
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

KLEYTON VINICYUS GODOY

UM BREVE PANORAMA DAS MATEMÁTICAS MISTAS E
SEUS DESDOBRAMENTOS

A large, abstract geometric design in the background, consisting of a circular shape divided into several triangular segments by white lines, with a light blue gradient fill.

Rio Claro
2019

KLEYTON VINICYUS GODOY

UM BREVE PANORAMA DAS MATEMÁTICAS MISTAS E SEUS DESDOBRAMENTOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como requisito para o processo de obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro

2019

G589b Godoy, Kleyton Vinicyus
Um breve panorama das Matemáticas Mistas e seus
desdobramentos / Kleyton Vinicyus Godoy. -- Rio Claro, 2019
360 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Filosofia da Matemática. 2. Matemática Mista. 3.
Matemática Pura. 4. Físico-Matemática. 5. História da
Matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

KLEYTON VINICYUS GODOY

UM BREVE PANORAMA DAS MATEMÁTICAS MISTAS E SEUS DESDOBRAMENTOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como requisito para o processo de obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira – Orientador
(IGCE/UNESP/Rio Claro-SP)

Prof. Dr. Gustavo Barbosa
(UNILA/Foz do Iguaçu-PR)

Prof. Dr. Fumikazu Saito
(PUC/São Paulo-SP)

Prof. Dr. Wladimir Seixas
(CCTS/UFSCar/Sorocaba-SP)

Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira
(FE/USP/São Paulo-SP)

Resultado: **APROVADO**

Rio Claro, 21 de Maio de 2019

*Dedico à minha mãe Maria Ester Nardon Godoy
e a meu pai Antônio Carlos Tadeu Godoy por
todo suporte e apoio durante a realização
desse Doutorado e minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos vão a todos aqueles que contribuíram diretamente ou indiretamente para a realização dessa dissertação. Dessa forma, não poderia deixar de agradecer:

- Aos meus pais Maria Ester Nardon Godoy e Antônio Carlos Tadeu Godoy, e a minha família por todo apoio, carinho e incentivo que me deram para a finalização desse trabalho.
- Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira, por toda confiança, pela orientação dedicada fossem elas nas reuniões do Grupo de Pesquisa ou individuais, sugestão de materiais, compreensão, e pelo acolhimento numa fase delicada durante esse processo de Doutorado ao ter aceito uma nova orientação e um novo trabalho faltando apenas quatro meses para a data limite de entrega do material de qualificação.
- Aos professores componentes da banca examinadora: Prof. Dr. Fumikazu Saito, Prof. Dr. Gustavo Barbosa, Prof. Dr. Wladimir Seixas e Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira, agradeço pela leitura que realizaram do trabalho e também das críticas construtivas e sugestões de leitura e bibliografia tanto no exame de qualificação quanto nos encontros presenciais nos corredores da UNESP ou durante congressos que tivemos a oportunidade de participar.
- Aos professores suplentes da banca examinadora: Prof. Dr. Roger Miarka, Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes e Profa. Dra. Sabrina Helena Bonfim, por aceitarem participar como suplentes deste trabalho.
- Ao meu amigo e companheiro de Grupo de Pesquisa em História da Matemática (GPHM), Prof. Ms. Douglas Gonçalves Leite, que realizou uma leitura do trabalho buscando me auxiliar em pontos contraditórios e também na correção ortográfica desse trabalho.
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, em especial, a Profa. Dra. Heloisa da Silva, Profa. Dra. Arlete de Jesus Brito, Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira, Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi e o Prof. Dr. Henrique Lazari, que por meio de suas disciplinas durante o Doutorado, contribuíram para enriquecer minha compreensão em Educação Matemática, Matemática, História da Matemática e História da Educação Matemática.

- Aos funcionários do Departamento de Matemática e do Departamento de Educação Matemática: Elisa, Ana, Alessandra, Clô e José Ricardo por toda atenção quando lhes solicitei alguma ajuda.
- A secretária do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática: Inajara, por toda eficiência e empenho para resolver e auxiliar na condução dos assuntos burocráticos relacionados ao Doutorado, além de ser uma pessoa extremamente atenciosa e que ajudou muito com seus conselhos mediante situações que tive de superar na jornada desse doutorado.
- Aos meus amigos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática: Juliana Martins, Maria Tereza Zampieri, Miliam Juliana Ferreira, Hannah Dora, Bruno Leite, Alan dos Santos Silva, Jean Toillier, Nilton Silveira, Marineia dos Santos, Vanessa Oechsler, Maroni Lopes, Davidson Azevedo, Maria Francisca, Douglas Gonçalves e outros que apesar de não estarem citados aqui, também compartilhamos momentos durante esses quatro anos nas atividades do Programa. Obrigado por dividirem momentos comigo, fossem eles de estudo, de lazer, idas a congressos, e outras atividades que contribuíram tanto para o espírito e para a mente.
- Agradeço ao meu amigo Prof. Ms. Diego Gondim, com quem dividi a representação discente do Conselho do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática durante o segundo e o primeiro semestre de 2017 e 2018, respectivamente.
- Ao Prof. Dr. Ricardo Scucuglia pela avaliação da primeira versão do projeto da tese durante a Atividade Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de 2016.
- Aos professores que tiveram contato com esse trabalho em congressos científicos nas seções de comunicação e contribuíram com ideias e sugestões para o trabalho: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente, Prof. Dr. Gérard Émile Grimberg, Profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov e Profa. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira.
- As Professoras: Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin e Profa. Dra. Sueli Liberatti Javaroni por depositarem sua confiança em mim e terem enviado as cartas de recomendação para o meu ingresso no programa.
- Agradeço a Profa. Dra. Adriana Cesar de Mattos, que foi minha orientadora no Mestrado, pela confiança e oportunidade de dar continuidade aos estudos, por meio de ser com quem ingressei primeiramente no Doutorado no ano de 2015. Agradeço

