

FABÍOLA ORTEGA VASCONCELOS

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DA TRAVESSA DE UM CHASSI DE CAMINHÃO
ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Fabíola Ortega Vasconcelos

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DA TRAVESSA DE UM CHASSI DE CAMINHÃO
ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins

Guaratinguetá
2015

V331o

Vasconcelos, Fabíola Ortega

Otimização estrutural da travessa de um chassi de caminhão através da simulação pelo método de elementos finitos / Fabíola Ortega Vasconcelos. – Guaratinguetá, 2016.

77 f : il.

Bibliografia: f. 62-63

Trabalho de Graduação em Engenharia de Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins

1. Veículos comerciais 2. Otimização estrutural 3. Método dos elementos finitos I. Título

DU 629.113

FABÍOLA ORTEGA VASCONCELOS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADA EM ENGENHARIA MECÂNICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. MARCELO SAMPAIO MARTINS
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. MARCELO SAMPAIO MARTINS
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. JOSÉ ELIAS TOMAZINI
UNESP-FEG

Prof. Me. FABRICIO VIEIRA SILVA
UNESP-FEG

Dezembro de 2015

DADOS CURRICULARES

Fabíola Ortega Vasconcelos

NASCIMENTO 26.12.1983 – SÃO PAULO / SP

FILIAÇÃO Antônio Fernando de Vasconcelos Pereira
Sueli Ortega

2006-2015 Curso de Graduação
Engenharia Mecânica - Faculdade de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista - UNESP

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter permitido com que tivesse os ensinamentos vividos até hoje e que me permitiram alcançar os meus objetivos diante de tantos desafios,

aos meus pais, *Sueli e Fernando*, que em todo o meu viver me apoiaram, acreditaram e fizeram tudo para que eu pudesse sempre alcançar meus objetivos através de valores como simplicidade, amor, humildade e determinação,

às minhas irmãs, *Fabiana e Fernanda*, que mesmo estando distante fisicamente estiveram ao meu lado e me confortaram com palavras de carinho e alegria além de sempre vibrarem com minhas conquistas,

ao meu namorado *Thomaz*, que foi fundamental para a conclusão de minha graduação. Auxiliando por muitos momentos nos meus estudos, me incentivando e orientando além do carinho e zelo comigo,

ao meu professor e orientador *Prof. Dr. Marcelo Sampaio*, que sempre se mostrou compreensível e preocupado com minhas dificuldades, orientando-me não somente neste trabalho de graduação, mas sim em minha vida acadêmica, o que me tranquilizou e permitiu com que tudo se concretizasse,

à *Maria do Carmo*, por sempre abrir as portas de sua casa onde passei horas estudando, e permitindo com que eu me sentisse mais perto de minha família com toda sua atenção e carinho,

à empresa *Iochpe Maxion - Structural Components* e ao engenheiro Raphael Barbosa Carneiro Lima, que permitiram o uso da tecnologia para as simulações realizadas neste trabalho além de todo o conhecimento adquirido,

à Faculdade de Engenharia Campus Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista (UNESP) que proporcionou todo o conhecimento para que me tornasse Engenheira Mecânica, além de permitir eternizar muitos momentos felizes através da participação no Programa de Educação Tutorial - PET, no time de futsal, na Lobateria e na minha República. Foram momentos incríveis e que jamais serão esquecidos.

“Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes forem necessárias. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar aonde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz”.

Bill Gates

VASCONCELOS, F. O. **Otimização estrutural da travessa de um chassi de caminhão através da simulação pelo método de elementos finitos**. 2015. 75 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

RESUMO

Devido à grande competitividade entre os fabricantes de caminhões e com a entrada de novas legislações de redução de emissões de poluentes as estruturas dos veículos sofreram alterações de peso, com aumento dos esforços no chassi. Nesse contexto faz-se necessário o desenvolvimento contínuo para a melhoria do comportamento estrutural, visando à redução de custos, redução das emissões de poluentes e ganhos em desempenho do veículo. A otimização da forma e redução de massa da estrutura do chassi, apresentam-se como alternativas para esta finalidade. O chassi é responsável por dar resistência e estabilidade ao veículo frente a solicitações de carga e, portanto, é considerado o componente mais significativo de um automóvel. As travessas, elementos transversais dos chassis, são responsáveis pela melhoria da resistência à torção do chassi. Sendo a rigidez do elemento influenciada pela sua geometria, tem-se como estratégia de redução de massa a otimização da geometria da peça. Esta pesquisa busca analisar a otimização da forma de travessas para redução de massa, utilizando cálculos por elementos finitos e simulação por computador, sem alterar as propriedades mecânicas de projeto. Os resultados verificados neste estudo apresentaram-se muito expressivos, porém destaca-se a necessidade da validação dos mesmos com testes em campo.

PALAVRAS-CHAVE: Redução de massa. Método dos elementos finitos. Otimização de forma.

VASCONCELOS, F. O. **Structural optimization of truck chassis platter through simulation by the finite element method.** 2015 75f. Graduate Work (Graduate in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

ABSTRACT

Due to the great competition between truck manufacturers and the entry of new legislation to reduce emissions of polluting the structure of the vehicles suffered weight changes, with increased efforts on the chassis. In this context it is necessary to the continued development to improve the structural behavior in order to reduce costs, reduction of pollutant emissions and gains in vehicle performance. Shape optimization and reduction of the mass of the chassis structure, present themselves as alternatives for this purpose. The chassis is responsible for giving strength and stability to the vehicle front load requests and, therefore, is considered the most significant component of an automobile. The cross-cutting elements of chassis, are responsible for the improvement of resistance to twist the chassis. The rigidity of the element being influenced by its geometry, as mass reduction strategy optimization of the geometry of the part. This research seeks to analyze the shape optimization of sleepers for mass reduction using finite element calculations and computer simulation, without changing the mechanical properties of project. The results recorded in this study were very expressive, but the need for validation of the same with field testing.

KEYWORDS: Mass reduction. The finite element method. Shape optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo da estrutura de um chassi de caminhão.....	16
Figura 2 - Travessa de chassi não otimizada.	16
Figura 3 - Travessa de chassi otimizada.....	17
Figura 4 - Exemplo de análise estática.	20
Figura 5 - Representação em elementos de barra.	21
Figura 6 - Estrutura completa de uma Treliça.	24
Figura 7 - Diagrama de corpo livre representando as coordenadas do Sistema Global e Sistema Local de um elemento de treliça.	24
Figura 8 - Equilíbrio da barra no sistema local por intermédio de quatro forças.	26
Figura 9 - Elemento de barra de treliça, considerando os componentes de deslocamento do Sistema Global.....	28
Figura 10 - Representação da treliça para exemplificação de análise numérica.	29
Figura 11 - Representação de cada nó do Modelo da Estrutura e o ângulo α para as diversas barras.	30
Figura 12 - Identificação de cada elemento do modelo e os graus de liberdade da estrutura ..	31
Figura 13 - Forças aplicadas e reações de apoio para estrutura em equilíbrio	36
Figura 14 - Passos para a solução de MEF.....	37
Figura 15 - Demonstração da funcionalidade do HyperMesh.....	39
Figura 16 - HyperMesh permite isolar partes ou demonstrar conjunto de segmentos definidos pelo usuário.	39
Figura 17 - Teste físico simulado no HiperView.	40
Figura 18 - Vista explodida durante a simulação mantendo-se as características do pós-processamento.	41
Figura 19 - Apresentação da otimização de dois componentes com alteração da geometria e ganhos em redução de massa.....	42
Figura 20 - Características das estruturas que podem ser avaliadas com o OptiStruct.	42
Figura 21 - Observam-se os pontos de concentração de tensão da estrutura em análise simulando o mesmo em movimento real.....	43
Figura 22 - Exemplo de estrutura com os três processos de otimização: (a) dimensional, (b) de forma e (c) topológica.....	44
Figura 23 - Diagrama de tensão deformação para aço (material dúctil)	48
Figura 24 - Travessa de um chassi de caminhão.	50

Figura 25 - Carregamento torsional da travessa.	51
Figura 26 - Deslocamento vertical de 10 mm da travessa.	52
Figura 27 - Travessa com deslocamento de 10 mm na superfície lateral.....	52
Figura 28 - Geometria a ser otimizada já com as restrições definidas.	53
Figura 29 - Resposta a torção da travessa.	54
Figura 30 - Resposta ao deslocamento vertical de 10 mm da travessa.....	55
Figura 31 -. Resposta ao deslocamento vertical de 10 mm da travessa.....	55
Figura 32 - Resposta numérica do comportamento da travessa mediante torção, deslocamento transversal e lateral.	57
Figura 33 - Imagem da resposta as restrições de massa e <i>compliance</i> para a otimização topológica.	59
Figura 34 - Novo modelo de travessa proposto após a resposta da simulação do software.	59

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Incidência de elementos e seus respectivos nós.....	29
Quadro 2 – Ângulos α para as diversas barras do modelo da estrutura.....	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Resultados apresentados à torção, deslocamento transversal e lateral da travessa. .	56
Tabela 2 – Resultados das iterações apresentadas pelo software Altair.....	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANFAVEA	Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores
PROCONVE	Programa de Controle da Poluição do Ar por Veículos Automotores
INOVAR-AUTO	Programa de Incentivo à Inovação Tecnológica e Adensamento da Cadeia Produtiva de Veículos Automotores
ALMACO	Associação Latino-Americana de Materiais e Compósitos

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção
L	Dimensão
F	Força normal
E	Coeficiente de elasticidade ou módulo de Young
u	Deformação elástica
k	Coeficiente de rigidez
ε	Deformação específica
σ	Tensão normal
δ	Deslocamento nodal
Δl	Deformação elástica
T	Matriz transposta
λ	$\cos \alpha$
μ	$\sin \alpha$
α	ângulo
P	Força peso
τ	Tensão de cisalhamento
G	Coeficiente de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez
γ	Deformação por cisalhamento
T	Torque
c	Distância da linha neutra até o ponto onde se deseja analisar a torção
J	Momento de inércia polar da área da seção transversal
ν	Coeficiente de Poisson
ρ	Densidade

SUMÁRIO

RESUMO.....	7
ABSTRACT	8
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	13
LISTA DE SÍMBOLOS	14
1. INTRODUÇÃO	15
1.1. JUSTIFICATIVA	16
1.2. OBJETIVO	17
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1. CONTEXTUALIZAÇÃO	18
2.2. CHASSIS.....	18
2.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	19
2.3.1. <i>Complexidade de Cálculo</i>	20
2.3.2. <i>Modelagem de elemento de Barra – Barra transversal</i>	20
2.3.3. <i>Modelagem de elementos de Barra - Treliça Plana</i>	24
2.4. APLICAÇÃO NUMÉRICA	28
2.4.1. <i>Parâmetros geométricos da estrutura</i>	29
2.4.2. <i>Montagem da matriz de rigidez dos elementos</i>	32
2.4.3. <i>Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura</i>	33
2.5. ETAPAS BÁSICAS PARA APLICAÇÃO DO MEF.....	37
2.5.1. <i>Pré-processamento</i>	37
2.5.2. <i>Processamento</i>	38
2.5.3. <i>Pós-processamento</i>	38
2.6. O SOFTWARE	38
2.7. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	43
2.8. RIGIDEZ TORCIONAL	45
3.1. MODELO E MATERIAL DA TRAVESSA UTILIZADA	50
3.2. SIMULAÇÃO ESTÁTICA DA TRAVESSA	51
5. CONCLUSÃO.....	60
5.1. PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS	61
REFERÊNCIAS	62
ANEXO A – RESPOSTA DO SOFTWARE PARA A SIMULAÇÃO	64

1. INTRODUÇÃO

Devido ao atual cenário de retração econômica brasileira, vivenciado desde o segundo semestre de 2014, principalmente no setor automotivo, e a grande competitividade dos fabricantes de caminhões e ônibus, o mercado neste segmento, busca novas tecnologias a fim de tornar seus veículos ainda mais competitivos, trabalhando em pesquisas e desenvolvimento (P&D) voltados para robustez e uso de toda a capacidade do veículo.

Com a chegada das fases P-6 e P-7, do Programa de Controle da Poluição do Ar por Veículos Automotores (PROCONVE), que estabeleceu prazos, limites e exigências tecnológicas objetivando reduzir e controlar a emissão de poluentes na atmosfera, o setor automobilístico enfrenta ainda mais desafios a fim de atender as novas legislações e se manter competitivo.

A necessidade de P&D no setor de automotivo também está atrelada ao Programa de Incentivo à Inovação Tecnológica e Adensamento da Cadeia Produtiva de Veículos Automotores (Inovar-Auto) objetivando ganhos nos veículos como segurança, economia e por consequência estímulo a concorrência.

Apresentando um faturamento US\$ 110,9 bilhões, em 2013, o setor automobilístico possuía uma participação de 23% no PIB ocupando o 7º lugar como produtor mundial e o 4º lugar no mercado interno. Ainda neste ano registrou-se 31 fabricantes de veículos e 5.386 concessionárias além as 64 unidades industriais distribuídas no país (ANFAVEA, 2015), demonstrando a grande relevância do setor.

O avanço em novas tecnologias, conceitos e consequentemente projetos mais eficientes é o que está alavancando o desenvolvimento do produto das indústrias automobilísticas sendo, portanto, consideradas como fator de competitividade industrial possibilitando maiores ganhos no mercado (CONSONI, 2002). Neste cenário cabe destacar o uso de softwares computacionais como ferramentas, dentro destas novas tecnologias e conceitos, já que através dos mesmos se consegue uma prévia análise e simulação do comportamento mecânico de um veículo e ainda a construção de modelos numéricos complexos, através, por exemplo, do Método de Elementos Finitos (MEF) (ROCHA, 2004).

1.1. JUSTIFICATIVA

Diante do exposto, com a grande competitividade entre os fabricantes de caminhões e com a entrada de novas legislações de redução de emissões de poluentes, a estrutura dos veículos sofreu alterações de peso, com aumento dos esforços no chassi. Nesse contexto faz-se necessário o desenvolvimento contínuo para a melhoria do comportamento estrutural, objetivando a redução de custos, redução das emissões de poluentes e ganhos em desempenho do veículo. A otimização da forma e redução de massa da estrutura do chassi, apresentam-se como alternativas para esta finalidade. O chassi é responsável por dar resistência e estabilidade ao veículo frente a solicitações de carga e, portanto, é considerado o componente mais significativo de um automóvel. Na Figura 1, a seguir, apresenta-se um modelo de chassi, onde também é possível verificar as travessas localizadas perpendicularmente as longarinas e objeto de estudo deste trabalho.

Figura 1 – Exemplo da estrutura de um chassi de caminhão.



Fonte: (IOCHPE MAXION, 2015).

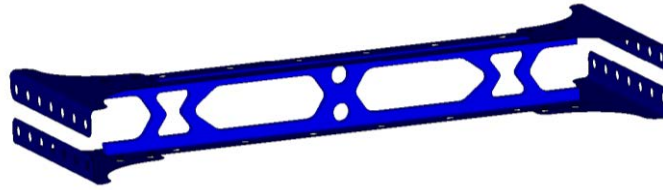
As travessas, ou elementos transversais dos chassis, são responsáveis pela melhoria da resistência à torção do chassi. Sendo a rigidez do elemento influenciada pela sua geometria, tem-se como estratégia de redução de massa a otimização da geometria da peça. Exemplos de otimização da geometria da peça são apresentados na Figura 2 e Figura 3, onde é possível verificar apresentações de geometrias distintas para a mesma aplicação de projeto.

Figura 2 - Travessa de chassi não otimizada.



Fonte: (IOCHPE MAXION, 2015).

Figura 3 - Travessa de chassi otimizada.



Fonte: (IOCHPE MAXION, 2015).

1.2. OBJETIVO

Será verificado neste trabalho o comportamento e a resistência das travessas utilizadas nos chassis de caminhão juntamente com a análise estrutural das mesmas objetivando à otimização de geometria e redução de massa, através de cálculos de elementos finitos e simulação por computador.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Segundo Brown, Robertson e Serpento (2002) o chassi não se apresentava como elemento significativo em um veículo, seu objetivo principal era apenas garantir conforto e proteção térmica aos passageiros. Em 1920, iniciou-se a construção de chassis metálicos, com peças feitas em chapa de aço unidas com solda. Já em 1950, o chassi passa a ser visto como o centro do veículo e sobre este se realiza a montagem de todos os componentes. Atualmente o chassi é a estrutura responsável por garantir conexão dos diversos elementos que compõem o veículo, como cabine, portas, assoalho, entre outros e ainda por absorver as várias cargas aplicadas a um veículo e manter a forma do mesmo. A maior parte do custo de um veículo está no chassi e o mesmo apresenta diversos conceitos estruturais a fim de garantir o melhor desempenho, baixo custo, produtividade e diversas aplicações. É importante ainda salientar que a eficiência de um chassi está diretamente relacionada à elevada rigidez torcional e a massa do mesmo devido à movimentação do veículo que acaba sujeitando o chassi a diversos esforços mecânicos complexos e solicitações dinâmicas, como vibrações e choques.

2.2. CHASSIS

Algumas características são relevantes para a composição do chassi tais como ser fabricado em material com boa resistência a fadiga, a deformação e menor peso. Normalmente os chassis são fabricados através de chapas de aços com espessuras que variam em média de 6 a 8 mm, estampados em uma prensa, na forma de U ou duplos T com baixo teor de carbono garantindo maior resistência a solicitações mecânicas e permitindo a conexão a diversas estruturas.

