



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

ESTUDO DE INCERTEZAS EM FENÔMENOS FÍSICOS VIA TEORIA DE
CONJUNTOS FUZZY

Yngrid Zacharias Delgato

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques

Rio Claro (SP)

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

YNGRID ZACHARIAS DELGATO

ESTUDO DE INCERTEZAS EM FENÔMENOS FÍSICOS VIA TEORIA
DE CONJUNTOS FUZZY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel e Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques.

Rio Claro (SP)

2022

D352e	Delgato, Yngrid Zacharias Estudo de incertezas em fenômenos físicos via teoria de conjuntos fuzzy / Yngrid Zacharias Delgato. -- Rio Claro, 2022 52 p. : il. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado e licenciatura - Física) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientador: Vinícius Francisco Wasques 1. Física. 2. Termodinâmica. 3. Equação do calor. 4. Princípio de extensão de Zadeh. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

YNGRID ZACHARIAS DELGATO

ESTUDO DE INCERTEZAS EM FENÔMENOS FÍSICOS VIA
TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel e Licenciada em Física.

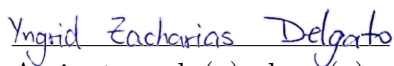
Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Rio Claro, 04 de fevereiro de 2022.


Assinatura da(o) aluna(o)


Assinatura da(o) orientadora(o)

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2021/03896-1, por ter possibilitado a realização do projeto na modalidade Auxílio à Pesquisa Regular, que foi a principal base para a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Este trabalho só pode ser concluído por conta de pessoas que me deram apoio e contribuíram de alguma forma para sua realização.

Dito isso, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Vinícius Francisco Wasques, pela paciência ao me transmitir o seu conhecimento, por toda contribuição, o apoio, motivação e incentivo que me foi dado do início ao fim deste trabalho.

Aos meus pais, Marlene Delgato e Eduardo Zacharias Delgato pelo apoio e incentivo que me deram desde o início de minha graduação.

A Deus, por me iluminar e me manter sã.

RESUMO

Neste trabalho são abordados conceitos de Teoria de Conjuntos Fuzzy e dados exemplos para melhor compreensão da teoria. Desta maneira, esse estudo se dedica a aplicar os conceitos da teoria de conjuntos fuzzy em fenômenos físicos termodinâmicos, visto que esses processos incorporam incertezas através de sua condição inicial. Tais fenômenos são descritos por equações diferenciais e as incertezas associadas as condições iniciais, de contorno ou parâmetro do modelo são modeladas por números fuzzy. O foco desse estudo é na equação de calor, em que o parâmetro de difusão de calor e condições inicial são dados por números fuzzy. A partir do princípio de extensão a solução da equação diferencial é estendida e a incerteza é explorada ao longo do processo.

Palavras-chave: Números Fuzzy; Princípio de Extensão de Zadeh; Termodinâmica; Equação do Calor.

ABSTRACT

In this work concepts of Fuzzy Set Theory are discussed and examples are given for a better understanding of the theory. In this way, such concepts are applied in thermodynamic physical phenomena, since these processes incorporate uncertainties through their initial condition, as well as in the parameters of the model. Such phenomena are described by differential equations and the uncertainties associated with the initial or the parameters are modeled by fuzzy numbers. The focus of this study is on the heat equation, where the thermal diffusion coefficient and initial conditions are given by fuzzy numbers. From the extension principle, the solution of the differential equation is extended and the uncertainty is explored throughout the process.

Keywords: Fuzzy Numbers; Zadeh's Extension Principle; Thermodynamics; Heat Equation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Números próximos de 1, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	14
Figura 2 – Gráfico de φ_A com corte em $\alpha = 0,5$	16
Figura 3 – Gráfico da função pertinência do conjunto $A \cap B$, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	18
Figura 4 – Gráfico da função pertinência do conjunto C , em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	18
Figura 5 – Gráfico da função pertinência do conjunto D , em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	19
Figura 6 – Representação do número fuzzy triangular $(a; u; b)$, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	20
Figura 7 – Representação do número fuzzy trapezoidal $(a; b; c; d)$, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	20
Figura 8 – Representação do número fuzzy em forma de sino, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$	21
Figura 9 – Representação de uma barra colocada sobre o eixo x	25
Figura 10 – Esquema com a representação da transferência de calor em uma barra aquecida	31
Figura 11 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica intervalar do alumínio $[0,76; 0,96]$	34
Figura 12 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica intervalar do cobre $[1,04; 1,24]$	35
Figura 13 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica intervalar da prata $[1,61; 1,81]$	36
Figura 14 – Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, no caso em que o coeficiente de difusão térmica é do tipo intervalar	37
Figura 15 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh com o coeficiente de difusão térmica do alumínio como número fuzzy triangular $(0,76; 0,86; 0,96)$	39
Figura 16 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh com o coeficiente de difusão térmica do cobre como número fuzzy triangular $(1,04; 1,14; 1,24)$	40

Figura 17 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh com o coeficiente de difusão térmica da prata como número fuzzy triangular (1,61; 1,71; 1,81)	41
Figura 18 – Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, no caso em que o coeficiente de difusão térmica é um número fuzzy triangular . . .	43
Figura 19 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica do alumínio $K_a = 0,86cm^2/s$	45
Figura 20 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica do cobre $K_c = 1,14cm^2/s$	46
Figura 21 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica do prata $K_p = 1,71cm^2/s$	47
Figura 22 – Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, no caso em que a condição inicial é uma função fuzzy	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY	13
2.1	Conjuntos Fuzzy	13
2.2	Conceito de α-níveis	15
2.3	Números Fuzzy	17
2.3.1	Alguns tipos de números fuzzy	19
2.4	Princípio de Extensão de Zadeh	21
3	EQUAÇÃO DO CALOR	24
3.1	Dinâmica da condução do calor em uma barra	24
3.1.1	Condições inicial e de contorno	26
3.1.1.1	Tipos de condições de contorno	26
3.2	Método de Fourier	27
4	BARRA COM GRADIENTE DE TEMPERATURA	31
4.1	Equação do calor com incerteza associada ao coeficiente de difusão térmica	32
4.1.1	Solução com coeficiente de difusão térmica fuzzy do tipo intervalar	32
4.1.2	Solução com coeficiente de difusão térmica como um número fuzzy triangular	38
4.2	Equação do calor com incerteza associada a condição inicial	43
5	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

Introduzida em 1965 por Lotfi A. Zadeh, a teoria de conjuntos fuzzy consegue mostrar que um objeto pode pertencer a um conjunto com determinado grau de associação, sendo possível obter uma abordagem matemática e computacional da incerteza associada aos fenômenos da natureza.

Através dessa teoria, se pode construir uma subclasse de conjuntos fuzzy, intitulada de números fuzzy ($\mathbb{R}_F$), sendo o conceito de números reais estendido (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; WASQUES, 2015). Os números fuzzy tem relevante atuação no estudo de modelagem, a partir delas há a possibilidade de modelar fenômenos com parâmetros e/ou variáveis de estados inexatos descritos por números fuzzy.

Mediante tratamentos contidos na literatura, as soluções das Equações Diferenciais Fuzzy podem ser tratadas por meio de extensões de soluções clássicas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs) para soluções fuzzy (MIZUKOSHI *et al.*, 2007). Essa abordagem é dada através do princípio de extensão de Zadeh (ZADEH, 1975) ou do princípio de extensão sup- J (FULLÉR; MAJLENDER, 2004).

Os problemas que envolvem EDOs ou EDPs, mediante a parâmetros ou condições iniciais e de contorno dados por números fuzzy são chamados de Equações Diferenciais Fuzzy (EDF). Para estes problemas pode ser dado um tratamento tanto analítico (KALEVA, 1987; ESMI *et al.*, 2021), quanto numérico (NIETO; KHASTAN; IVAZ, 2009; WASQUES *et al.*, 2020).

Este trabalho se dedica a um estudo analítico para EDFs. Em particular, EDFs que descrevem processos físicos na área de termodinâmica (TIPLER; MOSCA, 2011) e as consequências da abordagem através do princípio de extensão na teoria de EDFs. Mais especificamente é tratada a transferência de calor em uma barra, em que se considera a condição inicial da equação do calor como função fuzzy, para que dessa maneira, a incerteza associada seja modelada através de números fuzzy e estendida via princípio de extensão de Zadeh. Além disso é considerado também o caso em que o coeficiente de difusão térmico é dado por números fuzzy.

Resolver o problema da equação do calor, que considera incertezas do tipo fuzzy em suas condições, é um alvo de estudo que tem sido explorado por diversos pesquisadores. Na literatura pode-se encontrar diversos trabalhos que fornecem soluções analíticas e numéricas para uma equação do calor fuzzy. Gouyandeh et al. (GOUYANDEH *et al.*, 2017) propuseram uma solução analítica através da transformada de Fourier, considerando o conceito de derivada fuzzy. Pirzada e Vakaskar (PIRZADA; VAKASKAR, 2017) forneceram

uma solução fuzzy considerando a derivada de Seikkala. Wasques ([WASQUES, 2021](#)) propôs um método numérico que fornece uma aproximação da solução, estendendo o método clássico de diferenças finitas por meio de uma aritmética fuzzy interativa. Leite et al. ([LEITE et al., 2015](#)) forneceram uma solução analítica para equações de difusão fuzzy, estendendo a solução clássica do problema por meio do princípio de extensão de Zadeh. Além disso, apresentaram um estudo de estabilidade da solução. Este trabalho segue a linha do artigo ([LEITE et al., 2015](#)), isto é, o princípio de extensão de Zadeh também é utilizado para produzir uma solução para o problema. No entanto, a solução aqui apresentada é obtida por meio da extensão da solução clássica via método de Fourier, e dados reais são considerados na abordagem. Além disso, um estudo sobre a propagação da incerteza é fornecido, bem como a associação da mesma com propriedades particulares de cada material considerado.

2 TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY

2.1 CONJUNTOS FUZZY

Os conjuntos fuzzy são utilizados em tratamentos matemáticos para situações que necessitam de conceitos mais subjetivos, por se tratarem de situações em que não são tratados valores exatos e sim incertos ou imprecisos. Dessa forma, se faz necessária uma abordagem mais flexível, diferente da dos conjuntos clássicos, que são em si mais rígidos.

Por definição, um subconjunto fuzzy F de U , sendo U um conjunto clássico, é caracterizado por uma função φ_F dada por

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1],$$

sendo a função pertinência do subconjunto F .

Perceba que a definição de função de pertinência estende a definição da função característica, ou também chamada de indicadora, dada por

$$\chi_F : U \rightarrow \{0, 1\}.$$

Enquanto a função indicadora assume valores 0 ou 1, isto é, se um elemento x pertence ao conjunto F , então $\chi_F(x) = 1$ ou se x não pertence ao conjunto F , então $\chi_F(x) = 0$, a função de pertinência assume valores no intervalo $[0, 1]$. Isso significa que quanto mais próximo de 1 for $\varphi_F(x)$ maior é a pertinência de x ao conjunto F .

Em outras palavras, um conjunto fuzzy é uma generalização de um conjunto clássico. Então é razoável generalizar os conceitos da teoria conjuntista clássica, para a teoria conjuntista fuzzy.

A seguir definimos o conceito de suporte de um conjunto fuzzy. Sejam U um universo e F um subconjunto fuzzy de U , o suporte de F é dado por

$$\text{supp}F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}.$$

O $\text{supp}F$ pode ser visto como o conjunto de todos os elementos x que tem pertinência maior que zero, isto é, os elementos x que possuem algum grau de associação com o conjunto F , sendo estes o nosso alvo de estudo.

Exemplo 2.1 Tomando um conjunto fuzzy A em que

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 1\},$$

ao tomar números próximos de 1, se pode considerar que os números 1,025 e 3 cumprem a propriedade que representa esse conjunto, porém considerando que sua função pertinência

pode ser dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & \text{se } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

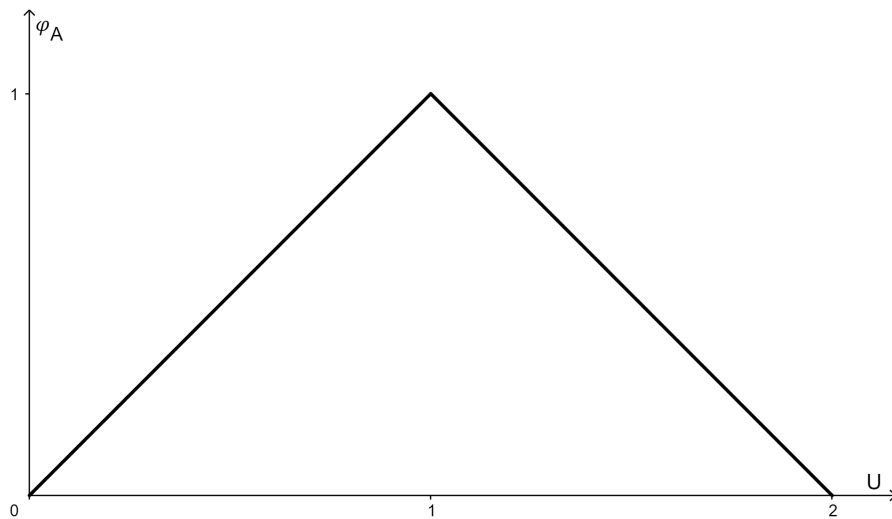
ao calcular o grau de pertinência para $x = 1,025$ e $x = 3$, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_A(1,025) &= 1 - |1,025 - 1| \Rightarrow \varphi_A(1,025) = 0,975. \\ \varphi_A(3) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, quando se considera o grau de pertinência obtido, se tem que 1,025 está próximo de 1, visto que seu grau de pertinência é 0,975, enquanto que 3 não está próximo de 1, levando em conta que seu grau de pertinência é 0. Conforme visto anteriormente, temos que a pertinência é dada por $\varphi_F : U \rightarrow [0, 1]$, então quanto mais próximo de 1 for o grau de pertinência mais próximo o valor obtido está do esperado e quanto mais próximo de 0 o valor obtido se encontra distante.

Dito isso, o seguinte gráfico é obtido quando considerada a função de pertinência de A

Figura 1 – Números próximos de 1, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$



Fonte: Produção da própria autora

Logo, se tem que $A = [0, 2]$ e $\text{supp}A = (0, 2)$, pois

$$\varphi_A(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - |x - 1| > 0 \Leftrightarrow 1 > |x - 1| \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2,$$

mostrando que $\text{supp}A \neq A$, nem sempre é válido para conjuntos fuzzy.

