nu{}_{kl}\omega^{kl}, \tag{4.4.6}$$

e

$$\delta h^{TT}_{ij} = \sum_{k<l} \zeta_{ijkl}\omega^{kl}. \tag{4.4.7}$$

E com estas transformações, conseguimos reproduzir os passos feitos no entorno da equação (3.1.18) para encontrar os geradores destas transformações; da equação (4.4.6), temos:

$$\tau^\nu{}_{kl} = \delta^\nu{}_k x_l - \delta^\nu{}_l x_k, \tag{4.4.8}$$

da equação (4.4.7), temos:

$$\zeta_{ijkl} = \delta_{ik}h^{TT}_{jl} - \delta_{il}h^{TT}_{jk} + \delta_{jk}h^{TT}_{il} - \delta_{jl}h^{TT}_{ik}, \tag{4.4.9}$$

percebendo que ζ_{ijkl} é simétrica nos índices (i, j) e antissimétrica em relação ao par (k, l).

Com os geradores todos em mãos, o próximo passo é encontrar a forma explícita da quadri-corrente de Noether (3.2.41), assim:

$$j^\mu_{(kl)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu h^{TT}_{ij})}\left[\partial_\nu h^{TT}_{ij}(\delta^\nu{}_k x_l - \delta^\nu{}_l x_k) - (\delta_{ik}h^{TT}_{jl} - \delta_{il}h^{TT}_{jk} + \delta_{jk}h^{TT}_{il} - \delta_{jl}h^{TT}_{ik})\right] - \mathcal{L}(\delta^\mu{}_k x_l - \delta^\mu{}_l x_k). \tag{4.4.10}$$

Como as cargas conservadas estão associadas às componentes $\mu = 0$, teremos:

$$j^0_{(kl)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h^{TT}_{ij})}\left[\partial_\nu h^{TT}_{ij}(\delta^\nu{}_k x_l - \delta^\nu{}_l x_k) - (\delta_{ik}h^{TT}_{jl} - \delta_{il}h^{TT}_{jk} + \delta_{jk}h^{TT}_{il} - \delta_{jl}h^{TT}_{ik})\right] - \mathcal{L}(\delta^0{}_k x_l - \delta^0{}_l x_k), \tag{4.4.11}$$

sendo necessário o uso da lagrangiana (4.4.5) para o termo que contempla a derivada do campo e para o último termo, o qual abrange a sua forma explícita. Para a derivada teremos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 h^{TT}_{ij})} = -\frac{c^4}{32\pi G}\left(\partial^0 h^{TT}_{ij}\right), \tag{4.4.12}$$

já para o último, encontraremos

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(\delta^0{}_k x_l - \delta^0{}_l x_k) &= \frac{c^4}{64\pi G}\left(\partial_\nu h^{TT}_{lk}\partial^\nu h^{TT}_{lk}\right)\left(\delta^0{}_k x_l - \delta^0{}_l x_k\right) \\ &= \frac{c^4}{64\pi G}\left(\partial_\nu h^{TT}_{l0}\partial^\nu h^{TT}_{l0} x_l - \partial_\nu h^{TT}_{0k}\partial^\nu h^{TT}_{0k} x_k\right), \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

e recordando a relação (4.3.11), então:

$$\mathcal{L}(\delta^0{}_k x_l - \delta^0{}_l x_k) = 0, \tag{4.4.14}$$

e a relação (4.4.11), assumirá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} j^0_{(kl)} &= -\frac{c^4}{32\pi G}\left(\partial^0 h^{TT}_{ij}\right)\left[\partial_\nu h^{TT}_{ij}(\delta^\nu{}_k x_l - \delta^\nu{}_l x_k) - (\delta_{ik}h^{TT}_{jl} - \delta_{il}h^{TT}_{jk} + \delta_{jk}h^{TT}_{il} - \delta_{jl}h^{TT}_{ik})\right] \\ &= -\frac{c^4}{32\pi G}\left[\partial^0 h^{TT}_{ij}(x_l\partial_k - x_k\partial_l)h^{TT}_{ij} - \partial^0 h^{TT}_{ij}\left(\delta_{ik}h^{TT}_{jl} + \delta_{ik}h^{TT}_{jl} + \delta_{jk}h^{TT}_{il} + \delta_{jl}h^{TT}_{ik}\right)\right] \\ &= -\frac{c^4}{32\pi G}\left[\partial^0 h^{TT}_{ij}(x_l\partial_k - x_k\partial_l)h^{TT}_{ij} - \partial^0 h^{TT}_{ij}\left(2\delta_{ik}h^{TT}_{jl} + 2\delta_{jk}h^{TT}_{il}\right)\right] \\ &= \frac{c^4}{32\pi G}\left[-\partial^0 h^{TT}_{ij}(x_l\partial_k - x_k\partial_l)h^{TT}_{ij} + 4\partial^0 h^{TT}_{ik}h^{TT}_{il}\right], \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

em que fora utilizada a antissimetria de ζ_{ijkl} em (k,l).

