

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA

LYGIA GRABOSCHII WHITTAKER FRANCO

PROJETO DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA EXPERIMENTOS DE VIBRAÇÃO

SÃO JOÃO DA BOA VISTA

2023

LYGIA GRABOSCHII WHITTAKER FRANCO

PROJETO DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA EXPERIMENTOS DE VIBRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Estadual Paulista —Júlio de Mesquita
Filho como requisito para obtenção de título de Bacharel
em Engenharia Aeronáutica

Orientador: Prof. Dr. Murilo Sartorato.

SÃO JOÃO DA BOA VISTA

2023

F825p Franco, Lygia Graboschii Whittaker
Projeto de uma bancada didática para experimentos de vibração /
Lygia Graboschii Whittaker Franco. -- São João da Boa Vista, 2023
99 p. : il., tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia
Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de
Engenharia, São João da Boa Vista
Orientador: Murilo Sartorato

1. Molas (Mecanismo). 2. MATLAB (Programa de computador). 3.
Método de projeto no ensino. 4. Dinâmica estrutural. 5. Vibração
ressonante. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS EXPERIMENTAL DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PROJETO DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA EXPERIMENTOS DE VIBRAÇÃO

Aluno: Lygia Graboschii Whittaker Franco

Orientador: Prof. Dr. Murilo Sartorato

Banca Examinadora:

- Murilo Sartorato (Orientador)
- Priscilla Andressa de Sousa Silva (Examinador)
- Carlos do Carmo Pagani Junior (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Processo nº 191/2023)
--

São João da Boa Vista, 24 de novembro de 2023

Dedico este trabalho àqueles que, apesar dos medos, percalços e barulhos internos, seguem adiante, dia após dia, buscando o autoconhecimento, superação e evolução.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus e a espiritualidade que tem me guiado, protegido, orientado e amparado todos os dias.

Aos meus pais, Franco e Erica, por todo apoio, compreensão e paciência que tiveram comigo ao longo da graduação.

A todos os meus familiares (irmã, tios, avós, primos) e amigos que sempre me incentivaram, apoiaram e ouviram pacientemente minhas experiências e descobertas ao estudar em uma cidade distante.

Aos amigos que fiz durante a graduação, pelas conversas, cafés, risadas e apoio.

Aos professores Pagani e Priscilla, por terem aceitado participar da banca avaliadora deste projeto.

Ao senhor Osmar, ferramenteiro do CNPEM, que me doou as caixas. Este simples ato, me inspirou a seguir com o projeto e construir o protótipo.

Por fim, ao professor orientador Murilo, pela confiança, paciência, ajuda e por ser solícito e compreensivo quando os problemas apareciam.

Que Deus os abençoe grandemente!

“Ninguém baterá tão forte quanto a vida. Porém, não se trata de quão forte pode bater, se trata de quão forte pode ser atingido e continuar seguindo em frente. É assim que a vitória é conquistada. ”

Rocky Balboa

RESUMO

No curso de engenharia aeronáutica da Faculdade de São João da Boa Vista – UNESP/FESJ, o sistema massa-mola-amortecedor é um recurso mecânico utilizado desde o terceiro semestre, pois permite o estudo sobre modelagem e vibrações, conceitos que são amplamente utilizados, com diferentes abordagens nas disciplinas específicas. Objetivou-se projetar a estrutura de um sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade customizável e de baixo custo para proporcionar aos discentes do câmpus um contato prático com esta ferramenta. A metodologia consistiu na seleção de molas oriundas de um catálogo de uma loja especializada, através da simulação de suas constantes elásticas no software ANSYS. Posteriormente, fez-se um estudo através de um código elaborado em MATLAB para verificar qual o peso mínimo e máximo permitido das massas, tendo como parâmetro uma restrição adotada nas frequências naturais do sistema. Fez-se uma simulação para comparar as frequências naturais obtidas pelo código em MATLAB e pela simulação em ANSYS. Por fim, foi elaborado um suporte para o sistema. Os resultados mostraram que as frequências naturais obtidas pelo código em MATLAB ficaram 21.09% mais baixas que as obtidas pela simulação tridimensional em ANSYS. Um protótipo foi construído, porém ainda há necessidade de fazer a instrumentação, bem como colocar um sistema de aplicação de força para que possa ser utilizado nas aulas práticas.

Palavras-chave: Molas (Mecanismo); MATLAB (Programa de computador); Método de projeto no ensino; Dinâmica estrutural; Vibração ressonante.

ABSTRACT

In the aeronautical engineering course at the Faculty of São João da Boa Vista – UNESP/FESJ, the mass-spring-damper system is a mechanical resource used since the third semester, as it allows the study of modeling and vibrations, concepts that are extremely used, with different approaches in specific disciplines. The objective was to design a structure for a customizable and low-cost mass-spring-damper system with three degrees of freedom to provide campus students with practical contact with this tool. The methodology consists of selecting springs from a catalog from a specialized store, through the simulation of their constant elasticities in the ANSYS software. Subsequently, a study was carried out using a modified code in MATLAB to verify the minimum and maximum permitted weight of the masses, using as a parameter a restriction imposed on the natural frequencies of the system. Carry out a simulation to compare the natural frequencies obtained by the MATLAB code and the ANSYS simulation. Finally, support for the system was developed. The results showed that the natural frequencies obtained by the MATLAB code were 21.09% lower than those obtained by the three-dimensional simulation in ANSYS. A prototype was built, but there is still a need to create instrumentation, as well as install a force application system so that it can be used in practical classes.

Keywords: Springs (Mechanism); MATLAB (Computer program); Project method in teaching; Structural dynamics; Resonant vibration.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Exemplo esquemático para modelagem em caso de aplicação de força em apenas uma extremidade.....	20
Figura 2- Exemplo esquemático para modelagem em caso de aplicação de força em duas extremidades.....	20
Figura 3- Modelo de sistema massa mola amortecedor a ser projetado.....	21
Figura 4- Diagrama de corpo livre do para os três elementos de inércia do sistema proposto	21
Figura 5- Forças que envolvem deslocamentos relativos.....	22
Figura 6- DCL para o sistema envolvendo variáveis dinâmicas	22
Figura 7- Função Delta de Dirac com deslocamento no tempo	28
Figura 8- Relação entre domínio do tempo e domínio da frequência	29
Figura 9- Análise da resposta em vibração livre para diferentes valores de amortecimento ...	34
Figura 10- Fator de ampliação.....	35
Figura 11- Esquema simplificado dos parâmetros dimensionais relevantes para construção de uma mola	36
Figura 12- Curva força–deflexão para uma mola de compressão helicoidal	37
Figura 13- Tensão e módulo de elasticidade	38
Figura 14- Relação entre módulo de elasticidade e deformação elástica ou plástica.....	38
Figura 15- Curva tensão deformação e o fenomeno de escoamento	39
Figura 16- Comportamento de material tracionado até a fratura.....	40
Figura 17- Classificação das famílias de materiais adotadas na metodologia Ashby	42
Figura 18- Exemplo de digrama de barras da metodologia proposta por Ashby	43
Figura 19- Exemplo de digrama de balões da metodologia proposta por Ashby.....	43
Figura 20- Exemplo de matriz de decisão	44
Figura 21- Esquema de funcionamento de uma impressora 3D (FDM)	46
Figura 22- Processos de conformação dos metais e suas subdivisões.....	47
Figura 23- Diagrama da matriz SWOT	48
Figura 24- Etapas do Workbench	52
Figura 25- Determinação do raio da mola	52
Figura 26- Construção da mola no ANSYS	53
Figura 27- Inserção do passo e comprimento da mola	53
Figura 28- Como alterar as configurações do diâmetro do arame.....	54

Figura 29- Alteração de dimensão do arame	54
Figura 30- Local para fechar a aba	55
Figura 31- Estrutura do arame desenhada no esboço da mola	55
Figura 32- Gerar malha preestabelecida no ANSYS.....	56
Figura 33- Malha gerada.....	56
Figura 34- Acesso ao botão “Displacement”	57
Figura 35-Como selecionar uma extremidade	57
Figura 36- Condição de contorno para extremidade fixa	57
Figura 37- Seletor de linha	58
Figura 38- Condição de contorno para definir eixo de movimento da mola.....	58
Figura 39- Inserção da entrada (Força).....	59
Figura 40- Definição do módulo da força aplicada	59
Figura 41- Determinação da variável física de saída (Deformação)	60
Figura 42- Formato genérico das massas m_1 , m_2 e m_3 , desenhado em CAD	62
Figura 43- Modelo das caixas ganhadas e suas dimensões	64
Figura 44- Modelo de rodízio deslizante adotado para conferir movimento as massas.....	64
Figura 45- Esquema do posicionamento dos rodízios na aresta inferior das massas	65
Figura 46- Gancho bicromatizado usado no acople das molas às massas.....	65
Figura 47- Modelo desenhado no ANSYS para simulação de um caso do sistema completo .	68
Figura 48- Esboço do suporte para o sistema desenhado em CAD e suas dimensões	69
Figura 49- Matriz SWOT para uso de madeiras como material.....	78
Figura 50- Matriz SWOT para o processo de fabricação de manufatura aditiva	79
Figura 51- Matriz SWOT para conformação mecânica.....	80
Figura 52- Determinação da resistência em função da densidade.....	82
Figura 53- Tenacidade à fratura em função do módulo de Young.....	82
Figura 54- Módulo de Young em função do custo.....	83
Figura 55- Resistividade elétrica em função do Módulo de Young.....	83
Figura 56- Molas adquiridas, da esquerda para a direita: 2666 (32702,18N), 2692 (14460,47 N), 402 (721,865 N)	89
Figura 57- Protótipo finalizado.....	90
Figura 58- Protótipo finalizado para combinação de molas 10	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Molas escolhidas para realizar simulação e seus respectivos parâmetros dimensionais	50
Tabela 2- Combinações possíveis para posicionamento das molas (constantes em N/m)	61
Tabela 3- Escala de peso e seus significados	63
Tabela 4- Peso e quantidade dos componentes utilizados na composição do sistema	65
Tabela 5- Comparação entre valores de constantes elásticas teóricas e simuladas	70
Tabela 6- Parâmetros para cálculo teórico de k	71
Tabela 7- Análise do comportamento das frequências naturais para diferentes valores de massa	73
Tabela 8- Análise das frequências naturais no domínio da frequência para os casos de 1 a 3	74
Tabela 9- Análise das frequências naturais no domínio da frequência para os casos de 4 a 6	75
Tabela 10- Análise das frequências naturais no domínio da frequência para os casos de 7 a 9	76
Tabela 11- Comparação de valores entre MDF e madeira compensada	77
Tabela 12- Comparação de valores para diferentes materiais de manufatura aditiva	79
Tabela 13- Comparação de valores entre alumínio de latão	80
Tabela 14- Valores teóricos de densidade e módulo de elasticidade para comparação gráfica do método Ashby	81
Tabela 15- Atribuição de nota para cada material	84
Tabela 16- Combinação de molas na substituição da mola 2464 pela 2766 e inclusão da mola 2292 como valor intermediário	85
Tabela 17- Frequências naturais para as combinações estipuladas na Tabela 16	85
Tabela 18- Análise das frequências naturais para os casos de 10 a 12	86
Tabela 19- Análise das frequências naturais para os casos de 13 a 15	87
Tabela 20- Análise das frequências naturais para os casos de 16 a 18	88
Tabela 21- Comparação entre frequências naturais obtidas pelo código em MATLAB e por simulação no ANSYS	89

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 OBJETIVOS	17
2.1 OBJETIVO GERAL	17
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
3.1 DEFINIÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS E DINÂMICOS	18
3.1.1 Movimentos relativos	19
3.1.2 Definição do Sistema	20
3.1.3 Diagrama de corpo livre	21
3.1.4 Definição de equações diferenciais (EDO)	22
3.1.5 Segunda Lei de Newton e obtenção de EDOs	23
3.1.6 Espaço de estados	24
3.1.7 Função ode 45	25
3.1.7.1 Revisão-Método Numérico de Runge-Kutta	25
3.1.7.2 Método Numérico de Dormand-Prince	26
3.1.8 A função delta de Dirac - função impulso	27
3.2 CONCEITOS IMPORTANTES NO ESTUDO DE VIBRAÇÕES	28
3.2.1 Transformada de Fourier	28
3.2.2 Frequência natural e o problema do autovalor	30
3.2.3 Vibração livre	32
3.2.4 Vibração forçada	34
3.3 MOLLA	35
3.3.1 Constante elástica	36
3.4 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	37
3.4.1 Densidade absoluta	37
3.4.2 Módulo de elasticidade (E) e Resistência	37

3.4.3 Tenacidade à fratura	40
3.4.4 Resistividade elétrica	41
3.5 METODOLOGIAS PARA SELEÇÃO DE MATERIAIS	41
3.5.1 Método de Ashby	41
3.5.2 Matriz de decisão	43
3.6 PROCESSOS DE FABRICAÇÃO	44
3.6.1 Carpintaria e Marcenaria	45
3.6.2 Manufatura aditiva	46
3.6.3 Conformação de metais	46
3.6.3.1 Conformação plástica.....	47
3.6.3.1 Usinagem.....	47
3.7 SOLDAGEM	48
3.8 METODOLOGIA SOWT	48
4 METODOLOGIA	49
4.1 ESCOLHA DAS MOLAS	49
4.1.1 Simulação de molas e constantes elásticas	51
4.1.1.1 Definição do Material.....	52
4.1.1.2 Construção da geometria.....	52
4.1.1.3 Geração da malha.....	55
4.1.1.4 Definição das condições de contorno.....	56
4.1.1.5 Solução.....	59
4.1.1.6 Resultados	60
4.2 DETERMINAÇÃO DE MASSAS A PARTIR DE CONSTANTES ELÁSTICAS PRÉ-DEFINIDAS	60
4.2.1 Análise em frequência – modos de vibrar e frequências naturais	60
4.2.2 Análise das frequências pelo método Runge Kutta	61
4.2.3 Escolha do formato da massa	61
4.2.4 Escolha dos processos de fabricação e material das massas	62
4.3 DETERMINAÇÃO DE CONSTANTES ELÁSTICAS COM VALOR FIXO DE MASSA	63

4.3.1 Definição dos adereços	64
4.3.2 Determinação do peso mínimo da massa	65
4.3.3 Verificação da frequência natural	66
4.3.4 Análise das frequências de ressonância.....	66
4.4 SIMULAÇÃO DO SISTEMA PARA UM CASO ESPECÍFICO	66
4.4.1 Determinação da densidade das caixas	67
4.4.2 Modelagem das molas na simulação do sistema	67
4.4.3 Configurações da simulação.....	68
4.5 ELABORAÇÃO DO SUPORTE	69
5 RESULTADOS.....	70
5.1 CONSTANTES ELÁSTICAS DAS MOLAS	70
5.2 ESCOLHA DOS VALORES DAS MASSAS A PARTIR DE MOLAS PREDETERMINADAS	71
5.2.1 Análise dos autovalores - frequências naturais	72
5.2.2 Análise das ressonâncias.....	74
5.2.3 Escolha do método de fabricação e materiais.....	77
5.2.3.1 Marcenaria.....	77
5.2.3.2 Manufatura aditiva	78
5.2.3.3 Conformação mecânica	80
5.2.4 Comparação dos materiais – método Ashby.....	81
5.3 DETERMINAÇÃO DE MOLAS COM VALOR FIXO DE MASSA.	84
5.4 SIMULAÇÃO	88
5.6 PROTÓTIPO CONSTRUÍDO	89
6 MELHORIAS FUTURAS	90
7 CONCLUSÃO	92
REFERÊNCIAS	93
APÊNDICE A – CÓDIGO MATLAB.....	97

1 INTRODUÇÃO

O projeto mecânico é uma disciplina especializada dentro da engenharia, utilizada em diversas áreas como: mecânica pura, mecatrônica, aeronáutica, aeroespacial, naval, ferroviária e automobilística. Essa disciplina se concentra na criação e desenvolvimento de sistemas, componentes e dispositivos mecânicos, abrangendo uma ampla gama de atividades, dentre elas a concepção de conceitos, modelagem detalhada, análise, seleção de materiais e processos de fabricação para garantir a funcionalidade, segurança e eficiência e menor custo de produtos mecânicos.

No projeto de um sistema mecânico, a construção direta de protótipos, bem como a realização de testes experimentais para determinar e analisar seu comportamento sem um estudo prévio apresentam baixo custo-benefício, visto que se algum componente for projetado ou alocado de forma errada, todo o tempo e material gasto para desenvolvê-lo e fabricá-lo é perdido.

A modelagem matemática apresenta-se como um recurso para estudar um sistema real, visando reproduzir seu comportamento através de equações matemáticas, oriundas das relações e comportamentos físicos fundamentais apropriados. As respostas do sistema podem ser obtidas através de simulações numéricas implementadas computacionalmente, a partir das quais é possível propor a alteração dos parâmetros ou mesmo da configuração do sistema para alcançar critérios de projeto preestabelecidos ou melhorar o desempenho como um todo.

Molas, correias, alavancas e engrenagens são exemplos de componentes que podem compor um sistema mecânico, os quais são caracterizados por exercerem funções específicas dentro de um conjunto. O comportamento do sistema é determinado pela disposição e interação entre esses elementos. Em geral, o interesse do estudo nesses casos volta-se para o movimento-ênfase em grandezas como deslocamento, velocidade e aceleração- sem levar em conta as forças que o causam (cinemática) ou atentando-se para as os torques ou forças atreladas ao movimento (dinâmica).

O sistema massa-mola-amortecedor é um modelo genérico amplamente utilizado na modelagem de sistemas mecânicos, tanto de forma visual, para auxiliar no entendimento e desenvolvimento do equacionamento matemático do problema, quanto pelo fato de existirem respostas predeterminadas para estudo da resposta para diferentes tipos de excitação, o que facilita o entendimento de sistemas complexos e agiliza o seu desenvolvimento.

Na grade curricular do curso de engenharia aeronáutica da Faculdade de São João da Boa Vista – UNESP/FESJ, o sistema massa-mola-amortecedor aparece por diversas vezes, sendo apresentado ao longo de quatro disciplinas semestrais com abordagens diferentes. No terceiro semestre, na disciplina de “Matemática Aplicada”, os discentes têm o primeiro contato com a ideia de modelagem matemática e de se fazer analogia e associação de determinado problema com os elementos do sistema. No quarto semestre, na disciplina de “Sistemas Dinâmicos”, o enfoque recai em sistemas mecânicos, sua representação em espaço de estados, bem como análise de sistemas dinâmicos no domínio do tempo e da frequência. No quinto semestre, na disciplina de “Vibrações Mecânicas”, são abordados análise de vibrações, sistemas de vários graus de liberdade (resposta livre e forçada, sem e com amortecimento). Por fim, no sexto semestre, em “Dinâmica Estrutural”, são passados conceitos de frequências naturais e modos de vibrar. Indiretamente, os conhecimentos obtidos nas quatro disciplinas mencionadas são utilizados em outras mais específicas do curso, como: “Dinâmica de Voo I e II”, “Controle Linear I e II” e “Aeroelasticidade” (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP), 2023)

Até o presente momento, a abordagem das disciplinas citadas acima tem sido ministrada apenas de forma teórica e expositiva, o que tende a deixar os assuntos abstratos aos discentes. Tendo em vista as vantagens da utilização da modelagem e a vasta gama de assuntos que podem ser estudadas a partir dela, originou-se a ideia de projetar um sistema mecânico massa-mola-amortecedor versátil e de baixo custo para que fosse alocado no laboratório de engenharia aeronáutica do câmpus e em outros projetos.

Embora se trate de um sistema simples, todas as etapas de um projeto mecânico são contempladas, como por exemplo: definição do escopo, análise e projeto conceitual, cálculos, simulações e protótipo. Fica proposta a elaboração de um sistema mecânico físico que proporcione aos discentes a possibilidade de explorar, testar e visualizar respostas do sistema com diferentes valores de massa, forças de entrada, molas distintas para um, dois ou três graus de liberdade.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Projetar a estrutura de um sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade de bancada de baixo custo e customizável para experimentos de vibração em disciplinas da UNESP.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir o objetivo geral, faz-se necessário o desenvolvimento dos seguintes objetivos específicos:

- Escolher molas helicoidais disponíveis no mercado através do cálculo da constante elástica simulada em via o software comercial ANSYS de Análise via Elementos Finitos (do inglês finite element analysis FEA);
- Determinar o formato, materiais, dimensões e processo de fabricação para construção das massas;
- Estipulação do formato, material e dimensões do suporte;
- Fazer a simulação do sistema.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O projeto do sistema massa-mola-amortecedor foi concebido como conhecimento transversal e interdisciplinar, envolvendo conceitos de diferentes disciplinas vistas durante a graduação, dentre elas: sistemas dinâmicos, vibrações mecânicas, processos de fabricação e elementos de máquina. Nesta seção são expostas definições pertinentes a cada uma das disciplinas bem como revisões de trabalhos clássicos acerca do assunto na literatura, a fim de possibilitar a apresentação da metodologia e justificar as escolhas feitas ao longo do projeto.

3.1 DEFINIÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS E DINÂMICOS

Um sistema pode ser definido como uma combinação de componentes, os quais apresentam relação de causa (entrada) e efeito (saída), operando em conjunto para atingir um objetivo específico. Uma entrada pode ser entendida como uma força que altera as condições de um sistema. As saídas, por sua vez, referem-se às variáveis que podem ser observadas com a perturbação provocada pela entrada, são exemplos: a aceleração, velocidade e deslocamento (KLUEVER, 2018).

Os sistemas mecânicos têm em sua composição elementos de dissipação de energia, inércia e rigidez. Nestes tipos de sistemas, os modelos matemáticos podem ser obtidos aplicando-se a mecânica clássica newtoniana (as leis de Newton), uma vez que estas regem a relação entre massa, força e aceleração. Para casos em que as variáveis de saída variem no tempo, e que estas dependem das condições iniciais do sistema, o sistema mecânico passa a ser chamado de sistema dinâmico (as saídas podem ser chamadas de variáveis dinâmicas), o qual pode ser representado por equações diferenciais (equações compostas por derivadas de uma função desconhecida) (KLUEVER, 2018).

