



---

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

# PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

---

Transições de Fase em Sistemas  
Dinâmicos Não Lineares

Felipe Augusto Oliveira Silveira

---

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2024

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Felipe Augusto Oliveira Silveira

# Transições de Fase em Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Edson Denis Leonel

Coorientador: Denis Gouvêa Ladeira

Rio Claro - SP

2024

S587t

Silveira, Felipe Augusto Oliveira

Transições de fase em sistemas dinâmicos não lineares / Felipe Augusto Oliveira Silveira. -- Rio Claro, 2024

105 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Edson Denis Leonel

Coorientador: Denis Gouvêa Ladeira

1. Sistemas dinâmicos não lineares. 2. Transições de fase. 3. Bilhares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

Felipe Augusto Oliveira Silveira

## Transições de Fase em Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Comissão examinadora

Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL  
IGCE / UNESP / Rio Claro (SP)

Prof. Dr. IBERÊ LUIZ CALDAS  
IFUSP / USP / São Paulo (SP)

Prof. Dr. JOSÉ DANILO SZEZECH JUNIOR  
DEMAT / UEPG / Ponta Grossa (PR)

Prof. Dr. RENE ORLANDO MEDRANO TORRICOS  
Departamento de Física / UNIFESP / Diadema (SP)

Prof. Dr. JOELSON DAYVISON VELOSO HERMES  
IFSULDEMINAS / Inconfidentes (MG)

**Conceito: Aprovado**

**Rio Claro (SP), 15 de julho de 2024**

---

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à minha família pelo apoio e incentivo. Ao meu melhor amigo e irmão Gilson, pelo companheirismo inabalável. À minha mãe Nilce, pelo amor incondicional e pelo apoio incessante. Vocês foram meu alicerce em todos os momentos, me inspirando a persistir e a acreditar em mim mesmo.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel pela amizade, paciência e incentivo. Sua orientação e conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Seus conselhos e críticas construtivas não apenas enriqueceram esta tese, mas também moldaram minha formação como pesquisador. Seu profissionalismo como professor, orientador e pesquisador é um modelo que seguirei para o resto da vida.

Agradeço ao meu coorientador Prof. Dr. Denis Ladeira, pela amizade, pela infinita paciência e pela dedicação com a minha formação por todos esses anos. Serei sempre imensamente grato pela confiança e oportunidades que me proporcionou.

Agradeço aos meus amigos da pós, em especial: Dra. Célia Kuwana, Prof. Dr. Joelson Hermes, Yoná Huggler e Mayla de Almeida. Obrigado pelas valiosas discussões, pela camaradagem e pelo espírito de colaboração.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

---

## RESUMO

Neste trabalho estudamos as transições de fase que ocorrem em sistemas dinâmicos não lineares devido à variação de parâmetros de controle. Em uma transição de fase de segunda ordem, ou transição de fase contínua, a variável dinâmica que identifica o parâmetro de ordem vai a zero continuamente à medida que o equivalente da susceptibilidade do parâmetro de ordem diverge em tal limite. Nesse caso, próximo à transição de fase os observáveis que caracterizam a dinâmica são descritos por leis de potência levando, muitas vezes, a dinâmica a ser invariante de escala. Tal invariância é uma das características presentes em uma transição de fase contínua.

Inicialmente, utilizaremos um modelo de dipolos clássicos para ilustrar a presença de uma transição de fase em sistemas dinâmicos. Em seguida, abordaremos dois sistemas não lineares, um bilhar exótico e o bilhar ovóide. O primeiro é uma versão do modelo *bouncer* em que o campo no qual a partícula está inserido não é homogêneo. O mapa do sistema foi construído para fornecer a velocidade da partícula e a fase da parede após cada colisão. Para certas combinações de valores de parâmetros e condições iniciais a dinâmica apresenta comportamento caótico. Os pontos fixos e suas estabilidades também foram encontrados numericamente para valores diferentes de parâmetro. Finalmente, estudamos a transição do regime integrável para o não integrável utilizando análise de escala e caracterizamos essa transição identificando a quebra de simetria, o parâmetro de ordem, as excitações elementares e os defeitos topológicos. Por último, estudamos o bilhar ovóide com o intuito de caracterizar a transição do regime de crescimento ilimitado de energia para o crescimento limitado. Utilizamos a equação de difusão

---

para obter analiticamente uma expressão para a probabilidade de encontrar uma partícula com velocidade  $V$  em um determinado tempo  $n$ . A partir dessa probabilidade, foi possível obter outros observáveis, como a velocidade média, que foi utilizado para identificar um possível parâmetro de ordem desta transição. Além disso, discutimos outras conexões com fenômenos típicos de transições de fase que ocorrem na física estatística e termodinâmica.

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos Não Lineares, Transições de Fase, Bilhares.

---

# ABSTRACT

The thematic of this work is the investigation and characterization of phase transitions observed in nonlinear dynamical systems due to the variation of control parameters. For a second order phase transition, also called as continuous phase transition, the dynamical variable identifying the order parameter approaches zero continuously while the correlation length diverges. Near a phase transition the observables characterizing the dynamics can be described by power laws leading the dynamics to be scaling invariant, which is a characteristic of a continuous phase transition.

Initially, we will use a classical dipole model to illustrate the presence of a phase transition in dynamic systems. We will then look at two non-linear systems, an exotic billiard and an oval billiard. The first is a version of the bouncer model in which the field that interacts with the particle is not homogeneous. The system's map was constructed to provide the velocity of the particle and the phase of the wall after each collision. Depending on both initial conditions and control parameters, the dynamics displays chaotic behavior. Fixed points and their stability were also found numerically for different parameters values. We also studied the transition from the integrable to the non-integrable regime using scale analysis and characterized this transition by identifying the broken symmetry, the order parameter, the elementary excitations and the topological defects. Finally, we studied the ovoid billiard to characterize the transition between the unlimited energy growth regime and the limited energy growth one. We utilized the diffusion equation to obtain analytically the expression of the probability of finding a particle of velocity  $V$  at time  $n$ . This probability allowed us to find other

---

observable such as the mean velocity which was used to identify a possible order parameter for this transition. In addition, we discuss other connections with typical phase transition phenomena that occur in statistical physics and thermodynamics.

**Keywords:** Nonlinear Dynamical Systems, Phase Transitions, Billiards.

---

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Ilustração do modelo Fermi-Ulam. . . . .	16
2.1	Ilustração de um ponto fixo instável. . . . .	21
2.2	Ilustração de um ponto fixo estável. . . . .	21
2.3	Ilustração de dois pontos de sela e algumas trajetórias próximas. . . . .	22
2.4	Ilustração de um ponto espiral estável. . . . .	23
2.5	Ilustração de um ponto espiral instável. . . . .	23
2.6	Ilustração de um ponto fixo elíptico e o comportamento de trajetórias próximas. . . . .	24
2.7	Ilustração de uma trajetória em um sistema tridimensional e suas interseções na superfície de Poincaré, neste caso o plano $X_1 \times X_2$ . . . . .	26
3.1	Visualização da superfície da faixa de Möbius e dos parâmetros parâmetros da equação (3.1). A grade da malha corresponde a uma rede com $6 \times 26$ pontos. . . . .	38
3.2	Exemplo de configuração no estado fundamental para $N = 51$ , $M = 9$ , $R = 1$ e $L = 1,02$ . (a-c) Visualizações do estado fundamental de diferentes pontos de vista. (d) Visualização dos alinhamentos dos dipolos do estado fundamental na superfície. As posições e os alinhamentos dos dipolos são dados com relação às coordenadas paramétricas $\phi$ e $v$ . (e) Uma visualização do parâmetro $\gamma = a/b$ como uma função das coordenadas paramétricas. Consulte o texto para obter detalhes. . . . .	41

3.3	Tamanho $A_\phi$ do domínio angular como uma função da largura da faixa de Möbius $L$ para $N = 101$ , $M = 11$ e $R = 1$ . Todos os pontos foram obtidos usando uma aproximação do vizinho mais próximo. O painel inferior mostra exemplos de configurações dos dos quatro regimes para $L \in [0, 47, 0, 6, 0, 65, 0, 83]$ obtidos de simulações considerando que todos os dipolos interagem entre si. . . . .	43
3.4	(a) Energia total $E$ em função da largura da faixa $L$ . (b) O módulo 2D $K \approx d^2 E/dL^2$ em função da largura da faixa $L$ . Os dados de energia e módulo 2D foram obtidos para uma faixa de Möbius com $N = 101$ , $M = 11$ e $R = 1$ . Note que os valores estão em unidades arbitrárias. . . . .	46
4.1	Ilustração do modelo <i>bouncer</i> em campo não homogêneo. . . . .	50
4.2	Os referenciais $S$ e $S'$ e os vetores posição da partícula $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}'$ e o da parede . . . . .	52
4.3	O espaço de fase do <i>bouncer</i> com campo não homogêneo para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$ . . . . .	53
4.4	Três espaços de fases para valores diferentes de $\Omega$ e com $\varepsilon = 10^{-3}$ . Elevar o valor $\Omega$ resulta no aumento da correlação entre a posição da parede na colisão $n$ e a colisão $n + 1$ , o que leva ao surgimento de regiões de movimento regular no espaço de fases. . . . .	55
4.5	Espaços de fases para diferentes valores de parâmetro. Note que existe um valor de $\Omega$ abaixo do qual o espaço de fase fica praticamente inalterado. . . . .	55
4.6	Espaço de fases do modelo simplificado para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 0,03$ . . . . .	56
4.7	A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\Omega = 10^{-2}$ . $\Lambda_\pi$ e $\Lambda_0$ são, respectivamente, os autovalores dos pontos fixos em $\phi^* = \pi$ e $\phi^* = 0$ e $m$ um número inteiro que corresponde ao número de oscilações que a parede móvel completou entre colisões. . . . .	59
4.8	A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\Omega = 10^{-2}$ . . . . .	60
4.9	Curvas de velocidade em função do número de colisões para diferentes valores de parâmetro. . . . .	62
4.10	Ajuste dos dados numéricos para a curva $V/n^\alpha \times \varepsilon$ . . . . .	63
4.11	Ajuste dos dados numéricos para a curva $V_{sat} \times \varepsilon$ . . . . .	64
4.12	Gráfico de $V_{inv} \times \varepsilon$ e o melhor ajuste obtido. . . . .	66
4.13	Curvas de velocidade em função do número de iterações para valores diferentes de $\varepsilon'$ . . . . .	66

LISTA DE FIGURAS

---

4.14	Colapso das curvas de velocidade para uma única curva universal.	67
4.15	Espaço de fases com $\Omega = 0.01$ para o caso integrável $\varepsilon = 0$ e o caso não integrável com $\varepsilon = 0.001$ .	69
4.16	Comportamento do parâmetro de ordem em função do parâmetro de controle. A linha em vermelha mostra o melhor ajuste numérico.	70
5.1	A figura ilustra o espaço de fases do bilhar ovoide para a) $\varepsilon = 0, 1$ e b) $\varepsilon = 0, 3$ , utilizando $p = 2$ .	80
5.2	(a) $V_{rms}$ vs $n(\eta\epsilon^2)$ para diferentes valores de $\gamma$ próximos ao ponto crítico, $\epsilon = 0, 2$ e dois valores diferentes de $\eta$ . Os círculos representam os resultados numéricos para o modelo estocástico e os quadrados verdes para o bilhar oscilando periodicamente no tempo, enquanto as linhas sólidas foram obtidas analiticamente. (b) Sobreposição das curvas $V_{rms}$ após as seguintes transformações de escala: (i) $V \rightarrow V/[(1 - \gamma)^{\alpha_1} (\eta\epsilon)^{\alpha_2}]$ ; (ii) $n \rightarrow n/[(1 - \gamma)^{z_1} (\eta\epsilon)^{z_2}]$	86
5.3	Histograma da distribuição de probabilidade normalizada para a velocidade de um conjunto de 105 partículas no bilhar oval estocástico e dissipativo. As barras azuis são obtidas após dez colisões, enquanto as barras vermelhas correspondem a 100 colisões. O gráfico inserido é obtido após 50.000 colisões. A velocidade inicial é $V_0 = 0, 2$ e os parâmetros de controle são $\eta = 0, 02$ e $\gamma = 0, 999$ com $p = 2$ .	90
5.4	Desvio padrão de $V_{rms}$ vs. $n$ para diferentes valores dos parâmetros $\gamma$ e $\varepsilon\eta$ para os casos a) dissipativo e b) não dissipativo. O eixo horizontal foi escolhido para mostrar que o expoente de crescimento é o mesmo para todas as curvas. O desvio padrão possui os mesmos expoentes críticos que as curvas de $V_{rms}$ .	93
5.5	Correlação cruzada média $\bar{C}$ para 20 valores diferentes de $\gamma \in [0, 995, 1]$ . Cada ponto representa a média da correlação cruzada entre a $V(n)$ de 1.000 condições iniciais para um sistema com $\epsilon = 0, 1$ e $\eta = 0, 1$ . A média da velocidade é obtida em $10^6$ colisões e cada condição inicial tem velocidade inicial $V_0 = 0, 001$ .	94
5.6	$V_{rms}$ em função do número de colisões $n$ para o caso não dissipativo do bilhar ovoide, ou seja, para $\gamma = 1$ para 4 diferentes combinações de $\eta\epsilon$ .	95

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Noções de sistemas dinâmicos e transições de fase</b>	<b>18</b>
2.1	Pontos fixos . . . . .	18
2.2	Caos e expoentes de Lyapunov . . . . .	23
2.3	Sistemas tridimensionais . . . . .	24
2.4	Seções de Poincaré e Mapas . . . . .	26
2.4.1	Órbitas periódicas e estabilidade . . . . .	27
2.5	Teoria de escala . . . . .	29
2.6	Transições de fase . . . . .	31
2.7	Identificação de transições de fase . . . . .	32
2.7.1	Identificar a quebra de simetria . . . . .	32
2.7.2	Definir o parâmetro de controle . . . . .	33
2.7.3	Examinar as excitações elementares . . . . .	33
2.7.4	Classificar os defeitos topológicos . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Rede de dipolos em uma geometria não-orientável sob compressão</b>	<b>35</b>
3.1	Introdução . . . . .	35
3.2	Rede de dipolos em uma faixa de Möbius . . . . .	37
3.3	Configurações de equilíbrio do estado fundamental . . . . .	39
3.4	Transição induzida por compressão . . . . .	44

<b>4</b>	<b>O modelo <i>bouncer</i> em campo não homogêneo</b>	<b>49</b>
4.1	O sistema . . . . .	49
4.2	O mapa . . . . .	51
4.3	O modelo simplificado . . . . .	54
4.4	Estabilidade dos pontos fixos . . . . .	57
4.5	Análise de escala . . . . .	61
4.6	Caracterização da Transição de fase . . . . .	68
4.6.1	Quebra de simetria . . . . .	68
4.6.2	Parâmetro de ordem . . . . .	68
4.6.3	Defeitos topológicos . . . . .	70
4.6.4	Excitações elementares . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Bilhar Ovoide</b>	<b>72</b>
5.1	Introdução . . . . .	72
5.2	Transferência de calor . . . . .	74
5.3	Bilhar Estático Ovoide . . . . .	78
5.4	Bilhar Ovoide Dependente do Tempo . . . . .	81
5.4.1	Transição de fase . . . . .	84
5.4.2	Parâmetro de ordem - Equação da difusão . . . . .	87
5.4.3	Quebra de simetria, excitações elementares e criticalidade	92
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>97</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

Pode-se argumentar que o estudo de Dinâmica como conhecemos hoje começou em meados do século XV, quando Newton deu suas grandes contribuições às equações diferenciais, descobriu suas leis do movimento e da gravitação universal, e as combinou para explicar as leis planetárias de Kepler [1]. Especificamente, Newton resolveu o problema de dois corpos - o problema de calcular o movimento da Terra em torno do sol, dada a lei do inverso do quadrado da distância da atração gravitacional entre eles. Gerações posteriores de matemáticos e físicos tentaram estender os métodos analíticos de Newton para o problema de três corpos (por exemplo, sol, terra e lua), mas, curiosamente, esse problema acabou sendo muito mais difícil de resolver. A descoberta veio com o trabalho de Poincaré no final do século XIX, ao desenvolver uma abordagem geométrica poderosa para analisar essas questões, que, posteriormente, se transformou em um tema moderno da dinâmica com aplicações que vão muito além da mecânica celeste [2]. Poincaré também foi a primeira pessoa a vislumbrar a possibilidade do caos, no qual um sistema determinístico exibe um comportamento aperiódico que depende sensivelmente das condições iniciais, impossibilitando, assim, a previsão de longo prazo, sendo possível ser visto em sistemas não-lineares. Esse interesse crescente em sistemas dinâmicos não-lineares se deve ao fato de que na natureza a maior parte dos fenômenos não podem ser modelados por sistemas lineares.

Dentre os sistemas não-lineares, se destacam alguns membros da classe de problemas dos bilhares. Essa constitui um dos tipos mais simples de sistemas dinâmicos [3], o início de seu estudo pode ser atribuído a Birkhoff [4] no iní-

cio do século passado. Um bilhar é um sistema dinâmica composto por uma partícula, ou um conjunto delas, que se movem confinadas em um área ou volume delimitado por uma fronteira com a qual elas sofrem colisões. Podemos separar os bilhares em pelo menos três classes conforme o formato de suas fronteiras: (i) bilhares integráveis; (ii) bilhares ergódicos e; (iii) bilhares mistos. No caso (i), temos como exemplo o bilhar circular e o bilhar elíptico [5]. A integrabilidade ocorre quando um sistema tem tantos graus de liberdade quanto constantes do movimento. Esses dois bilhares são integráveis devido a conservação de energia e momento angular no bilhar circular e energia e momento angular com relação aos dois focos, no bilhar elíptico [6]. Exemplos notórios para o caso (ii) incluem os bilhares de Sinai [7] e estádio de Bunimovich [8]. Nestes dois modelos, dependendo da combinação de parâmetros de controle, a evolução para tempos longos de apenas uma condição inicial é suficiente para preencher ergodicamente todo o espaço de fases. Por outro lado, no caso (iii) o espaço de fases é misto no sentido de que um conjunto de ilhas de periodicidade são observadas coexistindo com curvas invariantes que delimitam os mares de caos.

Sendo assim, dependendo do formato do bilhar, a sensibilidade às condições iniciais resulta em dinâmicas complexas que não estão apenas limitadas a comportamentos regulares ou irregulares, mas apresentando também fenômenos surpreendentemente gerais. Um desses é a aceleração de Fermi, fenômeno através do qual a energia de partículas cresce ilimitadamente quando essas interagem com campos magnéticos oscilantes [9]. Tal fenômeno pode ser modelado por alguns bilhares cuja fronteira oscila com o tempo. Quando adicionamos uma perturbação temporal à fronteira, a partícula pode ganhar ou perder energia devido as colisões e sua velocidade pode ser alterada. A existência da aceleração de Fermi nesses bilhares é determinada através da conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA)[10]. Essa conjectura diz que, se a versão estática de um bilhar apresentar órbitas caóticas, este bilhar pode apresentar aceleração de Fermi quando se introduz uma perturbação temporal à fronteira. No entanto, já foi demonstrado que esse não é um fenômeno robusto, uma vez que a introdução de dissipação nesses sistemas leva à supressão da aceleração de Fermi [11].

Um dos primeiros modelos criados com o intuito de modelar o fenômeno de aceleração de Fermi foi o modelo Fermi-Ulam. Este consiste de uma partícula confinada entre uma parede rígida e outra que se move periodicamente no tempo, com as quais sofre colisões elásticas. Como não há nenhum potencial atuando no sistema, a velocidade da partícula não se altera entre as colisões.

Dependendo de como a parede está se movendo no instante da colisão, a partícula pode ganhar ou perder energia, alterando sua velocidade. A figura 1.1 ilustra o modelo Fermi-Ulam. A parede móvel oscila em torno da posição  $x = L$  de acordo com a equação  $x = L + \varepsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$ , onde  $\varepsilon$  é amplitude de oscilação,  $\omega$  a frequência,  $t'$  o tempo e  $\phi_0$  a fase inicial. A partícula se move e, eventualmente, chega na zona de colisão que fica entre  $L - \varepsilon$  e  $L + \varepsilon$ . Lá ela colide com a parede móvel e sua velocidade  $V$  se altera. A partícula então se move até a parede fixa em  $x = 0$  que inverte o sinal da velocidade da partícula. Dessa forma, a parede fixa funciona como o mecanismo de retorno da partícula para a parede móvel.

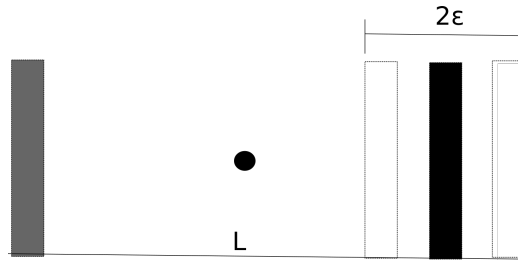


Figura 1.1: Ilustração do modelo Fermi-Ulam.

Esse sistema é não-integrável para  $\varepsilon > 0$ . No caso em que  $\varepsilon = 0$  todas as paredes são fixas, apenas alterando o sinal da velocidade da partícula a cada colisão, e o sistema é integrável. O crescimento ilimitado de energia, ou aceleração de Fermi, não é observada nesse sistema dinâmico, devido a presença de um conjunto de curvas invariantes que limitam o mar de caos[12]. Uma versão semelhante ao modelo de Fermi, chamado de *bouncer*, foi proposta por Pustylnikov [13]. A dinâmica neste modelo consiste de uma partícula de massa  $m$  sujeita a um campo gravitacional. Quando a partícula desce devido ao efeito desse campo, ela colide com uma parede que se move periodicamente no tempo de acordo com a equação  $y_w(t) = \varepsilon \cos(\omega t')$ , em que  $\varepsilon$  é a amplitude da parede,  $\omega$  a frequência e  $t'$  o tempo. Ao contrário do modelo Fermi-Ulam, o modelo *bouncer* pode apresentar aceleração de Fermi dependendo do valor de parâmetro de controle utilizado. Diferentes versões desse modelo também foram estudadas para diferentes aplicações, como modelos com arraste [11, 14], com colisões inelásticas [15] e modelos híbridos Fermi-Ulam-Bouncer [16, 17, 18].

Além da aceleração de Fermi, uma propriedade exibida por uma variedade desses sistemas é a presença de invariância de escala que alguns observáveis

físicos obedecem, conduzindo a leis de escala [19]. A existência da invariância de escala é comumente relacionada à transições de fase. Em física estatística, as transições de fase estão relacionadas a mudanças na estrutura espacial do sistema, particularmente devido à variação de algum parâmetro de controle [20]. Em sistemas dinâmicos, essas transições são associadas à mudanças abruptas no espaço de fases [21] ou no comportamento de algum observável. Embora a invariância de escala nesses sistemas já tenha sido amplamente estudada na literatura, as transições de fase das quais a invariância de escala é resultado ainda não foram caracterizadas. Nesse trabalho, utilizamos os conceitos de transição de fase conhecidos da termodinâmica para determinar a ordem das transições de fase de sistema não-lineares, como a transição da integrabilidade para a não-integrabilidade e a transição do regime de crescimento ilimitado de energia para o limitado. Para fazê-lo, é necessário definir o parâmetro de ordem do sistema, os defeitos topológicos, as excitações elementares e identificar a quebra de simetria que ocorre no sistema [22].

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no próximo capítulo abordaremos alguns conceitos básicos de sistemas dinâmicos e transições de fase que serão abordados no decorrer da tese. Nos capítulos posteriores utilizaremos esses conceitos com o intuito de investigar e classificar transições de fases em três distintos sistemas dinâmicos: uma rede de dipolos com geometria não orientável sob compressão, uma versão do modelo *boucer* em um campo não homogêneo e a sua transição do regime integrável para o não integrável, o modelo do bilhar ovoide e a transição do regime de crescimento ilimitado de energia para o limitado. A investigação de cada um desses sistemas resultou em um artigo publicado na Physical Review E: Compression-induced crossovers for the ground state of classical dipole lattices on a Möbius strip. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.064125. Dynamical aspects of a bouncing ball in a nonhomogeneous field. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.062205. Characterizing a transition from limited to unlimited diffusion in energy for a time-dependent stochastic billiard. DOI: 10.1103/PhysRevE.108.054206. Por fim, no último capítulo, fazemos nossas conclusões sobre o trabalho no capítulo final e ponderamos algumas perspectivas para trabalhos futuros.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E TRANSIÇÕES DE FASE

### 2.1 Pontos fixos

Nesta seção introduziremos o conceito de pontos fixos e suas classificações em sistemas descritos por equações diferenciais. Para isso, é útil introduzir o conceito de espaço de fase. Na mecânica clássica, o espaço de fase é o espaço de todos os estados possíveis de um sistema; por “estado” não queremos dizer simplesmente as posições de todos os objetos no sistema (que ocupariam o espaço físico ou o espaço de configuração), mas também suas velocidades ou momentos (que ocupariam o espaço de momento). Dessa forma, é necessário ter a posição e o momento do sistema para determinar o comportamento futuro desse sistema. Em um espaço de fase, cada grau de liberdade ou parâmetro do sistema é representado como um eixo de um espaço multidimensional. Por simplicidade, consideremos inicialmente um sistema unidimensional que possui somente uma variável de estado  $X$ . A equação dinâmica é dada por

$$\dot{X} = f(X), \tag{2.1}$$

em que  $f(X)$  é uma função contínua que descreve a variação do sistema unidimensional com o tempo. Para sistemas que são descritos por equações

## CAPÍTULO 2. NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E TRANSIÇÕES DE FASE

---

diferenciais, o ponto  $X^*$  é um ponto fixo se  $f(X^*) = 0$  é satisfeito, ou seja, uma trajetória que inicia no ponto fixo  $X^*$  permanecerá lá indefinidamente. Os pontos fixos são classificados de maneira a caracterizar o que ocorre com as trajetórias nas proximidades desses pontos. Se órbitas convergem para o ponto fixo, dizemos que o ponto fixo é um atrator ou nó assintoticamente estável. Quando as trajetórias se afastam dele, o ponto fixo é um repulsor ou ponto fixo instável. Caso as trajetórias se aproximam em uma direção mas se afastam em outra dizemos que o ponto fixo é um ponto de sela. A análise da estabilidade de  $X^*$  pode ser feita utilizando a expansão em série de Taylor na vizinhança do ponto fixo, até a primeira ordem:

$$f(X) \approx f(X^*) + (X - X^*) \left. \frac{df}{dX} \right|_{X^*}. \quad (2.2)$$

Pela definição do ponto fixo temos que  $f(X^*) = 0$ . Como estamos interessados na evolução temporal da distância de um ponto da trajetória a  $X^*$  fazemos a substituição  $x = X - X^*$ :

$$\dot{x} = x \frac{df}{dX}. \quad (2.3)$$

De forma geral, a solução da equação (2.3) é escrita como

$$x = Ce^{\Lambda t}, \quad (2.4)$$

onde  $C$  é uma constante e

$$\Lambda = \left. \frac{df}{dX} \right|_{X^*}, \quad (2.5)$$

ou seja,  $\Lambda$  é o valor característico do ponto fixo. Para  $\Lambda > 0$  temos um ponto fixo instável, as trajetórias próximas ao ponto fixo afastam-se exponencialmente dele, caracterizando-o como ponto fixo repulsor. Caso  $\Lambda < 0$  temos um ponto fixo assintoticamente estável, pois as trajetórias próximas se aproximam assintoticamente de  $X^*$ . Este ponto fixo é também chamado de atrator.

Quando o valor característico é zero analisamos a primeira e segunda derivada de  $f$  em relação a  $X$ . Para um ponto de sela, a segunda derivada tem o mesmo sinal em ambos os lados de  $X^*$ , dessa forma a trajetória é repelida de um lado e atraída pelo outro.

Para pontos atratores e repulsores com  $\Lambda = 0$ , o sinal da segunda derivada muda em  $X^*$ . Ela é positiva à esquerda do ponto fixo e negativa à direita para os atratores, e negativa à esquerda e positiva à direita para repulsores. Tais

## 2.1. PONTOS FIXOS

---

pontos fixos repelem ou atraem trajetórias mais lentamente que os pontos fixos cujo valor característico é diferente de zero [23].

Em sistemas com dois graus de liberdade<sup>1</sup> existem outras possibilidades quanto à natureza dos pontos fixos. Consideremos agora um sistema que seja descrito pelo seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f_X(X, Y), \\ \dot{Y} &= f_Y(X, Y),\end{aligned}\tag{2.6}$$

em que  $f_X$  e  $f_Y$  são as taxas de variação das coordenadas  $X$  e  $Y$ , respectivamente, no tempo. Semelhante ao caso anterior, se  $f_X(X^*, Y^*) = f_Y(X^*, Y^*) = 0$  então  $(X^*, Y^*)$  é um ponto fixo. De maneira similar ao que foi feito para sistemas unidimensionais, fazemos a expansão em série de Taylor de  $f_X(X, Y)$  e  $f_Y(X, Y)$  em torno das coordenadas do ponto fixo  $(X^*, Y^*)$  até a primeira ordem:

$$\begin{aligned}f_X(X, Y) &= f_X(X^*, Y^*) + (X - X^*) \left. \frac{\partial f_X}{\partial X} \right|_{X^*, Y^*} + (Y - Y^*) \left. \frac{\partial f_X}{\partial Y} \right|_{X^*, Y^*}, \\ f_Y(X, Y) &= f_Y(X^*, Y^*) + (X - X^*) \left. \frac{\partial f_Y}{\partial X} \right|_{X^*, Y^*} + (Y - Y^*) \left. \frac{\partial f_Y}{\partial Y} \right|_{X^*, Y^*},\end{aligned}\tag{2.7}$$

no qual, pela definição de ponto fixo,  $f_X(X^*, Y^*) = f_Y(X^*, Y^*) = 0$ . Definindo  $\Delta\eta_1 = X - X^*$  e  $\Delta\eta_2 = Y - Y^*$  podemos escrever a equação (2.7) como

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\eta}_1 \\ \Delta\dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_X}{\partial X} & \frac{\partial f_X}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_Y}{\partial X} & \frac{\partial f_Y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\eta_1 \\ \Delta\eta_2 \end{pmatrix}.\tag{2.8}$$

Definimos  $\Delta\tilde{\eta}$  como sendo a matriz coluna do lado direito da equação (2.8). A matriz  $2 \times 2$  nesta equação é a jacobiana do sistema e é representada pelo símbolo  $J$ . Dessa forma, temos:

$$\Delta\dot{\tilde{\eta}} = J\Delta\tilde{\eta}.\tag{2.9}$$

De forma geral a solução da expressão acima é escrita como

$$\Delta\tilde{\eta}(t) = \tilde{C}_1 e^{\Lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\Lambda_2 t},\tag{2.10}$$

---

<sup>1</sup>Na mecânica clássica, o número de graus de liberdade se refere ao número de pares de variáveis necessário para descrever o sistema [23].