Desta forma, é sabido que, quando em posse da componente zero da quadri-corrente de Noether, sua integral em um volume V é a carga conservada em relação à rotações espaciais. Teremos então:

$$P^0_{(kl)} = \frac{c^3}{32\pi G}\int_V d^3x\left[-\partial^0 h^{TT}_{ij}(x_l\partial_k - x_k\partial_l)h^{TT}_{ij} + 4\partial^0 h^{TT}_{kj}h^{TT}_{jl}\right], \tag{4.4.16}$$

e de acordo com a equação (3.1.32), podemos contrair a relação (4.4.16) com o símbolo de Levi-Civita, culminando portanto, na representação do momento angular total para o campo das Ondas Gravitacionais:

$$\begin{aligned} J^m &= \frac{1}{2}\epsilon^{mkl}P^0_{(kl)} \\ &= \frac{c^3}{32\pi G}\int_V d^3x\left[-\frac{1}{2}\epsilon^{mkl}\partial^0 h^{TT}_{ij}(x_l\partial_k - x_k\partial_l)h^{TT}_{ij} + 2\epsilon^{mkl}\partial^0 h^{TT}_{ik}h^{TT}_{il}\right] \\ &= \frac{c^3}{32\pi G}\epsilon^{mkl}\int_V d^3x\left[\partial^0 h^{TT}_{ij}x_k\partial_l h^{TT}_{ij} + 2\partial^0 h^{TT}_{ik}h^{TT}_{il}\right] \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

A análise e interpretação deste resultado é análoga ao que fora abordado para os campos de Spin-0 e Spin-1. Como o habitual, começaremos direcionando a atenção ao fato de que a última equação possui, dois termos;

$$L^m = \epsilon^{mkl}\frac{c^3}{32\pi G}\int_V d^3x\left[\partial^0 h^{TT}_{ij}x_k\partial_l h^{TT}_{ij}\right], \tag{4.4.18}$$

e

$$S^m = \epsilon^{mkl}\frac{c^3}{32\pi G}\int_V d^3x\left[2\partial^0 h^{TT}_{ik}h^{TT}_{il}\right]. \tag{4.4.19}$$

O primeiro termo é o valor esperado para o momento angular orbital do campo perante o produto interno definido ao final da Subseção (3.2.4). Já o segundo, se apresenta como uma quantidade dependente do campo e sua derivada temporal, este é a contribuição do momento angular de Spin para o momento angular total deste campo.

Neste momento, o leitor deve notar as semelhanças e divergências existentes entre os momentos angulares totais dos Campos Spin-0 (3.2.61), Spin-1 (3.2.98 e 3.2.99), e Spin-2 (4.4.17). Como resultado direto do Teorema de Noether, ao submeter os campos e suas coordenadas às rotações infinitesimais do grupo de Lorentz, exploramos a invariância dos campos perante estas transformações e obtemos o momento angular total como grandeza conservada. Desta forma, o momento angular de Spin associa-se à forma com que ocorre a transformação do Campo, e o momento angular total à forma com que as coordenadas são transformadas.

Com base na discussão apresentada, é importante perceber que as coordenadas sofrem transformações análogas em todos os três casos, bastante constatar a semelhança entre os geradores das transformações em cada situação. Assim, é de se esperar que o momento angular orbital para estes campos apresentem uma forma parecida.

Contudo, os geradores ζ, responsáveis por ditar as transformações dos campos em cada exemplo, assumem formas diferentes e isso se deve ao fato de que cada campo exibe um comportamento distinto perante as transformações supracitadas. Estes comportamentos são refletidos no surgimento de um fator multiplicativo para cada contribuição de Spin ao momento angular total dos Campos. O campo Spin-0 não conta com o momento angular de Spin, é como se houvesse um fator 0 multiplicando este termo, já o campo Spin-1 conta com um fator 1 multiplicando o termo e, por fim, o campo Spin-2, um fator multiplicativo igual a 2.

No fundo, a razão para este padrão reside no fato de que o fator multiplicativo é justamente o autovalor do momento angular de Spin da partícula descrita por aquele campo em questão. O campo escalar descreve partículas de Spin igual a zero, o campo vetorial, o fóton, uma partícula de Spin 1, e por fim, o campo das Ondas Gravitacionais, o gráviton, de Spin igual a 2.

5 ALGUMAS APLICAÇÕES PARA SISTEMAS BINÁRIOS

Neste capítulo, nosso principal objetivo será demonstrar como o estudo teórico realizado nos capítulos precedentes pode ser aplicado para investigação do momento angular orbital dissipado por sistemas binários em forma de radiação gravitacional. Para esse fim, por intermédio da referência (ABBOTT et al., 2017), revisitaremos a física subjacente a detecção do primeiro sinal gravitacional, catalogado como GW150914, abordando algumas estratégias e dificuldades da análise Newtoniana dos dados do sinal aferido.

Portanto, considerando um sistema binário genérico, serão encontradas expressões para a taxa de momento angular orbital irradiado $\frac{dL}{dt}$, bem como a separação orbital kepleriana em função do tempo de vida do sinal $a(t)$. Com as equações em mãos, em prol da análise dos resultados, serão feitos gráficos com uso do Software *MATLAB*, empregando os parâmetros conhecidos do sinal GW150914. A dedução das equações que serão utilizadas não faz parte do trabalho, sendo a maioria destas equações, encontradas em (MURRAY; DERMOTT, 1999) e (MAGGIORE, 2008).