Tomando agora $\varphi_A(0,2)$ e $\varphi_A(0,8)$, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi_A(0, 2) &= 1 - |0, 2 - 1| \Rightarrow \varphi_A(0, 2) = 0, 2. \\ \varphi_A(0, 8) &= 1 - |0, 8 - 1| \Rightarrow \varphi_A(0, 8) = 0, 8.\end{aligned}$$

Logo, quando $x = 0, 2$ é visto que esse valor está mais distante de 1, enquanto que para $x = 0, 8$ se tem um número mais próximo de 1, isso pois seu grau de pertinência é maior quando comparado ao calculado anteriormente.

2.2 CONCEITO DE α -NÍVEIS

Um subconjunto fuzzy A de U pode ter seus elementos classificados através da organização de seus graus de pertinência. Essa classificação pode ser dada por meio de conjuntos clássicos.

Por definição, seja um subconjunto fuzzy A de U e $\alpha \in [0, 1]$, então o α -nível de A é o subconjunto clássico de U dado por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}, 0 < \alpha \leq 1.$$

Quando $\alpha = 0$, é tido que $[A]^0$ é definido como menor subconjunto fechado de U que contenha o suporte de A , ou seja, $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$, em que $\bar{Y}$ significa o fecho de um subconjunto $Y \subseteq U$.

Vale ressaltar que aqui está sendo considerado que U é um espaço topológico, e portanto, faz sentido considerar o fecho do conjunto.

Por definição, temos que um subconjunto fuzzy A é visto como normal se todos os seus α -níveis forem não vazios, ou seja, $[A]^1 \neq \emptyset$. Ainda, o núcleo de um subconjunto fuzzy A é definido pelos elementos que pertencem ao 1-nível de A , isto é, $[A]^1$. Em termos de interpretação, o núcleo de um número fuzzy é formado pelos elementos que possuem total associação ao subconjunto fuzzy A .

Exemplo 2.2 Para melhor visualização considere um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ dado por

$$\varphi_A = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2 - x, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

e definido seus α -níveis para em seguida tomar $\alpha = 0, 5$.

Para $0 < \alpha \leq 1$, se tem

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) \geq \alpha\}.$$

Logo, $x \in [0, 1]$ ou $x \in [1, 2]$.

Se $x \in [0, 1]$, então $\varphi_A(x) = x \geq \alpha$.

Se $x \in [1, 2]$, então $\varphi_A(x) = 2 - x \geq \alpha \Rightarrow x \leq -\alpha + 2$.

Então,

$$\alpha \leq x \leq -\alpha + 2,$$

portanto,

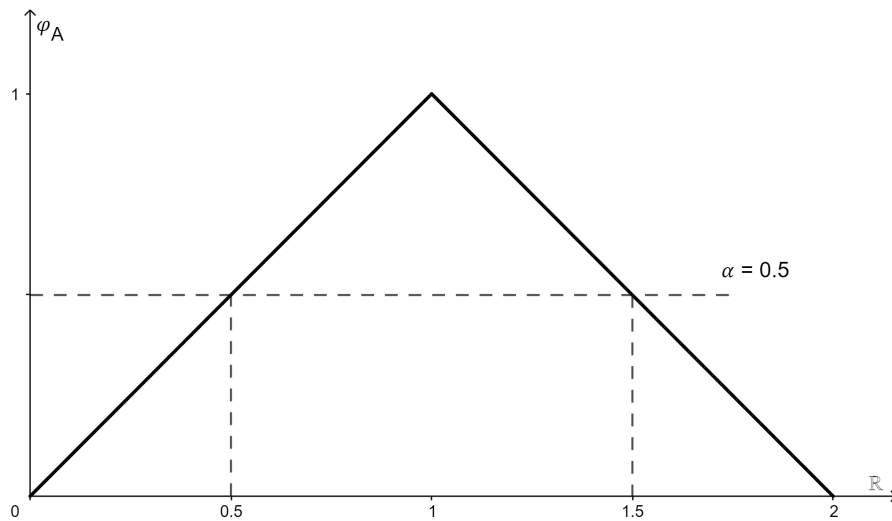
$$[A]^\alpha = [\alpha, -\alpha + 2],$$

fazendo $\alpha = 0,5$, se conclui

$$[A]^{0,5} = [0,5, 1,5].$$

Considerando $\alpha = 0,5$ no gráfico de φ_A , se obtém

Figura 2 – Gráfico de φ_A com corte em $\alpha = 0,5$



Fonte: Produção da própria autora

Conforme a Figura 2, é possível observar que apenas os valores acima do corte estão dentro do intervalo limitado no eixo x , enquanto que os valores abaixo do corte passam a não serem mais considerados, isto é, ao passar um corte somente os valores correspondentes a um $\alpha \geq 0,5$ são considerados. Com a abordagem por meio de α -níveis pode-se estabelecer um determinado grau de associação com um conjunto (de dados, por exemplo) que está sendo analisado.

Aqui o conceito de α -nível é utilizado para caracterizar uma classe importante de conjuntos fuzzy, chamados de números fuzzy, conforme seção a seguir.

2.3 NÚMEROS FUZZY

Para caracterizar um número fuzzy é necessário que o conjunto universo em que φ_A de um subconjunto fuzzy A está definido é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, sendo necessário satisfazer as condições abaixo (ESMI *et al.*, 2021)

- a) Todos os α -níveis de A são não vazios com $0 \leq \alpha \leq 1$.
- b) Todos os α -níveis de A são intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$.
- c) $\text{supp}A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.

Sendo os α -níveis de um número fuzzy A intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, então pode-se escrever

$$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+],$$

em que para todo número real r , se tem que

$$\chi_{\{r\}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases} \quad (2.1)$$

tendo uma função pertinência para $\{r\}$. Logo, todo número real r é um número fuzzy, que é denotado por $\hat{r}$.

A família dos números fuzzy é denotada aqui por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Vale dizer que nem todo conjunto fuzzy é um número fuzzy e para melhor exemplificar as condições supracitadas são tomados exemplos que explicitem a não satisfação de cada uma das condições.

Exemplo 2.3 Considere os seguintes conjuntos fuzzy A e B , definidos por suas funções de pertinência

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2 - x, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 3 - x, & \text{se } x \in [2, 3] \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

cujos α -níveis são dados respectivamente por

$$[A]^\alpha = [\alpha, -\alpha + 2] \quad \text{e} \quad [B]^\alpha = [\alpha + 1, -\alpha + 3]$$

O subconjunto fuzzy intersecção $A \cap B$ é definido através de sua função de pertinência (WASQUES, 2015)

$$(A \cap B)(x) = \min(\varphi_A(x), \varphi_B(x)),$$

cujos α -níveis são dados por

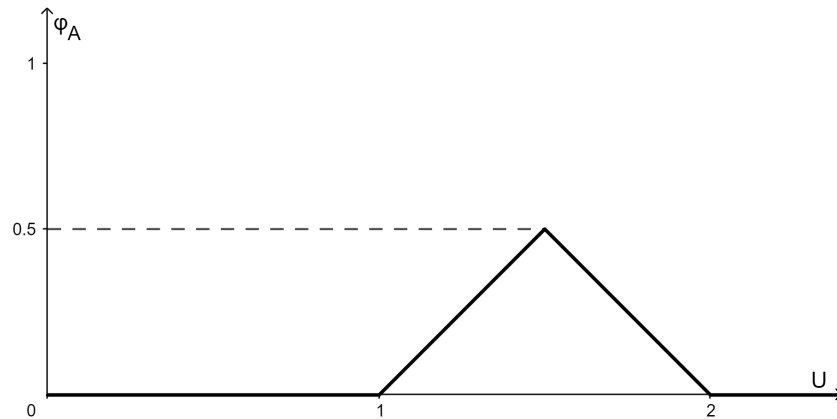
$$[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha.$$

Sendo assim, olhando para $[A \cap B]^\alpha$ se tem

$$[A \cap B]^\alpha = [\alpha + 1, -\alpha + 2]$$

fornecendo uma intersecção definida em $0 \leq \alpha \leq 0,5$. Ao esboçar a função pertinência de $A \cap B$, se tem

Figura 3 – Gráfico da função pertinência do conjunto $A \cap B$, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

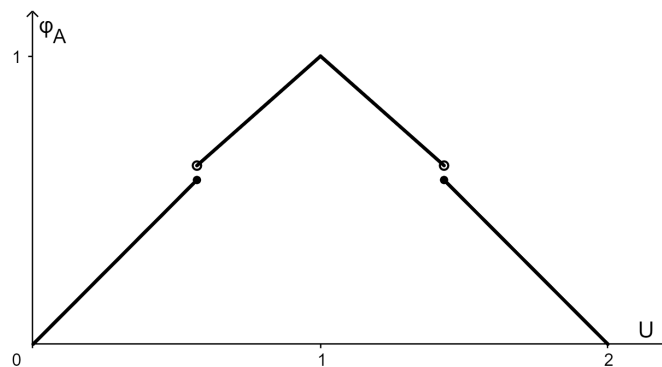


Fonte: Produção da própria autora

Então, para $\alpha > 0,5$ os α -níveis não estão definidos, ou seja, são vazios, não satisfazendo a primeira condição de número fuzzy. Sendo assim, $A \cap B$ definido neste exemplo é um caso de conjunto fuzzy que não é um número fuzzy.

Exemplo 2.4 Considere o conjunto fuzzy C cuja função de pertinência é representada pela Figura 4.

Figura 4 – Gráfico da função pertinência do conjunto C , em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

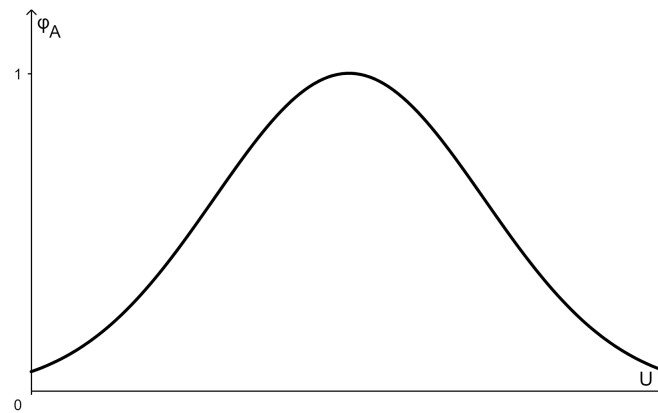


Fonte: Produção da própria autora

Ao utilizar um valor de α que se encontre no espaço vazio esboçado no gráfico, se tem que por conta de não haver extremos na parte acima do corte será obtido um intervalo aberto. Logo, a segunda condição para ser um número fuzzy não é satisfeita. Sendo assim, o conjunto C ilustrado na Figura 4 é um conjunto fuzzy, mas não é um número fuzzy.

Exemplo 2.5 Considere o conjunto fuzzy D , cuja função de pertinência é representada na Figura 5.

Figura 5 – Gráfico da função pertinência do conjunto D , em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$



Fonte: Produção da própria autora

Neste caso, a função de pertinência se comporta como uma função gaussiana, e portanto, nunca encosta no eixo x . Isto é, a pertinência é maior que zero e por conta disso o suporte é dado por todo o conjunto dos reais. Então, o suporte é ilimitado, e portanto, a terceira condição para ser número fuzzy não é satisfeita. Logo D é um exemplo de conjunto fuzzy que não é um número fuzzy.

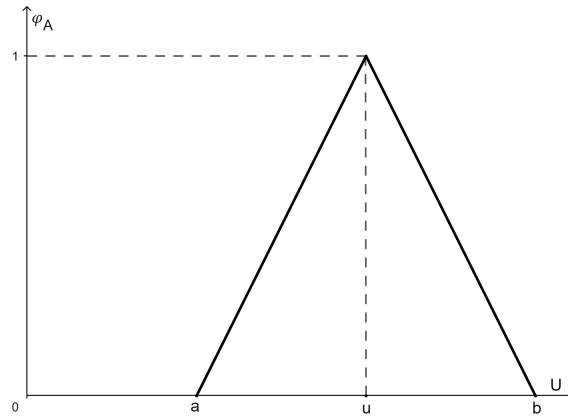
2.3.1 Alguns tipos de números fuzzy

Para a classificação do tipo de número fuzzy a ser tratado, a definição se baseia na função pertinência.

Número fuzzy triangular: se tem um número fuzzy A do tipo triangular se sua função pertinência é dada por (veja Figura 6)

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a < x < u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u < x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

Figura 6 – Representação do número fuzzy triangular $(a; u; b)$, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$



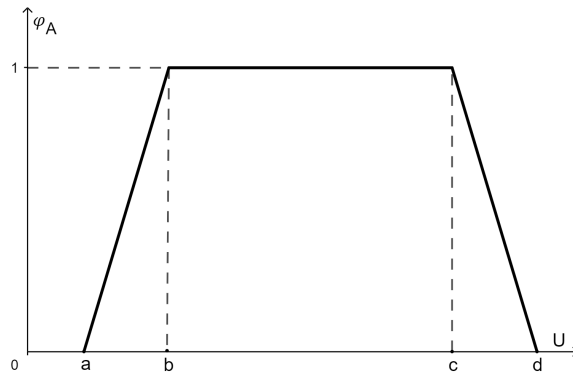
Fonte: Produção da própria autora

Os números reais a , b e u definem A , desta maneira, se expressa esse número fuzzy por $(a; u; b)$.

Número fuzzy trapezoidal: se tem um número fuzzy A do tipo trapezoidal se sua função pertinência é dada por (veja Figura 7)

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3)$$

Figura 7 – Representação do número fuzzy trapezoidal $(a; b; c; d)$, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$



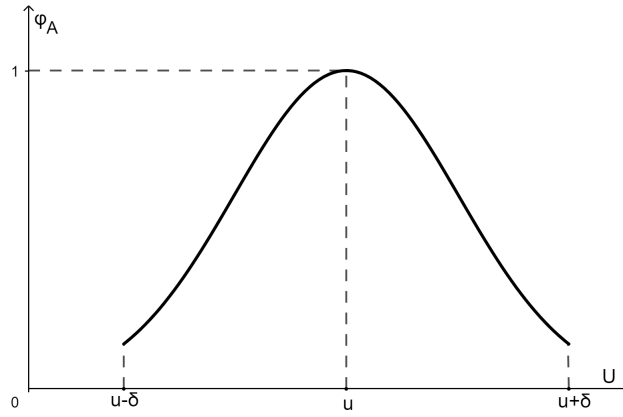
Fonte: Produção da própria autora

Os números reais a , b , c e d definem A , desta maneira, se expressa esse número fuzzy por $(a; b; c; d)$.

