

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**OTIMIZAÇÃO DE UMA METAESTRUTURA
COM RIGIDEZ NÃO LINEAR PARA
ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO AXIAL**

Diego Pereira Vasconcellos

Bauru

2020

Diego Pereira Vasconcellos

**OTIMIZAÇÃO DE UMA METAESTRUTURA
COM RIGIDEZ NÃO LINEAR PARA
ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO AXIAL**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projetos Mecânicos, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Silveira

Bauru

2020

Vasconcellos, Diego Pereira.

Otimização de uma metaestrutura com rigidez não linear para atenuação de vibração axial / Diego Pereira Vasconcellos, 2020

86 f. : il.

Orientador: Marcos Silveira

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2020

1. Atenuação de vibrações. 2. Metaestrutura. 3. Otimização. 4. Rigidez não linear. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE DIEGO PEREIRA VASCONCELLOS, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 21 dias do mês de fevereiro do ano de 2020, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de DIEGO PEREIRA VASCONCELLOS, intitulada **ANÁLISE DE VIBRAÇÕES E OTIMIZAÇÃO EM UMA METAESTRUTURA PARA ATENUAR VIBRAÇÃO AXIAL SEM ADIÇÃO DE MASSA**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: __Aprovado__. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO

PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DO TÍTULO

A BANCA EXAMINADORA PROPÕE A ALTERAÇÃO DO TÍTULO DO TRABALHO DO ALUNO:
DIEGO PEREIRA VASCONCELLOS

DE: "ANÁLISE DE VIBRAÇÕES E OTIMIZAÇÃO EM UMA METAESTRUTURA PARA ATENUAR VIBRAÇÃO AXIAL SEM ADIÇÃO DE MASSA."

PARA:

Otimização de uma metaestrutura com rigidez não linear para atenuação de vibrações axial.

Bauru, 21 de fevereiro de 2020.


Prof. Dr. Marcos Silveira
Orientador

VASCONCELLOS, D.P., OTIMIZAÇÃO DE UMA METAESTRUTURA COM RIGIDEZ NÃO LINEAR PARA ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO AXIAL, Bauru: Faculdade de Engenharia, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 2020, 86 p.,
Dissertação (Mestrado).

Palavras chave: metaestrutura, otimização, atenuação de vibrações, rigidez não linear.

Resumo - O objetivo deste trabalho é explorar a atenuação da vibração de uma metaestrutura por meio da adição de absorvedores de forma periódica. Além disso é explorada a atenuação da vibração de uma metaestrutura quando um absorvedor com rigidez cúbica não linear é incluído sem aumentar a massa total. As metaestruturas, e especificamente as estruturas periódicas, apresentam características interessantes para atenuação da vibração que não são encontradas em estruturas clássicas. Estas características foram exploradas para aplicações automotivas e aeroespaciais, entre outras, pois estruturas com baixa massa são fundamentais para essas indústrias. Também é desejável manter baixos níveis de vibração em uma ampla faixa de frequência. Foi demonstrado que a adição de absorvedores de vibração em um arranjo periódico pode fornecer atenuação da vibração para entrada de choque sem aumentar a massa total de uma estrutura. Neste trabalho, a resposta dinâmica do sistema proposto é comparada a uma metaestrutura base sem absorvedores e uma metaestrutura com absorvedores lineares para entrada harmônica através da avaliação da norma $\mathcal{H}_2$ da resposta em frequência. Um procedimento de otimização é mostrado para encontrar a posição ideal e os coeficientes de rigidez do absorvedor não linear. A resposta dinâmica do sistema ideal é obtida numericamente e mostra que a adição de um absorvedor não linear pode melhorar a atenuação da vibração.

VASCONCELLOS, D.P., OPTIMISATION OF A METASTRUCTURE WITH
NONLINEAR STIFFNESS FOR ATTENUATION OF AXIAL VIBRATION,
Engineering College of Bauru, UNESP - São Paulo State University, 2020, 86 p.,
Dissertation (Master's degree).

Keywords: metastructure, optimization, vibration attenuation, nonlinear stiffness.

Abstract - The objective of this work is to explore the vibration attenuation of a metastructure by periodically adding absorbers, and the vibration attenuation of a metastructure is explored when a nonlinear cubic stiffness absorber is included without increasing the total mass. Metastructures, and specifically periodic structures, present interesting characteristics for vibration attenuation that are not found in classical structures. These characteristics have been explored for automotive and aerospace applications, among others, as structures with low mass are paramount for these industries, and keeping low vibration levels in wide frequency range is also desirable. It has been shown that the addition of vibration absorbers in a periodic arrangement can provide vibration attenuation for shock input without increasing the total mass of a structure.

In this work, the dynamical response of the proposed system is compared to a base metastructure without absorbers and a metastructure with linear absorbers for harmonic input via the evaluation of the $\mathcal{H}_2$ norm of the frequency response. An optimisation procedure is shown to find the optimal position and stiffness coefficients of the nonlinear absorber. The dynamical response of the optimal system are obtained numerically, and shows that the addition of one nonlinear absorber can improve vibration attenuation.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força e sabedoria para o cumprimento dessa etapa, a minha família, namorada e ao grupo NDE pelo apoio durante esse período.

Agradeço ao meu orientador Professor Dr. Marcos Silveira pelo incentivo, dedicação e conhecimento para o desenvolvimento desse trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), pelo financiamento e apoio para o desenvolvimento desse trabalho. Número de processo 1795017.

A UNESP, pelo apoio e infraestrutura, ao programa de pós-graduação, e a todos que de certa forma ajudaram com esse trabalho.

Sumário

Lista de Figuras	11
Nomenclatura	15
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Revisão Bibliográfica	19
1.1.1 Estruturas periódicas	19
1.1.2 Controle passivo de vibrações	23
1.1.3 Não linearidade em estruturas periódicas	25
1.1.4 Processo de otimização	28
1.2 Justificativa	29
1.3 Objetivos	29
1.4 Metodologia	30
1.5 Estrutura da dissertação	32
2 MODELAGEM DO SISTEMA	33
2.1 Modelagem do sistema através da segunda lei de Newton	33
2.1.1 Parâmetros do sistema	35
2.1.2 Equação de movimento do sistema	36
3 RESPOSTA DINÂMICA COM RIGIDEZ LINEAR	40
3.1 Metaestrutura base	41

3.2	Metaestrutura com absorvedores	44
4	ABORDAGENS PARA DEFINIR OS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA FORÇA NÃO LINEAR	48
4.1	Abordagem 1 para definir o coeficiente de rigidez não linear	49
4.1.1	Rigidez não linear do tipo <i>hardening</i>	51
4.1.2	Rigidez não linear do tipo <i>softening</i>	53
4.2	Abordagem 2 para definir o coeficiente de rigidez não linear	54
4.2.1	Rigidez não linear do tipo <i>hardening</i>	55
4.2.2	Rigidez não linear do tipo <i>softening</i>	56
5	OTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA	59
5.1	Otimização utilizando a abordagem 1	61
5.1.1	Caso 1	61
5.1.2	Caso 2	64
5.2	Otimização utilizando a abordagem 2	68
5.2.1	Caso 1	68
5.2.2	Caso 2	72
5.3	Comparação entre a otimização utilizando a abordagem 1 e a otimização utilizando a abordagem 2	75
5.4	Comparação da resposta otimizada com a metaestrutura base	76
5.4.1	Metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear	76
5.4.2	Metaestrutura com todos os absorvedores não lineares	80
6	CONCLUSÕES	81
6.1	Publicações	82
	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS	84

Lista de Figuras

1.1	Viga em balanço com excitação pela base, onde em (a) os absorvedores são espaçados de forma uniforme e em (b) não uniforme. Fonte: Sugino <i>et al.</i> (2017).	20
1.2	Metaestrutura utilizada para <i>energy harvesting</i> e atenuação de vibrações. Fonte: Sugino e Erturk (2018).	21
1.3	Exemplos de estruturas periódicas, onde (a) é um eixo sob excitação torcional/longitudinal, (b) é uma barra sob excitação transversal e (c) é uma placa sob excitação transversal. Fonte: Sugino <i>et al.</i> (2017)	22
1.4	Absorvedor de <i>Stockbridge</i> . Fonte: Rao (2011).	24
1.5	(a) Configuração clássica de um sistema com ADV e (b) resposta em frequência. Fonte: Rao (2011).	24
1.6	Estrutura periódica com amortecimento não linear. Fonte: Marathe e Chatterjee (2006).	25
1.7	Isolador QZS, onde I são molas lineares, II molas lineares com pré-tensão e III mola com rigidez não linear do tipo <i>softening</i> e com pré-tensão. A mola vertical é linear. Fonte: Carrella <i>et al.</i> (2009)	26
1.8	Metaestrutura feita em impressora 3D com molas com características HSLDS. Fonte: Lamarque, Savadkoobi e Charlemagne (2018)	27
1.9	Estrutura periódica utilizada para atenuar vibrações. Fonte: Abdeljaber, Avci e Inman (2016).	28

2.1	Modelo representando em (a) a metaestrutura base e em (b) a metaestrutura com absorvedores.	34
3.1	Resposta em frequência do bloco mais a esquerda (Q_1) da metaestrutura base, mostrada na figura 2.1(a), usando a equação 2.7, com as linhas verticais indicando as frequências naturais não amortecidas.	41
3.2	Modos de vibrar axiais da metaestrutura base.	42
3.3	Cinco modos de vibrar axiais (a-e) da metaestrutura base.	43
3.4	Resposta em frequência do bloco mais a esquerda (Q_1) da metaestrutura base, mostrada na figura 2.1(a), usando a equação 2.7, com as linhas verticais indicando as frequências naturais não amortecidas.	44
3.5	Nove modos de vibrar axiais (a-i) da metaestrutura com absorvedores . .	45
3.6	Ilustração de cada um dos nove modos de vibrar axiais (a-i) da metaestrutura com absorvedores.	46
3.7	Comparação entre a metaestrutura base e metaestrutura com absorvedores lineares (a) FRF e (b) curva de atenuação.	47
4.1	Resposta em frequência, onde (a) é do primeiro bloco, (b) do primeiro absorvedor e (c) do deslocamento relativo entre a primeira massa e o primeiro absorvedor.	49
4.2	Força por deslocamento para o caso <i>hardening</i> , utilizando a abordagem 1.	52
4.3	Força por deslocamento para o caso <i>softening</i> , utilizando a abordagem 1.	54
4.4	Força por deslocamento para o caso <i>hardening</i> , utilizando a abordagem 2.	56
4.5	Força por deslocamento para o caso <i>softening</i> , utilizando a abordagem 2.	57
5.1	Resposta em frequência da primeira massa da metaestrutura com absorvedores lineares indicando as regiões A, B e C que deseja-se otimizar. . .	60
5.2	Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ utilizando a abordagem 1, caso 1.	62

5.3	Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	63
5.4	Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	64
5.5	Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ utilizando a abordagem 1, caso 2.	65
5.6	Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	66
5.7	Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	67
5.8	Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ do caso 1, utilizando a abordagem 2.	69
5.9	Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	70
5.10	Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	71
5.11	Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ do caso 2, utilizando a abordagem 2.	72

5.12	Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	73
5.13	Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.	74
5.14	Valor da função objetivo da metaestrutura base, metaestrutura com absorvedores lineares e metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear para cada região (A–D). Redução (%) em relação a metaestrutura base.	77
5.15	Resposta em frequência da metaestrutura base, metaestrutura com absorvedores lineares e metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear para cada região (A–D). As regiões destacadas indicam qual faixa de frequência foi otimizada.	78
5.16	Curvas de atenuação em relação a metaestrutura base, para cada região (A–D).	79
5.17	Valor da função objetivo da metaestrutura base, metaestrutura com um absorvedor não linear e metaestrutura com todos os absorvedores não lineares para cada região (A–D). Redução (%) em relação a metaestrutura base.	80

Nomenclatura

Símbolo	Descrição
Letras latinas	
a	Razão de força elástica
A	Área da seção transversal
$\mathbf{A}_{ss}$	Matriz em espaço de estados
b	Razão de coeficientes de rigidez linear e não linear
$\mathbf{B}_{ss}$	Matriz em espaço de estados
c_a	Coefficiente de amortecimento do absorvedor
c	Coefficiente de amortecimento
$\mathbf{C}$	Matriz dos coeficientes de amortecimento
$\mathbf{C}_{ss}$	Matriz em espaço de estados
E	Módulo de Young
f_n	Frequência natural em Hz
$f(X)$	Função objetivo no processo de otimização
F	Força externa
F_0	Amplitude da força externa
F_L	Força elástica linear
F_{NL}	Força elástica não linear
g_i	Função de restrição
$G(q)$	Vetor com termos não lineares
$G(\omega)$	Função transferência

I	Matriz identidade
j	Número imaginário ($\sqrt{-1}$)
k_a	Coefficiente de rigidez linear do absorvedor
k_{an}	Coefficiente de rigidez linear do absorvedor para a força não linear
k	Coefficiente de rigidez
k_n	Coefficiente de rigidez não linear do absorvedor
K	Matriz dos coeficientes rigidez
K_a	Matriz dos coeficientes de rigidez dos absorvedores
K_{a2}	Matriz dos coeficientes de rigidez dos absorvedores aumentada
K_b	Matriz dos coeficientes de rigidez da estrutura base
L	Comprimento da estrutura
m_a	Massa do absorvedor
m_b	Massa da estrutura base
m_h	Massa da estrutura hospedeira
m_t	Massa total
M	Matriz de massa
n	Número de absorvedores
q	Vetor de deslocamentos da metaestrutura base e estrutura hospedeira
$\dot{q}$	Vetor de velocidades da metaestrutura base e estrutura hospedeira
$\ddot{q}$	Vetor de acelerações da metaestrutura base e estrutura hospedeira
$\hat{q}$	Vetor de deslocamentos dos absorvedores
$\dot{\hat{q}}$	Vetor de velocidades dos absorvedores
$\ddot{\hat{q}}$	Vetor de acelerações dos absorvedores

Q	Amplitude de deslocamento
$\hat{Q}$	Amplitude de deslocamento dos absorvedores
R	Razão entre a resposta em frequência otimizada pela não otimizada
x	Deformação da mola
$\bar{x}$	Valor médio de deformação
X_i	Variáveis de decisão
$X_{i,0}$	Condições iniciais das variáveis de decisão
X	Vetor de variáveis de decisão
Símbolos gregos	
α	Constante de proporcionalidade de amortecimento
λ	Autovalor
μ	Razão de massa
ω	Frequência de excitação
ω_s	Frequência de sintonização
Abreviações	
ADV	Absorvedor Dinâmico de Vibrações
FRF	Função de Resposta em Frequência

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

As pesquisas em estruturas periódicas estão atraindo cada vez mais atenção de muitas aplicações de engenharia, como estruturas civis, automotivas e aeroespaciais (HUSSEIN; LEAMY; RUZZENE, 2014; MEAD, 1996). Estruturas periódicas, também conhecidas como metaestruturas, apresentam características de supressão de vibração que não são encontradas de forma comum em estruturas clássicas. Estas características podem ser manipuladas pelo arranjo macro geométrico de seus componentes (CVETICANIN; ZUKOVIC; CVETICANIN, 2018). O estudo de metamateriais tem seu início com metamateriais eletromagnéticos, quando Veselago (1968) descobre materiais com permissividade elétrica, permeabilidade magnética e índice de refração negativos. Posteriormente, o estudo de metamateriais é estendido ao campo de acústica e vibração, e para isto, é necessário implementar o conceito de massa negativa. Isto é um conceito, pois não é possível que um material tenha efetivamente massa negativa, e este conceito é implementado por meio da adição de absorvedores de vibração. Os primeiros a implementar este conceito são Milton e Willis (2007). Há vários sistemas periódicos que podem ser aplicados no cotidiano, podendo ser como estruturas periódicas finitas ou cíclicas, como: blocos para construção, a estrutura de fuselagem de um avião, um tubo que possui suportes idênticos posicionados de forma equidistante, materiais compósitos ou até mesmo um anel com suportes idênticos posicionados com intervalos angulares

idênticos uns dos outros (MEAD, 1996). Reichl e Inman (2017) realizam um estudo com a viabilidade de se adicionar absorvedores distribuídos a uma estrutura sem que haja um aumento total da massa da estrutura, e conseguiram mostrar que a dinâmica do absorvedor de vibração adicionado a estrutura é responsável por atenuar a vibração do sistema e não a adição de massa. Isto confirma sua aplicação nos setores automotivos e aeroespaciais, pois a vibração é atenuada pela dinâmica dos absorvedores de vibração, e estes são ramos da indústria onde é extremamente importante conseguir manter o peso de suas estruturas o menor possível. De acordo com Chakraborty e Mallik (2001) uma vantagem das estruturas periódicas é que a dinâmica destas estruturas pode ser estudada com a análise de apenas uma célula. Esta característica traz importante vantagem e facilidade para as análises nas estruturas periódicas.

1.1 Revisão Bibliográfica

Nesta seção são apresentadas definições a respeito de estruturas periódicas, absorvedores de vibração, não linearidade e otimização.

1.1.1 Estruturas periódicas

De acordo com Mead (1996), uma estrutura periódica consiste fundamentalmente de um número de componentes estruturais idênticos conectados lado a lado para formar uma estrutura e podem ser categorizadas de maneiras diferentes, elas podem ser de uma (1D), duas (2D) ou três dimensões (3D). O estudo de estruturas periódicas, também conhecidas como metaestruturas, tem seu início quando Veselago (1968) descobre materiais com permissividade elétrica, permeabilidade magnética e índice de refração negativos. Este estudo é estendido ao ramo de acústica e vibração utilizando o conceito de massa negativa. Este conceito é implementado por meio da adição de absorvedores dinâmicos de vibrações (ADVs). Yao, Zhou e Hu (2008) realizam um estudo experimental sobre massa efetiva negativa em um sistema massa-mola 1D (uma dimensão), onde analisam

sua propriedade de transmissão em baixas frequências e comprovam a aplicação deste efeito. Nas estruturas periódicas é adicionado um número $n \in \mathbb{N}^*$ de absorvedores, que depende de cada estudo. Diversos estudos são feitos utilizando as estruturas periódicas, e a seguir são mostrados alguns.

Sugino *et al.* (2017) mostram uma teoria geral para estimativa de *bandgap* em metaestruturas de ressonância local. Os autores utilizam um método baseado em análise modal para conseguir entender o *bandgap* nas estruturas periódicas, e comprovam que a periodicidade faz com que apareçam os *bandgaps*. A estrutura utilizada por eles é mostrada na figura 1.1, que é uma viga em balanço com excitação pela base, onde em (a) os absorvedores estão espaçados de forma uniforme e em (b) não uniforme.

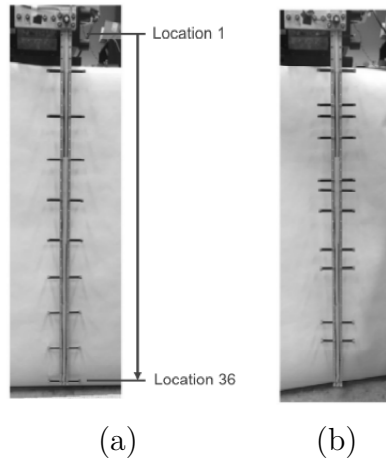


Figura 1.1: Viga em balanço com excitação pela base, onde em (a) os absorvedores são espaçados de forma uniforme e em (b) não uniforme. Fonte: Sugino *et al.* (2017).

Krödel, Thomé e Daraio (2015) realizam um estudo de metaestruturas sísmicas para *bandgaps* largas, onde os metamateriais exploram ressonâncias locais para refletir sinais acústicos com comprimento de onda bem acima do tamanho característico da estrutura do material. Isto permite também a criação de dispositivos de camuflagem óptica e acústica. Os autores utilizam uma metaestrutura enterrada em edifícios sensíveis para controlar a propagação de ondas sísmicas, por meio de análise numérica e para validar fazem um experimento com escala de 1:30. A metaestrutura utilizada por eles consiste

em um conjunto de unidades cilíndricas contendo um ressonador suspenso por mancais macios, distribuídas no solo que circunda o edifício. Onde, o objetivo é atenuar ondas no regime infravermelho (1 a 10 Hz), pois se trata de uma faixa de frequência relevante para proteção de grandes edifícios (KRÖDEL; THOMÉ; DARAIO, 2015).

Hobeck, Laurant e Inman (2015) realizam um estudo para utilizar estruturas periódicas feitas em impressora 3D (três dimensões), para supressão de vibrações, onde a estrutura é modelada por meio de elementos analíticos e é usado o quociente de Rayleigh para estimar a frequência natural dos absorvedores. Também é utilizado um *software* que emprega o método dos elementos finitos e uma análise experimental para validação. Eles comprovam a eficácia de metaestruturas impressas em 3D para supressão de vibrações, mesmo utilizando uma geometria simples.

Sugino e Erturk (2018) realizam um estudo para formar metaestruturas multifuncionais, tanto para gerar energia elétrica de baixa potência quanto atenuar vibrações. Eles utilizam uma metaestrutura eletromecânica, e se baseiam na teoria de vigas de Euler-Bernoulli para modelar o sistema. A estrutura utilizada por eles é mostrada na figura 1.2.