De acordo com Ford Caminhões (2014) a estrutura de um chassi é composta basicamente por duas longarinas de aço paralelas entre si, fixadas por travessas perpendiculares ou em forma de cruz que podem ser soldadas e/ou rebitadas. O apoio do chassi é feito no eixo dianteiro e traseiro do veículo distribuindo os demais componentes a fim de obter equilíbrio dos pesos sobre as rodas do veículo proporcionando adequada capacidade de tração, direção e equilíbrio de frenagem. É importante garantir a estabilidade quanto à

torção do chassi para que a carroceria não sofra deslocamentos caso contrário haverão folgas e pontos fragilizados.

2.3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Segundo Azevedo (2003, p.1) “o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como objetivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações exteriores” através da discretização de um meio, contínuo e complexo, em diversos elementos, interconectados por pontos ou nós, descritos em equações diferenciais solucionadas através de modelos matemáticos, mantendo as propriedades originais do meio nos diversos elementos finitos.

A classificação quanto à geometria, modelo do material, as ações aplicadas, aspectos como análises dinâmica ou estática, análise linear ou não linear e a classificação da estrutura em laminar, sólidas ou reticulares se fazem necessários para que se possa fazer a formulação do problema em MEF.

Através do Método dos Elementos Finitos é possível determinar o comportamento estrutural de componentes com geometria complexa. É importante que se tenha determinado o carregamento atuante na forma de forças, cargas gravitacionais, pressão, e as condições de fixação da estrutura (ALVES FILHO, 2005) a fim de se verificar as regiões onde haja maior solicitação do componente, a análise de seu comportamento e a otimização necessária no que tange o projeto do componente. Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014) a análise estrutural permite estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos, em uma parte ou em toda a estrutura. Na indústria automotiva, verifica-se o uso de MEF para análise de vibrações, acústica, conforto, otimização da rigidez do chassi, aumento da vida à fadiga dos componentes da suspensão, otimização da aerodinâmica e projeto do motor para atendimento das especificações de tensão e temperatura não ultrapassem as admissíveis (CAMPILHO, 2012). Portanto o MEF apresenta-se como uma ferramenta diferenciada capaz de reduzir prazos de projetos, custos e consequentemente favorecendo a competitividade entre as empresas.

De acordo com Chandrupatla (2014) o Método dos Elementos Finitos, com o avanço da tecnologia da computação, tornou-se uma ferramenta essencial para a solução numérica de diversos problemas de engenharia, permitindo-se testar diversas configurações das estruturas antes que o produto seja desenvolvido. É possível avaliar uma região complexa que define um

meio contínuo transformando-a em formas geométricas simples e discretas, denominadas “Elementos Finitos” que quando submetida a um processo de montagem, considerando as solicitações atuantes, obtém-se um conjunto de equações as quais tem sua solução através de aproximação do meio contínuo.

A formulação do MEF pode ser baseada no método dos deslocamentos, em modelos de equilíbrio, ou em métodos híbridos e mistos (AZEVEDO, 2003). O método mais amplamente utilizado devido a sua versatilidade é o dos deslocamentos o qual também será o método de referência deste trabalho.

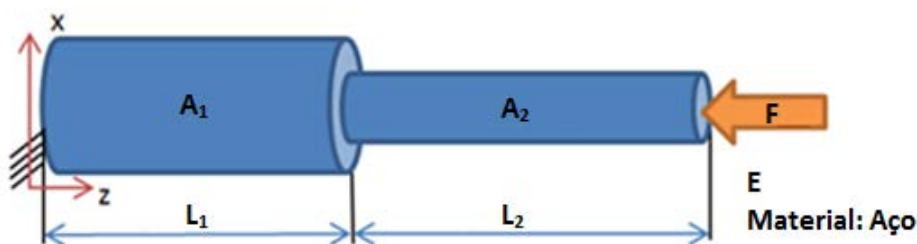
2.3.1. Complexidade de Cálculo

Estabeleceu-se neste estudo que a análise será estática e linear para que se possa determinar a solução do problema a ser avaliado. Para a compreensão do método e a verificação da complexidade do mesmo indicando a necessidade de uma simulação por softwares simuladores, apresenta-se a exemplo de dois casos padrões.

2.3.2. Modelagem de elemento de Barra – Barra transversal

O primeiro caso é o de análise estática de uma barra transversal, verificado na Figura 4. O problema é composto por duas diferentes regiões com seção transversal uniforme.

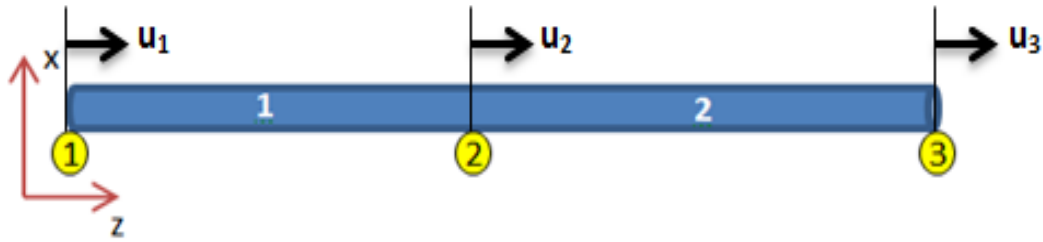
Figura 4 - Exemplo de análise estática.



Fonte: (AUTOR).

A metodologia que será apresentada para o cálculo desta seção poderá ser aplicada para qualquer tipo de problema. Primeiramente deve-se representar a estrutura com “nós” e “elementos”, no exemplo da Figura 4, serão determinados dois elementos, sendo um para cada seção distinta, conforme Figura 5.

Figura 5 - Representação em elementos de barra.



Fonte: (AUTOR).

Observa-se que o modelo é composto por três nós representados por círculos amarelos (1, 2 e 3) e dois elementos (1 e 2). A propriedade do material está associada a cada elemento A_1 e A_2 e cada nó tem apenas um grau de liberdade (glb), que são conjuntos de deslocamentos e/ou rotações independentes que especificam completamente a posição, deslocada ou deformada, e a orientação do sistema. Para este tipo de análise estática o problema pode ser definido pela relação, conforme equação (1).

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\} \quad (1)$$

Logo, a matriz de rigidez para esta barra é dada pela equação (2) a seguir:

$$K_n = \begin{bmatrix} \frac{A_n E}{L_n} & -\frac{A_n E}{L_n} \\ -\frac{A_n E}{L_n} & \frac{A_n E}{L_n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde $n=1,2,3\dots n$ elementos.

Assim para o exemplo da Figura 4, e a partir da Equação (2), tem-se:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E}{L_1} & -\frac{A_1 E}{L_1} \\ -\frac{A_1 E}{L_1} & \frac{A_1 E}{L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (3)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{A_2 E}{L_2} & -\frac{A_2 E}{L_2} \\ -\frac{A_2 E}{L_2} & \frac{A_2 E}{L_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix} \quad (4)$$

Observe que as numerações de 1 a 3, em negrito, representam o número dos nós que compõem os elementos 1 e 2.

O próximo passo é montar a matriz de rigidez global (KG), que é a soma das suas matrizes apresentadas em (3) e (4), esta montagem é feita de acordo com a localização de cada elemento, de forma vetorial, por isso a importância de se relacionar as forças e os deslocamentos a um sistema de referências denominado coordenadas locais, onde a abscissa, apresentada anteriormente na Figura 5, corresponde ao eixo ao longo do elemento. Na equação (5), apresenta-se a matriz de rigidez global:

$$K_G = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E}{L_1} & -\frac{A_1 E}{L_1} & -\frac{A_1 E}{L_1} \\ -\frac{A_1 E}{L_1} & \frac{A_1 E}{L_1} + \frac{A_2 E}{L_2} & -\frac{A_2 E}{L_2} \\ 0 & -\frac{A_2 E}{L_2} & \frac{A_2 E}{L_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix} \quad (5)$$

É necessário ainda escrever o vetor da força e o vetor deslocamento que agem nos nós, de maneira tal como nas equações (6) e (7), respectivamente.

$$f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}, \text{ que neste exemplo será igual a } \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Finalmente pode-se escrever o sistema global, conforme equação (8):

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1 E}{L_1} & -\frac{A_1 E}{L_1} & -\frac{A_1 E}{L_1} \\ -\frac{A_1 E}{L_1} & \frac{A_1 E}{L_1} + \frac{A_2 E}{L_2} & -\frac{A_2 E}{L_2} \\ 0 & -\frac{A_2 E}{L_2} & \frac{A_2 E}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Como o nó 1, está engastado o mesmo apresenta zero glb, uma vez que apresenta deslocamento nulo. Portando pelo método da eliminação, deve-se eliminar a primeira linha e a primeira coluna da formulação (8), resultando na equação (9):

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1 E}{L_1} + \frac{A_2 E}{L_2} & -\frac{A_2 E}{L_2} \\ -\frac{A_2 E}{L_2} & \frac{A_2 E}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Para resolver este problema inverte-se a matriz de rigidez global e multiplicam-se ambos os lados e igualando ao vetor força de maneira a obter o resultado final de x_2 e x_3 e posteriormente x_1 .

Com o vetor deslocamento definido é possível determinar a deformação do elemento, tensões e forças, respectivamente conforme equações a seguir:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} = \frac{x_2 - x_1}{L_1} \quad (10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L}{L} = \frac{x_3 - x_2}{L_2} \quad (11)$$

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (12)$$

$$\sigma_2 = E \varepsilon_2 \quad (13)$$

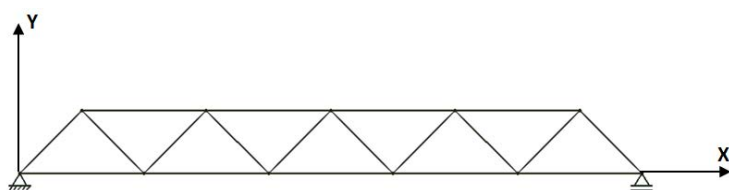
$$f_1 = \sigma_1 A_1 \quad (14)$$

$$f_2 = \sigma_2 A_2 \quad (15)$$

2.3.3. Modelagem de elementos de Barra - Treliça Plana

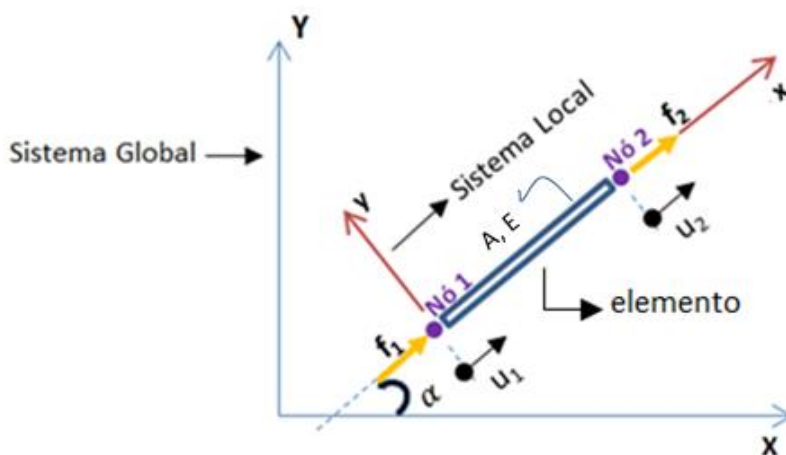
O segundo caso é a análise estática de uma treliça, exemplificada na Figura 6, a metodologia aplicada será basicamente a mesma apresentada para o caso de uma barra transversal onde o problema também pode ser definido pela equação (1), porém adaptada para o objeto treliça. Neste caso, apresenta-se o termo matriz de rigidez do elemento, que comporá a matriz de rigidez global, ou matriz de rigidez da estrutura, de forma superpostas de acordo com a conectividade dos nós. Lembrando que a rigidez se trata da força aplicada a um deslocamento unitário. Opera-se com várias matrizes de rigidez em um único sistema de coordenadas, representado na Figura 7, relacionando a matriz de rigidez do elemento no sistema local com a matriz de rigidez desse elemento no sistema global. De forma que o sistema local será representado pelas letras minúsculas e o sistema global pelas letras maiúsculas.

Figura 6 - Estrutura completa de uma Treliça.



Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

Figura 7 - Diagrama de corpo livre representando as coordenadas do Sistema Global e Sistema Local de um elemento de treliça.



Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

As equações (16) e (17) apresentam a formulação matemática da matriz de rigidez local.

$$\{f\} = [k]^e \cdot \{\delta\} \quad (16)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} fx_1 \\ fy_2 \\ fx_2 \\ fy_2 \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Onde $\{f\}$ representa as forças nodais no sistema local, $[k]^e$ é a matriz de rigidez no sistema local e $\{\delta\}$ o deslocamento nodais no sistema local.

Na Figura 8 apresenta-se o equilíbrio da barra no sistema local por intermédio de quatro forças, o equilíbrio de um mesmo elemento é representado por meio de forças nodais nos sistemas local e global, onde a correspondência de cada nó está representada na equação (18) através da projeção das forças globais nos eixos locais x e y (ALVES FILHO, 2005).

$$\begin{cases} fx_1 = Fx_1 \cdot \cos \alpha + Fy_1 \cdot \sin \alpha \\ fy_2 = -Fx_1 \cdot \sin \alpha + Fy_1 \cdot \cos \alpha \\ fx_2 = Fx_2 \cdot \cos \alpha + Fy_2 \cdot \sin \alpha \\ fy_2 = -Fx_2 \cdot \sin \alpha + Fy_2 \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad \text{e sendo } \begin{cases} \lambda = \cos \alpha \\ \mu = \sin \alpha \end{cases} \quad (18)$$

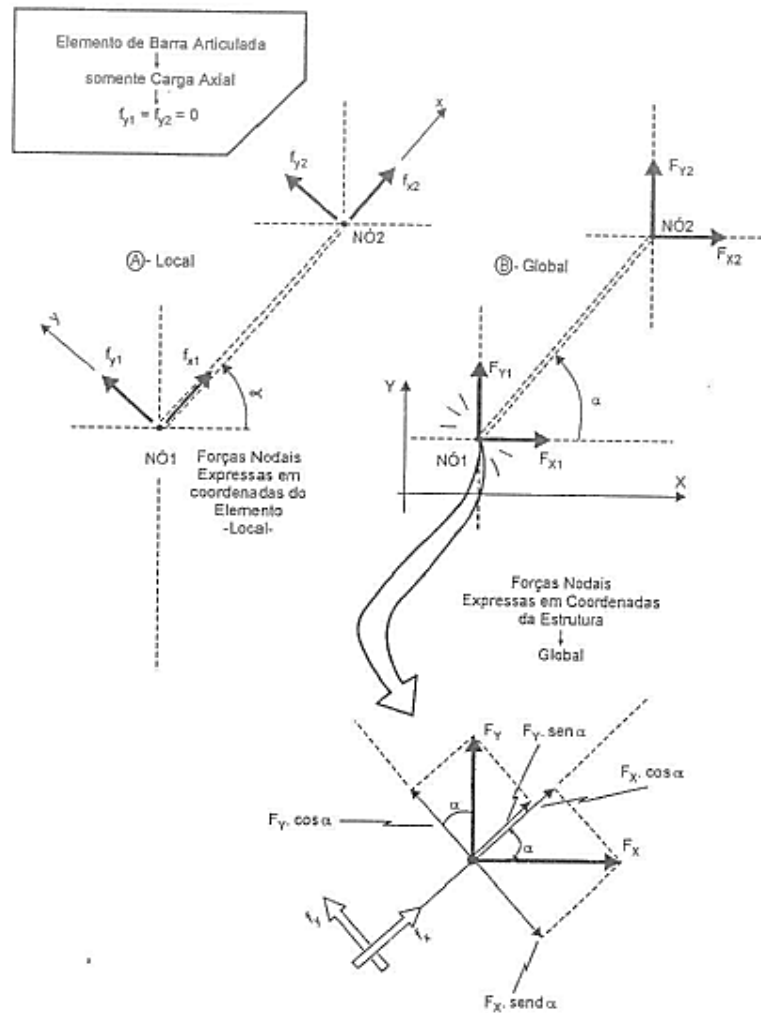
Verifica-se nas equações (19) e (20) a representação matricial da equação 18, conforme segue:

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (19)$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} fx_1 \\ fy_2 \\ fx_2 \\ fy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Figura 8 - Equilíbrio da barra no sistema local por intermédio de quatro forças.



Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

Para sistemas ortogonais a relação entre os componentes de deslocamentos dos dois sistemas é semelhante à relação de forças da equação (19), dado através da equação (21):

$$\{\delta\} = [T] \cdot \{\Delta\} \quad (21)$$

Onde o deslocamento nodal apresenta-se conforme equação 22:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Lembrando ainda que a matriz inversa da transformação é igual a sua matriz transposta representada na equação (23):

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (23)$$

Portanto reescrevendo a equação (16), tem-se o exposto na equação (24):

$$\{f\} = [k]^e \cdot \{\delta\} \equiv [T] \cdot \{F\} = [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \quad (24)$$

Desta forma, a equação (25) representa matematicamente a matriz de rigidez do global ($[K]^e$).