CAPÍTULO 2. NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E TRANSIÇÕES DE FASE

---

em que  $\tilde{C}_1$  e  $\tilde{C}_2$  são constantes de integração, e  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são os autovalores em termos dos quais determinamos a estabilidade dos pontos fixos. Os valores de  $\Lambda$  são obtidos resolvendo a expressão

$$\det(J - \Lambda I) = 0, \quad (2.11)$$

em que  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Resolvendo o determinante acima obtemos a equação

$$\Lambda^2 - \left( \frac{\partial f_X}{\partial X} + \frac{\partial f_Y}{\partial Y} \right) \Lambda + \frac{\partial f_X}{\partial X} \frac{\partial f_Y}{\partial Y} - \frac{\partial f_X}{\partial Y} \frac{\partial f_Y}{\partial X} = 0, \quad (2.12)$$

na qual o termo entre parênteses é o traço e  $\frac{\partial f_X}{\partial X} \frac{\partial f_Y}{\partial Y} - \frac{\partial f_X}{\partial Y} \frac{\partial f_Y}{\partial X}$  é o determinante da jacobiana. A expressão acima fornece duas soluções, dadas por

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \text{Tr}J \pm \sqrt{(\text{Tr}J)^2 - 4\det J} \right). \quad (2.13)$$

Caso  $\Lambda_1 > 0$  e  $\Lambda_2 > 0$  a distância entre o ponto fixo e a trajetória de um ponto próximo a ele vai aumentar exponencialmente com o decorrer do tempo. Neste caso o ponto fixo é repulsor. De forma análoga, se ambos os autovalores forem negativos, as trajetórias se aproximam do ponto fixo que é classificado como um atrator. Também existe a possibilidade de os autovalores terem sinais opostos. Nesse caso o ponto fixo é classificado como ponto sela, atraindo trajetórias em uma direção e repelindo-as em outra.

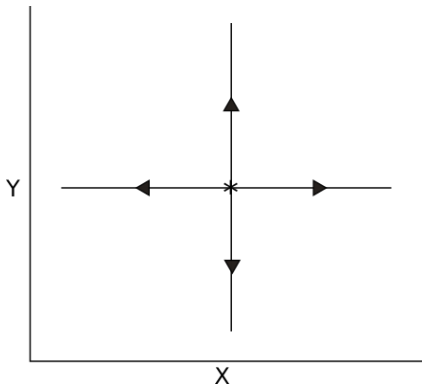


Figura 2.1: Ilustração de um ponto fixo instável.

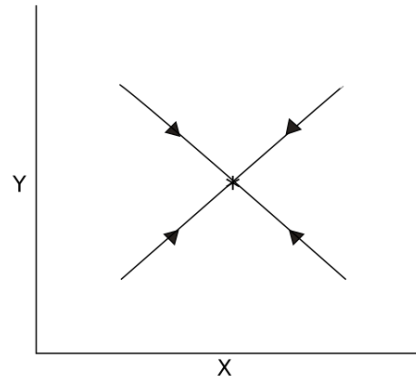


Figura 2.2: Ilustração de um ponto fixo estável.

Na figura 2.1 as trajetórias se afastam do ponto fixo, aqui representado pelo símbolo \*. Neste caso o ponto fixo é instável. A figura 2.2 ilustra

## 2.1. PONTOS FIXOS

---

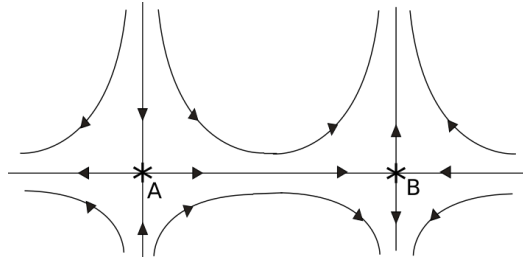


Figura 2.3: Ilustração de dois pontos de sela e algumas trajetórias próximas.

algumas trajetórias ao redor de um ponto fixo estável. A figura 2.3 ilustra dois pontos de sela  $A$  e  $B$  e algumas trajetórias. As trajetórias que se aproximam assintoticamente dos pontos fixos são chamadas de variedades estáveis, as que se distanciam são chamadas variedades instáveis. Os pontos de sela também são chamados de pontos hiperbólicos.

Diferentemente de sistemas unidimensionais, no caso bidimensional há uma quarta possibilidade para a estabilidade dos pontos fixos que ocorre quando o argumento raiz da equação (2.13) é negativo. Quando  $\text{Im}(\Lambda) \neq 0$ , pontos de trajetórias próximas circulam o ponto fixo que, nesse caso, é chamado de ponto fixo espiral. A estabilidade deste é dada pela parte real dos autovalores. Caso  $\text{Re}(\Lambda) < 0$  as órbitas se aproximam do ponto fixo que, por tal motivo, é classificado como assintoticamente estável. Já quando  $\text{Re}(\Lambda) > 0$ , o ponto fixo é instável e as trajetórias de pontos iniciais próximos a ele espiralam à medida que se afastam do ponto fixo em questão. As figuras 2.4 e 2.5 ilustram, respectivamente, uma trajetória sendo atraída por um ponto fixo espiral estável e uma trajetória que afasta de um ponto fixo espiral instável.

Para o caso em que  $\text{Re}(\Lambda) = 0$ , o ponto fixo é classificado como ponto fixo elíptico (ou centro estável). Nas situações em que isso ocorre, as trajetórias próximas ao ponto fixo, na média, não afastam nem se aproximam do ponto fixo. A figura 2.6 ilustra o comportamento de algumas trajetórias nas vizinhanças de um ponto fixo elíptico.

Dadas as classificações dos pontos fixos, é importante ressaltar que ao variar os parâmetros do sistema é possível que a estabilidade desses pontos mude. Os métodos apresentados nessa seção são aplicáveis para sistemas com dimensões maiores. No entanto, essa análise da estabilidade dos pontos fixos fica cada vez mais complicada conforme estudamos sistemas com mais graus de liberdade. Além disso, espaços de fases com dimensões maiores podem apresentar trajetórias com comportamentos que não são possíveis em

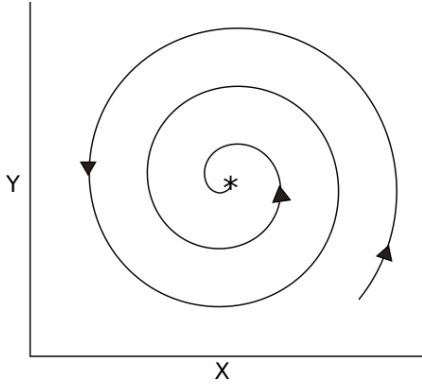


Figura 2.4: Ilustração de um ponto espiral estável.

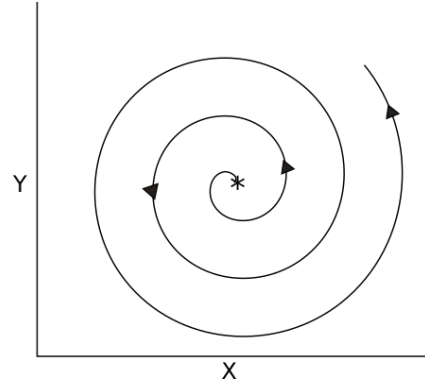


Figura 2.5: Ilustração de um ponto espiral instável.

sistemas com menos graus de liberdade.

## 2.2 Caos e expoentes de Lyapunov

Caos é um termo muitas vezes utilizado para descrever comportamentos complexos e, apesar disso, pode ser observado em sistemas muito simples [23]. Órbitas caóticas podem aparentar ser erráticas e aleatórias, como se surgissem de um sistema muito complexo ou com ruído. No entanto, observamos esse tipo de comportamento em sistemas determinísticos simples e sem ruído.

Não existe uma definição única para caos. Segundo Hilborn [23], uma dinâmica é caótica caso três condições sejam satisfeitas. Primeiramente, o sistema deve obedecer o teorema da não-intersecção, ou seja, trajetórias não podem se interceptar, o que é esperado para sistemas determinísticos. A segunda restrição indica que as órbitas devem estar em uma região limitada do espaço de fases (caos não pode existir em sistemas abertos). Por último, temos que órbitas próximas devem divergir exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo.

A divergência de trajetórias próximas, terceira condição, é descrita pelo expoente de Lyapunov. Consideremos duas trajetórias cujas condições iniciais estão separadas por uma distância  $\Delta x_0$  em um sistema unidimensional. Se essas órbitas forem caóticas, elas irão divergir no tempo segundo a equação

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\lambda_x t}, \quad (2.14)$$

em que  $\lambda_x$  é o expoente de Lyapunov associado à direção do eixo  $x$ . O

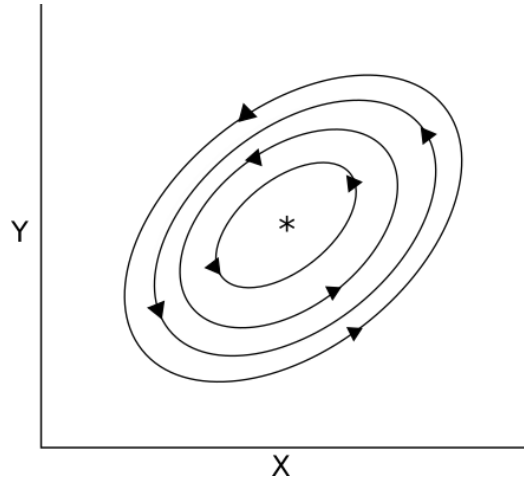


Figura 2.6: Ilustração de um ponto fixo elíptico e o comportamento de trajetórias próximas.

número desses expoentes é igual ao número de dimensões do espaço de fases e o mesmo raciocínio pode ser aplicado às demais componentes do vetor que define a órbita.

Classificamos as órbitas como caóticas quando pelo menos um dos valores de  $\lambda$  é positivo. Em sistemas hamiltonianos a soma dos expoentes de Lyapunov é zero devido à preservação do volume no espaço de fase. Para sistemas com dissipação ou arraste, pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é negativo, indicando a convergência das trajetórias para um atrator.

## 2.3 Sistemas tridimensionais

Chamamos um sistema dinâmico de tridimensional quando este possui três variáveis independentes, as quais são suficientes para descrever totalmente a dinâmica do sistema. Consideremos um sistema dinâmico que seja descrito pela evolução temporal das seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_x(x, y, z) \\ \dot{y} &= f_y(x, y, z) \\ \dot{z} &= f_z(x, y, z),\end{aligned}\tag{2.15}$$

em que  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  fornecem a evolução temporal das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

## CAPÍTULO 2. NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E TRANSIÇÕES DE FASE

---

Como já foi discutido, os pontos fixos dos sistema são encontrados igualando as expressões da equação (2.15) a zero. Para determinar a estabilidade dos pontos fixos é necessário obter os três valores característicos através da matriz jacobiana avaliada nas coordenadas dos pontos fixos. Neste caso, a matriz jacobiana é dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

De forma análoga aos sistemas bidimensionais, os autovalores são obtidos a partir da equação (2.11).

Os valores característicos determinam a estabilidade dos pontos fixos. Caso todos os autovalores sejam reais e negativos este ponto fixo é um atrator. No entanto, se dois desses valores característicos também tiverem partes imaginárias não nulas, pontos de trajetórias próximas irão se aproximar do ponto fixo em uma espiral, o que caracteriza um ponto fixo nó espiral. Quando os autovalores são reais e positivos temos um ponto fixo repulsor. Caso dois desses valores característicos possuam partes imaginárias não nulas, pontos de trajetórias próximas irão espiralar para longe do ponto repulsor.

Existe também a possibilidade de que o ponto fixo seja um ponto de sela. Esses pontos são classificados com índices que representam o número de valores característicos cujas partes reais são positivas. Um ponto de sela de índice 1 possui três autovalores reais, um positivo e dois negativos. Esse tipo de ponto fixo atrai pontos de trajetórias em uma superfície (a variedade estável) e repele pontos de trajetórias ao longo de uma curva (variedade instável). Se este ponto de sela possuir dois valores característicos complexos temos pontos de sela espiral e os pontos de trajetórias próximas espiralam em torno do ponto fixo conforme eles se aproximam da variedade estável.

Já o ponto de sela de índice 2 possui dois autovalores positivos e um negativo. Nesse caso pontos de trajetórias se aproximam do ponto fixo em uma curva e divergem do ponto fixo em uma superfície. Caso dois autovalores com partes reais negativas formem um par complexo conjugado, pontos próximos à variedade instável irão espiralar conforme se afastam do ponto fixo, o que caracteriza um ponto fixo de sela espiral. Os sistemas tridimensionais são importantes não só por vivermos em um mundo tridimensional, mas também porque tais sistemas podem se comportar de formas que não são possíveis em sistemas com menos dimensões [23].

Dentre esses novos comportamentos está a possibilidade de surgimento de

trajetórias caóticas. O comportamento caótico é caracterizado pela divergência de trajetórias no espaço de fase, ou seja, a separação entre as trajetórias inicialmente próximas aumenta exponencialmente com o passar do tempo na média. Para sistemas de dimensões menores, trajetórias limitadas não podem divergir exponencialmente sem que se interceptem eventualmente, violando assim a unicidade da solução. Dessa forma, são necessárias três ou mais dimensões no espaço de estados para existência de comportamento caótico.

## 2.4 Seções de Poincaré e Mapas

A seção de Poincaré é um método no qual diminuimos a dimensionalidade do espaço de fase de um sistema, deixando sua análise mais simples [23]. Isso é feito obtendo os pontos de interseção entre as trajetórias e uma superfície de  $N - 1$  dimensões, em que  $N$  é a dimensão do espaço de fase. A figura 2.7 ilustra uma seção de Poincaré definida pelo plano  $X_1 \times X_2$ . Partindo de um ponto inicial em  $t = 0$  a trajetória evolui e intercepta a seção de Poincaré em  $(u_1, v_1)$ . Posteriormente a trajetória passa pelo plano novamente, agora em  $(u_2, v_2)$ . Dada a unicidade da solução do sistema de equações diferenciais que descrevem as trajetórias, temos então uma função mapa que correlaciona os pontos  $(u_n, v_n)$  e  $(u_{n+1}, v_{n+1})$  [23]. A escolha da superfície usada na seção de Poincaré é arbitrária e se baseia no que é mais conveniente ao sistema sob estudo.

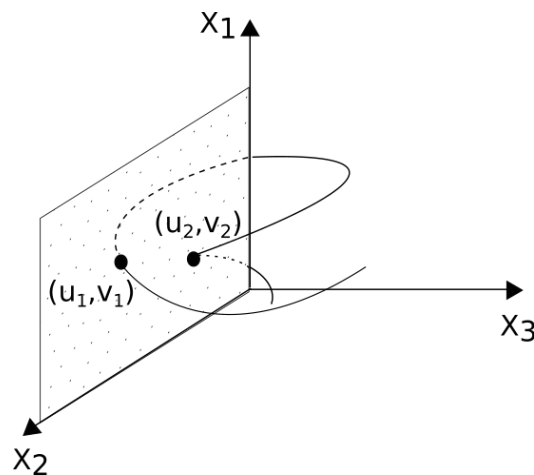


Figura 2.7: Ilustração de uma trajetória em um sistema tridimensional e suas interseções na superfície de Poincaré, neste caso o plano  $X_1 \times X_2$ .

## CAPÍTULO 2. NOÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS E TRANSIÇÕES DE FASE

---

Para um sistema tridimensional, a seção de Poincaré é bidimensional. Dessa forma, supondo que a trajetória intercepta o plano pelo ponto  $(u_n, v_n)$  e o próximo ponto de interseção com a superfície de Poincaré seja  $(u_{n+1}, v_{n+1})$ , teremos, dessa forma, duas equações que descrevem a dinâmica do sistema nessa superfície. O conjunto de equações que descrevem a dinâmica de um sistema via processo iterativo é chamado de mapa que, no caso, é dado pelas equações

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= f_u(u_n, v_n), \\v_{n+1} &= f_v(u_n, v_n).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Sendo assim, conhecendo as funções  $f_u$  e  $f_v$  temos todas as informações necessárias para descrever o comportamento do sistema em tempos futuros.

O estudo de mapeamentos é interessante pois eles permitem descrever as interseções de trajetórias em espaços de fase com seções de Poincaré. Além disso, mapas podem ser usados para modelar sistemas físicos mesmo que não saibamos as equações diferenciais que os regem.

### 2.4.1 Órbitas periódicas e estabilidade

Para um mapa bidimensional, tem-se que uma órbita é periódica com período  $p$  quando

$$\begin{aligned}u_{n+p} &= u_n, \\v_{n+p} &= v_n,\end{aligned}\tag{2.18}$$

sendo  $p$  o menor inteiro que satisfaz as equações acima. Para o caso em que  $p = 1$ , temos que a órbita periódica é um ponto fixo. Assim como foi feito para equações diferenciais, a estabilidade do ponto fixo é determinada através da análise do comportamento das trajetórias próximas a ele. Fazendo a expansão em série de Taylor das equações (2.17) da trajetória de uma condição inicial  $(u_0, v_0)$  em torno do ponto fixo  $(u^*, v^*)$  temos, até a primeira ordem

$$\begin{aligned}f_u(u_0, v_0) &\approx f_u(u^*, v^*) + (u_0 - u^*) \left. \frac{\partial f_u}{\partial u} \right|_{u^*, v^*} + (v_0 - v^*) \left. \frac{\partial f_u}{\partial v} \right|_{u^*, v^*}, \\f_v(u_0, v_0) &\approx f_v(u^*, v^*) + (u_0 - u^*) \left. \frac{\partial f_v}{\partial u} \right|_{u^*, v^*} + (v_0 - v^*) \left. \frac{\partial f_v}{\partial v} \right|_{u^*, v^*}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Definindo

$$\tilde{\zeta} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\tag{2.20}$$

e escrevendo a distância do ponto fixo à trajetória como

$$\Delta\tilde{\zeta}_0 = \begin{pmatrix} u_0 - u^* \\ v_0 - v^* \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

a equação (2.19) pode ser escrita como

$$\Delta\tilde{\zeta}_1 = J\Delta\tilde{\zeta}_0, \quad (2.22)$$

em que  $J$  é a matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_u}{\partial u} & \frac{\partial f_u}{\partial v} \\ \frac{\partial f_v}{\partial u} & \frac{\partial f_v}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

sendo que as derivadas acima são todas avaliadas na coordenada do ponto fixo. Para a segunda iteração temos  $\Delta\tilde{\zeta}_2 = J\Delta\tilde{\zeta}_1$ , em que  $\Delta\tilde{\zeta}_1$  é dado pela equação (2.22), dessa forma  $\Delta\tilde{\zeta}_2 = J^2\Delta\tilde{\zeta}_0$ . Após  $n$  iterações temos

$$\Delta\tilde{\zeta}_n = J^n\Delta\tilde{\zeta}_0. \quad (2.24)$$

Semelhante ao que foi discutido para equações diferenciais, os valores característicos são obtidos resolvendo a Equação (2.24), o que resulta em dois autovalores  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$ . Dessa forma temos, na proximidade dos pontos fixos,

$$\Delta\tilde{\zeta}_n = D_1\Lambda_1^n + D_2\Lambda_2^n. \quad (2.25)$$

Em que  $D_1$  e  $D_2$  são constantes definidas a partir das condições iniciais. Note pela equação acima que se  $|\Lambda_i| < 1$  temos que a distância entre as trajetórias está diminuindo e caso  $|\Lambda_i| > 1$  a distância está aumentando. Dessa forma, quando  $|\Lambda_1| > 1$  e  $|\Lambda_2| > 1$  ambas as variedades são instáveis e o ponto fixo é repulsor. Caso  $|\Lambda_1| < 1$  e  $|\Lambda_2| < 1$  o ponto fixo é classificado como estável, comumente chamado de nó. Na situação em que  $|\Lambda_1| < 1$  e  $|\Lambda_2| > 1$ , ou vice-versa, temos que as trajetórias serão atraídas em uma direção e repelidas na outra, logo o ponto fixo é um ponto de sela.

Existe ainda a situação em que os autovalores são complexos. Neste caso os autovalores formam um par conjugado e os pontos da órbita que interceptam a superfície de Poincaré giram em torno do ponto fixo. Para  $|\Lambda_1| < 1$  e  $|\Lambda_2| < 1$  o ponto fixo é estável e as órbitas espiralam se aproximando dele. Quando  $|\Lambda_1| > 1$  e  $|\Lambda_2| > 1$  as trajetórias giram enquanto se afastam do ponto fixo, que neste caso é instável. Para sistemas dissipativos, ou seja, que contraem o volume no espaço de fase, tem-se que  $\Lambda_1\Lambda_2 < 1$ , e para os que conservam o volume, o que é o caso para sistemas não dissipativos,  $\Lambda_1\Lambda_2 = 1$ .

## 2.5 Teoria de escala

Neste trabalho estudamos a transição de fase do regime integrável para o não integrável de um bilhar exótico e do regime de crescimento ilimitado de energia para o de crescimento limitado, no modelo do bilhar ovóide. Uma das consequências da ocorrência de transições de fase é o aparecimento de invariância de escala em certos observáveis desses sistemas. Neste capítulo introduzimos os conceitos de teoria de escala baseando na teoria de fenômenos críticos e transições de segunda fase [25, 26, 27] utilizando como exemplo a magnetização  $m(k, h, t)$  de um sistema ferromagnético. A variável  $k = (T_c - T)/T_c$  é o desvio relativo da temperatura crítica  $T_c$ ,  $h$  é o campo magnético externo,  $t$  é o tempo. Consideramos aqui que o sistema evolui no tempo  $t$  com uma dinâmica estocástica. O sistema está fora do equilíbrio quando  $t = 0$  e está no equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ . Este sistema é descrito por leis de potência nas vizinhanças do ponto crítico ( $k = 0, h = 0, t \rightarrow \infty$ ). Assim temos que a magnetização espontânea se comporta como

$$m(k, 0, \infty) \propto k^\beta, \quad (2.26)$$

em que  $\beta$  é um expoente crítico determinado através do ajuste via método dos mínimos quadrados no gráfico log-log de  $m$  versus  $k$ . Na temperatura crítica, o comportamento da magnetização é dado por

$$m(0, h, \infty) \propto h^\gamma, \quad (2.27)$$

onde  $\gamma$  é outro expoente crítico.

Quando o campo externo é nulo ( $h = 0$ ) o sistema é descrito por  $m(k, 0, t)$ . No caso em que o tempo é muito menor que o tempo de relaxação do sistema,  $\tau$ , o sistema está fora do equilíbrio. No entanto, se  $\tau$  é muito menor que  $t$ , o sistema se encontra em equilíbrio. O tempo de relaxação depende da temperatura, e, portanto, depende de  $k$ . Conforme a temperatura se aproxima de  $T = T_c$ , o tempo de relaxação do sistema cresce como

$$\tau \propto k^{-z}, \quad (2.28)$$

onde  $z$  é um expoente dinâmico. O *crossover*, ou seja, a transição do regime de não equilíbrio para o regime de equilíbrio é dado pela variável  $\tau$ .

Em princípio, podemos explicar estes comportamentos em lei de potência através da análise de escala. A hipótese de escala consiste em supor que a

## 2.5. TEORIA DE ESCALA

---

magnetização seja uma função homogênea generalizada das variáveis  $k$ ,  $t$  e  $h$ , da forma

$$m(k, h, t) = lm(l^a k, l^b h, l^c t), \quad (2.29)$$

onde  $l$  é o fator de escala e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são expoentes de escala. Com o intuito de determinar como expoente  $\beta$  está relacionado com os expoentes de escala escolhemos  $l = k^{-1/a}$ . Assim a equação acima se torna

$$m(k, h, t) = k^{-1/a} m(1, k^{-b/a} h, k^{-c/a} t). \quad (2.30)$$

Considerando a magnetização a campo nulo ( $h = 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ ) temos

$$m(k, h, t) = k^{-1/a} m(1, 0, \infty). \quad (2.31)$$

Se considerarmos que  $m(1, 0, \infty)$  é uma constante finita obtemos, comparando a equação acima com a equação (2.26), que  $a = -1/\beta$ . O comportamento da magnetização de equilíbrio ( $t \rightarrow \infty$ ) em  $k = 0$ , dada pela equação (2.27), é obtido escolhendo o fator de escala  $l = h^{-1/b}$  e substituindo na equação (2.29):

$$m(0, h, \infty) = h^{-1/b} m(0, 1, \infty). \quad (2.32)$$

Ainda considerando que  $m$  é uma constante finita, podemos comparar a equação acima com a equação (2.27). Dessa forma, temos que a relação entre o expoente  $\gamma$  e o expoente de escala é  $b = -1/\gamma$ .

Para encontrar a relação entre o expoente  $z$  e os expoentes de escala escolhemos  $l = k^{-1/a}$  e  $h = 0$ . Dessa forma, considerando que  $t$  é finito, escrevemos a equação (2.30) como

$$m(k, 0, t) = k^{-1/a} f\left(\frac{t}{k^{-c/a}}\right), \quad (2.33)$$

em que  $f(x) = m(1, 0, x)$  sendo  $x = t/k^{-c/a}$ . A função  $f(x)$  pode ter comportamentos diferentes dependendo do valor de  $x$ . Caso  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, quando  $x \gg 1$ , a magnetização espontânea só depende de  $k$ , o que implica que  $f(\infty)$  é constante. Por outro lado, se  $t = 0$  a magnetização deve ter o valor inicial independente do valor de  $k$ . A dependência em  $k$  da magnetização pode desaparecer somente se

$$f(x) \approx x^y \approx \frac{t^y}{k^{-yc/a}}, \quad (2.34)$$

quando  $x \ll 1$  e  $y$  assumir um valor particular ( $y = -1/c$ ). A função  $m(1, 0, x)$  admite um *crossover* controlado por  $k^{c/a}$ , dessa forma, da equação (2.33) o tempo de relaxação  $\tau$  deve ser proporcional a  $k^{c/a}$ . Considerando  $x \approx 1$  para  $t \approx \tau$  obtemos da equação (2.28) que  $z = -c/a$ .

Os expoentes  $\beta$ ,  $z$  e  $\gamma$  são obtidos numericamente ou de forma experimental. Sendo assim, obtemos os expoentes de escala com as relações  $a = -1/\beta$ ,  $b = -1/\gamma$  e  $c = z/\beta$ . Com esses expoentes e as transformações corretas é possível obter o colapso das curvas de magnetização em uma única curva chamada curva universal, mostrando que a magnetização obedece leis de escala nessa transição.

## 2.6 Transições de fase

Muitos problemas importantes estão relacionados de uma forma ou outra com a presença de transições de fase. Esse fenômeno ocorre em diversos sistemas distintos, como em fluidos, materiais magnéticos, super condutores, sistemas ecológicos e sociais dentre vários outros [27]. Tais transições de fase tipicamente implicam na mudança de simetria interna dos componentes do sistema quando um ponto crítico é ultrapassado. Esse ponto crítico se refere ao ponto em que a transição entre as fases ocorre. Um exemplo comum de transição de fase seria entre um estado fluido, podendo ser líquido ou gás, e um sólido cristalino. O primeiro tem átomos organizados de maneira aparentemente aleatória, e todos os pontos dentro do líquido ou gás exibem as mesmas propriedades. Em um sólido cristalino, os átomos são organizados nos sítios da rede que o formam. Na fase gasosa, a energia cinética domina o movimento das partículas, o que resulta em um estado homogêneo e isotrópico. Nesse estado todos os pontos são equivalentes e a densidade é uniforme. Na fase líquida, no entanto, apesar de ainda homogênea, a interação a curta distância entre as moléculas leva a uma densidade maior. Enquanto isso, na fase sólida pode ser distinguida facilmente devido a diferença da distribuição geométrica dos átomos, feita agora de maneira muito regular. Cristais são, portanto, menos homogêneos que um líquido, possuindo então menos simetria.

No entanto, além do exemplo da transição termodinâmica entre essas três fases existe uma miríade de transições observadas de diferentes contextos. Ainda assim, é possível observar fatores comuns entre elas. Segundo Ehrenfest, podemos classificar transições de fase a partir do comportamento da energia livre como função de outras variáveis termodinâmicas. Caso a ordem da menor derivada da energia livre apresente uma descontinuidade em  $T = T_c$ , sendo  $T_c$  a temperatura para a qual ocorre a transição de fase, classificamos tal transição como sendo de primeira ordem. Tal descontinuidade tem efeito nas grandezas termodinâmicas, como o calor latente e a magnetização.

Por sua vez, em uma transição de fase de segunda ordem a segunda derivada da energia livre apresenta descontinuidade. No esquema de classificação moderno, as transições de fase são divididas em duas categorias, nomeadas de forma similar às classes propostas por Ehrenfest. Nessa nova definição, chamamos de transição de fase de primeira ordem aquelas que envolvem uma descontinuidade no calor latente. Por sua vez, denominamos de transições de segunda ordem aquelas que não envolvem o calor latente. Essas incluem todas as demais transições, incluindo as de segunda, terceira e demais ordens. As transições de fase de segunda ordem são também chamadas de "transições de fase contínuas", e são baseadas na introdução do conceito de parâmetro de ordem. Esse parâmetro é uma medida do grau de ordem das fases em uma transição, sendo normalmente nula em uma fase e não nula na outra.

## 2.7 Identificação de transições de fase

Como foi exposto nas seções anteriores, encontramos na natureza várias transições de fase que permitem que sistemas mudem para diferentes estados da matéria. Na presente seção, iremos apresentar um sistema através do qual é possível determinar a existência e a ordem de uma transição de fase. Uma leitura mais detalhada do método aqui proposto pode ser encontrado nos trabalhos de Mermin [29], Coleman [30] e Sethna [22]. O processo é composto por quatro etapas: identificar a quebra de simetria, definir o parâmetro de controle, examinar as excitações elementares e classificar os defeitos topológicos. Todas as etapas serão discutidas nas próximas seções.

### 2.7.1 Identificar a quebra de simetria

A simetria de um composto é uma das formas a partir das quais podemos distingui-lo dos demais estados da matéria. Independente do sistema tratado, uma transição de fase sempre ocorre acompanhada de uma quebra de simetria. Considere as formas geométricas de um cubo e uma esfera, a última possui muito mais simetrias que a primeira. Pode-se rodar uma esfera em qualquer direção sem mudar sua aparência. No entanto, o mesmo só pode ser feito com o cubo caso o rotacione em  $90^\circ$ . De maneira similar, podemos distinguir as fases de um sistema pelas suas simetrias. Consideremos como exemplo a transição de uma solução do estado líquido para a sólida: a fase sólida parece muito mais simétrica; arranjos regulares dos átomos formam a rede do cristal. O gelo, por exemplo, tem uma simetria de rotação discreta,

podendo-se rotacioná-lo por múltiplos de  $60^\circ$  e obter a mesma estrutura [22]. A fase líquida, no entanto, parece ser irregular e desordenada. Por outro lado, ela se parece com líquido independente do ângulo observado. Por esse fator, de maneira similar ao círculo, a água possui total simetria de rotação e translação. Identificar a mudança entre as simetrias dos sistema antes e após uma transição de fase é o primeiro passo para caracterizá-la.