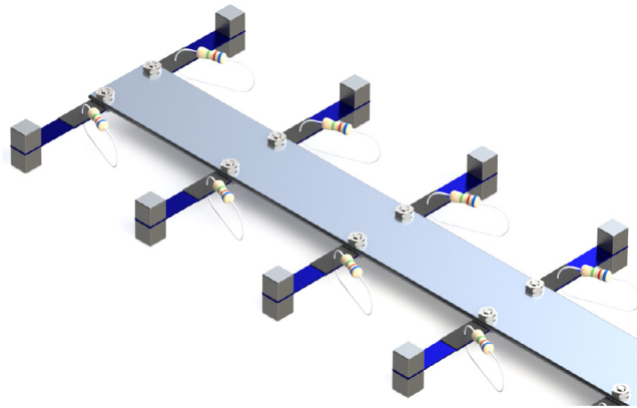


Figura 1.2: Metaestrutura utilizada para *energy harvesting* e atenuação de vibrações. Fonte: Sugino e Erturk (2018).

Zhu *et al.* (2014) realizam um estudo para atenuação de vibrações em um *bandgap* desejado, onde utilizam uma matriz de absorvedores quirais com um design exclusivo.

Eles utilizam uma modelagem teórica da viga para investigar o *bandgap* e comprovam o modelo por meio de análises experimentais. Hobeck e Inman (2015) introduzem o conceito de metaestruturas magnetoelásticas para atenuação de vibrações em banda larga, que são basicamente estruturas projetadas em forma de zigue-zague. Eles utilizam a formulação de Rayleigh-Ritz para modelar a metaestrutura e obtêm uma atenuação de 84,5% da metaestrutura não linear comparada com 41% da metaestrutura linear.

Estruturas periódicas podem consistir em vigas, barras, placas planas ou conchas curvas em várias combinações e com diferentes condições de suporte. A figura 1.3 de Sugino *et al.* (2017) mostra alguns exemplos de estruturas periódicas, como eixo sob excitação torcional/longitudinal (a), barra sob excitação transversal (b) e uma placa sob excitação transversal (c).

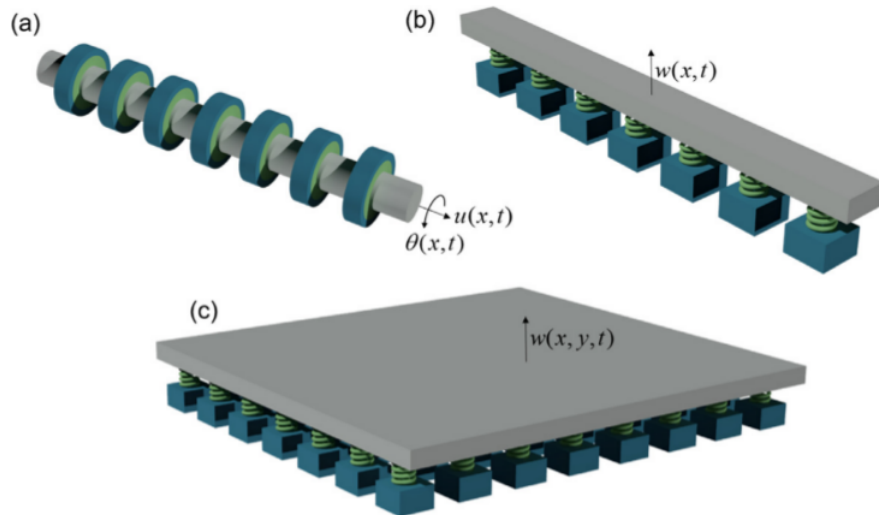


Figura 1.3: Exemplos de estruturas periódicas, onde (a) é um eixo sob excitação torcional/longitudinal, (b) é uma barra sob excitação transversal e (c) é uma placa sob excitação transversal. Fonte: Sugino *et al.* (2017)

Há diversos exemplos de estruturas periódicas na engenharia, como um edifício com vários andares iguais, pontes de múltiplas extensões, turbinas de múltiplas pás, estruturas aeroespaciais e navais (MEAD, 1996). Nos projetos dessas estruturas, deve-se levar em consideração os níveis de vibração, tanto pelo próprio funcionamento do equipamento, quanto por forças externas.

1.1.2 Controle passivo de vibrações

Para conseguir atenuar as vibrações em estruturas, existem as técnicas de controle de vibrações. Estas técnicas são divididas basicamente em duas categorias, que são: técnicas de controle ativo e técnicas de controle passivo. Há ainda uma terceira categoria, chamada de controle semi-ativo, que une a simplicidade e confiança presentes nos sistemas passivos com a adaptabilidade dos sistemas ativos (KOROISHI *et al.*, 2013; NICOLETTI, 2013; RAO, 2011).

As técnicas de controle ativo são uma maneira eficiente de atenuar vibrações, pois têm rápida adaptação a possíveis alterações que o sistema pode estar sujeito. Para implementar esta técnica é necessária a concepção e ajuste de uma rotina capaz de, a partir da informação sobre o estado atual da estrutura, calcular e aplicar rapidamente correções de modo a manter o sistema estável. Para que isto seja possível, são necessários alguns equipamentos para sensoriamento, realimentação e atenuação. Por precisar destes equipamentos para funcionar, isto gera um custo computacional e financeiro, o que pode dificultar sua implementação em alguns casos.

As técnicas de controle passivo consistem em realizar modificações nas características dinâmicas do sistema (massa, rigidez e/ou amortecimento) de maneira a reduzir as vibrações e aumentar a estabilidade do mesmo (KOROISHI *et al.*, 2013).

Um exemplo de controle passivo é o absorvedor dinâmico de vibrações (ADV). De acordo com Rao (2011), os ADVs são dispositivos mecânicos que consistem em elementos de inércia, rigidez e amortecimento. Uma das aplicações mais conhecidas do ADV é o chamado absorvedor de *Stockbridge*, que é utilizado na redução de vibrações induzidas pelo vento em linhas de transmissão aéreas, cabos de pontes e postes elétricos. O dispositivo é mostrado na figura 1.4.

A configuração clássica de um sistema com ADV é mostrada na figura 1.5(a), onde o dispositivo é adicionado a máquina que se deseja atenuar a vibração, e o ADV é sintonizado na frequência natural. A figura 1.5(b), mostra a resposta em frequência do

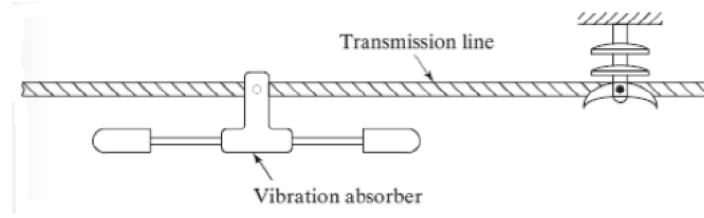


Figura 1.4: Absorvedor de *Stockbridge*. Fonte: Rao (2011).

sistema sem adição e com adição do ADV não amortecido e amortecido.

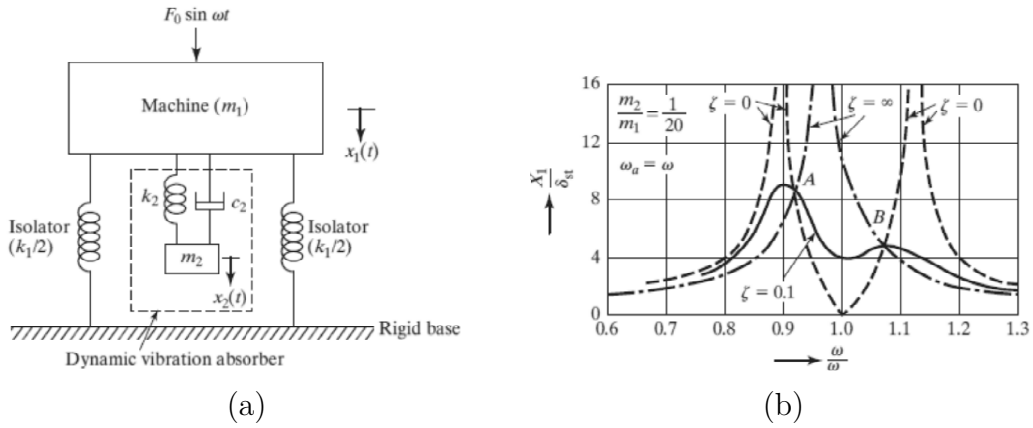


Figura 1.5: (a) Configuração clássica de um sistema com ADV e (b) resposta em frequência. Fonte: Rao (2011).

De acordo com Rao (2011), a maioria das soluções de atenuação de vibrações são implementadas depois que a estrutura é fabricada, e isto requer adição de massa ou a adição de um material viscoelástico à estrutura, que também adiciona massa, porém apresenta características de amortecimento altamente dependentes da temperatura. Além de adicionar massa ao sistema e ter sensibilidade à temperatura, outra desvantagem dos esquemas de atenuação de vibrações tradicionais é a necessidade de montagem, instalação e possíveis testes adicionais, que resultam em maior tempo e custo de instalação. A solução de atenuação de vibrações passiva proposta nesta dissertação utiliza estruturas que são projetadas exclusivamente para atenuar vibrações axiais, onde a dinâmica dos absorvedores adicionados de forma periódica na estrutura irá conseguir atenuar a vibração sem adição na massa total da estrutura.

1.1.3 Não linearidade em estruturas periódicas

De acordo com Manktelow (2013), o desejo de alcançar uma gama maior de respostas dinâmicas em estruturas periódicas inspira as investigações dos efeitos das não linearidades nestas estruturas. A adição de elementos não lineares nas células das estruturas periódicas é uma opção para ajuste passivo da estrutura. Diversos estudos são feitos abordando a não linearidade em estruturas periódicas. Chakraborty e Mallik (2001) estudam a dinâmica de uma cadeia periódica fracamente não linear, considerando os tipos *hardening* e *softening* de não linearidade, onde utilizam uma abordagem de perturbação para obter tanto propagação quanto atenuação. Marathe e Chatterjee (2006) estudam a atenuação de ondas em estruturas periódicas, utilizando amortecimento não linear e usando os métodos de balanço harmônico e múltiplas escalas para resolver o problema. A estrutura utilizada por eles é mostrada na figura 1.6.

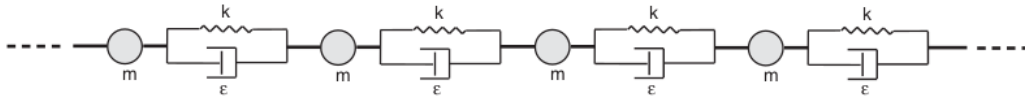


Figura 1.6: Estrutura periódica com amortecimento não linear. Fonte: Marathe e Chatterjee (2006).

Rothos e Vakakis (2009) estudam interações fortemente não lineares de ondas em movimento, propagando-se em uma cadeia linear de massa-mola. Boechler *et al.* (2010) fazem um estudo de uma nova análise de perturbação para prever a localização e a extensão do *bandgap* em termos de parâmetros lineares e não lineares do sistema. Yun *et al.* (2005) analisam a propagação de ondas acústicas não lineares em um sistema unidimensional periódico. Narisetti, Leamy e Ruzzene (2010) investigam especificamente a relação de dispersão em meios granulares unidimensionais e bidimensionais e mostram a existência de faixas de frequência que exibem a irradiação de ondas. A não linearidade em estruturas periódicas pode ser abordada também para projetar alguns equipamentos, como processadores de sinais acústicos, filtros, diodos, isoladores de vibração e coletores

de energia.

A não linearidade pode ser explorada também pela configuração das molas nas estruturas, e por forças eletromagnéticas, como nos exemplos a seguir. Carrella *et al.* (2009) fazem um estudo utilizando um isolador QZS (do inglês *quasi-zero-stiffness*). O isolador QZS é constituído por uma mola na vertical e duas molas oblíquas lineares, ou lineares com pré-tensão, ou com rigidez não linear do tipo *softening*. Os autores fazem a comparação deste sistema não linear com um sistema linear, onde mostram que há vantagens em utilizar molas oblíquas não lineares com pré-tensão. A figura 1.7 mostra o modelo do isolador QZS utilizado pelos autores.

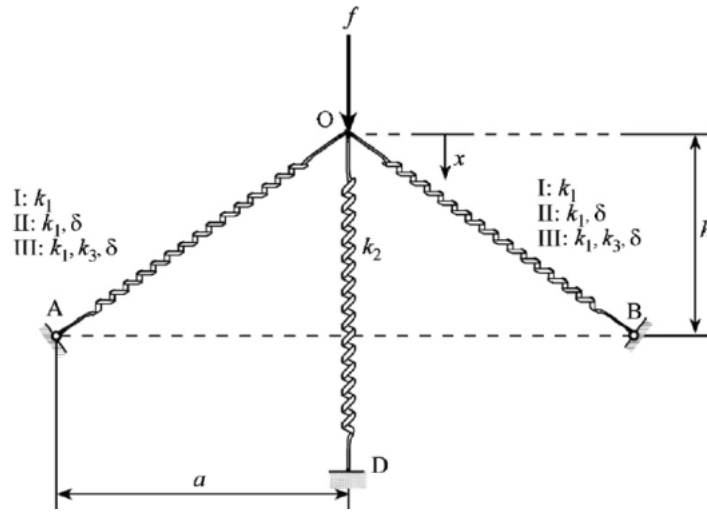


Figura 1.7: Isolador QZS, onde I são molas lineares, II molas lineares com pré-tensão e III mola com rigidez não linear do tipo *softening* e com pré-tensão. A mola vertical é linear. Fonte: Carrella *et al.* (2009)

Tang e Brennan (2014) fazem um estudo de choque em um isolador de vibração com rigidez HSLDS (do inglês *high-static-low-dynamic-stiffness*), e mostram que, em geral, a não linearidade é benéfica para atenuar a vibração gerada pelo choque, desde que a amplitude da entrada seja relativamente pequena. Ledezma-Ramirez *et al.* (2015) fazem um estudo experimental para isolar a vibração gerada por choque, o modelo considerado por eles utiliza eletroímãs e ímãs permanentes para obter forças de rigidez não lineares, onde comprovam que as não linearidades de rigidez são vantajosas para o isolamento do

choque, quando comparadas com elementos elásticos lineares.

Lamarque, Savadkoohi e Charlemagne (2018) realizam um estudo experimental de um metaestrutura feita em impressora 3D com comportamento não linear, onde são utilizadas molas com características HSLDS, com o objetivo de ter um controle passivo de vibrações. A metaestrutura utilizada por eles é mostrada na figura 1.8.

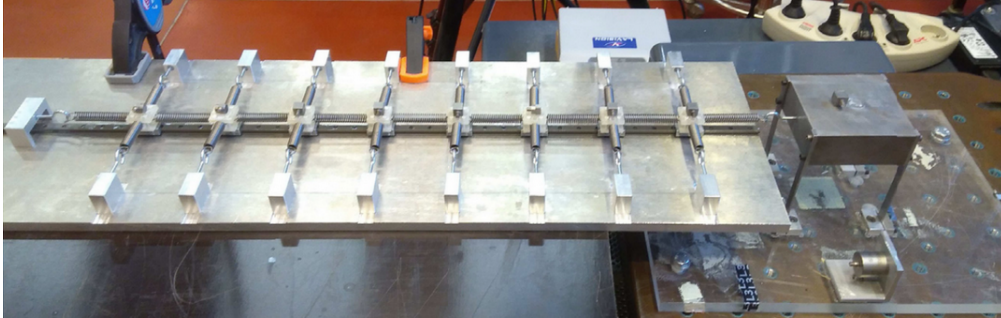


Figura 1.8: Metaestrutura feita em impressora 3D com molas com características HSLDS. Fonte: Lamarque, Savadkoohi e Charlemagne (2018)

No ramo de metamateriais acústicos o principal objetivo é entender como as não linearidades influenciam a operação e como podem ser usadas para melhorar e controlar as propriedades do material (POPA; CUMMER, 2014). Em alguns casos as estruturas periódicas não lineares podem gerar caos, como no estudo de Vakakis e King (1998), onde eles analisam oscilações de ondas estacionárias de um sistema periódico infinito, composto de camadas com não linearidade cúbica, e observam que no limite do acoplamento as soluções desenvolvem dependência sensível das condições iniciais, o que gera a possibilidade de aparecer caos espacial no sistema. De acordo com Manktelow (2013) os sistemas periódicos contínuos recebem menos atenção devido às complexidades inerentes associadas as equações diferenciais parciais não lineares e domínios de materiais geometricamente complexos.

Neste trabalho a não linearidade é abordada por meio da adição de uma rigidez cúbica em um dos absorvedores da metaestrutura, com a finalidade de atenuar vibrações em algumas faixas de frequência.

1.1.4 Processo de otimização

De acordo com Rao (2009) a necessidade de cada vez mais reduzir custos, leva os engenheiros a buscar por métodos cada vez mais eficientes, como os métodos de otimização, para que a produção seja mais econômica e eficiente. Os métodos de otimização podem ser usados em diversos ramos da indústria, como na aeroespacial para diminuir o peso das aeronaves, na civil para construir estruturas com um custo mínimo, na automotiva para ter uma maior eficiência do motor, etc.

A otimização é o ato de obter o melhor resultado sob determinadas circunstâncias. Pode ser definida como o processo de encontrar as condições que fornecem o valor máximo ou mínimo de uma função, onde o objetivo final é minimizar o esforço necessário ou maximizar o benefício desejado. Diversos métodos de otimização são desenvolvidos para diversos tipos de problemas, dependendo da classificação de cada problema.

Há alguns estudos que utilizam a otimização em estruturas periódicas com diversas finalidades, como é possível ver em alguns trabalhos a seguir. Chen, Zhou e Li (2010) fazem um estudo de otimização de topologia multiobjetivo para estruturas periódicas finitas, onde eles visam simultaneamente máxima rigidez e condução térmica. Barbarosie e Neves (2004) fazem uma análise para otimizar o uso de estruturas periódicas para filtro de frequência, onde buscam maximizar o *bandgap* próximo a uma frequência desejada. Abdeljaber, Avcı e Inman (2016) fazem um estudo para otimizar a geometria de uma estrutura periódica baseada em malhas quirais, com o objetivo de atenuar vibrações, para isto eles utilizam algoritmos genéticos. A estrutura periódica utilizada é mostrada na figura 1.9.

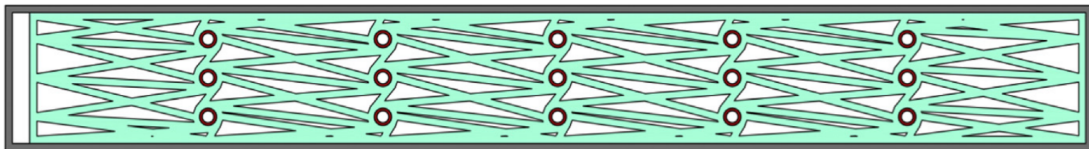


Figura 1.9: Estrutura periódica utilizada para atenuar vibrações. Fonte: Abdeljaber, Avcı e Inman (2016).

Burghignoli, Lovat e Jackson (2006) fazem a análise e otimização da radiação de ondas geradas por uma linha de transmissão carregada com vazamento em estruturas periódicas. Chen e Tan (2010) fazem um estudo para otimizar o perfil de nanoestruturas periódicas para emissores termo-fotovoltaicos.

Nesta dissertação a otimização é abordada para encontrar a posição e o coeficiente de rigidez não linear para um absorvedor, com o objetivo de atenuar vibrações.

1.2 Justificativa

Em virtude da necessidade de diversos ramos da engenharia buscarem construir equipamentos e estruturas com a menor massa possível, e baixos níveis de vibrações em suas faixas de operação, é interessante estudar as estruturas periódicas, pois, com elas é possível construir estruturas mais leves com baixos níveis de vibração.

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é avaliar formas de atenuação de vibrações axiais da estrutura periódica apresentada no capítulo 2. Deseja-se atenuar vibrações nesta estrutura por meio da adição de absorvedores de forma periódica, sem que haja um aumento na massa total da estrutura. E analisar a influência da rigidez cúbica adicionada em um dos absorvedores, para atenuar vibrações em quatro faixas de frequência.

Esse objetivo principal pode ser dividido em:

1. Fazer a comparação da estrutura base com a estrutura periódica linear, procurando avaliar se é possível atenuar a vibração com a dinâmica dos absorvedores adicionados a estrutura de forma periódica;
2. Realizar a otimização da estrutura periódica para encontrar qual a posição e coeficiente de rigidez não linear ótimos para atenuar a vibração, em quatro faixas

de frequência, estas regiões são onde há picos de ressonância e características de multi estabilidade.

1.4 Metodologia

Essa dissertação é baseada no trabalho de Reichl e Inman (2017), onde é abordado a ideia de atenuar a vibração com uma estrutura periódica sem adição de massa. No trabalho deles são abordadas respostas transientes, enquanto que neste trabalho é abordada a resposta permanente da estrutura periódica sujeita a uma excitação harmônica, além de, analisar a influência de uma rigidez cúbica em um dos absorvedores para atenuar vibrações.