Em sistemas que podem ser modelados de com corpos rígidos, os elementos de inércia consistem em uma massa concentrada (genericamente chamada de m) para sistemas mecânicos que fazem movimentos de translação. Duas características fundamentais são: a capacidade de armazenar energia potencial e a possibilidade de serem expressos pela segunda lei de Newton (mostrada no caso de translação). A aceleração, em geral, é representada pela segunda derivada, que neste trabalho será expresso por $\ddot{x}$, como mostra a Equação 1 (KLUEVER, 2018).

$$F = ma = m\ddot{x} \quad (1)$$

O elemento de atrito representa qualquer componente mecânico que dissipa energia em decorrência de seu movimento. Em geral, na modelagem de um sistema mecânico, o atrito é representado por um amortecedor. Em sua formulação matemática, b representa o coeficiente de atrito viscoso (em N·s/m) e a primeira derivada - representada por $\dot{x}$ - a velocidade. Desta forma, a força do amortecedor pode ser equacionada como mostra a Equação 2 (KLUEVER, 2018).

$$F = b\dot{x} \quad (2)$$

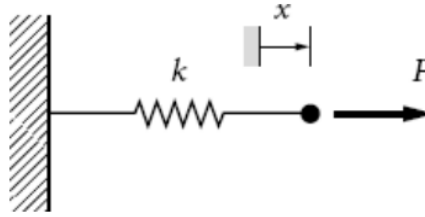
O elemento de rigidez é caracterizado por armazenar energia por conta de deformação, sendo representado por uma mola. A relação força-deformação é fornecida pela lei de Hooke, mostrada pela Equação 3, que estabelece a força de extensão ou compressão para um deslocamento proporcional, onde x refere-se ao deslocamento e k à constante elástica dada em N/m. O sinal negativo refere-se ao sentido da força elástica, que é sempre oposto à deflexão sofrida pela mola. Por este motivo a força da mola é chamada de restauradora (KLUEVER, 2018).

$$F = -kx \quad (3)$$

3.1.1 Movimentos relativos

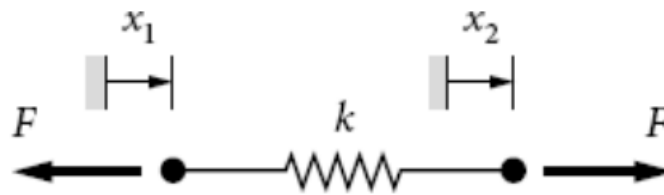
É importante salientar que, para os elementos de atrito e de rigidez, há casos em que a força é aplicada em apenas uma das extremidades como mostra a Figura 1, ou pode ocorrer de haver aplicação de força em ambas as extremidades, como no caso da Figura 2. Abaixo, serão discutidas as diferenças entre ambos os casos, utilizando exemplos simplificados envolvendo molas. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para amortecedores, substituindo, respectivamente, a constante elástica k pelo coeficiente de atrito viscoso b , bem como o deslocamento x , pela velocidade $\dot{x}$ (KLUEVER, 2018).

Figura 1- Exemplo esquemático para modelagem em caso de aplicação de força em apenas uma extremidade



Fonte: (KLUEVER, 2018)

Figura 2- Exemplo esquemático para modelagem em caso de aplicação de força em duas extremidades



Fonte: (KLUEVER, 2018)

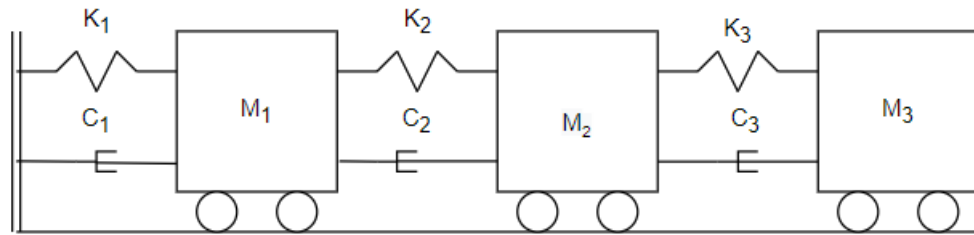
Para casos de força aplicada em apenas uma extremidade, a Equação 3 descreve o movimento da Figura 1. Caso ambas as extremidades da mola possam se mover, utiliza-se o deslocamento relativo. Na Figura 2, x_1 e x_2 representam os deslocamentos absolutos, em que as posições de referência representam as posições quando não há força aplicada na mola. Neste caso o equacionamento do sistema completo é mostrado na Equação 4 (KLUEVER, 2018).

$$F = k(x_2 - x_1) \quad (4)$$

3.1.2 Definição do Sistema

A Figura 3 apresenta de forma esquemática o sistema massa-mola-amortecedor utilizado como base para construção do aparato laboratorial. Este, consiste em um conjunto de três massas (M_1, M_2 e M_3), três molas (K_1, K_2 e K_3) e três amortecedores (C_1, C_2 e C_3), os quais se movimentam em uma superfície horizontal. A fim de tornar didático o estudo da relação entre os elementos em questão, foi proposto que os valores das massas e das molas fossem possíveis de alterar diretamente no aparato, de acordo com o objetivo da prática laboratorial. Os amortecedores foram considerados como forças dissipativas do sistema.

Figura 3- Modelo de sistema massa mola amortecedor a ser projetado



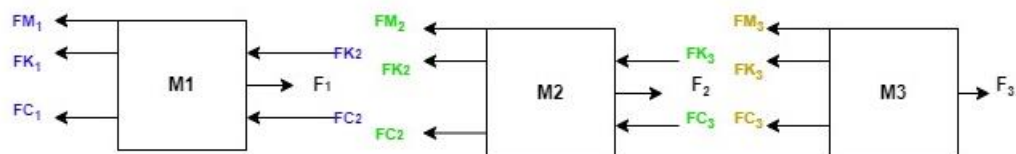
Fonte: Do autor, 2023

3.1.3 Diagrama de corpo livre

O diagrama de corpo livre (DCL) consiste em um desenho simplificado de um sistema, no qual são destacadas todas as forças atuantes nele. KLUEVER (2018) ressalta que em sistemas dinâmicos de translação deve ser feito um DCL para cada elemento de inércia. A Figura 4 mostra o DCL para os três corpos, onde as forças destacadas em azul referem-se às forças aplicadas a M_1 , em verde à M_2 e em amarelo à M_3 . Foi considerado o momento em que os blocos são puxados para a direita por forças externas F_1 , F_2 e F_3 .

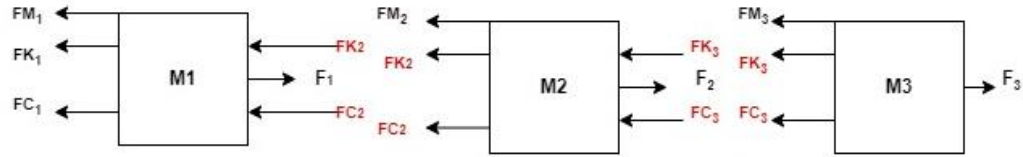
As forças genéricas FM_i , FK_i e FC_i , referem-se respectivamente à força de inércia da massa, força da mola e força do amortecimento. É possível observar que as forças citadas estão em sentido oposto, pois a inércia da massa tende a restringir o movimento do conjunto; a mola possui caráter restaurador, visto que tende a voltar para seu ponto de equilíbrio e o amortecedor, como o próprio nome diz, tende a amortecer, ou seja, retardar o movimento. Por convenção, forças com sentido para a direita foram consideradas positivas. É importante chamar a atenção do leitor de que as forças destacadas em vermelho na Figura 5 estão sujeitas a deslocamentos relativos como foi discutido no item 3.1.1, já que ambas as extremidades das molas 2 e 3 podem se mover.

Figura 4- Diagrama de corpo livre do para os três elementos de inércia do sistema proposto



Fonte: Do autor, 2023

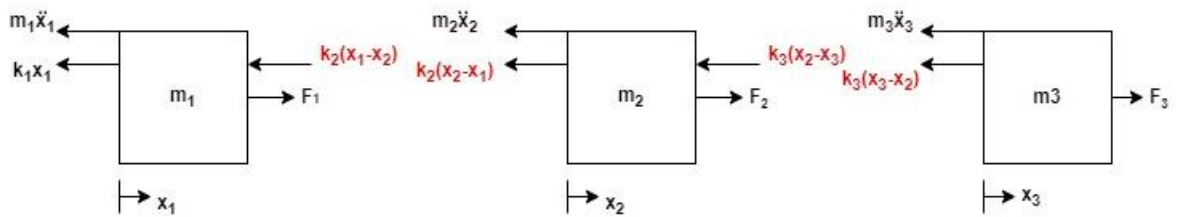
Figura 5- Forças que envolvem deslocamentos relativos



Fonte: Do autor, 2023

Em geral, na modelagem de sistemas, as forças genéricas adotadas para o amortecedor como FC_i e para a mola como FK_i são substituídas, respectivamente, pelas Equações 2 e 3, ou seja, pelas variáveis dinâmicas. A Figura 6 apresenta o DCL com as devidas substituições. Ressalta-se que os amortecedores foram retirados, uma vez que serão estimados pelo quociente de Rayleigh, dependendo apenas das matrizes de massa e de molas que serão discutidas mais à frente.

Figura 6- DCL para o sistema envolvendo variáveis dinâmicas



Fonte: Do autor, 2023

3.1.4 Definição de equações diferenciais (EDO)

Equações diferenciais possuem a característica de serem compostas por derivadas. Chamam-se EDOs, equações diferenciais ordinárias, equações cuja derivadas sejam em relação apenas a uma variável independente (LUZ&JULIO,2001). SODRÉ (2003) define a EDO como a Equação 5, onde y é a variável dependente e x a variável independente e n a ordem da função.

$$F = (x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (5)$$

3.1.5 Segunda Lei de Newton e obtenção de EDOs

A aplicação da segunda lei de Newton enunciada na Equação 6 para cada elemento inerente, permite que seja obtido um modelo matemático do sistema mecânico completo. A lei em questão estabelece que a soma de todas as forças externas atuando sobre um corpo é igual ao produto da massa m e da aceleração do corpo, que, como foi discutido, se apresenta como a própria força de inércia. As Equações 7, 8 e 9, mostram as três EDOs de segunda ordem que regem o sistema para o diagrama destacado na Figura 6 (KLUEVER, 2018).

$$F = ma \quad (6)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_2 + k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_2 - x_3) \quad (8)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = F_3 + k_3 (x_3 - x_2) \quad (9)$$

Uma vez que se trata de um sistema de massas e molas acopladas, as Equações 7, 8 e 9 podem ser representadas pela equação diferencial matricial mostrada na Equação 13, onde: M fornece os parâmetros inerciais do sistema, sendo uma matriz quadrada de ordem n ; K e C são matrizes de ordem (n, n) que correspondem, respectivamente, às forças proporcionais, às velocidades e às forças proporcionais aos deslocamentos; F refere-se a matriz de entrada de ordem (n, m) e x , um vetor m dimensional de entradas correspondentes as acelerações, velocidades e deslocamentos respectivamente (EDUARDO, 2003). As Equações 10, 11 mostram as matrizes de inércia (M), rigidez (K) o sistema da Figura 6.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A Equação 12 mostra a matriz de amortecimento definida a partir da combinação proporcional de massa e rigidez proposto pelo Método de Amortecimento Viscoso de Rayleigh. Nesta metodologia o amortecimento é considerado constante durante toda a resposta, ainda que haja mudanças de rigidez no sistema, ocasionadas pela perda de energia. Aqui, α e β são constantes, tendo como unidade sec^{-1} e sec , respectivamente. (BOZZO, 2023).

$$C = \alpha M + \beta K \quad (12)$$

A adoção da representação em estrutura matricial permite que seja obtido o espaço de estado para o sistema (desde que as funções sejam lineares), que é um recurso utilizado em funções do MATLAB para se obter respostas de problemas (EDUARDO, 2003). KLUEVER (2018) salienta que a representação do sistema em espaço de estados ou na forma de EDOs não altera a dinâmica do sistema.

$$M\ddot{x}(t) + K\dot{x}(t) + Cx(t) = Fu(t) \quad (13)$$

3.1.6 Espaço de estados

A representação no espaço de estado se apresenta como um método para representar um sistema através das variáveis de estado, que são as variáveis físicas que descrevem um dado sistema, como por exemplo: pressão e vazão para sistemas que envolvem fluidos, correntes e tensões para os sistemas elétricos, bem como deslocamentos e velocidades em sistemas mecânicos. As variáveis de estado permitem que qualquer característica do sistema, tal como quantidade de movimento seja determinada (KLUEVER, 2018).

A representação no espaço de estados pode ser obtida através da Equação 14. As Equações 15 e 16 mostram, respectivamente, como as constantes A e B podem ser determinadas a partir das relações entre as matrizes de inércia, rigidez, amortecimento e força (EDUARDO, 2003). Matematicamente falando, neste processo, é reduzida a ordem das equações (diferenciais de segunda ordem para primeira ordem), definindo-se um novo sistema de variáveis (KLUEVER, 2018).

$$\dot{x}(t) = Ax + B \quad (14)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n,n)} & I_{(n,n)} \\ A_{1(n,n)} & A_{2(n,n)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n,m)} \\ B_{1(n,m)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

3.1.7 Função ode 45

A função *ode 45* apresenta-se como um dos solucionadores do MATLAB para equações diferenciais ordinárias (EDOs), a qual aplica o método de Dormand-Prince (KIMURA,2009). Esta função resolve as EDOs numericamente implementando uma combinação método Runge-Kutta de quarta e quinta ordem com passo de tempo variável. Nela, devem ser atribuídos os seguintes parâmetros: uma função com o espaço de estado do sistema em questão, o tempo inicial e final de simulação e um vetor definindo o valor inicial dos deslocamentos e velocidades (DE MORAIS,2022).

3.1.7.1 Revisão-Método Numérico de Runge-Kutta

Runge Kutta é um conjunto de métodos numéricos desenvolvidos pelos matemáticos Alemães Carl David Tolmé Runge e Martin Wilhelm Kutta por volta de 1900 que permitem encontrar soluções aproximadas para um problema do valor inicial (PVI). O PVI, conforme estipula as condições da Equação 17, se trata de uma equação diferencial que acompanha o valor da função objetivo em um determinado ponto. Sendo f uma função real, x e y variáveis reais e desde que o PVI tenha solução, constrói-se uma sequência de valores reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ (com espaçamento igual), em que o passo h é dado pela distância entre a abscissa de um ponto qualquer (x_{i-1}) e a abscissa do ponto seguinte (x_i) que se pretende calcular. Ressalta-se que i e n são números reais e indicam par ordenado que está sendo calculado. As aproximações $y_i \approx y(x_i)$ são calculadas com base nas informações da coordenada anterior (SILVA, 2021).

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (17)$$

Segundo SILVA (2021) os métodos de Runge-Kutta são caracterizados por três propriedades: não exigir cálculo de qualquer derivada de $f(x, y)$; serem de passo um ou passo simples, ou seja, o ponto seguinte é calculado a partir da inclinação da reta que passa pelo ponto calculado anteriormente, bem como, o fato da expressão coincidir com a dos métodos de Série de Taylor de mesma ordem.

Os métodos de Runge-Kutta consistem na comparação de um polinômio de Taylor apropriado, visando a eliminação do cálculo das derivadas, sendo possível sua construção para qualquer ordem. DO VALLE (2012) descreve em sua obra as equações para Runge-Kutta de primeira, segunda, terceira e quarta ordem, no qual o último é ressaltado como o mais importante na solução de PVI.

3.1.7.2 Método Numérico de Dormand-Prince

O método se inicia com o cálculo de k_1 no valor inicial dado pelo PVI, como mostra a Equação 18. A partir dele, são calculadas as demais constantes representadas entre as Equações 19 e 24 (KIMURA, 2009)

$$k_1 = hf(t_k, y_k) \quad (18)$$

$$k_2 = hf(t_k + \frac{1}{5}h, y_k + \frac{1}{5}k_1) \quad (19)$$

$$k_3 = hf(t_k + \frac{3}{10}h, y_k + \frac{3}{10}k_1 + \frac{9}{40}k_2) \quad (20)$$

$$k_4 = hf(t_k + \frac{4}{5}h, y_k + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3) \quad (21)$$

$$k_5 = hf(t_k + \frac{8}{9}h, y_k + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4) \quad (22)$$

$$k_6 = hf(t_k + h, y_k + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 - \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5) \quad (23)$$

$$k_7 = hf(t_k + h, y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6) \quad (24)$$

Calcula-se então o próximo ponto, y_{k+1} , como mostra a Equação 25. Ressalta-se que a constante k_2 não é utilizada (KIMURA, 2009).

$$y_{k+1} = y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6 \quad (25)$$

Após, calcula-se o ponto posterior, z_{k+1} , pelo método Runge Kutta de 5° ordem, como mostra Equação 26 (KIMURA, 2009).

$$z_{k+1} = y_k + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7 \quad (26)$$

Por fim, faz-se a diferença entre o método de Runge Kutta de 5° ordem e o método de Runge Kutta de 4°, conforme a Equação 27, a qual fornece o erro em y_{k+1} (KIMURA, 2009).

$$|z_{k+1} - y_{k+1}| = \left| \frac{71}{57600}k_1 - \frac{71}{16695}k_3 + \frac{71}{1920}k_4 - \frac{17253}{339200}k_5 + \frac{22}{525}k_6 - \frac{1}{40}k_7 \right| \quad (27)$$

O intervalo ideal de tempo h_{opt} é dado pela Equação 28, onde ϵ é a tolerância aceita pelo usuário, h o intervalo de tempo anterior e s é fornecido pela Equação 29 (KIMURA, 2009).

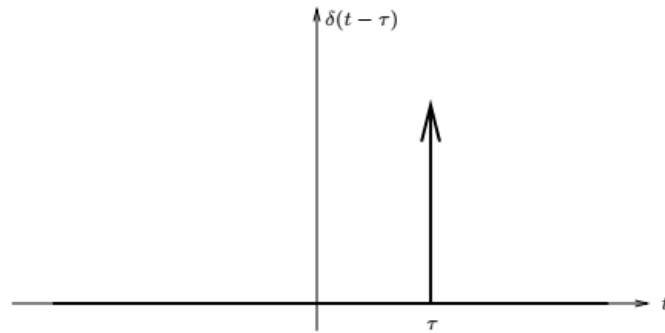
$$h_{opt} = sh \quad (28)$$

$$s = \left(\frac{\epsilon h}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (29)$$

3.1.8 A função delta de Dirac - função impulso

A função delta de Dirac é $(\delta(t))$ definida pela condição apresentada na Equação 30, sendo caracterizada por ser nula em todos os pontos com exceção de $t = 0$, como mostra a Figura 7. Ressalta-se que τ representa o deslocamento no eixo t (TAKAHASHI, 2002).

Figura 7- Função Delta de Dirac com deslocamento no tempo



Fonte: (Takahashi, 2002)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & \forall t = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Integrando-se a função $\delta(t)$, obtém-se a função degrau unitário ($U(t)$), representada pela Equação 31 (TAKAHASHI, 2002).

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

A apresentação dessas definições é importante, uma vez que podem ser utilizadas como modelos matemáticos para representação de uma entrada instantânea no tempo de força ou deslocamento em um sistema mecânico.

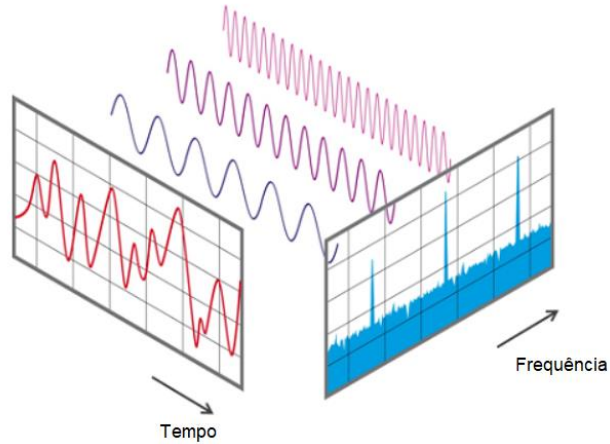
3.2 CONCEITOS IMPORTANTES NO ESTUDO DE VIBRAÇÕES

3.2.1 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta matemática que permite a transformação do sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência. O domínio da frequência costuma ser utilizado para caracterização de sinais, uma vez que através dos espectros de frequência obtidos, podem ser avaliadas suas magnitudes e características na composição de determinado sinal. A mudança para o domínio da frequência apresenta a vantagem de filtrar a superposição de amplitudes de diferentes origens, as quais tornam os gráficos plotados no domínio do tempo

mais complexos e com excesso de informação (MARTINS, 2016). A Figura 8 mostra a relação entre os domínios.

Figura 8- Relação entre domínio do tempo e domínio da frequência



Fonte: Adaptado de (NTI AUDIO, 2023)

A Equação 32 mostra a definição matemática da Transformada de Fourier, em que $x(t)$ corresponde a uma função real no tempo que deve ser absolutamente integrável e $X(\omega)$ uma função complexa da frequência (MARTINS, 2016).

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (32)$$

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a a b é

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a,b]$. (STEWART, 2017)

Acelerômetros, que podem ser utilizados na captação de resposta à excitação em ensaios dinâmicos, costumam fornecer sinais analógicos discretizados (sinais não contínuos, definidos apenas em determinados instantes de tempo). Para casos como esse, a equação não se torna aplicável, visto que não satisfaz a condição de função contínua destacada na citação acima. Por conseguinte, os espectros de frequência podem ser obtidos através da substituição da Equação 32 pela Equação 33, que corresponde a Transformada Discreta de Fourier (DFT), em que N se refere ao número de pontos amostrados e $x(n)$ o conjunto de pontos que representa o sinal no tempo. Ressalta-se que a resolução do espectro de frequências melhora conforme se aumenta o número de pontos amostrados, mas possui o inconveniente de requerer maior tempo computacional na resolução (MARTINS, 2016)

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{i2\pi nm}{N}} \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (33)$$

A transformada rápida de Fourier (FFT) se trata de uma otimização da (DFT) desenvolvida por J. W. Cooley (IBM) e J. W. Tukey (Bell Labs) em 1965, que reduz as operações computacionais. Considerando como exemplo uma amostra de 1000 pontos, o número de multiplicações para solucionar a DFT seria de 2.000.000, enquanto que para a FFT o número necessário seria 50 vezes menor. A estratégia do algoritmo da FFT consiste em dividir a sequência $X(m)$ em duas, coeficientes pares e ímpares, calculando-se a DFT para cada uma delas e depois combinando-as novamente (MARTINS, 2016).

3.2.2 Frequência natural e o problema do autovalor

A Equação 34 representa a formulação geral das EDO's que controlam as vibrações livres de um sistema linear não amortecido com n graus de liberdade (KELLY, 2018).

