

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE BAURU**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**“Investigação e Aplicação de Métodos Primal - Dual de Pontos Interiores em
Problemas de Despacho Econômico e Ambiental”**

Márcio Augusto da Silva Souza

**Dissertação de Mestrado apresentado ao
Programa de Pós Graduação em
Engenharia Elétrica, FEB, UNESP,
Campus de Bauru, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
mestre em Engenharia Elétrica**

**Bauru - SP
2010**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE BAURU**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**“Investigação e Aplicação de Métodos Primal - Dual de Pontos Interiores em
Problemas de Despacho Econômico e Ambiental”**

**Aluno: Márcio Augusto da Silva Souza
Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo**

**Dissertação de Mestrado apresentado ao
Programa de Pós Graduação em
Engenharia Elétrica, FEB, UNESP,
Campus de Bauru, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
mestre em Engenharia Elétrica**

**Bauru - SP
2010**

Souza, Márcio Augusto da Silva.

Investigação e Aplicação de Método Primal-Dual de Pontos Interiores em Problemas de Despacho Econômico e Ambiental. / Márcio Augusto da Silva Souza, 2010.

156 f.

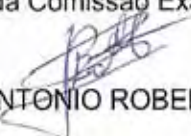
Orientador: Antonio Roberto Balbo

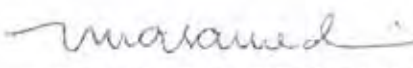
Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2010

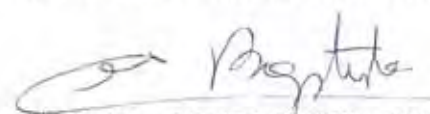
1. Métodos de Pontos Interiores. 2. Métodos Primal-Dual Previsor-Corretor. 3. Problemas de Despacho Econômico. 4. Problemas de Despacho Ambiental. Montagem. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia e Bauru. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MÁRCIO AUGUSTO DA SILVA SOUZA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 23 dias do mês de agosto do ano de 2010, às 08:30 horas, no(a) ANFITEATRO DA PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciencias de Bauru, Profa. Dra. MÁRCIA MARCONDES ALTIMARI SAMED do(a) Departamento de Engenharia de Produção / Universidade Estadual de Maringa, Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciencias de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MÁRCIO AUGUSTO DA SILVA SOUZA, intitulado "INVESTIGAÇÃO E APLICAÇÃO DE MÉTODOS PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES EM PROBLEMAS DE DESPACHO ECONÔMICO". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO


Profa. Dra. MÁRCIA MARCONDES ALTIMARI SAMED


Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA

Aos meus pais, Maria Alice e Antônio, e a Deus por me darem a dádiva da vida

Confia no Deus eterno de todo o seu coração e não se apóie
na sua própria inteligência. Lembre-se de Deus em tudo o que fizer, e
ele lhe mostrará o caminho certo.
Provérbios 3:5-6

AGRADECIMENTO

Ao Prof.Dr. Antonio Roberto Balbo, pela orientação e amizade durante todos esses anos; onde procurou auxiliar, orientar, ensinar e acima de tudo criticar.

Às professoras Edméa Cássia Baptista e Márcia Marcondes Altimari Samed, que fizeram parte da banca avaliadora e que, com suas críticas e sugestões, enriqueceram muito este trabalho

Aos meus familiares, que tanto me incentivaram, pelo apoio nos momentos difíceis. Se hoje alcancei este objetivo, muito devo a eles.

Aos amigos, que foram os grandes incentivadores e a grande força, que fizeram com que eu continuasse trilhando esse caminho.

A todos os professores do curso que sempre estiveram prontos a ensinar e a colaborar com o trabalho.

Aos colegas de curso, pelo companheirismo, carinho e amizade durante todo o curso.

Aos meus companheiros do Banco do Brasil e da IEQ – Bauru I, que sempre me incentivaram.

Divido com todos a alegria deste momento, que seja o primeiro de muitos outros.

RESUMO

SOUZA, M. A. S. (2010). *Investigação e Aplicação de Métodos Primal - Dual de Pontos Interiores em Problemas de Despacho Econômico e Ambiental*. Bauru, 2010. 165p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Faculdade de Engenharia, Campus de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Unesp.

Este trabalho visa a investigação e implementação de métodos Primal - Dual Previsor-Corretor de Pontos Interiores com a estratégia de busca unidimensional, e a aplicação destes em problemas de Despacho Econômico e Ambiental. Objetiva-se utilizar estes métodos para determinar soluções aproximadas e consistentes dos problemas citados, que forneçam a solução de minimização dos custos dos combustíveis empregados na geração termoelétrica de energia, otimizando um processo de alocação da demanda de energia elétrica entre as unidades geradoras disponíveis, de tal forma que as restrições operacionais sejam atendidas e que o custo de geração é minimizado. Pretende-se também, analisar o problema de Despacho Ambiental com um objetivo único quando se acopla a este o Problema de Despacho Econômico e busca-se, simultaneamente, a minimização dos custos de geração e a redução da emissão de poluentes na natureza. Os métodos foram implementados, testados em Problemas de Despacho Econômico e Ambiental, e o seu desempenho foi comparado com outros métodos já utilizados, cujos resultados são encontrados na literatura.

Palavras-chave: Métodos de Pontos Interiores, Métodos Primal-Dual Previsor-Corretor, Problemas de Despacho Econômico, Problemas de Despacho Ambiental

ABSTRACT

SOUZA, M. A. S. (2010). *Investigation and implementation of Primal-Dual Interior Points Methods, in Economic and Environmental Dispatch Problems*. Bauru, 2010. 165p. Dissertation (Master's degree), Faculdade de Engenharia, Campus de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Unesp.

This work aims the investigation and implementation of Primal-Dual Predictor-Corrector interior points methods, with the strategy of one-dimensional search, and its application in Economic and Environmental Dispatch Problems. It pretends to use these methods to determine approximate and consistent solutions of the mentioned problems, that provide the solution to minimize the fuel costs used in thermoelectric power generation, optimizing an allocating process of electric power demand among available generating units, such that the operational constraints are attended and that generation cost is minimized. It too pretends to analyze the Environmental Dispatch Problem with the one objective when it is joined with the Dispatch Problems and it searches, simultaneously, the minimization of the generation costs and the reduction of emission of the pollutants in the nature. The methods were implemented, tested on the Economic and Environmental Dispatch Problems and its performance was compared with others method currently used, whose results are found in the literature.

Keywords: Interior Points Methods, Primal-Dual Predictor-Corrector Methods, Economic Dispatch Problem, Environmental Dispatch Problem.

SUMÁRIO

RESUMO.....	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xii
LISTA DE ABREVIATURAS E UNIDADES.....	xiii
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Objetivos Gerais	2
1.2 - Objetivos Específicos	3
1.3 – Organização do Trabalho	3
2 - GERAÇÃO TERMOELÉTRICA.....	5
2.1 - Geração Termoelétrica	5
2.2 - Principais Fontes de Energia.....	8
3 - OTIMIZAÇÃO	16
3.1 - Otimização Clássica	20
3.2 - Otimização com Restrições de igualdade e Multiplicadores de Lagrange.....	22
3.3 - Otimização com Restrições de Desigualdade	23
3.4 - Otimização com Restrições de Igualdade e Desigualdade.....	23
3.5 - O Método de Penalidade	24
3.5.1 - O Método de Penalidade	24
3.5.2 - Interpretação Geométrica	26
3.5.3 - Dificuldades Computacionais	28
3.5.4 - Algoritmo	29
3.6 - O Método de Barreira	29
3.6.1 - Interpretação Geométrica	31
3.6.2 - Dificuldades computacionais	32
3.6.3 - Algoritmo	33
3.7 - Métodos Determinísticos de Otimização	33
3.7.1 - A Direção do Gradiente	34
3.7.2 - Métodos de Newton	35
3.7.3 - Comparação entre os Métodos	35
3.8 - Métodos Heurísticos de Otimização	36

4 - O ALGORITMO PRIMAL - DUAL DE PONTOS INTERIORES	37
4.1 - Métodos de Pontos Interiores	37
4.2 - Fundamentos do Algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores	39
4.2.1 - Idéias básicas do Algoritmo Primal - Dual	40
4.2.2 - Direção e Comprimento do Passo de Movimento	43
4.2.3 - Algoritmo Primal - Dual	49
4.2.4 - Término do Algoritmo em Tempo Polinomial	50
4.2.5 - Iniciando o Algoritmo Primal – Dual	51
4.2.6 - Implementação	53
4.2.7 - Aceleração através do Método da Série de Potência	61
4.3 - Fundamentos do Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas	62
4.3.1 - Direções e Comprimento do Passo de Movimento	65
4.3.2 - Critério de Parada	69
4.3.3 - Variáveis Limitadas Inferiormente	74
5 – MÉTODO PRIMAL – DUAL DE PONTOS INTERIORES PARA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA CONVEXA COM VARIÁVEIS CANALIZADAS E PROCEDIMENTO PREVISOR CORRETOR	76
5.1 - Problema de Programação Quadrática	76
5.1.2 - Direções de Busca	79
5.1.5.1 - Direções de Busca - Tipo Previsor	79
5.1.5.2 - Direções de Busca -Tipo Corretor	81
5.1.3 - Comprimento do Passo	82
5.1.4 - Critério de Parada	84
5.1.5 - Atualização do Parâmetro de Barreira	85
5.1.6 - Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas com Procedimento Previsor-Corretor e Busca Unidimensional. (PDPCBU)	86
6 - PROBLEMAS DE DESPACHO	88
6.1 - O Problema de Despacho Econômico	88
6.1.1 - O Despacho Econômico como um Subproblema	89
6.1.2 - Fluxo de Potência Ótimo	89
6.1.3 - Unit Commitment	90
6.1.4 - Planejamento Energético	90
6.1.5 - Controle Automático da Geração	91
6.1.6 - Sistemas de Potência Interligada	92
6.1.7 - Obtenção da Função Custo do Despacho Econômico	92

6.1.8 - Modelo de Otimização para o Despacho Econômico Clássico	95
6.2 - O Problema de Despacho Ambiental	96
6.2.1 - Gases de Efeito Estufa.....	97
6.2.2 - Técnicas Convencionais de Redução de Emissões	98
6.2.3 - Técnicas Alternativas de Redução de Emissões	98
6.2.4 - Obtenção da Função Emissão do Despacho Ambiental.....	99
6.3 - Objetivos e Estratégias	100
6.3.1 - Objetivo Emissão Mínima.....	100
6.3.2 - Objetivo Emissão Mínima com Restrição Econômica.....	101
6.3.3 - Objetivo Custo Mínimo com Restrições Controladas.....	101
6.3.4 - Multiobjetivo: Custo Mínimo e Emissões Mínimas	102
7 - APLICAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS	104
7.1 - Aplicação ao Modelo de Despacho Econômico.....	104
7.1.1 - Adaptação do Problema de Despacho Econômico ao algoritmo proposto.....	105
7.1.1 - PDE com 3 Geradores	105
7.1.2 - PDE com 6 Geradores	106
7.1.3 - PDE com 13 Geradores	108
7.2 - Aplicação ao Modelo de Despacho Ambiental	111
7.2.1 - PDA com 6 Geradores	111
7.3 - Aplicação ao Modelo Multiobjetivo	113
7.4 - Análise Pós-otimização: Custos Incrementais.....	116
7.4.1 - A Função Lagrangiana e as Condições de KKT	117
7.4.2 - Análise do Custo Incremental w através das Condições de KKT	118
7.4.4 - Resultados da Análise Incremental de w para os PDE's de 03, 06 e 13 Geradores	119
8 - CONCLUSÕES.....	122
9 - TRABALHOS PUBLICADOS	124
10 - REFERÊNCIAS.....	127
APÊNDICE A - PROBLEMAS MULTIOBJETIVOS	138

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Mínimo global.....	21
Figura 3.2 - Representação geométrica da função penalidade.....	27
Figura 3.3 - Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade ..	28
Figura 3.4 - Representação geométrica da função penalidade para o caso não convexo	28
Figura 3.5 - Comportamento da função barreira	32
Figura 3.6 - Resolução através da função barreira	32
Figura 3.7 - Pontos de máximo e mínimo.....	34
Figura 4.1 - Significado geométrico do comprimento do passo para o Método Primal - Dual.....	48
Figura 4.2 - Interpretação geométrica do exemplo 4.3. e das soluções obtidas pelo Algoritmo Primal - Dual e Primal - Afim	61
Figura 4.3 - Interpretação geométrica do exemplo 4.3. e das soluções obtidas pelo Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas	74
Figura 6.1 - Aproximações de curvas da taxa de calor incremental	93
Figura 6.2 - Características do ponto de válvula	94
Figura 6.3 -. “n” Unidades Térmicas Conectadas a um Barramento	95
Figura 6.4. Comprometimento entre custo e emissões	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Geração – Brasil.....	11
Tabela 4.1 - Resultados obtidos pelo Algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores .	60
Tabela 4.2 - Resultados obtidos pelo Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas.....	73
Tabela 7.1 - Características do sistema de 3 geradores.	105
Tabela 7.2 - Comparação dos resultados obtidos para o DE de 3 geradores.	106
Tabela 7.3 - Valores da função objetivo para o DE de 3 geradores.	106
Tabela 7.4 - Características do sistema de 6 geradores.	107
Tabela 7.5- Limites operacionais para o sistema de 6 geradores.	107
Tabela 7.6 - Comparação dos resultados obtidos para o DE de 6 geradores.	108
Tabela 7.7 - Valores da função objetivo para o DE de 6 geradores.	108
Tabela 7.8 - Características do sistema de 13 geradores.	109
Tabela 7.9 - Resultados obtidos para DE de 13 geradores - caso 6.	110
Tabela 7.10 - Valores da função objetivo para o DE de 13 geradores.	110
Tabela 7.11 - Características do sistema PDA de 6 geradores.....	111
Tabela 7.12 - Limites operacionais para o DA de 6 geradores.....	111
Tabela 7.13 - Comparação dos resultados obtidos para o DA de 6 geradores.	112
Tabela 7.14 - Valores da função objetivo para o DA de 6 geradores.....	112
Tabela 7.15 - Características do sistema de 6 geradores.	113
Tabela 7.16 - Limites operacionais - caso de 6 geradores.....	113
Tabela 7.17 - Comparação dos resultados obtidos para o DEA de 6 geradores.....	114
Tabela 7.18 - Custo e emissão para o DEA de 6 geradores	114
Tabela 7.19 - Valores da função objetivo para o DEA de 6 geradores.....	115
Tabela 7.20 - Análise incremental de w para o PDE com 03 geradores	119
Tabela 7.21 - Análise incremental de w para o PDE com 06 geradores	120
Tabela 7.22 - Análise incremental de w para o PDE com 13 geradores	120

LISTA DE ABREVIATURAS E UNIDADES

\$	Unidade monetária simbólica
(D)	Problema Dual
(P)	Problema Primal
AC	Algoritmo Cultural
AD	Problema Dual Artificial
AGAH	Algoritmo Genético Atávico Híbrido
AGH	Algoritmo Genético Híbrido
AGHCOE	Algoritmo Genético Co-Evolutivo
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
AP	Problema Primal Artificial
Btu/h	Unidade Térmica Britânica por hora
BU	Busca Unidimensional
CCEE	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CNPE	Conselho Nacional de Política Energética
CO ₂	Gás Carbônico
DA	Despacho Ambiental
DE	Despacho Econômico
DEA	Despacho Econômico/Ambiental
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
KKT	Karush Kuhn Tucker
kW	Quilowatts
MME	Ministério de Minas e Energia
MW	Megawatts
NO ₂	Dióxido de Nitrogênio
NO _x	Óxido de Nitrogênio
°C	Graus Centígrados
ONS	Operador Nacional do Sistema
PDA	Problema de Despacho Ambiental
PDE	Problema de Despacho Econômico
PDPC	Primal - Dual para Variáveis Canalizadas Previsor-Corretor

PDPCBU	Primal - Dual para Variáveis Canalizadas com Procedimento Previsor Corretor e Busca Unidimensional
PL	Problema Linear
PPL	Problema de Programação Linear
PPQ	Problema Programação Quadrático
PQ	Problema Quadrático
SO ₂	Dióxido de Enxofre
UC	Unit Commitment

1 - INTRODUÇÃO

A maioria dos assuntos discutidos neste trabalho, sobre a Otimização Clássica e sobre os modelos de Despacho Econômico e Ambiental basearam-se em um importante e interessante trabalho de pesquisa desenvolvido em [SAMED, 2004]. Desta forma o trabalho citado, exercerá influência fundamental no trabalho de dissertação desenvolvido a seguir.

Um problema de fundamental importância decorrente da geração termoeletrica é a minimização do custo do combustível utilizado. A geração termoeletrica visando minimizar os custos de geração pode ser modelada de forma a tentar explorar criteriosamente os fenômenos e propriedades intrínsecas que auxiliam a compreensão do problema real. Este problema constitui uma das áreas de maior interesse dos engenheiros e pesquisadores dos sistemas elétricos de potência e denomina-se Despacho Econômico. O Despacho Econômico é objeto de constantes publicações, desde sua formulação até os dias atuais, tendo assim contribuído enormemente na obtenção de avanços nos métodos de otimização aplicados na sua resolução.

A geração termoeletrica de energia vem acompanhada de indesejáveis emissões de gases como CO_2 , SO_2 , NO_x e particulados. Quando em excesso essas emissões têm consequências negativas para a qualidade de vida dos seres humanos, interfere na vida dos animais, causa impactos negativos nas vegetações, e em maior escala, ocasionam serias alterações climáticas. A preocupação mundial pelas questões ambientais fez surgir uma nova abordagem para o problema de geração termoeletrica, que é denominado Despacho Ambiental. Este problema é uma alternativa de minimizar as emissões provenientes da geração termoeletrica através de estratégias de operação. O Despacho Ambiental pode ser modelado de forma análoga ao Despacho Econômico.

Visto que a geração hidráulica corresponde a 70% de toda a energia que é gerada no Brasil, os problemas do Despacho Econômico e do Despacho Ambiental são novos no panorama nacional, muito embora sejam amplamente estudados principalmente em países europeus, Índia, Ásia e Estados Unidos. Para que as

termoelétricas possam se tornar competitivas neste ambiente predominantemente hidroelétrico, o desenvolvimento e aperfeiçoamento de ferramentas de otimização são necessidades eminentes.

Um método de otimização, operacionalmente eficaz, para resolver Problemas de Despacho deve ser capaz de fornecer um conjunto de soluções factíveis ou simplesmente soluções melhores do que as já existentes, aliadas à flexibilidade e facilidade de adaptação a novas situações. Todas estas características, muitas vezes são mais desejáveis do que apenas uma solução ótima. A procura de satisfazer as condições acima, neste trabalho fez-se uma ampla investigação de uma nova metodologia de otimização encontrada na literatura relativa aos métodos de pontos interiores variantes de um primeiro método proposto por Karmarkar em 1985. Assim, estes novos métodos foram adaptados e utilizados para a busca de soluções otimistas dos modelos de Despacho Econômico e Ambiental.

1.1 - Objetivos Gerais

O objetivo geral deste trabalho é continuar investigando os métodos Primal - Dual de pontos interiores analisados em [KOJIMA et. al., 1989], [LUSTIG, 1990], [MEGGIDO, 1987], [RENEGAR, 1988] e [WU et al., 1994], com a estratégia do tipo previsor-corretor e procedimentos de busca unidimensional (Fibonacci e Armijo), além da utilização de procedimentos híbridos na resolução do sistema de direções de buscas, envolvendo a estratégia usual de pontos interiores acoplada à estratégia de obtenção de direções proposta por [WU et al., 2002], objetivando a aplicação destes ao problema de Despacho Econômico, sem a inserção de pontos de válvula. Investigou-se a teoria do método, seu esquema iterativo, sua implementação computacional e sua adaptação à resolução destes problemas. Buscou-se obter resultados numéricos para demonstrar a eficiência do método, quando comparado com outros já testados e publicados na literatura.

1.2 - Objetivos Específicos

- i. Inserir o tema, objeto deste estudo, na situação atual do setor elétrico brasileiro;
- ii. Promover um estudo dos aspectos técnicos, econômicos e ambientais que influenciam a conversão de energia térmica em elétrica;
- iii. Investigar e adaptar aos problemas analisados os métodos de otimização;
- iv. Realizar um levantamento da evolução histórica e das principais contribuições nas áreas de pesquisa envolvidas;
- v. Promover uma comparação do desempenho com outros algoritmos já testados e publicados na literatura;
- vi. Desenvolver um método computacional que possa ser estendido a outros problemas de programação não-linear;
- vii. Desenvolver um método computacional para resolver Problemas de Despacho que se adapte facilmente a inserção de novas restrições, mudanças na formulação da função objetivo e alteração dos números de variáveis;
- viii. Desenvolver um método computacional de fácil interação homem-máquina que vise melhorar as soluções já existentes para os problemas de Despacho;
- ix. Apontar as dificuldades encontradas na implementação da metodologia proposta;
- x. Discorrer sobre as perspectivas para trabalhos futuros.

1.3 – Organização do Trabalho

Neste trabalho pretende-se apresentar o atual estado da arte dos problemas de Despacho Econômico e Ambiental, com o objetivo de analisar soluções de alguns modelos já investigados na literatura, através da metodologia Primal - Dual de pontos interiores.

Para este objetivo, no capítulo 1, é feita uma introdução sobre o tema relativo ao DE e DA, atual e corrente, contendo objetivos gerais, específicos e a organização do trabalho.

No capítulo 2, abordam-se as principais fontes de energia e principais aspectos técnicos, econômicos e ambientais sobre a geração termoe elétrica.

No capítulo 3 é apresentado uma abordagem geral sobre otimização, incluindo-se a formulação dos problemas, restritos e irrestritos, bem como, a descrição sobre métodos determinísticos e heurísticos, que podem ser utilizados à resolução destes problemas.

No capítulo 4, introduz-se a metodologia Primal – Dual de pontos interiores, com seus fundamentos principais, algoritmos e teoremas de complexidade de tempo polinomial.

No capítulo 5, é proposto um método Primal – Dual de pontos interiores, com procedimento previsor-corretor e busca unidimensional, para problemas de programação quadrática convexa e variáveis canalizadas, cujo algoritmo é descrito e implementado em Linguagem Borland Pascal 7.0, para ser testado nos modelos de Despacho Econômico (DE) e Despacho Ambiental (DA).

No capítulo 6, são apresentados os modelo de DE e DA e problemas multiobjetivos envolvendo estes dois modelos. Estes problemas, no caso de não se considerar pontos de válvula, são equivalentes ao problema de minimizar funcionais quadráticos, restritos a sistemas de equações lineares de igualdade e variáveis canalizadas.

A adaptação e aplicação do Algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores do tipo Previsor-Corretor, com Procedimento de Busca Unidimensional (PDPCBU) será realizada, em Problemas de Despacho Econômico e Ambiental, no capítulo 7. Os testes e resultados em PDE's com 3, 6 e 13 geradores, bem como para o PDA com 6 geradores e para o problema multiobjetivo PDEA, com 6 geradores, são feitos neste capítulo e mostram a eficiência do método (PDPCBU) à resolução destes problemas.

No capítulo 8, apresentam-se as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

No capítulo 9, apresentam-se trabalhos científicos de divulgação realizados e no capítulo 10, todas as referências utilizadas no decorrer do trabalho.

Finalmente, no Apêndice A, são realizadas: a definição, principais aspectos teóricos e métodos de resolução, relativos à otimização multiobjetivo, a qual foi utilizada no capítulo 6.

2 - GERAÇÃO TERMOELÉTRICA

2.1 - Geração Termoelétrica

A palavra energia vem do grego *energeia* que quer dizer eficácia, força, energia, ação. Etimologicamente, *energeia* é igual a "en + ergon", ou seja, trabalho. Mas a palavra energia foi também usada para traduzir o termo grego *dinamis* que significa potência, poder, força, faculdade, talento e que veio na atualidade a originar o termo dinâmica, ciência das forças em movimento, [MACHADO, 1998].

Segundo [KAPLAN, 1983], a energia pode ser encontrada nas formas:

- Térmica: reconhecida na forma de calor;
- Mecânica; reconhecida pela capacidade de produzir movimento;
- Química: devido às agregações moleculares;
- Solar: reconhecida como a radiação que emana do sol;
- Elétrica: reconhecida como o fluxo de elétrons que produz uma corrente elétrica;
- Nuclear: devido às agregações nucleares.

Portanto, energia é tudo aquilo capaz de produzir calor, trabalho mecânico, luz, radiação, etc. A energia elétrica é um tipo especial de energia, através da qual podemos obter os efeitos acima. A geração de energia elétrica pode ser obtida através de fontes diversas.

Quanto à disponibilidade, nenhuma fonte de energia pode ser considerada absolutamente inesgotável. São consideradas fontes renováveis aquelas cujo uso pela humanidade não causa uma variação significativa nos seus potenciais e, se em curto prazo, sua reposição é relativamente fácil. Analogamente, fontes não-renováveis são aquelas cuja reposição natural demora anos ou até alguns séculos, de acordo com [JANNUZZI e SWISHER, 1997].

Como exemplo de fontes renováveis há a energia solar, a energia potencial das águas das barragens de hidroelétrica, a energia das marés, a energia

geotérmica, a energia eólica, a energia das biomassas e o carvão vegetal. Em contrapartida, o carvão mineral, o xisto, o petróleo, a energia nuclear e o gás natural são exemplos de fontes não-renováveis.

De uma forma geral, a energia encontrada na natureza é processada para atender as demandas geradas pelo homem para fins sociais, tecnológicos, industriais, bélicos, entre outros.

As fontes de energia primária são as formas em que a energia é encontrada na natureza. As várias fontes são processadas e convertidas em vetores que por sua vez são armazenadas ou distribuídas para os consumidores finais.

A eletricidade é uma energia intermediária (vetor) entre a fonte produtora (primária) e a aplicação final.

A transformação de uma forma de energia em outra é chamada conversão de energia. O princípio que rege as conversões de energia foi originado pela Primeira Lei da Termodinâmica. Este princípio, que consiste num balanço energético, diz que energia não é criada nem destruída, mas meramente é proveniente de uma mudança de estado ou de forma.

Atualmente, a energia é vista como a entrada essencial para todos os processos relativos a produção de mercadorias e serviços.

No entanto, o consumo de energia cresceu de maneira muito lenta ao longo da história da humanidade até o século XIX, mas a partir de século XX, principalmente a partir do período da Segunda Guerra Mundial, a avidez por energia tomou seu consumo exponencial.

Até a revolução industrial as fontes de energia consistiam da força animal e humana, roda d'água, vento e lenha. A revolução industrial trouxe uma série de transformações técnicas e socioeconômicas que inauguraram um novo capítulo no que diz respeito ao consumo de energia em grande escala.

Este período estabeleceu um marco transitório de uma sociedade predominantemente agrícola para uma sociedade industrialmente produtiva, voltada ao consumo, organizada dentro de um novo modelo econômico e associada ao mercado de capitais.

O uso da energia elétrica teve seu início do século XX. A energia elétrica pode ser obtida de várias maneiras: nas usinas nucleares que utilizam minerais radioativos; nas usinas hidroelétricas que aproveitam as

quedas d'água; nas usinas termoeletricas utilizando combustíveis como o gás natural, óleo diesel, óleo biocombustível, carvão mineral e biomassa (por exemplo, de cana-de-açúcar).

A energia elétrica que antes era gerada apenas para satisfazer as necessidades de iluminação pública passou a ser gerada para atender tanto aos setores comerciais quanto aos setores residenciais urbanos. O advento do transformador permitiu que o excedente de produção fosse transportado através de linhas de transmissão para cidades mais distantes. Assim, deu-se o início dos sistemas elétricos de potência, conforme [WEEDY, 1973].

Entre os últimos anos do século XIX e a década de 30 do século XX, a energia elétrica instalada no Brasil cresceu de forma acelerada. Havia neste período uma centena de empresas que operavam as usinas e distribuíam a energia elétrica. Estas usinas estavam geralmente associadas a regiões de atividade industrial ou atendiam as localidades definidas por concessão municipal. Com o crescimento da atividade e a necessidade de executar projetos de maior tamanho, ocorreu um processo de fusões e incorporações entre as empresas do setor. Seguindo uma tendência mundial, as usinas tomaram-se cada vez maiores para que se reduzissem os custos de instalação e de geração de acordo com [CORREA NETO, 2001].

A geração de energia elétrica em usinas hidroelétricas no Brasil expandiu-se no final dos anos 50, contrariando a tendência mundial de produção de eletricidade através de derivados de petróleo em usinas termoeletricas. Em 1954, o presidente Getúlio Vargas propôs a criação de um órgão responsável pela operação das empresas de energia elétrica, as Centrais Elétricas Brasileiras S. A. (ELETROBRAS). No entanto sua implantação só veio a ocorrer tempos mais tarde, em 1963.

A ELETROBRAS foi concebida com o objetivo de realizar estudos, projetos e financiamentos, construção e a operação de usinas, geradores, linhas de transmissão, distribuição de energia elétrica e negociações associadas a tais atividades. Também na década de 60 foi criado o Ministério das Minas e Energia (MME), responsável por planificar a exploração dos recursos energéticos e minerais do Brasil.

No final da década de 90, o Estado deu início a um processo de descentralização dos assuntos energéticos que foi caracterizado por um programa

de privatizações de algumas empresas da área de geração e distribuição. Neste mesmo período, surgiram novos agentes no setor energético, destacando-se:

- Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), órgão fiscalizador e regulador dos serviços públicos de energia elétrica;
- Operador Nacional do Sistema (ONS), órgão responsável pela operação do sistema de transmissão;
- Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), mercado onde a energia passou a ser negociada livremente como mercadoria.

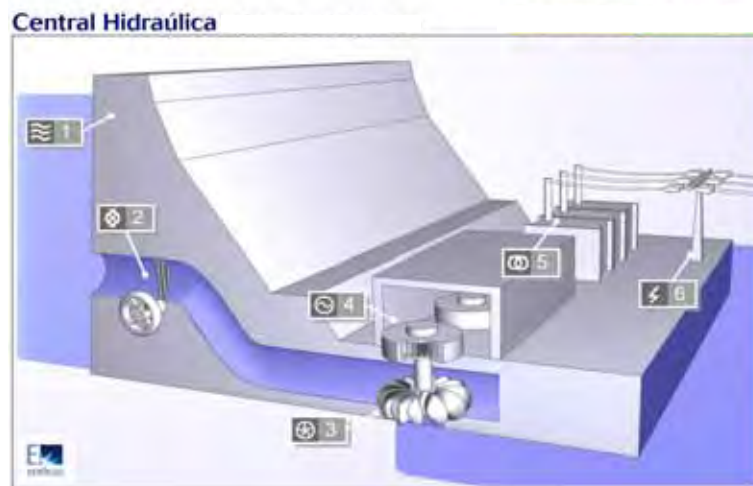
Neste novo contexto, as atribuições do Estado passaram a se concentrar na formulação de políticas energéticas para o setor e na regulação de suas atividades, incluindo geração, transmissão, distribuição e comercialização de energia elétrica. A elaboração de políticas e diretrizes para o setor energético continua sendo responsabilidade do MME, auxiliado pelo Conselho Nacional de Política Energética (CNPE), conforme a ANEEL (2002).

Além das mudanças nos aspectos institucionais do setor elétrico, ocorreram mudanças que viabilizaram o processo de descentralização da geração através de incentivos, a inserção de fontes não convencionais e estímulo aos avanços tecnológicos para sua implementação.

2.2 - Principais Fontes de Energia

A seguir destacamos algumas das principais fontes de energia:

Energia hidráulica - é a mais utilizada no Brasil em função da grande quantidade de rios em nosso país. A água possui um potencial energético e quando represada ele aumenta. Numa usina hidrelétrica existem turbinas que, na queda d'água, fazem funcionar um gerador elétrico, produzindo energia. Embora a implantação de uma usina provoque impactos ambientais, na fase de construção da represa, esta é uma fonte considerada limpa.



Fonte: Endesa

2.1- Central Hidráulica

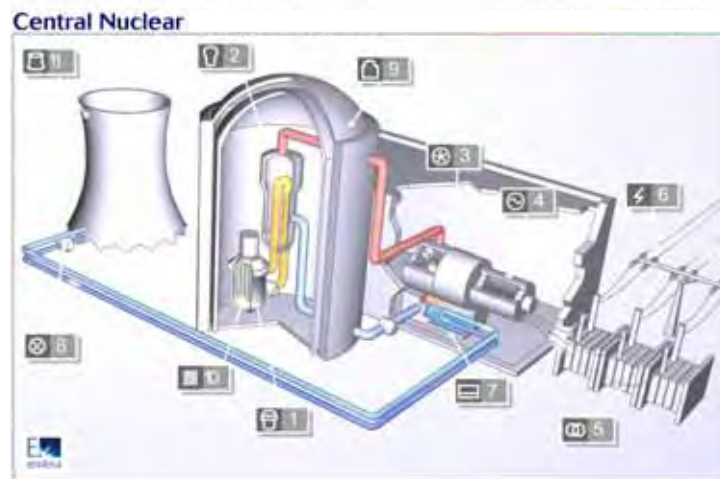
Energia fóssil - formada a milhões de anos a partir do acúmulo de materiais orgânicos no subsolo. A geração de energia a partir destas fontes costuma provocar poluição, e esta, contribui com o aumento do efeito estufa e aquecimento global. Isto ocorre principalmente nos casos dos derivados de petróleo (diesel e gasolina) e do carvão mineral. Já no caso do gás natural, o nível de poluentes é bem menor.

Energia solar - ainda pouco explorada no mundo, em função do custo elevado de implantação, é uma fonte limpa, ou seja, não gera poluição nem impactos ambientais. A radiação solar é captada e transformada para gerar calor ou eletricidade.

Energia de biomassa - é a energia gerada a partir da decomposição, em curto prazo, de materiais orgânicos (esterco, restos de alimentos, resíduos agrícolas). O gás metano produzido é usado para gerar energia.

Energia eólica - gerada a partir do vento. Grandes hélices são instaladas em áreas abertas, sendo que, os movimentos delas geram energia elétrica. É uma fonte limpa e inesgotável, porém, ainda pouco utilizada.

Energia nuclear - o urânio é um elemento químico que possui muita energia. Quando o núcleo é desintegrado, uma enorme quantidade de energia é liberada. As usinas nucleares aproveitam esta energia para gerar eletricidade. Embora não produza poluentes, a quantidade de lixo nuclear é um ponto negativo. Os acidentes em usinas nucleares, embora raros, representam um grande perigo.

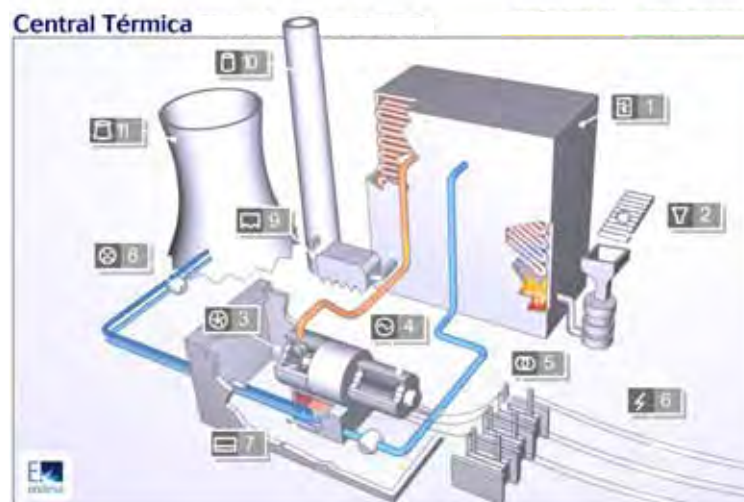


Fonte: Endesa

2.2- Central Nuclear

Energia geotérmica - nas camadas profundas da crosta terrestre existe um alto nível de calor. Em algumas regiões, a temperatura pode superar 7.000°C. As usinas podem utilizar este calor para acionar turbinas elétricas e gerar energia. Ainda é pouco utilizada.

Energia térmica - geração de energia elétrica/electricidade a partir da energia liberada em forma de calor, normalmente por meio da combustão de algum tipo de combustível renovável ou não renovável.



Fonte: Endesa

2.3- Central Térmica

Energia gravitacional - gerada a partir do movimento das águas oceânicas nas marés. Possui um custo elevado de implantação e, por isso, é pouco utilizada. Especialistas em energia afirmam que, no futuro, esta, será uma das principais fontes de energia do planeta.

De acordo com a [ANEEL, 2010] o Brasil possui no total **2.276** empreendimentos em operação, gerando **110.327.788** kW de potência.

Está prevista para os próximos anos uma adição de **48.572.036** kW na capacidade de geração do País, proveniente dos **139** empreendimentos atualmente em construção e mais **476** outorgadas.