também a Profa. Dra. Arlete de Jesus Brito, que foi minha segunda orientadora, e que contribuiu em aprender novas visões da História, por conta de seus trabalhos fazendo uso da História Cultural.

- Agradeço meus amigos que não fazem parte do programa de pós, mas que fazem parte do meu dia a dia por toda a compreensão em entender que não poderia estar presente em alguns momentos por conta dos estudos, e em especial, todo apoio que me deram durante a realização desse doutorado.
- Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro dado a este trabalho por meio da atribuição de uma bolsa de doutorado.

RESUMO

Realizamos um histórico da introdução das “matemáticas mistas”, e identificamos que o filósofo Francis Bacon (1561-1626) é creditado por meio das publicações “*Proficiency and Advancement of Learnings*” em 1605 e “*De Dignitate et Augmentis Scientiarum*” em 1623. Entretanto, para responder questões pertinentes da Filosofia Natural, essa classificação matemática gerou um conflito entre as ciências matemáticas e a metafísica. Desse modo, as ciências físico-matemáticas surgem como uma tentativa de utilizar a matemática para abordar tópicos relacionados as causas naturais do mundo real. No ano de 1751, Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), realizou uma nova classificação dos conhecimentos humanos, divulgada na obra *Discours Préliminaire*, que foi o texto de abertura da primeira edição da *Encyclopédie*, editada em conjunto com Denis Diderot (1713-1784). No que se refere a matemática, foi mantida como uma ramificação da metafísica, mas essa nova classificação a dividiu em: “matemática pura”, “matemática mista” e “ciências físico-matemáticas”. Porém, no decorrer do século XVIII, estimulado principalmente pelas críticas de Kant (1724-1804) em relação ao conhecimento puro, se deu início a uma discussão quanto a metafísica, e consequentemente refletiu nas ciências que estavam subordinadas a esse ramo do conhecimento. Desse modo, o século XIX culminou no desuso da expressão “matemáticas mistas”, contudo, veremos que essas ciências forneceram elementos para fomentar o aparecimento das “matemáticas aplicadas”, bem como contribuíram para o desenvolvimento de teorias da “matemática pura”. Além disso, investigaremos no contexto da Revolução Industrial, a importância das “matemáticas mistas” e das ciências físico-matemáticas no desenvolvimento tecnológico. Portanto, fixamos um local: Inglaterra; e uma sociedade científica: Sociedade Lunar de Birmingham. Assim, concluímos que essas contribuições consistiram principalmente na modernização de máquinas a vapor para dinamizar o processo de produção nas fábricas.

Palavras-chave: Filosofia da Matemática. Matemática Mista. Matemática Pura. Físico-Matemática. História da Matemática.

ABSTRACT

Our aim is to realize a history of the introduction of the "mixed mathematics", and we find that the philosopher Francis Bacon (1561-1626) is credited through the publications "*Proficiency and Advancement of Learnings*" in 1605 and "*De Dignitate et Augmentis Scientiarum*" in 1623. However, to answer pertinent questions of Natural Philosophy, this mathematical classification generated a conflict between the mathematical sciences and metaphysics. In this way, the physico-mathematics sciences appeared as an attempt to use mathematics to address topics related to the natural causes of the real world. In 1751, Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), made a new classification of human knowledge, published in the Discours Préliminaire, which was the opening text of the first edition of the Encyclopedie, edited together with Denis Diderot (1713-1784). As far as mathematics is concerned, was maintained as a branch of metaphysics, but this new classification divided it into "pure mathematics", "mixed mathematics" and "physico-mathematics sciences". But in the course of the eighteenth century, stimulated mainly by Kant (1724-1804) and his critiques of pure knowledge, a discussion of metaphysics began, and consequently reflected in the sciences which were subordinate to this branch of knowledge. The 19th century culminated in the disuse of the expression "mixed mathematics," however, these sciences provided elements to foster the emergence of "applied mathematics" as well as contributed to the development of theories of "pure mathematics". In addition, we will investigate in the context of the Industrial Revolution the importance of "mixed mathematics" and of the physico-mathematics sciences in technological development. Therefore, we fixed a place: England; and a scientific society: Lunar Society of Birmingham. Thus, we conclude that these contributions consisted mainly in the modernization of steam engines to streamline the production process in the factories.