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (34)$$

Em geral, as vibrações livres decorrem por conta da presença de uma energia cinética ou potencial. Uma vez que não há dissipação de energia por conta da ausência de amortecimento, é razoável esperar que as vibrações sejam periódicas, bem como síncronas, condição em que todas as variáveis dependentes apresentam mesmo comportamento na execução do movimento em relação ao tempo. Para estas condições, pode-se admitir a forma

modal mostrada na Equação 35, em que X é um vetor n -dimensional de constantes (chamado de modo natural) e ω a frequência de vibração (KELLY, 2018).

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (35)$$

Os valores de ω para os quais a Equação 35 seja a solução da Equação 34 são denominados de frequências naturais. Salienta-se que para um sistema de n graus de liberdade, são encontradas n frequências naturais. Cada frequência natural-também chamada de autovalor-possui ao menos um modo natural (KELLY, 2018).

Uma vez que as equações diferenciais representadas pela Equação 34 são homogêneas e lineares, a solução geral é dada pela superposição de todos os modos possíveis. Substituindo-se a Equação 35 na Equação 34, tem-se a Equação 36 (KELLY, 2018).

$$(-\omega^2 MX + KX)e^{i\omega t} = 0 \quad (36)$$

Como o termo $e^{i\omega t}$ não pode ser nulo, obtém-se a Equação 37.

$$(-\omega^2 MX + KX) = 0 \quad (37)$$

Ao multiplicar ambos os lados da Equação 37 por M^{-1} , obtém-se a solução trivial ($X=0$) apenas se a condição da Equação 38 for satisfeita, em que I refere-se a matriz identidade. Aplicando-se a raiz nos autovalores obtidos, se encontra o valor das frequências naturais ω_n do sistema (KELLY, 2018).

$$\det[M^{-1}K - \omega^2 I] = 0 \quad (38)$$

No MATLAB, a função *eig* retorna os autovalores de um sistema, recebendo como parâmetros as matrizes de inércia e rigidez.

3.2.3 Vibração livre

A Equação 39 representa o sistema em vibração livre, em que $f(t) = 0$. Segundo RAO (2008) a solução de uma EDO é dada pela soma de uma solução particular e de uma solução geral, mostrada na Equação 40, onde se refere à variável de Laplace que deve ser determinada (DE BARROS, 2014).

$$M\ddot{x}(t) + K\dot{x}(t) + Cx(t) = 0 \quad (39)$$

$$x(t) = Xe^{st} \quad (40)$$

Substituindo a Equação 40 na Equação 39, tem-se a Equação 41. Por ser exponencial, o termo Xe^{st} nunca será nulo, logo, a Equação 42 mostra a solução não trivial (DE BARROS, 2014).

$$(ms^2 + cs + k)Xe^{st} = 0 \quad (41)$$

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (42)$$

As soluções de s para a Equação 42 são mostradas na Equação 43.

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (43)$$

Ao analisar o termo de dentro da raiz presente na Equação 43, obtém-se três situações possíveis:

- I. Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$, ambas as raízes são reais, em que as forças de amortecimento governam o movimento. O sistema, neste caso, é chamado de superamortecido.
- II. Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$, ambas as raízes são conjugados complexos, em que as forças de inércia e elásticas governam o movimento. O sistema, neste caso, é chamado de amortecimento.

- III. Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$, ambas as raízes são nulas, tornando o sistema criticamente amortecido.

Ao isolar o amortecimento no caso criticamente amortecido, obtém-se o coeficiente de amortecimento crítico, mostrado na Equação 44. Em que $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ representa a frequência natural não amortecida. O coeficiente em questão pode ser utilizado para adimensionalizar o amortecimento, onde ξ representa o amortecimento não dimensional da Equação 45 (DE BARROS, 2014).

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (44)$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (45)$$

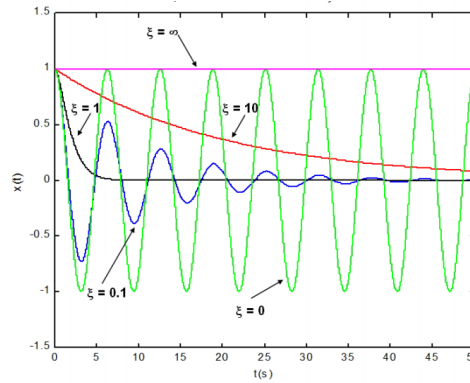
Em posse dessas informações, a Equação 43 pode ser reescrita como na Equação 46.

$$s_{1,2} = -\omega_n\xi \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (46)$$

Em termos de ξ , tem-se que: $\xi > 1$ para amortecimento supercrítico; $\xi = 1$ para amortecimento crítico e $\xi < 1$ para sistema amortecido.

A Figura 9 mostra as respostas esperadas para os casos de amortecimento apresentados. A curva destacada em verde mostra que, na ausência de amortecimento ($\xi = 0$), tem-se o movimento harmônico de frequência ω_n com amplitude constante (esta situação não ocorre em casos reais, já que sempre há dissipação de energia). Os casos amortecidos em que $0 < \xi < 1$ mostrados em azul, costumam ser mais realísticos, em que há um decaimento gradativo que tende a zero, os quais diferem do caso supercrítico ($\xi = 1$), em que se observa decaimento brusco. Por fim, quando o valor do amortecimento é muito elevado ($\xi = \infty$), observa-se que não há movimento do sistema, representado em rosa por uma linha constante (DE BARROS, 2014).

Figura 9- Análise da resposta em vibração livre para diferentes valores de amortecimento



Fonte: (DE BARROS, 2014)

3.2.4 Vibração forçada

Quando a vibração de um sistema ocorre por conta de uma força externa, tem-se o caso de vibração forçada (RAO, 2008). Na vibração forçada, utiliza-se a Equação 39 com a diferença que $f(t) \neq 0$. Assume-se que a função de força pode ser considerada na forma complexa mostrada na Equação 47.

$$f(t) = Fe^{j\omega t} \quad (47)$$

A solução completa (soma da solução geral com a solução particular) é dada pela Equação 48, onde $\beta = \omega/\omega_n$, razão entre a frequência da força e frequência natural amortecida (DE BARROS, 2014).

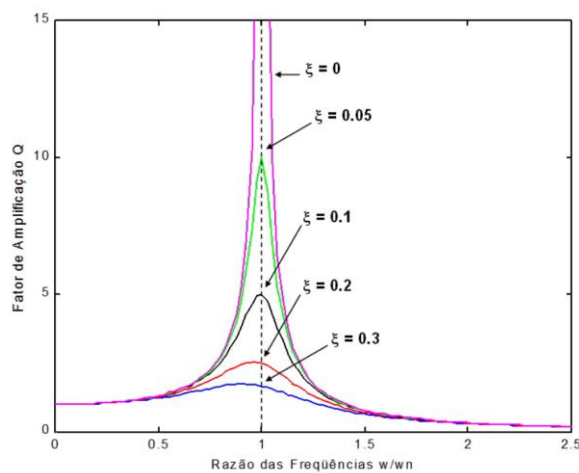
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x(0)\cos(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}) + \frac{\dot{x}(0) + \xi\omega_n x(0)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}) \right] + \frac{F}{K\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{j(\omega t + \theta)} \quad (48)$$

Barros (2014) salienta que, na prática, o termo em colchetes da Equação 48, que refere-se ao regime transiente – solução geral- costuma ser desprezado pelo fato de decair com rapidez, prevalecendo a contribuição do regime permanente, expressa no segundo termo, pela solução particular. Voltando-se a atenção para esta parcela e tendo em vista que F e k são constantes, bem como que a razão F/k também é conhecida por deformação estática do sistema, tem-se o fator de amplificação Q , mostrado na Equação 49 (DE BARROS, 2014).

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (49)$$

Na Equação ressaltase a possibilidade de se obter uma resposta crítica quando há ausência de amortecimento ($\xi = 0$) e quando $\omega = \omega_n$, ou seja, $\beta = 1$. Nestas condições a amplitude cresce indefinidamente, como mostra a Figura 10 (Barros, 2014). Quando alguma das frequências naturais se igualam com frequência da força externa, ocorre o fenômeno de ressonância, que no caso de estruturas e sistemas mecânicos deve ser evitado, pois nesta frequência as oscilações são cada vez maiores, levando à falha da estrutura (RAO, 2008).

Figura 10- Fator de ampliação



Fonte: (DE BARROS, 2014)

3.3 MOLA

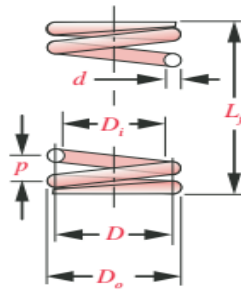
Segundo Norton (2013) pode-se chamar de mola qualquer parte constituída de material elástico. Entretanto, na modelagem de sistemas mecânicos, em geral, o termo mola refere-se a uma peça constituída de um fio metálico (arame) enrolado, cuja sua configuração tem capacidade de armazenar energia potencial, bem como prover um intervalo de força em um espaço significativo de deflexão.

Em sua obra, Norton (2013) cita duas formas para se classificar molas. A primeira, leva em consideração o tipo de carga que é atribuída a ela: tração, compressão ou torção. A segunda, considera a configuração física da mola, podendo se apresentar como: mola helicoidal, mola de barra de extensão, mola de torção, mola de arruela ou de prato, mola de voluta, mola de viga, mola de potência ou motor e mola de força constante.

A mola helicoidal de compressão, com diâmetro circular e diâmetro de espira constante, se apresenta como o modelo mais comum, portanto será o tipo considerado em todas as etapas deste relatório. A Figura 11 mostra os parâmetros dimensionais que são levados em conta em sua construção. O diâmetro do fio é dado por d ; p é o passo das espiras; L_f é o comprimento da mola em seu estado natural; D é o diâmetro médio da mola (Equação 50), sendo obtido pela média entre o diâmetro interno e externo, respectivamente, D_i e D_o (NORTON, 2013).

$$D = \frac{D_i + D_o}{2} \quad (50)$$

Figura 11- Esquema simplificado dos parâmetros dimensionais relevantes para construção de uma mola



Fonte: (NORTON, 2013)

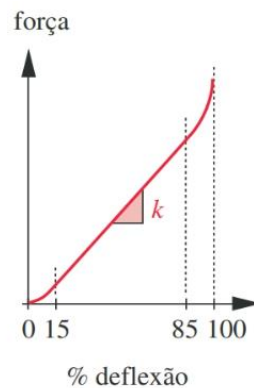
3.3.1 Constante elástica

A constante elástica k se apresenta como uma medida que se refere à rigidez da mola, relacionando o tanto que um mola é capaz de distender em relação ao seu estado natural ao se aplicar uma força. A constante elástica pode ser calculada através da Equação 51 e pela Equação 52, onde d é o diâmetro do fio, G o módulo de cisalhamento do material, D o diâmetro da espira e N_a o número de espiras ativas, F a força aplicada e y a deflexão pela atuação da força. A mola helicoidal de compressão costuma apresentar comportamento linear entre 15% e 85% de sua deflexão total como mostra a Figura 12 (NORTON, 2013).

$$k = \frac{F}{y} \quad (51)$$

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \quad (52)$$

Figura 12- Curva força–deflexão para uma mola de compressão helicoidal



Fonte: (NORTON, 2013)

3.4 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

3.4.1 Densidade absoluta

A densidade absoluta (ρ) é uma propriedade específica de um material, o que torna possível a distinção e identificação do mesmo. A densidade pode ser encontrada pela razão entre a massa e o volume como mostra a Equação 53, tendo como unidade de medida no SI (Kg/m^3) (DE ANDRADE, 2004).

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (53)$$

3.4.2 Módulo de elasticidade (E) e Resistência

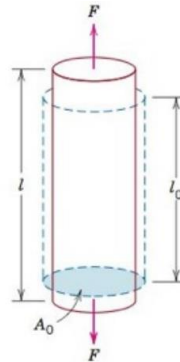
Na Figura 13 observa-se um cilindro sendo tracionado em suas extremidades. Uma vez que a força de cada extremidade é aplicada perpendicularmente à uma área (A_0), pode-se dizer que há uma tensão normal (σ), como mostra a Equação 54 (CALLISTER, 2012). A dimensão l_0 representa o comprimento do cilindro sem aplicação de tensão e l , o comprimento após a tensão ser aplicada. O módulo de elasticidade ou módulo de Young é uma constante que relaciona a tensão aplicada com a deformação de um material (Equação 56), como mostra a Equação 55. Hibbeler (2010) ressalta que a Equação 55 tem validade apenas quando o material tiver comportamento linear elástico, ou seja, que retorna às dimensões iniciais após a aplicação de tensão.

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (54)$$

$$\sigma = E\epsilon \quad (55)$$

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (56)$$

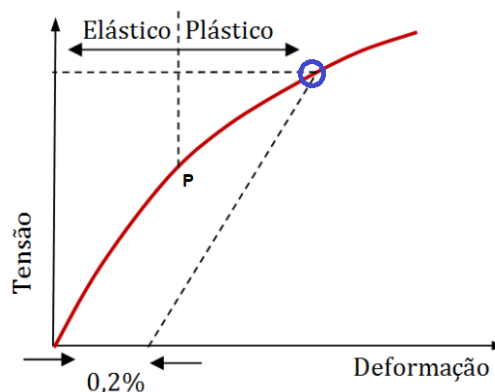
Figura 13- Tensão e módulo de elasticidade



Fonte: (CALLISTER, 2012)

O Módulo de Young pode ser obtido através do coeficiente angular de um gráfico tensão-deformação, como mostra a Figura 14 . Afirma-se, portanto, que quanto maior a inclinação da reta, maior a rigidez do material. O ponto P na Figura 14 refere-se ao limite do escoamento, que mostra a máxima tensão que um material sofre deformação e volta à configuração original. Para valores de tensão maiores aos do limite de escoamento, tem-se a região plástica, caracterizada pela deformação do material após a aplicação de tensão, bem como pelo fato da curva deixar de ser linear (CALLISTER, 2012).

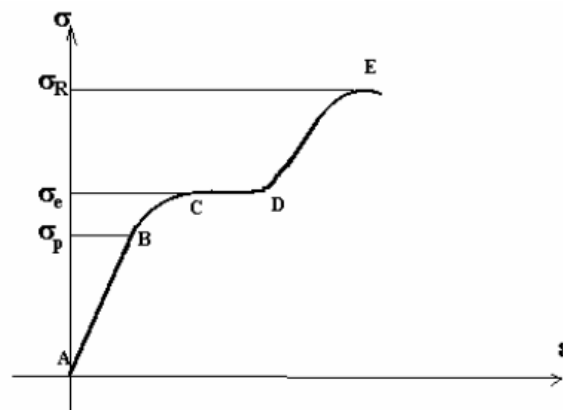
Figura 14- Relação entre módulo de elasticidade e deformação elástica ou plástica



Fonte: Adaptado de (CALLISTER, 2012)

O fenômeno do escoamento pode ser melhor detalhado na Figura 15. A reta AB da Figura 15 equivale ao ponto que vai da origem ao ponto *P* na Figura 14, indicando a proporcionalidade entre tensão e deformação, em que σ_p se refere ao limite do regime elástico. Na curva BC tem-se o fim da proporcionalidade, região na qual o material adentra ao regime plástico, com deformações residuais ainda pequenas, mas reversíveis. Na tensão de escoamento σ_e , o material se desorganiza internamente, uma vez que a deformação é aumentada, mas sem ampliar a tensão ao que ele é submetido. A tensão de escoamento σ_e pode ser calculado graficamente por uma reta paralela à do regime elástico, logo σ_e equivale ao ponto destacado em azul na Figura 14. No trecho CD, também chamado de patamar de escoamento, começam a aparecer falhas no material, invalidando-o. Na curva DE, o material apresenta visíveis deformações residuais até atingir a tensão de ruptura σ_r . Callister (2012), salienta que o material pode ser aproveitado até a tensão de escoamento e que esta pode ser considerada a tensão limite para a maioria dos metais.

Figura 15- Curva tensão deformação e o fenomeno de escoamento



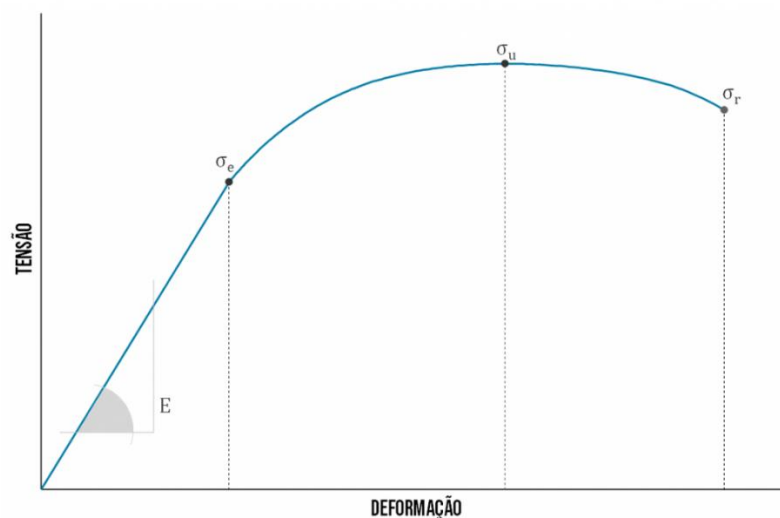
Fonte: (KALIL,2023)

Segundo Ashby (2012), a tensão de escoamento a 0,2% destacada em azul na Figura 14 também é chamada de resistência (σ_f) no caso dos metais. No caso de materiais cerâmicos, a definição de σ_f depende do carregamento, que se estiver sob tração tem-se a resistência à fratura e, sob compressão, a resistência ao esmagamento (σ_t). Para polímeros, σ_f é determinada quando a curva tensão-deformação torna-se não linear.

3.4.3 Tenacidade à fratura

A tenacidade refere-se à capacidade de absorção de energia e de deformação plástica de um material antes de fraturar, ou seja, quando ocorre a separação do corpo em resposta à tensão aplicada, destacado por σ_r (tensão de ruptura) na Figura 16. De forma geral, um material tenaz apresenta alta resistência e ductilidade (capacidade de o material deformar plasticamente até ocorrer a fratura). Para situações em que o material sofre pequenas taxas de deformação, a tenacidade pode ser determinada pela área sob a curva tensão–deformação até o ponto em que ocorre a fratura (σ_r). O ponto σ_u destacado na Figura 16 representa a tensão máxima de uma estrutura sob tração. Se σ_u for aplicada continuamente, o material sofre fratura. Para elevadas taxas de deformação (carregamento dinâmico) ou quando se tem entalhes, determina-se a tenacidade através de ensaios de impacto (CALLISTER, 2012). Ressalte-se que σ_e refere-se a tensão de escoamento discutida no item anterior.

Figura 16- Comportamento de material tracionado até a fratura



Fonte: (MANUAL DE CONSTRUÇÃO DE BARCOS, 2023)

3.4.4 Resistividade elétrica

A resistividade elétrica é a propriedade que indica o quanto um material se opõe a passagem de corrente elétrica, sendo o oposto da condutividade, que refere-se a facilidade de um material conduzir corrente elétrica. Segundo Ashby (2012) bons condutores (metais em geral) apresentam resistividade em torno de $10^{-8} \Omega.m$, enquanto que materiais isolantes, que não conduzem bem a eletricidade (também chamados de isolante), chegam aos valores de $10^{16} \Omega.m$. Nos metais, a resistividade tende: a aumentar linearmente com o aumento da temperatura; variar com a presença de impurezas no metal e aumentar quando ocorre deformação plástica (CALLISTER, 2012).

3.5 METODOLOGIAS PARA SELEÇÃO DE MATERIAIS

3.5.1 Método de Ashby

A metodologia desenvolvida pelo engenheiro Michael Ashby apresenta-se como uma ferramenta para a seleção de materiais, caracterizada pela utilização Diagramas de Propriedades de Materiais (DPM), os quais oferecem uma visão geral das propriedades funcionais dos materiais de forma compacta e otimizada, facilitando a comparação e a escolha de um material ao se levar em conta os requisitos de projeto (SOUZA, 2020).

A Figura 17 mostra as famílias de materiais adotadas na metodologia de Ashby : metais, polímeros, elastômeros, cerâmicas, vidros e híbridos. Os membros de uma família de materiais são agrupados por possuírem propriedades, rotas de processamento e aplicações semelhantes (ASHBY, 2012).

Figura 17- Classificação das famílias de materiais adotadas na metodologia Ashby

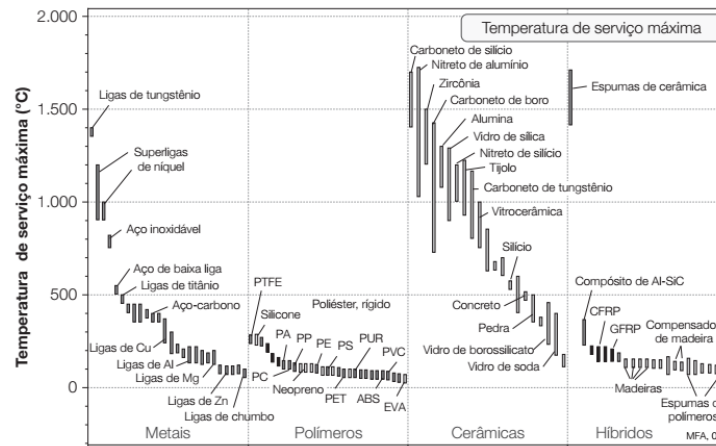


Fonte: (ASHBY, 2012)

Existem dois tipos de DPMS: diagramas de barras e diagramas de balões. O primeiro representa graficamente apenas uma propriedade para todos os materiais existentes, como mostra o exemplo da Figura 18, em que o comprimento de cada barra mostra a faixa de valores para a temperatura máxima de serviço de cada material. O segundo, é caracterizado por relacionar duas propriedades mecânicas, como mostra a Figura 19, em que a densidade é representada no eixo horizontal e o Módulo de Young no eixo vertical. Em ambos os casos a análise pode ser feita tanto de uma forma mais geral considerando grandes grupos (família de materiais) como por exemplo os metais, bem como, de uma maneira mais específica, como por exemplo as ligas metálicas que são subgrupos (SOUZA,2020).