Tabela 2.1 - Geração – Brasil

Empreendimentos em Operação							
Tipo		Capacidade Instalada		%	Total		%
		N.º de Usinas	(kW)		N.º de Usinas	(kW)	
Hidro		866	79.789.368	67,33	866	79.789.368	67,33
Gás	Natural	93	11.050.530	9,33	127	12.334.813	10,41
	Processo	34	1.284.283	1,08			
Petróleo	Óleo Diesel	817	4.012.437	3,39	846	6.536.240	5,52
	Óleo Residual	29	2.523.803	2,13			
Biomassa	Bagaço de Cana	308	5.623.446	4,75	377	7.271.941	6,14
	Licor Negro	14	1.240.798	1,05			
	Madeira	39	327.767	0,28			
	Biogás	9	48.522	0,04			
	Casca de Arroz	7	31.408	0,03			
Nuclear		2	2.007.000	1,69	2	2.007.000	1,69
Carvão Mineral	Carvão Mineral	9	1.594.054	1,34	9	1.594.054	1,34
Eólica		46	794.336	0,67	46	794.336	0,67
Importação	Paraguai		5.650.000	5,46		8.170.000	6,90
	Argentina		2.250.000	2,17			
	Venezuela		200.000	0,19			
	Uruguai		70.000	0,07			
Total		2.273	118.497.752	100	2.273	118.497.752	100

Fonte: ANEEL, 2010

Como visto na tabela 2.1, aproximadamente 70% do suprimento de energia elétrica do país provém da geração hidráulica e mesmo com a inserção de novas fontes energéticas ao sistema elétrico, a geração hidráulica não perderá sua importância na matriz energética nacional.

O restante da energia elétrica é provido por usinas termoeletricas a óleo combustível, carvão, gás natural e combustível nuclear.

Uma vez que o combustível utilizado pelas usinas hidroelétricas é a água contida nas represas, as vantagens fundamentais do aproveitamento desta fonte são o baixo custo operacional, emissões praticamente nulas e a vantagem de que a água é uma fonte renovável.

Contrariando estas vantagens, as hidroelétricas necessitam de apreciáveis investimentos durante o processo de construção, sem contar o tempo necessário para finalização da obra. Além disso, acarretam sérios impactos ambientais como devastação da fauna e da flora originais, alterações climáticas e perda da biodiversidade local. Outro fator agravante é a incerteza relacionada à chuva, podendo recair em períodos de intensa estiagem. No âmbito social, a construção das hidroelétricas requer a transferência da população das áreas alagadas para outras áreas com conseqüências como isolamento geográfico, a perda das referências históricas e das relações sociais. No campo técnico, as hidroelétricas localizam-se perto dos grandes potenciais hidráulicos e requerem linhas de transmissão muito extensas para interligar as usinas aos centros consumidores, ocasionando altos valores de perdas.

No momento, as usinas termoeletricas representam uma solução em curto prazo, tanto para o suprimento da demanda quanto para a expansão do sistema de geração. Um grande reforço a esta perspectiva é a disponibilidade de abastecimento de gás natural através da implantação do gasoduto Bolívia - Brasil, somado a projetos que viabilizam a exploração de gás natural em território nacional, buscando uma meta de 12% de participação do gás natural no consumo de energia primaria no Brasil em 2010.

No setor técnico, as usinas termoeletricas representam uma saída para a diversificação da matriz energética e possibilitam a elevação da competitividade.

Freqüentemente as unidades de geração termoeletrica localizam-se junto aos centros de consumo, o que representa menores perdas na transmissão. No setor econômico, as termoeletricas requerem menores investimentos que as tradicionais hidroelétricas e o período de tempo desde o projeto até a construção é bastante rápido. No setor social, tais usinas contribuem para a introdução da energia elétrica em regiões isoladas, não atendidas pelo sistema interligado e a conseqüência direta deste fato é o aumento da oferta de empregos.

Na região norte e nordeste o governo federal, através do Programa Luz para Todos, têm levado energia elétrica às regiões de difícil acesso e, como incentivo para o uso desta, têm fornecido equipamentos eletro-eletrônicos para as populações carentes inserirem-se socialmente no contexto atual do país e do planeta. O maior objetivo deste programa é utilizar a energia como vetor de

desenvolvimento social e econômico destas comunidades, contribuindo para a redução da pobreza e aumento da renda familiar. A chegada da energia elétrica facilitará a integração dos programas sociais do governo federal, além do acesso a serviços de saúde, educação e saneamento básico.

Os aspectos negativos das termoeletricas são, basicamente, o alto custo dos combustíveis utilizados na geração e as indesejáveis emissões de poluentes ao meio ambiente.

A produção de energia elétrica em usinas termoeletricas, de maneira econômica e ambientalmente correta, abre novas linhas de pesquisas para os engenheiros, ambientalistas e economistas brasileiros.

A geração termoeletrica só é conseguida através de equipamentos desenvolvidos pelo homem. Em particular, a transformação da energia térmica disponibilizada pelos combustíveis em energia mecânica é realizada por diferentes equipamentos, cuja construção é baseada em alguns dos diversos ciclos termodinâmicos, entre eles, o Ciclo *Brayton* e Ciclo *Rankine*, conforme [CORREA NETO, 2001].

De acordo com [MILLER, 1987], a eficiência global das unidades térmicas é determinada medindo-se a entrada de combustível e a saída de energia elétrica e expressando-se os resultados para várias cargas sob a forma de uma relação ou taxa. As curvas obtidas são chamadas curvas de entrada-saída

A Figura 2.4 mostra a característica de uma unidade de geração termoeletrica. A entrada para a unidade mostrada na ordenada pode ser colocada em termos de quantidade de combustível convertida em calor por hora, $H(\text{Btu/h})$. A saída é normalmente a saída líquida de eletricidade da unidade, $P(\text{MW})$. A característica mostrada é idealizada, ou seja, convexa e suave.

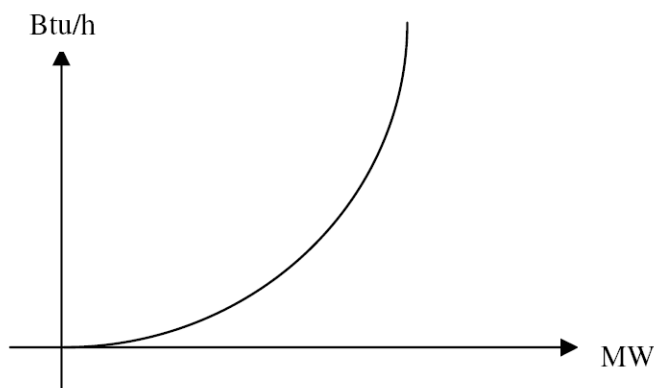


Figura 2.4 - Curva de Entrada-Saída Típica de uma Unidade Térmica

Curvas semelhantes são desenvolvidas para cada unidade geradora. Os dados necessários para a obtenção da curva de entrada-saída podem ser obtidos de cálculos de projetos ou de testes de taxa de calor. Quando os testes de taxa de calor são usados, os pontos encontrados não caem em uma curva suave.

A curva da Figura 2.4 é convertida em custo de combustível pela multiplicação da entrada de combustível, em Btu/h , pelo equivalente custo de combustível, em termos de $\$/Btu$, onde $\$$ é uma unidade monetária simbólica.

O custo de combustível de uma unidade de geração termoeletrica é considerado como custo variável, pois pode ser afetado pelo carregamento das unidades geradoras com diferentes taxas de combustível, pela combinação da operação hidráulica e térmica, pelos requisitos diários de carga e pela compra e venda de energia. Estes custos são substancialmente controlados pelos operadores do sistema.

Por outro lado, conforme [MILLER, 1987], os custos fixos incluem os investimentos de capital, os juros sobre os empréstimos, os salários e outras despesas que são independentes da carga do sistema. Os responsáveis pela operação direta do sistema têm pouco controle sobre estes custos.

O custo da geração termoeletrica pode ser minimizado através de uma estratégia de otimização chamada Despacho Econômico (DE), que será explorado neste trabalho.

A maioria das usinas termoeletricas opera simplesmente com a minimização de custos como objetivo central. No entanto, estas usinas queimam combustíveis fósseis como carvão, óleo, gás, ou combinações destes, as quais produzem emissões atmosféricas cuja natureza e qualidade dependem do tipo do combustível. As emissões afetam não só a saúde dos seres humanos, mas também as vegetações, os recursos hídricos, os animais, as calotas polares, provocando degelo e conseqüente aumento do nível da água dos oceanos, além de outros fenômenos da natureza como, tempestades, enchentes, alagamentos e, entre outras formas de danos causados pelas emissões, destaca-se o aquecimento global. Portanto, é imprescindível considerar as emissões durante o processo de geração de energia.

De maneira análoga ao custo de geração, as emissões também podem

ser minimizadas através de uma estratégia de otimização chamada Despacho Ambiental (DA), a qual também é explorada neste trabalho.

A modelagem do DA impõe uma relação entre a quantidade de poluente e a saída de potência de cada unidade, encontrando o nível de concentração resultante. Em alguns casos, as emissões são proporcionais ao consumo de combustível nas unidades térmicas. Assim, da mesma forma que a função custo, a função de emissão é obtida através da curva de entrada-saída semelhante à da Figura 2.4, multiplicando-se a entrada de combustível Btu/h , pela quantidade gerada de emissões, kg/Btu .

No próximo capítulo apresentamos uma abordagem geral de otimização, bem como os métodos de penalidade e de barreira e os métodos determinísticos de otimização.

3 - OTIMIZAÇÃO

Em matemática, o termo otimização, ou programação matemática, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável.

Assim, tornar algo ótimo é buscar o que é excelente, o melhor possível, "o grau, quantidade ou estado que se considera o mais favorável, em relação a um determinado critério".

Otimizar é melhorar até onde puder-se e só é possível se tiver-se escolha. Escolher uma dentre várias alternativas. Se uma alternativa houver, capaz de introduzir alguma melhoria, fica-se com ela. Caso contrário, o que se tem em mãos já é a escolha ótima.

Otimizar é selecionar algo melhor. Mas, quase sempre, fica-se restrito a escolhê-lo dentre um conjunto limitado de alternativas. Obviamente, o desejo de otimizar não basta. Sem critério de escolha, por exemplo, nem adianta conhecer o universo de alternativas. Por outro lado, desconhecendo-se este, não adianta ter critério. Informação, portanto, é fundamental. Quanto mais, melhor; mais depressa chega-se às alternativas ótimas.

A função que descreve o retorno ou benefício de qualquer solução é chamada "função objetivo". Outros nomes comumente usados são função custo e função desempenho (performance). A denominação "função objetivo" está associada ao desempenho a ser alcançado, que pode ser a minimização ou, de modo reverso, a maximização de determinada função objetivo.

As aplicações da Otimização encontram-se presentes em todas as modalidades de Engenharia, na Economia, na Biologia, na Agronomia, entre outras áreas distintas.

Muitos desses problemas podem ser modelados como problemas de maximizar (ou minimizar) uma função cujas variáveis devem obedecer a certas restrições:

Minimizar (Maximizar) $f(x)$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a:} \quad & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r \\ & x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Encontrar soluções ótimas, ou mesmo aproximadas, para esses tipos de problemas é um desafio nem sempre fácil de ser vencido. A construção de bons algoritmos é a principal vocação da otimização. Algoritmos gerais e confiáveis, que, se possível, resolvam classes de problemas de otimização independentemente da dimensão e dos parâmetros envolvidos.

Em problemas de otimização, que tem um significado físico, a solução deve satisfazer as restrições do problema descrito pelo sistema físico tanto quanto maximizar ou minimizar a função objetivo. Problemas deste tipo são denominados problemas de otimização restritos. Os modelos matemáticos representam as restrições nestes problemas. As restrições podem ser classificadas como restrições de igualdade ou desigualdade. Alguns casos não apresentam nenhuma restrição, consistem apenas da função objetivo e são denominados problemas de otimização irrestritos.

O espaço delimitado pelas restrições é denominado de região viável ou região factível. Uma das condições mais importantes da otimização consiste na convexidade da região factível. Caso a região viável seja não-convexa, a solução pode convergir para um ótimo local ou um ponto de sela, mas a convergência para um ótimo global não é assegurada pelos métodos determinísticos clássicos.

Os problemas de otimização abordados pelos métodos clássicos podem ser classificados em duas classes, conforme as características da função objetivo e das restrições:

- **Programação Linear:** quando a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. O Método Simplex é o método mais tradicional para solucionar este tipo de problema de otimização. Outros métodos podem ser utilizados para a solução destes problemas, dentre eles, os Métodos de Pontos Interiores, a serem amplamente investigados e explorados neste trabalho.

- **Programação Não-Linear:** quando a função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, é uma função não-linear das variáveis de projeto. Nesta classe,

os métodos que mais se destacam são: Método de Programação Linear Seqüencial, Método de Programação Quadrática Seqüencial, Método das Direções Viáveis, Método do Gradiente Reduzido, Método do Gradiente Projetado, Métodos Lagrangianos e de Penalidades, entre outros.

Antes de 1940, relativamente, muito pouco tinha sido desenvolvido sobre métodos para otimização numérica de muitas variáveis. A maioria dos métodos de otimização foram desenvolvidos após o surgimento do computador. Durante a Segunda Grande Guerra Mundial (década de 40), com o objetivo de alocar recursos escassos, desenvolveu-se o método Simplex para problemas lineares. O sucesso e credibilidade ganhos durante a guerra foram tão grandes que, terminado o conflito, esses grupos de cientistas e a sua nova metodologia de abordagem dos problemas se transferiram para as empresas que, com o "boom" econômico que se seguiu, se viram também confrontadas com problemas de decisão de grande complexidade.

A aplicação de um determinado método a um problema real depende, basicamente, das características do problema, isto é, o problema ser linear, não-linear, convexo, inteiro, dinâmico, entre outras. Em Programação Não-Linear os primeiros métodos eram bastante restritos. Tornaram-se significativos no final da década de 50 com a introdução dos métodos de métrica variável por Davidon, capazes de solucionar problemas de muitas variáveis.

Uma classe de métodos de Otimização muito explorada nos dias de hoje é denominada de métodos de Pontos interiores. Os métodos de Pontos Interiores têm sido amplamente investigados e utilizados principalmente na resolução de problemas de Programação Linear e, mais recentemente, em problemas de Programação Quadrática e Não-Linear, com bom desempenho em problemas de grande porte.

Ainda que não fossem conhecidos na literatura com esta denominação, a estratégia de Pontos Interiores foi introduzida inicialmente por [FRISCH, 1955] e por [CARROL, 1961] e popularizada por [FIACCO & McCORMICK, 1968] através da utilização da função Barreira para problemas não-lineares. Ressalta-se que, o entusiasmo no uso da função Barreira diminuiu sensivelmente na década de 70 devido a alguns problemas apresentados por esta, tais como, o mau condicionamento da matriz Hessiana quando seu fator de Barreira tende a zero; a dificuldade na escolha do fator de Barreira e na escolha de uma solução inicial; a

não-existência da derivada na solução e o aumento ilimitado da função Barreira na vizinhança da fronteira.

O interesse pela utilização da metodologia de Pontos Interiores para a busca de soluções ótimas de problemas de Otimização reapareceu quando, em 1984, [KARMAKAR, 1984] publicou o seu método Projetivo para Programação Linear. Este trabalho provocou uma agitação nas atividades de pesquisa nesta área.

Após a introdução feita por Karmarkar, métodos variantes de seu algoritmo original foram apresentados. Entre eles citamos: o algoritmo Primal-Afim utilizado na resolução de problemas de Programação Linear com restrições de igualdade, o qual foi apresentado por [BARNES, 1984] e por [VANDERBEI *et al.*, 1984]; o algoritmo Dual-Afim proposto por [ADLER *et al.*, 1989] para resolver problemas de Programação Linear na forma de desigualdade; a contribuição de [MEGIDDO & SHUB, 1989] com a indicação que a trajetória que conduz à solução ótima fornecida pelos algoritmos Afins dependem da solução inicial; a incorporação da função Barreira Logarítmica ao problema de Programação Linear e a resolução deste através da metodologia de Pontos Interiores Primal-Afim e Dual-Afim, onde destacamos os trabalhos de [MEGIDDO, 1987], [RENEGAR, 1988], [VAIDYA, 1990] e [YE, 1984]; os métodos de trajetória central, propostos por [GONZAGA, 1989, 1990] e [MONTEIRO & ADLER, 1989]; o algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores proposto por [MONTEIRO *et al.*, 1990] e também por [KOJIMA *et al.*, 1989], os quais exploram uma função potencial Primal - Dual variante da função Barreira Logarítmica e o método da Barreira Logarítmica Primal - Dual Previsor-Corretor, em que a cada iteração é dado um passo previsor e um passo corretor, determinando direções de busca melhores que as apresentadas por [MONTEIRO & ADLER, 1989], o qual foi apresentado por [MEHROTRA e SUN, 1992], entre outros.

Seguindo o avanço dos métodos de Pontos Interiores destaca-se a teoria de métodos da função Barreira Modificada desenvolvida por [POLYAK, 1992]. Estes métodos combinam as melhores propriedades da função Lagrangiana Clássica e da função Barreira Clássica, evitando os problemas que ambas enfrentam. Segundo [POLYAK, 1992] a finalidade que o método da função Barreira Modificada têm para os métodos de Pontos Interiores é a mesma que o método da função Lagrangiana Aumentada têm para os métodos de Penalidade: ajudá-los a “driblar” suas dificuldades.

O método da função Barreira Modificada transforma o problema restrito em outro problema equivalente, o qual é irrestrito e resolve uma sequência de problemas irrestritos até atingir a solução ótima. Em seu trabalho [POLYAK, 1992] apresenta três tipos de função Barreira Modificada: uma para a função Barreira de [CARROL, 1961], outra para a função Barreira de [FRISCH, 1955] e a terceira denominada função Barreira Shift. Estas funções são definidas através da relaxação do conjunto de restrições factíveis. Variantes do método de Barreira Modificada podem ser encontrados em [BREITFELD & SHANNO 1996], [VASSILIADIS & FLOUDAS, 1997] e [CHEN & VASSILIADIS, 2003].

Extensões dos métodos de Pontos Interiores para problemas não-lineares e não convexos são encontrados em [CARPENTER *et al.*, 1990], [VANDERBEI & SHANNO, 1999], [SHANNO & VANDERBEI, 2000], [LUKSAN *et al.*, 2004], [BAPTISTA *et al.*, 2006 a, b], entre outros.

É preciso destacar que os métodos de Pontos Interiores têm sido utilizados para a resolução de problemas reais nas mais diversas áreas.

3.1 - Otimização Clássica

Um problema de otimização estático e irrestrito pode ser definido como segue:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ & x \in X \end{array} \quad (3.2)$$

Mesmo sendo irrestrito, a determinação da solução do problema (3.2), deve responder as seguintes questões:

- i. Quando $f(x)$ possui um ponto de mínimo?
- ii. Este mínimo é único?
- iii. Existe um mínimo relativo?

Para responder a estas questões são usadas algumas definições:

Mínimo Global: a função $f(x)$ definida num espaço fechado X em E^n possui um mínimo global em X no ponto x^* , se $f(x) > f(x^*)$, $\forall x \in X$.

Mínimo Local: Seja $f(x)$ definida em todos os pontos em alguma vizinhança- δ de x^* em E^n . A função $f(x)$ possui um mínimo local ou relativo em x^* se existe um

parâmetro ε , $0 < \varepsilon < \delta$, tal que para todos x numa vizinhança- ε de x^* em E^n , para todo x , $0 < \|x - x^*\| < \varepsilon$, então, $f(x) > f(x^*)$.

Dizer que x^* é um ponto de mínimo global implica que neste ponto a função objetivo têm seu valor mais baixo dado por $f(x^*)$, sem dificuldade de busca no conjunto X .

Um ponto de mínimo local, por outro lado, garante somente que o valor de $f(x^*)$ é um mínimo com respeito a outros pontos na vizinhança, especificamente numa região- ε sobre x^* , conforme a Figura 3.3.

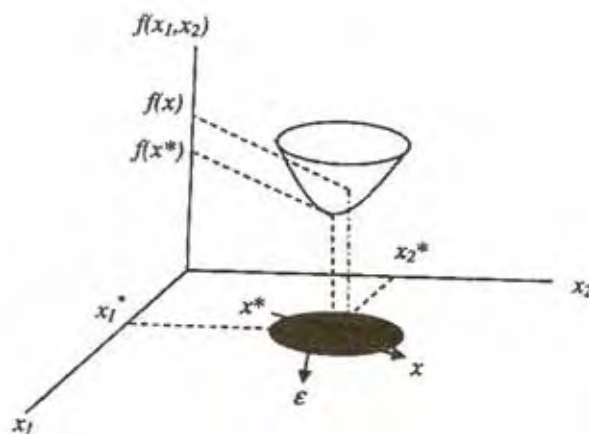
Assim, uma função pode ter alguns mínimos locais, cada um com um valor diferente de função objetivo. O ponto de mínimo global pode sempre ser escolhido entre os pontos de mínimos locais por comparação entre os valores e escolhendo aquele que:

$$f(x^*) \leq f(x_i^0), i = 1, 2, \dots, p \quad (3.3)$$

em que:

$$x^* \in \{x_i^0 / i = 1, 2, \dots, p\}, x_i^0, i = 1, 2, \dots, p \text{ são pontos de mínimo local.}$$

Todo mínimo global é também um mínimo local, entretanto, a afirmativa inversa não é verdadeira.



Fonte: [SAMED, 2004]

Figura 3.1 - Mínimo global

3.2 - Otimização com Restrições de igualdade e Multiplicadores de Lagrange

Um problema de otimização com restrições de igualdade é posto da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) \\ \text{Sujeito a } g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m < n \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ e $m < n$.

O problema é determinar um ponto x^* que gera um mínimo relativo para $f(x)$ e também satisfaça as restrições vistas no problema (3.4). Obviamente, a região de busca é reduzida pela presença das restrições de igualdade.

A solução proposta por Lagrange foi determinar um novo problema irrestrito, pela associação das restrições a função objetivo através dos multiplicadores de Lagrange, λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$. A nova função objetivo $L(x, \lambda)$ é chamada de Lagrangiana. Esta função é definida por:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (3.5)$$

Para encontrar a solução do novo problema irrestrito as condições necessárias dadas nas Equações (3.6) devem ser aplicadas.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6b)$$

As Equações (3.6a) e (3.6b) geram um conjunto de $m + n$ equações em $m + n$ incógnitas (x, λ) que deve ser resolvido para obter valores ótimos (x^*, λ^*) .

A condição dada na Equação (3.6b) garante que as restrições são satisfeitas na solução ótima. Neste caso, $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ e o valor ótimo da Lagrangiana corresponde ao ótimo do problema original, isto é:

$$L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) \quad (3.7)$$

3.3 - Otimização com Restrições de Desigualdade

Em 1951 o teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) forneceu um conjunto de condições necessárias para tratar as restrições de desigualdade.

Seja o problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a } h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ e $r < n$

Considerando a função Lagrangiana $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^r \lambda_j h_j(x)$ e a existência dos multiplicadores de Lagrange, λ , no ponto x^* satisfazendo o problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_x \quad f(x) = f(x^*) \\ & \text{Sujeito a: } h_j(x^*) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad ; \end{aligned}$$

as condições necessárias são:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \quad (3.9a)$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) \leq 0 \quad (3.9b)$$

$$(\lambda^*)^T h(x^*) = 0 \quad (3.9c)$$

$$\lambda^* \leq 0 \quad (3.9d)$$

Estes resultados são chamados de condições de KKT. Em particular, a solução do conjunto de equações não-lineares e de desigualdades (3.9), representam um grande problema de desafio computacional.

3.4 - Otimização com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Um problema com restrições de igualdade e desigualdade pode ser escrito conforme o modelo de otimização dado em (3.10):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a: } g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n \\ & \quad h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3.10)$$

A função Lagrangiana associada ao problema (3.10) é dada por:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^r \mu_j h_j(x) \quad (3.11)$$

Então as condições de otimalidade para um ponto x^* são:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (3.12a)$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (3.12b)$$

$$\nabla_\mu L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq 0 \quad (3.12c)$$

$$\begin{cases} \mu_j^* h_j(x) = 0 \\ \mu_j^* \leq 0 \end{cases} \quad (3.12d)$$

3.5 - O Método de Penalidade

Os métodos apresentados, baseados em [Baptista, 2001] a seguir têm por objetivo resolver problemas de programação não-linear restritos da forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a : } g_i(x) = 0 \\ & \quad \quad \quad h_j(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde: $x \in R^n$ e $g(x) \in R^m$, $h(x) \in R^r$, e as funções são de classe C_5 .

3.5.1 - O Método de Penalidade

Seguindo a “idéia” de associar ao problema (3.13) uma seqüência de problemas irrestritos, a estratégia do método da função penalidade consiste na utilização de uma função auxiliar onde as restrições são introduzidas na função objetivo através de um fator de penalidade, o qual penaliza alguma violação destas. Esse método gera uma seqüência de pontos infactíveis, cujo limite é a solução ótima do problema original.

A função auxiliar têm a forma $f(x) + cP(x)$, sendo c denominado fator de penalidade, e $P(x)$, função penalidade associada a (3.13), dada por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \Theta(g_i(x)) + \sum_{j=1}^r \Lambda(h_j(x)), \quad (3.14)$$

onde Θ e Λ são funções contínuas de uma variável y , tais que:

$$\Theta(y) = 0, \text{ se } y = 0 \quad \text{e} \quad \Theta(y) > 0, \text{ se } y \neq 0; \quad (3.15)$$

$$\Lambda(y) = 0, \text{ se } y \leq 0 \quad \text{e} \quad \Lambda(y) > 0, \text{ se } y > 0. \quad (3.16)$$

As funções (3.15) e (3.16) podem assumir as seguintes formas:

$$\Theta(y) = |y|^p, \quad (3.17)$$

$$\Lambda(y) = [\text{Max}\{0, y\}]^p \quad (3.18)$$

onde p é um inteiro positivo. Para $p = 2$, em (3.17) e (3.18) a função $P(x)$ é denominada função penalidade quadrática.

O problema penalizado consiste em:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad \theta(x) = f(x) + cP(x) \quad (3.19)$$

para $c \geq 0$. Temos que, à medida que $c \rightarrow \infty$ e $P(x) \rightarrow 0$, a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original.

Exemplo 3.1: Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{Minimizar}} \\ &\text{Sujeito a:} \quad -x + 2 \leq 0 \end{aligned}$$

Determina-se a função penalidade $P(x) = [\text{Maximizar}\{0, (-x+2)\}]^2$, isto é:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \geq 2 \\ (-x+2)^2 & , \text{ se } x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Logo, temos que: } \theta(x) = x + c \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \geq 2 \\ (-x+2)^2 & , \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$$

Aplicando as condições de otimalidade:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 1 + c \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \geq 2 \\ (-x+2)^2 & , \text{ se } x \leq 2 \end{cases} = 0$$

$$1 - 2c(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2c}$$

Fazendo c tender ao infinito, temos:

$$x = \lim_{c \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{2c} \Rightarrow x = 2$$

Exemplo 3.2: Considere o seguinte problema

$$\text{Minimizar } x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{Sujeito a : } x_1 + x_2 - 1 = 0$$

$$x_1, x_2 \in R$$

Reformulando para um problema irrestrito:

$$\text{Minimizar } x_1^2 + x_2^2 + c(x_1 + x_2 - 1)$$

$$\text{Sujeito a : } x_1, x_2 \in R$$

Aplicando a condição necessária e suficiente para a otimalidade:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2c(x_1 + x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -c(x_1 + x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_2} = 2x_2 + 2c(x_1 + x_2 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = -c(x_1 + x_2 - 1)$$

Temos então que $x_1 = x_2 = \frac{c}{1+2c}$. Fazendo c tender a infinito:

$$x = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c}{1+2c} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c}{c\left(\frac{1}{c} + 2\right)} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{c} + 2\right)} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

3.5.2 - Interpretação Geométrica

Seja o seguinte problema perturbado, somente com uma restrição de igualdade:

$$V(\varepsilon) = \text{Minimizar} \{ f(x) : g(x) = \varepsilon, x \in E_n \}. \quad (3.20)$$

Definimos um conjunto S representado em um plano Oyz , tal que:

$$S = \{(y, z) / y = g(x), z = f(x), x \in E_n\}. \quad (3.21)$$

Tomamos $V(\varepsilon)$ como o contorno inferior deste conjunto, como pode ser visto na Figura 3.5.

Para $c > 0$ fixo, temos o seguinte problema penalizado:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad f(x) + cg^2(x) \quad (3.22)$$

Determinar o mínimo de (3.22) significa minimizar $z + cy^2$ sobre S . Assim, temos as parábolas:

$$z + cy^2 = a_i, i = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

onde $a_i \in R$ é a intersecção da parábola com o eixo z (ver Figura 3.2).

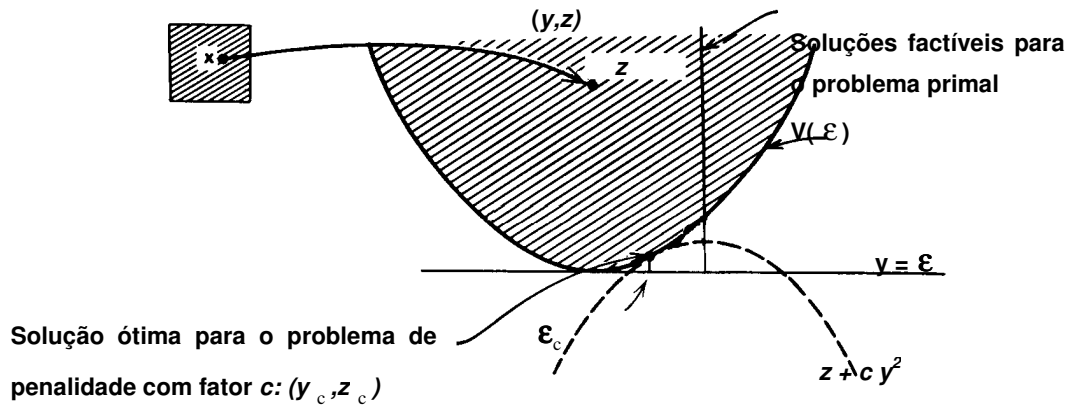


Figura 3.2 - Representação geométrica da função penalidade

Fonte: [Bazaraa et. al., 1993]

No processo de minimização de (3.23), começamos com um valor a_i pertencente ao interior da região factível. A determinação da solução ótima de (3.22) consiste em mover as curvas de nível, isto é, as parábolas, na direção contrária à do gradiente, até o ponto onde a curva tangencia o conjunto S , como vemos na Figura 3.5. Observamos que a solução para o problema penalizado não é a mesma do problema original, pois $h \neq 0$ nesse ponto de tangência.

Na Figura 3.3 pode ser visto que, para aproximar tal solução, aumenta-se o fator de penalidade $c' = \beta c$, diminuindo-se a abertura da parábola, representada por (3.23); assim o ponto de tangência dessas parábolas torna-se mais próximo da solução ótima do problema original. À medida que $c \rightarrow \infty$, o ponto de tangência aproxima-se do ótimo, ou seja, da solução do problema (3.13).

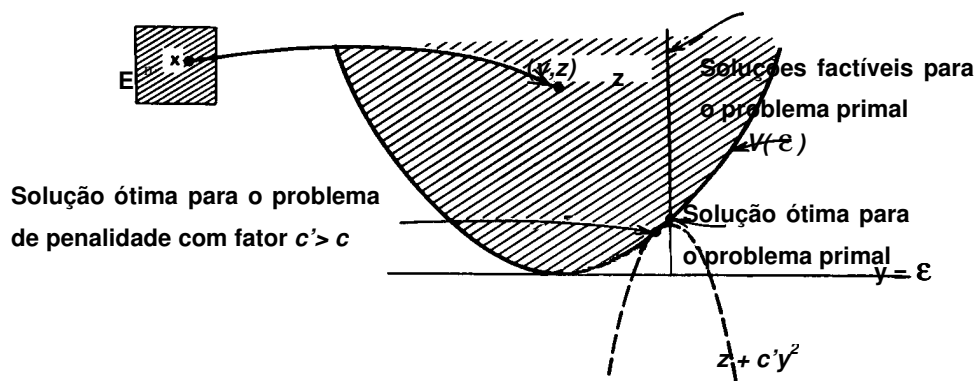


Figura 3.3 - Representação geométrica da atualização dos fatores de penalidade

Fonte: [Bazaraa et. al.,1993]

No caso não convexo em torno da solução, como mostra a Figura 3.4, podemos atingir a solução contrariamente ao método dual-Lagrangiano.

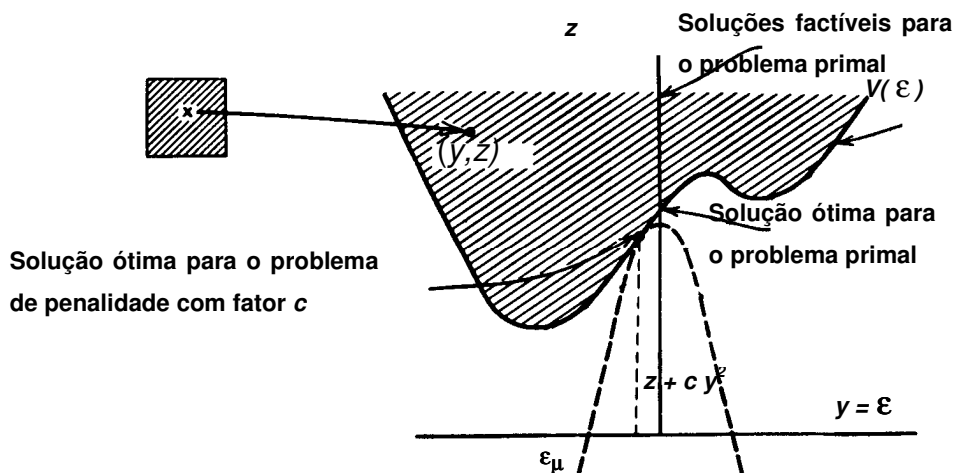


Figura 3.4 - Representação geométrica da função penalidade para o caso não convexo

Fonte: [Bazaraa et. al.,1993]

3.5.3 - Dificuldades Computacionais

Escolhendo-se c suficientemente grande, a solução do problema penalizado será próxima à solução do problema (3.13); porém, para valores muito grandes do fator de penalidade, teremos alguns problemas de mau condicionamento. Para valores grandes de c , há uma maior ênfase sobre a factibilidade; e a maioria dos métodos de otimização irrestrita move-se rapidamente na direção de um ponto factível. Esse ponto pode estar longe do ótimo, causando um término prematuro do método. Outro problema é o mau condicionamento da matriz Hessiana devido à sua dependência de c . Assim, a análise de convergência

do método pode ficar prejudicada. Ressaltamos que a escolha inicial do fator de penalidade e do parâmetro de penalidade afeta a convergência do método.

3.5.4 - Algoritmo

PASSO1 - Estabelecer o erro de convergência ($\xi > 0$), o ponto inicial x^k , o parâmetro de penalidade $c_k > 0$ e o fator de incremento da penalidade $\beta > 0$, $k = 0$.

PASSO2 - Resolver o problema utilizando um método de minimização irrestrita para μ_k fixo:

$$\underset{x \in R^n}{\text{Minimizar}} f(x) + c_k P(x)$$

obtendo então x^{k+1} .

PASSO 3 - Se $c_k P(x^{k+1}) < \xi$, pare, a solução ótima foi encontrada. Senão vá para o passo 7.

PASSO 4 - Fazer $c_{k+1} = \beta c_k$.

PASSO 5 - $k = k + 1$, voltar para o passo 5.

3.6 - O Método de Barreira

Da mesma forma que os métodos de penalidade, os métodos de barreira transformam o problema restrito em um problema irrestrito. Eles introduzem as restrições na função objetivo através de um fator de barreira, que penaliza a aproximação de um ponto viável à fronteira da região factível. Trabalhando no interior dessa região, tais fatores geram barreiras que impedem os pontos de sair dela. Logo, parte-se de um ponto viável e gera-se novos pontos factíveis. Uma das vantagens desse método é a obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso ocorra uma parada prematura dele. Ele trabalha somente com problemas de desigualdade cujo interior é não-vazio. Assim, assume-se o problema (3.13) obedecendo a essa condição.

Com o objetivo de garantir a permanência no interior da região factível, podemos gerar o seguinte problema de barreira:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \{ f(x) + \delta B(x) : h(x) < 0 \}, \quad (3.24)$$

onde $\delta \geq 0$ é denominado fator de barreira, e $B(x)$ é uma função barreira não-negativa e contínua no interior da região viável $\{x; h(x) < 0\}$ e tende ao infinito à medida que a solução se aproxima da fronteira, a partir do interior. Definimos, então:

$$B(x) = \sum_{i=1}^r \phi[h_i(x)], \quad (3.25)$$

onde ϕ é uma função de uma variável y , contínua sobre $\{y: y < 0\}$, e satisfaz

$$\phi(y) \geq 0 \text{ se } y < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = \infty. \quad (3.26)$$

A função $f(x) + \delta B(x)$ é denominada função auxiliar; a função barreira pode assumir várias formas, como:

$$B(x) = \sum_{i=1}^r -\frac{1}{h_i(x)}; \quad (3.27)$$

$$B(x) = -\sum_{i=1}^r \ln[-h_i(x)]. \quad (3.28)$$

A função (3.27) é denominada barreira clássica ou inversa e foi estudada por [CARROL, 1961]; (3.28) é denominada função barreira logarítmica e foi estudada por [FRISCH, 1955].

