

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCEL DE BRITTO GONÇALVES

Estudo introdutório da estrutura hamiltoniana de um novo modelo de spin-3

Guaratinguetá
2026

Marcel de Britto Gonçalves

Estudo introdutório da estrutura hamiltoniana de um novo modelo de spin-3

Trabalho de Dissertação apresentado ao Conselho de Curso de Pós-graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

Orientador: Profº Dr. Denis Dalmazi

Coorientador: Profº Dr. Elias Leite Mendonça

Guaratinguetá

2026

G635e	<p>Gonçalves, Marcel de Britto</p> <p>Estudo introdutório da estrutura hamiltoniana de um novo modelo de spin-3 / Marcel de Britto Gonçalves - Guaratinguetá, 2026.</p> <p>59 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 55-56</p> <p>Dissertação de mestrado – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2026.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi</p> <p>Coorientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça</p> <p>1. Teoria quântica de campos. 2. Dirac, Equações de. 3. Campos de calibre (Física). I. Título.</p> <p>CDU 530.145(063)</p>
-------	--

Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária/CRB-8 9203

MARCEL DE BRITTO GONÇALVES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA E ASTRONOMIA”

PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: MESTRADO

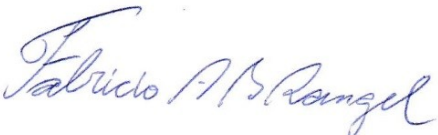
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof.ª. Dr.ª. Olívia Maria Berengue
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador - UNESP


Prof. Dr. GUSTAVO PAZZINI DE BRITO
UNESP


Prof. Dr. FABRÍCIO AUGUSTO BARONE RANGEL
UNIFEI

AGOSTO de 2026

DADOS CURRICULARES

MARCEL DE BRITTO GONÇALVES

NASCIMENTO 15/09/2001 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO José Mecias Gonçalves
Selma de Britto Gonçalves

2019 / 2023 Curso de Graduação em Física - Bacharelado
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá - UNESP

2024 / 2025 Curso de Pós-Graduação em Física - Mestrado
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá - UNESP

Dedico este trabalho aos meus amados familiares, aos presentes e aos que já se foram, à minha ancestralidade e ao meu pai, Logun Edé, por me darem forças até o fim desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Denis Dalmazi e Elias Mendonça, dedico meu profundo agradecimento por mais este ciclo de parceria e confiança. Conduzir uma pesquisa em física teórica exige coragem, e sou grato por terem me desafiado com um tema complexo, guiando-me com paciência cirúrgica através de cada obstáculo matemático. Mais do que corrigir equações ou sugerir caminhos, vocês me ensinaram o verdadeiro significado do ofício da pesquisa: a persistência diante do desconhecido e o rigor intelectual. Agradeço por dividirem comigo não apenas o conhecimento técnico, mas a paixão pela ciência. Estendo este agradecimento aos professores da banca de qualificação, cujas contribuições valiosas ajudaram a moldar a versão final deste texto.

Gostaria também de registrar o meu reconhecimento às ferramentas de Inteligência Artificial e principalmente meus agradecimentos a seus desenvolvedores, pois tais ferramentas auxiliaram-me na etapa final de revisão deste trabalho, identificando e corrigindo erros gramaticais que inevitavelmente passam despercebidos aos olhos cansados, ajudando a garantir a clareza e a fluidez do texto.

Aos meus eternos irmãos de república e à nossa queridíssima Celina, divido com muito afeto o mérito deste trabalho. A jornada acadêmica seria árdua demais se não houvesse um lugar para descontrair. As pausas para o café no meio da tarde, os sorrisos jogados fora, as discussões na sala e na cozinha foram minha diversão diária. Obrigado por aliviarem o estresse dos dias difíceis, por transformarem a nossa rotina em algo leve e por me mostrarem que, mesmo longe de minha cidade natal, encontrei nos moradores e ex-moradores uma verdadeira segunda família. O companheirismo e a união que compartilhamos estão guardados no meu coração e foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Por fim, aos meus familiares — pais, irmãs, tias e avós —, renovo a minha eterna gratidão. Se na graduação vocês foram a base sólida para o meu início, no mestrado foram o porto seguro infalível que me sustentou nos dias de exaustão e incerteza. A pós-graduação muitas vezes nos exige um isolamento silencioso, e sou imensamente grato por terem compreendido minhas ausências físicas e meus momentos de quietude mental, quando minha cabeça insistia em se perder nas equações. Mesmo distante ou imerso em pensamentos, o amor e o suporte de vocês sempre se fizeram presentes, provando que não importam as distâncias ou a complexidade do caminho, parte de minha verdadeira força emana de casa.

A outra parte dessa força vem de toda a minha espiritualidade, que guarda o meu caminhar. Agradeço imensamente ao meu pai, Logun Edé, dono do meu Ori, por ter sido o farol nas noites mais densas deste ciclo. Quando a mente pesava diante das complexidades do mundo e das equações, era no recanto da minha fé que eu encontrava a calma necessária para restabelecer o equilíbrio e me reerguer, iluminando o meu ori com a clareza necessária para que eu pudesse concluir esta jornada. Foi sob o encanto da sua dualidade que meu espírito pôde se desarmar, encontrando a paz que o ambiente acadêmico, por vezes, tenta nos tirar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Mathematics is the tool specially suited for dealing with abstract concepts of any kind and there is no limit to its power in this field.”
(Paul Dirac)

RESUMO

A formulação de teorias consistentes para campos de spin superior ($s > 2$) interagentes permanece um desafio da Teoria Quântica de Campos. É possível que um novo ponto de partida (teoria livre) possa trazer alguma luz sobre esse problema. Este trabalho tem como motivação a investigação da dinâmica de modelos de spin alto não massivos livres através do formalismo Hamiltoniano, mais especificamente do modelo "*Partially Broken Fronsda*" (*PBF*), um modelo de spin alto recém-proposto na literatura. Utiliza-se o algoritmo de Dirac-Bergmann como ferramenta central para a análise do espaço de fase, complementado pelo algoritmo de Castellani, estendido pelo trabalho posterior de Henneaux, Teitelboim e Zanelli (HTZ), além de um estudo sobre o papel da inexistência de vínculos primários de segunda classe. Estamos particularmente interessados na correspondência entre parâmetros de *gauge* e vínculos de primeira classe. Inicialmente, são examinados modelos simples, com e sem conteúdo físico, de modo a introduzir e familiarizar o leitor com a aplicação do algoritmo. O objetivo primário desta dissertação é a análise hamiltoniana do modelo *PBF* para campos de spin-3. Ao flexibilizar a simetria de calibre do modelo canônico de Fronsda com a condição extra de dupla divergência nula dos parâmetros de *gauge* ($\partial \cdot \partial \cdot \bar{\Lambda} = 0$), obtém-se o modelo *PBF*, que mantém a propagação das helicidades físicas corretas mas reduz a quantidade de parâmetros de calibre independentes em relação ao modelo de Fronsda, reduzindo os vínculos sobre as fontes, gerando possivelmente novas perspectivas para o estudo de interações em teorias de spin superior.

palavras-chave: algoritmo de Dirac-Bergmann; vínculos; graus de liberdade; spin-2; spin-3; teoria de campos de spin alto.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN	13
2.1	Sistema Hamiltoniano Vinculado	14
2.2	Aplicação do algoritmo de Dirac-Bergmann em Teoria de Campos	18
3	APLICAÇÕES DO ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN	20
3.1	Modelo de Maxwell	20
3.2	Modelo de Einstein-Hilbert Linearizado	23
3.3	Algoritmo de Castellani e Aplicações	26
3.4	Modelo <i>Maxwell-Like</i> (M-L) de spin-2	31
3.5	Modelo Trivial de <i>rank</i> -1	34
3.6	Modelo Trivial de <i>rank</i> -2 de Traço-nulo	36
3.7	Modelo de <i>rank</i> -3 Puro Traço	40
4	ANÁLISE DE DIRAC NOS MODELOS DE FRONSDAL E <i>PBF</i> (PRELIMINARES)	44
4.1	Modelo de Fronsdal	44
4.2	O Novo Modelo <i>PBF</i>	48
4.2.1	Introdução	48
4.2.2	Análise hamiltoniana preliminar	50
4.2.3	Ausência de vínculos de segunda classe no <i>PBF</i>	52
5	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	55
	APÊNDICE A – PARÊNTESES DE POISSON BÁSICOS (<i>RANK</i>-2 E <i>RANK</i>-3)	57
	APÊNDICE B – EVOLUÇÃO E PARÊNTESES DOS VÍNCULOS SECUNDÁRIOS DE FRONSDAL	58

1 INTRODUÇÃO

No âmbito da Teoria Quântica de Campos, a fundamentação para partículas com spins altos reside nas representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré, permitindo assim a existência de partículas com spin arbitrário (inteiro ou semi-inteiro). Embora tais representações fundamentem a existência de campos livres de spin alto, problemas graves surgem assim que introduzimos as interações. Visto que interações são fisicamente incontornáveis, basta lembrar do acoplamento universal da gravidade, tais dificuldades levam-nos a questionar a existência de partículas de spin alto. Até hoje, apenas partículas elementares de spin 0, 1/2 e 1 foram observadas experimentalmente, embora existam partículas compostas (ressonâncias) com spin mais alto ($s > 1$) e com existência de curta duração.

Tecnicamente, a introdução de interações via acoplamento mínimo através da substituição da derivada parcial ∂_μ pela derivada covariante ∇_μ , por exemplo, quebra explicitamente a simetria de *gauge* das teorias livres sem massa devido à não comutatividade das derivadas em espaços curvos. Especialmente para teorias de spin alto sem massa, há teoremas "no-go" devido à quebra de unitariedade, positividade da energia e causalidade, que proíbem partículas sem massa de interagir até mesmo no espaço de Minkowski com o campo eletromagnético ou com a gravidade quando seu spin s é maior que um certo valor. A existência dessas restrições sobre interações torna o estudo das próprias formulações livres para campos de spin alto importante, pois na construção padrão de teoria de campos, o modelo interagente pode ser estruturado como a soma de uma teoria livre ($\mathcal{L}^L$) e de termos de acoplamento ($\mathcal{L}_{INT}$) tal como: $\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}_{INT}$, onde $\mathcal{L}_{INT}$ deve ser compatível com as simetrias de $\mathcal{L}^L$ ou extensões delas.

Historicamente, a tentativa de generalizar a dinâmica de partículas elementares para spins mais altos remonta a Dirac que, em 1936, tentou uma generalização do modelo para partículas de spin-1/2. Porém, uma melhor classificação sobre essas partículas foi realizada posteriormente em (Fierz; Pauli, 1939) estabeleceram critérios consistentes para campos massivos de spin alto, como a positividade da energia além do próprio trabalho (Wigner, 1939) que estabeleceu que os estados de uma partícula elementar devem carregar uma representação unitária irredutível do grupo de Poincaré, relacionando intimamente o spin e a massa à estrutura do espaço-tempo. Posteriormente, (Rarita; Schwinger, 1941) estenderam o formalismo para abranger partículas elementares de spin semi-inteiro, formulando a equação de onda específica para férmions massivos de spin $s = 3/2$ tendo como subsequência o trabalho (Bargmann; Wigner, 1948) que formalizou as equações de onda relativísticas de primeira ordem para partículas de spin arbitrário, tanto massivas quanto para não massivas.

Em 1958, Fronsdaal sugeriu uma nova descrição "*on shell*" massiva da formulação de Fierz-Pauli (Fronsdaal, 1958) via operadores de projeção que foi útil para construir Lagrangianas de spin mais alto arbitrário. Vale lembrar também a contribuição (Schwinger, 1970), que através de sua teoria de fontes, tratou explicitamente o caso para campos de spin-3 sem massa, utilizando fontes tensoriais totalmente simétricas para isolar consistentemente os graus de liberdade físicos. Mais tarde, Singh e Hagen alcançaram o feito de escrever uma lagrangiana explícita para campos massivos livres de spin inteiro (Singh; Hagen, 1974a) e semi-inteiro (Singh; Hagen, 1974b) arbitrários. Fronsdaal, em

1978, estudou o limite de massa zero da Lagrangiana de Singh-Hagen e encontrou uma simplificação considerável da teoria, obtendo lagrangianas para partículas sem massa de spin inteiro arbitrário, depois em colaboração com Fang (Fang; Fronsda, 1978) para spin semi-inteiro também arbitrário. No caso específico de partículas de spin-3, trabalhando com um campo de *rank*-3 totalmente simétrico pela troca dos três índices ($h_{\mu\nu\alpha} = h_{(\mu\nu\alpha)}$), ele mostrou que a simetria de *gauge* $\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_{(\mu} \bar{\Lambda}_{\nu\rho)}$ e a condição de traço nulo do parâmetro $\eta^{\mu\nu} \bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$ desempenham um papel importantíssimo, garantindo o número correto de graus de liberdade do modelo (Fronsda, 1978). Essa simetria leva a rígidas restrições no acoplamento com fontes externas.

A partir da adição de parâmetros arbitrários no modelo de Fronsda, notou-se recentemente (Dalmazi; Martins, 2025) que existe uma região no espaço de parâmetros afastada do "ponto de Fronsda" onde, ainda temos uma descrição irreduzível de partículas sem massa de spin inteiro $s \geq 3$ de tal forma que agora a simetria de *gauge* é restringida por uma condição extra de dupla divergência nula sobre o parâmetro de *gauge* sem traço, $\partial^\mu \partial^\nu \bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$, que surpreendentemente não introduz novos invariantes de *gauge* propagantes, demonstrando que temos apenas estados de helicidade $\pm s$ como modos de propagação para spin- s em $D = 4$ dimensões. Devido à "quebra de simetria" com relação ao modelo de Fronsda, este modelo recém-proposto é chamado de "*Partially Broken Fronsda*" (*PBF*). Logo, espera-se que uma redução nos parâmetros independentes da simetria de *gauge* permita acoplamentos com fonte mais gerais quando comparado ao modelo de Fronsda. No caso do modelo de Fronsda, podemos acrescentar à lagrangiana livre (Fronsda) um acoplamento tal como $T^F_{\mu\nu\rho} h^{\mu\nu\rho}$ onde $T^F_{\mu\nu\rho}$ represente uma fonte externa. Mostraremos em detalhes no capítulo 4 que a simetria de *gauge* de Fronsda requer que a fonte seja conservada a menos de um termo diagonal de *rank*-2 representado por uma função arbitrária Ω , ou seja, $\partial^\mu T^F_{\mu\nu\rho} = \eta_{\nu\rho} \Omega$. Devido à condição extra $\partial^\mu \partial^\nu \bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$, há mais liberdade no caso do modelo *PBF* na escolha da fonte que agora não é conservada a menos de dois escalares arbitrários (Ω, J), ou seja, $\partial^\mu T^{PBF}_{\mu\nu\rho} = \eta_{\nu\rho} \Omega + \partial_\nu \partial_\rho J$.

O objetivo central deste trabalho é iniciar a análise hamiltoniana dos novos modelos de spin alto, através do *PBF* de spin-3, via algoritmo de Dirac–Bergmann, um método clássico apresentado em (Dirac, 1964) utilizado para a análise de vínculos dentro da teoria de campos. Com este método, é possível realizar uma análise sistemática dos modelos, estudando a estrutura de vínculos, a contagem de graus de liberdade físicos e as condições necessárias para a consistência da teoria, como por exemplo a positividade da Hamiltoniana. A análise dos vínculos é importante para o entendimento das simetrias de calibre dos modelos físicos. Assim sendo, dominar o algoritmo de Dirac-Bergmann é útil para compreender melhor novos modelos que surgem em teoria de campos.

Neste trabalho serão abordados conceitos básicos sobre o formalismo hamiltoniano no capítulo 2, onde o intuito é apresentar a base que será trabalhada em todo o algoritmo de Dirac-Bergmann que será posteriormente introduzido no mesmo capítulo.

No capítulo 3 faremos um estudo sobre uma variedade de modelos de *rank*-1, *rank*-2 e *rank*-3, estes últimos descritos por tensores simétricos, com a finalidade de familiarizar-nos com o algoritmo em sua parte prática e apresentar também o algoritmo de Castellani, para a construção hamiltoniana de geradores de simetria de calibre. O trabalho de Castellani, o trabalho posterior de (Henneaux; Teitelboim; Zanelli, 1990) e os exemplos que apresentaremos indicam que há uma associação um

a um entre o número de vínculos primários de primeira classe e o número de parâmetros de *gauge* independentes mesmo quando os parâmetros satisfazem restrições.

No capítulo 4, realizar-se-á uma análise hamiltoniana do modelo de Fronsdaal assim como uma análise preliminar do algoritmo de Dirac-Bergmann aplicado ao modelo *PBF* recentemente proposto, ambos para spin $s = 3$ que é o caso mais simples dos modelos *PBF* de spin $s \geq 3$. O objetivo é introduzir alguns conceitos deste novo modelo, tal como sua estrutura lagrangiana, simetrias, estrutura de vínculos primários, e abordar algumas diferenças com relação ao modelo de Fronsdaal. Embora não tenhamos conseguido finalizar a análise Hamiltoniana do modelo *PBF*, com auxílio de alguns resultados gerais para sistemas vinculados, há uma forte indicação de que o modelo *PBF* não deve possuir vínculos de segunda classe, em semelhança ao próprio modelo de Fronsdaal.

Por fim, nos apêndices (A) e (B) respectivamente serão detalhados explicitamente os cálculos dos parênteses de Poisson entre campos e momentos para fins didáticos e também a evolução temporal dos vínculos secundários do modelo de Fronsdaal para melhor visualização dos cálculos.

2 ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Desde o século XVIII, a mecânica analítica tem sido desenvolvida para diversos fins, e os sistemas físicos estudados são separados entre sistemas regulares (não-singulares) e sistemas singulares, embora os primeiros sejam mais comuns. Para dividi-los entre esses dois grupos é necessário primeiramente definir um sistema clássico descrito por uma lagrangiana¹ $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$, sendo q_j e $\dot{q}_j$ as coordenadas e velocidades generalizadas, respectivamente, do sistema clássico descrito por N coordenadas, ou seja, $i = 1, \dots, N$.

Seja a ação desse sistema físico dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j) dt \quad . \quad (2.1)$$

Utilizando o princípio de Hamilton, obtêm-se as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

isto é, um conjunto de N equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo em geral, chamadas de equações de movimento do sistema. Reescrevendo as equações (2.2) de forma a obter as acelerações $\ddot{q}_i$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_i = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad , \quad (2.3)$$

é natural definir a matriz hessiana:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad . \quad (2.4)$$

Claramente percebe-se que se $\det W \neq 0$ as acelerações $\ddot{q}_i$ poderão ser escritas em função de q_i e $\dot{q}_i$, diz-se que a hessiana é inversível e temos um "sistema regular". No entanto, se $\det W = 0$, não serão todas as acelerações que poderão ser determinadas unicamente por q_i e $\dot{q}_i$ devido aos vínculos que o sistema possui como veremos. Assim temos um "sistema singular" onde a matriz W_{ij} passa a ter modos zero, ou seja, autoestados com autovalores nulos. Esse mesmo aspecto, isto é, singularidade versus regularidade, pode ser estudado do ponto de vista hamiltoniano.

Para adentrar no formalismo hamiltoniano, é necessário introduzir a definição de momento canônico para cada coordenada generalizada q_i ,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

e agora tem-se que as variáveis independentes foram duplicadas (q_i, p_i) e o sistema físico passa a ser descrito pelo espaço de fase que contém $2N$ dimensões. Note que só é possível que os momentos canônicos sejam inversíveis se o jacobiano da transformação para o novo espaço de fase for não nulo,

¹ Aqui trabalharemos com teorias que não dependem explicitamente do tempo.

isto é, o determinante da mudança de variáveis das velocidades $\dot{q}_i$ para os momentos p_i deve satisfazer:

$$\det \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) = \det W \neq 0, \quad (2.6)$$

ou seja, recai-se novamente na necessidade de uma hessiana inversível para poder escrever todas velocidades $\dot{q}_i$ em função das coordenadas q_i e momentos independentes p_i .

