

Trabalho de Conclusão de Curso
Curso de Graduação em Física

Grupo de Simetria em Teorias da Relatividade

Autor: *Pedro Rosin Sartori*

Orientador: *Luiz Antonio Barreiro*

Rio Claro, 23 de novembro de 2017.

Grupos de Simetria em Teorias da Relatividade

Autor: *Pedro Rosin Sartori*

Orientador: *Luiz Antonio Barreiro*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso

Curso: Bacharelado em Física

Professores Responsáveis: Luiz Antonio Barreiro
Ricardo Paupitz B. dos Santos
Giovani Gozzi

Professor Suplente: Edson Denis Leonel

Instituição: Universidade Estadual Paulista
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Departamento de Física

Rio Claro, 23 de novembro de 2017.

Pedro Rosin Sartori

Luiz Antonio Barreiro

Este trabalho é dedicado a todos os meus familiares, amigos e principalmente a você, caro leitor.

"Tanto o insignificante quanto o extraordinário são arquitetos do mundo natural." - Carl Sagan.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais Eduardo e Maria Ester, que me apoiaram e trabalharam incansavelmente para que eu pudesse ter uma educação de qualidade, ensinando-me o valor do esforço e da dedicação. À minha irmã Gabriela, que sempre esteve ao meu lado, pelo seu carinho e paciência durante nossas longas discussões sobre os mais diversos assuntos.

Agradeço também ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro, que sempre se dispôs a me auxiliar, dando-me suporte ao tirar minhas dúvidas, ao me mostrar algumas passagens matemáticas confusas, ao contar diversas histórias sobre assuntos variados. Ainda agradeço por sua paciência, confiança e pelas horas que disponibilizou para me ajudar na confecção deste trabalho. Mas principalmente, por fazer tudo o que pode sem nunca tirar o sorriso do rosto.

Agradeço a todos os professores do departamento pelo tempo dedicado ao ministrar suas aulas ou ao me receber em suas salas sempre que requisitado.

Agradeço aos vulgarmente conhecidos como *Samba*, *Tesouro*, *Embratel*, *Rosinha*, *Selva*, *Atirador*, *Treme*, *Balde*, *Pocahontas*, *Cesinha*, *Brubs* e *Lêzinha* por terem sido irmãos para mim durante estes anos que se passaram na graduação, pelos longos e intermináveis dias de estudo, pelos conselhos, pelas risadas, pelas críticas, pelas festas e pelas incontáveis noites de bebedeira.

Agradeço ao grupo de amigos conhecidos como *TF Monstro*, composto por *Erick Cristiano*, *Henrique Nassif*, *Paulo Longano*, *Johny Yamamoto* e *Felipe Modolo* por todo o apoio, carinho e paciência durante minhas “lerdeadas”, como gostam de dizer.

Agradeço à instituição pelo ambiente, pela oportunidade de fazer o curso e pelo corpo docente incrível e à CAPES por ter financiado parte do projeto.

E a todos aqueles que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu mais profundo e sincero obrigado!

Resumo

A Teoria de Grupos é uma ferramenta matemática amplamente utilizada em diversos sistemas físicos a fim de estudar algumas simetrias. Desde a relatividade de Galileu até as mais avançadas teorias de relatividade da atualidade podemos encontrar diversas formas de simetria, portanto é interessante usar esta teoria de grupos para tentar modelar estes sistemas. No caso, utiliza-se a teoria de grupos para tentar descrever grupos básicos para as teorias da relatividade de Einstein e, em seguida, ocorre a tentativa de unificar os vários grupos estudados em um único grupo mais abrangente. Contudo, translações em espaços métricos planos e curvos tem suas diferenças, de forma que podemos criar dois grupos conhecidos como grupo de Poincaré e grupo de De Sitter (ou grupo de Anti-De Sitter). Estes grupos são soluções da Equação de Campos de Einstein quando temos que a constante cosmológica assume valores positivos, negativos ou nulo, permitindo-nos determinar a teoria da Relatividade Geral usual, ou até mesmo uma teoria onde a curvatura do espaço ocorra sem a presença de massas gravitacionais, ou seja, massa. Este último caso poderá ser amplamente estudado, de forma a facilitar a utilização de modelos cosmológicos que tentem modelar a energia escura no universo.

Palavras Chaves: Grupos de Simetria; Teoria da Relatividade; Grupo de De Sitter.

Áreas do conhecimento: Teoria da Relatividade; Física Matemática; Teoria de Grupos.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Motivação e Objetivos	1
2	Introdução à Teoria de Grupos	3
2.1	Definição de Grupo e Subgrupo	3
2.2	Isomorfismo e Grupos de Simetria	4
2.3	Grupos de Rotação $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$	5
2.3.1	Grupo de Rotação em Duas Dimensões $\mathcal{R}_2$	5
2.3.2	Grupo de Rotação em Três Dimensões $\mathcal{R}_3$	6
2.3.3	Relações de Comutação de $\mathcal{R}_3$	10
3	Introdução à Relatividade Restrita	11
3.1	Os Princípios da Relatividade Restrita	11
3.2	O Conceito de Intervalo	12
3.3	O Espaço-Tempo de Minkowski e as Transformações de Lorentz	12
4	Grupos de Simetria	16
4.1	O Grupo de Lorentz $\mathcal{L}$	16
4.2	Os Grupos de Translações Espaciais	21
4.2.1	O Grupo de Translações em um Espaço-Tempo Plano	21
4.2.2	Grupo de Translações em um Espaço-Tempo Curvo	23
4.3	O Grupo de Poincaré	26
5	O Grupo de De Sitter	30
5.1	As Equações de Campo de Einstein	30
5.2	Características do Grupo de De Sitter e Anti-De Sitter	31
6	Conclusões	34
A	Dedução da equação de rotação em $\mathcal{R}_3$	36
B	Derivada Covariante	38
B.1	Movimento de uma partícula em uma superfície bidimensional	38

B.2 A derivada covariante	39
-------------------------------------	----

Lista de Figuras

2.1	Rotação em torno do eixo Z	7
3.1	Representação do Espaço de Minkowski.	13
4.1	Representação do Espaço de Minkowski bidimensional com hipérboles invariantes.	18
4.2	Diagrama do espaço-tempo.	19
4.3	Translação em um espaço plano	21
4.4	Espaço com curvatura não nula.	23
4.5	Translação usual em um espaço curvo.	23
A.1	Rotação em torno de um eixo qualquer r	36
B.1	Partícula em um plano bidimensional curvilíneo.	38

Capítulo 1

Preliminares

O modo como entendemos a nossa realidade está intimamente ligado às simetrias do universo, de forma que nós só podemos compreender a ciência por conta do que assumimos antes de qualquer tipo de experimento. Estas suposições podem ser *simetrias espaciais*, indicando que o resultado de um experimento feito em um ponto qualquer do universo deve poder ser reproduzido em outros pontos, gerando resultados idênticos. Outra simetria que assumimos é a *simetria temporal*, a qual determina que não importa quando o experimento será feito, mas sempre que as condições para sua confecção forem semelhantes o experimento poderá ser reproduzido, gerando os mesmos resultados.

Como dissemos, mecânica clássica possui diversas formas de simetria, das quais resultam quantidades conservadas, tais como a energia e o momento de um objeto. Nesta teoria, o movimento de diferentes corpos é dado pelas *transformações de Galileu*, as quais buscavam expressar a posição e a velocidade de um corpo sobre um referencial inercial (x, y, z) em outros referenciais inerciais (x', y', z') . Nestas transformações o tempo era o mesmo para todos os referenciais, de forma que se estabeleceu o conceito de *tempo absoluto*.

Contudo, esta teoria não criava resultados satisfatórios para todos os sistemas físicos, portanto o físico alemão *Albert Einstein* criou sua própria teoria da relatividade, quebrando o conceito preestabelecido de tempo absoluto. Esta nova teoria de Einstein exigia a utilização de espaços métricos distintos, de forma que as transformações de Galileu perderam sua validade, portanto começou-se a utilizar novas transformações para se trabalhar com a cinemática de corpos em referenciais inerciais.

1.1 Motivação e Objetivos

Como já foi dito acima, existem diversas simetrias na natureza, que do ponto de vista matemático representam aplicações da teoria de grupos, as quais podem ser utilizadas para o desenvolvimento de novas teorias e modelagens matemáticas, ou até mesmo para a simplificação de diferentes sistemas físicos. Logo, busca-se tentar associar grupos de

simetria distintos às teorias da relatividade, explicando brevemente como a constante cosmológica (a qual será apresentada no capítulo 5) pode resultar da forma de se trabalhar com os grupos de simetria.

Também mostraremos que o espaço de De Sitter, que está associado a um grupo matemático denominado grupo de De Sitter, irá ser utilizado quando há uma curvatura no espaço-tempo sem nenhum tipo de massa gravitacional, tornando-o mais fundamental que a usual Relatividade Geral de Einstein.

Por fim, vale ressaltar que o objetivo deste trabalho não é criar uma modelo do universo, mas simplesmente utilizar e estudar os grupos de simetria associados às teorias da relatividade já existentes. Entre os grupos estudados, teremos os principais grupos de movimento da relatividade, tais como o grupo de Lorentz, o grupo de Poincaré e o grupo de De Sitter.

Capítulo 2

Introdução à Teoria de Grupos

De início, a Teoria de Grupos foi desenvolvida como uma ferramenta exclusivamente matemática, entretanto esta teoria foi aplicada em diversas áreas da física, tendo grande importância dentro do contexto de sistemas simétricos, os quais são extremamente úteis para o desenvolvimento de teorias mais modernas e sofisticadas.

A existência da simetria em um sistema físico permite a ocorrência de diversas simplificações nas mais diversas áreas, entre elas, pode-se citar a Mecânica Quântica, a Mecânica Clássica, Física do Estado Sólido e as Teorias da Relatividade. Portanto, torna-se imprescindível o estudo de tal ferramenta para a confecção deste trabalho.