Quando $\delta \rightarrow 0$ e $B(x) \rightarrow \infty$, temos que $\delta B(x)$ se aproxima da função barreira ideal, descrita anteriormente em (3.24), e a solução do problema de barreira converge para a solução do problema (3.13).

Observamos que (3.24) é um problema restrito e pode ser tão complexo quanto (3.13). Como exigimos uma solução inicial interior à região viável e o método trabalha com pontos interiores a essa região, ao penalizar os pontos que se aproximam da fronteira impedimos que eles saiam da região e a restrição pode ser ignorada. Teremos, realmente, um problema irrestrito, para o qual poderá ser utilizada uma técnica de otimização irrestrita.

Exemplo 3.4: Resolver:

Minimizar x

Sujeito a: $-x + 1 \leq 0$

Observamos que o ponto ótimo é dado por $x^* = 1$ e $f(x^*) = 1$. Considere então a função barreira:

$$B(x) = \frac{-1}{g(x)} = \frac{-1}{-x+1}, \text{ para } x \neq 1$$

$$\delta B(x) = \delta \left(\frac{-1}{-x+1} \right)$$

Sendo a função auxiliar, $f(x) + \delta B(x) = x + \delta \left(\frac{1}{x-1} \right)$, temos o seguinte

problema de barreira:

$$\text{Minimizar} \left\{ x + \delta \left(\frac{1}{x-1} \right), -x+1 < 0 \right\}$$

Aplicando as condições de otimalidade:

$$1 - \delta(x-1)^{-2} = 0$$

$$1 - \frac{\delta}{(x-1)^2} = 0$$

$$(x-1)^2 - \delta = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - \delta = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{\delta}}{2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{\delta}$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$ para x e para $f(x)$ temos:

$$x = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 + \sqrt{\delta} = 1 \Rightarrow x = x^*$$

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 + \delta \left(\frac{1}{x-1} \right) \Rightarrow f(x) = f(x^*)$$

3.6.1 - Interpretação Geométrica

Seja o problema de barreira visto em (3.24) tal que as funções barreiras são definidas em (3.27).

Analisa-se, primeiramente, o comportamento da função barreira. A Figura 3.5 mostra $\delta B(x)$ para valores decrescentes de δ .

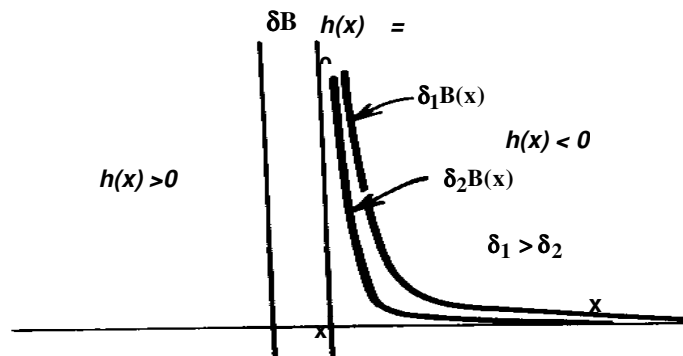


Figura 3.5 - Comportamento da função barreira

Fonte: [Baptista, 2001]

Note que, à medida que δ decresce, $\delta B(x)$ se aproxima de uma função que tem valor zero para $h(x) < 0$ e infinito para $h(x) = 0$.

Ao se resolver o problema (3.24) utilizando a função (3.27), inicia-se o processo de solução com um ponto interior à região factível. Para cada valor de δ , tem-se uma solução que será o ponto inicial para o processo iterativo. À medida que δ decresce, aproxima-se da solução do problema original, ou seja, $\delta \rightarrow 0$, $x^k \rightarrow x^*$ e $f(x^k) + \delta B(x) \rightarrow f(x^*)$, como pode ser visto na Figura 3.6.

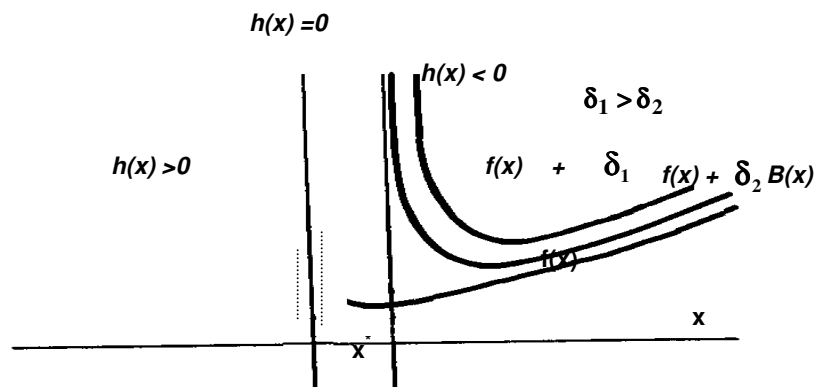


Figura 3.6 - Resolução através da função barreira

Fonte: [Baptista, 2001]

3.6.2 - Dificuldades computacionais

Uma das dificuldades encontradas no método de barreira é a seleção de um ponto inicial factível. Em muitos problemas, isso pode ser trabalhoso. Vários métodos podem ser utilizados para a determinação de um ponto inicial factível,

quando este não é conhecido. Também, em virtude da estrutura da função barreira, para valores pequenos de δ , muitas técnicas têm sérios problemas de mau condicionamento e erros de arredondamento, quando o ótimo se aproxima. As escolhas do fator de barreira e do parâmetro de barreira podem comprometer o processo de otimização

3.6.3 - Algoritmo

PASSO 1 - Estabelecer o erro de convergência ($\xi > 0$), o ponto inicial $x^k \in X$ com $g_i(x) < 0$, o parâmetro de penalidade $\delta_k > 0$ e o fator de incremento da barreira $\beta \in (0, 1), k = 0$.

PASSO 2 - Usar o Método de Newton e resolver o problema transformado para a forma irrestrita:

$$\text{Minimizar } f(x) + \delta_k B(x)$$

obtendo então x^{k+1} .

PASSO 3 - Se $\delta_k B(x^{k+1}) < \xi$, **PARE**, a solução ótima foi encontrada. Senão vá para o passo 5.

PASSO 4 - Fazer $\delta_{k+1} = \beta \delta_k$

PASSO 5 - $k = k + 1$, voltar para o passo 5.

3.7 - Métodos Determinísticos de Otimização

De acordo com [SAMED, 2004], um método de solução para problemas de otimização é chamado Determinístico se for possível prever todos os seus passos, desde que seu ponto de partida seja conhecido. Existe uma infinidade de métodos determinísticos, mas pode-se considerar que a maioria deles emprega a derivada da função objetivo para encontrar o ótimo. Uma importante categoria de métodos que utiliza a derivada da função é conhecida como Método dos Gradientes. Há ainda outra categoria de métodos que utiliza as duas primeiras derivadas de uma função contínua, desde que as derivadas também sejam contínuas. Tais métodos são conhecidos como Métodos de Newton.

3.7.1 - A Direção do Gradiente

O gradiente de uma função diferenciável de n variáveis, $f(x)$, é definido com um vetor unidimensional:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right]^T \quad (3.29)$$

Este vetor define uma direção chamada de direção do gradiente, que é a base de todos os algoritmos dos Métodos dos Gradientes.

A forma mais simples dos Métodos dos Gradientes é o método de máxima subida, quando se deseja determinar o máximo de uma função escalar ou o de descida mais íngreme ou mínima, no caso da busca pelo mínimo da função escalar. O entendimento da concepção deste método é apresentado na Figura 3.7.

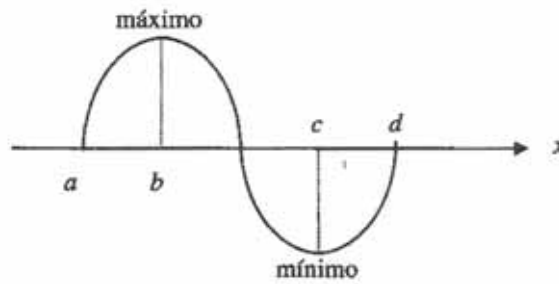


Figura 3.7 - Pontos de máximo e mínimo

Nos intervalos entre a e b e entre c e d o gradiente da função é positivo e entre b e c , o gradiente é negativo. No ponto $x=b$ ocorre um ponto de máximo e, em $x=c$ ocorre um ponto de mínimo.

Um procedimento iterativo que levaria ao valor de x em que a função assume seu valor mínimo ($x=c$) seria aquele que partindo de pontos iniciais entre b e c caminharia para a direita na direção de c , e que partindo de pontos iniciais entre c e d caminharia para a esquerda na direção de c . Portanto, o procedimento iterativo caminha na direção contrária à do gradiente da função em cada ponto. O correspondente método iterativo pode ser representado por:

$$x^{k+1} = x^k - \beta^K \nabla f(x^k) \quad (3.30)$$

em que β^k é um escalar positivo, atualizado a cada iteração $k = 1, 2, \dots$

3.7.2 - Métodos de Newton

A aplicação do Método de Newton-Raphson à busca do zero da função do gradiente, dá origem ao Método de Newton de busca de extremos de funções contínuas com as duas primeiras derivadas contínuas. Este algoritmo é traduzido pelo método iterativo:

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k), k = 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

A equação (3.31) pode ser reescrita utilizando a notação da Matriz Hessiana $H(x)$:

$$x^{k+1} = x^k - [H(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k), k = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

em que $H(x)$ armazena os valores das derivadas parciais de segunda ordem de $f(x)$.

3.7.3 - Comparação entre os Métodos

Destacamos que o Método de Newton, no caso da função objetivo ser quadrática, converge em apenas uma iteração. No entanto, sua implementação se torna computacionalmente onerosa devido ao cálculo das derivadas de primeira e segunda ordem da função objetivo e sua convergência está ligada diretamente à escolha da solução inicial.

Se o mesmo problema puder ser resolvido por um método do tipo gradiente, esta será sem dúvida a melhor alternativa, já que eles incorporam muito mais informações sobre o espaço de busca. Porém as técnicas que necessitam do cálculo do passo (β), como é o caso do Método do Gradiente, são computacionalmente inviáveis para problemas de grande porte.

Apesar das vantagens de cada um dos métodos acima, estes nem sempre podem ser empregados na busca do valor ótimo de um determinado problema. Seu uso é inviabilizado quando:

- i. A função objetivo for descontínua;
- ii. A função objetivo for não diferenciável;

iii. O cálculo das derivadas for computacionalmente inviável.

Nestes casos, métodos alternativos se fazem necessários para resolver os problemas de otimização, como os Métodos Heurísticos de Otimização.

3.8 - Métodos Heurísticos de Otimização

De acordo com [SAMED, 2004], Uma heurística é uma regra prática derivada da experiência. Não existe uma prova conclusiva de sua validade, o que se sabe é que ela é capaz de encontrar boas soluções, mas nem sempre e, não necessariamente, ótimas.

Várias atividades desempenhadas no dia-a-dia são baseadas em heurísticas. Um exemplo importante é a otimização do caminho para se chegar ao trabalho. Esta otimização é intuitivamente alcançada através da experiência adquirida que diz quais são os trajetos e horários que devem ser evitados, bem como aqueles que devem ser favorecidos.

Um Método Heurístico de Otimização pode ser Determinístico ou Estocástico, dependendo se empregará ou não números sorteados aleatoriamente para executar seu algoritmo. O final do século XX foi marcado pelo ressurgimento dos métodos heurísticos de otimização como ferramentas adicionais para tentar superar as limitações das heurísticas convencionais. Embora com filosofias distintas, estas metaheurísticas possuem em comum características que as distinguem das heurísticas convencionais como, por exemplo, incluir ferramentas para tentar escapar das armadilhas dos ótimos locais e a facilidade para trabalhar em ambientes paralelos.

Dentre os métodos heurísticos, destacam-se aqueles baseados em princípios evolutivos e inspirados em fenômenos da natureza, tais como, os algoritmos genéticos.

No próximo capítulo faz-se uma abordagem de métodos determinísticos baseados na metodologia Primal - Dual de pontos interiores tendo em vista a aplicação destes nos modelos de despacho econômico e ambiental.

4 - O ALGORITMO PRIMAL - DUAL DE PONTOS INTERIORES

4.1 - Métodos de Pontos Interiores

Desde sua introdução em 1984, o algoritmo de transformação projetiva de Karmarkar transformou-se no mais notável método de ponto interior para resolver problemas de programação linear. Este trabalho pioneiro provocou uma agitação nas atividades de pesquisas nesta área. Entre todos os variantes relatados do algoritmo original de Karmarkar, em especial o procedimento afim atraiu a atenção dos pesquisadores. Este usa a transformação afim simples para substituir a transformação projetiva original de Karmarkar e permite que as pessoas trabalhem no problema de programação linear na forma padrão. A estrutura simples e especial requerida pelo algoritmo de Karmarkar é relaxada.

O algoritmo básico do Método Afim foi apresentado primeiramente por [DIKIN, 1967], um matemático soviético. Mais tarde, em 1985, o trabalho era independentemente redescoberto por E. Barnes e por R. Vanderbei, M. Meketon, e B. Freedman [VANDERBEI e MEKETON, 1984]. Estes propuseram usar o algoritmo Primal - Afim para resolver os programas lineares (primal) na forma padrão e na prova estabelecida da convergência do algoritmo. Um algoritmo similar, denominado de algoritmo Dual - Afim, foi projetado e executado por 1. Adler, N. Karmarkar, M. G. C. Resende e G. Veiga [ADLER et al, 1989] para resolver problemas de programação linear (dual) na forma de desigualdade. Comparado à transformação projetiva relativamente incômoda, a implementação do algoritmo Primal - Afim e Dual - Afim é mais simples por ter relação direta com os problemas de programação linear. Estes dois algoritmos, quando aplicados em problemas de grande dimensão, exibiram resultados promissores, embora a prova teórica da complexidade de tempo polinomial não foi obtida com a transformação feita. O trabalho de N. Megiddo e de M. Shub [MEGIDDO e SHUB, 1989] indicou que a trajetória que conduz à solução ótima fornecida pelos algoritmos afins dependem da solução inicial. Uma má solução inicial, que está perto de um vértice do domínio

viável, poderá resultar em uma investigação que percorre todos os vértices do problema.

Não obstante, a complexidade de tempo polinomial dos algoritmos Primal - Afim e Dual - Afim pode ser reestabelecida incorporando uma função barreira logarítmica no contorno definido no octante positivo para impedir que uma solução interior fique "presa" à fronteira do problema (possivelmente um vértice). Ao longo desta direção, um terceiro variante, o assim chamado algoritmo Primal - Dual de pontos interiores, foi apresentado e analisado por M. Kojima, S. Mizuno, e A. Yoshise [KOJIMA *et al.*, 1987] e também por R. Monteiro, I. Adler, e M. G. C. Resende [MONTEIRO *et al.*, 1990]. A introdução teórica da complexidade de tempo polinomial foi feita com sucesso.

A demonstração teórica da complexidade de tempo polinomial foi feita com sucesso pelos autores citados em [MONTEIRO *et al.*, 1990] e [KOJIMA *et al.*, 1989]. Este algoritmo explora uma função potencial Primal - Dual variante da função barreira logarítmica, denominada de função potencial. Os métodos inseridos na metodologia Primal - Dual de pontos interiores, principalmente aqueles propostos em [KOJIMA *et al.*, 1989], [MONTEIRO *et al.*, 1989], [MONTEIRO *et al.*, 1990] e, amplamente investigados em [FANG e PUTHENPURA, 1993], tem sido explorados, nesta última década, para solucionar problemas de programação matemática linear, não-linear e inteira em diversas áreas de pesquisa, tais como, a área de engenharia.

O procedimento do tipo Previsor-Corretor definido inicialmente por Mehrota [MEHROTA e SUN, 1990] e implementado por Lustig em [LUSTIG *et al.*, 1995], explorava, no passo previsor as direções variantes do método Primal-Afim de pontos interiores, para, no passo corretor, "centralizar" as soluções obtidas explorando-se a função potencial relacionada às penalizações do tipo Barreira-Logarítmica, o que melhorou sensivelmente o desempenho do método Primal - Dual de pontos interiores. Esta estratégia foi revista e modificada por [WU *et al.*, 1994], em 1994 e aplicada com sucesso em Problemas de Fluxo de Potência Ótimo. Em [WU *et al.*, 1994], já no passo previsor, os autores utilizavam a penalização do tipo Barreira-Logarítmica, o método de Newton e aproximações de primeira ordem para a determinação das direções de busca e da solução aproximada. No passo corretor, consideravam-se aproximações de segunda ordem para refinar as soluções obtidas no passo previsor.

Neste capítulo, introduz-se e investiga-se os mencionados métodos Primal - Dual de pontos interiores, abordando a teoria dos mesmos, seus esquemas iterativos e suas implementações computacionais. As atenções serão focalizadas nos três elementos básicos de um esquema iterativo, a saber:

- (1) como começar;
- (2) como sintetizar uma boa direção de busca;
- (3) como parar um algoritmo iterativo.

4.2 - Fundamentos do Algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores

Da mesma forma que no procedimento do algoritmo Primal - Dual Simplex, em adição ao Primal - Afim e Dual - Afim, pode ser definido um algoritmo Primal - Dual de pontos interiores. O algoritmo Primal - Dual de pontos interiores é definido utilizando-se de procedimentos baseados na função barreira logarítmica. A idéia de se usar o método da função barreira logarítmica para problemas de programação convexa pôde ser feita baseando-se no método de [Frisch, 1955]. Depois que o algoritmo de Kamarkar foi introduzido em 1984, o método da função barreira logarítmica foi reconsiderado para resolver problemas de programação linear. P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, J. A. Tomlin, e M. H. Wright [WRIGTH, 1997] usaram este método para desenvolver um método de barreira projetada de Newton e mostraram uma equivalência ao algoritmo projetivo de Kamarkar, em 1985. N. Megiddo forneceu uma análise teórica para o método de barreira logarítmica e propôs uma estrutura Primal - Dual em 1989. Usando esta estrutura, [KOJIMA et al - 1989] apresentaram um algoritmo Primal - Dual de tempo polinomial para problemas de programação linear em 1987. Estes mostraram que seu algoritmo convergia em $O(nL)$ iterações exigindo $O(n^3)$ operações aritméticas por iteração. Daí a complexidade total do mesmo ser de $O(n^4L)$ operações aritméticas. Mais tarde, R. C. Monteiro e I. Adler [MONTEIRO e ADLER - 1989] refinaram o algoritmo Primal - Dual para convergir em $O(\sqrt{n}L)$ iterações com $O(n^{2.5})$ operações aritméticas, exigidas por iteração, resultando num total de $O(n^3L)$ operações aritméticas.

4.2.1 - Idéias básicas do Algoritmo Primal - Dual

Considere o PL na forma padrão:

$$\text{Minimizar} \quad c^T x$$

$$\text{Sujeito a: } Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (\text{P})$$

e o seu dual

$$\text{Maximizar} \quad b^T w$$

$$\text{Sujeito a} \quad A^T w + s = c, \quad s \geq 0 \quad (\text{D})$$

Impomos as seguintes hipóteses para o algoritmo Primal - Dual:

(A1) O conjunto $S \equiv \{x \in R^n / Ax = b, x > 0\}$ é não vazio.

(A2) O conjunto $T \equiv \{(w; s) \in R^m \times R^n / A^T w + s = c, s > 0\}$ é não vazio.

(A3) A matriz de restrições A tem posto completo e igual a m .

Sob estas suposições, têm-se do teorema da dualidade que os problemas (P) e (D) têm soluções ótimas com um valor comum. Além disso, os conjuntos das soluções ótimas de (P) e (D) são limitados.

Note que, para $x > 0$ em (P), pode-se aplicar a técnica da função barreira logarítmica e considerar a seguinte família de problemas de programação não-lineares (P_μ) :

$$\text{Minimizar} \quad c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j$$

$$\text{Sujeito a: } Ax = b,$$

onde $\mu > 0$ é um parâmetro de barreira ou de penalidade.

Em relação a (P_μ) têm-se o seguinte problema dual (D_μ) :

$$\text{Maximizar} \quad b^T w + \mu \sum_{j=1}^n \ln s_j$$

$$\text{Sujeito a} \quad A^T w + s = c,$$

Como $\mu \rightarrow 0$, espera-se que as soluções ótimas do problema (P_μ) converjam a uma solução ótima do problema de programação linear (P) e ao problema dual (D). Afim de provar isto, primeiramente observe que a função objetivo do problema (P_μ) é uma função estritamente convexa, daí sabe-se que (P_μ) tem pelo menos um mínimo global. A teoria de programação convexa implica que o mínimo

global, se existir, está caracterizado completamente pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$Ax = b, \quad x > 0 \quad (\text{factibilidade primal}) \quad (4.1a)$$

$$A^T w + s = c, \quad s > 0 \quad (\text{factibilidade dual}) \quad (4.1b)$$

$$XSe - \mu e = 0 \quad (\text{folgas complementares}) \quad (4.1c)$$

onde X e S são matrizes diagonais as quais utilizam as componentes dos vetores x e s como elementos diagonais, respectivamente.

Sob as hipóteses (A1) e (A2) e admitindo que (P) tem uma região viável limitada, então o problema (P_μ) é viável e possui um único mínimo em $x(\mu)$, para cada $\mu > 0$. Conseqüentemente, o sistema (4.1) tem uma única solução $(x; w; s) \in R^n \times R^m \times R^n$. Daí tem-se o seguinte lema:

Lema 4.1. Sob as hipóteses (A1) e (A2), o problema (P_μ) e o sistema (4.1) tem uma única solução.

Observe que o sistema (4.1) fornece também as condições necessárias e suficientes (as condições de KKT) para $(x(\mu); s(\mu))$ sendo $s(\mu)$ uma solução que maximiza o problema (D_μ) .

Note que a Equação (4.1c) pode ser escrita em suas componentes como:

$$x_j s_j = \mu, \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (4.1c')$$

Conseqüentemente, quando a suposição (A3) é imposta, x determina unicamente w das Equações (4.1c') e (4.1b). Denotando $(x(\mu); s(\mu); w(\mu))$ como a solução única do sistema (4.1) para cada $\mu > 0$, então, têm-se que $x(\mu) \in S$ e $(x(\mu); s(\mu)) \in T$. Além disso, a folga complementar transforma-se em:

$$\begin{aligned} g(\mu) &= c^T x(\mu) - b^T w(\mu) \\ &= (c^T - w(\mu)^T A) x(\mu) \\ &= s(\mu)^T x(\mu) = n\mu \end{aligned} \quad (4.2)$$

Conseqüentemente, como $\mu \rightarrow 0$, a folga complementar $g(\mu)$ converge para zero. Isto implica que $x(\mu)$ e $w(\mu)$ convergem às soluções ótimas dos problemas (P) e (D), respectivamente. Daí tem-se o seguinte resultado:

Lema 4.2. Sob as hipóteses (A1) - (A3), se $\mu \rightarrow 0$, $x(\mu)$ converge à solução ótima do problema (P) e $w(\mu)$ converge à solução ótima do problema (D).

Para $\mu > 0$, denotamos Γ como a curva, ou trajeto, que representa as soluções do sistema (4.1), isto é,

$$\Gamma = \{(x(\mu); w(\mu); s(\mu)) \mid (x(\mu); w(\mu); s(\mu)) \text{ satisfaz (4.1), para todo } \mu > 0\} \quad (4.3)$$

Quando $\mu \rightarrow 0$, a curva definida por Γ conduz à solução ótima primal x^* e à solução ótima dual $(w^*; s^*)$. Assim, seguir a trajetória descrita por Γ serviu para se definir uma classe de métodos Primal - Dual de pontos interiores, para programação linear, denominados de métodos de trajetória central (*path-following methods*). Por esta razão, pode-se classificar a aproximação Primal - Dual como uma aproximação de trajetória central.

Dado um ponto inicial $(x^0; w^0; s^0) \in S \times T$, o algoritmo Primal - Dual gera uma seqüência de pontos $(x^k; w^k; s^k) \in S \times T$ pela escolha apropriada de uma direção de busca $(d_x^k; d_w^k; d_s^k)$ e comprimento de passo β^k , em cada iteração. Para medir um "desvio" da curva Γ em cada $(x^k; w^k; s^k)$, introduz-se as seguintes notações, para $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\phi_i^k = x_i^k s_i^k, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4a)$$

$$\phi_{ave}^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i^k \quad \begin{array}{l} \text{(média aritmética da soma} \\ \text{dos valores de } \phi_i^k) \end{array} \quad (4.4b)$$

$$\phi_{\min}^k = \min\{\phi_i^k; \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.4c)$$

$$\theta^k = \frac{\phi_{ave}^k}{\phi_{\min}^k} \quad (4.4d)$$

Obviamente, vê-se que $\theta^k \geq 1$ e $(x^k; w^k; s^k) \in \Gamma$ se, e somente se, $\theta^k = 1$.

Posteriormente vê-se que quando o desvio θ^0 no ponto inicial $(x^0; w^0; s^0) \in S \times T$ é

grande, o algoritmo Primal - Dual reduz não somente a folga complementar, como também o desvio. Com os parâmetros apropriadamente escolhidos, a seqüência de pontos $\{(x^k; w^k; s^k) \in S \times T\}$ gerada pelo algoritmo Primal - Dual satisfaz as desigualdades:

$$\sum_{i=1}^m x_i^{k+1} s_i^{k+1} = c^T x^{k+1} - b^T w^{k+1} = (1 - \frac{2}{n\theta^k})(c^T x^k - b^T w^k) \quad (4.5a)$$

$$\theta^{k+1} - 2 \leq (1 - \frac{1}{n+1})(\theta^k - 2). \quad \text{se } 2 < \theta^k \quad (4.5b)$$

$$\theta^{k+1} \leq 2 \quad \text{se } \theta^k \leq 2 \quad (4.5c)$$

A primeira desigualdade (5.5a) assegura que a folga complementar diminui monotonicamente. Com as duas desigualdades restantes observa-se que o desvio θ^k torna-se menor que 3 em no máximo $O(n \ln \theta^0)$ iterações, e então, a folga complementar converge para zero linearmente, com a taxa de convergência de no mínimo $\left(1 - \frac{2}{3n}\right)$.

4.2.2 - Direção e Comprimento do Passo de Movimento.

Agora há condição para se desenvolver as etapas do algoritmo Primal - Dual. Inicia-se sintetizando a direção de translação (direção de busca) $(d_x^k; d_w^k; d_s^k)$ em um ponto atual $(x^k; w^k; s^k)$, tal que, a translação é feita ao longo da curva Γ para um novo ponto $(x^{k+1}; w^{k+1}; s^{k+1})$. Esta tarefa é aquela de aplicar o método de Newton ao sistema da equação (4.1a) - (4.1c).

Direção de Newton. O Método de Newton é um dos mais usados, geralmente, para encontrar uma solução de um sistema de equações não-lineares através de sucessivas aproximações do sistema por equações lineares. Para ser mais específico, suponha que $F(z)=0$ é uma aplicação não-linear em R^p e necessita-se encontrar um $z^* \in R^p$ tal que $F(z^*)=0$. Usando a aproximação da série de Taylor (para $z = z^k$), Obtém-se uma aproximação linear:

$$F(z^k + \Delta z) \approx F(z^k) + J(z^k)\Delta z \quad (4.6)$$

onde $J(z^k)$ é a matriz Jacobiana cujo (i, j) -ésimo elementos é dado por

$$\left[\frac{\partial F_i(z)}{\partial z_j} \right]_{z=z^*}$$

e Δz é um vetor da translação. Como o lado esquerdo de (4.6) avalia uma solução para $F(z) = 0$, tem-se um sistema linear:

$$J(z^k)\Delta z = -F(z^k) \quad (4.7)$$

Um vetor solução da equação (4.7) fornece uma iteração de Newton de z^k a $z^{k+1} = z^k + d_z^k$, com uma direção de Newton d_z^k e um comprimento do passo unitário. Quando $J(z^*)$ é não-singular e o ponto inicial z^0 é "próximo o bastante" de z^* , o método de Newton converge quadraticamente para z^* . Mas esta taxa de convergência é válida somente para um comportamento "local". Para uma aplicação não-linear geral $F(z)$, se z^0 não for próximo o bastante de z^* , a iteração de Newton pode divergir.

Focalizando-se no sistema não-linear (4.1a-c), supõe-se que se está em um ponto $(x^k; w^k; s^k)$ para algum $\mu^k > 0$, tal que $x^k \cdot s^k > 0$. A direção de Newton $(d_x^k; d_w^k; d_s^k)$ é determinada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S_k & 0 & X_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_s^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Ax^k - b \\ A^T w^k + s^k - c \\ X_k S_k e - \mu^k e \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde X_k e S_k são as matrizes diagonais formadas por x_i^k e s_i^k , respectivamente, como seus elementos diagonais. De (4.8) tem-se que:

$$Ad_x^k = -(Ax^k - b)$$

$$A^T d_w^k + d_s^k = c - A^T w^k - s^k$$

$$S_k d_x^k + X_k d_s^k = v^k = \mu^k e - X_k S_k e$$

Por simplificação de notações, as equações acima são reescritas por:

$$Ad_x^k = t^k \quad (4.9a)$$

$$A^T d_w^k + d_s^k = u^k \quad (4.9b)$$

$$S_k d_x^k + X_k d_s^k = v^k \quad (4.9c)$$

Em que:

$$t^k = b - Ax^k, \quad u^k = c - A^T w^k - s^k \quad \text{e} \quad v^k = \mu^k e - X_k S_k e \quad (4.10)$$

Os termos apresentados em (4.10) são denominados de resíduos gerados pela aproximação de ordem 1 feita para a resolução do sistema (4.8).

Para resolver o sistema (4.9), primeiramente isola-se d_s^k em (4.9c) e depois multiplicam-se ambos os lados da equação obtida por $AX_k S_k^{-1}$. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} AX_k S_k^{-1} d_s^k &= AX_k S_k^{-1} X_k^{-1} v^k - \underbrace{AX_k S_k^{-1} X_k S_k^{-1}}_I d_x^k \\ AX_k S_k^{-1} d_s^k &= AX_k S_k^{-1} \underbrace{X_k^{-1} v^k}_{p^k} - \underbrace{A d_x^k}_{t^k} \\ AX_k S_k^{-1} d_s^k &= AX_k S_k^{-1} p^k + t^k \end{aligned} \quad (4.11)$$

Em seguida multiplicam-se ambos os lados da equação (4.9b) $AX_k S_k^{-1}$, obtendo-se:

$$AX_k S_k^{-1} A^T d_w^k = AX_k S_k^{-1} u^k - AX_k S_k^{-1} d_s^k \quad (4.12)$$

Substituindo-se (4.11) em (4.12) tem-se:

$$AX_k S_k^{-1} A^T d_w^k = AX_k S_k^{-1} u^k - AX_k S_k^{-1} p^k + t^k \quad (4.13)$$

Isolando d_w^k tem-se:

$$\begin{aligned} d_w^k &= [AX_k S_k^{-1} A^T]^{-1} (AX_k S_k^{-1} u^k - AX_k S_k^{-1} p^k + t^k) \\ d_w^k &= [AX_k S_k^{-1} A^T]^{-1} (AX_k S_k^{-1} (u^k - p^k) + t^k) \end{aligned}$$

Uma vez que d_w^k é obtido, d_x^k e d_s^k podem ser prontamente calculados.

Para o cálculo de d_s^k , isola-se a mesma da equação (4.9c) e assim tem-se:

$$S_k d_x^k + X_k d_s^k = v^k$$

$$d_x^k = S_k^{-1}v^k - S_k^{-1}X_k d_s^k$$

$$d_x^k = S_k^{-1}(v^k - X_k d_s^k)$$

Já para o cálculo de d_s^k isola-se a mesma da equação (4.9b) e assim tem-se:

$$A^T d_w^k + d_s^k = u^k$$

$$d_s^k = u^k - A^T d_w^k$$

Logo as direções são calculadas através das fórmulas:

$$d_w^k = [AX_k S_k^{-1} A^T]^{-1} (AX_k S_k^{-1}(u^k - p^k) + t^k) \quad (4.14a)$$

$$d_s^k = u^k - A^T d_w^k \quad (4.14b)$$

$$d_x^k = S_k^{-1}(v^k - X_k d_s^k) \quad (4.14c)$$

Novamente, para $(x^k; w^k; s^k) \in S \times T$, as equações (4.14a) a (4.14c) são simplificadas por:

$$d_w^k = -[A\hat{D}_k^2 A^T]^{-1} A S_k^{-1} v^k \quad (4.15a)$$

$$d_s^k = -A^T d_w^k \quad (4.15b)$$

$$d_x^k = S_k^{-1}[v^k - X_k d_s^k] \quad (4.15c)$$

em que $\hat{D}_k^2 = X_k S_k^{-1}$ e $\hat{D}_k = \text{diag}(\sqrt{x^k / s^k})$

É importante notar que d_x^k , d_w^k e d_s^k em (4.15) são determinadas correlativamente. Denotando-se o vetor:

$$r^k(\mu) = X_k^{-1} \hat{D}_k v^k(\mu) \quad (4.16a)$$

e a matriz

$$Q = \hat{D}_k A^T (A \hat{D}_k^2 A^T)^{-1} A \hat{D}_k$$

então $(d_x^k; d_w^k; d_s^k)$ podem ser reescritas como:

$$d_w^k = \hat{D}_k (I - Q) r^k(\mu) \quad (4.15a')$$

$$d_s^k = -(A \hat{D}_k^2 A^T)^{-1} A \hat{D}_k r^k(\mu) \quad (4.15b')$$

$$d_x^k = \hat{D}_k^{-1} Q r^k(\mu) \quad (4.15c')$$

Desde que a matriz Q é a matriz projeção ortogonal no espaço coluna da matriz $\hat{D}_k A^T$, vê-se que:

$$\hat{D}_k^2 d_x^k + \hat{D}_k d_s^k = r^k(\mu) \quad (4.16b)$$

$$(d_x^k)^T d_s^k = (\hat{D}_k^2 d_s^k)^T \hat{D}_k d_s^k = 0 \quad (4.16c)$$

Após ter obtido uma direção de Newton na k -ésima iteração, o algoritmo Primal - Dual determina um novo ponto de acordo com a seguinte equação:

$$x^{k+1} = x^k + \beta^k d_x^k$$

$$w^{k+1} = w^k + \beta^k d_w^k$$

$$s^{k+1} = s^k + \beta^k d_s^k$$

com um comprimento do passo β^k apropriadamente escolhido na k -ésima iteração tal que, $x^{k+1} \in S$ e $(w^{k+1}; s^{k+1}) \in T$.

Comprimento do passo e parâmetro de penalidade. Quando $(x^k; w^k; s^k) \in S \times T$, o algoritmo Primal - Dual necessita de dois parâmetros σ e τ , tal que $0 \leq \tau < \sigma < 1$, o primeiro para controlar o parâmetro de penalidade (ou barreira) μ^k e o segundo, para controlar o comprimento do passo β^k na k -ésima iteração.

Para o parâmetro de penalidade, recordando as notações definidas em (4.4), desde que deseja-se reduzir a folga complementar, $n\phi_{ave}^k$, pode-se escolher o parâmetro de penalidade para ser um número menor, ajustando:

$$\mu^k = \frac{\sigma \phi_{ave}^k}{n} \quad (4.17)$$

Desta maneira, a definição (4.10) implica que $v^k \leq 0$.

Para o comprimento do passo β^k , a escolha é feita por um valor próximo das folgas complementares. Note que a Equação (4.9c) e (4.10) implicam que $x_i^k d_{s_i}^k + s_i^k d_{x_i}^k = \mu^k - \phi_i^k$. Daí a folga complementar varia quadraticamente nos termos do comprimento do passo β , desde que

$$\begin{aligned} x_i^{k+1}(\beta)s_i^{k+1}(\beta) &= \phi_i^k(\beta) \equiv (x_i^k + \beta d_{x_i}^k)(s_i^k + \beta d_{s_i}^k) \\ &= \phi_i^k + \beta(\mu^k - \phi_i^k) + \beta^2(d_{x_i}^k d_{s_i}^k), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.18a)$$

Além disso, desde que $(d_x^k)^T d_s^k = 0$, calculando-se a folga complementar média, tem-se que, a folga complementar muda linearmente em β , isto é,

$$\phi_{ave}^k(\beta) = (x_i^k + \beta d_x^k)^T (s_i^k + \beta d_s^k) / n = \phi_{ave}^k + \beta(\mu^k - \phi_{ave}^k) \quad (4.18b)$$

Ignorando o termo quadrático de (4.18a) e reduzindo o valor $\mu^k = \sigma \phi_{ave}^k$ por um fator $\tau < \sigma$, pode-se definir uma função linear:

$$\psi^k(\beta) = \phi_{min}^k + \beta(\tau \phi_{ave}^k - \phi_{min}^k) \quad (4.19)$$

A função $\phi_i^k(\beta)$ pode ser convexa ou côncava dependendo do valor do produto $d_{x_i}^k \cdot d_{s_i}^k$. Para a parte convexa, desde que $d_{x_i}^k \cdot d_{s_i}^k \geq 0$, a curva de $\phi_i^k(\beta)$ está abaixo da curva de $\psi^k(\beta)$ para $0 \leq \beta \leq 1$. Entretanto, uma parte côncava de $\phi_i^k(\beta)$ pode cruzar $\psi^k(\beta)$ como mostrado na Figura 4.3.