Para os casos a serem estudados posteriormente, somente interessa os sistemas singulares, ou, de forma mais precisa, sistemas onde alguns momentos canônicos não são funções dependentes das velocidades. Com isso, existem certas relações entre as variáveis canônicas tais como:

$$\phi_m(q, p) = 0. \quad (2.7)$$

As variáveis canônicas do espaço de fase são conectadas (vinculadas) pelas equações (2.7), que são chamados de *vínculos primários* do formalismo hamiltoniano. Em vista disso, para um sistema onde se tem N velocidades, somente N' das N velocidades podem ser determinadas em função das variáveis canônicas q e p , e o restante das $N - N'$ velocidades não podem ser determinadas. Assim surgem os $N - N'$ vínculos primários da teoria, isto é, $m = 1, 2, \dots, N - N'$. Como os vínculos valem em qualquer instante " t ", para $t = 0$ temos $\phi_m(q_0, p_0) = 0$, o que vincula as condições iniciais q_0 e p_0 .

2.1 SISTEMA HAMILTONIANO VINCULADO

No caso de sistemas regulares, obtemos a hamiltoniana canônica a partir de uma transformação de Legendre² da lagrangiana:

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

De forma análoga às N equações de movimento que se tem no caso de Euler-Lagrange mediante o princípio variacional, se obtém agora as $2N$ equações canônicas de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.9)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.10)$$

Agora temos $2N$ equações de primeira ordem ao invés de N equações de segunda ordem em derivadas temporais. Introduzimos os parênteses de Poisson para duas variáveis dinâmicas arbitrárias $A(q, p)$ e $B(q, p)$:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i}, \quad (2.11)$$

² Índices repetidos estão sendo somados.

por conseguinte, o parênteses de Poisson entre as variáveis dinâmicas q e p resulta em

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad (2.12)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = -\{p_j, q_i\}, \quad (2.13)$$

de forma que, na formulação hamiltoniana a partir de (2.9) e (2.10), pode-se escrever a evolução temporal de qualquer variável dinâmica que não dependa explicitamente do tempo como sendo:

$$\dot{A}(q, p) = \{A(q, p), H\} \quad (2.14)$$

Para sistemas vinculados (singulares) as equações de Hamilton (2.9) e (2.10) obtidas da hamiltoniana canônica (2.8) diferem das equações de Euler-Lagrange (2.2). Para reestabelecer a equivalência entre os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, é necessário redefinir a hamiltoniana. De acordo com (Dirac, 1964), será adicionada à hamiltoniana canônica uma combinação linear dos vínculos primários (que, a princípio, são nulos) de forma a definir a *hamiltoniana primária* H_P a seguir

$$H_P = H + \lambda_m \phi_m \quad (2.15)$$

onde λ_m são chamados de multiplicadores de Lagrange da teoria. Mais uma vez, aplicando o princípio variacional, diferentemente das equações obtidas em (2.9) e (2.10), deduz-se as equações de movimento hamiltonianas generalizadas envolvendo também os vínculos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_P}{\partial p_i} \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_P}{\partial q_i} \quad (2.17)$$

tal que, a partir do resultado encontrado em (2.16) e (2.17), estabelece-se para qualquer grandeza $A(q, p)$:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i = \{A, H\} + \lambda_m \{A, \phi_m\} = \{A, H_P\} \quad (2.18)$$

No entanto, ao calcular os parênteses de Poisson, deve-se atentar aos vínculos do sistema em questão, caso se utilize diretamente (fortemente) no cálculo os vínculos primários (2.7), teríamos um resultado incorreto pois $H_P = H$. Portanto, deve-se trabalhar com os parênteses de Poisson antes de se utilizar os vínculos primários (2.7), e para isso, introduz-se um novo conceito chamado *igualdade fraca*:

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad (2.19)$$

onde o vínculo agora é chamado de *fracamente nulo*, isto significa que não se pode tratar os vínculos $\phi_m(q, p)$ como uma função identicamente nula, pois do contrário, os parênteses de Poisson com os vínculos seriam identicamente nulos e a redefinição da hamiltoniana seria inócua. Devemos primeiro calcular todos os parênteses de Poisson e só então implementar os vínculos. Por conseguinte, pode-se

reescrever as equações de movimento da forma

$$\dot{A}(q, p) = \{A, H_P\} \approx \{A, H\} + \lambda_m \{A, \phi_m\} \quad (2.20)$$

Para começar a atuar com o algoritmo de Dirac-Bergmann, é necessário que se cumpram as *condições de consistência* dos sistemas vinculados, isto é, trocando a função $A(q, p)$ da relação (2.20) por um vínculo ϕ_m , é evidente que $\dot{\phi}_m$ deve ser nulo por consistência, ou seja, cada vínculo é válido para todo instante " t ". Assim, tem-se a estrutura a ser utilizada pelo algoritmo:

$$\dot{\phi}_m(q, p) = \{\phi_m, H\} + \lambda_n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0 \quad (2.21)$$

Observe que devemos calcular os parênteses de Poisson na relação (2.21) antes de aplicar fortemente os vínculos primários. A depender das diferentes combinações entre os possíveis resultados dos parênteses de Poisson, obtém-se diferentes conclusões intermediárias para o algoritmo, desde a aparição de novos vínculos, chamados *vínculos secundários*, a determinação dos multiplicadores de lagrange λ_m ou a condição de consistência sendo identicamente satisfeita. Assim, o uso da condição de consistência (2.21) dos vínculos primários resulta em quatro possíveis casos:

- **Caso 1:** $\{\phi_m, H\} \approx 0$, $\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$

Esse é o caso da condição de consistência identicamente satisfeita, isto é, $0 \approx 0$. Se isto ocorrer, o algoritmo é finalizado e os vínculos encontrados até o momento serão os únicos vínculos do sistema. Sem adição de vínculos secundários ou posteriores, os multiplicadores de Lagrange permanecerão totalmente arbitrários. Essa arbitrariedade não significa que o modelo físico não tem poder preditivo, mas que há coordenadas redundantes (simetrias de *gauge*) como veremos posteriormente.

- **Caso 2:** $\{\phi_m, H\} \approx 0$, $\{\phi_m, \phi_n\} \not\approx 0$

O multiplicador de Lagrange tem solução trivial:

$$\lambda_m = 0 \Rightarrow H_p = H \quad (2.22)$$

- **Caso 3:** $\{\phi_m, H\} \not\approx 0$, $\{\phi_m, \phi_n\} \not\approx 0$

Neste caso, as condições de consistência determinam os multiplicadores de Lagrange, ou seja, não existe arbitrariedade no sistema. Visando a determinação dos multiplicadores de Lagrange, define-se uma matriz C :

$$C_{mn} = \{\phi_m, \phi_n\} \quad (2.23)$$

que deve ser não singular, $\det(C_{mn}) \not\approx 0$, e portanto de $\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H_P\} \approx 0$ tem-se de (2.21) que

$$\lambda_n = -C_{mn}^{-1} \{\phi_m, H\}, \quad (2.24)$$

sendo que C^{-1} é a matriz inversa de C .

- **Caso 4:** $\{\phi_m, H\} \not\approx 0$, $\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0$

Somente neste caso as condições de consistência dos vínculos primários geram vínculos secundários:

$$\chi_j(q, p) \equiv \dot{\phi}_j(q, p) \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, r ; r \leq N - N' \quad (2.25)$$

Vale ressaltar que não necessariamente todos os vínculos primários gerarão vínculos secundários, por isso $r \leq N - N'$. No próximo passo deve-se utilizar o algoritmo para os vínculos secundários:

$$\dot{\chi}_r(q, p) \approx \{\chi_r, H\} + \lambda_n \{\chi_r, \phi_n\} \approx 0 \quad (2.26)$$

Note que se o resultado obtido for igual ao caso 1, 2 ou 3, o algoritmo acaba, porém, se o resultado obtido for o caso 4, isto é, $\{\chi_r, H\} \not\approx 0$ e $\{\chi_r, \phi_m\} \approx 0$, então aparecerão *vínculos terciários* e o procedimento com o algoritmo continua até não se encontrar mais vínculos no sistema, sejam eles terciários, quaternários, etc. É comum na literatura se denotar como vínculos secundários todos aqueles que não são vínculos primários.

Neste ponto da análise já se sabe como calcular a evolução temporal dos vínculos e também se são vínculos primários ou secundários. Ainda assim, é de extrema importância especificar ainda mais uma classificação entre os vínculos.

Define-se como *vínculos de primeira classe* aqueles cujos parênteses de Poisson com todos os vínculos são fracamente nulos, ou seja, se anulam quando igualamos a zero todos os vínculos, incluindo primários e secundários. Define-se também como *vínculos de segunda classe* aqueles que tem ao menos um parênteses de Poisson não fracamente nulo com pelo menos um vínculo.

É importante realizar corretamente a contagem dos vínculos de primeira e segunda classe por causa dos graus de liberdade físicos da teoria e também porque os vínculos de primeira classe geram transformações de *gauge*, com raras exceções.

Se houver vínculos de primeira classe na teoria, haverá possíveis conjuntos de variáveis canônicas que correspondem a um mesmo estado físico e, portanto, para anular essa ambiguidade, impõe-se restrições chamadas de *condições de gauge*. Mais precisamente, impondo tais condições de calibre³ (fixação de *gauge*) na teoria, se remove a ambiguidade associada à transformação de simetria gerada por um vínculo de primeira classe.

A contagem dos graus de liberdade de um sistema físico na formulação hamiltoniana se dá através de

$$N_F = N_H - FCC - SCC - GF \quad (2.27)$$

sendo N_F o número de graus de liberdade físicos na formulação hamiltoniana, N_H a dimensão do espaço de fase, FCC o número de vínculos de primeira classe, SCC o número de vínculos de segunda classe e GF o número de condições de fixação de *gauge*. Mas nota-se que cada vínculo de primeira classe independente permite uma fixação de *gauge*, portanto, como $FCC = GF$, para a formulação hamiltoniana, o número dos graus de liberdade físicos se dá então por

$$N_F = N_H - 2FCC - SCC \quad (2.28)$$

³ Nesta dissertação usamos tanto a palavra inglesa "*gauge*" como a tradução "*calibre*" para o português.

Na formulação lagrangiana a contagem dos graus de liberdade físicos é equivalente à

$$N = \frac{N_F}{2} = \frac{N_H - 2FCC - SCC}{2} \quad (2.29)$$

É de suma importância checar a contagem de graus de liberdade do sistema físico. Modelos que descrevem partículas elementares sem massa de spin- s inteiro possuem dois graus de liberdade em $D = 4$ dimensões correspondendo às helicidades $\pm s$. Portanto, essa deve ser a contagem que esperamos para os modelos de spin-3 sem massa, abordados no capítulo 4.

É de se esperar ganhar ou perder graus de liberdade de acordo com a simetria local presente. Estes casos serão abordados no decorrer do trabalho.

2.2 APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN EM TEORIA DE CAMPOS

Na seção anterior, mostramos que a mecânica analítica de um sistema físico com um número finito de graus de liberdade N é descrito pelas coordenadas generalizadas $q_i(t)$ em seu formalismo lagrangiano ou também por um ponto (q_i, p_i) no espaço de fase hamiltoniano. No entanto, deve-se notar ao usar esses formalismos em teoria de campos, que os sistemas físicos são representados por campos clássicos que possuem uma infinidade contínua de graus de liberdade, isto é, deixam de ser descritos por coordenadas discretas i e passam a ser representados por uma coordenada contínua x associada a cada ponto do espaço-tempo ($\phi = \phi(x, t)$). Agora, o estado do sistema é inteiramente caracterizado pelos seus campos e suas derivadas. Define-se a chamada densidade de lagrangiana $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\partial_\mu \phi, \phi]$, de tal forma que a lagrangiana do sistema contínuo deve ser expressa como⁴:

$$L[\phi] = \int_{\mathbb{R}} dx \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi), \quad (2.30)$$

Portanto, a ação que define uma teoria de campos, unidimensional para este exemplo, tem a forma

$$S = \int dt \int_{\mathbb{R}} dx \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi), \quad (2.31)$$

onde, como resultado do princípio variacional de Hamilton, encontra-se a equação de Euler-Lagrange dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad (2.32)$$

Para adentrarmos no formalismo hamiltoniano, analogamente definimos o momento canonicamente conjugado a $\phi(x, t)$:

$$\pi(x, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x, t)} \quad (2.33)$$

onde agora, similarmente ao que foi definido para um sistema com número finito de graus de liberdade, definimos a densidade de hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (2.34)$$

⁴ Supomos que não há dependência explícita nos pontos do espaço-tempo (x,t)

de modo a obter a hamiltoniana canônica do sistema

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad (2.35)$$

tal que as equações de hamilton derivam do princípio variacional tornando-se:

$$\dot{\phi}(x, t) = \frac{\delta H}{\delta \pi(x, t)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \quad (2.36)$$

$$\dot{\pi}(x, t) = \frac{-\delta H}{\delta \phi(x, t)} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \phi)} \quad (2.37)$$

Agora, o parênteses⁵ de Poisson para dois campos dinâmicos arbitrários A e B é

$$\{A(y), B(z)\} = \int dx \left[\frac{\delta A(y)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta B(z)}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta B(z)}{\delta \phi(x)} \frac{\delta A(y)}{\delta \pi(x)} \right] \quad (2.38)$$

Assim, temos os parênteses canônicos fundamentais em tempos iguais:

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\} = 0 = \{\pi(x, t), \pi(x', t)\} \quad (2.39)$$

$$\{\phi(x, t), \pi(x', t)\} = \delta^{D-1}(x - x') \quad (2.40)$$

Os parênteses de Poisson relevantes que serão utilizados ao decorrer desta dissertação entre os campos e momentos de *rank*-2 e *rank*-3 estarão abertos explicitamente no apêndice (A), assim como para facilitar a notação utilizada nesta dissertação, trocaremos $\delta^{D-1}(x - x')$ por $\delta(x - x')$. Analogamente à adaptação feita para o formalismo hamiltoniano em sistemas regulares apresentado até agora, temos também um paralelo relacionado aos sistemas singulares, cujas equações de definição de momento (2.33) não são inversíveis para todos os campos $\dot{\phi}_j$ com $j = 1, \dots, N$ em função dos momentos $\pi_j(x, t)$, resultando no surgimento das relações de vínculos primários relacionadas às $N - N'$ velocidades indeterminadas

$$\varphi_m(\phi, \pi) \approx 0, \quad m = 1, \dots, N - N' \quad (2.41)$$

de modo que podemos reescrever todo o desenvolvimento do algoritmo de Dirac-Bergmann da seção anterior similarmente apenas fazendo alterações referentes às notações de teoria de campos juntamente com a hamiltoniana primária agora descrita por

$$H_P = \int dx [\mathcal{H} + \lambda_m \varphi_m]. \quad (2.42)$$

onde $\lambda_m = \lambda_m(x, t)$ representem $N - N'$ campos multiplicadores de Lagrange. A hamiltoniana H_P deverá ser utilizada nos parênteses de Poisson das evoluções temporais dos vínculos e para D dimensões, ou seja, $D - 1$ espaciais e uma de tempo, as integrais $\int dx$ serão substituídas por $\int_{\mathbb{R}_D} d^{D-1}x$.

⁵ Note que em (3.152) substituímos a soma discreta sobre $j = 1, 2, \dots, N$ por uma soma contínua (integral).

3 APLICAÇÕES DO ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Com a fundamentação teórica resumida no capítulo anterior ¹, será apresentado o formalismo de Dirac aplicado em alguns modelos de tensores de *ranks* 1, 2 e 3 a fim, não só de criar familiaridade com o método que será utilizado mais a frente no modelo *PBF* como também apresentar formas lagrangianas que contêm estruturas similares a alguns termos presentes na lagrangiana de Fronsda e no desenvolvimento dos modelos *PBF*. Os modelos das subseções (3.1) e (3.2) têm simetrias de *gauge* irrestritas ao contrário dos modelos das subseções (3.4) a (3.7). Na subseção (3.3) comentaremos e aplicaremos o procedimento de Castellani para construção de geradores de simetria de *gauge*.

3.1 MODELO DE MAXWELL

Começaremos a aplicação do algoritmo de Dirac com um modelo clássico da literatura, a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, teoria esta que descreve partículas não massivas de spin-1 (fóton). A densidade de lagrangiana da teoria na ausência de fontes externas é dada por²

$$\mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-1 \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$ é o tensor do campo eletromagnético que possui simetria de *gauge* sob a transformação

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon(x) \quad (3.2)$$

onde $\epsilon(x) = \epsilon(x_j, t)$ é uma função arbitrária dos pontos do espaço-tempo com a única restrição que usamos também para os campos, que devem ir para zero no infinito espacial ($x_j \rightarrow \infty$). O campo $\epsilon(x)$ é chamado de parâmetro de *gauge*.

Separando as componentes espaciais das temporais, pode-se reescrever (3.1) de forma a obter

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}_i - \dot{A}_i\partial_i A_0 + \frac{1}{2}\partial_i A_0\partial_i A_0 - \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, D-1 \quad (3.3)$$

de onde obtém-se os momentos canônicos

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (3.4)$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \quad (3.5)$$

tendo portanto um vínculo primário na teoria:

$$\varphi = \pi_0 \approx 0 \quad (3.6)$$

¹ Para mais detalhes, vide os trabalhos (Dirac, 1964), (Sundermeyer, 1982), (Henneaux; Teitelboim, 1992), (Gitman; Tyutin, 2012), (Castellani, 1982). Para leituras mais recentes, vide os trabalhos (Golovnev, 2023), (Santos, 2018a), e (Santos, 2018b).

² Nesta dissertação trabalhamos com a métrica $\eta_{\mu\nu} = (-, +, \dots, +)$ em D-dimensões.

A densidade de hamiltoniana canônica é

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi_i \pi_i + \pi_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \quad (3.7)$$

Assim, a hamiltoniana primária do modelo é dada por

$$H_P = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \lambda \varphi \right] \quad (3.8)$$

Portanto, devemos aplicar a condição de consistência no vínculo primário encontrado:

- Para $\varphi = \pi_0 \approx 0$: Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\varphi(y), \mathcal{H}(x)\} = \{\pi_0(y), \mathcal{H}(x)\} = -\pi_i \partial_i^x(x) \delta(x - y) \quad (3.9)$$

Logo, após integração por partes

$$\dot{\varphi} = \int d^{D-1}x \partial_i \pi_i(x) \delta(x - y) = \partial_i \pi_i(y) \approx 0. \quad (3.10)$$

Encontrando assim o vínculo secundário (lei de Gauss)

$$\chi = \partial_i \pi_i \approx 0 \quad (3.11)$$

Deve-se aplicar novamente a condição de consistência agora no vínculo secundário.

- Para $\chi = \partial_i \pi_i \approx 0$: Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\chi(y), \mathcal{H}(x)\} = \{\partial_i \pi_i(y), \mathcal{H}(x)\} = -\partial_i^{(y)} \left[\partial_j A_i(x) \partial_j^{(x)} - \partial_i A_j(x) \partial_i^{(x)} \right] \delta(x - y) \quad (3.12)$$

Portanto,

$$\dot{\chi} = - \int d^{D-1}x \partial_i^{(y)} \left[\partial_j A_i(x) \partial_j^{(x)} - \partial_i A_j(x) \partial_i^{(x)} \right] \delta(x - y) = \nabla^2 \partial_i A_i(y) - \nabla^2 \partial_j A_j(y) = 0 \quad (3.13)$$

Logo, vemos que a condição de consistência para o vínculo secundário (3.11) é identicamente satisfeita, concluindo que não há outros vínculos na teoria. Os vínculos $\varphi \approx 0$ e $\chi \approx 0$ formam um par de vínculos de primeira classe, pois:

$$\{\varphi, \chi\} = \{\pi_0, \partial_i \pi_i\} = 0. \quad (3.14)$$

A contagem de graus de liberdade para este modelo através do algoritmo de Dirac-Bergmann se dá de acordo com (2.29) por

$$N = \frac{2D - 4}{2} = D - 2. \quad (3.15)$$

Para $D = 4$, temos $N = 2$, ou seja, os graus de liberdade referentes às helicidades $s = \pm 1$ do fóton.