2.1 Definição de Grupo e Subgrupo

Para se entender como trabalhar com diferentes grupos, primeiramente é necessário definir o que é considerado um grupo. Para tal, assumiremos um conjunto $\mathcal{A}$ com um número qualquer de elementos ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$) e enunciaremos algumas condições a serem satisfeitas, ou seja, se $\mathcal{A}$ satisfizer as condições impostas, ele será considerado um grupo [1].

Sendo assim, as condições são as seguintes:

- **Regra do Produto:** A multiplicação de dois elementos de um grupo deve ter como resultado um elemento do mesmo grupo.

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3 \quad (2.1)$$

- **Regra da Associatividade:** Em uma multiplicação com diversos elementos, a ordem na qual os produtos são realizados não deve alterar o resultado.

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2) \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha_2 \cdot \alpha_3) \quad (2.2)$$

- **Elemento identidade:** Deverá existir um elemento denominado Identidade. O produto de qualquer elemento do grupo pela identidade deverá dar o próprio elemento.

$$\alpha_n E = \alpha_n \quad (2.3)$$

- **Elemento inverso:** Deverá existir um elemento inverso para cada elemento do grupo, ou seja, para cada elemento α_n existente no grupo, deverá existir também um elemento inverso α_n^{-1} . A multiplicação entre estes dois elementos deve, necessariamente, resultar no elemento Identidade.

$$\alpha_n \cdot \alpha_n^{-1} = E \quad (2.4)$$

Adicionalmente, sendo $\mathcal{A}$ considerado um grupo, ele pode ser classificado em finito ou infinito. Para isso, é preciso avaliar se o número de elementos de um grupo não foi estipulado, o que indica que um grupo com m elementos é denominado um "Grupo Finito de Ordem m ", caso o número de elementos seja infinito, o grupo será denominado apenas por "Grupo Infinito". Contudo, se o conjunto de elementos do grupo em estudo possuir valores contínuos, o grupo passa a ser classificado como um "Grupo Contínuo" e, como exemplo, pode-se perceber que o grupo de rotações em um plano (o qual veremos ser denominado por $\mathcal{R}_2$ em 2.3.1) é um bom exemplo de Grupo Contínuo, uma vez que este possui infinitas rotações no plano e sua angulação pode assumir qualquer valor entre 0 e 2π [1].

Com essa definição em mente, podemos começar a pensar nos subgrupos, os quais devem ser interpretados como um grupo (ou seja, um conjunto de elementos que segue as condições descritas nesta seção) que está inserido em outro, isto quer dizer que um subgrupo nada mais é do que um grupo cujos elementos também fazem parte de outro grupo mais abrangente. Como exemplo, podemos entender o Grupo de Rotações em duas dimensões como um subgrupo do Grupo de Rotações em três dimensões, que por sua vez é um subgrupo do Grupo de Rotações em quatro dimensões e assim sucessivamente ([1] [2]). Para manter a clareza, é importante ressaltar que os grupos estudados aqui serão infinitos e contínuos, uma vez que terão rotações com qualquer angulação dentro de um intervalo predefinido.

2.2 Isomorfismo e Grupos de Simetria

Os elementos de um grupo podem ser gerados a partir de diversas formas, porém há a possibilidade de elementos de dois ou mais grupos, que foram gerados de diferentes formas, possuírem as mesmas características, ou seja, são dois grupos que irão preservar suas operações [1].

Dessa forma, se assumindo-se dois grupos distintos $\mathcal{B}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots)$ e $\mathcal{C}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, \dots)$ isomórficos, então decididamente seus elementos devem operar de forma semelhante. Assim:

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_3 \quad (2.5)$$

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \gamma_3 \quad (2.6)$$

Todos os conceitos explorados nas seções 2.1 e 2.2 nos permitem determinar que o Grupo de Simetria é o grupo responsável por todas as isomerias de um objeto (ou sistema), ou seja, de uma forma simplificada será um grupo invariante com relação as suas operações [1].

2.3 Grupos de Rotação $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$

Agora podemos começar a discussão sobre os primeiros Grupos de Simetria em estudo neste trabalho de forma mais aprofundada. Primeiramente, faremos um rápido estudo sobre os grupos de rotação em duas e em três dimensões, além de discutirmos suas diferenças. Posteriormente, utilizaremos os resultados e as conclusões das seções (2.3.1), (2.3.2) e (2.3.3) para iniciarmos algumas discussões sobre grupos de simetria mais complexos.

2.3.1 Grupo de Rotação em Duas Dimensões $\mathcal{R}_2$

O grupo de rotação em duas dimensões é um grupo Abelian (ou seja, um grupo cujas operações comutam, dessa forma $R(\alpha) \cdot R(\beta) = R(\beta) \cdot R(\alpha)$ para α e β pertencentes ao grupo) e possui um único parâmetro aditivo que irá reger sua rotação, o qual é um ângulo qualquer θ de modo que angulação se encontre no intervalo $0 < \theta < 2\pi$. Por convenção, os ângulos positivos representarão a rotação dos eixos coordenados no sentido anti-horário, o que significa que o vetor irá rotacionar no sentido horário [1].

Dessa forma, por θ ser um parâmetro aditivo, é natural pensar que a soma de dois ou mais parâmetros pode dar um valor acima de 2π , contudo esse fato pode ser corrigido se fizermos a subtração $2n\pi$ (com n sendo um número inteiro) da soma de parâmetros de modo que possamos garantir $0 \leq \theta < 2\pi$ [1].

A regra da multiplicação deste grupo é dada da seguinte maneira:

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

Então, para realizarmos efetivamente uma rotação de um ponto $P(x, y)$ até um ponto $P'(x', y')$ com uma angulação θ , pode se representar uma matriz $R_z(\theta)$ que consiga satisfaz a relação abaixo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz que satisfaz a equação acima é dada por:

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Contudo, sendo um grupo Abelian, é possível estabelecer a álgebra de Lie do grupo, ou seja, pode-se determinar as relações de comutação. Sendo assim, é necessário operar a matriz de rotação com duas angulações arbitrárias (ϕ e φ) e por fim determinar a seguinte relação de comutação:

$$[R_Z(\phi), R_Z(\varphi)] = R_Z(\phi).R_Z(\varphi) - R_Z(\varphi)R_Z(\phi) = 0 \quad (2.8)$$

A equação (2.8) deixa explícito que a ordem com que se faz as rotações no grupo $\mathcal{R}_2$ não importa, em outras palavras, pode-se rotacionar o vetor em ϕ e depois em φ ou pode-se rotacionar o vetor primeiramente em φ e depois em ϕ e obteremos os mesmos resultados.

2.3.2 Grupo de Rotação em Três Dimensões $\mathcal{R}_3$

Tendo estudado brevemente o grupo $\mathcal{R}_2$ podemos agora começar a entender o funcionamento do grupo de rotações $\mathcal{R}_3$. Este novo grupo é não-abelino (ou seja, a ordem de suas rotações importa) e apresenta duas grandes diferenças em relação ao grupo $\mathcal{R}_2$. A primeira delas é que $\mathcal{R}_3$ possui três parâmetros, os quais regem as rotações em três dimensões quando combinados.[1]

Então a rotação em três dimensões é representada com o símbolo $R_r(\theta)$, sendo r o eixo em torno do qual a rotação irá ocorrer. Portanto os parâmetros que regem a rotação serão três ângulos distintos, tendo dois ângulos polares do vetor r e o ângulo θ que deverá ser definido no intervalo $0 < \theta < \pi$. Nota-se que, diferentemente de $\mathcal{R}_2$, não é necessário fazer uma rotação de 360° , afinal, todos os pontos do espaço podem ser atingidos com rotações de apenas 180° [1].

Com geometria básica é possível ver que uma rotação de ângulo θ em torno de um eixo r qualquer é dado por¹:

$$\vec{v}' = R_r(\theta) \vec{v} = \cos(\theta) \vec{v} + (1 - \cos(\theta))(\vec{v} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \sin(\theta)(\vec{r} \times \vec{v})$$

Que em aproximação para ângulos pequenos, resulta em [1]:

$$\vec{v}' = R_r(\theta) \vec{v} = \vec{v} + \theta(\vec{r} \times \vec{v})$$

Dessa forma, pode-se definir um sistema de coordenadas tridimensional e construir uma matriz $R_r(\theta)$ que consiga satisfazer a relação abaixo [1]:

¹A dedução desta equação pode ser encontrada no Apêndice A deste trabalho.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_r(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sendo assim, precisamos ter em mente que teremos três matrizes distintas ($R_X(\theta)$, $R_Y(\theta)$, $R_Z(\theta)$) que poderão nos fornecer a solução da equação anterior, onde cada uma delas tem relação com um eixo coordenado. Nesta seção iremos fazer as passagens matemáticas assumindo uma rotação em apenas um dos eixos, uma vez que a obtenção das relações para os demais eixos pode ser feita de forma análoga.

Portanto, considerando a rotação em torno do eixo Z, como demonstrado na Figura 2.1, deve-se determinar as relações (2.9), (2.10) e (2.11):

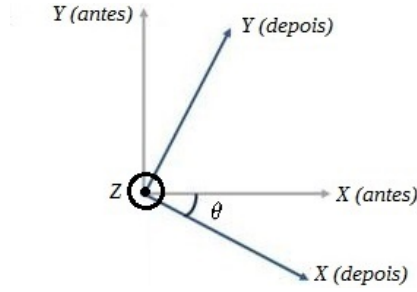


Figura 2.1: Rotação em torno do eixo Z.