5.1 CARACTERIZAÇÃO DOS SISTEMAS BINÁRIOS E A ANÁLISE NEWTONIANA DO SINAL GW150914

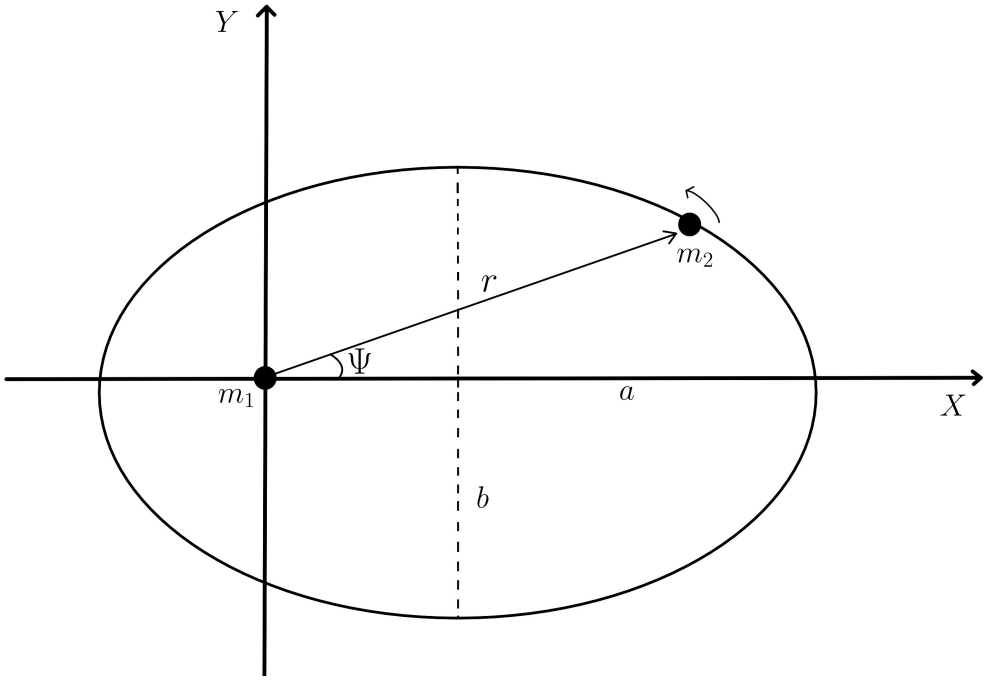
Sumariamente, a análise de um sistema binário consiste no clássico problema de dois corpos tratado na *Mecânica Celeste* (veja a referência (MURRAY; DERMOTT, 1999)); um corpo de massa m_2 descrevendo uma órbita elíptica em torno do corpo m_1. O sistema que será abordado aqui é representado pela Figura 2, na qual devemos chamar atenção para alguns pontos: o sistema orbita no plano-XY com origem localizada em cima do foco em que reside a massa m_1. A posição de m_2 é mapeada pelo vetor posição $\vec{r}$, o qual faz um ângulo Ψ com o eixo-X.

Conforme dito anteriormente, massas em movimento produzem perturbações na malha do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz. É claro, que o movimento da massa por si só não garante a emissão de radiação gravitacional, para isso, é necessário que o sistema binário possua contribuição de momento quadrupolar diferente de zero (veja a equação (4.3.21)).

Conforme podemos encontrar nas referências (BAMBI, 2018) e (MAGGIORE, 2008), uma das características das Ondas Gravitacionais é a produção de *Forças de Cisalhamento* no espaço, também conhecidas como *Forças de Maré*. Em resumo, dada uma certa distribuição de massas de prova, devido a incidência da radiação gravitacional, a distância entre dois pontos é alterada de forma oscilante, e assim, temos a base de funcionamento da detecção interferométrica do fenômeno; a distância entre as extremidades do braço do detector é alterada e, como consequência, haverá uma diferença de fase entre os feixes luminosos que percorrem cada braço. Tal mudança de fase é invariante de calibre e, portanto, pode ser aferida (GARFINKLE, 2006).

A Figura 3 exprime o resultado da detecção interferométrica do sinal GW150914. Este sinal foi aferido por dois interferômetros distintos, tendo a curva obtida por ambos, sobreposta para fins comparativos. Em azul encontra-se o resultado obtido pelo detector situado em Livingstone, Louisiana,

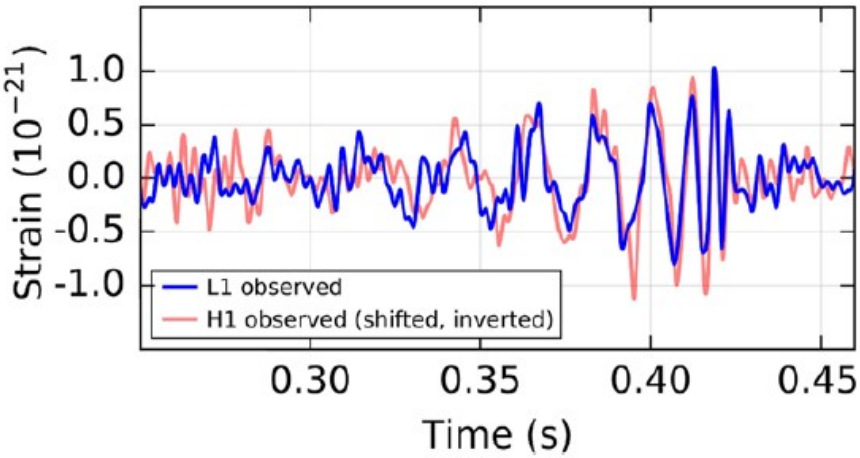
Figura 2 – Esquematização de um sistema binário, com orbita elíptica de semi-eixo maior igual a a e semi-eixo menor igual a b.