A mesma contagem pode ser feita no formalismo Lagrangiano. De acordo com as equações de movimento para o eletromagnetismo,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \implies \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (3.16)$$

escolhemos o calibre de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, para que as equações de movimento se simplifiquem para uma equação de onda $\square A^\nu = 0$. No entanto, essa fixação não exclui completamente as redundâncias da teoria. Se aplicarmos a transformação de *gauge* (3.103), e calcularmos a divergência do novo campo, teremos:

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu [A^\mu + \partial^\mu \epsilon(x)] \quad (3.17)$$

Como $\partial_\mu A^\mu = 0$, o novo campo A'^μ continuará obedecendo ao calibre de Lorenz se $\square \epsilon = 0$, sendo esta uma simetria de *gauge* residual, onde a teoria permite transformações adicionais desde que o parâmetro $\epsilon(x)$ seja solução da equação de onda, de tal forma que, devido à simetria residual, podemos impor uma segunda fixação de calibre, como por exemplo $A_0 = 0$. Assim, a partir da fixação de Lorenz e da fixação da simetria residual, podemos fazer a contagem lagrangiana, onde cada restrição imposta ao campo A_μ que possui D componentes elimina um grau de liberdade das suas componentes originais e terminaríamos com:

$$N = D - 2 \quad (3.18)$$

tal que, para $D = 4$, encontra-se $N = 2$, justamente os graus de liberdade obtidos anteriormente com o algoritmo de Dirac referentes às helicidades do fóton.

Sempre é importante verificar a positividade da hamiltoniana após implementarmos os vínculos fortemente, ou seja, a chamada *Hamiltoniana Reduzida* deve satisfazer: $H_{red} \geq 0$, pois se ela pudesse assumir valores infinitamente negativos, as soluções clássicas seriam instáveis. A condição de positividade garante a existência de um limite inferior de energia, isto é, podemos construir estados excitados estáveis. Para se verificar a positividade da hamiltoniana reduzida, deve-se tomar todos os vínculos como igualdades fortemente nulas na hamiltoniana primária, isto é, eliminarmos todos os graus de liberdade redundantes da teoria. Para o modelo de Maxwell, teríamos a hamiltoniana parcialmente³ reduzida explicitamente positivo definida:

$$H_{red}^{pr} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right] \quad (3.19)$$

Observe que o momento (3.5) pode ser reescrito como $\pi_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i}$, assim, tendo em vista

³ Escreve-se "*hamiltoniana parcialmente reduzida*" pois A_i e π^i contidos na integral ainda não são completamente independentes por não terem sido separados em suas componentes longitudinais e transversais. Também, há outros métodos para se definir a positividade da hamiltoniana reduzida que, em muitos casos, acaba facilitando sua análise, como por exemplo o uso de projetores. Para mais detalhes, aconselha-se a leitura de (Benndorf; Dalmazi; Santos, 2017).

as componentes do tensor do campo eletromagnético (em $D = 4$),

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

isto é, $F_{0i} = E_i$ e $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$, podemos reescrever (3.19) num formato bem conhecido em $D = 4$:

$$H_{red} = \int d^3x \frac{1}{2} [E^2 + B^2] \quad (3.21)$$

3.2 MODELO DE EINSTEIN-HILBERT LINEARIZADO

Nesta seção, aplicaremos o algoritmo de Dirac-Bergmann no modelo de Einstein-Hilbert linearizado, teoria esta que descreve partículas não-massivas de spin-2 em termos de um tensor de *rank*-2 simétrico ($h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$).

A densidade de lagrangiana de Einstein-Hilbert linearizada em D dimensões é dada por

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\lambda\nu} \quad (3.22)$$

cuja ação correspondente possui simetria de *gauge* sob reparametrização linearizada que é definida por D parâmetros de *gauge* independentes (ϵ_μ):

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1 \quad (3.23)$$

Na seção seguinte obteremos os geradores de simetria de *gauge* no formalismo hamiltoniano para Maxwell e Einstein-Hilbert através do método de Castellani.

Reescrevendo a densidade de lagrangiana de modo a separar as componentes temporais das espaciais, considerando integrações por partes onde $\dot{h}_{0j}\partial_k h_{jk} = \partial_k h_{0j}\dot{h}_{jk}$, obtemos

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{4}(\dot{h}_{ij}^2 - \dot{h}_{ii}^2) - \dot{h}_{ij}\partial_i h_{0j} + \dot{h}_{ii}\partial_j h_{0j} - \mathcal{V} \quad (3.24)$$

sendo $\mathcal{V}$ os termos que não contêm derivada temporal

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & -\frac{1}{2}(\partial_i h_{0j})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i h_{jk})^2 + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{jj} - \frac{1}{4}(\partial_i h_{jj})^2 \\ & - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i h_{kk}\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_i h_{0i})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i h_{ij})^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

De (3.24) obtém-se os momentos canônicos

$$\pi_{00} = 0 \quad (3.26)$$

$$\pi_{0i} = 0 \quad (3.27)$$

$$\pi_{ij} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{h}_{kk} + \delta_{ij}\partial_k h_{0k} - \frac{1}{2}\partial_i h_{0j} - \frac{1}{2}\partial_j h_{0i} \quad (3.28)$$

Assim, determina-se os D vínculos primários na teoria como sendo

$$\varphi_0 = \pi_{00} \approx 0 \quad (3.29)$$

$$\varphi_j = \pi_{0j} \approx 0 \quad (3.30)$$

Podemos obter as velocidades de (3.28)

$$\dot{h}_{ij} = 2\pi_{ij} - \frac{2\delta_{ij}}{(D-2)}\pi_{kk} + \partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i} \quad (3.31)$$

de forma a escrever a densidade hamiltoniana canônica como:

$$\mathcal{H}_{EH} = \pi^{\mu\nu}\dot{h}_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{EH} = \pi_{ij}^2 - \frac{1}{(D-2)}\pi_{ii}^2 + 2\pi_{ij}\partial_i h_{0j} + \frac{1}{4}(\partial_i h_{jk})^2 + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{kk} \quad (3.32)$$

$$- \frac{1}{4}(\partial_i h_{jj})^2 - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_k h_{ik} + \frac{1}{2}(\partial_i h_{jj})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i h_{ij})^2 \quad (3.33)$$

e, portanto, a hamiltoniana primária será

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H}_{EH} + \lambda_0 \varphi_0 + \lambda_j \varphi_j) \quad (3.34)$$

Assim sendo, devemos aplicar a condição de consistência nos vínculos primários.

- Para $\varphi_0 = \pi_{00} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\begin{aligned} \{\varphi_0(y), H_P(x)\} &= \int d^{D-1}x \frac{1}{2} \left[-\partial_i h_{jj}(x) \partial_i^{(x)} + \partial_j h_{ij}(x) \partial_i^{(x)} \right] \delta(x-y) \\ &= \frac{1}{2} [\nabla^2 h_{kk}(y) - \partial_i \partial_j h_{ij}(y)] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Obtendo a partir de $\dot{\pi}_{00} \approx 0$ o vínculo secundário:

$$\chi_0 = \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij} \approx 0 \quad (3.36)$$

- Para $\varphi_l = \pi_{0l} \approx 0$:

$$\{\varphi_l(y), H_P\} = - \int d^{D-1}x \left[2\pi_{lk}(x) \partial_k^{(x)} \right] \delta(x-y) = 2\partial_k \pi_{lk}(y) \quad (3.37)$$

E assim $\dot{\pi}_{0l} \approx 0$ nos levam ao outro vínculo secundário:

$$\chi_l = \partial_k \pi_{lk} \approx 0 \quad (3.38)$$

Aplicando a condição de consistência para os vínculos secundários,

- $\chi_0 = \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\chi^0(y), \varphi^\mu(x)\} = \nabla_{(y)}^2 \delta^{ik} \frac{\partial \varphi^\mu(x)}{\partial \pi^{ik}(y)} - \partial_i^{(y)} \partial_j^{(y)} \frac{\partial \varphi^\mu(x)}{\partial \pi^{ij}(y)} = 0 \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \{\chi_0(y), H_P(x)\} &= 2 \int d^{D-1} x \nabla_{(y)}^2 \left[-\frac{\pi^{kk}(x)}{(D-2)} + \partial_k h_{0k}(x) \right] \delta(x-y) \\ &\quad - \int d^{D-1} x \partial_i^{(y)} \partial_j^{(y)} \left[2\pi^{ij}(x) - \frac{2\delta_{ij}\pi^{kk}(x)}{(D-2)} + \partial_i h_{0j}(x) + \partial_j h_{0i}(x) \right] \delta(x-y) \\ &= -2\partial_i \partial_j \pi^{ij} = -2\partial_i \chi^i \approx 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Isto é, a condição de consistência é identicamente satisfeita na superfície dos vínculos, não levando a nenhum vínculo terciário.

- Para $\chi_l = \partial_k \pi_{lk} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\chi^i(y), \varphi^\mu(x)\} = 0 \quad (3.41)$$

$$\{\chi^0(y), \chi_l(x)\} = -\partial_i^{(y)} \left[\nabla_{(x)}^2 - \partial_i^{(x)} \partial_j^{(x)} \right] \delta(x-y) = 0 \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \{\chi^i(y), H_P(x)\} &= - \int d^{D-1} x \partial_j^{(y)} \left[\frac{1}{2} \partial_k h_{ij}(x) \partial_k^{(x)} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_k h_{00}(x) \partial_k^{(x)} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_k h_{kl}(x) \partial_l^{(x)} \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \partial_i h_{00}(x) \partial_j^{(x)} - \frac{1}{4} \partial_j h_{00}(x) \partial_i^{(x)} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_k h_{kl}(x) \partial_l^{(x)} + \frac{1}{4} \partial_i h_{kk}(x) \partial_j^{(x)} \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \partial_j h_{kk}(x) \partial_i^{(x)} - \frac{1}{2} \partial_k h_{ki}(x) \partial_j^{(x)} - \frac{1}{2} \partial_k h_{kj}(x) \partial_i^{(x)} \right] \delta(x-y) \\ &= \frac{1}{2} \partial_j \nabla^2 h_{ij} + \frac{1}{2} \partial_i \nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2} \partial_i \nabla^2 h_{kk} - \frac{1}{4} \partial_i \nabla^2 h_{00} - \frac{1}{4} \partial_i \nabla^2 h_{00} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \partial_k h_{jk} + \frac{1}{4} \partial_i \nabla^2 h_{kk} + \frac{1}{4} \partial_i \nabla^2 h_{kk} - \frac{1}{2} \nabla^2 \partial_j h_{ji} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \partial_k h_{jk} = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Como (3.42) e (3.43) são identicamente nulas, novamente a condição de consistência é identicamente satisfeita, não levando a nenhum vínculo terciário, encerrando-se assim o algoritmo de Dirac-Bergmann

para o modelo de Einstein-Hilbert linearizado. Logo, para este modelo, obtivemos os seguintes vínculos:

$$\varphi^\mu = \pi^{0\mu} \approx 0 \quad (3.44)$$

$$\chi^0 = \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij} \approx 0 \quad (3.45)$$

$$\chi^i = \partial_j \pi_{ij} \approx 0 \quad (3.46)$$

Não é óbvio, mas verifica-se que todos os vínculos do modelo são de primeira classe. Realizando a contagem de graus de liberdade do sistema de acordo com (2.29), ou seja,

$$N = \frac{D(D+1) - 4D}{2} = \frac{D(D-3)}{2} \quad (3.47)$$

De tal forma que para $D = 4$ obtemos o número de graus de liberdade $N = 2$, ou seja, os graus de liberdade referentes às helicidades $s = \pm 2$. Em $D = 5$ temos 5 graus de liberdade que correspondem a $2s + 1$ com $s = 2$, que está de acordo com o número de graus de liberdade de uma partícula de spin-2 massiva em $D = 4$ que deve coincidir com o número de graus de liberdade de uma partícula sem massa, de mesmo spin em uma dimensão acima ($D = 5$).

3.3 ALGORITMO DE CASTELLANI E APLICAÇÕES

A aplicação do algoritmo de Dirac-Bergmann apresentado no Capítulo 2 permite a identificação do conteúdo físico contido nas lagrangianas singulares através da análise do estudo da evolução dinâmica de sistemas onde há matriz hessiana nula. Contudo, para além da identificação do conjunto de vínculos presentes no espaço de fase, é importante compreender como as transformações de calibre emergem diretamente da álgebra de vínculos e como se relacionam.

Embora Dirac tenha conjecturado que todos os vínculos de primeira classe atuam como geradores de simetrias de calibre ⁴, a determinação dos geradores de simetrias locais independentes e suas relações com os vínculos de primeira classe foi obtida por Castellani décadas mais tarde (Castellani, 1982). Do seu trabalho conclui-se que o número de parâmetros de calibre independentes em uma teoria coincide precisamente com o número de vínculos *primários* de primeira classe. Não apresentaremos aqui uma prova rigorosa do algoritmo de Castellani, mas apresentamos argumentos simples em seu favor.

No formalismo hamiltoniano, uma transformação de *gauge* é uma transformação gerada por um objeto $G(q, p, t)$ que mapeia um estado físico em outro equivalente. Para que G seja um gerador de *gauge* válido no espaço de fase, a transformação não pode alterar a física do sistema.

O desenvolvimento do algoritmo de Castellani baseia-se na construção do gerador G como uma

⁴ Dirac comenta: *I think it may be that all the first-class secondary constraints should be included among the transformations which don't change the physical state, but I haven't been able to prove it. Also, I haven't found any example for which there exist first-class secondary constraints which do generate a change in the physical state.*. Ver: DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964. p. 23.

combinação linear de vínculos de primeira classe:

$$G = \sum_{i=0}^k \epsilon^{(i)}(t) G_i(q, p) \quad (3.48)$$

onde k está relacionado com o comprimento total da cadeia de vínculos. Por exemplo, se há vínculos quaternários em sua teoria, $k = 3$, ou seja, k é o número de gerações de vínculos secundários, e $\epsilon^{(i)} = \frac{d^i \epsilon}{dt^i}$ são i -ésimas derivadas temporais de um parâmetro arbitrário $\epsilon(t)$ e $G_i(q, p)$ são vínculos de primeira classe, sendo o último da cadeia (G_k) um vínculo primário de primeira classe. A invariância da ação de um sistema físico por uma transformação de *gauge*, isto é, $\delta S = \{S, G\} = 0$ é dada por

$$\delta S = \delta \int (dt \mathcal{L}) = \delta \int dt (p_i \dot{q}^i - H_P) = 0 \quad (3.49)$$

onde, integrando por parte, temos

$$\delta S = \int dt [\delta p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta q^i - \delta H_P] = 0 \quad (3.50)$$

no entanto, note que $\delta p_i = \{p_i, G\}$ e $\delta q_i = \{q_i, G\}$, logo

$$\delta S = \int dt \left[\left(-\frac{\partial G}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i - \dot{p}_i \left(\frac{\partial G}{\partial p_i} \right) - \delta H_P \right] = 0. \quad (3.51)$$

Tal que, lembrando da definição de derivada temporal total $\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial G}{\partial p_i} \dot{p}_i$, tem-se

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{dG}{dt} - \delta H_P \right] = 0 \quad (3.52)$$

lembrando também que podemos reescrever δH_P tal que

$$\delta H_P = \frac{\partial H_P}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H_P}{\partial p} \delta p + \frac{\partial H_P}{\partial \lambda^m} \delta \lambda^m = \{H_P, G\} + \phi_m \delta \lambda^m, \quad (3.53)$$

conclui-se que para

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{dG}{dt} - \{H_P, G\} - \phi_m \delta \lambda^m \right] = 0 \quad (3.54)$$

onde $\int \frac{dG}{dt} dt$ é um termo que se anula no contorno, obtém-se

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_P\} = \phi_m \delta \lambda^m, \quad (3.55)$$

ou seja, para que haja invariância da ação, a manutenção no tempo do gerador de *gauge* deve ser uma

combinação linear dos vínculos primários. Portanto, utilizando a definição (3.48) em (3.55), temos

$$\sum_{i=0}^k \epsilon^{(i+1)}(t) G_i + \sum_{i=0}^k \epsilon^{(i)}(t) \{G_i, H_P\} = \phi_m \delta \lambda^m. \quad (3.56)$$

Juntando os termos nas somatórias e rearranjando derivadas temporais de $\epsilon(t)$, concluímos que

$$\epsilon^{(k+1)} G_k + \sum_{i=1}^k \epsilon^{(i)} \left[G_{i-1} + \{G_i, H_P\} \right] + \epsilon^{(0)} \{G_0, H_P\} = \phi_m \delta \lambda^m \quad (3.57)$$

sendo esta a estrutura matemática sobre o qual reside o argumento central de Castellani: para que G seja um gerador de simetria, a sua evolução dinâmica (o lado esquerdo da equação (3.57)) deve ser composta por uma combinação linear dos vínculos primário (representada por $\phi_m \delta \lambda^m$). Isso ocorre porque, na formulação do Hamiltoniano Primário, apenas os vínculos primários estão acoplados a multiplicadores de Lagrange. Como o parâmetro $\epsilon(t)$ é arbitrário assim como cada derivada $\epsilon^{(i)}(t)$ a única forma da equação (3.57) ser satisfeita é que cada coeficiente de $\epsilon^{(i)}(t)$ satisfaça a equação separadamente, isto é,

$$G_k = \text{Primário} \quad (3.58)$$

$$G_{i-1} + \{G_i, H_P\} = \text{Primário}; \quad i = k, k-1, \dots, 1 \quad (3.59)$$

$$\{G_0, H_P\} = \text{Primário} \quad (3.60)$$

Note que, assim como em (Castellani, 1982), a expressão "*Primário*" significa na verdade uma "combinação linear de vínculos primários". As equações (3.58)-(3.60) aparecem em (Castellani, 1982). Na prática, tais equações são utilizadas para obtermos G_i ($i = k-1, k-2, \dots, 0$) iterativamente a partir do vínculo primário de primeira classe G_k e finalmente construir um gerador G , dado em (3.48) para cada parâmetro $\epsilon(t)$.

Em (Castellani, 1982) mostra-se que todos os G_j ($j = 1, 2, \dots, k$) são vínculos de primeira classe e também que essas grandezas G_j estão definidas a menos de uma combinação linear de vínculos primários de primeira classe. Na sequência, aplicaremos o formalismo iterativo de Castellani nas teorias de Maxwell e Einstein-Hilbert.

Começaremos com a Teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, modelo este já analisado no capítulo 3 através do algoritmo de Dirac-Bergmann, tem como densidade de lagrangiana da teoria, dada por (3.1) e é invariante sob a transformação (3.103). A hamiltoniana primária é dada em (3.8). Temos um vínculo primário $\varphi = \pi_0 \approx 0$ e um secundário $\chi = \partial_i \pi_i \approx 0$, ambos de primeira classe. Como temos apenas uma geração de secundários logo $k = 1$ no formalismo de Castellani. De acordo com Castellani, o coeficiente da ordem de derivada mais alta em ϵ deve ser o vínculo primário de primeira classe, isto é,

$$G_1 = \varphi = \pi_0 \quad (3.61)$$

Levando em conta que G_0 é definido a menos de uma combinação linear de vínculos primários de

primeira classe, podemos introduzir uma constante arbitrária "a" e escrever

$$G_0 = -\{G_1, H_P\} + a\varphi = -\partial_i \pi_i + a\pi_0 \quad (3.62)$$

Para o fechamento da álgebra, devemos verificar se a condição $\{G_0, H_P\} = \tilde{a}\varphi$ é satisfeita, onde $\tilde{a}$ é a princípio arbitrária. Assim temos:

$$\{G_0, H_P\} = \{-\partial_i \pi_i + \lambda \pi_0, H_P\} = a\chi = \tilde{a}\varphi \quad (3.63)$$

Portanto temos $a = 0 = \tilde{a}$ e assim, determina-se que $G_1 = \pi_0$ e $G_0 = -\partial_i \pi_i$, onde podemos, através de (3.48), determinar o gerador da transformação de simetria:

$$G = \int d^{D-1}x [\dot{\epsilon} G_1 + \epsilon G_0] = \int d^{D-1}x [\dot{\epsilon} \pi_0 - \epsilon \partial_i \pi_i] \quad (3.64)$$

De $\delta A_\mu = \{A_\mu, G\}$, temos:

$$\delta A_0 = \dot{\epsilon} \quad ; \quad \delta A_i = \partial_i \epsilon \quad (3.65)$$

onde se verifica justamente a transformação de simetria apresentada em (3.103).