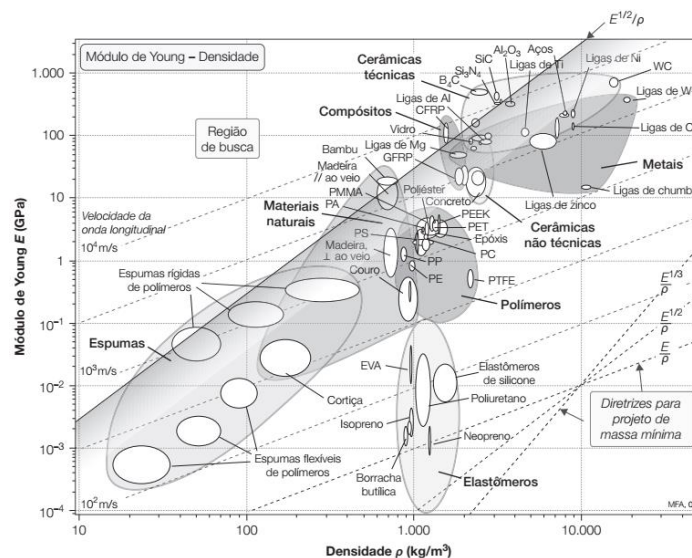
Outro fator comum presente em ambos os tipos de diagramas citados acima está no fato da representação ser em escalas logarítmicas. Isto ocorre por conta da enorme diferença da faixa de valores característica dos materiais. Considerando como exemplo a propriedade de Módulo de Young, os metais e cerâmicas possuem altos valores, enquanto que os dos polímeros são 50 vezes menores e os os elastômeros aproximadamente 500 vezes. A adoção da escala linear inviabilizaria a exposição de diferentes grupos de materiais em um mesmo diagrama (SOUZA, 2020).

Figura 18- Exemplo de digrama de barras da metodologia proposta por Ashby



Fonte: (ASHBY, 2012)

Figura 19- Exemplo de digrama de balões da metodologia proposta por Ashby



Fonte: (ASHBY, 2012)

3.5.2 Matriz de decisão

A matriz de decisão é um método que auxilia o projetista a identificar a melhor opção de escolha quando se tem uma ampla variedade de fatores a serem considerados num projeto. Ainda que seja um método essencialmente subjetivo, o objetivo é fazer uma comparação entre as possíveis soluções, confrontando-se as características do projeto com os critérios de base da escolha. A matriz separa o problema em partes menores, que são mais fáceis de serem avaliadas quantitativamente, exigindo que o projetista pondere o valor relativo em categorias diferentes para cada solução (NORTON, 2011).

A matriz é estruturada colocando-se os parâmetros na linha superior e as possíveis soluções na primeira coluna. Todas as soluções são julgadas em relação a cada parâmetro, atribuindo-se uma nota de 0 a 10. Para cada parâmetro, é atribuído um fator de ponderação de acordo com a sua importância relativa no projeto (por exemplo, em projetos com verba limitada, o custo teria um fator maior que o desempenho). A Figura 20 mostra um exemplo retirado do livro Norton (2011). Os valores em rosa nas diagonais inferiores das células da matriz, referem-se a multiplicação da nota atribuída pelo fator de ponderação. Somando-se esses valores para cada linha, obtém-se a nota total de cada solução estipulada (NORTON, 2011). A solução com maior nota total tende a ser a melhor escolha para se adotar.

Figura 20- Exemplo de matriz de decisão

	<i>Custo</i>	<i>Segurança</i>	<i>Desempenho</i>	<i>Confiança</i>	<i>TOTAL</i>
<i>Fator de ponderação</i>	0,35	0,30	0,15	0,20	1,0
<i>Projeto 1</i>	3 1,05	6 1,80	4 0,60	9 1,80	5,3
<i>Projeto 2</i>	4 1,40	2 0,60	7 1,05	2 0,40	3,5
<i>Projeto 3</i>	1 0,35	9 2,70	4 0,60	5 1,00	4,7
<i>Projeto 4</i>	9 3,15	1 0,30	6 0,90	7 1,40	5,8
<i>Projeto 5</i>	7 2,45	4 1,20	2 0,30	6 1,20	5,2

Fonte:(NORTON, 2011).

3.6 PROCESSOS DE FABRICAÇÃO

A manufatura ou fabricação pode ser definida como o emprego de processos químicos e/ou físicos para modificar as propriedades, aparência e a geometria de um material visando a produção de produtos ou peças. Nos processos de fabricação pode haver combinação do emprego de ferramentas, máquinas e mão de obra, bem como a montagem de vários objetos para formar um único produto final (GROOVER,2014).

Existem duas abordagens para a criação de peças adotadas pela indústria manufatureira: aditiva e subtrativa. No método subtrativo a peça final é obtida por meio da remoção de material de um bloco sólido (exemplos desta abordagem são o torneamento e a fresagem). Esta vertente apresenta como vantagem precisão e melhor acabamento, mas também gera material

sobressalente (resíduo) durante os processos, resultando na perda de energia e de material. No método aditivo a peça é construída pela sobreposição de camadas, sendo a impressão 3D um exemplo desta abordagem. Apresenta a vantagem de permitir a construção de peças complexas e agiliza a prototipagem, mas requer mais tempo do que a manufatura subtrativa, bem como tende a apresentar baixa qualidade no acabamento superficial (GROOVER,2014).

3.6.1 Carpintaria e Marcenaria

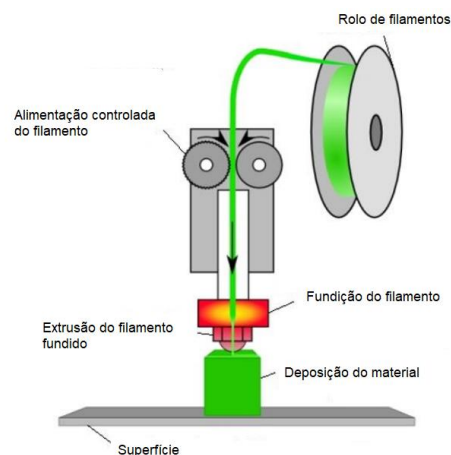
A carpintaria refere-se ao processo de fabricação que abrange o lavramento e aparelhamento de madeira para qualquer obra, bem como construções de madeira em geral. Caracterizado pela confecção de peças voltadas para produção industrial, onde a atenção é mais voltada para estrutura e sua funcionalidade como utensílios de lavoura, janelas e portas, por exemplo. Os carpinteiros podem trabalhar em colaboração com os ferreiros, dedicando-se à construção da parte de madeira, enquanto os segundos voltam sua atenção à moldagem do ferro presente na peça (BRANCO & VERBSTI, 2018).

A marcenaria é o processo de fabricação voltado para confecção de móveis e objetos de madeira, diferenciando-se da carpintaria pelo fato de se tratar de peças mais delicadas e com cunho artístico. Exemplos de instrumentos utilizados são: grampos, prensa, suta (esquadro regulável que permite verificar ângulo de qualquer grau), graminho (permite traçar medidas exatas), esquadro, régua, compasso, torquez (instrumento que retira pregos), pregos, parafusos, serras, raspadeira, formão (confecção de ranhuras e entalhes), goiva (abertura de côncavos), verruma (permite fazer pequenos furos na madeira), pua (inserção de furos maiores na madeira), riscador e lixa (RIBEIRO,1950).

3.6.2 Manufatura aditiva

A norma ISO/ASTM 52900:2015 define a manufatura aditiva como um processo de agregação de materiais, cuja a sobreposição de camadas, formam um objeto com base em modelo computacional em 3D (ISO, 2023). A modelagem de deposição fundida (do inglês Fused deposition modeling - FDM) se apresenta como o tipo de impressão 3D mais popular, consistindo no pré-aquecimento de filamentos de polímeros em geral Acrilonitrila butadieno estireno (ABS), poliácido láctico (PLA) e Nylon ou metal, que posteriormente são direcionados a um cabeçote extrusor que deposita o material fundido de forma controlada em uma superfície. Ressalta-se que tanto o cabeçote extrusor quanto a superfície podem ser fixas ou móveis, permitindo três possibilidades: cabeçote extrusor fixo e superfície móvel, cabeçote extrusor móvel e superfície fixa ou ambos móveis (MOREIRA, 2016). A Figura 21 mostra o esquema de funcionamento.

Figura 21- Esquema de funcionamento de uma impressora 3D (FDM)



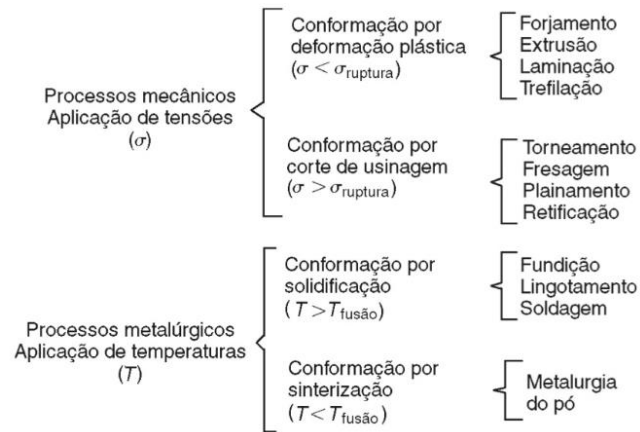
Fonte: Adaptado de (MOREIRA, 2016)

3.6.3 Conformação de metais

Chama-se de conformação de metais a transformação de um corpo metálico para outra forma definida. Este processo pode ser dividido em dois grupos: processos mecânicos ou metalúrgicos. O primeiro é caracterizado pelo fato das modificações serem provocadas por conta de aplicação de tensões externas, enquanto que no segundo as modificações decorrem devido a utilização de altas temperaturas. A Figura 22 mostra de forma esquemática a divisão. Nos subitens 3.6.3.1 e 3.6.3.2 serão discorridas mais informações a conformação plástica e a

usinagem, por serem os processos mais plausíveis a serem adotados no projeto (GARCIA & DOS SANTOS, 2012).

Figura 22- Processos de conformação dos metais e suas subdivisões



Fonte: (GARCIA & DOS SANTOS, 2012)

3.6.3.1 Conformação plástica

Segundo Miranda (2012) os processos de conformação plástica estão presentes na confecção de mais de 80% de todos os produtos metálicos (podendo ser submetidos a um ou mais processos de conformação). Este segmento apresenta duas subdivisões: conformação volumétrica e conformação de chapas. O primeiro engloba os processos de laminação, forjamento, extrusão e trefilação, os quais têm a característica de sofrer grandes deformações para formar a peça. Neste caso, tem-se uma pequena relação entre a área superficial e o volume da peça. O segundo, pode ser exemplificado pelos processos de dobramento, estampagem e corte, que ao contrário da conformação volumétrica possui grande razão entre área superficial e o volume do esboço de partida. Basicamente, se trata de mudanças de forma para bobinas, tiras e chapas, bem como operações de corte (GROOVER, 2014).

3.6.3.1 Usinagem

A usinagem consiste em um conjunto de operações que conferem às peças—produzidas por fundição, laminação ou forjamento—melhorias no acabamento superficial, aumento da tolerância dimensional e confecção de entalhes complexos. Agostinho, Villela & Button (2004), salientam a possibilidade da obtenção de reentrâncias, furos rosqueados, saliências e furos passantes por meio dos processos de usinagem, o que permite a confecção de pinos, rodas

dentadas, eixos e válvulas, por exemplo. São exemplos de operações: a furação, o aplainamento, o fresamento, o serramento, o brochamento, o mandrilamento e o roscamento.

3.7 SOLDAGEM

A soldagem é um processo utilizado na união de peças no qual duas ou mais peças têm suas superfícies unidas pela aplicação de calor e/ou pressão. A soldagem pode ser classificada tanto pelo processo físico empregado (soldagem por fusão, pressão, brasagem, por exemplo), quanto pelo tipo de fonte de energia (soldagem que empregam fontes químicas, energia mecânica ou eletricidade, por exemplo) (GROOVER, 2014).

A soldagem fornece uma união permanente, se apresentando como uma maneira econômica de unir componentes quando se trata de custo de fabricação e de utilização de material. Quanto às desvantagens e limitações deste processo, pode-se citar: alto custo de mão de obra por exigir experiência do operador, uso de alta energia e redução da resistência do local da área soldada (GROOVER, 2014).

3.8 METODOLOGIA SOWT

A análise SWOT se trata de uma metodologia que permite descobrir a posição estratégica de uma organização dentro do seu ambiente competitivo (GALVÃO, 2008). Consiste em levantar as forças (Strengths), Fraquezas (Weaknesses), Oportunidades (Opportunities) e Ameaças (Threats). As forças e as fraquezas são consideradas em relação a aspectos internos da organização, enquanto que as oportunidades e ameaças referem-se a fatores externos. Ainda, o conjunto de forças e oportunidades mostram os fatores que auxiliam a atingir o objetivo, enquanto que as ameaças e fraquezas atrapalham. A Figura 23 mostra o exposto.

Figura 23- Diagrama da matriz SWOT



Fonte: (SCOPI, 2023)

4 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho foi sua divisão em cinco atividades principais, cada uma com objetivos e metodologias específicas. A primeira, descrita na seção 4.1, consiste na escolha de molas e no levantamento de suas constantes elásticas através de simulações no software ANSYS 2023R2. A segunda, apresentada na seção 4.2 se trata da linha de raciocínio em que o peso, dimensão, material e processo de fabricação das massas foram encontradas a partir de valores das constantes elásticas das molas, utilizando-se as frequências naturais de um código elaborado em MATLAB como parâmetro para os valores máximos. Na terceira, exposta na seção 4.3, fez-se o estudo contrário: os valores das massas foram considerados fixos e determinaram-se as constantes elásticas pertinentes. Na seção 4.4, foi realizada uma simulação em ANSYS 2023R2 de um caso específico, a fim de comparar as frequências naturais provenientes do código em MATLAB com as obtidas na simulação tridimensional no ANSYS 2023R2. Por fim, na seção 4.5 foi proposto um modelo de suporte.

4.1 ESCOLHA DAS MOLAS

Para garantir que fosse possível fabricar as molas projetadas, foram utilizados como parâmetros as dimensões propostas no site da loja virtual Casa das Molas, a qual apresentava diversos tipos de molas (compressão, torção, tração, cônica e de prato), com várias combinações distintas de parâmetros dimensionais de: comprimento, passo, diâmetro de arame, diâmetro médio e material do arame.

Foi estipulado que deveriam ser escolhidos três tipos de mola, com três valores de constantes elásticas (k) distintas. A primeira estratégia consistiu em adotar os parâmetros mostrados no catálogo comercial da loja, para a primeira e última mola listadas, para verificar qual a faixa de variação dos valores da constante elástica na gama de molas oferecidas. Posteriormente, seria adotado um valor intermediário. Porém, a ideia em questão não se mostrou viável, pois para cada mola, os parâmetros dimensionais variavam de forma aleatória, ou seja, seria possível obter um mesmo valor de constante k , alterando-se o valor do diâmetro do arame, número de espira e diâmetro externo, como foi discutido na Equação 52.

Uma vez que se tratava de um aparato experimental para laboratório, o tamanho deste como um todo, tem influência na construção, visto que um aparato grande demais poderia não caber no laboratório. Estipulou-se, portanto, que o aparelho não teria comprimento maior de 1,5 metro. Portanto, a segunda estratégia consistiu em adotar o comprimento das molas como

parâmetro de escolha: molas muito pequenas (comprimento mínimo encontrado 6,5 mm) e molas muito grandes (comprimento máximo encontrado 94,30 mm) não se mostraram razoáveis, a primeira por ser mais difícil de manipular e provavelmente quebrar com mais facilidade e a segunda, por tomar muito espaço no aparato.

Por fim, ficou estabelecido que seriam feitas simulações das constantes elásticas de molas com comprimento de 100 mm, 120 mm e 150 mm, cujo material fosse em aço carbono, por conta de ser mais barato e ter suas configurações pré-definidas no software de simulação. A Tabela 1, mostra a relação das molas escolhidas para a simulação, bem como seus parâmetros, sendo: d o diâmetro do fio; p o passo das espiras; L_f o comprimento da mola em seu estado natural; D é o diâmetro médio da mola; D_i o diâmetro interno; D_o o diâmetro externo e N_a o número de espiras.

Tabela 1- Molas escolhidas para realizar simulação e seus respectivos parâmetros dimensionais

Código	D_o	D_i	D	d	L_f	p	N_a
403	4,2	3,2	3,7	0,5	100	1,8	56
402	6	5,2	5,6	0,4	100	2,4	42
2646	9,1	7,1	8,1	1	100	2,3	43
1324	19,1	16,1	17,6	1,5	100	5,5	18
2470	19,5	13,9	16,7	2,8	100	7,3	14
2502	22	15,6	18,8	3,2	100	6,1	16
2725	42	32	37	5	100	15	7
2766	46,2	41,2	43,7	2,5	100	20,5	5
404	5,3	4,4	4,85	0,45	120	2,15	56
2665	9,2	7,2	8,2	1	120	3,2	38
770	28	20	24	4	120	4,4	14
2292	13,2	9,4	11,3	1,9	150	5,1	29
2464	32,1	19,1	25,6	6,5	150	12,7	12

Fonte: (CASA DAS MOLAS, 2023)

4.1.1 Simulação de molas e constantes elásticas

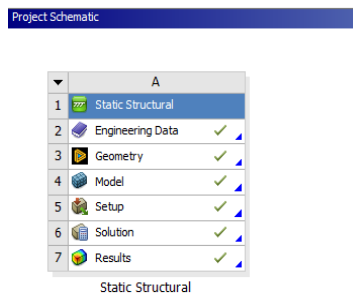
Cada uma das molas mostradas na Tabela 1, foram simuladas no software ANSYS 2023R2. Para todos os casos foi utilizado o módulo de análise “Static Structural”, uma vez que efeitos dinâmicos podem ser desprezados para obtenção das propriedades requeridas.

Nos itens entre 4.1.1.1 e 4.1.1.6 são mostrados passo a passo o procedimento realizado para simular as molas, adotando-se como exemplo o modelo com código 403 da Tabela 2. A explicação minuciosa tem como objetivo deixar um tutorial que estimule e auxilie os leitores a replicarem a simulação, a qual com um pouco de prática, pode se tornar uma ferramenta para complementar estudos.

De forma geral, as simulações no software ANSYS passam pelas etapas destacadas na Figura 24. O aparecimento dos ícones em verde indica que as etapas foram feitas corretamente e que os parâmetros necessários foram preenchidos. Entre as etapas, elenca-se:

- Definição do material (*Engineering Data*): o material do objeto a ser definido é especificado, bem como suas propriedades.
- Geometria (*Geometry*): desenha-se o objeto ou parte aos quais serão feitos a verificação de determinado efeito;
- Malha (*Model*): faz-se a discretização do objeto ou da parte a ser simulada, ou seja, a superfície é dividida em pequenas seções nas quais o software faz cálculos, que resultarão na simulação;
- Configuração das condições de contorno (*setup*): são definidas as condições iniciais de posição, as forças aplicadas no sistema, bem como a orientação e sentido delas;
- Solução (*Solution*): são definidas quais as variáveis físicas que serão calculadas e mostradas no objeto de estudo, neste caso em específico, a deformação.
- Resultados (*Results*): o comportamento da variável física é mostrado visualmente com distinção de cores que associam os menores e maiores valores, para o objeto em estudo.

Figura 24- Etapas do Workbench



Fonte: Do autor, 2023

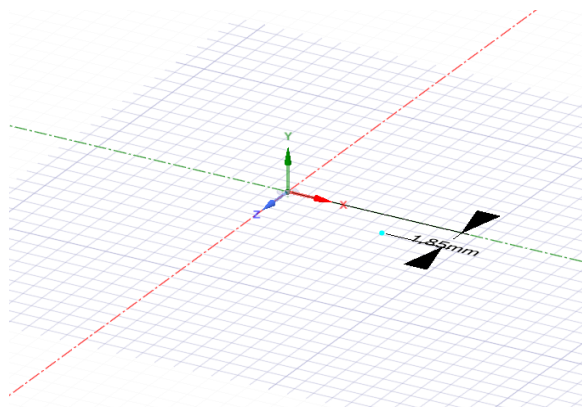
4.1.1.1 Definição do Material

Como discutido anteriormente, o material escolhido foi o aço carbono. No item “*Engineering Data*” do *WorkBench* apenas foi verificado se o material não sofreu alteração, visto que o software tem o aço carbono como material padrão (*default*).

4.1.1.2 Construção da geometria

As geometrias foram desenhadas no software SpaceClaim, um módulo de CAD (do inglês computer aided design) especializado em desenho de geometrias degeneradas utilizadas em análises de elementos finitos via o comando “New SpaceClaim Geometry”. O primeiro passo consistiu em colocar um ponto no plano x e determinar a dimensão do raio médio (0,5D) como mostra a Figura 25.

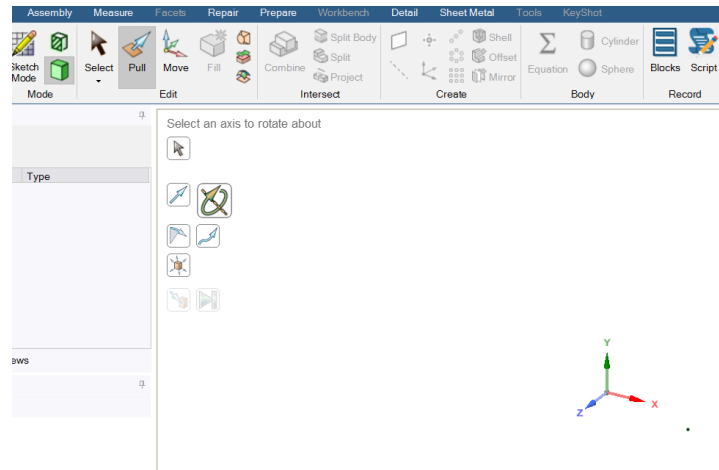
Figura 25- Determinação do raio da mola



Fonte: Do autor, 2023

Para sair do esboço, foi selecionado o botão “*End Sketch Editing*” e após, deu-se um clique no botão “Select”. Na aba “Desing”, clicou-se no botão ícone “Pull” e, por conseguinte, no ícone de revolução destacado na Figura 26.

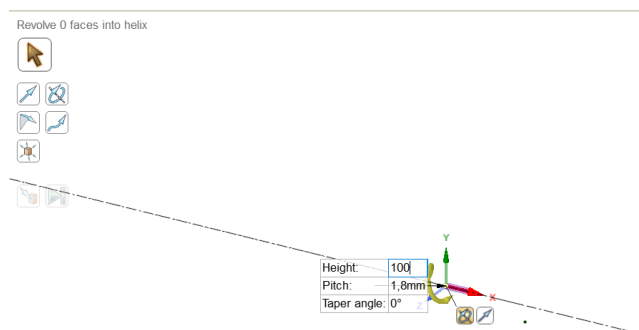
Figura 26- Construção da mola no ANSYS



Fonte: Do autor, 2023

Selecionou-se o eixo x e a opção no lado esquerdo “Revolve Helix” foi habilitada. Automaticamente, apareceram campos para serem preenchidos com o valor do passo e do comprimento. Ao longo das simulações, notou-se que a forma mais fácil para executar esta parte, consistia em inserir o valor do passo (no exemplo adotado 1,8 mm) e apertar Enter no teclado e, posteriormente, selecionar o ponto colocado no plano e inserir o valor do comprimento (no caso, 100 mm). A Figura 27 ilustra o exposto.