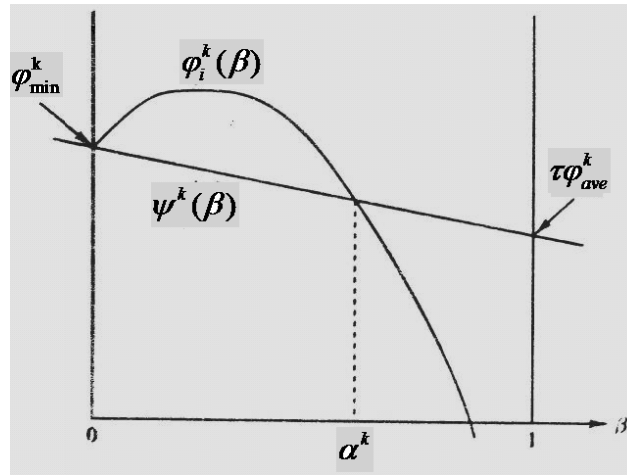


Figura 4.1 - Significado geométrico do comprimento do passo para o Método Primal - Dual

A fim de controlar o parâmetro de desvio θ^k enquanto se reduz a folga complementar, escolhe-se:

$$\alpha^k = \max\{\bar{\beta} / \phi_i^k(\beta) \geq \psi^k(\beta), \text{ para todo } \beta \in (0, \bar{\beta}), \quad 0 < \bar{\beta} < 1, \text{ e } i=1, \dots, n\} \quad (4.20)$$

Então o comprimento do passo β^k na k -ésima iteração é definido por

$$\beta^k = \min\{\alpha^k, 1\} \quad (4.21)$$

O significado geométrico de α^k e β^k é descrito na Figura 4.3. Vê-se claramente na figura que a escolha de β^k depende da escolha de $0 < \tau < 1$ para assegurar a existência de α^k .

Note que, quando $(x^k; w^k; s^k) \in S \times T$, desde que $(d_x^k; d_w^k; d_s^k)$ é uma solução de (4.9), com $t^k = 0$ e $u^k = 0$, sabemos que $Ax^{k+1} = b$ e $A^T w^{k+1} + s^{k+1} = c$. Além disso, a definição de α^k em (4.20) implica, além disso, que, $x^{k+1} > 0$ e $s^{k+1} > 0$. Em outras palavras, $(x^{k+1}; w^{k+1}; s^{k+1}) \in S \times T$.

4.2.3 - Algoritmo Primal - Dual

Agora está-se pronto para enunciar os passos do algoritmo Primal - Dual, como segue:

PASSO 1 - (Inicialização): Ajuste $k = 0$ e encontre uma solução inicial $(x^0; w^0; s^0) \in S \times T$. Seja $\varepsilon > 0$ uma tolerância para a folga complementar e σ, τ , parâmetros de controle, tal que:

$$0 \leq \tau < \sigma < 1;$$

PASSO 2 - (Testando a otimalidade): Se $c^T x^k - b^T w^k < \varepsilon$, então **PARE**. Senão, continue.

PASSO 3 - (encontrando a direção de busca): Defina ϕ_{ave}^k e ϕ_{min}^k por (4.4). Faça $\mu^k = \sigma \phi_{ave}^k$ e $v^k = \mu^k e - X_k S_k e$. Calcule $d_x^k; d_w^k; d_s^k$ de acordo a (4.15).

PASSO 4 (calculando o comprimento do passo): Calcular α^k por (4.20) e β^k por (4.21).

PASSO 5 - (movendo para uma nova solução): Faça

$$x^{k+1} = x^k + \beta^k d_x^k$$

$$w^{k+1} = w^k + \beta^k d_w^k$$

$$s^{k+1} = s^k + \beta^k d_s^k$$

Ajuste $k \rightarrow k + 1$ e vá para o Passo 4.

4.2.4 - Término do Algoritmo em Tempo Polinomial

Ao contrário dos algoritmos Primal - Afim e o Dual - Afim, o algoritmo Primal - Dual é de tempo polinomial. A boa escolha do comprimento de passo β^k em cada iteração conduz aos resultados de convergência:

Teorema 4.3. Se o comprimento do passo $\beta^k < 1$ na k -ésima iteração, então:

$$\beta^k \geq \frac{4(\sigma - \tau)}{n(1 - 2\sigma + \theta^k \sigma^2)} \geq \frac{4(\sigma - \tau)}{n(1 + \sigma^2)\theta^k} \quad (4.22a)$$

$$c^T x^{k+1} - b^T w^{k+1} = (1 - (1 - \sigma)\beta^k)(c^T x^k - b^T w^k) \quad (4.22b)$$

$$\theta^{k+1} - \sigma/\tau \leq (1 - \nu)(\theta^k - \sigma/\tau) \quad \text{se } \sigma/\tau < \theta^k \quad (4.22c)$$

$$\theta^{k+1} \leq \sigma/\tau \quad \text{se } \theta^k \leq \sigma/\tau \quad (4.22d)$$

onde:

$$\nu = \frac{4(\sigma - \tau)\tau}{n(1 + \sigma^2) + 4(\sigma - \tau)\tau}$$

Por outro lado, se $\beta^k = 1$, então:

$$c^T x^{k+1} - b^T w^{k+1} = \sigma(c^T x^k - b^T w^k) \quad (4.23a)$$

$$\theta^{k+1} \leq \sigma/\tau \quad (4.23b)$$

A prova do Teorema 4.1 pode ser vista em [FANG e PUTHENPURA - 1993].

Em vista do Teorema 4.1, se k^* é a iteração mais próxima em que $\theta^{k^*} > \sigma/\tau$, então:

$$\frac{\sigma}{\tau} < \theta^k \leq (1 - \nu)^k \left(\theta^0 - \frac{\sigma}{\tau} \right) + \frac{\sigma}{\tau}, \quad \forall k < k^*$$

e

$$\theta^k \leq \frac{\sigma}{\tau}, \quad \forall k \geq k^*$$

Se k^* não existir, então $\theta^k > \sigma/\tau$, $\forall k$ e

$$\frac{\sigma}{\tau} < \theta^k \leq (1 - \nu)^k \left(\theta^0 - \frac{\sigma}{\tau} \right) + \frac{\sigma}{\tau}, \quad \forall k$$

Observe que, para $0 < \nu < 1$, em ambos os casos tem-se:

$$\theta^k \leq \max\{\sigma/\tau, \theta^0\}, \quad \forall k$$

Então é possível ver que θ^k torna-se menor que $(\sigma/\tau)+1$ em no máximo $O(n \ln \theta^0)$ iterações. Conseqüentemente, segue da equação (4.22a) que:

$$(1-\sigma)\beta^k \geq \frac{4(1-\sigma)(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)\left(\frac{\sigma}{\tau}+1\right)}, \quad \forall k \geq \hat{k} \quad (4.24)$$

Pela desigualdade (4.22b), a folga de dualidade $c^T x^k - b^T w^k$ atinge a precisão dada ε , satisfazendo o critério de parada em no máximo,

$O\left(n \ln \left(\frac{c^T x^0 - b^0 w^0}{\varepsilon}\right)\right)$ iterações adicionais. Daí o algoritmo Primal - Dual é finalizado

em, no máximo, $O(n \ln \theta^0) + O\left(n \ln \left(\frac{c^T x^0 - b^0 w^0}{\varepsilon}\right)\right)$ iterações.

Há várias maneiras de ajustar os parâmetros σ e τ tal que $0 \leq \tau < \sigma < 1$.

Como um caso especial, fazendo-se $\sigma = 1/2$ e $\tau = 1/4$, então:

$$\beta^k \geq \frac{4}{n\theta^k}$$

[FANG e PUTHEMPURA – 1993] observarão, em cada iteração do algoritmo Primal - Dual, a dificuldade computacional está na inversão da matriz $A\hat{D}_k^2 A^T$. Uma implementação direta requer $O(n^3)$ operações elementares para a inversão da matriz e os resultados em uma complexidade computacional $O(n^4 L)$ para o algoritmo Primal - Dual. Definitivamente, esta complexidade pode ser reduzida para melhores e mais eficientes técnicas de implementação, tal como, a técnica de fatorização de Cholesky.

4.2.5 - Iniciando o Algoritmo Primal – Dual

Para se aplicar o algoritmo Primal - Dual, inicia-se com um ponto arbitrário $(x^0; w^0; s^0) \in R^{n+m+n}$ tal que $x^0 > 0$ e $s^0 > 0$.

No caso em que $Ax^0 = b$ e $A^T w^0 + s^0 = c$, sabe-se que $x^0 \in S$ e $(w^0; s^0) \in T$ e tem-se uma solução inicial para o algoritmo Primal - Dual. Senão, considera-se o seguinte par de problemas lineares, primal e dual, artificiais:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && c^T x + \pi x_{n+1} \\
 & \text{Sujeito a} && Ax + (b - Ax^0)x_{n+1} = b \\
 & && (A^T w^0 + s^0 - c)^T x + x_{n+2} = \lambda \\
 & && (x; x_{n+1}; x_{n+2}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{AP}$$

onde x_{n+1} e x_{n+2} são duas variáveis artificiais e π e λ são números positivos suficientemente grandes, para ser especificados posteriormente por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} && b^T w + \lambda w_{n+1} \\
 & \text{Sujeito a:} && A^T w + (A^T w^0 + s^0 - c)w_{n+1} + s = c \\
 & && (b - Ax^0)^T w + s_{n+1} = \pi \\
 & && w_{n+1} + s_{n+2} = 0 \\
 & && (s; s_{n+1}; s_{n+2}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{AD}$$

onde w_{n+1} , s_{n+1} e s_{n+2} são variáveis artificiais

Observe que, escolhendo-se π e λ tal que:

$$\pi > (b - Ax^0)^T w^0 \tag{4.25a}$$

$$\lambda > (A^T w^0 + s^0 - c)^T x^0 \tag{4.25b}$$

então $(x^0; x_{n+1}^0; x_{n+2}^0)$ e $(w^0; w_{n+1}^0; s^0; s_{n+1}^0; s_{n+2}^0)$ são soluções factíveis aos problemas artificiais (AP) e (AD), respectivamente, onde

$$x_{n+1}^0 = 1$$

$$x_{n+2}^0 = \lambda - (A^T w^0 + s^0 - c)^T x^0$$

$$w_{n+1}^0 = -1$$

$$s_{n+1}^0 = \pi - (b - Ax^0)^T w^0$$

$$s_{n+2}^0 = 1$$

Neste caso, o algoritmo Primal - Dual pode ser aplicado aos problemas artificiais (AP) e (AD) com uma solução inicial conhecida. Conseqüentemente, as soluções ótimas de (AP) e (AD) estão relativamente próximas àquelas dos problemas originais (P) e (D).

O teorema seguinte descreve esta relação:

Teorema 4.5. Sejam x^* e $(w^*; s^*)$ soluções ótimas dos problemas originais (P) e (D). Em adição a (4.25a) e (4.25b), suponha que:

$$\lambda > (A^T w^0 + s^0 - c)^T x^* \quad (4.25c)$$

e

$$\pi > (b - Ax^0)^T w^* \quad (4.25d)$$

Então as duas condições seguintes são verdadeiras:

(i) Uma solução viável $(\bar{x}; \bar{x}_{n+1}; \bar{x}_{n+2})$ de (AP), minimiza (AP), se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (P) e $\bar{x}_{n+1} = 0$.

(ii) Uma solução viável $(\bar{w}; \bar{w}_{m+1}; \bar{s}; \bar{s}_{n+1}; \bar{s}_{n+2})$ de (AD), maximiza (AD) se, e somente se, $(\bar{w}; \bar{s})$ resolve (D) e $\bar{w}_{m+1} = 0$.

A prova do Teorema 4.4. pode ser encontrada em [FANG e PUTHENPURA - 1993].

4.2.6 - Implementação

Na implementação do algoritmo Primal - Dual, é uma tarefa muito difícil manter $(x^k; w^k; s^k) \in S \times T$ devido aos problemas de arredondamentos numéricos. Também, a escolha dos parâmetros de controle influenciam no desempenho do algoritmo. Muito esforço tem sido dedicado para se conseguir uma versão do algoritmo Primal - Dual para uma implementação prática. Nesta seção, será introduzida uma versão deste algoritmo que permite inicializá-lo com um ponto arbitrário $(x^0; w^0; s^0)$, em que $x^0, s^0 > 0$. Esta versão produz uma seqüência de iterações $\{(x^k; w^k; s^k)\}$, com $x^k, s^k > 0$, a qual leva para uma solução ótima, embora as mesmas não permaneçam ao longo da curva de $S \times T$. É importante saber que, neste momento, não há nenhuma prova rigorosa da convergência para esta versão do algoritmo Primal - Dual, mas este é muito usado em pacotes computacionais.

Direção de busca. Suponha que se tem um ponto $(x^k; w^k; s^k)$ para algum $\mu^k > 0$, tal que $x^k; s^k > 0$. A direção de Newton $(d_x^k; d_w^k; d_s^k)$ é determinada pela Equação (4.14a) - (4.14c). Combinando (4.14a), (4.14b), e (4.14c), tem-se:

$$d_x^k = \mu^k \hat{D}_k P_k \hat{D}_k X_k^{-1} e - \hat{D}_k P_k \hat{D}_k c + \hat{D}_k^2 A^T (A \hat{D}_k^2 A^T)^{-1} t^k \quad (4.26a)$$

onde $\hat{D}_k^2 = X_k S_k^{-1}$ e $P_k = I - \hat{D}_k A^T (A \hat{D}_k^2 A^T)^{-1} A \hat{D}_k$, a qual é a matriz de projeção no espaço nulo da matriz $A \hat{D}_k$.

Se, além disso, é definido:

$$d_{x,\mu}^k = \mu^k \hat{D}_k P_k \hat{D}_k X_k^{-1} e, \quad d_{x,c}^k = -\hat{D}_k P_k \hat{D}_k c \quad \text{e} \quad d_{x,t^k}^k = \hat{D}_k^2 A^T (A \hat{D}_k^2 A^T)^{-1} t^k$$

então (4.26a) transforma-se em:

$$d_x^k = d_{x,\mu}^k + d_{x,c}^k + d_{x,t^k}^k \quad (4.26b)$$

O primeiro termo de (4.26b) é denominado de direção de centragem. O segundo termo é chamado de direção de redução da função objetivo primal. O terceiro termo é chamado de direção de factibilidade, desde que t^k é a medida de factibilidade primal. Note também que $A d_x^k = 0$ e $A d_{x,c}^k = 0$. Daí, estas duas direções estão no espaço nulo da matriz A , e a factibilidade primal é considerada unicamente por d_{x,t^k}^k .

Na prática, iniciando-se com um ponto arbitrário $(x^0; w^0; s^0)$ com $x^0, s^0 > 0$, o valor de t^0 pode ser muito grande, desde que x^0 poderia ser inactivável. Neste caso, o esforço principal do algoritmo será o de encontrar um ponto viável próximo à trajetória central. Uma vez que uma solução viável é encontrada (supondo-se, na k -ésima iteração), o algoritmo tentará manter $t^k = 0$ para todo $k' \geq k$, à exceção do caso em que a factibilidade é perdida devido a erros de truncamento numérico ou a erro de arredondamento. Desta forma, d_{x,t^k}^k tenderá a zero sempre que $t^k \rightarrow 0$.

De maneira análoga pode-se realizar a análise das direções de busca d_w^k e d_s^k .

Comprimento do passo. Uma vez que a direção de busca é obtida, tem-se a condição de mover-se para um novo ponto $(x^{k+1}; w^{k+1}; s^{k+1})$ com $x^{k+1} > 0$ e $s^{k+1} > 0$.

Sendo assim, considera-se:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_p d_x^k \quad (4.27a)$$

$$w^{k+1} = w^k + \beta_D d_w^k \quad (4.27b)$$

$$s^{k+1} = s^k + \beta_D d_s^k \quad (4.27c)$$

onde β_p e β_D são os comprimentos dos passos nos espaços primal e dual, respectivamente. As exigências de não negatividade de x^{k+1} e s^{k+1} determina a escolha do comprimento do passo β_p e β_D . Uma forma simples de obtê-los é fazer:

$$\beta_p = \text{Min} \left\{ 1, \frac{-\alpha x_i^k}{dx_i^k} \right\} \quad (4.27a)$$

e

$$\beta_D = \text{Min} \left\{ 1, \frac{-\alpha s_i^k}{ds_i^k} \right\} \quad (4.27b)$$

onde $\alpha < 1$, $(d_x^k)_i$ é a i -ésima componente de d_x^k , x_i^k é a i -ésima componente de x^k , $(d_s^k)_i$ é a i -ésima componente de d_s^k , e s_i^k é a i -ésima componente de s^k .

Ajustando os parâmetros de penalidade e o critério de parada.

Observe que a direção de busca na k -ésima iteração é determinada pelo valor do parâmetro de penalidade μ^k . Estritamente falando, a translação descrita acima tem de ser realizada diversas vezes para um valor fixo de μ^k , de modo que os processos de Newton convirjam para a trajetória central ajustadas por μ^k . Entretanto, procedendo-se assim seriam necessários vários passos de Newton para se aproximar da trajetória. Levando-se em conta que, a fim de satisfazer a folga complementar, μ^k tende para zero, conseqüentemente, em implementações práticas, o valor de μ^k é reduzido iteração a iteração e somente uma etapa de Newton é realizada para um valor dado de μ^k , ainda que, não se consiga com este valor permanecer exatamente na trajetória central.

A maneira na qual μ^k pode ser reduzido em cada iteração é sugerida da pelo próprio algoritmo. Da equação (4.1c) vê-se que $\mu = \frac{s^T x}{n}$. Assim, na iteração k os valores de x^k e s^k nos dão uma medida razoavelmente boa do parâmetro de penalidade para a solução corrente e, de acordo com a experiência dos autores [FANG e PUTHENPURA - 1993], às vezes, um valor menor μ^k , dito, $\frac{\sigma[(s^k)^T x^k]}{n}$ com $\sigma < 1$, poderia acelerar a convergência do algoritmo. Houve outras idéias similares relatadas por vários outros autores na escolha de μ^k . Não obstante, o critério simples acima parece trabalhar bem para uma variedade de problemas práticos resolvidos pelos autores.

Tão logo os critérios de parada sejam satisfeitos, pode-se verificar a factibilidade primal, a factibilidade dual, e a folga complementar. Observe que a factibilidade primal é medida por t^k , a factibilidade dual por μ^k e a folga complementar por v^k , como definido por (4.10).

Procedimento Passo a Passo. Como um sumário da discussão feita, fornece-se agora procedimentos, passo a passo, para a implementação do algoritmo Primal - Dual de Ponto Interior.

PASSO1 - (iniciando o algoritmo): Ajuste $k = 0$. Escolha um ponto inicial arbitrário $(x^0; w^0; s^0)$ com $x^0 > 0$ e $s^0 > 0$, e escolha $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 números positivos suficientemente pequenos.

PASSO 2 - (Cálculos intermediários): Calcule

$$\mu_k = \frac{(x^k)^T s^k}{n}, \quad t^k = b - Ax^k, \quad u^k = c - A^T w^k - s^k, \quad v^k = \mu^k e - X_k S_k e, \quad p^k = X_k^{-1} v^k \text{ e}$$

$\hat{D}_k^2 = X_k S_k^{-1}$, onde X_k e S_k são as matrizes diagonais cujas componentes diagonais são x_i^k e s_i^k , respectivamente.

PASSO 3 - (Verificando a otimalidade): Se

$$\mu_k < \varepsilon_1, \quad \frac{\|t\|}{\|b\|+1} < \varepsilon_2, \quad \text{e} \quad \frac{\|u\|}{\|c\|+1} < \varepsilon_3$$

então PARE. A solução é ótima. Caso contrário vá à etapa seguinte.

[Obs.: $\|u\|$ e $\|c\|$ são calculados somente quando as restrições duais são violadas. Se $u = 0$, então não há necessidade de calcular esta medida de otimalidade.]

PASSO 4 - (calculando as direções de translação): Calcule

$$d_w^k = (A\hat{D}_k^2 A^T)^{-1} (A\hat{D}_k^2 (u^k - p^k) + t^k)$$

$$d_s^k = u^k - A^T d_w^k$$

$$d_x^k = \hat{D}_k^2 (p^k - d_s^k)$$

PASSO 5 - (Verificando a ilimitariedade): Se

$$t^k = 0, \quad d_x^k > 0 \quad \text{e} \quad c^T d_x^k < 0$$

então o problema primal (P) é ilimitado. Se

$$u^k = 0, \quad d_s^k > 0 \quad \text{e} \quad b^T d_w^k > 0$$

então o problema dual (D) é ilimitado. Se qualquer um destes casos acontecer, **PARE**. Senão, passe à etapa seguinte.

PASSO 6 - (Encontrando o comprimento do passo): Calcule o comprimento do passo primal e dual

$$\beta_P = \min \left\{ 1, \frac{-\alpha x_i^k}{dx_i^k} \right\}$$

e

$$\beta_D = \min \left\{ 1, \frac{-\alpha s_i^k}{ds_i^k} \right\}$$

onde $\alpha < 1$ (digamos, 0.995)

PASSO 7 - (Determinando um novo ponto): Atualize os vetores solução

$$x^{k+1} \leftarrow x^k + \beta_P d_x^k$$

$$w^{k+1} \leftarrow w^k + \beta_D d_w^k$$

$$s^{k+1} \leftarrow s^k + \beta_D d_s^k$$

Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte para o Passo 4.

O Algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores, visto nesta seção, implementado em Linguagem Pascal 7.0 e é utilizado no exemplo numérico (4.1), dado a seguir, para ilustrar este algoritmo.

Exemplo 4.1

Considera-se o Problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Este, na forma canônica é expresso por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 + x_3 = 15 \\ & x_2 + x_4 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

O seu problema dual é definido por:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 15w_1 + 15w_2 \\ \text{Sujeito a} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{array}$$

Inicia-se com uma escolha arbitrária de $x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $w^0 = [0 \ 0]^T$, $s^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$. Com esta informação, vê-se que X_0 , S_0 e $\hat{D}_0^2$ são todos iguais à matriz identidade I , e $\mu^0 = 1$.

Calcula-se agora:

$$t^0 = b - Ax^0 = [14 \ 13]^T, \quad u^0 = c - A^T w^0 - s^0 = [-3 \ 0 \ -1 \ -1]^T,$$

$$v^0 = \mu^0 e - X_0 S_0 e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad p^0 = X_0^{-1} v^0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Conseqüentemente,

$$d_x^0 = \left(A \hat{D}_0^2 A^T \right)^{-1} \left(A \hat{D}_0^2 (u^0 - p^0) + t^0 \right) = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,4 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

$$d_s^0 = u^0 - A^T d_w^0 = [-9,4 \ -2,8 \ -7,4 \ -10,2]^T$$

$$d_x^0 = \hat{D}_0^2 (p^0 - d_s^0) = [9,4 \ 2,8 \ 7,4 \ 10,2]^T$$

Embora $d_x^0 > 0$ e $c^T d_x^0 < 0$, observa-se por t^0 que o primal é ainda infactível neste momento. Daí prossegue-se os passos do algoritmo.

Escolhe-se $\alpha = 0.995$. Usando a fórmula para calcular os comprimentos do passo, encontramos que $\beta_p = 1,0$ e $\beta_b = \frac{1}{10,30303} = 0,097959$. Conseqüentemente a solução atualizada é:

$$\begin{aligned} x^1 &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T + 1,0 \times [9,4 \ 2,8 \ 7,4 \ 10,2]^T \\ &= [10,4 \ 3,8 \ 8,4 \ 11,2]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^1 &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T + 0,097059 \times [-9,4 \ -2,8 \ -7,4 \ -10,2]^T \\ &= [0,08765 \ 0,72824 \ 0,28176 \ 0,00999]^T. \end{aligned}$$

$$w^1 = [0 \ 0]^T + 0,097059 \times [6,4 \ 9,2]^T = [0,62118 \ 0,89294]^T$$

A nova solução x^1 já é viável primal, a qual concorda com as discussões precedentes. Realizando mais iterações determina-se a solução ótima:

$$x^* = [30 \ 15 \ 0 \ 0]^T, \quad w^* = [-2 \ -1]^T \text{ e } s^* = [0 \ 0 \ 2 \ 1]^T$$

A tabela de resultados é feita a partir do ponto $x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $w^0 = [0 \ 0]^T$ e $s^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

Os resultados obtidos e a interpretação geométrica do problema dado e das soluções encontradas pelo algoritmo, são vistas, respectivamente, na Tabela 4.1 e na Figura 4.2.

Tabela 4.1 - Resultados obtidos pelo Algoritmo Primal - Dual de Pontos Interiores

ITERAÇÃO	x_i^k	w_i^k	F. Objetivo
1	1,9211078431		
	1,2743725490	-0,62713725490	
	1,7251274510	-0,90150980392	-2,5678431373
	1,9995000000		
2	4,1686432021		
	1,3646996807	-0,41022118941	
	0,94817351297	-0,78207052864	-4,9725867235
	3,1908375660		
3	8,2861628984		
	1,9872467281	-0,53324050754	
	0,0047408675	-0,46644541713	-14,585079069
	4,9336155709		
4	14,077168253		
	7,3348158488	-0,60949508777	
	0,0054905422	-0,38773135740	-20,819520656
	0,0024668077		
5	23,356232468		
	11,784868297	-1,4230522398	
	0,00309055363	-0,42305360564	-34,927596640
	0,03426678921		
6	2,8704845732		
	1,4378350344	-2,0002700106	
	0,00404590917	-1,0009569722	-43,031341121
	0,00001713339		
7	2,9990354696		
	14,993571634	-2,0002120691	
	0,00321693878	-1,0006301893	-44,987137757
	0,00642836558		
8	2,9990443356		
	14,993630033	-2,0002125354	
	0,00318667619	-1,0006376512	-44,987256680
	0,00636996742		

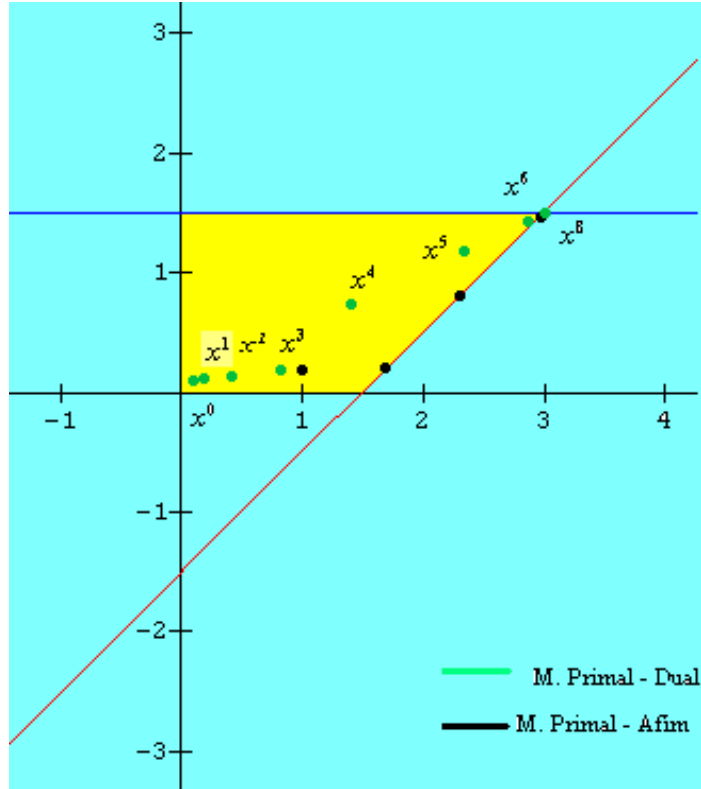


Figura 4.2 - Interpretação geométrica do exemplo 4.3. e das soluções obtidas pelo Algoritmo Primal - Dual e Primal - Afim

4.2.7 - Aceleração através do Método da Série de Potência

Como discutido anteriormente, é ideal realizar diversos passos de Newton para que um parâmetro de penalidade dado esteja na trajetória central, embora seja sabido, que na maioria dos casos, é adequado realizar somente um passo de Newton para cada parâmetro de penalidade. A fim de seguir mais próximo da trajetória central, pode-se considerar o uso do método de aproximação por série de potência como foi feito para o algoritmo Dual - Afim.

Para simplificar a discussão, escolhe-se o menor valor entre β_p e β_D como um comprimento de passo comum β para a iteração primal e dual e focaliza-se em um ponto atual, dito $(x^0; w^0; s^0)$. No limite, quando $\beta \rightarrow 0$, (4.9) pode ser reescrito na seguinte versão contínua:

$$A \frac{dx(\beta)}{d\beta} = t(\beta) \quad (4.29a)$$

$$A^T \frac{dw(\beta)}{d\beta} + \frac{ds(\beta)}{d\beta} = u(\beta) \quad (4.29b)$$

$$S(\beta) \frac{dx(\beta)}{d\beta} + X(\beta) \frac{ds(\beta)}{d\beta} = v(\beta) \quad (4.29c)$$

tal que $x(0) = x^0$, $w(0) = w^0$ e $s(0) = s^0$, onde $t(\beta) = b - Ax(\beta)$, $u(\beta) = c - A^T w(\beta) - s(\beta)$ e $v(\beta) = \mu e - X(\beta)S(\beta)e$ e $X(\beta)$ e $S(\beta)$ são as matrizes diagonais cujos elementos diagonais são $x_j(\beta)$ e $s_j(\beta)$, respectivamente.

Agora, o que se tem a fazer é encontrar uma solução do sistema descrito pela Equação (4.29) na forma de uma série de potência truncada. Isto pode ser realizado exatamente como o feito para o algoritmo Dual - Afim. A única diferença é que, além das expansões de $w(\beta)$ e $s(\beta)$ necessita-se considerar também as expansões de $x(\beta)$, $t(\beta)$, $u(\beta)$ e $v(\beta)$ em torno de $\beta = 0$.

Baseado na experiência de [FANG e PUTHENPURA - 1993], nota-se as seguintes características do algoritmo Primal - Dual de Ponto Interior:

1. O algoritmo é essencialmente um método de Fase Um.
2. O esforço computacional por iteração é relativamente o mesmo que o do algoritmo Primal - Afim ou Dual - Afim.
3. A melhoria na taxa de convergência obtida pela execução da série de potência ao algoritmo Primal - Dual não é tão significativa como a obtida no algoritmo Dual - Afim.
4. Devido à natureza de auto-correção a cada passo (ao menos, no caso de restaurar a factibilidade que pode ter sido perdida devido aos erros de arredondamento numéricos), o algoritmo Primal - Dual é numericamente robusto e computacionalmente apresenta melhor desempenho que os algoritmos, Primal - Afim e Dual - Afim.

4.3 - Fundamentos do Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas

Nesta sessão faz-se uma extensão do Método Primal - Dual para *Variáveis Canalizadas*. O desenvolvimento da extensão citada é feito baseando-se no trabalho realizado em [PINTO, 1999].

Os métodos Primais - Duais são variações do Método de Newton obtidas a partir de modificações na maneira de calcular a direção de busca (d_x^k, d_w^k, d_s^k) , e o parâmetro que controla o tamanho do passo em cada iteração α_k . O valor de α_k pode atuar no algoritmo de dois modos:

- Mantendo o novo ponto no interior da região viável e,
- Cuidando para que (x, z) permaneça “longe” das fronteiras do quadrante não-negativo, $(x, z) \geq 0$. Direções calculadas a partir de pontos próximos a este quadrante tendem a ser distorcidas levando a pouco, se algum, progresso [WRIGHT, 1997].

A idéia da *trajetória central* desempenha um papel fundamental no tratamento das questões acima.

Considere o problema primal:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a } Ax = b \\ & 0 \leq x \leq u, \end{aligned} \quad (\text{PL})$$

em que $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x, c, u \in R^n$. Observe que não impõem-se uma restrição do tipo $l \leq x \leq u$ pois ela pode ser facilmente transformada em $0 \leq x \leq u$ (será discutido posteriormente).

Transformando a inequação $x \leq u$, reescreve-se o problema (PL) como segue:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } Ax = b \\ & x + z = u \\ & x \geq 0 \\ & z \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{PPL})$$

O problema dual de (PPL) é:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } b^T w - u^T y \\ & \text{Sujeito a } A^T w + s - y = c \\ & s \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{PPD})$$

onde $w \in R^m$ e $s, y \in R^n$.

Para um escalar $\mu > 0$, é incorporado ao (PPL) uma função barreira logarítmica resultando no seguinte problema de otimização não-linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & F_\mu(x) = c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \ln x_j - \mu \sum_{j=1}^n \ln z_j \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x + z = u \end{aligned} \quad (\text{PPL}\mu)$$

O problema dual de (PPL μ) é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & F_\mu(w) = b^T w - u^T y + \mu \sum_{j=1}^n \ln s_j + \mu \sum_{j=1}^n \ln y_j \\ \text{Sujeito a} \quad & A^T w - y + s = c \end{aligned} \quad (\text{PPD}\mu)$$

As condições de otimalidade de KKT para os problemas (PPL) e (PPD) são:

$$A^T w + s - y = c \quad (4.30a)$$

$$Ax = b \quad (4.30b)$$

$$x + z = u \quad (4.30c)$$

$$ZYe - \mu e = 0 \quad (4.30d)$$

$$XSe - \mu e = 0 \quad (4.30e)$$

onde X , Z , S e Y são matrizes diagonais, $e = (1, \dots, 1)^T$ e μ a métrica dual ou parâmetro de ajuste à curva definida pela trajetória central.

O conjunto solução, Ω^0 , para os problemas (PPL) e (PPD) será denotado aqui como:

$$\Omega^0 = \{(x, w, z, y, s) / A^T w + s - y = c, Ax = b, x + z = u, (x, z, y, s) > 0\}.$$

As equações (4.30a) à (4.30e) podem ser expressas conforme o seguinte sistema:

$$F(h) = F(x, w, z, y, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T w + s - y - c \\ x + z - u \\ ZYe \\ XSe \end{bmatrix} = 0 \quad (4.31a)$$

Considerando-se as novas variáveis dos problema definidas a partir de uma iteração k por:

$$\begin{pmatrix} x \\ w \\ z \\ y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ w^{k+1} \\ z^{k+1} \\ y^{k+1} \\ s^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k + d_x^k \\ w^k + d_w^k \\ z^k + d_z^k \\ y^k + d_y^k \\ s^k + d_s^k \end{pmatrix}. \quad (4.31b)$$

Usando a aproximação linear da Série de Taylor de Ordem 1 para o sistema definido em (4.31a), obtém-se:

$$F(x, w, z, y, s) = F(h^{(k)}) + J(h^{(k)})d^{(k)} = 0. \quad (4.31c)$$

onde $h^{(k)} = (x^k, w^k, z^k, y^k, s^k)^T$, $d^{(k)} = (d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_y^k, d_s^k)^T$ e $J(h^{(k)})$ é a matriz de Jacobiana, cujo (i, j) -ésimo elemento é dado por:

$$\left[\frac{\partial F_i(h)}{\partial h_j} \right]_{h=h^k}$$

4.3.1 - Direções e Comprimento do Passo de Movimento

Supondo em um passo k que as condições de otimalidade (4.30) satisfaçam a viabilidade primal e dual.

A definição do novo ponto, na iteração $k+1$, depende diretamente das direções de movimento e comprimento de passo nesta direção.

Sem se preocupar, em uma primeira análise, com o comprimento do passo, considera-se, na iteração $k+1$, o novo ponto definido em (4.31b):

Assim, necessita-se determinar a direção $d^{(k)} = (d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_y^k, d_s^k)^T$ para obter-se o novo ponto.

Seguindo-se os passos do Método de Newton e considerando (4.31b) e (4.31c), explicitamente, a direção de movimento $d^{(k)}$ pode ser obtida por:

$$\begin{pmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_z^k \\ d_y^k \\ d_s^k \end{pmatrix} = -J^{-1}(x^k, w^k, z^k, y^k, s) F(x^k, w^k, z^k, y^k, s). \quad (4.32a)$$

Mas não é usual, na prática, determinar-se $d^{(k)}$ através de (4.32a), pois a inversão de $J(h^{(k)})$ é inviável computacionalmente. Assim, determina-se $d^{(k)}$ resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$J(h^{(k)})d^{(k)} = -F(h^{(k)}). \quad (4.32b)$$

É imediato que:

$$J(h^{(k)}) = J(x^k, w^k, z^k, y^k, s) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & Z & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}. \quad (4.32c)$$

Considerando-se (4.32c), então, reescreve-se (4.32b) da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & Z & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_z^k \\ d_y^k \\ d_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \\ u^k \\ f^k \\ q^k \\ v^k \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

em que, $t^k = b - Ax^k$; $u^k = c - A^T w^k - s^k + y^k$; $f^k = r - x^k - z^k$; $q^k = \mu^k e - Z_k Y_k e$; $v^k = \mu^k e - X_k S_k e$; são resíduos da aproximação linear feita.