Keywords: Philosophy of Mathematics. Mixed Mathematics. Pure Mathematics. Physico-Mathematics. History of Mathematics.

SUMÁRIO

Introdução	14
Capítulo 1: A primeira classificação de Matemática Mista e o nascimento das ciências físico-matemáticas.....	23
1.1: A classificação da matemática de Bacon.....	24
1.2: O surgimento das ciências físico-matemáticas.....	35
Capítulo 2: Encyclopédie e a classificação da matemática de D'Alembert.....	52
2.1: D'Alembert e a Encyclopédie.....	56
2.2: Discours Préliminaire e a classificação da matemática de D'Alembert.....	60
2.2.1: D'Alembert: Matemática Pura.....	68
2.2.1.1: Aritmética.....	68
2.2.1.2: Geometria.....	78
2.2.2: D'Alembert: Matemática Mista.....	91
2.2.2.1: Mecânica.....	92
2.2.2.1.1: Estática.....	92
2.2.2.1.2: Dinâmica.....	94
2.2.2.2: Astronomia Geométrica.....	96
2.2.2.2.1: Cosmografia.....	96
2.2.2.2.2: Cronologia.....	98
2.2.2.2.3: Gnomônica.....	99
2.2.2.3: Óptica.....	101
2.2.2.3.1: Catóptrica.....	106
2.2.2.3.2: Dióptrica.....	109
2.2.2.3.3: Perspectiva.....	111

2.2.2.4: Acústica.....	115
2.2.2.5: Pneumática.....	116
2.2.2.6: Arte de Conjecturar.....	117
2.2.3: D'Alembert: Físico-matemática.....	128
Capítulo 3: A Matemática Mista e as ciências Físico-matemáticas na Revolução Industrial.....	133
3.1: Lunar Society of Birmingham e Soho Manufactory and Estate	134
3.2: Tipos de Máquinas a Vapor.....	154
3.2.1: Máquinas a vapor do tipo: Sol e planeta.....	154
3.2.2: Máquinas a vapor do tipo: Motores Rotativos.....	161
3.2.3: Máquinas a vapor do tipo: Dupla Ação.....	166
3.2.4: Outros tipos de máquinas a vapor.....	172
3.3: A Soho House e sua atuação na região de Cornwall.....	174
3.4: A Soho House e sua atuação no Continente.....	181
3.5: As matemáticas mistas e as ciências físico-matemáticas aplicadas às máquinas de vapor.....	196
3.5.1: Algumas propriedades que dão efeitos às operações de uma máquina a vapor.....	199
3.5.2: Exemplos das matemáticas mistas e das ciências físico-matemáticas aplicadas às máquinas de vapor.....	218
3.5.2.1: Efeito máximo de uma máquina a vapor.....	220
3.5.2.2: Desempenho das máquinas a vapor.....	222
3.5.2.3: Peso do vapor utilizado pela máquina.....	226
3.5.2.4: Consumo de vapor e a Lei da Linha Reta.....	226
3.5.2.5: Curva de consumo de expansão variável do vapor.....	229

3.5.2.6: Desempenho dos motores utilizando vapor superaquecido.....	231
3.5.2.7: Atrito dos motores.....	232
3.5.2.8: Garantia de economia.....	234
Capítulo 4: O desuso e uma herança da Matemática Mista.....	235
4.1: O desuso da Matemática Mista.....	236
4.1.1: A crítica de Kant em relação ao conhecimento puro.....	238
4.1.2: A mecânica racional.....	248
4.1.3: As primeiras aparições do termo matemática aplicada.....	254
4.2: Uma herança da Matemática Mista: contribuições no desenvolvimento de teorias das matemáticas puras.....	261
4.2.1: Boole e Lagrange.....	261
4.2.2: Jacobi e Lagrange.....	271
4.2.3: Cayley e Lagrange.....	286
Considerações Finais.....	300
Referências.....	307
Apêndices.....	317
Anexos.....	353

INTRODUÇÃO

Na elaboração da minha dissertação de Mestrado¹, realizei um levantamento bibliográfico para verificar como estava a situação da *Royal Society of London*² no período de admissão³ do matemático Cayley (1821-1895) na Sociedade. Por meio das referências bibliográficas utilizadas, foi relatado que no início do século XVIII até a primeira metade do século XIX, a *Royal Society* estava se recuperando de uma fase de severas críticas quanto a relevância de suas produções científicas.