Número fuzzy na forma de sino: se tem um número fuzzy A na forma de sino se sua função pertinência for uma gaussiana limitada suave e simétrica em relação a um número real dada por (veja Figura 8)

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2\right), & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.4)$$

Figura 8 – Representação do número fuzzy em forma de sino, em que U é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$



Fonte: Produção da própria autora

Os números reais u , a e δ definem A , desta maneira, se expressa esse número fuzzy por $(u, a, \delta)_G$.

2.4 PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE ZADEH

O princípio de extensão de Zadeh tem como objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por meio de uma função clássica $f : X \rightarrow Z$, esperando que o mesmo seja um subconjunto fuzzy novo de Z . O cálculo do valor de uma função pode ser obtido de duas maneiras, são elas através da pertinência ou por α -níveis (WASQUES, 2015).

Para o cálculo em termos da pertinência, se tem que

$$f(A)(z) = \begin{cases} \sup_{f(x)=z} \varphi_A(x), & \text{se } f(x) = z \\ 0, & \text{se } f(x) \neq z \end{cases} \quad (2.5)$$

Para o cálculo em termos de α -níveis, se tem que para funções contínuas e bijetoras

$$[f(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$$

Exemplo 2.4 Considere a função $f(x) = 2x + 1$ e o número fuzzy $A = (1; 2; 3)$. Se tem que $[A]^\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$ e que

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 3 - x, & \text{se } x \in [2, 3] \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

Em termos de α -níveis, se tem que a extensão de Zadeh da função f aplicada em A é dada por

$$\begin{aligned} [f(A)]^\alpha &= f([A]^\alpha) = f[1 + \alpha, 3 - \alpha] = [f(1 + \alpha), f(3 - \alpha)] = \\ &= [2(1 + \alpha) + 1, 2(3 - \alpha) + 1] = [3 + 2\alpha, 7 - 2\alpha] \end{aligned}$$

Em termos da pertinência, se tem

$$f(A)(z) = \sup_{f(x)=z} \varphi_A(x) = \sup_{2x+1=z} \varphi_A(x) = \sup_{x=\frac{z-1}{2}} \varphi_A(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_A(x) &= \varphi_A\left(\frac{z-1}{2}\right) = \frac{z-3}{2}, \quad \text{se } x \in [1, 2] \\ \varphi_A(x) &= \varphi_A\left(\frac{z-1}{2}\right) = \frac{-z+7}{2}, \quad \text{se } x \in [2, 3] \end{aligned}$$

Logo,

$$f(A)(z) = \sup_{f(x)=z} \varphi_A(x) = \sup_{2x+1=z} \varphi_A(x) = \sup_{x=\frac{z-1}{2}} \varphi_A(x) = \frac{z-3}{2}, \quad \text{se } x \in [1, 2]$$

e

$$f(A)(z) = \sup_{f(x)=z} \varphi_A(x) = \sup_{2x+1=z} \varphi_A(x) = \sup_{x=\frac{z-1}{2}} \varphi_A(x) = \frac{-z+7}{2}, \quad \text{se } x \in [2, 3]$$

Por definição, o princípio de extensão de Zadeh para duas variáveis tem como objetivo indicar como deve ser a imagem de subconjunto fuzzy A, B de X e Y , respectivamente, por meio de uma função clássica $f : X \times Y \rightarrow Z$, esperando que o mesmo seja um subconjunto fuzzy novo de Z . O cálculo do valor de uma função pode ser obtido de duas maneiras, são elas através da pertinência ou por α -níveis (WASQUES, 2015).

Para o cálculo em termos da pertinência, se tem que

$$f(A, B)(z) = \begin{cases} \sup_{f(x,y)=z} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)], & \text{se } f(x, y) = z \\ 0, & \text{se } f(x, y) \neq z \end{cases} \quad (2.6)$$

Para o cálculo em termos de α -níveis, se tem que

$$[f(A, B)]^\alpha = f([A \times B]^\alpha)$$

No capítulo subsequente são abordadas a dinâmica da condução do calor em uma barra, bem como os procedimentos e o método utilizado para encontrar a solução da equação do calor.

3 EQUAÇÃO DO CALOR

A equação do calor descreve a dinâmica de transferência de calor de um objeto, sendo tal problema descrito por Equações Diferenciais Parciais (EDP), sujeita às condições inicial e de fronteira. Nesse problema se tem uma função correspondente a temperatura inicial em cada posição x bem como funções de valores reais que representam as temperaturas nas extremidades do objeto e por fim, o coeficiente de difusão térmica.

3.1 DINÂMICA DA CONDUÇÃO DO CALOR EM UMA BARRA

Ao considerar uma barra de comprimento L com seção transversal de área A , feita de um material condutor uniforme de calor e que se encontra termicamente isolada lateralmente, se tem que a transferência de calor com o ambiente pode ser dada através de suas extremidades. Isto é, o fluxo de calor se dá na direção longitudinal, tendo um problema de condução de calor unidimensional. Logo, as grandezas físicas presentes são constantes em cada seção da barra, podendo variar de seção para seção.

Pela lei do resfriamento de Fourier, ao considerar duas placas P_1 e P_2 mantidas a temperatura constante T_1 e T_2 , respectivamente, com ambas tendo áreas iguais a A , se tem que ao serem colocadas paralelamente a uma distância d haverá uma passagem de calor da placa que se encontra em uma maior temperatura para a com menor temperatura, sendo a quantidade de calor dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}, \quad (3.1)$$

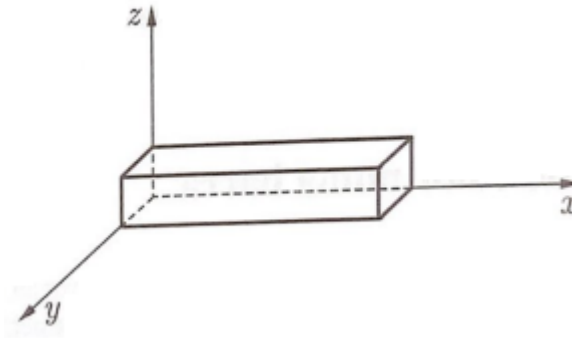
em que k é condutividade térmica, no sistema CGS, $[k] = \text{cal/cm.s.}^\circ\text{C}$. Tal lei será utilizada a seguir para o estudo da dinâmica da condução do calor.

Retornando ao problema da condução de calor de uma barra, considerando $u(x, t)$ a temperatura de um ponto da barra colocada sobre o eixo x , de maneira que se faz possível observar que a temperatura não dependerá das coordenadas espaciais y e z , como demonstrado na Figura 9.

Ao tomar duas seções transversais de uma barra localizadas em x e $x + d$, as duas seções são consideradas como as placas P_1 e P_2 anteriormente citadas pela lei do resfriamento de Fourier, se constatando uma variação de temperatura em relação ao tempo, ou seja, não se tem temperaturas constantes. Para contornar esse problema é adicionada a grandeza fluxo de calor através de uma seção x em um instante t . Logo, fixando o tempo, ao passar o limite quando d tende a zero em $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + d, t)$ se tem

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA|T_2 - T_1|}{d} \Rightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d} = kA|u_x(x, t)|. \quad (3.2)$$

Figura 9 – Representação de uma barra colocada sobre o eixo x



Fonte: (FIGUEIREDO, 2018)

Dessa forma, se tem que através da equação (3.2) o fluxo de calor na direção positiva do eixo x é dado por

$$q(x, t) = -kAu_x(x, t), \quad (3.3)$$

em que o sinal negativo se dá pelo fato de a temperatura u crescer ao longo de x , sendo u_x positivo, porém como o calor flui para a esquerda, então q deve ser negativo (FIGUEIREDO, 2018).

Fixando agora um elemento da barra entre x_0 e $x_0 + \delta$ para observar a quantidade de calor q que entra, em um intervalo de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$, pela equação (3.3), se tem

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} -kAu_x(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} -kAu_x(x_0 + \delta, t) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} kA[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)] dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De acordo com a fórmula básica da calorimetria essa quantidade de calor fará com que haja um aumento da temperatura no volume de uma quantidade Δu , em que se assume que o volume é suficientemente pequeno (BUTKOV, 1978), então também se pode escrever q como

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho Au_t(x, t) dx dt, \quad (3.5)$$

em que c a capacidade calorífica, $[c] = \text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ e ρ é a densidade de massa, $[\rho] = \text{g/cm}^3$.

Pelo teorema fundamental do cálculo, em (3.4), se tem

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} kA[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t)] dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} kAu_{xx}(x, t) dx dt. \quad (3.6)$$

Igualando as equações (3.6) e (3.5), se tem

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} k u_{xx}(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c \rho u_t(x, t) dx dt, \quad (3.7)$$

sendo a equação (3.7) válida para todo $t_0 > 0$, todo $0 < x_0 < L$, todo $\tau > 0$ e todo $\delta > 0$, então se conclui que

$$k u_{xx}(x, t) = c \rho u_t(x, t). \quad (3.8)$$

Isolando $u_t(x, t)$ na equação (3.8), se tem

$$k u_{xx}(x, t) = c \rho u_t(x, t) \Rightarrow u_t(x, t) = \frac{k}{c \rho} u_{xx}(x, t), \quad (3.9)$$

chamando $K = \frac{k}{c \rho}$, se tem

$$u_t(x, t) = K u_{xx}(x, t), \quad (3.10)$$

em que K é o coeficiente de difusão térmica do material, no sistema CGS $[K] = \text{cm}^2/\text{s}$. Sendo a equação (3.10) conhecida como a equação do calor.

Para a encontrar a solução da equação do calor se utilizará o método de Fourier, conforme será visto na seção seguinte.

3.1.1 Condições inicial e de contorno

A equação do calor, dada em (3.10) tem várias soluções, tendo em vista que qualquer constante seria uma possível solução, isto é, ao considerar $u(x, t) = \text{constante}$ se tem uma solução. Para melhor representar a distribuição de temperatura é necessário considerar informações adicionais, visto que a distribuição de temperatura da barra depende de uma temperatura inicial. Essa distribuição inicial da temperatura é denominada condição de inicial, dada por

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

em que f descreve a temperatura ao longo da barra num instante $t = 0$.

Além disso, se faz necessário saber o que ocorre nas extremidades da barra, afinal o fato de as extremidades da barra não estarem isoladas termicamente faz com que possa haver entrada ou saída de calor, influenciando no resultado de $u(x, t)$. Dessa forma, é essencial enunciar as condições de fronteira, que podem ser de tipos distintos.

3.1.1.1 Tipos de condições de contorno

Tipo I - Caso em que as temperaturas nas extremidades sejam conhecidas devido a algum processo, como quando as temperaturas nas extremidades são constantes, ou seja,

$$u(0, t) = T_1 \quad \text{e} \quad u(L, t) = T_2,$$

em que T_1 e T_2 são temperaturas dadas. Há também o caso em que é conhecida a variação de temperatura em uma ou em ambas as extremidades, ou seja,

$$u(0, t) = T_1(t) \quad \text{e} \quad u(L, t) = T_2(t),$$

em que $T_1(t)$ e $T_2(t)$ são temperaturas dadas em cada extremidade para $t \geq 0$.

Tipo II - Caso em que as extremidades são isoladas termicamente, sendo assim, o fluxo de calor através de $x = 0$ e $x = L$ são nulos. Da equação do fluxo do calor dada em (3.3), se tem que

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

Tipo III - Caso em que há transferência de calor entre a barra e o meio ambiente, dadas pela lei

$$\begin{aligned} ku_x(0, t) &= e\{u(0, t) - u + 0\} \\ -ku_x(L, t) &= e\{u(L, t) - u + 0\} \end{aligned}$$

em que e é a constante de emissividade e u_0 é a temperatura do ambiente.

Tipo IV - Caso em que há a combinação de dois dos casos citados anteriormente, como

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(L, t) = 0.$$

3.2 MÉTODO DE FOURIER

O problema da condução do calor consiste em encontrar uma solução $u(x, t)$ da equação do calor que satisfaça as condições inicial e de contorno

$$\begin{cases} u_t(x, t) = Ku_{xx}, & \text{para } 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

sendo o problema dado em (3.11) chamado de Problema de Valores Inicial e de Fronteira (PVIF). O método de Fourier em primeiro momento consiste em utilizar o método da separação de variáveis e procurar soluções $u(x, t)$ na forma

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (3.12)$$

Logo, substituindo (3.12) em (3.10), se tem

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t) \Rightarrow \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \quad (3.13)$$

sendo possível observar que o lado esquerdo da igualdade está em função de t e o lado direito da igualdade em função de x . Para satisfazer a igualdade ambos os lados devem ser constantes, a qual será chamada de λ , que independe de x e t , Então,

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda \quad (3.15)$$

Para a primeira equação diferencial ordinária em (3.14) F deve satisfazer à equação diferencial ordinária

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0, \text{ para } 0 < x < L. \quad (3.16)$$

Pela equação (3.11) se tem $u(0, t) = u(L, t) = 0$, então F também deve satisfazer

$$F(0) = F(L) = 0 \quad (3.17)$$

sendo assim, como $u(0, t) = F(0)G(t)$ para todo $t > 0$, se tem que $F(0) \neq 0$, então $G(t) \equiv 0$ e dessa forma, $u \equiv 0$. Embora $u \equiv 0$ seja uma solução da equação do calor e satisfaça as condições de contorno, ela não satisfaz a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, a menos que $f(x) \equiv 0$ (FIGUEIREDO, 2018).

A partir de agora, o foco estará em encontrar valores de λ para a solução de $F(x)$ do problema dados em (3.17) e (3.16), que conduz a funções exponenciais se $\lambda > 0$, a função linear se $\lambda = 0$ e a funções trigonométricas se $\lambda < 0$ (BUTKOV, 1978).

$$F(x) = \begin{cases} c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}, & \text{se } \lambda > 0 \\ c_1 x + c_2, & \text{se } \lambda = 0 \\ c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}), & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

quando $\lambda > 0$ para satisfazer (3.17) se tem que o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{L\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-L\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

sendo a única solução possível $c_1 = c_2 = 0$, que implica que $F \equiv 0$, não sendo a solução de interesse. Quando $\lambda = 0$ para satisfazer (3.17) se deve ter

$$c_2 = 0 \text{ e } c_1 L + c_2 = 0,$$

que implica que $c_1 = c_2 = 0$, logo, $F \equiv 0$, também não sendo a solução de interesse.