### 2.7.2 Definir o parâmetro de controle

Em uma grande variedade de transições de fase existe uma quantidade que é nula abaixo do ponto crítico e que se torna não nula acima do ponto crítico. Além disso, espera-se que a suscetibilidade, definida como a derivada do parâmetro de ordem em função do parâmetro de controle, divirja conforme o sistema se aproxima da criticalidade. Por exemplo, em uma transição líquido-gás conforme variamos a temperatura  $T$  para baixo da linha de coexistência à pressão constante, a fase líquida que aparece tem uma densidade muito maior do que a fase do gás. Nesse caso, podemos definir a diferença de densidade  $(\rho_l - \rho_g)$  como o parâmetro de ordem. De maneira similar, no caso de um sistema magnético unidimensional o parâmetro de ordem é a magnetização. Para valores relativamente pequenos de  $T$  os *spins* tendem a se alinhar na direção do campo magnético e a magnetização é não nula. Conforme aumentamos a temperatura de forma que  $T > T_c$ , ocorre uma quebra de simetria e o sistema passa a ter magnetização nula. Portanto, para o ferromagneto unidimensional, o parâmetro de ordem natural que determina a quebra de simetria é a magnetização. Ressaltamos aqui que a escolha do parâmetro de ordem não é sempre fácil ou intuitiva. Por exemplo, o parâmetro de ordem para alguns supercondutores e superfluidos é um número complexo  $\psi$ . Além disso, para vários sistemas podem haver mais de um bom candidato a parâmetro de ordem.

### 2.7.3 Examinar as excitações elementares

Retornemos ao ferromagneto unidimensional. Na ausência de um campo magnético externo, para valores de temperatura abaixo da temperatura crítica  $T_c$ , conhecida como temperatura de Curie, ocorre uma quebra de simetria. Abaixo dessa temperatura, *spins* vizinhos se alinham paralelos entre si e a energia do sistema fica invariante sob inversão da magnetização  $m(x)$  de forma que  $m(x) = -m(-x)$ . Uma quebra espontânea de simetria contínua

é inevitavelmente acompanhada por algum tipo de excitação elementar [22]. No caso de ferromagnetos, a simetria quebrada leva à excitações elementares na forma de rigidez magnética e ondas de *spins*<sup>1</sup>. Os *spins* resistirão uma torção individual, porém não uma uniforme.

### 2.7.4 Classificar os defeitos topológicos

Nesta subseção vamos considerar uma classe de defeitos, chamada de defeitos topológicos, que ocorre em decorrência da quebra de simetria nas transições de fase. Um defeito topológico é caracterizado por uma região (por exemplo, um ponto ou uma linha) onde a ordem é destruída e onde alguma variável varia lentamente no espaço. De forma similar a uma partícula carregada, um defeito topológico tem a propriedade de que sua presença pode ser determinada por medidas apropriadas em uma superfície que circunda a região. Defeitos topológicos possuem nomes diferentes dependendo da simetria que é quebrada e do sistema em questão. Por exemplo, no modelo xy e para o hélio superfluido, eles são chamados de vórtices; em cristais eles são chamados de deslocamento [31].

---

<sup>1</sup>Uma onda de spin é uma perturbação propagada em um material magnético ordenado.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# REDE DE DIPOLOS EM UMA GEOMETRIA NÃO-ORIENTÁVEL SOB COMPRESSÃO

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será usado uma rede de dipolos sob compressão para ilustrar a ocorrência de transições de fases em sistemas dinâmicos. Tal exemplo foi escolhido para exemplificar a abrangência deste estudo. A relevância do sistema vem do fato de que as interações de longo alcance entre dipolos são ubíquas na física e aparecem em uma grande variedade de sistemas, desde configurações atômicas, como as matrizes de átomos de Rydberg [32] ou gases quânticos dipolares [33, 34], a sistemas do estado sólido, como ímãs [35] ou ferroelétricos [36, 37]. Especialmente em redes cristalinas, como em materiais ferroelétricos (FE), o caráter anisotrópico da interação pode levar à formação de fases ordenadas complexas [38]. Por exemplo, a degenerescência da configuração do estado fundamental (GS, de *groundstate* em inglês), ou seja, a invariância da energia sob a inversão de todos os dipolos, pode levar à formação de domínios locais separados por uma parede de domínio (PD) [39]. Para materiais FE, experimentos mostraram um grande controle dessas paredes de domínio, permitindo deslocamentos controlados e até mesmo a criação ou aniquilação controlada de domínios [39, 40]. Devido a possibilidade

### 3.1. INTRODUÇÃO

---

desse controle direto das configurações dos dipolos, os materiais de FE tem sido usados para aplicações como sensores inteligentes, capacitores, transdutores, atuadores, dispositivos de coleta de energia e memórias não voláteis [39, 40, 41, 42].

As fases ordenadas que surgem em sistemas de rede de dipolos interagentes podem depender significativamente da geometria de tal rede: Em determinadas geometrias, o estado fundamental torna-se continuamente degenerado [43, 44] e permite transformações contínuas entre diferentes configurações do estado fundamental [45, 46]. Outros exemplos incluem fases de vidro de spin que surgem em sistemas desordenados [47], e a supressão da ordem em longo alcance para redes que exibem frustração geométrica [48, 49, 50]. Além desses exemplos bem conhecidos, efeitos interessantes que dependem da geometria também podem ser encontrados em redes que exibem dimensionalidade mista: em uma configuração 1D simples que consiste em dipolos espaçados equidistantes ao longo de um caminho helicoidal, o estado fundamental pode ser classificado por uma complexo de bifurcação autossimilar que depende da geometria da hélice [51]. Para dipolos em superfícies 2D, as geometrias curvas podem impor a presença de defeitos topológicos, como pode ser visto para dipolos em uma esfera [52]. Além disso, foi demonstrado que as redes de dipolo em uma superfície curva 2D podem apresentar domínios e paredes de domínio em seu estado fundamental [53]. Nessa seção, nos baseamos nesses resultados e investigamos mais a fundo as propriedades das redes de dipolo clássicas em geometrias curvas. Especificamente, estamos interessados nos efeitos que surgem quando uma rede de dipolo é abrangida por uma superfície curva que é topologicamente não trivial.

Foi demonstrado que a curvatura espacial ou dimensionalidade mista por si só pode levar a uma variedade de efeitos intrigantes (e muitas vezes contra-intuitivos). Já para partículas (isotrópicas) em interação de Coulomb confinadas a um caminho 1D curvo, ocorrem uma infinidade de efeitos estáticos [54, 55, 56, 57] e dinâmicos [58, 59, 60, 61, 62] altamente não triviais. Além disso, em geometrias que são topologicamente não triviais, como a faixa de Möbius, a topologia da superfície pode induzir efeitos que estão ausentes nos sistemas topologicamente triviais correspondentes [63, 64]. Isso nos motiva a investigar as propriedades do estado fundamental de uma rede de dipolos clássicos espalhados na superfície de uma faixa de Möbius. Tal sistema com as características e aplicações citadas pode ser utilizado como um exemplo de transição de fase para um sistema dinâmico. Descobrimos que uma compressão da faixa pode levar a duas transições distintas no estado fundamental

da rede de dipolos que são detectadas como picos no módulo de compressão. Uma das transições está relacionada às mudanças dependentes da curvatura das configurações do dipolo e corresponde a uma mudança do sistema de resistência para favorecimento da compressão. A segunda transição tem sua origem na topologia não trivial da faixa de Möbius e corresponde a uma alteração das propriedades topológicas dos domínios do estado fundamental.

### 3.2 Rede de dipolos em uma faixa de Möbius

Consideramos uma rede de dipolos clássicos com a superfície de uma faixa de Möbius. Cada ponto na superfície da faixa pode ser expresso por uma função paramétrica  $\mathbf{f}(\phi, v)$  dada por

$$\mathbf{f}(\phi, v) = \begin{pmatrix} (R + v \cos \frac{\phi}{2}) \cos(\phi) \hat{i} \\ (R + v \cos \frac{\phi}{2}) \sin(\phi) \hat{j} \\ v \sin \frac{\phi}{2} \hat{k} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

em que  $\phi$  e  $v$  são as coordenadas paramétricas (ou seja, internas) da superfície, e  $R$  é o “raio” do círculo central da faixa de Möbius. Para  $\phi \in [0, 2\pi)$  e  $v \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , a equação (3.1) produz uma faixa de Möbius com largura  $L$ . Antes de descrever a rede de dipolos na superfície da faixa Möbius, é útil introduzir os vetores unitários

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{f}(\phi, v)}{\partial \phi} / \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\phi, v)}{\partial \phi} \right\| \\ \mathbf{e}_v &= \frac{\partial \mathbf{f}(\phi, v)}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(\phi, v)}{\partial v} \right\| \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em cada ponto  $\mathbf{f}(\phi, v)$ , os dois vetores unitários  $\mathbf{e}_\phi$  e  $\mathbf{e}_v$  são ortogonais entre si e tangenciais à superfície da faixa de Möbius. Deste ponto em diante,  $\mathbf{e}_\phi$  e  $\mathbf{e}_v$  serão referidos como a direção angular e a direção radial na faixa. A superfície paramétrica  $\mathbf{f}(\phi, v)$  é mostrada na Figura 3.1, juntamente com as visualizações dos parâmetros descritos acima.

Agora, a rede de  $(N \times M)$  dipolos é colocada na faixa de Möbius. Os pontos da rede são equidistantes nas coordenadas paramétricas, com constantes de rede (paramétricas) de  $\Delta\phi = 2\pi/N$  e  $\Delta v = L/M$ . Consequentemente, as posições dos pontos da rede no espaço euclidiano são dadas por  $\mathbf{r}_{nm} = \mathbf{f}(n\Delta\phi, m\Delta v - L/2)$ , em que  $n \in [1, N]$  e  $m \in [1, M]$ . Um exemplo dessa rede com  $N = 26$  e  $M = 6$  pode ser visto na superfície de Möbius na Figura 3.1. Em cada posição  $\mathbf{r}_{nm}$ , colocamos um dipolo com momento de

### 3.2. REDE DE DIPOLOS EM UMA FAIXA DE MÖBIUS

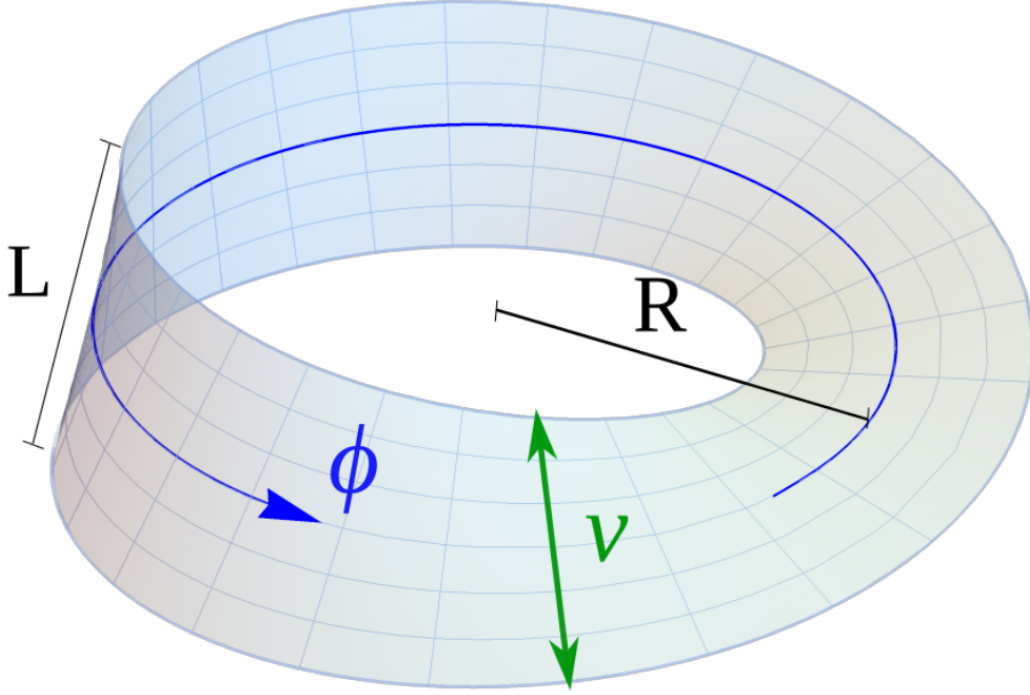


Figura 3.1: Visualização da superfície da faixa de Möbius e dos parâmetros parâmetros da equação (3.1). A grade da malha corresponde a uma rede com  $6 \times 26$  pontos.

dipolo  $\mathbf{d}_{nm}$ . Os dipolos podem girar livremente e interagir por meio de interações dipolo-dipolo. A energia potencial  $V_{nm}^{ij}$  resultante da interação entre dois dipolos posicionados em  $\mathbf{r}_{nm}$ , e  $\mathbf{r}_{ij}$  é então dada por

$$V_{nm}^{ij} = \frac{\mathbf{d}_{nm} \cdot \mathbf{d}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 (r_{nm}^{ij})^3} - \frac{3(\mathbf{d}_{nm} \cdot \mathbf{r}_{nm}^{ij})(\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{nm}^{ij})}{4\pi\epsilon_0 (r_{nm}^{ij})^3}, \quad (3.3)$$

em que  $\mathbf{r}_{nm}^{ij} = \mathbf{r}_{nm} - \mathbf{r}_{ij}$  é o vetor de distância (euclidiana) entre os dois dipolos, e  $r_{nm}^{ij} = |\mathbf{r}_{nm}^{ij}|$  a magnitude correspondente. A energia total do sistema pode então ser determinada pela soma de todas as interações entre pares  $V_{tot} = \sum_{n,m \neq i,j} V_{nm}^{ij}$ . Estamos interessados em encontrar a configuração do dipolo do estado fundamental da rede, ou seja, a configuração que minimiza  $V_{tot}$ . Como a magnitude dos momentos de dipolo  $\mathbf{d}$  apenas dimensiona a energia total e não afeta a configuração do dipolo do estado fundamental, podemos, sem perda de generalidade, definir  $d=|\mathbf{d}| = 1$ . Esse problema de

otimização depende então de  $2MN + 4$  parâmetros, a saber, os momentos de dipolo  $\mathbf{d}$ , os parâmetros da fita  $R$  e  $L$  e as constantes paramétricas da rede  $\Delta u$  e  $\Delta v$ . Para o cálculo das configurações do estado fundamental, consideramos que todos os dipolos interagem entre si. No entanto, alguns dos resultados apresentados foram obtidos usando uma aproximação de vizinho mais próximo ou NN (*Nearest Neighbors*), na sigla em inglês. Essa aproximação NN funciona bem para configurações de equilíbrio reais para sistemas em que a distância NN é pequena em comparação com o raio de curvatura da superfície [53]. Os resultados baseados em cálculos de NN são especificamente mencionados como tais no texto. Além disso, para encontrar as configurações do estado fundamental, usamos um método de eixo principal. O método do eixo principal é um método de otimização numérica que não se baseia em gradientes. Em vez disso, o otimizador realiza pesquisas em uma dada direção ao longo de um conjunto de direções que é continuamente atualizada com o intuito de achar um ponto de mínimo da função dada.

### 3.3 Configurações de equilíbrio do estado fundamental

A configuração dos dipolos no estado fundamental da rede inscrita em uma faixa Möbius é diferente dos estados fundamentais bem conhecidos de redes de dipolo em geometrias “planas”. Isso ocorre porque as distâncias entre os dipolos vizinhos na faixa de Möbius dependem da geometria local de  $\mathbf{f}(\phi, v)$ . Isso pode ser observado calculando-se as distâncias euclidianas  $a$  e  $b$  entre os dipolos vizinhos ao longo das direções  $\mathbf{e}_\phi$  e  $\mathbf{e}_v$

$$\begin{aligned} a(\phi, v) &= \|\mathbf{f}(\phi, v + \Delta v) - \mathbf{f}(\phi, v)\|, \\ b(\phi, v) &= \|\mathbf{f}(\phi + \Delta\phi, v) - \mathbf{f}(\phi, v)\|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Substituindo a parametrização da fita  $\mathbf{f}(\phi, v)$  na equação (3.4) pela equação (3.1) resulta em

$$a = \Delta v = L/M, \tag{3.5}$$

### 3.3. CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO DO ESTADO FUNDAMENTAL

---

para a distância euclidiana entre NN ao longo da direção radial  $\mathbf{e}_v$ , e

$$\begin{aligned}
 b^2(u, v) = & 2R^2 (1 - \cos(\Delta u)) \\
 & + vR \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \cos\left(\frac{u + \Delta u}{2}\right) \right) (1 - \cos(\Delta u)) \\
 & + \frac{v^2}{4} \left( 2 - 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u + \Delta u) \right. \\
 & \left. - 2 \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u + \Delta u}{2}\right) \cos(\Delta u) \right), \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

para a distância euclidiana entre os próximos vizinhos ao longo da direção angular  $\mathbf{e}_\phi$ . O impacto dessa distância variável do vizinho mais próximo nas configurações de equilíbrio do dipolo foi estudado anteriormente [53] e, seguindo a nomenclatura definida em trabalhos anteriores [53], introduzimos o parâmetro  $\gamma = a/b$ . Para minimizar a energia do sistema, os dipolos favorecerão o alinhamento ao longo de  $\mathbf{e}_v$  sempre que  $\gamma < 1$  (ou seja,  $a < b$ ), e ao longo de  $\mathbf{e}_\phi$  sempre que  $\gamma > 1$  (ou seja,  $a > b$ ). Isso ocorre ao fato que os dipolos tendem a se alinhar com seu vizinho mais próximo, minimizando a energia do sistema. Se os parâmetros forem escolhidos de forma que, em alguma parte do faixa de Möbius  $\gamma < 1$  e em outra parte temos  $\gamma > 1$ , o estado fundamental apresentará dois domínios com diferentes orientações de dipolo separadas por uma parede de domínio. Tal parede provém de algumas propriedades para o sistema como resistência a campos elétricos e serve como uma barreira para excitações, limitando-as ao seu domínio de origem [53].

Um exemplo de configuração de dipolo de estado fundamental na faixa de Möbius com  $N = 51$ ,  $M = 9$ ,  $R = 1$  e  $L = 1,02$  é mostrado na Figura 3.2. Na figura, os dipolos são coloridos de acordo com sua orientação: Dipolos com  $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_\phi$  são coloridos em verde, enquanto todos os dipolos com  $\mathbf{d} \parallel \mathbf{e}_v$  são coloridos em azul. Dipolos com alinhamento significativamente normal à superfície, ou seja, dipolos para os quais  $\mathbf{d} \parallel (\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_v)$ , não puderam ser observados em nenhuma simulação feita. De agora em diante, os termos domínio angular e domínio radial serão usados para se referir, respectivamente, aos domínios em que os dipolos estão predominantemente alinhados ao longo de  $\mathbf{e}_\phi$  e  $\mathbf{e}_v$ . Para melhor visualização desse estado fundamental, a orientação dos dipolos em relação às coordenadas paramétricas  $\phi$  e  $v$  é mostrada na Figura 3.2. Um diagrama correspondente de como o parâmetro  $\gamma(\phi, v)$  muda com as coordenadas paramétricas é mostrado na mesma figura.

A partir da comparação entre a orientação dos dipolos e o diagrama de  $\gamma$  mostrada na Figura 3.2, sabemos que a configuração do dipolo do estado

CAPÍTULO 3. REDE DE DIPOLOS EM UMA GEOMETRIA NÃO-ORIENTÁVEL SOB COMPRESSÃO

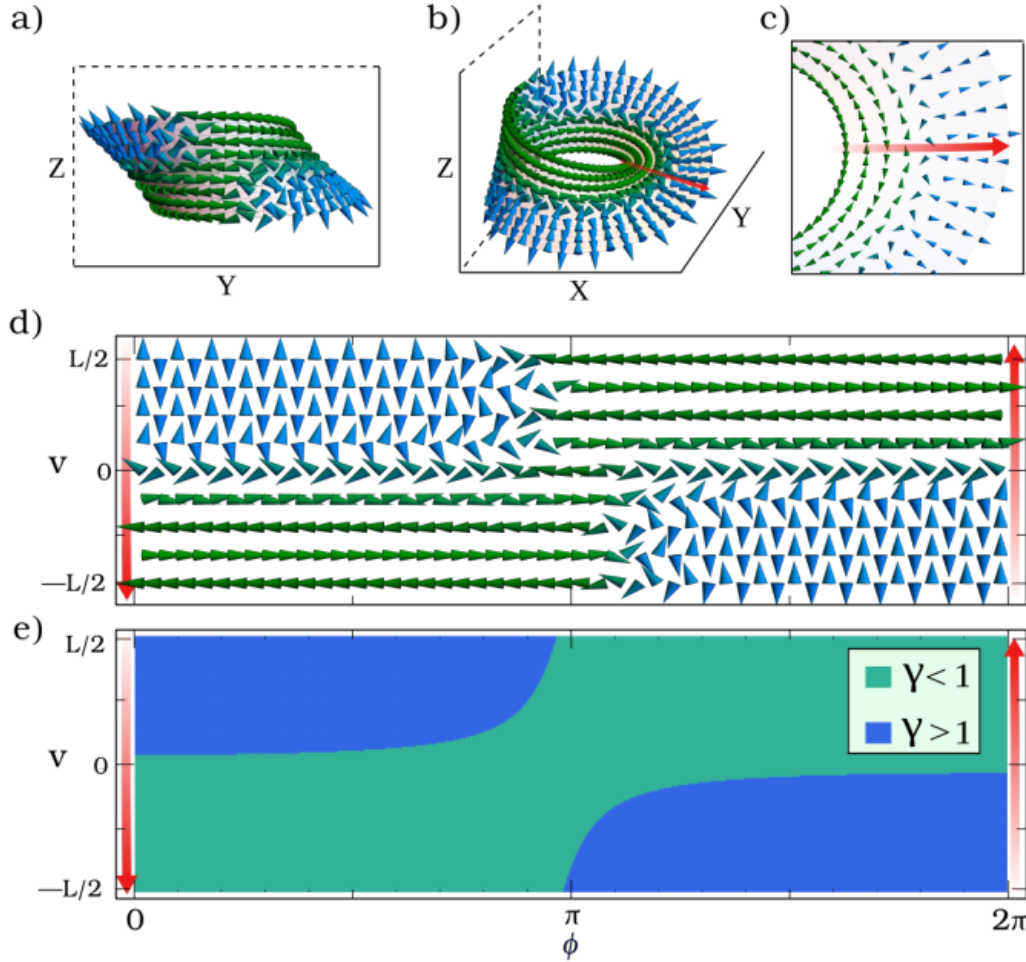


Figura 3.2: Exemplo de configuração no estado fundamental para  $N = 51$ ,  $M = 9$ ,  $R = 1$  e  $L = 1,02$ . (a-c) Visualizações do estado fundamental de diferentes pontos de vista. (d) Visualização dos alinhamentos dos dipolos do estado fundamental na superfície. As posições e os alinhamentos dos dipolos são dados com relação às coordenadas paramétricas  $\phi$  e  $v$ . (e) Uma visualização do parâmetro  $\gamma = a/b$  como uma função das coordenadas paramétricas. Consulte o texto para obter detalhes.

fundamental pode ser prevista com precisão a partir do parâmetro  $\gamma$ , especialmente quando o espaçamento dos dipolos é pequeno em comparação com o raio de curvatura da superfície. Portanto, podemos obter uma intuição do impacto das variações dos parâmetros no estado fundamental analisando o

### 3.3. CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO DO ESTADO FUNDAMENTAL

---

impacto dessas alterações em  $\gamma$ . Para uma determinada rede de dipolo de dimensão  $(N \times M)$ , o valor local de  $\gamma$  pode ser afetado pelos parâmetros da fita de Möbius  $L$  e  $R$ . Para ter uma primeira impressão do comportamento geral de  $\gamma$ , expandimos  $b(\phi, v)$  para a primeira ordem em  $\Delta\phi$  em torno de  $\Delta\phi = 0$ . Como  $\Delta\phi = 2\pi/N$ , essa é uma boa aproximação no limite de  $N$  grande. Com isso, o parâmetro  $\gamma$  pode ser aproximado como

$$\gamma \approx \frac{L}{\pi} \frac{(N/M)}{\sqrt{4R^2 + 3v^2 + 8Rv \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + 2v^2 \cos(\phi)}}. \quad (3.7)$$

Conseqüentemente, em redes com muitos pontos, o parâmetro  $\gamma$  será dimensionado globalmente quando a razão  $N/M$  muda. É importante notar que qualquer alteração de  $L$  também afetará o intervalo do parâmetro  $v \in [-L/2, L/2]$ . Portanto, é possível reescrever a equação (3.7) de modo que ela dependa inteiramente da razão  $L/R$ , introduzindo  $v = 2v/L \in [-1, 1]$ . Alterar a razão  $L/R$  não dimensionará  $\gamma$  globalmente. Em vez disso, um aumento em  $L/R$  pode aumentar  $\gamma$  em todos os lugares ou (abaixo de um determinado valor de  $L/R$ ) pode levar a um aumento de  $\gamma$  em algumas partes da rede e a uma diminuição de  $\gamma$  em outras partes.

A seguir, o estado fundamental para valores fixos de  $N/M$  e  $R$  será estudado. Isso reduz o problema de encontrar todas as configurações possíveis do estado fundamental na faixa de Möbius para encontrá-lo como uma função de  $L$ . Essas configurações e, especialmente, a distribuição dos dois domínios, são visualizados nos quatro painéis inferiores da Figura 3.3 para vários valores de  $L$ .

Nesses quatro painéis, é possível observar que, com a variação de  $L$ , podemos ajustar o tamanho dos dois domínios - com o domínio angular cobrindo toda a superfície para  $L$  grande e o domínio radial cobrindo-a para  $L$  pequeno. A seguir, analisaremos a mudança de tamanho dos domínios quando  $L$  for aumentado. Embora estejamos nos concentrando em um sistema de exemplo específico, o comportamento mostrado, ou seja, a evolução dos domínios quando  $L$  é variado, é geral e ocorre quase exatamente da mesma forma, independentemente dos valores específicos de  $R$  e  $N/M$ . Entretanto, antes de analisarmos o tamanho do domínio, cabe um comentário final sobre o impacto da razão  $N/M$ : para determinados valores dessa razão (especialmente em direção aos extremos  $N \gg M$  ou  $N \ll M$ ), pode ser que (dependendo do caso) nem todas as configurações mostradas sejam acessíveis - a menos que  $L$  seja tão grande que a superfície se cruze com ela mesma. Além disso,

CAPÍTULO 3. REDE DE DIPOLOS EM UMA GEOMETRIA NÃO-ORIENTÁVEL SOB COMPRESSÃO

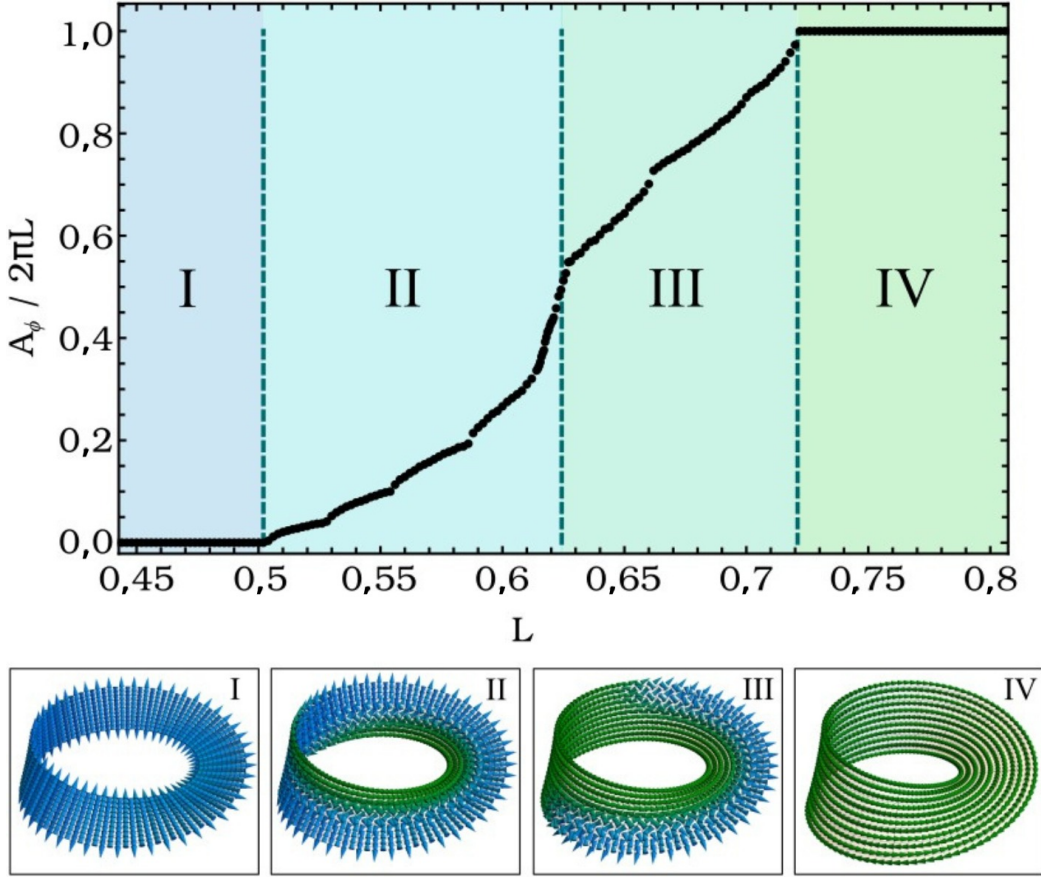


Figura 3.3: Tamanho  $A_\phi$  do domínio angular como uma função da largura da faixa de Möbius  $L$  para  $N = 101$ ,  $M = 11$  e  $R = 1$ . Todos os pontos foram obtidos usando uma aproximação do vizinho mais próximo. O painel inferior mostra exemplos de configurações dos dos quatro regimes para  $L \in [0,47, 0,6, 0,65, 0,83]$  obtidos de simulações considerando que todos os dipolos interagem entre si.

nos regimes em que a superfície se intercepta, podem ser encontradas configurações do estado fundamental significativamente diferentes das mostradas neste trabalho. Entretanto, o regime em que a superfície se intercepta está fora do escopo deste trabalho.