As equações de movimento das estruturas são encontradas utilizando a segunda lei de Newton. A resposta dinâmica é obtida fazendo a integração numérica das equações de movimento encontradas (equações diferenciais). Para resolver as equações diferenciais não lineares é utilizado o método Runge-Kutta de quarta ordem.

É analisada a influência de um absorvedor com rigidez cúbica adicionado à meta-estrutura. Para isto, é feita a otimização do sistema para encontrar as posições e os coeficientes de rigidez não lineares que atenuem vibrações em quatro faixas de frequência. Para analisar se a vibração é atenuada, é utilizada a norma $\mathcal{H}_2$ como valor de comparação. De acordo com Bueno (2007) as normas de um sistema são importantes pois com elas é possível medir a intensidade da resposta de uma estrutura sob alguma excitação.

A formulação da norma $\mathcal{H}_2$ é obtida considerando a representação em espaço de estado, onde A_{ss} , B_{ss} e C_{ss} são a representação de um sistema em espaço de estados, I é a matriz identidade, ω é a frequência de excitação, j é um número imaginário e $G(\omega)$ é a função transferência, mostrada na equação 1.1.

$$G(\omega) = C_{ss}(j\omega I - A_{ss})^{-1}B_{ss} \quad (1.1)$$

A definição da norma $\mathcal{H}_2$ é mostrada na equação 1.2, onde tr é o traço da matriz e $d\omega$ é o diferencial em relação a ω .

$$\mathcal{H}_2 = \|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tr(G^*(\omega)G(\omega))d\omega \quad (1.2)$$

De acordo com Reichl e Inman (2017) a norma $\mathcal{H}_2$ é relacionada com a área sob a função de resposta de frequência. Neste trabalho, a área é obtida por meio do método trapezoidal.

O problema de otimização pode ser caracterizado como: um problema restrito, pois são utilizadas restrições para encontrar os coeficiente de rigidez não linear e para suas posições; um problema estático, pois as variáveis são independentes; um problema não linear, por conta da rigidez não linear que é adicionada; um problema inteiro, pois as posições dos absorvedores só podem ser valores inteiros; e um problema de objetivo único, pois o que se busca minimizar é a norma $\mathcal{H}_2$.

Para resolver o problema de otimização não linear com restrição é usado o método de otimização quadrática sequencial (SQP), que é um método resultante da aplicação do método de Newton à minimização da função Lagrangiana do problema. Este método se baseia na ideia de aproximar, em cada iteração, o problema não linear por subproblemas de programação quadrática (RAO, 2009). A solução destes subproblemas gera uma direção de busca para o método linear, que é onde o valor da função desejada, neste caso, a norma $\mathcal{H}_2$ é avaliada.

1.5 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 1 é apresentada a revisão bibliográfica com a contextualização da dissertação, onde são apresentados estudos e definições sobre estruturas periódicas, controle passivo de vibrações, não linearidade em estruturas periódicas e sobre otimização. O capítulo 2 apresenta a modelagem do sistema, a fim de demonstrar como foram obtidas as equações dinâmicas e os parâmetros do sistema. O capítulo 3 mostra a análise modal das metaestruturas base e com absorvedores não lineares, indicando as respostas em frequência e frequências naturais, os modos de vibrar e uma comparação entre a metaestrutura base e a metaestrutura com absorvedores lineares. O capítulo 4 mostra duas abordagens para definir os coeficientes de rigidez não lineares, além de mostrar os resultados da força pela deformação da mola tanto do caso *hardening* quanto do caso *softening*. No capítulo 5 são feitas otimizações usando as duas abordagens mostradas no capítulo 4, com o objetivo de atenuar vibrações em quatro faixas de frequências, por meio da adição de um absorvedor com rigidez cúbica do tipo *hardening* na estrutura. As conclusões são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

MODELAGEM DO SISTEMA

Este capítulo mostra as equações de movimento da metastrutura base e da metastrutura com absorvedores. A metastrutura base é composta por cinco massas, ou seja, tem cinco graus de liberdade. A metastrutura com absorvedores é composta por cinco massas mais quatro absorvedores, totalizando nove graus de liberdade. Tanto a equação de movimento da metastrutura base, quanto da metastrutura com absorvedores, são obtidas por meio da segunda lei de Newton. São mostradas as equações para os cálculos dos parâmetros dos sistemas, como as massas, coeficientes de rigidez e coeficientes de amortecimento, e também a tabela indicando alguns parâmetros do sistema.

2.1 Modelagem do sistema através da segunda lei de Newton

A estrutura utilizada nesta dissertação é baseada no trabalho de Reichl e Inman (2017) que consiste em uma barra com vibração axial, onde a massa é conhecida, a rigidez depende da geometria e material da estrutura e o coeficiente de amortecimento é proporcional ao coeficiente de rigidez. Os autores buscam atenuar a vibração utilizando a periodicidade sem adicionar massa ao sistema. No trabalho deles são abordadas respostas transientes, neste é abordada a resposta permanente da estrutura sujeita a uma

excitação harmônica.

A figura 2.1(a) mostra o modelo discreto representando a estrutura que é chamada de metaestrutura base, ou seja, a metaestrutura sem absorvedores. A metaestrutura base é composta por elementos de massa, rigidez e amortecimento, nomeados m_b , k e c , respectivamente. A figura 2.1(b) mostra o modelo discreto representando a metaestrutura com absorvedores. A metaestrutura com absorvedores é composta pela estrutura hospedeira e pelos absorvedores. A estrutura hospedeira é composta por elementos de massa, rigidez e amortecimento, nomeados m_h , k e c , respectivamente. Os absorvedores são acoplados a estrutura hospedeira e também apresentam elementos de massa, rigidez e amortecimento, nomeados como m_a , k_a e c_a , respectivamente. Ao decorrer desta dissertação a rigidez dos absorvedores pode ter forma linear ou cúbica.

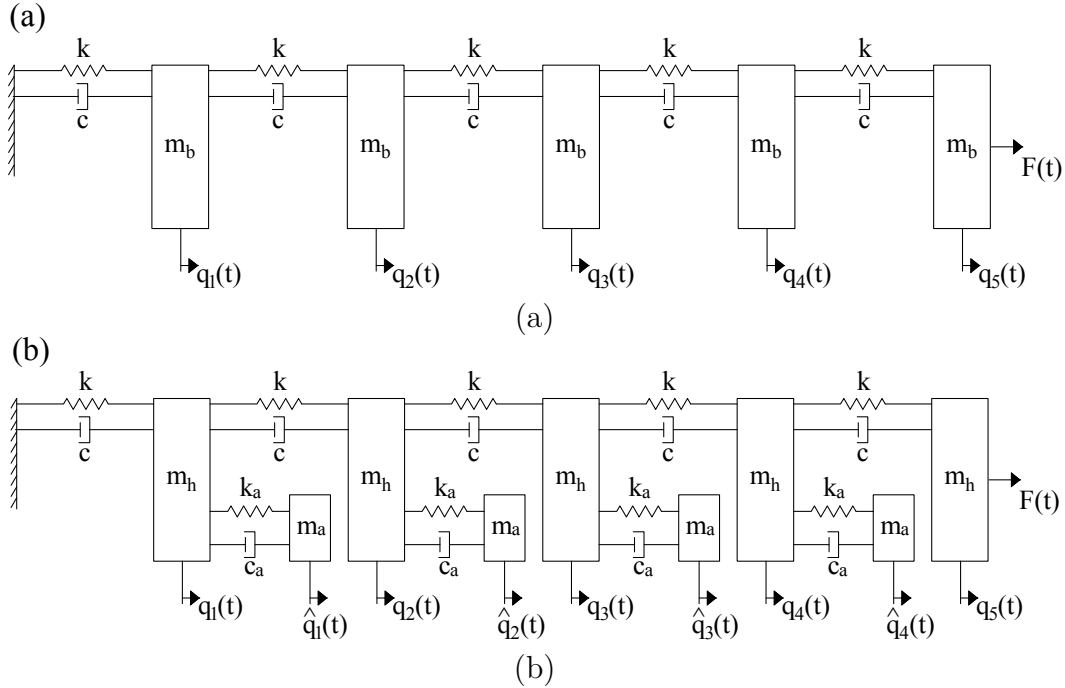


Figura 2.1: Modelo representando em (a) a metaestrutura base e em (b) a metaestrutura com absorvedores.

2.1.1 Parâmetros do sistema

A metaestrutura é caracterizada pelo número de absorvedores n . A estrutura hospedeira tem $n + 1$ massas. As massas da estrutura hospedeira têm o mesmo valor para representar uma barra uniforme. A massa (m_b), rigidez (k) e amortecimento (c) são dados pela equação 2.1, onde m_t é a massa total do sistema, E é o módulo de Young, A é a área da seção transversal, L é o comprimento total da estrutura e α é a constante de proporcionalidade de amortecimento

$$m_b = \frac{m_t}{n + 1}, \quad k = \frac{EAn}{L}, \quad c = \alpha k \quad (2.1)$$

Neste trabalho deseja-se manter a massa total da metaestrutura base igual a massa total da metaestrutura com absorvedores, para analisar a dinâmica dos absorvedores adicionados de forma periódica na metaestrutura base, e não a adição de massa. Para isto, é utilizada a razão de massa μ representada pela equação 2.2

$$\mu = \frac{\sum m_a}{(n + 1)m_h} \quad (2.2)$$

Usando μ , as expressões para a massa dos elementos da estrutura hospedeira e de cada absorvedor, para manter a massa total igual da estrutura base, são dadas pela equação 2.3

$$m_h = (1 - \mu) \frac{m_t}{n + 1} \quad m_a = \mu \frac{m_t}{n} \quad (2.3)$$

A rigidez dos absorvedores é dada pela equação 2.4, onde ω_s é a frequência em que os absorvedores são sintonizados.

$$k_a = m_a \omega_s^2 \quad (2.4)$$

O amortecimento dos absorvedores é dado pela equação 2.5

$$c_a = \alpha k_a \quad (2.5)$$

2.1.2 Equação de movimento do sistema

As equações de movimento do sistema são obtidas usando a segunda lei de Newton, e são dadas na forma geral pela equação 2.6 com uma força harmônica externa, onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\ddot{\mathbf{q}}$ é o vetor de acelerações, $\mathbf{C}$ é a matriz dos coeficientes de amortecimento, $\dot{\mathbf{q}}$ é o vetor de velocidades, $\mathbf{K}$ é a matriz dos coeficientes de rigidez, $\mathbf{q}$ é o vetor de deslocamentos, $G(\mathbf{q})$ é o vetor com termos não lineares, $\mathbf{F}(t)$ é a força externa, F_0 é a amplitude da força externa e ω é a frequência de excitação.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + G(\mathbf{q}(t)) = \mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.6)$$

Para a metáestrutura base, o vetor de deslocamento é $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T$, e as matrizes que definem a equação 2.6 são dadas pela equação 2.7.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} & \mathbf{K} = \mathbf{K}_b &= \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \\
O &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & G(q) &= O^T & \mathbf{C} &= \alpha \mathbf{K}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Para a metaestrutura com absorvedores, o vetor de deslocamento é $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ \hat{q}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{q}_3 \ \hat{q}_4]^T$, e as matrizes que definem a equação 2.6 são dadas pela equação 2.8.

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} m_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a \end{bmatrix} & G(q) = \begin{bmatrix} k_n(q_1 - \hat{q}_1)^3 \\ k_n(q_2 - \hat{q}_2)^3 \\ k_n(q_3 - \hat{q}_3)^3 \\ k_n(q_4 - \hat{q}_4)^3 \\ 0 \\ k_n(\hat{q}_1 - q_1)^3 \\ k_n(\hat{q}_2 - q_2)^3 \\ k_n(\hat{q}_3 - q_3)^3 \\ k_n(\hat{q}_4 - q_4)^3 \end{bmatrix} \\
K_a &= \begin{bmatrix} k_{an} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{an} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{an} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{an} \end{bmatrix} & K_{a2} = \begin{bmatrix} k_{an} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{an} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{an} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{an} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
K &= \left[\begin{array}{ccc|c} K_b + K_{a2} & & & -K_a \\ & & & O \\ \hline -K_a & O^T & & K_a \end{array} \right] & C = \alpha K
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A tabela 2.1 mostra os valores usados para calcular os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento e são baseados no trabalho de Reichl e Inman (2017).

Tabela 2.1: Parâmetros do sistema

Parâmetros	Símbolo	Valor
Módulo de Young	E	1970 MPa
Comprimento	L	0.45 m
Área da seção transversal	A	0.0009 m
Massa total	m_t	0.597 kg
Razão de massa	μ	0.3
Constante de proporcionalidade de amortecimento	α	2.5^{-5} s
Amplitude da força externa	F_0	1000 N

Fonte: Baseada no trabalho de Reichl e Inman (2017).

Capítulo 3

RESPOSTA DINÂMICA COM RIGIDEZ LINEAR

Neste capítulo é feita a análise modal das estruturas, para mostrar as frequências naturais da metastrutura base e da metastrutura com absorvedores, além de mostrar os modos de vibrar. Nas seções seguintes são mostradas as respostas em frequência do bloco mais a esquerda com amplitude de deslocamento Q_1 , tanto da metastrutura base, quanto da metastrutura com absorvedores. São mostradas também as frequências naturais e os modos de vibrar relacionados, tanto da metastrutura base quanto da metastrutura com absorvedores.

A análise modal é utilizada neste trabalho para encontrar as frequências naturais da metastrutura base. E a frequência natural que apresenta a maior amplitude de vibração é utilizada para sintonizar os absorvedores da metastrutura com absorvedores. Para encontrar as frequências naturais e modos de vibrar, o sistema é considerado livre e não amortecido e o problema é escrito na forma de um problema de autovalor e autovetor, como na equação 3.1, onde, $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez, λ é uma matriz com o inverso das frequências naturais ao quadrado e $\mathbf{Q}$ é o autovetor com os modos de vibrar.

$$[\lambda \mathbf{K} - \mathbf{M}]\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

3.1 Metaestrutura base

A figura 3.1 mostra a FRF do bloco mais a esquerda com amplitude de deslocamento Q_1 da metaestrutura base. A FRF é obtida por meio dos valores máximos de deslocamento na resposta permanente para cada frequência de excitação. As linhas verticais indicam as frequências naturais não amortecidas, e na legenda são mostrados os valores das frequências naturais em Hz.

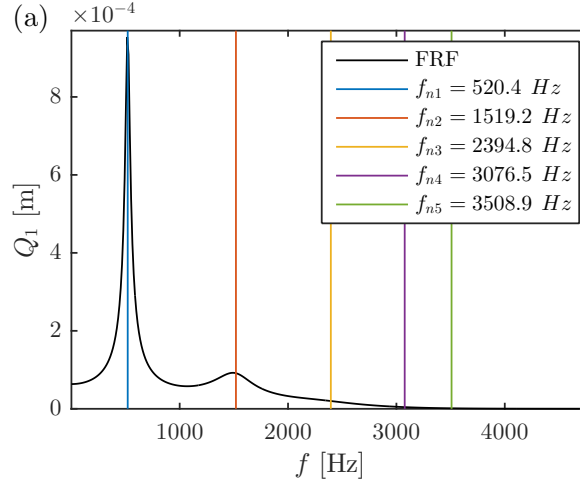


Figura 3.1: Resposta em frequência do bloco mais a esquerda (Q_1) da metaestrutura base, mostrada na figura 2.1(a), usando a equação 2.7, com as linhas verticais indicando as frequências naturais não amortecidas.

A figura 3.2 mostra os modos de vibrar axiais da metaestrutura base, onde os modos foram normalizados utilizando o primeiro valor de cada modo. No eixo vertical é mostrado o deslocamento de cada massa para seu respectivo modo de vibrar e no eixo horizontal é mostrada qual é a massa.

A figura 3.3 mostra a metaestrutura base com os modos de vibrar axiais, onde cada modo é representado de forma separada. Cada bloco representa uma massa da

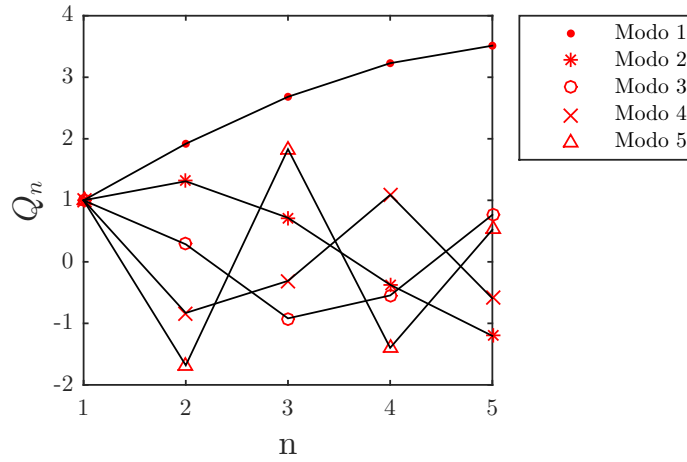


Figura 3.2: Modos de vibrar axiais da metastrutura base.

metastrutura base, e é possível notar que dependendo do modo elas podem ter a mesma fase ou fases opostas.

É possível observar que cada modo age de uma forma na metastrutura base. No primeiro modo todas as massas se movem no mesmo sentido, estão todas em fase, é o modo onde é possível ver uma maior amplitude presente na massa que está mais próxima de onde é aplicada a excitação externa. Os outros modos apresentam amplitudes menores e há algumas combinações de quais massas estão na mesma fase ou em fase contrária. Por exemplo, no quinto modo as massas que estão em fase estão alternadas, a primeira, terceira e quinta massa se movem em um sentido e a segunda e quarta massa se movem no sentido oposto. Já no segundo modo as três primeiras massas se movem no mesmo sentido e as outras duas no sentido oposto a estas.

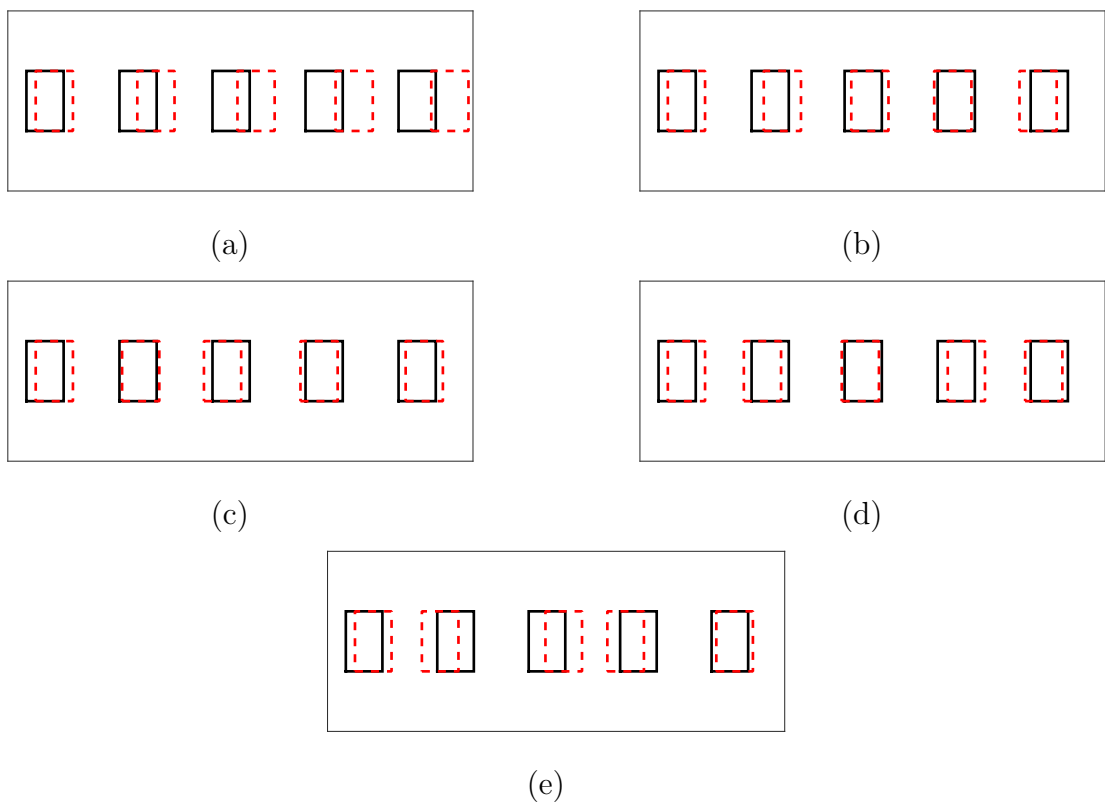


Figura 3.3: Cinco modos de vibrar axiais (a-e) da metaestrutura base.

3.2 Metaestrutura com absorvedores

A figura 3.4 mostra a FRF do bloco mais a esquerda com amplitude de deslocamento Q_1 da metaestrutura com absorvedores. A FRF é obtida por meio dos valores máximos de deslocamento na resposta permanente para cada frequência de excitação. As linhas verticais indicam as frequências naturais não amortecidas, e na legenda são mostrados os valores das frequências naturais em Hz.