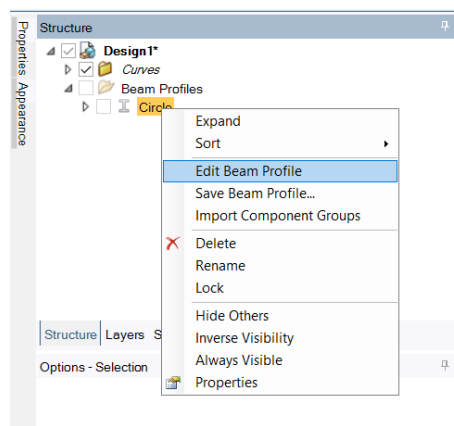
Figura 27- Inserção do passo e comprimento da mola



Fonte: Do autor, 2023

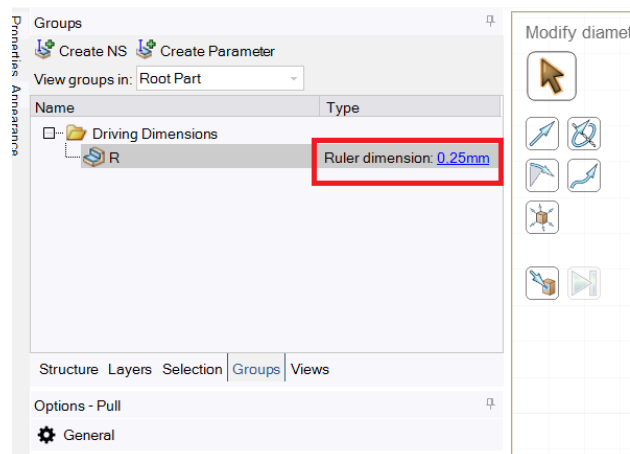
Ao apertar a tecla “Enter” do teclado novamente, um esboço da mola aparecia. Para determinar o formato e tamanho do arame, clicou-se no menu “*Prepare*”, posteriormente no ícone “*Profile*” e selecionou-se a opção de círculo completamente preenchida para todos os casos. À esquerda, selecionou-se a opção “*Structure*” (Figura 28). Ao clicar na opção “*Beam Profile*”, a opção de perfil escolhida foi exibida (no caso, círculo). Clicando-se com o botão direito em “*Edit Beam Profile*”, foi possível alterar o diâmetro do arame clicando-se em “*Ruler Dimension*” e alterando-se o valor (no caso, 0,25 mm), como mostra a Figura 29.

Figura 28- Como alterar as configurações do diâmetro do arame



Fonte: Do autor, 2023

Figura 29- Alteração de dimensão do arame

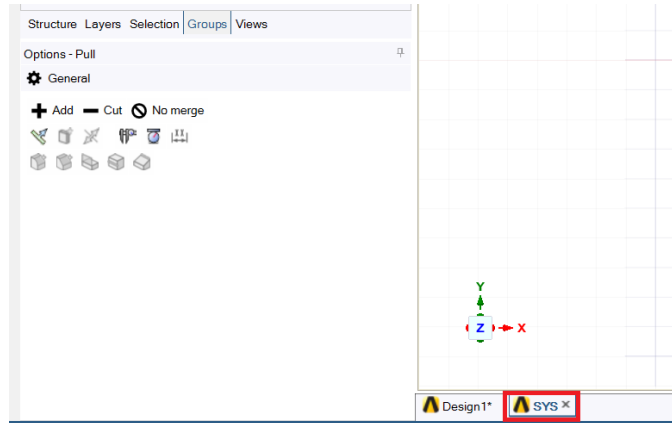


Fonte: Do autor, 2023

Com as alterações feitas, pôde-se fechar a janela na barra inferior como mostra a Figura 30. Para conferir se a geometria ficou correta, ainda no menu “*Prepare*” clicou-se em “*Display*” e após em “*Solid Beams*”. Ao clicar na mola, a mesma aparecia com o arame desenhado em toda a sua extensão, como mostra a Figura 31. Com a geometria pronta, a janela “*geometry*”

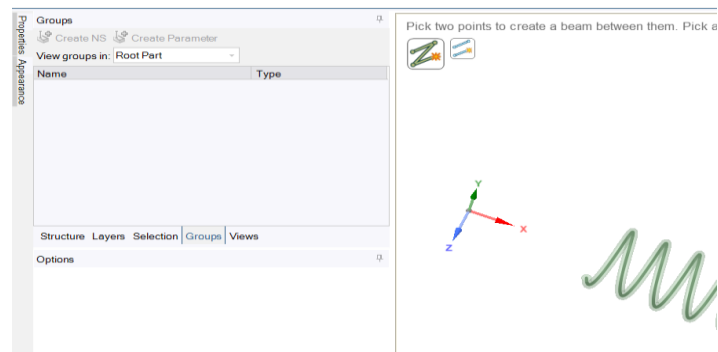
podia ser fechada e voltou-se ao *WorkBench*.

Figura 30- Local para fechar a aba



Fonte: Do autor, 2023

Figura 31- Estrutura do arame desenhada no esboço da mola

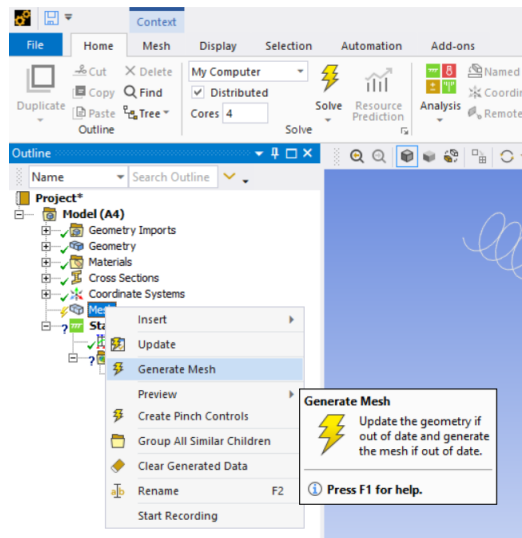


Fonte: Do autor, 2023

4.1.1.3 Geração da malha

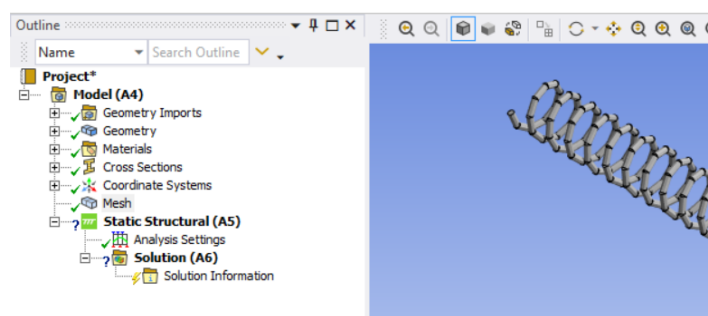
No *WorkBench* clicou-se na opção “*Mesh*”. Para todos os casos, utilizou-se a malha pré-estabelecida pelo software. Desta forma, clicou-se com o botão direito no item “*Mesh*”, mostrado na árvore de projeto da Figura 32, e posteriormente, em “*Generate Mesh*”. A Figura 33 mostra a malha gerada.

Figura 32- Gerar malha preestabelecida no ANSYS



Fonte: Do autor, 2023

Figura 33- Malha gerada



Fonte: Do autor, 2023

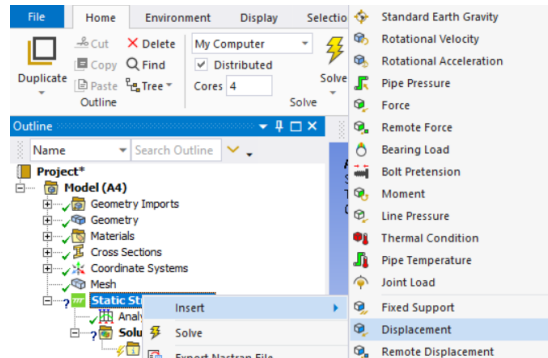
4.1.1.4 Definição das condições de contorno

Para todos os casos foram feitas as seguintes considerações:

1. A extremidade próxima à origem é engastada (*Fixed support* ou fixa e sem deslocamento);
2. A mola se movimenta única e exclusivamente no eixo x , para isso condições de deslocamento nulo em y e z foram impostas;
3. Aplica-se força de tração (positiva na direção x) de 100 N na extremidade mais afastada da origem.

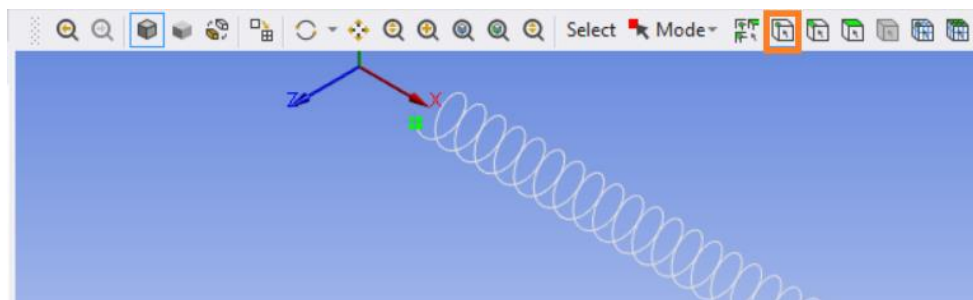
Na consideração 1, clicou-se como o botão direito em “*Static Structural*”, selecionou-se o botão “*Insert*” e após a opção *Displacement* (Figura 34). Após clicar no ícone de vértice, destacado em laranja na Figura 35 a extremidade próxima à origem foi selecionada.

Figura 34- Acesso ao botão “Displacement”



Fonte: Do autor, 2023

Figura 35-Como selecionar uma extremidade



Fonte: Do autor, 2023

Selecionou-se o botão “Apply”. Para as três direções, x, y e z, foram colocadas deslocamento em 0 para satisfazer a condição de extremidade fixa, como mostra a Figura 36.

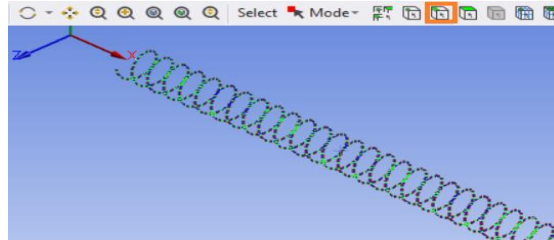
Figura 36- Condição de contorno para extremidade fixa

Details of "Displacement"	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Vertex
Definition	
Type	Displacement
Define By	Components
Coordinate System	Global Coordinate System
☐ X Component	0, m (ramped)
☐ Y Component	0, m (ramped)
☐ Z Component	0, m (ramped)
Suppressed	No

Fonte: Do autor, 2023

Para a condição 2, fez-se o mesmo procedimento mencionado para a Figura 34 e Figura 35. Porém, selecionou-se o ícone de seleção de linha (destacado em laranja na Figura 37), após, clicou-se um qualquer local da extensão da mola. Selecionou-se “Apply”.

Figura 37- Seletor de linha



Fonte: Do autor, 2023

Uma vez que o movimento deveria ser realizado apenas no eixo x, este foi colocado como “Free”, enquanto y e z foram zerados, como mostra a Figura 38.

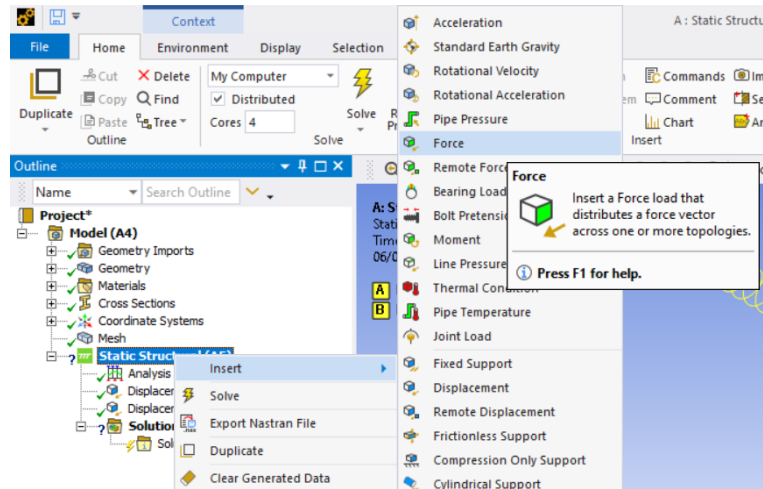
Figura 38- Condição de contorno para definir eixo de movimento da mola

Details of "Displacement 2"	
Scope	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Edge
Definition	
Type	Displacement
Define By	Components
Coordinate System	Global Coordinate System
X Component	Free
☐ Y Component	0, m (ramped)
☐ Z Component	0, m (ramped)
Suppressed	No

Fonte: Do autor, 2023

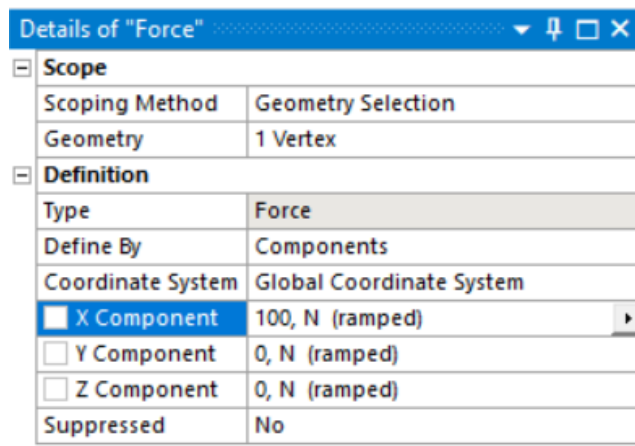
Para a condição 3, fez-se o mesmo procedimento mencionado para a Figura 34 e Figura 35. Entretanto, na opção “Insert” foi selecionado “Force” e selecionou-se a extremidade mais distante da origem, mais precisamente, onde a força é aplicada. A Figura 39 e a Figura 40 mostram as configurações.

Figura 39- Inserção da entrada (Força)



Fonte: Do autor, 2023

Figura 40- Definição do módulo da força aplicada

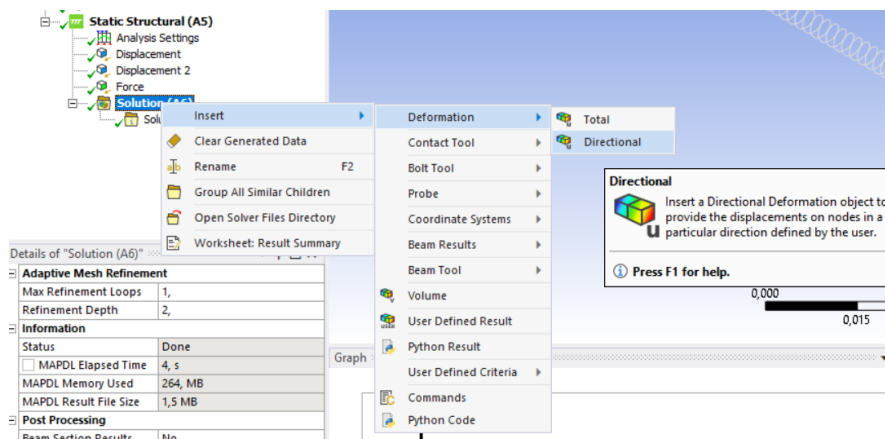


Fonte: Do autor, 2023

4.1.1.5 Solução

Em “*Solution*”, clicou-se em “*Insert*”, a seguir em “*deformation*” e posteriormente em “*Total*” como mostra a Figura 41. Após, clicou-se em *Solve*, para inicializar a simulação.

Figura 41- Determinação da variável física de saída (Deformação)



Fonte: Do autor, 2023

4.1.1.6 Resultados

Das simulações realizadas foram obtidos os valores máximos de deslocamento para cálculo da constante elástica, como foi mostrado anteriormente na Equação 51.

4.2 DETERMINAÇÃO DE MASSAS A PARTIR DE CONSTANTES ELÁSTICAS PRÉ-DEFINIDAS

Para determinar o valor mínimo e máximo das três massas presentes no sistema, foi utilizado um código implementado no software MATLAB 2023b, que consta no Apêndice A. Em relação às variáveis de entrada, foram declarados: três constantes elásticas - escolhidas após as simulações – (k_1, k_2, k_3); três valores para as massas (m_1, m_2, m_3); três valores para os deslocamentos iniciais das massas; a matriz M e a matriz K, destacadas nas Equações 10 e 11. Ao final do código foram implementadas três funções- impulso, que se referem às forças de entrada aplicadas a cada uma das massas e a função matriz de estado.

4.2.1 Análise em frequência – modos de vibrar e frequências naturais

A primeira análise foi realizada através da função *eig*, a qual retorna os autovalores que fornecem frequências naturais (ω_n) do sistema tendo como entrada as matrizes M e K. Foi estipulado que os autovalores deveriam ser $0 < \omega_n < 100 \text{ Hz}$. Para cada uma das combinações mostradas na Tabela 2, foram atribuídos valores para as massas m_1 , m_2 e m_3 (sempre o mesmo valor para as três), testando-se qual o valor mínimo que satisfazia a condição para ω_n e também,

para as massas em 10 Kg e 20 kg, para se ter um parâmetro de como ω_n variava ao aumentá-las.

Tabela 2- Combinações possíveis para posicionamento das molas (constantes em N/m)

Combinação de molas	k_1	k_2	k_3
1	256970.32	256970.32	256970.32
2	256970.32	32702.18	721.86
3	256970.32	721.86	32702.18
4	32702.18	32702.18	32702.18
5	32702.18	256970.32	721.86
6	32702.18	721.86	256970.32
7	721.86	721.86	721.86
8	721.86	32702.18	256970.32
9	721.86	256970.32	32702.18

Fonte: Do autor, 2023

4.2.2 Análise das frequências pelo método Runge Kutta

O espaço de estados determinado pela Equação 13, foi implementado em um script no MATLAB, a qual foi resolvida numericamente pela função ode45, com tempo de simulação em 10 s, número de discretização de pontos igual a 1000, todos os deslocamentos e velocidades iniciais iguais a 0, bem como, $m_1 = m_2 = m_3 = 2 \text{ kg}$ para todos os casos da Tabela 2. O código foi executado três vezes para cada combinação de molas, aplicando-se a força de entrada, respectivamente, em m_1 , m_2 e m_3 .

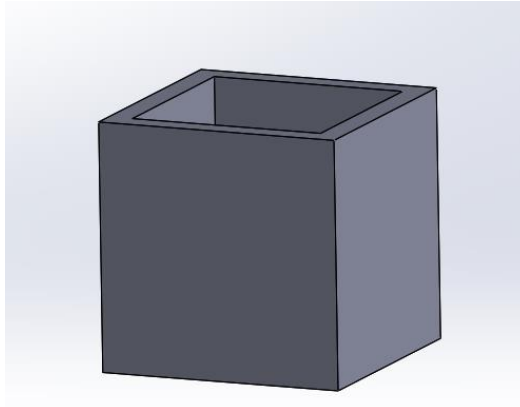
Posteriormente, foi aplicada a transformada de Fourier para passar os gráficos, antes resolvidos em função do tempo para o domínio da frequência e fez-se análise visual (qualitativa) dos casos que apresentavam os picos de ressonância bem destacados para os três valores de ω_n calculados.

4.2.3 Escolha do formato da massa

Por simplicidade de construção, optou-se por fazer a construção de um cubo oco com 5 faces. O lado aberto tinha a finalidade de permitir que os discentes adicionassem ou retirassem massa (bolinhas de chumbo, sacos de areia), para verificar as alterações no sistema. A Figura 42, mostra um modelo genérico que, após a determinação do seu material e processo de

fabricação, seria adotado na simulação do sistema.

Figura 42- Formato genérico das massas m_1 , m_2 e m_3 , desenhado em CAD



Fonte: Do autor, 2023

4.2.4 Escolha dos processos de fabricação e material das massas

Preço, facilidade de fabricação e disponibilidade de estabelecimentos e/ou possibilidade de executar o processo de fabricação, foram os três parâmetros cruciais para a escolha do material das massas. Sendo assim, marcenaria, impressão 3D e conformação mecânica foram as possibilidades levantadas, uma vez que atendiam os requisitos estabelecidos. Para cada um dos processos, foram destacados os materiais mais usuais e realizada uma pesquisa de preço na internet.

Foi criada uma matriz SWOT para cada processo de fabricação, com o intuito de mostrar de forma esquemática as vantagens e desvantagens de todos eles. Foram considerados como fatores externos as limitações e ganhos em relação à universidade; para os fatores internos foram consideradas as limitações e possibilidades pertinentes à autora deste relatório no que tange à distância geográfica, disponibilidade financeira e tempo para acompanhar o processo.

Para a escolha de materiais, utilizou-se a matriz de decisão proposto por (NORTON, 2011) colocando-se os materiais mais usuais levantados anteriormente como “possíveis soluções” na primeira coluna e substituindo-se os parâmetros pelas propriedades mecânicas cabíveis na linha superior, no exemplo destacado no item 3.5.2. Quanto ao fator de ponderação, as escalas de 0 a 5 e de 0 a 11, propostas pelo método de Pahl e Beitz, citados por (VENTURA, 2018) e (PAIVA, 2023). Neste relatório foi utilizada a escala de 0 a 5 por conta da simplicidade. A Tabela 3 mostra o significado dos pesos segundo (PAIVA, 2023).

Tabela 3- Escala de peso e seus significados

Peso	Significado
0	Insatisfatório
1	Tolerável
2	Adequado
3	Bom
4	Muito Bom
5	Excelente

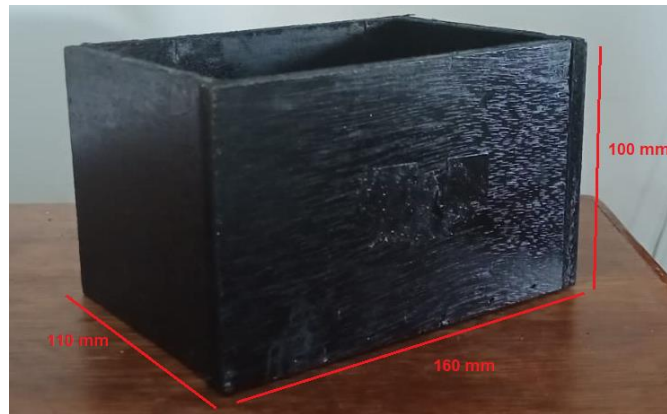
Fonte: (PAIVA, 2023)

Posteriormente, foi elaborada uma matriz de decisão baseada na proposta de Pahl e Beitz, adotando-se 5 parâmetros para a comparação: Custo, corrosão, tenacidade à fratura e resistência. Respectivamente, o peso a cada um deles foi atribuído como: 5, 4, 3, 2. Utilizando os mapas da metodologia proposta por Ashby, mostrados entre a Figura 52 e a Figura 55, foram atribuídas notas de 0 a 10 para cada material em relação a cada um dos parâmetros. O material com maior nota na média ponderada foi considerado para construir as massas.