Para ter uma ideia de como os tamanhos de domínio mudam com  $L$ , classificamos os estados fundamentais pela área  $A_\phi \in [0, 2\pi L]$  ocupada pelo domínio angular. Observe que  $A_\phi$  se refere a área em coordenadas paramétricas. Para  $A_\phi = 0$ , toda a faixa é ocupada pelo domínio radial, enquanto para

### 3.4. TRANSIÇÃO INDUZIDA POR COMPRESSÃO

---

$A_\phi = 2\pi L$ , toda a faixa é coberta pelo domínio angular. O valor de  $A_\phi$  pode ser obtido para qualquer configuração do estado fundamental simplesmente contando todos os dipolos que se alinham significativamente ao longo de  $\mathbf{e}_\phi$ . A área  $A_r$  ocupada pelo domínio radial radial é, então,  $A_r = 2\pi L - A_\phi$ . Os resultados da simulação da área  $A_\phi$  ocupada pelo domínio radial em função de  $L$  são apresentados na figura 3.3 para estados fundamentais determinados numericamente em uma faixa de Möbius com  $N = 101$ ,  $M = 11$  e  $R = 1$ . Note que os dados mostrados na figura 3.3 são obtidos usando uma aproximação NN. Na figura, quatro regiões claramente distintas podem ser vistas: Na região I, apenas o domínio radial existe. Na região II, tanto o domínio radial quanto o domínio angular coexistem, com o domínio angular aumentando de tamanho com o aumento de  $L$ . Quando o domínio angular aparece pela primeira vez (a fronteira entre as regiões I e II na Fig. 3), ele emerge do ponto  $(\phi, v) = (-\pi/N, -L/2)$ . A partir daí, o domínio angular crescerá principalmente ao longo de  $\mathbf{e}_\phi$  à medida que  $L$  aumenta. À medida que o domínio angular cresce, ele acabará circundando a faixa de Möbius e para  $L = 2MR \text{sen}(\pi/N)$  se conectará a si mesmo no ponto  $(\phi, v) = (\pi - \pi/N, 0)$ . Com o aumento de  $L$ , o domínio angular acabará ocupando metade da área total da faixa (a borda entre as regiões II e III na figura 3.3). Ao redor da borda entre as regiões II e III, os tamanhos dos domínios mudam muito rapidamente, indicando uma grande sensibilidade desse ponto às variações de parâmetros. Na região III, o domínio angular aumenta ainda mais de tamanho quando  $L$  é aumentado, até que, finalmente, na região IV, ele engloba toda a faixa. Para sistemas com diferentes  $N/M$ , não foi possível observar diferenças perceptíveis em relação ao comportamento descrito acima.

## 3.4 Transição induzida por compressão

Será agora demonstrado que a configuração do dipolo no estado fundamental passa por duas transições distintas se o comprimento  $L$  for variado. A variação de  $L$  discutida acima também pode ser interpretada como uma compressão ou alongamento adiabático da faixa de Möbius. O comportamento da rede durante essa compressão pode ser analisado com o módulo de compressão 2D ou, simplesmente, módulo 2D [65] da tira. O módulo 2D é definido como

$$K = A_0 \frac{d^2 E}{dA^2} = \frac{L_0}{2\pi R} \frac{d^2 E}{dL^2}, \quad (3.8)$$

### CAPÍTULO 3. REDE DE DIPOLOS EM UMA GEOMETRIA NÃO-ORIENTÁVEL SOB COMPRESSÃO

---

em que  $A$  é a área da tira,  $A_0$  e  $L_0$  denotam a área e a largura da tira antes da compressão, e  $E$  é a energia total do sistema. O módulo 2D descreve como uma mudança na largura altera a força necessária para comprimir (ou esticar) a tira. Consequentemente, valores pequenos de  $K$  indicam que a força necessária muda muito pouco quando  $L$  varia, enquanto valores grandes de  $K$  implicam em grandes variações na força necessária para comprimir a fita quando  $L$  varia.

O módulo 2D da Equação (3.8) depende principalmente do comportamento da energia total do estado fundamental  $U(L)$  do sistema. Essa energia total  $U(L)$  em função da largura da faixa  $L$  é mostrada na Figura 3.4. É interessante notar que a curva  $E(L)$  apresenta um máximo global. De agora em diante, usaremos  $L_{crit}$  para nos referirmos à largura da faixa de Möbius nesse máximo. Para valores  $L < L_{crit}$ , a energia aumenta com o aumento da largura da faixa, o que implica que a faixa prefere um estado comprimido e resiste ao alongamento. Por outro lado, para  $L > L_{crit}$ , a energia diminui com o aumento de  $L$ , o que implica que, nesse regime, a compressão da tira requer energia. Essa transição entre o favorecimento da compressão e o favorecimento do alongamento pode ser entendida a partir dos alinhamentos de dipolo nos domínios radial e angular. É o resultado da competição entre o domínio angular que favorece o alongamento e o domínio radial que favorece a compressão. No domínio radial, os dipolos estão alinhados ao longo de  $\mathbf{e}_v$  e naturalmente preferem que a distância  $a$  de seus vizinhos mais próximos ao longo da direção  $\mathbf{e}_v$  seja a menor possível. A minimização de  $a$  pode ser obtida globalmente com a diminuição de  $L$ . Consequentemente, a diminuição de  $L$  reduzirá a energia total proporcional ao número de dipolos no domínio radial. Por outro lado, no domínio angular, os dipolos estão alinhados ao longo de  $\mathbf{e}_\phi$ . Consequentemente, esses dipolos preferirão uma diminuição na distância do vizinho mais próximo  $b(\phi + \Delta\phi, v)$  ao longo da direção  $\mathbf{e}_\phi$ . No entanto, a distância  $b$  pode mudar, dependendo da posição na faixa. Além disso, quando  $L$  varia, a distância  $b$  pode aumentar em algumas partes da faixa e diminuir em outras. Entretanto, devido ao forte decaimento das interações dipolo-dipolo, o impacto de uma alteração em  $L$  sobre a energia é maior para os dipolos em que  $b$  é menor. A distância  $b(\phi + \Delta\phi, v)$  é minimizada em  $(\phi, v) = (-\pi/N, -L/2)$ , ou seja, na origem do domínio radial. E em torno desse ponto,  $b$  diminuirá ainda mais quando  $L$  for aumentado.

Próximo ao ponto de cruzamento  $L_{crit}$ , o módulo 2D varia rapidamente e tem um mínimo local. Esse pico no módulo 2D, no entanto, corresponde à fronteira entre as regiões III e IV na Figura 3.2. Para diferentes valores de  $N$ ,

### 3.4. TRANSIÇÃO INDUZIDA POR COMPRESSÃO

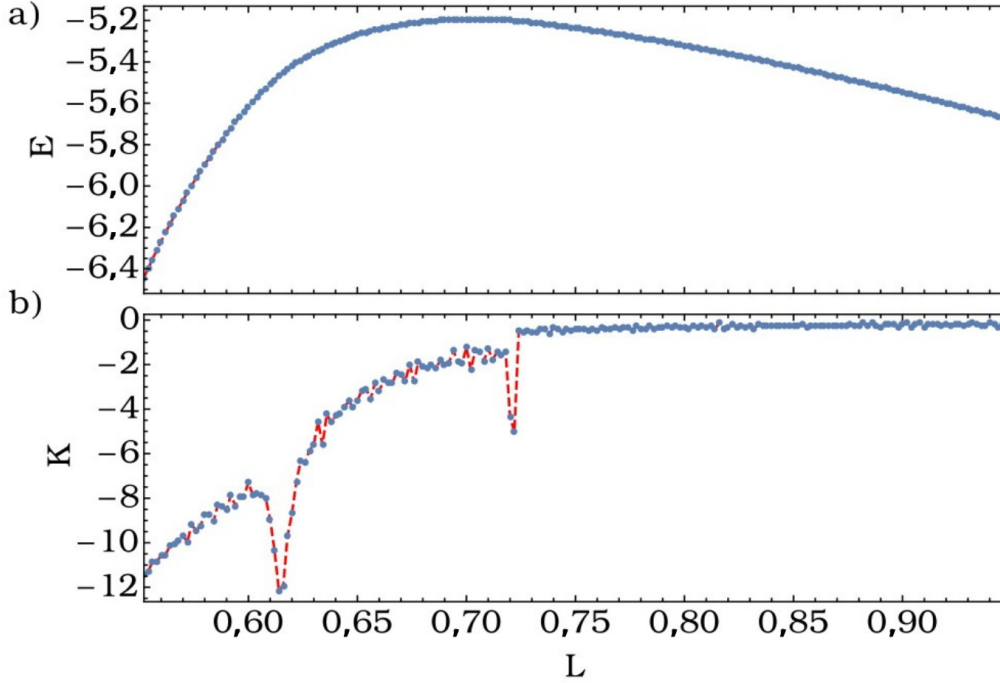


Figura 3.4: (a) Energia total  $E$  em função da largura da faixa  $L$ . (b) O módulo 2D  $K \approx d^2 E/dL^2$  em função da largura da faixa  $L$ . Os dados de energia e módulo 2D foram obtidos para uma faixa de Möbius com  $N = 101$ ,  $M = 11$  e  $R = 1$ . Note que os valores estão em unidades arbitrárias.

$M$  e  $R$ , esse pico não necessariamente coincide com o máximo de  $E(L)$ . É interessante notar que um segundo pico pode ser visto no módulo 2D, indicando uma segunda transição. Esse segundo pico aparece em uma largura da fita  $L = 2MR \text{sen}(\pi/N)$  - muito próximo da transição entre os regimes II e III. Embora esse segundo pico não tenha efeito perceptível sobre a energia total do sistema, ele marca uma mudança significativa na estrutura dos domínios. Para valores de  $L < 2MR \text{sen}(\pi/N)$  um pouco abaixo do pico, o domínio radial não só cobre a maior parte da faixa de Möbius, mas também a circunda uma vez, dando ao domínio uma topologia não trivial. Ao mesmo tempo, o domínio angular tem uma topologia trivial para  $L < 2MR \text{sen}(\pi/N)$ . Em contraste, para  $L > 2MR \text{sen}(\pi/N)$  acima do pico, é o domínio angular que tem uma topologia não trivial e o domínio radial é topologicamente trivial. Em resumo, o domínio que se estende (azimutalmente) por toda a faixa de Möbius herda sua topologia não trivial, enquanto os domínios que abrangem

CAPÍTULO 3. REDE DE DIPOLOS EM UMA GEOMETRIA  
NÃO-ORIENTÁVEL SOB COMPRESSÃO

---

apenas uma parte azimutal finita da faixa de Möbius são topologicamente triviais.

Conforme descrito acima, durante o cruzamento - à medida que  $L$  é aumentado - o domínio angular cresce e se conecta a si mesmo no ponto  $(\phi, v) = (\pi - \pi/N, 0)$ . Para entender melhor esse cruzamento, é útil analisar  $\gamma$  nas proximidades desse ponto. Primeiro, encontramos

$$\left. \frac{d\gamma(\phi, v)}{d\phi} \right|_{\phi \rightarrow \pi - \pi/N, v=0} = \left. \frac{d\gamma(\phi, v)}{dv} \right|_{\phi \rightarrow \pi - \pi/N, v=0} = 0, \quad (3.9)$$

indicando que  $\gamma$  sempre tem um ponto crítico em  $(\phi, v) = (\pi - \pi/N, 0)$ . Além disso, em  $(\phi, v) = (\pi - \pi/N, 0)$ , a matriz Hessiana das segundas derivadas é indefinida, indicando que o ponto crítico é um ponto de sela. Exatamente para  $L = 2MR \sin(\pi/N)$ , o valor de  $\gamma$  no ponto de sela se torna  $\gamma(\pi - \pi/N, 0) = 1$ . Qualquer pequena alteração em  $L$  aumentará (ou diminuirá)  $\gamma$  nas proximidades do ponto de sela. É por isso que, para  $L < 2MR \sin(\pi/N)$ , é o domínio radial que circunda a faixa de Möbius e, para  $L > 2MR \sin(\pi/N)$ , é o domínio angular. Para  $L = 2MR \sin(\pi/N)$ , o sistema atinge um ponto de transição em que nenhum dos dois domínios gira em torno da faixa de Möbius. Para  $L = 2MR \sin(\pi/N)$ , ambos os domínios são topologicamente triviais; enquanto que para  $L = 2MR \sin(\pi/N)$ , um deles não é.

Embora nossa análise da rede dipolar em uma faixa de Möbius já mostre uma intrincada formação de estrutura para o estado fundamental, há várias direções futuras de pesquisa em aberto. Um caso imediato de investigação seria os estados excitados de baixa energia e suas propriedades. Como e onde surgem os defeitos topológicos e não topológicos e possivelmente as dobras na rede dipolar e como eles “interagem” com as paredes do domínio? As mudanças dos parâmetros geométricos nos limites da fase seriam candidatos promissores para a formação de estruturas dinâmicas e transitórias no regime de energia mais alta. Como perspectiva promissora e de longo prazo, preveremos a investigação de redes dipolares em superfícies curvas geometricamente e topologicamente mais complexas. Embora exista uma infinidade de tais superfícies, especialmente na estrutura de superfícies mínimas (multiperiódicas) [65], o impacto da interação dipolar em superfícies de autointersecção é um problema aberto e intrigante a ser explorado no futuro. Tal sistema é um exemplo dos diversos tipos diferentes de sistemas dinâmicos que apresentam transições de fase. Apesar desses sistemas terem sido estudados no passado com o foco na transições de fase [68], o foco desses estudos é muitas vezes resumido a modelos "simples", nos quais é possível escrever uma função partição capaz de descrever as propriedades estatísticas do sistema. O

### 3.4. TRANSIÇÃO INDUZIDA POR COMPRESSÃO

---

estudo sobre a existência e análise da transição de fase em sistemas com mais graus de liberdade (como o discutido nesse capítulo) ou até mesmo sistemas caóticos é limitado na literatura. Nos próximos capítulos, vamos analisar a presença de uma transição de fase em bilhares dependentes do tempo. Primeiramente, iremos estudar a ocorrência de uma transição de fase em um bilhar exótico, uma versão modificada do modelo *Bouncer* em que o campo em que a partícula está inserido não é homogêneo.

---

---

## CAPÍTULO 4

---

# O MODELO *BOUNCER* EM CAMPO NÃO HOMOGÊNIO

### 4.1 O sistema

O modelo estudado neste capítulo é um bilhar exótico, sendo uma variação do modelo *bouncer* no qual o mecanismo de retorno da partícula à parede móvel se dá por uma força elétrica que depende da posição da partícula. Para ilustrar este sistema, imaginemos uma esfera de raio  $R$  com distribuição uniforme de carga  $-Q < 0$  em seu volume com uma cavidade que vai de um hemisfério a outro, passando pelo seu centro, e uma partícula de carga  $q > 0$  que é acelerada pelo campo gerado no interior desta esfera. Consideramos que a cavidade é estreita o suficiente para que a simetria esférica do campo não seja muito alterada. Dentro da cavidade há uma parede que oscila no tempo de acordo com a expressão  $y_w(t') = l_0 + \epsilon \cos(\omega t' + \phi_0)$ , em que  $t'$  é o tempo,  $\epsilon$  é a amplitude de oscilação,  $\phi_0$  é a fase inicial,  $\omega$  é a frequência de oscilação e  $l_0$  é a posição ao redor da qual a parede oscila. A figura 4.1 ilustra o modelo *bouncer* em campo não homogêneo.

Devido ao campo elétrico da esfera, a partícula carregada em seu interior sofre o efeito de uma força dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{y}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{y}$  identifica o vetor posição da partícula. Pela segunda lei de Newton

#### 4.1. O SISTEMA

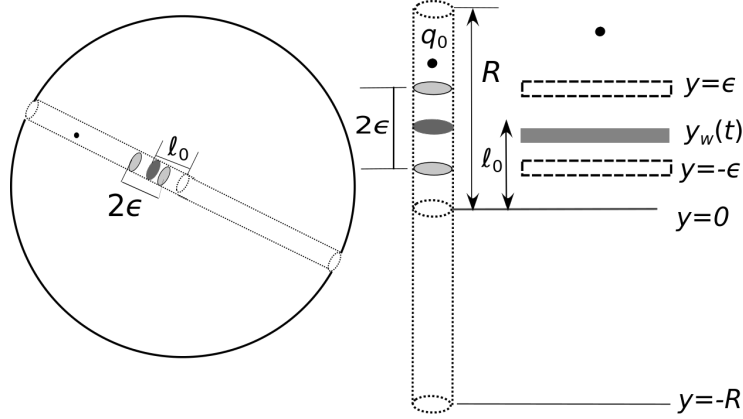


Figura 4.1: Ilustração do modelo bouncer em campo não homogêneo.

temos

$$-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}y = m\ddot{y}, \quad (4.2)$$

em que  $m$  é a massa da partícula. A força dada pela equação (4.2) é restauradora e a partícula terá um movimento harmônico.

Por simplificação, como todos os vetores estão na mesma direção, a notação vetorial foi evitada. Reorganizando os termos podemos escrever a equação acima como

$$\ddot{y} + \omega_f^2 y = 0, \quad (4.3)$$

em que  $\omega_f$  identifica frequência da partícula, dada por  $\omega_f^2 = \frac{qQ}{4\pi m\epsilon_0 R^3}$ . A equação acima descreve um movimento similar a de um oscilador harmônico. Isso indica que a partícula tem um movimento oscilatório dentro da cavidade. A carga desce em direção a parede móvel devido a força elétrica que atua sobre ela, uma vez na zona de colisões, a partícula sofre uma colisão com a parede, invertendo o sinal da velocidade da carga. Caso retirássemos a parede móvel, a partícula desceria através da cavidade passando pelo equador da esfera e, eventualmente, a força elétrica que atua na carga, mudaria de sentido e ela subiria na cavidade. Esse movimento oscilatório de "subida" e "descida" é descrito pela equação (4.3). A solução desta equação é dada por

$$y(t') = D_n \cos(\omega_f t') + E_n \sen(\omega_f t'), \quad (4.4)$$

em que  $D_n$  e  $E_n$  são constantes determinadas a partir do conhecimento da

CAPÍTULO 4. O MODELO BOUNCER EM CAMPO NÃO HOMOGENEO

---

posição  $y_n$  e velocidade  $v_n$  da partícula em um tempo  $t'_n$ . Dessa forma temos

$$D_n = \frac{\dot{y}_2(t'_n)y_n(t'_n) - y_2(t'_n)v_n(t'_n)}{\omega_f}, \quad (4.5)$$

$$E_n = \frac{y_1(t'_n)v_n(t'_n) - y_n(t'_n)\dot{y}_1(t'_n)}{\omega_f}, \quad (4.6)$$

em que  $y_1(t'_n) = \cos(\omega_f t'_n)$  e  $y_2(t'_n) = \sin(\omega_f t'_n)$ .

Contudo, é apropriado descrevermos o sistema em termos de variáveis adimensionais. Definimos, portanto,  $Y_w = y_w/l_0$  e  $\varepsilon = \epsilon/l_0$  como a posição e a amplitude da parede móvel, respectivamente. Definimos, também,  $t = t'\omega$  como a nova variável tempo,  $\Omega = \omega_f/\omega$  como constante que relaciona a frequência de oscilação da partícula devido ao campo elétrico e a frequência da parede. Definimos ainda a nova variável fase  $\phi(t) = t + \phi_0$ . Utilizar  $\phi$  como variável independente ao invés do tempo pode ser útil, uma vez que podemos limitá-la entre 0 e  $2\pi$ .

Sendo assim, descrevemos a posição da parede oscilante como  $Y_w = 1 + \varepsilon \cos(\phi)$  e da partícula como  $Y(t) = d_n \cos(\Omega t) + e_n \sin(\Omega t)$ , em que  $d_n = D_n/l_0$  e  $e_n = E_n/l_0$ .

## 4.2 O mapa

Considere que  $t_n$  seja o instante da  $n$ -ésima colisão da partícula com a parede móvel. Neste instante, a posição da parede é  $Y_w(t_n)$ . A partícula então parte desta posição com velocidade  $V_n$ . Sem perda de generalidade, consideremos que  $V_n > 0$  indicando que, imediatamente após a colisão  $n$ , o movimento da partícula é para cima. A carga então sobe e, devido à ação da força elétrica, retorna à posição da parede oscilante  $Y_w$  em um intervalo de tempo.

No instante da próxima colisão, a fase da parede é dada por  $\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t_{n+1}$ , em que  $\Delta t_{n+1}$  é o intervalo entre as colisões  $n$  e  $n + 1$ . Assim, a colisão  $n + 1$  ocorre no instante  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$  que satisfaz a relação  $Y(t_{n+1}) = Y_w(t_{n+1})$ , ou seja,

$$d_n \cos(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) + e_n \sin(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) - 1 - \varepsilon \cos(t_n + \Delta t_{n+1} + \phi_0) = 0. \quad (4.7)$$

Como a equação acima não possui solução analítica, encontramos o valor de  $\Delta t_{n+1}$  numericamente após cada colisão.

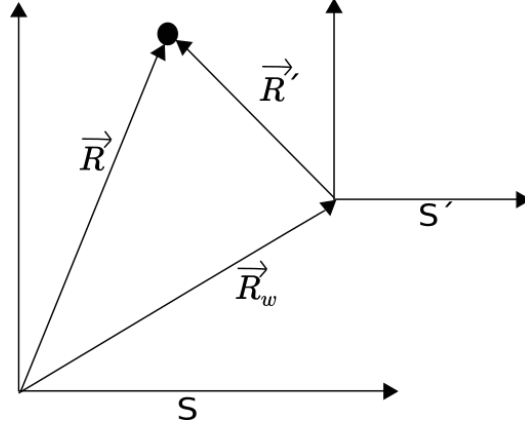


Figura 4.2: Os referenciais  $S$  e  $S'$  e os vetores posição da partícula  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}'$  e o da parede

A análise do efeito da colisão na velocidade necessita da descrição do movimento da partícula nos referenciais da parede fixa e da parede móvel. A figura 4.2 ilustra os vetores posição envolvidos no cálculo de mudança entre referenciais em um espaço bidimensional. No referencial  $S$  a partícula se move com velocidade  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$  e a origem do referencial  $S'$  com velocidade  $\mathbf{V}_w = \dot{\mathbf{R}}_w$ . Sendo  $\mathbf{V}' = \dot{\mathbf{R}}'$  a velocidade da partícula no referencial da parede, temos que a relação entre as velocidades é dada por

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{V}_w, \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{V}_w = -\varepsilon \text{sen}(\phi) \hat{j}$ . Imediatamente antes da colisão, temos que, no referencial da parede,  $\mathbf{V}'_i = \mathbf{V} - \mathbf{V}_w$  e, como a colisão é elástica, a velocidade da partícula nesse referencial após a colisão é  $\mathbf{V}'_f = -\mathbf{V}'_i$ , ou seja

$$\mathbf{V}'_f = [d_n \Omega \text{sen}(\Omega t_{n+1}) - e_n \Omega \cos(\Omega t_{n+1}) - \varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1})] \hat{j}. \quad (4.9)$$

Imediatamente após a colisão temos que a velocidade da partícula é dada pela equação (4.8). Utilizando o  $V'$  obtido na equação (4.9) e, considerando que a colisão não altera a velocidade da parede móvel, temos que a velocidade da partícula após a colisão é dada por  $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}'_f - \varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1}) \hat{j}$ , ou seja,

$$V_{n+1} = d_n \Omega \text{sen}(\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0)) - e_n \Omega \cos(\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0)) - 2\varepsilon \text{sen}(\phi_{n+1}). \quad (4.10)$$

Definimos  $\rho_n$  e  $\delta_n$  tais que  $d_n = \rho_n \cos(\delta_n)$  e  $e_n = \rho_n \text{sen}(\delta_n)$ . Dessa forma, escrevemos o mapa bidimensional do modelo *bouncer* em campo não

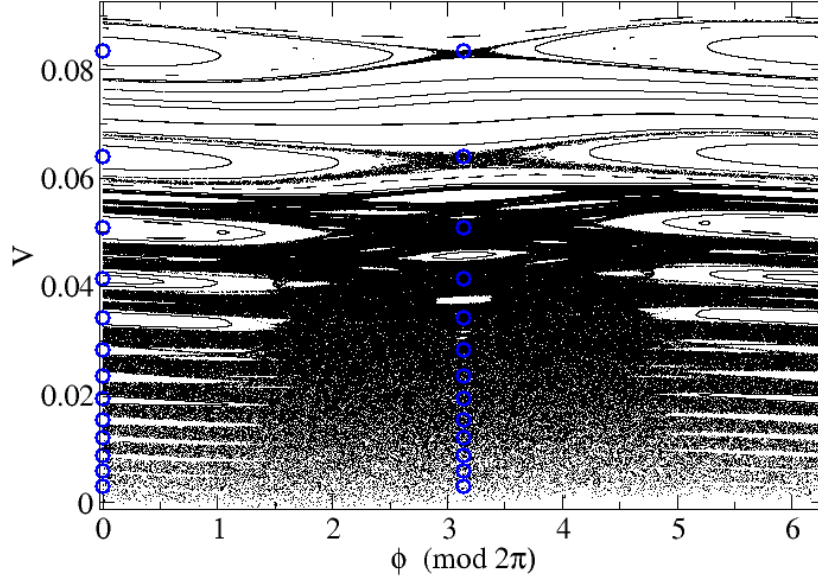


Figura 4.3: O espaço de fase do *bouncer* com campo não homogêneo para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $\Omega = 0,03$ .

homogêneo como

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n + \Delta t_{n+1}, \\ V_{n+1} &= \rho_n \Omega \operatorname{sen}(\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0) - \delta_n) - 2\varepsilon \operatorname{sen}(\phi_{n+1}),\end{aligned}\quad (4.11)$$

em que  $\Delta t_{n+1}$  é obtido pela equação (4.7) e que  $\rho_n$  e  $\delta_n$  são dados, respectivamente, por

$$\rho_n = \sqrt{d_n^2 + e_n^2}, \quad (4.12)$$

$$\delta_n = \arctan(e_n/d_n). \quad (4.13)$$

A figura 4.3 ilustra o espaço de fase do modelo com  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $\Omega = 0,03$ . O espaço de fase foi construído a partir da iteração do mapa (4.11) utilizando diversas condições iniciais no espaço  $\phi \times V$  com  $\phi \in (0, 2\pi]$  e  $V_0 \in (0, 01; 0, 09]$ .

Podemos destacar duas regiões no espaço de fase. Para velocidades pequenas nota-se uma região de movimento caótico chamada mar de caos, dentro da

qual existem diversas ilhas periódicas também chamadas de ilhas *Kolmogorov-Arnold-Moser* (KAM). Essa região de caos é delimitada pela curva invariante de mais baixa energia. Essa curva separa o mar de caos da região de energias maiores, impedindo que a partícula apresente aceleração de Fermi [69]. O interior das ilhas KAM é uma região proibida para uma órbita pertencente ao mar de caos, ou seja, uma órbita que está vinculada ao interior de alguma dessas ilhas jamais sairá dela. De forma análoga, nenhuma órbita do mar de caos pode adentrar as ilhas. Acima da primeira curva invariante existem outras regiões de movimento regular e caótico. Para valores de  $V$  suficientemente grandes, notamos apenas regiões de movimento regular no espaço de fases. Isso faz sentido fisicamente, uma vez que a troca de momento entre a parede e a partícula não altera significativamente o módulo da sua velocidade, o que resulta nas curvas invariantes *spanning*. A presença e o tamanho das regiões caóticas dependem do valor dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\Omega$ .

As figuras 4.4 e 4.5 mostram os espaços de fases para diferentes valores de  $\Omega$  e com  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Na figura 4.4,  $\Omega$  é muito maior que  $\varepsilon$ . Para tais valores observamos que conforme  $\Omega$  diminui, as regiões caóticas aparecem. Dessa forma, as curvas invariantes começam a desaparecer e regiões de caos que eram localizadas eventualmente se juntam formando o mar de caos. Existe um valor limite de  $\Omega$  abaixo do qual o espaço de fases fica praticamente inalterado, como podemos observar na figura 4.5. O mesmo resultado foi observado com diferentes valores de  $\varepsilon$ .

No caso em que  $\Omega$  é muito pequeno, temos que a frequência da parede é muito maior que  $\omega_f$ , parâmetro esse relacionado com a intensidade da força elétrica. Sendo assim, o intervalo entre duas colisões será longo e a parede oscilará diversas vezes até que a partícula retorne até ela. Dessa forma, perdemos a correlação entre o movimento da parede e o da partícula, o que resulta em trajetórias caóticas.

### 4.3 O modelo simplificado

Na última seção mostramos que o tempo entre as colisões é obtido resolvendo numericamente uma equação transcendental. No entanto, existe uma simplificação do modelo na qual desprezamos o deslocamento da parede, ou seja, consideramos que a posição da parede móvel é  $Y_w = 1$ . Dessa forma, reescrevemos a equação (4.7)

$$d_n \cos(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) + e_n \sin(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1})) - 1 = 0. \quad (4.14)$$

CAPÍTULO 4. O MODELO BOUNCER EM CAMPO NÃO HOMOGENEO

---

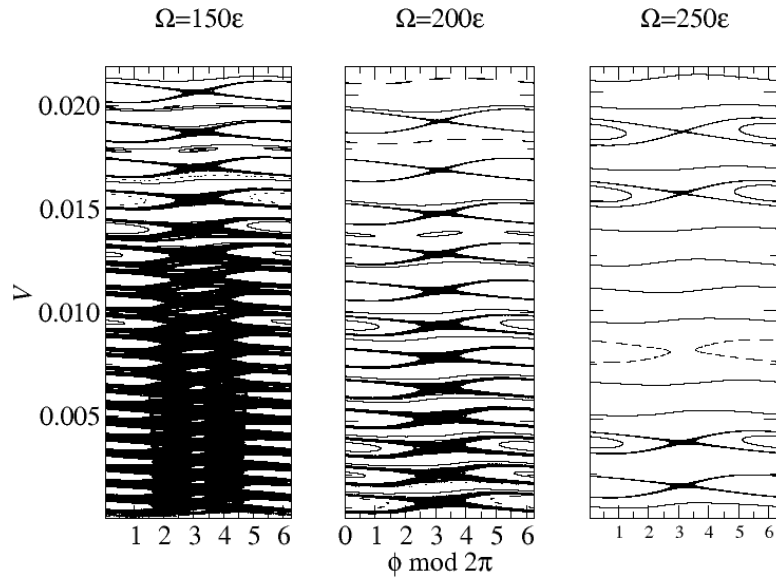


Figura 4.4: Três espaços de fases para valores diferentes de  $\Omega$  e com  $\epsilon = 10^{-3}$ . Elevar o valor  $\Omega$  resulta no aumento da correlação entre a posição da parede na colisão  $n$  e a colisão  $n+1$ , o que leva ao surgimento de regiões de movimento regular no espaço de fases.