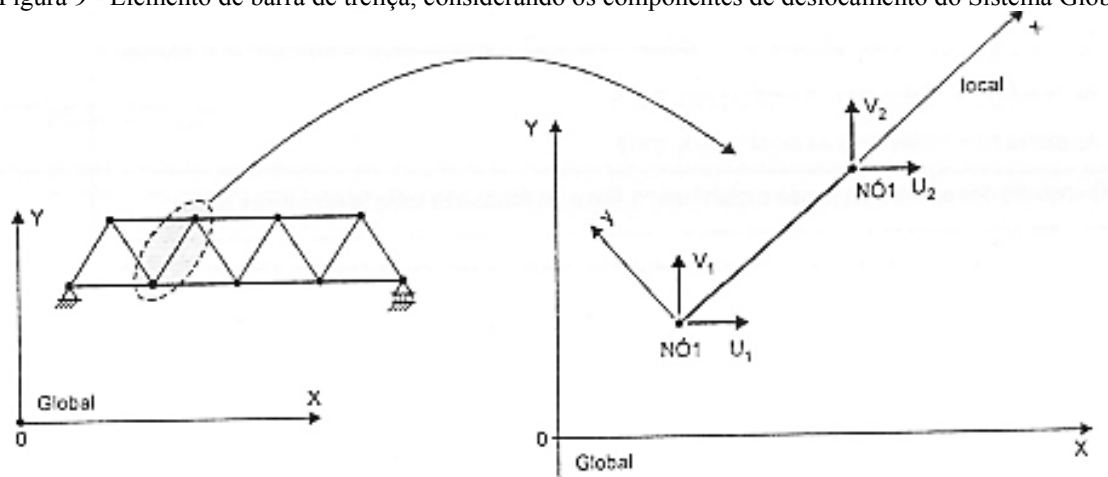
$$[K]^e = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T] \quad (25)$$

A mesma equação pode ainda ser representada através da equação (26) que leva em conta as propriedades geométricas do elemento (A, L) e as propriedades do material através de seu módulo de elasticidade (E), também representados na Figura 9.

$$[K]^e = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{matrix} \quad (26)$$

Como já citado anteriormente na Equação 18, tem-se que $\begin{cases} \lambda = \cos\alpha \\ \mu = \sin\alpha \end{cases}$.

Figura 9 - Elemento de barra de treliça, considerando os componentes de deslocamento do Sistema Global.



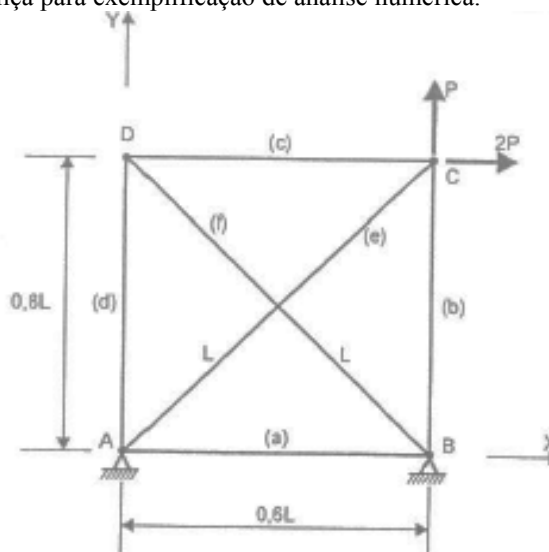
Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

A fim de ilustrar os conceitos da determinação dos esforços e deslocamentos de uma treliça no próximo tópico apresenta-se uma ilustração de um problema de treliças.

2.4. APLICAÇÃO NUMÉRICA

A exemplificação a seguir é a mesma apresentada em Chandrupatla (2014). Seja a Figura 10, representando uma estrutura de treliça, onde se deseja obter os deslocamentos nodais, as reações nos apoios da estrutura e as forças internas em cada um dos elementos. O comprimento (L) das barras “e” e “f” é de 1000 [mm], com área de seção transversal de 300 [mm²] enquanto que a área da seção transversal de “b” e “d” é dada por $0,8A$, e das barras “a” e “c” é dada por $0,6 A$ e ainda as barras “e” e “f” que não constituem um nó. O peso (P) é igual a 500 [kgf] e o módulo de elasticidade (E) é igual a 2100 [kgf/mm²].

Figura 10 - Representação da treliça para exemplificação de análise numérica.



Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

2.4.1. Parâmetros geométricos da estrutura

Na estrutura apresentada na Figura 10 observam-se seis elementos, representado pelas letras minúsculas, e quatro nós, representados pelas letras maiúsculas. No Quadro 1 é possível verificar a incidência dos elementos com seus respectivos nós.

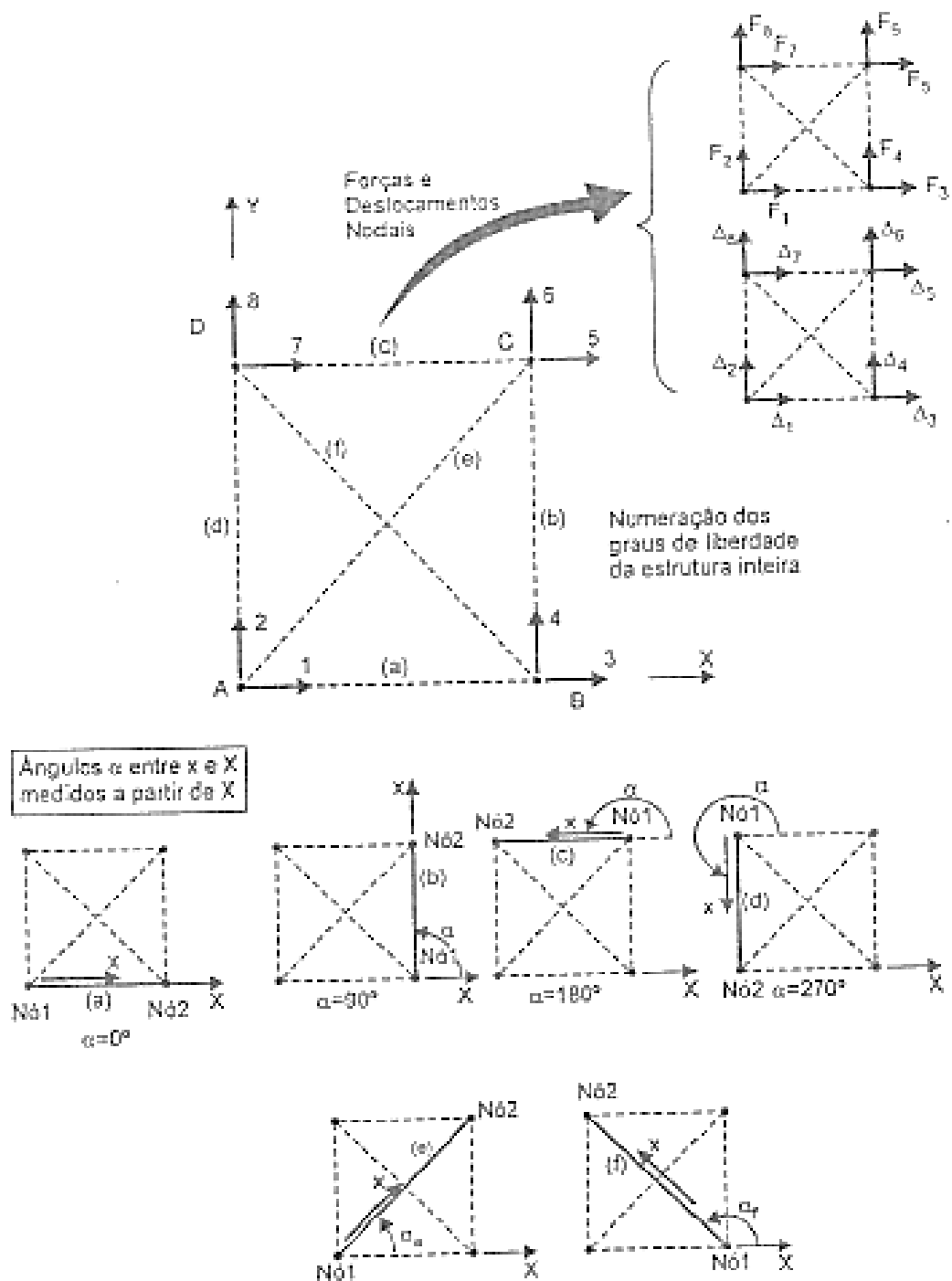
Quadro 1 - Incidência de elementos e seus respectivos nós.

Elemento	i	j
a	A	B
b	B	C
c	D	C
d	A	D
e	A	C
f	D	B

Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

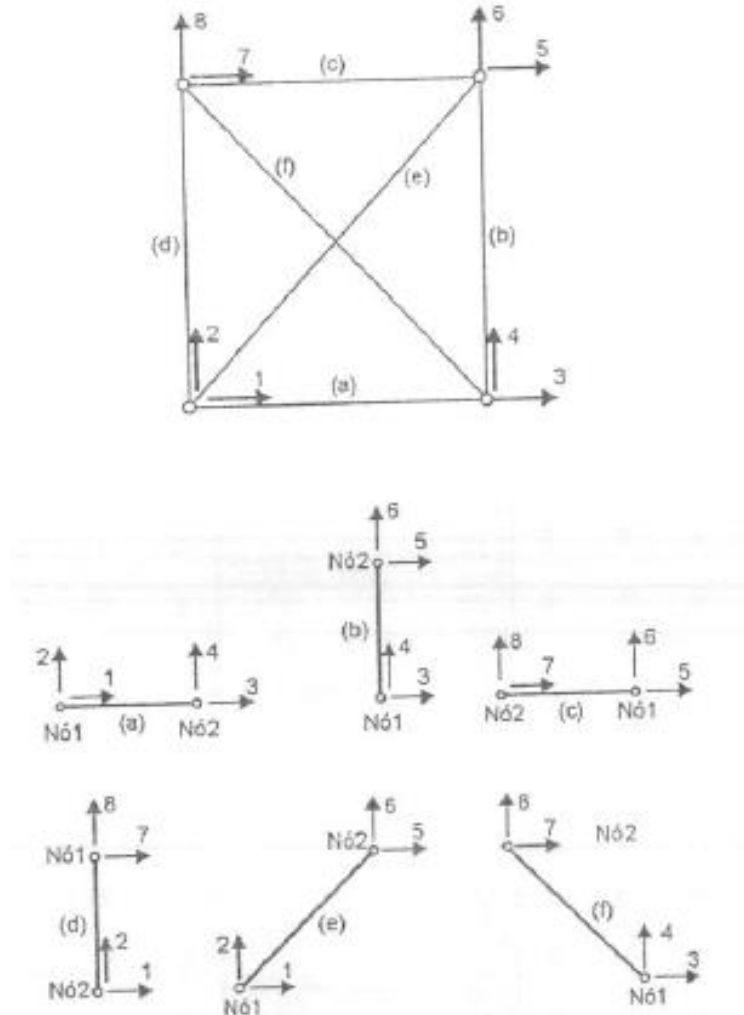
A Figura 11 representa cada nó do modelo da estrutura com o vetor de localização a fim de se estabelecer o ângulo formado entre o sistema local e o global de coordenadas. A representação em X e Y dos graus de liberdade identificando cada elemento do modelo na Figura 12.

Figura 11 - Representação de cada nó do Modelo da Estrutura e o ângulo α para as diversas barras.



Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

Figura 12 - Identificação de cada elemento do modelo e os graus de liberdade da estrutura



Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

O Quadro 2 permite com que se calcule cada um dos elementos que compõe a matriz de rigidez dos elementos da estrutura.

Quadro 2 – Ângulos α para as diversas barras do modelo da estrutura.

Elemento	α	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda \cdot \mu$
a	0°	1	0	1	0	0
b	90°	0	1	0	1	0
c	180°	-1	0	1	0	0
d	270°	0	-1	0	1	0
e	α_e	0,6	0,8	0,36	0,64	0,48
f	α_f	-0,6	0,8	0,36	0,64	0,48

Fonte: (ALVES FILHO, 2005).

Observa-se que um elemento da treliça possui dois graus de liberdade, e a treliça desta exemplificação possui quatro nós, portanto, a matriz de rigidez global da treliça será uma matriz 8x8.

2.4.2. Montagem da matriz de rigidez dos elementos

Lembrando que a matriz de rigidez dos elementos é formulada matematicamente conforme a equação (26). Assim substituindo os valores numéricos encontrados na Tabela 2, têm-se as respectivas matrizes de rigidez de todos os elementos da treliça solicitados na Figura 10, conforme segue nas equações de (27) a (32).

$$[K]^a = \frac{(0,6A) \cdot E}{0,6 \cdot L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (27)$$

$$[K]^b = \frac{(0,8A) \cdot E}{0,8 \cdot L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \quad (28)$$

$$[K]^c = \frac{(0,6A) \cdot E}{0,6 \cdot L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix} \quad (29)$$

$$[K]^d = \frac{(0,8A) \cdot E}{0,8 \cdot L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (30)$$

$$[K]^e = \frac{(0,8A) \cdot E}{0,8 \cdot L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \quad (31)$$

$$[K]^f = \frac{(0,8A) \cdot E}{0,8 \cdot L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix} \quad (32)$$

2.4.3. Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura

Segundo Alves Filho (2005) a matriz de rigidez da estrutura é obtida através da composição das matrizes de rigidez de cada um dos seus elementos. De tal forma que os coeficientes da matriz de rigidez dos elementos devem ocupar a mesma posição i, j da matriz da estrutura obtendo-se equações de equilíbrio da estrutura, conforme apresentado na equação (33) a seguir:

$$K = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1+0+0,36 & 0+0+0,48 & -1 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0+0+0,48 & 0+1+0,64 & 0 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+0+0,36 & 0+0-0,48 & 0 & 0 & -0,36 & 0,48 \\ 0 & 0 & 0+0-0,48 & 0+1+0,64 & 0 & -1 & 0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0 & 0 & 0+1+0,36 & 0+0+0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0 & -1 & 0+0+0,48 & 1+0+0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,48 & -1 & 0 & 1+0+0,36 & 0+0-0,48 \\ 0 & -1 & 0,48 & -0,64 & 0 & 0 & 0+0-0,48 & 0+1+0,64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix} \quad (33)$$

Assim a matriz de rigidez apresentada na equação (33) e a partir da equação (1) tem-se a equação (34), conforme segue:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ \begin{matrix} 1,36 & 0,48 & -1 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 1,64 & 0 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1,36 & -0,48 & 0 & 0 & -0,36 & 0,48 \\ 0 & 0 & -0,48 & 1,64 & 0 & -1 & 0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0 & 0 & 1,36 & 0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0 & -1 & 0,48 & 1,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,48 & -1 & 0 & 1,36 & -0,48 \\ 0 & -1 & 0,48 & -0,64 & 0 & 0 & -0,48 & 1,64 \end{matrix} \end{matrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

2.3.4 Aplicação das condições de contorno da estrutura

Observa-se na Figura 10 que a treliça possui dois apoios fixos, representados pelos nós A e B, nos locais de apoios não há deslocamentos, portanto, Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 são iguais a zero. Logo pelo método da eliminação, deve-se eliminar da primeira a quarta linha e da primeira a quarta coluna, conforme apresentado na equação (35).

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} 1,36 & 0,48 & -1 & 0 & -0,36 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & 1,64 & 0 & 0 & -0,48 & -0,64 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1,36 & -0,48 & 0 & 0 & -0,36 & 0,48 \\ 0 & 0 & -0,48 & 1,64 & 0 & -1 & 0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0 & 0 & 1,36 & 0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & -0,64 & 0 & -1 & 0,48 & 1,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,48 & -1 & 0 & 1,36 & -0,48 \\ 0 & -1 & 0,48 & -0,64 & 0 & 0 & -0,48 & 1,64 \end{matrix} \end{matrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Após a utilização do método da eliminação, a matriz ficou reduzida conforme Equação (38) e que será utilizado para calcular os demais deslocamentos e forças. Há ainda como condição, um carregamento no nó C na direção x de tração, ou seja, $F_5 = 2P$, e outro carregamento na direção y , resultando em $F_y = P$. Sabe-se ainda que não há forças aplicadas no nó D o que resulta em $F_7 = 0$ e $F_8 = 0$. Desta forma tem-se forças representadas nas equações (36) e (37):

$$F_5 = 2P = 1000 \text{ [kgf]} \quad (36)$$

$$F_6 = P = 500 \text{ [kgf]} \quad (37)$$

1,36	0,48	-1	0
0,48	1,64	0	0
-1	0	1,36	-0,48
0	0	-0,48	1,64

(38)

E sendo $\frac{A \cdot E}{L} = \frac{300 \cdot 21000}{1000} = 6300$, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8568 & 3024 & -6300 & 0 \\ 3024 & 10332 & 0 & 0 \\ -6300 & 0 & 8568 & -3024 \\ 0 & 0 & -3024 & 10332 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Resolvendo a matriz da equação (39), têm-se as seguintes equações representadas de (40) a (43):

$$8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 \quad (40)$$

$$3024 \cdot \Delta_5 + 10332 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 500 \quad (41)$$

$$-6300 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 8568 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 0 \quad (42)$$

$$0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 1000 \quad (43)$$

Ao resolver o sistema de equações obtêm-se os deslocamentos nodais, conforme apresentado na Equação 44:

$$\begin{Bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_5 = 0,3391 \text{ [mm]} \\ \Delta_6 = -0,05087 \text{ [mm]} \\ \Delta_7 = 0,27812 \text{ [mm]} \\ \Delta_8 = 0,08140 \text{ [mm]} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Assim como $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ e substituindo nas equações de 45 a 48 obtidas da matriz 34, tem-se também as forças de reações F_1, F_2, F_3, F_4 .

$$\begin{cases} F_1 = (1,36 \cdot \Delta_1 + 0,48 \cdot \Delta_2 - 1 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - 0 \cdot \Delta_5 - 0,48 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot 6300 \end{cases} \quad (45)$$