Agora nos voltamos ao modelo de Einstein-Hilbert linearizado utilizando o algoritmo de Castellani. O objetivo é confirmar no formalismo hamiltoniano a simetria de *gauge* (3.23) que depende de D-parâmetros (ϵ_μ). Os vínculos primários (φ_μ) e secundários (χ_μ) do modelo de Einstein-Hilbert estão dados em (3.44)-(3.46). De acordo com o algoritmo de Castellani, os coeficientes da ordem de derivada mais alta em ϵ devem ser os vínculos primários de primeira classe, isto é,

$$\begin{aligned} G^0_1 &= \varphi_0 = \pi_{00} \\ G^j_1 &= \varphi_j = \pi_{0j} \end{aligned} \quad (3.66)$$

evidenciando-se que em G^μ_1 , o índice 1 representa o gerador que acompanha a primeira ordem de derivada em ϵ e o índice μ representa a qual vínculo está associado. Assim, obtemos G^0_0 de G^0_1 via (3.59) adicionando uma combinação linear arbitrária, a princípio, dos vínculos primários de primeira classe, isto é, de (3.59) temos:

$$\begin{aligned} G^0_0 + \{G^0_1, H_P\} &= a_0 \varphi_0 + a_j \varphi_j \\ G^0_0 &= -\chi_0 + a_0 \varphi_0 + a_j \varphi_j \end{aligned}$$

onde a_μ são constantes a princípio arbitrárias. Para o fechamento da álgebra, devemos verificar se a condição $\{G^0_0, H_P\} = \text{Primário}$ é satisfeita,

$$\begin{aligned} \{G^0_0, H_P\} &= \{-\chi_0 + a_0 \varphi_0 + a_j \varphi_j, H_P\} = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_j \varphi_j \\ &= \partial_j \chi_j + a_0 \chi_0 + a_j \chi_j = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_j \varphi_j \end{aligned} \quad (3.67)$$

e para isto, se determina os coeficientes tal que $a_0 = 0 = \alpha_\mu$ e $a_j = -\partial_j$, resultado também obtido em (Green; Kiriushcheva; Kuzmin, 2011). Logo, para a componente temporal, coeficiente do termo é

tem-se

$$G^0_0 = -\chi_0 - \partial_j \varphi_j \quad (3.68)$$

Agora de (3.59) para os vínculos espaciais temos:

$$\begin{aligned} G^j_0 + \{G^j_1, H_P\} &= \tilde{a}_0 \varphi_0 + \tilde{a}_j \varphi_j \\ G^j_0 &= -\chi_j + \tilde{a}_0 \varphi_0 + \tilde{a}_j \varphi_j \end{aligned}$$

Portanto, para o fechamento da álgebra, devemos verificar se a condição

$\{G^j_0, H_P\} = \beta_0 \varphi_0 + \beta_j \varphi_j$ é satisfeita

$$\begin{aligned} \{G^j_0, H_P\} &= \{-\chi_j + \tilde{a}_0 \varphi_0 + \tilde{a}_j \varphi_j, H_P\} = \beta_0 \varphi_0 + \beta_j \varphi_j \\ &= 0 + \tilde{a}_0 \chi_0 + \tilde{a}_j \chi_j = \beta_0 \varphi_0 + \beta_j \varphi_j \end{aligned} \quad (3.69)$$

e para isto, se determina os coeficientes tal que $\tilde{a}_\mu = 0 = \beta_\mu$. Logo, para o coeficiente de $\dot{\epsilon}_j$ tem-se

$$G^j_0 = -\chi_j \quad (3.70)$$

Com isso, temos o gerador da transformação de simetria do modelo de Einstein-Hilbert linearizado:

$$G = \int d^{d-1}x [\dot{\epsilon}_\mu G^\mu_1 + \epsilon_\mu G^\mu_0] = \int d^{d-1}x [\dot{\epsilon}_0 \pi_{00} + \dot{\epsilon}_j \pi_{0j} - \epsilon_0 (\chi_0 + \partial_j \pi_{0j}) - \epsilon_j \partial_i \pi_{ij}] \quad (3.71)$$

onde se verifica de $\delta h_{\mu\nu} = \{h_{\mu\nu}, G\}$,

$$\delta h_{00} = \dot{\epsilon}_0 \quad (3.72)$$

$$\delta h_{0j} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_j + \partial_j \epsilon_0) \quad (3.73)$$

$$\delta h_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i) \quad (3.74)$$

tal que se obtém justamente a simetria $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$ de (3.23) com $\epsilon_\mu \rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_\mu$. Concluimos que temos os D geradores de simetria de *gauge* dados por:

$$G = \sum_{i=0}^1 \epsilon_\mu^{(i)}(t) G_i^\mu(q, p) \quad (3.75)$$

onde G representa uma combinação linear de geradores independentes, uma vez que cada componente do vetor ϵ_μ é independente por si. Com G_i^μ dados em (3.66), (3.68) e (3.70). Nos exemplos de Maxwell e Einstein-Hilbert, vemos que há um gerador associado a cada parâmetro de *gauge* independente. Como cada um deles começa com vínculo primário de primeira classe, temos a correspondência um a um entre vínculos primários de primeira classe e parâmetros de *gauge* independentes.

3.4 MODELO MAXWELL-LIKE (M-L) DE SPIN-2

Os modelos "Maxwell-Like" são modelos que foram introduzidos em (Campoleoni; Francia, 2013) para tensores simétricos de *rank-s* com $s = 2, \dots, \infty$. Se não houver restrição nos traços do tensor de *rank-s*, o modelo M-L descreve partículas sem massa de spin $s, s - 2, \dots, 0$ (ou 1) dependendo de s ser par ou ímpar. Neste trabalho, a análise dos modelos Maxwell-like e dos modelos triviais das seções seguintes (3.5) e (3.7) é de muito interesse pois são invariantes por transformações de *gauge* com os parâmetros de *gauge* satisfazendo certas restrições do tipo equação diferencial como é o caso do *PBF*. Além disso, os modelos Maxwell-Like *rank-s* no caso especial em que o campo simétrico de *rank-s* não possui traço obtemos o modelo de Skvortsov-Vasiliev (Skvortsov; Vasiliev, 2008) que descreve partículas sem massa de spin- s apenas, ou seja, o mesmo conteúdo dos modelos de Fronsdal e *PBF* de spin- s .

No caso de spin-2 temos a densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{ML} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + (\partial_\mu h^{\mu\nu})^2 \quad (3.76)$$

que é chamada de *lagrangiana Maxwell-Like de spin-2*, isto é, uma lagrangiana cuja estrutura é parecida com a lagrangiana de Maxwell, ou seja, temos um termo $h \square h$ e outro termo de divergência ao quadrado $(\partial \cdot h)^2$. Comparando as equações de movimento de (3.76) com as equações de Maxwell, temos que as equações de movimento de (3.76)

$$\square h_{\mu\nu} - (\partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu}) = 0 \quad (3.77)$$

são semelhantes às Equações de Maxwell $\square A_\mu - \partial_\mu (\partial^\alpha A_\alpha) = 0$, daí a nomenclatura Maxwell-Like (M-L). A ação do modelo possui simetria de *gauge* sob reparametrização linearizada transversa

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu^T + \partial_\nu \epsilon_\mu^T \quad (3.78)$$

onde a divergência do parâmetro de *gauge* vetorial é zero:

$$\partial^\mu \epsilon_\mu^T = 0 \quad (3.79)$$

Esta simetria é chamada na literatura (Temiño, 2008)⁵ de *TDiff*, ou seja, difeomorfismos (linearizados) transversos. Note que devido à restrição, o número total de parâmetros de *gauge* independentes se torna:

$$N_\Lambda = D - 1 \quad . \quad (3.80)$$

Separando as componentes temporais das espaciais, reescrevemos a densidade de lagrangiana

⁵ Em (Temiño, 2008), pode-se verificar que há um modelo generalizado de *rank-2* que depende de dois coeficientes a e b . Ele contém os modelos Diff (Einstein-Hilbert), TDiff, WTDiff. e o próprio Maxwell-Like para $a = b = 0$.

(3.76) que, considerando integrações por partes onde $\dot{h}_{0j}\partial_k h_{jk} = \partial_k h_{0j}\dot{h}_{jk}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ML} = & -\frac{1}{2}(\dot{h}_{00}^2 - \dot{h}_{ij}^2) + 2\dot{h}_{00}\partial_j h_{j0} - 2\dot{h}_{ij}\partial_j h_{0i} - \frac{1}{2}(\partial_i h_{00})^2 \\ & + (\partial_i h_{0j})^2 - (\partial_j h_{0j})^2 + (\partial_i h_{ij})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i h_{jk})^2\end{aligned}\quad (3.81)$$

Desta forma, os momentos canônicos são

$$\pi_{00} = -\dot{h}_{00} + 2\partial_j h_{0j} \quad (3.82)$$

$$\pi_{0j} = 0 \quad (3.83)$$

$$\pi_{ij} = \dot{h}_{ij} - (\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i}) \quad (3.84)$$

Portanto, obtemos os $D - 1$ vínculos primários

$$\varphi_j = \pi_{0j} \approx 0 \quad j = 1, 2, \dots, D - 1 \quad (3.85)$$

Deste modo, a densidade de hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \pi_{00}\dot{h}_{00} + \pi_{0j}\dot{h}_{0j} + \pi_{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L} \\ = & -\frac{1}{2}(\pi_{00}^2 - \pi_{ij}^2) + 2\pi_{00}\partial_i h_{0i} + \pi_{ij}(\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i}) - (\partial_i h_{ij})^2 \\ & + \frac{1}{2}(\partial_i h_{00})^2 + \frac{1}{2}(\partial_i h_{jk})^2\end{aligned}\quad (3.86)$$

e, portanto, a hamiltoniana primária será

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H} + \lambda_j \varphi_j) \quad (3.87)$$

Por conseguinte, devemos aplicar a condição de consistência nos vínculos primários.

- Para $\varphi_l = \pi_{0l} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\begin{aligned}\{\varphi_l(y), H_P(x)\} &= 2\partial_l \pi_{00} + \partial_i \pi_{il} + \partial_j \pi_{lj} \\ &= 2[\partial_l \pi_{00}(x) + \partial_i \pi_{il}(x)]\end{aligned}\quad (3.88)$$

Logo,

$$\dot{\varphi}_l \approx 2[\partial_l \pi_{00}(x) + \partial_i \pi_{il}(x)] \quad (3.89)$$

Encontrando então os vínculos secundários:

$$\chi_l = \partial_l \pi_{00} + \partial_i \pi_{il} \approx 0, \quad l = 1, 2, \dots, D - 1 \quad (3.90)$$

Aplicando novamente a condição de consistência agora no vínculo secundário.

- Para $\chi_l = \partial_l \pi_{00} + \partial_m \pi_{lm} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\chi_l(y), H_P(x)\} = -\partial_l \nabla^2 h_{00} + \partial_l \partial_i \partial_m h_{im} + \nabla^2 \partial_i h_{il} - \nabla^2 \partial_k h_{kl} \quad (3.91)$$

Portanto, a condição de consistência é

$$\dot{\chi}_l \approx \partial_l [\partial_i \partial_m h_{im} - \nabla^2 h_{00}] \approx 0 \quad (3.92)$$

onde, multiplicando o resultado por ∂_l , obtém-se que $\nabla^2(\nabla^2 h_{00} - \partial_m \partial_i h_{im}) \approx 0^6$, pode-se concluir por um vínculo terciário tal como

$$\xi = \nabla^2 h_{00} - \partial_i \partial_m h_{im} \approx 0 \quad (3.93)$$

Portanto, continuaremos com a aplicação do algoritmo sobre o vínculo terciário encontrado.

- Para $\xi = \nabla^2 h_{00} - \partial_i \partial_m h_{im} \approx 0$:

$$\{\xi(y), H_P(x)\} = -\nabla^2 \pi_{00} + 2\nabla^2 \partial_i h_{i0} - \partial_l \partial_m \pi_{lm} - \partial_l \partial_m (\partial_l h_{0m} + \partial_m h_{0l}) \quad (3.94)$$

Logo,

$$\dot{\xi} \approx \nabla^2 \pi_{00} + \partial_l \partial_m \pi_{lm} = \partial_l (\partial_l \pi_{00} + \partial_m \pi_{lm}) = \partial_l \chi_l \approx 0 \quad (3.95)$$

Portanto, a condição de consistência é fracamente satisfeita e não leva a um novo vínculo na teoria.

Para verificar se o vínculo terciário é de primeira ou segunda classe, é preciso analisar o parênteses de Poisson do vínculo terciário com todos os vínculos, e não somente com o primário. Assim,

$$\{\xi(y), \chi_j(x)\} = (\nabla^2 \partial_j^x - \partial_i^y \partial_j^y \partial_i^x) \delta(x - y) \quad (3.96)$$

onde, utilizando a relação $\partial_j^x \delta(x - y) = -\partial_j^y \delta(x - y)$ tem-se que

$$\{\xi(y), \chi_j(x)\} = 0 \quad (3.97)$$

Assim, temos que todos os vínculos deste modelo Maxwell-Like, a saber,

$$\varphi_j = \pi_{0j} \approx 0 \quad (3.98)$$

$$\chi_l = \partial_l \pi_{00} + \partial_i \pi_{il} \approx 0 \quad (3.99)$$

$$\xi = \nabla^2 h_{00} - \partial_i \partial_m h_{im} \approx 0 \quad (3.100)$$

são vínculos de primeira classe. O número total de vínculos que temos em (3.98), (3.99) e (3.100) é $2(D - 1) + 1 = 2D - 1$, conseqüentemente, o número de graus de liberdade do sistema em D

⁶ Como em teorias de campos usuais, ao tomarmos que os campos e os momentos vão a zero no infinito, a única solução da equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$ é $f = 0$.

dimensões é

$$N = \frac{D(D+1) - 2(2D-1)}{2} = \frac{(D-2)(D-1)}{2} \quad (3.101)$$

Para $D = 4$, temos que o número de graus de liberdade é $N = 3$, ou seja, os graus de liberdade referentes às helicidades $s = \pm 2$ e $s = 0$, como esperado pois o modelo Maxwell-Like de spin-2 é um caso especial do modelo TDIFF $\mathcal{L}_{TD}(a, b)$, vide (Santos, 2020) com $a = b = 0$. Esse modelo contém uma partícula de spin-2 e outra de spin-0, ambas sem massa.

3.5 MODELO TRIVIAL DE RANK-1

A diferença, vide (Dalmazi; Martins, 2025), entre a lagrangiana dos modelos de Fronsdal e *PBF* de spin- s se constitui em um quadrado de uma divergência do traço de um campo que é de duplo traço nulo para $s \geq 4$, isto é, para $s = 3, 4, 5, \dots$, respectivamente temos $(\partial^\mu h_\mu)^2$, $(\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu})^2$, $(\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu\alpha})^2$, etc, onde $h_\mu = \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\alpha\beta}$, $\bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $\bar{h}_{\mu\nu\alpha} = \eta^{\gamma\beta} \bar{h}_{\gamma\beta\mu\nu\alpha}$. Uma barra em cima de h indica que o traço do campo é nulo, enquanto duas barras significam que o duplo traço do campo é nulo. É fundamental para a consistência dos modelos *PBF* que tais termos não tenham conteúdo físico por si só. Os próximos modelos confirmam essas expectativas.

Dando início à análise dos modelos "triviais" (modelos que não possuem conteúdo físico), começaremos por um modelo vetorial simples cuja densidade de lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2}\dot{A}_0^2 - \dot{A}_0\partial_j A_j + \frac{1}{2}(\partial_j A_j)^2 \quad (3.102)$$

que possui simetria de *gauge* sob a transformação

$$\delta A_\mu(x) = \epsilon_\mu^T(x) \quad (3.103)$$

onde a divergência do parâmetro de *gauge* vetorial é zero:

$$\partial^\mu \epsilon_\mu^T = 0 \quad (3.104)$$

Portanto, o número total de parâmetros de *gauge* independentes é:

$$N_\Lambda = D - 1 \quad . \quad (3.105)$$

Desta forma, os momentos canônicos são

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = \dot{A}_0 - \partial_j A_j \quad (3.106)$$

$$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = 0 \quad (3.107)$$

Obtendo então $D - 1$ vínculos primários:

$$\varphi_j = \pi_j \approx 0, \quad j = 1, \dots, D - 1 \quad (3.108)$$

Assim sendo, a densidade de hamiltoniana é definida por:

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi_0^2 + \pi_0 \partial_j A_j \quad (3.109)$$

Portanto, a hamiltoniana primária será definida por

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H} + \lambda_j \varphi_j) \quad (3.110)$$

Consequentemente, devemos aplicar a condição de consistência nos vínculos primários.

- Para $\varphi_j = \pi_j \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\varphi_j(y), H_P(x)\} = \partial_j \pi_0 \quad (3.111)$$

Assim sendo, temos

$$\dot{\varphi}_j \approx \partial_j \pi_0 \approx 0 \quad (3.112)$$

Note que, como $\partial_j \pi_0 \approx 0$, supondo que os campos se anulem no infinito, então a solução para esta equação é que $\pi_0 \approx 0$, de tal forma que determina-se efetivamente o vínculo secundário como:

$$\chi = \pi_0 \approx 0 \quad (3.113)$$

que deve satisfazer também a condição de consistência.

- Para $\chi = \pi_0 \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\chi(y), H_P(x)\} = 0 \quad (3.114)$$

De modo que assim verifica-se que a condição de consistência é identicamente satisfeita, evidenciando que não há novos vínculos na teoria. Portanto, para este modelo, obtivemos os seguintes vínculos:

$$\pi_j \approx 0 \approx \pi_0 \quad (3.115)$$

Isto é, todos os momentos do sistema são fracamente nulos! De modo que se $\pi_\mu \approx 0$ são os vínculos deste modelo, então os parênteses de Poisson entre eles, $\{\pi_\mu, \pi_\nu\} \approx 0$, evidenciando que são todos de primeira classe. Deste modo, a contagem de graus de liberdade do sistema é:

$$N_F = \frac{2D - 2D}{2} = 0 \quad (3.116)$$

Caracterizando a ausência de conteúdo físico deste modelo, resultado este esperado de acordo com esta teoria que é chamada de *puro gauge*, ou seja, todo o conteúdo do campo A^μ é uma simetria de calibre pois a equação de movimento de (3.102) é $\partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0 \implies \partial^\nu A_\nu = 0$, ou seja, $A_\nu = \lambda^T_{\nu}$.