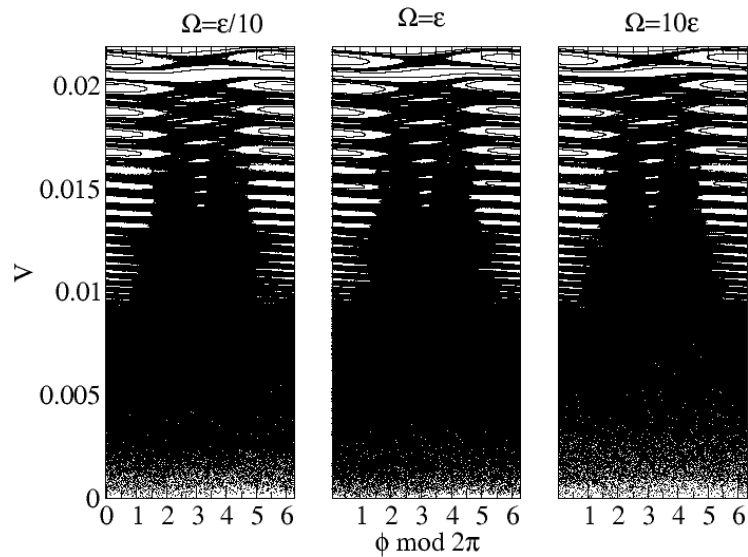


Figura 4.5: Espaços de fases para diferentes valores de parâmetro. Note que existe um valor de  $\Omega$  abaixo do qual o espaço de fase fica praticamente inalterado.

### 4.3. O MODELO SIMPLIFICADO

---

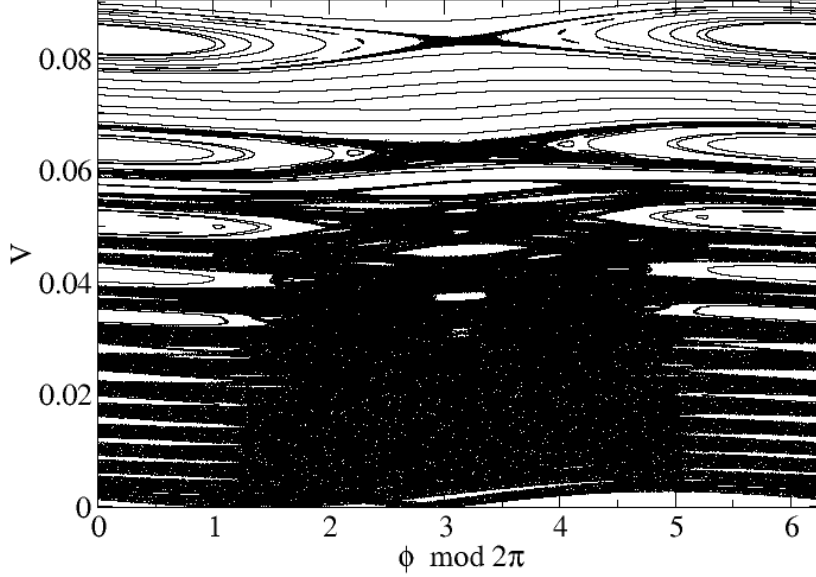


Figura 4.6: Espaço de fases do modelo simplificado para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $\Omega = 0,03$ .

Fazendo a transformação  $d_n = \rho \cos(\delta)$  e  $e_n = \rho \sin(\delta)$ , a equação acima fica equivalente a

$$\rho_n \cos(\Omega(t_n + \Delta t_{n+1}) - \delta_n) - 1 = 0. \quad (4.15)$$

O intervalo entre as colisões no modelo simplificado é então obtido isolando  $\Delta t_{n+1}$  na equação acima:

$$\Delta t_{n+1} = \frac{1}{\Omega} \left[ \delta_n - \Omega t_n + \arccos \left( \frac{1}{\rho_n} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Nesta simplificação, apesar de desprezarmos o movimento da parede móvel, consideramos que a transferência de momento entre ela e a partícula ainda ocorre conforme descrito no modelo completo. A figura 4.6 ilustra o espaço de fases do modelo simplificado para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $\Omega = 0,03$ .

A versão simplificada é útil pois além de diminuir o gasto computacional, ela permite a obtenção de resultados analíticos importantes, aplicáveis também à versão completa.

## 4.4 Estabilidade dos pontos fixos

Como já foi discutido no capítulo 2, os pontos fixos em mapas ocorrem quando as seguintes relações são satisfeitas

$$V_{n+1} = V_n = V^*, \quad (4.17)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n = \phi^* + 2\pi m. \quad (4.18)$$

Sendo  $(\phi^*, V^*)$  as coordenadas do ponto fixo. Para obter a posição dos pontos fixos neste sistema é conveniente utilizar o modelo simplificado. Considerando que  $\Delta t_{n+1} + t_n = t_{n+1}$  reescrevemos a equação (4.15) como

$$\rho_n \cos(\Omega t_{n+1} - \delta_n) - 1 = 0 \quad (4.19)$$

Nas coordenadas do ponto fixo temos que  $\delta_n = \delta^* = \arctan(V^*/\Omega)$  e  $\rho_n = \rho^* = \sqrt{\Omega^2 + V^{*2}}/\Omega$ . Além disso, reescrevemos  $t_{n+1}$  como  $\phi_{n+1} - \phi_0$  que nas coordenadas do ponto fixo é equivalente à  $2\pi m$ , sendo  $m$  um inteiro. Reescrevemos então a equação acima como

$$\rho^* \cos(2\pi m \Omega - \delta^*) - 1 = 0, \quad (4.20)$$

lembrando que  $\rho^*$  e  $\delta^*$  são funções de  $V^*$ . Sendo assim, encontramos as coordenadas  $V^*$  dos pontos fixos resolvendo numericamente a equação (4.20). De maneira análoga, as coordenadas  $\phi^*$  dos pontos fixos foram encontradas substituindo os valores de  $V^*$  na equação de  $V_{n+1}$  do mapa.

É possível encontrar as coordenadas  $\phi^*$  dos pontos fixos analiticamente. Para isso, isolamos  $\rho^*$  na equação (4.20) obtendo

$$\cos(2\pi m \Omega - \delta^*) = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + V^{*2}}}. \quad (4.21)$$

Utilizando a identidade trigonométrica  $\cos^2(2\pi m \Omega - \delta^*) + \sin^2(2\pi m \Omega - \delta^*) = 1$  temos que

$$\sin(2\pi m \Omega - \delta^*) = \frac{V^*}{\sqrt{\Omega^2 + V^{*2}}}. \quad (4.22)$$

Substituindo a equação acima na equação (4.11) avaliada nas coordenadas do ponto fixo  $(\phi^*, V^*)$ , obtemos

$$V^* = V^* - 2\varepsilon \sin(\phi^*). \quad (4.23)$$

Para cada valor de  $V^*$  temos dois pontos fixos associados aos dois valores possíveis de  $\phi^*$ , um em  $\phi = 0$  e outro em  $\phi = \pi$ . Diretamente desta equação

#### 4.4. ESTABILIDADE DOS PONTOS FIXOS

---

vemos que  $\sin(\phi^*) = 0$ . Como o mapa está definido com  $\phi$  no intervalo  $[0, 2\pi)$  temos que  $\phi^* = 0$  ou  $\phi^* = \pi$ .

Para determinar a estabilidade dos pontos fixos devemos obter os autovalores da matriz

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

No caso do modelo simplificado os elementos da matriz  $J$  são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{(V_n \sin[\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0) - \delta_n] + \Omega \cos[\Omega(\phi_{n+1} - \phi_0) - \delta_n])}{\sqrt{\Omega^2 + V_n^2}} \\ &\quad - 2\varepsilon \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \cos(\phi_{n+1}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\varepsilon \cos(\phi_{n+1}), \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{2}{\Omega^2 + V_n^2}, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1. \quad (4.28)$$

Como foi discutido na introdução, os autovalores são obtidos resolvendo a equação

$$\det(J - \Lambda I) = 0, \quad (4.29)$$

em que  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ . Os autovalores obtidos são

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[ 1 + l - k \pm \sqrt{k^2 + l^2 - 2kl - 2l - 2k + 1} \right], \quad (4.30)$$

onde  $k = \frac{4\varepsilon}{\Omega} \cos(\phi^*)$  e  $l = \cos(2\pi m\Omega - \delta^*)$ . Substituindo as coordenadas dos pontos fixos  $(\phi^*, V^*)$  na equação (4.30) obtemos os autovalores para um determinado ponto fixo. Todos aqueles com  $\phi^* = \pi$  observados são pontos de sela. Para certas combinações de valores de parâmetros é possível que o argumento da equação (4.30) seja negativo para  $\phi^* = 0$ , o que resulta em autovalores complexos. Dessa forma, os pontos fixos com  $\phi^* = 0$  podem ser pontos elípticos ou pontos de sela dependendo dos parâmetros e dos valores de  $m$ .

A figura 4.7 mostra o comportamento dos autovalores em função de  $m$  para o sistema com  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\Omega = 10^{-2}$ . O símbolo  $\Lambda_\pi$  representa os autovalores associados aos pontos fixos em  $\phi^* = \pi$  enquanto o símbolo  $\Lambda_0$  representa

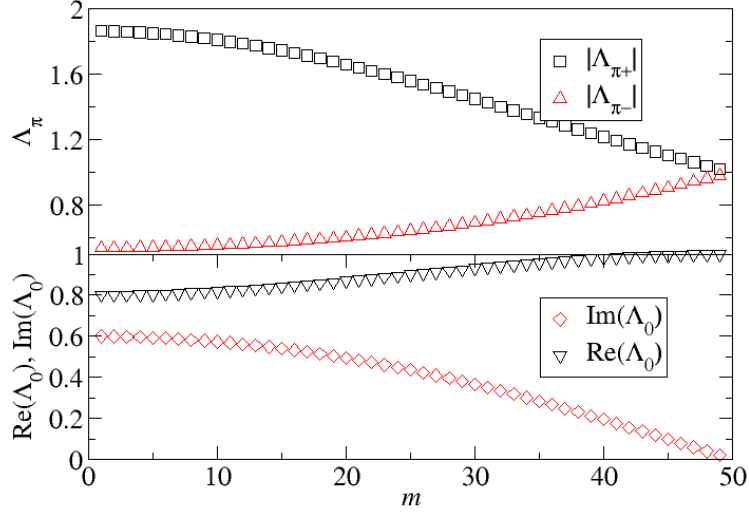


Figura 4.7: A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\Omega = 10^{-2}$ .  $\Lambda_\pi$  e  $\Lambda_0$  são, respectivamente, os autovalores dos pontos fixos em  $\phi^* = \pi$  e  $\phi^* = 0$  e  $m$  um número inteiro que corresponde ao número de oscilações que a parede móvel completou entre colisões.

aqueles associados aos pontos fixos em  $\phi^* = 0$ . A notação  $\text{Im}(\Lambda_0)$  indica a parte imaginária dos autovalores associados aos pontos fixos em  $\phi^* = 0$  enquanto  $\text{Re}(\Lambda_0)$  indica a parte real deste. Para cada ponto fixo em  $\phi^* = \pi$  existem dois autovalores associados, um deles com valor absoluto maior que 1 e outro menor que um, o que caracteriza um ponto de sela. Existem também pontos fixos cujos autovalores são complexos, como foi visto na introdução, esses pontos fixos são caracterizados como elípticos. O gráfico mostra o comportamento dos autovalores conforme  $m$  varia.

O valor máximo de  $m$  foi determinado usando a equação de  $V_{n+1}$  do mapa. Isolando-se  $\phi_{n+1}$  obtemos, nas coordenadas do ponto fixo,

$$\phi^* = \arcsen \left( \frac{\rho^* \Omega \sen(2\pi m \Omega - \delta^*) - V^*}{2\varepsilon} \right). \quad (4.31)$$

Portanto, para certos valores de  $m$  o argumento do arcosseno fica maior que 1 e  $\phi^*$  não pode ser determinado, o que indica que não existe ponto fixo para esses valores de  $m$ .

#### 4.4. ESTABILIDADE DOS PONTOS FIXOS

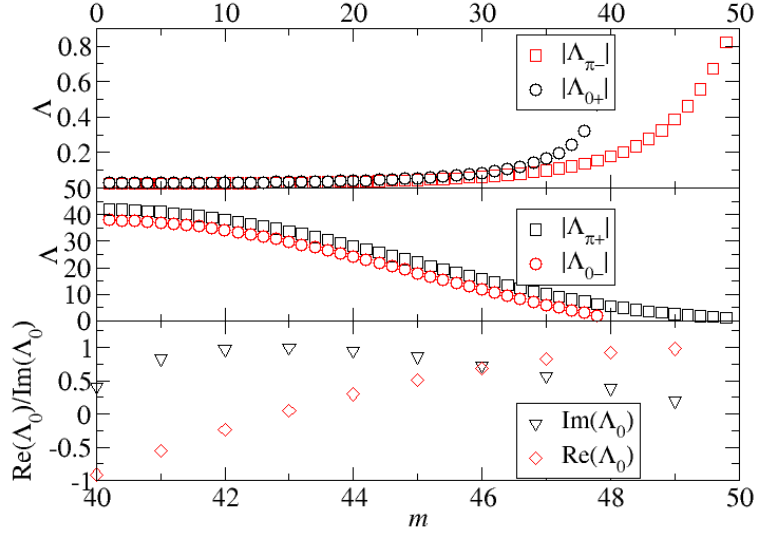


Figura 4.8: A figura ilustra os valores característicos dos pontos fixos para  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $\Omega = 10^{-2}$ .

Para valores diferentes dos parâmetros é possível que os pontos fixos com  $\phi^* = 0$  também sejam pontos de sela para regiões com energia mais baixa. A figura 4.8 ilustra um desses casos.

O primeiro gráfico da figura 4.8 mostra o comportamento de  $|\Lambda_{\pi-}|$  e  $|\Lambda_{0+}|$ . Como os valores absolutos dos autovalores são menores que um, temos que estes estão associados às variedades estáveis dos pontos fixos. O segundo gráfico mostra os autovalores  $\Lambda_{0-}$ ,  $\Lambda_{\pi+}$ . Como os autovalores são maiores que um eles estão associados às variedades instáveis dos pontos fixos. Dessa forma, para essa combinação de valores de parâmetros todos os pontos fixos são pontos de sela para  $m < 40$ . Conforme  $m$  aumenta, a parte imaginária dos autovalores dos pontos fixos em  $\phi^* = 0$  deixa de ser zero, indicando que esses são agora pontos fixos elípticos. O terceiro gráfico mostra os valores das partes reais e imaginárias dos autovalores  $\Lambda_0$  para  $m \geq 40$ .

## 4.5 Análise de escala

De forma similar ao modelo *bouncer* original e ao Fermi-Ulam, o modelo estudado neste capítulo pode apresentar órbitas caóticas se  $\varepsilon \neq 0$ . Caso contrário, o movimento da partícula será trivial e só haverão órbitas regulares no espaço de fase. As propriedades de escala aqui estudadas estão associadas à transição do regime integrável para o não integrável que se dá no limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

As propriedades de escala do modelo *bouncer* foram estudadas utilizando quantidades médias calculadas como funções do número de iterações. Devemos mencionar que só encontramos a descrição de escala para o modelo completo e das regiões de caos abaixo da primeira curva invariante. Como pode ser observado na figura 4.4, a variação do  $\Omega$  não tem impacto no espaço de fases caso o valor desse parâmetro seja pequeno o suficiente. Tomando esse cuidado, eliminamos  $\Omega$  como variável de escala. Além disso, nesse limite, não há curvas *spanning* na região de mais baixa energia do espaço de fases o que nos permite determinar como as grandezas de interesse desenvolvem a partir de uma configuração inicial de baixa energia.

Feitas essas considerações, investigamos a evolução da velocidade média em  $M$  amostras. Cada uma delas é caracterizada por um valor inicial  $V_0$  e valores diferentes de  $\phi_0$ . Para valores de velocidade inicial suficientemente pequenos não existem regiões primárias de movimento estável. Sendo assim, a fase inicial poder ser escolhida aleatoriamente no intervalo  $[0, \pi)$ .

A figura 4.9 mostra os gráficos da velocidade  $V$  em função do número de colisões  $n$  para diferentes valores de parâmetro  $\varepsilon$  e de velocidades iniciais  $V_0$ . Como podemos observar, a velocidade é caracterizada inicialmente por um regime de crescimento e, para valores altos de  $n$ , as curvas atingem um regime saturação. Os valores de  $n$  que caracterizam a mudança de comportamento das quantidades médias são chamados de *crossover* e são representadas por  $n_x$ .

Quando  $n \ll n_x$  a velocidade está em um regime de crescimento. Observando as curvas da figura 4.9 inferimos que ela depende tanto do número de iterações quanto do valor do parâmetro  $\varepsilon$ . Desse modo, é razoável supor que

$$V(n, \varepsilon) \propto n^\alpha \varepsilon^\beta, \quad (4.32)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são expoentes críticos.

O valor do expoente de crescimento  $\alpha$  é obtido numericamente fazendo a regressão das curvas para valores de  $n \ll n_x$ . Este procedimento foi realizado

#### 4.5. ANÁLISE DE ESCALA

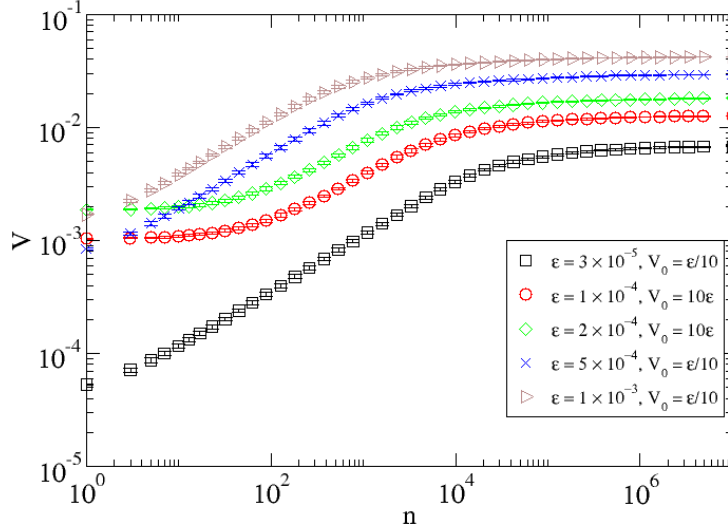


Figura 4.9: Curvas de velocidade em função do número de colisões para diferentes valores de parâmetro.

para dez valores diferentes de  $\varepsilon$  no intervalo de  $8 \times 10^{-5}$  até  $8 \times 10^{-3}$  e obtemos, assim, o valor médio  $\alpha = 0,51 \pm 0,01$ . Primeiramente, para obter o valor de  $\beta$ , determinamos o valor médio de  $V/n^\alpha$  para cada valor de  $\varepsilon$  considerando todos os pontos pertencentes ao regime de crescimento da velocidade. O expoente crítico  $\beta$  é então obtido através da regressão da curva  $V/n^\alpha \times \varepsilon$ . O melhor ajuste dos dados fornece  $\beta = 0,987 \pm 0,009$  como mostra a figura 4.10.

Para valores de  $n \gg n_x$  observamos que as curvas atingem um regime de saturação. Nessa região os valores da velocidade não dependem do número de colisões mas somente do parâmetro  $\varepsilon$ . Dessa forma, é válido supor que

$$V_\infty \propto \varepsilon^\gamma, \quad (4.33)$$

em que  $\gamma$  é o expoente de saturação. Além disso, como o número de colisões não influencia as curvas nesta região, temos que  $\alpha = 0$  para  $n \gg n_x$ .

O valor de  $\gamma$  é obtido através de uma regressão dos valores da velocidade saturada  $V_{sat}$  em função de  $\varepsilon$ . No entanto, não conseguimos obter a saturação completa das curvas mesmo após  $10^7$  iterações. A curva escolhida para ajustar

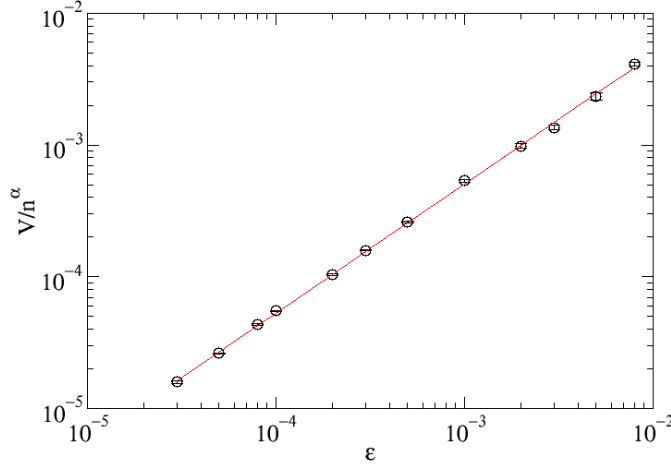


Figura 4.10: Ajuste dos dados numéricos para a curva  $V/n^\alpha \times \epsilon$ .

os pontos pertencentes ao regime de saturação é dada por

$$V = z_1 + z_2/n^{z_3}, \quad (4.34)$$

em que  $z_1$  dá o valor da velocidade saturada. Sendo assim, utilizamos um ajuste não-linear para encontrar os valores de  $V_{sat}$  para os dez valores de parâmetro  $\epsilon$ . A figura 4.11 mostra o melhor ajuste da curva  $V_{sat} \times \epsilon$  e o valor encontrado neste procedimento foi  $\gamma = 0,49 \pm 0,01$ .

Feitas essas considerações, supomos que, próximo da transição do regime integrável para o não-integrável a velocidade obedece uma equação homogênea generalizada da forma

$$V(n, \epsilon, V_0) = lV(l^a n, l^b \epsilon, l^c V_0), \quad (4.35)$$

em que  $l$  é um fator de escala e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os expoentes que descrevem as propriedades de escala. Escolhendo o fator de escala  $l = \epsilon^{-1/b}$  a equação acima é reescrita como

$$V(n, \epsilon, V_0) = \epsilon^{-1/b} f(\epsilon^{-a/b} n, \epsilon^{-c/b} V_0), \quad (4.36)$$

em que  $f = V(\epsilon^{-a/b} n, 1, \epsilon^{-c/b} V_0)$ . No limite em que  $V_0 \approx 0$  temos que então

$$V(n, \epsilon, V_0) = \epsilon^{-1/b} f(\epsilon^{-a/b} n, ) \quad (4.37)$$

## 4.5. ANÁLISE DE ESCALA

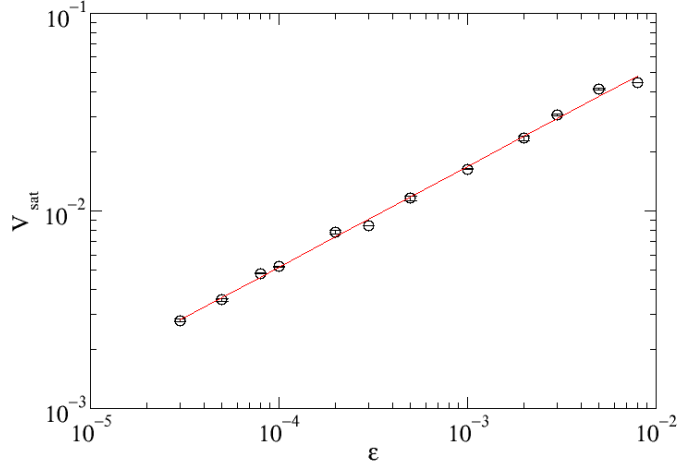


Figura 4.11: Ajuste dos dados numéricos para a curva  $V_{\text{sat}} \times \varepsilon$ .

Para valores de  $n \ll n_x$  a equação (4.37) depende de  $n$  e  $\varepsilon$ . Sendo assim, a forma mais geral dessa equação é dada por

$$V(n, \varepsilon, V_0) \propto \varepsilon^{-1/b} (\varepsilon^{-a/b} n)^x, \quad (4.38)$$

obtemos, comparando a equação acima com a equação (4.32), que  $x = \alpha$ , ou seja,

$$\varepsilon^{-1/b} V(\varepsilon^{-a/b} n, 1, \varepsilon^{-c/b} V_0) \propto \varepsilon^{-1/b} (\varepsilon^{-a/b} n)^\alpha. \quad (4.39)$$

Além disso, concluímos também que

$$\frac{1 + a\alpha}{b} = -\beta. \quad (4.40)$$

Então conhecendo-se  $\alpha$  e  $\beta$  podemos obter os expoentes de escala  $a$  e  $b$ .

Olhando agora para o regime de saturação, vemos que a velocidade não depende do número de colisões. Dessa maneira, a função  $f = \sigma(\varepsilon^{-a/b} n, 1)$  é uma constante, ou seja,

$$V_\infty \propto \varepsilon^{-1/b}. \quad (4.41)$$

Comparando as equações (4.33) e (4.41) obtemos a relação

$$\gamma = -\frac{1}{b}. \quad (4.42)$$

CAPÍTULO 4. O MODELO BOUNCER EM CAMPO NÃO  
HOMOGÊNEO

---

Com o valor de  $\gamma$  encontramos o valor do expoente de escala  $b$  através da equação (4.42), o valor obtido foi  $b = -1,993 \pm 0,008$ . Com esse expoente encontramos o valor de  $a$  através da equação (4.40) e obtivemos  $a = 1,941 \pm 0,001$ .

Nota-se que diferentes valores de velocidades iniciais ( $V_0 \gg 0$ ) resultam em diferentes comportamentos para  $n$  pequeno. Para valores de parâmetro  $\varepsilon$  próximos de zero, observamos que a posição da primeira curva invariante varia quando mudamos o valor desse parâmetro. Conforme aumentamos  $\varepsilon$  a região do mar de caos aumenta assim como a primeira invariante que o limita. Dessa maneira, é válido supor que

$$V_{inv} \propto \varepsilon^\eta, \quad (4.43)$$

em que  $\eta$  é uma constante. Para determinar o valor dessa constante calculamos a média dos pontos pertencentes a primeira curva invariante  $V_{inv}$  para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Devemos ressaltar que aproximamos a média das velocidades da primeira invariante utilizando pontos no mar de caos. Dividimos essa região caótica em  $10^4$  partes menores e somamos os pontos de mais alta energia de cada uma dessas divisões. Dessa forma, obtemos a velocidade média ao dividir resultado por  $10^4$ . Com esse procedimento obtivemos  $\langle V_{inv} \rangle$  para 12 valores diferentes de  $\varepsilon$ . O expoente  $\eta$  é obtido através de uma regressão dos pontos da curva do gráfico  $V_{inv} \times \varepsilon$ . A figura 4.12 mostra o melhor ajuste obtido, o valor encontrado foi  $\eta = 0,524 \pm 0,008$ . Com este expoente podemos finalizar a análise de escala da velocidade. Supomos que, na transição do regime integrável para o não-integrável ( $\varepsilon \approx 0$ ), a velocidade seja descrita pela equação homogênea

$$V(n, \varepsilon, V_0) = lV(l^a n, l^b \varepsilon, l^c V_0), \quad (4.44)$$

Para encontrar o expoente de escala  $c$  fazemos as substituições  $\varepsilon' = l^b \varepsilon$  e  $V_0' = l^c V_0$ . Da equação (4.43) temos que

$$\frac{V'}{\varepsilon'^\eta} = \frac{V}{\varepsilon^\eta} = \text{constante}. \quad (4.45)$$

Desse modo, temos

$$\frac{l^c}{l^{b\eta}} = 1, \quad (4.46)$$

o que resulta em  $c = b\eta = -1,04 \pm 0,01$ .

Com esse expoente fizemos as curvas de velocidade para diferentes valores de  $\varepsilon$  e  $V_0$ , como mostra a figura 4.13. Os valores de  $\varepsilon$  e  $V_0$  usados como

#### 4.5. ANÁLISE DE ESCALA

---

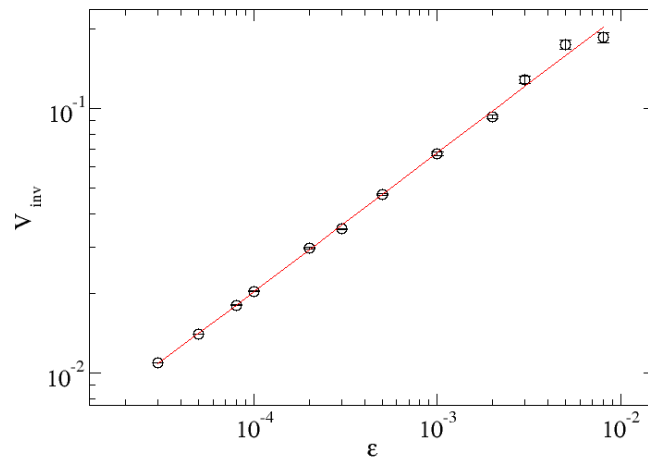


Figura 4.12: Gráfico de  $V_{inv} \times \epsilon$  e o melhor ajuste obtido.

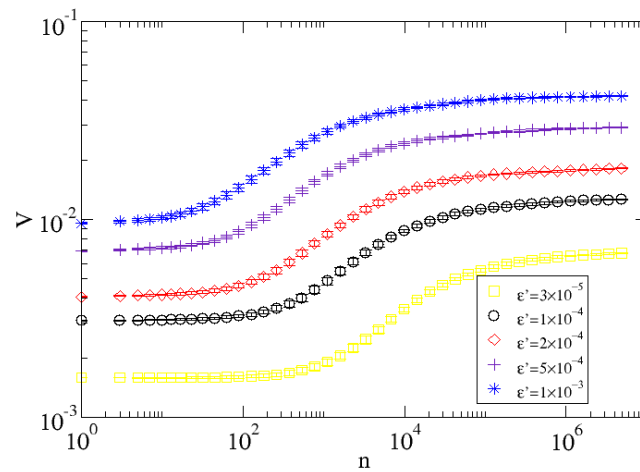


Figura 4.13: Curvas de velocidade em função do número de iterações para valores diferentes de  $\epsilon'$ .

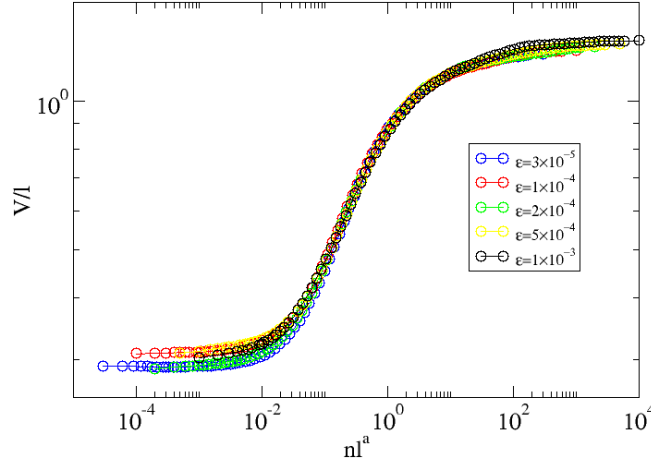


Figura 4.14: Colapso das curvas de velocidade para uma única curva universal.

referência foram  $10^3$  e  $10^2$ , respectivamente. Esses valores foram escolhidos de forma que  $V_0 \gg \epsilon$  e que a trajetória ainda pertença ao mar de caos. Escolhendo o fator de escala  $l = \epsilon^{-1/b}$  temos que

$$V(\epsilon, n, V_0) = lV(\epsilon^{-a/b}n, 1, \epsilon^{-c/b}V_0). \quad (4.47)$$

Sendo que  $\epsilon^{-c/b}V_0 = V_0/\epsilon^\eta = \text{constante}$ . Devido as transformações feitas podemos então considerar  $V(\epsilon^{-a/b}n, 1, \epsilon^{-c/b}V_0)$  uma função apenas de  $n$  e  $\epsilon$ .