A maioria das críticas se referiam que a Sociedade estava dominada pelo excesso de membros não-científicos. Ao comparar esses associados, em quantidade, aos membros que produziam ciência, eram a maioria esmagadora. Babbage (1830) ilustra o quadro de membros da *Royal Society of London* na época e ainda compara com outras três influentes sociedades acadêmicas europeias:

Tabela 1 - Quadro comparativo entre quatro sociedades científicas européias

Name Country.	Population.	Number of Members of its Academy.	Number of Foreign Members.
1. England .	22,299,000	685 -	50
2. France .	32,058,000	75	{ 8 Mem. 100 Corr.
3. Prussia .	12,415,000	38	
4. Italy . .	12,000,000	40	8

Fonte: (BABBAGE, 1830, p. 31).

¹ Godoy (2013).

² Sociedade científica da Inglaterra. Foi criada em 1660 e continua sendo uma das sociedades acadêmicas mais influentes em relação ao direcionamento da ciência.

³ Cayley foi admitido como membro da *Royal Society of London* em 1852. O artigo submetido pelo matemático no processo de admissão foi o “*Analytical Researches Connected with Steiner’s Extension of Malfatti’s Problem*”.

As sociedades científicas que constam na Tabela 1 são: *Institute of France*, *Royal Academy of Berlin* e a *Italian Academy of Forty*, situadas na França, Alemanha e Itália, respectivamente.

Essa insatisfação com a *Royal Society of London* começou a ser expressa, tanto de forma privada como publicamente. Gleason (1991, p.5), relata que os críticos alegavam que a Sociedade, a partir da última metade do século XVIII, foi se definhando e deixando de honrar com seu objetivo original, que era o de produzir ciência e conhecimento natural, e ainda acusaram que faltava o espírito dinâmico que havia caracterizado as glórias dos trabalhos e conhecimentos produzidos no passado da instituição.

Babbage⁴ (1830) é um dos casos que podemos elencar por meio da citação de Gleason (1991), pois ele se tornou membro da Sociedade no ano de 1816 e em seu livro, faz uma denúncia de diversos aspectos da *Royal Society of London*, principalmente em relação às desigualdades no sistema eleitoral, alegando que o interesse da ciência e seu avanço, haviam sido negligenciados em favor daqueles que podiam pagar as taxas elevadas para admissão.

A prática de admitir um grande número de membros não-científicos, de acordo com Gleason (1991, p.8), remonta aos primórdios da Sociedade, visto que em virtude dos fundadores da Sociedade desfrutarem apenas de algumas parcelas de terra, um número razoável de membros não-científicos foram admitidos por conta da doação de novas propriedades para a Sociedade. Entretanto, ainda que boa parte dessas terras fossem revendidas, certamente não evitaria a escassez de recursos, desse modo, a *Royal Society of London* necessitaria depender fortemente das contribuições financeiras dos membros não-científicos.

Portanto, havia um fator conflitante na tomada de uma decisão para diminuir esse excesso de membros que apenas faziam doações e não contribuíam efetivamente na produção científica, pois reduzir a quantidade de membros não-científicos da Sociedade significaria diminuir o número de padrinhos para custear as pesquisas desenvolvidas e consequentemente, a quantidade de recursos financeiros captados pela Sociedade através de taxas e anuidades, por exemplo, também seria menor. Dessa forma, essa diminuição implicaria na redução da arrecadação monetária da *Royal Society of London*, mas em contrapartida poderia ser um fator crucial para dar início ao processo de recuperação do prestígio acadêmico da *Royal Society*.

Augustus Bozzi Granville (1783-1872), membro da *Royal Society* a partir de 1817, também publicou um livro na mesma época, intitulado como “*Science Without a Head*”⁵.

⁴ Charles Babbage (1791-1871). Matemático e filósofo inglês.

⁵ Esse livro foi reimpresso em 1969 pela editora Gregg.

Granville (1830) declarou que embora a Sociedade tivesse aumentado sua lista de membros para mais de setecentos, seria difícil destacar mais do que meia dúzia de trabalho duro e homens da ciência experimental tornado-se visível por seus trabalhos.

Assim, a ideia inicial dessa tese era fazer uma desconstrução do prestígio da *Royal Society of London* durante o período da Revolução Industrial, e para isso, focaríamos na produção matemática da Sociedade nesse período, que de acordo com Gleason (1991), pouco contribuíram para o avanço tecnológico da Inglaterra. Afinal, nos chamou a atenção as críticas que essa sociedade detentora de grande prestígio sofreu na época, e dessa forma, nos questionamos:

“Se a *Royal Society* estava sendo extremamente criticada pela falta de produção científica no período, e atualmente sabemos que a Inglaterra é considerada o berço da Revolução Industrial, quem ou quais fatores impulsionaram e realizaram a articulação das “matemáticas mistas” no desenvolvimento tecnológico, aprimoramento das maquinarias e a expansão científica do país para o direcionamento do progresso e da ciência no período da Revolução Industrial?”.