Fonte: Produção do próprio autor.

ao passo em que a curva em vermelho representa o resultado da detecção feita pelo equipamento residente em Hanford, Washington.

Figura 3 – Sinal GW150914 detectado pelo LIGO em 2015.



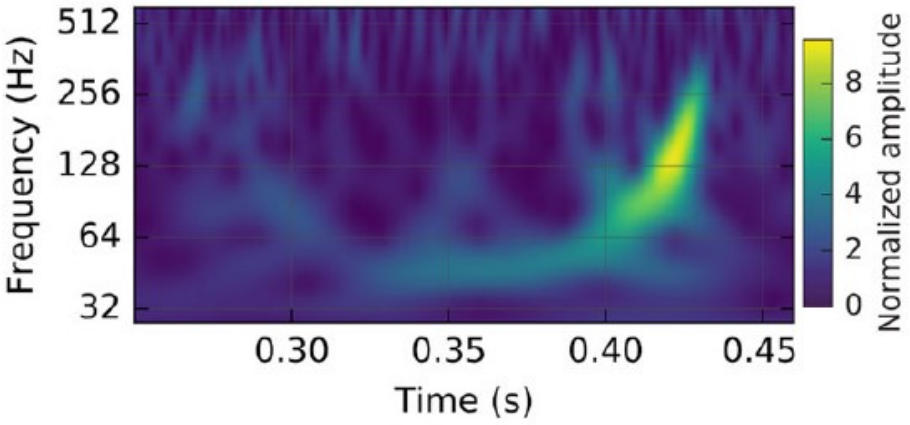
Fonte: Abbott et al. (2017)..

Olhando para a Figura 3, vemos um sinal de curta duração, começando por volta dos 0,30s e encerrando-se aos 0,42s, cerca de 0,12s de duração ao todo. Também é possível notar que a frequência e amplitude do sinal aumentam com o tempo, e em seguida sofrem um corte abrupto. Esse comportamento, no fundo, é mais um dos indícios de que esse sinal foi produzido durante as fases de coalescência de um sistema binário, em que ao perder energia, os corpos que compõem a binária se aproximam e aumentando a velocidade de rotação, e consequentemente a frequência orbital, até que

ocorre a fusão[1], ou *merger*, e o sinal é interrompido.

Por meio de técnicas que envolvem a análise espectral de séries temporais, é possível obter o gráfico contido na Figura 4, no qual observamos uma frequência máxima da radiação gravitacional, de aproximadamente $f_{GW} = 150\text{Hz}$.

Figura 4 – Gráfico da frequência em função do tempo.



Fonte: Abbott et al. (2017).

Neste ponto é importante fazer um comentário sobre a validade das aproximações que serão feitas ao decorrer do desenvolvimento deste capítulo. Considerando uma órbita circular, corpos de aproximadamente $35\text{M}_\odot$ cada e uma separação orbital de 400Km, podemos estimar a velocidade dos corpos nas fases finais da coalescência através da terceira lei de Kepler, dada por:

$$\omega = \left(\frac{GM}{r^3}\right)^{1/2}, \tag{5.1.1}$$

sendo ω a frequência orbital do sistema e $M = m_1 + m_2$, o valor para a velocidade linear seria perto à da luz. Em fato, as aproximações tomadas não são absurdas, De acordo com (ABBOTT et al., 2017), o sistema que originou o sinal GW150914 era formado por corpos de massas aproximadamente iguais e também era extremamente compacto, para que assim fosse, o tamanho dos corpos deveria ser pequeno e a órbita pouco excêntrica, quase circular.

Esta estimativa implica que uma análise apenas newtoniana não é suficiente, sendo necessário o uso de relatividade numérica ou regimes pós-newtonianos para momentos próximos da fusão. Ainda assim, os resultados que serão discutidos são satisfatórios e podem ser utilizados como base para discussão (veja a Seção 4.4 da referência (ABBOTT et al., 2017)).

Prosseguindo, definimos a chamada *Chirp Mass*[2] do sistema como sendo:

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}, \tag{5.1.2}$$

[1] Vale salientar que no caso de uma binária composta por dois buracos negros, a fusão ocorre no momento em que a distância kepleriana entre os corpos é menor do que a soma dos respectivos raios de Schwarzschild.

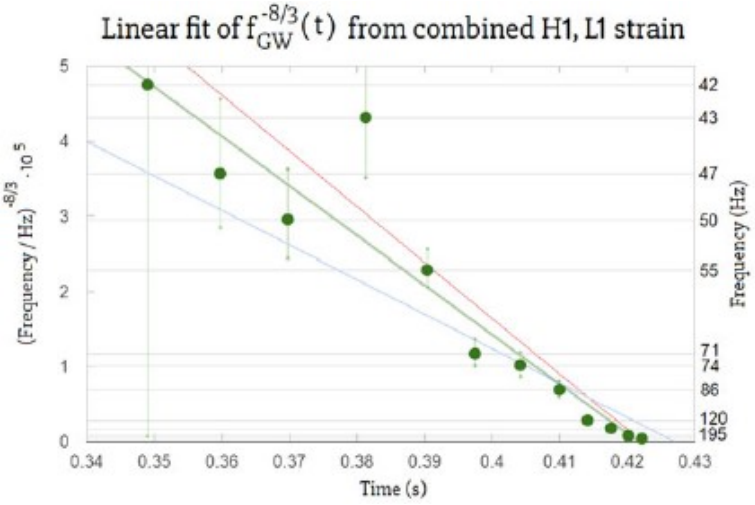
[2] Em português, teríamos algo como "Massa de Gorjeio". Este nome existe em referência a acentuação da frequência nas fases finais da coalescência, em que ao ser traduzida para frequências sonoras, se assemelha ao gorjeio de uma coruja.