4.3 DETERMINAÇÃO DE CONSTANTES ELÁSTICAS COM VALOR FIXO DE MASSA

No mesmo período em que foi iniciada a pesquisa sobre a melhor forma de construir as caixas - principalmente na escolha dos elementos de fixação a serem utilizados (pregos, cola ou parafusos) - foi recebida uma doação de 3 caixas de madeira prontas com dimensão de 16,0 cm de largura, 11,0 cm de profundidade, 10 cm de altura e espessura de 1 cm, como mostra a Figura 43 . Embora apresentassem dimensões diferentes do que foi estipulado no raciocínio discorrido no item 4.2, a adoção dessas massas na elaboração do sistema representou economia no processo de fabricação e agilizou a construção do projeto, visto que só foi necessário construir o suporte.

Figura 43- Modelo das caixas ganhadas e suas dimensões



Fonte: Do autor

4.3.1 Definição dos adereços

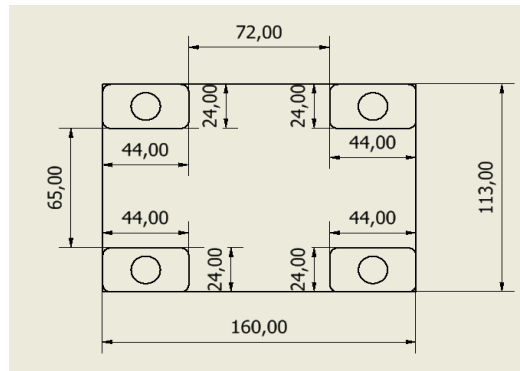
Para conferir movimento às massas, foram escolhidos rodízios adesivos fabricados em plástico ABS e aço inox com dimensões de: 4,4 cm de largura, 2,8 cm de profundidade e 1,4 cm de altura, como mostra a Figura 44. Foram estipulados que seriam colocados 4 rodízios em cada aresta inferior, como mostrado no esquema da Figura 45.

Figura 44- Modelo de rodízio deslizante adotado para conferir movimento as massas



Fonte: (AMAZON,2023)

Figura 45- Esquema do posicionamento dos rodízios na aresta inferior das massas



Fonte: Do autor, 2023

Para os acoplamentos entre as massas e as molas foram considerados ganchos bicromatizados 14mm X 30mm, mostrados na Figura 46.

Figura 46- Gancho bicromatizado usado no acople das molas às massas



Fonte: (MAGAZINE LUIZA, 2023)

4.3.2 Determinação do peso mínimo da massa

As caixas, rodízios e ganchos foram pesados para se determinar o peso mínimo do conjunto a ser considerado na escolha das molas. A Tabela 4 mostra o peso de cada um dos elementos considerados.

Tabela 4- Peso e quantidade dos componentes utilizados na composição do sistema

Item	Quantidade por conjunto	Peso (g) por unidade
Caixa 1	1	264
Caixa 2	1	274
Caixa 3	1	285
Gancho bicromado 14x30	2	0.5
Rodízios	4	8

Fonte: Do autor, 2023

Para garantir que as três massas vazias pudessem ser usadas no experimento, utilizou-se como referência a caixa de menor peso (264 g). O peso total foi determinado pela Equação 57. Por arredondamento, estipulou-se 290 g.

$$264g + 2 * (0.5) + 4 * (8) = 297 g \quad (57)$$

4.3.3 Verificação da frequência natural

Tomando como referência os resultados obtidos no primeiro estudo, mostrado na Tabela 6, foi adotado um novo intervalo de constante elástica, implicando em novas combinações de molas, mostradas mais adiante na Tabela 16. Da mesma forma que no item 4.2.1, utilizou-se a função *eig*, com as matrizes M e K como parâmetros de entrada. Em todos os casos foi considerado $m_1 = m_2 = m_3 = 0.290 \text{ Kg}$.

4.3.4 Análise das frequências de ressonância

Com o novo conjunto de molas determinado na Tabela 16, foram analisadas as frequências de ressonância, utilizando-se o mesmo código. Foi considerado para todos os casos $m_1 = m_2 = m_3 = 0.290 \text{ Kg}$, tempo de simulação em 10 s, número de discretização de pontos igual a 1000 e todos os deslocamentos e velocidades iniciais iguais a 0. Foi adotada uma entrada dada por uma função-impulso em cada massa para todos os casos (cada combinação de mola passou por três simulações).

4.4 SIMULAÇÃO DO SISTEMA PARA UM CASO ESPECÍFICO

Como etapa final, fez-se uma simulação no ANSYS do sistema completo de uma das combinações entre massas e molas para verificar o comportamento dinâmico dele, bem como, se as frequências naturais concordavam com o que foi obtido no código. De todas as combinações estipuladas – considerando-se os raciocínios dos itens 4.2 e 4.3 - foi escolhida a combinação de molas 18 ($k_1 = k_2 = k_3 = 721.86 \text{ N}$) com todas as massas com o peso vazio ($m_1 = m_2 = m_3 = 290 \text{ g}$).

4.4.1 Determinação da densidade das caixas

A fim de definir as propriedades do material para sua configuração na simulação no ANSYS e tendo em vista a procedência desconhecida das caixas ganhadas, utilizou-se o conceito de densidade para averiguar o tipo de madeiras que eram constituídas.

O volume da massa adquirida mostrada na Figura 43, foi obtido através do desenho em CAD no valor de 410000.00 mm³ ou (0,00041m³). Adotando o valor de massa como a média das massas mostradas na Tabela 4, igual a 274,3g ou 0,2743 Kg, o valor da densidade foi obtido através da Equação 37 igual a 669,02 Kg/m³. Tratava-se, portanto, de uma madeira de dureza média (OPERATION, 2023), como por exemplo o compensado copaíba (MADEIREIRA AGUA DE MENINOS 2023).

4.4.2 Modelagem das molas na simulação do sistema

Visando a simplificação do desenho da geometria do sistema no ANSYS, optou-se por utilizar barras com seções quadradas ao invés de desenhar as molas. A equivalência foi obtida através de manipulações algébricas das Equações 3, 54, 55 e 56.

Dividindo-se ambos os lados da Equação 3 pela área A e pelo comprimento l_0 , tem-se a Equação 58.

$$\frac{F}{A} \frac{1}{l_0} = \frac{k}{A} \frac{\Delta l}{l_0} \quad (58)$$

Comparando-se a Equação 58 com as as Equações 54 e 56, tem-se a Equação 59:

$$\sigma \frac{1}{x_0} = \frac{k}{A} \epsilon \quad (59)$$

Substituindo-se a Equação 55 na Equação 59 e isolando a área, chega-se a a relação mostrada na Equação 60.

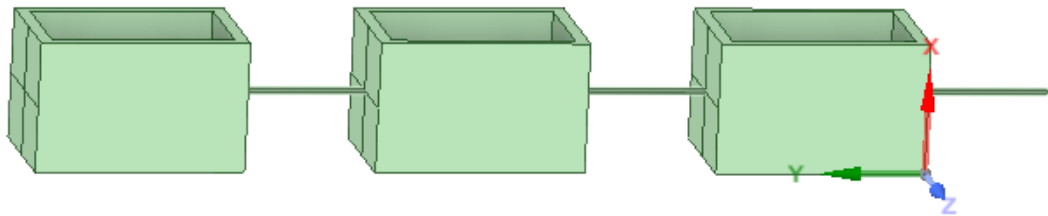
$$A = \frac{kx_0}{E} \quad (60)$$

Adotando-se o mesmo módulo de elasticidade da caixa para não ser necessária a inserção de mais um material ($E = 6,74 \cdot 10^9 \text{ PA}$), $k = 721,86 \text{ N}$ e $x_0 = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$, o valor das arestas do quadrado para essas condições foi de $l = 0,1 \text{ mm}$.

4.4.3 Configurações da simulação

Utilizou-se o sistema de análise “*Modal*”. Em “*Engineering data*” foi criado um novo material, considerando-se as propriedades para madeira compensada, adotando-se: a densidade que foi obtida das caixas ($\rho = 660,02 \text{ kg/m}^3$), módulo de Young ($E = 6,74 \text{ GPA}$) e módulo de poisson ($\nu = 0,31$). A geometria foi desenhada no modo *New SpaceClaim Geometry*, como mostra a Figura 47 .

Figura 47- Modelo desenhado no ANSYS para simulação de um caso do sistema completo



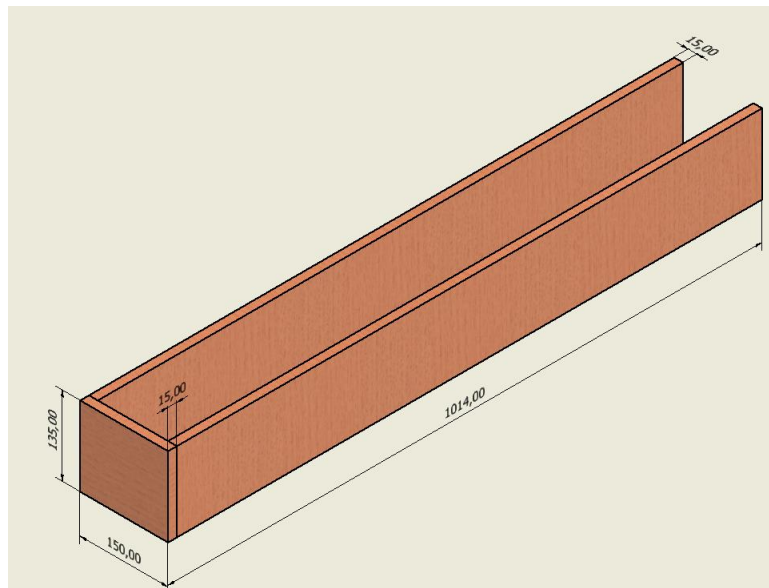
Fonte: Do autor, 2023

Utilizou-se a malha gerada automaticamente pelo software. Quanto às condições de contorno, foi colocado um engaste na extremidade solta da mola em cima da origem na Figura 47, representando o local em que a mesma fica presa ao suporte; para garantir que o movimento fosse linear, determinou-se que o deslocamento das faces inferiores das três massas (onde são fixadas as rodas) fosse livre na direção x e 0 nas direções y e z . Foram elencados 8 modos para fazer análise das frequências naturais.

4.5 ELABORAÇÃO DO SUPORTE

Uma vez definidos o comprimento das molas e das massas, foi possível determinar as dimensões do suporte. Considerando o maior valor de comprimento de mola obtido na Tabela 1 ($k_1 = k_2 = k_3 = 150 \text{ mm}$) e massas ($m_1 = m_2 = m_3 = 160 \text{ mm}$), o comprimento mínimo do suporte foi estipulado em 930 mm. O valor foi arredondado para 1,1 m, visando ter um espaço para permitir o movimento. Em relação à profundidade, foi proposto colocar uma barreira com 0.5 cm de cada lado do carrinho para garantir o movimento linear. Em posse dessas medidas, um esboço do suporte foi levado à marcenaria para solicitar a construção. As caixas e os ganchos também foram levados para que fossem instalados. A Figura 48 mostra as dimensões e o esquema do suporte.

Figura 48- Esboço do suporte para o sistema desenhado em CAD e suas dimensões



Fonte: Do autor, 2023

5 RESULTADOS

5.1 CONSTANTES ELÁSTICAS DAS MOLAS

A Tabela 5 mostra os resultados obtidos para as deflexões máximas e as constantes elásticas de todas as molas simuladas, tanto pelo Software ANSYS (Equação 51), quanto pela Equação 52 estipulada por (NORTON, 2013). É possível notar que os valores de k obtidos por simulação aumentam ao passo que a deflexão diminui, o que condiz com a Equação 51, visto que foi utilizado o mesmo valor de força para todos os casos, fazendo com que k e y , sejam inversamente proporcionais. Essa relação reforça a ideia de que a constante elástica remete à rigidez, pois, ao se aplicar uma força de 100 N na mola 402 (menor valor de k), a mola distende 13,85 cm, enquanto para a mola 2464 (maior valor de k), a distensão da mola é de apenas 3,8 mm para a mesma força.

Tabela 5- Comparação entre valores de constantes elásticas teóricas e simuladas

Código	Deflexão máxima (y)	k simulado (N/m)	k teórico (N/m)	Erro percentual
402	0,13853	721,8652999	34,62099125	1985,051
404	0,12256	815,926893	64,02501909	1174,388
2646	0,06109	1636,929121	436,5051703	275,008
403	0,058574	1707,242121	219,7858468	676,7753
2665	0,032123	3113,034275	476,0885652	553,8771
1324	0,024535	4075,810067	514,5972157	692,0389
770	0,0091949	10875,59408	13194,44444	17,5744
2292	0,0069154	14460,47951	3106,661818	365,4668
2502	0,0036648	27286,61864	9838,282461	177,3514
2766	0,0030579	32702,18124	933,8102223	3402,016
2470	0,0023329	42865,10352	9403,02478	355,865
2725	0,0010056	99443,11854	17582,86775	465,5683
2464	0,00038915	256970,3199	88443,35098	190,5479

Fonte: Do autor, 2023

Para todos os casos, observa-se que os valores de k obtidos na simulação são superiores aos valores obtidos através da Equação 52. Uma possível explicação para a divergência está atrelada ao fato que a Equação 52 é simplificada, bem como aplicável em molas de grande porte utilizadas em elementos de máquina.

A Tabela 6 mostra os parâmetros D , d e N_a utilizados para o cálculo (mesmos da Tabela 1, porém em ordem crescente de k). Observa-se que os valores atribuídos aos parâmetros de diâmetro médio, diâmetro do arame e número de espiras no catálogo da loja Casa das Molas foram aleatórios, o que explica as oscilações e a ausência de uma tendência clara de comportamento nos valores de k calculados pelo código.

Tabela 6- Parâmetros para cálculo teórico de k

k teórico	N_a	D	d
34,62099125	42	5,6	0,4
64,02501909	56	4,85	0,45
436,5051703	43	8,1	1
219,7858468	56	3,7	0,5
476,0885652	38	8,2	1
514,5972157	18	17,6	1,5
13194,44444	14	24	4
3106,661818	29	11,3	1,9
9838,282461	16	18,8	3,2
933,8102223	5	43,7	2,5
9403,02478	14	16,7	2,8
17582,86775	7	37	5
88443,35098	12	25,6	6,5

Fonte: Do autor, 2023

Tendo em vista a discrepância apresentada e as limitações apresentadas pela Equação 52, os valores obtidos através do ANSYS foram adotados para dar prosseguimento ao projeto.

5.2 ESCOLHA DOS VALORES DAS MASSAS A PARTIR DE MOLAS PREDETERMINADAS

Nesta linha de raciocínio foram escolhidas as molas de código: 402 (721,86 N), 2766 (32702,18N) e 2464 (256970,31N).

5.2.1 Análise dos autovalores - frequências naturais

Para todos os casos o aumento da massa de 10 Kg para 20 Kg, implicou no decréscimo de ω_n , como mostra a Tabela 7. Intuitivamente, este resultado era esperado, pois quando se aumentam as massas, aumentam as forças inerciais que são contrárias ao movimento, como foi discutido no item 3.1.3.

Em relação à massa mínima, observa-se que houve variação entre 0,5 kg (combinação 7) e 3 Kg (combinação 1). A combinação 7 refere-se ao caso em que as 3 molas têm o menor valor de k (721, 86 N) e na combinação 1 o maior valor (256970, 31 N). Estes resultados também se mostram coerentes, pois a mola de maior rigidez, requer maior força de inércia (massa) para ser deslocada, quando comparada à de menor rigidez.

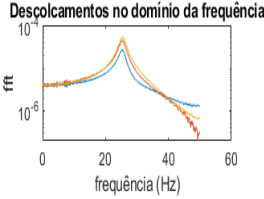
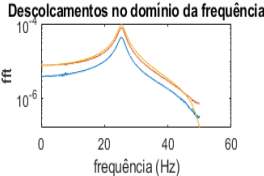
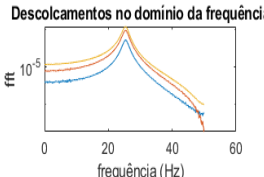
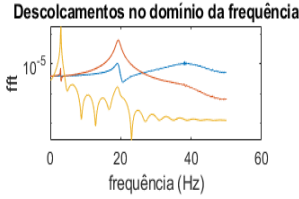
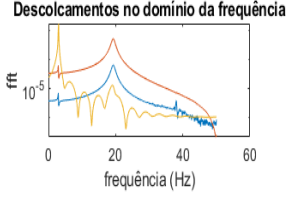
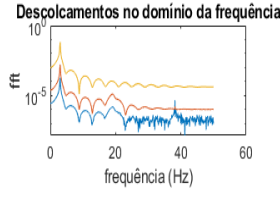
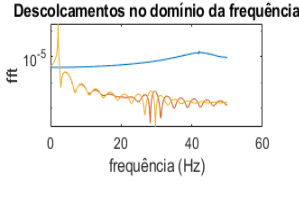
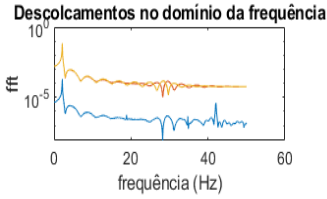
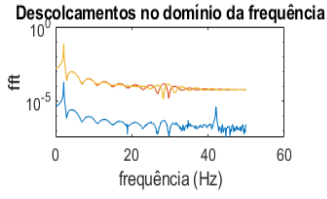
Tabela 7- Análise do comportamento das frequências naturais para diferentes valores de massa

Combinação	Valores			
	atribuídos para $m_1 = m_2 = m_3$ (kg)	λ_1 (Hz)	λ_2 (Hz)	λ_3 (Hz)
Caso 1	3	20.7301	58.0845	83.9346
	10	11.3544	31.8142	45.9728
	20	8.0287	22.4960	32.5077
Caso 2	2	2.9858	19.2750	60.9981
	10	1.3353	8.6200	27.2792
	20	0.9442	6.0953	19.2893
Caso 3	2	2.1292	28.8606	57.1291
	10	0.9522	12.9069	25.5489
	20	0.6733	9.1265	18.0658
Caso 4	0.5	18.1144	50.7555	73.3438
	10	4.0505	11.3493	16.4002
	20	2.8641	8.0251	11.5967
Caso 5	2	2.9851	14.3385	82.0189
	10	1.3350	6.4124	36.6800
	20	0.9440	4.5342	25.9366
Caso 6	2	2.1139	20.5770	80.7076
	10	0.9453	9.2023	36.0935
	20	0.6685	6.5070	25.5220
Caso 7	0.5	2.6913	7.5409	10.8969
	10	0.6018	1.6862	2.4366
	20	0.4255	1.1923	1.7229
Caso 8	2	1.7369	24.6239	82.0809
	10	0.7768	11.0121	36.7077
	20	0.5493	7.7868	25.9563
Caso 9	2	1.7425	24.5373	82.1067
	10	0.7793	10.9734	36.7192
	20	0.5510	7.7594	25.9644

Fonte: Do autor, 202

5.2.2 Análise das ressonâncias

Tabela 8- Análise das frequências naturais no domínio da frequência para os casos de 1 a 3

	Aplicação do impulso na massa 1	Aplicação do impulso na massa 2	Aplicação do impulso na massa 3
1			
2			
3			

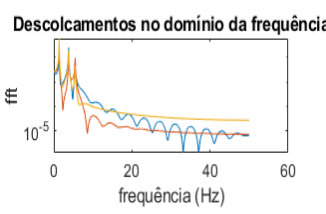
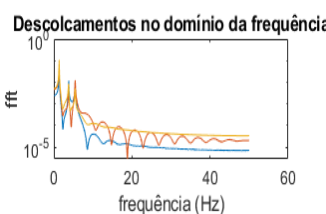
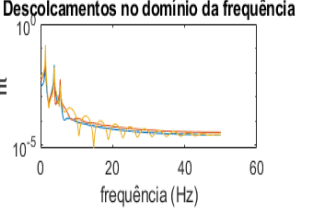
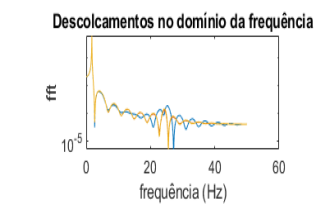
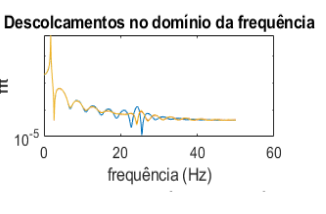
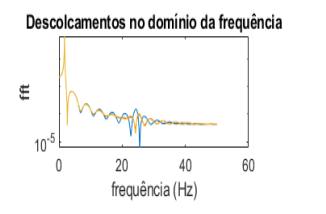
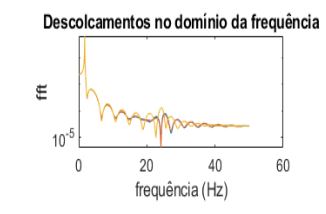
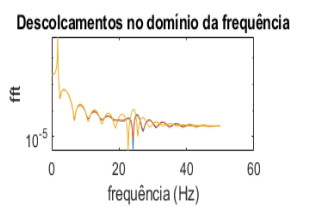
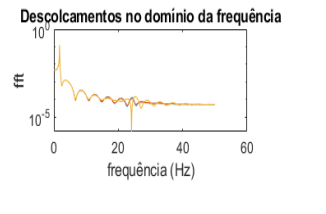
Fonte: Do autor, 2023

Tabela 9- Análise das frequências naturais no domínio da frequência para os casos de 4 a 6

	Aplicação do impulso na massa 1	Aplicação do impulso na massa 2	Aplicação do impulso na massa 3
4	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência
5	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência
6	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência

Fonte: Do autor, 2023

Tabela 10- Análise das frequências naturais no domínio da frequência para os casos de 7 a 9

	Aplicação do impulso na massa 1	Aplicação do impulso na massa 2	Aplicação do impulso na massa 3
7			
8			
9			

Fonte: Do autor, 2023

As combinações de molas 4 ($k_1 = k_2 = k_3 = 32702.18 \text{ N}$) e 7 ($k_1 = k_2 = k_3 = 721.86 \text{ N}$) se destacam na Tabela 9 e na Tabela 10 pelo fato de apresentarem os três picos de frequência natural bem proeminentes nas três situações de aplicação da força ao sistema (em m_1 , m_2 e m_3). Este resultado se mostra importante, pois os picos de ressonância são mais facilmente detectados por acelerômetros do que os outros pontos presentes no gráfico. Ressalta-se que para os demais casos pode ser possível obter gráficos com as mesmas proeminências para as frequências naturais, alterando os parâmetros de tempo de simulação e discretização de

pontos. Como foram abordadas muitas variáveis ao longo do relatório, optou-se por deixar essas otimizações para trabalhos futuros. Aqui, deixa-se a recomendação de que as combinações 4 e 7 sejam utilizadas para fazer os primeiros testes da parte eletrônica, simulações, bem como, para a elaboração do protótipo.