Resolver o sistema linear (4.33) não é usual devido à estrutura esparsa e de blocos da matriz. Assim, calcula-se d_x^k , d_w^k , d_z^k , d_y^k e d_s^k separadamente através das seguintes equações:

$$A d_x^k = t^k \quad (4.34a)$$

$$A^T d_w^k + d_s^k - d_y^k = u^k \quad (4.34b)$$

$$d_x^k + d_z^k = f^k \quad (4.34c)$$

$$Y_k d_z^k + Z_k d_y^k = q^k \quad (4.34d)$$

$$S_k d_x^k + X_k d_s^k = v^k \quad (4.34e)$$

Desde que, em uma iteração k , a viabilidade depende de $x^k + z^k = r$, então para as novas soluções x^{k+1} e z^{k+1} deve-se garantir que $x^{k+1} + z^{k+1} = r$

Considerando-se $x^{k+1} = x^k + d_x^k$ e $z^{k+1} = z^k + d_z^k$, chega-se à condição:

$$d_x^k + d_z^k = f^k$$

Portanto,

$$d_z^k = -d_x^k + f^k \quad (4.35a)$$

Agora, isola-se d_y^k e d_s^k de (4.34 d) e (4.34e), respectivamente:

$$Y_k d_z^k + Z_k d_y^k = q^k$$

$$d_y^k = Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k) \quad (4.35b)$$

$$S_k d_x^k + X_k d_s^k = v^k$$

$$d_s^k = X_k^{-1}(v^k - S_k d_x^k) \quad (4.35c)$$

Combinando-se os resultados encontrados em (4.35a), (4.35b) e (4.35c) com aqueles vistos em (4.5), são determinados as direções de movimento d_w^k e d_x^k

$$A^T d_w^k + d_s^k - d_y^k = u^k$$

$$A^T d_w^k + X_k^{-1}(v^k - S_k d_x^k) - Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k) = u^k$$

então usando a (4.35a) tem-se:

$$A^T d_w^k + X_k^{-1}v^k - X_k^{-1}S_k d_x^k - Z_k^{-1}q^k + Z_k^{-1}Y_k d_z^k = u^k$$

$$A^T d_w^k + X_k^{-1}v^k - X_k^{-1}S_k d_x^k - Z_k^{-1}q^k - Z_k^{-1}Y_k d_x^k + Z_k^{-1}Y_k f^k = u^k$$

$$A^T d_w^k = u^k - p^k + X_k^{-1}S_k d_x^k - Z_k^{-1}Y_k d_x^k, \text{ em que } p^k = X_k^{-1}v^k - Z_k^{-1}q^k + d_x^k Z_k^{-1}Y_k f^k$$

$$A^T d_w^k = u^k - p^k + (X_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k) d_x^k \quad (4.35d)$$

Tomando $\theta = (X_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k)^{-1}$ e multiplicando $A\theta$ em ambos os lados tem-se:

$$\begin{aligned}
A\theta A^T d_w^k &= A\theta(u^k - p^k)A\theta\theta^{-1}d_x^k \\
A\theta A^T d_w^k &= A\theta(u^k - p^k)A\theta\theta^{-1}\underbrace{Ad_x^k}_{t^k} \\
d_w^k &= (A\theta A^T)^{-1}[A\theta(-p^k + u^k) + t^k]
\end{aligned} \tag{4.35e}$$

Reconsiderando-se (4.35d) tem-se:

$$\begin{aligned}
A^T d_w^k + p^k - X_k^{-1}S_k d_x^k - Z_k^{-1}Y_k d_x^k &= u^k \\
A^T d_w^k + p^k - (X_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k)d_x^k &= u^k
\end{aligned}$$

Tomando $\theta = (X_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k)^{-1}$

$$\begin{aligned}
-\theta^{-1}d_x^k &= u^k - A^T d_w^k - p^k \\
\theta^{-1}d_x^k &= A^T d_w^k + p^k - u^k \\
d_x^k &= \theta(A^T d_w^k + p^k - u^k)
\end{aligned} \tag{4.35f}$$

Resumindo-se os resultados encontrados em (4.35), tem-se:

$$\begin{aligned}
d_w^k &= (A\theta A^T)^{-1}[A\theta(-p^k + u^k) + t^k] \\
d_x^k &= \theta(A^T d_w^k + p^k - u^k) \\
d_z^k &= -d_x^k
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$d_y^k = Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k)$$

$$d_s^k = X_k^{-1}(v^k - S_k d_x^k)$$

Uma vez que a direção de busca é obtida, tem-se a condição de mover-se para um novo ponto $(x^{k+1}; w^{k+1}; z^{k+1}; y^{k+1}; s^{k+1})$ garantindo-se que com $x^{k+1} > 0$, $s^{k+1} > 0$ e $z^{k+1} > 0$. A restrição de não-negatividade destas variáveis requer um controle do passo a ser dado em cada direção obtida, assim, reconsidera-se (4.32a) reescrita por:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_p d_x^k \tag{4.36a}$$

$$w^{k+1} = w^k + \beta_D d_w^k \tag{4.36b}$$

$$s^{k+1} = s^k + \beta_D d_s^k \tag{4.36c}$$

$$y^{k+1} = y^k + \beta_D d_y^k \tag{4.36d}$$

$$z^{k+1} = z^k + \beta_p d_z^k \quad (4.36e)$$

onde β_p e β_D são os comprimentos dos passos nos espaços primal e dual, respectivamente. As exigências de não negatividade de x^{k+1} e s^{k+1} determina a escolha do comprimento do passo β_p e β_D . Uma forma simples, de obtê-los é fazer:

$$\beta_p = \text{Min} \left\{ 1, -\frac{\alpha x_i^k}{d_{x_i}^k}, -\frac{\alpha z_i^k}{d_{z_i}^k} \text{ tal que } d_{x_i}^k, d_{z_i}^k < 0 \right\} \quad (4.37a)$$

e

$$\beta_D = \text{Min} \left\{ 1, -\frac{\alpha s_i^k}{d_{s_i}^k} \text{ tal que } d_{s_i}^k < 0 \right\} \quad (4.37b)$$

onde $\alpha < 1$

4.3.2 - Critério de Parada

Ao contrário do método Simplex, o algoritmo de Ponto Interior Primal - Dual nunca encontra uma solução exata para o problema de PL. Por isso, o algoritmo precisa usar um *critério de parada* para decidir quando a iteração corrente está próxima o suficiente da solução ótima [WRIGHT, 1997].

Muitos algoritmos consideram uma boa solução aproximada àquela solução que possui os resíduos, primal, $t = b - Ax$, dual, $u = c - A^T w - z + y$ e a métrica dual μ suficientemente pequena. Para esse fim pode-se usar medidas relativas diminuindo os problemas de escala dos dados [WRIGHT, 1997]. Testes típicos para uma solução (x, y, z) são:

$$\frac{\|t\|}{\|b\| + 1} = \frac{\|b - Ax\|}{\|b\| + 1} \leq \epsilon_1 \quad (4.38a)$$

$$\frac{\|u\|}{\|c\| + 1} = \frac{\|c - A^T w - s + y\|}{\|c\| + 1} \leq \epsilon_2 \quad (4.38b)$$

$$\frac{|c^T x - (b^T w - u^T y)|}{|c^T x| + 1} \leq \epsilon_3 \quad (4.38c)$$

$$\|v^k\| \leq \varepsilon_4 \quad (4.38d)$$

$$\|q^k\| \leq \varepsilon_4 \quad (4.38e)$$

onde ε_1 , ε_2 , ε_3 e ε_4 são tolerâncias pré-definidas. Naturalmente outros critérios podem ser adotados em concordância com a aplicação a um problema específico. Para outros tipos de critério de parada, veja [FANG e PUTHENPURA, 1993] e [BORCHES e MITCHELL, 1992].

Após a discussão acima pode-se elaborar o algoritmo, visto a seguir.

Algoritmo de Pontos Interiores Primal - Dual para Variáveis Canalizadas

PASSO 1 - (iniciando o algoritmo): Ajuste $k=0$. Escolha um arbitrário $(x^0; w^0; z^0, y^0, s^0) \in \Omega^0$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e ε_4 números positivos suficientemente pequenos.

PASSO2 - (Cálculos intermediários): Calcule

$$t^k = b - Ax^k, \quad u^k = c - A^T w^k - s^k + y^k, \quad v^k = \mu^k e - X_k S_k e, \quad p^k = X_k^{-1} v^k,$$

$q^k = \mu^k e - Y_k Z_k e$ e $\theta = (X_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k)^{-1}$, onde X_k , S_k , Z_k e Y_k são as matrizes diagonais cujas componentes diagonais são x_i^k , s_i^k , z_i^k e y_i^k respectivamente.

Observação: para melhor desempenho e convergência do método é interessante

considerar $\mu_k^1 = \frac{(x^k)^T s^k}{n}$; $\mu_k^2 = \frac{(z^k)^T y^k}{n}$ e fazer $\mu_k = \text{Min}\{\mu_k^1, \mu_k^2\}$

PASSO 3 - (Verificando a otimalidade): Se

$$\mu_k < \varepsilon_1, \quad \frac{\|t\|}{\|b\| + 1} < \varepsilon_2, \quad \frac{\|u\|}{\|c\| + 1} < \varepsilon_3, \quad \|v^k\| \leq \varepsilon_4 \text{ e } \|q^k\| \leq \varepsilon_4$$

então **PARE**. A solução é ótima. Caso contrário vá para a etapa seguinte.

[Obs.: $\|u\|$ e $\|c\|$ são calculados somente quando as restrições duais são violadas. Se $u = 0$, então não há necessidade de calcular esta medida de otimalidade.]

PASSO 4 - (calculando as direções de translação): Calcule d_x^k , d_w^k , d_z^k , d_y^k e d_s^k através de (4.35).

PASSO 5 - (Verificando a ilimitariedade): Se

$$t^k = 0, \quad d_x^k > 0 \text{ e } c^T d_x^k < 0$$

então o problema primal (P) é ilimitado. Se

$$u^k = 0, d_s^k > 0 \text{ e } b^T d_w^k > 0$$

então o problema dual (D) é ilimitado. Se qualquer um destes casos acontecer, **PARE**. Senão, passe à etapa seguinte.

PASSO 6 - (Encontrando o comprimento do passo): Calcule o comprimento do passo primal e dual

$$\beta_P = \text{Min} \left\{ 1, -\frac{\alpha x_i^k}{d_{x_i}^k}, -\frac{\alpha z_i^k}{d_{z_i}^k} \text{ tal que } d_{x_i}^k, d_{z_i}^k < 0 \right\}$$

e

$$\beta_D = \text{Min} \left\{ 1, -\frac{\alpha s_i^k}{d_{s_i}^k} \text{ tal que } d_{s_i}^k < 0 \right\}$$

onde $\alpha < 1$ (utiliza-se $\alpha = 0.995$)

PASSO 7 - (Determinando um novo ponto): Atualize os vetores solução

$$x^{k+1} \leftarrow x^k + \beta_P d_x^k$$

$$w^{k+1} \leftarrow w^k + \beta_D d_w^k$$

$$s^{k+1} \leftarrow s^k + \beta_D d_s^k$$

$$y^{k+1} \leftarrow y^k + \beta_D d_y^k$$

$$z^{k+1} \leftarrow z^k + \beta_P d_z^k$$

Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte para o Passo 5.

Uma implementação computacional do algoritmo visto nesta seção foi feita e aplicada ao exemplo 4.1, seguinte.

Exemplo 4.2

Considera-se o Problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 15 \\ & 0 \leq x_1 \leq 30 \\ & 0 \leq x_2 \leq 15 \end{array}$$

Inicia-se com uma escolha arbitrária de $x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $w^0 = [0 \ 0]^T$, $s^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $y^0 = [3 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ e $u^0 = [30 \ 15 \ 2 \ 2]^T$. Com esta informação, vê-se que X_0 , S_0 e $\hat{D}_0^2$ são todos iguais à matriz identidade I , e $\mu^0 = 1$.

Calcula-se agora:

$$t^0 = b - Ax^0 = [14 \quad 13]^T$$

$$u^0 = c - A^T w^0 - s^0 + y^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$v^0 = \mu^0 e - X_0 S_0 e = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$p^0 = X_0^{-1} v^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$q^0 = \mu^0 e - Y_0 Z_0 e = [-86 \quad 1]^T$$

$$\theta = (X_0^{-1} S_0 + Z_0^{-1} Y_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,90625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente,

$$d_w^k = \begin{bmatrix} 11,471343028 \\ 16,361847733 \end{bmatrix}$$

$$d_x^k = [13,083404619 \quad 4,8190761334 \quad 5,7356715141 \quad 8,1809238666]^T$$

$$d_z^k = [-13,083404619 \quad -4,8190761334 \quad -5,7356715141 \quad -8,1809238666]^T$$

$$d_y^k = [-1,6120615911 \quad 0,071428571429 \quad 5,7356715141 \quad 8,180923866]^T$$

$$d_s^k = [-13,083404619 \quad -4,8190761334 \quad -5,7356715141 \quad -8,1809238666]^T$$

Embora $d_x^0 > 0$ e $c^T d_x^0 < 0$, observa-se por t^0 que o primal é ainda infactível neste momento. Daí prossegue-se os passos do algoritmo.

Escolhe-se $\alpha = 0,995$. Usando a fórmula para calcular os comprimentos do passo, encontramos que $\beta_p = 0,12217446542$ e $\beta_d = 0,076394488215$.

Conseqüentemente a solução atualizada é:

$$x^1 = [2,5984579652 \quad 1,5887680504 \quad 1,700752601 \quad 1,995]^T,$$

$$w^1 = [0,87634737978 \quad 1,2499549838]^T$$

$$y^1 = [2,8768473798 \quad 0,0054567491558 \quad 1,4381736899 \quad 1,6249774919]^T$$

$$s^1 = [0,0005 \quad 0,63187914512 \quad 0,56182631011 \quad 0,3750225080]^T$$

$$z^1 = [27,401542035 \quad 13,41123195 \quad 0,29924739897 \quad 0,0005]^T.$$

A nova solução x^1 já é factível primal, a qual concorda com as discussões precedentes. Realizando mais iterações determina-se a solução ótima:

$$x^* = [30 \ 15 \ 0 \ 0]^T, \quad w^* = [-2 \ -1]^T \text{ e } s^* = [0 \ 0 \ 2 \ 1]^T$$

Os resultados obtidos e a interpretação geométrica do problema dado e das soluções encontradas pelo algoritmo são vistas, respectivamente, na Tabela 4.1 e na Figura 4.3.

Tabela de resultados a partir do ponto $x^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $w^0 = [0 \ 0]^T$ e $s^0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, $y^0 = [3 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ e $u^0 = [30 \ 15 \ 2 \ 2]^T$

Tabela 4.2 - Resultados obtidos pelo Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas

ITERAÇÃO	x_i^k	w_i^k	F. Objetivo
1	2,598457965	-0,8763473797 -1,2499549838	- 3,6081478800
	1,5887680504		
	1,7007526010		
	1,9995000000		
2	29,86299229	- 0,80630955056 -1,8178679067	- 4,5116939860
	14,855658598		
	1,3657116986		
	1,5338114226		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
8	29,999476361	-1,7000346124 - 0,69984483598	- 44,994761995
	14,994765238		
	0,0000162123		
	0,0052347623		
9	29,9998855128	-1,7056292241 - 0,47713125530	- 44,997712873
	14,999997383		
	0,00114225472		
	0,000002617381		

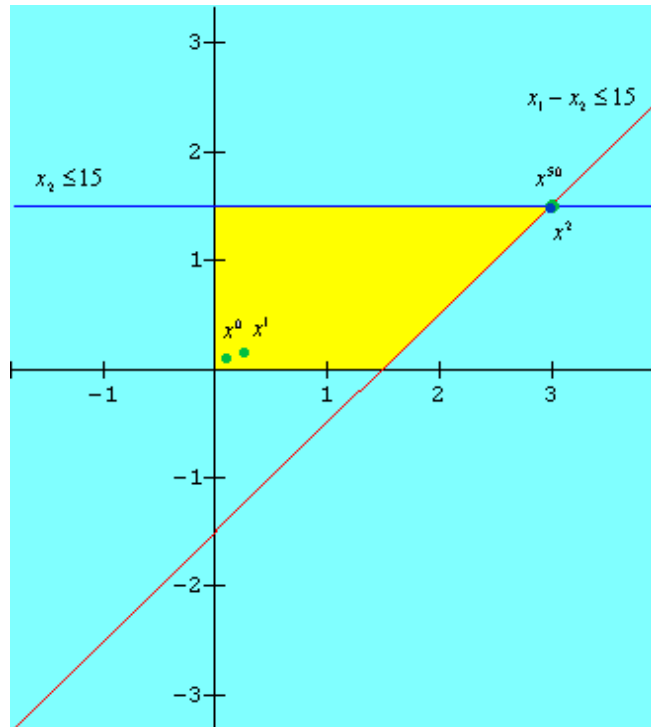


Figura 4.3 - Interpretação geométrica do exemplo 4.3. e das soluções obtidas pelo Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas

4.3.3 - Variáveis Limitadas Inferiormente

No início da seção 4.2 citou-se que uma restrição do tipo $l \leq x \leq u$ pode ser facilmente transformada em $0 \leq x \leq u$. Discuti-se aqui esta afirmação.

A restrição $l \leq x \leq u$ pode ser considerada no problema da seguinte maneira:

$$x \leq u \text{ e } x \geq l.$$

Mas esta não é a maneira usual de se resolver o problema devido à dificuldade computacional em estabelecer limitantes para $x \geq l$.

Considerando-se $Ax = b$, a matriz de restrições e $l \leq x \leq u$ a restrição adicional, então:

$$l \leq x \leq u \Leftrightarrow l - l \leq x - l \leq u - l \Leftrightarrow 0 \leq x - l \leq u - l.$$

Tomando: $\bar{u} = u - l$ e $\bar{x} = x - l$ ou $x = \bar{x} + l$, tem-se: $0 \leq \bar{x} \leq \bar{u}$.

Substituindo no problema original, tem-se:

$$Ax = b, 0 \leq \bar{x} \leq \bar{u} \Rightarrow A(\bar{x} + l) = b \Rightarrow A\bar{x} = b - Al.$$

Observe que fazer este tipo de transformação tem um custo de n^2 operações.

Outra forma, mais simples, de se explorar a canalização de variáveis $l \leq x \leq u$ é, ao determinar o tamanho do passo β_p , considerar:

$$\beta_p^1 = \text{Min} \left\{ -\frac{(x_i^k - l_i^k)}{d_{x_i}^k} / d_{x_i}^k < 0 \right\}; \quad \beta_p^2 = \text{Min} \left\{ -\frac{(\mu_i^k - x_i^k)}{d_{x_i}^k} / d_{x_i}^k < 0 \right\},$$

$$\beta_p = \text{Min} \{ \beta_p^1, \beta_p^2 \}$$

Esta definição de β_p é a mais simples pois não requer nenhuma mudança de variável no PPL original implicando diretamente na economia das n^2 operações citadas exigidas pela mudança anterior feita e no desempenho do método.

No próximo capítulo é proposto um Método Primal-Dual previsor-corretor para programação quadrática convexa com variáveis canalizadas, o qual, após ser implementado, será testado em problemas de Despacho Econômico e Ambiental.

5 - MÉTODO PRIMAL - DUAL DE PONTOS INTERIORES PARA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA CONVEXA COM VARIÁVEIS CANALIZADAS E PROCEDIMENTO PREVISOR CORRETOR

O método proposto e sua implementação computacional, visto a seguir, é desenvolvido baseando-se nos trabalhos de [FANG e PUTHENPURA, 1993] e [WU *et al.*, 1994] e, principalmente nos trabalhos desenvolvido em [SOUZA, 2003], [BALBO e SOUZA, 2006], [BALBO *et al.*, 2004], [BALBO *et al.*, 2005], [BALBO *et al.*, 2005a], [BALBO *et al.*, 2005b], [BALBO *et al.*, 2007a], [BALBO *et al.*, 2007b], [BALBO *et al.*, 2008], [BALBO *et al.*, 2009], [BALBO *et al.*, 2010], [SOUZA *et al.*, 2008a], [SOUZA *et al.*, 2008b] e [SOUZA *et al.*, 2009].

5.1 - Problema de Programação Quadrática

O problema de minimização de funções quadráticas, com restrições de igualdade e variáveis canalizadas, denominado de PPQ, é expresso de maneira geral por:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ & \text{Sujeito a :} \quad Ax = b; \quad l \leq x \leq u \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que $A \in R^{m \times n}$, tal que posto A é n , $b \in R^m$, $x, c, u \in R^n$ e $Q \in R^{n \times n}$ é uma matriz diagonal.

O problema (5.1) é equivalente a:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ & \text{Sujeito a :} \quad Ax = b \\ & \quad \quad \quad x + z = u; \quad z \geq 0 \\ & \quad \quad \quad x - r = l; \quad r \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que $z, r \in R^n$ são variáveis de excesso e folga, respectivamente.

O PPQ Dual de (5.2) é expresso por:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \quad -\frac{1}{2}v^T Qv + b^T w - u^T y + l^T s \\ & \text{Sujeito a:} \quad -Qv + A^T w + s - y = c \\ & \quad \quad \quad s \geq 0; \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que $w \in R^m$ e $s, y \in R^n$.

Para um escalar $\mu > 0$, pode-se incorporar à (5.2) uma função barreira logarítmica resultando no seguinte problema de otimização não-linear:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad F_\mu(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \ln r_j - \mu \sum_{j=1}^n \ln z_j \\ & \text{Sujeito a:} \quad Ax = b; \\ & \quad \quad \quad x + z = u; \\ & \quad \quad \quad x - r = l; \end{aligned} \quad (5.4)$$

O problema dual de (5.3) é:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \quad -\frac{1}{2}v^T Qv + b^T w - u^T y + l^T s + \mu \sum_{j=1}^n \ln s_j + \mu \sum_{j=1}^n \ln y_j \\ & \text{Sujeito a:} \quad -Qv + A^T w + s - y = c \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para a resolução conjunta dos problemas (5.4) e (5.5), sem perda de generalidade considera-se $v = x$.

As condições de otimalidade de KKT para os problemas (5.4) e (5.5) são:

$$-Qx + A^T w + s - y = c \quad (5.6a)$$

$$Ax = b \quad (5.6b)$$

$$x + z = u \quad (5.6c)$$

$$x - r = l \quad (5.6d)$$

$$ZYe - \mu e = 0 \quad (5.6e)$$

$$RSe - \mu e = 0 \quad (5.6f)$$

onde R, Z, S e Y são matrizes diagonais, $e = (1, \dots, 1)^T$ e μ é a métrica dual ou parâmetro de ajuste à curva definida pela trajetória central.

A fim de simplificar notações, o conjunto solução, Ω^0 , para os problemas (5.41) e (5.4) será denotado aqui como:

$$\Omega^0 = \left\{ (x, w, z, r, y, s) / \begin{aligned} &-Qx + A^T w + s - y = c, \\ &Ax = b, \ x + z = u, x - r = l \text{ e } (z, r, y, s) > 0 \end{aligned} \right\}$$

e a função F , dependente das variáveis x, w, z, r, y e s é definida por:

$$F(x, w, z, r, y, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ -Qx + A^T w + s - y - c \\ x + z - u \\ x - r - l \\ ZYe - \mu e \\ SRe - \mu e \end{bmatrix} = 0.$$

Consideram-se as variáveis do problema definidas a partir de uma iteração k por:

$$x = x^k + d_x^k;$$

$$w = w^k + d_w^k;$$

$$z = z^k + d_z^k;$$

$$r = r^k + d_r^k;$$

$$y = y^k + d_y^k;$$

$$s = s^k + d_s^k.$$

Usando a aproximação linear da Série de Taylor para avaliar $F(x, w, z, r, y, s)$, obtêm-se a seguinte aproximação:

$$F(h) = F(h^{(k)}) + J(h^{(k)})d^{(k)} \quad (5.6)$$

em que $h = (x, w, z, r, y, s)^T$, $h^{(k)} = (x^k, w^k, z^k, r^k, y^k, s^k)^T$,

$d^{(k)} = (d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k, d_s^k)^T$ e $J(h^{(k)})$ é a matriz Jacobiana, cujo (i, j) -ésimo elemento é dado por:

$$\left[\frac{\partial F_i(h)}{\partial h_j} \right]_{h=h^k}.$$

5.1.2 - Direções de Busca

A expressão (5.6) é de interesse para redefinir as direções de busca do método investigado através do método Previsor-Corretor.

5.1.5.1 - Direções de Busca - Tipo Previsor

Supondo em um passo k que as condições de otimalidade (5.6) satisfaçam à viabilidade primal e dual, então, a definição do novo ponto, na iteração $k+1$, depende diretamente das direções de movimento e comprimento de passo nesta direção. Sem se preocupar, em uma primeira análise, com o comprimento do passo, considera-se, na iteração $k+1$, o novo ponto h^{k+1} definido por:

$$h^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ w^{k+1} \\ z^{k+1} \\ r^{k+1} \\ y^{k+1} \\ s^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k + d_x^k \\ w^k + d_w^k \\ z^k + d_z^k \\ r^k + d_r^k \\ y^k + d_y^k \\ s^k + d_s^k \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Assim necessita-se determinar a direção de movimento $d^{(k)}$ para obter-se o novo ponto h^{k+1} .

Seguindo-se os passos do Método de Newton e impondo-se em (5.36) que $F(h) = 0$, a direção $d^{(k)}$ pode ser obtida resolvendo-se o seguinte sistema:

$$J(h^{(k)})d^{(k)} = -F(h^{(k)}); \quad (5.9)$$

tal que (5.20) é equivalente ao seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & A^T & 0 & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_z^k \\ d_r^k \\ d_y^k \\ d_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \\ g^k \\ f^k \\ o^k \\ q^k \\ v^k \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\text{em que: } t^k = b - Ax^k; \quad g^k = Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k; \quad f^k = u - x^k - z^k;$$

$$o^k = l - x^k + r^k \quad q^k = \mu^k e - Z_k Y_k e; \quad v^k = \mu^k e - R_k S_k e. \quad (5.11)$$

A maneira como foram definidos os resíduos $t^k, g^k, f^k, o^k, q^k, v^k$ em (5.11) é o que evidencia, no algoritmo proposto neste trabalho, a diferenciação entre o passo previsor e corretor do método.

As direções a serem determinadas a seguir, no passo previsor, utilizam os resíduos definidos em (5.11). Para determinar as direções no passo previsor existem duas formas distintas na literatura:

- i) O sistema (5.10) é resolvido diretamente pelo método de Newton, a qual é a estratégia usual dos métodos de pontos interiores clássicos;
- ii) Resolver o sistema linear (5.10) utilizando a sua estrutura esparsa e de blocos da matriz, a qual é a estratégia dos métodos de pontos interiores variantes de Karmarkar [KARMARKAR, 1984].

Baseando-se em ii), calcula-se $d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k$ e d_s^k separadamente, através das seguintes equações:

$$Ad_x^k = t^k \quad (5.12a)$$

$$-Qd_x^k + A^T d_w^k + d_s^k - d_y^k = g^k \quad (5.12b)$$

$$d_x^k + d_z^k = f^k \quad (5.12c)$$

$$d_x^k - d_r^k = o^k \quad (5.12d)$$

$$Y_k d_z^k + Z_k d_y^k = q^k \quad (5.12e)$$

$$S_k d_b^k + R_k d_s^k = v^k \quad (5.12f)$$

Das equações (5.12c) e (5.12d) tem-se, respectivamente, que:

$$d_z^k = -d_x^k + f^k \quad (5.24a)$$

$$d_r^k = d_x^k + o^k \quad (5.13b)$$

Agora, isola-se d_y^k e d_s^k em (5.12e) e (5.12f), obtendo-se:

$$d_y^k = Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k) \quad (5.13c)$$

$$d_s^k = R_k^{-1}(v^k - S_k d_r^k) \quad (5.13d)$$

Combinando-se os resultados encontrados em (5.13a), (5.13b), (5.13c) e (5.13d) com aqueles vistos em (5.12) e considerando-se:

$$\theta = (R_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k + Q)^{-1} \quad (5.13e)$$

tem-se:

$$d_w^k = (A\theta A^T)^{-1} [A\theta(g^k + p^k) + t^k] \quad (5.13f)$$

$$d_x^k = \theta(A^T d_w^k - g^k - p^k); \quad (5.13g)$$

em que,

$$p^k = R_k^{-1}(S_k o^k - v^k) + Z_k^{-1}(q^k - Y_k f^k). \quad (5.13h)$$

Devido ao fato da matriz $(A\theta A^T)$ ser simétrica e definida positiva em (5.13f) (considerando a matriz Q , simétrica e definida positiva), então, d_w^k é determinado utilizando a Decomposição de Cholesky.

5.1.5.2 - Direções de Busca -Tipo Corretor

Analogamente ao procedimento realizado na seção em 5.6.2.2 determina-se a direção de busca do passo corretor, denominada de $\tilde{d}^{(k)}$, resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$J(h^{(k)})\tilde{d}^{(k)} = -\tilde{F}(h^{(k)}); \quad (5.14)$$

onde, $\tilde{F}(h^{(k)})$ é obtida considerando-se aproximações de 2ª ordem em (5.6), a partir do passo previsor, tal que (5.14) é equivalente a:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & A^T & 0 & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_x^k \\ \tilde{d}_w^k \\ \tilde{d}_z^k \\ \tilde{d}_r^k \\ \tilde{d}_y^k \\ \tilde{d}_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \\ g^k \\ f^k \\ o^k \\ \tilde{q}^k \\ \tilde{v}^k \end{pmatrix}; \quad (5.15)$$

em que:

$$\begin{aligned}
t^k &= b - Ax^k; & g^k &= Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k; & f^k &= u - x^k - z^k; & o^k &= l - x^k + r^k; \\
\tilde{q}^k &= \mu^k e - Z_k Y_k e - D_z^k D_y^k e; & \tilde{v}^k &= \mu^k e - R_k S_k e - D_x^k D_s^k e
\end{aligned} \tag{5.16}$$

As matrizes D_x^k , D_z^k , D_y^k e D_s^k são matrizes diagonais, cujos elementos diagonais são $(d_x^k)_i$, $(d_z^k)_i$, $(d_y^k)_i$ e $(d_s^k)_i$, $i=1, \dots, n$, respectivamente.

Note que, no passo corretor, as direções d_x^k , d_z^k , d_y^k e d_s^k definidas no passo predictor são utilizadas para a redefinição dos resíduos $\tilde{q}^k$ e $\tilde{v}^k$ em (5.16).

A partir de (5.4), (5.5) e seguindo-se os mesmos passos realizados para a determinação das direções do passo predictor vistos na seção 5.1.5.1, calculam-se $\tilde{d}_x^k$, $\tilde{d}_w^k$, $\tilde{d}_z^k$, $\tilde{d}_r^k$, $\tilde{d}_y^k$ e $\tilde{d}_s^k$ através das seguintes equações:

$$\tilde{d}_w^k = (A\theta A^T)^{-1} [A\theta(g^k + \tilde{p}^k) + t^k]; \tag{5.17a}$$

$$\tilde{d}_x^k = \theta(A^T \tilde{d}_w^k - g^k - \tilde{p}^k); \tag{5.17b}$$

$$\tilde{d}_z^k = -\tilde{d}_x^k + f^k; \tag{5.17c}$$

$$\tilde{d}_r^k = \tilde{d}_x^k + o^k; \tag{5.17d}$$

$$\tilde{d}_y^k = Z_k^{-1}(\tilde{q}^k - Y_k \tilde{d}_z^k); \tag{5.17e}$$

$$\tilde{d}_s^k = R_k^{-1}(\tilde{v}^k - S_k \tilde{d}_r^k); \tag{5.17f}$$

em que,

$$\tilde{p}^k = R_k^{-1}(S_k o^k - \tilde{v}^k) + Z_k^{-1}(\tilde{q}^k - Y_k f^k). \tag{5.17g}$$

5.1.3 - Comprimento do Passo

Uma vez que as direções de busca do tipo corretor são determinadas em (5.17), tem-se a condição de se mover para um novo ponto $(x^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}, r^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})$ garantindo-se que $s^{k+1} > 0$, $z^{k+1} > 0$, $y^{k+1} > 0$ e $r^{k+1} > 0$. Para garantir a restrição de não-negatividade destas variáveis um controle do passo a ser dado em cada direção é necessário, assim, consideram-se as variáveis definidas no passo predictor por:

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{\alpha}_k d_x^k; \tag{5.18a}$$

$$w^{k+1} = w^k + \tilde{\alpha}_k d_w^k; \quad (5.18b)$$

$$z^{k+1} = z^k + \tilde{\alpha}_k d_z^k; \quad (5.18c)$$

$$r^{k+1} = r^k + \tilde{\alpha}_k d_r^k; \quad (5.18d)$$

$$y^{k+1} = y^k + \tilde{\alpha}_k d_y^k; \quad (5.18e)$$

$$s^{k+1} = s^k + \tilde{\alpha}_k d_s^k; \quad (5.18f)$$

em que:

$$\tilde{\alpha}_k = \text{Min}\{\alpha_P, \alpha_D, \alpha_{BU}\} \quad (5.18g)$$

tal que, para $0 < \alpha < 1$:

i) pela condição de factibilidade Primal:

$$\alpha_P = \text{Min}\left\{1, -\frac{\alpha z_i^k}{d_{z_i}^k}, -\frac{\alpha r_i^k}{d_{r_i}^k} \text{ tal que } d_{z_i}^k, d_{r_i}^k < 0\right\} \quad (5.18h)$$

ii) pela condição de factibilidade Dual:

$$\alpha_D = \text{Min}\left\{1, -\frac{\alpha s_i^k}{d_{s_i}^k}, -\frac{\alpha y_i^k}{d_{y_i}^k} \text{ tal que } d_{s_i}^k, d_{y_i}^k < 0\right\} \quad (5.18i)$$

iii) pela estratégia de busca unidimensional de Armijo α_{BU} é determinado sob a seguinte condição:

$$\alpha_{BU} = \alpha_k$$

tal que

$$F_\mu(x^{k+1}) \leq F_\mu(x^k) + \alpha_k \nabla F_\mu(x^k)^T d_x^k; \quad (5.18j)$$

ou seja, é um método de busca unidimensional finito que, neste caso, considera somente as variáveis primais e que busca, a partir de um ponto x^k , um novo ponto x^{k+1} , na direção d_x^k , tal que a função F_μ definida em (5.4) decresça, sem preocupar-se em minimizá-la. O método de Armijo procura determinar α_{BU} de tal forma que a redução de F_μ seja garantida. A escolha inicial de α_{BU} não deve ser muito grande, evitando comportamento oscilatório do método, nem muito pequena, evitando uma

parada prematura do método. Desta forma, ajusta-se $\alpha_0=1$ e caso (5.18j) não seja satisfeita α_{BU} é atualizado através da seguinte seqüência:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{\delta}, k = 0, 1, \dots; \text{ com } \delta > 1 \text{ usualmente ajustado para } \delta = 5.$$

Para a análise de (5.18j) utilizou-se:

$$\nabla F_{\mu}(x^k) = Qx^k + c - \mu_k(R_k^{-1} + Z_k^{-1})e \quad (5.18k)$$

com μ_k determinado na seção 5.1.

Analogamente, no passo corretor o cálculo do comprimento do passo é definido considerando-se as variáveis:

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{\beta}_k \tilde{d}_x^k; \quad (5.19a)$$

$$w^{k+1} = w^k + \tilde{\beta}_k \tilde{d}_w^k; \quad (5.19b)$$

$$s^{k+1} = s^k + \tilde{\beta}_k \tilde{d}_s^k; \quad (5.19c)$$

$$r^{k+1} = r^k + \tilde{\beta}_k \tilde{d}_r^k; \quad (5.19d)$$

$$y^{k+1} = y^k + \tilde{\beta}_k \tilde{d}_y^k; \quad (5.19e)$$

$$z^{k+1} = z^k + \tilde{\beta}_k \tilde{d}_z^k. \quad (5.19f)$$

em que:

$$\tilde{\beta}_k = \text{Min}\{\beta_P, \beta_D, \beta_{BU}\} \quad (5.19g)$$

tal que, $\beta_P, \beta_D, \beta_{BU}$, são obtidos de maneira análoga às condições vistas de (5.18h) a (5.18k), considerando-se as expressões obtidas no passo corretor, $\tilde{d}_x^k$, $\tilde{d}_w^k$, $\tilde{d}_z^k$, $\tilde{d}_r^k$, $\tilde{d}_y^k$ e $\tilde{d}_s^k$, vistas em (5.17a) a (5.17g).

5.1.4 - Critério de Parada

Os algoritmos de pontos interiores não encontram soluções exatas para os problemas de programação linear ou quadrática. Por isso, necessita-se de um *critério de parada* para decidir quando, em uma iteração corrente, a solução obtida

está próxima o suficiente de uma solução ótima. Neste trabalho o critério de parada é determinado baseado em [WRIGHT, 1997].