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \quad (2.9)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \quad (2.10)$$

$$z' = z \quad (2.11)$$

o que leva a

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora temos a matriz de rotação em torno do eixo Z, então podemos tentar determinar a matriz geradora de rotação infinitesimal. Para tal feito, os ângulos de rotação são extremamente pequenos (no caso, infinitesimais), de forma que as aproximações $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$ são válidas. Por conseguinte, as relações (2.9), (2.10) e (2.11) podem ser reescritas como:

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \approx x - y\theta$$

$$y' = x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta) \approx x\theta + y$$

$$z' = z$$

e então a matriz infinitesimal será definida da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (I + \theta J_Z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

assim, matriz geradora de rotação infinitesimal será:

$$J_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tendo a representação matricial, é interessante também buscarmos uma representação diferencial para o problema. Por outro lado, uma rotação infinitesimal, na representação diferencial, será dada por uma pequena variação da angulação, portanto será usada uma derivada para determiná-la. Com base nas equações (2.9), (2.10) e (2.11), definiremos a rotação infinitesimal de uma função qualquer $f(x, y, z)$ como:

$$J'_Z f(x, y, z) = -\frac{d}{d\theta} f(x', y', z') = -\frac{d}{d\theta} f(x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta), x \operatorname{sen}(\theta) + y \cos(\theta), z)$$

$$J'_Z f(x, y, z) = -\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \theta}$$

$$J'_Z f(x, y, z) = -\frac{\partial f}{\partial x'} (-x \operatorname{sen}(\theta) - y \cos(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y'} (x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta))$$

$$J'_Z f(x, y, z) = -\left(x' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial f}{\partial x'} \right)$$

Por fim, chegamos a uma solução onde encontramos o operador infinitesimal após a rotação em sua forma diferencial. De forma genérica, podemos determinar que J_Z é o operador infinitesimal definido como:

$$J_Z = - \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Onde o sinal da derivada se da por conta do sentido da rotação.

O desenvolvimentos das equações para rotações nos eixos X e Y pode ser feito de forma análoga levando a resultados semelhantes. Sendo assim, as matrizes de rotação e o operadores infinitesimais em relação a cada um dos eixos serão os mostrados a seguir:

Em relação ao eixo X, teremos os seguintes resultados:

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$J_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = - \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.13)$$

Em relação ao eixo Y, teremos resultados análogos:

$$R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$J_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.15)$$

Por fim, como já foi demonstrado nesta seção, temos que os resultados para o eixo Z são dados por:

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$J_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

Estes resultados são de extrema importância para desenvolvimento deste trabalho, uma vez que eles serão imprescindíveis para a determinação da álgebra do grupo através da obtenção das relações de comutação, as quais serão abordadas na próxima seção.²

²É interessante ressaltar que em mecânica Quântica os operadores de momento angular serão dados por $J_X = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $J_Y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $J_Z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$, uma vez que se trabalha no espaço de Hilbert. Aqui estamos fazendo rotações em um espaço Euclidiano usual.

2.3.3 Relações de Comutação de $\mathcal{R}_3$

Agora que possuímos os operadores infinitesimais do nosso grupo de rotação, devemos estudar a álgebra do mesmo, de forma que poderemos entender como funcionam suas relações de comutação. Assim, pode-se calcular os comutadores de operadores quaisquer F_n de um grupo, que podem ser representados da seguinte maneira:

$$[F_n, F_m] = F_n \cdot F_m - F_m \cdot F_n$$

E, como pode ser notado, se o resultado da comutação for nulo os operadores F_n e F_m comutam entre si.

Com este conhecimento em mãos, calcularemos os comutadores dos operadores infinitesimais de $\mathcal{R}_3$, o que nos conduz aos seguintes resultados:

$$[J_X, J_Y] = J_Z \ ; \ [J_Y, J_Z] = J_X \ ; \ [J_Z, J_X] = J_Y \quad (2.18)$$

Este resultado indica que, apesar de não importar a ordem com que fazemos as rotações em torno de um mesmo eixo, a ordem com que as rotações em eixos distintos são realizadas pode alterar o resultado final das rotações.

Capítulo 3

Introdução à Relatividade Restrita

A Teoria da Relatividade Restrita (abreviada por TRR) é aquela que descreve a física envolvida no movimento de corpos quando há a ausência de campo gravitacional. A teoria é fundamentada pelas transformações de Lorentz, que são transformações de sistemas físicos entre diferentes eixos coordenados.[3]

Ressalta-se que para que haja a possibilidade de se estudar esta nova teoria, não pode-se separar o espaço do tempo, de forma que iremos utilizar um elemento denominado *espaço-tempo*. Com o intuito de se estudar as transformações de Lorentz devemos entender os princípios da relatividade restrita e os conceitos de intervalo.

3.1 Os Princípios da Relatividade Restrita

O primeiro passo para discutir as transformações de Lorentz é apresentar os dois princípios da relatividade restrita, tais como são encontrados em [4].

1. *Postulado da Relatividade (Por Galileu Galilei)*: As medidas realizadas de um experimento por um observador qualquer não podem depender da velocidade relativa deste observador em relação a outros observadores que não estão envolvidos no experimento em questão, ou seja, as leis da natureza não podem depender de nenhum sistema de referência.
2. *A constância da velocidade da luz (Por Albert Einstein)*: A velocidade da luz é finita e, em relação a um observador sob um referencial inercial (ou seja, sem aceleração), é constante com valor de aproximadamente $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ no vácuo, independente da velocidade da fonte de luz em relação ao observador. De forma mais simples, dois observadores, em referenciais inerciais distintos, irão medir a velocidade de um mesmo *fóton* com valor de aproximadamente $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ em relação a eles, independentemente da velocidade destes observadores.

3.2 O Conceito de Intervalo

Agora que conhecemos os dois princípios da relatividade restrita, iremos estudar o significado do conceito de Intervalo. Para isso usaremos um termo denominado *evento*, que será determinado pelo o tempo e o lugar que um fenômeno ocorre. Portanto, o intervalo será a grandeza que irá medir a distância entre dois eventos no espaço-tempo, seguindo a seguinte equação.

$$(\Delta S)^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2 - (c\Delta t)^2 \quad (3.1)$$

A equação (3.1) pode ser encontrada e estudada com mais detalhes em [3], [4] e [5]. Desta forma, como $(\Delta S)^2$ é uma característica que depende de dois eventos, independente do observador, esta grandeza pode ser usada para determinar o tipo de intervalo [4].

Como pode ser visto em [5], os intervalos podem ser classificados de três formas:

$$\begin{cases} (\Delta S)^2 > 0 & \text{Tipo - Espaço} \\ (\Delta S)^2 < 0 & \text{Tipo - Tempo} \\ (\Delta S)^2 = 0 & \text{Nulo} \end{cases}$$

Ressalta-se que, quando o intervalo for do tipo-espaço, sempre poderá ser encontrado um referencial onde $\Delta t = 0$ (os dois eventos ocorrem no mesmo instante), quando o intervalo for do tipo-tempo, sempre poderemos encontrar um referencial onde $\Delta L = 0$ (Os dois eventos ocorrem no mesmo local).¹

3.3 O Espaço-Tempo de Minkowski e as Transformações de Lorentz

Na Teoria da Relatividade o espaço e o tempo estão intrinsecamente relacionados, de modo que eles definem um espaço cuja métrica (ou distância entre dois pontos) é dada pela equação (3.1). O fator negativo no tempo torna esse espaço diferente do Euclidiano e receberá o nome de *Espaço de Minkowski* ou *Espaço-Tempo de Minkowski*. Este novo elemento matemático será um espaço métrico quadridimensional, de forma que os eventos neste espaço deverão ter quatro coordenadas distintas (x, y, z, ct) [3]. Na figura (3.1), pode-se ver uma representação gráfica do espaço.

Por conta deste espaço quadridimensional é necessária a utilização um quadrivetor, que nada mais é do que um vetor com quatro coordenadas, onde cada componente será denotada por x^α e α poderá ter os valores 0, 1, 2 e 3. Estas componentes serão escolhidas da mesma forma que podem ser encontradas em [3], logo:

¹ ΔL será o vetor de espaço. $\Delta L = \Delta X \hat{i} + \Delta Y \hat{j} + \Delta Z \hat{k}$

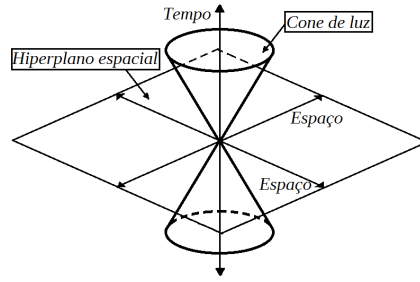


Figura 3.1: Representação do Espaço de Minkowski.

$$\underset{\sim}{x} = (x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (3.2)$$

Portanto, ao juntarmos este novo resultado da equação (3.2) com a equação (3.1), pode-se perceber que o cálculo da distância poderá ser determinado a partir da seguinte equação:

$$(\Delta S)^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta X^\alpha \Delta X^\beta$$

Onde $\eta_{\alpha\beta}$ é uma matriz diagonal e simétrica, denominada *Métrica*².

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, sabe-se que existem algumas equações que podem causar a transformação de um sistema de coordenadas sob um referencial inercial em outro sistema de coordenadas sob outro referencial inercial, ou seja, se as coordenadas de um evento (x, y, z, ct) em um sistema qualquer O forem conhecidas, podemos encontrar o sistema de coordenadas deste mesmo evento (x', y', z', ct') em outro sistema O' . Estas são as chamadas *transformações de Lorentz*. [3]

Estas transformações foram extremamente úteis nas teorias da relatividade de Einstein, substituindo as transformações de Galileu que não descreviam o movimento relativístico de forma satisfatória, uma vez que ela não mantém a invariância no intervalo de tempo entre dois eventos.[3]

Portanto, assumindo que o nosso referencial O' mencionado acima se mova apenas no eixo x com uma velocidade constante v em relação ao referencial O , temos que as transformações de Lorentz serão:

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \quad (3.3)$$

²Um estudo mais aprofundado e extremamente didático sobre este assunto pode ser encontrado em [4].

$$x' = \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \quad (3.4)$$

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

Onde γ é denominado o *fator de Lorentz* e é dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.7)$$

Desta forma, podemos escrever uma matriz que seja solução da relação

$$x'^\alpha = \Lambda^\mu_\nu x^\beta$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda^\mu_\nu \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Logo, como visto em [5], a matriz Λ^μ_ν deverá ser a seguinte