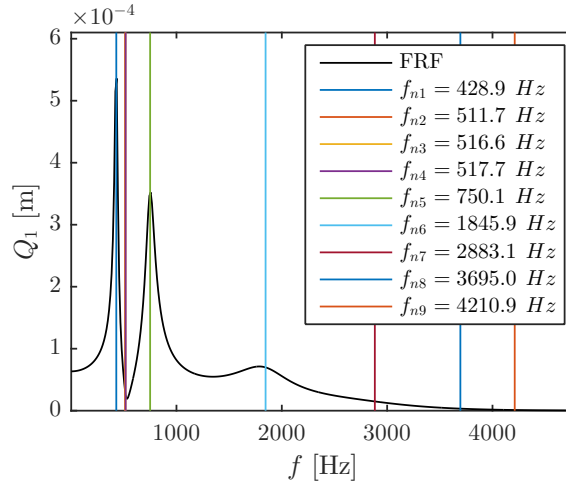


Figura 3.4: Resposta em frequência do bloco mais a esquerda (Q_1) da metaestrutura base, mostrada na figura 2.1(a), usando a equação 2.7, com as linhas verticais indicando as frequências naturais não amortecidas.

A figura 3.5 mostra os modos de vibrar axiais da metaestrutura com absorvedores, onde cada modo é representado de forma separada. No eixo vertical é mostrado o deslocamento de cada massa para seu respectivo modo de vibrar e no eixo horizontal é mostrada qual é a massa, onde de 1 a 5 são as massas hospedeiras, e de 6 a 9 são os absorvedores. As primeiras massas estão na posição 1 para todos os modos, pois os modos de vibrar axiais foram normalizados usando seus valores.

A figura 3.6 mostra a metaestrutura com absorvedores com os modos de vibrar axiais, onde cada modo é representado de forma separada. Os blocos que estão na parte de cima de cada figura são as massas da estrutura hospedeira, e os blocos que estão na parte de baixo são os absorvedores. Para representar alguns modos é necessário utilizar

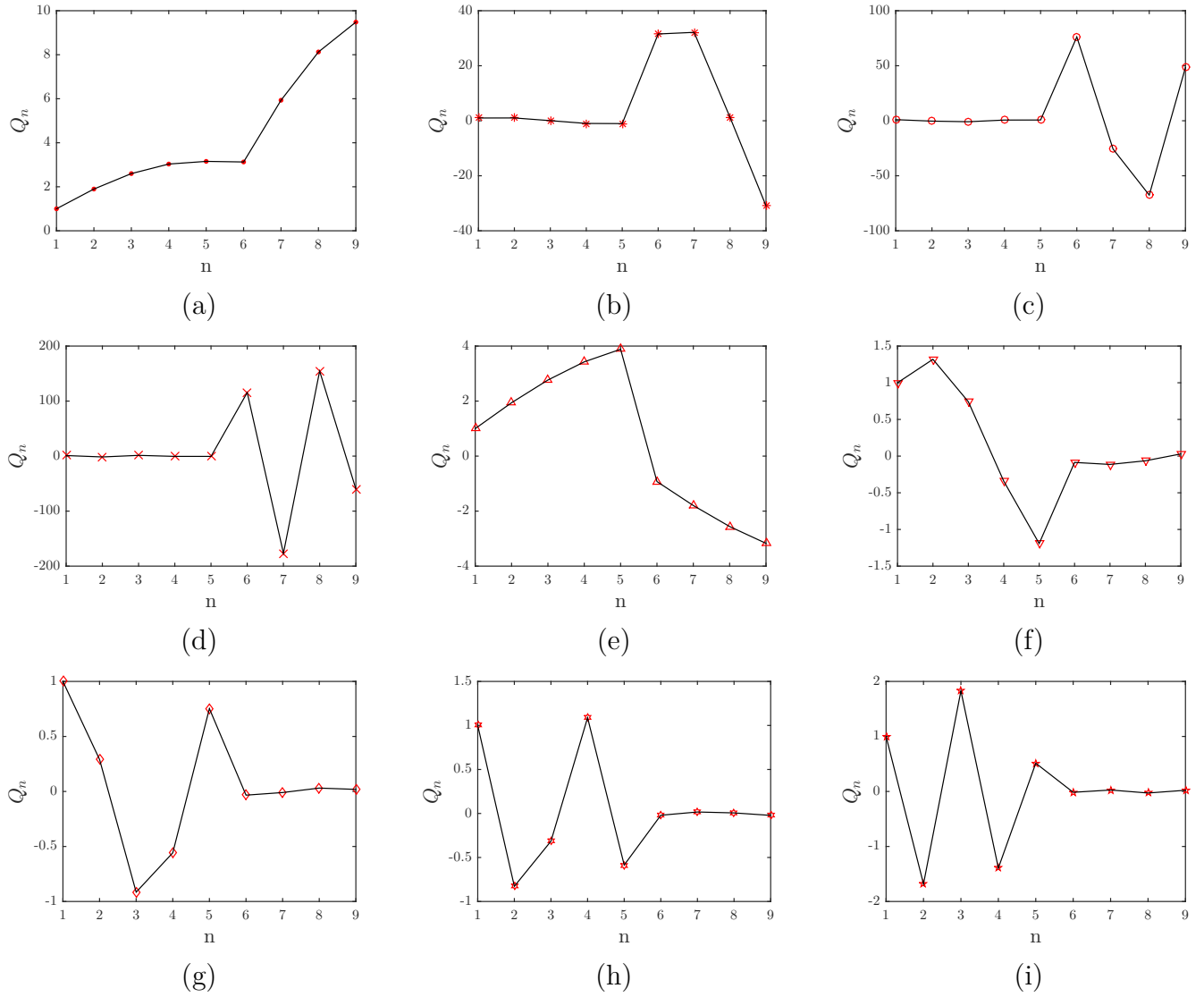
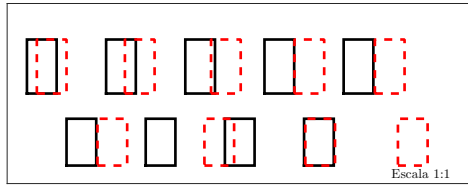


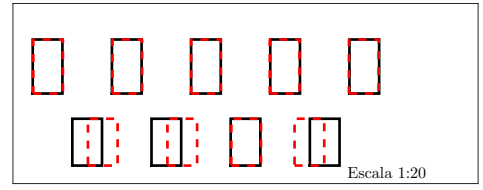
Figura 3.5: Nove modos de vibrar axiais (a-i) da metaestrutura com absorvedores

escalas para os deslocamentos, que estão indicadas em cada modo.

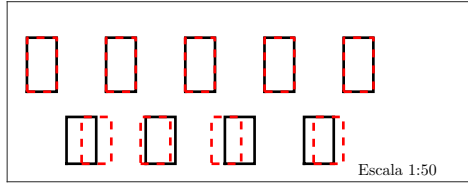
É possível observar que cada modo age de forma diferente na metaestrutura com absorvedores. No primeiro modo todas as massas se movem no mesmo sentido (tem a mesma fase) e os maiores deslocamentos são observados nos absorvedores. No segundo, terceiro e quarto modos as massas hospedeiras (m_h) tem deslocamentos pequenos quando comparados com os absorvedores, chegando o deslocamento dos absorvedores a ser mais de 100 vezes maior que das massas hospedeiras no quarto modo. Estes modos são interessantes para a metaestrutura com absorvedores, pois a vibração é maior nos



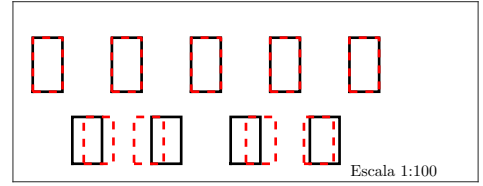
(a)



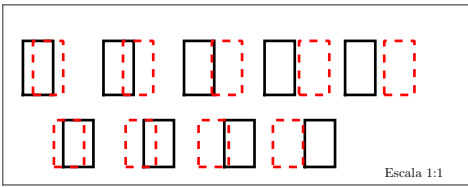
(b)



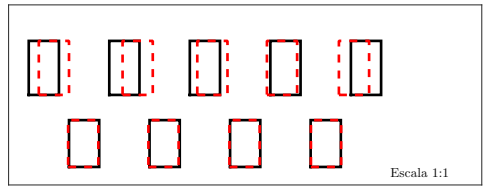
(c)



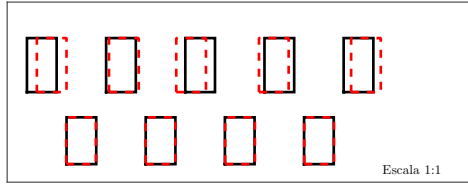
(d)



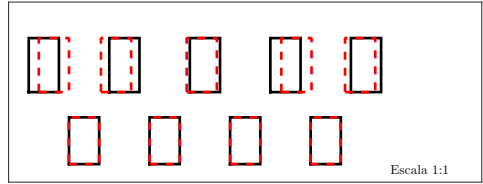
(e)



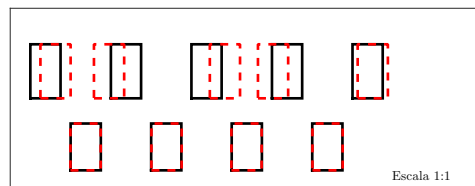
(f)



(g)



(h)



(i)

Figura 3.6: Ilustração de cada um dos nove modos de vibrar axiais (a-i) da metaestrutura com absorvedores.

absorvedores do que na estrutura hospedeira. No quinto modo as massas da estrutura hospedeira estão em fase contrária dos absorvedores, com amplitudes parecidas.

No sexto, sétimo, oitavo e nono modos as massas hospedeiras (m_h) têm deslocamentos maiores do que os absorvedores, o que não é interessante, pois deseja-se que os deslocamentos da estrutura hospedeira sejam sempre os menores possíveis.

A seguir é mostrada a comparação entre a metaestrutura base e a metaestrutura com absorvedores lineares. A figura 3.7(a) mostra a resposta em frequência das duas metaestruturas, onde é possível observar, na frequência em que os absorvedores são sintonizados a amplitude tende a zero, e há o surgimento de dois picos de ressonância entre esta frequência. A figura 3.7(b) mostra a curva de atenuação entre estas duas respostas, onde valores abaixo de zero indicam que há atenuação. É possível notar algumas faixas de atenuação e algumas de propagação, isto se dá pelo amplitude tender a zero na frequência de sintonização e pelo surgimentos dos picos de ressonância. Há também uma diminuição da norma $\mathcal{H}_2$, onde para toda a faixa de frequência, a metaestrutura base tem $\mathcal{H}_2 = 1.5736$, e a metaestrutura com absorvedores lineares tem $\mathcal{H}_2 = 1.4805$, gerando uma redução da norma $\mathcal{H}_2$ de 5.92 %.

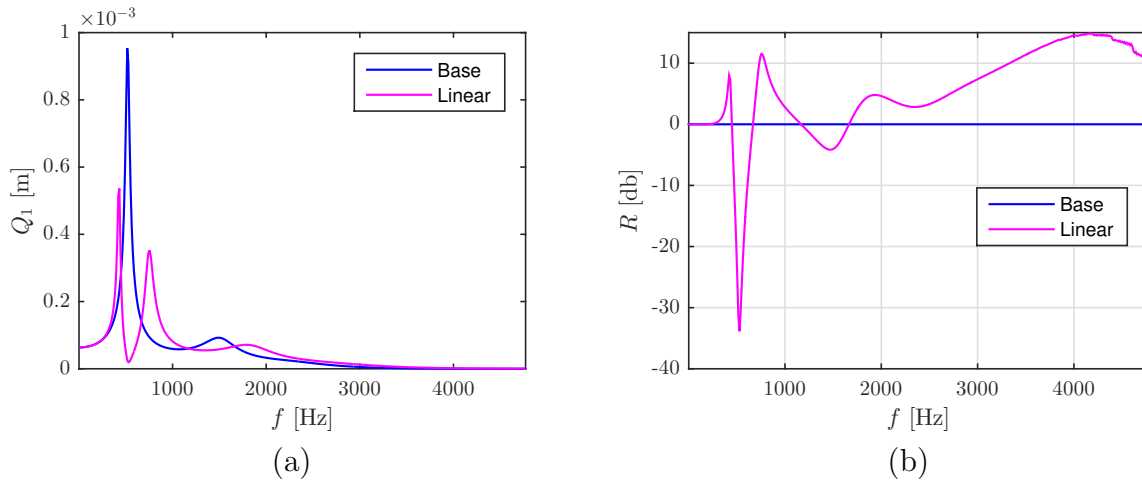


Figura 3.7: Comparação entre a metaestrutura base e metaestrutura com absorvedores lineares (a) FRF e (b) curva de atenuação.

Capítulo 4

ABORDAGENS PARA DEFINIR OS COEFICIENTES DE RIGIDEZ DA FORÇA NÃO LINEAR

Neste capítulo são mostradas duas abordagens para definir as equações e os valores do coeficiente de rigidez não linear que são usados no decorrer desta dissertação. É mostrado também como é encontrado o valor médio de deformação ($\bar{x}$), além de mostrar as figuras de força por deslocamento, para os casos de não linearidade do tipo *hardening* e *softening*. Porém, para esta dissertação será usado apenas o caso em que a mola tem rigidez não linear do tipo *hardening*.

O valor médio de deformação ($\bar{x}$) utilizado para definir os coeficientes de rigidez não lineares é encontrado por meio da função de resposta em frequência do deslocamento relativo entre o bloco com amplitude Q_1 e o absorvedor com amplitude $\hat{Q}_1$. A figura 4.1(a) mostra a resposta em frequência do primeiro bloco, a figura 4.1(b) do primeiro absorvedor e a figura 4.1(c) a resposta em frequência do deslocamento relativo entre o bloco 1 e o absorvedor 1 ($Q_1 - \hat{Q}_1$). Para encontrar o valor de $\bar{x}$ deseja-se um valor representativo com as deformações que a mola pode estar sujeita, para isto utiliza-se a metade do valor do pior caso de vibração para essa mola entre o bloco 1 e o absorvedor

1, ou seja, $\bar{x}$ é a metade do primeiro pico de ressonância da resposta em frequência mostrada na figura 4.1(c).

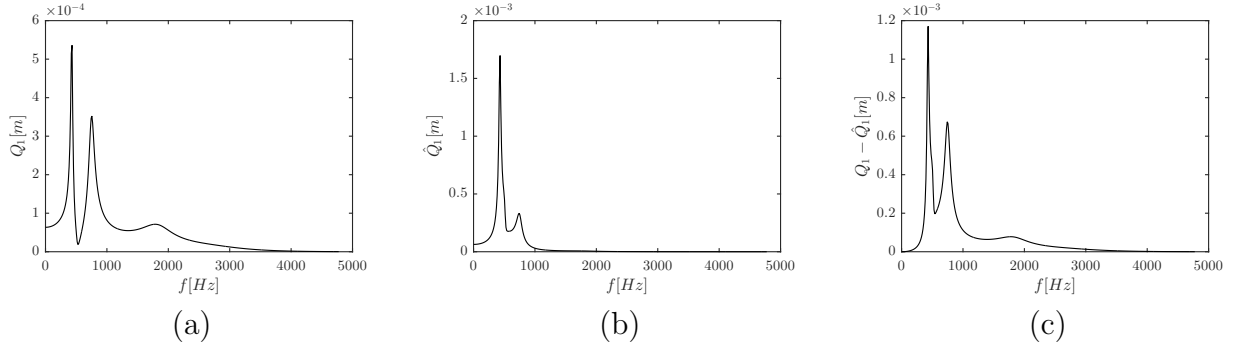


Figura 4.1: Resposta em frequência, onde (a) é do primeiro bloco, (b) do primeiro absorvedor e (c) do deslocamento relativo entre a primeira massa e o primeiro absorvedor.

A tabela 4.1 mostra os valores de $\bar{x}$ para cada uma das respostas em frequência mostradas na figura 4.1, e o valor usado é o de $Q_1 - \hat{Q}_1$, ou seja, 5.85×10^{-4} m.

Tabela 4.1: Valores de deformação média ($\bar{x}$)			
	$Q_1 \times 10^{-4}$ [m]	$\hat{Q}_1 \times 10^{-4}$ [m]	$(Q_1 - \hat{Q}_1) \times 10^{-4}$ [m]
$\bar{x}$	2.36	8.17	5.85

4.1 Abordagem 1 para definir o coeficiente de rigidez não linear

Nesta seção é considerada que a força linear (F_L) é igual a força não linear (F_{NL}) no ponto $\bar{x}$

$$F_L = F_{NL} \quad (4.1)$$

A força linear é dada pela relação direta do coeficiente de rigidez do absorvedor k_a e a deformação média $\bar{x}$. A força não linear é dada pela relação direta do coeficiente de

rigidez do absorvedor da força não linear k_{an} e a deformação média $\bar{x}$, somado com o coeficiente de rigidez não linear k_n e a deformação média $\bar{x}$ ao cubo

$$k_a \bar{x} = k_{an} \bar{x} + k_n \bar{x}^3 \quad (4.2)$$

O coeficiente de rigidez não linear é proporcional ao coeficiente de rigidez do absorvedor da força não linear k_{an} , onde b é o parâmetro que determina quantas vezes o coeficiente de rigidez não linear k_n é maior ou menor que o coeficiente de rigidez linear k_{an}

$$k_n = b k_{an} \quad (4.3)$$

E por fim, substituindo a equação 4.3 na equação 4.2, é possível encontrar o coeficiente k_{an} :

$$k_{an} = \frac{k_a}{b \bar{x}^2 + 1} \quad (4.4)$$

O valor de k_a é calculado seguindo a equação 4.5 e os parâmetros da tabela 2.1, onde ω_s é a primeira frequência natural da metaestrutura base, $\mu = 0.3$ e $n = 4$.

$$\begin{aligned} m_a &= \mu \frac{m_t}{n} \\ k_a &= m_a \omega_s^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1.1 Rigidez não linear do tipo *hardening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem 1 para definir os valores de rigidez no caso *hardening*. Como é possível ver na resposta em frequência mostrada na figura 3.4, os deslocamentos da metaestrutura com absorvedores são da ordem de grandeza 10^{-4} , e como se deseja adicionar não linearidade do tipo *hardening* à estrutura, valores do parâmetro $b > 10^5$ são necessários para mostrar a característica de não linearidade do tipo *hardening*. Pois, nessa abordagem as forças F_L e F_{NL} são iguais na deformação média $\bar{x}$ e isso faz com que seja necessário $b > 10^5$, para notar na figura 4.2 a diferença para cima entre as curvas do sistema não linear e linear.

A tabela 4.2 mostra os valores de rigidez (k_a , k_{an} e k_n) calculados para cada valor de b utilizado.

Tabela 4.2: Valores de rigidez utilizando a abordagem 1 (*hardening*)

b	$k_a \times 10^5$ [N/m]	$k_{an} \times 10^5$ [N/m]	$k_n \times 10^{12}$ [N/m ³]
0		4.7797	0
10^5	4.7797	4.6213	0.0462
10^7		1.0794	1.0794
10^9		0.0139	1.3902

A figura 4.2 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores da tabela 4.2. A linha em azul é do sistema apenas com rigidez linear, a linha em vermelho é do sistema com $b = 10^5$, onde é possível notar de forma visível uma leve inclinação para cima em relação a linha azul. As curvas em verde e preto são do sistema com $b = 10^7$ e $b = 10^9$, respectivamente, nestas curvas é possível notar uma diferença maior em relação a azul (sistema linear). É importante notar que as quatro curvas se cruzam no valor de $\bar{x} = 5.855 \times 10^{-4}$ m.

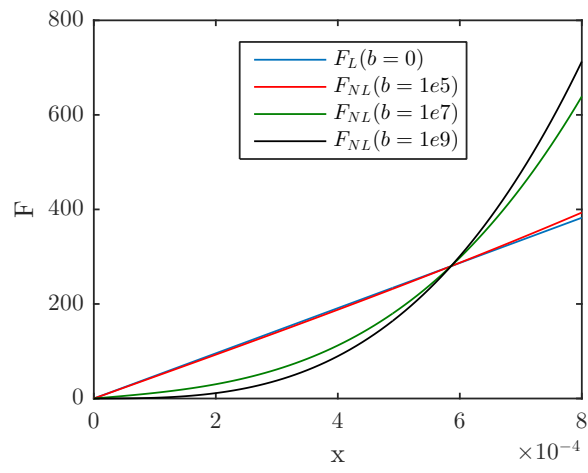


Figura 4.2: Força por deslocamento para o caso *hardening*, utilizando a abordagem 1.