Paralelamente a essas críticas da *Royal Society of London*, fomos estimulados por uma explicação de Richard Courant e Herbert Robbins sobre a questão: *O Que é Matemática?* Em seu trabalho que recebe o mesmo título da questão levantada, Courant e Robbins (2000) discorrem que:

A Matemática, **como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética.** Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade e o supremo valor da Ciência Matemática. **Sem dúvida alguma, todo o desenvolvimento da Matemática tem suas raízes psicológicas em exigências mais ou menos práticas.** No entanto, uma vez desencadeado pela pressão de aplicações necessárias, **inevitavelmente ganha impulso por si e transcende os confins da utilidade imediata.** Está também em muitas contribuições à Matemática moderna por engenheiros e físicos. (COURANT e ROBBINS, 2000, p.1, grifo nosso).

Desse modo, consideramos que, em um período que valorizava o conhecimento erudito, as formulações de conhecimentos voltados para a razão contemplativa e o desejo de perfeição estética, a matemática esteve inserida e contribuiu para seu desenvolvimento e isso vai na direção do grifo: como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Um exemplo que poderíamos apresentar

seriam as produções de obras artísticas no período do Renascimento, temos uma diversidade de trabalhos que foram associados ao desenvolvimento de conteúdo matemático.

Um movimento que poderíamos destacar nesse momento é a produção de geometria que ocorreu durante os séculos XVI ao XIX em boa parte da Europa. Esse movimento associado a elementos como pintura e escultura contribuiu para o desenvolvimento de teorias matemáticas sobre a representação de espaços e objetos (PANOFSKY, 1999). Teorias que iriam desde a representação do espaço no plano, projeções do globo terrestre em planos, produção de mapas para navegações, além de trabalhos voltados para construções bélicas, na maioria desses conteúdos encontramos uma matemática em constante desenvolvimento e isso possibilitou a criação de novas teorias, como por exemplo a Geometria Descritiva ou conhecida também como Geometria Mongeana.

Assim, de acordo com Johnston (1994) e Kawajiri (1979), a matemática durante o período renascentista, foi principalmente voltada a cultura da prática matemática⁶. E esta prática foi promovida por meio de livros e revistas da época, em que, nesses impressos eram fortemente enfatizados a importância dos instrumentos de observação, medição e cálculo, e os valores dos mapas e gráficos. A produção e impressão de livros de geometria, aritmética, álgebra, astronomia, topografia e navegação ajudaram a disseminar a cultura da prática matemática na Europa.

Após o século XVI, de acordo Johnston (1994), a virtude mais valorizada no discurso da prática matemática foi a de sua utilidade. A matemática era descrita como uma disciplina adequada tanto para a guerra quanto para a paz. Em relação a guerra, isso se deu por meio da elaboração de planos militares, definição de fortificações, design de navios, melhoria da artilharia, e a ordenação dos soldados, sendo assim, a prática matemática poderia reforçar a tomada de decisão militar e ações bélicas. No contexto da matemática utilizada para a paz, ela acontecia como uma ajuda essencial em contextos mais pacíficos: o comércio e as contas dos comerciantes; para cronometragem e calendário; para a arquitetura; o levantamento de terra; medição de materiais; técnicas de navegação oceânica, entre muitos outros. A matemática era retratada como um recurso vital, tinha uma imagem de matemática como ação, capaz de intervir nas mais diversas práticas e trazer melhorias e benefícios para quem a utilizava.

Ao final do século XVI, as artes e ciências matemáticas recobriam temas como astronomia, mecânica, óptica, construção de máquinas, pontes e fortificações, além de

⁶ A prática matemática é conhecida desde tempos antes de Cristo com o povo egípcio, grego e babilônico. No final do século XVI, entendemos a prática matemática como a relação da matemática em problemas de ordem do mundo físico, capaz de responder fenômenos da filosofia natural.

álgebra, aritmética e geometria. Essa prática matemática se manteve durante o século XVII na Inglaterra. Ao longo do século XVII, de acordo com Crilly (2006), os componentes que envolviam matemática eram as disciplinas que englobavam Astronomia e Geometria, “Matemática Mista” e Aritmética.

Conforme Johnston (1994), na universidade, a matemática era um componente curricular dos cursos de Filosofia Natural abordando tópicos de aritmética, perspectiva, mecânica, navegação e astronomia. Nos cursos de artes, a matemática era importante para realizar estudos de fortificação e melhoria das estruturas, desenvolvimento e aperfeiçoamento de artilharia e estratégias para ordenação de tropas. Esses elementos da matemática voltada a causas do mundo físico, possibilitou o desenvolvimento de um campo do conhecimento matemático que foi designado pelo filósofo Francis Bacon (1561-1626) como “Matemática Mista” na sua publicação *“Proficiency and Advancement of Learnings”* em 1605, o que nos leva ao nosso **primeiro capítulo**.

No capítulo intitulado *“A primeira classificação de Matemática Mista e o nascimento das ciências físico-matemáticas”*, temos dois objetivos específicos. Nosso primeiro objetivo é *“apresentar a classificação matemática de Francis Bacon”*. Nessa classificação, Bacon divide a matemática em “pura” e “mista”, e segundo Brown (1991) e Kawajiri (1979), é a primeira vez que a expressão “matemática mista” é introduzida. Para isso, utilizamos como principais referências, Bacon (2007) e Bacon (1779), para abordar, respectivamente, a primeira e a segunda classificação matemática formulada por Bacon. Iremos observar que houve algumas mudanças entre essas classificações no que diz respeito a matemática, e Kawajiri (1979) sugere que essa mudança se deu em virtude de uma possível aproximação das ideias de Bacon com as recém criadas ciências físico-matemáticas.