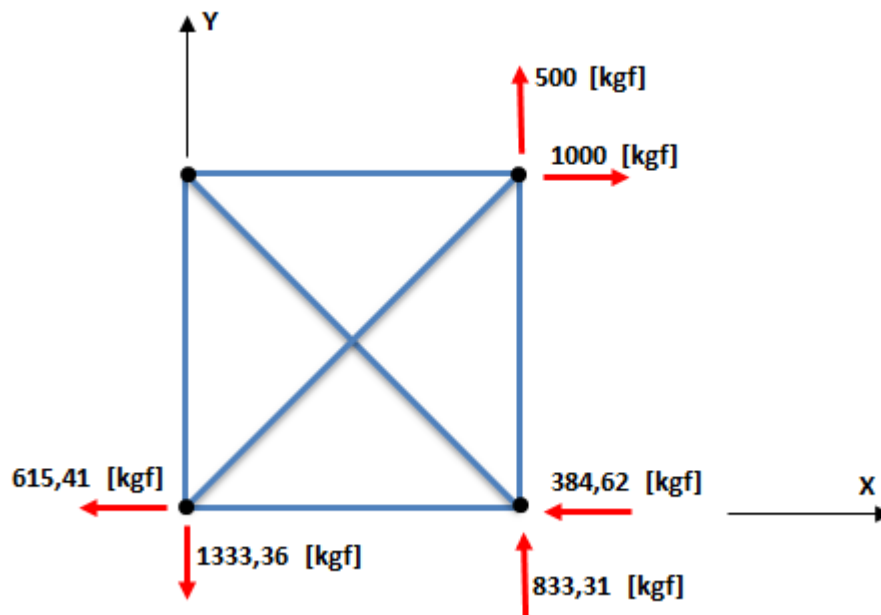
$$\begin{cases} F_2 = (0,48 \cdot \Delta_1 + 1,64 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - 0,48 \cdot \Delta_5 - 0,64 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 1 \cdot \Delta_8) \cdot 6300 \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} F_3 = (-1 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 1,36 \cdot \Delta_3 - 0,48 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 0,36 \cdot \Delta_7 + 0,48 \cdot \Delta_8) \cdot 6300 \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} F_4 = (0 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 0,48 \cdot \Delta_3 + 1,64 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 - 1 \cdot \Delta_6 + 0,48 \cdot \Delta_7 - 0,64 \cdot \Delta_8) \cdot 6300 \end{cases} \quad (48)$$

Resultando em $F_1 = -615,41 \text{ [kgf]}$, $F_2 = -1333,36 \text{ [kgf]}$, $F_3 = -384,62 \text{ [kgf]}$, $F_4 = 833,31 \text{ [kgf]}$. Na figura 13 é possível observar as forças externas aplicadas na estrutura e as reações de apoio que estão em equilíbrio.

Figura 13 - Forças aplicadas e reações de apoio para estrutura em equilíbrio



Fonte: (AUTOR).

Com este exemplo numérico é possível observar a dificuldade dos cálculos manuais conforme a complexidade da geometria. Matrizes ainda maiores se formariam com a complexidade da estrutura o que demandaria muito mais tempo para efetivação dos cálculos, dificuldade e precisão dos mesmos. Com MEF é possível resolver problemas que envolvem diversas aplicações e com diversas condições de contorno.

2.5. ETAPAS BÁSICAS PARA APLICAÇÃO DO MEF

A análise dos problemas pelo Método dos Elementos Finitos basicamente se divide em três etapas para sua solução, sendo elas pré-processamento, processamento (ou análise) e pós-processamento, conforme apresentadas na Figura 14.

Figura 14 - Passos para a solução de MEF.



Fonte: (MELCONIAN, 2014).

2.5.1. Pré-processamento

Para que a análise do elemento seja feita, é no pré-processamento onde é definida a geometria do modelo, as especificações das propriedades do material, a escolha do elemento apropriado para análise (elemento contido em um banco de elementos já disponibilizado pelo software), a geração da malha, cargas e deslocamentos que serão aplicados ao modelo, ou seja, é nesta etapa onde se deve montar o modelo discretizado da estrutura e neste aplicar todas as condições de contorno, utilizando ferramentas de CAD (*Computer Aided Desing*) que são capazes de gerar arquivos compatíveis com os programas que utilizam o MEF. (MELCONIAN, 2014). A fase de pré-processamento é a etapa mais longa do processo de modelamento.

2.5.2. Processamento

O processamento é a fase onde serão executados os cálculos. Diversas equações que irão compor a solução do problema proposto são determinadas. Neste instante os cálculos matriciais para determinação dos deslocamentos, reações de apoio e forças internas nos elementos serão efetuados através do software escolhido. Segundo MELCONIAN (2014) a solução numérica do software escolhido e as quantidades de equações geradas influenciam no tempo para a resolução do problema.

2.5.3. Pós-processamento

É no pós-processamento onde é apresentado os resultados obtidos das equações que definem o modelo. MELCONIAN (2014) cita que estes resultados são representados graficamente por uma superfície de resposta, com cores que demonstram o comportamento da estrutura mediante diversas grandezas como deformações, temperaturas, cujo comportamento pode ser verificado a cada instante de tempo definido através das animações disposta pelo software utilizado. Estes resultados são então interpretados e verifica-se sua coerência com o problema proposto.

2.6. O SOFTWARE

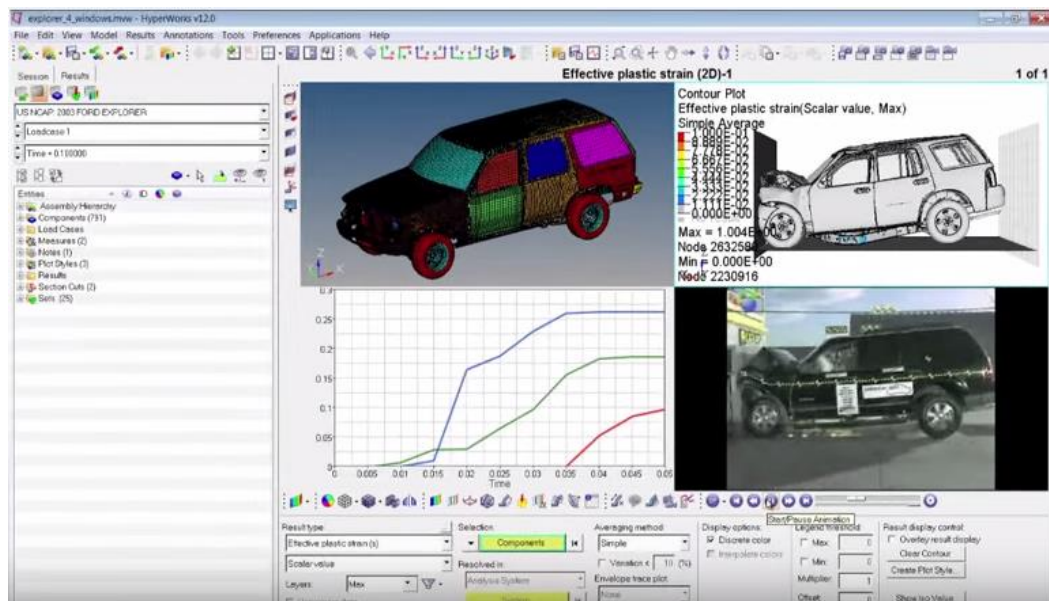
Para a análise do comportamento da estrutura estudada neste trabalho, utilizou-se o software da Altair Software Comercial. Altair é uma empresa americana, focada em desenvolver soluções para a simulação a fim de fomentar a inovação e melhorar o desempenho dos negócios. Trata-se de uma empresa pioneira em tecnologias de simulação para gerar soluções inovadoras de design.

Como já citado no índice 2.5, a análise de elementos finitos se divide em três partes, pré-processador, processador e pós-processador.

O software da Altair utilizado possui como elemento pré-processador de alto desempenho Altair *HyperMesh* este é um elemento pré-processador de alto desempenho para preparar até mesmo os maiores modelos, a partir de importação de geometria CAD (*Computer Aided Design*) e CAE, (*Computer Aided Engineering*) outros sistemas computacionais utilizados na engenharia a fim de facilitar o projeto de desenhos técnicos, permitindo ao

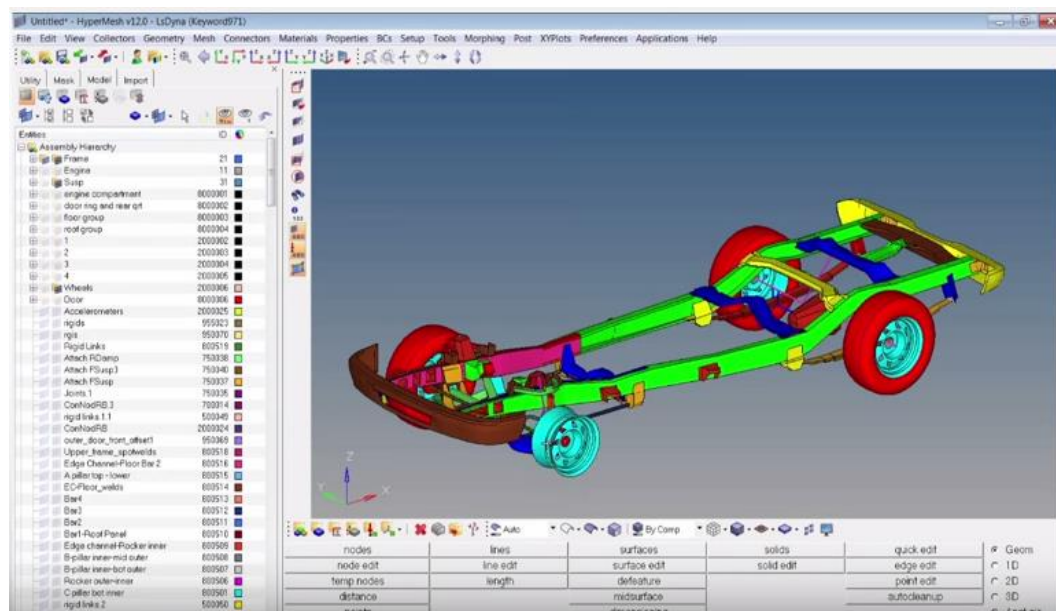
usuário obter malha de alta qualidade com grande precisão e no menor tempo possível. O módulo de geração de malha de superfície em *HyperMesh* contém um mecanismo robusto de geração de malha que fornece incomparável flexibilidade e funcionalidade. Isso inclui a capacidade de ajustar de forma interativa uma variedade dos parâmetros de malha e aperfeiçoa-la com base em um conjunto de critérios definido pelo usuário, conforme pode ser observado nas Figuras 15 e 16, criando a malha através de uma gama de técnicas avançadas.

Figura 15 - Demonstração da funcionalidade do HyperMesh.



Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

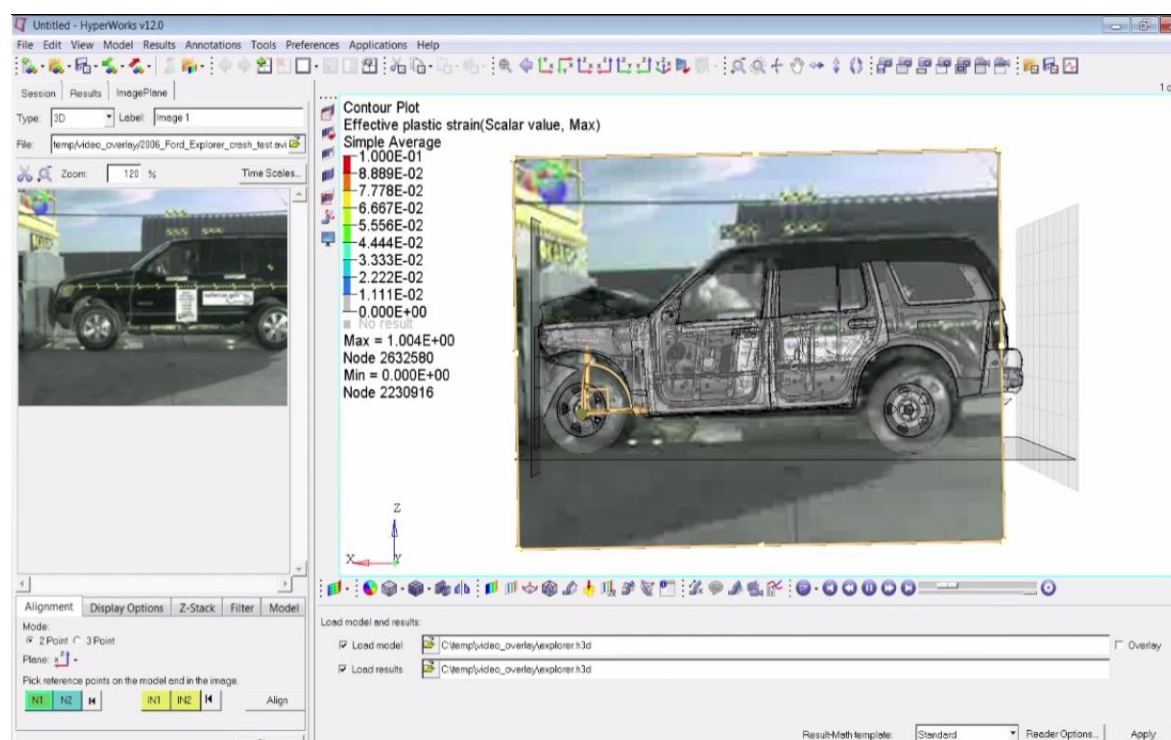
Figura 16 - HyperMesh permite isolar partes ou demonstrar conjunto de segmentos definidos pelo usuário.



Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

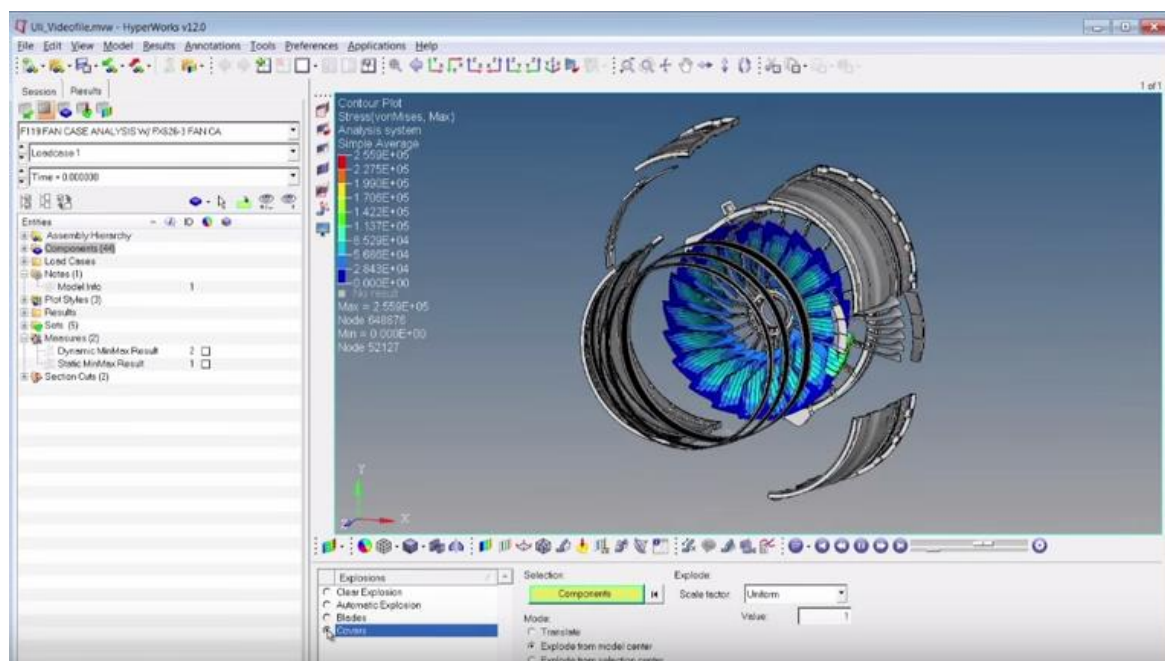
Como processador, ou solver, utiliza-se Altair *HyperView*, trata-se de um ambiente de pós-processamento e visualização de dados para análise de elementos finitos, vídeo digital e de engenharia. *HyperView* combina animação e plotagem XY, recursos avançados com a janela de sincronização para melhorar os resultados de visualização. Também salva os resultados de animação em 3D em formato H3D, assim os usuários podem visualizar os resultados CAE dentro de um ambiente web 3D. Com este solver é possível verificar se há correlação entre dois modelos ou simulação e realidade, apresentados na Figura 17, através da sobreposição de resultados com um modelo ou vídeo dentro da mesma janela e ainda permitir aos usuários criar visualizações de modelo personalizado, como cortes de seção e vistas explodidas (Figura 18), combinando a funcionalidade a partir da ferramenta de pós-processamento além da criação de funções e algoritmos matemáticos.

Figura 17 - Teste físico simulado no HiperView.



Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

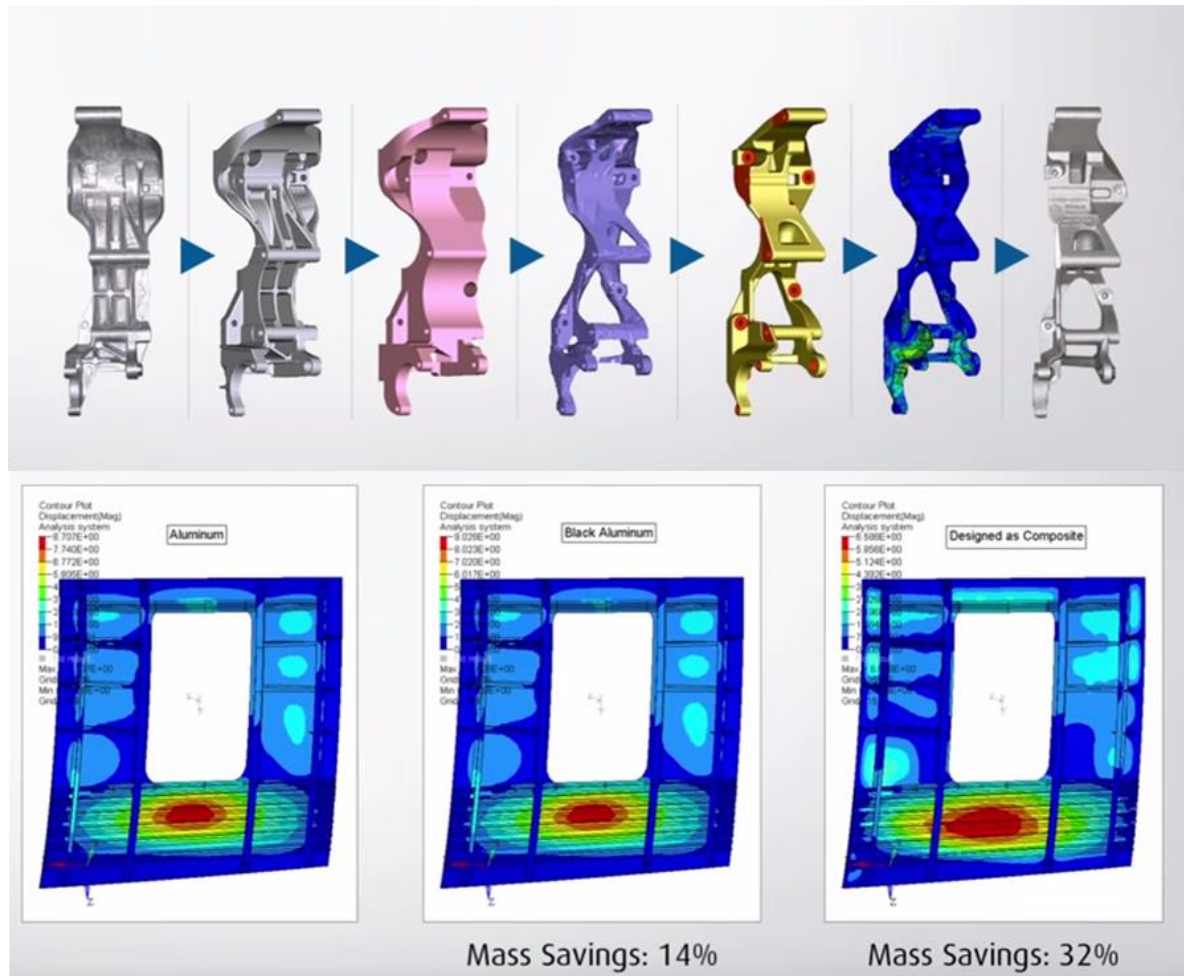
Figura 18 - Vista explodida durante a simulação mantendo-se as características do pós-processamento.



Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

Utiliza-se o Altair *OptiStruct* como ferramenta de pós-processamento, esta ferramenta ajuda os projetistas e engenheiros rapidamente a desenvolver projetos inovadores de forma prática e estruturalmente eficientes, usando algoritmos de otimização altamente avançados. Este pós-processador pode resolver os problemas de otimização mais complexos com milhares de variáveis de projeto em um curto período de tempo, conforme apresentado na Figura 19, onde é possível verificar diversas sugestões de conceito de geometria da peça em um curto intervalo de tempo. *OptiStruct* é utilizado como ferramenta para analisar e otimizar as características das estruturas quanto a resistência, durabilidade, RVA (ruído, vibração e aspereza), entre outros, verificados na Figura 20. O conceito do software é baseado em fadiga e otimização, voltado para um projeto com detalhamento de compósitos laminados e otimização topológica baseada em esforços (Figura 21).

Figura 19 - Apresentação da otimização de dois componentes com alteração da geometria e ganhos em redução de massa.



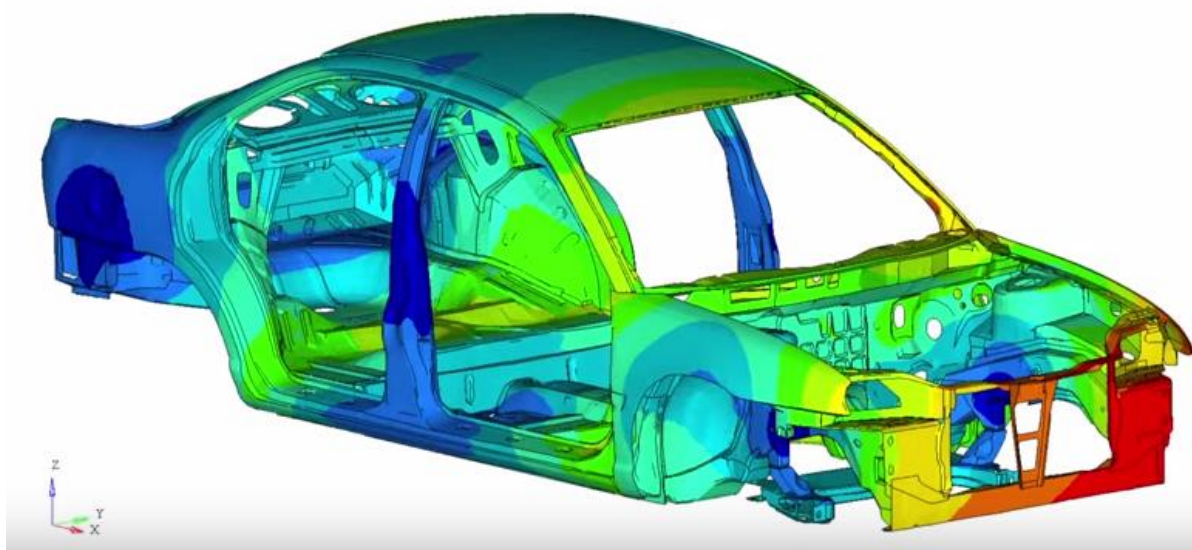
Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

Figura 20 - Características das estruturas que podem ser avaliadas com o OptiStruct.



Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

Figura 21 - Observam-se os pontos de concentração de tensão da estrutura em análise simulando o mesmo movimento real.



Fonte: ([HTTP://WWW.HYPERWORKS.COM](http://www.hyperworks.com)).

2.7. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

O desenvolvimento de projetos com alta qualidade, menor custo de produção e grande competitividade tem levado empresas a buscarem métodos mais eficientes para o desenvolvimento dos produtos, como a otimização. Essa ideia também é compartilhada por diversos autores como Haftka e Gürdal (1993).

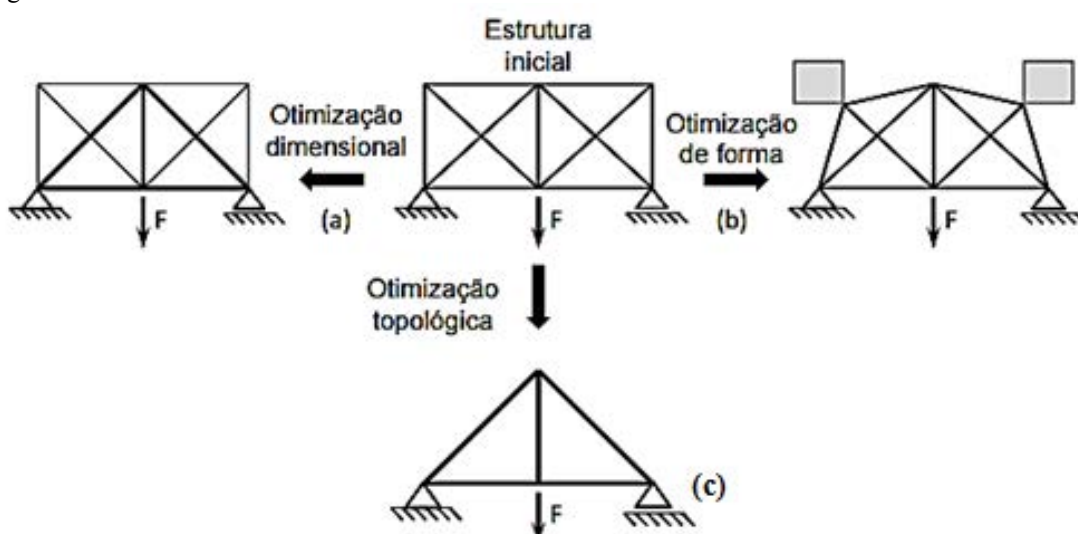
De acordo com Mundstock (2006), a redução de custos, material e tempo nos projetos são influenciados pela otimização estrutural principalmente nos projetos que buscam melhorias na relação peso e desempenho, segurança e confiabilidade, tornando-a um segmento de grande relevância. Coutinho (2006, p.02) refere-se à otimização estrutural como uma “ferramenta de projeto que permite não somente diminuir os custos de projeto, mas também diminuir os custos de operação, ao melhorar performance dos componentes e sistemas criados”. Através de modelos matemáticos que originam estruturas completas ou elementos estruturais a fim de se verificar os melhores valores das variáveis de projeto consideradas, para o projeto ótimo e satisfazer todas as restrições também impostas.

Para Bastos (2004) os problemas de otimização são estruturados através de algoritmos matemáticos que podem ser determinísticos ou probabilísticos. Os métodos determinísticos, considerados métodos clássicos, pois são baseados em derivadas de primeira ou segunda ordem, ou aproximação das mesmas, onde a função objetiva seja contínua e diferenciável, o

que é verificado no conceito de MEF. Já o método heurístico probabilístico como o próprio nome sugere, se baseia na solução do algoritmo de forma probabilística buscando soluções viáveis, inspirados em fenômenos da natureza e fundamentam seu funcionamento em regras probabilísticas.

A otimização estrutural é agrupada em três categorias principais de acordo com as variáveis de projeto sendo as mesmas: otimização dimensional, de forma (ou geométrica) e topológica. Na otimização dimensional busca-se modificações nas dimensões das seções dos elementos, ou seja, as variáveis de projeto são as propriedades de rigidez do elemento como área da seção transversal, espessuras de placas, alturas, momento de inércia e propriedades do material (Coutinho, 2006), conforme Figura 22a. Como exemplo tem-se as estruturas treliçadas, onde o processo de otimização dimensional ocorre com a alteração da área da seção transversal. Já na otimização de forma, ou geométrica, segundo Benoit e Rajan (2013), confere a alteração de algumas posições nodais (Figura 22b), ou seja, a forma do contorno dos segmentos ou furos é modificada, isto se aplica a casos como concentrador de tensões. A malha desse tipo de otimização é mais complexa e exige mais dos cálculos realizados. De acordo com Sanches (2011) tem-se a otimização topológica (Figura 22c) quando se deseja realizar a distribuição de material em uma determinada região preestabelecida de uma estrutura sujeita a alguma restrição de projeto como volume, deformação, frequência natural, deslocamentos, entre outras.

Figura 22 - Exemplo de estrutura com os três processos de otimização: (a) dimensional, (b) de forma e (c) topológica.



Fonte: (SILVA, 2015).

2.8. RIGIDEZ TORCIONAL

Atualmente as montadoras de veículos apresentam solidez quanto às metodologias e conceitos utilizados, porém permitem-se absorver novos conceitos e tecnologias frente a novos projetos. No projeto de um veículo automotivo são necessários vários conceitos e metodologias para o seu desenvolvimento como estrutura complexa, como por exemplo, a integridade funcional de um chassi. De acordo com Soares et al (2012) o mesmo deve ser capaz de resistir aos efeitos devido às solicitações estáticas e dinâmicas a qual o veículo está sujeito. Todo projeto estrutural de um chassi considera aspectos de rigidez à torção e a flexão, de resistência à fadiga e condições extremas como choques. A rigidez torcional é um dos principais conceitos na composição de um projeto de estrutura automotiva, apesar de a estrutura de um veículo possuir zonas programadas de deformação na dianteira, traseira e lateral isso pouco influencia na rigidez à torção, o importante é a estrutura entre eixos, com destaque ao escopo deste trabalho na análise da travessa do chassi.

Segundo Thompson (1998) elevar a rigidez à torção significa elevar o seu conforto e seu comportamento dinâmico, situação esta vantajosa ocorrendo, por exemplo, diminuição nos ruídos do veículo quanto à movimentação dos elementos do chassi e vedação das partes móveis além da influência direta em seu peso consequentemente em seu desempenho. Fatores estes que são importantes para destaque da venda deste produto e atender ao Inovar-Auto e PROCONVE.

A rigidez é a capacidade de resistir à deformação imposta a um corpo quando submetido à aplicação de uma força. A deformação é responsável por uma mudança na configuração geométrica, na forma e/ou dimensões de um corpo, classificando-se de duas maneiras: como elástica, quando esta mudança dimensional não é permanente, ou seja, retorna ao seu estado inicial com o fim do carregamento imposto sobre ele ou como deformação plástica, quando se excede os limites da deformação elástica de tal maneira que as mudanças do dimensional e forma sejam permanentes.

Ao descrever o conceito de rigidez é importante a compreensão de alguns conceitos como tensão normal, tensão de cisalhamento, deformação, coeficiente de Poisson e outras variáveis.

Para que uma carga possa ser suportada com segurança em um determinado material sujeito a aplicação de uma força, é importante que sejam avaliados além da força interna que este material está sujeito, também a área da seção transversal a qual o material é feito e está sujeito a distribuição destas forças internas. A intensidade média dessas forças distribuídas é

igual à força por unidade de área (Beer, 2006). A esta relação de força (F) por unidade de área (A), quando a força que atua na área da seção transversal seja normal a área denomina-se tensão normal (σ), verificando-se a equação (49) e quando esta força atua na seção transversal de forma tangencial tem-se a tensão de cisalhamento, conforme equação (50):

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (49)$$

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (50)$$

O conceito de deformação específica normal (ϵ), segundo Beer (2006), é definido através de uma barra, sob carregamento axial, como a deformação (δ) por unidade de comprimento (L) de tal barra, conforme apresentado na equação (51):

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (51)$$

Robert Hooke, em 1676, observou a deformação causada sobre um corpo diante de uma força (F) ocasionada através deslocamento da massa a partir de seu ponto de equilíbrio levando-se em consideração a constante elástica deste corpo (k), ou por ora, já definida anteriormente como rigidez. A lei de Hooke é definida conforme equação (52):

$$F = k \cdot \Delta l \quad (52)$$

Segundo Hibbeler (2004) e Beer (2006) o comportamento elástico possui uma relação tensão-deformação linear, conforme gráfico tensão-deformação, apresentado na Figura 23, ou seja, um aumento da tensão tem-se um aumento proporcional na deformação, estado esse definido pela lei de Hooke aplicada a materiais, conforme equação (53):

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (53)$$

Onde:

- σ : Tensão de deformação;

- **E**: Constante de proporcionalidade (módulo de elasticidade, módulo de Young) corresponde ao coeficiente angular da reta linear na deformação elástica é um parâmetro que permite a medida da rigidez de um material sólido.
- **ε**: Deformação específica.

Assim a rigidez pode ser apresentada conforme equação (54), a qual se origina a partir da composição da lei de Hooke da Equação (53) correlacionada com deformação na equação (51), e equação (49) da tensão normal.

$$K = \frac{A \cdot E}{L} \quad (54)$$

Ainda é possível definir a rigidez quando um corpo está sujeito à torção. Hibbeler (2004) define torque como sendo o momento capaz de torcer o corpo através do seu eixo longitudinal, apresentado na equação (55).

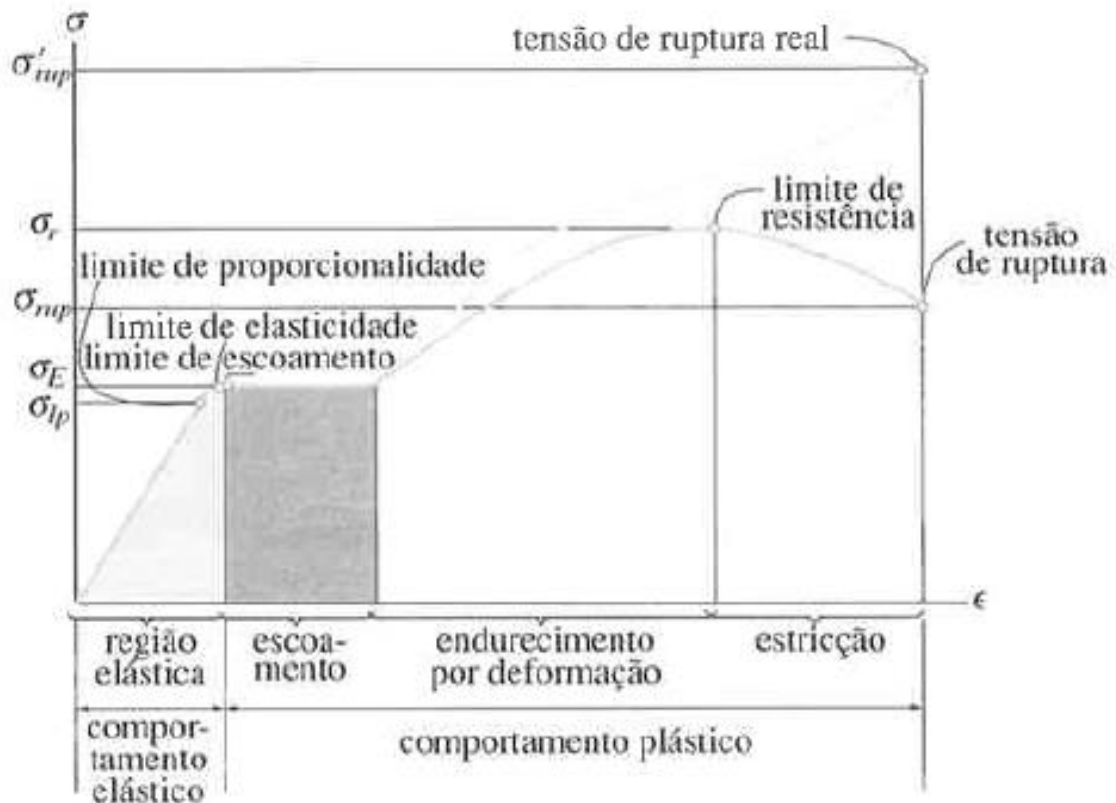
A relação da lei de Hooke estabelece para a tensão de cisalhamento a Equação 55:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (55)$$

onde:

- **τ**: Tensão de cisalhamento;
- **G**: Constante de proporcionalidade (módulo de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez) corresponde à linearidade da reta do diagrama tensão-deformação;
- **γ**: Deformação por cisalhamento.