4.1.2 Rigidez não linear do tipo *softening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem 1 para definir os valores de rigidez no caso *softening*. Como é possível ver na resposta em frequência mostrada na figura 3.4, os deslocamentos são da ordem de grandeza 10^{-4} , e como se deseja adicionar não linearidade do tipo *softening*, valores do parâmetro $b < 10^{-5}$ são necessários para mostrar esta característica de não linearidade. Pois, nessa abordagem as forças F_L e F_{NL} são iguais na deformação média $\bar{x}$ e isso faz com que seja necessário $b < 10^{-5}$, para notar na figura 4.3 a diferença para baixo entre as curvas do sistema não linear e linear. Quando a não linearidade é do tipo *softening*, não se pode diminuir tão bruscamente o valor de b como se aumenta no caso *hardening*, pois a força pode ir para valores negativos, que não é o desejado, e quando isso ocorre é como se a mola estivesse ajudando no movimento.

A tabela 4.3 mostra os valores de rigidez (k_a , k_{an} e k_n) calculados para cada valor de b utilizado.

Tabela 4.3: Valores de rigidez utilizando a abordagem 1 (*softening*)

b	$k_a \times 10^5$ [N/m]	$k_{an} \times 10^5$ [N/m]	$k_n \times 10^{11}$ [N/m ³]
0		4.7797	0
-10^5	4.7797	4.9494	-0.4949
-5×10^5		5.7684	-2.8842
-10^6		7.2729	-7.2729

A figura 4.3 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores da tabela 4.3. A linha em azul é do sistema apenas com rigidez linear, a linha em vermelho é do sistema com $b = -10^5$, onde é possível notar de forma visível uma leve inclinação para baixo em relação a linha azul. As curvas em verde e preto são do sistema com $b = -5 \times 10^5$ e $b = -10^6$, respectivamente, nestas curvas é possível notar uma diferença maior em relação a azul (sistema linear). É importante notar que as quatro curvas se cruzam no valor de $\bar{x} = 5.855 \times 10^{-4}$ m.

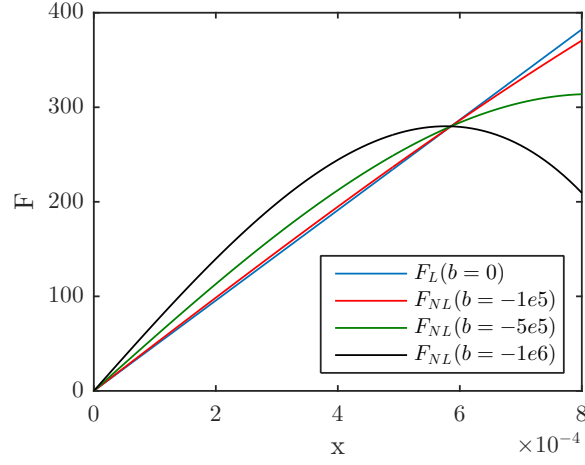


Figura 4.3: Força por deslocamento para o caso *softening*, utilizando a abordagem 1.

4.2 Abordagem 2 para definir o coeficiente de rigidez não linear

Nesta seção é considerada que a força não linear (F_{NL}) é a vezes a força linear equivalente (F_L)

$$aF_L = F_{NL} \quad (4.6)$$

A força linear é dada pela relação direta do parâmetro a , pelo coeficiente de rigidez do absorvedor k_a e a deformação média $\bar{x}$. A força não linear é dada pela relação direta do coeficiente de rigidez do absorvedor k_a e a deformação média $\bar{x}$, somado com o coeficiente de rigidez não linear k_n e a deformação média $\bar{x}$ ao cubo

$$ak_a\bar{x} = k_a\bar{x} + k_n\bar{x}^3 \quad (4.7)$$

E por fim, o coeficiente de rigidez não linear k_n é mostrado na equação abaixo:

$$k_n = \frac{k_a(a-1)}{\bar{x}^2} \quad (4.8)$$

O valor de k_a é calculado seguindo a equação 4.5 e os parâmetros da tabela 2.1, onde ω_s é a primeira frequência natural da metastrutura base, $\mu = 0.3$ e $n = 4$.

4.2.1 Rigidez não linear do tipo *hardening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem 2 para definir os valores de rigidez no caso *hardening*. Como é possível ver na resposta em frequência mostrada na figura 3.4, os deslocamentos da metastrutura com absorvedores são da ordem de grandeza 10^{-4} , e como se deseja adicionar não linearidade *hardening* à estrutura, valores do parâmetro $a > 1$ já mostram a característica de não linearidade do tipo *hardening*. Nessa abordagem as forças F_L e F_{NL} são diferentes, e qualquer valor de $a > 1$ faz com que a mola se comporte com rigidez do tipo *hardening*. É possível notar na figura 4.4 a diferença para cima entre as curvas do sistema não linear e linear.

A tabela 4.4 mostra os valores de rigidez (k_a e k_n) calculados para cada valor de a utilizado.

Tabela 4.4: Valores de rigidez utilizando a abordagem 2 (*hardening*)

a	$k_a \times 10^5$ [N/m]	$k_n \times 10^{13}$ [N/m ³]
1		0
2	4.7797	0.1394
5		0.5577
10		1.2548

A figura 4.4 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores da tabela 4.4. A linha em azul é do sistema apenas com rigidez linear, a linha em vermelho é do sistema com $a = 2$, onde é possível notar uma inclinação para cima em relação a linha azul, ou seja, é um valor onde já se é possível notar de forma visível a não linearidade do tipo *hardening*. As curvas em verde e preto são do sistema com

$a = 5$ e $a = 10$, respectivamente. Nestas curvas é possível notar uma diferença maior em relação a azul (sistema linear). É importante notar que neste caso as curvas não se cruzam, pois esta abordagem considera que a força linear (F_L) é a vezes maior que a força não linear (F_{NL}).

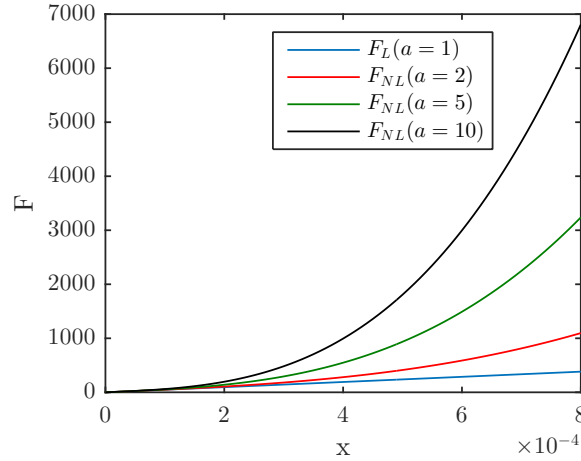


Figura 4.4: Força por deslocamento para o caso *hardening*, utilizando a abordagem 2.

4.2.2 Rigidez não linear do tipo *softening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem 2 para definir os valores de rigidez no caso *softening*. Como é possível ver na resposta em frequência mostrada na figura 3.4, os deslocamentos da metastrutura com absorvedores são da ordem de grandeza 10^{-4} , e como se deseja adicionar não linearidade do tipo *softening* a estrutura, valores do parâmetro $a < 1$ já mostram esta característica de não linearidade. Nessa abordagem as forças F_L e F_{NL} são diferentes, e qualquer valor de $a < 1$ faz com que a mola se comporte com rigidez do tipo *softening*. É possível notar na figura 4.5 essa diferença para baixo entre as curvas do sistema não linear e linear. Quando a não linearidade é do tipo *softening* não se pode diminuir tão bruscamente o valor de a como se aumenta no caso *hardening*, pois a força pode ir para valores negativos, que não é o desejado, e quando isso ocorre é como se a mola estivesse ajudando no movimento.

A tabela 4.5 mostra os valores de rigidez (k_a e k_n) calculados para cada valor de a utilizado.

Tabela 4.5: Valores de rigidez utilizando a abordagem 2 (*softening*)

a	$k_a \times 10^5$ [N/m]	$k_n \times 10^{11}$ [N/m ³]
1		0
0.95	4.7797	-0.6971
0.9		-1.3943
0.8		-2.7885

A figura 4.5 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores da tabela 4.5. A linha em azul é do sistema apenas com rigidez linear, a linha em vermelho é do sistema com $a = 0.95$, onde é possível notar uma leve inclinação para baixo em relação a linha azul. As curvas em verde e preto são do sistema com $a = 0.9$ e $a = 0.8$, respectivamente, nestas curvas é possível notar uma diferença maior em relação a azul (sistema linear). É importante notar que neste caso as curvas não se cruzam, pois esta abordagem considera que a força linear (F_L) é a vezes menor que a força não linear (F_{NL}).

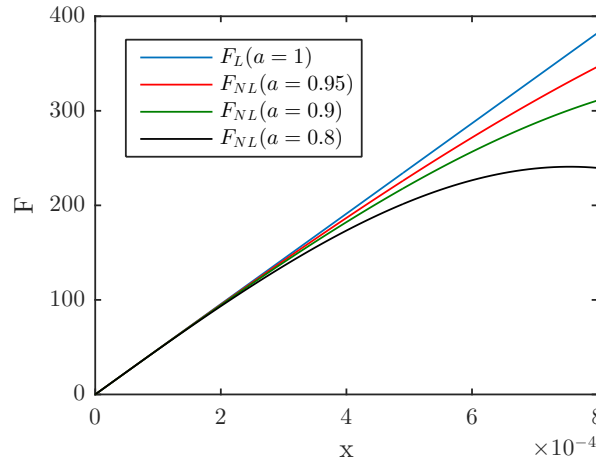


Figura 4.5: Força por deslocamento para o caso *softening*, utilizando a abordagem 2.

Nesta seção foram feitas duas abordagens para calcular o coeficiente de rigidez não linear, que são utilizadas neste trabalho para otimizar a estrutura, com o objetivo de

atenuar vibrações em quatro faixas de frequência, adicionando um absorvedor não linear na metaestrutura com absorvedores.

Capítulo 5

OTIMIZAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA

Neste capítulo é abordada a otimização da estrutura descrita no capítulo 2, figura 2.1. O objetivo é aplicar a técnica de otimização quadrática sequencial (SQP) para minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ para quatro regiões diferentes de frequência. As regiões escolhidas são: região A (262 a 525 Hz), região B (525 a 975 Hz), região C (975 a 2070 Hz) e região D (1 a 4770 Hz). Para escolher estes valores de frequência, partiu-se do vale entre o primeiro e segundo picos de ressonância, que é 525 Hz. A região A é onde está o maior pico de ressonância e seu limite superior é o vale (525 Hz) e o limite inferior é metade deste valor (262 Hz). A região B é onde está o segundo maior pico de ressonância, seu limite inferior é o vale (525 Hz), e como limite superior, foi somado 30 % do valor da frequência natural. A região C é onde existem características de multi estabilidades e a região D é toda a faixa de frequência usada nas simulações. A figura 5.1 mostra as regiões A, B e C destacadas, na resposta em frequência da metaestrutura com absorvedores lineares, onde a região D é toda a faixa de frequência.

A tabela 5.1 mostra os valores da norma $\mathcal{H}_2$ para cada uma das regiões que deseja-se otimizar.

A vibração da metaestrutura base é atenuada com a adição dos absorvedores de forma

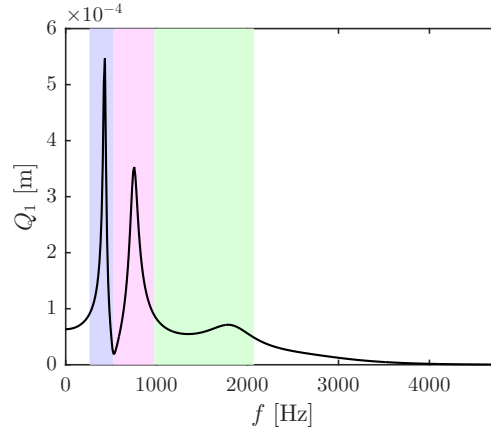


Figura 5.1: Resposta em frequência da primeira massa da metaestrutura com absorvedores lineares indicando as regiões A, B e C que deseja-se otimizar.

Tabela 5.1: Norma $\mathcal{H}_2$ da metaestrutura com absorvedores lineares, que são os valores utilizados como base de comparação nos processos de otimização.

Região	$\mathcal{H}_2$
A	0.3077
B	0.4369
C	0.4319
D	1.4805

periódica sem que haja adição de massa ao sistema, porém, agora deseja-se diminuir a norma $\mathcal{H}_2$ por meio da adição de um absorvedor com rigidez cúbica na metaestrutura com absorvedores. São usadas as duas abordagens mostradas no capítulo 4 para definir o coeficiente de rigidez não linear, e para cada uma destas abordagens são feitos dois casos de otimização.

No caso 1 são usadas como variáveis de decisão a posição e o coeficiente de rigidez não linear para encontrar o valor ótimo de cada uma das regiões de frequência. No caso 2 apenas o coeficiente de rigidez não linear é usado como variável de decisão no processo de otimização para encontrar o valor ótimo de cada uma das regiões de frequência. Neste caso a rigidez não linear é fixada em uma das posições e o processo de otimização encontra seu valor ótimo para esta posição. O mesmo processo é utilizado para as outras posições. E, posteriormente estes valores são comparados para enfim encontrar a posição e o coeficiente de rigidez não linear ótimos para cada uma das regiões de frequência.

5.1 Otimização utilizando a abordagem 1

Nesta seção são utilizadas as equações mostradas na seção 4.1 do capítulo 4. Este problema de otimização é escrito da seguinte forma:

Encontrar $X = \{X_1 \ X_2\}^T$ que minimiza $f(X)$

Sujeito às restrições

$$\begin{aligned} 1 - g_1(X_1) &\leq 0 \\ -4 + g_2(X_1) &\leq 0 \\ 10^5 - g_3(X_2) &\leq 0 \\ -10^9 + g_4(X_2) &\leq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Onde, X_1 é a variável de decisão de posição p que tem como restrição valores inteiros de 1 a 4, pois são as posições que é possível adicionar o absorvedor com rigidez cúbica, e X_2 é a variável de decisão b que tem como limite inferior o valor de 10^5 , pois como é mostrado na subseção 4.1.1 é quando a não linearidade começa a se tornar visível, e o limite superior foi escolhido como 10^9 , $f(X)$ é a função objetivo que é a norma $\mathcal{H}_2$, e $g_{1,2,3,4}$ são as restrições de desigualdade.

5.1.1 Caso 1

O caso 1 é feito utilizando X_1 e X_2 como variáveis de decisão. Utiliza-se quatro valores de condições iniciais para a variável X_1 , que são as quatro posições possíveis para a não linearidade. Para a variável X_2 são utilizados cinquenta valores de condições iniciais, pois, a faixa de valores entre o limite inferior e superior é maior e necessita de mais valores para que a otimização busque o mínimo global e não pare em mínimos

locais. Com estas combinações das condições iniciais, a técnica de otimização é feita 200 vezes, e estes valores são comparados para encontrar o mínimo global.

A tabela 5.2 mostra os valores ótimos de X_1 e X_2 para cada uma das quatro regiões em estudo, assim como a norma $\mathcal{H}_2$ resultante destes valores e as condições iniciais que geraram os valores ótimos.

Tabela 5.2: Valores ótimos encontrados utilizando a abordagem 1 para o caso 1.

Região	X_1	$X_2 \times 10^6$	$\mathcal{H}_2$	$X_{1,0}$	$X_{2,0} \times 10^6$
A	2	0.10	0.3117	1 e 2	0.10
B	3	60.10	0.3445	3 e 4	60.10
C	3	980.0	0.4284	3 e 4	960.10
D	3	460.0	1.4601	3 e 4	460.10

A figura 5.2 mostra a comparação em forma de barras da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) com os valores do sistema com um absorvedor não linear (otimizado), além de mostrar em porcentagem a redução da norma $\mathcal{H}_2$.

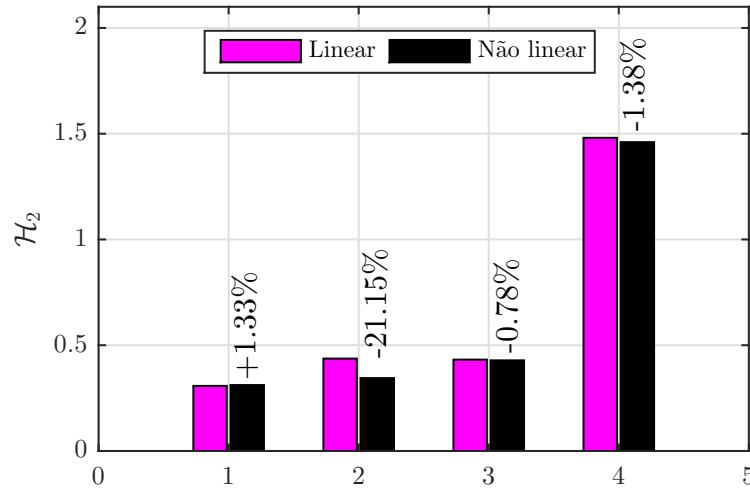


Figura 5.2: Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ utilizando a abordagem 1, caso 1.

A figura 5.3 mostra as respostas em frequência para cada um dos valores ótimos, comparados com a resposta em frequência do sistema com apenas absorvedores lineares. As faixas de frequência que estão destacadas representam qual região foi alvo da otimização. Para a região A há um aumento na área, e para as outras regiões há diminuição

da norma $\mathcal{H}_2$, sendo uma redução maior para as regiões B e D.

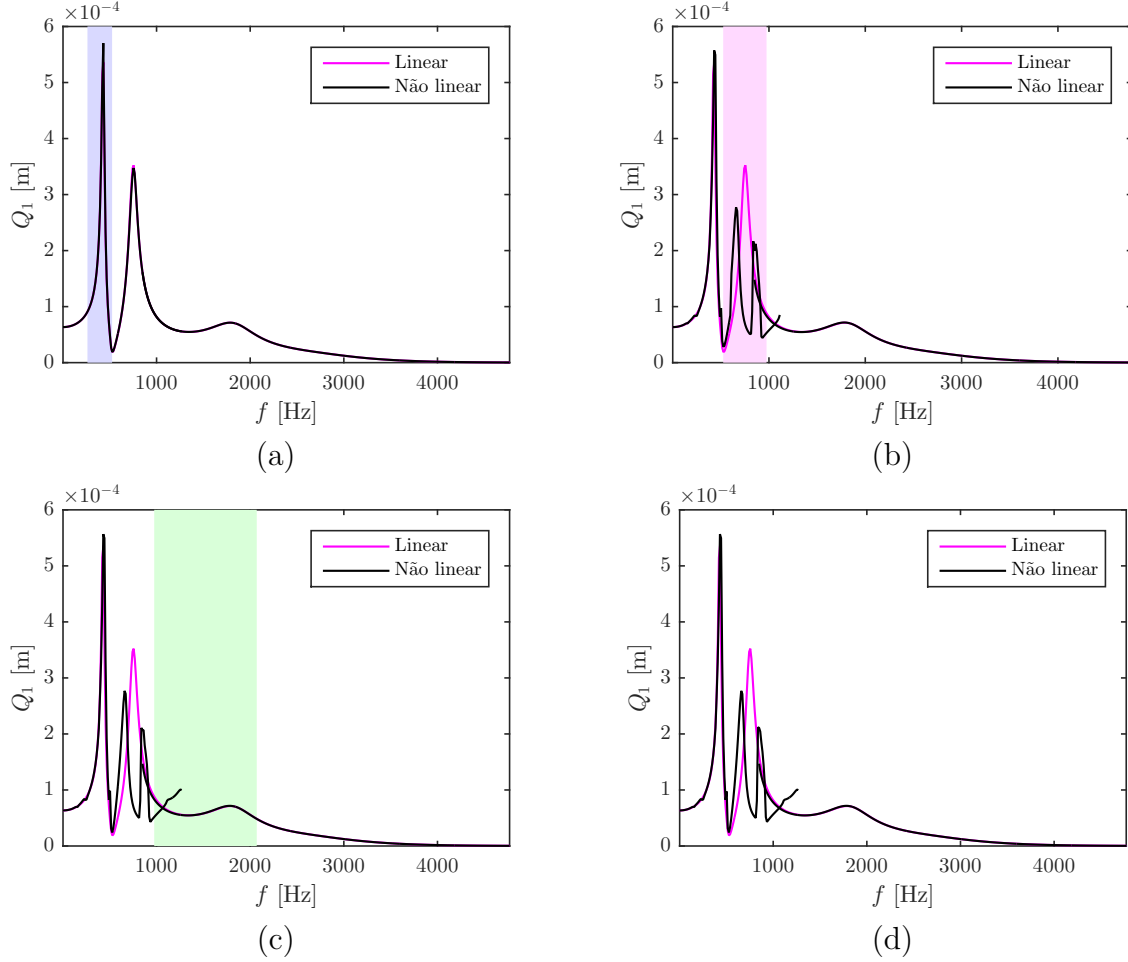


Figura 5.3: Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

A figura 5.4 mostra a curva de atenuação do sistema, onde é feita a razão entre os valores da resposta em frequência da estrutura apenas com absorvedores lineares, pelos valores da resposta em frequência utilizando os valores ótimos, onde valores de razão abaixo de 0 indicam que há atenuação do sistema. Para a região A há uma pequena atenuação e uma propagação levemente maior, resultando em um aumento da norma $\mathcal{H}_2$ para esta região. As outras curvas de atenuação tem algumas frequências onde há propagação e outras onde há atenuação, prevalecendo uma área maior de atenuação, assim há diminuição da norma $\mathcal{H}_2$, sendo a região B onde há a maior atenuação.