Eis que vamos para o nosso segundo objetivo: *“abordar o surgimento das ciências físico-matemáticas”*, e veremos que os matemáticos jesuíticos tiveram uma certa importância para o aparecimento desse novo campo matemático. Utilizaremos principalmente Dear (1995) para realizar um breve panorama de como essas as ciências físico-matemáticas surgiram, e também identificamos algumas publicações da época que trouxeram essa temática como foco de sua teoria matemática. Schuster (2012) acredita que essas ciências surgiram mediante as implicações filosóficas da “matemática mista”, e foi necessário uma nova classificação que abrangesse esse campo, o que nos leva para nosso **segundo capítulo**.

Esse capítulo foi intitulado como *“Encyclopédie e a classificação matemática de D'Alembert”* e além de D'Alembert (1717-1783), também contou com Diderot (1713-1784) como editor. Essa publicação teve como propósito realizar uma nova classificação

enciclopédica dos conhecimentos humanos por meio dos verbetes contidos nessa obra. Esses verbetes das mais diversas áreas do conhecimento, foram escritos por cerca de 140 colaboradores, constituídos por personalidades da época, tal como Voltaire (1694-1778). O *Discours Préliminaire* (Discurso preliminar), escrito por D'Alembert, foi o texto de abertura da primeira edição da *Encyclopédie* em 1751. Nesse texto, ele explica o porque de realizar uma nova classificação dos conhecimentos humanos, bem como apresenta as principais inspirações que levaram a essa publicação.

A Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, lançou em 2015 uma coleção de seis volumes contendo a tradução de vários verbetes da *Encyclopédie* das mais diversas áreas do conhecimento, e no primeiro volume contém uma versão traduzida do *Discours Préliminaire* de D'Alembert. Utilizamos principalmente o terceiro volume, o qual se refere às ciências da Natureza, entretanto, os verbetes e informações que não continham nessa coleção, buscamos diretamente nas edições da *Encyclopédie* para cumprirmos com o objetivo específico desse capítulo, “*apresentar a classificação matemática de D'Alembert*”.

Nessa nova classificação, D'Alembert continua a dividir a matemática em “pura” e “mista”, mas também acrescenta as ciências físico-matemáticas como uma ramificação das ciências matemáticas. Tópicos que anteriormente pertenciam às matemáticas mistas conforme a classificação de Bacon, ganharam ramificações próprias ou foram agrupados a outras áreas do conhecimento, assim como, novos elementos foram adicionados como pertencentes a categoria das “matemáticas mistas”. A curiosidade de perceber como essas matemáticas tiveram alguma finalidade prática na sociedade, nos levou ao nosso **terceiro capítulo**.

Esse capítulo denominado “*A Matemática Mista e as ciências Físico-matemáticas na Revolução Industrial*” é de certa forma, um dos resquícios da ideia inicial dessa tese, dado que traz um breve exemplo que serviria como resposta da questão norteadora da proposta inicial dessa tese. Dentre as sociedades científicas das províncias inglesas citadas por Gleason (1991), que contribuíram para o avanço industrial da Inglaterra, fixamos a *Lunar Society of Birmingham* (Sociedade Lunar de Birmingham), e a partir dela, veremos brevemente, como essa sociedade científica foi importante para contribuir com o progresso tecnológico no período da Revolução Industrial fazendo uso das “matemáticas mistas” e das ciências físico-matemáticas, principalmente por conta do aprimoramento das máquinas a vapor desenvolvidas por James Watt (1736-1819). Entretanto, estamos focando somente na Sociedade Lunar, sem fazer qualquer tipo de comparação com a *Royal Society* conforme apresentamos o que seria a proposta inicial.

Considerando a classificação matemática de D'Alembert publicada na *Encyclopédie* em 1751, o que nos interessa agora, é “*investigar como as ‘matemáticas mistas’ e as ciências físico-matemáticas contribuíram de modo prático para a sociedade*”, e para isso, consideramos como cenário dessa investigação, o aprimoramento da maquinaria a vapor durante o período da Revolução Industrial. Os arquivos e documentos que compuseram esse capítulo, em sua maioria podem ser encontrados nos sites da Biblioteca de Londres, Biblioteca de Birmingham, e da *Soho House* (antiga sede da *Lunar Society of Birmingham*). A maior parte da documentação foi disponibilizada pelo *Soho House Museum* e fazem parte da *Archives of Soho collection*, que é organizada pelos Arquivos da Cidade de Birmingham. E em relação a algumas das propriedades matemáticas presentes nas máquinas a vapor, consideramos Ripper (1920) e Farey (1827) principalmente, por serem autores que escreveram seus princípios teóricos voltados a aplicação das ciências nas máquinas a vapor. É importante destacarmos, que na época da Revolução Industrial, segunda metade do século XVIII e primeira metade do século XIX, essas propriedades eram consideradas como pertencentes ao campo “matemáticas mistas”, principalmente na Inglaterra. Porém, nesse mesmo período, foi quando também se iniciou uma discussão de ordem filosófica quanto aos conhecimentos matemáticos, que gerou uma série de implicações nas áreas matemáticas, o que nos leva ao nosso **quarto capítulo**.