Figura 23 - Diagrama de tensão deformação para aço (material dúctil)



Fonte: (HIBBELER, 2004).

Desta maneira a equação do torque (T) é definido pela Equação (56), a seguir:

$$T = \frac{\tau \cdot J}{c} \quad (56)$$

Onde:

- τ : Tensão de cisalhamento;
- J : Momento de inércia polar da área da seção transversal;
- c : distância da linha neutra até o ponto onde se deseja analisar a torção;

A deformação ocasionada em um corpo quando submetido a uma força axial de tração, contraindo-se lateralmente, ou quando comprimido, expandindo-se lateralmente, faz com que haja uma razão entre as deformações longitudinais e laterais, esta constante é o coeficiente de Poisson (ν), definido pela equação (57):

$$T = \frac{\tau \cdot J}{c} \quad (57)$$

Onde:

- ϵ_{lat} : Deformação na direção lateral;
- ϵ_{long} : Deformação na direção longitudinal.

Pode-se ainda correlacionar as três constantes do material (E, ν e G) pela equação (58):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (58)$$

Desta maneira a rigidez pode ser definida para um caso de torção conforme Equação 59, a qual se origina a partir da composição da lei de Hooke para um material com tensão cisalhante correlacionada com o torque:

$$K = \frac{G \cdot J}{L} \quad (59)$$

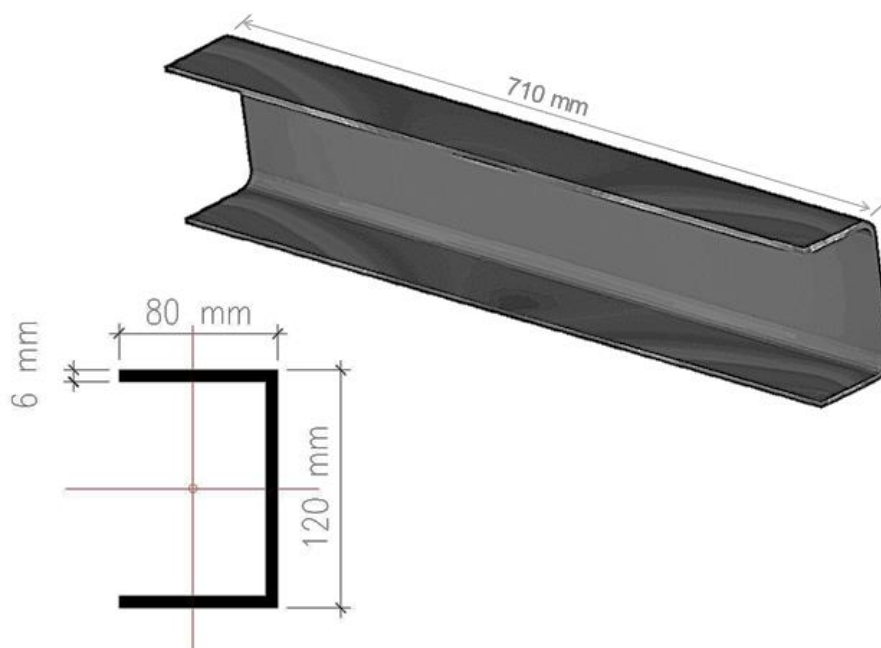
Diante destes conceitos apresentados é importante destacar ainda o significado de *compliance*, já que o mesmo é um dos parâmetros utilizados na simulação de otimização da travessa deste trabalho. Trata-se de uma propriedade física de um material em sofrer deformação elástica, quando sujeito a uma força aplicada (BOARO, 2008), está relacionado à conformidade, distensibilidade, facilidade que um material possui em esticar, em ser flexível, ou seja, propriedade esta oposta a o conceito de rigidez. A unidade de medida utilizada para o *compliance* é dada por $\left[\frac{N \cdot m}{rad}\right]$ a mesma unidade de medida da rigidez. Portanto, quanto menor for o *compliance* mais rígido será a estrutura estudada.

3. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAL

3.1. MODELO E MATERIAL DA TRAVESSA UTILIZADA

As análises nas travessas foram realizadas utilizando-se como pré-processador o software HyperMesh, para o solver será utilizado o Optistruct e como pós processador o Hyperview todos da Altair Software Comercial os softwares foram disponibilizados em parceria com empresa fabricante de chassis. Para este estudo realizou-se a modelagem representativa de uma travessa do chassi em aço com forma uniforme, Figura 24, com as respectivas dimensões 80 mm de aba, 120 mm de alma, 710 mm de comprimento e 6 mm de espessura.

Figura 24 - Travessa de um chassi de caminhão.



Fonte: (AUTOR).

O desenho base desta travessa foi realizado em CAD para que fosse possível a simulação no software da *Altair*, com as dimensões propostas.

Quanto às propriedades mecânicas que compõem o aço é necessário somente o conhecimento de três parâmetros para a simulação no Software da *Altair*, uma vez que este trabalho tem como objetivo a comparação de características de forma. São elas:

- Módulo de elasticidade (E): 210 [GPa];
- Coeficiente de Poisson (ν): 0,33;
- Densidade (ρ): 7850 [kg/m³];

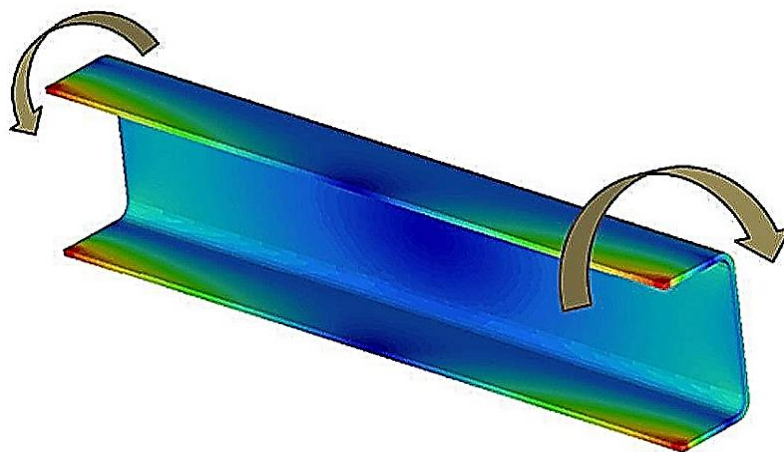
3.2. SIMULAÇÃO ESTÁTICA DA TRAVESSA

Diante do modelo apresentado da travessa, e como já explicitado, a realização das análises ocorreu através da simulação numérica com o software da Altair, obtendo-se as análises numéricas com a simulação em elementos finitos utilizados pelo software.

Para a definição dos parâmetros para a simulação, devido a dificuldades de obter as informações de carregamento das montadoras de caminhões, definiram-se os parâmetros de deslocamentos e torção conforme a sensibilidade do engenheiro projetista que está familiarizado com o produto e possui o conhecimento do range de valores para este tipo de aplicação. Por este motivo nos próximos passos as informações a respeito do deslocamento foram determinadas conforme citado.

A simulação na travessa foi feita em três situações diferentes a fim de verificar o comportamento da mesma quanto ao *compliance*. A primeira simulação contemplou uma torção com ângulo de dez graus no sentido horário e menos dez graus no sentido anti-horário, conforme representado na Figura 25, as setas indicam o sentido da torção em cada lado, como especificado.

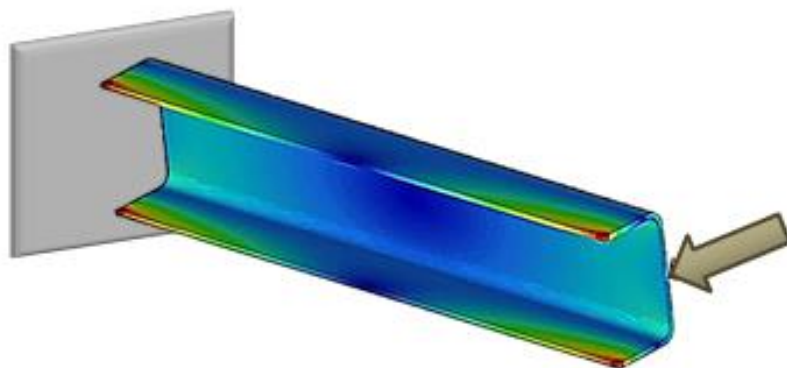
Figura 25 - Carregamento torsional da travessa.



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

A segunda situação da simulação houve um deslocamento vertical de dez milímetros considerando a travessa engastada em um dos lados, conforme representado na Figura 26. As setas indicam o ponto de aplicação do deslocamento vertical.

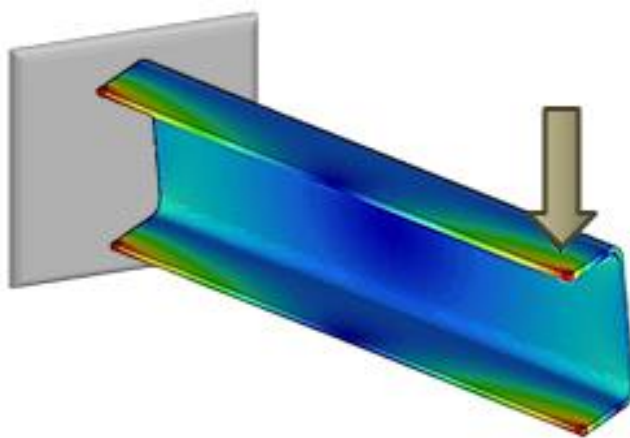
Figura 26 - Deslocamento vertical de 10 mm da travessa.



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

A terceira e última simulação ocorrida foi a aplicação de dez milímetros de deslocamento na lateral da travessa, conforme Figura 27, da mesma maneira que o deslocamento na transversal considerou um lado da peça como engastado, o mesmo ocorre para o deslocamento lateral.

Figura 27 - Travessa com deslocamento de 10 mm na superfície lateral.



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

Após este primeiro momento onde se aplicou o deslocamento vertical e horizontal e a torção na peça o software apresentou as respostas a este comportamento e as mesmas foram usadas como referências para a definição dos parâmetros de restrição para que uma nova simulação, com fins de otimização topológica fosse realizada. O software realiza diversas iterações, através do método de elementos finitos, a fim de atender os parâmetros de restrição pré-estabelecidos.

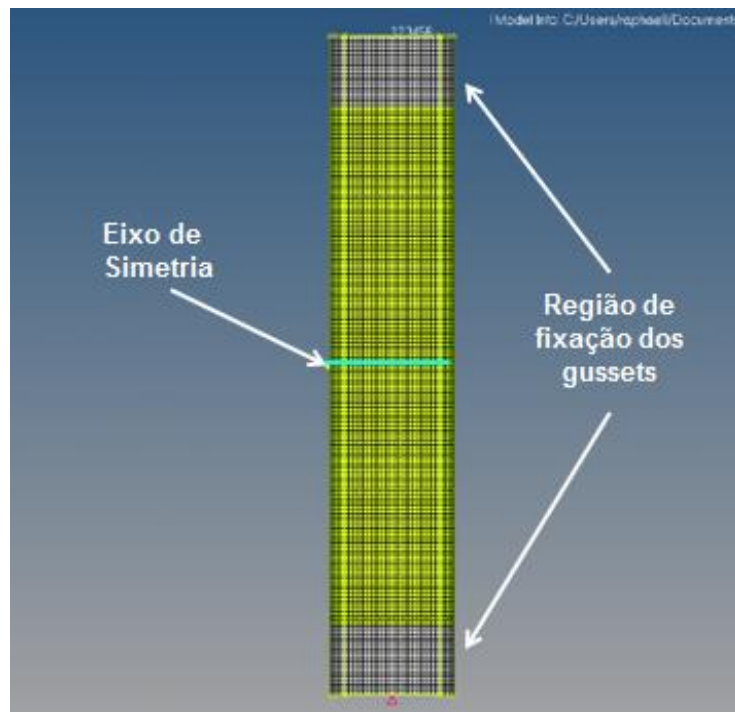
Os parâmetros de restrição estabelecidos são:

- Massa: menor ou igual a cinco quilogramas;

- Definição do eixo de simetria da peça: sentido transversal da travessa.
- Distância da extremidade lateral em seu sentido longitudinal em cem milímetros para que seja isolada a região de fixação dos *gussets* (chapas de fixação) e garanta-se que não haja interferência da montagem da travessa no chassi.

O software “Altair” posterior à entrada desses dados definiu a malha a ser trabalhada. Na Figura 28 apresenta-se a travessa a ser otimizada conforme os parâmetros de restrições estabelecidos.

Figura 28 - Geometria a ser otimizada já com as restrições definidas.



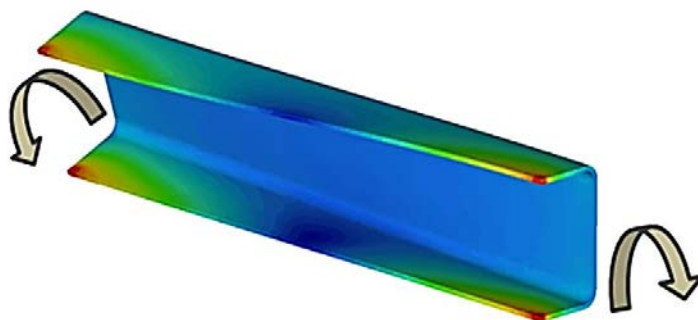
Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como o foco deste trabalho trata apenas de otimização topológica avaliando o comportamento da massa e do *compliance* não houve apresentação e/ou discussão do comportamento ou valor das tensões atuantes na travessa uma vez que esta análise apresenta-se mais complexa e necessita de testes físicos em campo de prova com uso do *strain gage* e os valores de tensões atuantes limítrofes não são divulgados pelas montadoras de caminhões. O que se tem observado durante as análises de otimização é que as tensões possuem certa proporcionalidade assim como os demais parâmetros avaliados. Portanto não será apresentado o valor de nenhuma tensão neste trabalho já que não é possível discutir ou chegar a alguma conclusão plausível. O que se pode dizer apenas é quanto à indicação da tonalidade de cores verificada nas imagens em resposta a simulação. Os pontos mais avermelhados são regiões onde há maior concentração de tensão, regiões mais críticas, e de forma gradativa passando pelo amarelo, posteriormente verde e por ultimo a cor azul tem-se as regiões onde se apresenta menor concentração de tensão respectivamente.

Inicialmente verificou-se a massa da travessa e a mesma possuía 7,73 [kg] antes da otimização topológica na sequência realizou-se a primeira simulação, onde ocorreu à torção, verificando-se o comportamento físico da travessa na Figura 29, como resposta ao ângulo de torção de dez graus horário e menos dez graus anti-horário. Obteve-se o valor máximo de $4,31 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \right]$ para o *compliance* após a torção.

Figura 29 - Resposta a torção da travessa.

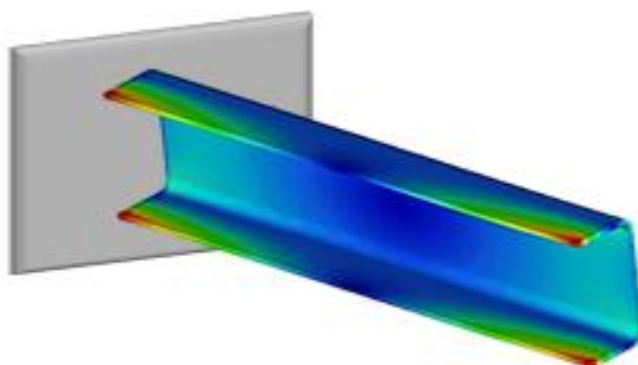


Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

Quanto à resposta para a segunda simulação, do deslocamento vertical da travessa, o *compliance* verificado foi no valor de $0,979 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \right]$, valor baixo e que confirma o fato de

ter alta rigidez para este tipo de deslocamento. A Figura 30 apresenta o comportamento físico para este deslocamento aplicado, o que é praticamente imperceptível.