Neste caso houve uma diminuição maior da norma $\mathcal{H}_2$ para as regiões B, C e D. A

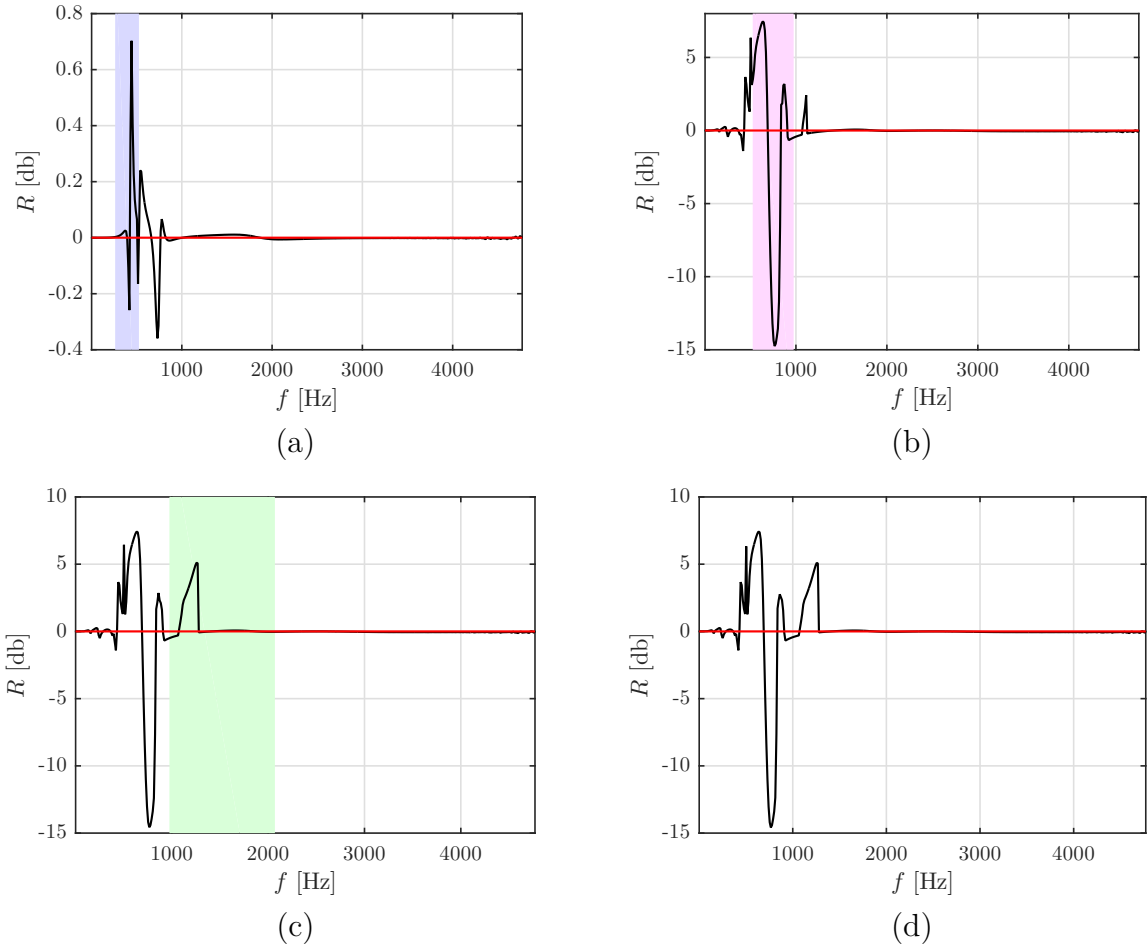


Figura 5.4: Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

região B teve uma diminuição de 0.0924, a região C de 0.0034 e a região D de 0.0204, já a região A teve um aumento de 0.0040.

5.1.2 Caso 2

O caso 2 é feito utilizando X_2 como variável de decisão, para cada uma das quatro posições X_1 possíveis. Assim como no caso 1, são utilizados cinquenta valores de condições iniciais da variável X_2 , para que seja possível encontrar o mínimo global.

A tabela 5.3 mostra os valores ótimos de X_1 e X_2 para cada uma das quatro regiões em estudo, assim como a norma $\mathcal{H}_2$ resultante destes valores e as condições iniciais que

geraram os valores ótimos.

Tabela 5.3: Valores ótimos encontrados utilizando a abordagem 1 para o caso 2.

Região	X_1	$X_2 \times 10^6$	$\mathcal{H}_2$	$X_{2,0} \times 10^6$
A	1	0.10	0.3077	0.10
B	3	120.0	0.3441	120.0
C	4	980.0	0.4204	960.0
D	4	280.0	1.4471	340.0

A figura 5.5 mostra a comparação em forma de barras da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) com os valores do sistema com um absorvedor não linear (otimizado), além de mostrar em porcentagem a redução da norma $\mathcal{H}_2$.

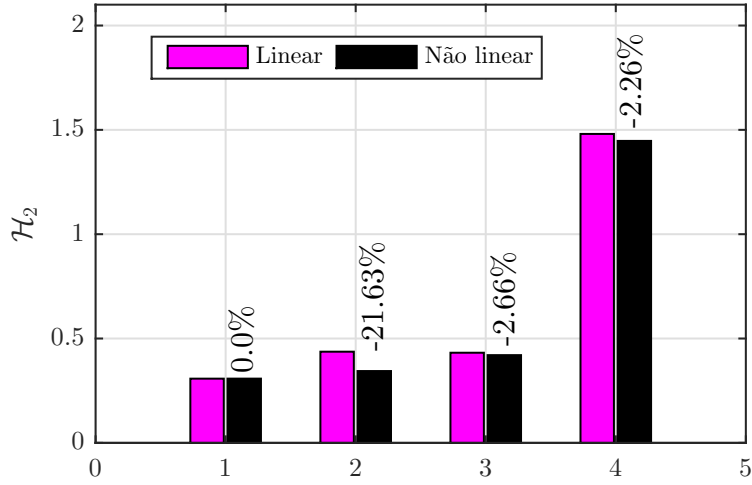


Figura 5.5: Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ utilizando a abordagem 1, caso 2.

A figura 5.6 mostra as respostas em frequência para cada um dos valores ótimos, comparados com a resposta em frequência do sistema com apenas absorvedores lineares. As faixas de frequência que estão destacadas representam qual região foi alvo da otimização. Para a região A a otimização não encontra valores de X_2 que consigam diminuir a norma $\mathcal{H}_2$. Para as outras regiões há diminuição da norma $\mathcal{H}_2$, sendo uma redução maior para as regiões B e D.

A figura 5.7 mostra a curva de atenuação do sistema, onde é feita a razão entre os valores de resposta em frequência da estrutura apenas com absorvedores lineares pelos

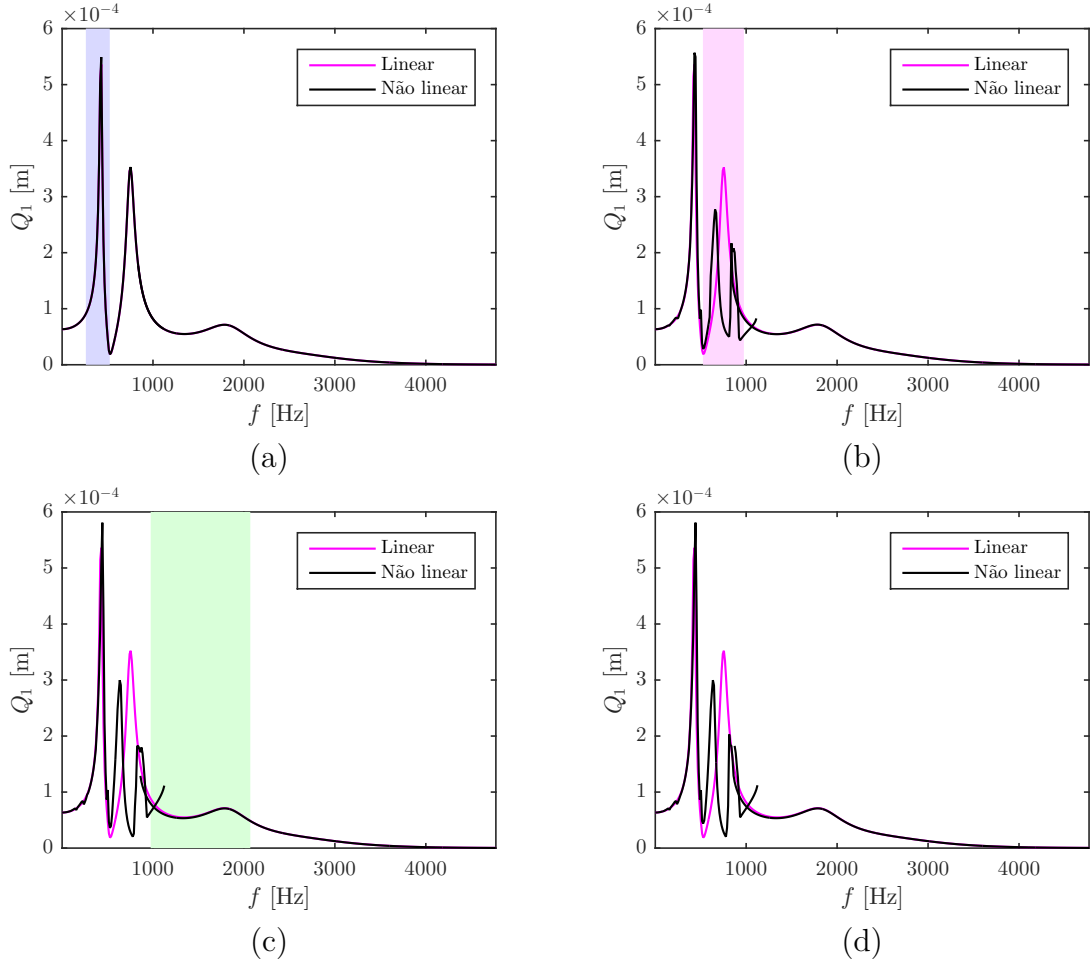


Figura 5.6: Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

valores de resposta em frequência utilizando os valores ótimos, onde valores abaixo de 0 indicam que há atenuação do sistema. Para a região A é possível ver que há uma pequena atenuação e uma pequena propagação que acabam se anulando, resultando em um mesmo valor de norma $\mathcal{H}_2$. As outras curvas de atenuação tem algumas frequências onde há propagação e outras onde há atenuação, prevalecendo uma área maior de atenuação, assim há diminuição da norma $\mathcal{H}_2$, sendo a região B onde há a maior atenuação.

Neste caso houve uma diminuição maior da norma $\mathcal{H}_2$ para as regiões B, C e D. A região B teve uma diminuição de 0.0928, a região C de 0.0115 e a região D de 0.0334, já a região A manteve o mesmo valor de norma $\mathcal{H}_2$.

Ao analisar os resultados tanto do caso 1 quanto do caso 2, ao utilizar a abordagem

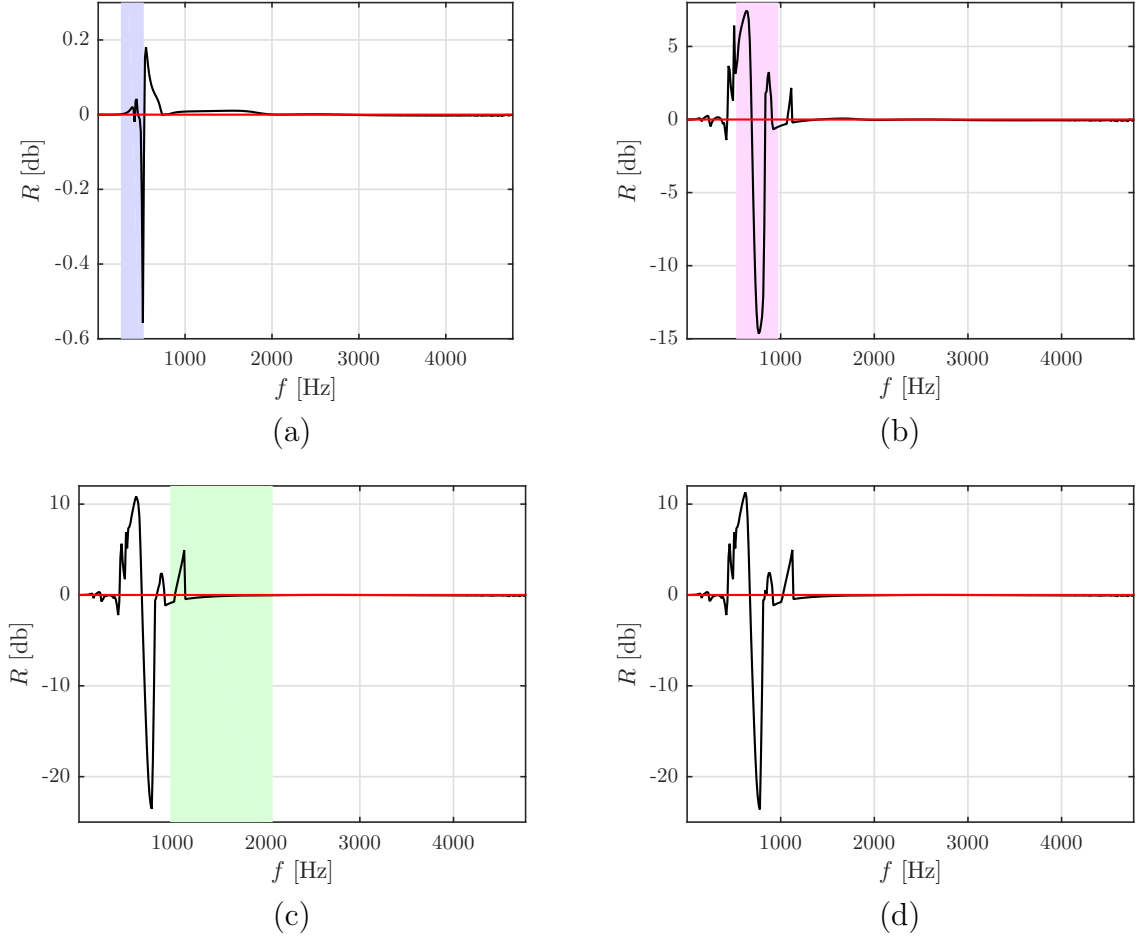


Figura 5.7: Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

1 é possível chegar a algumas conclusões. Para a região A não é possível diminuir a norma $\mathcal{H}_2$ por meio da adição de um absorvedor com rigidez não linear. Para a região B o menor valor é obtido ao adicionar o absorvedor não linear na posição 3, e para as regiões C e D os menores valores são obtidos ao adicionar o absorvedor não linear na posição 4. A tabela 5.4 mostra uma comparação entre os valores de norma $\mathcal{H}_2$ da metaestrutura apenas com absorvedores lineares, com os menores valores obtidos na otimização, quando é usada a abordagem 1 ($F_L = F_{NL}$), e também qual dos dois casos de otimização retorna um valor de norma $\mathcal{H}_2$ menor.

Tabela 5.4: Comparação entre os valores obtidos de norma $\mathcal{H}_2$ utilizando a abordagem 1 ($F_L = F_{NL}$)

Região	Absorvedores lineares	Otimização	Diferença	%	Caso
A	0.3077	0.3077	0.00	0.00	2
B	0.4369	0.3441	0.0928	-21.63	2
C	0.4319	0.4204	0.0115	-2.66	2
D	1.4805	1.4471	0.0334	-2.26	2

5.2 Otimização utilizando a abordagem 2

Nesta seção são utilizadas as equações mostradas na seção 4.2 do capítulo 4. Este problema de otimização é escrito da seguinte forma:

$$\text{Encontrar } X = \{X_1 \ X_2\}^T \text{ que minimiza } f(X)$$

Sujeito às restrições

$$\begin{aligned} 1 - g_1(X_1) &\leq 0 \\ -4 + g_2(X_1) &\leq 0 \\ 1 - g_3(X_2) &\leq 0 \\ -10 + g_4(X_2) &\leq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Onde, X_1 é a variável de decisão de posição p que tem como restrição valores inteiros de 1 a 4, pois são as posições que é possível adicionar o absorvedor com rigidez cúbica, X_2 é a variável de decisão a que tem como limite inferior o valor de 1 que seria do sistema apenas com rigidez linear e como limite superior é escolhido o valor de 10, $f(X)$ é a função objetivo que é a norma $\mathcal{H}_2$, e $g_{1,2,3,4}$ são as restrições de desigualdade.

5.2.1 Caso 1

O caso 1 é feito utilizando X_1 e X_2 como variáveis de decisão. Utiliza-se quatro valores de condições iniciais para a variável X_1 , que são as quatro posições possíveis para

a não linearidade. Para a variável X_2 são utilizados dez valores de condições iniciais, que por não ser um faixa de valores tão grande é o suficiente para que a otimização busque o mínimo global. Com estas combinações das condições iniciais, a técnica de otimização é feita 40 vezes, e estes valores são comparados para encontrar o mínimo global.

A tabela 5.5 mostra os valores ótimos de X_1 e X_2 para cada uma das quatro regiões em estudo, assim como a norma $\mathcal{H}_2$ resultantes destes valores e as condições iniciais que geraram os valores ótimos.

Tabela 5.5: Valores ótimos encontrados utilizando a abordagem 2 para o caso 1.

Região	X_1	X_2	$\mathcal{H}_2$	$X_{1,0}$	$X_{2,0}$
A	1	9.9919	0.3068	3	1
B	4	1.8865	0.2974	1	10
C	4	8.5404	0.3469	2	10
D	4	3.4139	1.3280	1	10

A figura 5.8 mostra a comparação em forma de barras da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) com os valores do sistema com um absorvedor não linear (otimizado), além de mostrar em porcentagem a redução da norma $\mathcal{H}_2$.

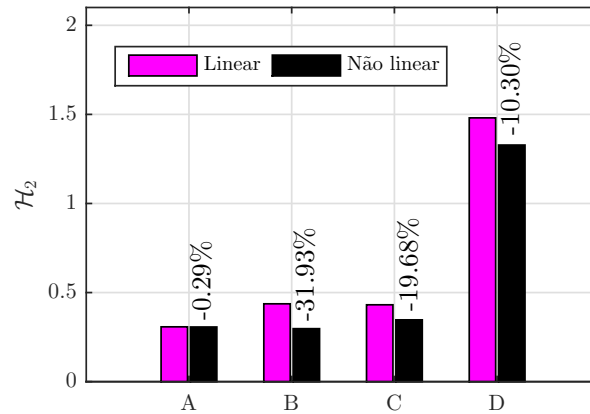


Figura 5.8: Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ do caso 1, utilizando a abordagem 2.

A figura 5.9 mostra as respostas em frequência para cada um dos valores ótimos, comparados com a resposta em frequência do sistema com apenas absorvedores lineares. As faixas de frequência que estão destacadas representam qual região foi alvo da

otimização. Na região A não há uma diferença grande, e há o surgimento de uma multi estabilidade próxima a 1000 Hz. Nas regiões B e D é possível notar que o segundo pico de ressonância teve um deslocamento para a esquerda, e há o surgimento de um novo pico de ressonância, além de surgir uma região de multi estabilidade. Na região C é possível observar uma região de multi estabilidade e atenuação da vibração.