3.6 MODELO TRIVIAL DE RANK-2 DE TRAÇO-NULO

Agora analisaremos um modelo não massivo descrito por um tensor simétrico de *rank*-2 $h_{\mu\nu}$ dado por uma densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = [\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}]^2 \quad (3.117)$$

tal que $\bar{h}_{\mu\nu}$ representa a parte sem traço ($\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0$) do tensor $h_{\mu\nu}$ simétrico ($h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$), isto é,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} h \quad (3.118)$$

sendo D a dimensão do espaço-tempo e h o traço do campo $h_{\mu\nu}$, ou seja, $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -h_{00} + h_{jj}$. Neste trabalho supomos que $D \geq 3$. Portanto, efetivamente temos a densidade de lagrangiana tal como

$$\mathcal{L} = \left[\partial^\mu \left(h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} h \right) \right]^2 \quad (3.119)$$

Este modelo possui simetria de *gauge* da forma

$$\delta h_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} \quad (3.120)$$

onde a parte sem traço dos parâmetros de calibre deve ser transversa:

$$\partial^\mu \bar{\Lambda}_{\mu\nu} = \partial^\mu \Lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial_\nu \Lambda}{D} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, D-1 \quad (3.121)$$

Devido às D restrições (3.121), o número de parâmetros de *gauge* independentes é:

$$N_\Lambda = \frac{D(D+1)}{2} - D = \frac{D(D-1)}{2} \quad (3.122)$$

Reescrevendo a densidade de lagrangiana (3.119) separando as componentes temporais e espaciais, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{\partial_\nu h}{D} \right) \left(\partial_\alpha h^{\alpha\nu} - \frac{\partial^\nu h}{D} \right) \\ &= - \left[-\dot{h}_{00} + \partial_j h_{0j} + \frac{1}{D} (\dot{h}_{00} - \dot{h}_{jj}) \right]^2 + \left\{ -\dot{h}_{0j} + \partial_k h_{jk} + \frac{\partial_j}{D} (h_{00} - h_{ii}) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.123)$$

onde $\dot{h}_{\mu\nu} = \partial_0 h_{\mu\nu}$ e $i, j, k = 1, 2, \dots, D-1$. Deste modo, verifica-se que os momentos canônicos são tais que

$$\pi_{00} = \frac{2(D-1)}{D} \left[-\dot{h}_{00} + \partial_j h_{0j} + \frac{1}{D} (\dot{h}_{00} - \dot{h}_{jj}) \right] \quad , \quad (3.124)$$

$$\pi_{0j} = -2 \left\{ -\dot{h}_{0j} + \partial_k h_{jk} + \frac{\partial_j}{D} (h_{00} - h_{ii}) \right\} \quad , \quad (3.125)$$

$$\pi_{ij} = \frac{2}{D} \delta_{ij} \left[-\dot{h}_{00} + \partial_k h_{0k} + \frac{1}{D} (\dot{h}_{00} - \dot{h}_{kk}) \right] \quad , \quad (3.126)$$

onde, a partir da equação (3.126), de forma visível, para $i < j$ obtém-se os vínculos primários ⁷

$$\varphi_{ij} = \pi_{ij} \approx 0, \quad i < j, \quad (3.127)$$

Note que, a partir das equações (3.124) e (3.126), obtém-se outros $D - 1$ vínculos primários:

$$\varphi_{ll} = \pi_{00} - (D - 1)\pi_{ll} \approx 0 \quad l = 1, 2, \dots, D - 1, \quad (3.128)$$

perceba que, embora repetido o índice l **não** está sendo somado em (3.128). Portanto, o número total de vínculos primários é dado por:

$$N_{PC} = \frac{(D - 2)(D - 1)}{2} + D - 1 = \frac{D(D - 1)}{2}. \quad (3.129)$$

Substituindo as equações (3.124) e (3.125) em (3.123), reescreve-se a densidade de lagrangiana em função dos momentos canônicos:

$$\mathcal{L} = - \left[\frac{D}{2(D - 1)} \pi_{00} \right]^2 + \frac{1}{2} \pi_{0j}^2 \quad (3.130)$$

Logo, a densidade de hamiltoniana canônica será

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_{00} \dot{h}_{00} + \pi_{0j} \dot{h}_{0j} + \pi_{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L} = \pi_{00} \dot{h}_{00} + \pi_{0j} \dot{h}_{0j} + \pi_{ii} \dot{h}_{jj} - \mathcal{L} \\ &= - \left[\frac{D}{2(D - 1)} \pi_{00} \right]^2 + \left\{ \frac{1}{2} \pi_{0j} \right\}^2 + \frac{D}{D - 1} \pi_{00} \partial_i h_{i0} + \pi_{0j} \left[\partial_i h_{ij} + \frac{1}{D} \partial_j (h_{00} - h_{ii}) \right] \end{aligned} \quad (3.131)$$

de modo que a hamiltoniana primária toma a forma de:

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H} + \lambda_l \varphi_{ll} + \lambda_{ij} \varphi_{ij}) \quad (3.132)$$

onde $\lambda_l (l = 1, 2, \dots, D - 1)$ e $\lambda_{ij} (i < j)$ são multiplicadores indeterminados a princípio. Os vínculos devem respeitar a condição de consistência:

- Para $\varphi_{lm} = \pi_{lm} \approx 0$ com $l < m$:

No que segue, os vínculos primários φ_{ij} foram escritos com os índices lm para não haver repetição de índices ao calcular os parênteses de Poisson. Assim, para o algoritmo, usaremos:

$$\{\varphi_{lm}(y), H_P(x)\} = \{\pi_{lm}(y), H_P(x)\} = \frac{1}{2} (\partial_l \pi_{0m} + \partial_m \pi_{0l}) \quad (3.133)$$

Substituindo (3.133) na condição de consistência dos vínculos,

$$\dot{\varphi}_{lm} \approx \frac{1}{2} (\partial_l \pi_{0m} + \partial_m \pi_{0l}) \quad (3.134)$$

⁷ Lembremos que $\pi_{ij} = \pi_{ji}$.

Determinando os vínculos secundários:

$$\chi_{lm} = \partial_l \pi_{0m} + \partial_m \pi_{0l} \approx 0 \quad l < m \quad (3.135)$$

- Para $\varphi_{ll} = \pi_{00} - (D-1)\pi_{ll} \approx 0$, $(l = 1, 2, \dots, D-1)$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\begin{aligned} \{\varphi_{ll}(y), H_P(x)\} &= \{\pi_{00} - (D-1)\pi_{ll}, \mathcal{H}(x)\} \\ &= \frac{1}{D} \partial_j \pi_{0j} + (D-1) \left(\frac{1}{D} \partial_j \pi_{0j} - \partial_l \pi_{0l} \right) \\ &= \partial_j \pi_{0j} - (D-1) \partial_l \pi_{0l} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Portanto,

$$\dot{\varphi}_{ll} \approx \partial_j \pi_{0j} - (D-1) \partial_l \pi_{0l} \approx 0 \quad (3.137)$$

Obtemos então outros vínculos secundários

$$\chi_{ll} = \partial_j \pi_{0j} - (D-1) \partial_l \pi_{0l} \approx 0 \quad l = 1, 2, \dots, D-1 \quad (3.138)$$

Note que em (3.138) há soma nos índices j (de 1 a $D-1$) porém não há soma no índice l , ou seja, temos um vínculo χ_{ll} para cada valor de l . Conclui-se de $\chi_{ll} = 0$ que $\partial_1 \pi_{01} = \partial_2 \pi_{02} = \dots = \partial_{D-1} \pi_{D-1} = \frac{1}{D-1} \partial_j \pi_{0j}$. Usando esta informação e aplicando multiplas derivadas espaciais em (3.135), chegamos a conclusão que $\nabla^2 \partial_l \pi_{0l} = 0$ para todos os valores de $l = 1, \dots, D-1$. Portanto, com argumentos utilizados anteriormente, temos que $\partial_l \pi_{0l} = 0$, $(l = 1, 2, \dots, D-1)$. Portanto, utilizando este resultado e voltando a aplicar derivadas em (3.135), encontra-se que $\pi_{0j} = 0$. Por conseguinte, efetivamente, os vínculos secundários (3.135) e (3.138) se reduzem a:

$$\chi_j = \pi_{0j} \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, D-1 \quad (3.139)$$

que por sua vez devem satisfazer $\dot{\chi}_j \approx 0$, dando então continuidade ao algoritmo.

- Para $\chi_j = \pi_{0j} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\chi_j(y), H_P(x)\} = \{\pi_{0j}(y), H_P(x)\} = \frac{D}{D-1} \partial_j \pi_{00} \quad (3.140)$$

Logo,

$$\dot{\chi}_j \approx \frac{D}{D-1} \partial_j \pi_{00} \approx 0 \quad (3.141)$$

Como (3.141) é válida para $j = 1, \dots, D-1$, concluimos que

$$\xi = \pi_{00} \approx 0 \quad (3.142)$$

- Para $\xi = \pi_{00} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes para o vínculo terciário são fracamente nulos:

$$\{\xi(y), \mathcal{H}(x)\} = \{\pi_{00}(y), \mathcal{H}(x)\} = \frac{1}{D} \partial_j \pi_{0j} \approx 0 \quad (3.143)$$

devido à (3.139). Portanto, como a evolução temporal do último vínculo encontrado resultou em um vínculo já estabelecido, se diz que a condição de consistência é identicamente satisfeita e não há novos vínculos na teoria. Vale salientar que, devido ao vínculo (3.142), podemos redefinir (3.128) como $\varphi_{ll} = \pi_{ll} \approx 0$, ($l = 1, \dots, D-1$). Assim sendo, para este modelo não massivo descrito por um tensor simétrico de *rank*-2, obtivemos os seguintes vínculos:

$$\varphi_{ll} = \pi_{ll} \approx 0 \quad (3.144)$$

$$\varphi_{ij} = \pi_{ij} \approx 0 \quad (3.145)$$

$$\xi = \pi_{00} \approx 0 \quad (3.146)$$

$$\chi_j = \pi_{0j} \approx 0 \quad (3.147)$$

Ou seja, todos os momentos do sistema são fracamente nulos! Todos os vínculos $\pi_{\alpha\beta} \approx 0$ são de primeira classe pois $\{\pi_{\alpha\beta}(x), \pi_{\mu\nu}(y)\} = 0$. Deste modo, realizando a contagem de graus de liberdade do sistema, obtemos de (2.29) que

$$N_F = \frac{2D(D+1)}{2} - 2\frac{D(D+1)}{2} = 0 \quad (3.148)$$

Portanto, este modelo não possui conteúdo físico. Para saber se o algoritmo de Dirac teve sua análise eficaz, pode-se realizar a contagem dos graus de liberdade do modelo (3.117) através de outros métodos. Por exemplo através de um modelo equivalente de primeira ordem em derivadas. Adicionando um campo vetorial auxiliar A_μ na teoria, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_\mu, \bar{h}_{\mu\nu}) &= 2A^\mu \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\alpha} - A^\mu A_\mu \\ &= -(A^\mu - \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu})^2 + (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu})^2 \\ &= (\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu})^2 - \bar{A}^\mu \bar{A}_\mu \end{aligned} \quad (3.149)$$

sendo $\bar{A}^\mu = A^\mu - \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu}$. Vemos que a equação de movimento em relação à $\bar{A}^\mu$ leva a:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{A}^\mu} = -2\bar{A}^\mu = 0 \quad (3.150)$$

Logo, $\mathcal{L}(A_\mu, \bar{h}_{\mu\nu})$ é equivalente ao modelo $\mathcal{L} = [\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}]^2$. Agora, convém analisar este modelo por outro viés. Note que como $\bar{h}_{\mu\alpha}$ não possui traço, a densidade de lagrangiana (3.149) equivale a:

$$\mathcal{L}(A, \bar{h}) = -2\bar{h}_{\mu\alpha} \partial^\alpha A^\mu - A^\mu A_\mu = -\bar{h}_{\mu\alpha} \left(\partial^\alpha A^\mu + \partial^\mu A^\alpha - \frac{2\eta^{\mu\alpha}}{D} \partial^\beta A_\beta \right) - A^\mu A_\mu \quad (3.151)$$

de forma que o termo entre parênteses é simétrico e sem traço como $\bar{h}_{\mu\nu}$. A equação de movimento em relação à $\bar{h}_{\mu\nu}$ é dada por:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{h}_{\mu\alpha}} = 0 \Rightarrow \partial^\alpha A^\mu + \partial^\mu A^\alpha = \frac{2}{D} \eta^{\mu\alpha} \partial^\beta A_\beta \quad (3.152)$$

Não é difícil ver de (3.152) que, supondo que os campos vão a zero no infinito, chegamos em $A_\mu = 0$. Como segue:

Primeiramente, temos de (3.152) que

$$\partial_1 A_1 = \partial_2 A_2 = \dots = \partial_{D-1} A_{D-1} \equiv f \quad (3.153)$$

Para $(\mu, \alpha) = (i, j)$ com $i \neq j$ em (3.152), temos:

$$\partial_i A_j + \partial_j A_i = 0 \quad i \neq j \quad (3.154)$$

Aplicando $\partial^i \partial^j$ em (3.154) e somando em i e j , chegamos a:

$$\nabla^2 (\partial_l A_l) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, D-1 \quad (3.155)$$

que leva a $\partial_j A_j = 0$. Aplicando ∂^i em (3.154), concluímos então que $\nabla^2 A_j = 0$ e assim $A_j = 0$. Por fim, com $(\mu, \alpha) \rightarrow (0, j)$ em (3.152) temos $\partial_0 A_j + \partial_j A_0 = 0$, e como $A_j = 0$ temos $\partial_j A_0 = 0$. Portanto, $A_\mu = 0$. Assim, $\mathcal{L}(A_\mu, \bar{h}_{\mu\nu})$ de fato não possui nenhum conteúdo físico e a contagem de graus de liberdade deverá resultar de fato em zero.

3.7 MODELO DE RANK-3 PURO TRAÇO

A motivação para estudar este tipo de modelo se deve ao fato de naturalmente, ao relacionarmos o modelo *PBF* sugerido em (Dalmazzi; Martins, 2025) com o Fronsdal usual para spin-3, percebe-se que a diferença entre eles corresponde a um divergente ao quadrado do traço do tensor de *rank*-3. Partindo de um tensor de *rank*-3 $\phi_{\mu\nu\alpha}$ totalmente simétrico:

$$\phi_{\mu\nu\alpha} = \phi_{\nu\mu\alpha} = \phi_{\mu\alpha\nu} = \phi_{\alpha\nu\mu} = \phi_{(\mu\nu\alpha)} \quad (3.156)$$

Construímos a densidade de lagrangiana abaixo que aparece ao compararmos o modelo de Fronsdal com o modelo *PBF* para $s=3$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_\mu)^2 \quad (3.157)$$

tal que ϕ_μ representa o traço do tensor $\phi_{\mu\nu\alpha}$, ou seja,

$$\phi_\mu = \eta^{\nu\alpha} \phi_{\mu\nu\alpha} = -\phi_{\mu 00} + \phi_{\mu jj} \quad (3.158)$$

O modelo (3.157) possui simetria de *gauge* da forma

$$\delta\phi_{\mu\nu\alpha} = \Lambda_{\mu\nu\alpha} \quad (3.159)$$

onde $\partial^\mu \Lambda_\mu = 0$, sendo $\Lambda_\mu = \eta^{\alpha\nu} \Lambda_{\alpha\nu\mu}$ o traço do tensor totalmente simétrico $\Lambda_{\mu\nu\alpha}$. Note que o número total de parâmetros de *gauge* independentes se torna:

$$N_\Lambda = \frac{D(D+1)(D+2)}{3!} - 1 \quad (3.160)$$

Separando as componentes temporais das espaciais, a densidade de lagrangiana (3.157) se torna:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}_{000} - \dot{\phi}_{0kk} - \partial_j \phi_{j00} + \partial_j \phi_{jkk} \right)^2 \quad (3.161)$$

onde, de forma análoga ao caso de *rank*-2, define-se os momentos canônicos por

$$\pi_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\mu\nu\alpha}} \quad (3.162)$$

tal que

$$\pi_{000} = \dot{\phi}_{000} - \dot{\phi}_{0kk} - \partial_j \phi_{j00} + \partial_j \phi_{jkk} \quad (3.163)$$

$$\pi_{00k} = 0 \quad (3.164)$$

$$\pi_{0lm} = - \left(\dot{\phi}_{000} - \dot{\phi}_{0kk} - \partial_k \phi_{k00} + \partial_j \phi_{jkk} \right) \delta_{lm} \quad (3.165)$$

$$\pi_{ijk} = 0 \quad (3.166)$$

Consequentemente, tem-se os vínculos primários

$$\tilde{\varphi}_l = \pi_{000} + \pi_{0ll} \approx 0 \quad (3.167)$$

$$\varphi_k = \pi_{00k} \approx 0 \quad (3.168)$$

$$\varphi_{lm} = \pi_{0lm} \approx 0 \quad , \quad l < m \quad (3.169)$$

$$\varphi_{ijk} = \pi_{ijk} \approx 0 \quad (3.170)$$

Temos um total de vínculos primários dado por:

$$N_{FCC} = 2(D-1) + \frac{(D-1)(D-2)}{2} + \frac{(D-1)D(D+1)}{3!} = \frac{D(D+1)(D+2)}{3!} - 1 \quad (3.171)$$

A densidade de hamiltoniana canônica será

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_{000} \dot{\phi}_{000} + \pi_{00k} \dot{\phi}_{00k} + \pi_{0jk} \dot{\phi}_{0jk} + \pi_{ijk} \dot{\phi}_{ijk} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi_{000} \pi_{000} + \pi_{000} (\partial_j \phi_{j00} - \partial_j \phi_{jkk}) \end{aligned} \quad (3.172)$$

Por conseguinte, a hamiltoniana primária se configurará por

$$H_P = \int d^{D-1}x \left(\mathcal{H} + \tilde{\lambda}_l \tilde{\varphi}_l + \lambda_k \varphi_k + \lambda_{lm} \varphi_{lm} + \lambda_{ijk} \varphi_{ijk} \right) \quad (3.173)$$

Consequentemente, aplicando a condição de consistência sobre os vínculos primários.

- Para $\tilde{\varphi}_l = \pi_{00l} + \pi_{0ll} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são nulos:

$$\{\tilde{\varphi}_l(y), H_P\} = 0 = \{\tilde{\varphi}_l, \varphi_k\} = \{\tilde{\varphi}_l, \varphi_{ijk}\} \quad (3.174)$$

Assim, estes vínculos primários não gerarão vínculos secundários.

- Para $\varphi_l = \pi_{00l} \approx 0$:

Os parênteses de Poisson relevantes são:

$$\{\varphi_l(y), H_P\} = \partial_l \pi_{000} \approx 0 \quad (3.175)$$

Aplicando ∂_l em (3.175) temos que $\nabla^2 \pi_{000} \approx 0$ que nos leva a $\pi_{000} \approx 0$ que, em conjunto com (3.167) nos deixa com $\pi_{0ll} \approx 0$ para cada $l = 1, 2, \dots, D-1$. É fácil ver que não haverá mais vínculos secundários nem terciários advindos da evolução temporal. Portanto, os vínculos obtidos neste modelo de *rank*-3 são os próprios momentos do sistema

$$\varphi = \pi_{000} \approx 0 \quad (3.176)$$

$$\varphi_l = \pi_{00l} \approx 0 \quad (3.177)$$

$$\varphi_{lm} = \pi_{0lm} \approx 0 \quad (3.178)$$

$$\varphi_{lmn} = \pi_{lmn} \approx 0 \quad (3.179)$$

$$(3.180)$$

ou seja, $\pi_{\alpha\beta\nu} \approx 0$. Todos estes vínculos são de primeira classe. Consequentemente, o número de graus de liberdade do sistema em D dimensões é

$$N = \frac{1}{2} \left[2 \frac{D(D+1)(D+2)}{6} - 2 \frac{D(D+1)(D+2)}{6} \right] = 0 \quad (3.181)$$

Assim, de forma análoga ao modelo de *rank*-2 de traço nulo, este modelo de *rank*-3 não possui graus de liberdade e portanto não contém conteúdo físico. Pode-se mostrar trabalhando com um campo auxiliar escalar (A), análogo ao que fizemos no caso do modelo de traço-nulo (3.157) que a ausência de conteúdo já era esperada, pois, adicionando-se um campo auxiliar na teoria tal que

$$\mathcal{L}(A, \phi_\mu) = 2A\partial^\mu \phi_\mu - A^2 = -(A - \partial^\mu \phi_\mu)^2 + (\partial^\mu \phi_\mu)^2 = (\partial^\mu \phi_\mu)^2 - \bar{A}^2 \quad (3.182)$$

sendo $\bar{A} = A - \partial^\mu \phi_\mu$. Como a equação de movimento em relação à $\bar{A}$ implica em:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{A}} = -2\bar{A} = 0 \quad (3.183)$$

Logo, $\mathcal{L}(A, \phi)$ é equivalente ao modelo $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi_\mu)^2$. Por outro lado, note que a densidade de lagrangiana (3.182) equivale a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, \phi) &= -2\phi_\mu \partial^\mu A - A^2 = -2\phi_{\mu\alpha\nu} \eta^{\alpha\nu} \partial^\mu A - A^2 \\ &= -2\phi_{\mu\alpha\nu} \frac{1}{3} (\eta^{\alpha\nu} \partial^\mu + \eta^{\alpha\mu} \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha) A - A^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (3.184)$$

de forma que o termo entre parênteses é simétrico. A equação de movimento em relação à $\phi_{\mu\alpha\nu}$:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_{\mu\alpha\nu}} = 0 \Rightarrow (\eta^{\alpha\nu} \partial^\mu + \eta^{\alpha\mu} \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha) A = 0 \quad (3.185)$$

Não é difícil ver de (3.185) que, supondo que os campos vão a zero no infinito, chegamos em $A = 0$. Como segue:

$$\eta_{\alpha\nu} (\eta^{\alpha\nu} \partial^\mu + \eta^{\alpha\mu} \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha) A = (D + 2) \partial^\mu A = 0 \quad (3.186)$$

de onde temos $A = 0$. Assim, $\mathcal{L}(A, \phi)$ de fato não possui nenhum conteúdo físico e a contagem de graus de liberdade deverá resultar de fato em zero.