Portanto, as condições de contorno $F(0) = F(L) = 0$ são satisfeitas somente quando $\lambda < 0$ e quando c_1 igual a zero, então

$$c_1 = 0 \text{ e } c_2 \sin(L\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Como não se quer $c_2 = 0$, então $\sin(L\sqrt{-\lambda}) = 0$, que implica que $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{L}$, com $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Os valores assumidos pela constante de separação λ são

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}; \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

sendo chamados de valores próprios, valores característicos ou autovalores do problema dados em (3.16) e (3.17) e as funções

$$F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

são chamadas de funções próprias, funções características ou autofunções.

Olhando agora para a segunda equação diferencial ordinária em (3.15), se tem a solução geral

$$G(t) = ce^{\lambda Kt}. \quad (3.19)$$

Logo,

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.20)$$

Satisfazendo a equação do calor e as condições de contorno em (3.11). A dificuldade agora está em

$$u_n(x, 0) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$u_n(x, 0)$ só será solução para a equação do calor, condições inicial e de contorno de (3.11) se $f(x)$ for da forma (FIGUEIREDO, 2018)

$$f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.21)$$

satisfazendo assim a equação (3.11).

Se tem que se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são soluções de (3.10), então qualquer função do tipo

$$au(x, t) + bv(x, t),$$

em que a e b são constantes, será solução de (3.10) também. Logo, (3.10) é homogênea linear, ou seja, uma combinação linear de soluções é uma solução também, sendo esse o princípio da superposição, que é válido para combinações lineares de três ou mais soluções, sendo qualquer número finito de soluções. Logo, qualquer expressão do tipo

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t),$$

em que c_n são constantes, u_n são funções definidas em (3.21) e soluções da equação do calor e da condição de contorno de (3.11). Por consequência se a condição inicial for

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

então, a solução de (3.11) será da forma

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right),$$

sendo razoável considerar que essas mesmas propriedades são válidas para uma série infinita formada pelas funções $u_n(x, t)$. A solução para o problema via método de Fourier é dada por

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \quad (3.22)$$

em que c_n deve ser escolhido de forma que $f(x)$ pode ser escrita como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right). \quad (3.23)$$

Sendo assim, c_n devem ser os coeficientes de Fourier da função f em $[0, L]$ e estendida para o restante dos números reais $\mathbb{R}$, de maneira que seja ímpar e periódica de período $2L$. Então,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx. \quad (3.24)$$

No capítulo subsequente são abordadas as contribuições desse estudo, consistindo em estender a solução dada em (3.22) através do princípio de extensão de Zadeh, em que são considerados os casos de incerteza fuzzy em alguns dos parâmetros da equação do calor.

4 BARRA COM GRADIENTE DE TEMPERATURA

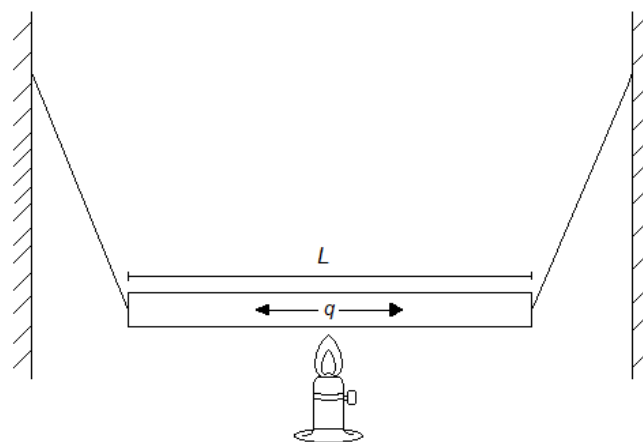
Neste capítulo são abordadas as incertezas relacionadas à equação do calor, sendo analisadas as incertezas associadas ao coeficiente de difusão térmica e à condição inicial de uma barra.

Sabe-se que em condições ideais o coeficiente de difusão térmica deve apresentar um valor específico, dependendo do material observado. Porém, pode haver uma variação nos valores assumidos por esse parâmetro, dependendo das condições a que o material estará submetido.

No caso da condição inicial, se tem uma distribuição de temperatura da barra que depende de uma temperatura inicial, sendo essa distribuição chamada de condição inicial. Bem como no caso do coeficiente de difusão térmica, o valor dessa temperatura inicial não terá o valor esperado que pode ser encontrado na literatura, visto que a barra não estará submetida a condições ideais. Logo, a distribuição inicial da temperatura ao longo da barra, no instante $t = 0$, não pode ser determinada com exatidão, havendo uma incerteza associada a condição inicial.

Para melhor compreensão do problema, se considera uma barra de comprimento L com área de seção transversal desprezível, feita de material condutor uniforme de calor. Tal barra é suspensa em repouso, na horizontal, por fios de massa desprezível, de maneira que não haja rotação na barra. Ao aquecê-la por uma fonte de calor a partir do centro, haverá um gradiente de temperatura, conforme pode ser visto na Figura 10.

Figura 10 – Esquema com a representação da transferência de calor em uma barra aquecida



Esquema de distribuição de calor q em uma barra de comprimento L suspensa pelas extremidades, em que a fonte de calor é posicionada no centro. Fonte: Produção da própria autora

Na Figura 10 se tem a representação da condução do calor em uma barra com uma fonte de calor colocada em seu centro. O fato da barra estar suspensa por suas extremidades faz com que não haja rotação, como dito anteriormente, e permite que ao haver a dilatação do material, essa será suprida pelo comprimento, isto é, a barra dilata tanto para a direita quanto para a esquerda, não havendo deslocamento de seu centro de massa. Se pode dizer também que a barra continua em um regime unidimensional, pois ao manter a barra suspensa não haverá o curvamento da mesma ao dilatar com o aquecimento, afinal as extremidades estão livres, o que não ocorreria se por exemplo a barra estivesse fixa por uma de suas extremidades, nesse caso ao dilatar haveria um encurvamento da barra passando de um regime unidimensional para o bidimensional.

4.1 EQUAÇÃO DO CALOR COM INCERTEZA ASSOCIADA AO COEFICIENTE DE DIFUSÃO TÉRMICA

Como supracitado, será analisada uma incerteza associada ao coeficiente de difusão térmica referentes a três materiais distintos, sendo eles o alumínio, o cobre e a prata.

Em condições ideais o coeficiente de difusão térmica para o alumínio, o cobre e a prata devem ser $K = 0,86 \text{ cm}^2/\text{s}$, $K = 1,14 \text{ cm}^2/\text{s}$ e $K = 1,71 \text{ cm}^2/\text{s}$ (FIGUEIREDO, 2018), respectivamente. Entretanto, esse valor pode variar devido as condições a que o material estará submetido. Sendo assim, a incerteza presente em tal parâmetro será modelada através da teoria de conjuntos fuzzy, mais especificamente através dos casos da incerteza intervalar e para o caso em que coeficiente de difusão térmica é um número fuzzy.

4.1.1 Solução com coeficiente de difusão térmica fuzzy do tipo intervalar

Para o caso da incerteza intervalar este trabalho propõe as seguintes modelagens para os coeficientes de difusão térmica: $K_a=[0,76; 0,96]$, $K_c=[1,04; 1,24]$ e $K_p=[1,61; 1,81]$, em que K_a , K_c e K_p representam os coeficientes do alumínio, cobre e prata, respectivamente. É importante notar que os valores esperados dos coeficientes de difusão térmica se encontram dentro dos respectivos intervalos. Sendo assim, para a equação do calor em (3.11) se tem que

$$\begin{cases} u_t(x, t) = Ku_{xx}, & \text{para } 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

sendo K dado por um dos intervalos K_a , K_c e K_p .

A solução para essa equação é resolvida classicamente via método de Fourier, assim como feito na Seção 3.2 e por conseguinte, o princípio de extensão de Zadeh é

utilizado para estender essa solução da equação do calor para o caso em que o coeficiente de difusão térmica é intervalar. Para isso considere o operador $u(x, t, \cdot)$ dado por

$$u(x, t, y) = u_{(y)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 y t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right). \quad (4.1)$$

Tomando um intervalo qualquer $K = [b; c]$, se tem que a extensão do operador acima, via princípio de extensão de Zadeh, é dado por

$$\hat{u}_{(K)}(x, t) = \left[\inf_{y \in [b, c]} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [b, c]} u_{(y)}(x, t) \right]. \quad (4.2)$$

Desse modo, tomando $K_a = [\underline{k}_a, \bar{k}_a] = [0, 76; 0, 96]$, $K_c = [\underline{k}_c, \bar{k}_c] = [1, 04; 1, 24]$ e $K_p = [\underline{k}_p, \bar{k}_p] = [1, 61; 1, 81]$, obtêm-se

$$\hat{u}_{(K_a)}(x, t) = \left[\inf_{y \in [0, 76; 0, 96]} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [0, 76; 0, 96]} u_{(y)}(x, t) \right]. \quad (4.3)$$

$$\hat{u}_{(K_c)}(x, t) = \left[\inf_{y \in [1, 04; 1, 24]} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [1, 04; 1, 24]} u_{(y)}(x, t) \right]. \quad (4.4)$$

e

$$\hat{u}_{(K_p)}(x, t) = \left[\inf_{y \in [1, 61; 1, 81]} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [1, 61; 1, 81]} u_{(y)}(x, t) \right]. \quad (4.5)$$

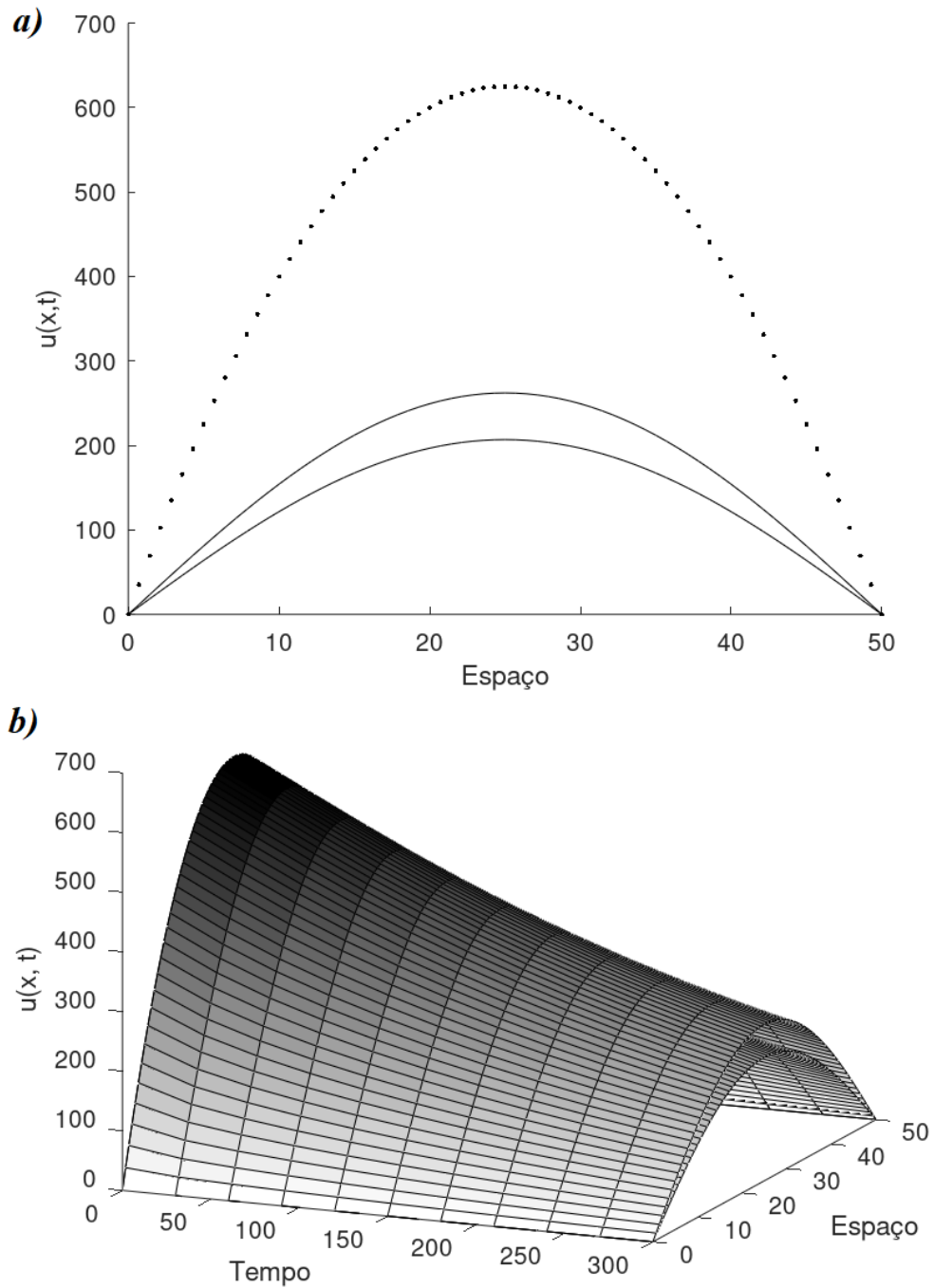
Portanto, através de simulações feitas na plataforma livre Octave se tem as seguintes soluções para cada material.

Nas Subfiguras 11a), 12a) e 13a), se tem a representação bidimensional das soluções da equação do calor para o alumínio, o cobre e a prata, respectivamente, onde a temperatura está em função do espaço. Se considera o espaço como sendo o comprimento L da barra.

A curva pontilhada representa a temperatura em função do comprimento L em $t = 0$ e as duas curvas em linha contínua representam o extremo superior e inferior da solução intervalar, que podem ser melhor visualizadas nas Subfiguras 11b), 12b) e 13b), em que se tem a representação tridimensional.