Esse capítulo intitulado como “*O Desuso e uma herança da Matemática Mista*”, tem como um dos objetivos “*identificar elementos que contribuíram para o ostracismo das matemáticas mistas*”. Desse modo, destacamos três fatores que fomentaram esse desuso: o primeiro foi a filosofia de Kant (1724-1804), em que ele faz uma crítica à razão, incidindo diretamente na metafísica e nos conhecimentos puros; o segundo fator de certa forma foi uma consequência do primeiro, dado que elementos das “matemáticas mistas” foram repensados se ainda faziam sentido permanecer nessa categoria, e trouxemos como exemplo, a mecânica racional como aquela aplicada ao mundo físico, não mais pertencente a categoria das “matemáticas mistas” e sim como uma parte da Física; e por fim, a terceira situação que apresentamos, foi que o aparecimento das “matemáticas aplicadas”, no decorrer do século XIX, foram tomando o espaço que antes pertenceu às “matemáticas mistas”.

Entretanto, apesar da decadência dessas matemáticas no século XIX, sabemos que elas foram importante em questões da sociedade, tal como apresentamos no terceiro capítulo, mas além dessas questões práticas, outra herança que as “matemáticas mistas” e as ciências físico-matemáticas deixaram, foram as contribuições no desenvolvimento de teorias das

“matemáticas puras”⁷, assim, comparamos brevemente algumas formulações do *Méchanique Analitique* de Lagrange (1736-1813) com Boole (1815-1864), Jacobi (1804-1851) e Cayley (1821-1895), para cumprimos com nosso segundo objetivo do capítulo: “*investigar contribuições da ‘matemática mista’ e ciências físico-matemáticas no desenvolvimento da ‘matemática pura’*”.

A importância desta tese para o meio acadêmico brasileiro se dá principalmente por conta da escassez de material em português referente às “matemáticas mistas”. Por meio do catálogo de teses e dissertações da CAPES⁸ não identificamos trabalhos que abordem o assunto, o que encontramos foram algumas citações dessas matemáticas.

Schwartzman (1979) relata que o Brasil importou os resultados científicos, bem como seus modos de produção da Europa, entretanto, isso se deu somente após a Independência do Brasil, sendo visível em meados do século XX, que o Brasil teve a Europa como modelo para o seu processo de industrialização, tal como Anjos (2018) apresenta ao abordar a institucionalização da “matemática aplicada” no Brasil.

Anjos (2018) considera que a matemática entra em uma nova fase de desenvolvimento, devido a uma crescente especialização das atividades matemáticas no século XIX e apresenta uma citação de Schubring (1981), em que é relatado que essa nova fase da matemática foi marcada por um paradoxo: Como é possível surgir a ideia de ciência pura em uma época (século XIX) que estava conectada com o desenvolvimento de máquinas? Desse modo, ao dar prosseguimento à esta questão, as “matemáticas mistas” são referenciadas:

Esse paradoxo, como afirma Schubring, pode nos ajudar a compreender alguns aspectos dos problemas da profissionalização da atividade científica em matemática; o referido problema se evidenciou pela emergência das profissões e cada vez mais de especialistas que, assim, provocavam uma autonomia das áreas conceitualizadas por matemática mista (ANJOS, 2018, p. 13).

Dessa forma, os materiais em português relacionados ao tema consistem na tradução realizada em 2007 do livro de 1605 de Francis Bacon, em que ele faz uma classificação dos conhecimentos humanos, e temos a matemática como um dentre vários conhecimentos classificados por Bacon. Recentemente, em 2015, a tradução do Discurso Preliminar de D'Alembert e de alguns verbetes da *Encyclopédie*, foram divididos em seis volumes numa coleção da UNESP, porém, não são trabalhos que visaram abordar especificamente as

⁷ Optamos por adotar a expressão entre aspas para designar a ciência “matemática pura”, pelo fato dessa expressão conter um conjunto de ciências que foram classificadas como pertencentes às matemáticas puras.

⁸ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

“matemáticas mistas”, elas simplesmente estão colocadas entre as outras ciências do conhecimento humano.

Do mesmo modo que Anjos (2018), identificamos outros trabalhos que apenas citam as “matemáticas mistas”, tal como Saito (2017), entretanto, não há uma abordagem do que foram e como se constituíram essas matemáticas. E em ambos trabalhos, são sugeridas publicações estrangeiras para que os leitores consultem mais informações referentes às “matemáticas mistas”. Portanto, diante da escassez de materiais referente às “matemáticas mistas” no idioma português, o objetivo desta tese é *“contribuir bibliograficamente a respeito das matemáticas mistas no idioma português”*.