4 ANÁLISE DE DIRAC NOS MODELOS DE FRONSDAL E *PBF* (PRELIMINARES)

Neste capítulo, apresentaremos a descrição de partículas de higher-spin ($s \geq 3$) sem massa e com spin inteiro. Abordando tanto o modelo canônico de FronsdaI quanto a alternativa recentemente proposta na literatura, conhecida como modelo *Partially Broken FronsdaI* (*PBF*). Inicialmente, discutiremos a formulação original de FronsdaI que, de forma análoga à teoria de Einstein-Hilbert linearizada para o gráviton ($s = 2$), é construída a partir de uma densidade de Lagrangiana quadrática em campos tensoriais totalmente simétricos e de segunda ordem em derivadas. Em seguida, introduzimos o modelo *PBF*, que se destaca por flexibilizar as restrições sobre as fontes externas oriundas das simetrias de calibre.

4.1 MODELO DE FRONSDAL

Em 1974 Singh e Hagen (Singh; Hagen, 1974a) introduziram um modelo quadrático em campos (livres) que descreve partículas massivas de spin- s inteiro em termos de campos totalmente simétricos de *rank*- s , $s - 2, s - 3, \dots, 0$ ou 1 dependendo se s é par ou ímpar. Todos os campos têm traço nulo. O campo de *rank*- s representa os graus de liberdade físicos de partículas de spin- s enquanto que os de *rank*- r com $r \leq s - 2$ representam campos auxiliares (nulos "*on shell*") que são necessários para garantir as chamadas condições de *FP* que levam no final a um total de $2s + 1$ graus de liberdade em $D = 4$, que é o número esperado para partículas de spin- s massivas em $D = 4$.

No limite de massa zero ($m \rightarrow 0$) do modelo de (Singh; Hagen, 1974a) restam apenas os campos de *rank*- s e *rank*-($s - 2$), ambos sem traço, que equivalem a um único campo de *rank*- s com a condição de duplo traço nulo que por sua vez só existe para $s \geq 4$, ou seja,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s} &= \Phi_{(\mu_1\dots\mu_s)} \\ (\Phi'')_{\mu_5\dots\mu_s} &= \eta^{\mu_1\mu_2}\eta^{\mu_3\mu_4}\Phi_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\dots\mu_s} = 0\end{aligned}$$

Assim foi obtido em 1978 o modelo de FronsdaI (FronsdaI, 1978) que se tornou o modelo básico em teoria de campos para descrever partículas livres de spin- s inteiro sem massa, cuja forma lagrangiana geral é descrita por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= -\frac{1}{2}(\partial_\rho\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s})^2 + \frac{s}{2}(\partial^{\mu_1}\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s})^2 + \frac{s(s-1)}{2}\partial^{\mu_1}\partial^{\mu_2}\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s}\Phi_{\nu_1}{}^{\nu_1\mu_3\dots\mu_s} \\ &\quad + \frac{s(s-1)}{4}(\partial_\rho\Phi^{\mu_1}{}_{\mu_1\mu_3\dots\mu_s})^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{8}(\partial^{\mu_3}\Phi^{\mu_1}{}_{\mu_1\mu_3\dots\mu_s})^2\end{aligned}\quad (4.1)$$

A ação correspondente a (4.1) é invariante por transformações que se assemelham a difeomorfismos de spin alto sem traço:

$$\delta\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s} = \partial_{(\mu_1}\bar{\Lambda}_{\mu_2\mu_3\dots\mu_s)}\quad (4.2)$$

onde o tensor simétrico $\bar{\Lambda}_{\mu_2\mu_3\ldots\mu_s}$ de $\text{rank}-(s-1)$ não possui traço:

$$\eta^{\mu_2\mu_3}\bar{\Lambda}_{\mu_2\mu_3\ldots\mu_s} = 0 \quad (4.3)$$

Note que para $s = 2$ a lagrangiana de Fronsda se torna justamente a lagrangiana de Einstein-Hilbert linearizada de (3.22). Daqui para frente nos fixaremos no modelo de spin $s = 3$, de tal forma que teremos

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2}h_{\mu\nu\rho}\square h^{\mu\nu\rho} + \frac{3}{2}(\partial^\mu h_{\mu\nu\rho})^2 + 3\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu\rho}h^\rho - \frac{3}{2}h_\mu\square h^\mu + \frac{3}{4}(\partial^\rho h_\rho)^2 \quad (4.4)$$

cujasimetria de *gauge* é:

$$\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_{(\mu}\bar{\Lambda}_{\nu\rho)} \quad (4.5)$$

onde $\eta^{\mu\nu}\bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$. O número de parâmetros de *gauge* independentes é dado por:

$$N_\Lambda = \frac{D(D+1)}{2} - 1 \quad (4.6)$$

Separando as componentes espaciais das temporais, tem-se a densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & \frac{1}{4}\dot{h}_{000}^2 - \frac{3}{2}\dot{h}_{000}\dot{h}_{0kk} + \frac{9}{4}\dot{h}_{0kk}^2 + \frac{1}{2}\dot{h}_{ijk}^2 + \frac{3}{2}\dot{h}_{000}\partial_i h_{i00} - \frac{9}{2}\dot{h}_{0kk}\partial_j h_{j00} \\ & - 3\dot{h}_{ijk}\partial_i h_{0jk} - \frac{3}{2}\dot{h}_{jjk}^2 + \frac{3}{2}\dot{h}_{jjk}\partial_k h_{000} - \frac{3}{2}\dot{h}_{jjk}\partial_k h_{0ii} + 6\dot{h}_{jjk}\partial_i h_{0ik} + \mathcal{V} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $\mathcal{V}$ são os termos que não contêm dependência em derivada temporal

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & -(\partial_i h_{000})^2 - \frac{3}{2}(\partial_j h_{0kk})^2 + \frac{3}{2}(\partial_i h_{0jk})^2 - \frac{1}{2}(\partial_l h_{ijk})^2 + \frac{9}{4}(\partial_i h_{i00})^2 - 3(\partial_i h_{0ij})^2 \\ & + \frac{3}{2}(\partial_i h_{ijk})^2 + \frac{3}{2}(\partial_j h_{iik})^2 + \frac{3}{4}(\partial_j h_{jjk})^2 - 3\partial_j h_{00k}\partial_j h_{iik} - \frac{3}{2}\partial_i h_{i00}\partial_j h_{jkk} \\ & + 3\partial_i h_{00j}\partial_k h_{ijk} - 3\partial_i h_{llj}\partial_k h_{ijk} + 3\partial_j h_{000}\partial_j h_{0kk} - 3\partial_j h_{000}\partial_i h_{0ij} + 3\partial_i h_{0kk}\partial_j h_{0ij} \end{aligned} \quad (4.8)$$

em acordo com (Mendonça; Bittencourt, 2020) após uma redefinição trivial.

De (4.7) obtém-se os momentos canônicos

$$\pi_{000} = \frac{1}{2}\dot{h}_{000} - \frac{3}{2}\dot{h}_{0kk} + \frac{3}{2}\partial_k h_{k00} \quad (4.9)$$

$$\pi_{00k} = 0 \quad (4.10)$$

$$\pi_{0ij} = \left[-\frac{3}{2}\dot{h}_{000} + \frac{9}{2}\dot{h}_{0kk} - \frac{9}{2}\partial_k h_{k00} \right] \delta_{ij} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ijk} = & \dot{h}_{ijk} - (\partial_i h_{0jk} + \partial_j h_{0ik} + \partial_k h_{0ij}) - (\delta_{ij}\dot{h}_{mmk} + \delta_{ik}\dot{h}_{mmj} + \delta_{jk}\dot{h}_{mmi}) \\ & + \frac{1}{2}(\delta_{ij}\partial_k + \delta_{ik}\partial_j + \delta_{jk}\partial_i)h_{000} - \frac{1}{2}(\delta_{ij}\partial_k + \delta_{ik}\partial_j + \delta_{jk}\partial_i)h_{0ll} + 2(\delta_{ij}\partial_l h_{0kl} + \delta_{jk}\partial_l h_{0il} + \delta_{ik}\partial_l h_{0jl}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Assim, das equações (4.9), (4.10) e (4.11) obtemos os vínculos primários

$$\varphi_k = \pi_{00k} \approx 0 \quad (4.13)$$

$$\varphi_{ij} = \pi_{0ij} + 3\pi_{000}\delta_{ij} \approx 0 \quad (4.14)$$

O total de vínculos primários é dado por:

$$N_{PC} = D - 1 + \frac{D(D-1)}{2} = \frac{D(D+1)}{2} - 1 \quad (4.15)$$

Deste modo, a densidade de hamiltoniana será

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_{\mu\nu\alpha} \dot{h}_{\mu\nu\alpha} - \mathcal{L}_F \\ \mathcal{H} &= \pi_{000}^2 + \frac{1}{2}\pi_{ijk}^2 - 3\pi_{000}\partial_k h_{k00} + 3\pi_{ijk}\partial_i h_{0jk} - \frac{3}{2D}\pi_{jjk}^2 + \frac{3}{2D}\pi_{jjk}\partial_k h_{000} - \frac{9}{2D}\pi_{jjk}\partial_k h_{0ii} \\ &\quad + \left(\frac{9-9D}{4D}\right)\partial_k h_{000}\partial_k h_{0jj} + \left(\frac{5D-3}{8D}\right)(\partial_k h_{000})^2 + \left(\frac{9D-27}{8D}\right)(\partial_k h_{0jj})^2 + \frac{1}{2}(\partial_l h_{ijk})^2 \\ &\quad - \frac{3}{2}(\partial_i h_{ijk})^2 - \frac{3}{2}(\partial_j h_{iik})^2 - \frac{3}{4}(\partial_j h_{jkk})^2 + \frac{3}{2}\partial_i h_{i00}\partial_j h_{jkk} + 3\partial_j h_{00k}\partial_j h_{iik} \\ &\quad - 3\partial_i h_{00j}\partial_k h_{ijk} + 3\partial_i h_{llj}\partial_k h_{ijk} \end{aligned} \quad (4.16)$$

e, portanto, a hamiltoniana primária será

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H} + \lambda_k \varphi_k + \lambda_{ij} \varphi_{ij}) \quad (4.17)$$

Deste modo, devemos aplicar a condição de consistência nos vínculos primários

- Para $\varphi_l = \pi_{00l} \approx 0$

$$\chi_l \equiv -\frac{\dot{\varphi}_l}{3} = -\frac{1}{3}\{\varphi_l(x), H_P\} = \partial_l \pi_{000} - \nabla^2 h_{kkl} + \partial_i \partial_k h_{ikl} - \frac{1}{2}\partial_l \partial_i h_{ikk} \approx 0 \quad (4.18)$$

- para $\varphi_{lm} = \pi_{0lm} + 3\pi_{000}\delta_{lm} \approx 0$

$$\chi_{lm} \equiv -\frac{\dot{\varphi}_{lm}}{3} = -\frac{1}{3}\{\varphi_{lm}(x), H_P\} = \partial_i \pi_{ilm} + \frac{1}{2}\nabla^2 h_{000}\delta_{lm} - \frac{3}{2}\nabla^2 h_{0kk}\delta_{lm} \approx 0 \quad (4.19)$$

Determinando assim os vínculos secundários do modelo de fronsdal χ_l e χ_{lm} , portanto continuaremos com a aplicação do algoritmo sobre estes vínculos.

- Para $\chi_l = \partial_l \pi_{000} - \nabla^2 h_{kkl} + \partial_i \partial_k h_{ikl} - \frac{1}{2}\partial_l \partial_i h_{ikk} \approx 0$

$$\{\chi_l(x), H_P\} = \partial_m \chi_{lm} \approx 0 \quad (4.20)$$

- Para $\chi_{lm} = \partial_i \pi_{ilm} + \frac{1}{2}\nabla^2 h_{000}\delta_{lm} - \frac{3}{2}\nabla^2 h_{0kk}\delta_{lm} \approx 0$

$$\{\chi_{lm}(x), H_P\} = \partial_j \chi_j \delta_{lm} \approx 0 \quad (4.21)$$

Portanto, para ambas as evoluções dos vínculos secundários, a condição de consistência é fracamente satisfeita e não leva a novos vínculos na teoria. Por conseguinte, todos os vínculos do modelo de Fronsda correspondem a:

$$\varphi_l = \pi_{00l} \approx 0 \quad (4.22)$$

$$\varphi_{lm} = \pi_{0lm} + 3\pi_{000}\delta_{lm} \approx 0 \quad (4.23)$$

$$\chi_l = \partial_l \pi_{000} - \nabla^2 h_{kkl} + \partial_i \partial_k h_{ikl} - \frac{1}{2} \partial_l \partial_i h_{ikk} \approx 0 \quad (4.24)$$

$$\chi_{lm} = \partial_i \pi_{ilm} + \frac{1}{2} \nabla^2 h_{000} \delta_{lm} - \frac{3}{2} \nabla^2 h_{0kk} \delta_{lm} \approx 0 \quad (4.25)$$

De tal forma que os parênteses de Poisson entre estes vínculos são:

$$\{\varphi_i, \chi_j\} = 0 \quad (4.26)$$

$$\{\varphi_{ij}(x), \chi_{lm}(y)\} = \left[-\frac{9}{2} \delta_{lm} \delta_{ij} \nabla_y^2 + \frac{9}{2} \delta_{lm} \delta_{ij} \nabla_y^2 \right] \delta(x-y) = 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \{\chi_i(x), \chi_{lm}(y)\} &= \left[\left(-\frac{9}{2} + 3 + \frac{3}{2} \right) \delta_{lm} \partial_i^y \nabla_y^2 + \left(3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \delta_{il} \partial_m^y \nabla_y^2 \right] \delta(x-y) \\ &+ \left[\left(3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \delta_{im} \partial_l^y \nabla_y^2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) \partial_i^y \partial_l^y \partial_m^y \right] \delta(x-y) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

O cálculo detalhado da evolução temporal dos vínculos χ_l e χ_{lm} assim como dos parênteses de Poisson entre eles está no Apêndice (B). Portanto todos os vínculos são de primeira classe e o número total de vínculos que temos em (4.22) a (4.25) é $2D(D-1)/2 + 2(D-1) = (D+2)(D-1)$, consequentemente, o número de graus de liberdade do sistema em D dimensões é

$$N = \frac{D(D+1)(D+2)}{3!} - (D+2)(D-1) = \frac{(D+2)(D-2)(D-3)}{6} \quad (4.29)$$

Para $D = 4$, temos que $N = 2$, ou seja, referentes às helicidades $s = \pm 3$. Em $D = 5$ temos 7 graus de liberdade correspondente a $2s + 1$ com $s = 3$. O número $2s + 1$ é a quantidade de graus de liberdade de partículas de spin- s massivas em $D = 4$, que corresponde ao número de graus de liberdade do caso sem massa em uma dimensão acima. Temos também zero graus de liberdade em $D = 3$. É um fato conhecido que para $D = 3$ não há propagação de partículas sem massa de spin- s com $s \geq 2$, incluindo Einstein-Hilbert.

Note também que podemos reescrever a densidade de hamiltoniana (4.16) utilizando os vínculos (4.18) e (4.19) que aparecem naturalmente nela de forma a obter

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \pi_{000}^2 + \frac{1}{2} \pi_{ijk}^2 - \frac{3}{2D} \pi_{jjk}^2 + \frac{3}{2D} \pi_{jjk} \partial_k h_{000} - \frac{9}{2D} \pi_{jjk} \partial_k h_{0ii} + \left(\frac{5D-3}{8D} \right) (\partial_k h_{000})^2 \\ &- \left(\frac{15D-9}{4D} \right) \partial_k h_{000} \partial_k h_{0jj} + \left(\frac{45D-27}{8D} \right) (\partial_k h_{0jj})^2 + \frac{1}{2} (\partial_l h_{ijk})^2 \\ &- \frac{3}{2} (\partial_i h_{ijk})^2 - \frac{3}{2} (\partial_j h_{iik})^2 - \frac{3}{4} (\partial_j h_{jkk})^2 + 3 \partial_i h_{llj} \partial_k h_{ijk} + h_{00i} \chi_i + h_{0ij} \chi_{0ij} \end{aligned} \quad (4.30)$$

A partir deste resultado obtido para a hamiltoniana, pode-se trabalhar com a álgebra de projetores de

spin para provar a positividade da hamiltoniana. Essa análise foi feita em ((Mendonça; Bittencourt, 2020)) de modo que os autores obtiveram a hamiltoniana reduzida para o modelo de Fronsda:

$$\mathcal{H}_F^{(r)} = \frac{1}{2} \pi_{ijk} \left(P_{11}^{(3)} \right)_{lmn}^{ijk} \pi^{lmn} + \frac{1}{2} (\partial_{j'} h_{ijk}) \left(P_{11}^{(3)} \right)_{lmn}^{ijk} \partial_{j'} h^{lmn} \geq 0 \quad (4.31)$$

onde, uma vez que para qualquer projetor ($P^2 = P$) entre dois tensores temos¹ $hPh = hPPh = (Ph)(Ph) \geq 0$, pode-se concluir que a hamiltoniana reduzida para o modelo de Fronsda é positivo definida. O operador $(P_{11}^{(3)})_{lmn}^{ijk}$ projeta tensores simétricos de *rank*-3 arbitrários em tensores simétricos de *rank*-3 sem traço e transversos, vide (Mendonça; Bittencourt, 2020).

4.2 O NOVO MODELO PBF

4.2.1 Introdução

Como dito anteriormente, a priori, para descrever partículas não-massivas de spin- s inteiro se utiliza como paradigma o modelo de Fronsda, porém, recentemente, um novo modelo foi sugerido em (Dalmazi; Martins, 2025). Inicialmente foram adicionados parâmetros arbitrários (a, b, c) no modelo usual de Fronsda e, a partir disso, foi obtida uma descrição irreduzível alternativa de partículas de spin- s inteiro. Isto é, apenas com campos de spin- s se propagando. O ponto de partida para o caso de $s = 3$ foi uma lagrangiana geral cuja forma é

$$\mathcal{L}(a, b, c) = \frac{1}{2} h_{\mu\nu\rho} \square h^{\mu\nu\rho} + \frac{3}{2} (\partial^\mu h_{\mu\nu\rho})^2 + 3a \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu\rho} h^\rho - \frac{3b}{2} h_\mu \square h^\mu + \frac{3c}{4} (\partial^\rho h_\rho)^2 \quad (4.32)$$

onde, $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}(1, 1, 1)$, corresponde à lagrangiana original de Fronsda. O modelo *Partially Broken Fronsda* (PBF) recém-proposto pode ser definido como

$$\mathcal{L}_{PBF} = \mathcal{L}(1, 1, c) = \frac{1}{2} h_{\mu\nu\rho} \square h^{\mu\nu\rho} + \frac{3}{2} (\partial^\mu h_{\mu\nu\rho})^2 + 3\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu\rho} h^\rho - \frac{3}{2} h_\mu \square h^\mu + \frac{3c}{4} (\partial^\rho h_\rho)^2 \quad (4.33)$$

O modelo (4.33) é invariante sob a seguinte transformação de *gauge*:

$$\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_{(\mu} \bar{\Lambda}_{\nu\rho)}^\dagger \quad (4.34)$$

onde $\bar{\Lambda}^\dagger$, além² de ter traço nulo, tem dupla divergência nula:

$$\partial^\mu \partial^\nu \bar{\Lambda}_{\mu\nu}^\dagger = 0 \quad (4.35)$$

Pode-se reescrever a lagrangiana (4.33) do PBF tal como

¹ O projetor $(P_{11}^{(3)})_{lmn}^{ijk}$ é hermitiano, ou seja, invariante por integração por partes dentro da ação e aparece explicitamente em (Mendonça; Bittencourt, 2020).