e a importância desta quantidade justifica-se pela relação

$$f_{GW}^{-8/3} = \frac{(8\pi)^{8/3}}{5}\left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3}\right)^{5/3}(t_c - t), \tag{5.1.3}$$

a qual é capaz de relacionar a frequência do sinal em função do tempo, com t_c o tempo de coalescência. Assim, observando a Figura 5, um gráfico de $f_{GW}^{-8/3}$ em função do tempo, a chirp mass pode ser encontrada pela análise da inclinação da reta mais provável. Novamente, para determinar as massas individuais de cada corpo com precisão, é necessário considerar o carácter relativístico do fenômeno, contudo, pelo procedimento descrito conseguimos ao menos relacionar as massas m_1 e m_2 do sistema.

Figura 5 – Gráfico da potencia $-8/3$ da frequência em função do tempo.



Fonte: Abbott et al. (2017).

5.2 O MOMENTO ANGULAR ORBITAL DISSIPADO EM FUNÇÃO DO TEMPO PARA UM SISTEMA BINÁRIO E O SISTEMA GW150914

Nesta Seção, partindo da equação (4.4.17), será mostrado como podemos encontrar o momento angular orbital perdido pelo sistema ao decorrer da coalescência.

Conforme discutido em 3.2.5, a energia carregada por uma onda não é bem definida para menos de alguns comprimentos de onda, dessa forma, na equação (4.4.17), devemos tomar a média temporal em torno de alguns períodos do sinal, obtendo assim:

$$\begin{aligned}\langle J^m\rangle &= \frac{c^3}{32\pi G}\frac{1}{T}\int_0^T d\tilde{T}\left[\epsilon^{mkl}\partial^0 h_{ij}^{TT}x_k\partial_l h_{ij}^{TT} + 2\epsilon^{mkl}\partial^0 h_{ik}^{TT}h_{il}^{TT}\right]\\ \langle J^m\rangle &= \frac{c^3}{32\pi G}\left\langle\epsilon^{mkl}\partial^0 h_{ij}^{TT}x_k\partial_l h_{ij}^{TT} + 2\epsilon^{mkl}\partial^0 h_{ik}^{TT}h_{il}^{TT}\right\rangle.\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Ademais, tendo em vista que o nosso objetivo é encontrar a taxa de momento carregado em função do tempo, devemos antes somar as contribuições de momento angular emitidas em um volume nos

entornos da binária, portanto, a equação (5.2.1), torna-se:

$$\langle J^m \rangle = \frac{c^3}{32\pi G} \int_V r^2 dr d\Omega \left\langle \epsilon^{mkl} \partial^0 h_{ij}^{TT} x_k \partial_l h_{ij}^{TT} + 2\epsilon^{mkl} \partial^0 h_{ik}^{TT} h_{il}^{TT} \right\rangle , \tag{5.2.2}$$

com $d\Omega$ o ângulo sólido o qual envolve o sistema. Então, é possível utilizar $dr = cdt$, dado que a radiação emitida viaja na velocidade da luz e o volume aumenta com o tempo, temos então uma relação para a taxa de momento dissipado em função do tempo:

$$\left\langle \frac{dJ^m}{dt} \right\rangle = \frac{c^4}{32\pi G} \int_V r^2 d\Omega \left\langle \epsilon^{mkl} \partial^0 h_{ij}^{TT} x_k \partial_l h_{ij}^{TT} + 2\epsilon^{mkl} \partial^0 h_{ik}^{TT} h_{il}^{TT} \right\rangle . \tag{5.2.3}$$

Em seguida, com o auxílio da equação (4.3.21) e um pesado trabalho algébrico envolvendo os operadores de projeção, o qual não faz parte do escopo do presente trabalho (para mais detalhes veja as páginas 114 à 116 de (MAGGIORE, 2008)), temos o necessário para reescrever a última em termos do tensor momento de quadrupolo, resultando respectivamente, para a taxa de momento angular orbital e de Spin, em:

$$\left\langle \frac{dL^m}{dt} \right\rangle = \frac{2G}{15c^5} \epsilon^{mkl} \left\langle \ddot{Q}_{ka} \dddot{Q}_{la} \right\rangle , \tag{5.2.4}$$

e

$$\left\langle \frac{dS^m}{dt} \right\rangle = \frac{4G}{15c^5} \epsilon^{mkl} \left\langle \ddot{Q}_{ka} \dddot{Q}_{la} \right\rangle , \tag{5.2.5}$$

pelas quais percebemos que a contribuição relativa ao momento angular de Spin é precisamente o dobro em relação à orbital.