5.2.3 Escolha do método de fabricação e materiais

5.2.3.1 Marcenaria

Para as madeiras foram escolhidos os materiais MDF e madeira compensada *pinus*. A fim de verificar a forma em que estes produtos eram fornecidos no mercado, bem como a disponibilidade e custo, foi realizada uma consulta na Marcenaria e Carpintaria Campos Verdes em Barão Geraldo, na cidade de Campinas. Soube-se que no que tange à espessura, o MDF pode ser de 3, 6, 15 ou 18 mm, enquanto que a madeira compensada pode ser encontrada com 1,9 ou 2,7 mm. Para ambos os casos, há possibilidade de fazer o desbaste para se obter uma espessura intermediária.

Foi levantado que o MDF apresenta menor preço quando comparado à madeira compensada e que existia a possibilidade de as massas serem feitas com sobras de materiais, sendo cobrada apenas a mão de obra. A Tabela 11 mostra a relação de preço encontrada na loja virtual Leo Madeiras, para ambas as madeiras com espessura maior ou igual a 15 mm. Este valor foi adotado como mínimo, pois intuitivamente leva a crer que as massas serão mais resistentes, bem como, amplia a possibilidade de utilizar elementos de fixação como pregos e parafusos. Ressalta-se também que foram escolhidos produtos com altas notas de avaliação no site.

Tabela 11- Comparação de valores entre MDF e madeira compensada

Material	Número de referência no site	Espessura (mm)	Dimensão da placa (mm)	Densidade (Kg/m ³)	Valor (em reais)
MDF cru	5067295	15	2750 x 1850	700	164,33
MDF cru	5067295	18	2750 x 1850	700	218,28
Compensado Naval	5010599	15	2500X1600	650	308,78
Compensado Naval	5010599	18	2500X1600	650	367,61

Fonte: (LEO MADEIRAS, 2023a); (LEO MADEIRAS, 2023b)

A Figura 49 mostra as vantagens e desvantagens ao se escolher as madeiras como material de construção das massas, utilizando-se a metodologia SWOT.

Figura 49- Matriz SWOT para uso de madeiras como material

	Fatores positivos	Fatores Negativos
Fatores Internos	Forças • Simplicidade de fabricação; • Possibilidade de fabricar em casa; • Possibilidade de usar material provenientes de casas de demolição.	Fraquezas • Necessidade de auxílio na construção dos cubos, (mexer com serras, furadeiras e elementos de fixação).
Fatores Externos	Oportunidades • Facilidade em substituir caso algum cubo quebre.	Ameaças • Menor vida útil dos cubos; • Mais propenso a fratura quando comparado a materiais metálicos.

Fonte: Do autor, 2023

5.2.3.2 Manufatura aditiva

A impressão 3D foi cogitada uma vez que os laboratórios da instituição possuem impressoras disponíveis para uso em trabalhos de conclusão de curso, projetos de extensão e iniciação científica. Para este processo de fabricação foram adotados como possibilidades de materiais o PLA, ABS e Nylon.

Foi realizada uma reunião com o técnico do laboratório da UNESP responsável pelas impressoras, para levantar quais as limitações que haviam no processo, bem como as sugestões em relação a tamanho e escolha entre os materiais ABS, PLA e Nylon, visto que o técnico possui bastante experiência na área e lecionou minicursos do assunto na ENSET VII (Evento acadêmico da instituição). Após, soube-se que para espessura, devem ser considerados múltiplos de 0,4 mm, pois é o tamanho do bico injetor de filamento; as impressoras presentes na UNESP são abertas, o que impossibilita o uso do material ABS; não é recomendável fazer furos utilizando furadeiras após a impressão, pois o material é sensível à temperatura causada pela fricção da ferramenta; o cubo deve ser construído de uma vez e não impresso em partes

separadas unindo-as depois com elementos de fixação; furos de elementos de fixação e entalhes para encaixe devem ser previamente desenhados para a impressão num único bloco.

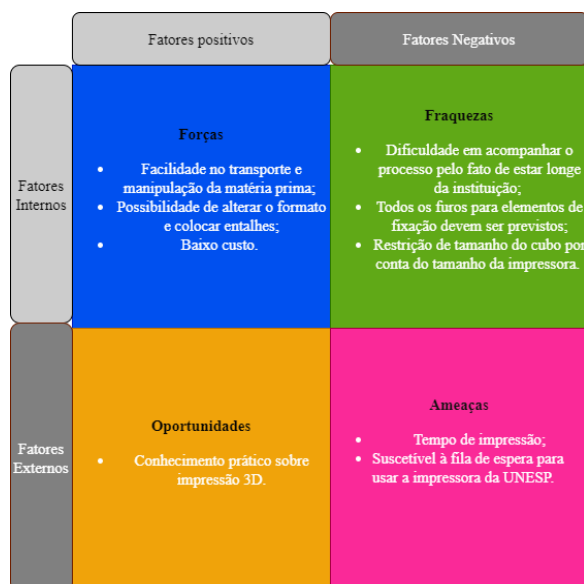
O técnico realizou uma estimativa no software Fusion, usado nas impressões 3D para um cubo de 100 mm X 100 mm X 100 mm. Esta peça seria impressa em 11 horas, com gasto de 180 gramas de filamento, o que equivaleria a R\$ 22,00 por cubo. A Tabela 12 mostra a comparação dos preços de filamento encontrados no Mercado Livre, bem como a Figura 50 apresenta as vantagens e desvantagens do processo utilizando-se o método SWOT.

Tabela 12- Comparação de valores para diferentes materiais de manufatura aditiva

Material	Quantidade	Temperatura de aplicação	Temperatura da mesa	Diâmetro do filamento	Preço (em reais)
PLA	1Kg	180° a 210°	60° a 80°	1,75 mm	Entre R\$ 99 e R\$ 158
ABS	1Kg	220°C até 260°C	90° a 110°	1,75 mm	Entre R\$ 56 e R\$ 108
Nylon	1 Kg	220°C até 260°C	60° a 80°	1,75 mm	Entre R\$ 140 e R\$ 930

Fonte: (MERCADO LIVRE,2023a); (MERCADO LIVRE,2023b); (MERCADO LIVRE,2023c)

Figura 50- Matriz SWOT para o processo de fabricação de manufatura aditiva



Fonte: Do autor, 2023

5.2.3.3 Conformação mecânica

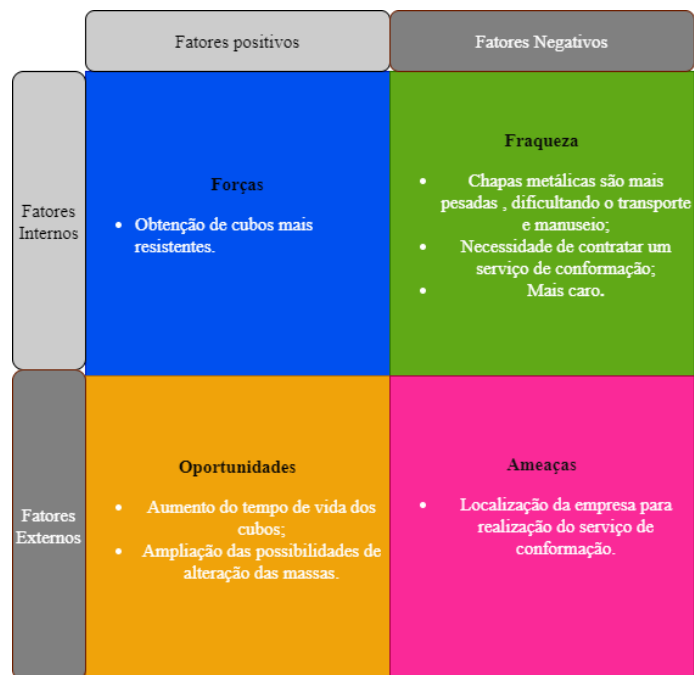
Para os metais foram considerados os materiais alumínio e latão. A Tabela 13 mostra a comparação de preços entre os dois materiais, bem como a mostra a Figura 51 matriz SWOT para este tipo de processo de fabricação. Foi feita uma visita em uma serralheria em Barão Geraldo, mas não se mostrou interessante, pois a mesma trabalhava com materiais sucateados.

Tabela 13- Comparação de valores entre alumínio de latão

Material	Dimensão	Espessura	Preço
Chapa de Alumínio	2000 mm X 1000 mm	0,5 mm	R\$ 226,75
Chapa de latão	30 cm X 30 cm	1,5 mm	R\$ 290

Fonte: (MERCADO LIVRE,2023d); (MERCADO LIVRE, 2023e)

Figura 51- Matriz SWOT para conformação mecânica



Fonte: Do autor, 2023

5.2.4 Comparação dos materiais – método Ashby

A Tabela 14 apresenta os valores de densidade e módulo de elasticidade teóricos de cada um dos materiais listados, uma vez que estas propriedades permitem fazer a relação através de gráficos de cada material com parâmetros como: resistência, tenacidade a fratura, custo relativo por unidade de volume e resistividade elétrica.

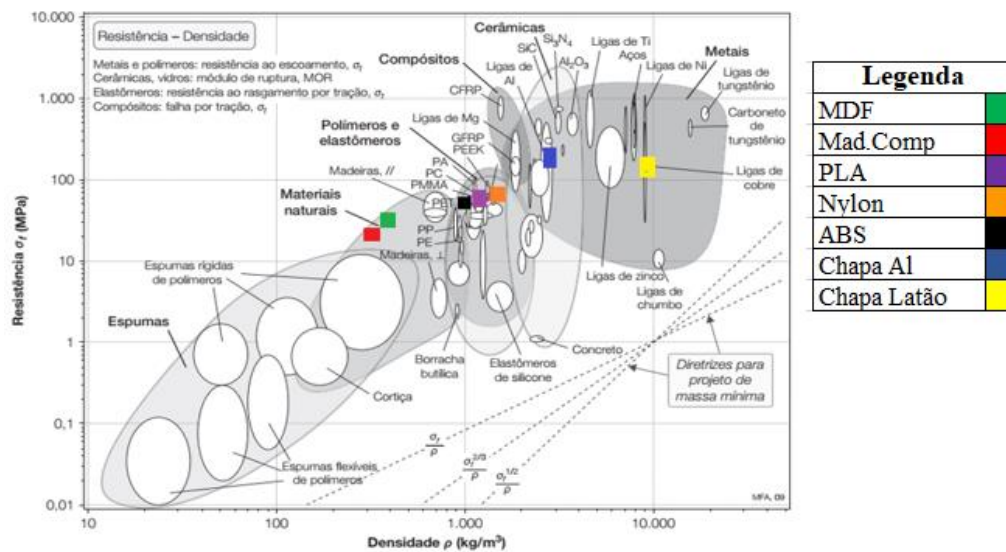
Tabela 14- Valores teóricos de densidade e módulo de elasticidade para comparação gráfica do método Ashby

Material	ρ teórica (Kg/m ³)	E teórico (GPa)
MDF	750	2,7
Madeira compensada	650	6,74
PLA	1240	4,35
Nylon	1140	1,59-3,39
ABS	1040	2,2
Chapa de alumínio liga 1100	2800	71,7
Chapa de latão liga	8800	110

Fonte: (HIBBELER,2010)

A Figura 52 mostra a relação entre resistência de material em função da densidade. Observa-se, de forma geral, que quanto maior a densidade de um material, maior tende ser a sua resistência. Levando em conta os valores de densidade da Tabela 10 e as respectivas legendas adotadas, a ordem crescente para o parâmetro de resistência dos materiais listados se apresenta da seguinte forma: madeira compensada, MDF, ABS, PLA, nylon, chapa de Alumínio e Chapa de latão.

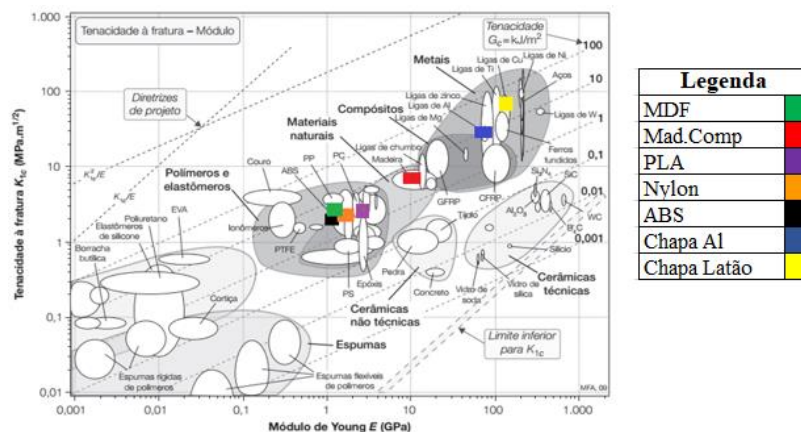
Figura 52- Determinação da resistência em função da densidade



Fonte: Adaptado de (ASHBY, 2012)

Considerando-se apenas as classes de materiais listados na Tabela 10, observa-se que com o aumento do módulo de elasticidade, a tenacidade à fratura tende a aumentar, como mostra a Figura 53. Neste caso, a ordem crescente deste parâmetro para os materiais se mostra a seguinte: ABS, MDF, nylon, PLA, madeira compensada, chapa de alumínio e chapa de latão.

Figura 53- Tenacidade à fratura em função do módulo de Young

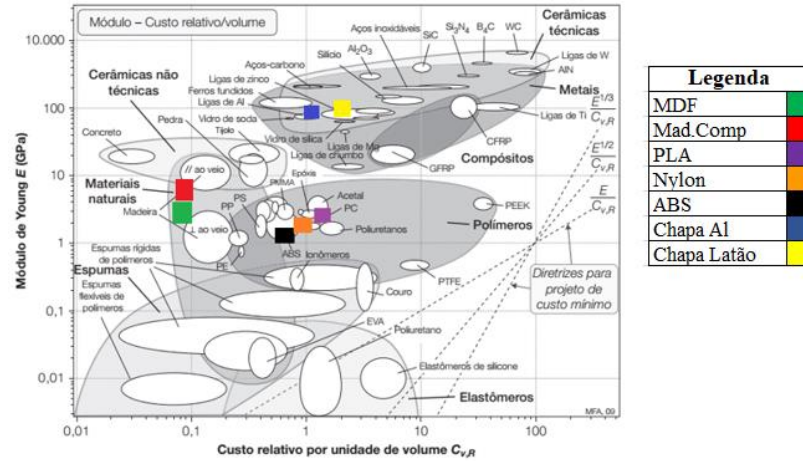


Fonte: Adaptado de (ASHBY, 2012)

No que tange ao parâmetro de custo do material por unidade de volume, não se tem uma tendência clara como a resistência ou a tenacidade à fratura. Para corroborar essa afirmação, chama-se a atenção do leitor para a Figura 54, na qual pode-se observar que, embora o módulo de elasticidade do ABS, nylon e PLA sejam menores que as ligas de alumínio e de latão, o custo praticamente não diverge entre eles. Neste quesito, foi considerada a ordem crescente como:

MDF, madeira compensada, ABS, nylon, chapa de alumínio, PLA e chapa de latão.

Figura 54- Módulo de Young em função do custo

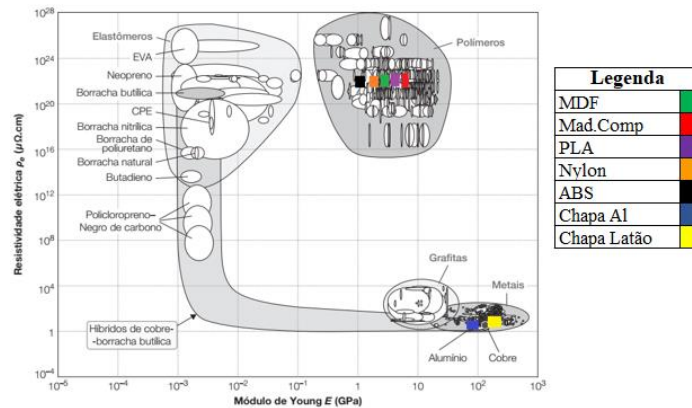


Fonte: Adaptado de (ASHBY, 2012)

Para análise da resistividade dos materiais apenas os metais considerados não foram encontrados explícitos na Figura 55. O ABS, PLA, nylon e as madeiras foram apontados tomando como base o valor do módulo de elasticidade na Tabela 14. Neste caso, também não é possível afirmar uma tendência na relação entre módulo de elasticidade e resistividade, visto que a borracha butílica se apresenta como uma quebra de padrão, a qual, diferentemente dos metais, possui baixo valor de E , mas também apresenta baixa resistividade.

Como esperado, os materiais usados na manufatura aditiva (ABS, PLA, nylon) e na marcenaria (MDF e madeira compensada), apresentaram maiores valores de resistividade, o que implica em menor propensão à corrosão do cubo. Em ordem crescente de resistividade, tem-se: chapa de alumínio, chapa de latão, ABS, nylon, MDF, PLA e madeira compensada.

Figura 55- Resistividade elétrica em função do Módulo de Young



Fonte: Adaptado de (ASHBY, 2012)

Com base nas discussões anteriores entre a Figura 52 e Figura 55, foi elaborada uma tabela com os quatro parâmetros em questão. De acordo com as ordens crescentes, foram atribuídas notas para cada material, como mostra a Tabela 15. Nela, nota-se que os valores médios para a madeira compensada e para o MDF são muito próximos, bem como os maiores em relação aos outros materiais. Portanto, no raciocínio que foi adotado, seriam os materiais mais elegíveis para escolha.

Tabela 15- Atribuição de nota para cada material

	Resistência	Tenacidade à fratura	Custo	Corrosão	Nota final
Peso- atribuição	2	3	5	4	
MDF	3	4	10	9	7,42857143
Condensado	2	7	8	10	7,5
PLA	5,5	6	4	9	6,07142857
Nylon	6	5	6	8	6,35714286
ABS	5	1	7,5	8	5,89285714
Chapa de alumínio liga 1100	7	9	5	1	5
Chapa de latão liga	10	10	1	1	4,21428571

Fonte: Do autor, 2023

Após refletir sobre as matrizes SWOT expostas na e com base no resultado da matriz de decisão, optou-se pelo método de fabricação de marcenaria. A simplicidade de fabricação, facilidade de acesso e acompanhamento em estabelecimentos de marcenaria e o custo foram fatores determinantes na escolha. Ainda, mesmo que com nota um pouco inferior, optou-se pelo MDF, uma vez que esse material apresentava possibilidade de reaproveitamento, o que tenderia a baratear a fabricação das massas. Portanto, ficou definido que a massa seria construída em MDF, com 10 cm de altura, largura e comprimento e espessura de 18 mm para ampliar a possibilidade de utilizar elementos de fixação.

5.3 DETERMINAÇÃO DE MOLAS COM VALOR FIXO DE MASSA.

Com base na Tabela 7, observou-se que os casos de combinação de mola ($k_1 = k_2 = k_3 = 32702,18 \text{ N}$) e 7 ($k_1 = k_2 = k_3 = 721,86 \text{ N}$) permitiam o uso de valor de massa mais baixo. Tal fato não foi observado quando a mola com $k = 256970,31 \text{ N}$ (código 2464) estava presente entre as combinações. Tendo em vista que o conjunto construído a partir da caixa provinda da doação apresentava peso vazio de 0,29 Kg, optou-se por escolher uma mola com valor de k menor, para que fosse possível utilizar as caixas vazias. Fez-se então a substituição

da mola de código 2464 pela mola com código 2292. A Tabela 16 mostra as combinações realizadas.

Tabela 16- Combinação de molas na substituição da mola 2464 pela 2766 e inclusão da mola 2292 como valor intermediário

Combinação de molas	k_1 (N/m)	k_2 (N/m)	k_3 (N/m)
10	32702.18	32702.18	32702.18
11	14460.47	32702.18	721.86
12	14460.47	721.86	32702.18
13	14460.47	14460.47	14460.47
14	32702.18	14460.47	721.86
15	32702.18	721.86	14460.47
16	721.86	721.86	721.86
17	721.86	32702.18	14460.47
18	721.86	14460.47	32702.18

Fonte: Do autor, 2023

A Tabela 17 mostra que a substituição da mola com $k = 256970,31$ N (código 2464) pela mola com $k = 32702.18$ N (código 2766) permite que sejam considerados as caixas vazias (caixas com rodízios e ganchos), satisfazendo o intervalo $0 < \omega_n < 100$ Hz.

Tabela 17- Frequências naturais para as combinações estipuladas na Tabela 16

Situação	Valores atribuídos para $m_1 = m_2 =$ m_3 (kg)	λ_1 (Hz)	λ_2 (Hz)	λ_3 (Hz)
10	0.29	23.7854	66.6452	94.3051
11	0.29	7.6410	24.5996	80.2399
12	0.29	5.4621	36.4304	75.7955
13	0.29	15.8166	44.3171	64.0401
14	0.29	7.6490	29.0539	67.8674
15	0.29	5.5192	50.5223	54.0894
16	0.29	3.5339	9.9016	14.3083
17	0.29	4.5493	40.7433	81.371
18	0.29	4.5283	40.9952	81.2457

Fonte: Do autor, 2023

Para estas novas configurações de molas e com a adoção do peso vazio (0,29 Kg), observou-se que apenas a combinação 16 ($k_1 = k_2= k_3= 721.86$ N) apresentou os três autovalores de frequência de ressonância bem definidos, como pode ser constatado na Tabela 18, Tabela 19 e Tabela 20. Resultados diferentes poderiam ser obtidos aumentando-se a massa. Porém, para fins de elaboração do protótipo, bem como da simulação, este resultado foi suficiente para prosseguir com o projeto.