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso as transformações de Lorentz devem-se manter invariantes em relação a todos os referenciais inerciais, portanto as distâncias não devem ser distorcidas, mas as transformações deverão ser expressas matematicamente por rotações em relação a um sistema de coordenadas em quatro dimensões. Estas rotações ocorrerão em seis planos distintos, onde três deles (no caso, os planos xy , xz e yz) serão rotações espaciais exatamente iguais às deduzidas anteriormente (na seção 2.3.2), e as três rotações restantes levarão em conta o eixo do tempo.[3]

Desta forma, poderemos determinar que as transformações de Lorentz devem ser vistas como rotações em um espaço pseudo-euclidiano (nesta situação, o espaço-tempo de Minkowski), e podem ser expressas analogamente às encontradas em [3]:

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c}ct}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.8)$$

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.9)$$

$$y' = y \quad (3.10)$$

$$z' = z \quad (3.11)$$

Portanto, temos que a matriz Λ^μ_ν pode ser definida como uma matriz de rotação no espaço-tempo de Minkowski, desta forma a matriz encontrada é semelhante à encontrada em [5]:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Logo, como as transformações de Lorentz podem ser vistas como rotações no espaço de Minkowski (o que mostraremos no capítulo 4). Vale ressaltar que as translações no espaço se mantem, de forma que a translação de um ponto a outro no espaço deverá ser dada pela posição inicial de um corpo de prova qualquer mais um acréscimo da variação da posição do mesmo. Portanto, podemos equacionar:

$$x = x_0 + \Delta x \quad (3.13)$$

$$y = y_0 + \Delta y \quad (3.14)$$

$$z = z_0 + \Delta z \quad (3.15)$$

Assim, como estudaremos no capítulo 4, é dito que a junção das rotações espaciais vistas em 2.3.2 e as transformações de Lorentz encontradas nesta seção nos leva a um grupo de simetria denominado *Grupo de Lorentz*. Contudo, se levarmos em consideração este tal grupo de Lorentz e adicionarmos as translações vistas nas equações (3.13), (3.14) e (3.15) chegaremos ao grupo de simetria conhecido como *Grupo de Poincaré*, o que também será visto no capítulo 4. [1]

Capítulo 4

Grupos de Simetria

4.1 O Grupo de Lorentz $\mathcal{L}$

Como já foi estudado no capítulo anterior, as transformações de Lorentz podem ser interpretadas como rotações espaciais em $\mathcal{R}_3$, contudo estaremos trabalhando em um sistema de $(3+1)$ dimensões, ou seja, considera-se os três eixos espaciais e o eixo temporal de forma que o grupo é não-abelino. Neste caso são utilizados quadrivetores com coordenadas generalizadas $v = (x, y, z, ct)$ e assume-se que a origem deste sistema de coordenadas como $(0, 0, 0, 0)$. Portanto, deveremos considerar uma transformação que transforme um quadrivetor em outro, da mesma forma que podemos encontrar em [5]:

$$v' = Lv \quad (4.1)$$

Onde a transformação L será a transformação de Lorentz, a qual irá preservar o produto escalar, portanto, tem-se que

$$v_1 \cdot v_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2 \quad (4.2)$$

e

$$v'_1 \cdot v'_2 = Lv_1 \cdot Lv_2$$

para quaisquer quadrivetores no espaço-tempo de Minkowski. Logo, o operador L que irá determinar as transformações de Lorentz é definido como:

$$L = Q(\phi)R(\theta) \quad (4.3)$$

Onde $R(\theta)$ será a componente encarregada de aplicar as rotações puramente espaciais, seguindo as mesmas regras e condições do ângulo θ apresentadas em (2.3.2). Já o termo $Q(\phi)$ irá abranger todas as rotações que envolvem o eixo do tempo.[5]

Considera-se também que o produto escalar de um quadrivetor com ele próprio deve

resultar no que é conhecido como comprimento do vetor. No nosso caso, este comprimento será interpretado como o intervalo entre dois eventos. Desta forma, se considerada uma base ortonormal de quadrivetores, v_1 , v_2 , v_3 e v_4 , podemos utilizar a equação (4.2) para calcular $v_1 \cdot v_1$, $v_2 \cdot v_2$, $v_3 \cdot v_3$ e $v_4 \cdot v_4$. Se v_1 for a componente temporal e os demais forem componentes espaciais, teremos que¹:

$$v_1 \cdot v_1 = -1$$

$$v_2 \cdot v_2 = 1$$

$$v_3 \cdot v_3 = 1$$

$$v_4 \cdot v_4 = 1$$

Assim, poderemos construir a métrica deste espaço, como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Que é a mesma métrica utilizada em (3.3) e na Teoria da Relatividade Geral (TRG).

Desta forma, deveremos determinar o comportamento deste grupo de simetria estudando sua álgebra. Como já foi dito, o grupo de Lorentz pode ser interpretado como rotações em (3+1) dimensões, portanto podemos utilizar os resultados apresentados em (2.3.2) e (2.3.3), adicionando uma dimensão a mais na matriz. Em vista disso as matrizes e os operadores infinitesimais das rotações puramente espaciais serão:

Em relação ao eixo X:

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Em relação ao eixo Y:

¹Uma explicação mais completa e didática sobre este assunto pode ser encontrada em [5]

$$\begin{aligned}
R_Y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
X_Y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Em relação ao eixo Z:

$$\begin{aligned}
R_Z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
X_Z &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Tendo estas equações em mãos, podemos começar a trabalhar com as rotações temporais, que podem ser representadas em um diagrama do espaço-tempo (também conhecido como diagrama de Minkowski)[5]. Este diagrama leva em consideração a curvatura do espaço, de forma que o espaço poderá ser representado pela figura abaixo:

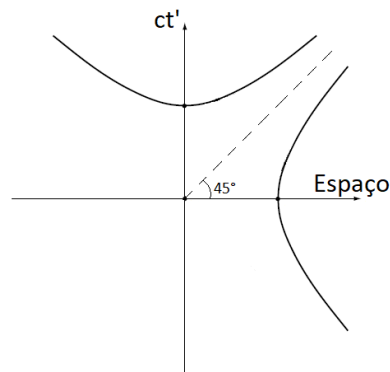


Figura 4.1: Representação do Espaço de Minkowski bidimensional com hipérbolas invariantes.

Com esta representação por exemplo, pode-se analisar uma rotação com o eixo Z e o eixo do tempo. Para isso deveremos fixar um dos planos (neste caso, o plano espacial XY) e então aplicaremos uma transformação de Lorentz pura (ou seja, um *impulso* determinado pelo ângulo ϕ encontrado na equação (4.3)) sob o eixo espacial restante (eixo Z)[5].

Portanto, os eixos coordenados devem sofrer uma rotação, possibilitando a determinação da matriz de rotação do espaço. Geometricamente teremos o seguinte resultado:

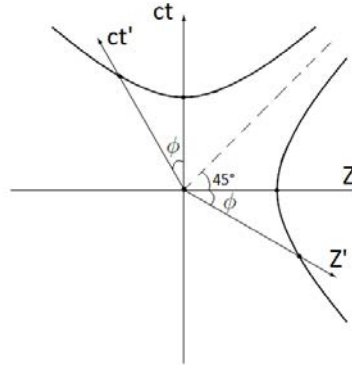


Figura 4.2: Diagrama do espaço-tempo.

Logo, podemos determinar as equações transformadas como:

$$x' = x \quad (4.8)$$

$$y' = y \quad (4.9)$$

$$z' = z \cosh(\phi) - ct \sinh(\phi) \quad (4.10)$$

$$ct' = ct \cosh(\phi) - z \sinh(\phi) \quad (4.11)$$

E, é possível tratar estas equações como foi feito para as equações (2.9), (2.10), (2.11) para determinarmos a sua matriz de rotação e seus geradores de rotação infinitesimais. De maneira mais geral, considerando rotações para todos os eixos coordenados teremos as mesmas soluções que podemos encontrar em [5]:

Para os eixos X e ct:

$$Q_X(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & 0 & 0 & -\sinh(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\phi) & 0 & 0 & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$$

$$Y_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Para os eixos Y e ct:

$$\begin{aligned}
Q_Y(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\phi) & 0 & -\sinh(\phi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sinh(\phi) & 0 & \cosh(\phi) \end{pmatrix} \\
Y_Y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Para os eixos Z e ct:

$$\begin{aligned}
Q_Z(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) \\ 0 & 0 & -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix} \\
Y_Z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

As matrizes (4.12), (4.13) e (4.14) são as geradoras de rotação infinitesimal do grupo associadas a $Q(\phi)$. Consequentemente, podemos calcular os comutadores de forma a determinar a álgebra do grupo, sendo assim:

$$[X_X, X_Y] = X_Z ; [X_Y, X_Z] = X_X ; [X_Z, X_X] = X_Y$$

$$[Y_X, Y_Y] = -X_Z ; [Y_Y, Y_Z] = -X_X ; [Y_Z, Y_X] = -X_Y$$

$$[X_X, Y_Y] = Y_Z ; [X_Y, Y_Z] = Y_X ; [X_Z, Y_X] = Y_Y \tag{4.15}$$

$$[Y_X, X_Y] = Y_Z ; [Y_Y, X_Z] = Y_X ; [Y_Z, X_X] = Y_Y$$

$$[X_X, Y_X] = [X_Y, Y_Y] = [X_Z, Y_Z] = 0$$

Assim, as relações de comutação (4.15) serão aquelas que irão definir a álgebra do grupo de Lorentz, mas vale ressaltar que X_q são as rotações puramente espaciais e Y_q são as rotações envolvendo o eixo do tempo, onde o índice q é uma generalização dos índices

X, Y e Z.².

4.2 Os Grupos de Translações Espaciais

Todos os grupos de simetria apresentados até este ponto foram grupos de rotação. Porém agora iremos apresentar dois grupos de translações no espaço. Com isso poder-se tentar representar diferentes tipos de translações, as quais ocorrerão em espaços métricos distintos, que, ao juntarem-se com o grupo de Lorentz estudado na seção anterior, resultarão em novos grupos de simetrias associados a diferentes teorias da Relatividade.