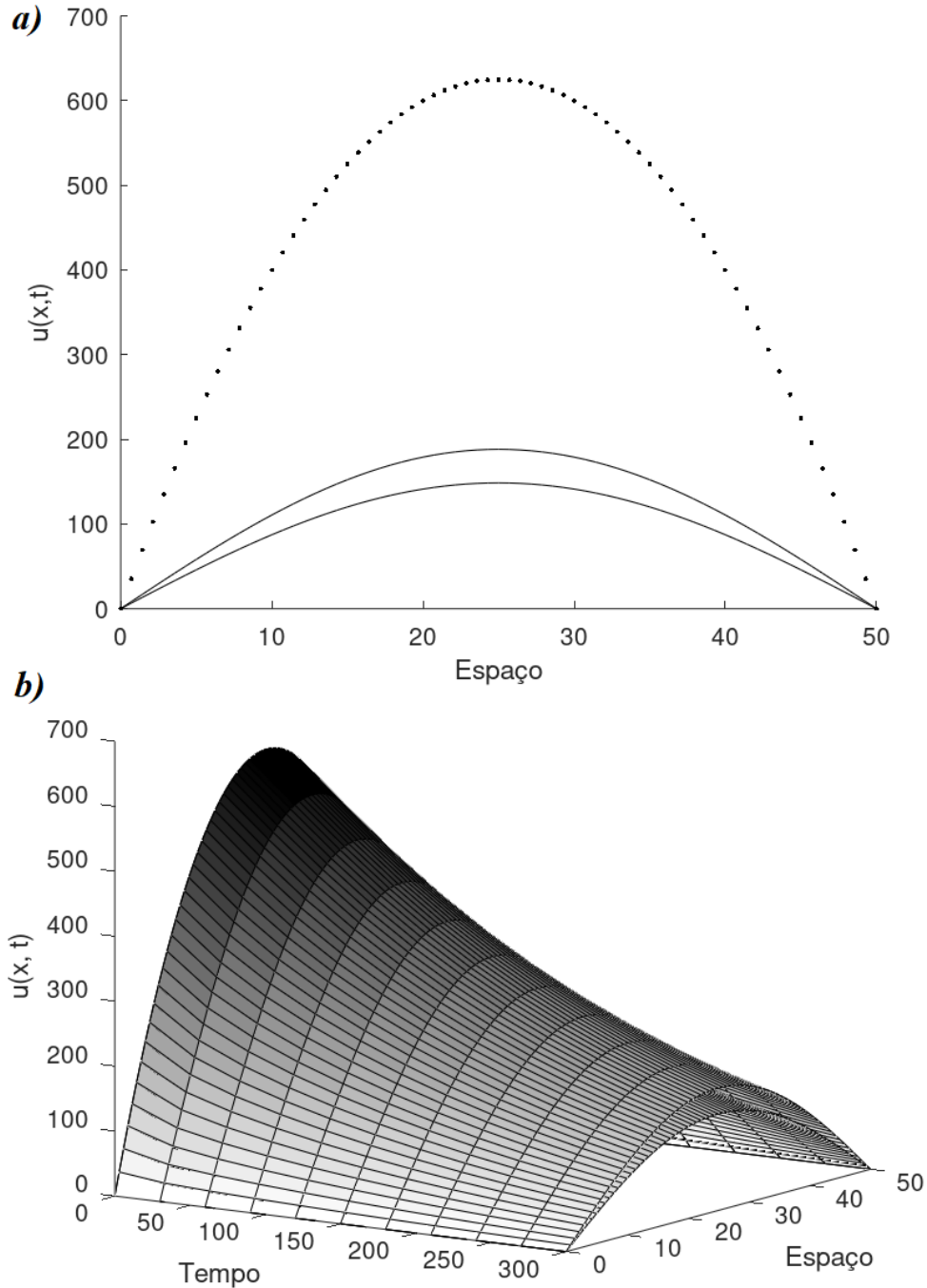
Conforme se vê nas Subfiguras b) de cada figura, a solução da equação do calor para o caso intervalar se dá entre duas superfícies nos três materiais considerados, em que todas as soluções contidas entre essas superfícies tem α -nível igual a 1, ou seja, o grau de pertinência das soluções entre as superfícies têm total associação com o que é esperado classicamente, tendo em vista o processo experimental. Já nas bordas das superfícies, se tem $\alpha = 0$, não sendo considerada as bordas das superfícies como fazendo parte do conjunto de soluções.

Figura 11 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica intervalar do alumínio $[0,76; 0,96]$



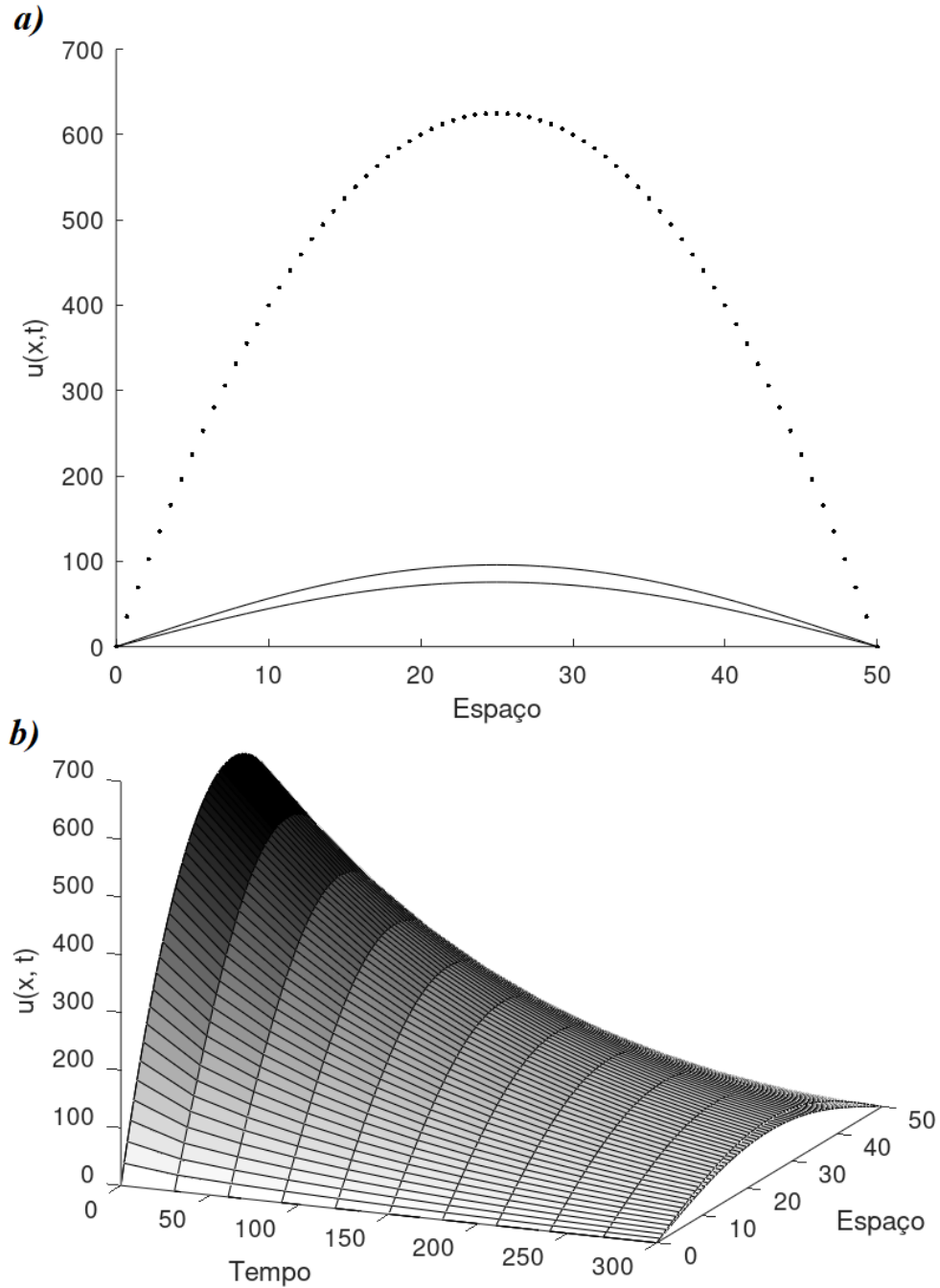
Em *a)* se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, em que se tem a temperatura $u(x,t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra, em que a curva pontilhada representa o calor em função do espaço em $t = 0$ e em *b)* se tem a solução da equação do calor em 3D que é dada entre duas superfícies. Logo, todas as soluções contidas entre essas superfícies tem $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Figura 12 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica intervalar do cobre $[1,04; 1,24]$



Em *a*) se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, em que se tem a temperatura $u(x,t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra, em que a curva pontilhada representa o calor em função do espaço em $t = 0$ e em *b*) se tem a solução da equação do calor em 3D que é dada entre duas superfícies. Logo, todas as soluções contidas entre essas superfícies tem $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Figura 13 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica intervalar da prata $[1,61; 1,81]$



Em a) se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, em que se tem a temperatura $u(x,t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra, em que a curva pontilhada representa o calor em função do espaço em $t = 0$ e em b) se tem a solução da equação do calor em 3D que é dada entre duas superfícies. Logo, todas as soluções contidas entre essas superfícies tem $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

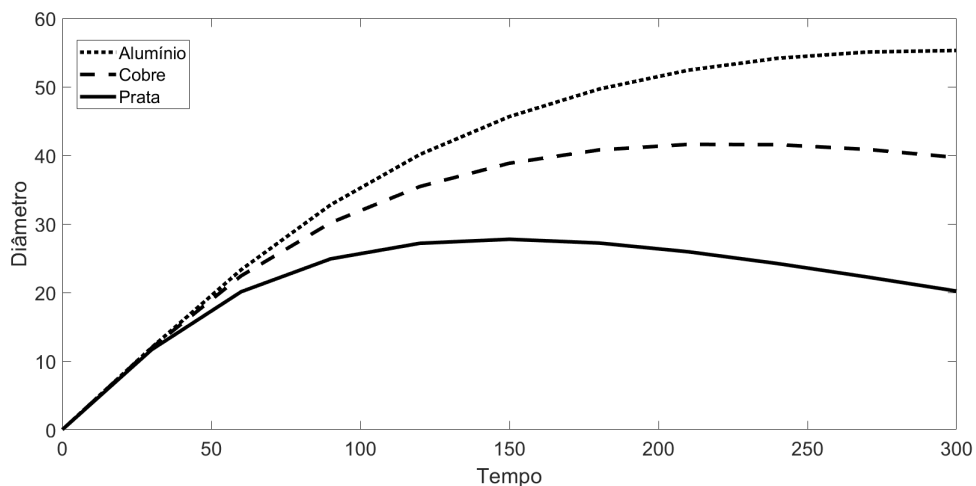
Vale ressaltar que no caso intervalar se tem um número fuzzy do tipo trapezoidal em que o corte é feito em $\alpha = 1$, ou seja, se considera apenas o topo desse número fuzzy trapezoidal. Sendo assim, todas as soluções tem o mesmo grau de pertinência.

Ao fazer a comparação das três figuras, é possível perceber que o calor se distribui melhor no cobre e na prata do que no alumínio, sendo a prata o melhor condutor térmico entre os três materiais e o alumínio o pior.

O fato de haver uma melhor condução de calor na prata pode influenciar na incerteza associada a esse material, fazendo com que o espaço entre as superfícies seja menor, ou seja, há uma menor incerteza associada, enquanto que no cobre e no alumínio se tem um maior espaço entre as superfícies, tendo uma maior incerteza em relação à prata. Portanto, se percebe que a condução térmica está diretamente ligada a incerteza associada ao modelo, conjecturando que quanto melhor a condução térmica do material menor a incerteza associada à solução da equação do calor.

A Figura 14 apresenta o diâmetro das soluções para o caso em que o coeficiente de difusão térmica é do tipo intervalar.

Figura 14 – Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, no caso em que o coeficiente de difusão térmica é do tipo intervalar



Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, em que se observa a diminuição da incerteza ao longo do tempo para os três materiais. A representação de cada material é dada através das linhas pontilhada, tracejada e sólida, representando respectivamente o alumínio, o cobre e a prata. Fonte: (DELGATO; WASQUES, 2022)

Na Figura 14 se tem o diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, em que é possível observar a incerteza ao longo do tempo. Dentre os três materiais o que apresenta menor diâmetro é a prata e o que apresenta maior diâmetro é o alumínio, essa diferença entre os diâmetros da incerteza pode estar associada à condução térmica do

material, assim como supracitado.

Na obtenção do diâmetro da solução é considerado o módulo da diferença entre os extremos dos intervalos dados em (4.3), (4.4) e (4.5). Dentre os valores obtidos para o diâmetro, em diferentes regiões da barra, é tomado o maior diâmetro de todos, isto é, o local onde ocorre a maior incerteza sobre a solução.

4.1.2 Solução com coeficiente de difusão térmica como um número fuzzy triangular

Para o caso em que a incerteza é modelada por um número fuzzy, o coeficiente de difusão térmica dos materiais feitos de alumínio, cobre e prata são dados respectivamente por $K_a = (0,76; 0,86; 0,96)$, $K_c = (1,04; 1,14; 1,24)$ e $K_p = (1,61; 1,71; 1,81)$, em que os valores esperados para os coeficientes de difusão térmica de cada material são dados pelos núcleos de seus respectivos números fuzzy triangulares. Sendo assim, para a equação do calor em (3.11) se tem que

$$\begin{cases} u_t(x, t) = Ku_{xx}, & \text{para } 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

sendo K um número fuzzy triangular.