Muitos algoritmos consideram uma boa solução aproximada àquela que possui os resíduos, primal, t^k , dual, g^k e a métrica dual μ_k suficientemente pequenos. Para esse fim pode-se usar medidas relativas diminuindo os problemas de escala dos apresentados em [WRIGHT, 1997]. Testes típicos para garantir que uma solução $(x^k, w^k, z^k, r^k, y^k, s^k)$ é uma solução ótima local, são:

$$\text{i) Factibilidade primal: } \frac{\|t^k\|}{\|b\|+1} = \frac{\|b - Ax^k\|}{\|b\|+1} \leq \varepsilon_1; \quad (5.20a)$$

$$\text{ii) Factibilidade Dual: } \frac{\|u^k\|}{\|Qx^k + c\|+1} = \frac{\|Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k\|}{\|Qx^k + c\|+1} \leq \varepsilon_2; \quad (5.20b)$$

$$\text{iii) Folgas Complementares: } \|v^k\| \leq \varepsilon_3 \text{ e } \|q^k\| \leq \varepsilon_3 \quad (5.20c)$$

onde ε_1 , ε_2 e ε_3 são tolerâncias pré-definidas. Naturalmente outros critérios podem ser adotados em concordância com a aplicação a um problema específico, como pode ser visto em [FANG e PUTHENPURA, 1993] e [WRIGHT, 1997].

Condições análogas às expressas em (5.20a), (5.20b) e (5.20c) definem o critério de parada do passo corretor.

5.1.5 - Atualização do Parâmetro de Barreira

De acordo com [WRIGHT, 1997], a atualização do parâmetro de barreira é feita através de um produto escalar que envolve as variáveis primais r^k e z^k e as variáveis duais s^k e y^k , a partir das equações (5.12e) e (5.12f).

Neste trabalho, seguindo-se a atualização citada, o parâmetro de barreira μ_k foi calculado para que as restrições do problema fossem satisfeitas, então, a atualização foi feita de maneira a se preservar a factibilidade dos problemas primal e dual em relação ao passo predictor e passo corretor por:

$$\mu_k^1 = \frac{(r^k)^T s^k}{n}; \quad \mu_k^2 = \frac{(z^k)^T y^k}{n} \quad (5.21)$$

e então μ_k foi calculado por:

$$\mu_k = \text{Min}\{\mu_k^1, \mu_k^2\}. \quad (5.22)$$

Esta maneira de atualizar o parâmetro de barreira, de acordo com [WRIGHT, 1997], auxilia na prova teórica de convergência e complexidade do método prima-dual.

5.1.6 - Algoritmo Primal - Dual para Variáveis Canalizadas com Procedimento Previsor-Corretor e Busca Unidimensional. (PDPCBU)

PASSO 1 - (inicializando o algoritmo): Ajuste $k = 0$. Escolha um ponto arbitrário:

$(x^0; w^0; z^0, y^0, r^0, y^0, s^0) \in \Omega^0$ e escolha ε_1 e ε_2 números positivos suficientemente pequenos.

PASSO 2 - (Cálculos intermediários - Previsor):

Calcule: $t^k; g^k; f^k; o^k; q^k; v^k$ através de (5.11) e μ_k através de (5.22) e a matriz θ através de (5.13e).

PASSO 3 - (direções de movimento - previsor): Determine as direções de busca d_x^k , d_w^k , d_z^k , d_r^k , d_y^k e d_s^k do passo previsor através de (5.13).

PASSO 4 - (comprimento do passo - previsor): Calcule o comprimento do passo $\tilde{\alpha}_k$ através de (5.18g) e atualize as soluções do passo previsor de acordo com (5.18a) a (5.18f).

PASSO 5 - (atualização dos parâmetros):

Calcule os parâmetros primal e dual respectivamente através de (5.22) para a determinação de novas direções e soluções.

PASSO 6 - (atualização de resíduos - corretor)

Calcule $\tilde{v}^k$ e $\tilde{q}^k$ através de (5.16), utilizando-se as variáveis definidas por (5.18a) a (5.18f).

PASSO 7 - (direções de translação - corretor): Calcule as direções de busca do passo corretor através de (5.17).

PASSO 8 - (Comprimento do passo): Calcule o comprimento do passo primal $\tilde{\beta}_p^k$ e dual $\tilde{\beta}_d^k$ através de (5.19a) e (5.19b), utilizando $\alpha = 0,995$.

PASSO 9 - (Novo ponto):

Atualize $x^{k+1}; w^{k+1}; s^{k+1}; y^{k+1}; z^{k+1}$ e r^{k+1} através de (5.19).

PASSO 10 - (Teste de otimalidade):

Se os critérios de parada definidos em (5.20a), (5.20b) e (5.20c) forem satisfeitos, então **PARE**. A solução é ótima. Caso contrário:

Faça $k \leftarrow k + 1$ e volte para o **Passo 5**.

No próximo capítulo apresentam-se os modelos de Despacho Econômico e de Despacho Ambiental, a serem testados computacionalmente através do método Primal - Dual de Pontos Interiores para Programação Quadrática e Variáveis Canalizadas, visto neste capítulo.

6 - PROBLEMAS DE DESPACHO

As informações, definições e modelos a serem vistos neste capítulo foram apresentadas em [SAMED, 2004].

6.1 - O Problema de Despacho Econômico

O problema de minimização dos custos dos combustíveis empregados na geração termoelétrica de energia é denominado Despacho Econômico (DE). O DE é definido como sendo um processo de alocação ótima da demanda de energia elétrica entre as unidades geradoras disponíveis de tal forma que as restrições operacionais sejam satisfeitas e que o custo de geração seja mínimo.

[HAPP, 1977], relatou que em 1920, alguns engenheiros já haviam se conscientizado do problema de alocação econômica da geração, ou como propriamente dividir o carregamento entre as unidades geradoras disponíveis.

Segundo o mesmo autor, um dos primeiros métodos utilizados com o intuito de minimizar os custos da potência entregue baseava-se em solicitar potência somente da unidade mais eficiente (Carregamento de Ordem de Mérito). À medida que a carga aumentava, a potência deveria ser fornecida pela usina mais eficiente até atingir seu ponto de máxima eficiência e, assim, sucessivamente. Apesar deste método falhar na minimização dos custos, ele perdurou até 1930, quando o Critério dos Custos Incrementais Iguais passou a produzir melhores resultados.

A idéia dos custos incrementais é que o próximo acréscimo no carregamento deveria ser melhorado por uma unidade com menor custo incremental; admitiu-se que este incremento deveria ser de igualdade. Na realidade, o custo incremental é determinado medindo-se a inclinação da curva de entrada-saída e multiplicando-se pelo custo por *Btu* da própria unidade.

Por volta de 1931, este critério já havia se firmado suficientemente para ser entendido que para operações econômicas o custo incremental de todas as unidades deveria ser igual.

6.1.1 - O Despacho Econômico como um Subproblema

O DE pode ser considerado um problema genérico que muitas vezes aparece como sendo um subproblema de outros problemas principais, como é o caso do Fluxo de Potência Ótimo (FPO), *Unit Commitment* (UC), Coordenação Hidrotérmica, Controle de Geração Automático, Intercâmbio entre Sistemas de Potência e Segurança em Sistemas de Potência.

6.1.2 - Fluxo de Potência Ótimo

[CARPENTIER, 1962] propôs uma formulação para o DE, incluindo os limites das variáveis e utilizando como técnica de resolução o teorema de KKT e Programação Não-Linear. Esta formulação resultou no problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) e, desde então, o DE passou a ser considerado um caso particular do FPO.

O problema de FPO pode ser representado matematicamente por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a:} & g(x) \geq 0 \\ & h(x) \geq 0 \end{array} \quad (6.1)$$

em que:

x é o vetor das variáveis de estado (tensão, ângulo e taps);

$f(x)$ é a função escalar de perdas de potência ativa na transmissão ou função custo de geração, entre outras;

$g(x)$ são as equações do fluxo de potência;

$h(x)$ são as restrições funcionais e os limites operacionais.

A solução proposta por [CARPENTIER, 1962] para o problema (6.1) foi transformá-lo em um problema irrestrito através da Função Lagrangiana, dada por:

$$L = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$$

em que

L é Função Lagrangiana associada ao problema (6.1);

λ é o vetor Multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade;

μ é o vetor Multiplicador de Lagrange associado às restrições de desigualdade.

O mínimo do problema irrestrito foi alcançado por meio das condições de otimalidade resolvidas pelo Método de Gauss-Seidel de modo iterativo com uma precisão pré-especificada. Desde então, inúmeros métodos foram propostos para resolver o problema de FPO.

6.1.3 - Unit Commitment

O DE considera que as N unidades geradoras que devem ser despachadas já se encontram conectadas ao sistema. Contrariamente, o *Unit Commitment* (UC) envolve o DE como um subproblema, pois ele irá testar primeiramente quais unidades devem ser conectadas ao sistema e aquelas que devem ser desconectadas. Em seguida, irá executar o DE para estabelecer qual o subconjunto é aquele que, de fato, terá um custo mínimo o tempo todo. O UC é formulado para vários períodos de tempo, como 24 horas de um dia ou 168 horas de uma semana.

A maior dificuldade do UC é que este envolve variáveis inteiras, ou seja, as unidades devem estar *ON* (1) ou *OFF* (0), não havendo posição intermediária. Os primeiros métodos utilizados para resolver o UC foram a Programação Inteira e a Programação Inteira Mista.

O procedimento do UC segue uma regra chamada *Shut-Down Rule* que diz que se a operação do sistema deve ser otimizada, unidades devem ser desligadas quando a demanda cai e então, religadas quando a demanda aumenta. Torna-se desejável conhecer quais as unidades que "entram" e "saem", bem como "quando". Assim, uma Lista de Prioridade deve ser desenvolvida. *Shut-Down Rule* é simplesmente uma técnica onde todas as combinações das unidades são testadas para cada valor da demanda.

6.1.4 - Planejamento Energético

A coordenação sistemática de um sistema de usinas hidroelétricas é mais complexa do que um sistema somente com usinas termoelétricas. O primeiro fator complicador é que nenhum sistema de geração hidroelétrica é igual devido às diferenças naturais, como tipo de inclinação do terreno, vazão, tipo de reservatório.

Outros agravantes são as incertezas associadas ao combustível utilizado, à água, cuja disponibilidade é alterada durante determinados períodos. Em planejamentos para longos períodos (por exemplo, um ano) essas incertezas são tratadas estatisticamente.

A coordenação hidrotérmica pode ser efetuada por planejamentos em longos períodos. Em geral, a coordenação hidrotérmica depende do balanço entre a geração hidráulica, a geração térmica e a demanda, dada por:

$$\sum_{j=1}^{j \max} P_D n_j - \sum_{j=1}^{j \max} P_H n_j = E, \quad (6.3)$$

demanda - hidro = termo,

em que:

$\sum_{j=1}^{j \max} P_D n_j$ corresponde ao intervalo de tempo real

P_D representa a demanda;

P_H representa a geração hidráulica;

E representa a geração termoelétrica.

De acordo com a Equação (6.3) o custo da usina termoelétrica pode ser minimizado, levando-se em consideração "quanto" as usinas hidroelétricas podem gerar para satisfazer a demanda.

6.1.5 - Controle Automático da Geração

Uma vez que se deseja encontrar a melhor estratégia de despacho de unidades geradoras deve-se, considerar o controle das unidades individuais e, eventualmente, considerar o controle de um conjunto de unidades.

Um gerador elétrico acoplado à saída de uma turbina térmica está sob a ação de dois torques: o torque elétrico e o torque mecânico. Quando estes dois são iguais em magnitude, a velocidade de rotação, ω , será constante. Se a demanda aumentar, ocasionando um torque elétrico maior que o torque mecânico, o sistema inteiro irá oscilar, causando danos aos equipamentos ligados a este sistema. Portanto, deve-se aumentar o torque mecânico para restabelecer o equilíbrio do sistema, e assim, trazer de volta a velocidade rotacional do sistema a valores constantes.

Este processo deve ser repetido constantemente em um sistema de potência devido às variações constantes da demanda. Para tal, uma série de sistemas de controle são conectados às unidades geradoras. Um gerenciador em cada unidade mantém sua velocidade enquanto um controle suplementar, geralmente operando de um centro de controle remoto, aciona a alocação da geração.

6.1.6 - Sistemas de Potência Interligada

Uma das principais razões dos sistemas serem interligados é que desta forma pode-se alcançar operações mais econômicas quando dois ou mais sistemas operam em custos incrementais diferentes. Por exemplo, se um sistema A está operando com um custo incremental menor do que um sistema B, e se um sistema B comprar o próximo megawatt do sistema A por um preço menor do que se este megawatt fosse gerado, então estará economizando e, ao mesmo tempo, suprimindo os requerimentos da demanda. Já, o sistema A deverá lucrar com a venda daquele bloco de energia para o sistema B a um preço maior do que o correspondente à geração efetiva.

Além do mais, sistemas com produções excessivas têm a possibilidade de vender este excedente a uma companhia interligada. Essas operações de intercâmbio podem ocorrer em virtude de um suprimento de emergência. Há também a possibilidade de mais de um sistema supridor ou mais de um sistema comprador e, deste modo, o problema do DE torna-se bastante interessante.

6.1.7 - Obtenção da Função Custo do Despacho Econômico

A função custo total de geração é obtida pela soma dos custos de cada uma das unidades geradoras ¹. Por sua vez, o custo de cada unidade geradora é obtido através de sua curva característica de entrada-saída (ver Figura 1.1). Uma curva de entrada-saída idealizada pode ser aproximada por uma expressão não-linear, convexa e suave, como sugere a Equação (6.4):

$$Fe = \sum_{i=1}^n Fe_i(P_i) = \sum_{i=1}^n a_i P_{Gi}^2 + b_i P_{Gi} + c_i \quad (6.4)$$

em que:

Fe_i representa os custos de cada unidade geradora i ;

P_i são as potências de saída dos geradores;

a_i , b_i e c_i são os coeficientes característicos da função custo.

Algumas formas diferentes foram utilizadas para representar as curvas de entrada-saída de unidades geradoras. Os dados obtidos dos testes da taxa de calor foram ajustados por uma curva polinomial. Em alguns casos estes dados foram ajustados através de uma curva quadrática. Uma aproximação desta curva quadrática, entretanto, também foi empregada. Nesta aproximação a curva de entrada-saída foi representada por uma série de segmentos de reta ou mesmo por uma série de segmentos quadráticos. Diferentes representações, com certeza, resultam em características de taxa de calor incremental diferentes. A Figura 6.1 mostra duas possíveis variações.

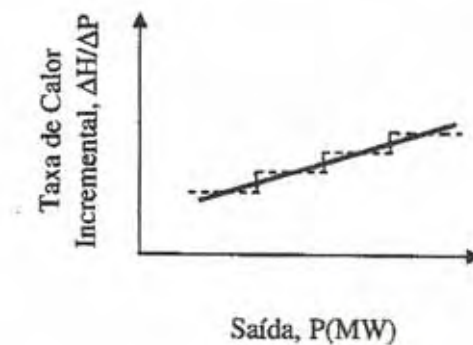


Figura 6.1 - Aproximações de curvas da taxa de calor incremental

Na Figura 6.1, a linha contínua mostra a característica da taxa de calor incremental que resulta da característica de entrada-saída representada por uma curva quadrática ou qualquer função contínua e convexa. Assim, sua característica da taxa de calor incremental é monotonicamente crescente, em função da potência de saída da unidade.

A linha tracejada da Figura 6.1 mostra a característica incremental escalonada (ou segmentada), a qual resulta quando uma série de segmentos de reta são usados para representar as características de entrada-saída da unidade.

O uso de diferentes representações, entretanto, pode requerer a utilização de diferentes métodos para estabelecer a operação econômica

ótima do sistema de potência. Comparando-se os dois critérios adotados acima, apenas o primeiro pode ser representado por uma função analítica contínua e somente o primeiro tem uma derivada que é diferente de zero

(isto é $\frac{\partial^2 Fe(P_i)}{\partial P_i^2} = 0$ se $\frac{\partial Fe(P_i)}{\partial P_i} = 0$).

Para grandes geradores com turbinas a vapor, a característica da curva de entrada-saída não pode ser representada por uma função quadrática. Estes geradores terão um número de válvulas de admissão de vapor que são abertas em seqüência para obter a saída da unidade, com aumento constante. A Figura 6.2 mostra a curva de entrada-saída e a característica da taxa de calor incremental para uma unidade com quatro válvulas.

Conforme o carregamento da unidade aumenta, a entrada de combustível na unidade também aumenta e a taxa de calor incremental diminui entre os pontos para quaisquer duas válvulas que sejam abertas. No entanto, quando uma válvula é aberta, as perdas através da válvula de regulação aumentam rapidamente e a taxa de calor incremental se eleva repentinamente. Esta relação determina a descontinuidade da característica da taxa de calor incremental. Esta característica é não-convexa e, portanto, não pode ser usada pela maioria das técnicas de otimização, conforme [WOOD e WOLLEMBERG, 1984].

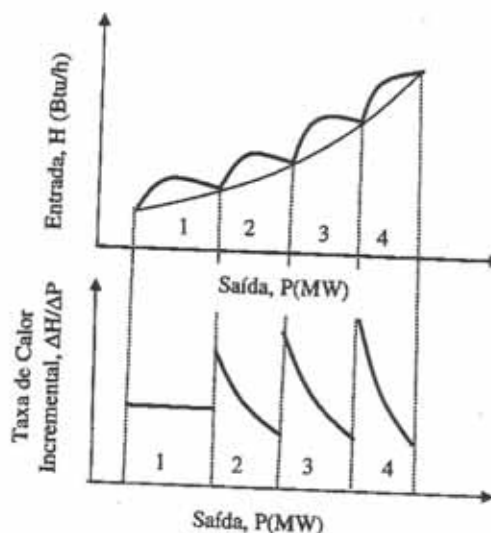


Figura 6.2 - Características do ponto de válvula

A curva de entrada-saída da Figura 6.3, é denominada de Função Custo do Despacho Econômico considerando o Efeito do Ponto de Válvula. Uma

representação matemática desta função é dada na Equação (6.5):

$$Fe = \sum_{i=1}^n Fe_{PV_i} = \sum_{i=1}^n a_i P_{G_i}^2 + b_i P_{G_i} + c_i + \left| d_i \text{sen}(e_i (P_i^{\min} - P_i)) \right| \quad (6.5)$$

em que:

Fe_{PV_i} representa os custos de cada unidade geradora i considerando o efeito do ponto de válvula;

a_i , b_i , c_i , d_i e e_i são os coeficientes característicos da função custo considerando o efeito do ponto de válvula.

6.1.8 - Modelo de Otimização para o Despacho Econômico Clássico

Considere uma configuração onde “n” unidades geradoras térmicas estão conectadas a um barramento que atende uma carga.

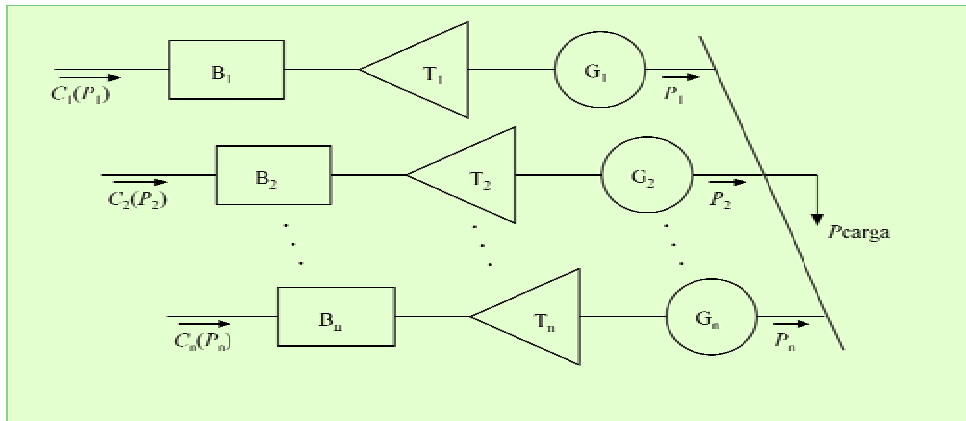


Figura 6.3 -. “n” Unidades Térmicas Conectadas a um Barramento

[STEINBERG e SMITH, 1943] comprovaram matematicamente o Critério dos Custos Incrementais Iguais, que já estava sendo utilizado empiricamente. Este critério pode ser determinado através do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F_e &= \sum_{i=1}^n F_{ePV_i} = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \\ \text{Sujeito a : } &\sum_{i=1}^n P_i = P_D \end{aligned} \quad (6.6)$$

em que:

F_e : função custo total de geração do DE;

$F_{e_{PVI}}$: representa os custos de cada unidade geradora i , sem considerar o efeito do ponto de válvula;

a_i, b_i e c_i : os coeficientes da função custo;

P_i' : corresponde à potência na qual a unidade geradora deve operar;

P_D : valor da demanda de energia;

Incluindo-se as restrições que representam os limites operacionais das unidades geradoras, o problema de otimização dado em (6.6), torna-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F_e &= \sum_{i=1}^n F_{e_{PVI}} = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \\ \text{Sujeito a : } \sum_{i=1}^n P_i &= P_D \\ P_i^{Min} &\leq P_i \leq P_i^{Max} \end{aligned} \quad (6.8)$$

em que:

P_i^{Min} e P_i^{Max} : os limites operacionais inferiores e superiores de saída das unidades de geração termoeleétrica respectivamente.

A adição de perdas na transmissão do modelo de otimização (6.8) resultou no Despacho Econômico Clássico como segue:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F_e &= \sum_{i=1}^n F_{e_{PVI}} = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \\ \text{Sujeito a : } \sum_{i=1}^n P_i &= P_D + P_L \\ P_i^{Min} &\leq P_i \leq P_i^{Max} \end{aligned} \quad (6.9)$$

com P_L : representando as perdas na transmissão.

A solução ótima que satisfaz o conjunto de equações (6.9) é encontrada através de métodos computacionais de Programação Linear ou Programação Não-Linear.

6.2 - O Problema de Despacho Ambiental

Durante muito tempo, a geração termoeleétrica considerou apenas estratégias econômicas como base de operação, contribuindo, assim, para a elevação da poluição atmosférica. Cada *quilowatt* de eletricidade produzida a cada hora pode estar associado a taxas de emissões através de um fator de emissão. O

fator de emissão é a relação das emissões de poluentes pela energia produzida ou o combustível consumido, sendo expresso em *kg* por unidade de energia.

Em países onde o combustível fóssil é usado predominantemente, os impactos mais sérios provenientes da geração elétrica são as emissões de gases na atmosfera como subproduto da combustão. As emissões resultam de impurezas existentes nos combustíveis, tais como particulados, dióxido de enxofre e carvão, outras têm do ar usado como processo de combustão, como os óxidos de nitrogênio e algumas são os produtos finais inerentes da combustão de hidrocarbonetos, tais como o dióxido de carbono e vapor d'água, embora o último seja raramente um problema.

Atualmente, as regulamentações têm concentrado esforços na redução das taxas de emissão de particulados, dióxido de enxofre (SO_2) e óxidos de nitrogênio (NO_x). Os particulados incluem tanto as partículas de poeira visíveis quanto as microscópicas emitidas no processo de combustão, especialmente quando o combustível é o carvão ou o óleo diesel. Embora as partículas maiores criem um impacto visual pela formação da neblina e conseqüente redução da visibilidade, as partículas microscópicas podem ocasionar sérios problemas à saúde devido a sua inalação pelas pessoas.

O NO_x emitidos pelas usinas termoeletricas inclui na maioria o NO e em alguns casos NO_2 . Quantidades adicionais de NO_2 são formadas na atmosfera, reduzindo a visibilidade, juntamente com outros produtos secundários, como o ácido nítrico e o nitrato de peroxiacetil (PAN), um irritante dos olhos. O NO_x reage com pequenas concentrações de hidrocarbonetos na presença da luz do sol para formar o ozônio e outros constituintes do *smog* fotoquímico.

O ácido nítrico, assim como o ácido sulfúrico, pode ser depositado longe da fonte original de poluição. Estes dois poluentes baixam o pH da chuva, neblina e neve, sendo que esta precipitação ácida ameaça a vida aquática e das plantas.

6.2.1 - Gases de Efeito Estufa

As crescentes emissões atmosféricas de dióxido de carbono aumentam as preocupações com a ameaça potencial de mudanças climáticas globais. A principal fonte de CO_2 é a combustão de combustível fóssil e as usinas

termoelétricas contribuem com um terço das emissões globais de CO₅. As companhias elétricas que utilizam carvão produzem a maioria das emissões globais de CO₂, pois o carvão produz 24 kg de carbono por GJ de energia, comparado com 20 kg/GJ do óleo e 14 kg/GJ do gás natural.

De acordo com O Tratado da Convenção Climática, o FCCC (*Framework Convention on Climate Change*), os países industrializados devem criar comitês voluntários para estabilizar ou reduzir as emissões futuras de carbono. Para estabilizar a concentração global de CO₂ na atmosfera, as emissões dos países em desenvolvimento devem ser eventualmente limitadas. Como resultado, várias nações e esforços multilaterais estão a caminho para identificar as opções de redução de emissão e desenvolver estratégias nacionais nos países em desenvolvimento. Os países industrializados são os maiores responsáveis pela ameaça de mudança climática existente, e possuem também a maioria dos recursos financeiros e tecnológicos para o controle de emissões.

6.2.2 - Técnicas Convencionais de Redução de Emissões

Todas as técnicas convencionais requerem o projeto e instalação de novos equipamentos ou dispositivos.

O método mais comum de remover partículas pequenas é através de precipitadores eletrostáticos. O SO₂ é um gás corrosivo, sendo um perigo direto para a saúde humana quando em altas concentrações, especialmente quando na presença de concentrações altas de particulados. Esse gás reage com o vapor d'água da atmosfera produzindo ácido sulfúrico, que é levado pelo vento a longas distâncias do local de emissão e contribui para elevar a acidez das chuvas. O SO₂ pode ser removido das emissões da queima de carvão através de vários processos. A tecnologia convencional de chaminé úmida utiliza uma rocha calcária pulverizada e absorve cerca de 90% do SO₂ proveniente da queima do carvão.

Outras tecnologias incluem chaminés que recuperam o enxofre para outros usos comerciais e chaminés secas que usam cal como adsorvente para remover de 40 a 60% do SO₅.

6.2.3 - Técnicas Alternativas de Redução de Emissões

Uma alternativa é a escolha de um novo combustível com baixo potencial

de emissão. As emissões de SO_x podem ser reduzidas pela adoção deste novo combustível, mas a substituição requer a troca ou substituição dos equipamentos existentes.

Outra técnica é a adoção de uma estratégia de despacho que vise minimizar as emissões, ao invés do objetivo de reduzir os custos usuais do DE, ou como um suplemento ao DE. Esta técnica é a única que não requer modificações no sistema de geração, bastando somente incluir as emissões nas estratégias de despacho. Esta estratégia é conhecida como Despacho Ambiental (DA).

6.2.4 - Obtenção da Função Emissão do Despacho Ambiental

A modelagem da função emissão do Despacho Ambiental, Fa , considera a relação entre a quantidade de cada poluente e a saída de potência da unidade, encontrando os níveis de concentração resultantes. O modelo da função emissão depende, entre outras coisas, do tipo da emissão.

Para o SO_x sabe-se que as emissões são proporcionais ao consumo de combustível nas unidades térmicas. Como resultado, a função emissão será da mesma forma que a função custo empregada no DE. A função emissão para o NO_x é altamente não-linear. A taxa de variação $\frac{\partial Fa}{\partial P_i}$ não é monotonicamente crescente.

[GENT E LAMONT, 1971] propuseram uma estratégia de DA através de uma formulação assumida como sendo uma combinação de termos polinomiais e exponenciais:

$$Fa = A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i + D_i \exp(E_i P_i) \quad (6.10)$$

em que:

Fa é a função emissão;

P_i são a potências de saída dos geradores

A_i, B_i, C_i, D_i e E_i são os coeficientes da função emissão.

Costuma-se desprezar último termo da Equação (6.10). Os parâmetros A_i, B_i, C_i, D_i e E_i são determinados com base nos resultados dos testes de emissão.

[EL_HAWARY *et al.*, 1992] utilizam uma função polinomial de segunda ordem, que corresponde à Equação (6.10), porém, excluindo-se o termo exponencial, tal como a Equação (6.11):

$$Fa_i(P_i) = A_i P_i^2 + B_i P_i + C_i \quad (6.11)$$

As emissões totais correspondem à somatória das emissões de cada unidade geradora:

$$Fa = \sum_{i=1}^n Fa_i(P_i) \quad (6.12)$$

sendo que Fa é a função emissão total.

6.3 - Objetivos e Estratégias

Existem vários modelos de otimização que incluem a função emissão. O modelo visto em 6.3.1 é um clássico modelo mono-objetivo. Alguns modelos consideram a função emissão como objetivo a ser minimizado e outros modelos a consideram como restrição, dependendo da estratégia de operação adotada. Estes modelos inserem-se em uma formulação geral definida pela otimização multiobjetivo, a qual está descrita no Apêndice A.

No que segue, os modelos apresentados nas seções 6.3.2, 6.3.3 e 6.3.4 relacionam-se à formulação multiobjetivo e são expressos através dos métodos de resolução vistos neste Apêndice, na seção A.4, respectivamente em A.4.1 e A.4.2

6.3.1 - Objetivo Emissão Mínima

Esta estratégia de operação carrega as unidades geradoras do sistema termoeletrico somente na base de minimização de emissões, ou seja, Despacho Ambiental (DA).

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } Fa \\ & \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^n P_i = P_D \end{aligned} \quad (6.13)$$

sendo que:

P_i representa as potências de saída dos i geradores;

P_D representa a demanda.

Para o modelo definido em (6.13), uma primeira aplicação da implementação feita do Método Primal - Dual de pontos interiores para variáveis canalizadas é feita no próximo capítulo para o caso de 6 geradores, com os

resultados comparados com aqueles obtidos em [RODRIGUES, 2007] e [SAMED, 2004].

Outros casos de objetivos, tais como: Emissão Mínima com Restrição Econômica, Objetivo Custo mínimo com Restrições Controladas e Multiobjetivo: Custo Mínimo e Emissões Mínimas são apresentados no capítulo 5 e serão objetos de análise e de aplicação dos métodos de pontos interiores investigados no capítulo 2, cujos resultados e comparações relacionam-se à proposta final de trabalho de dissertação de mestrado.

6.3.2 - Objetivo Emissão Mínima com Restrição Econômica

A imperfeição da estratégia de Despacho Ambiental Clássico é que ela não leva em consideração o custo do combustível e, operando apenas na base de emissões mínimas, o sistema de geração alcança altos custos.

Com o objetivo de melhorar o desempenho da estratégia anterior, a estratégia de emissão mínima com restrição econômica, ou Despacho Ambiental com Restrição Econômica (DARE), inclui um custo máximo permissível. O DARE é formulado conforme o modelo de otimização (6.14).

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad Fa \\
 & \text{Sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^n P_i = P_D \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^n Fe_i(P_i) \leq Fe^{\max}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

sendo que:

Fe é a função custo de cada unidade i ;

$Fe^{\max}$ é o custo máximo permissível

6.3.3 - Objetivo Custo Mínimo com Restrições Controladas

Esta estratégia é contrária a estratégia anterior, pois considera a minimização do custo como objetivo e a função emissão é incluída como uma restrição, a qual apresenta um limite máximo permissível. Este problema é conhecido como Despacho Econômico com Restrições Ambientais (DERA) e é modelado conforme o problema (6.15).

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && Fe \\
& \text{Sujeito a:} && \sum_{i=1}^n P_i = P_D \\
& && \sum_{i=1}^n Fa_i(P_i) \leq Fa^{\max}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

sendo que $Fa^{\max}$ é o custo máximo permissível.

6.3.4 - Multiobjetivo: Custo Mínimo e Emissões Mínimas

Até recentemente, a maioria dos Problemas de Despacho era formulada em termos de minimizar uma função objetivo escalar simples. Hoje, entretanto, há uma tendência de formular estes problemas em termos de objetivos múltiplos.

Custo de combustível e emissões podem ser combinados em uma função simples com diferentes pesos. Esta estratégia é um Despacho Econômico e Ambiental (DEA), caracterizado como um problema de otimização multiobjetivo.

No entanto, custo e emissões são objetivos conflitantes e não podem ser minimizados simultaneamente. A melhor estratégia do ponto de vista econômico não é a melhor estratégia do ponto de vista ambiental e, *vice-versa*. Assim, diferentes pesos devem ser atribuídos a cada um dos objetivos de acordo com as exigências que se deve satisfazer em determinadas situações.

O modelo de otimização multiobjetivo para o DEA é dado por:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && [\alpha Fe(P_i) + (1 - \alpha) Fa(P_i)] \\
& \text{Sujeito a:} && \sum_{i=1}^n P_i = P_D \\
& && P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

sendo que α pode assumir qualquer valor entre [0, 1].

A função objetivo do DEA é minimizada para valores sucessivos de α cobrindo toda a faixa de 0 até 1.

Para uma demanda específica uma curva de operação pode ser obtida. Qualquer ponto desta curva é considerado uma solução viável com valores específicos de custo e emissão. Uma curva que estabelece o comprometimento (*tradeoff*) entre custo e emissões, nada mais é do que a Fronteira do conjunto de Pareto-Ótimo, demonstrada na Figura 6.4.

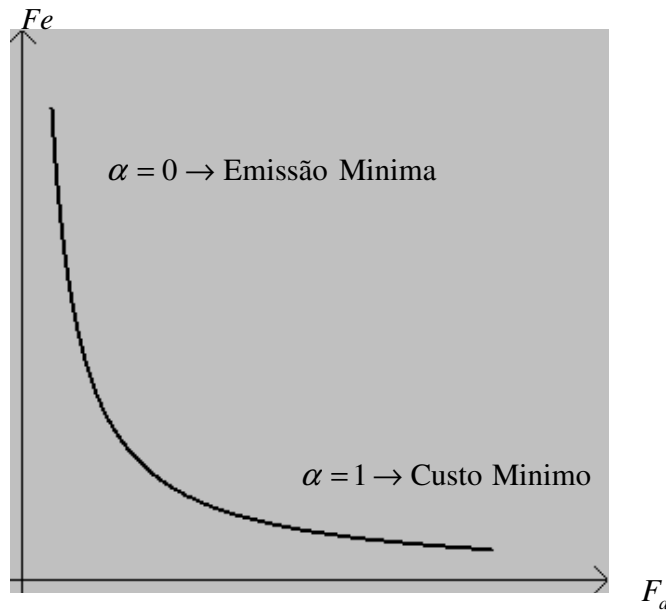


Figura 6.4. Comprometimento entre custo e emissões

Na figura 6.4, $\alpha = 0$ implica em emissões mínimas, que corresponde ao DA e, analogamente, $\alpha = 1$ implica em custo mínimo, o que corresponde ao DE.

No problema, multiobjetivo DEA, pode-se atribuir um custo às emissões. Assim, o objetivo do problema torna-se minimizar o custo total, isto é, o custo de combustível somado ao custo atribuído às emissões.

Diferentes metodologias têm sido relatadas na literatura pertinentes à solução do DEA. Destaca-se neste trabalho a metodologia associada aos Algoritmos Evolutivos, cujos resultados podem ser vistos em [SAMED, 2004].

Os Algoritmos Evolutivos têm sido empregados na solução do DEA não só porque tem capacidade de guiar a busca através do conjunto Pareto-Otimo, mas também porque têm capacidade de manter a diversidade no conjunto de soluções não-inferiores. A dificuldade dos Algoritmos Evolutivos é dominar a tendência que estes algoritmos apresentam em convergir para uma solução simples devido à pressão de seleção.

No próximo capítulo é feita a adaptação e aplicação dos Métodos Primal - Dual de Pontos Interiores do tipo Previsor-Corretor, com procedimento de busca unidimensional em Problemas de Despacho Econômico e Ambiental. Com os testes e resultados em PDEs com 3, 6 e 13 geradores, bem como do PDA com 6 geradores e do problema multiobjetivo PDEA, com 6 geradores, feitos neste capítulo, pretende-se mostrar a eficiência do método (PDPCBU) à resolução destes problemas

7 - APLICAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS

7.1 - Aplicação ao Modelo de Despacho Econômico

O modelo geral de otimização para o Despacho Econômico Clássico, o qual é definido sem se considerar pontos de válvula, é apresentado em (6.6).

Afim de testar a implementação feita do algoritmo visto na seção 5.4 apresenta-se as tabelas 7.1, 7.4 e 7.8 contendo, respectivamente, os dados relativos aos modelos de DE com 3, 6 e 13 geradores, cujos modelos são equivalentes àqueles vistos em (5.1), os quais são encontrados em [SAMED, 2004] e [RODRIGUES, 2007]. Nestas tabelas tem-se, para cada modelo, os coeficientes da função geração de energia, da restrição de igualdade e os limites operacionais de saída das unidades geradoras.