4.2.1 O Grupo de Translações em um Espaço-Tempo Plano

O grupo de translações em um espaço de Minkowski, tendo (3+1) dimensões como pode ser visto na figura 3.1, é algo simples e, de certa forma, intuitivo. Primeiramente devemos entender que a translação de um corpo no espaço é um movimento onde todos os componentes se deslocam de forma paralela, mantendo as distâncias entre si. Desta forma, mais adiante iremos determinar matematicamente que a translação sobre um corpo nas coordenadas (x, y, z, ct) deve levá-lo a (x', y', z', ct') . [5]

Portanto, uma translação aplicada sobre um vetor qualquer r é denotada pela equação (4.16):

$$P(\varepsilon)r = r + \varepsilon = r(x, y, z, ct) + \varepsilon(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_t) \quad (4.16)$$

onde $P(\varepsilon)$ contém todos os infinitos elementos do grupo. A figura (4.3) abaixo demonstra a dois pontos distintos no espaço, separados por uma distância ε , portanto o ato de transladar seria simplesmente levar um sistema de um dos pontos ao outro.

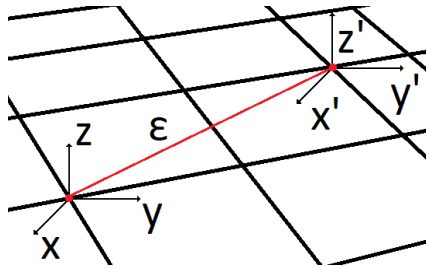


Figura 4.3: Translação em um espaço plano

Agora podemos continuar a discussão envolvendo o grupo em questão. Ele é caracterizado como abeliano, infinito e contínuo, de maneira que um corpo (ou sistema físico) qualquer pode ser transladado para qualquer ponto do espaço, o que nos garante que $-\infty < \varepsilon_q < \infty$. [1][5]

²Todos os comutadores podem ser encontrados em [5], assim como uma explicação mais abrangente sobre o assunto.

Por conta destes fatores, temos que ε_q é um parâmetro aditivo, ou seja, a sua regra de multiplicação deve ser dada por:

$$P(\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}, \varepsilon_{z1}, \varepsilon_{t1})P(\varepsilon_{x2}, \varepsilon_{y2}, \varepsilon_{z2}, \varepsilon_{t2}) = P(\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2}, \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2}, \varepsilon_{z1} + \varepsilon_{z2}, \varepsilon_{t1} + \varepsilon_{t2})$$

Portanto, uma translação pode ser representada pela seguinte relação matricial, que é análoga a (4.16):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

De forma que a teremos a seguinte solução:

$$P(\varepsilon)(x, y, z, ct) = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, ct + \Delta t) = (x', y', z', ct') \quad (4.18)$$

Ou em suas formas matriciais:

$$P_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad P_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad P_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entretanto, devemos generalizar este resultado para qualquer transação, portanto devemos buscar o operador de translações infinitesimais. Para isto, assume-se que a variação na posição provocada por $P(\varepsilon)$ deve ser pequena o suficiente, para que o operador de translações infinitesimais deste grupo seja uma derivada. Portanto:

$$P_q = \frac{\partial}{\partial q} \quad (4.19)$$

Sendo q as coordenadas x, y, z ou t . Consequentemente, se fizermos uma soma com todos os P_q poderemos calcular a translação total do sistema físico. Além disso, agora que temos o operador infinitesimal do grupo de translações, é possível calcular a álgebra

do grupo, sendo os comutadores conforme apresentados na equação (4.20):

$$[P_X, P_Y] = [P_Y, P_Z] = [P_Z, P_X] = 0 \quad (4.20)$$

Provando que o grupo é abeliano, como foi dito no começo desta seção.

4.2.2 Grupo de Translações em um Espaço-Tempo Curvo

Em 4.2.1 foi discutido que é possível construir um grupo de translações espaciais abeliano, levando em um espaço-tempo plano. Contudo, podemos construir um grupo de translações utilizando um espaço plano curvo, como o apresentado na figura 4.4:

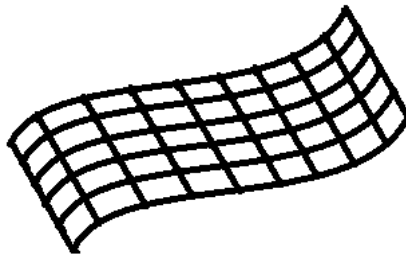


Figura 4.4: Espaço com curvatura não nula.

Diferente do que acontece com as translações no espaço plano, não é possível simplesmente transladar o sistema de coordenadas de um ponto ao outro em um espaço curvo, uma vez que o plano cartesiano acompanhará a curvatura no espaço. Como pode ser visto na figura 4.5.

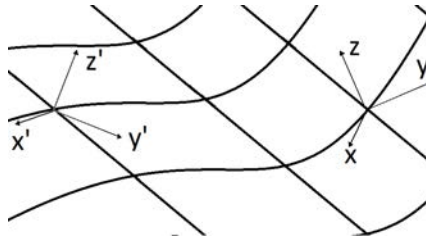


Figura 4.5: Translação usual em um espaço curvo.

Dessa forma, translações do sistema de coordenadas de forma paralela e mantendo as distâncias entre si, devem ser representados contendo um termo de correção em nosso operador de translação apresentado na equação (4.19).

Este termo deverá levar em conta uma métrica do espaço-tempo, a qual está relacionada com a curvatura. Contudo, apesar de estarmos considerando um plano espacial com curvaturas, estaremos assumindo que não existe nenhum tipo de torção, o que irá gerar certas consequências que serão abordadas posteriormente.

Vale lembrar que estamos atuando em um espaço curvo, porém localmente Minkowskiano, ou seja, em cada ponto do espaço-tempo será possível adotar um plano tangente,

de forma que possibilite a criação de um sistema de coordenadas para cada um destes planos.

Portanto, o operador infinitesimal deste grupo de translações deverá ser dado por uma derivada mais o termo de correção mencionado acima, logo ao transladarmos um tensor qualquer V^α teremos a seguinte equação:

$$D_\mu V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial q_\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda \quad (4.21)$$

Em (4.21) temos a chamada *Derivada Covariante*³, onde q_μ são os eixos coordenados e o termo $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$ é o termo de correção denominado *Símbolo de Christoffel*. Este termo leva em consideração a métrica do espaço tempo assim como suas derivadas, podendo ser analisado em (4.22)⁴:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha m} \left(\frac{\partial g_{m\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{m\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2}g^{\alpha m} (g_{m\mu,\lambda} + g_{m\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,m}) \quad (4.22)$$

Onde $g_{\mu\nu}$ deverá é a métrica assumida para o espaço-tempo. Estas equações nos permitem calcular os comutadores e determinar a álgebra do grupo, como:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = D_\mu(D_\nu V^\alpha) - D_\nu(D_\mu V^\alpha)$$

onde os termos $(D_\nu V^\alpha)$ e $(D_\mu V^\alpha)$ devem seguir o que foi definido pela equação (4.21), determinada nesta seção e serão um tensor de segunda ordem.

Portanto, o cálculo $D_\mu(D_\nu V^\alpha)$ nada mais é do que a derivada covariante de um tensor misto de segunda ordem, o que fará com que o símbolo de Christoffel atue com dois termos, sendo um deles negativo e outro positivo. Assim teremos a seguinte solução para o comutador:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(D_\nu V^\alpha) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha D_\nu V^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\nu}(D_\mu V^\alpha) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda D_\lambda V^\alpha - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha D_\mu V^\sigma$$

Em seguida, deveremos determinar $\frac{\partial}{\partial x^\mu}(D_\nu V^\alpha)$ e $\frac{\partial}{\partial x^\nu}(D_\mu V^\alpha)$, mas para simplificarmos notação, assumiremos que $\frac{\partial}{\partial x^q} = \partial_q$, portanto teremos:

$$\partial_\mu(D_\nu V^\alpha) = \partial_\mu \partial_\nu V^\alpha + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \partial_\mu V^\sigma \quad (4.23)$$

$$\partial_\nu(D_\mu V^\alpha) = \partial_\nu \partial_\mu V^\alpha + (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha) V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \partial_\nu V^\sigma \quad (4.24)$$

Agora, se substituirmos as equações (4.23) e (4.24) na expressão do comutador e

³Também podemos determinar a chamada derivada contravariante, que será dada por $\frac{\partial V_\alpha}{\partial q_\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda V_\lambda$

⁴A demonstração de (4.21) poderá ser encontrada no Apêndice B deste trabalho. Contudo, uma leitura complementar em [6], [7] ou em [8] é sugerida a todos aqueles que quiserem aprofundar-se mais no assunto.

teremos a seguinte solução:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]V^\alpha &= \partial_\mu \partial_\nu V^\alpha + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha)V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha D_\nu V^\sigma - \partial_\nu \partial_\mu V^\alpha + \\ &\quad - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha)V^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda D_\lambda V^\alpha - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha D_\mu V^\sigma \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a equação (4.21) obtém-se a equação do comutador do grupo, como segue:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]V^\alpha &= \partial_\mu \partial_\nu V^\alpha + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha)V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\alpha V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \partial_\nu V^\sigma + \\ &\quad + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - \partial_\nu \partial_\mu V^\alpha - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha)V^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda V^\alpha + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\alpha V^\sigma + \\ &\quad - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V^\lambda \end{aligned}$$

Entretanto, para facilitar na visualização do que estamos buscando, vamos fazer os devidos cancelamentos e reorganizaremos os termos desta equação para que fique mais agradável. Também utilizaremos a propriedade de dos símbolos de Christoffel que determina que $\Gamma_{jk}^i \Gamma_{lm}^k V^m = -\Gamma_{lm}^k \Gamma_{jk}^i V^k$ para os termos $\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda$ e $-\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V^\lambda$, assim obtém-se que:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha)V^\sigma - (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)(\partial_\lambda V^\alpha + \Gamma_{\lambda\sigma}^\alpha V^\sigma)$$

$$[D_\mu, D_\nu]V^\alpha = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha)V^\sigma - (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)D_\lambda V^\alpha \quad (4.25)$$