Tabela 18- Análise das frequências naturais para os casos de 10 a 12

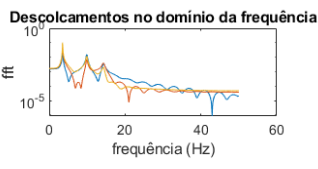
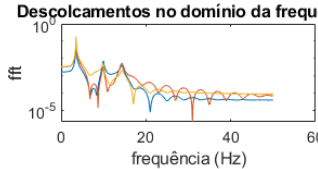
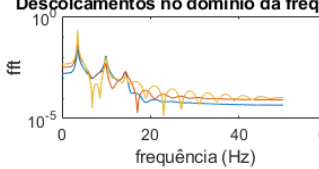
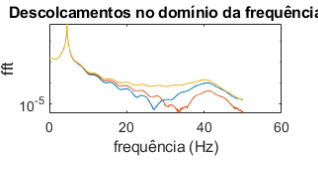
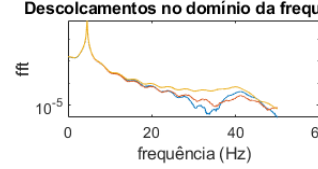
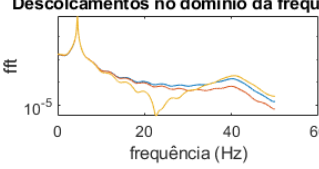
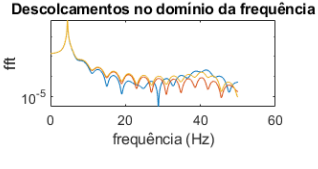
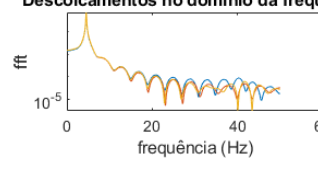
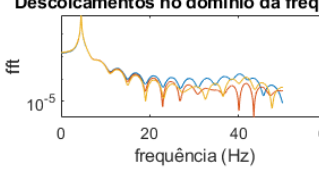
	Aplicação do impulso na massa 1	Aplicação do impulso na massa 2	Aplicação do impulso na massa 3
10	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência
11	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência
12	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência

Tabela 19- Análise das frequências naturais para os casos de 13 a 15

	Aplicação do impulso na massa 1	Aplicação do impulso na massa 2	Aplicação do impulso na massa 3
13	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência
14	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência
15	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência	Descolamentos no domínio da frequência

Fonte: Do autor, 2023

Tabela 20- Análise das frequências naturais para os casos de 16 a 18

	Aplicação do impulso na massa 1	Aplicação do impulso na massa 2	Aplicação do impulso na massa 3
16			
17			
18			

Fonte: Do autor, 2023

5.4 SIMULAÇÃO

Atabela 21 mostra a comparação entre as frequências naturais obtidas pelo código e pela simulação para a combinação 16 ($k_1 = k_2 = k_3 = 721.86$ N) e ($m_1 = m_2 = m_3 = 0.29$ Kg) .

Tabela 21- Comparação entre frequências naturais obtidas pelo código em MATLAB e por simulação no ANSYS

Modo	Frequência natural código (Hz)	Frequência natural - ANSYS(Hz)	Erro relativo
1	3.5339	4.5184	21,78
2	9.9016	12.66	21,78
3	14.3083	18.295	21,79

Fonte: Do autor, 2023

O resultado obtido mostrou-se satisfatório, pois as frequências naturais apresentaram a mesma ordem de grandeza, tanto para as frequências obtidas no código em MATLAB quanto para as que foram calculadas pela simulação. De modo geral, observou-se que as frequências naturais oriundas na simulação foram maiores do que as do código do MATLAB. A divergência pode ser explicada pelo fato das equações utilizadas no código considerarem a massa concentrada enquanto que no ANSYS o cálculo da frequência natural foi para o corpo contínuo, ou seja a distribuição de massa é aumentada. Também, no código em MATLAB a única rigidez presente é a da mola enquanto que na da simulação do ANSYS, além desta rigidez, a rigidez da parede da massa onde a mola está alocada também é levada em conta.

5.6 PROTÓTIPO CONSTRUÍDO

A Figura 56 mostra as molas adquiridas após os resultados obtidos no item 5.3 visando a utilização no protótipo.

Figura 56- Molas adquiridas, da esquerda para a direita: 2666 (32702,18N), 2692 (14460,47 N), 402 (721,865 N)



Fonte: Do autor, 2023

A Figura 57 e a Figura 58 mostram o protótipo finalizado com a combinação de molas 10 proposta na Tabela 16.

Figura 57- Protótipo finalizado



Fonte: Do autor, 2023

Figura 58- Protótipo finalizado para combinação de molas 10



Fonte: Do autor, 2023

6 MELHORIAS FUTURAS

Para que o protótipo seja utilizado nas aulas é crucial o desenvolvimento de um projeto de instrumentação eletrônica, bem como de um programa computacional que mostre as saídas e/ou gráficos de frequências naturais, velocidades e deslocamentos. Também, é necessário o estudo de uma forma de se aplicar força de entrada ao sistema de forma que esta possa ser quantificada.

Os rodízios adotados não produziram o resultado esperado, apresentando movimento linear restrito e desvio das massas para as laterais. Portanto, recomenda-se um estudo acerca de outros modelos de rodízios, meios e/ou configurações e para conferir movimento às massas.

Em decorrência do tempo, não foi possível fazer uma análise em relação a resistência do gancho, nem se o modelo, a forma como foi colocado e as dimensões adotadas seriam os mais adequados em relação à fadiga, sendo necessário um estudo mais detalhado neste aspecto.

Neste relatório foi desenvolvida uma linha de raciocínio para escolha de massas e molas de um sistema de três graus de liberdade. Porém, como o protótipo apresenta possibilidade de desconectar os componentes, seria interessante realizar um estudo sobre o comportamento para um e dois graus de liberdade, ampliando assim a possibilidade de experimentos dos discentes.

Devido ao grande número de combinações de mola adotados e de variáveis envolvidas no MATLAB, não foi possível explicar, com afinco, as possibilidades de número de discretização e tempo de simulação para se obter mais combinações com picos de ressonância bem evidenciados da Tabela 8 até a Tabela 10 e da Tabela 18 até a Tabela 20. Fica a sugestão para que seja tomada uma linha de estudo neste sentido.

7 CONCLUSÃO

A linha de raciocínio estipulada para escolha das dimensões e materiais dos componentes do sistema massa-mola-amortecedor possibilitou a construção da parte estrutural de um protótipo. Entretanto, para que o aparato possa ser utilizado nas aulas práticas das disciplinas é de suma importância que sejam desenvolvidas a instrumentação, um sistema de aplicação de força e um programa computacional para a análise de saídas de resultados.

Durante o processo foi observada a importância de se fazer simulações computacionais antes de construir um protótipo de um sistema mecânico. Este fato ficou evidente principalmente na escolha das molas, pois restringiu as opções de escolha e evitou o gasto de dinheiro com modelos que não atenderiam aos requisitos.

Por fim, a metodologia utilizada pode ser adaptada para construir aparatos mais robustos, eficientes ou que venham a atender às necessidades pontuais do curso de Engenharia Aeronáutica da UNESP de São João da Boa Vista.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINHO, Oswaldo Luis; VILELLA, Ronaldo Castro; BUTTON, Sérgio Tonini. **Processos de fabricação e planejamento de processos**. Unicamp, Faculdade de Engenharia Mecânica, Introdução à Engenharia de Fabricação, 2004.
- AMAZON. **Kit 4 Rodinhas Adesivas Deslizantes P/Móveis Cadeira Esfera para colocar em moveis**. Disponível em: https://www.amazon.com.br/Rodinhas-Adesivas-Deslizantes-Cadeira-colocar/dp/B0B8JY6LKH/ref=asc_df_B0B8JY6LKH/?tag=googleshopp00-20&linkCode=df0&hvadid=379787278232&hvpos=&hvnetw=g&hvrnd=9134306455046709132&hvpone=&hvptwo=&hvmqmt=&hvdev=c&hvdvcmdl=&hvlocint=&hvlocphy=9100354&hvtargid=pla-1730188742362&psc=1&mcid=fc1327911a5c358fb771d742e872a14c. Acesso em: 12 de set.2023.
- ASHBY, Michael. **Seleção de materiais no projeto mecânico**. Elsevier Brasil, 2012.
- CALLISTER, William Jr. **Ciência e Engenharia de Materiais - Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2012.
- DE BARROS, Everaldo. **Análise da frequência de ressonância de um vibrador**. Revista de Ciência e Tecnologia. Faculdade Anhanguera de Taubaté.2014.
- DO VALLE, Karine Nayara Faria et al. **Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da UFMG. 2012.
- BOZZO, Livia Rampinelli et al. **Análise experimental da aproximação do amortecimento viscoso de Rayleigh em uma estrutura tubular em catenária submetida a vibração**. Trabalho de Conclusão de Curso- Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, 2023.
- BRANCO, Jorge M.; VERBIST, Maxime. **Definição geométrica e modelos de cálculo aplicáveis a três tipologias de ligações de carpintaria**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas. Ed. LNEC. Série III. n.º 8. ISSN 2183-8488. (novembro 2018) 93-102. 2018.
- CASA DAS MOLAS. **Casa das molas**. Disponível em: <https://www.molas.com.br/>. Acesso em: 03 de mar.2023.
- DE ANDRADE, João Carlos. **A determinação da densidade de sólidos e líquidos**. Revista Chemkeys - Liberdade para aprender. r2013.
- DE MORAIS, Neto. **Aplicação do método de dormand-prince para obtenção da resposta de um sistema de amortecimento massa-mola no matlab**. Congresso nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências. Campina Grande. Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) .2022.
- EDUARDO, Alexandre Carlos. **Diagnostico de defeitos em sistemas mecanicos rotativos atraves da analise de correlações e redes neurais artificiais**. 2003. Tese de Doutorado. University of Campinas, Brazil.
- GALVÃO, Nathallye de Sousa Dantas; DE SOUSA MELO, Rodrigo. **O método de análise SWOT como ferramenta para promover o diagnóstico turístico de um local: o caso do município de Itabaiana (PB)**. Caderno virtual de turismo, v. 8, n. 1, 2008.

GARCIA, Amauri; SPIM, Jaime Alvares; DOS SANTOS, Carlos Alexandre. **Ensaaios dos materiais**. Livros Técnicos e científicos, 2012.

GROOVER, Mikell P. **Introdução aos Processos de Fabricação**. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos materiais**. São Paulo; Pearson Prentice Hall. 2010

ISO. **Additive manufacturing: general principles**. Disponível em: <https://www.iso.org/standard/69669.html>. Acesso em: 12 de set. 2023.

KALIL, Silvia. **Introdução à resistência dos materiais**. Disponível em: https://www.politecnica.pucrs.br/professores/soares/Resistencia_dos_Materiais_-_E/Capitulo_07.pdf. Acesso em: 10 de out. 2023.

KELLY, S G. **Vibrações Mecânicas: Teorias e aplicações**. [São Paulo]: Cengage Learning Brasil, 2018.

KIMURA, Toshinori. **On dormant-prince method**. Japan Malaysia Technical Institute, v. 40, n. 10, p. 1-9, 2009.

KLUEVER, Craig A. Sistemas dinâmicos: modelagem, simulação e controle. **Rio de Janeiro: LTC**, 2018.

LEO MADEIRAS. **MDF cru miolo claro**. Disponível em: https://www.leomadeiras.com.br/produto/mdf_cru_miolo_claro?sku=5067295. Acesso em: 12.set. 2023a.

LEO MADEIRAS. **Compensado naval**. Disponível em: https://www.leomadeiras.com.br/produto/compensado_naval?sku=5010599. Acesso em: 12.set. 2023b.

LUZ, Ana Maria S.; JÚLIO, Francisco. Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações. **Revista Virtual de Iniciação Acadêmica da UFPA** [http://www. ufpa.br/revistaic](http://www.ufpa.br/revistaic), v. 1, n. 1, 2001.

MADEIREIRA AGUA DE MENINOS. **Compensado**. Disponível em: <https://www.aguademeninos.com.br/Madeira/compensado.html#:~:text=Tem%20densidad e%20aproximada%20de%20650%20kg%2Fm%203>. Acesso em: 20 de out.2023.

MAGAZINE LUIZA. **Gancho 15X30**. Disponível em: <https://www.magazineluiza.com.br/busca/gancho+15x30/>. Acesso em: 18.out.2023

MANUAL DE CONSTRUÇÃO DE BARCOS. **A diferença entre resistência e rigidez**. Disponível em: <https://www.manualdeconstrucaodebarcos.com.br/a-diferenca-entre-resistencia-e-rigidez/>. Acesso em:10 de out. 2023.

MARTINS, Mauro Lucio et al. **Estudo da aplicação da FFT (Fast Fourier Transform) em análise da condição de máquinas rotativas**. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 2, n. 23, p. 125-144, 2016.

MERCADO LIVRE. **Filamento pla**. Disponível em: <https://lista.mercadolivre.com.br/filamento->

pla#D[A:filamento%20pla]. Acesso em: 12.set. 2023a.

MERCADO LIVRE. **Filamento abs**. Disponível em: [https://lista.mercadolivre.com.br/filamento-abs#D\[A:filamento%20abs\]](https://lista.mercadolivre.com.br/filamento-abs#D[A:filamento%20abs]). Acesso em: 12.set. 2023b.

MERCADO LIVRE. **Filamento nylon**. Disponível em: [https://lista.mercadolivre.com.br/filamento-nylon#D\[A:filamento%20nylon\]](https://lista.mercadolivre.com.br/filamento-nylon#D[A:filamento%20nylon]). Acesso em: 12.set. 2023c.

MERCADO LIVRE. **Chapa alumínio liso 2000X1000 na esp 0,5mm**. Disponível em: https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-2005989260-chapa-aluminio-liso-2000x1000mm-na-esp-de-05mm-_JM. Acesso em: 12.set. 2023d.

MERCADO LIVRE. **Chapa de latão 1,5mm X 30cm largura X 30cm comprimento**. Disponível em: https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-3809936386-chapa-de-lato-15mm-x-30cm-largura-x-30cm-comprimento-_JM#position=4&search_layout=stack&type=item&tracking_id=dc1bef40-e279-4b2a-beddb8094d36f3a1. Acesso em: 12.set. 2023e.

MIRANDA, H.C. **Processos de fabricação**. Universidade Federal do Ceará. Disponível em: <https://kaiohdutra.files.wordpress.com/2012/10/apostilatecii.pdf>. Acesso em: 10 de out.2023.

MONTENEGRO, João Gabriel Soares. **Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a equação de Schrödinger estacionária com energia zero**. Monografia apresentada à coordenação do curso de Licenciatura em Química da Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2021.

MOREIRA, Rui Miguel Dias. **Conceção de um sistema de medição sem contacto da temperatura do polímero à saída do bico de uma impressora 3D FDM**. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia. Universidade do Porto. 2016.

NTI AUDIO. **Transformação rápida de Fourier FFT- Noções Básicas**. Disponível em: <https://www.nti-audio.com/pt/suporte/saber-como/transformacao-rapida-de-fourier-fft>. Acesso em: 10 de out. 2023.

NORTON, Robert L. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos**. Porto Alegre: Bookman, 2011.

NORTON, Robert L. **Projeto de máquinas**. Porto Alegre: Bookman, 2013.

OPERATION. **Densidade dos materiais**. Disponível em: <https://operation.com.br/densidade-dos-materiais/>. Acesso em: 23 de out, 2023.

PAIVA, Matheus Fernandes. **Estudo de viabilidade técnica da troca do aço ASTM A36 por polietileno de alta densidade para um tanque de polimento de efluentes**. 2023.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4ª Edição. Ed:Pearson. 2008.

RIBEIRO, Emília Mello. **Profissiografia de Marcenaria**. Arquivos brasileiros de psicotécnica, v. 2, n. 2, p. 73-82, 1950.

SCOPI. **Análise SOWT(FOFA): o que é e como usa-la no planejamento estratégico da**

sua empresa. Disponível em: <https://scopi.com.br/blog/analise-swot/>. Acesso em: 12 de ago.2023.

SILVA, Angelo Antunes da Rocha. **Técnicas de Modelagem Matemática e os Métodos de Runge-Kutta.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2021.

SOUZA, Thiago Abrante de. **Utilização da metodologia ashby no projeto UFPBaja para a seleção de materiais.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal da Paraíba. Engenharia Mecânica, João Pessoa, 2020.

STEWART, James; ROMO, Jorge Humberto. **Cálculo. Volume I.** Cengage Learning, 2017.

TAKAHASHI, Ricardo HC. **Transformada Discreta de Fourier: Motivação e Aplicações.** Notas de Aula de Mini-Curso. Universidade Federal de Minas Gerais. Outubro, 2002.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA (UNESP), **Faculdade de engenharia**, Câmpus São João da Boa vista. Disponível em: <https://www.sjbv.unesp.br/#!/ensino/graduacao/cursos/engenharia-aeronautica/>. Acesso em 10 de out.2023

APÊNDICE A – CÓDIGO MATLAB

```

clc
clear variables
close all

global M K C %#ok<*GVMIS>

K1 = 721.86; %N/m
K2 = 721.86; %N/m
K3 = 721.86; %N/m

m1 = 2; %kg
m2 = 2; %kg
m3 = 2; %kg

t0 = 0; %tempo de simulação inicial segundos
tf = 10; %tempo final de simulação segundos

numero_discretizacao_no_tempo = 1000;
vetor_tempo = linspace(t0,tf,numero_discretizacao_no_tempo); %verificar o número de
pontos
delta_t = (tf - t0)/numero_discretizacao_no_tempo;

u1_0 = 0; %deslocamento inicial da massa 1 m
u2_0 = 0; %deslocamento inicial da massa 2 m
u3_0 = 0; %deslocamento inicial da massa 3 m
%puxar a massa 3 10 cm para direita

v1_0 = 0; %velocidade inicial da massa 1 m/s
v2_0 = 0; %velocidade inicial da massa 2 m/s
v3_0 = 0; %velocidade inicial da massa 3 m/s

inicial = [u1_0; u2_0; u3_0; v1_0; v2_0; v3_0]; % condições iniciais

alpha = 0.000; %amortecimentos de raileigh
betha = 0.0005; %amortecimentos de raileigh

M = [m1, 0, 0; 0, m2, 0; 0, 0, m3]; %matriz de massa
K = [K1+K2, -K2, 0; -K2, K2+K3, -K3; 0, -K3, K3]; %matriz de rigidez
C = alpha*M + betha*K; %definindo amortecimento a partir da massa e rigidez Rayleigh

resposta = ode45(@espacodeestados, [t0,tf], inicial); %Runge-Kutta de quarta ordem e erro
de ordem cinco
tempo = resposta.x; %depende da variavel colocada na função

%y=resposta.y;
y = deval(resposta, vetor_tempo);

```

```

u1 = y(1,:);
u2 = y(2,:);
u3 = y(3,:);

v1 = y(4,:);
v2 = y(5,:);
v3 = y(6,:);

a1 = gradient(v1, vetor_tempo);
a2 = gradient(v2, vetor_tempo);
a3 = gradient(v3, vetor_tempo);

figure(1)
subplot(3,2,1)
plot(vetor_tempo, u1, vetor_tempo, u2, vetor_tempo, u3)
legend(['u1'; 'u2'; 'u3'])
title('Deslocamentos')

subplot(3,2,3)
plot(vetor_tempo, v1, vetor_tempo, v2, vetor_tempo, v3)
legend(['v1'; 'v2'; 'v3'])
title('Velocidades')

subplot(3,2,5)
plot(vetor_tempo, a1, vetor_tempo, a2, vetor_tempo, a3)
legend(['a1'; 'a2'; 'a3'])
title('Acelerações')

%autovalores (frequência) e autovetores (modos)-frequência natural
[Modos, Freq]= eig(K,M);
Freq = Freq.^0.5/(2*pi); % hertz

Fs = 1/delta_t; % frequência
L = length(vetor_tempo); % tamanho do sinal
n = 2^nextpow2(L); %próxima potência de dois depois de L
freqs = Fs*(0:(n/2))/n;

title("Gaussian Pulse in Frequency Domain")
xlabel("f (Hz)")
ylabel("|P(f)|^2")

U1 = fft(u1, n);
U2 = fft(u2, n);
U3 = fft(u3, n);

V1 = fft(v1, n);
V2 = fft(v2, n);
V3 = fft(v3, n);

A1 = fft(a1, n);

```

```

A2 = fft(a2, n);
A3 = fft(a3, n);

absU1 = abs(U1(1:n/2+1));
absU2 = abs(U2(1:n/2+1));
absU3 = abs(U3(1:n/2+1));

absV1 = abs(V1(1:n/2+1));
absV2 = abs(V2(1:n/2+1));
absV3 = abs(V3(1:n/2+1));

absA1 = abs(A1(1:n/2+1));
absA2 = abs(A2(1:n/2+1));
absA3 = abs(A3(1:n/2+1));

subplot(3,2,2)
semilogy(freqs,absU1, ...
    freqs,absU2, ...
    freqs,absU3)
title('Descolcamentos no domínio da frequência')
xlabel("frequência (Hz)")
ylabel("fft")

subplot(3,2,4)
semilogy(freqs,absV1, ...
    freqs,absV2, ...
    freqs,absV3)
title('Velocidades no domínio da frequência')
xlabel("frequência (Hz)")
ylabel("fft")

subplot(3,2,6)
semilogy(freqs,absA1, ...
    freqs,absA2, ...
    freqs,absA3)
title('Acelerações no domínio da frequência')
xlabel("frequência (Hz)")
ylabel("fft")

function f=f1(t)
    if t<0.01
        f =1;
    else
        f = 0;
    end
end

function f=f2(t) %#ok<INUSD>
    if t<0.01

```

```

        f = 0;
    else
        f = 0;
    end
end

function f=f3(t)
    if t<0.01
        f = 0;
    else
        f = 0;
    end
end

function dy = espacodeestados(t, y)
    global M K C % puxa as variáveis de fora da função
    F = [f1(t); f2(t); f3(t)];

    M0 = zeros(3);
    I = eye(3);

    A_21 = -inv(M)*K;
    A_22 = -inv(M)*C;

    A = [M0, I; A_21, A_22];

    B_11 = [0; 0; 0];
    B_21 = M \ F; % resolva o sistema M*B_21 = F
    B = [B_11; B_21];

    dy = A*y + B; % espaço de estados
end

```