Assim como no caso anterior, a solução para essa equação é resolvida classicamente via método de Fourier, como feito na Seção 3.2 e por conseguinte, o princípio de extensão de Zadeh é utilizado para estender essa solução da equação do calor para o caso em que o coeficiente de difusão térmica é um número fuzzy triangular. Considerando o operador $u(x, t, \cdot)$ dado em (4.1) e tomando um número fuzzy triangular qualquer $K = (a; u; b)$, se tem que a extensão do operador acima, via princípio de extensão de Zadeh, é dado por

$$[\hat{u}_{(K)}(x, t)]^\alpha = \left[\inf_{y \in [K]^\alpha} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [K]^\alpha} u_{(y)}(x, t) \right]. \quad (4.6)$$

Desse modo, tomando $K_a = (0,76; 0,86; 0,96)$, $K_c = (1,04; 1,14; 1,24)$ e $K_p = (1,61; 1,71; 1,81)$, se obtêm

$$[\hat{u}_{(K_a)}(x, t)]^\alpha = \left[\inf_{y \in [K_a]^\alpha} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [K_a]^\alpha} u_{(y)}(x, t) \right], \quad (4.7)$$

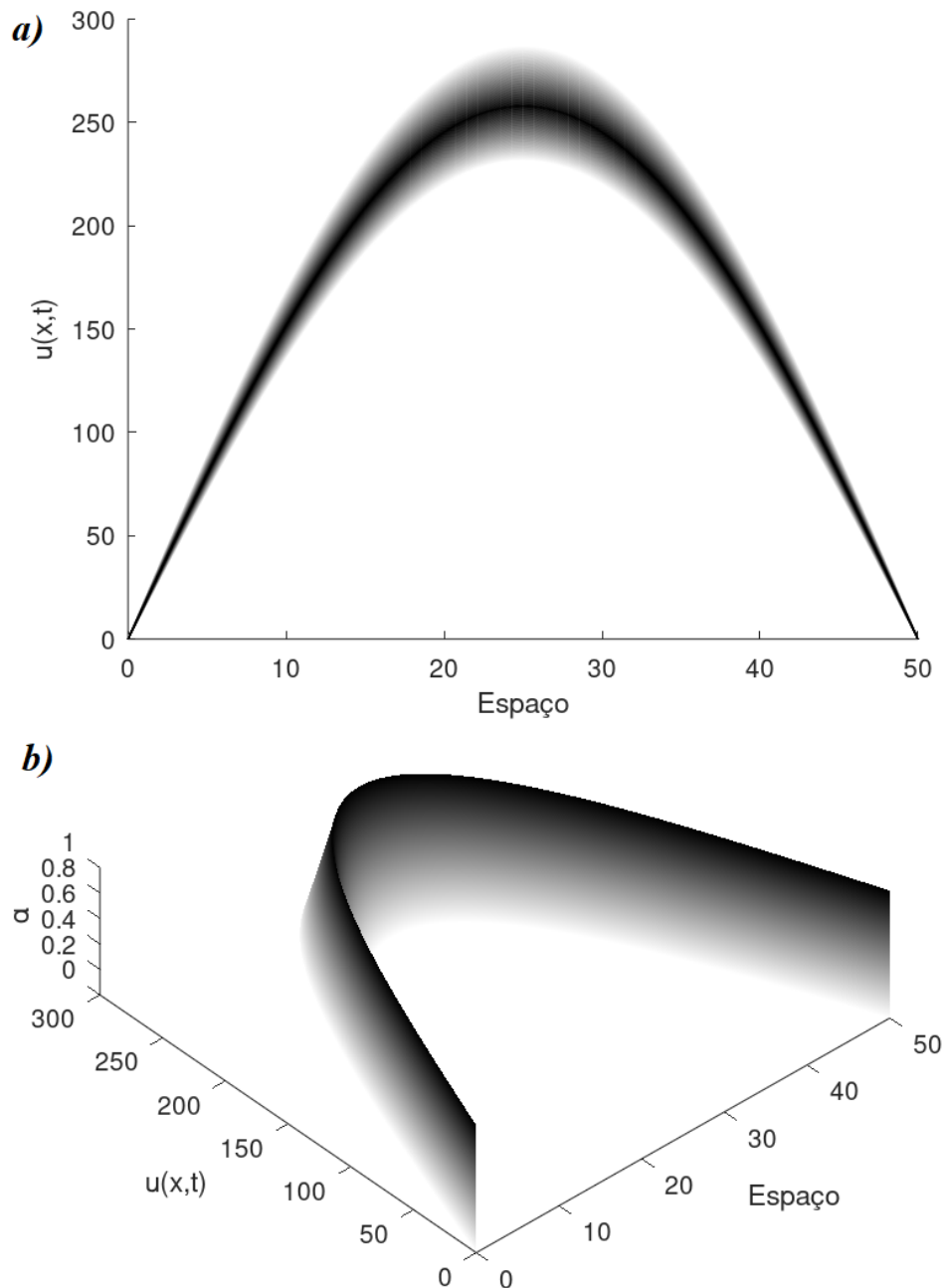
$$[\hat{u}_{(K_c)}(x, t)]^\alpha = \left[\inf_{y \in [K_c]^\alpha} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [K_c]^\alpha} u_{(y)}(x, t) \right] \quad (4.8)$$

e

$$[\hat{u}_{(K_p)}(x, t)]^\alpha = \left[\inf_{y \in [K_p]^\alpha} u_{(y)}(x, t), \sup_{y \in [K_p]^\alpha} u_{(y)}(x, t) \right]. \quad (4.9)$$

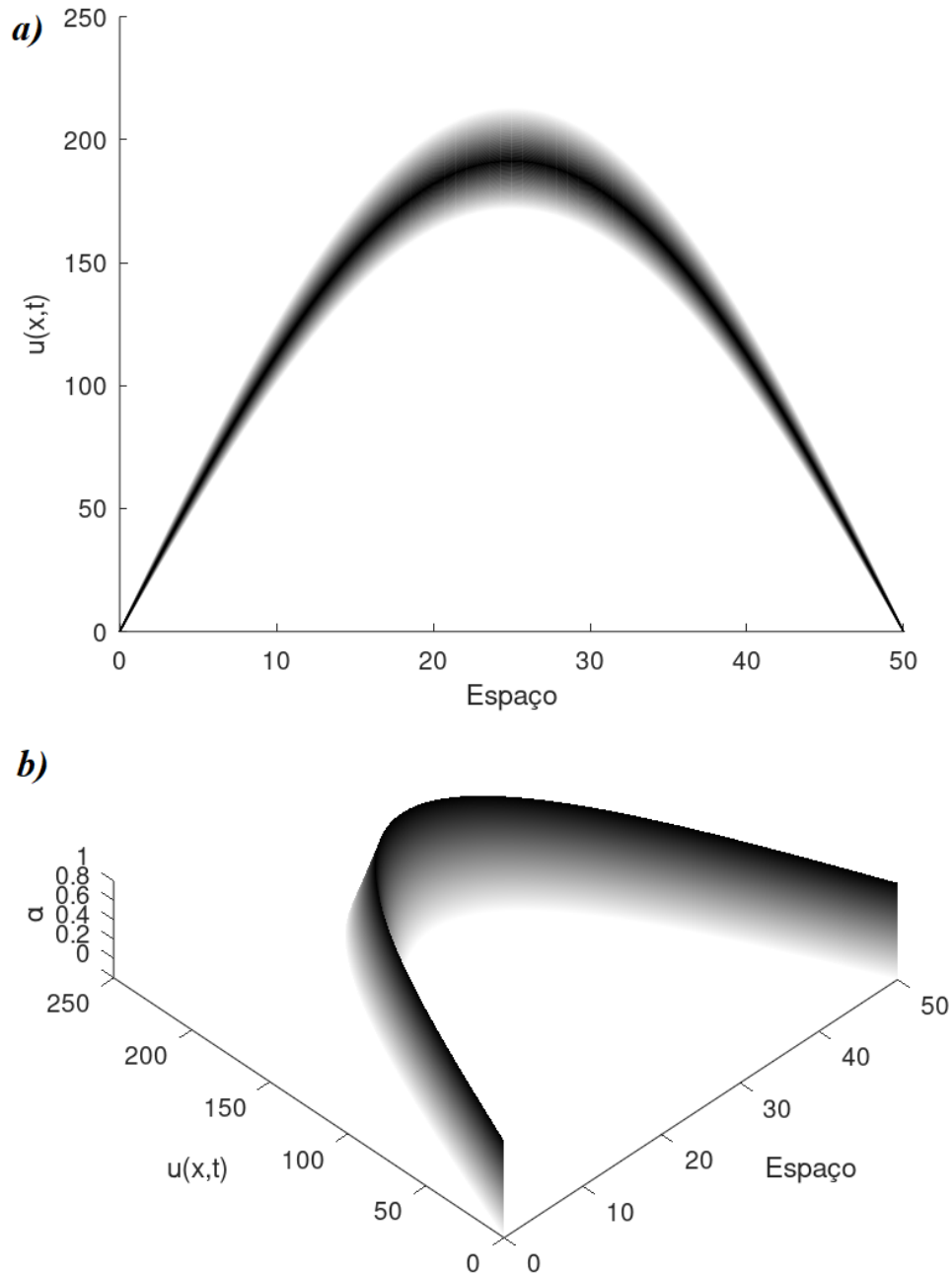
Portanto, através de simulações feitas na plataforma livre Octave se tem as seguintes soluções para cada material.

Figura 15 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh com o coeficiente de difusão térmica do alumínio como número fuzzy triangular (0,76; 0,86; 0,96)



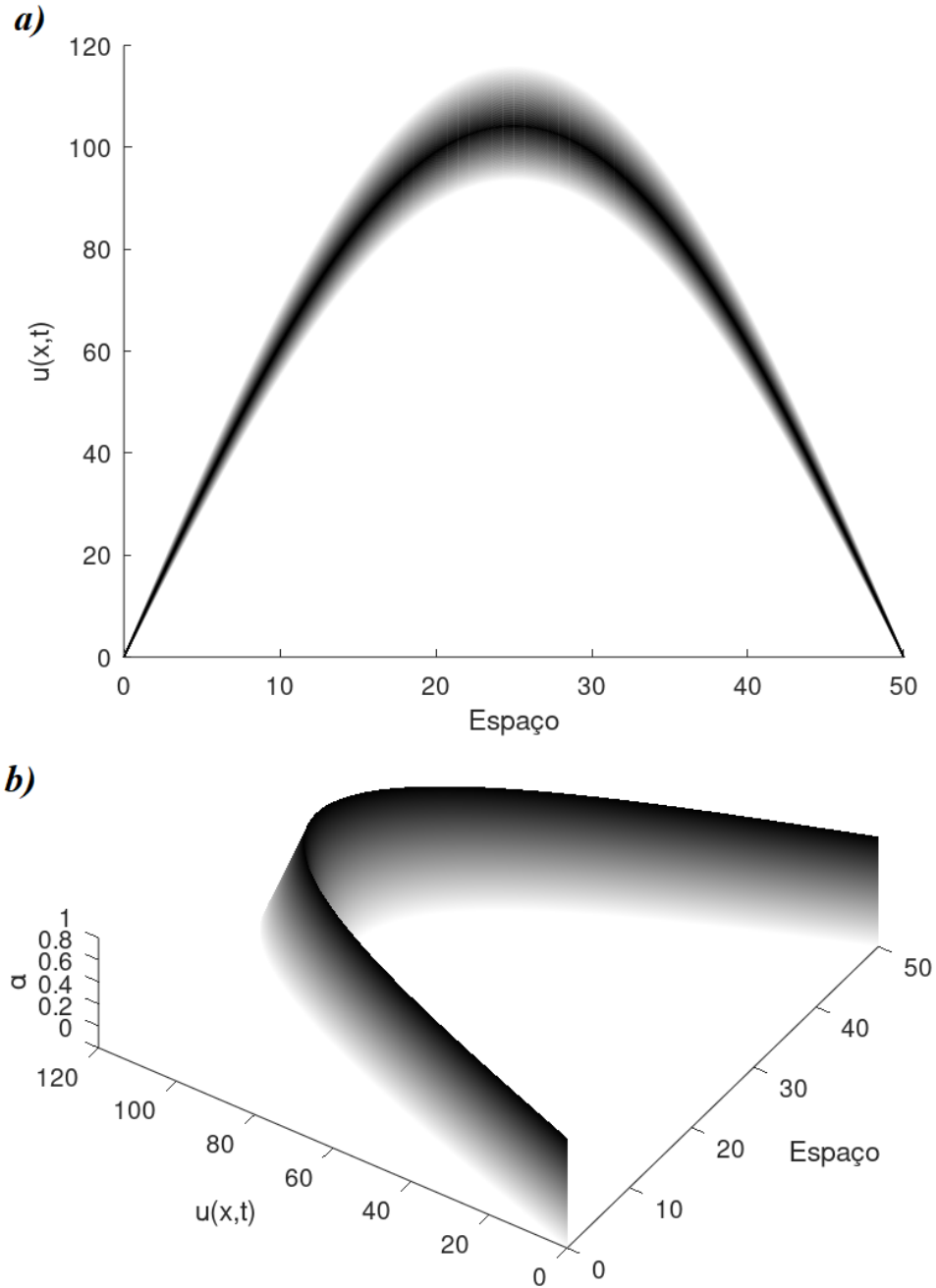
Em *a)* se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, em que se tem a temperatura $u(x,t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra e em *b)* se tem a solução da equação do calor em 3D que se tem diversas soluções com diferentes valores de α , havendo diferentes graus de pertinência, em que a curva em preto representa $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Figura 16 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh com o coeficiente de difusão térmica do cobre como número fuzzy triangular (1,04; 1,14; 1,24)



Em *a)* se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, em que se tem a temperatura $u(x, t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra e em *b)* se tem a solução da equação do calor em 3D que se tem diversas soluções com diferentes valores de α , havendo diferentes graus de pertinência, em que a curva em preto representa $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Figura 17 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh com o coeficiente de difusão térmica da prata como número fuzzy triangular (1,61; 1,71; 1,81)



Em *a)* se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, em que se tem a temperatura $u(x,t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra e em *b)* se tem a solução da equação do calor em 3D que se tem diversas soluções com diferentes valores de α , havendo diferentes graus de pertinência, em que a curva em preto representa $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Nas Subfiguras 15a), 16a) e 17a), se tem a representação bidimensional das soluções da equação do calor para o alumínio, o cobre e a prata, respectivamente, em que se tem a temperatura em função do espaço. Se considera o espaço como sendo o comprimento L da barra.

A curva em preto representa a solução da equação com $\alpha = 1$ e as curvas em escala cinza representam as soluções com diferentes graus de pertinência, em que os extremos superior e inferior da solução do número fuzzy triangular tem $\alpha = 0$, que podem ser melhor visualizadas nas Subfiguras 15b), 16b) e 17b), em que se tem a representação tridimensional.

Conforme se vê em cada Subfigura b) de cada figura, a solução da equação do calor para o caso em que o coeficiente de difusão térmica é um número fuzzy triangular se encontra na curva em preto, em que se tem α -nível igual a 1, ou seja, a curva em preto tem total associação com o que é esperado classicamente, tendo em vista o processo experimental, enquanto que as curvas em escala cinza representam os α -níveis da solução. Já nos extremos inferior e superior, se tem $\alpha = 0$. Assim, quando se tende para a curva em preto tanto pela direita quanto pela esquerda se tem diferentes α -níveis que se aproximam cada vez mais de $\alpha = 1$.