Pelas duas últimas relações, encontramos que a taxa de emissão de momento angular total é dada pela soma entre ambas:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dJ^m}{dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{dL^m}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{dS^m}{dt} \right\rangle \\ &= \frac{2G}{5c^5} \epsilon^{mkl} \left\langle \ddot{Q}_{ka} \dddot{Q}_{la} \right\rangle . \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Um adendo que deve ser pontuado é que a expressão (5.2.6) refere-se ao momento angular total carregado em forma de radiação gravitacional, que ao tomar o negativo dessa quantidade, transforma-se no momento angular orbital perdido pelo sistema binário, portanto, teremos:

$$\left\langle \frac{dL_{BS}^m}{dt} \right\rangle = -\frac{2G}{5c^5} \epsilon^{mkl} \left\langle \ddot{Q}_{ka} \dddot{Q}_{la} \right\rangle , \tag{5.2.7}$$

na qual os índices subscritos em L_{BS}^m referem-se a sigla para *Binary System* e as derivadas temporais do tensor momento de quadrupolo são calculadas em função do tempo retardado.

A última coisa que nos resta é o cálculo da média temporal em torno de alguns períodos, presente na equação (5.2.7). Para isso, tomaremos como base o artigo (PETTERS; MATHEWS, 1963), o qual apresenta meios para reescrever as componentes do tensor momento de quadrupolo através da matriz

que se segue:

$$Q_{ij} = \mu r^2 \begin{pmatrix} \cos^2\Psi & \sin\Psi\cos\Psi \\ \sin\Psi\cos\Psi & \sin^2\Psi \end{pmatrix}_{ij}, \tag{5.2.8}$$

em termos da massa reduzida do sistema μ, da distância kepleriana r e do ângulo Ψ. Assim, a média temporal em um período pode ser transformada em uma média no ângulo Ψ, basta considerar:

$$\omega = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \tag{5.2.9}$$

e portanto,

$$\frac{1}{T}\int_0^T d\tilde{T}(...) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\Psi}} d\Psi(...). \tag{5.2.10}$$

Usando as seguintes relações bem conhecidas do problema de dois corpos (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\dot{\Psi} = \frac{(GMh)^{1/2}}{r^2}, \tag{5.2.11}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\Psi}, \tag{5.2.12}$$

e

$$a = \frac{h}{1-e^2}, \tag{5.2.13}$$

encontra-se a expressão:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G^{7/2}\mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right), \tag{5.2.14}$$

a taxa de momento angular perdida pelo sistema no tempo.

O mesmo procedimento pode ser feito para a potência irradiada pela binária (SCHUTZ, 2009), obteríamos

$$\left\langle \frac{dE_{BS}}{dt} \right\rangle = -\frac{G}{5c^5}\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} \right\rangle, \tag{5.2.15}$$

e então repetindo um procedimento similar àquele o qual nos conduziu até (5.2.14), encontraremos:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{G^4\mu^2 M^3}{c^5 a^5}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right), \tag{5.2.16}$$

uma expressão para a potência irradiado pelo sistema em forma de radiação gravitacional.

Empregando em (5.2.14) e (5.2.16), duas outras equações advindas do problema de dois corpos (MURRAY; DERMOTT, 1999);

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2\mu^3}, \tag{5.2.17}$$

e

$$a = \frac{GM\mu}{2|E|}, \tag{5.2.18}$$

encontramos duas outras relações importantes, a variação do semi-eixo maior em função do tempo,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5}\frac{G^3\mu M^2}{c^5 a^3}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right), \tag{5.2.19}$$

e a variação da excentricidade em função do tempo,

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15}\frac{G^3\mu M^2}{c^5 a^4}\frac{e}{(1-e^2)^{5/2}}\left(1+\frac{121}{304}e^2\right). \tag{5.2.20}$$

É possível relacionar o período do sinal gravitacional com o período do sistema binário:

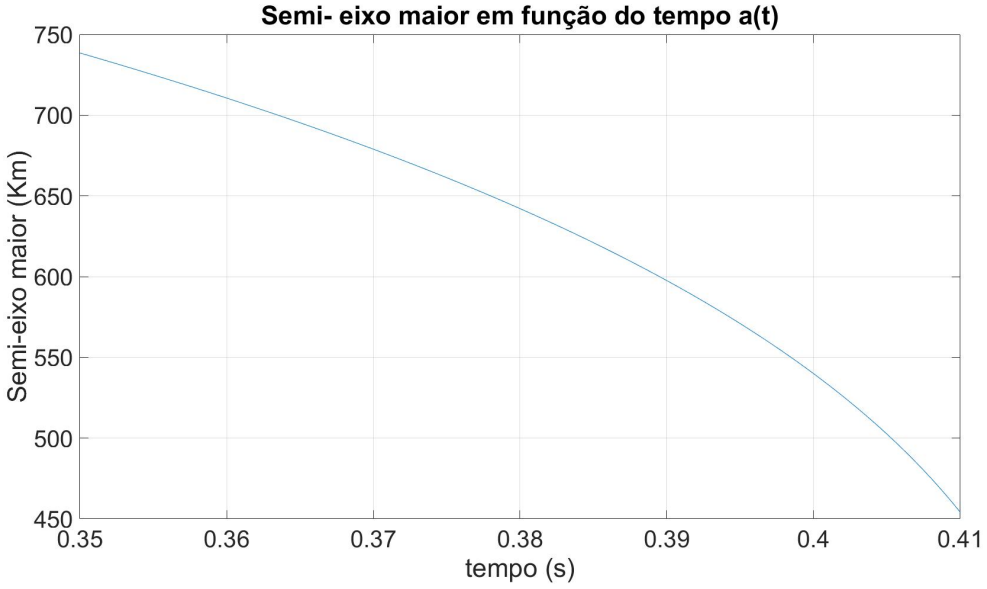
$$T = 2T_{GW}, \tag{5.2.21}$$

e portanto, a equação (5.1.1), em função de f_{GW} é reescrita como:

$$f_{GW} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{GM}{r^3}\right)^{1/2}, \tag{5.2.22}$$

a qual pode ser substituída em (5.1.3) e assim teremos uma equação que expressa a distância entre os corpos r em função do tempo t. Para baixas excentricidades, como no caso do sistema fonte do sinal GW150914, a distância entre os corpos é aproximadamente igual ao valor do semi-eixo maior. Para uma melhor visualização, a função obtida foi *plotada* na Figura 6.

Figura 6 – Gráfico do comportamento do semi-eixo maior em função do tempo.



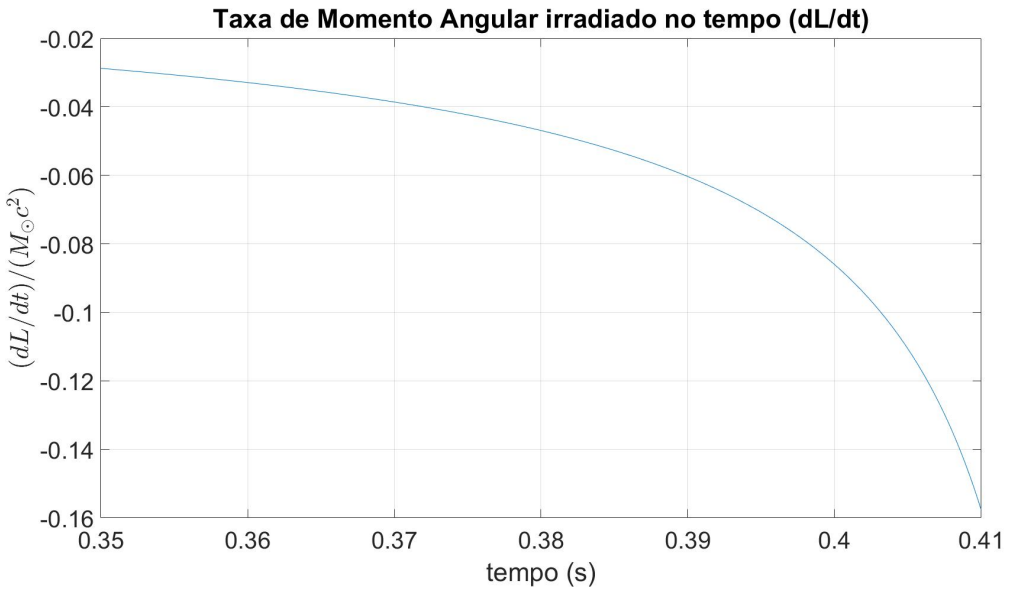
Fonte: Produção do próprio autor.

Podemos ver que na Figura 6, o semi-eixo maior foi colocado entre os intervalos de tempo 0,35s e 0,41s, isso se dá pelo motivo já comentado anteriormente, nas fases mais agressivas da coalescência o momento angular e energia dissipados aumentam bruscamente e o sistema passa a apresentar um carácter relativístico, assim sendo, o gráfico apresenta um mal comportamento para $t > 0,41\text{s}$. Esse

pico de liberação de energia também explica a acentuação da curva por volta dos $0,39$s, em que a distância entre os corpos passa a diminuir com maior aceleração.

Por fim, podemos tomar o limite em que $e \to 0$ na expressão (5.2.14), e em seguida, da mesma forma, substituir o valor do semi-eixo maior pela estimativa encontrada pela junção das equações (5.2.22) e (5.1.3), assim, teremos uma expressão da variação do momento angular orbital em função do tempo. Esse resultado também foi organizado no gráfico contido na Figura 7, na qual parametrizou-se o momento orbital irradiado por intermédio do fator $1/M_{\odot}c^2$, em unidades físicas teríamos grandezas na ordem de 10^{45}J.

Figura 7 – Gráfico da taxa de momento angular irradiado em função do tempo.



Fonte: Produção do próprio autor.

Através da análise da Figura 7, nota-se uma maior dissipação de momento angular, também por volta dos $0,39$s e novamente, para valores maiores do que $t = 0,41$s, o gráfico é malcomportado devido ao carácter relativístico do sistema.

6 CONCLUSÃO

Todo o estudo fundamentou-se, essencialmente, na revisão bibliográfica dos formalismos subjacentes a mecânica analítica, os quais podem ser estendidos para a teoria de campos, deixando de descrever o movimento para partículas discretas com finitos graus de liberdade, para descrever sistemas de várias partículas com infinitos graus de liberdade.

Dentro da Teoria de Campos, foi demonstrado o poderoso Teorema de Noether, o qual relaciona simetrias do sistema físico perante determinadas transformações, com grandezas conservadas no sistema. No caso do presente trabalho, investigou-se o comportamento dos campos de Spin-0, Spin-1 e Spin-2 perante transformações do grupo de rotações espaciais infinitesimais de Lorentz, obtendo o momento angular total como carga de Noether conservada.