Como pode ser visto em [6] e em [8], temos que o *tensor de Riemann* (ou tensor de Riemann-Christoffel), o qual descreve a curvatura no espaço-tempo, e será determinado pela seguinte equação tensorial:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \quad (4.26)$$

Podemos perceber também que teremos um tensor que irá representar a torção do nosso espaço-tempo, sendo dado por:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (4.27)$$

É facilmente perceptível que podemos substituir (4.26) e (4.27) em (4.25) e então teremos que o comutador do grupo resultará em:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\alpha_{\sigma\mu\nu}V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu}D_\lambda V^\alpha$$

Este resultado é extremamente importante porque nos mostra qual a origem da curvatura e da torção no espaço-tempo. Contudo, como já foi mencionado nesta seção, estaremos trabalhando com um espaço sem curvatura, portanto podemos os símbolos de Christoffel em (4.27) deverão se anular, uma vez que eles deverão ser invariantes em relação a uma simples permutação nos subíndices. Assim, a relação de comutação que utilizaremos neste caso será:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\alpha_{\sigma\mu\nu}V^\sigma \quad (4.28)$$

4.3 O Grupo de Poincaré

O grupo de Poincaré, como foi dito ao fim da seção (3.3), é um grupo matemático no qual se incluem os dois grupos matemáticos estudados anteriormente, sendo eles o grupo de Lorentz e o grupo de translações em um espaço-tempo plano (seções (4.1) e (4.2.1), respectivamente). Este grupo nos introduz uma simetria extremamente abrangente, conhecida como *simetria de Poincaré*, a qual inclui as mesmas simetrias que os dois subgrupos citados, isto é, inclui as simetrias de rotação, translação e as transformações de Lorentz.[9]

É importante ressaltar que o grupo de Poincaré também está inserido no espaço de Minkowski, de forma que ele é a solução para as equações de campo gravitacional de Einstein⁵.

Logo, é fácil perceber que o grupo de Poincaré irá possuir os comutadores (4.15) e (4.20), calculados previamente neste trabalho. Além disso, também deveremos calcular os comutadores entre os operadores infinitesimais do grupo de Lorentz e do grupo de translações em um espaço plano, ou seja, deveremos calcular $[P_\mu, X_\nu]$ e $[P_\mu, Y_\lambda]$. Contudo, vale ressaltar que no grupo de Poincaré as matrizes de rotação são de quinta ordem (ou seja, 5×5) para que possamos fazer o cálculo utilizando a relação (4.17), deste modo, iremos calcular apenas os comutadores em P_X , X_Y e Y_X , uma vez que as soluções das demais relações podem ser encontrada de forma análoga.[5]

Assim, podemos calcular os comutadores entre $[P_X, X_Y]$ da seguinte forma:

⁵As Equações de Campo de Einstein podem ser encontradas em [3], contudo uma breve introdução a elas será feita no Capítulo 5.

$$\begin{aligned}
[P_X, X_Y] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[P_X, X_Y] &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_Z \quad (4.29)
\end{aligned}$$

E, ao calcularmos $[P_X, Y_X]$ chegaremos ao resultado (4.30):

$$\begin{aligned}
[P_X, Y_X] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
[P_X, Y_X] &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_t \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Onde P_t é uma translação envolvendo o eixo do tempo. De forma análoga à comutação apresentada na equação (4.30), podemos calcular todos os comutadores entre translações e rotações e os comutadores entre translações e as transformações de Lorentz. Por fim, como já foi comentado anteriormente teremos que a álgebra do grupo de Poincaré deverá ser descrita por (4.15), (4.20) e também pelas relações (4.31) e (4.32) que serão mostradas a seguir.

Primeiramente, as relações de comutação $[P_\mu, X_\nu]$ deverão resultar nos seguintes valores:

$$[P_X, X_X] = 0 \ ; \ [P_X, X_Y] = P_Z \ ; \ [P_X, X_Z] = -P_Y$$

$$[P_Y, X_X] = -P_Z \ ; \ [P_Y, X_Y] = 0 \ ; \ [P_Y, X_Z] = P_X$$

$$[P_Z, X_X] = P_Y ; [P_Z, X_Y] = -P_X ; [P_Z, X_Z] = 0 \quad (4.31)$$

$$[P_t, X_X] = 0 ; [P_t, X_Y] = 0 ; [P_t, X_Z] = 0$$

Notemos que estas relações demonstram como a translação em um espaço-tempo plano e as rotações envolvendo apenas os eixos espaciais deverão se comportar. Em seguida, podemos encontrar os comutadores envolvendo as mesmas translações, podem ser obtidos utilizando-se as transformações de Lorentz, portanto, teremos:

$$[P_X, Y_X] = P_t ; [P_X, Y_Y] = 0 ; [P_X, Y_Z] = 0$$

$$[P_Y, Y_X] = 0 ; [P_Y, Y_Y] = P_t ; [P_Y, Y_Z] = 0$$

$$[P_Z, Y_X] = 0 ; [P_Z, Y_Y] = 0 ; [P_Z, Y_Z] = P_t \quad (4.32)$$

$$[P_t, Y_X] = -P_X ; [P_t, Y_Y] = -P_Y ; [P_t, Y_Z] = -P_Z$$

Com todas as relações de comutação em mãos, poderemos partir para uma abordagem mais simplificada, de forma que usaremos um símbolo antissimétrico, conhecido como *símbolo de Levi-Civita*⁶ para generalizar todos os comutadores em duas elegantes relações. Contudo, antes de escrevermos tais relações, é necessário estabelecer o um termo geral, assim como o tensor métrico do grupo.

Primeiro estaremos definindo o termo geral das comutações, que será dado por:

$$L_{\mu\nu} \rightarrow \begin{cases} L_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma \\ L_{\alpha t} = -Y_\alpha \end{cases}$$

Onde μ e ν podem assumir coordenadas temporais e espaciais (x, y, z e t), os índices α, β e γ devem assumir apenas valores espaciais e o termo $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ é o símbolo de Levi-Civita. Este símbolo possui algumas propriedades com relação aos seus índices, as quais serão exploradas para determinarmos qual elemento do grupo irá ser utilizado no comutador. Para isso, deveremos utilizar as regras a baixo, a fim de determinar o sinal que será utilizado por $L_{\mu\nu}$.

⁶Os símbolos de Levi-Civita, assim como suas propriedades, podem ser encontrados e estudados de forma mais aprofundada em [10].

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1 & \text{Se a permutação dos índices } \alpha, \beta, \gamma \text{ for cíclica.} \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -1 & \text{Se a permutação dos índices } \alpha, \beta, \gamma \text{ não for cíclica.} \\ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0 & \text{Se houver índices } \alpha, \beta, \gamma \text{ repetidos.} \end{cases}$$

Em seguida, iremos utilizar a métrica do espaço-tempo $\eta_{\mu\nu}$, a qual é análoga à que foi definida nas seções (3.3) e (4.1). Isto é, teremos que utilizar as matrizes de forma a diferenciar componentes espaciais e temporais. Portanto teremos as seguintes regras:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \begin{cases} \eta_{\mu\nu} = 1 & \text{Índices de coordenadas espaciais idênticos: } \mu = \nu = x, y \text{ ou } z. \\ \eta_{\mu\nu} = -1 & \text{Índices de coordenadas temporais idênticos: } \mu = \nu = t. \\ \eta_{\mu\nu} = 0 & \text{Índices diferentes: } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Com estes termos em mãos podemos generalizar os comutadores estudados, como foi proposto anteriormente. Logo, como pode ser visto em [9], [11] e [12], as equação que generalizam os comutadores são dadas da seguinte maneira⁷:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} \quad (4.33)$$

$$[P_\mu, L_{\rho\sigma}] = -(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \quad (4.34)$$

$$[P_q, P_{q'}] = 0 \quad (4.35)$$

Por fim, temos que os comutadores do grupo de Poincaré estão determinados por (4.33), (4.34) e (4.35).

⁷Vale a pena destacar que em [9] e em [11] as equações são multiplicadas um termo imaginário por estarem levando em conta a teoria quântica, o que não ocorre em [12] ou neste trabalho.

Capítulo 5

O Grupo de De Sitter

Caso a nossa translação seja feita em um espaço-tempo curvo, como mostrado na figura 4.5, não estaremos trabalhando no espaço de Minkowski, mas no chamado *espaço-tempo de De Sitter* [13]. Portanto, não pode-se utilizar o grupo de Poincaré, estudado na seção 4.3, sendo necessário adotar com um novo grupo de simetria, denominado *Grupo de De Sitter*.

5.1 As Equações de Campo de Einstein

Antes de iniciarmos os estudos sobre o grupo de De Sitter, é interessante apresentarmos uma breve introdução sobre as *equações de campo de Einstein*. A Teoria da Relatividade Geral (TRG) é uma teoria tensorial, desta forma, as equações apresentadas nesta seção são equações tensoriais, as quais estão correlacionadas pelo *tensor de Einstein*¹. Este tensor pode é definido por duas igualdades:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Com G sendo a constante de gravitação universal e c a velocidade da luz no vácuo. Em seguida, também definimos que:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right) g_{\mu\nu} \quad (5.2)$$

Onde teremos que as equações (5.1) e (5.2) podem ser igualadas, o que nos leva à seguinte equação:

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right) g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

¹A dedução deste tensor pode ser encontrada em [6].