² Por convenção, utilizam-se os parênteses em $\partial_{(\mu} \bar{\Lambda}_{\nu\rho)}^\dagger$ para representar a simetrização total entre os índices $\mu\nu\rho$, além do índice " $\dagger$ " para representar a dupla divergência nula do parâmetro.

$$\mathcal{L}_{PBF} = \mathcal{L}_F + \frac{3(c-1)}{4}(\partial^\rho h_\rho)^2 \quad (4.36)$$

Mostrou-se em (Dalmazi; Martins, 2025) que a análise lagrangiana do conteúdo físico de (4.36) pode ser feita a partir do conteúdo de $\mathcal{L}_F$ e do termo $(\partial^\rho h_\rho)^2$ separadamente, embora ambos dependam do mesmo campo $h_{\mu\nu\alpha}$. Como vimos anteriormente, e foi conjecturado em (Dalmazi; Martins, 2025), o termo $(\partial^\rho h_\rho)^2$ não possui conteúdo físico. Portanto o conteúdo físico de $\mathcal{L}_{PBF}$ equivale ao de $\mathcal{L}_F$.

Os autores de (Dalmazi; Martins, 2025) mostraram também que as equações de movimento do modelo de *PBF* levam a $\partial^\mu h_\mu = 0$ e às equações usuais de Fronsda, o que mostra que *PBF* é como o modelo de Fronsda no *gauge* $\partial^\mu h_\mu = 0$. Note que a restrição extra (4.35) significa que temos efetivamente um parâmetro de *gauge* a menos no *PBF* em comparação com o modelo de Fronsda, portanto o *PBF* tem menos simetria. Agora o número total de parâmetros independentes, de acordo com (4.34) é dado por:

$$N_\Lambda = \frac{D(D+1)}{2} - 2 \quad (4.37)$$

Um aspecto vantajoso do modelo *PBF* sobre o modelo de Fronsda é que a fonte externa acoplada ao campo de spin-3 satisfaz menos vínculos, ou seja, ela pode ser um pouco mais geral pois temos menos simetrias de *gauge* devido a (4.35). Vamos examinar esse ponto a seguir: Começando com a análise da lagrangiana livre de Fronsda com um acoplamento com fonte:

$$\mathcal{L}_F^T = \mathcal{L}_F + T_{\mu\nu\rho}^F h^{\mu\nu\rho} \quad (4.38)$$

Para que a ação de Fronsda com fontes seja invariante pela simetria de *gauge* $\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_{(\mu} \bar{\Lambda}_{\nu\rho)}$ é preciso impor restrições sobre a fonte:

$$\delta \mathcal{S}_F^T = \delta \int T_{\mu\nu\rho}^F h^{\mu\nu\rho} = \int T_{\mu\nu\rho}^F \partial^{(\mu} \bar{\Lambda}^{\nu\rho)} = -3 \int \partial^\mu T_{\mu\nu\rho}^F \bar{\Lambda}^{\nu\rho} = 0 \quad (4.39)$$

observa-se que, tendo em vista a condição de traço-nulo do parâmetro $\eta^{\mu\nu} \bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$, para satisfazer a condição de invariância, a fonte deve satisfazer $\partial^\mu T_{\mu\nu\rho}^F = \eta_{\nu\rho} \Omega$ onde Ω é um escalar arbitrário.

Quando se introduz uma nova condição sobre os parâmetros como no modelo *PBF*, isto é, $\partial^\mu \partial^\nu \bar{\Lambda}_{\mu\nu}^\dagger = 0$, pode-se observar que há mais liberdade sobre a fonte

$$\delta \int T_{\mu\nu\rho}^F h^{\mu\nu\rho} = -3 \int \partial^\mu T_{\mu\nu\rho}^F \bar{\Lambda}^{\dagger\nu\rho} = 0 \quad (4.40)$$

de forma que agora, para satisfazer (4.40), a fonte pode satisfazer uma restrição mais leve:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu\rho}^F = \eta_{\nu\rho} \Omega + \partial_\nu \partial_\rho J \quad (4.41)$$

onde agora temos dois escalares arbitrários Ω e J . Ficando visível o "relaxamento" das condições impostas sobre as possíveis fontes acopladas ao modelo *PBF* em comparação com o modelo de Fronsda.

4.2.2 Análise hamiltoniana preliminar

Separando as componentes espaciais das temporais, a lagrangiana (4.33) se torna para valores arbitrários do parâmetro c :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PBF} = & \frac{(3c-2)}{4} \dot{h}_{000}^2 - \frac{3c}{2} \dot{h}_{000} \dot{h}_{0kk} + \frac{(3c+6)}{4} \dot{h}_{0kk}^2 + \frac{1}{2} \dot{h}_{ijk}^2 \\ & + \frac{(6-3c)}{2} \dot{h}_{000} \partial_i h_{i00} - \frac{(12-3c)}{2} \dot{h}_{0kk} \partial_j h_{j00} - 3 \dot{h}_{ijk} \partial_i h_{0jk} \\ & - \frac{3}{2} \dot{h}_{jjk}^2 + \frac{3c}{2} \dot{h}_{jjk} \partial_k h_{000} - \frac{3c}{2} \dot{h}_{jjk} \partial_k h_{0ii} + 6 \dot{h}_{jjk} \partial_i h_{0ik} + \mathcal{V}_c \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde $\mathcal{V}_c$ são os termos que não contêm dependência em derivada temporal:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_c = & -(\partial_i h_{000})^2 - \frac{3}{2} (\partial_j h_{0kk})^2 + \frac{3}{2} (\partial_i h_{0jk})^2 - \frac{1}{2} (\partial_l h_{ijk})^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{3c}{4} \right) (\partial_i h_{i00})^2 - 3 (\partial_i h_{0ij})^2 \\ & + \frac{3}{2} (\partial_i h_{ijk})^2 + \frac{3}{2} (\partial_j h_{iik})^2 + \frac{3c}{4} (\partial_j h_{jjk})^2 - 3 \partial_j h_{00k} \partial_j h_{iik} - \frac{3c}{2} \partial_i h_{i00} \partial_j h_{jjk} \\ & + 3 \partial_i h_{00j} \partial_k h_{ijk} - 3 \partial_i h_{llj} \partial_k h_{ijk} + 3 \partial_j h_{000} \partial_j h_{0kk} - 3 \partial_j h_{000} \partial_i h_{0ij} + 3 \partial_i h_{0kk} \partial_j h_{0ij} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Note que $\mathcal{V}_{c=1}$ coincide com $\mathcal{V}$ do modelo de Fronsda de (4.8). De (4.42) obtemos os momentos canônicos

$$\pi_{000} = \frac{(3c-2)}{2} \dot{h}_{000} - \frac{3c}{2} \dot{h}_{0kk} + \frac{(6-3c)}{2} \partial_k h_{k00} \quad (4.44)$$

$$\pi_{00k} = 0 \quad (4.45)$$

$$\pi_{0ij} = \left[-\frac{3c}{2} \dot{h}_{000} + \frac{(3c+6)}{2} \dot{h}_{0kk} - \frac{(12-3c)}{2} \partial_k h_{k00} \right] \delta_{ij} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ijk} = & \dot{h}_{ijk} - (\partial_i h_{0jk} + \partial_j h_{0ik} + \partial_k h_{0ij}) - (\delta_{ij} \dot{h}_{mmk} + \delta_{ik} \dot{h}_{mmj} + \delta_{jk} \dot{h}_{mmi}) \\ & + \frac{c}{2} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{jk} \partial_i) h_{000} - \frac{c}{2} (\delta_{ij} \partial_k + \delta_{ik} \partial_j + \delta_{jk} \partial_i) h_{0ll} \\ & + 2(\delta_{ij} \partial_l h_{0kl} + \delta_{jk} \partial_l h_{0il} + \delta_{ik} \partial_l h_{0jl}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Assim, das equações (4.45) e (4.46), obtemos os vínculos primários

$$\varphi_k = \pi_{00k} \approx 0 \quad (4.48)$$

$$\bar{\varphi}_{ij} = \pi_{0ij} - \frac{\delta_{ij}}{D-1} \pi_{0kk} \approx 0 \quad (4.49)$$

Note que apenas para $c = 1$ o colchete em (4.46) se torna proporcional a π_{000} de (4.44). Os vínculos (4.49) correspondem à parte sem traço dos vínculos (4.14). Como $\bar{\varphi}_{ij} \delta^{ij} = 0$, temos um total de vínculos primários igual ao caso de Fronsda menos um, isto é,

$$N_{PC} = \frac{D(D+1)}{2} - 2 \quad (4.50)$$

Para $c = 1$ (modelo de Fronsda), além de se manter os vínculos (4.48) e (4.49), temos ainda o traço do vínculo (4.14): $\pi_{0jj} + 3(D-1)\pi_{000} \approx 0$, onde $\pi_{0jj} = \delta^{ij} \pi_{0ij}$. Note a partir de (4.48) e (4.49) que, para

$D = 4$, o modelo *PBF* leva a 8 vínculos primários, enquanto no caso $c = 1$ obtém-se 9. Essa diferença é esperada visto que a simetria representada em (4.34) possui um parâmetro de *gauge* independente a menos em relação à simetria usualmente utilizada no modelo de Fronsda onde $\Lambda_{\mu\nu}$ é somente de traço nulo ($\eta^{\mu\nu}\bar{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$). De fato, de acordo com (Castellani, 1982) e (Henneaux; Teitelboim; Zanelli, 1990) espera-se que para cada parâmetro de *gauge* se tenha um vínculo primário de primeira classe associado, era natural então esperar pelo menos 8 vínculos primários em $D = 4$ para o modelo NF e 9 para o Fronsda.

A densidade de hamiltoniana canônica do modelo *PBF* para $c \neq 1$ será

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{PBF} &= \pi_{\mu\nu\alpha}\dot{h}_{\mu\nu\alpha} - \mathcal{L} \\ \mathcal{H}_{PBF} &= M\pi_{000}^2 + N\pi_{000}\pi_{0kk} + O\pi_{0kk}^2 + 3\pi_{000}\partial_k h_{k00} + \frac{2}{D-1}\pi_{0jj}\partial_k h_{k00} + \frac{1}{2}\pi_{ijk}^2 \\ &\quad - \frac{3}{2D}\pi_{jjk}^2 + 3\pi_{ijk}\partial_i h_{0jk} + \frac{3c}{2D}\pi_{jjk}\partial_k h_{000} - \frac{3(c+2)}{2D}\pi_{jjk}\partial_k h_{0ii} + P(\partial_k h_{0jj})^2 \\ &\quad + Q\partial_j h_{0jk}\partial_k(h_{000} - h_{0ii}) + R\partial_k h_{000}\partial_k h_{0jj} + T(\partial_k h_{000})^2 + \frac{1}{2}(\partial_l h_{ijk})^2 - \frac{3}{2}(\partial_i h_{ijk})^2 \\ &\quad - \frac{3}{2}(\partial_j h_{iik})^2 - \frac{3c}{4}(\partial_j h_{jkk})^2 + \frac{3c}{2}\partial_i h_{i00}\partial_j h_{jkk} + 3\partial_j h_{00k}\partial_j h_{iik} \\ &\quad - 3\partial_i h_{00j}\partial_k h_{ijk} + 3\partial_i h_{ljj}\partial_k h_{ijk} \end{aligned} \quad (4.51)$$

sendo os coeficientes

$$\begin{aligned} M &= \frac{(c+2)}{4(c-1)}, \quad N = \frac{c}{2(c-1)(D-1)}, \quad O = \frac{(3c-2)}{12(c-1)(D-1)^2}, \quad Q = 3(1-c), \quad (4.52) \\ P &= \frac{-3D(c^2-4) - 3(c+2)^2}{8D}, \quad R = \frac{6[D(c^2-4) + c^2 + 2c]}{8D}, \quad T = \frac{D(-3c^2+8) - 3c^2}{8D}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Portanto, a hamiltoniana primária será

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H} + \lambda_k \varphi_k + \bar{\lambda}_{ij} \varphi_{ij}) \quad (4.54)$$

Note que $\delta^{ij}\bar{\lambda}_{ij} = 0$. A partir de H_P , obtém-se as evoluções temporais dos vínculos (4.48) e (4.49) para a completude do algoritmo de Dirac-Bergmann para o modelo *PBF*. No entanto, gostaria de destacar que neste trabalho não foi finalizada a análise das evoluções temporais dos vínculos deste modelo via algoritmo de Dirac-Bergmann. Porém argumentamos a seguir que todos os vínculos do modelo incluindo possíveis secundários devem ser de primeira classe. Abaixo temos um quadro comparativo dos vínculos primários dos modelos de Fronsda e *PBF* em $D = 4$, onde N_{PC} representa

o número de vínculos primários e N_Λ o número total de parâmetros de gauge independentes.

Fronsdal ($c = 1$)	<i>Partially Broken Fronsda</i> ($c \neq 1$)
$\varphi_k = \pi_{00k} \approx 0, \quad (N_{PC} = 3)$	$\varphi_k = \pi_{00k} \approx 0, \quad (N_{PC} = 3)$
$\varphi_{ij} = \pi_{0ij} + 3\delta_{ij}\pi_{000} \approx 0, \quad (N_{PC} = 6)$	$\bar{\varphi}_{ij} = \pi_{0ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}\pi_{0kk} \approx 0, \quad (N_{PC} = 5)$
$\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_{(\mu}\bar{\Lambda}_{\nu\rho)} \quad (\text{Simetria})$	$\delta h_{\mu\nu\rho} = \partial_{(\mu}\bar{\Lambda}_{\nu\rho)}^\dagger \quad (\text{Simetria})$
$N_{PC}^{TOT} = 9$	$N_{PC}^{TOT} = 8$
$N_\Lambda = 9$	$N_\Lambda = 8$

(4.55)

Diferentemente da abordagem feita pelo algoritmo de Castellani que é um método válido para quando os parâmetros de *gauge* e suas derivadas temporais são independentes entre si, precisamos notar que há parâmetros interdependentes nas simetrias de *gauge* do modelo *PBF* envolvendo derivadas temporais. Isto é, a condição $\partial^\mu \partial^\nu \Lambda_{\mu\nu} = 0$ relaciona $\ddot{\Lambda}_{00}$ com $\partial_j \dot{\Lambda}_{0j}$ e $\partial_i \partial_j \Lambda_{ij}$. Assim, as derivadas temporais dos parâmetros de *gauge* não são independentes entre si, o que foi um ingrediente importante no trabalho de Castellani, vide (Castellani, 1982) e as expressões (3.57) a (3.60). Logo o algoritmo de Castellani não pode, a princípio, ser utilizado como base argumentativa. Entretanto, há um trabalho importante na literatura e válido para simetrias restritas, (Henneaux; Teitelboim; Zanelli, 1990), que aborda um método parecido com o de Castellani para a construção de geradores de simetria de *gauge* baseado numa combinação linear dos vínculos de primeira classe, sendo que os coeficientes dos vínculos de primeira classe obedecem a certas equações diferenciais que geralmente envolvem os multiplicadores de Lagrange. Os autores de (Henneaux; Teitelboim; Zanelli, 1990) mostram que o número de multiplicadores de Lagrange que permanecem indeterminados é igual à quantidade de vínculos primários de primeira classe do modelo. Identificando o número de coeficientes arbitrários encontrados na construção dos geradores de simetrias de *gauge* com o número de parâmetros de *gauge* independentes, pode-se estender na prática o algoritmo de Castellani para o caso de simetrias restritas, ou seja, o número de vínculos primários de primeira classe é igual ao número de parâmetros de *gauge* independentes. Como temos 8 parâmetros independentes e 8 vínculos primários, concluímos que todos os vínculos primários devem ser de primeira classe. Todos os exemplos (3.4) a (3.7) são invariantes por simetrias restritas mas confirmam essa relação de igualdade entre o número de vínculos primários de primeira classe e o número de parâmetros de *gauge* independentes.

4.2.3 Ausência de vínculos de segunda classe no *PBF*

Como tem sido abordado, além da análise da estrutura de vínculos em primário, secundário é ainda mais importante a classificação destes como de primeira ou segunda classe. Em teorias de *gauge* bosônicas sem massa, como nos exemplos de Maxwell, Einstein-Hilbert e Maxwell-Like abordados no capítulo 2, não existem vínculos de segunda classe, facilitando a introdução de termos de interação (vértices) pois basta que as simetrias de *gauge* geradas pelos vínculos de primeira classe sejam mantidas ou generalizadas para a teoria com interação. Acabamos de argumentar que todos os vínculos primários do modelo de *PBF* devem ser de primeira classe, surge então uma pergunta natural: Há vínculos

de segunda classe em teorias onde todos os vínculos primários são de primeira classe? A seguir argumentaremos que a resposta é negativa.

Sejam χ_l os primeiros vínculos de segunda classe gerados na teoria através do algoritmo de Dirac pela evolução temporal de vínculos de primeira classe³ ϕ_l . De forma geral, podemos escrever:

$$\dot{\phi}_l = \{\phi_l, H_P\} = K_{lJ}\phi_J + \chi_l \approx 0 \quad (4.56)$$

Para teorias livres, os coeficientes K_{lJ} são constantes. Para qualquer vínculo de segunda classe χ_A podemos escrever de (4.56):

$$\begin{aligned} \{\chi_A, \chi_l\} &= \{\chi_A, \{\phi_l, H_P\} - K_{lJ}\phi_J\} \\ &= \{\chi_A, \{\phi_l, H_P\}\} - K_{lJ}\{\chi_A, \phi_J\} \end{aligned}$$

Usando a identidade de jacobi $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$ e o fato que ϕ_J representa vínculos de primeira classe que têm parênteses fracamente nulo com qualquer vínculo, temos:

$$\begin{aligned} \{\chi_A, \chi_l\} &\approx -\{\phi_l, \{H_P, \chi_A\}\} - \{H_P, \{\chi_A, \phi_l\}\} \\ &\approx -\{\phi_l, C_{AB}\chi_B + C_{AJ}\phi_J\} - \{H_P, C_{AlB}\chi_B + C_{AlI}\phi_I\} \\ &\approx -C_{AlB}\{H_P, \chi_B\} - C_{AlI}\{H_P, \phi_I\} \approx 0 \end{aligned}$$

Como $\{\chi_l, \phi_J\} \approx 0$, temos $\{\chi_l, \Phi_L\} \approx 0$ onde $\Phi_L = (\chi_A; \phi_J)$ representa todos os vínculos do modelo. Portanto, concluímos que χ_l de fato são vínculos de primeira classe, contrariando por absurdo a hipótese original. Desta forma provamos que os vínculos de segunda classe, quando existirem, não podem ser gerados a partir da k -ésima geração de vínculos em $k \geq 2$, isto é, toda teoria com vínculo de segunda classe deve possuir pelo menos um vínculo primário de segunda classe⁴. Note que em (4.38) supomos que $\{H_P, \chi_A\}$ é uma combinação de vínculos de primeira e segunda classe. A manutenção dos vínculos de segunda classe $\dot{\chi}_A \approx 0$ não pode ser usada para determinar multiplicadores lagrangianos pois todos os vínculos primários que aparecem em $\lambda_a \varphi_a$ são de primeira classe por hipótese. Como argumentamos anteriormente, acreditamos que no modelo *PBF* de spin $s = 3$ todos os vínculos primários são de primeira classe, então concluímos que não devemos ter vínculos de segunda classe no *PBF* já que não há vínculos primários de segunda classe. A evolução explícita dos vínculos primários do *PBF* segundo o algoritmo de Dirac está em progresso no momento para comprovar nossa argumentação de forma explícita.