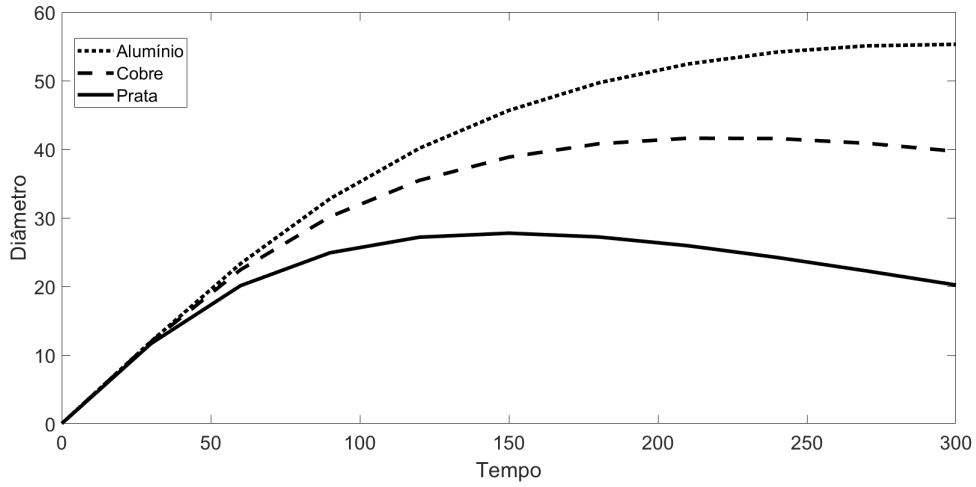
Vale ressaltar que no caso de um número fuzzy triangular o conjunto de soluções se encontra em uma faixa com diferentes graus de pertinência, isto é, havendo também outras soluções com diferentes graus de pertinência. Portanto, assim como antes, se percebe que a condução térmica está diretamente ligada a incerteza associada ao modelo, conjecturando que quanto melhor a condução térmica do material menor a incerteza associada a solução da equação do calor.

Analisando os dois casos, é possível perceber que a modelagem utilizando números fuzzy pode ser mais adequada, uma vez que se tem uma faixa de diferentes graus de pertinência no conjunto solução, isto é, não se tem apenas a solução esperada classicamente como também outras soluções com diferentes graus de pertinência. Sendo assim, o caso em que o coeficiente de difusão térmica é número fuzzy pode ser mais viável do ponto de vista de modelagem em relação ao que ocorre experimentalmente, visto que não é possível obter medidas exatas dos parâmetros considerados.

Ao considerar o diâmetro, assim como feito no caso anterior, pela Figura 18 se tem o diâmetro das soluções para o caso em que o coeficiente de difusão térmica é dado por um número fuzzy triangular.

Nesse caso, os diâmetros das soluções são obtidos calculando o tamanho do 0-nível das soluções (4.7), (4.8) e (4.9), no local da barra em que se tem a maior incerteza. Assim como anteriormente, o material que apresenta menor diâmetro é a prata e o que apresenta maior diâmetro é o alumínio, essa diferença entre os diâmetros podem representar

Figura 18 – Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, no caso em que o coeficiente de difusão térmica é um número fuzzy triangular



Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, em que se observa a diminuição da incerteza ao longo do tempo para os três materiais. A representação de cada material é dada através das linhas pontilhada, tracejada e sólida, representando respectivamente o alumínio, o cobre e a prata. Fonte: (DELGATO; WASQUES, 2022)

que a incerteza pode estar associada a condução térmica do material.

4.2 EQUAÇÃO DO CALOR COM INCERTEZA ASSOCIADA A CONDIÇÃO INICIAL

Tomando agora o caso em que a incerteza está associada a condição inicial, se tem que a incerteza sobre a distribuição de temperatura inicial é modelada pela função fuzzy $F(x) = (0; 1; 2)x(L - x)$, sendo considerados os mesmos materiais utilizados anteriormente, porém aqui os coeficientes de difusão térmica de cada material não sofrem variação, sendo assim, usaremos os coeficientes de difusão térmica apresentados na literatura para o alumínio, o cobre e a prata, sendo eles $K_a = 0,86 \text{ cm}^2/\text{s}$, $K_c = 1,14 \text{ cm}^2/\text{s}$ e $K_p = 1,71 \text{ cm}^2/\text{s}$. É interessante observar que a função fuzzy que foi considerada para descrever a condição inicial, generaliza as funções clássicas anteriores, uma vez que é o núcleo da função fuzzy $F(x)$, isto é, para $\alpha = 1$, obtêm-se a função clássica $f(x)$ dos exemplos anteriores.

Sendo assim, para a equação do calor em (3.11) se tem que

$$\begin{cases} u_t(x, t) = Ku_{xx}, & \text{para } 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = F(x), & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

sendo $F(x)$ dada por uma função fuzzy.

A solução para a equação do calor anterior é resolvida da mesma forma que nos casos anteriores e o princípio de extensão de Zadeh é utilizado para estender essa solução para o caso em que a condição inicial é uma função fuzzy. Nesse caso, os valores c_n são estendidos por meio do princípio de extensão de Zadeh, uma vez que tais coeficientes dependem da função $f(x)$. Sendo assim, a solução é dada por

$$[\hat{u}(x, t)]^\alpha = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^- e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t K}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^+ e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t K}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right], \quad (4.10)$$

em que

$$(c_n)_\alpha^- = \frac{2}{L} \int_0^L f_\alpha^-(x) \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx, \quad (4.11)$$

e

$$(c_n)_\alpha^+ = \frac{2}{L} \int_0^L f_\alpha^+(x) \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx, \quad (4.12)$$

sendo $[F(x)]^\alpha = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)]$.

Desse modo, tomando a mesma condição inicial para os três materiais, $F(x) = (0; 1; 2)x(L - x)$ e substituindo os valores de K_a , K_c e K_p , se obtêm

$$[\hat{u}_{K_a}(x, t)]^\alpha = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^- e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t_{0,86}}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^+ e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t_{0,86}}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right], \quad (4.13)$$

$$[\hat{u}_{K_c}(x, t)]^\alpha = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^- e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t_{1,14}}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^+ e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t_{1,14}}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right] \quad (4.14)$$

e

$$[\hat{u}_{K_p}(x, t)]^\alpha = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^- e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t_{1,71}}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \sum_{n=1}^{\infty} (c_n)_\alpha^+ e^{\left(-\frac{n^2 \pi^2 t_{1,71}}{L^2}\right)} \text{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right], \quad (4.15)$$

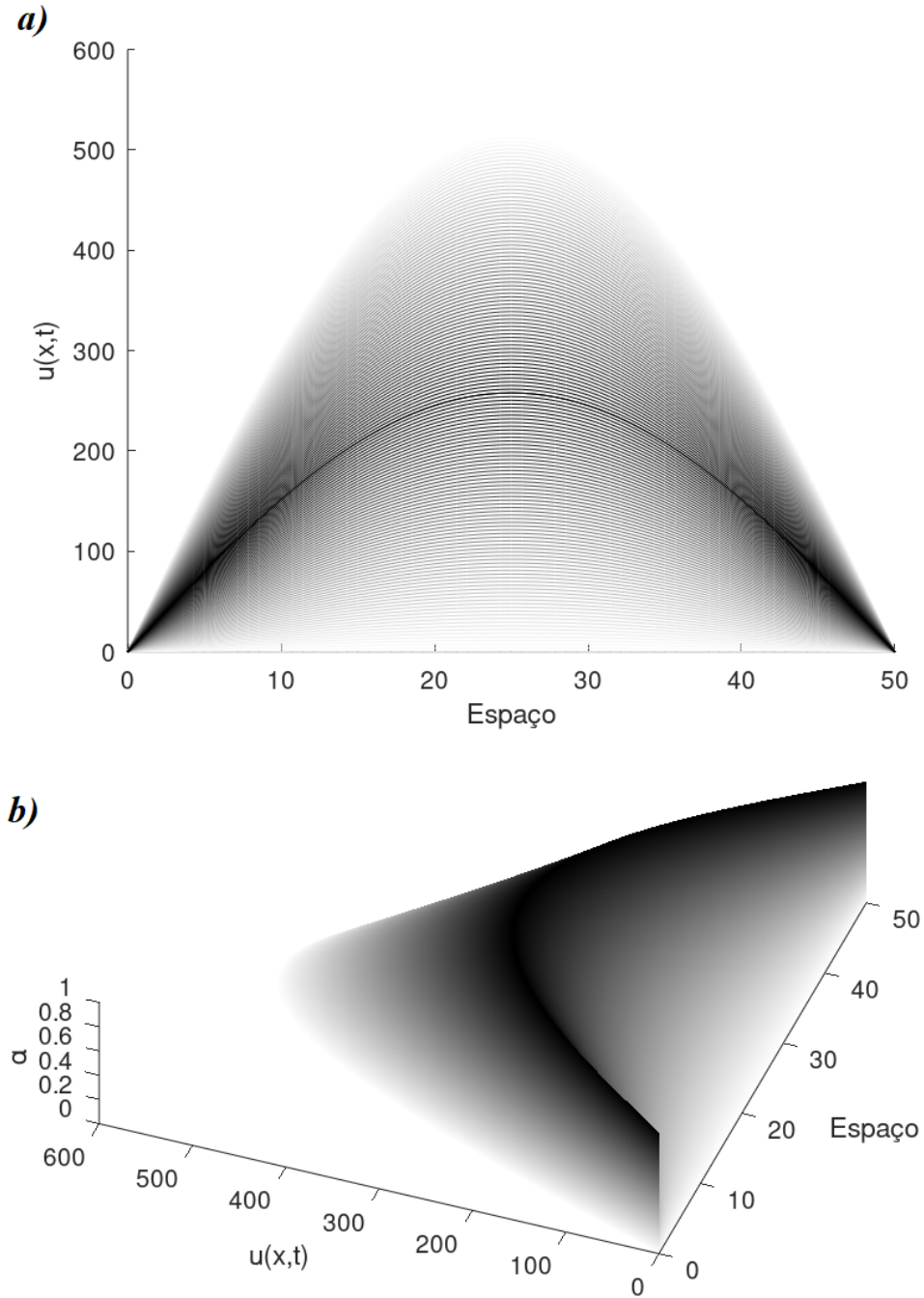
Portanto, através de simulações feitas na plataforma livre Octave, as soluções podem ser visualizadas nas Figuras 19, 20 e 21 para cada material.

Nas Subfiguras 19a), 20a) e 21a) se tem as representações bidimensionais das soluções da equação do calor para o alumínio, o cobre e a prata, respectivamente, em que se considera o espaço como sendo o comprimento L da barra.

A curva em preto presente nos gráficos representa a solução da equação com $\alpha = 1$ e as curvas em escala cinza representam as soluções com diferentes graus de pertinência, que podem ser melhor visualizadas nas Subfiguras 19b), 20b) e 21b) que ilustram as representações tridimensionais.

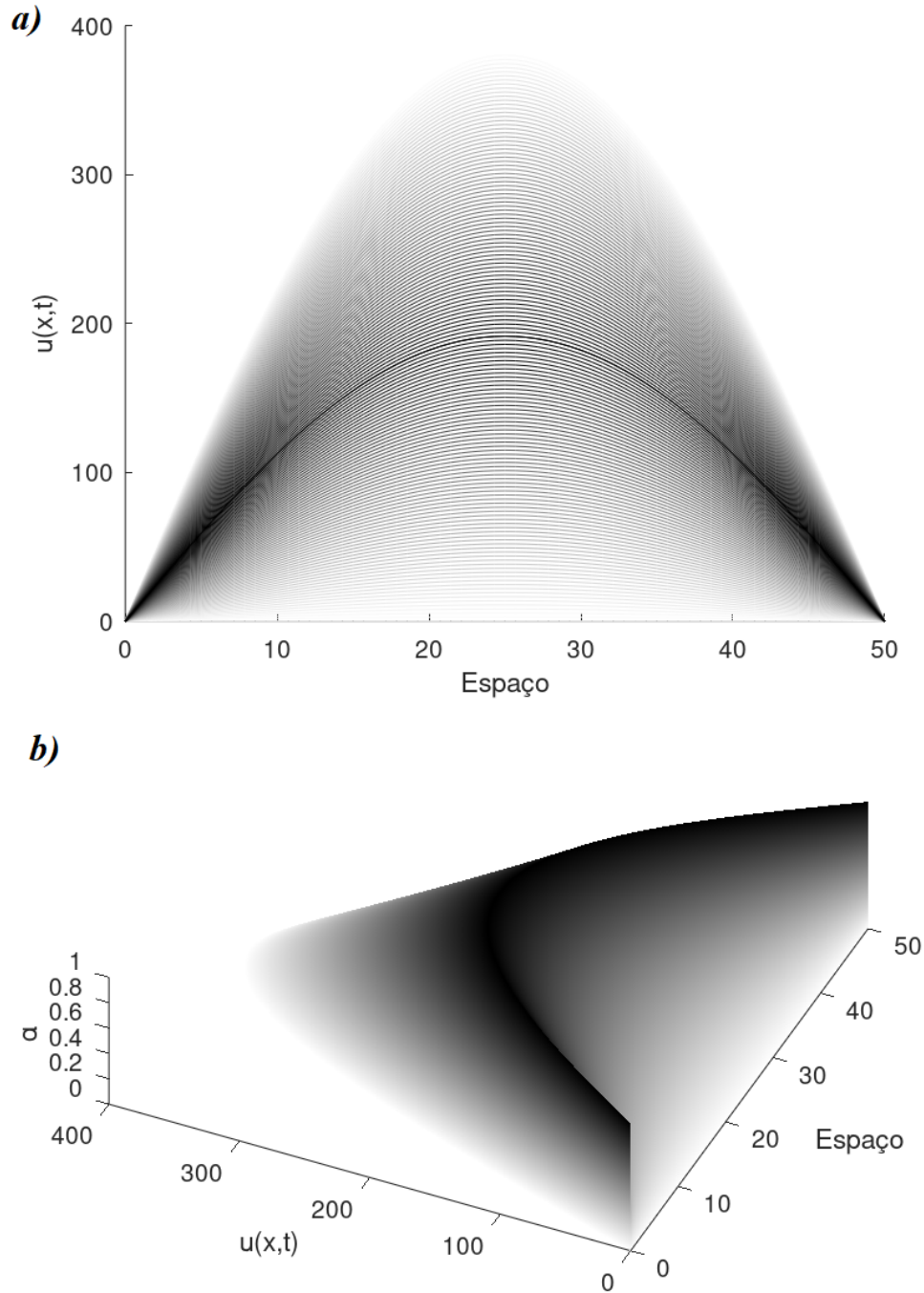
Conforme se vê em cada Subfigura b), a solução da equação do calor para o caso em que a condição inicial é uma função fuzzy se encontra na curva em preto nos três