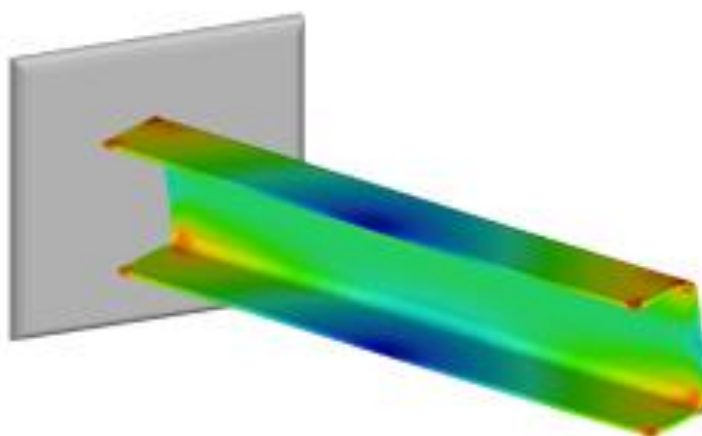
Figura 30 - Resposta ao deslocamento vertical de 10 mm da travessa.



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

Para deslocamento vertical na travessa, terceira simulação, o *compliance* verificado foi no total de $0,291 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \right]$, o que também confirma a alta rigidez da travessa para o deslocamento aplicado, quando comparado ao valor de *compliance* verificado na torção. Na Figura 31 verifica-se o comportamento da travessa durante o deslocamento vertical.

Figura 31 - Resposta ao deslocamento vertical de 10 mm da travessa



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

As respostas do software a todas estas simulações citadas apresenta-se no relatório, Figura 32. E apresentadas de forma mais clara na Tabela 1.

Tabela 1- Resultados apresentados à torção, deslocamento transversal e lateral da travessa.

Caso	<i>Compliance</i> [10^6]	Massa
Torção	$4,310 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}} \right]$	7,736 [kg]
<i>Lateral Bend</i>	$0,291 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}} \right]$	
<i>Vertical Bend</i>	$0,979 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}} \right]$	

Observa-se ainda a quantidade de 24.282 elementos com forma hexaédrica, já que a malha é em 3D, 100.924 graus de liberdade e 33.178 nós.

A partir destes resultados definiu-se os parâmetros de restrição a fim de obter a otimização topológica. A função objetivo escolhida foi à maximização do *compliance* e minimização da massa. Desta forma inseriu-se a restrição de cinco quilos como parâmetro máximo para a massa, porém é necessário determinar um mínimo de valor para o *compliance*, e o escolhido foi $1,85 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}} \right]$. Estas escolhas, novamente foram feitas devido à sensibilidade do engenheiro projetista com o produto estudado, pelo o histórico de otimizações nesta questão, tem-se em média ganhos em 30% de redução de massa. No anexo A é possível verificar as iterações realizadas pelo *software*, para apresentar esta análise de forma mais objetiva, as respostas foram tabeladas conforme Tabela 2. Outro ponto interessante a ser colocado é que ao diminuir a massa verificou-se um aumento na rigidez da travessa para este exemplo estudado.

Figura 32 - Resposta numérica do comportamento da travessa mediante torção, deslocamento transversal e lateral.

```

*****
OPTIMIZATION FILE AND PARAMETER INFORMATION :
-----
FEM model file      :
C:/Users/raphaell/Documents/1-Simulações/60- TG_Fabiola/Fabiola_#2.fem
output files prefix :
C:/Users/raphaell/Documents/1-Simulações/60- TG_Fabiola/Fabiola_#2
Model read from files:
C:/Users/raphaell/Documents/1-Simulações/60- TG_Fabiola/Fabiola_#2.fem
*****

*****

FINITE ELEMENT MODEL DATA INFORMATION :
-----
Total # of Grids (Structural)      :      33178
Total # of Elements                 :      24282
Total # of Rigid Elements           :           2
Total # of Rigid Element Constraints :      1392
Total # of Degrees of Freedom       :     100924
Total # of Non-zero Stiffness Terms :     3432847

Element type Information
-----
CHEXA      Elements      :      24282
ANALYSIS RESULTS :
-----

ITERATION    0

Auto-SPC d. o. f.s for loadcase 1
Number of Auto-SPC d. o. f.s = 1392

-----
Grid No.      Component
-----
1             4 5 6
2             4 5 6
3             4 5 6
4             4 5 6
5             4 5 6
6             4 5 6
7             4 5 6
8             4 5 6
9             4 5 6
10            4 5 6
11            4 5 6
12            4 5 6
13            4 5 6
14            4 5 6
156           4 5 6
157           4 5 6
158           4 5 6
159           4 5 6
160           4 5 6
161           4 5 6
162           4 5 6
163           4 5 6
164           4 5 6
165           4 5 6
166           4 5 6
167           4 5 6
168           4 5 6
169           4 5 6
2003          4 5 6
2004          4 5 6
2005          4 5 6
2006          4 5 6
2007          4 5 6
2008          4 5 6
-----

Because of PARAM, PRGPST, 100, Auto-SPC printing is limited to 100 dofs.

(Scratch disk space usage for starting iteration = 57 MB)
(Running in-core solution)

volume                      = 9.85553E+005    Mass      = 7.73659E-003

Subcase  Compliance
1      4.310309E+06
2      2.904428E+05
3      9.791575E+05

*****
ANALYSIS COMPLETED.
*****

```

Fonte: (SOFTWARE ALTAIR).

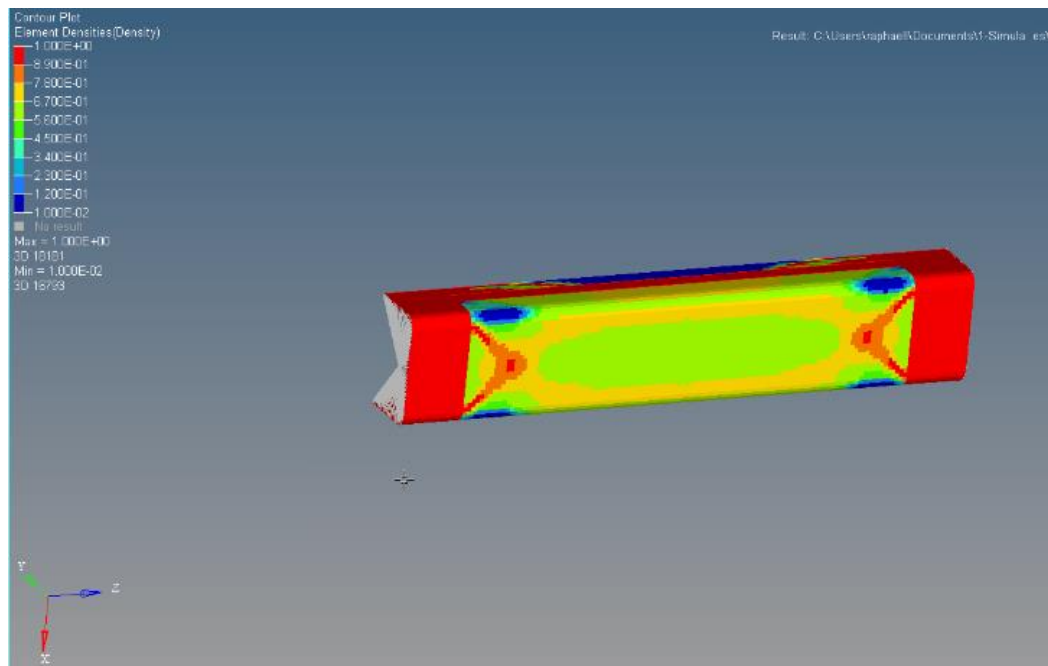
Tabela 2 – Resultados das iterações apresentadas pelo software Altair.

Iteração	<i>Compliance</i> $\left[10^6 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}\right]$			Massa [kg]
	Torção	<i>Vertical Bend</i>	<i>Lateral Bend</i>	
1	2,57	0,173	0,540	5,65
2	2,02	0,135	0,347	4,56
3	1,92	0,125	0,298	4,53
4	1,93	0,123	0,295	4,39
5	1,94	0,121	0,294	4,24
6	1,92	0,119	0,292	4,09
7	1,91	0,117	0,289	3,96
8	1,88	0,116	0,287	3,87
9	1,87	0,115	0,285	3,81
10	1,86	0,114	0,283	3,77
11	1,86	0,113	0,283	3,75
12	1,85	0,113	0,281	3,73
13	1,85	0,112	0,282	3,72

Na Tabela 2 observa-se que somente na décima terceira iteração atingiu-se as restrições impostas para massa e *compliance*. A travessa de 7,73 [kg] apresentou um resultado de otimização para 3,72 [kg], ou seja, uma redução de 48% em massa. Sendo a redução em massa e o *compliance* resultados bastante animadores frente a proposta deste estudo.

Com este resultado o software retornou a imagem da Figura 33, onde a escala mostra pontos máximos de densidade e de mínimos.

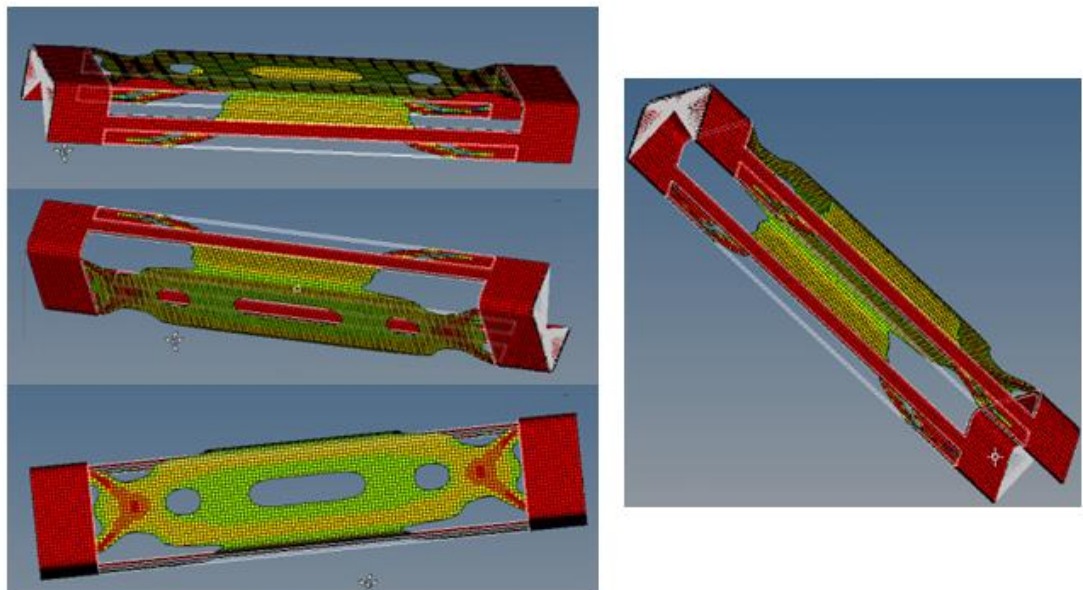
Figura 33 - Imagem da resposta as restrições de massa e *compliance* para a otimização topológica.



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

Com destaque para as cores em azul e verde onde pode-se obter ganhos em peso da peça uma vez que estes pontos se apresentam com menor densidade. Assim um novo modelo de peça é sugerido, conforme Figura 34.

Figura 34 - Novo modelo de travessa proposto após a resposta da simulação do software.



Fonte: (SOFTWARE ALTAIR.).

5. CONCLUSÃO

A principal finalidade deste trabalho foi verificar a importância da otimização de estruturas de um chassi de caminhão, uma vez que a otimização influencia diretamente em desempenho, emissão de poluentes e preço do produto. Em virtude da diminuição de peso. A inovação nos processos de fabricação e otimização das estruturas veiculares se faz necessária frente aos novos conceitos devido às legislações ambientais e mercado mais exigente no setor automotivo quanto à emissão de CO₂ e consumo de combustível. Estudos de grandes corporações voltadas para otimização de veículos já indicam redução de 8% nas emissões de CO₂ devido à redução de massa no veículo em 10%. Este trabalho teve foco na otimização da travessa devido a esta ser uma das principais estruturas responsável pela rigidez torsional do chassi e o impacto que a redução em massa nesta travessa pode proporcionar. A sustentabilidade é outro fator que impulsiona o desenvolvimento de novas tecnologias; a preocupação com o meio ambiente tornou-se hoje uma obrigatoriedade para toda empresa. Portanto verifica-se uma tendência no mercado atual e para o futuro quanto a sustentabilidade e produtos com menos impactos ambientais e a redução do peso do veículo apresenta-se com opção de extrema relevância para atender a estas questões sem perder a qualidade e *performance* desejada.

Com a redução no peso do chassi tem-se ainda uma diminuição do valor agregado ao produto, uma vez que cerca de 40% do preço das peças que compõem um chassi são devido ao material e o restante envolve o processo de fabricação, custos de terceiros, entre outros.

A utilização do software com base no método de elementos finitos para esta otimização e tantas outras se faz necessária devido à necessidade de se analisar muitos elementos o que torna a estrutura mais complexa e o *software* da *Altair* além de proporcionar esta análise é capaz de indicar sugestões de diversos tipos de otimização. No caso deste trabalho a proposta ocorreu quanto a otimização topológica e a resposta do *software* foi embasada em concentração de densidade onde o novo modelo foi sugerido garantindo um bom comportamento estrutural e redução de massa em cerca de 48%.

É importante destacar que toda nova proposta de otimização de peça deve ser testada em campo sob condições críticas de uso, onde somente após a análise destes testes, do material, da espessura, interferências de montagem, entre outros, será possível o uso do modelo proposto no projeto do veículo diante dos resultados obtidos com esta simulação e análise de seu comportamento para sua validação.

5.1. PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

Este assunto não se esgota apenas à otimização com a proposta de uma nova geometria de peça, mas também a proposta do uso de materiais alternativos ao aço. Portanto como sugestão de continuação do tema proposto neste trabalho sugere-se análises no que tange a este exposto.

Verifica-se com o passar dos anos que as montadoras têm utilizado em seus veículos outros produtos além do aço, como borracha, plástico e alumínio em uma proporção maior, o que tende a crescer anualmente devido aos novos conceitos de pesquisas e desenvolvimento, que tendem a substituição do aço por materiais com mais resistência e menor peso. Uso, por exemplo, de aço carbono especial (aço de alta e ultra resistência) e materiais híbridos (plástico-metal na microestrutura) junto ao alumínio e chapas finas, garantindo alta resistência mecânica, mantendo-se as características do produto final com redução em 40% em peso do veículo, aproximadamente. Outro estudo que pode ser realizado é a análise do comportamento quanto à conformabilidade do material proposto e as possíveis restrições a uma nova geometria. Segundo O Debate (2009), o plástico hoje representa cerca de 10% do peso de um veículo enquanto que na Europa este valor chega a 25%. Esta tecnologia híbrida é utilizada em diversos produtos com alta resistência térmica e alta rigidez, sendo bem mais procurados do que em anos anteriores, verificando-se melhor custo benefício. Outra vertente que pode ser analisada é o estudo para o uso do alumínio; o mesmo possui excelentes resultados quanto a acabamento superficial, resistência e estampabilidade.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. 3ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2014. 238 p.

ALVES FILHO, Avelino. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE. 3. ed. São Paulo: Érica, 2005. 292 p.

ANFAVEA, Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores. São Paulo, 2015: Anuário da Indústria Automobilística Brasileira, 2015. Disponível em: <<http://www.anfavea.com.br/anuario.html>>. Acesso em: 21 jun. 2015.

AZEVEDO, Álvaro FM. Método dos Elementos finitos. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, v. 1, de 2003.

BASTOS, E. A. Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos. 2004. Tese (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

Beer, Ferdinand Pierre, 1915. Resistência dos materiais: mecânica dos materiais /Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr, John T. Dewolf; tradução de Maria Moro Fecchio; revisão técnica de Walter Libardi. - São Paulo: Mac Graw-Hill, 2006. 758 p.

BENOIT D.; RAJAN F. C. A lower-bound formulation for the geometry and topology optimization of truss structures under multiple loading. Structural and Multidisciplinary optimization, v. 48, p. 49-58, 2013.

BOARO, Leticia Cristina Cidreira. Análise das tensões de polimerização em função das dimensões do espécime em sistemas de alto compliance. 2008. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Odontologia, Pós Graduação, Universidade do Estado de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <<file:///C:/Users/sony/Downloads/LETICIACRISTINACIDREIRABOARO.pdf>>. Acesso em: 09 nov. 2015.

BROWN, Jason C.; ROBERTSON, A. John; SERPENTO, Stan T. Motor Vehicle Structures: Concepts and Fundamentals, Ed: Butterworth Heinemann, London, 2002.

CAMPILHO, Raul Duarte Salgueiral Gomes. Método de Elementos Finitos: Ferramentas para Análise Estrutural. Porto: Publinindustria, 2012. 205 p.

CHANDRUPATLA, Tirupathi R. et al. Elementos Finitos. 4. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. 516 p.

COUTINHO, Karilany Dantas. Método de Otimização Topológica em estruturas Tridimensionais. 2006. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

CONSONI, F. L.; QUADROS CARVALHO, R. Desenvolvimento de produtos na indústria automobilística brasileira: perspectivas e obstáculos para a capacitação local. *Revista de Administração Contemporânea*, v. 6, n. 1, p. 39-62, 2002.

FORD CAMINHÕES (Comp.). Manual do Implementador. 2014. Disponível em: <http://www.fordcaminhoes.com.br/servlet/BlobServer/Manual_do_Implementador.pdf?blobtable=DFYBlob&blobheader=application/pdf&blobwhere=1249058408423&blobcol=urlblob&blobkey=id>. Acesso em: 9 ago. 2015.