Assim, a equação (5.3) é a equação de campo da TRG, podendo ser encontrada em [14]. No lado esquerdo da equação temos termos de curvatura do espaço, onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, o qual é uma contração do tensor de Riemann encontrado em (4.26), R é um termo denominado *escalar de curvatura* [6] e Λ é conhecida como a constante cosmológica. Entretanto, no lado esquerdo da equação temos os termos de matéria-energia, ou seja, κ é a *constante gravitacional de Einstein* e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

Nota-se também que, caso os tensores são simétricos, nosso problema pode ser simplificado consideravelmente, uma vez que não é mais preciso solucionar 16 equações diferenciais (por conta das matrizes 4×4), mas apenas 10. Como pode ser encontrado em [14], a equação simétrica em sua forma matricial seria:

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{01} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{02} & R_{12} & R_{22} & R_{23} \\ R_{03} & R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} (R - \Lambda) =$$

$$= -\frac{8\pi G}{c^4} \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{01} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{02} & T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{03} & T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Assim sendo, na ausência de matéria, nota-se que o lado esquerdo da equação (onde temos os termos de matéria-energia) deve ser zero por que o tensor $T_{\mu\nu} = 0$. Em [14] também define-se que:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) + g_{\mu\nu} \Lambda \quad (5.5)$$

Deste modo, se utilizarmos a definição (5.5) em (5.4) quando $T_{\mu\nu} = 0$, teremos que:

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda \quad (5.6)$$

Ou seja, a equação (5.6) mostra explicitamente que, caso haja uma constante cosmológica Λ diferente de zero, teremos uma curvatura independente da massa.

5.2 Características do Grupo de De Sitter e Anti-De Sitter

Agora que conhecemos as equações (5.3) e (5.4) podemos entender a grande diferença entre o último grupo estudado e o que iremos iniciar a estudar agora. O grupo de Poincaré é descrito utilizando o espaço-tempo de Minkowski, ou seja, um espaço tempo sem

curvaturas. Esta afirmativa nos leva a acreditar que na ausência de massa (isto é, na ausência de gravidade) a curvatura dada por $R_{\mu\nu}$ deve ser zero, o que indica que a constante gravitacional Λ também deve ser zero, uma vez que devemos satisfazer a relação (5.6).

Contudo, quando a constante gravitacional é diferente de zero, como já foi explicada ao fim da seção (4.2.1), teremos uma curvatura independente da presença de massa, desta forma o espaço-tempo de Minkowski não tem mais o seu significado físico, forçando-nos a encontrar uma nova solução para o problema.[13]

Utilizaremos um novo espaço-tempo, o qual é denominado por *espaço de De Sitter* ou *espaço-tempo de Anti-De Sitter*. Ambos são espaços curvos de 5 dimensões representadas por hiperesferas, contudo possuem métricas distintas, o que irá ocasionar em curvaturas distintas [13][15]. É importante ressaltar o que foi dito acima, enfatizando que no limite quando a curvatura do espaço é zero, a solução de Minkowski volta a valer, de forma que o grupo de Poincaré se torna novamente o grupo que descreverá o espaço-tempo.

Portanto, de acordo com o tipo da curvatura, teremos algumas características do espaço-tempo específicas [15]. Se a curvatura do espaço-tempo for positiva, estaremos atuando em um espaço-tempo de De Sitter, de forma que a métrica será dada por:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso o espaço-tempo possua curvatura negativa, estaremos atuando em um espaço-tempo de Anti-De Sitter, o qual deverá ter a seguinte métrica:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E, finalmente em ultimo caso, sendo a curvatura nula como já foi dito acima, iremos voltar ao espaço-tempo de Minkowski e as equações serão as mesmas descritas nas seções anteriores.

Assim como o grupo de Poincaré é uma junção do grupo de Lorentz e do grupo de translações usuais, os grupos de De Sitter e Anti-De Sitter serão junções do grupo de Lorentz e do com o grupo de translações em um espaço-tempo com curvatura, desta maneira, é possível determinar que as relações de comutação desde grupos serão análogas às encontradas em (4.33) e (4.34), onde a diferença entre elas será dada pela métrica do espaço-tempo. Contudo, quando levarmos em conta o comutador de duas translações no espaço tempo, iremos utilizar a equação (4.28) encontrada na seção (4.2.2).

Assim sendo, teremos que as relações de comutação deverão ser dadas por²:

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} \quad (5.7)$$

$$[D_\mu, S_{\rho\sigma}] = -(\eta_{\mu\rho}D_\sigma - \eta_{\mu\sigma}D_\rho) \quad (5.8)$$

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\alpha_{\sigma\mu\nu}V^\sigma \quad (5.9)$$

Contudo, o tensor de Riemann ($R^\alpha_{\sigma\mu\nu}$) encontrado em (5.9) pode sofrer uma contração por conta do tensor métrico, de forma que ele se torna um tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$). Este último, por sua vez, pode ser contraído novamente para um escalar de curvatura R , o qual irá determinar o tipo de curvatura de nosso espaço-tempo.

Desta maneira, a curvatura do espaço será dada da seguinte forma:

$$\begin{cases} R > 0 & \text{Se a curvatura do espaço é positiva, teremos um espaço em expansão.} \\ R < 0 & \text{Se a curvatura do espaço é negativa, teremos um espaço em contração.} \\ R = 0 & \text{Se a curvatura do espaço é zero, teremos um espaço Minkowskiano.} \end{cases}$$

Ou seja, em um espaço-tempo com curvatura diferente de zero teremos um espaço que pode estar em expansão ou em contração, de acordo com o seu valor de curvatura escalar. Esta expansão se dá por conta da geometria do espaço que, como foi dito acima, são uma hiperesferas 5-dimensionais. Contudo, no limite onde a curvatura é nula, deveremos ter o espaço de Minkowski, o qual é solução para a equação de campo de Einstein (5.3) quando a constante cosmológica Λ for nula, isto é, a curvatura do espaço for zero.

Portanto, o grupo de De Sitter nada mais é do que um grupo de movimento que descreve um espaço-tempo curvo, porém localmente euclidiano. Desta forma, podemos construir uma nova teoria da relatividade, denominada *Relatividade especial de De Sitter* [13], a qual leva em conta estas novas características do espaço e as relações de comutação (5.7), (5.8) e (5.9).

²Estas relações de comutação podem ser encontradas em [13] e [15]

Capítulo 6

Conclusões

Os grupos de movimento estudados neste trabalho evidenciam a existência de diversos sistemas simétricos na física, em especial, na relatividade. Os grupos de rotação, por exemplo, podem atuar como rotações em torno de eixos espaciais (x, y, z) ou temporais (t) , de forma a assegurar que as simetrias comentadas no começo do trabalho (simetrias espaciais e simetrias temporais) podem ser encontradas em sistemas extremamente simples.

A junção de diversos grupos de simetria pode gerar grupos mais abrangentes, como o denominado grupo de Poincaré, o qual se encontra no espaço-tempo de Minkowski e é solução das equações de campo de Einstein.

Contudo, ao introduzirmos a constante cosmológica Λ às equações de Einstein, poderemos encontrar valores onde $\Lambda \neq 0$, de forma que teremos um espaço-tempo cuja curvatura é independente da massa. Sendo assim, o grupo de Poincaré deixa de ser solução para a equação de campo gravitacional de Einstein e então passamos a assumir um espaço-tempo curvo, conhecido como espaço de De-Sitter (ou espaço de Anti-De Sitter) no lugar do espaço de Minkowski até então utilizado. Estes novos espaços métricos estão associados a dois novos grupos de simetria, denominados grupo de De Sitter e grupo de Anti-De Sitter.

Portanto é possível determinar a curvatura intrínseca ao espaço-tempo de De Sitter de acordo com uma grandeza denominada curvatura escalar (R). Esta nova grandeza está intimamente relacionada com o tensor de curvatura do espaço $R^\alpha_{\sigma\mu\nu}$.

Desta forma, podemos diferenciar as Relatividades de Einstein e de De Sitter, uma vez que a primeira tem o espaço de Minkowski como solução, sendo sua curvatura será dada exclusivamente pelas massas gravitacionais. Por outro lado, a relatividade de De Sitter possui o espaço de De Sitter como solução, de forma que o espaço-tempo terá uma curvatura intrínseca e independente de qualquer massa gravitacional.

Contudo, é importante lembrar que, apesar da relatividade de De Sitter não precisar de massa para a curvatura do espaço-tempo, ela também está sujeita às alterações feitas pelas massas gravitacionais. Logo, é possível utilizar esta nova solução da equação de

Einstein para criar modelos matemáticos que descrevam a evolução do universo, tentando associar a curvatura do espaço-tempo aos efeitos causados pela matéria escura, da mesma forma, a expansão (ou contração) do universo pode ser utilizada para modelar a energia escura.

Apêndice A

Dedução da equação de rotação em $\mathcal{R}_3$

Na seção 2.3.2 nós introduzimos as equações que iriam determinar as rotações em torno de um eixo qualquer r de um espaço tridimensional. Contudo, por ser uma dedução com certo grau de facilidade, iremos reproduzir a demonstração das equações da forma mais natural possível. Portanto usaremos a figura (A.1) abaixo para ilustrar nosso problema proposto.

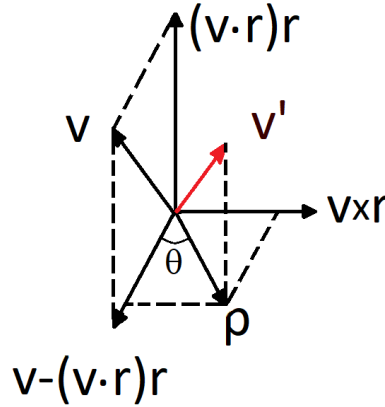


Figura A.1: Rotação em torno de um eixo qualquer r .

Para descrevermos uma rotação do vetor $\vec{v}$ em torno de um eixo qualquer r teremos que construir uma base de coordenadas como na figura acima, de forma que $\vec{v}$ será o vetor que será rodado, $(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$ deverá ser a componente do vetor $\vec{v}$ paralela ao eixo $\vec{r}$. O vetor $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$ deve ser a componente perpendicular ao eixo $\vec{r}$ e, por fim, para encontrarmos um vetor perpendicular aos dois encontrados anteriormente utilizaremos um produto vetorial, de modo que teremos $(\vec{v} \times \vec{r})$ [16].