Utilizando a equação (4.47) reescalamos a velocidade em função de  $nl^a$ , como mostra a figura 4.14. Com esses procedimentos obtivemos o colapso das curvas de velocidade com velocidade inicial  $V_0 > 0$  em uma única curva universal, confirmando assim a suposição inicial que a velocidade pode ser descrita por relações de escala.

Dessa forma, obtivemos a descrição de escala que aparece na transição do regime não integrável para o regime integrável (de  $\epsilon = 0$  para  $\epsilon \neq 0$ ) do modelo completo do modelo *bouncer* em campo não homogêneo. A descrição de escala desta transição fornece o conjunto de expoentes para a velocidade  $a = 1,941 \pm 0,001$ ,  $b = -1,993 \pm 0,008$  e  $c = -1,04 \pm 0,01$ . Sendo assim, obtivemos o colapso das curvas da velocidade em uma única curva universal, confirmando assim a suposição inicial que ela pode ser descritas por relações de escala. Além disso, verificamos que o modelo aqui estudado pertence à classe de universalidade do modelo Fermi-Ulam [70].

## 4.6 Caracterização da Transição de fase

Como foi observado na última seção, o modelo *Bouncer* em campo não homogêneo apresenta invariância de escala quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Da termodinâmica temos que, para uma transição de fase, o sistema é invariante para transformações de escala no ponto crítico. Dessa forma, conforme o sistema passa de integrável  $\varepsilon = 0$  para não integrável  $\varepsilon \neq 0$  ocorre uma transição de fase cujos expoentes críticos foram obtidos anteriormente. Para caracterizar essa transição de fase, faremos uso da metodologia apresentada no Capítulo 1. Começaremos apresentando a quebra de simetria que ocorre nesse transição.

### 4.6.1 Quebra de simetria

O modelo estudado nesse capítulo é obtido através de uma mapa feito a partir de uma par de variáveis  $V_n$  e  $\theta_n$ . Quando o parâmetro de controle  $\varepsilon = 0$ , ou seja, quando a amplitude da parede móvel é nula, as colisões não alteram a velocidade da partícula. Dessa forma, a primeira equação do mapa é simplificada para  $V_{n+1} = V_n$  e a velocidade da partícula se torna uma constante do movimento, tornando o sistema integrável. Nesse caso o espaço de fase é composto por linhas horizontais, uma vez que, independentemente da fase da parede no momento da colisão, a velocidade da partícula depende somente da velocidade inicial.

Para valores de  $\varepsilon \neq 0$ , a parede se move e as colisões podem alterar a energia da partícula. Dependendo da combinação de valores dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\Omega$ , podemos observar diferentes tipos de órbitas no espaço de fases, incluindo órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas. A quebra de simetria é direta, quando o sistema é integrável o espaço de fases pode ser rotacionado em qualquer valor de  $\phi$  sem alterá-lo. No caso não integrável, no entanto, devido a possibilidade de  $V_n \neq V_{n+1}$  essa simetria não é mais observada. A figura (4.15) ilustra os espaços de fase para o caso integrável e não integrável.

### 4.6.2 Parâmetro de ordem

Para o caso integrável, como o número de constantes do movimento é igual ao número de graus de liberdade, as trajetórias no espaço de fase são restringidas à superfície de um toro. Segundo o teorema KAM, conforme aumentamos a não linearidade do sistema, alguns toros começam a ser destruídos. As consequências da destruição dos toros, no entanto, são explicadas pelo teorema de Poincaré-Birkoff. Quando o sistema passa a não ser integrável, o toro se

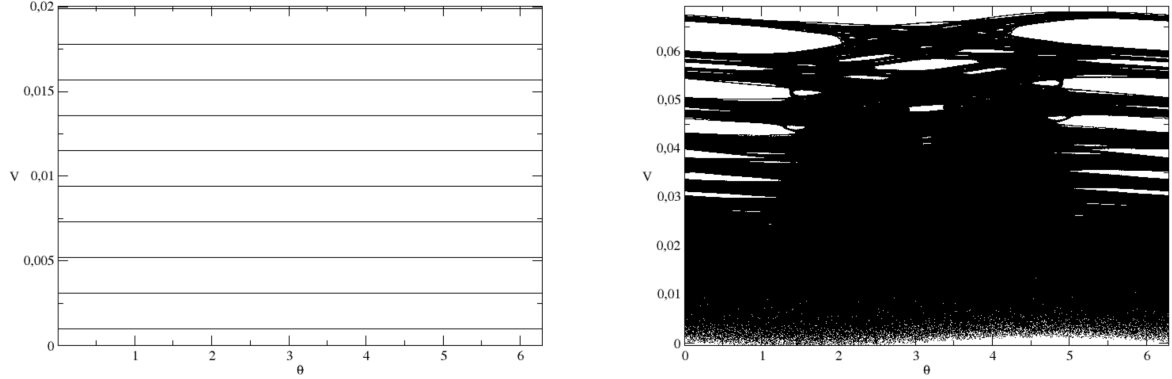


Figura 4.15: Espaço de fases com  $\Omega = 0.01$  para o caso integrável  $\varepsilon = 0$  e o caso não integrável com  $\varepsilon = 0.001$ .

quebra em uma sequência de pontos elípticos e hiperbólicos. Ao redor de cada ponto elíptico há uma série de ilhas de estabilidade. Associadas aos pontos hiperbólicos haverá órbitas homoclínicas conectando as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela. Portanto, a princípio, a existência desses pontos fixos está relacionada à transição de fase entre o regime integrável e o não integrável.

Como foi exposto na introdução, o parâmetro de ordem  $\Phi$  deve ir a zero conforme o  $\varepsilon \rightarrow 0$  e a suscetibilidade  $\partial\Phi/\partial\varepsilon$  deve divergir nesse limite. Um candidato para parâmetro de ordem é a diferença dos autovalores dos pontos fixos hiperbólicos  $\Phi = \Delta\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ , dada pela equação

$$\Delta\lambda = 2\sqrt{\left(\frac{2\varepsilon}{V^2 + \Omega^2}\right)^2 + 2\frac{2\varepsilon}{V^2 + \Omega^2}}. \quad (4.48)$$

A figura (4.16) mostra o comportamento de  $\Delta\lambda$  para  $\Omega = 10^{-4}$ , valores diferentes desse parâmetro resultam em gráficos similares.

Note que conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$  a diferença dos autovalores satisfaz a primeira condição que define o parâmetro de ordem. A suscetibilidade é dada pela equação

$$\partial\Phi/\partial\varepsilon = \frac{4\varepsilon + 2\omega^2 + V^2}{(\Omega^2 + V^2)\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2\omega^2 + V^2}}, \quad (4.49)$$

## 4.6. CARACTERIZAÇÃO DA TRANSIÇÃO DE FASE

---

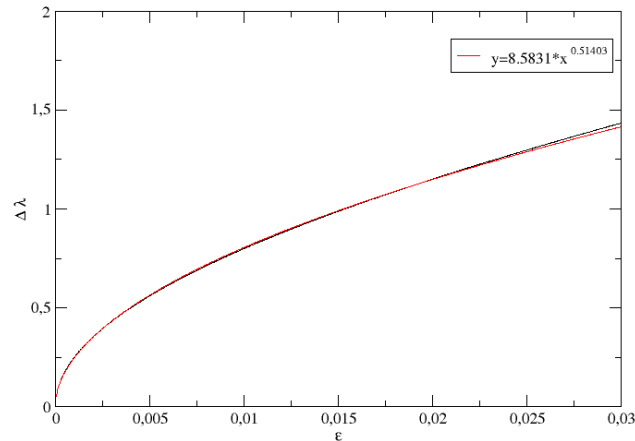


Figura 4.16: Comportamento do parâmetro de ordem em função do parâmetro de controle. A linha em vermelha mostra o melhor ajuste numérico.

Note que a suscetibilidade diverge quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , satisfazendo então todas as condições que definem um parâmetro de ordem.

### 4.6.3 Defeitos topológicos

Os defeitos topológicos são caracterizados por um rompimento na ordem do sistema, podendo ser identificado por medição de uma grandeza em uma superfície ao redor desse defeito. Uma característica do espaço de fase para  $\varepsilon \neq 0$  é a presença de pontos elípticos e, ao redor destes pontos, existem diferentes ilhas de estabilidade. Para diferentes combinações de valores de parâmetro e condições iniciais o espaço de fase apresenta um mar de caos incrustado por essas ilhas. No mar da caos, quando uma órbita passa na vizinhança das ilhas de estabilidade, a trajetória sofre influência dessas ilhas através do fenômeno conhecido como *stickness* [14]. Uma vez próxima das órbitas elípticas, as trajetórias do mar de caos ficam presas na região das ilhas por longos períodos de tempo. Essas características das ilhas de estabilidade permitem identificar essas estruturas como os defeitos topológicos do sistema.

#### 4.6.4 Excitações elementares

Identificamos como excitação elementar no sistema *bouncer* o comportamento de caminhada aleatória das órbitas caóticas. Para  $\varepsilon \neq 0$  a velocidade passa a ser influenciada pelo termo  $\varepsilon \sin(\phi_n)$ , permitindo que  $V_n \neq V_{n+1}$  e abrindo possibilidade para a existência de comportamento caótico e, consequentemente, o movimento semelhante a uma caminhada aleatória observado.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## BILHAR OVOIDE

### 5.1 Introdução

Um bilhar é um sistema dinâmico composto por uma partícula, ou um conjunto de partículas não interagentes, de massa unitária se movendo na região confinada ao interior de uma curva fechada com a qual sofre colisões. Consideramos que essa fronteira é suficientemente suave, isso permite a ocorrência de reflexões especulares de modo que a velocidade da partícula varia de direção e sentido. A componente tangencial da velocidade da partícula é medida em relação à posição da colisão da fronteira e, no caso estático, se mantém inalterada enquanto a componente normal inverte seu sinal. No intervalo entre as colisões a partícula segue uma trajetória retilínea.

Uma vez que a dinâmica desses sistemas pode variar muito dependendo da forma da fronteira, vários bilhares com formato diferentes foram estudados na literatura. O bilhar circular e o elíptico, por exemplo, são integráveis enquanto o bilhar ovoide e o bilhar de Sinai ([71]) são não-integráveis. Outra característica importante do bilhar é quanto ao movimento de sua fronteira. Na literatura há vários resultados para esses sistemas considerando fronteiras estáticas e dependentes do tempo. No último caso pode ser observado o fenômeno de aceleração de Fermi. A presença desse fenômeno é ditada pela conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) [10] que declara que a existência de caos na versão estática do bilhar é uma condição suficiente (mas não necessária) para possibilitar a ocorrência da aceleração de Fermi. Muitos bilhares cujas fronteiras variam no tempo apresentam esse fenômeno como, por

exemplo, o bilhar de Ovoide [72], bilhar estádio [73] e o gás de Lorentz [74]. No entanto, o bilhar elíptico é uma exceção à conjectura LRA [10]. Na versão estática desse modelo o sistema é integrável porém, quando se introduz uma perturbação temporal à fronteira, a curva separatriz é substituída por um *stochastic layer* permitindo que condições iniciais da região de libração visitem a região de rotação. Esse cruzamento contínuo produz a estocasticidade necessária para que ocorra aceleração de Fermi, fazendo o bilhar elíptico dependente do tempo um contra-exemplo da conjectura LRA.

Os fenômenos de aceleração de Fermi e sua supressão também foram observados no contexto de bilhares estocásticos [75, 76]. Nesses sistemas, a estocasticidade pode ser introduzida por meio de reflexões aleatórias [77], oscilações aleatórias [72] ou até mesmo pela transformação de variáveis dinâmicas em variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade fixas no tempo [78]. As principais motivações físicas para estudar bilhares estocásticos vêm da necessidade de entender o movimento difusivo em meios porosos [79] e de criar modelos para a exploração de processos estocásticos, como cadeias de Markov [80] e movimento browniano [81]. Além disso, os sistemas dinâmicos não lineares estocásticos podem ser usados para modelar sistemas caóticos na física estatística, independentemente de estarem ou não em equilíbrio [82, 83].

Bilhares são sistemas dinâmicos com várias aplicações na física. Por exemplo, o modelo da gota líquida de Bohr da física nuclear [84] assume que o núcleo é populado por partículas que se movem como bolas de bilhar. As colisões entre elas é desprezada de forma que a troca de energia ocorre somente entre as partículas e a fronteira do núcleo deformado. Em física de plasma, bilhares dependentes do tempo são modelos para aceleração em garrafas magnéticas. Neste trabalho, estudamos uma transição de crescimento de energia limitado para ilimitado em um bilhar oval estocástico cuja fronteira se move no tempo. A partícula ou, de forma equivalente, um conjunto de partículas que não interagem, colide com o limite móvel. A lei de reflexão considera colisões inelásticas que preservam o momento tangencial, mas não a energia cinética na colisão. Presume-se que apenas o componente normal da velocidade seja afetado pela dissipação, que é controlada por um coeficiente de restituição. O bilhar oval estático exibe um espaço de fase mista; portanto, a conjectura LRA se aplica. Com um número crescente de colisões, o crescimento da velocidade média das partículas não tem limite, o que leva à difusão ilimitada de energia. A dissipação ocorre quando o coeficiente de restituição é menor que um, e o crescimento ilimitado de energia não é mais observado. Assim, a dinâmica da velocidade média evolui para um estado estacionário,

confirmando a supressão do crescimento ilimitado de energia. Essa supressão do crescimento ilimitado marca a transição de interesse. Quando o parâmetro de dissipação se aproxima continuamente a 1, o platô de saturação da velocidade média aumenta indefinidamente. O inverso do platô de saturação se aproxima de zero nessa transição e, como veremos, define um candidato a um parâmetro de ordem. No ponto crítico, a suscetibilidade correspondente diverge. Além disso, a excitação elementar da dinâmica é identificada, sendo responsável pela difusão caótica no espaço de fase.

## 5.2 Transferência de calor

Originalmente, os bilhares clássicos foram propostos como uma tentativa para descrever o comportamento termodinâmico de gases clássicos [85]. Nessa seção estudaremos uma aplicação do modelo apresentado para estudar as propriedades termodinâmicas de uma gás confinado ao interior de um bilhar ovoide. Consideremos inicialmente um recipiente rígido em contato térmico com o um ambiente a uma temperatura  $T_f$ . Introduzimos a esse bilhar um conjunto de partículas idênticas a uma temperatura  $T_p \ll T_f$ . A densidade das partículas é considerada pequena o suficiente de forma que elas sejam não interagentes. Assumimos também que a fronteira varia com o tempo e que as colisões não afetam sua velocidade de forma que o bilhar fique com a temperatura fixa  $T_f$ . Devido a diferença de temperatura, as partículas ganham energia ao colidir com a fronteira e eventualmente alcançaram o equilíbrio térmico  $T_p = T_f$ . De maneira similar, caso as partículas sejam introduzidas a uma temperatura superior a da fronteira, elas perderam energia devido as colisões e a temperatura do gás será reduzida até que se alcance o equilíbrio termodinâmico.

No entanto, a fronteira do bilhar é composta por uma rede cristalina de partículas ligadas entre si por forças eletrônicas, como a temperatura deste recipiente é  $T_f > 0$ , as partículas que constituem a rede oscilam em torno de uma posição de equilíbrio com uma frequência característica, com um comportamento similar a um sólido de Einstein<sup>1</sup>. Como foi discutido nas seções anteriores, o bilhar ovoide obedece a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) sendo que sua versão estática pode apresentar órbitas caóticas e, quando incluímos uma perturbação temporal à fronteira, o fenômeno de aceleração

---

<sup>1</sup>O modelo do sólido de Einstein é um sistema que consiste de um conjunto de  $n$  osciladores harmônicos unidimensionais não interagentes que oscilam com a mesma frequência.

de Fermi. No entanto, a ocorrência desse fenômeno implica que a velocidade média do *ensemble* de partículas cresce, conseqüentemente acarretando o crescimento da velocidade quadrática média. Pelo teorema de equipartição de energia, esse aumento ilimitado de energia leva, conseqüentemente, ao aumento ilimitado da temperatura, fenômeno esse que não é observado na termodinâmica. De fato, no estado estacionário o que ocorre é o equilíbrio entre a temperatura das partículas e da fronteira. Como mostraremos nessa seção, essa aparente contradição entre os resultados obtidos pelo bilhar e pela termodinâmica é evitada quando consideramos que as colisões entre as partículas e a fronteira dependente do tempo são inelásticas. A presença de dissipação no sistema leva ao aparecimentos de atratores que suprimem o crescimento ilimitado de energia, permitindo que o equilíbrio termodinâmico seja alcançado.

Olhemos com mais detalhe o sistema formado pelo gás de partículas idênticas não interagentes movendo-se confinadas ao interior do bilhar ovoide cuja fronteira está a uma temperatura  $T_f$ . Consideramos que a fronteira se move periodicamente no tempo com frequência angular  $\omega$  e que sua massa é muito maior que o conjunto de partículas de modo que as colisões não alteram a temperatura do bilhar. O tamanho da zona de colisão depende do parâmetro  $\eta$ , sendo equivalente à amplitude de oscilação atômica. O hamiltoniano que descreve a dinâmica de cada partícula é dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q_x, q_y, t), \quad (5.1)$$

onde  $p^2 = p_x^2 + p_y^2$  identifica o *momentum* de cada uma das partículas que compõem o gás. A função potencial é dada por

$$V(q_x, q_y, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } (q_x, q_y, t) < R_f(t) \\ \infty & \text{se } (q_x, q_y, t) > R_f(t) \end{cases}, \quad (5.2)$$

em que  $q_x$  e  $q_y$  correspondem as coordenadas da partícula, de forma que  $R_p = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$  e  $R_f$  é o raio da fronteira em coordenadas polares dada pela equação (5.30). Além disso, com o intuito de introduzir estocasticidade no modelo assumimos que, no instante do impacto, existe uma fase aleatória  $Z(t)$ , dada por número aleatórios entre  $[0, 1]$ , de forma que a velocidade da fronteira possa ser escrita como

$$\vec{V}_f(t) = \frac{d}{dt} \vec{R}_f(t + Z(t)). \quad (5.3)$$

## 5.2. TRANSFERÊNCIA DE CALOR

---

A transferência de calor que ocorre devido as colisões entre as partículas e o bilhar obedece a lei de Fourier dada por

$$\vec{J} = -\kappa A \vec{\nabla} T, \quad (5.4)$$

onde  $A$  corresponde à área de seção perpendicular onde o fluxo de calor está fluindo e  $\vec{\nabla} T$  é o gradiente de temperatura. O vetor  $\vec{J}$  dá a quantidade de energia que está fluindo através de uma área  $A$  em um determinado intervalo de tempo devido ao gradiente de temperatura. No presente caso, no entanto, o fluxo de calor não atravessa uma área, mas sim a borda do bilhar, de forma que o fluxo de calor é escrito como

$$J = \frac{\partial Q}{\partial t} = -\kappa l \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5.5)$$

em que  $\kappa$  é o coeficiente de condutividade térmica, o termo  $\partial Q/\partial t$  corresponde ao fluxo de calor em uma região onde há uma diferença de temperatura  $\Delta T$  e  $\partial T/\partial x$  é o gradiente de temperatura. A constante  $l$  é o comprimento pelo qual pode fluir calor, obtida fazendo

$$l = \int_0^{2\pi} R(\theta, \eta, \varepsilon, p, t) d\theta = \int_0^{2\pi} [1 + \eta(1 + \varepsilon \cos(t))] d\theta = 2\pi. \quad (5.6)$$

Como foi dito no início da seção, consideramos que a densidade de partículas é suficientemente baixa, de forma que desconsideramos a interação entre as partículas. Sendo assim, a única forma de energia que o gás apresenta é associada ao seu movimento, ou seja, energia cinética. Através do teorema de equipartição de energia podemos relacionar a temperatura  $T(t)$  com a velocidade quadrática média do *ensemble* de partículas:

$$\frac{1}{2} m \bar{V}^2 = K_B T(t), \quad (5.7)$$

onde  $K_B$  é a constante de Boltzmann. Quando uma quantidade de calor infinitesimal  $dQ$  é transferida em um processo que depende apenas da temperatura, isso gera uma mudança infinitesimal na temperatura  $dT$  (consideramos aqui que nenhuma transição de fase está ocorrendo), de forma que

$$dQ = c dT, \quad (5.8)$$

em que  $c$  identifica à capacidade calorífica do gás de partículas. Para um gás ideal temos que  $c = kN_p$ , onde  $p$  corresponde ao número total de partículas no gás da equação (5.6) como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{cm}{2K} \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}^2(t). \quad (5.9)$$

Como o gradiente de temperatura somente ocorre na zona de colisão, podemos considerar a seguinte aproximação para resolver o lado direito da equação

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T - T_f}{\Delta x}, \quad (5.10)$$

em que  $\Delta x$  é medido na zona de colisão. Para determiná-lo consideramos que a fronteira do bilhar pode assumir dois valores extremos

$$R_{max}(\theta) = 1 + \eta(1 + \varepsilon) \cos(p\theta), \quad (5.11)$$

$$R_{min}(\theta) = 1 + \eta(1 - \varepsilon) \cos(p\theta), \quad (5.12)$$

em que  $R_{max}$  e  $R_{min}$  correspondem ao raio máximo e ao raio mínimo respectivamente. Portanto, a zona de colisão é dada por

$$\Delta R = 2\eta\varepsilon \cos(p\theta). \quad (5.13)$$

Note que  $\Delta R$  é uma função de  $\theta$  e tem a propriedade  $\Delta \bar{R}=0$ . Dessa forma, uma aproximação para  $\Delta x$  é obtida fazendo

$$\Delta x = \overline{(\Delta R)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4\eta^2\varepsilon^2 \cos^2(p\theta) d\theta = 2\pi, \quad (5.14)$$

com isso temos

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T - T_f}{\sqrt{2}\eta\varepsilon}. \quad (5.15)$$

Substituindo esses resultados na equação da transferência de calor obtemos

$$\frac{cm}{2k} \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}^2 = -\frac{\kappa l}{\sqrt{2}\eta\varepsilon} \left( \frac{m}{2k} \bar{V}^2 - T_f \right). \quad (5.16)$$

A solução da equação diferencial ordinária acima é dada por

$$\bar{V}^2(t) = \frac{2k}{m} T_f + \left( V_0^2 - \frac{2k}{m} T_f \right) \exp \left( \frac{-2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\varepsilon c} t \right). \quad (5.17)$$

Retornando ao teorema de equipartição de energia, a temperatura pode ser escrita como

$$T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \exp \left( \frac{-2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\varepsilon c} t \right). \quad (5.18)$$

Vamos analisar o resultado obtido. Caso o gás seja injetado no bilhar a uma temperatura  $T_0 \gg T_f$  temos que a temperatura das partículas decai

### 5.3. BILHAR ESTÁTICO OVOIDE

---

exponencialmente para valores relativamente pequenos de  $t$  e converge para o estado estacionário quando  $T(t) = T_f$  quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$T(t) \approx T_f + T_0 \exp\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{2}\eta c} t\right). \quad (5.19)$$

Por sua vez, quando as partículas são injetadas no bilhar com energias suficientemente baixas tal que  $T_0 \ll T_f$  observamos que a temperatura cresce linearmente para tempos curtos. Esse resultado pode ser verificado expandindo a exponencial da equação (5.18) em série de Taylor, o que nos dá como termo dominante:

$$T(t) = T_f \frac{2\pi\kappa}{\sqrt{2}\eta\epsilon c} t. \quad (5.20)$$

Considerando agora a equipartição de energia temos que a velocidade média do ensemble, nesse caso, é dada por

$$\bar{V}(t) = \sqrt{T_f \frac{4\pi k\kappa}{\sqrt{2}\eta\epsilon c}} \sqrt{t}, \quad (5.21)$$

mostrando que a velocidade cresce com a raiz quadrado do tempo até que seja atingido o equilíbrio. Nas próximas seções discutiremos esse problema a partir do formalismo do bilhar ovoide.

## 5.3 Bilhar Estático Ovoide

Como foi discutido na introdução, a dinâmica dos bilhares é influenciada fortemente pela o formato da fronteira desses sistema. No caso do bilhar ovoide, essa fronteira, definida pelo raio do próprio bilhar, pode ser escrita em coordenadas polares como

$$R(\theta) = 1 + \varepsilon \cos(p\theta), \quad (5.22)$$

em que  $\varepsilon \neq 0$  fornece a deformação do círculo (caso  $\varepsilon = 0$  recuperamos o bilhar circular com raio unitário),  $\theta$  é a posição angular ao longo da curva da fronteira em que ocorreu a colisão e  $p$  é um número inteiro maior do que zero. Podemos escrever a dinâmica de cada partícula confinada ao interior da fronteira por um mapeamento discreto para as variáveis  $(\theta_n, \alpha_n)$ , onde  $\alpha_n$  é o ângulo que a trajetória da partícula faz com a reta tangente ao ponto de colisão e o índice  $n$  corresponde à  $n$ -ésima colisão da partícula com a fronteira. Através das

coordenadas polares, podemos determinar as coordenadas cartesianas  $X$  e  $Y$  pelas relações

$$X(\theta_n) = R(\theta_n) \cos(\theta_n), \quad (5.23)$$

$$Y(\theta_n) = R(\theta_n) \sen(\theta_n). \quad (5.24)$$

Portanto, a partir de uma condição inicial  $(\theta_0, \alpha_0)$  a trajetória do bilhar é então descrita pela sequência de pares  $(\theta_0, \alpha_0), (\theta_1, \alpha_1), \dots, (\theta_n, \alpha_n) \dots$ , e o ângulo entre o vetor tangente e a fronteira na posição  $X(\theta_n)$  e  $Y(\theta_n)$ , medido em relação à horizontal, é dado por  $\phi_n = \arctan[Y'(\theta_n)/X'(\theta_n)]$ . Para o bilhar ovoide as componentes  $X'$  e  $Y'$  são

$$X'(\theta_n) = \frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n} = -p\varepsilon \sen(p\theta_n) \cos(\theta_n) - [1 + \varepsilon \cos(p\theta_n)] \sin(\theta_n), \quad (5.25)$$

$$Y'(\theta_n) = \frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n} = -p\varepsilon \sen(p\theta_n) \sen(\theta_n) + [1 + \varepsilon \cos(p\theta_n)] \cos(\theta_n). \quad (5.26)$$

Consideramos constante a velocidade das partículas entre as colisões e a trajetória da partícula pode ser descrita pela equação

$$Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) = \tan(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \quad (5.27)$$

em que  $\tan(\alpha_n + \phi_n)$  é a inclinação da trajetória em relação ao semieixo positivo de  $X$  enquanto  $X(\theta_{n+1})$  e  $Y(\theta_{n+1})$  correspondem às novas coordenadas retangulares no ponto  $\theta_{n+1}$ . Obtido  $\theta_n$ , podemos encontrar  $\phi_n$  a partir da equação acima e o ângulo que a trajetória faz com a tangente pela equação

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - (\alpha_n + \phi_n). \quad (5.28)$$

Utilizando este procedimento, podemos escrever um mapeamento discreto que fornece os ângulos polares e o ângulo da trajetória com a tangente no ponto de colisão como

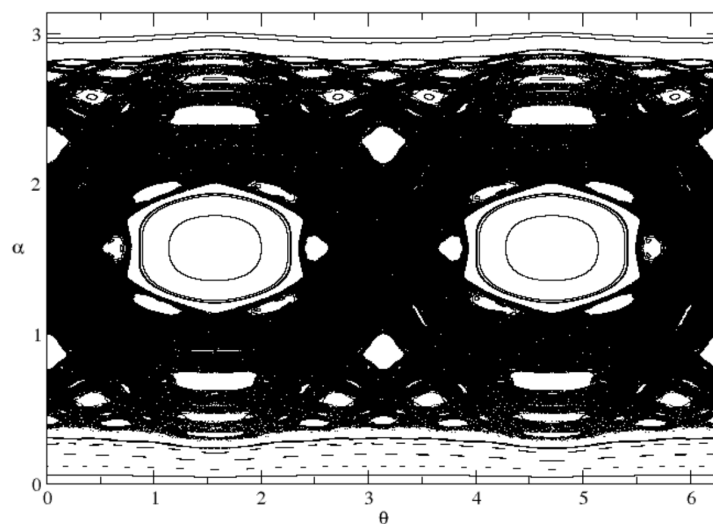
$$\begin{cases} H(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \sen(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) \\ \quad - \tan(\alpha_n + \phi_n)[R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \\ \alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n). \end{cases} \quad (5.29)$$

Dessa forma, obtemos  $\theta_{n+1}$  através da solução numérica de  $H(\theta_{n+1})$ , calculamos  $X'$  e  $Y'$  nessa coordenada e obtemos  $\phi_{n+1}$  com o qual encontramos  $\alpha_{n+1}$  com a segunda equação do mapa, resultando então nas novas coordenadas

### 5.3. BILHAR ESTÁTICO OVOIDE

---

a)



b)

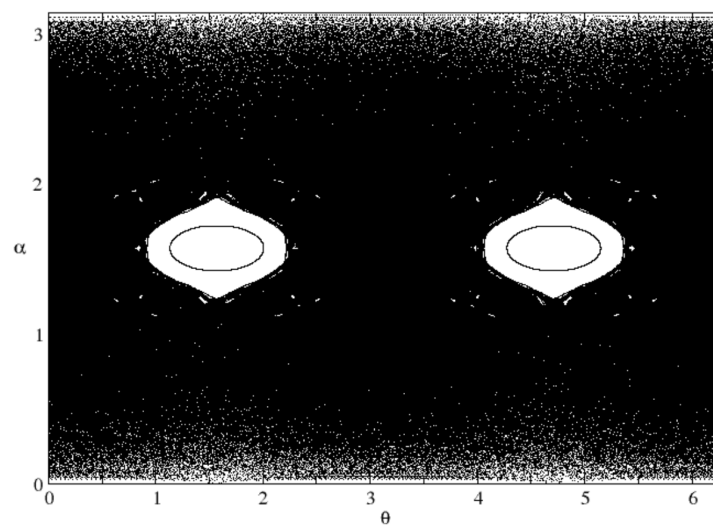


Figura 5.1: A figura ilustra o espaço de fases do bilhar ovoide para a)  $\varepsilon = 0, 1$  e b)  $\varepsilon = 0, 3$ , utilizando  $p = 2$ .

$(\theta_n, \alpha_n)$ . A figura 5.1 mostra os espaços de fases obtidos através do mapa (5.29) utilizando diferentes valores de parâmetro.