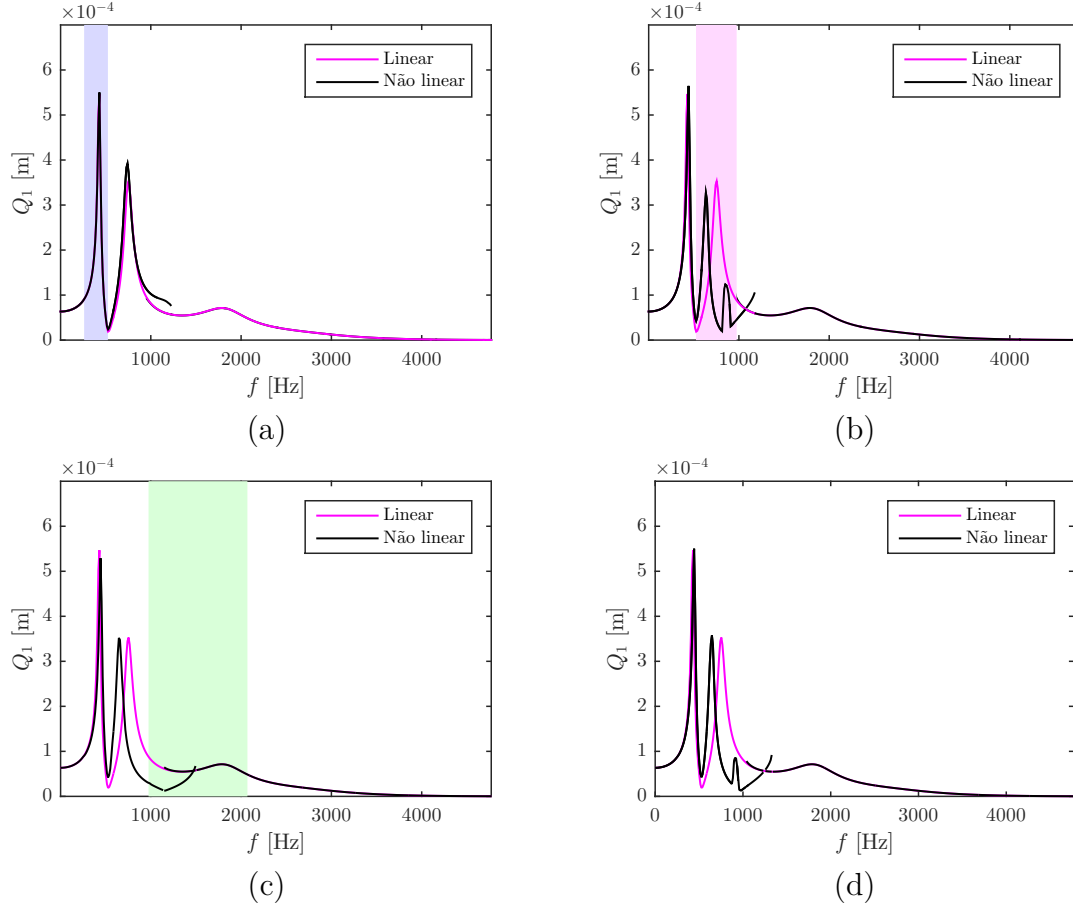


Figura 5.9: Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

A figura 5.10 mostra a curva de atenuação do sistema, onde é feita a razão entre os valores de resposta em frequência da estrutura apenas com absorvedores lineares pelos valores de resposta em frequência utilizando os valores ótimos, onde valores abaixo de 0 indicam que há atenuação do sistema. Na região A é possível notar que não há uma atenuação grande, e um aumento na vibração, que se dá pelo surgimento da região de

multi estabilidade. Nas regiões B e D há uma região onde há uma maior propagação da vibração, pelo fato do segundo pico ter se deslocado e também há atenuação, que é pela diminuição da amplitude do sistema otimizado em relação ao não otimizado. Na região C é possível notar que há uma atenuação.

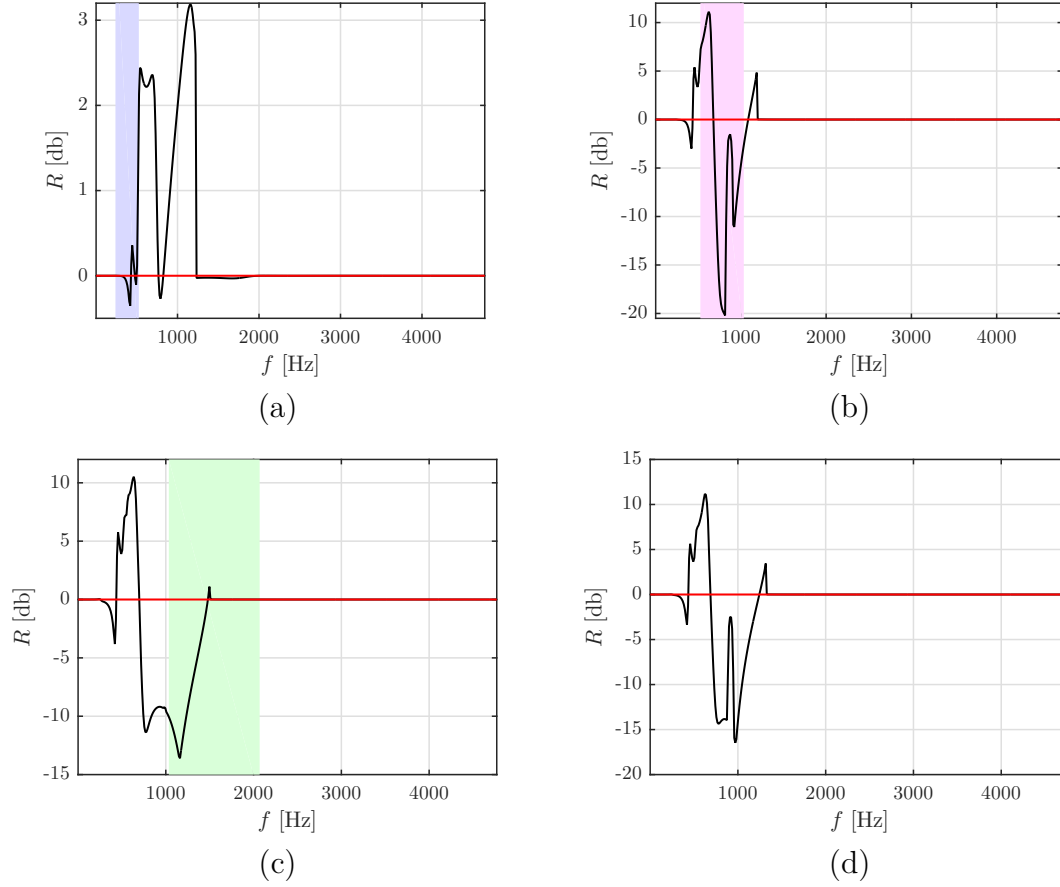


Figura 5.10: Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

Neste caso há uma diminuição maior da norma $\mathcal{H}_2$ para as regiões B, C e D. A região B tem uma diminuição de 0.1395, a região C de 0.0845 e a região D de 0.1525. Enquanto que na região A há uma diminuição de apenas 0.0009.

5.2.2 Caso 2

O caso 2 é feito utilizando X_2 como variável de decisão, para cada uma das quatro posições X_1 possíveis. Assim como no caso 1, são utilizados dez valores de condições iniciais da variável X_2 para que seja possível encontrar o mínimo global.

A tabela 5.6 mostra os valores ótimos de X_1 e X_2 , assim como a norma $\mathcal{H}_2$ resultante destes valores e as condições iniciais que geraram os valores ótimos.

Tabela 5.6: Valores ótimos encontrados utilizando a abordagem 2 para o caso 2.

Região	X_1	X_2	$\mathcal{H}_2$	$X_{2,0}$
A	1	9.9987	0.3068	6
B	4	1.8896	0.2973	10
C	4	9.8496	0.3447	3
D	4	8.7406	1.3120	10

A figura 5.11 mostra a comparação em forma de barras da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) com os valores do sistema com um absorvedor não linear (otimizado).

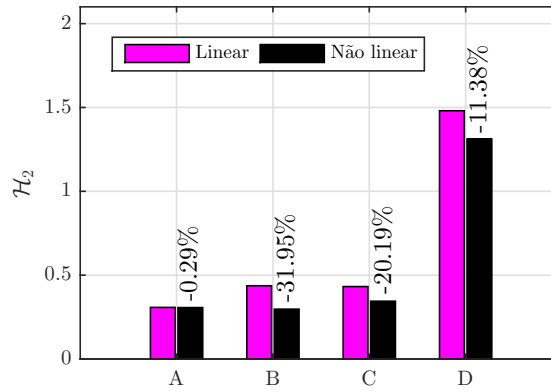


Figura 5.11: Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ do caso 2, utilizando a abordagem 2.

A figura 5.12 mostra as respostas em frequência para cada um dos valores ótimos, comparados com a resposta em frequência do sistema com apenas absorvedores lineares. As faixas de frequência que estão destacadas representam qual região é alvo da otimização. Assim como no caso 1 utilizando a abordagem 2, na região A não nota-se uma grande diferença e tem-se o surgimento de uma multi estabilidade próximo a 1000 Hz.

Na região B é possível ver que o segundo pico de ressonância teve um deslocamento para a esquerda e há o surgimento de um novo pico de ressonância, além do surgimento de uma região de multiestabilidade. Para as regiões C e D a otimização retornou valores próximos para a variável X_2 , o que ocasionou em respostas em frequência similares, o segundo pico de ressonância foi deslocado para a esquerda e surgiu uma região de multi estabilidade.

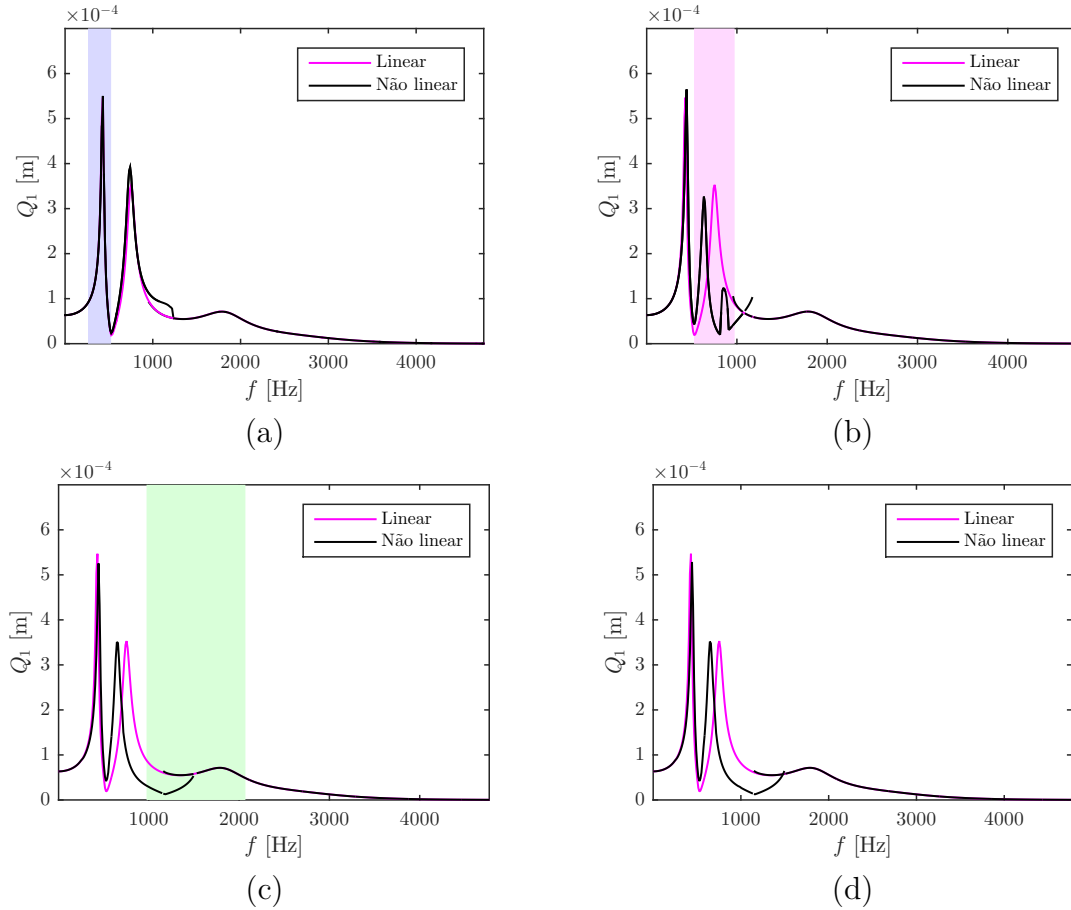


Figura 5.12: Comparação das respostas em frequência do sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

A figura 5.13 mostra a curva de atenuação do sistema, onde é feita a razão entre os valores de resposta em frequência da estrutura apenas com absorvedores lineares pelos valores de resposta em frequência utilizando os valores ótimos, onde os valores abaixo de 0 indicam que há atenuação do sistema. Na região A é possível notar que não há uma

atenuação grande, e há um aumento na vibração em algumas frequências. Isto se dá pelo aumento da amplitude no segundo pico de ressonância e pelo surgimento da região de multi estabilidade. Nas regiões B, C e D há uma faixa onde há uma maior propagação da vibração, pelo fato do segundo pico ter se deslocado, também há atenuação, devido a diminuição da amplitude do sistema otimizado em relação ao não otimizado.

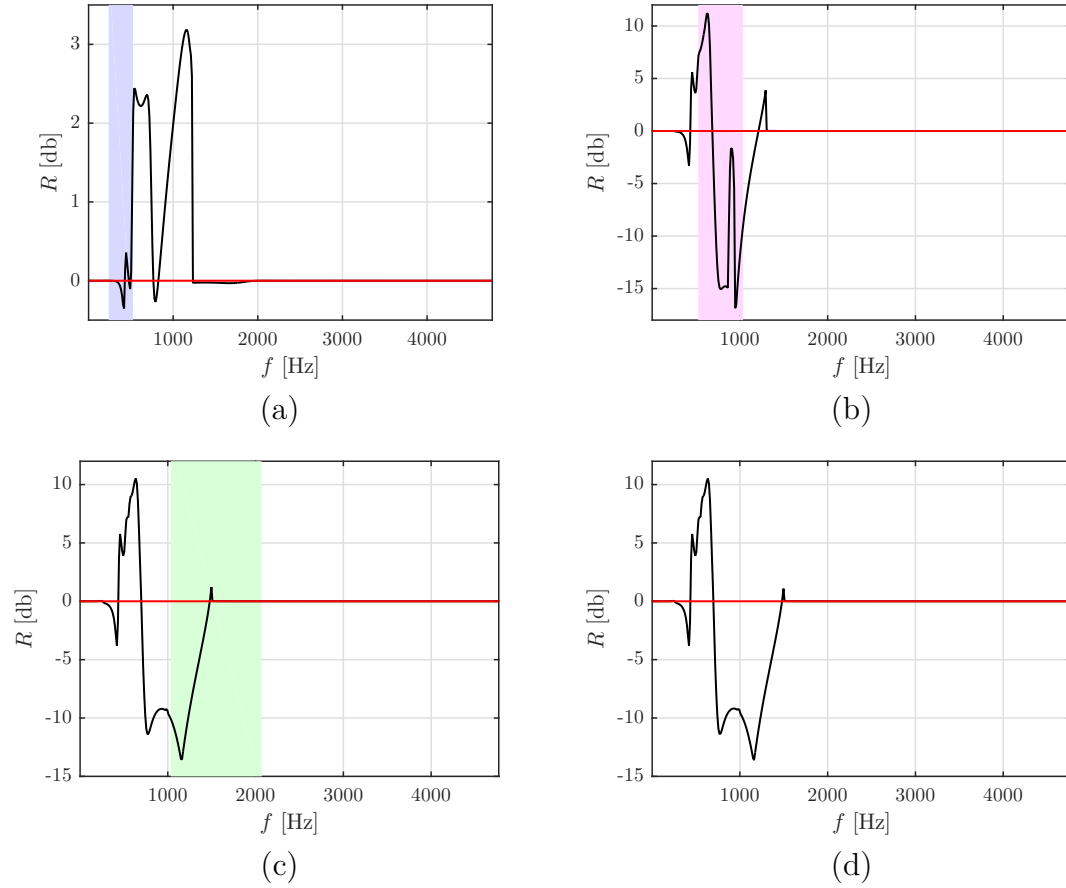


Figura 5.13: Comparação entre o sistema com absorvedores lineares (não otimizado) e com um absorvedor não linear (otimizado), mostrando as regiões de interesse, onde (a) é a região A, (b) a região B, (c) a região C e (d) a região D.

Neste caso há uma diminuição maior da norma $\mathcal{H}_2$ para as regiões B, C e D. A região B teve uma diminuição de 0.1396, a região C de 0.0867 e a região D de 0.1685. Enquanto que na região A há uma diminuição de apenas 0.0009.

Ao analisar os resultados tanto do caso 1 quanto do caso 2 ao utilizar a abordagem 2 é possível chegar a algumas conclusões. Para a região A o menor valor da norma

$\mathcal{H}_2$ é obtido ao adicionar a não linearidade na posição 1. Para as regiões B, C e D os menores valores da norma $\mathcal{H}_2$ são obtidos ao adicionar a não linearidade na posição 4, ou seja, na extremidade a direita, onde a excitação externa é aplicada, isto é pelo fato de ao aumentar a rigidez neste absorvedor irá diminuir a propagação da vibração que é analisada na massa 1 (extremidade esquerda).

A tabela 5.7 mostra uma comparação entre os valores de norma $\mathcal{H}_2$ da metaestrutura apenas com absorvedores lineares, com os menores valores obtidos na otimização, quando é usada a abordagem 2 ($aF_L = F_{NL}$), e também qual dos dois casos de otimização retornou um valor de norma $\mathcal{H}_2$ menor.

Tabela 5.7: Comparação entre os valores obtidos de norma $\mathcal{H}_2$ utilizando a abordagem 2 ($aF_L = F_{NL}$)

Região	Absorvedores lineares	Otimização	Diferença	%	Caso
A	0.3077	0.3068	0.0009	-0.28	1 e 2
B	0.4369	0.2973	0.1396	-31.95	2
C	0.4319	0.3447	0.0867	-20.19	2
D	1.4805	1.3120	0.1685	-11.38	2

5.3 Comparação entre a otimização utilizando a abordagem 1 e a otimização utilizando a abordagem 2

Nesta seção é feita a comparação entre as abordagens para encontrar o coeficiente de rigidez não linear. A tabela 5.8 mostra qual obteve o menor valor de norma $\mathcal{H}_2$.

Tabela 5.8: Comparação entre as otimizações feitas

Região	Absorvedores lineares	Otimização	%	Abordagem	Caso
A	0.3077	0.3068	-0.29	2	2
B	0.4369	0.2973	-31.95	2	2
C	0.4319	0.3447	-20.19	2	2
D	1.4805	1.3120	-11.38	2	2

Para as quatro regiões analisadas, os menores valores de norma $\mathcal{H}_2$ foram encontrados ao utilizar a abordagem 2 ($aF_L = F_{NL}$), isto se dá pelo fato desta abordagem gerar valores maiores de k_n , o que gera um aumento da rigidez equivalente, dificultando a propagação da vibração até a massa 1. Onde é interessante notar uma redução maior de norma $\mathcal{H}_2$ para a região B, e menor redução na região A.

Para a região A foi encontrado $a = 9.9987$ que gera $k_n = 12.5466 \times 10^{12}$, para a região B foi encontrado $a = 1.8896$ que gera $k_n = 1.2403 \times 10^{12}$, para a região C $a = 9.8496$ que gera $k_n = 12.3382 \times 10^{12}$ e para a região D $a = 8.7406$ que gera $k_n = 10.7925 \times 10^{12}$.

5.4 Comparação da resposta otimizada com a metaestrutura base

Além das análises apresentadas nas seções anteriores, onde são feitas as comparações da atenuação de vibrações entre a metaestrutura com absorvedores lineares e as metaestruturas com um absorvedor não linear. Nesta seção são feitas comparações utilizando os resultados da abordagem 1 e caso 2, com a metaestrutura base e com uma metaestrutura com todos os absorvedores não lineares. Além de mostrar resultados da otimização ao utilizar algoritmo genético (GA).

5.4.1 Metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear

A figura 5.14 mostra o valor da função objetivo para a metaestrutura base, metaestrutura com absorvedores lineares e metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear para cada região (A–D). Além disso, também é mostrada a redução (%) em comparação a metaestrutura base. A tabela 5.9 mostra um resumo destes resultados e também mostra os valores ótimos de p e b para o $\mathcal{H}_2$ ótimo da metaestrutura com um absorvedor não linear.

A figura 5.15 mostra a FRF da metaestrutura base, metaestrutura com absorvedores

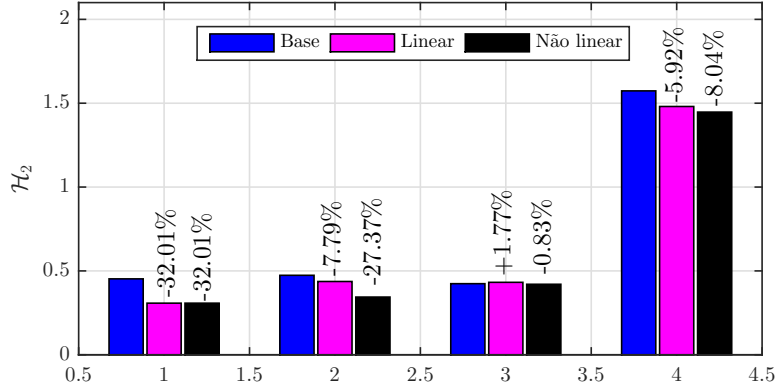


Figura 5.14: Valor da função objetivo da metaestrutura base, metaestrutura com absorvedores lineares e metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear para cada região (A–D). Redução (%) em relação a metaestrutura base.

Tabela 5.9: Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ da metaestrutura com absorvedores lineares e da metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear em relação a metaestrutura base.

Região	Base	Linear		Não linear		p	$b \times 10^6$
	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_2$	Redução (%)	$\mathcal{H}_2$	Redução (%)		
A	0.4526	0.3077	-32.01	0.3077	-32.01	1	20.1
B	0.4738	0.4369	-7.79	0.3441	-27.37	4	0.1
C	0.4239	0.4319	+1.77	0.4204	-0.83	2	0.1
D	1.5736	1.4805	-5.92	1.4471	-8.04	4	0.1

lineares e metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear para cada região (A–D). As regiões que estão destacadas indicam qual a faixa de frequência foi otimizada. A resposta ótima para a região A é semelhante a da metaestrutura com absorvedores lineares, que causam a mesma redução da norma $\mathcal{H}_2$, quando comparados a metaestrutura base. Para as regiões B, C e D as metaestruturas com um absorvedor não linear reduzem mais a norma $\mathcal{H}_2$ do que a metaestrutura com absorvedores lineares, quando comparados a metaestrutura base.