Nota-se que o vetor $\vec{\rho}$ é uma projeção do vetor $\vec{v}'$ no plano composto por $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$ e $(\vec{v} \times \vec{r})$ [16]. Dessa maneira, podemos assumir que:

$$\vec{\rho} = (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}) \cos(\theta) + (\vec{v} \times \vec{r}) \sin(\theta) \quad (\text{A.1})$$

Tendo estes eixos em mente, se rotacionarmos $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$ com um ângulo θ em

torno de $(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$ teremos o vetor ρ [16]. Logo, se analisarmos a figura A.1, é fácil de concluir que:

$$\vec{v}' = \vec{\rho} + (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.1) em (A.2) teremos:

$$\vec{v}' = (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r})\cos(\theta) + (\vec{v} \times \vec{r})\sin(\theta) + (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r}$$

Esta equação pode ser rearranjada de forma a chegarmos a:

$$\vec{v}' = \cos(\theta)\vec{v} + (1 - \cos(\theta))(\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{r} + \sin(\theta)(\vec{v} \times \vec{r}) \quad (\text{A.3})$$

Onde (A.3) é uma equação análoga à encontrada na seção (2.3.2).

Apêndice B

Derivada Covariante

Na *Seção 4.2.1* deste trabalho é introduzido o conceito de *Derivada Covariante*, contudo a utilização da equação deixa a desejar quanto a sua explicação, portanto iremos fazer uma breve demonstração sobre a mesma, de forma a facilitar seu entendimento.

B.1 Movimento de uma partícula em uma superfície bidimensional

Primeiramente, deveremos descrever o movimento de uma partícula em uma superfície bidimensional curvilínea, a qual pode ser vista na figura abaixo:

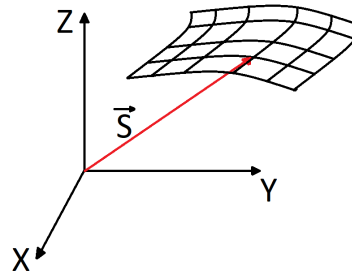


Figura B.1: Partícula em um plano bidimensional curvilíneo.

Na figura acima, o plano possui coordenadas generalizadas $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$, o que determina que a métrica do sistema será dada por $\hat{v}_i \cdot \hat{v}_j = g_{mj}$. A partícula se encontra em um ponto qualquer (q^1, q^2) marcado pelo vetor posição $\vec{S}$ e possui uma velocidade qualquer $\vec{\dot{S}}$.

Neste caso, assumiremos a partícula com energia potencial nula em relação ao espaço, portanto a *Lagrangeana* ([2] e [17]) do sistema deverá ser possuir apenas a componente de energia cinética. Portanto, o deslocamento sobre o plano deve ser dado por:

$$d\vec{S} = \hat{v}_1 q^1 + \hat{v}_2 q^2$$

Consequentemente:

$$\vec{S} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \sum_{i=1}^2 \hat{v}_i \dot{q}^i$$

Logo, a Lagrangeana do sistema será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m \vec{S}^2 = \frac{1}{2} m \sum_{i,j=1}^2 \hat{v}_i \hat{v}_j \dot{q}^i \dot{q}^j \\ \mathcal{L} &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} m g_{mj} \dot{q}^i \dot{q}^j \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Portanto, podemos jogar a equação (B.1) na equação de Euler-Lagrange ([2] e [17]) abaixo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$$

Por fim, após calcularmos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}$ e $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right)$ chegaremos ao seguinte resultado¹:

$$\sum_{j=1}^2 g_{mj} \ddot{q}^j + \sum_{k,j=1}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^m} \right) \dot{q}^k \dot{q}^j = 0$$

Onde $m = 1, 2$. Por fim, para terminarmos a primeira parte de nossa demonstração, sabendo que $g^{\alpha m} g_{mj} = \delta_j^\beta$, multiplicamos toda a equação por $g^{\alpha m}$ e então teremos o seguinte:

$$\ddot{q}^m + \sum_{k,j=1}^2 \frac{1}{2} g^{\alpha m} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^m} \right) \dot{q}^k \dot{q}^j = 0 \quad (\text{B.2})$$

Portanto, podemos comparar a equação (B.2) com a equação (4.22), teremos que:

$$\ddot{q}^m + \sum_{k,j=1}^2 \Gamma_{jk}^\alpha \dot{q}^k \dot{q}^j = 0 \quad (\text{B.3})$$

B.2 A derivada covariante

Por fim, iremos demonstrar que a derivada covariante deve seguir a equação descrita na equação (4.21). Assim, nós iremos utilizar o mesmo espaço representado na figura (B.1) e assumiremos que há a curvatura é tênue o suficiente para que possamos determinar um plano tangente em cada ponto do espaço.

¹Nota-se que em alguns casos, uma mudança nos índices mudos das métricas foi necessária para que as relações fossem calculadas sem confusões.

Portanto, definimos um vetor sobre a superfície do nosso espaço, o qual deve ser expresso em termos dos elementos de base por $V = V^\mu \hat{v}_\mu$, onde

$$\hat{v}_\mu = \frac{\partial}{\partial q_\mu}$$

portanto, agora podemos decompor o vetor V na base local, o que irá nos dar a seguinte expressão:

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu} = \frac{\partial(V^\beta \hat{v}_\beta)}{\partial q_\mu} = \frac{\partial V^\beta}{\partial q_\mu} \hat{v}_\beta + V^\beta \frac{\partial \hat{v}_\beta}{\partial q_\mu}$$

Portanto, como temos a derivada de um vetor, teremos que os dois termos resultantes também devem ser vetores, desse modo:

$$\frac{\partial \hat{v}_\beta}{\partial q_\mu} = \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{v}_\alpha \quad (\text{B.4})$$

onde $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$ é o conhecido Símbolo de Christoffel. Portanto, agora podemos substituí-lo em nossa expressão da derivada e teremos:

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu} = \frac{\partial V^\beta}{\partial q_\mu} \hat{v}_\beta + V^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \hat{v}_\alpha$$

mas como β é um índice mudo, podemos transformá-lo em outro qualquer, de forma que:

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial q_\mu} \hat{v}_\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda \hat{v}_\alpha = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial q_\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda \right) \hat{v}_\alpha$$

Ou seja, a equação entre parenteses é a derivada que leva em conta os termos associados a $\hat{v}_\alpha$, ou seja, a derivada destas componentes devem ser dadas por:

$$D_\mu V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial q_\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha V^\lambda \quad (\text{B.5})$$

Como resultado, temos que a equação (B.5) é idêntica à equação (4.21). Vale ressaltar que a equação (B.4) pode ser provada ao utilizar a equação para calcular uma a variação sobre uma linha geodésica, a qual terá como resultado a equação (B.3) calculada anteriormente².

²As deduções feitas no apêndice podem ser encontradas em [6] é importante ressaltar que algumas das equações foram calculadas utilizando o programa *Wolfram Mathematica 7*.

Referências Bibliográficas

- [1] ELLIOT J. P. ; DAWBER P. G. ; *SYMMETRY IN PHYSICS*, 1. ed., vol 1. Nova Iorque: Oxford University Press, 1979.
- [2] ARFKEN G. ; *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS*, 3. ed., Oxford: Academic Press, 1985.
- [3] LANDAU L. D. ; LIFSHITZ E. M., *COURSE OF THEORETICAL PHYSICS, THE CLASSICAL THEORY OF FIELDS*, 4. ed., vol 2. Oxford: Butterworth Heinemann, 1975.
- [4] SCHUTZ B. ; *A FIRST COURSE IN GENERAL RELATIVITY*, 2. ed., Nova Iorque: Cambridge University Press, 2009.
- [5] ELLIOT J. P. ; DAWBER P. G., *SYMMETRY IN PHYSICS*, 1. ed., vol 2. Brighton: Macmillan Publishers LTD, 1984.
- [6] WALECKA J. D. ; *INTRODUCTION TO GENERAL RELATIVITY*, 1. ed., Singapura:World Scientific Publishing Company, 2007.
- [7] CATTANI M. ; *DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA TEORIA DA GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN EM UM CURSO DE GRADUAÇÃO*, publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física. 11 folhas, vol. 20, número 1, março, 1998.
- [8] ALTMAN. W. ; *PHYSICAL COMPONENTS OF TENSORS*, 1. ed., Nova Iorque: Crc Press, 2014.
- [9] LEV F. M. ; *DE SITTER SYMMETRY AND QUANTUM THEORY*, publicado na Physical Review D 85, 065003. 8 folhas. 5 de março, 2012. (DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.065003>)
- [10] RUTHERFORD A. ; *VECTORS, TENSORS AND THE BASIC EQUATIONS OF FLUID MECHANICS*, 2. ed., Nova Iorque: Dover Publications, INC, 1989
- [11] WEINBERG. S. ; *THE QUANTUM THEORY OF FIELDS*, 1. ed., vol 1. Nova Iorque: Cambridge University Press, 1995.

- [12] GUO H. Y. ; HUANG C. G. ; XU Z. ; ZHOU B. ; *ON SPECIAL RELATIVITY WITH COSMOLOGICAL CONSTANT*, (arXiv:hep-th/0403171) , 10 de março de 2004. (DOI: 10.1016/j.physleta.2004.08.036)
- [13] ALDROVANDI R. ; ALMEIDA J. P. B. ; PEREIRA J. G. ; *DE SITTER SPECIAL RELATIVITY*, (arXiv:gr-qc/0606122) , 8 de fevereiro 2007. (DOI: 10.1088/0264-9381/24/6/002)
- [14] SOARES D. ; *OS FUNDAMENTOS FÍSICO-MATEMÁTICOS DA COSMOLOGIA RELATIVISTA*, publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física. 6 folhas, vol. 35, número 3, setembro, 2013.
- [15] AYALA M. ; HAASE R. ; *$OSp(N/4)$ GROUP AND THEIR CONTRACTIONS TO $P(3, 1) \times GAUGE$* , (arXiv:hep-th/0102030), 7 de fevereiro 2001.
- [16] BOULOS P. ; CAMARGO I. ; *GEOMETRIA ANALÍTICA, UM TRATAMENTO VETORIAL*, 3. ed., São Paulo: Pearson Education, 2005.
- [17] TAYLOR J. R. ; *MECÂNICA CLÁSSICA*, Porto Alegre: Bookman, 2013.