Para valores de parâmetro  $\varepsilon < 1/(p^2 + 1)$  o espaço de fases é misto, apresentando ilhas de estabilidades, curvas invariantes *spanning* e caos. No entanto, se aumentando o valor desse parâmetro tal que  $\varepsilon > 1/(p^2 + 1)$  as curvas invariantes são destruídas levando a junção das regiões caóticas em um mar de caos. Conforme a conjectura LRA, a presença de órbitas caóticas deve ser suficiente para garantir a existência de aceleração de Fermi no bilhar dependente do tempo, que será discutido na próxima seção.

## 5.4 Bilhar Ovoide Dependente do Tempo

Para o bilhar ovoide com fronteira dependente do tempo, assumimos que a fronteira só se deforma ortogonalmente para si mesma. Essa não é uma condição necessária mas, fazendo essa suposição, podemos reduzir o problema para a colisão da partícula com uma parede infinitamente massiva, movendo-se em direção ao vetor normal exterior. Com isso, assumiremos que a fronteira pode ser representado por

$$R(\theta, t) = 1 + \varepsilon[1 + \eta \cos(t + \phi_0)] \cos(p\theta), \quad (5.30)$$

onde  $\phi_0$  é a fase inicial e  $\eta$  é a amplitude de oscilação. Note que  $\eta = 0$  resulta no caso estático. Ao contrário do modelo estático, a partícula pode perder ou ganhar energia ao colidir com a fronteira móvel, podendo alterar sua velocidade a cada colisão. Dessa forma, a dinâmica desse sistema é obtida através de um mapeamento quadridimensional escrito a partir de um operador não linear  $T(\theta_n, \alpha_n, V_n, T_n) = (\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, T_{n+1})$  em que  $t_n$  é o instante de tempo em que ocorreu o  $n$ -ésimo impacto e  $V_n$  é a velocidade adquirida pela partícula imediatamente após a  $n$ -ésima colisão.

Partindo de uma condição inicial  $(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$ , as coordenadas posição da partícula são expressas como

$$X(\theta_n) = R(\theta_n, \alpha_n) \cos(\theta_n), \quad (5.31)$$

$$Y(\theta_n) = R(\theta_n, \alpha_n) \text{sen}(\theta_n), \quad (5.32)$$

e o ângulo  $\phi_n$  é escrito da forma

$$\phi_n = \arctan[Y'(\theta_n, t_n)/X'(\theta_n, t_n)], \quad (5.33)$$

em que

$$Y'(\theta_n, t_n) = -\varepsilon p[1 + \eta \cos(t_n)] \operatorname{sen}(p\theta_n) + R(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n), \quad (5.34)$$

$$X'(\theta_n, t_n) = -\varepsilon p[1 + \eta \cos(t_n)] \cos(p\theta_n) - R(\theta_n, t_n) \operatorname{sen}(\theta_n). \quad (5.35)$$

Conhecendo o valor de  $\phi_n$  podemos obter o vetor velocidade da partícula dado por

$$\vec{V}_n = |\vec{V}_n|(\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{i} + \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)\hat{j}), \quad (5.36)$$

onde  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  representam os vetores unitários na direção dos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Por sua vez, com o vetor velocidade podemos determinar a trajetória das partícula através das equações

$$X_p(t) = X(\theta_n) + |\vec{V}_n| \cos(\phi_n + \alpha_n)(t - t_n), \quad (5.37)$$

$$Y_p(t) = Y(\theta_n) + |\vec{V}_n| \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)(t - t_n), \quad (5.38)$$

e a distância da partícula em relação a origem é dada por

$$R_p = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2}. \quad (5.39)$$

Dessa forma, no momento da colisão temos que

$$R_p(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}), \quad (5.40)$$

onde  $R_f$  é a posição da fronteira, dada pela equação (5.30). O valor do ângulo  $\theta_{n+1}$  é obtido numericamente variando  $t$  até que a relação da equação (5.40) seja satisfeita. Por sua vez, o ângulo  $\theta_{n+1}$  é calculado pela relação  $\theta_{n+1} = \arctan(Y_p(t_{n+1})/X_p(t_{n+1}))$  e o ângulo  $\phi_{n+1}$  através da equação (5.33). A partir desse valor podemos calcular o vetor unitário tangente  $\vec{T}_{n+1}$  e o vetor unitário normal  $\vec{N}_{n+1}$  avaliados em  $\theta_{n+1}$  são escritos como

$$\vec{T}_1 = \cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \operatorname{sen}(\phi_{n+1})\hat{j}, \quad (5.41)$$

$$\vec{N}_1 = -\operatorname{sen}(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}. \quad (5.42)$$

A velocidade da partícula após a colisão pode ser determinada através de uma mudança de referencial. Utilizamos do fato de que no referencial da fronteira a velocidade da partícula apenas muda de direção, mantendo sua magnitude.

A partir da conservação da energia e momentum temos que a velocidade da partícula no referencial da parede móvel no instante da colisão é dada por

$$\vec{V}'_n = \vec{V}_n - \vec{V}_w(\phi_{n+1}, t_{n+1}), \quad (5.43)$$

onde  $\vec{V}'_n$  é a velocidade da partícula antes da colisão no referencial da fronteira e  $\vec{V}_f(\phi_{n+1}, t_{n+1})$  é a velocidade da fronteira, dada por

$$\vec{V}_f(\phi_{n+1}, t_{n+1}) = -\varepsilon d \operatorname{sen}(t_{n+1}) \cos(p\theta_{n+1}) [\cos(\theta_{n+1}\hat{i} + \operatorname{sen}(\theta_{n+1})\hat{j})]. \quad (5.44)$$

Por sua vez, a velocidade da partícula ( $\vec{V}_n$ ) é composta por uma componente tangencial e uma componente normal, dadas respectivamente por

$$\vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} = |\vec{V}_n| [\cos(\alpha_n + \phi_n) \cos(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\alpha_n + \phi_n) \operatorname{sen}(\phi_{n+1})], \quad (5.45)$$

$$\vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} = |\vec{V}_n| [-\cos(\alpha_n + \phi_n) \operatorname{sen}(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\alpha_n + \phi_n) \cos(\phi_{n+1})]. \quad (5.46)$$

Após a colisão, a velocidade da partícula no referencial da fronteira é

$$\vec{V}'_{n+1} = \vec{V}_{n+1} - \vec{V}_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}). \quad (5.47)$$

No momento da colisão, as leis de reflexão são

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1}, \quad (5.48)$$

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} \quad (5.49)$$

em que  $\gamma$  é o coeficiente de restituição. Para  $\gamma = 1$  as colisões são completamente elásticas e o sistema é conservativo. Se  $\gamma < 1$  a partícula perde uma fração de sua energia a cada colisão e o sistema passa a ser dissipativo. Note que para as colisões inelásticas somente a componente normal é afetada pela dissipação e, em ambos os casos, a componente tangencial da velocidade não é alterada após o choque. Dessa forma, voltando para o referencial de repouso temos

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = |\vec{V}_n| [\cos(\alpha_n + \phi_n) \cos(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\alpha_n + \phi_n) \operatorname{sen}(\phi_{n+1})]. \quad (5.50)$$

Para a componente normal no referencial inercial temos

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}_n \cdot \vec{V}_{n+1} + (1 + \gamma) \vec{V}_f(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1}, \quad (5.51)$$

o que resulta na seguinte equação

$$\begin{aligned} \vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = & -\gamma |\vec{V}_n| [\text{sen}(\alpha_n + \phi_n) \cos(\phi_{n+1}) - \cos(\alpha_n + \phi_n) \text{sen}(\phi_{n+1})] \\ & -(1 + \gamma) \varepsilon d \text{sen}(t_{n+1}) \cos(p\theta_n) [\text{sen}(\theta_{n+1}) \cos(\phi_{n+1}) - \cos(\theta_{n+1}) \text{sen}(\phi_{n+1})]. \end{aligned}$$

Dessa forma, o modulo da velocidade  $\vec{V}_{n+1}$  é dada por

$$|V_{n+1}| = \sqrt{\left(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}\right)^2 + \left(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}\right)^2}, \quad (5.52)$$

e o ângulo de saída

$$\alpha_{n+1} = \arctan \left[ \frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}} \right]. \quad (5.53)$$

Portanto, a partir de uma condição inicial  $(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$  podemos, utilizando as equações do mapeamento determinadas, obter  $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, t_{n+1})$  e, conseqüentemente, a evolução temporal desse sistema.

### 5.4.1 Transição de fase

Tendo descrito o sistema, agora será discutido a existência de uma transição de fase que ocorre quando o parâmetro de controle, no caso o coeficiente de constituição  $\gamma$  é variado. Três parâmetros controlam o sistema:  $\eta$ , associado ao movimento do limite,  $\varepsilon$ , relacionado à amplitude da deformação do círculo, e  $\gamma$ , que denota o parâmetro de restituição. Para  $\varepsilon = 0$ , o bilhar é estático e o sistema é não-integrável. Dependendo de  $\varepsilon$  e das condições iniciais, os componentes caóticos são observados no espaço de fase, e espera-se que a aceleração de Fermi correspondente ocorra no bilhar dependente do tempo. Isso é válido para valores do parâmetro  $\varepsilon = 0$  porque o sistema se transforma no bilhar circular se  $\varepsilon = 0$ , cuja versão estática é integrável. Portanto, para  $\eta\varepsilon = 0$ , o plano  $\theta \times \alpha$  exibe um mar caótico, e a difusão caótica é observada na dinâmica. O observável natural ao longo da dinâmica caótica para provar a existência da difusão é a raiz quadrada da velocidade média ao quadrado, dada por

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^2}, \quad (5.54)$$

em que  $M$  corresponde ao número de condições iniciais, enquanto  $n$  é o número de colisões da partícula com o fronteira. Outro comportamento observado pelo sistema com a parede se movendo periodicamente no tempo é que a seção de Poincaré do espaço  $(\alpha \times \theta)$  não é completamente uniforme. Isso significa que as órbitas caóticas não conseguem se difundir para todo o espaço de fase. A homogeneidade da seção  $(\alpha \times \theta)$  é necessária para o método analítico que será utilizado nas próximas seções para determinar  $V_{rms}$ . Para alcança-la, introduzimos estocasticidade na fronteira oscilante do bilhar, ou seja:

$$\mathbf{V}_b = \left. \frac{dR}{dt} \right|_{t_{n+1}+Z(n)} [\cos(\theta_{n+1})\mathbf{i} + \sin(\theta_{n+1})\mathbf{j}] \quad (5.55)$$

O termo  $Z(n)$  é um número aleatório entre 0 e  $2\pi$ . É importante mencionar que o bilhar oval estocástico pode ser considerado um modelo para a transferência de calor de um gás, discutido nas seções anteriores, como uma aplicação em potencial. O comportamento de  $V_{rms}$  é descrito da seguinte forma e mostrado na Figura 5.2 para os modelos estocástico e de movimento periódico da fronteira para diferentes valores de  $\epsilon$  e  $\eta$ , conforme indicado na figura. A faixa de parâmetros de interesse é  $\gamma$  próximo de um, especificamente  $\gamma \in [0,999, 0,99995]$  e  $\epsilon\eta \in [0,002, 0,02]$ . O último intervalo foi escolhido para facilitar as simulações numéricas, mas outros valores positivos produziram resultados semelhantes. Os símbolos correspondem à simulação numérica obtida a partir da iteração de mapeamento, considerando um conjunto de  $M = 5 \times 10^3$  condições iniciais diferentes, começando com a mesma velocidade inicial  $V_0 = 0,001$ . As linhas sólidas indicam os resultados analíticos que serão discutidos abaixo. Como podemos ver, a concordância com as curvas numéricas é excelente.

Para uma velocidade inicial relativamente baixa,  $V_0 \approx 0$ , as curvas de  $V_{rms}$  crescem à medida que  $V_{rms} \approx [n(\eta\epsilon)2]^\beta$  com  $\beta \approx 1/2$ , fazendo com que a difusão de partículas no espaço de velocidade seja equivalente a uma difusão normal. Para  $n$  suficientemente grande, as curvas crescem em direção a um regime de saturação dado por um platô constante, marcando uma limitação para a difusão  $V_{sat} \approx (1 - \gamma)^{\alpha_1} (\eta\epsilon)^{\alpha_2}$  com  $\alpha_1 = (-1/2)$ ,  $\alpha_2 = 1$ . A mudança do crescimento para a saturação é escrita como  $n_x \approx (1 - \gamma)^{z_1} (\eta\epsilon)^{z_2}$ , com  $z_1 = -1$  e  $z_2 = 0$ . Usando o dimensionamento adequado, todas as curvas mostradas na figura caem umas sobre as outras em um gráfico único e universal, confirmando uma invariância de escala para a difusão caótica, conforme mostrado na figura

#### 5.4. BILHAR OVOIDE DEPENDENTE DO TEMPO

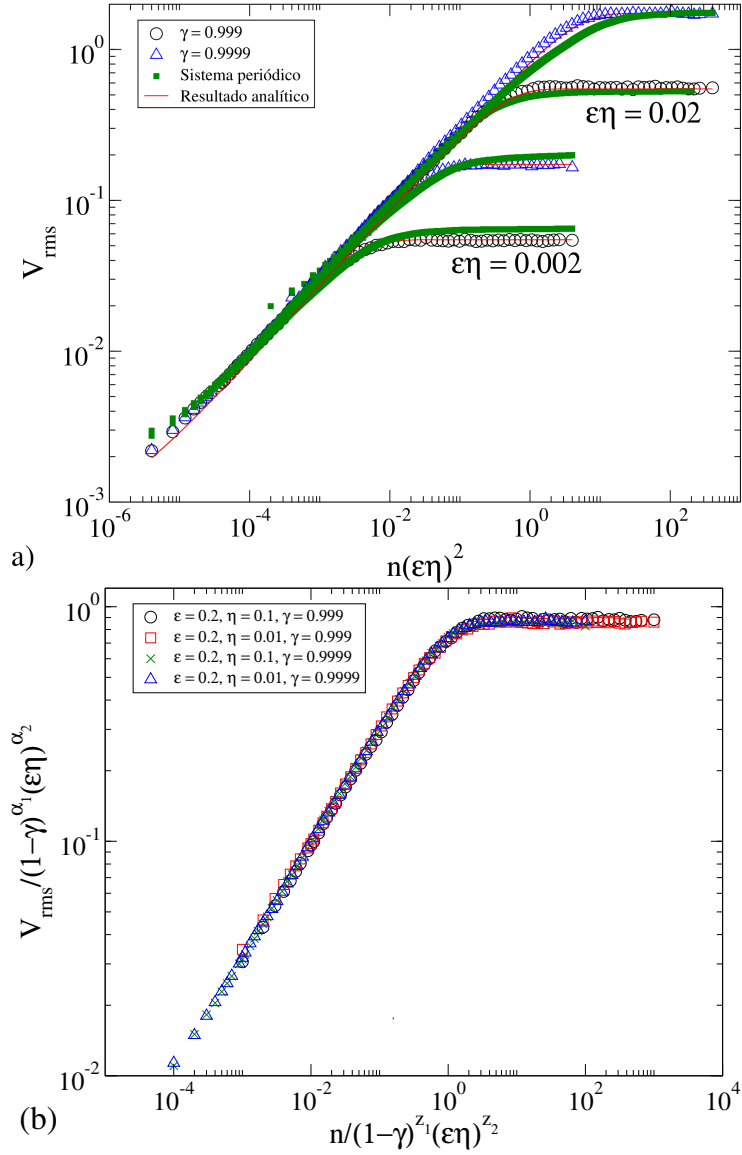


Figura 5.2: (a)  $V_{rms}$  vs  $n(\eta\epsilon^2)$  para diferentes valores de  $\gamma$  próximos ao ponto crítico,  $\epsilon = 0,2$  e dois valores diferentes de  $\eta$ . Os círculos representam os resultados numéricos para o modelo estocástico e os quadrados verdes para o bilhar oscilando periodicamente no tempo, enquanto as linhas sólidas foram obtidas analiticamente. (b) Sobreposição das curvas  $V_{rms}$  após as seguintes transformações de escala: (i)  $V \rightarrow V/[(1-\gamma)^{\alpha_1}(\eta\epsilon)^{\alpha_2}]$ ; (ii)  $n \rightarrow n/[(1-\gamma)^{z_1}(\eta\epsilon)^{z_2}]$

### 5.4.2 Parâmetro de ordem - Equação da difusão

Observando a figura (5.2) podemos notar que, para o regime de crescimento, a velocidade média do conjunto cresce de acordo com  $\sqrt{n}$ , o que indica que esse é um comportamento difusivo. Portanto, a dinâmica caótica nesse sistema apresenta propriedades semelhantes àquelas presentes no problema da caminhada aleatória. Isso implica que, dado um par de condições iniciais  $(V_0, \theta_0)$ , a evolução da velocidade se dá de forma que existe uma possibilidade de a dinâmica aumentar o valor de  $V$  com uma probabilidade  $p$  ou diminuí-la, com uma probabilidade  $q$ . Além disso, o fato de que  $V_{rms} \propto \sqrt{n}$  indica que essa grandeza é um forte candidato a parâmetro de ordem para a transição. No texto seguinte, será mostrado os passos para obter  $V_{rms}$  analiticamente, com o intuito de comprovar essa hipótese.

Consideremos inicialmente o problema clássico de caminhada aleatória em uma dimensão. Para tal modelo, uma partícula pode se mover na rede tanto para a esquerda (com probabilidade  $p$ ) quanto para a direita (com probabilidade  $q$ ). É conhecido na literatura que após  $N$  movimentos da partícula, amplitude do *envelope* que define a caminhada é dado por  $\sqrt{Npq}$ . O ocorrência deste expoente  $1/2$  é observada em diversos problemas envolvendo difusão [86].

O observável que caracteriza a difusão é, portanto,  $V_{rms}$ . Um dos métodos para obtê-lo é através da equação de difusão, que dá a probabilidade de observar uma velocidade específica  $V$  em um dado instante  $n$ , ou seja,  $P(V, n)$ . Tal equação é escrita como

$$\frac{\partial P(V, n)}{\partial n} = D \frac{\partial^2 P(V, n)}{\partial V^2}, \quad (5.56)$$

na qual o coeficiente de difusão  $D$  é obtido através da equação do mapa, usando

$$D = \frac{\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n}{2}. \quad (5.57)$$

Para obter a velocidade média do *ensemble* de partículas consideramos que a distribuição de probabilidade para a velocidade no plano de fases  $\alpha \times \theta$  é uniforme, o que garante a independência estatística entre  $\alpha$  e  $\theta$ . Como foi discutido na seção anterior, isso ocorre devido a introdução da estocasticidade ao adicionar o número aleatório  $Z$  no argumento da velocidade da fronteira. Tomando a média quadrática nas faixas  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\alpha \in [0, \pi]$  e  $t \in [0, 2\pi]$  vemos que a média dos termos senoidais são iguais zero, resultando em, para

#### 5.4. BILHAR OVOIDE DEPENDENTE DO TEMPO

---

a média quadrática da velocidade

$$\overline{V^2}_{n+1} = \frac{\overline{V^2}_n}{2} + \gamma^2 \frac{\overline{V^2}_n}{2} + \frac{(1+\gamma)^2 \eta^2 \varepsilon^2}{8}, \quad (5.58)$$

subtraindo  $\overline{V^2}_n$  de ambos os lados e dividindo o resultado por 2 obtemos o coeficiente de difusão

$$D = \frac{\overline{V^2}}{4}(\gamma^2 - 1) + \frac{(1+\gamma)^2 \eta^2 \varepsilon^2}{16}. \quad (5.59)$$

A expressão de  $\overline{V^2}$  é obtida também da primeira equação do mapeamento. Assumimos que

$$\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n = \frac{\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n}{(n+1) - n}, \quad (5.60)$$

onde o último termo remete à definição de derivada, ou seja

$$\frac{\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n}{(n+1) - n} \approx \frac{d\overline{V^2}}{dn}. \quad (5.61)$$

Integrando e considerando que  $V(n=0) = V_0$  temos

$$\overline{V^2}(n) = \overline{V_0^2} e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}n} + \frac{(1+\gamma)}{4(1-\gamma)} \eta^2 \varepsilon^2 \left[ 1 - e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}n} \right]. \quad (5.62)$$

Dessa forma, a dinâmica de  $\overline{V} = \sqrt{\overline{V^2}}$  é dada por

$$\overline{V}(n) = \sqrt{\overline{V_0^2} e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}n} + \frac{(1+\gamma)}{4(1-\gamma)} \eta^2 \varepsilon^2 \left[ 1 - e^{\frac{(\gamma^2-1)}{2}n} \right]}. \quad (5.63)$$

Para comparar com os observáveis obtidos numericamente devemos obter a média da equação (5.63), dada por

$$\langle \overline{V^2} \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \overline{V^2}, \quad (5.64)$$

$$\langle \overline{V^2} \rangle = \frac{1+\gamma}{4(1-\gamma)} \eta^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{n+1} \left[ \left( \overline{V_0^2} - \frac{1+\gamma}{4(1-\gamma)} \eta^2 \varepsilon^2 \right) \left( \frac{1 - e^{-(1-\gamma^2)(n+1)/2}}{1 - e^{-(1-\gamma^2)/2}} \right) \right]. \quad (5.65)$$

Para resolver a equação de difusão, por ser uma equação de segundo grau, é necessário impor ao menos duas condições de contorno para a probabilidade. Para isso, primeiro precisamos entender como a probabilidade se comporta ao variar a velocidade  $V$  e o análogo do tempo para o nosso sistema, o número de colisões  $n$ . Portanto, vamos discutir alguns aspectos da probabilidade como uma função dessas variáveis. Isso pode ser feito através de um histograma da probabilidade em função da velocidade  $P(V)$  para diferentes  $n$ , como mostra a Figura 5.3. Ela foi feita registrando a velocidade após cada colisão na simulação para um ensemble de diferentes condições iniciais, resultando na distribuição de probabilidade normalizada como mostrado para três diferentes regimes tempo: pequeno, intermediário e grande. No regime com tempo menor, a distribuição de probabilidade adota um comportamento de uma gaussiana. No entanto, para tempos maiores, a distribuição supostamente gaussiana se achata até que o lado esquerdo da curva atinja o limite inferior de velocidade, que é dado pela velocidade mais baixa da fronteira. Além disso, nota-se que esse limite inferior nunca é ultrapassado, ou seja, a velocidade da partícula nunca chega a zero. Isso nos permite concluir que  $P(0, n) = 0$ . Em segundo lugar, o conjunto começa com a mesma velocidade inicial, o que pode ser verificado pelo comportamento de  $V_{rms}$ , portanto, a probabilidade de encontrar qualquer partícula com alguma velocidade  $V$  em  $n = 0$  é dada por  $P(V, 0) = \delta(V - V_0)$ .

Dessa forma, devemos considerar as seguintes condições de contorno:  $\lim_{V \rightarrow \infty} P(V) = 0$ , permitindo que a probabilidade possa ser normalizada e  $P(0, n) = 0$ , garantido que a velocidade das partículas nunca seja nula, uma vez que tal situação não ocorre durante as simulações. Como condição inicial temos  $P(V, 0) = \delta(V - V_0)$  garantindo que todas as partículas possuam a mesma velocidade inicial  $V_0$  porém com  $M$  diferentes condições iniciais escolhidas no plano  $(\alpha, \theta)$ . Fazemos a suposição de que, apesar de o coeficiente de difusão  $D$  ser uma função  $n$ , podemos considerá-lo constante, uma vez que  $D$  varia lentamente entre os instantes  $n$  e  $n + 1$ . No entanto, após encontrarmos a solução podemos incorporar a expressão de  $D$  no resultado.

Para resolver a equação (5.56) utilizaremos a transformada de Laplace:

$$u(V, s) = \mathcal{L}\{P(V, n)\} = \int_0^\infty P(V, n)e^{-nV} dn. \quad (5.66)$$

Considerando a propriedade da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial P}{\partial n}\right\} = su(V, s) - P(V, 0), \quad (5.67)$$

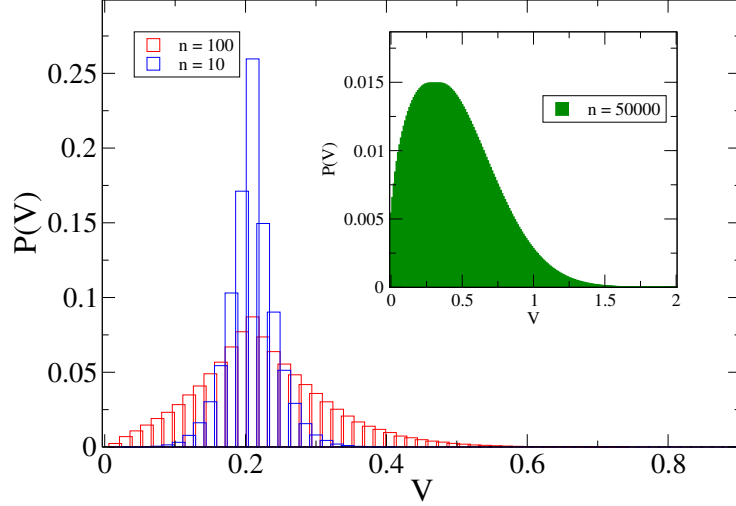


Figura 5.3: Histograma da distribuição de probabilidade normalizada para a velocidade de um conjunto de 105 partículas no bilhar oval estocástico e dissipativo. As barras azuis são obtidas após dez colisões, enquanto as barras vermelhas correspondem a 100 colisões. O gráfico inserido é obtido após 50.000 colisões. A velocidade inicial é  $V_0 = 0,2$  e os parâmetros de controle são  $\eta = 0,02$  e  $\gamma = 0,999$  com  $p = 2$ .

temos, tomando a derivada de  $u(V, s)$  duas vezes em função de  $V$

$$\frac{\partial^2 u(V, s)}{\partial V^2} - \frac{s}{D} u(V, s) = -\delta(V - V_0), \quad (5.68)$$

onde o delta de Dirac decorre da condição de contorno. Para resolver essa equação diferencial não-homogênea utilizamos o método de variação de parâmetros, que resulta na seguinte equação

$$u(V, s) = \frac{H(V - V_0)}{2\sqrt{Ds}} \left( e^{-\sqrt{\frac{s}{D}(V-V_0)}} - e^{\sqrt{\frac{s}{D}(V-V_0)}} \right) \quad (5.69)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{Ds}} \left( e^{\sqrt{\frac{s}{D}(V-V_0)}} - e^{-\sqrt{\frac{s}{D}(V-V_0)}} \right), \quad (5.70)$$

sendo  $H(V - V_0)$  é a função Heaviside, função singular e descontínua com valor zero quando o seu argumento é negativo e valor unitário quando o argumento é positivo. Utilizando a transformada inversa de  $u(V, s)$  recuperamos a função da distribuição de probabilidade, dada por

$$P(V, n) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dn}} \left( e^{-\frac{(V-V_0)^2}{4Dn}} - e^{-\frac{(V+V_0)^2}{4Dn}} \right) \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{V_0}{\sqrt{4Dn}}\right)}, \quad (5.71)$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido utilizando transformada cosseno de Fourier. A equação acima satisfaz as condições iniciais e de limite, e a função de erro erf garante que a probabilidade seja normalizada. O observável que queremos obter é a velocidade para valores altos de  $n$ , ou seja,  $V_{rms}$  no regime de saturação. Para isso, no entanto, primeiro precisamos obter a expressão da velocidade, que é dada por

$$\overline{V^2}(n) = \int_0^\infty V^2 P(V, n) dV, \quad (5.72)$$

cujas raízes da equação acima resulta em

$$V_{rms}(n) = \sqrt{(V_0^2 + 2D(n)n) + \sqrt{\frac{4D(n)n}{\pi} V_0 e^{-\frac{V_0^2}{4D(n)n}}}}, \quad (5.73)$$

sendo  $D(n)$  obtido da equação (5.59). A figura 5.2 mostra a comparação entre as curvas obtidas através da equação acima e aquelas obtidas numericamente, mostrando a eficácia do método. Tendo o resultado analítico de  $V_{rms}$  podemos obter uma expressão para a velocidade no regime de saturação fazendo

$$V_{rms,sat} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{rms} = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \frac{\epsilon \eta}{2}}. \quad (5.74)$$

Com esse método, o parâmetro ordem ( $\sigma$ ) pode ser definido como

$$\sigma = \frac{1}{V_{rms,sat}} = \sqrt{\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{2}{\eta \epsilon}}. \quad (5.75)$$

Observamos que nossa definição desse parâmetro de ordem deve ser entendida como um encapsulamento da mudança qualitativa do crescimento da energia (velocidade), enquanto um valor de decaimento de  $\sigma$  indica que o ponto crítico  $\gamma = 1$  está se aproximando. Observa-se que  $\sigma$  depende de dois conjuntos de parâmetros de controle: (i)  $\gamma$ , que traz a criticalidade para a dinâmica e faz com que  $\gamma \rightarrow 0$  quando  $\gamma \rightarrow 1$ , e (ii)  $\eta \epsilon$ , que pelo intervalo de parâmetros de controle considerado não traz criticalidade para a dinâmica. Vamos agora determinar a expressão da suscetibilidade  $\chi$ , que fornece informações sobre como o parâmetro de ordem responde a uma variação do parâmetro de controle  $\gamma$  responsável pela criticalidade. Ela é definida como

$$\chi = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} = -\frac{2}{\eta \epsilon (1 + \gamma)^2} \sqrt{\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}}, \quad (5.76)$$

e essa grandeza diverge no limite em que  $\gamma \rightarrow 1$ . A presença de invariância de escala e o parâmetro de ordem encontrado indicam fortemente a presença de uma transição de fase de segunda ordem. Além disso, vale a pena observar que a velocidade média encontrada nos sistemas estocástico e periódico apresenta um comportamento surpreendentemente semelhante, conforme mostrado na Figura 5.2. Como resultado, podemos empregar  $V_{rms,sat}$  como um parâmetro de ordem aproximado para descrever efetivamente a transição de difusão limitada para difusão ilimitada em ambos os modelos.

### 5.4.3 Quebra de simetria, excitações elementares e criticalidade

Na física estatística, transições de fase são acompanhadas por fenômenos típicos que permitem a identificação deste fenômeno como, mas não se limitando a esses exemplos, quebra de simetria entre as fases, mudança do comportamento das flutuações presentes no sistema e emergência de excitações elementares e comportamento coletivo. Com o intuito de concretizar a existência da transição de fase no sistema e fazer ligação com a literatura já existente na física estatística, vamos abordar esses conceitos no contexto do bilhar estudado. Dessa forma, é interessante examinar as flutuações dentro do sistema antes e no ponto crítico  $\gamma = 1$ . Para isso, podemos avaliar o desvio padrão  $\omega$  da velocidade em  $M$  condições iniciais:

$$\omega(\eta\epsilon, n) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{V_j^2(\eta\epsilon, n, V_0) - \bar{V}_j^2(\eta\epsilon, n, V_0)}. \quad (5.77)$$

A Figura 5.4(a) mostra o comportamento do desvio padrão  $\omega$  para os casos dissipativos e a Figura 5.4(b) para os casos não dissipativos. Semelhante a  $V_{rms}$ ,  $\omega$  tem um regime de crescimento para valores baixos de  $n$  e atinge um platô após muitas colisões. Portanto, as flutuações não crescem sem limites, como aconteceria no caso não dissipativo. Há uma faixa bastante limitada de flutuações, que depende dos parâmetros  $\eta$  e  $\epsilon$ . Isso indica que o alcance de “interações” durante a transição é limitada, o que é esperado, pois a dissipação leva a uma contração do espaço de fase, suprimindo a aceleração de Fermi.