A aplicação do algoritmo visto aos PDE's associados aos modelos citados determinou os resultados apresentados da seguinte forma: nas Tabelas 7.2 e 7.3, relativos ao modelo de 3 geradores; nas Tabelas 7.6 e 7.7, relativos ao modelo de 6 geradores e nas Tabelas 7.9 e 7.10, os resultados relativos ao modelo de 13 geradores. Nestas tabelas encontram-se, para efeito de comparação, as soluções obtidas pelo Método Primal - Dual com procedimento Previsor-Corretor e procedimento de Busca Unidimensional (PDPCBU) e aquelas encontradas pelos métodos, Primal - Dual com procedimento Previsor-Corretor (PDPC), visto em [BALBO *et al.*, 2008], pelo Algoritmo Genético Híbrido (AGH), Algoritmo Genético Co-Evolutivo (AGHCOE), Algoritmo Genético Atávico Híbrido (AGAH) e Algoritmo Cultural (AC). As soluções determinadas pelos métodos AGH e AGHCOE podem ser encontradas em [SAMED, 2004]; as soluções do método AC podem ser encontradas em [RODRIGUES, 2007], as soluções do método AGAH, consideradas apenas para o modelo de 13 geradores, em [KIM *et al.*, 2002]. A implementação computacional elaborada para o método foi feita utilizando-se a linguagem de programação Borland Pascal 7.0 [FARRER *et al.*, 1999]. Optou-se por não colocar-se nesta tabela os tempos de CPU, pois estes são insignificantes para os sistemas abordados.

7.1.1 - Adaptação do Problema de Despacho Econômico ao algoritmo proposto.

Para o Problema de Despacho Econômico serão feitas as seguintes definições, no sentido de adaptar este problema ao algoritmo apresentado na seção 5.1.6:

$$Q_{i,i} = 2a_i \text{ e } Q_{i,j} = 0, \text{ se } i \neq j$$

$$P_i = x_i; \quad P_i^{Min} = l_i \text{ e } P_i^{Max} = u_i$$

$$A_{i,i} = 1 \text{ e } A_{i,j} = 0, \text{ se } i \neq j; \text{ onde } i, j = 1, \dots, n;$$

$$b = P_D + P_L.$$

7.1.1 - PDE com 3 Geradores

Os coeficientes da função geração de energia, da restrição de igualdade e os limites operacionais de saída das unidades geradoras para o PDE com 3 geradores estão definidos na Tabela 7.1. Para este problema observa-se que, o mesmo não foi resolvido pelo algoritmo AGAH encontrado em [KIM *et al.*, 2002], o qual foi suprimido da Tabela 7.6.

Tabela 7.1 - Características do sistema de 3 geradores.

Gerador	Pmín (MW)	Pmáx (MW)	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	100	600	0,001562	7,92	561
2	50	200	0,004820	7,97	78
3	100	400	0,001940	7,85	310

Consideram-se as seguintes soluções para a inicialização do método:
 $b = P_D + P_L = 850$, onde $P_D = 850$ é o valor da demanda e $P_L = 0$, ou seja, não se considera perda na transmissão;

$$x^0 = (450, 100, 300)$$

$$w^0 = (0, 0, 0);$$

$$y^0 = (0, 0, 0).$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

Tabela 7.2 - Comparação dos resultados obtidos para o DE de 3 geradores.

Resultados	AGH	AGHCOE	PDPC	PDPCBU
P_1 (MW)	470,8421	344,7295	374,5555	393,1698
P_2 (MW)	109,4012	193,9445	75,4444	122,2264
P_3 (MW)	269,7567	311,3260	399,9999	334,6038
ΣP_i (MW)	850,0000	850,0000	850,0000	850,000

Tabela 7.3 - Valores da função objetivo para o DE de 3 geradores.

Resultados	Função Objetivo (\$)
AGH	8.212,73
AGHCOE	8.223,86
PDPC	8.213,74
PDPCBU	8.194,36

Conforme é evidenciado na Tabela 7.3, o resultado atingido pelo PDPCBU é inferior àqueles obtidos em [SAMED, 2004], o que demonstra a eficiência do método proposto para o caso do DE com 03 geradores. Neste caso o valor ótimo obtido para o custo de geração foi de \$8.194,36.

7.1.2 - PDE com 6 Geradores

Nas Tabelas 7.4 e 7.5 estão definidos os coeficientes da função geração de energia, da restrição de igualdade e os limites operacionais de saída das unidades geradoras, respectivamente, do PDE com 6 geradores. Destaca-se que esse problema não foi resolvido para os algoritmos AGAH e AGHCOE, encontrados em [SAMED, 2004] e [KIM *et al.*, 2002] respectivamente. Assim, estes foram suprimidos da Tabela 7.4.

Tabela 7.4 - Características do sistema de 6 geradores.

Gerador	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	0,15247	38,53973	756,79886
2	0,10587	46,15916	451,3251
3	0,02803	40,39655	1049,9977
4	0,03546	38,30533	1243,5311
5	0,02111	36,32782	1658,5696
6	0,01799	38,24041	1356,6592

Tabela 7.5- Limites operacionais para o sistema de 6 geradores.

Gerador	Pmín (MW)	Pmáx (MW)
1	10	125
2	10	150
3	35	225
4	35	210
5	130	325
6	125	315

Consideram-se as seguintes soluções para a inicialização do método:

$b = P_D + P_L = 500$, onde $P_D = 500$ é o valor da demanda e $P_L = 0$, ou seja, não se considera perda na transmissão;

$$x^0 = (20, 30, 75, 75, 145, 155)$$

$$w^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0) ;$$

$$y^0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

Tabela 7.6 - Comparação dos resultados obtidos para o DE de 6 geradores.

Resultados	AGH	PDPC	PDPCBU
P_1 (MW)	20,1367	10,0000	16,510
P_2 (MW)	14,8645	10,7287	10,000
P_3 (MW)	72,4008	57,0552	61,390
P_4 (MW)	72,4008	86,4863	76,950
P_5 (MW)	180,0617	184,6213	177,510
P_6 (MW)	139,5865	151,1078	157,640
ΣP_i (MW)	500,0000	500,0000	500,0000

Tabela 7.7 - Valores da função objetivo para o DE de 6 geradores.

Resultados	Função Objetivo (\$)
AGH	27.037,29
PDPC	27.019,31
PDPCBU	27.003,80

Pela Tabela 7.7, o valor ótimo obtido pelo método PDPCBU, para o caso de 06 geradores foi de \$27.003,80, o qual é melhor quando comparado com os métodos AGH e PDPC.

7.1.3 - PDE com 13 Geradores

Os coeficientes da função geração de energia, da restrição de igualdade e os limites operacionais de saída das unidades geradoras para o PDE com 13 geradores estão definidos na Tabela 7.8. Inclui-se para esse modelo o algoritmo AGH, encontrado em [KIM *et al.*, 2002], onde têm-se o valor da função objetivo, visto na Tabela 7.10, mas não é encontrado o valor da solução ótima obtida, que foi suprimida na Tabela 7.9.

Tabela 7.8 - Características do sistema de 13 geradores.

Gerador	Pmín (MW)	Pmáx (MW)	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)
1	0	680	0,00028	8,1	550
2	0	360	0,00056	8,1	309
3	0	360	0,00056	8,1	307
4	60	180	0,00324	7,74	240
5	60	180	0,00324	7,74	240
6	60	180	0,00324	7,74	240
7	60	180	0,00324	7,74	240
8	60	180	0,00324	7,74	240
9	60	180	0,00324	7,74	240
10	40	120	0,00284	8,6	126
11	40	120	0,00284	8,6	126
12	55	120	0,00284	8,6	126
13	55	120	0,00284	8,6	126

Consideram-se as seguintes soluções para a inicialização do método:

$$b = P_D + P_L = 2520,$$

onde $P_D = 2520$ é o valor da demanda e $P_L = 0$, ou seja, não se considera perda na transmissão.

Neste caso é considerada a seguinte solução inicial:

$$x^0 = (660, 320, 330, 150, 140, 155, 165, 150, 140, 70, 80, 75, 85);$$

$$w^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$y^0 = (30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30).$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

A solução obtida pelos métodos PDPC e PDPCBU são apresentadas na Tabela 7.9.

Tabela 7.9 - Resultados obtidos para DE de 13 geradores - caso 6.

Resultados	AGH	AGHCOE	AC	PDPCBU
P ₁ (MW)	651,145	735,626	679,2551	679,9999
P ₂ (MW)	319,982	337,495	359,8672	359,9999
P ₃ (MW)	320,463	292,625	357,2368	359,9999
P ₄ (MW)	137,776	146,713	154,8137	154,9999
P ₅ (MW)	156,688	177,346	158,0946	154,9999
P ₆ (MW)	147,007	131,552	155,8520	154,9999
P ₇ (MW)	159,165	154,197	146,1697	154,9999
P ₈ (MW)	145,378	159,550	146,8364	154,9999
P ₉ (MW)	151,551	167,339	168,7979	154,9999
P ₁₀ (MW)	82,259	60,677	40,0181	40,0000
P ₁₁ (MW)	86,320	74,681	40,0000	40,0000
P ₁₂ (MW)	82,893	56,537	55,0175	55,0011
P ₁₃ (MW)	79,368	25,655	55,0488	55,0011
ΣP_i (MW)	5.130,00	5.130,00	5.130,00	5.130,00

Tabela 7.10 - Valores da função objetivo para o DE de 13 geradores.

Resultados	Função Objetivo (\$)
AGH	27.111,69
AGHCOE	27.072,03
AGAH	27.052,34
AC	27.052,10
PDPCBU	27.050,14

Observa-se na tabela 7.10 que as soluções obtidas pelo método PDPCBU para o caso de 13 geradores são mais promissoras quando comparadas com às soluções dos outros métodos citados, obtendo-se um valor para o custo de geração de \$27.050,14.

7.2 - Aplicação ao Modelo de Despacho Ambiental

No que segue, o algoritmo visto na seção 5.4 é aplicado ao PDA com 06 geradores, cujos dados encontram-se nas tabelas 7.11 e 7.15. Analogamente à seção 7.1, os resultados obtidos na tabela 7.13 serão comparados com aqueles obtidos em [SAMED, 2004].

7.2.1 - PDA com 6 Geradores

Os coeficientes da função geração de energia, da restrição de igualdade e os limites operacionais de saída das unidades geradoras para o PDA com 6 geradores estão definidos na Tabela 7.13.

Tabela 7.11 - Características do sistema PDA de 6 geradores.

Gerador	A_i (\$/MW ²)	B_i (\$/MW)	C_i (\$)
1	0,00419	0,32767	13,85932
2	0,00419	0,32767	13,85932
3	0,00683	-0,54551	40,2669
4	0,00683	-0,54551	40,2669
5	0,00461	-0,51116	42,89553
6	0,00461	-0,51116	42,89553

Tabela 7.12 - Limites operacionais para o DA de 6 geradores.

Gerador	Pmín (MW)	Pmáx (MW)
1	10	125
2	10	150
3	35	225
4	35	210
5	130	325
6	125	315

Consideram-se as seguintes soluções para a inicialização do método:
 $B = P_D + P_L = 500$, onde $P_D = 500$ é o valor da demanda e $P_L = 0$, ou seja, não se considera perda na transmissão;

$$x^0 = (20 \ 30 \ 75 \ 75 \ 145 \ 155)$$

$$w^0 = (0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0) ;$$

$$y^0 = (1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1).$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

Tabela 7.13 - Comparação dos resultados obtidos para o DA de 6 geradores.

Resultados	AGHCOE	AC	PDPCBU
P ₁ (MW)	32,8840	36,10,87	33,58
P ₂ (MW)	38,4133	36,1111	34,84
P ₃ (MW)	82,3074	87,8129	88,35
P ₄ (MW)	85,2323	84,9723	88,30
P ₅ (MW)	135,0008	130,0078	127,40
P ₆ (MW)	126,1623	125,0000	127,54
ΣP_i (MW)	500,0000	500,0000	500,0000

Tabela 7.14 - Valores da função objetivo para o DA de 6 geradores

Resultados	Função Objetivo (\$)
AGHCOE	256,36
AC	255,96
PDPCBU	255,96

Observa-se na tabela 7.14 que as soluções obtidas pelo método PDPCBU para o caso de 06 geradores são idênticas aquelas encontradas pelo método AC, que são mais promissoras quando comparadas com às soluções encontradas pelo método AGHCOE, obtendo-se um valor para o custo de emissão de \$255,96.

7.3 - Aplicação ao Modelo Multiobjetivo

O caso multiobjetivo de Despacho Econômico/Ambiental (DEA) testado pelo algoritmo PDPCBU relaciona-se ao modelo visto em 6.2.9, de custo e emissões mínimas, com 6 geradores e proposto em [SAMED, 2004] e [RODRIGUES, 2007]. As características do problema são apresentadas nas Tabelas 7.

Tabela 7.15 - Características do sistema de 6 geradores.

Gerador	Função Custo			Função Emissão		
	a_i (\$/MW ²)	b_i (\$/MW)	c_i (\$)	A_i (\$/MW ²)	B_i (\$/MW)	C_i (\$)
1	0,15247	38,53973	756,7986	0,00419	0,32767	13,85932
2	0,10587	46,15916	451,3251	0,00419	0,32767	13,85932
3	0,02803	40,39655	1049,9977	0,00683	-0,54551	40,2669
4	0,03546	38,30533	1243,5311	0,00683	-0,54551	40,2669
5	0,02111	36,32782	1658,5696	0,00461	-0,51116	42,89553
6	0,01799	38,27041	1356,6592	0,00461	-0,51116	42,89553

Tabela 7.16 - Limites operacionais - caso de 6 geradores.

Gerador	P _{mín} (MW)	P _{máx} (MW)
1	10	125
2	10	150
3	35	225
4	35	210
5	130	325
6	125	315

Consideram-se as seguintes soluções para a inicialização do método:
 $B = P_D + P_L = 500$, onde $P_D = 500$ é o valor da demanda e $P_L = 0$, ou seja, não há perda na transmissão;

$$x^0 = (20, 30, 75, 75, 145, 155)$$

$$w^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0) ;$$

$$y^0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

As tabelas 7. Mostram os melhores valores obtidos para os geradores para cada um dos valores de α utilizados

Tabela 7.17 - Comparação dos resultados obtidos para o DEA de 6 geradores.

α	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P _{total}
0,0	16,51	10,00	61,39	76,95	177,51	157,64	500,00
0,1	17,06	10,00	63,95	79,17	173,36	156,45	500,00
0,2	17,18	10,00	66,48	81,18	170,34	154,81	500,00
0,3	17,86	10,00	66,33	81,40	172,70	151,70	500,00
0,4	18,06	10,00	69,14	81,24	167,78	153,76	500,00
0,5	18,28	10,00	68,43	80,37	171,04	151,88	500,00
0,6	18,77	10,00	69,92	86,39	166,75	148,17	500,00
0,7	19,41	10,00	73,73	85,77	163,52	147,56	500,00
0,8	20,75	10,00	78,01	84,34	160,68	146,22	500,00
0,9	23,93	10,00	84,95	89,51	149,33	142,28	500,00
1,0	33,58	34,83	88,35	88,30	127,4	127,54	500,00

Tabela 7.18 - Custo e emissão para o DEA de 6 geradores

α	Custo AGHCOE	Custo AC	Custo PDPCBU	Emissão AGHCOE	Emissão AC	Emissão PDPCBU
0,0	27.319,3	27.331,2	27.310,25	256,360	255,960	255,965
0,1	27.191,5	27.041,3	27.050,30	259,460	264,978	263,885
0,2	27.114,8	27.026,6	27.021,95	263,735	267,754	268,636
0,3	27.109,7	27.012,8	27.015,37	264,575	271,886	270,674
0,4	27.104,0	27.014,1	27.011,71	265,284	272,658	272,880
0,5	27.092,7	27.007,8	27.006,34	266,030	275,000	276,198
0,6	27.068,0	27.004,9	27.006,91	268,270	278,768	275,121
0,7	27.059,0	27.004,6	27.004,92	269,970	279,225	277,408
0,8	27.051,9	27.004,8	27.005,35	272,707	281,472	277,294
0,9	27.046,9	27.004,3	27.003,79	274,930	283,133	280,016
1,0	27.037,2	27.003,9	27.003,80	276,894	282,212	283,513

Tabela 7.19 - Valores da função objetivo para o DEA de 6 geradores

α	Função Objetivo AGHCOE	Função Objetivo AC	Função Objetivo PDPCBU
0,0	256,360	255,960	255,96
0,1	5.952,664	5.942,615	5.942,52
0,2	5.633,948	5.229,53	5.229,29
0,3	8.318,112	8.294,185	8.294,08
0,4	13.000,770	10.968,432	10.968,41
0,5	16.679,65	16.641,461	16.641,27
0,6	16.348,108	16.314,447	16.314,20
0,7	19.022,291	18.986,987	18.986,66
0,8	23.696,061	23.660,134	23.659,74
0,9	24.369,703	24.332,183	24.331,41
1,0	27.037,200	27.003,953	27.003,80

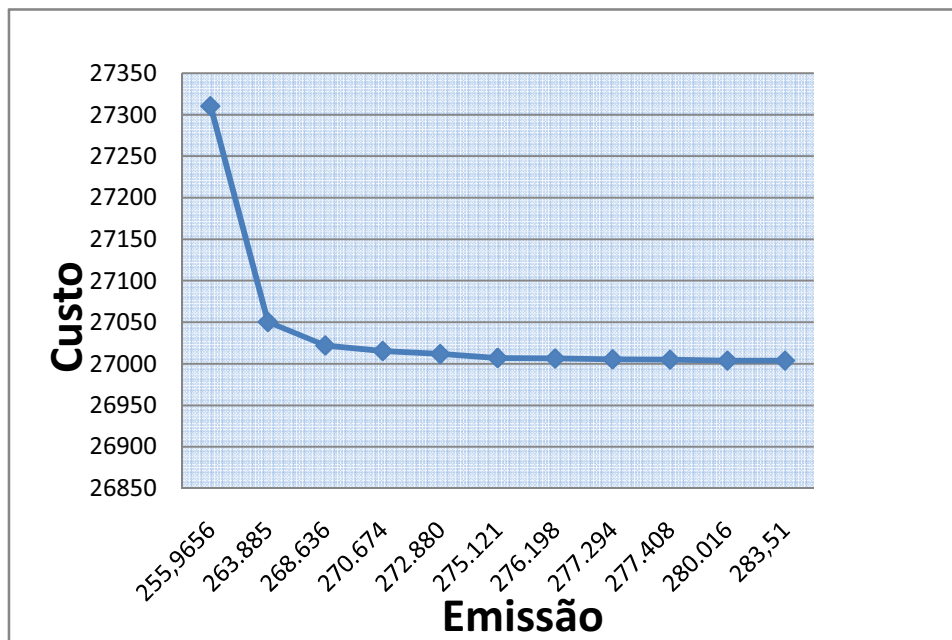


Figura 7.1 - Aproximação da Fronteira de Pareto obtida pelo PDPCBU

A estratégia de otimização do caso multiobjetivo de Despacho Econômico/Ambiental, testada pelo algoritmo PDPCBU ao modelo 6.2.9 para o caso

de 06 geradores, determinou uma trajetória de soluções vista na Figura 7.1, denominada de curva de soluções eficientes ou não dominantes, baseada na estratégia originalmente apresentada por Edgeworth e Pareto, vista no Apêndice A, que ficou conhecida como Otimalidade de Pareto.

Devido ao fato do problema multiobjetivo não apresentar uma única solução ótima, desde que a otimização de um objetivo não corresponde necessariamente ao ótimo do outro objetivo (objetivos conflitantes), determinou-se um conjunto de soluções eficientes baseado no modelo α -parametrizado multicritério visto na seção 6.2.9. Desta forma, de acordo com o valor de α pré-estimado o conflito entre os objetivos de custo mínimo e de emissão mínima são evidentes. De acordo com o gráfico mostrado na figura 7.1, à medida que α varia entre 0 e 1, têm-se a emissão mínima dominante quando $\alpha \rightarrow 0$ e o custo mínimo dominante quando $\alpha \rightarrow 1$, de acordo com a tabela 7.19. Obviamente que, quando α aumenta, a importância da função custo passa a ser preponderante em relação à função emissão com a respectiva diminuição deste, enquanto que, quando α diminui, a situação inversa é observada.

7.4 - Análise Pós-otimização: Custos Incrementais

Considere o PDE Clássico:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && Fe \\ & \text{Sujeito a :} && \sum_{i=1}^n P_i = P_D \\ & && P_i \in S \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde: $S = \{P_i \in R / P_i - P_i^{Min} \geq 0 \text{ e } P_i^{Max} - P_i \geq 0, i = 1 \dots, n\}$, em que

$$Fe = \sum_{i=1}^n a_i P_i^2 + c_i P_i + d_i .$$

O PDE clássico visto em (7.1) pode ser formulado de forma equivalente por:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && -Fe \\ & \text{Sujeito a :} && \sum_{i=1}^n P_i = P_D \\ & && P_i \in S \end{aligned} \quad (7.2)$$

O problema proposto em (7.2) é usado a seguir para realizar-se a análise pós-otimização para os modelos de DE com 3, 6 e 13 geradores, vistos nas seções 7.3.1a, 7.3.1b e 7.3.1c.

7.4.1 - A Função Lagrangiana e as Condições de KKT

Considerando-se o PDE redefinido em (7.2) têm-se a seguinte função Lagrangiana relativa a este:

$$L(P_i, w, s_i, y_i) = -Fe(P_i) + w(P_D - \sum_{i=1}^n P_i) + \sum_{i=1}^n s_i (P_i - P_i^{Min}) + \sum_{i=1}^n y_i (P_i^{Max} - P_i) \quad (7.3)$$

em que $w \in R$, $s_i \in R$ e $y_i \in R$, $i = 1, \dots, n$ são os multiplicadores de Lagrange associados a (7.3)

As condições de KKT para a equação (7.3) são expressas por:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = P_D - \sum_{i=1}^n P_i = 0 ; \quad (7.4a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = P_i - P_i^{Min} \geq 0 \text{ e } s_i (P_i - P_i^{Min}) = 0, \quad i = 1, \dots, n ; \quad (7.4b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = P_i^{Max} - P_i \geq 0 \text{ e } y_i (P_i^{Max} - P_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n ; \quad (7.4c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = Fe'(P_i) + w - s_i + y_i = 0 ; \quad (7.4d)$$

em que $Fe'_i(P_i) = \frac{\partial Fe(P_i)}{\partial P_i} = 2a_i P_i + b_i$

Na literatura, o multiplicador de Lagrange $w \in R$ é denominado de preço de energia ou preço de geração (preço de 1 Mwh) associado a (7.3) e é expresso através de (7.4d) por:

$$w = Fe'_i(P_i) - s_i + y_i \quad (7.5)$$

Enquanto que $Fe'_i(P_i)$ é denominado de custo incremental ou marginal de geração.

7.4.2 - Análise do Custo Incremental w através das Condições de KKT

Desde que P_i satisfaça a (7.4a), considerando-se as condições de KKT (7.4b) a (7.4d), existem quatro combinações possíveis de solução para (7.5):

1) Nenhuma restrição ativa:

Neste caso, $s_i = 0$, $y_i = 0$; $i = 1, \dots, n$ e de (7.5) têm-se:

$$w = Fe'_i(P_i)$$

ou seja, os custos geração (preço de energia) são iguais aos custos incrementais (marginais) para todas as componentes de P_i .

2) Restrição ativa para P_i^{Max} :

Neste caso,

$$s_i = 0 \text{ e } y_i > 0 \text{ para as componentes ativas de } P_i^{Max}$$

ou seja de (7.4c), $y_i(P_i^{Max} - P_i) = 0$ implica em $P_i^{Max} - P_i = 0$ e assim

$$P_i = P_i^{Max}.$$

$$\text{Então, } w_i = Fe'_i(P_i) + y_i.$$

Logo, o custo incremental do grupo de restrições ativas é menor que o custo de geração de energia do grupo de inativas pois:

$$Fe'_i(P_i) = w - y_i < w.$$

3) Restrição ativa para P_i^{Min} :

Neste caso,

$$y_i = 0 \text{ e } s_i > 0 \text{ para as componentes ativas de } P_i^{Min}$$

ou seja, de (7.4b), $s_i(P_i - P_i^{Min}) = 0$ implica em $P_i = P_i^{Min} = 0$ e assim:

$$P_i = P_i^{Min}.$$

$$\text{Então, } w = Fe'_i(P_i) - s_i.$$

Logo, o custo incremental do grupo de restrições ativas é maior que o custo de geração de energia do grupo de inativas pois:

$$Fe'_i(P_i) = w + s_i > w.$$

4) Ambas as restrições ativas

Neste caso $s_i > 0$ e $y_i > 0$ para estas componentes.

Assim,

$$s_i(P_i - P_i^{Min}) = 0 \Rightarrow s_i > 0 \text{ e } P_i = P_i^{Min},$$

e

$$y_i(P_i^{Max} - P_i) = 0 \Rightarrow y_i > 0 \text{ e } P_i = P_i^{Max}.$$

Isto é impossível de ocorrer, pois P_i não pode assumir os limites inferiores e superiores concomitantemente.

7.4.4 - Resultados da Análise Incremental de w para os PDE's de 03, 06 e 13 Geradores

Caso 1: PDE com 3 Geradores

Considerando-se P_i^* , $i = 1, \dots, n$, determinado na Tabela 7.2, têm-se a seguinte tabela de resultados para Fe'_i, w, s_i e y_i :

Tabela 7.20 - Análise incremental de w para o PDE com 03 geradores

Gerador	Fe'_i	s_i	y_i	w
1	9,14826	0	0	9,14826
2	9,14826	0	0	
3	9,14826	0	0	

Caso 2: PDE com 6 Geradores

Considerando-se P_i^* , $i = 1, \dots, n$, determinado na Tabela 7.6, têm-se a seguinte tabela de resultados para Fe'_i, w, s_i e y_i :

Tabela 7.21 - Análise incremental de w para o PDE com 06 geradores

Gerador	Fe'_i	s_i	y_i	w
1	43,8449	0	0	43,8449
2	48,2765	4,43164	0	
3	43,8449	0	0	
4	43,8449	0	0	
5	43,8449	0	0	
6	43,8449	0	0	

Caso 3: PDE com 13 Geradores

Considerando-se P_i^* , $i = 1, \dots, n$, determinado na Tabela 7.9, têm-se a seguinte tabela de resultados para Fe'_i , w , s_i e y_i :

Tabela 7.22 - Análise incremental de w para o PDE com 13 geradores

Gerador	Fe'_i	s_i	y_i	w
1	8,4807	0	0,2635	8,7443
2	8,5031	0	0,2411	
3	8,5031	0	0,2411	
4	8,7443	0	0	
5	8,7443	0	0	8,7443
6	8,7443	0	0	
7	8,7443	0	0	
8	8,7443	0	0	
9	8,7443	0	0	
10	8,8272	0,0828	0	8,9124
11	8,8272	0,0828	0	
12	8,9124	0,1680	0	
13	8,9124	0,1680	0	

Como era esperado, em qualquer dos casos analisados nas tabelas 7.20, 7.21 e 7.22, o valor do custo de energia (custo de geração) $w = Fe'_i(P_i) - s_i + y_i$ foi univocamente determinado, para qualquer valor de $i = 1, 2, 3$; no caso de 3 geradores; de $i = 1, \dots, 6$; no caso de 6 geradores; e $i = 1, \dots, 13$; no caso de 13 geradores.

De acordo com a tabela 7.20, para o caso de 03 geradores, determinou-se $w^* = 9,1486$ \$/MWh ($w^* = 0,0091486$ \$/kWh); em relação à tabela 7.21, para o caso de 06 geradores, determinou-se $w^* = 43,8448$ \$/MWh ($w^* = 0,0438448$ \$/kWh) e em relação à tabela 7.22, para o caso de 13 geradores, determinou-se $w^* = 8,7443$ \$/MWh ($w^* = 0,0087443$ \$/kWh). Estes seriam os custos de geração (custos incrementais) determinados pelo método PDPCBU para os PDE's de 3, 6 e 13 geradores, investigados na seção 7.3.1.

8 - CONCLUSÕES

Neste trabalho um amplo estudo sobre o estado da arte dos problemas de Despacho Econômico e Ambiental foi realizado, com o objetivo de analisar soluções de alguns modelos já investigados na literatura, através da metodologia Primal - Dual de Pontos Interiores.

Para este objetivo, no capítulo 1, fez-se uma introdução sobre o tema relativo ao DE e ao DA, contendo objetivos gerais, específicos e a organização do trabalho.

No capítulo 2, abordou-se as principais fontes de energia e principais aspectos técnicos, econômicos e ambientais sobre a geração termoe elétrica.

No capítulo 3, fez-se uma abordagem geral sobre otimização, incluindo-se a formulação dos problemas, bem como a descrição sobre métodos determinísticos e heurísticos, que podem ser usados à resolução destes.

No capítulo 5, foi proposto um método Primal – Dual de pontos interiores com procedimento previsor-corretor e busca unidimensional, para programação quadrática convexa, com variáveis canalizadas, cujo algoritmo foi implementado em Linguagem Borland Pascal 7.0 e este foi aplicado nos modelos de DE e DA, vistos no capítulo 6.

Os resultados da adaptação e aplicação dos Métodos Primal - Dual de Pontos Interiores do tipo Previsor-Corretor, com procedimento de Busca Unidimensional (PDPCBU), foram mostrados no capítulo 7. Aplicou-se o método à resolução de Problemas de Despacho Econômico (PDE), para os casos de 03, 06 e 13 geradores e Problemas de Despacho Ambiental (PDA), para o caso de 06 geradores, bem como em problemas multiobjetivo envolvendo o PDE e o PDA, para o caso de 06 geradores. Em todos os problemas abordados desconsiderou-se a existência de pontos de válvula para o PDE. Neste caso, estes problemas são

equivalentes ao problema de minimizar funcionais quadráticos, restritos a sistemas lineares de igualdade e variáveis canalizadas. Destaca-se também, a interessante análise de pós-otimização realizada na seção 7.3, do capítulo 7, quando foi realizada a investigação dos custos incrementais relativos ao PDE's de 03, 06 e 13 geradores, respectivamente.

As soluções obtidas nos casos testados foram equivalentes ou melhores àquelas soluções encontradas em [KIM *et al.*, 2002], [RODRIGUES, 2007] e [SAMED, 2004]. Os resultados determinados mostraram a eficiência do método PDPCBU para a resolução do PDE e PDA, disjuntos ou acoplados, quando comparados com os métodos considerados nestas referências. Trabalhos realizados sobre estas aplicações foram divulgados e apresentados em eventos científicos, e encontram-se indicados na bibliografia apresentada no capítulo 9.

Os resultados apresentados incentivam a busca de melhoria na implementação feita, para a obtenção de soluções promissoras relativas ao PDE com pontos de válvulas, disjunto ou acoplado ao PDA, que não foram tratados neste trabalho e é objeto de pesquisa futura, bem como, para a análise e aplicação dos métodos de pontos interiores, investigados no capítulo 5, aos modelos apresentados em 6.2.7 e 6.2.8, analisados em [SAMED, 2004], para comparação de resultados.

Neste sentido, têm-se a possibilidade de explorar a inclusão de funções potenciais à função quadrática minimizada, bem como, de procedimentos híbridos envolvendo o Método Primal - Dual de pontos interiores e Algoritmos Evolutivos, que seriam usados para a determinação de uma promissora solução inicial, pois os métodos de pontos interiores são sensíveis a esta, a qual possibilitará a melhoria de desempenho do método PDPCBU. Além destes, têm-se a possibilidade de utilizar outros métodos do tipo previsor-corretor, encontrados na literatura, que auxiliem a melhoria do desempenho dos métodos investigados neste trabalho.

Outra possibilidade é a de fazer a implementação do método PDPCBU utilizando a Linguagem de Programação C++, por ser uma linguagem mais robusta em comparação com a Linguagem Borland Pascal 7.0, utilizada neste trabalho.

9 - TRABALHOS PUBLICADOS

[BALBO e SOUZA, 2006] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** . Aplicação de um método Primal-Dual de Pontos Interiores, do tipo previsor-corretor, com estratégia de busca unidimensional, ao problema de seleção de projetos . In: DINCON 2006 - Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, 2006, Guaratinguetá. Caderno de Resumos do Dincon 2006, 2006. p. 1-4.

[BALBO et al., 2004] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores em Problemas da Análise Não-Linear de Estruturas. In: XXVII CNMAC, 2004, Porto Alegre. Resumos do XXVII CNMAC, 2004. p. 423-423.

[BALBO et al., 2005] Balbo, A. R.; **Souza, M. A. S.** . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, ao Problema de Seleção de Projetos. In: IV DINCON - Congresso Nacional em Dinâmica, Controle e Aplicações, 2005, Bauru - SP. Anais do IV - DINCON, 2005. v. 4. p. 1006-1015.

[BALBO et al., 2005a] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, ao Problema de Despacho Econômico. In: XXVIII CNMAC, 2005, São Paulo. Resumos Estendidos do XXVIII CNMAC, 2005. p. 1-7.

[BALBO et al., 2005b] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, ao Problema de Seleção de Projetos. In: IV DINCON - Congresso Nacional em Dinâmica, Controle e Aplicações, 2005, Bauru-SP. Resumos do IV DINCON, 2005. p. 23-23.

[BALBO *et al.*, 2007b] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, com procedimento de busca unidimensional ao Problema de Despacho Econômico. In: XXX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2007, Florianópolis. Anais do XXX CNMAC - in CD, 2007. p. 1-7.

[BALBO *et al.*, 2008] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Métodos primal-dual de pontos interiores aplicados à resolução de problemas de despacho econômico: sobre a influência da solução inicial. In: XL SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2008, João Pessoa - Pb. XL SBPO. Rio de Janeiro - RJ : ILTC, 2008. p. 2074-2085.

[BALBO *et al.*, 2009] Balbo, A. R. ; Baptista, E. C.; **Souza, M. A. S.** . Uma breve abordagem dos métodos de pontos interiores. Bauru-SP: Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications, 2009 (Minicurso ministrado no 8th Dincon'09).

[BALBO *et al.*, 2010] Balbo, A. R. ; Baptista, E. C.; **Souza, M. A. S.** ; Masiero, M. C. S. . Introdução aos Métodos Primal-Dual de Pontos Interiores e Aplicações 2010 (Minicurso ministrado no 9th Dincon'2010).

[SOUZA *et al.*, 2008a] **Souza, M. A. S.** ; Balbo, A. R. ; Baptista, E. C. . Aplicação de Métodos Primal-Dual de Pontos Interiores em Problemas de Despacho Econômico. In: I ERMAC - Unesp - Bauru - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2008, Bauru - SP. Resumos expandidos do I ERMAC - Bauru, 2008. p. 1-5.

[SOUZA *et al.*, 2008b] Souza, M. A. S. ; Balbo, A. R. ; Baptista, E. C. . Aplicação e um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do tipo previsor-corretor com procedimentos de busca unidimensional, em Problemas de Despacho Econômico. In: 7th DINCON - Brazilian Conference on Dynamic, Control and Applications, 2008, Presidente Prudente - SP. Anais do 7th DINCON, 2008. p. 398-403.

[SOUZA *et al.*, 2009] Souza, M. A. S. ; Balbo, A. R. ; Baptista, E. C. . Método Primal-Dual de Pontos Interiores aplicados em Problemas de Despacho Ambiental. In: 8th Brazilian Conference on Dynamics, Contro and Applications, 2009, BAURU-SP. Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Contro and Applications, 2009. v. 8. p. 1-7.

[SOUZA, 2003] M. A. S. Souza, *Aplicação de um método primal-dual de pontos interiores em um problema de variáveis canalizadas*. Monografia, Especialização em Matemática com Ênfase à Aplicação de Recursos Computacionais, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2003.

10 - REFERÊNCIAS

[ADLER et al., 1989] I. Adler, N. Karmakar, M. Resende e G. Veiga, *An Implementation of Karmakar's algorithm for linear Programming*, Math Programming-pp. 297-335, 1989.

[ANEEL, 2010] <<http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/OperacaoCapacidadeBrasil.asp>>. Acessado em 02.09.2010

[BAKHTIARI, 2003] BAKHTIARI S., TITS A. L., (2003). *A simple primal-dual feasible interior-point method for nonlinear programming with monotone descent*. Computational Optimization and Applications, v.25, p. 17 – 38, 2003.

[BALBO e SOUZA, 2006] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** . Aplicação de um método Primal-Dual de Pontos Interiores, do tipo previsor-corretor, com estratégia de busca unidimensional, ao problema de seleção de projetos . In: DINCON 2006 - Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, 2006, Guaratinguetá. Caderno de Resumos do Dincon 2006, 2006. p. 1-4.

[BALBO et al., 2004] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores em Problemas da Análise Não-Linear de Estruturas. In: XXVII CNMAC, 2004, Porto Alegre. Resumos do XXVII CNMAC, 2004. p. 423-423.

[BALBO et al., 2005] Balbo, A. R.; **Souza, M. A. S.** . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, ao Problema de Seleção de Projetos. In: IV DINCON - Congresso Nacional em Dinâmica, Controle e Aplicações, 2005, Bauru - SP. Anais do IV - DINCON, 2005. v. 4. p. 1006-1015.