Para o campo escalar, de Spin-0, constatou-se que não há contribuições do momento angular de Spin, e isso se deve a invariância do campo perante as transformações supracitadas. Ainda, notou-se que os campos de Spin-1 e Spin-2, por sua vez, continham a contribuição de Spin, e isso ocorre, pois, ambos os campos exibem comportamentos característicos perante as mesmas transformações. Já quando tratando-se do momento angular orbital, conferiu-se que esse assume a mesma forma para os três exemplos, e isso se explica quando olhamos para as transformações das coordenadas perante as rotações espaciais, em todos os casos o comportamento exibido é o mesmo, resultando em uma contribuição orbital parecida dentre os três campos.

Ainda, é possível observar que em todos os casos a contribuição de Spin para o momento angular acompanha um fator multiplicativo referente ao autovalor do operador momento angular da partícula descrita pelo respectivo campo. No fundo, deve-se entender que o que permanece invariante não é o momento angular de Spin em si, mas a sua projeção na direção do movimento, isto é, a helicidade.

De forma a concluir o trabalho, toda a discussão teórica realizada nos entornos do cálculo do momento angular total carregado pelo campo de Spin-2, pode ser utilizado com fins de analisar - mesmo que em uma aproximação newtoniana e sem levar em conta aproximações pós-newtonianas ou relatividade numérica - a taxa de momento angular orbital dissipado por um sistema binário qualquer em função do tempo, evidenciando o esperado; uma maior dissipação de momento angular nas fases finais da coalescência.

Como um último comentário, deve-se notar que todo o cálculo das grandezas conservadas para cada campo, sumariamente, teve como ponto de partida a ação responsável por caracterizar cada campo em particular, dessa feita, o ferramental apresentado possui uma aplicabilidade em teorias alternativas de gravidade, por exemplo, nas quais, não raro o a ação de determinado campo é modificada e a consecução de constantes de movimento faz-se de grande valia para a composição das equações de movimento daquele campo. Valendo-se das simplificações inerentes que a utilização das constantes de movimento trazem consigo, as equações de movimento resultantes têm sua solução facilitada.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, New York, v. 116, n. 16, p. 061102, 2016.

ABBOTT, B. P. et al. The basic physics of the binary black hole merger GW150914. **Annalen der Physik**, Berlin, v. 529, n. 1-2, p. 1 – 17, 2017.

ABBOTT, B. P. et al. Gwtc-3: Compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the second part of the third observing run. **arXiv e-prints**, p. arXiv:2111.03606, 2021.

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **An elementary introduction to classical fields**. [S.l.: s.n.], 2019.

BAMBI, C. **Introduction to general relativity**: a course for undergraduate students of physics. Singapura: Springer, 2018.

BARCELOS, J. N. **Mecânica newtoniana, lagrangiana hamiltoniana**. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

CINDRA, J. L. **Christiaan Huygens e Isaac Newton**. Guaratinguetá, SP. Brasil: [s.n.], 2021.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP. Brasil: Editora da Unicamp, 2004.

FEYNMAN, R. P. et al. In: **The Feynman's lectures on physics**: the new milenium edition. CalTech, California - Estados Unidos: Perseus Books, 2011. v. 1, cap. 52.

FILHO, T. M. da R. **Mecânica clássica**. Brasil: Desconhecida, 2009.

GARFINKLE, D. Gauge invariance and the detection of gravitational radiation. **American Journal of Physics**, v. 74, n. 3, p. 196 – 199, 2006.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. 3rd. ed. Estados Unidos: Pearson, 2001.

GRAY, C. G.; TAYLOR, E. F. When action is not least. **American Journal of Physics**, v. 75, n. 5, p. 434 – 458, 2007.

GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. Heidelberg. Berlin: Springer, 1996.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**. Upper Saddle River, Nova Jersey - Estados Unidos: Prentice Hall, 1999.

HARTLE, J. B. **Gravity**: an introduction to einstein's general relativity. São Francisco, Califórnia - Estados Unidos: Pearson Education, 2003.

HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. **Astrophysical Journal**, v. 195, n. 1-2, p. 51 – 53, 1975.

IAS - Institute for Advanced Study. 2017. Disponível em: <https://www.ias.edu/ideas/2017/emmy-noether>. Acesso em: 01 mar. 2022.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. 2a. ed. São Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física, 2013.

MAGGIORE, M. **A Modern introduction to quantum field theory**. New York, Estados Unidos: Oxford university Press, 2005.

MAGGIORE, M. **Gravitational waves**. Estados Unidos: Oxford University Press, 2008.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. New York, Estados Unidos: Cambridge university Press, 1999.

NEUENSCHWANDER, D. E. **Emmy Noether's wonderful theorem**. Estados Unidos: The Johns Hopkins University Press, 2011.

PETTERS, P. C.; MATHEWS, J. Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit. **Physical Review**, v. 435-440, n. 1, 1963.

RYDER, L. H. **Quantum field theory**. 2nd. ed. Cambridge. Reino Unido: Cambridge University Press, 1996.

SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. Estados Unidos: Cambridge University Press, 2009.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particle and systems**. 5th. ed. Estados Unidos: Brooks/Cole - Thomson Learning, 2004.

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: principles and applications of the general theory of relativity. Estados Unidos: Jonh Wiley Sons, 1972.

WEYL, H. **Symmetry**. Princeton, Nova Jersey - EUA: Princeton University Press, 1952.