³ Não necessariamente primários.

⁴ Esta argumentação foi desenvolvida por Bruno dos S. Martins e Denis Dalmaz (não publicada), de modo que a conclusão desta argumentação está de acordo com a afirmação feita em (Gitman; Tyutin, 2012, p. 39, Seção 2.4).

5 CONCLUSÃO

No presente trabalho, estudamos a estrutura canônica, via formalismo de Dirac-Bergmann, de vários modelos livres em teoria de campos. Modelos com simetrias de *gauge* sem restrição e com restrição nos parâmetros de *gauge*. Aplicando este formalismo inicialmente em modelos de tensores de *rank*-1, 2 e 3, não apenas confirmamos a eficácia do método utilizado para estudar as estruturas dos vínculos como pudemos comparar a contagem de graus de liberdade hamiltoniano e lagrangiano.

O trabalho de (Castellani, 1982) garante, para os modelos com simetrias de *gauge* sem restrição nos parâmetros, que o número de parâmetros de *gauge* independentes é igual ao número de vínculos primários de primeira classe. Embora não exista na literatura até onde sabemos, uma generalização do algoritmo de Castellani para os modelos com restrição nos parâmetros de *gauge*, verificamos na prática que para todos os exemplos com simetrias restritas apresentados aqui nas subseções (3.4) a (3.7), tivemos de fato uma igualdade entre o número de vínculos primários de primeira classe e o número de parâmetros de *gauge* independentes como vimos nas fórmulas (3.80) e (3.85), (3.105) e (3.108), (3.122) e (3.129), (3.160) e (3.171), o que está de acordo com o trabalho de (Henneaux; Teitelboim; Zanelli, 1990) se identificarmos o número de parâmetros arbitrários nas definições dos geradores de *gauge* segundo (Henneaux; Teitelboim; Zanelli, 1990) com o número de parâmetros de *gauge* independentes.

No capítulo 4, analisamos em detalhe a estrutura canônica do modelo de Fronsdal de spin-3, identificando todos os vínculos como sendo de primeira classe em acordo com (Mendonça; Bittencourt, 2020). Ainda no capítulo 4, identificamos os vínculos primários do modelo Partially Broken Fronsdal (PBF) de spin-3 e vimos que o número desses vínculos primários é igual ao número de parâmetros de *gauge* independentes. Devido ao PBF apresentar uma quebra parcial de simetria decorrente da restrição imposta no parâmetro $\bar{\Lambda}_{\mu\nu}^{\dagger}$, isto é, o parâmetro possui dupla divergência nula, há uma alteração na estrutura canônica do PBF em relação ao modelo de Fronsdal, reduzindo o número de vínculos primários sempre em uma unidade. Para $D = 4$, por exemplo, o modelo PBF contabiliza 8 primários de primeira classe enquanto temos 9 primários de primeira classe no modelo de Fronsdal.

Como o número de vínculos primários de primeira classe deve ser igual ao número de parâmetros de *gauge* independentes, concluímos então que todos os vínculos primários são de primeira classe, usando então um argumento de Martins e Dalmazi (vide também seção 2.4 de (Gitman; Tyutin, 2012)), uma vez que não temos vínculos de segunda classe primários, não teremos também secundários de segunda classe, e portanto o modelo PBF fica livre de vínculos de segunda classe, como acontece com teorias de *gauge* bosônicas sem massa geralmente. Isso é mais um sinal de consistência do modelo PBF e um resultado original desta dissertação.

Devido à complexidade matemática do modelo de spin-3, a análise da estrutura canônica completa do PBF está em andamento. No entanto, dado que (Dalmazi; Martins, 2025) demonstraram a manutenção dos graus de liberdade entre os modelos de Fronsdal e PBF, espera-se encontrar somente vínculos de primeira classe via algoritmo de Dirac-Bergmann, veja também a demonstração de equivalência de conteúdo via estrutura analítica do propagador entre o modelo de Fronsdal e o PBF feita em (Dalmazi et al., 2025) para spin-3 e spin-4.

REFERÊNCIAS

- BARGMANN, V.; WIGNER, E. P. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 34, n. 5, p. 211–223, 1948.
- BENNDORF, D.; DALMAZI, D.; SANTOS, A. D. Hamiltonian positivity of massive spin-2 particles via a rank-2 tensor. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 34, n. 4, p. 045008, 2017.
- CAMPOLEONI, A.; FRANCA, D. Maxwell-like lagrangians for higher spins. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2013, n. 3, p. 1–75, 2013.
- CASTELLANI, L. Symmetries in constrained hamiltonian systems. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 143, n. 2, p. 357–371, 1982.
- DALMAZI, D.; MARTINS, B. d. S. **A partially broken Fronsda model for massless higher-spin particles of integer spin**. 2025. arXiv:2507.04226 [hep-th], JHEP 10 (2025) 126.
- DALMAZI, D. et al. Unitarity of partially broken massless higher-spin models. **arXiv preprint arXiv:2510.14199**, 2025.
- DIRAC, P. A. **Lectures on quantum mechanics**. [S.l.]: Courier Corporation, 1964.
- FANG, J.; FRONSDAL, C. Massless fields with half-integral spin. **Physical Review D**, APS, v. 18, n. 10, p. 3630, 1978.
- FIERZ, M.; PAULI, W. E. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 173, n. 953, p. 211–232, 1939.
- FRONSDAL, C. On the theory of higher spin fields. **Nuovo Cimento**, Univ. of California, Los Angeles, v. 9, n. S2, 1958.
- FRONSDAL, C. Massless fields with integer spin. **Physical Review D**, APS, v. 18, n. 10, p. 3624, 1978.
- GITMAN, D.; TYUTIN, I. V. **Quantization of fields with constraints**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- GOLOVNEV, A. On the role of constraints and degrees of freedom in the hamiltonian formalism. **Universe**, MDPI, v. 9, n. 2, p. 101, 2023.
- GREEN, K.; KIRIUSHCHEVA, N.; KUZMIN, S. Analysis of the hamiltonian formulations of linearized general relativity. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 71, n. 6, p. 1678, 2011.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of gauge systems**. [S.l.]: Princeton university press, 1992.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C.; ZANELLI, J. Gauge invariance and degree of freedom count. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 332, n. 1, p. 169–188, 1990.
- MENDONÇA, E. L.; BITTENCOURT, R. S. Unitarity of singh-hagen model in d dimensions. **Advances in High Energy Physics**, Wiley Online Library, v. 2020, n. 1, p. 8425745, 2020.
- RARITA, W.; SCHWINGER, J. On a theory of particles with half-integral spin. **Physical Review**, APS, v. 60, n. 1, p. 61, 1941.

SANTOS, A. L. R. dos. *Sistemas vinculados e método de dirac*. Guaratinguetá, p. 65, 2018.

SANTOS, R. R. L. dos. **Sistemas Hamiltonianos vinculados e redução dimensional em teoria clássica de campos**. Orientador: Dr. Denis Dalmazi. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física-Bacharelado) — Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/entities/publication/76d27498-b87e-4e3a-81b4-cc2e334bfaa8>>.

SANTOS, R. R. L. dos. **Transverse diffeomorphisms and spin-2 particles**. Orientador: Dr. Denis Dalmazi. 2020. Dissertação (Mestrado em Física) — Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2020.

SCHWINGER, J. **Particles, Sources, and Fields**. Addison-Wesley Publishing Company, 1970. (Addison-Wesley series in physics, v. 1). ISBN 9780201067828. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=VFUXAQAAMAAJ>>.

SINGH, L.; HAGEN, C. Lagrangian formulation for arbitrary spin. i. the boson case. **Physical Review D**, APS, v. 9, n. 4, p. 898, 1974.

SINGH, L.; HAGEN, C. Lagrangian formulation for arbitrary spin. ii. the fermion case. **Physical Review D**, APS, v. 9, n. 4, p. 910, 1974.

SKVORTSOV, E.; VASILIEV, M. Transverse invariant higher-spin fields. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 664, n. 4-5, p. 301–306, 2008.

SUNDERMEYER, K. **Constrained dynamics**. [S.l.]: Springer, 1982.

TEMIÑO, D. B. **Infrared modifications of gravity**. [S.l.]: Universitat de Barcelona (Spain), 2008.

WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. Springer, 1939.

APÊNDICE A – PARÊNTESES DE POISSON BÁSICOS (*RANK-2* E *RANK-3*)

Neste apêndice, serão mostrados explicitamente os parênteses de Poisson entre campos h e momentos π mais utilizados nesta dissertação, seja para *rank-2* ou *rank-3*. Começando pela estrutura base dos parênteses de *rank-2*:

$$\{h_{\mu\nu}(x), \pi_{\alpha\beta}(y)\} = \frac{\delta(x-y)}{2} [\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}] \quad (\text{A.1})$$

podemos notar que, utilizando agora a notação nas coordenadas espaciais, os parênteses possuem as seguintes características quando aplicar um traço no campo e no momento:

$$\{h_{kk}(x), \pi_{lm}(y)\} = \{\delta_{ij}h_{ij}(x), \pi_{lm}(y)\} = h_{ij}(x), \pi_{lm}(y) = \frac{\delta(x-y)}{2} \delta_{ij} [\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}]$$

$$\{h_{kk}(x), \pi_{lm}(y)\} = \delta_{lm}\delta(x-y) \quad (\text{A.2})$$

$$\{h_{kk}(x), \pi_{mm}(y)\} = \delta_{lm}\{h_{jj}(x), \pi_{lm}(y)\} = (D-1)\delta(x-y) \quad (\text{A.3})$$

A partir dessas relações, pode-se encontrar facilmente as diferentes contrações nos modelos físicos, como por exemplo:

$$\{\pi_{lm}(x), \pi_{0j}\partial_i h_{ij}(y)\} = -\frac{\delta(x-y)}{2} \pi_{0j}(y) \partial_i^y [\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}] = \frac{(\partial_l^y \pi_{0m}(y) + \partial_m^y \pi_{0l}(y))}{2} \delta(x-y) \quad (\text{A.4})$$

Agora, introduzindo a estrutura base dos parênteses de *rank-3*,

$$\{h_{mnl}(x), \pi_{aij}(y)\} = \frac{\delta(x-y)}{6} [\delta_{am}(\delta_{ni}\delta_{lj} + \delta_{nj}\delta_{li}) + \delta_{mj}(\delta_{na}\delta_{li} + \delta_{ni}\delta_{la}) + \delta_{lm}(\delta_{na}\delta_{ij} + \delta_{nj}\delta_{ia})] \quad (\text{A.5})$$

podemos definir as seguintes contrações:

$$\{h_{kkl}(x), \pi_{aij}(y)\} = \frac{\delta(x-y)}{3} [\delta_{la}\delta_{ij} + \delta_{li}\delta_{aj} + \delta_{lj}\delta_{ai}] \quad (\text{A.6})$$

$$\{h_{kkl}(x), \pi_{amm}(y)\} = \frac{(D+1)}{3} \delta_{la} \delta(x-y) \quad (\text{A.7})$$

Outras possíveis contrações são envolvendo as derivadas, isto é,

$$\partial_a^x \{h_{kkr}(x), \pi_{aij}(y)\} = (\delta_{ij}\partial_r^x + \delta_{ir}\partial_j^x + \delta_{rj}\partial_i^x) \frac{\delta(x-y)}{3} \quad (\text{A.8})$$

$$\partial_a^x \{\partial_m^x \partial_n^x h_{mnl}(x), \pi_{aij}(y)\} = [\nabla^2(\delta_{lj}\partial_i^x + \delta_{li}\partial_j^x) + \partial_l^x \partial_i^x \partial_j^x] \frac{\delta(x-y)}{3} \quad (\text{A.9})$$

Deve-se sempre atentar à delta de Kronecker que está sendo utilizada pois $\partial^x \delta(x-y) = -\partial^y \delta(x-y)$, de modo que para fins de demonstração todas as derivadas foram padronizadas nas mesmas coordenadas x .

APÊNDICE B – EVOLUÇÃO E PARÊNTESES DOS VÍNCULOS SECUNDÁRIOS DE FRONSDAL

Neste apêndice, iremos mostrar com mais detalhes os parênteses de Poisson dos vínculos (4.24) e (4.25) entre si e com a densidade de hamiltoniana (4.30) que será reescrita para melhor visualização dos cálculos a seguir:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' = & \pi_{000}^2 + \frac{1}{2}\pi_{ijk}^2 - A\pi_{jjk}^2 + A\pi_{jjk}\partial_k h_{000} - 3A\pi_{jjk}\partial_k h_{0ii} + C(\partial_k h_{000})^2 \\ & - 6C\partial_k h_{000}\partial_k h_{0jj} + 9C(\partial_k h_{0jj})^2 + \frac{1}{2}(\partial_l h_{ijk})^2 \\ & - \frac{3}{2}(\partial_i h_{ijk})^2 - \frac{3}{2}(\partial_j h_{iik})^2 - \frac{3}{4}(\partial_j h_{jkk})^2 + 3\partial_i h_{llj}\partial_k h_{ijk} + h_{00i}\chi_i + h_{0ij}\chi_{0ij}\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

sendo os coeficientes

$$A = \frac{3}{2D}, \quad C = \frac{5D-3}{8D} \quad (\text{B.2})$$

Notemos que $\{\chi_l, H_P\} = \{\chi_l, \mathcal{H}'\}$ e $\{\chi_{lm}, H_P\} = \{\chi_{lm}, \mathcal{H}'\}$ pois os vínculos χ_l e χ_{lm} têm parênteses de Poisson nulos com os vínculos primários como mostrado em (4.26) e (4.27). Portanto, a seguir calculamos apenas $\{\chi_l, \mathcal{H}'\}$ e $\{\chi_{lm}, \mathcal{H}'\}$. Assim, a evolução temporal do vínculo secundário

$\chi_l = \partial_l \pi_{000} - \nabla^2 h_{kkl} + \partial_i \partial_k h_{ikl} - \frac{1}{2} \partial_l \partial_i h_{ikk} \approx 0$ é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_l = \{\chi_l(x), \mathcal{H}'(y)\} = & \{\partial_l^x \pi_{000}(x), A\pi_{jjk}\partial_k^y h_{000}(y) + C(\partial_k^y h_{000})^2(y) + 6Ch_{000}\nabla_y^2 h_{0jj}(y)\} \\ & + \{-\nabla_x^2 h_{ppt}(x) + \partial_m^x \partial_n^x h_{lmn}(x) - \frac{1}{2}\partial_l^x \partial_m^x h_{mpp}(x), \frac{1}{2}\pi_{ijk}^2(y) - A\pi_{jjk}^2(y) + \\ & + A\pi_{jjk}\partial_k^y h_{000}(y) - 3A\pi_{jjk}\partial_k^y h_{0ii}(y)\} + \{\chi_l(x), h_{00i}\chi_i(y) + h_{0ij}\chi_{0ij}(y)\}\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

utilizando o resultado (4.28) para os parênteses $\{\chi_l(x), h_{0ij}\chi_{0ij}(y)\}$, resulta-se em

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_l = & \left[\partial_m^x \partial_n^x \pi_{lmn}(y) - \frac{1}{2}\partial_l^x \nabla^2 h_{000}(y) + \frac{3}{2}\partial_l^x \nabla^2 h_{0kk}(y) \right] \delta(x-y) \\ & = \partial_m \partial_n \pi_{lmn}(y) + \frac{1}{2}\partial_l \nabla^2 h_{000}(y) - \frac{3}{2}\partial_l \nabla^2 h_{0kk}(y) = \partial_i \chi_{il}(y) \approx 0\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

satisfazendo então a condição de consistência para o vínculo secundário χ_l . Agora, a evolução temporal do o vínculo secundário $\chi_{lm} = \partial_i \pi_{ilm} + \frac{1}{2}\nabla^2 h_{000}\delta_{lm} - \frac{3}{2}\nabla^2 h_{0kk}\delta_{lm} \approx 0$ é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_{lm} = \{\chi_{lm}(x), \mathcal{H}'(y)\} = & \{\partial_i^x \pi_{ilm}(x), \frac{1}{2}(\partial_l^y h_{ijk})^2 - \frac{3}{2}(\partial_i^y h_{ijk})^2 - \frac{3}{2}(\partial_j^y h_{iik})^2 \\ & - \frac{3}{4}(\partial_j^y h_{jkk})^2 + 3\partial_p^y h_{nnj}\partial_k h_{pjk}\} + \left\{ \frac{1}{2}\nabla_x^2 h_{000}(x)\delta_{lm}, \pi_{000}^2 \right\} + \{\chi_{lm}(x), h_{00i}\chi_i(y) + h_{0ij}\chi_{0ij}(y)\}\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

novamente utilizando o resultado (4.28) para os parênteses $\{\chi_{lm}(x), h_{0ij}\chi_{0ij}(y)\}$, resulta-se em

$$\dot{\chi}_l = \nabla^2 \pi_{000}(y) \delta_{lm} - \frac{3}{2} \partial_i \nabla^2 h_{ikk}(y) \delta_{lm} + \partial_i \partial_j \partial_k h_{ijk}(y) \delta_{lm} = \partial_j \chi_j \delta_{lm} \approx 0 \quad (\text{B.6})$$

satisfazendo então a condição de consistência para o vínculo secundário χ_{lm} e se encerrando o algoritmo de Dirac para os dois vínculos secundários do modelo de Fronsda.

Para os parênteses de Poisson entre si:

$$\{\chi_i(x), \chi_{lm}(y)\} = \{3\partial_i \pi_{000}(x), -\frac{3}{2} \delta_{lm} \nabla^2 h_{000}(y)\} + \{3[-\nabla^2 h_{kki} + \partial_j \partial_k h_{ijk} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j h_{jkk}](x), -3\partial_n \pi_{nlm}(y)\} \quad (\text{B.7})$$

Abrindo explicitamente todos os termos:

$$\begin{aligned} \{\chi_i(x), \chi_{lm}(y)\} &= \left[\frac{9}{2} \delta_{lm} \partial_i^x \nabla_y^2 + 3 [\delta_{in} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{ln}] \partial_n^y \nabla_x^2 \right] \delta(x-y) \\ &\quad - \left[\frac{9}{6} [\delta_{jn} (\delta_{kl} \delta_{im} + \delta_{km} \delta_{il}) + \delta_{jl} (\delta_{kn} \delta_{im} + \delta_{km} \delta_{in}) + \delta_{jm} (\delta_{kn} \delta_{il} + \delta_{kl} \delta_{in})] \partial_j^x \partial_k^x \partial_n^y \right] \delta(x-y) \\ &\quad + \frac{9}{6} [\delta_{jn} \delta_{lm} + \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{jm} \delta_{ln}] \partial_n^y \partial_j^x \partial_i^x \delta(x-y) \end{aligned}$$

tal que, usando as propriedades da delta, chega-se no resultado de (4.28)

$$\begin{aligned} \{\chi_i(x), \chi_{lm}(y)\} &= \left[\left(-\frac{9}{2} + 3 + \frac{3}{2} \right) \delta_{lm} \partial_i^y \nabla_y^2 + \left(3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \delta_{il} \partial_m^y \nabla_y^2 \right] \delta(x-y) \\ &\quad + \left[\left(3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \right) \delta_{im} \partial_l^y \nabla_y^2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) \partial_i^y \partial_l^y \partial_m^y \right] \delta(x-y) \quad (\text{B.8}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

fica claro que ambos os vínculos são de primeira classe visto que $\{\chi_i(x), \chi_{lm}(y)\} = 0$.