A figura 5.16 mostra as curvas de atenuação em relação a metaestrutura base, para cada região (A–D), com valores abaixo de 1 indicando atenuação. Para a região A, ambos os sistemas se comportam de maneira semelhante, e ambos apresentam a mesma atenuação. Os valores altos em frequências maiores aparecem, pois a FRF base está

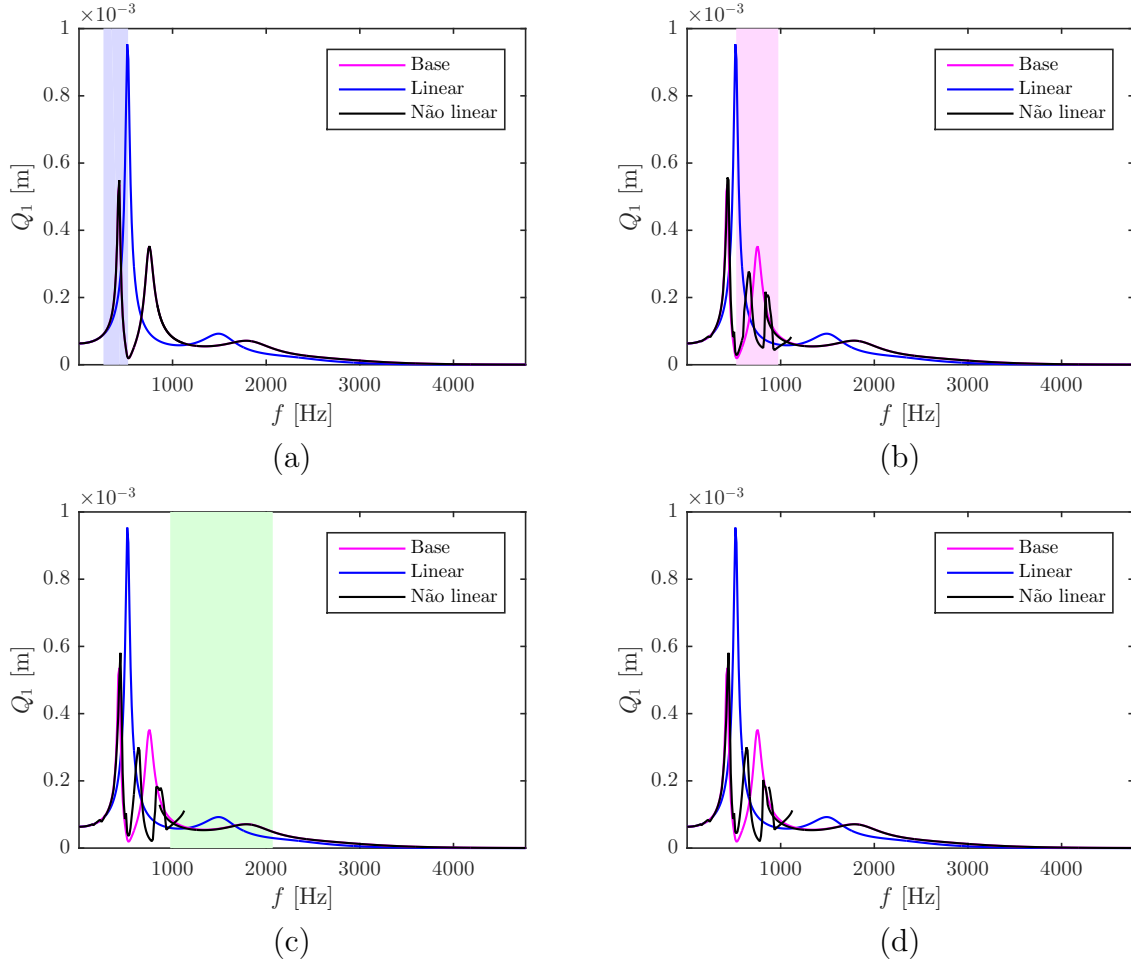


Figura 5.15: Resposta em frequência da metaestrutura base, metaestrutura com absorvedores lineares e metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear para cada região (A–D). As regiões destacadas indicam qual faixa de frequência foi otimizada.

muito próxima de zero, embora os valores de norma $\mathcal{H}_2$ estejam baixos. Para as regiões B e D, ambos os sistemas com absorvedores não lineares tem comportamentos semelhantes, com melhorias em relação a metaestrutura base, e levemente melhor em comparação ao sistema com absorvedores lineares. E para a região C a metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear apresenta uma leve atenuação, diferente da metaestrutura com absorvedores lineares, que gera uma leve propagação.

Para comparar os resultados do método de otimização SQP com uma abordagem metaheurística, foi utilizado um algoritmo genético (GA) para resolver o problema de otimização de número inteiro misto na equação 5.1 com tamanho de população de 50 indivíduos, máximo de 200 gerações, fração de cruzamento de 80 %, taxa de mutação de

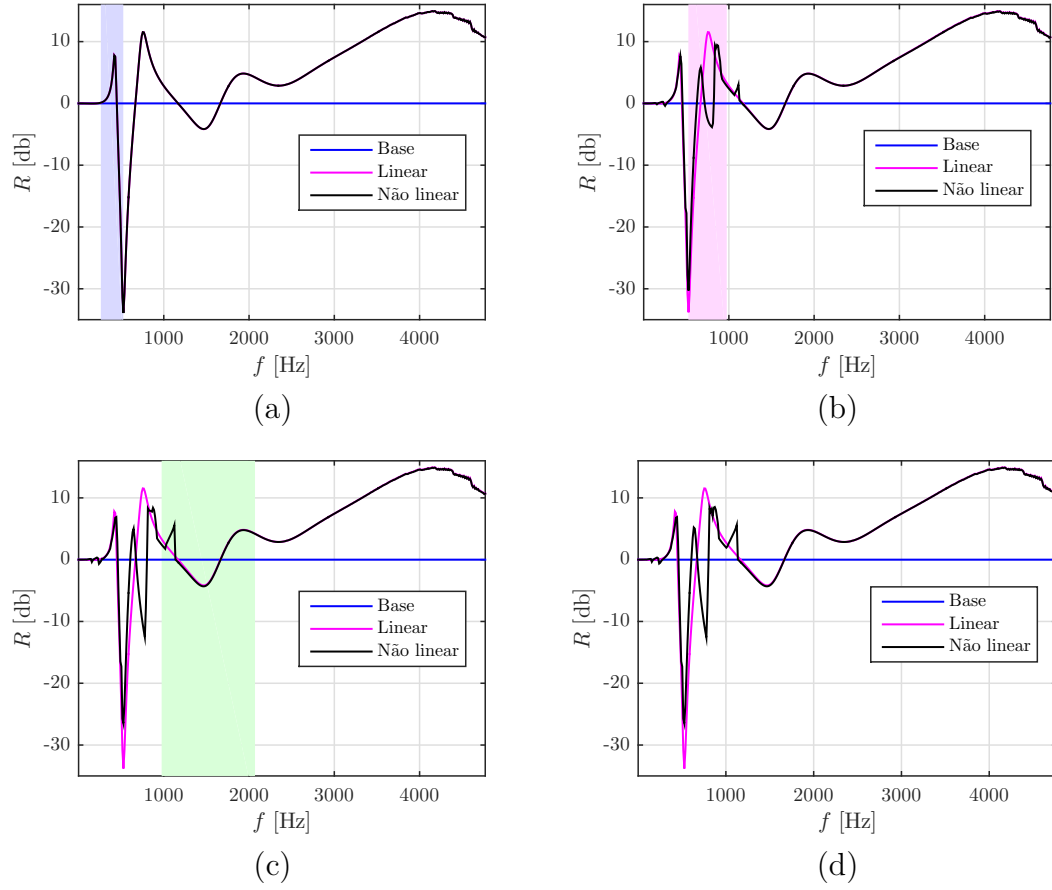


Figura 5.16: Curvas de atenuação em relação a metaestrutura base, para cada região (A–D).

1 %, seleção uniforme estocástica e cruzamento disperso. Os valores gerados pelo GA são mostrados na tabela 5.10. Os valores de $\mathcal{H}_2$ encontrados pelo GA para as regiões A, B, C e D foram, respectivamente, 0.3078, 0.3441, 0.4204 e 1.4370. A convergência foi alcançada em cerca de 60 gerações, e apenas para a região D houve uma diferença entre os métodos SQP e GA, que foi de 0.70 %.

Tabela 5.10: Norma $\mathcal{H}_2$ da metaestrutura otimizada com um absorvedor não linear, utilizando SQP e GA. Onde as diferenças em % são em relação ao SQP.

Região	SQP			GA			
	$\mathcal{H}_2$	p	$b \times 10^6$	$\mathcal{H}_2$	p	$b \times 10^6$	$\mathcal{H}_2$ %
A	0.3077	1	0.10	0.3077	1	0.10	0.00
B	0.3441	3	120	0.3441	3	120	0.00
C	0.4204	4	980	0.4204	4	1000	0.00
D	1.4471	4	280	1.4370	4	1000	0.70

5.4.2 Metaestrutura com todos os absorvedores não lineares

A figura 5.17 mostra o valor da função objetivo para a metaestrutura base, metaestrutura com um absorvedor não linear e metaestrutura com todos os absorvedores não lineares para cada região (A–D). Além disso, também é mostrada a redução (%) em comparação a metaestrutura base. A tabela 5.11 mostra os valores de norma $\mathcal{H}_2$ e a redução (%) em relação a metaestrutura base.

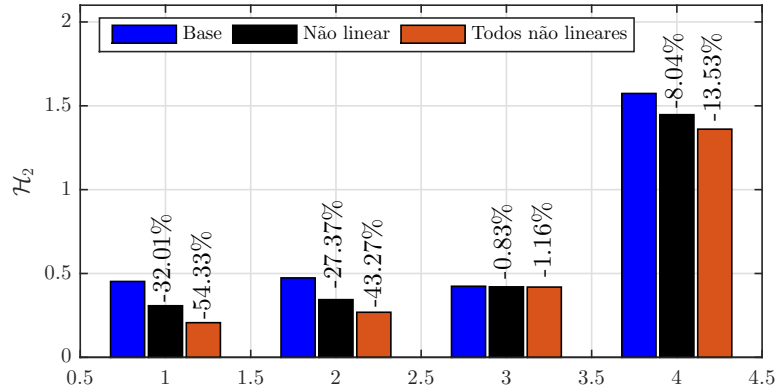


Figura 5.17: Valor da função objetivo da metaestrutura base, metaestrutura com um absorvedor não linear e metaestrutura com todos os absorvedores não lineares para cada região (A–D). Redução (%) em relação a metaestrutura base.

Tabela 5.11: Comparação da norma $\mathcal{H}_2$ das metaestrutura otimizadas com um absorvedor não linear e com todos os absorvedores não lineares em relação a metaestrutura base.

Região	Base	Não linear		Todos não lineares	
	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_2$	Redução (%)	$\mathcal{H}_2$	Redução (%)
A	0.4526	0.3077	-32.01	0.2067	-54.33
B	0.4738	0.3441	-27.37	0.2688	-43.27
C	0.4239	0.4204	-0.83	0.4190	-1.16
D	1.5736	1.4471	-8.04	1.3607	-13.53

Com esta comparação, é possível notar que a adição de apenas um absorvedor não linear gera uma contribuição na redução da norma $\mathcal{H}_2$, tendo mais da metade do ganho.

Capítulo 6

CONCLUSÕES

Neste capítulo são apresentados os comentários finais a respeito de metaestruturas e a influência da adição de um absorvedor com rigidez cúbica na estrutura, com o objetivo de atenuar vibrações axiais, sem adicionar massa a metaestrutura.

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de avaliar formas de atenuar vibrações axiais da metaestrutura base mostrada no capítulo 2, figura 2.1(a), por meio da adição de absorvedores dinâmicos de forma periódica. Além disso, buscou-se analisar também a influência da adição de um absorvedor com rigidez não linear na forma cúbica. Isto é feito por meio da otimização para diminuir a norma $\mathcal{H}_2$ em quatro regiões diferentes de frequência, e estas regiões foram escolhidas com base nos picos de ressonância e da região que apresenta características de multi estabilidade.

Por meio dos resultados foi possível comprovar que a vibração pôde ser atenuada com a dinâmica dos absorvedores adicionados de forma periódica na metaestrutura base. Ao comparar a resposta em frequência da metaestrutura base com a da metaestrutura com absorvedores, e também por meio da análise dos modos de vibrar.

É possível comprovar também que a adição de um absorvedor com rigidez cúbica é capaz de diminuir a norma $\mathcal{H}_2$ em algumas regiões, e por meio do método de otimização quadrática sequencial (SQP) foi possível encontrar quais são as posições e os coeficientes de rigidez não lineares ótimos para cada uma das regiões de frequência analisadas.

Para a região A as abordagens utilizadas não foram capazes de reduzir a norma $\mathcal{H}_2$, quando comparados com a metastrutura com absorvedores lineares, e isto acontece, pois os absorvedores lineares foram projetados para a primeira ressonância, o que confirma a eficácia dos absorvedores lineares para esta frequência, mas não resultam em um bom comportamento em outras frequências, como já é conhecido de absorvedores de vibração.

O resultado da otimização mostra também que, sem prejuízo para a região A, pode-se melhorar a resposta nas outras regiões, principalmente na região B. Onde, para as outras faixas de frequência, os menores valores de norma $\mathcal{H}_2$ são obtidos ao adicionar a não linearidade na posição 4, ou seja, próximo de onde é aplicada a força externa, e a melhor abordagem para encontrar o coeficiente de rigidez não linear é a 2 ($aF_L = F_{NL}$). Isto se dá pelo fato desta abordagem retornar valores maiores para a força de restauração da mola, e também pelo fato de que o aumento da rigidez próximo de onde a força externa é aplicada, faz com que diminua a vibração que é propagada até a outra extremidade da estrutura, onde as respostas são analisadas.

Além disso, pode-se concluir que a adição de apenas um absorvedor não linear tem uma grande contribuição na redução da norma $\mathcal{H}_2$, quando comparado com a metastrutura com todos os absorvedores não lineares, chegando a mais da metade do ganho.

6.1 Publicações

1. Vasconcellos, D.P.; Silveira, M.. Optimisation of axial vibration attenuation of periodic structure with nonlinear stiffness without addition of mass. Journal of Vibration and Acoustics, Submitted, 2019.
2. Vasconcellos, D.P.; Silveira, M.. Cubic stiffness on the subunits of a periodic structure for suppression of axial vibration. In: XVIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, 2019, Búzios, Rio de Janeiro.
3. Seminário do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, realizado em

06 de dezembro de 2018, apresentando o trabalho intitulado: Análise de rigidez cúbica nas células de uma estrutura periódica para supressão de vibração axial, na categoria de pôster, Bauru / SP.

Referências Bibliográficas

- ABDELJABER, O.; AVCI, O.; INMAN, D. J. Optimization of chiral lattice based metastructures for broadband vibration suppression using genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 369, p. 50–62, 2016.
- BARBAROSIE, C.; NEVES, M. Periodic structures for frequency filtering: analysis and optimization. *Computers & structures*, Elsevier, v. 82, n. 17-19, p. 1399–1403, 2004.
- BOECHLER, N.; DARAIO, C.; NARISSETTI, R. K.; RUZZENE, M.; LEAMY, M. Analytical and experimental analysis of bandgaps in nonlinear one dimensional periodic structures. In: SPRINGER. *IUTAM Symposium on Recent Advances of Acoustic Waves in Solids*. [S.l.], 2010. p. 209–219.
- BUENO, D. D. *Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007.
- BURGHIGNOLI, P.; LOVAT, G.; JACKSON, D. R. Analysis and optimization of leaky-wave radiation at broadside from a class of 1-d periodic structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, IEEE, v. 54, n. 9, p. 2593–2604, 2006.
- CARRELLA, A.; BRENNAN, M. J.; KOVACIC, I.; WATERS, T. P. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 322, n. 4-5, p. 707–717, 2009.
- CHAKRABORTY, G.; MALLIK, A. Dynamics of a weakly non-linear periodic chain. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 375–389, 2001.
- CHEN, Y.; ZHOU, S.; LI, Q. Multiobjective topology optimization for finite periodic structures. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 88, n. 11-12, p. 806–811, 2010.
- CHEN, Y.-B.; TAN, K.-H. The profile optimization of periodic nano-structures for wavelength-selective thermophotovoltaic emitters. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 53, n. 23-24, p. 5542–5551, 2010.
- CVETICANIN, L.; ZUKOVIC, M.; CVETICANIN, D. Influence of nonlinear subunits on the resonance frequency band gaps of acoustic metamaterial. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 93, p. 1–11, 2018.

- HOBECK, J. D.; INMAN, D. J. Magnetoelastic metastructures for passive broadband vibration suppression. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2015*. [S.l.], 2015. v. 9431, p. 943119.
- HOBECK, J. D.; LAURANT, C.; INMAN, D. J. 3d printing of metastructures for passive broadband vibration suppression. In: *20th International Conference on Composite Materials, Denmark, Copenhagen*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 19–24.
- HUSSEIN, M. I.; LEAMY, M. J.; RUZZENE, M. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, American Society of Mechanical Engineers, v. 66, n. 4, p. 040802, 2014.
- KOROISHI, E. H. *et al. Controle de vibrações em máquinas rotativas utilizando atuadores eletromagnéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.
- KRÖDEL, S.; THOMÉ, N.; DARAIO, C. Wide band-gap seismic metastructures. *Extreme Mechanics Letters*, Elsevier, v. 4, p. 111–117, 2015.
- LAMARQUE, C. H.; SAVADKOOHI, A. T.; CHARLEMAGNE, S. Experimental results on the vibratory energy exchanges between a linear system and a chain of nonlinear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 437, p. 97–109, 2018.
- LEDEZMA-RAMIREZ, D. F.; FERGUSON, N. S.; BRENNAN, M. J.; TANG, B. An experimental nonlinear low dynamic stiffness device for shock isolation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 347, p. 1–13, 2015.
- MANKTELOW, K. L. *Dispersion analysis of nonlinear periodic structures*. Tese (Doutorado) — Georgia Institute of Technology, 2013.
- MARATHE, A.; CHATTERJEE, A. Wave attenuation in nonlinear periodic structures using harmonic balance and multiple scales. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 289, n. 4-5, p. 871–888, 2006.
- MEAD, D. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from southampton, 1964–1995. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 190, n. 3, p. 495–524, 1996.
- MILTON, G. W.; WILLIS, J. R. On modifications of newton’s second law and linear continuum elastodynamics. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the royal society of london A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 2007. v. 463, n. 2079, p. 855–880.
- NARISSETTI, R. K.; LEAMY, M. J.; RUZZENE, M. A perturbation approach for predicting wave propagation in one-dimensional nonlinear periodic structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 132, n. 3, p. 031001, 2010.

- NICOLETTI, R. *Estudo do controle ativo e passivo de vibrações em sistemas rotativos e estruturais*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- POPA, B.-I.; CUMMER, S. A. Non-reciprocal and highly nonlinear active acoustic metamaterials. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, p. 3398, 2014.
- RAO, S. *Mechanical Vibrations*. [S.l.]: Prentice Hall, 2011. (Always learning). ISBN 9789810687120.
- RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- REICHL, K. K.; INMAN, D. J. Lumped mass model of a 1d metastructure for vibration suppression with no additional mass. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 403, p. 75–89, 2017.
- ROTHOS, V.; VAKAKIS, A. Dynamic interactions of traveling waves propagating in a linear chain with an local essentially nonlinear attachment. *Wave Motion*, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 174–188, 2009.
- SUGINO, C.; ERTURK, A. Analysis of multifunctional piezoelectric metastructures for low-frequency bandgap formation and energy harvesting. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 51, n. 21, p. 215103, 2018.
- SUGINO, C.; XIA, Y.; LEADENHAM, S.; RUZZENE, M.; ERTURK, A. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 406, p. 104–123, 2017.
- TANG, B.; BRENNAN, M. J. On the shock performance of a nonlinear vibration isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 81, p. 207–214, 2014.
- VAKAKIS, A. F.; KING, M. Resonant oscillations of a weakly coupled, nonlinear layered system. *Acta mechanica*, Springer, v. 128, n. 1-2, p. 59–80, 1998.
- VESELAGO, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet physics uspekhi*, IOP Publishing, v. 10, n. 4, p. 509, 1968.
- YAO, S.; ZHOU, X.; HU, G. Experimental study on negative effective mass in a 1d mass–spring system. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 10, n. 4, p. 043020, 2008.
- YUN, Y.; MIAO, G.; ZHANG, P.; HUANG, K.; WEI, R. Nonlinear acoustic wave propagating in one-dimensional layered system. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 343, n. 5, p. 351–358, 2005.
- ZHU, R.; LIU, X.; HU, G.; SUN, C.; HUANG, G. A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 10, p. 2759–2773, 2014.