HAFTKA, Raphael T.; GÜRDAL, Zafer. *Elements of Structural Optimization: Solid Mechanics and its Applications*. 3. ed. USA: Springer-verlag, 1991. 504 p. (0792315049).

Hibbeler, R. C. Resistência dos materiais /R. C. Hibbeler ; tradução Joaquim Pinheiro Nunes da Silva ; revisão técnica Wilson Carlos da Silva Júnior. - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004. 670 p.

MELCONIAN, Marcos Vinicius. Modelagem Numérica e Computacional com Similitude e Elementos Finitos: Equação preditiva geral para o cálculo da força de retenção em freios de estampagem. São Paulo: Blucher, 2014. 119 p.

MUNDSTOCK, Daniel Contreras. Otimização de Forma Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis Complexas. 2006. 91 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, PROMEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Porto Alegre, 2006. Cap. 3.

O DEBATE (Brasil) (Comp.). A importância do plástico na indústria automotiva. 2009. Disponível em: <<http://www.almaco.org.br/>>. Acesso em: 23 nov. 2015.

ROCHA, Fábio Krug. Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular. 2004. 161 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004. Cap. 1.

SANCHES, R. P. Otimização estrutural evolucionária usando malhas hexagonais. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, 2011.

SOARES, F. S, Geritz, L. C, Cervieri, A., Aires, A. F. R., da Silveira, M. A., “Desenvolvimento de um chassi automotivo para um veículo elétrico de pequeno porte”, Publicado na revista de iniciação científica da ULBRA – N°10/2012

SILVA, Francielly Elizabeth de Castro. Otimização dimensional, de forma e topológica de estruturas treliçadas utilizando um algoritmo híbrido. 2015. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

TOMPSON, L.L.; RAJU, S.; LAW, E.H.; 1998; “Design of a Winston Cup Chassi for Torsional Stiffness”; SAE Technical Paper Series No. 983053 – Motorsports Engineering Conference Proceedings Volume 1: Vehicle Design and Safety; Michigan, USA

ANEXO A – RESPOSTA DO SOFTWARE PARA A SIMULAÇÃO

```

*****
*****
**                               OptiStruct 13.0
**
**                               Design and Optimization Software
**
**                               from Altair Engineering, Inc.
**
*****
*****

```

OPTIMIZATION FILE AND PARAMETER INFORMATION :

```

-----

FEM model file                :
    C:/Users/raphaell/Documents/1-Simulações/60-
TG_Fabiola/Fabiola_#otimo_torca_#4.fem
Output files prefix           :
    C:/Users/raphaell/Documents/1-Simulações/60-
TG_Fabiola/Fabiola_#otimo_torca_#4
Model read from files:
    C:/Users/raphaell/Documents/1-Simulações/60-
TG_Fabiola/Fabiola_#otimo_torca_#4.fem

```

```

*****
*****

```

FINITE ELEMENT MODEL DATA INFORMATION :

```

-----

Total # of Grids (Structural)      :      33179
Total # of Elements                 :      24282
Total # of Rigid Elements           :           2
Total # of Rigid Element Constraints :      1392
Total # of Degrees of Freedom       :     100924
Total # of Non-zero Stiffness Terms :    3432847

```

Element Type Information

```

-----

CHEXA      Elements      :      24282

```

Load and Boundary Information

```

-----

SPC      Sets      :           6

```

Material and Property Information

```

-----

```

PSOLID Cards : 2
 MAT1 Cards : 1

OPTIMIZATION PROBLEM PARAMETERS :

Objective Function : Minimize Mass

Response Summary :

Number of mass responses : 1
 Number of compliance responses : 1

 Static Subcase Summary :

Subcase ID	SPC ID	FORCE ID
1	2	0
2	5	0
3	6	0

 Design Parameters Summary :

Total # of topology design elements :
 16464
 Total # of topology cards :
 1

Total Volume of Design Material : 6.6534E+05
 Total Mass of Design Material : 5.2229E-03
 Volume of Non-Design Material : 3.2021E+05
 Mass of Non-Design Material : 2.5136E-03

Solid Design Elements : PSOLID

 1

 Optimization Parameters Summary :

Initial Material Fraction [0,1] : 0.9000
 Minimum Element Volume Fraction : 0.0100
 Discreteness Parameter : 1.0000

```

Topology Optimization Method      : Density Method
Maximum Number of Iterations     : 30

Convergence Tolerance            : 5.0000E-03
Step Size (Topology)            : 0.5000

Checkerboard Control             : Off

Run Type                         : Topology
Optimization

```

```

-----
Topology Optimization Summary :
-----

```

```

-----
DTPL ID      Minimum      Maximum      Minimum
             Member Size  Member Size  Gap Size
-----
          1
-----
DTPL ID      Pattern      Pattern      Draw Dir.   Stamping
No Hole      Extrusion
             Repet.      Group.  Constraints Constraints
Constraints Constraints
-----
          1      NONE      NONE      NONE      NONE
NONE          NONE
-----
-----

```

```

Restart from previous solution : No
Scratch file directory         : ./
                               Free space:
1402.912 GB
Number of CPU processors       : 1

```

```

*****
*****

```

```

MEMORY ESTIMATION INFORMATION :
-----

```

```

Solver Type is: Sparse-Matrix Solver
                Direct Method

```

```

Current Memory (RAM)
: 484 MB
Estimated Minimum Memory (RAM) for Out of Core
Solution : 136 MB
Recommended Memory (RAM) for Out of Core Solution
: 152 MB
Recommended Memory (RAM) for In-Core Solution
: 484 MB

```

DISK SPACE ESTIMATION INFORMATION :

Estimated Disk Space for Output Data Files
 : 28 MB
 Estimated Scratch Disk Space for In-Core Solution
 : 114 MB
 Estimated Scratch Disk Space for Out of Core
 Solution : 601 MB

BEGINNING OPTIMIZATION SOLUTION

OPTIMIZATION HISTORY INFORMATION :

ITERATION 0

Auto-SPC d. o. f.s for loadcase 1
 Number of Auto-SPC d. o. f.s = 1392

Grid No.	Component
----------	-----------

1	4 5 6
2	4 5 6
3	4 5 6
4	4 5 6
5	4 5 6
6	4 5 6
7	4 5 6
8	4 5 6
9	4 5 6
10	4 5 6
11	4 5 6
12	4 5 6
13	4 5 6
14	4 5 6
156	4 5 6
157	4 5 6
158	4 5 6
159	4 5 6
160	4 5 6
161	4 5 6
162	4 5 6
163	4 5 6
164	4 5 6
165	4 5 6
166	4 5 6
167	4 5 6
168	4 5 6
169	4 5 6
2003	4 5 6

2004	4 5 6
2005	4 5 6
2006	4 5 6
2007	4 5 6
2008	4 5 6

Because of PARAM, PRGPST, 100, Auto-SPC printing
is limited to 100 dofs.

(Scratch disk space usage for starting iteration =
124 MB)
(Running in-core solution)

Objective Function (Minimize MASS) = 7.21430E-03
No active constraints
Design Volume Fraction = 9.00000E-001
Mass = 7.21430E-003

Subcase	Compliance
1	3.897927E+06
2	2.638275E+05
3	8.753761E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type Response Subcase Grid/ DOF/
Response Objective Viol.
User-ID Label /RANDPS Element/ Comp
Value Reference/ %
/Model MID/PID/ /Reg
Constraint
+Frgncy Mode No.
Bound

1 MASS massa -- -- TOTL
7.214E-03 MIN

ITERATION 1

Objective Function (Minimize MASS) = 5.64741E-03
% change = -21.72
Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
Design Volume Fraction = 6.00000E-001
Mass = 5.64741E-003

Subcase	Compliance
1	2.569783E+06
2	1.726512E+05
3	5.407694E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response Objective	Subcase Grid/	DOF/
Response	Label	Viol.	
User-ID	Label	/RANDPS Element/	Comp
Value	Reference/	%	
		/Model MID/PID/	/Reg
Constraint			
		+Frqncy Mode No.	
Bound			
1 MASS	massa	--	-- TOTL
5.647E-03	MIN		
2 COMPL	complan	1	-- TOTL
2.570E+06	> 1.850E+06	0.0	

ITERATION 2

Objective Function (Minimize MASS) = 4.76524E-03
 % change = -15.62
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 4.31096E-001
 Mass = 4.76524E-003

Subcase	Compliance
1	2.022083E+06
2	1.347276E+05
3	3.408709E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response Objective	Subcase Grid/	DOF/
Response	Label	Viol.	
User-ID	Label	/RANDPS Element/	Comp
Value	Reference/	%	
		/Model MID/PID/	/Reg
Constraint			
		+Frqncy Mode No.	
Bound			
1 MASS	massa	--	-- TOTL
4.765E-03	MIN		
2 COMPL	complan	1	-- TOTL
2.022E+06	> 1.850E+06	0.0	

ITERATION 3

Objective Function (Minimize MASS) = 4.53114E-03
 % change = -4.91
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 3.86276E-001
 Mass = 4.53114E-003

Subcase	Compliance
1	1.925889E+06
2	1.254142E+05
3	2.987232E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response	Subcase	Grid/	DOF/
Response	Objective	Viol.		
User-ID	Label	/RANDPS	Element/	Comp
Value	Reference/	%		
		/Model	MID/PID/	/Reg
Constraint				
		+Frqncy	Mode	No.
Bound				

1	MASS	massa	--	--	TOTL
4.531E-03	MIN				
2	COMPL	complan	1	--	TOTL
1.926E+06	>	1.850E+06	0.0		

ITERATION 4

Objective Function (Minimize MASS) = 4.39430E-03
 % change = -3.02
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 3.60075E-001
 Mass = 4.39430E-003

Subcase	Compliance
1	1.936125E+06
2	1.232005E+05
3	2.959344E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response	Subcase	Grid/	DOF/
Response	Objective	Viol.		
User-ID	Label	/RANDPS	Element/	Comp
Value	Reference/	%		

Constraint	/Model	MID/PID/	/Reg
Bound	+Frqncy	Mode	No.
1 MASS massa	--	--	TOTL
4.394E-03 MIN			
2 COMPL complian	1	--	TOTL
1.936E+06 > 1.850E+06	0.0		

ITERATION 5

Objective Function (Minimize MASS) = 4.24127E-03
 % change = -3.48
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 3.30777E-001
 Mass = 4.24127E-003

Subcase	Compliance
1	1.941707E+06
2	1.212305E+05
3	2.944934E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response Objective	Subcase Grid/	DOF/
User-ID	Label	/RANDPS Element/	Comp
Value	Reference/	%	
Constraint	/Model	MID/PID/	/Reg
Bound	+Frqncy	Mode	No.
1 MASS massa	--	--	TOTL
4.241E-03 MIN			
2 COMPL complian	1	--	TOTL
1.942E+06 > 1.850E+06	0.0		

ITERATION 6

Objective Function (Minimize MASS) = 4.08899E-03
 % change = -3.59
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 3.01619E-001
 Mass = 4.08899E-003

Subcase	Compliance
1	1.928721E+06
2	1.194498E+05
3	2.924688E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response Objective	Subcase	Grid/	DOF/
User-ID	Label	Viol.	Element/	Comp
Value	Reference/	%	/Model	MID/PID/
Constraint				/Reg
			+Frqncy	Mode No.
Bound				

1	MASS	massa	--	--	TOTL
4.089E-03	MIN				
2	COMPL	complan	1	--	TOTL
1.929E+06	>	1.850E+06	0.0		

ITERATION 7

Objective Function (Minimize MASS) = 3.96225E-03
 % change = -3.10
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 2.77354E-001
 Mass = 3.96225E-003

Subcase	Compliance
1	1.906873E+06
2	1.177802E+05
3	2.896056E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

Response Type	Response Objective	Subcase	Grid/	DOF/
User-ID	Label	Viol.	Element/	Comp
Value	Reference/	%	/Model	MID/PID/
Constraint				/Reg
			+Frqncy	Mode No.
Bound				

1	MASS	massa	--	--	TOTL
3.962E-03	MIN				

```

      2 COMPL complian      1      --  TOTL
1.907E+06 > 1.850E+06      0.0
-----
-----

```

ITERATION 8

```

Objective Function (Minimize MASS ) = 3.87153E-03
% change = -2.29
Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
Design Volume Fraction = 2.59985E-001
Mass = 3.87153E-003

```

```

Subcase  Compliance
  1  1.887458E+06
  2  1.163105E+05
  3  2.870567E+05

```

RETAINED RESPONSES TABLE

```

-----
Response Type  Response      Subcase Grid/      DOF/
Response      Objective      Viol.
User-ID        Label      /RANDPS Element/  Comp
Value          Reference/  %
                  /Model  MID/PID/  /Reg
Constraint
Bound
-----

```

```

      1 MASS  massa      --      --  TOTL
3.872E-03 MIN
      2 COMPL complian      1      --  TOTL
1.887E+06 > 1.850E+06      0.0
-----
-----

```

ITERATION 9

```

Objective Function (Minimize MASS ) = 3.81149E-03
% change = -1.55
Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
Design Volume Fraction = 2.48488E-001
Mass = 3.81149E-003

```

```

Subcase  Compliance
  1  1.874808E+06
  2  1.151774E+05
  3  2.851137E+05

```

RETAINED RESPONSES TABLE

```

-----
Response Type  Response      Subcase Grid/      DOF/
Response      Objective      Viol.
User-ID        Label        /RANDPS Element/   Comp
Value          Reference/    %
                                   /Model  MID/PID/   /Reg
Constraint
                                   +Frqncy Mode No.
Bound
-----
-----
      1 MASS  massa              --          --  TOTL
3.811E-03 MIN
      2 COMPL complian          1          --  TOTL
1.875E+06 > 1.850E+06    0.0
-----
-----

```

ITERATION 10

Objective Function (Minimize MASS) = 3.77401E-03
 % change = -0.98
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 2.41313E-001
 Mass = 3.77401E-003

```

Subcase  Compliance
      1  1.866513E+06
      2  1.142801E+05
      3  2.837162E+05

```

RETAINED RESPONSES TABLE

```

-----
Response Type  Response      Subcase Grid/      DOF/
Response      Objective      Viol.
User-ID        Label        /RANDPS Element/   Comp
Value          Reference/    %
                                   /Model  MID/PID/   /Reg
Constraint
                                   +Frqncy Mode No.
Bound
-----
-----
      1 MASS  massa              --          --  TOTL
3.774E-03 MIN
      2 COMPL complian          1          --  TOTL
1.867E+06 > 1.850E+06    0.0 A
-----
-----

```

ITERATION 11

Objective Function (Minimize MASS) = 3.75061E-03

% change = -0.62
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 2.36832E-001
 Mass = 3.75061E-003

Subcase	Compliance
1	1.862000E+06
2	1.136382E+05
3	2.829076E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

```

-----
Response Type  Response      Subcase Grid/      DOF/
Response      Objective    Viol.
User-ID        Label      /RANDPS Element/  Comp
Value          Reference/  %
               /Model  MID/PID/  /Reg
Constraint
               +Frqncy Mode No.
Bound
-----

```

```

-----
1 MASS  massa          --          --  TOTL
3.751E-03 MIN
2 COMPL complian      1          --  TOTL
1.862E+06 > 1.850E+06  0.0 A
-----

```

ITERATION 12
 the 1st satisfied convergence ratio = 4.2408E-03

Objective Function (Minimize MASS) = 3.73477E-03
 % change = -0.42
 Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00
 Design Volume Fraction = 2.33799E-001
 Mass = 3.73477E-003

Subcase	Compliance
1	1.859149E+06
2	1.131048E+05
3	2.823159E+05

RETAINED RESPONSES TABLE

```

-----
Response Type  Response      Subcase Grid/      DOF/
Response      Objective    Viol.
User-ID        Label      /RANDPS Element/  Comp
Value          Reference/  %
               /Model  MID/PID/  /Reg
Constraint
               +Frqncy Mode No.

```

Bound

```

-----
      1 MASS  massa          --          --  TOTL
3.735E-03 MIN
      2 COMPL complian      1          --  TOTL
1.859E+06 > 1.850E+06      0.0 A
-----

```

ITERATION 13

the 2nd satisfied convergence ratio = 3.0745E-03

Objective Function (Minimize MASS) = 3.72332E-03

% change = -0.31

Maximum Constraint Violation % = 0.00000E+00

Design Volume Fraction = 2.31608E-001

Mass = 3.72332E-003

```

Subcase  Compliance
      1  1.856549E+06
      2  1.125611E+05
      3  2.822427E+05

```

RETAINED RESPONSES TABLE

```

-----
Response Type  Response      Subcase Grid/      DOF/
Response      Objective    Viol.
User-ID        Label      /RANDPS Element/  Comp
Value          Reference/  %
                               /Model  MID/PID/  /Reg
Constraint
                               +Frqncy Mode No.
Bound
-----

```

```

-----
      1 MASS  massa          --          --  TOTL
3.723E-03 MIN
      2 COMPL complian      1          --  TOTL
1.857E+06 > 1.850E+06      0.0 A
-----

```


OPTIMIZATION HAS CONVERGED.

FEASIBLE DESIGN (ALL CONSTRAINTS SATISFIED).

RESOURCE USAGE INFORMATION

MAXIMUM MEMORY USED

484 MB
MAXIMUM DISK SPACE USED
130 MB

COMPUTE TIME INFORMATION

EXECUTION STARTED	Wed Nov 25
16:43:35 2015	
EXECUTION COMPLETED	Wed Nov 25
16:48:43 2015	
ELAPSED TIME	
00:05:07	
CPU TIME	
00:04:57	

***** END OF REPORT *****