Figura 19 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica do alumínio $K_a = 0,86\text{cm}^2/\text{s}$



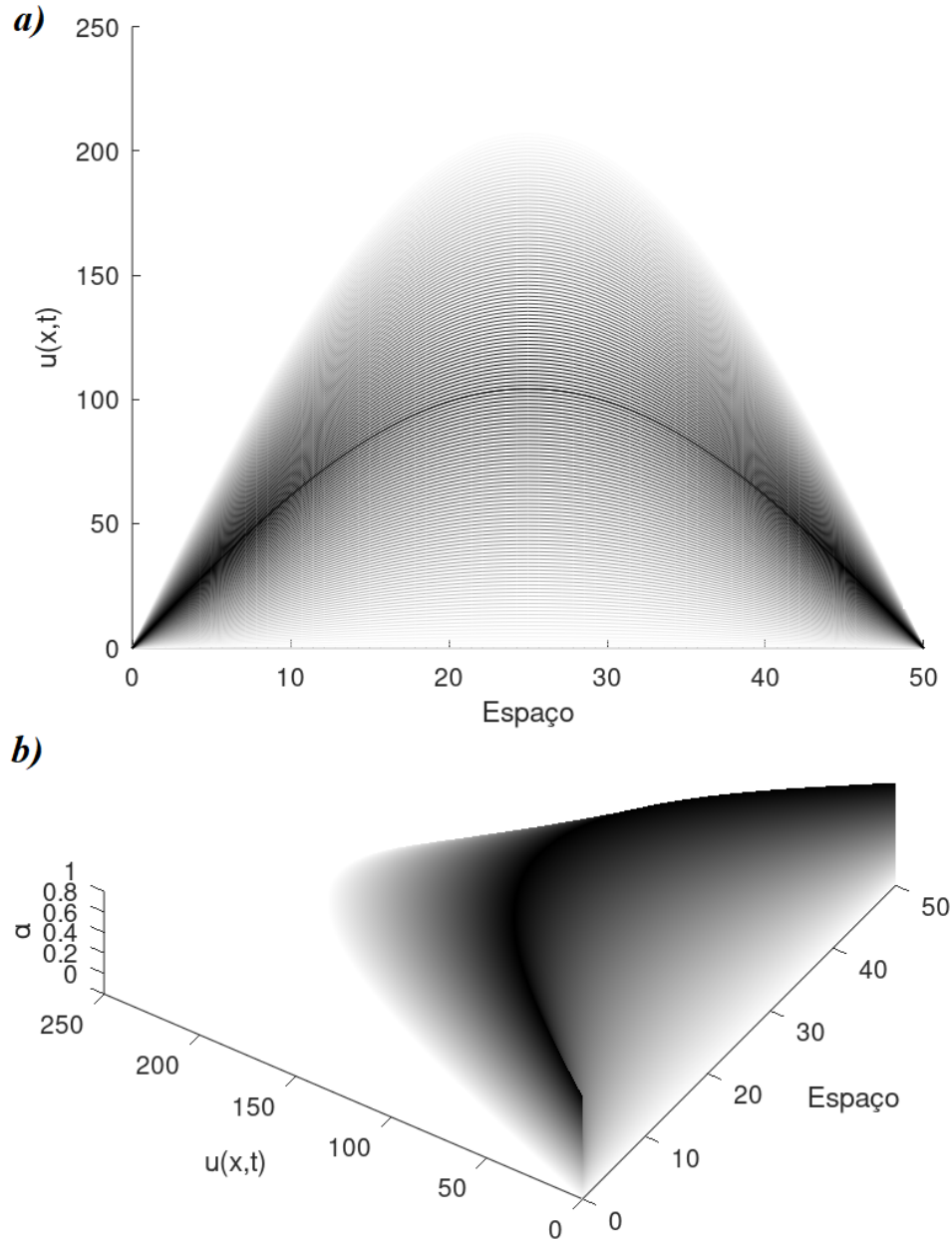
Em *a)* se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, no instante $t = 270$ s, em que se tem a temperatura $u(x, t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra e em *b)* que se tem diversas soluções com diferentes valores de α , havendo diferentes graus de pertinência, em que a curva em preto representa $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Figura 20 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica do cobre $K_c = 1,14\text{cm}^2/\text{s}$



Em *a)* se tem a representação em 2D da solução da equação do calor, no instante $t = 270\text{ s}$, em que se tem a temperatura $u(x, t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra e em *b)* que se tem diversas soluções com diferentes valores de α , havendo diferentes graus de pertinência, em que a curva em preto representa $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

Figura 21 – Representação em 2D e 3D da solução da equação do calor via princípio de extensão de Zadeh, com o coeficiente de difusão térmica do prata $K_p = 1,71\text{cm}^2/\text{s}$



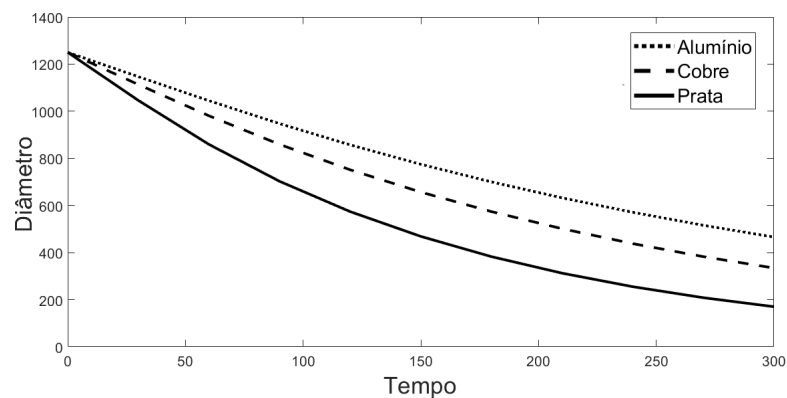
Em *a)* se tem as representações em 2D da solução da equação do calor, no instante $t = 270$ s, em que se tem a temperatura $u(x, t)$ em função do espaço, sendo esse espaço o comprimento L da barra e em *b)* que se tem a solução da equação do calor em 3D para o alumínio, o cobre e a prata, respectivamente, com soluções com diferentes valores de α , havendo diferentes graus de pertinência, em que a curva em preto representa $\alpha = 1$. Fonte: Produção da própria autora

materiais, em que se tem $\alpha = 1$, enquanto que as curvas em escala cinza representam os α -níveis da solução.

Já nos extremos inferior e superior, se tem $\alpha = 0$, então quando se tende para a curva em preto tanto pela direita quanto pela esquerda se tem diferentes α -níveis que se aproximam cada vez mais de $\alpha = 1$. Logo, o conjunto solução se encontra em uma faixa com diferentes graus de pertinência.

A Figura 22 ilustra o diâmetro das soluções fuzzy obtidas para o caso em que a condição inicial é dada por uma função fuzzy.

Figura 22 – Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, no caso em que a condição inicial é uma função fuzzy



Diâmetro das soluções para o alumínio, o cobre e a prata, em que se observa a diminuição da incerteza ao longo do tempo para os três materiais. A representação de cada material é dada através das linhas pontilhada, tracejada e sólida, representando respectivamente o alumínio, o cobre e a prata. Fonte: (DELGATO; WASQUES, 2022)

Ao observar a Figura 22 é possível perceber que o menor diâmetro é dado pela prata e o maior pelo alumínio, reafirmando o que foi dito anteriormente, o diâmetro pode estar associado a condução térmica do material. Se observa também que os valores assumidos são maiores do que nos casos em que a incerteza está associada ao coeficiente de difusão térmica. Vale ressaltar que nos três casos abordados foram considerados intervalos simétricos e de mesmo tamanho nos parâmetros a que a incerteza estava associada, para que dessa forma, fosse possível observar como a incerteza em cada material se comporta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Esse trabalho traz um estudo sobre a teoria de conjuntos fuzzy aplicada na área de termodinâmica. Mais precisamente, esse estudo propõe uma modelagem da equação do calor, que consiste em estendê-la através do princípio de extensão de Zadeh. Foram considerados os casos de incerteza fuzzy em dois dos parâmetros da equação do calor, sendo eles no coeficiente de difusão térmica e na condição inicial, separadamente. No caso do coeficiente de difusão térmica, a incerteza associada considerada foi de dois tipos, a primeira solução é obtida com o coeficiente de difusão térmica fuzzy do tipo intervalar e o segundo com coeficiente de difusão térmica como um número fuzzy triangular. Enquanto que no caso da condição inicial, foi considerada uma incerteza sobre a distribuição de temperatura inicial dada por uma função fuzzy.

É possível perceber através dos gráficos que a incerteza sobre as soluções podem ser mensuradas através dos α -níveis, podendo auxiliar em práticas experimentais, visto que não é possível obter medidas exatas dos parâmetros considerados. Por outro lado, quando é considerada incerteza sobre a condição inicial, se tem que existe uma maior incerteza propagada ao longo do processo, uma vez que existe um maior espaçamento entre as soluções obtidas, ou seja, quanto maior a faixa de soluções maior a incerteza. Vale dizer que dentre os casos apresentados o que melhor representa o processo experimental é o caso em que o coeficiente de difusão térmica é um número fuzzy triangular, afinal se tem uma faixa de soluções com diferentes graus de pertinência, tendo a solução esperada e soluções que se aproximam dela.

Ao fazer a comparação entre as figuras dos três materiais considerados, se percebe que o calor se distribui melhor no cobre e na prata do que no alumínio, sendo a prata o melhor condutor térmico entre os três materiais e o alumínio o pior. O fato de haver uma melhor condução de calor na prata pode influenciar na incerteza associada a esse material, fazendo com que o espaço entre os extremos seja menor, ou seja, há uma menor incerteza associada, enquanto que no cobre e no alumínio se tem um maior espaço entre as superfícies, tendo uma maior incerteza em relação a prata. Portanto, se pode concluir também que a condução térmica está diretamente ligada a incerteza associada ao modelo, conforme pode ser visto nos três casos considerados, conjecturando que quanto melhor a condução térmica do material menor a incerteza associada a solução da equação do calor.

Os resultados preliminares deste estudo foram publicados no VI Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (CBSF) ([DELGATO; WASQUES, 2021a](#)) e apresentados em dois eventos científicos, um deles no próprio CBSF e o outro no XXXIII Congresso de Iniciação Científica Unesp (CIC) ([DELGATO; WASQUES, 2021b](#)). A versão completa do

trabalho foi submetida em periódico internacional ([DELGATO; WASQUES, 2022](#)).

Como trabalhos futuros se pretende utilizar o princípio de extensão sup- J ao invés da extensão de Zadeh para estender a solução, a fim de incorporar a noção de interatividade fuzzy, que nesse problema estaria atrelada a uma dependência entre variáveis fuzzy que modelam as condições iniciais ou de contorno.

REFERÊNCIAS

- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; LODWICK, W. A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Berlin: Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2017. (347).
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.
- DELGATO, Y. Z.; WASQUES, V. F. Processos termodinâmicos com incerteza via princípio de extensão. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY, 6., 2021. *Livro de Resumos*. 2021. Disponível em: <https://sites.google.com/unesp.br/vicbsf/proceedings-e-livro-de-resumos-novo?authuser=0>. Acesso em: nov. 2021.
- DELGATO, Y. Z.; WASQUES, V. F. Solução para a equação do calor com coeficiente de difusão fuzzy do tipo intervalar. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 33., 2021. *Plataforma virtual Even3*. 2021. Disponível em: <https://www.even3.com.br/xxxiicicunesp/>. Acesso em: nov. 2021.
- DELGATO, Y. Z.; WASQUES, V. F. A study of the heat transfer in materials with interval and fuzzy values via extension principle. (*Submetido na Journal of Differential Equations*), Elsevier, 2022.
- ESMI, E.; SANCHÉS, D. E.; WASQUES, V. F.; BARROS, L. C. Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 419, p. 122–140, 2021.
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- FULLÉR, R.; MAJLENDER, P. On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 143, n. 3, p. 355–369, 2004.
- GOUYANDEH, Z.; ALLAHVIRANLOO, T.; ABBASBANDY, S.; ARMAND, A. A fuzzy solution of heat equation under generalized hukuvara differentiability by fuzzy fourier transform. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 309, p. 81–97, 2017.
- KALEVA, O. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 301–317, 1987.
- LEITE, J.; CECCONELLO, M.; LEITE, J.; BASSANEZI, R. C. On fuzzy solutions for diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, v. 2015, p. 1–10, 2015.
- MIZUKOSHI, M. T.; BARROS, L. C.; CHALCO-CANO, Y.; ROMAN-FLORES, H.; BASSANEZI, R. C. Fuzzy differential equations and the extension principle. *Information Sciences*, Elsevier, v. 177, p. 3627–3635, 2007.
- NIETO, J. J.; KHASTAN, A.; IVAZ, K. Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Elsevier, v. 3, p. 700–707, 2009.

PIRZADA, U. M.; VAKASKAR, D. C. Solution of fuzzy heat equation under fuzzified thermal diffusivity. In: *Industrial Mathematics and Complex Systems*. Singapur: Springer, 2017. p. 271–281.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para Cientistas e Engenheiros, volume 1: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

WASQUES, V. F. *Lógica Fuzzy aplicada à geologia*. 120 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015.

WASQUES, V. F. Numerical solution for fuzzy partial differential equations with interactive fuzzy boundary conditions. In: *Explainable AI and Other Applications of Fuzzy Techniques*. Switzerland: Springer, Cham, 2021. p. 486–498.

WASQUES, V. F.; ESMI, E.; BARROS, L. C.; SUSSNER, P. Numerical solution for fuzzy initial value problems via interactive arithmetic: Application to chemical reactions. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, Atlantis Press, v. 13, n. 1, p. 1517–1529, 2020.

ZADEH, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i. *Information Sciences*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 199–249, 1975.