[BALBO et al., 2005a] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, ao Problema de Despacho Econômico. In: XXVIII CNMAC, 2005, São Paulo. Resumos Estendidos do XXVIII CNMAC, 2005. p. 1-7.

[BALBO et al., 2005b] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, ao Problema de Seleção de Projetos. In: IV DINCON - Congresso Nacional em Dinâmica, Controle e Aplicações, 2005, Bauru-SP. Resumos do IV DINCON, 2005. p. 23-23.

[BALBO et al., 2007a] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, com procedimento de busca unidimensional ao Problema de Despacho Econômico. In: XXX CNMAC, 2007, Florianópolis. Resumos do XXX CNMAC, 2007. p. 1-2.

[BALBO et al., 2007b] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, com procedimento de busca unidimensional ao Problema de Despacho Econômico. In: XXX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2007, Florianópolis. Anais do XXX CNMAC - in CD, 2007. p. 1-7.

[BALBO et al., 2008] Balbo, A. R. ; **Souza, M. A. S.** ; Baptista, E. C. . Métodos primal-dual de pontos interiores aplicados à resolução de problemas de despacho econômico: sobre a influência da solução inicial. In: XL SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2008, João Pessoa - Pb. XL SBPO. Rio de Janeiro - RJ : ILTC, 2008. p. 2074-2085.

[BALBO et al., 2008] A.R. Balbo, **Souza, M. A. S.**, E. C. Baptista, *Métodos primal-dual de pontos interiores aplicados à resolução de problemas de despacho econômico: sobre a influência da solução inicial*. In: XL SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2008, João Pessoa - Pb. Anais do XL SBPO. Rio de Janeiro - RJ: ILTC, 2008. p.2074 – 2085.

[BALBO et al., 2009] Balbo, A. R. ; Baptista, E. C.; **Souza, M. A. S.** . Uma breve abordagem dos métodos de pontos interiores. Bauru-SP: Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications, 2009 (Minicurso ministrado no 8th Dincon'09).

[BALBO et al., 2010] Balbo, A. R. ; Baptista, E. C.; **Souza, M. A. S.** ; Masiero, M. C. S. . Introdução aos Métodos Primal-Dual de Pontos Interiores e Aplicações 2010 (Minicurso ministrado no 9th Dincon'2010).

[BAPTISTA et. al., 2006] Baptista, E. C., BELATI, E. A., SOUSA, V.A., COSTA G.R.M.. *Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems*. Electric Power Components and Systems, v. 34, n. 7, p. 775-784, 2006.

[BAPTISTA, 2001] BAPTISTA E. C. (2001). *Método da função lagrangiana aumentada-barreira logarítmica para solução do problema de fluxo de potência ótimo*. Tese de doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2001.

[BARNES, 1984] E. R. Barnes, *A variation of Karmakar's algorithm for solving linear programming problems*, Mathematical Programming 36, 174-182, 1984.

[BARNES, 1986] BARNES E. R. (1986). A variation of Karmakar's algorithm for solving linear programming problems, Mathematical Programming 36, 174 – 182, 1986.

[BASTOS, 1997] BASTOS, L. C. Power, solidarity and the construction of request in service encounters. The Specialist, vol. 17, nº 2, 1997.p.151-174.

[BAZARAA et al., 1993] BAZARAA, M.S.; Sherali,H.D.; Shetty,C.M. Non Linear Programming- Theory and Algorithm., Second Edition. New York: John Wiley & Sons, 1993.

[BERTSEKAS, 1999] BERTSEKAS, D.P. Nonlinear Programming. 2 ed. Massachusetts: Athena Scientific, 1999.

[BORCHES e MITCHELL, 1992] BORCHES, B., MITCHELL, J. E. “*Using an Interior Point Methods in a Branch and Bound Algorithm for Integer Programming*”. Technical Report 195, Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180, March 1991. Revised July 7, 1992.

[BREITFELD e SHANNO, 1996] BREITFELD M. G., SHANNO D. F. (1996). *Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming*. Annals of Operations Research, v. 62, p. 439 – 463, 1996.

[BREITFELD e SHANNO, 1996] BREITFELD M. G., SHANNO D. F. *Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming*. Annals of Operations Research, v. 62, p. 439 – 463, 1996.

[CARPENTIER, 1962] Carpentier, J. L.. "Contribution a l'etude du dispatching economique. *Bull-Soc. Fr Elec.*, Ser. B3, 431-447, 1962.

[CARROL, 1961] CARROL, C.W. The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems. *Operations Research*, v9, 169-184, 1961.

[CHEN e VASSILIADIS, 2003] CHEN, T.W.C.; VASSILIADIS, V.S. Solution of General Nonlinear Optimization Problemas using the Penalty/Modified Barrier Method with the use of Exact Hessians. *Computers & Chemical Engineering*, 27, 501-525, 2003.

[COELLO, 2007] COELLO, C.A.C., LAMONT, G.B., VELDHUIZEN, D.A.V. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems. Springer, 2007.

[CORREA NETO, 2001] CORREA NETO, V. Análise de viabilidade da cogeração de energia elétrica em ciclo combinado com gaseificação de biomassa de cana-de-

açúcar e gás natural. 2001. 174 f. Tese (Doutorado em Planejamento Energético) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2001.

[DEB, 2004] DEB, K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. John Wiley & Sons Ltd., 2004.

[DIKIN, 1967] I. I. Dikin, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming* (in Russian), *Doklady Akademii Nauk USSR* 174, 747-748, Soviet Mathematics Doklady 8, 674-675, 1967.

[EL- HAWARY et. al, 1992] EL-HAWARY M. E., EL- HAWARY F., G. A. N. MBAMALU. *NO_x emission performance models in electric power system*. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, vol II, p. MA 8.11.1, 1992.

[FANG e PUTHENPURA, 1993] S. C. Fang e S. Puthenpura, “Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[FARRER et. al. 1993] Farrer, H., Becker, C. G., Faria, E. C., Campos, F. F., Matos, H. F., Santos, M. A., Maia, M. L., Pascal Estruturado. Programação Estruturada de Computadores, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Minas Gerais, Brasil, 1999

[FIACCO e McCORMICK, 1968] FIACCO A. V., McCORMICK G. P. (1968). *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*. New York, John Wiley & Sons. 1968.

[FIACCO, 1990] FIACCO A. V., McCORMICK G. P. (1990). *Nonlinear programming: sequential unconstrained optimization techniques*, Philadelphia, SIAM. (Classic in Applied Mathematics, v.4), 1990.

[FLORENTINO, 2006] Florentino Florentino, H. O. . Programação linear inteira em problemas de aproveitamento da biomassa residual de colheita da cana-de-açúcar.

2006, 64f. Tese (Livre Docência) Instituto de Biociências de Botucatu - Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP., 2006.

[FRISCH, 1955] FRISCH, K. R. The Logarithmic Potential Method of Convex Programming. University Institute of Economics (manuscript). Oslo, Norway, 1955.

[GASS, 1955] GASS, S., SAATY, T. The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function. Naval Research Logistic Quarterly. Vol. 1 e 2, p. 39-45, 1955.

[GENT e LAMONT , 1971] GENT M. R., LAMOT J. W. (1971). *Mimumum-emission dispatch*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 3 Vol. PAS-90, n°6, pp. 2650-2660, 1971.

[GONZAGA, 1989] C. Gonzaga, *An algoritthm for solving linear programming problems in $O(n^3L)$ operations in Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods*, ed. N. Megiddo, Springer-Verlag, New York, 1-28, 1989.

[GONZAGA, 1990] C. Gonzaga, *Polynomial affine algorithms for linear programming*, Mathematical Programming 49, 7-21, 1990.

[HAPP, 1977] HAPP H. H. (1977). *Optimal Power Dispatch -Comprehensive Survey*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 3 Vol.96, 841-854, 1977.

[INDESA, 2010] <wp.net.ipl.pt/deea.isel/jsousa/Doc/.../T1_Depacho_Economico_ER.pdf> Acessado em 10.05.2010

[JANNUZI E SWISHER, 1997] ,Jannuzzi, G. De M. and J. Swisher, 1997. Planejamento Integrado de Recursos Energéticos: meio ambiente, conservação de energia e fontes renováveis. Ed. Autores Associados, Campinas.

[KAPLAN, 1983] KAPLAN, S. Energy Economics Quantitative Methods for Energy and Environmental Decision. Mac Graw Hill, 1983.

[KARMARKAR, 1984] N. Karmakar, *A new polynomial time algorithm for linear programming*, *Combinatoria* 4, 373-395, 1984.

[KIM et al., 2002] J.O. Kim, D. J. Shin, J.N. Park and C. Singh, Atavistic Genetic algorithm for economic dispatch with valve point effect, *Electric Power Systems Research*, 62, (2002) 201-207.

[KOJIMA et al., 1989] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, *A primal dual - interior point method for linear programming*, in *Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods*, Ed. N. Megiddo, Springer-Verlag, New York, 29-48, 1989.

[KOOPMANS, 1951] KOOPMANS, T.C. Analysis of production as an efficient combination of activities. *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, New York. p. 33-97, 1951.

[KUNH e TUCKER, 1951] KUHN, H.W., TUCKER, A.W. Non linear programming. *Proceedings of the Second Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, . University of California Press, Berkeley. p.481-491, 1951.

[LOPES, 2009] A.M. Uma Abordagem Multiobjetivo para o Problema de Corte de Estoque Unidimensional. Dissertação de mestrado, IBILCE UNESP, 2009.

[LUKSAN, 2004] LUKSAN, L.; MATONHA, C.; VLCEK, J. Interior-point method for non-linear non-convex optimization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 11, 5-6, 431-453, 2004.

[LUSTIG, 1995] I.J. Lustig, R. E. Marsten and D. F. Shanno, *On Implementing Mehrota's Predictor-Corrector Interior Point Method for Linear Programming*, *SIAM Journal on Optimization*, vol. 2, pp. 435-449, 1995.

[MACHADO, 1998] Machado, A. C., *Pensando a Energia*. Rio de Janeiro: ELETROBRÁS, 1998.

[MEGIDDO e SHUB, 1989] N. Megiddo and M. Shub, *Boundary behavior of interior point algorithms in linear programming*, Mathematics of Operations Research 14, 97-146, 1989.

[MEGIDDO, 1987] N. Megiddo, *On the complexity of linear programming*, in Advances in Economical Theory, ed. Bewely, Cambridge University Press, Cambridge, 225-268, 1987.

[MEHROTRA e SUN, 1990] S. Mehrotra, and J. Sun, *An algorithm for convex quadratic programming that requires $O(n^{3.5} L)$ arithmetic operations*, Mathematics of Operations Research 15, 342-363, 1990.

[MIETTINEN, 1999] MIETTINEN, K. Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston: Kluwer. 1999.

[MILLER, 1987] MILLER, R. H. **Operação de sistemas de potência**. São Paulo : McGraw-Hill, 1987.

[MONTEIRO e ADLER, 1989] R.D.C. Monteiro and I. Adler, *Interior Path-Following Primal-Dual Algorithms. Part I: Linear Programming, Part II: Convex Quadratic Programming*, Mathematical Programming, 44, 27-66, 1989.

[MONTEIRO et al., 1990] R. C. Monteiro, I. Adler e M. C. Resende, *A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power séries extension*, Mathematics of Operations Research 15, 191-214, 1990.

[PARETO, 1986] PARETO, V. Cours d'Economic Politique. Lausanne: Rouge, França. .1896. 430 p.

[PEREIRA, 2007] PEREIRA A. A. (2007). *O método da função lagrangiana barreira modificada/penalidade*. Dissertação mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2007.

[PINTO, 1999] PINTO, L. A., *Métodos de Pontos Interiores para Programação Inteira*, Dissertação de Mestrado, Ibilce-Unesp, 1999.

[POLYAK , 1992] POLYAK R. A. (1992). *Modified barrier functions*. Mathematical Programming, v. 54, n. 2, p. 177 – 222, 1992.

[RENEGAR, 1988] J. Renegar, *A polynomial-time algorithm based on Newton's method for linear programming*, Mathematical Programming 40, 59-93, 1988.

[RODRIGUES, 2007] Rodrigues, N. M.. Um algoritmo cultural para problemas de despacho de energia elétrica, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá – Pr, 2007.

[SAMED, 2004] M.M.A. Samed, “Um Algoritmo Genético Híbrido Co-Evolutivo para Resolver Problemas de Despacho”, Tese de Doutorado, UEM, Depto. de Engenharia Química, Agosto de 2004, 167 p.

[SHANNO e VANDERBEI, 2000] SHANNO D. F., VANDERBEI R. J. (2000). Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: orderings and higher-order methods. Mathematical Programming, Ser. B, v-87, p.303-316, 2000.

[SOUZA et al., 2008a] Souza, M. A. S. ; Balbo, A. R. ; Baptista, E. C. . Aplicação de Métodos Primal-Dual de Pontos Interiores em Problemas de Despacho Econômico. In: I ERMAC - Unesp - Bauru - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2008, Bauru - SP. Resumos expandidos do I ERMAC - Bauru, 2008. p. 1-5.

[SOUZA et al., 2008b] Souza, M. A. S. ; Balbo, A. R. ; Baptista, E. C. . Aplicação e um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do tipo previsor-corretor com procedimentos de busca unidimensional, em Problemas de Despacho Econômico.

In: 7th DINCON - Brazilian Conference on Dynamic, Control and Applications, 2008, Presidente Prudente - SP. Anais do 7th DINCON, 2008. p. 398-403.

[SOUZA *et al.*, 2009] Souza, M. A. S. ; Balbo, A. R. ; Baptista, E. C. . Método Primal-Dual de Pontos Interiores aplicados em Problemas de Despacho Ambiental. In: 8th Brazilian Conference on Dynamics, Contro and Applications, 2009, BAURU-SP. Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Contro and Applications, 2009. v. 8. p. 1-7.

[SOUZA, 2003] M. A. S. Souza, *Aplicação de um método primal-dual de pontos interiores em um problema de variáveis canalizadas*. Monografia, Especialização em Matemática com Ênfase à Aplicação de Recursos Computacionais, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2003.

[STEINBERG e SMITH, 1943] M.J.C Steinberg; T.H. Smith, “Economic Loading of Power Plants and Electric Systems”, MacGraw-Hill, 1943.

[TORGERSON, 1958] TORGERSON, W.S. Theory and Methods of Scaling. Wiley, New York. 1958.

[VAIDYA, 1990] P. M. Vaidya, *An algorithm for linear programming which requires $O(((m + n)n^2 + (m + n)^{1.5}n)L)$ arithmetic operations*, Mathematical Programming 47, 175-2001, 1990.

[VANDERBEI E FREEDMAN, 1984] R.J. Vanderbei, M. S. Meketon, e B. Freedman, A., *A modification of Karmarkar's linear programming algorithms*, Algorithmica 1, 395-407, 1984.

[VASSILIADIS e BROOKS, 1998]. VASSILIADIS V. S., BROOKS S. A. *Applications of the modified barrier method in large-scale quadratic programming problems*. Computer and Chemical Engineering 22, 1197 – 1205, 1998.

[VASSILIADS e FLOUDAS, 1997] VASSILIADS, V.S; FLOUDAS,C.A. The modified barrier function approach for large-scale optimization. *Computer and Chemical Engennering*, 21, 855-874, 1997.

[WEEDY, 1973] WEEDY, B. M. Sistemas eletricos de potencia. Sao Paulo: Poligono, 1973. 363p p.

[WOOD e WOLLENBERG, 1984] WOOD, A. J., WOLLENBERG, B. F., Power Generation, Operation and Control. Editora John Wiley & Sons, Inc., 1.984.

[WRIGHT, 1997] S. J. Wright, *Primal-Dual Interior Point Methods*, SIAM Journal, 289-304, 1997.

[WU et al., 1994] Y.C. Wu, A.S. Debs e R.E. Marsten, *A direct nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows*, IEEE Transactions on Power Systems, 9, No.2, 876-883, 1994.

[YE, 1984] Y. Ye, *An $O(n^3 L)$ potential reduction algorithm for linear programming*, Contemporary Mathematics, 114, 91-107, 1984.

[ZELENY, 1974] ZELENY, L. Linear multiobjective programming. Springer Verlag, New York, 1974.

[ZELENY, 1982] ZELENY, L. Linear multiple criteria Decision making. MacGraw-Hill, New York, 1982.

PROBLEMAS MULTIOBJETIVOS

A.1 - Introdução

Segundo [FLORENTINO, 2006], a análise de problemas multiobjetivos desenvolveu-se nas três áreas: pesquisa operacional, econômica e filosófica. Na pesquisa operacional, o trabalho de [KUHN e Tucker, 1951] deu a base para o desenvolvimento de vários algoritmos na programação multiobjetivo e foi [GASS e SAATY, 1955] que apresentaram a primeira aplicação para esta área. Na economia, [KOOPMANS, 1951] foi o pioneiro no uso do conceito de “Pareto ótimo” (dominância), para um problema de alocação de recursos multiobjetivo. Pareto-ótimo é o estado no qual nem um objetivo pode ser melhorado sem piorar qualquer outro. Este conceito foi introduzido pelo economista Vilfredo Pareto em [PARETO, 1896], como uma definição qualitativa da otimalidade em problemas na economia [COELLO, 2003]. A contribuição inicial na área filosófica para a programação multiobjetivo foi dada por [TORGERSON, 1958] para auxílio em problemas de decisão entre várias alternativas.

Define-se um problema de otimização multiobjetivo, um problema modelado matematicamente na forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z(x) \\ \text{Sujeito a:} & x \in X \end{array} \quad (\text{MOP})$$

onde $x \in R^{n \times 1}$, $Z(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x))$ é o vetor de funções objetivo (chamado vetor critério) e X é o conjunto de soluções factíveis (ou conjunto de busca viável).

Para o problema MOP (*Multiobjective Optimization Problem*), uma solução $v \in X$ domina uma solução $u \in X$ (diz-se também que a solução u é dominada por v) se para pelo menos um objetivo é verificado que a avaliação da solução v é superior a de u . Ou seja, $Z_i(v) \leq Z_i(u), i = 1, \dots, T$ e existe pelo menos um índice j tal que $Z_j(v) < Z_j(u)$. O conjunto pareto-ótimo é o conjunto de todas as soluções que não são dominadas por nenhuma outra.

O objetivo dos Métodos baseados em Estratégia de Pareto é encontrar um conjunto de soluções não-dominadas, chamado conjunto pareto-ótimo, que na

literatura também recebe os nomes: conjunto eficiente, conjunto de soluções não dominadas [ZELENY,1974] e , [ZELENY,1982].

A seguir serão apresentados alguns elementos da teoria de otimização multiobjetivo e posteriormente serão descritos alguns métodos para resolução do modelo MOP.

A.2 - Elementos da Programação Multiobjetivo

A.2.1 - Soluções Ótimas de Pareto

Quando se compara duas soluções de MOP e não se pode afirmar qual delas é melhor em relação aos objetivos envolvidos, diz-se que estas soluções são *não dominadas* (uma em relação à outra). As soluções que não são dominadas em relação a todas as outras, são chamadas *soluções ótimas de Pareto* e formam o *conjunto de Pareto*. Nestas soluções nenhum objetivo pode ser melhorado sem que os demais piorem.

A.2.2 - Espaço Decisão, Espaço Objetivo e Fronteira Pareto

Os elementos do conjunto X constituem o espaço das variáveis de decisão ou simplesmente *espaço de decisão*. Para cada solução x no espaço de decisão existe um ponto correspondente $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x))$, o conjunto de todos estes pontos, quando x percorre X constituem o espaço das funções objetivos, ou simplesmente espaço objetivo.

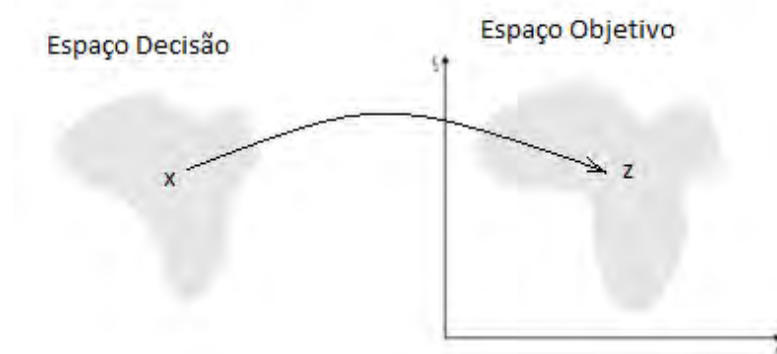


Figura A1- Esquematização dos espaços decisão e objetivo (LOPES, 2009)

A fronteira no espaço objetivo, determinada pelas soluções não dominadas é chamada *fronteira ótima de Pareto*, *fronteira de Pareto* ou *frente de Pareto*.

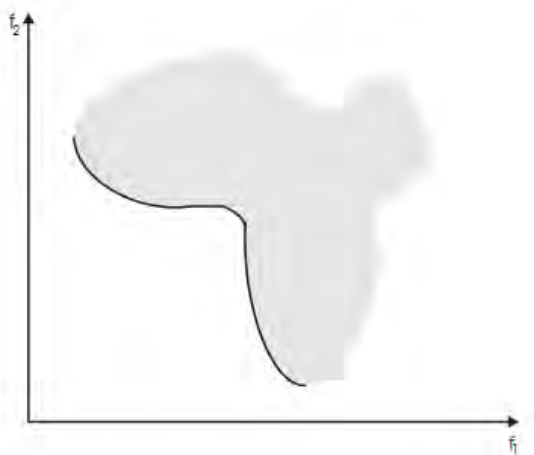


Figura A2- Fronteira de Pareto (LOPES, 2009)

A.2.3 - Metas da Programação Multiobjetivo

Foi visto que quando duas soluções são comparadas e uma delas é melhor que a outra em relação a todos os objetivos envolvidos, diz-se que esta solução domina a outra. Sendo assim existe pelo menos uma solução no conjunto de Pareto que domina qualquer outra solução que não pertence a este conjunto, ou seja, é melhor em relação a todos os objetivos envolvidos. Pode-se dividir qualquer conjunto finito de soluções factíveis X , nos conjuntos de soluções ótimas de Pareto e não ótimas. Comparando cada solução duas a duas, o conjunto X pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos X_1 e X_2 , de forma que X_1 contenha todas as soluções não dominadas e X_2 contenha todas as soluções dominadas. O conjunto X_1 é chamado de *conjunto não dominado* e X_2 de *conjunto dominado*. Sendo assim, para que o conjunto X_1 seja não dominado, as seguintes condições devem ser verdadeiras: quaisquer duas soluções de X_1 devem ser não dominadas (uma em relação a outra) e qualquer solução que não pertence a X_1 é dominada por pelo menos uma solução de X_1 .

Todas as soluções ótimas de Pareto são igualmente importantes e deve-se encontrar o maior número possível destas soluções. Assim pode-se definir duas metas na otimização multiobjetivo:

- Encontrar um conjunto de soluções o mais próximo possível da fronteira ótima de Pareto;
- Encontrar um conjunto de soluções não dominadas o mais diverso possível.

Desta forma tem-se uma variedade de soluções ótimas com diferentes valores para a função objetivo.

Destas duas metas é que vem a dificuldade adicional da otimização multiobjetivo. Pois quando os objetivos são conflitantes, existem várias soluções ótimas de Pareto.

A.2.4 - Conjunto de Pareto Ótimo Local e Global

- O conjunto não dominado de toda a região factível X é o conjunto ótimo global de Pareto.
- Se para cada elemento x em um conjunto P não existe uma solução y (na vizinhança de x , de forma que $\|y - x\|_{\infty} \leq \beta$, com $\beta > 0$ pequeno) que domina qualquer elemento de P , então os elementos de P constituem o conjunto ótimo de Pareto local.

A.2.5 - Vetor Objetivo Ideal

O vetor construído com o ótimo de cada função objetivo é chamado **vetor objetivo ideal**. A figura 3 ilustra este vetor.

A t -ésima componente do vetor objetivo ideal z^* é a solução para o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f_t(x) \\ \text{Sujeito a:} & x \in X \end{array}$$

Sendo a solução para a t -ésima função objetivo é x^{t*} com valor f_t^* para a função objetivo, ou seja $\text{Minimizar } f_t(x) = f_t(x^{t*}) = f_t^*$, x^{t*} pertencente a X , o vetor ideal é:

$$z^* = f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)$$

Quando se tem objetivos conflitantes este vetor corresponde a um solução inexistente, mas ele é utilizado em muitos algoritmos de otimização multiobjetivo.

A.2.6 - Vetor Objetivo Utópico

Em um problema de minimização o *vetor objetivo utópico* z^{**} é um vetor que tem cada uma de suas componentes estritamente menores do que as do vetor ideal, ou $z_i^{**} = z_i^{*-t}$, com $t > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, T$. A figura 3 ilustra este vetor.

Assim como o vetor ideal, este vetor também representa uma solução inexistente.

A.2.7 - Vetor Objetivo Nadir

Ao contrário do vetor ideal que para um problema de minimização representa o limitante inferior de cada objetivo, o vetor Nadir Z^{nad} representa um limitante superior de cada objetivo no conjunto ótimo de Pareto, conforme mostra a figura 3. Para duas funções objetivo, se $z^{*(1)} = (f_1(x^{*(1)}), f_2(x^{*(1)}))$ e $z^{*(2)} = (f_1(x^{*(2)}), f_2(x^{*(2)}))$ são coordenadas das soluções mínimas de f_1 e f_2 respectivamente, então o vetor Nadir pode ser estimado como

$$z^{nad} = (f_1(x^{*(2)}), f_2(x^{*(1)}))$$

Este vetor, que é muito difícil de ser calculado, pode representar uma solução existente ou não e pode ser usado para a normalização das funções

objetivo da seguinte forma $f_i^{norm} = \frac{f_i - Z_i^*}{Z_i^{nad} - Z_i^*}$.

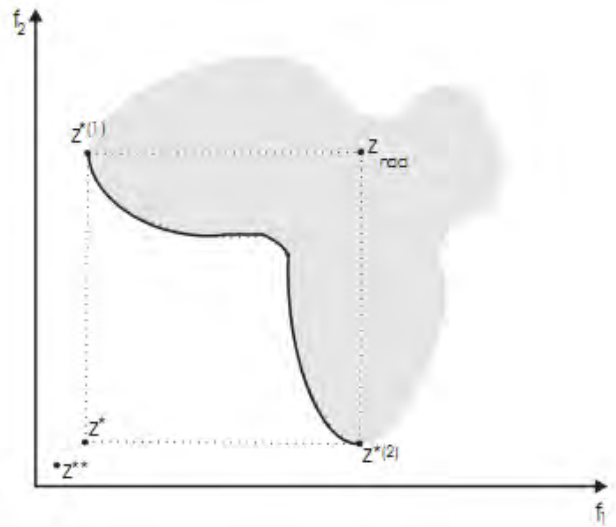


Figura A3- Vetores Z^* , Z^{**} e Z^{nad} (LOPES, 2009)

A.2.8 - Dominância

- O operador $\triangleleft$ será utilizado para denotar qual solução é melhor em relação a um objetivo, por exemplo, $i \triangleleft j$ significa que a solução i é melhor que a solução j em um objetivo específico.

- Diz-se que uma solução $x^{(1)}$ domina uma solução $x^{(2)}$, se as condições abaixo são verdadeiras.

- i) A solução $x^{(1)}$ não é pior que a solução $x^{(2)}$ em relação a todos os objetivos, ou $f_t(x^{(1)}) \not\geq f_t(x^{(2)})$ para todo $t \in \{1, 2, \dots, p\}$.

- ii) A solução $x^{(1)}$ é estritamente melhor do que $x^{(2)}$ em pelo menos um objetivo, ou $f_t(x^{(1)}) \triangleleft f_t(x^{(2)})$ para pelo menos um $t \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Se alguma das condições acima for violada, a solução $x^{(1)}$ não domina a solução $x^{(2)}$. Se $x^{(1)}$ domina $x^{(2)}$, valem as seguintes afirmações.

- $x^{(2)}$ é dominada por $x^{(1)}$;
- $x^{(1)}$ não é dominada por $x^{(2)}$, ou;
- $x^{(1)}$ não é inferior a $x^{(2)}$.

Uma solução $x^{(1)}$ **domina fortemente** $x^{(2)}$ (ou $x^{(1)} \prec x^{(2)}$, se a solução $x^{(1)}$ é estritamente melhor do que $x^{(2)}$ em todos os objetivos.

Considerando um conjunto de soluções P , o conjunto de soluções **fracamente não dominado** P' é aquele onde as soluções não são fortemente dominadas por qualquer outro membro de P .

Destas duas definições, conclui-se que a cardinalidade do conjunto fracamente não dominado é maior ou igual a cardinalidade do conjunto não dominado.

A.3 - Métodos de Resolução de Problemas de Programação Multiobjetivo

Muitas aplicações reais de otimização envolvem múltiplos critérios de avaliação, ou seja, múltiplos objetivos. Otimizar cada objetivo separadamente não produz bons resultados, pois em geral os objetivos são conflitantes, ou seja, a otimização de um, leva os demais objetivos a não serem satisfeitos. Portanto, a resolução deste tipo de problema não é tarefa fácil, os métodos consistem na busca de um conjunto de soluções eficientes.

Os Métodos baseados em Estratégia de Pareto buscam determinar o conjunto pareto-ótimo e o tomador de decisões avalia qual é a melhor solução para o problema (MOP) dependendo do seu interesse e visando a resolução do problema real. Qualquer que seja o critério para avaliação da solução, é garantido que a melhor solução faz parte desse conjunto. A avaliação final de uma solução pode levar em consideração o número de soluções que ela domina.

Existem hoje diferentes métodos para avaliação das soluções de problemas multiobjetivos. Alguns autores dividem estes métodos em duas classes: métodos clássicos e métodos heurísticos. São chamados métodos clássicos aqueles que utilizam estratégias diretas ou exatas. Os métodos heurísticos fazem uso de algum algoritmo heurístico.

Os métodos clássicos podem ser classificados em métodos de geração, quando geram um conjunto de soluções eficientes (não-dominadas) e o decisor escolhe a solução de sua preferência, e métodos baseados em preferências, os quais utilizam alguma preferência em termos dos objetivos.

Na solução de problemas multiobjetivo, dois aspectos importantes podem ser levados em conta, a busca de soluções e a tomada de decisões. O primeiro

aspecto refere-se ao processo de otimização na qual a busca é direcionada para as soluções ótimas de Pareto. Como no caso da otimização mono-objetivo, a busca pode tornar-se difícil devido ao tamanho e a complexidade do espaço de busca, podendo inviabilizar o uso de métodos clássicos. O segundo aspecto refere-se à tomada de decisões e envolve a seleção de um critério adequado para a escolha de uma solução do conjunto ótimo de Pareto. Neste caso é necessário que o decisor faça uma ponderação (*trade-off*) dos objetivos conflitantes. Segundo [DEB, 2004], a partir do ponto de vista do decisor, os métodos de otimização multiobjetivo também podem ser classificados em três categorias: Métodos *a-priori*, Métodos *a-posteriori*, Métodos iterativos.

Os métodos *a-priori* são caracterizados pela participação do decisor antes do processo de busca de soluções, ou seja, antes de resolver o problema. Em alguns métodos *a-priori*, os objetivos do problema são combinados em um único objetivo. Isto requer a determinação explícita de pesos para refletir a preferência de cada objetivo. A vantagem deste método é que podem ser aplicadas estratégias clássicas de otimização mono-objetivo sem nenhuma modificação. Em outros métodos, os objetivos são classificados em ordem decrescente de prioridade. Feito isto, o problema é resolvido para o primeiro objetivo sem considerar os demais. A seguir, o problema é resolvido para o segundo objetivo sujeito ao valor ótimo encontrado para o primeiro objetivo. Esse processo é continuado até que o problema seja resolvido para o último objetivo, sujeito aos valores ótimos dos outros objetivos.

Nos métodos *a-posteriori*, o processo de decisão é feito logo após a realização da busca de soluções (que é feita através da escolha de algoritmos adequados). A busca é feita, considerando-se que todos os objetivos são de igual importância. Ao final do processo da busca tem-se um conjunto de soluções aproximadas ou ótimas de Pareto. A partir deste conjunto, o responsável pelas decisões deve selecionar uma solução que representa a solução adequada do problema.

Já nos métodos iterativos o responsável pela decisão intervém durante o processo de otimização, articulando preferências e guiando a busca para regiões onde existam soluções de interesse.

Muitos dos métodos clássicos sugerem uma maneira de converter o problema de otimização multiobjetivo em um problema mono-objetivo, que deve ser

então resolvido com um algoritmo apropriado. Na maioria dos casos uma solução ótima de Pareto é encontrada, mas para encontrar **N** diferentes soluções ótimas de Pareto, pelo menos **N** diferentes problemas mono-objetivo devem ser resolvidos. Alguns algoritmos não garantem encontrar solução ótima de Pareto em toda região. Além disso, cada um destes métodos envolve muitos parâmetros que devem ser definidos pelo usuário. Por outro lado eles apresentam algumas vantagens, e por isso são usados para resolver problemas reais. A prova de convergência é a principal vantagem destes métodos. Dois destes métodos são discutidos a seguir.

A.4 - Métodos Clássicos

A.4.1 - Método da Soma Ponderada

No método da soma ponderada cada objetivo é multiplicado por um peso e então todos são somados em uma única função objetivo. Este método é o mais simples e dentre os métodos clássicos é o mais utilizado na otimização multiobjetivo.

O peso de cada função objetivo é escolhido de acordo com sua importância. Em geral todos os objetivos são normalizados e uma função $F(x)$ é formada somando todos os objetivos, resultando no seguinte problema de otimização mono-objetivo (A.1):

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & F(x) = \sum_{m=1}^M w_m f_m(x) \\
 \text{Sujeito a :} \quad & g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \\
 & h_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \\
 & x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde $w_m \in [0,1]$ é o peso associado à t -ésima função objetivo. O problema não se altera se todos os pesos forem multiplicados por uma constante. Assim, normalmente todos os pesos são escolhidos de forma que a soma destes seja igual

a 1 ou seja $\sum_{i=1}^T w_i = 1$.

Para o problema (A.1) tem-se os seguintes teoremas.

Teorema: A solução para o problema (A.1) é ótima de Pareto se o peso for positivo para todos os objetivos.

Prova: [MIETTINEN, 1999].

Este teorema é válido para qualquer problema multiobjetivo de minimização. Entretanto, não implica que qualquer solução ótima de Pareto possa ser obtida usando um vetor peso positivo.

Teorema: Se x^* for uma solução ótima de Pareto para um problema de otimização multiobjetivo convexo, então existe um vetor positivo diferente de zero w tal que x^* é solução para o problema (A.1).

Prova: [MIETTINEN, 1999].

Este teorema sugere que para um problema convexo, qualquer solução ótima de Pareto pode ser encontrada por este método. Esta é sua principal vantagem, além de ser intuitivo e fácil de utilizar. Em problemas onde existem objetivos de maximização e de minimização, todos os objetivos devem ser convertidos no mesmo tipo.

Diferentes vetores pesos não fornecem necessariamente diferentes soluções ótimas de Pareto. Em alguns problemas, podem existir múltiplas soluções ótimas para um vetor peso específico e cada uma dessas soluções podem representar soluções diferentes no conjunto ótimo de Pareto. Entretanto, quando se tem um espaço não convexo, algumas soluções ótimas de Pareto podem não ser encontradas.

Este método é muito eficiente computacionalmente, e pode ser usado para gerar uma solução fortemente não dominada que pode ser usada como ponto de partida para outros métodos. A dificuldade com este método é determinar apropriadamente os pesos quando não se tem informações suficientes para o problema.

A.4.2 – Método do ϵ -restrito

Para contornar as dificuldades observadas no método anterior, em relação a espaços não convexos, tem-se o método ϵ -restrito. Este método mantém apenas uma função objetivo (geralmente a mais importante) e restringe as outras por um valor pré-definido. O problema modificado pode ser dado na seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f_{\mu}(x), \\
\text{Sujeito a :} & f_m(x) \leq \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \text{ e } m \neq \mu \\
& g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \\
& h_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \\
& x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{array} \tag{A.2}$$

O teorema a seguir mostra a grande vantagem deste método, tanto para espaços convexos quanto para não convexos.

Teorema: Se existir uma única solução para o problema (A.2), esta é ótima de Pareto para qualquer vetor $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu-1}, \varepsilon_{\mu+1}, \dots, \varepsilon_T)^T$

Prova: [MIETTINEN, 1999].

Outra vantagem deste método é que diferentes soluções ótimas de Pareto podem ser encontradas usando diferentes valores de ε_m , ele geralmente encontra soluções fracamente não dominadas, entretanto se a solução ótima é única, então esta solução é fortemente não dominada. Como desvantagem, a solução para o problema (A.2) depende muito da escolha do vetor ε , e cada componente deste vetor deve estar entre o valor mínimo e máximo da função objetivo correspondente. Para se obter valores adequados de ε , a otimização mono-objetivo pode ser utilizada para cada função objetivo. Quanto maior o número de objetivos, mais elementos terá o vetor ε , requerendo mais informações.