Além disso, para afirmar ainda mais o surgimento da criticalidade quando o ponto crítico  $\gamma = 1$  é atingido, calculamos a correlação cruzada média  $\bar{C}$  de  $M$  trajetórias diferentes no espaço de fase. Assim como no cálculo do parâmetro de ordem, o observável de interesse é a velocidade. Para realizar

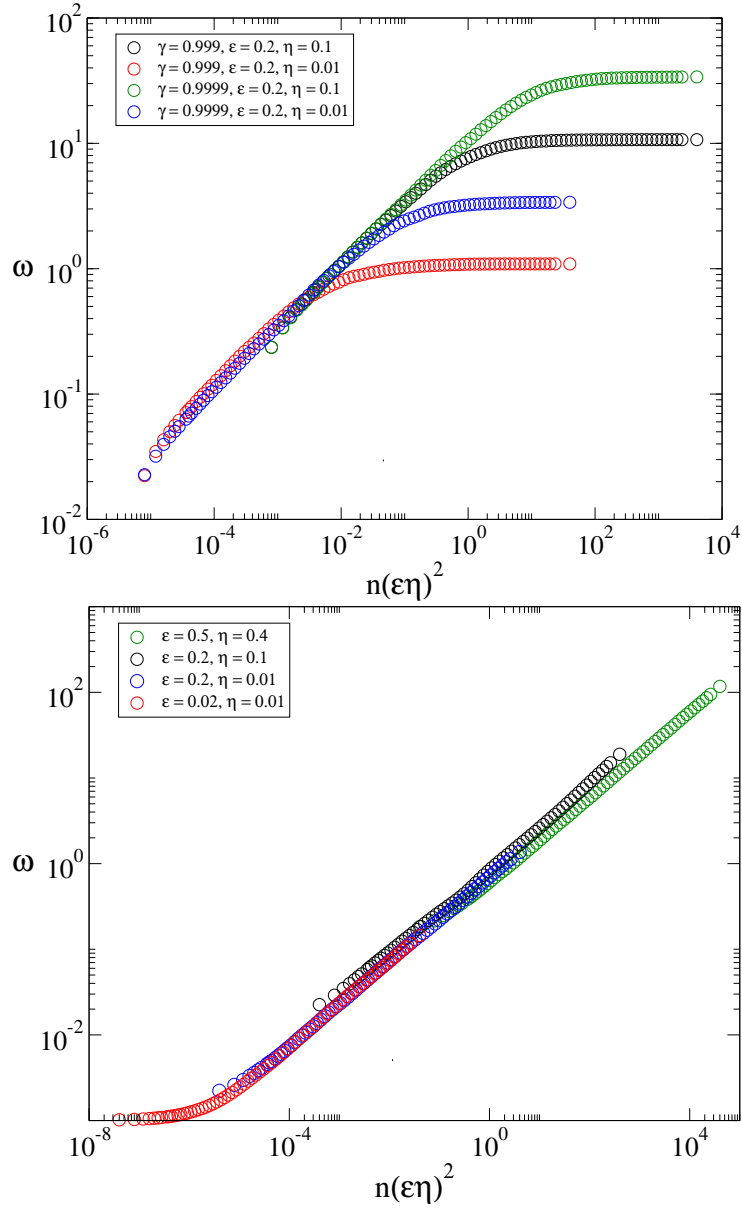


Figura 5.4: Desvio padrão de  $V_{rms}$  vs.  $n$  para diferentes valores dos parâmetros  $\gamma$  e  $\epsilon\eta$  para os casos a) dissipativo e b) não dissipativo. O eixo horizontal foi escolhido para mostrar que o expoente de crescimento é o mesmo para todas as curvas. O desvio padrão possui os mesmos expoentes críticos que as curvas de  $V_{rms}$ .

#### 5.4. BILHAR OVOIDE DEPENDENTE DO TEMPO

essa cálculo, separamos o espaço  $\alpha \times \theta$  para os sistema estocástico em 1000 regiões de mesmo tamanho dentro das quais retiramos um condição inicial a qual deixamos evoluir no tempo. Esse procedimento fornece então uma curva de velocidade ( $V_i$ ) em função do número de colisões ( $n$ ) para cada condição inicial  $i$ . Utilizando essas curvas, podemos calcular a correlação cruzada média como

$$\bar{C} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [V_i(k) - \bar{V}_i][V_j(k) - \bar{V}_j]}{\sqrt{(\bar{V}_i^2 - \bar{V}_i^2)(\bar{V}_j^2 - \bar{V}_j^2)}}, \quad (5.78)$$

com as médias das velocidades sendo tomadas sobre o número de colisões. Repetindo esse processo para diferentes valores de  $\gamma$  no intervalo  $[0,995,1]$ , observamos um aumento repentino na correlação cruzada para  $\gamma = 1$ , como pode ser visto na Figura 5.5. Esse resultado sugere o surgimento de um comportamento coletivo na velocidade para diferentes condições iniciais quando o ponto crítico é alcançado.

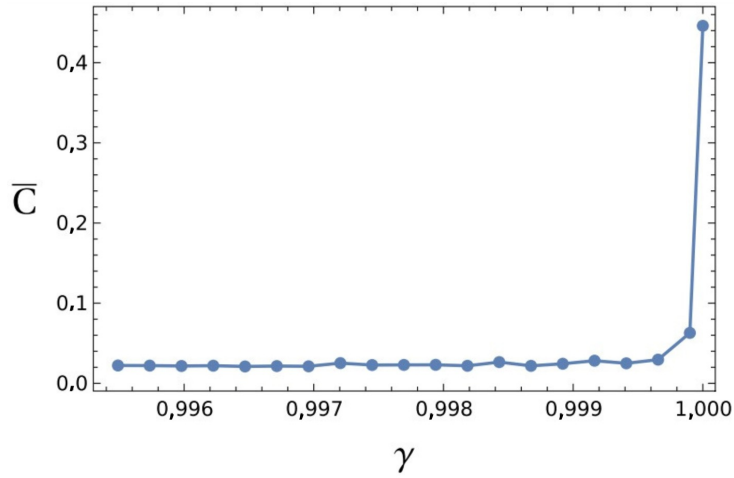


Figura 5.5: Correlação cruzada média  $\bar{C}$  para 20 valores diferentes de  $\gamma \in [0,995,1]$ . Cada ponto representa a média da correlação cruzada entre a  $V(n)$  de 1.000 condições iniciais para um sistema com  $\epsilon = 0,1$  e  $\eta = 0,1$ . A média da velocidade é obtida em  $10^6$  colisões e cada condição inicial tem velocidade inicial  $V_0 = 0,001$ .

Vamos discutir a quebra de simetria que ocorre durante a transição de fase. No limite de altas velocidades  $V_n \rightarrow \infty$  das partículas, de modo que  $\mathbf{V}_b$  seja desprezível, o componente normal da velocidade dado pela equação

(5.46) não mudaria seu valor absoluto em cada colisão para a dinâmica  $\gamma = 1$ . Essa simetria da equação (5.46) é quebrada para  $\gamma < 1$  no sentido de que o valor absoluto da velocidade diminui após cada colisão e permanece finito. A mudança no comportamento da velocidade pode ser facilmente rastreada para o caso geral, comparando a dinâmica do sistema em duas situações: quando as colisões são elásticas e quando as colisões são inelásticas. A mudança no comportamento da velocidade pode ser facilmente observada no caso geral, comparando a dinâmica do sistema em duas situações: quando as colisões são elásticas e quando as colisões são inelásticas. A Figura 5.6 ilustra o comportamento de  $V_{rms}$  como uma função de  $n$  para diferentes valores de  $\epsilon\eta$  considerando colisões elásticas, ou seja, com  $\gamma = 1$ . Nesse cenário, o sistema apresenta aceleração de Fermi em que, após um pequeno número de colisões, a velocidade aumenta monotonicamente com um expoente  $\beta \approx 1/2$ . No entanto, para  $\gamma < 1$ , a dissipação implica uma contração da área do espaço de fase acessível, levando à criação de atratores, que seriam os defeitos topológicos que ocorrem no modelo. Como eles estão distantes do infinito, a difusão ilimitada é impedida. Portanto, para esses valores de  $\gamma$ , o sistema apresenta um regime de saturação, demonstrando que o crescimento ilimitado de energia foi suprimido.

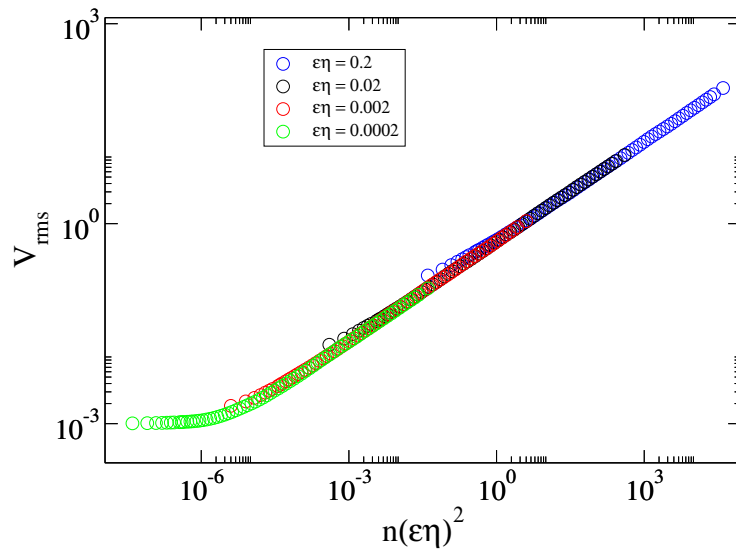


Figura 5.6:  $V_{rms}$  em função do número de colisões  $n$  para o caso não dissipativo do bilhar ovoide, ou seja, para  $\gamma = 1$  para 4 diferentes combinações de  $\eta\epsilon$

#### 5.4. BILHAR OVOIDE DEPENDENTE DO TEMPO

---

Por último, vamos abordar brevemente a excitação elementar responsável pela difusão das partículas. A velocidade de cada partícula do conjunto muda após uma colisão com a fronteira. Nesse contexto, o efeito análogo a uma excitação elementar ocorre devido ao produto  $\epsilon\eta$ , que é a velocidade máxima do limite do bilhar. Portanto,  $\epsilon\eta$  define a unidade elementar do “movimento” de passeio aleatório das trajetórias no espaço de fase. De fato, se considerarmos o limite de tempos curtos e velocidades iniciais pequenas, a difusão da velocidade é dada por  $V \approx \frac{\eta\epsilon}{2}\sqrt{n}$ . Isso mostra que, para um pequeno  $n$ , a partícula se difunde no espaço de fase de forma análoga a um passeio aleatório com tamanho de passo  $\eta\epsilon$ .

Com isso, analisamos a aceleração de Fermi em um bilhar oval oscilando periodicamente no tempo e o estocástico com e sem dissipação, enfatizando seu crescimento de energia ilimitado versus limitado. Nosso foco foi a analogia com uma transição de fase que ocorre da dinâmica não dissipativa para a dissipativa. A supressão da difusão infinita no espaço de momento ocorre devido a colisões inelásticas que conduzem a dinâmica por um tempo suficientemente longo para se aproximar de um regime de saturação. Com os argumentos utilizados acima, identificamos um parâmetro de ordem que vai continuamente para zero no ponto crítico e cuja suscetibilidade correspondente diverge no mesmo limite. Esse parâmetro de ordem encontrado também deve ser aplicável ao bilhar acionado periodicamente, como visto. A excitação elementar é dada pela alteração da velocidade em uma colisão elementar e sugerimos que ela depende do produto dos parâmetros envolvidos do bilhar oval acionado. No total, isso nos faz concluir que a transição de fase do regime de crescimento de energia limitado para ilimitado compartilha várias características com uma transição de fase comum de segunda ordem.

---

---

## CAPÍTULO 6

---

### CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esta tese foi desenvolvida com o intuito de estudar transições de fases em sistemas não-lineares, como o modelo *bouncer* em campo não homogêneo e o bilhar ovoide. Começamos observando a ocorrência de transições de fase em um rede de dipolos clássicos em uma fita de Möbius sob compressão. Identificamos a emergência de domínios conforme a fita é comprimida e expandida, assim como conseguimos explicar o alinhamento dos dipolo e a sua mudança durante a dinâmica. Após esse exemplo, partimos para o estudo de transição de fases em bilhares. O primeiro, um bilhar exótico, é um sistema composto basicamente de uma partícula carregada forçada a colidir com uma parede oscilante na presença de um campo elétrico. Obtivemos a equação de movimento da partícula através de uma mudança de referencial e mostramos que o movimento da partícula é oscilatório. Fizemos o espaço de fase do sistema e observamos que para certas combinações de valores de parâmetro e condições iniciais o modelo pode apresentar órbitas caóticas. Além disso, o espaço de fase pode apresentar órbitas periódicas, que ocorre nos pontos fixos, e órbitas quase-periódicas, que ocorrem nas ilhas KAM e nas curvas *spanning*. Observamos também que, ao contrário do modelo *bouncer*, o modelo aqui estudado não apresenta aceleração de Fermi.

Estudamos a existência e estabilidade dos pontos fixos no mapa utilizando as equações provenientes do modelo simplificado. Encontramos as equações que dão as coordenadas dos pontos fixos  $(V^*, \phi^*)$ . A equação que nos dá  $V^*$  foi resolvida numericamente. Cada valor de  $V^*$  encontrado está associado a dois valores de  $\phi^*$ , um em  $\phi^* = 0$  e outro em  $\phi^* = \pi$ . Obtivemos também

---

a estabilidade desses pontos fixos, observamos que aqueles em  $\phi^* = \pi$  eram pontos de sela enquanto os pontos fixos em  $\phi^* = 0$  podiam ser pontos de sela ou pontos fixos elípticos, dependendo dos valores de parâmetro utilizados. Obtivemos a descrição de escala na transição do regime integrável para o não integrável do modelo *bouncer* em campo não homogêneo. Mostramos que, para a região caótica de energia mais baixa, as curvas da velocidade em função do número de colisões pode ser descrita por relações de escala e verificamos que o modelo aqui apresentado pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Fermi-Ulam. Além disso, classificamos a transição de fase do regime integrável para o não-integrável, identificando os defeitos topológicos, as excitações elementares, a quebra de simetria e o parâmetro de ordem. O último vai continuamente a zero conforme o parâmetro de controle  $\varepsilon \rightarrow 0$  e a suscetibilidade diverge, indicando que essa é uma transição de segunda ordem.

Por último estudamos o bilhar ovoide motivados pelo o problema de transferência de calor de um gás com densidade baixa e uma fronteira. Apresentamos o modelo com as fronteiras estática e demonstramos que, dependendo da combinação dos valores de parâmetro e condições iniciais, esse sistema apresenta órbitas caóticas. Como previsto pela conjectura LRA, quando introduzimos uma perturbação temporal na fronteira, o modelo passa a apresentar aceleração de Fermi. No entanto, a presença desse fenômeno vai contra ao que foi visto através do formalismo da termodinâmica, em que as partículas e a fronteira chegam a um equilíbrio térmico. Esse resultado pode ser evitado considerando que as colisões são inelásticas. Como foi mostrado, nesse caso a velocidade das partículas possuem um regime de saturação para tempos longos e o regime de crescimento é uma função de  $\sqrt{n}$ , resultado também obtido para o modelo termodinâmico. Este sistema mostrou invariância de escala quando o ponto crítico, dado pelo parâmetro de controle que controla a dissipação, está sendo alcançado. Isso é um indício forte, somado a brusca mudança da velocidade das partículas, que uma transição de fase ocorre no sistema. Para obter a expressão da velocidade analiticamente, cujo o inverso é um forte candidato a parâmetro de ordem, utilizamos a equação da difusão, que fora resolvida empregando uma transformada de Laplace. Os limites e as condições de contorno para a resolução da equação foram escolhidos levando em conta a distribuição de probabilidade da velocidade em função do número de condições. As curvas de velocidade obtidas analiticamente são praticamente equivalentes as obtidas pelas simulações numérico, mostrando a eficácia do método utilizado. Em posse dessa expressão analítica, foi possí-

vel determinar um forte candidato a parâmetro de ordem. Esse observável vai continuamente a zero conforme o sistema se aproxima do ponto fixo enquanto a suscetibilidade diverge no mesmo limite. Em seguida, assim como no bilhar exótico estudado anteriormente, identificamos os defeitos topológicos, excitações elementares e a quebra de simetria que ocorre durante a transição. Além disso, com o intuito de sedimentar a existência de uma transição de fase, mostramos a presença de um comportamento coletivo no observável velocidade quando o sistema se aproxima do ponto crítico, assim como o comportamento das flutuações quando a transição é alcançada. Todos esses resultados indicam fortemente que de fato ocorre uma transição de fase de difusão limitada para difusão ilimitada quando dissipação é introduzida ao sistema, e que essa é uma transição de segunda ordem.

Como perspectivas pretendemos utilizar esse método a outros bilhares dependentes do tempo, assim como outros tipos de transições em sistemas dinâmicos. Como foi ilustrado pelo exemplo das redes de dipolos, uma miríade de sistemas não-lineares podem apresentar transições de fase atualmente poucos trabalhos abordando um tema que, como foi indicado por esse trabalho, aparenta ser muito geral. Além disso, é importante procurar formas de refinar os métodos analisados. A equação da difusão, apesar de muito eficaz para obtenção da função probabilidade, sofre de algumas limitações. A mais importante sendo que se os limites da equação não forem bem definidos, a resolução da equação fica inviável. O estudo de métodos para solucionar essas equações ou até mesmo contornar esses limites complicados aparentam ser de extrema importância para o tema estudado nesse trabalho. Por último, é importante ressaltar que a observação direta do espaço de fases dos bilhares dependentes do tempo é desafiadora devido a dimensionalidade desses sistemas. Com isso, observar diretamente o que ocorre com as trajetórias durante as transições de fase é muito difícil. Portanto, a criação de métodos para ajudar a visualizar espaços de fases com dimensões maiores é um importante passo para ser estudado com o intuito de elucidar o comportamento do sistema durante transições de fase.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] I. Newton. Princípios Matemáticos da Filosofia Natural. Edusp, São Paulo, 2008.
- [2] H. Poincaré. Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique. F. G. Beijer, 1890.
- [3] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman e R.H. Cohen. Fermi acceleration revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena* , 1(3):291 - 305, 1980.
- [4] G. Birkhoff. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 1927.
- [5] R. Markarian, N. Chernov. *Chaotiv Billiards*. American Mathematical Society, 2006.
- [6] M. Berry. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard. *European Journal of Physics*, **2**: 91, 1981.
- [7] Y.G. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. *Russian Mathematical Surveys*, **25**: 137, 1970.
- [8] L. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Communications in Mathematical Physics*, **65**: 295, 1979.
- [9] E. Fermi. On the origin of the cosmic radiation. *Physical Review*, **75**: 1169, 1949.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [10] L. Akinshin A. Loskutov, B. Ryabov. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **33**: 7973, 2000.
- [11] M. Silva, E. Leonel, F. Souza, L. Simões. Can drag force suppress fermi acceleration in a bouncer model?. *Mathematical Problems in Engineering*, **2009**:Article ID 409857, 2009.
- [12] S. M. Ulam. *On Some Statistical Properties of Dynamical Systems*. University of California Press, Berkeley, Calif., 1961.
- [13] L.D. Pustynnikov. *Transactions of the Moscow mathematical society*. Providence, **12**, 1978.
- [14] C. Dettmann, I. Caldas, E. Leonel, A. Livorati, T. Kroetz. Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for fermi acceleration. *Physical Review E*, **86**: 036203, 2012.
- [15] A. Livorati, E. Leonel. Describing fermi acceleration with a scaling approach: The bouncer model revisited. *Physica A*, **387**: 1115, 2008.
- [16] P. McClintock, E.D. Leonel. A hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **38**: 823, 2005.
- [17] E.D. Leonel, D.G. Ladeira. Dynamical properties of a dissipative hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Chaos*, **17**: 013119, 2007.
- [18] E.D. Leonel, D.F.M. Oliveira e R.A. Bizão. Scaling properties of a hybrid fermi-ulam-bouncer model. *Mathematical Problems in Engineering*, **2009**: 213857, 2009.
- [19] M. Edelman, G. Zaslavsky. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos*, **7**: 159, 1997.
- [20] L. P. Kadanoff. *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000.
- [21] J. K. Silva, D. G. Ladeira. Scaling features of a breathing circular billiard. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **41**: 365101, 2008.
- [22] J. Sethna. *Entropy, Order Parameters, and Complexity*. PRESS- OXFORD, 2017.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [23] R. C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, 1994.
- [24] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman e R. H. Cohen. *Physica D* 1, 291, 1980.
- [25] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena*. Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [26] S. Ma. *Modern Theory of Critical Phenomena*. W. A. Benjamin, Massachusetts, 1976.
- [27] R. Solé. *Phase Transitions*. Princeton University Press. New Jersey, 2011.
- [28] T. Sauer. A Look Back at the Ehrenfest Classification. Translation and Commentary of Ehrenfest's 1933 paper introducing the notion of phase transitions of different order. *The European Physical Journal Special Topics*, 2016.
- [29] N. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Reviews of Modern Physics*, **51**: 591, 1979.
- [30] S. Coleman. *Secret Symmetry: An Introduction to Spontaneous Symmetry Breakdown and Gauge Fields*. Harvard U., 1974.
- [31] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky. *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [32] R. Samajdar, W. Ho, H. Pichler, M. Lukin, S. Sachdev. Complex Density Wave Orders and Quantum Phase Transitions in a Model of Square-Lattice Rydberg Atom Arrays. *Physical Review Letters*, **124**: 103601, 2020.
- [33] L. Chomaz, et al. Dipolar physics: a review of experiments with magnetic quantum gases. *Reports on Progress in Physics*, **86**: 026401, 2023.
- [34] J. Ruhman, E. G. Dalla Torre, S. D. Huber, E. Altman. Nonlocal order in elongated dipolar gases. *Physical Review B*, **85**: 125121, 2012.
- [35] D. C. Johnston. Magnetic dipole interactions in crystals. *Physical Review B*, **93**: 014421, 2016.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [36] H. Qiao, C. Wang, W. S. Choi, M. H. Park, Y. Kim. Ultra-thin ferroelectrics. *Materials Science and Engineering*, **145**:100622, 2021.
- [37] W. Känzig, *Solid State Physics*, Vol. 4. Elsevier, 1957.
- [38] L. Martin, A. Rappe. Thin-film ferroelectric materials and their applications. *Nature Reviews Materials*, **2**: 16087, 2017.
- [39] D. Meier, S. Selbach. Ferroelectric domain walls for nanotechnology. *Nature Reviews Materials*, **7**: 157, 2022.
- [40] P. Sharma, Q. Zhang, D. Sando, C. Lei, Y. Liu, J. Li, V. Nagarajan, J. Seidel. Nonvolatile ferroelectric domain wall memory. *Science Advances*, **3**: 6, 2017.
- [41] J. Wang, J. Ma, H. Huang, J. Ma, H. M. Jafri, Y. Fan, H. Yang, Y. Wang, M. Chen, D. Liu, J. Zhang, Y.-H. Lin, L.-Q. Chen, D. Yi, C. Nan. Ferroelectric domain-wall logic units. *Nature Communications*, **13**, 3255, 2022.
- [42] P. Muralt, J. Micromech. Ferroelectric thin films for micro-sensors and actuators: a review. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **10**: 136, 2000.
- [43] D. Schildknecht, M. Schütt, L. J. Heyderman, P. M. Derlet. Continuous ground-state degeneracy of classical dipoles on regular lattices. *Physical Review B*, **100**: 014426, 2019.
- [44] J. Brankov, D. Danchev. Ground state of an infinite two-dimensional system of dipoles on a lattice with arbitrary rhombicity angle. *Physica A*, **144**: 1, 1987.
- [45] K. De'Bell, A. B. MacIsaac, I. N. Booth, J. P. White-head. Dipolar-induced planar anisotropy in ultrathin magnetic films. *Physical Review B*, **55**: 15108, 1997.
- [46] J. D. Feldmann, G. J. Kalman, P. Hartmann, M. Rosenberg. Ground State of Magnetic Dipoles on a Two-Dimensional Lattice: Structural Phases in Complex Plasmas. *Physical Review Letters*, **100**: 085001, 2008.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [47] J. Mydosh. Disordered magnetism and spin glasses. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **157**: 606, 1996.
- [48] A. Ramirez, in *Handbook of Magnetic Materials*, Vol. 13. Elsevier, 2001.
- [49] P.-É. Melchy, M. E. Zhitomirsky. Interplay of anisotropy and frustration: Triple transitions in a triangular-lattice antiferromagnet. *Physical Review B*, **80**: 064411, 2009.
- [50] B. D. Gaulin. Geometrically-frustrated magnetism on triangular and tetrahedral lattices. *Hyperfine Interactions*, **85**: 159, 1994.
- [51] A. Siemens, P. Schmelcher. Formation and crossover of multiple helical dipole chains. *Physics A*, **55**: 375205, 2022.
- [52] U. T. Lieu, N. Yoshinaga. Topological defects of dipole patchy particles on a spherical surface. *Soft Matter*, **16**: 7667, 2020.
- [53] A. Siemens, P. Schmelcher. Geometry induced domain-walls of dipole lattices on curved structures. *Physics A*, **56**: 495702, 2023.
- [54] P. Schmelcher. Effective long-range interactions in confined curved dimensions. *Europhysics Letters*, **95**: 5, 2021.
- [55] J. Plettenberg, J. Stockhofe, A. V. Zampetaki, P. Schmelcher. Local equilibria and state transfer of charged classical particles on a helix in an electric field. *Physical Review E*, **95**: 012213, 2017.
- [56] A. V. Zampetaki, J. Stockhofe, P. Schmelcher. Electrostatic bending response of a charged helix. *Physical Review E*, 2018.
- [57] A. Siemens, P. Schmelcher. Tunable order of helically confined charges. *Physical Review E*, **97**: 042503, 2020.
- [58] A. V. Zampetaki, J. Stockhofe, S. Krönke, P. Schmelcher. Classical scattering of charged particles confined on an inhomogeneous helix. *Physical Review E*, **88**: 043202, 2013.
- [59] A. V. Zampetaki, J. Stockhofe, P. Schmelcher. Degeneracy and inversion of band structure for Wigner crystals on a closed helix. *Physical Review A*, **91**: 023409, 2015.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [60] A. V. Zampetaki, J. Stockhofe, P. Schmelcher. Dynamics of nonlinear excitations of helically confined charges. *Physical Review E*, 2015.
- [61] A. V. Zampetaki, J. Stockhofe, P. Schmelcher, Pinned-to-sliding transition and structural crossovers for helically confined charges. *Physical Review E*, **92**: 042905, 2017.
- [62] A. Siemens, P. Schmelcher. External-field-induced dynamics of a charged particle on a closed helix. *Physical Review E*, **103**: 052217, 2021.
- [63] W. Beugeling, A. Quelle, C. M. Smith. Nontrivial topological states on a Möbius band. *Physical Review B*, **89**: 235112, 2014.
- [64] K. Flouris, M. M. Jimenez, H. J. Herrmann. Curvature-induced quantum spin-Hall effect on a Möbius strip. *Physical Review B*, **105**: 235122, 2022.
- [65] K. Liu, J. Wu. Mechanical properties of two-dimensional materials and heterostructures. *Journal of Materials Research*, **31**: 7, 2016.
- [66] U. Dierkes, S. Hildebrandt, F. Sauvigny. *Minimal Surfaces, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [67] D. D. Sheka. A perspective on curvilinear magnetism. *Applied Physics Letters*, **118**: 230502, 2021.
- [68] D. Ruelle. Existence of a Phase Transition in a Continuous Classical System. *Physical Review Letters*, **27**: 1040, 1971.
- [69] R. Douady. Applications du théorème des tores invariants. Thèse de 3ème Cycle, 1892;
- [70] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. Silva, L. Kamphorst. Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis. *Physical Review Letters*, **93**: 014101, 2004.
- [71] Y. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. *Russian Mathematical Surveys*, **25**: 137, 1970.
- [72] E.D. Leonel, D. Oliveira, A. Loskutov. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard. *Chaos*, **19**: 033142, 2009.

- [73] C. Dettmann, O. Georgiou. Stadium Billiard: Time-dependent asymmetric transport. *Physical Review E*, **83**: 036212, 2011.
- [74] A. Karlis, P. Papachristou, F. Diakonou, V. Constantoudis, P. Schmelche. Fermi acceleration in the randomized driven Lorentz gas and the Fermi-Ulam model. *Physical Review E*, **76**: 016214, 2007.
- [75] A. Karlis, F. Diakonou e V. Constantoudis. A consistent approach for the treatment of Fermi acceleration in time-dependent billiards. *Chaos*, **22**: 026120, 2012.
- [76] V. Gelfreich, V. Rom-Kedar e D. Turaev. Fermi acceleration and adiabatic invariants for non-autonomous billiards. *Chaos*, **22**: 033116, 2012.
- [77] F. Comets, S. Popov, G. Schütz e M. Vachkovskaia. Billiards in a general domain with random reflections. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **191**: 497, 2009.
- [78] T. Chumley, S. Cook, e R. Feres. From billiards to thermodynamics. *Computers & Mathematics with Applications*, **65**: 10, 2013.
- [79] R. Feres e G. Yablonsky. Probing surface structure via time-of-escape analysis of gas in Knudsen regime. *Chemical Engineering Science*, **61**: 24, 2006.
- [80] S. Cook e R. Feres. Random billiards with wall temperature and associated Markov chains. *Nonlinearity*, **25**: 9, 2012.
- [81] Z. H. Yakhini. Billiard approximations for Brownian motion. Stanford University, 1997.
- [82] D.-Q. Jiang, M. Qian e M.-P. Qian, *Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States*, Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2004.
- [83] D. Ruelle. Smooth Dynamics and New Theoretical Ideas in Nonequilibrium Statistical Mechanics. *Journal of Statistical Physics*, **95**: 393, 1999.
- [84] A. Pais. Niels Bohr's Times. Physics, Philosophy and Policy. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [85] A. Loskutov, E. D. Leonel. Time-Dependent Billiards. *Mathematical Problemas in Engineering*, Article ID 848619, 2009.

*REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS*

---

- [86] E. D. Leonel. Fundamentos de Física Estatística. Blucher, 2015.
- [87] M. Berberan-Santos. Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions. *Journal of Mathematical Chemistry*, **38**, 2005.