É importante destacarmos que não temos a pretensão de escrever a história total. De acordo com Bloch (2002), o historiador deve ter um cuidado redobrado ao trabalhar com um tempo passado que já não tem mais acesso, onde ele tenta recriá-lo através de pequenos detalhes muitas vezes ocultos na escrita literária. No processo de escrita da tese, iremos seguir os passos conforme as evidências mostraram ser, entretanto, baseado em nossas crenças e época em que vivemos.

CAPÍTULO 1

A PRIMEIRA CLASSIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA MISTA E O NASCIMENTO DAS CIÊNCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

O principal objetivo desse capítulo é apresentar a classificação da matemática de Francis Bacon (1561-1626), classificação essa que ele denomina a “matemática mista” como uma parte do conhecimento matemático, juntamente com a “matemática pura” – sendo considerado por Brown (1991) e Kawajiri (1979), o primeiro a fazer uso desse termo. A introdução das “matemáticas mistas” ocorreram nas publicações “*Proficiency and Advancement of Learnings*”, em 1605, e posteriormente, em “*De Dignitate et Augmentis Scientiarum*”, no ano de 1623.

Este capítulo é de grande importância, pois veremos no capítulo 2, uma nova classificação matemática, e o autor dessa nova categorização assume em sua obra ter se inspirado nas ideias de Bacon. É importante relatarmos que não pretendemos abordar amplamente a filosofia de Bacon ou outras questões não relacionadas a matemática, esses tópicos estão fora de questão, a menos que os assuntos estejam relacionados com o propósito desse capítulo.

Assim sendo, consideramos que Bacon foi um dos principais filósofos que deixou suas ideias como herança para a nova classificação não só da matemática, mas para a nova classificação do conhecimento humano que foi realizada na publicação que teve início em 1751, denominada *Encyclopédie*, portanto, mesmo que brevemente, conhecer as suas considerações a respeito do tema é extremamente interessante para entender a inspiração desses novos autores que relataremos no capítulo seguinte, além de que, como já dissemos, foi Bacon quem atribuiu a primeira definição em relação à “matemática mista”.

Veremos nesse capítulo que os tópicos de “matemática mista”, quando pensados em abordar quantitativamente elementos de causas naturais de fenômenos do mundo físico, conforme Dear (1995), foram barrados segundo o ponto de vista da matemática na visão aristotélica. O problema central desta tarefa foi como harmonizar a matemática com a metafísica e a física de Aristóteles, que foram introduzidas, segundo Kawajiri (1979), por meio da Arábia, com a Teologia.

Bacon tentou reclassificar todos os conhecimentos com um ponto de vista crítico contra o Escolasticismo⁹, que era a idéia dominante na época, e esses esforços resultaram em dois livros¹⁰. Quanto aos matemáticos jesuítas, veremos que um deles, é considerado por Dear (1995) como aquele que mais se destacou para introduzir os temas das “matemáticas mistas” como forma de discurso científico nas instituições jesuíticas, e após as duas primeiras décadas do século XVII, veremos que seus esforços não foram em vão, entretanto, as “matemáticas mistas” conforme Dear (1995) vieram disfarçadas sob uma nova denominação, as ciências físico-matemáticas.

Dessa forma, como uma maneira de abordar essas quantidades do mundo físico, parece ter surgido em meio a essa situação, as ciências físico-matemáticas. Assim, essas ciências podem ser consideradas como uma ciência causal da natureza que transcendeu as limitações convencionalmente atribuídas nas escolas à “matemática mista”. Dear (1995) ao se referir da introdução das ciências físico-matemáticas afirma que “a nova categoria tornou mais fácil para os cientistas matemáticos fazerem afirmações filosóficas que anteriormente haviam sido ferozmente contestadas (DEAR, 1995, p.172, tradução nossa)”.

1.1 A CLASSIFICAÇÃO DA MATEMÁTICA DE BACON

Bacon (2007)¹¹ se dedicou à classificar e reexaminar o conhecimento. A matemática foi levada em consideração como parte deste grande quadro. A classificação do conhecimento foi uma tarefa importante para os europeus desde o século XII, quando os conhecimentos gregos começaram a fluir para a Europa a partir da conquista de territórios de população

⁹ “Termo que significa originariamente "doutrina da escola" e que designa os ensinamentos de filosofia e teologia ministrados nas escolas eclesiásticas e universidades na Europa durante o período medieval, sobretudo entre os sécs.IX e XVII. A escolástica caracteriza-se principalmente pela tentativa de conciliar os dogmas da fé cristã e as verdades reveladas nas Sagradas Escrituras com as doutrinas filosóficas clássicas, destacando-se o platonismo e o aristotelismo. O primeiro período da escolástica é marcado pela influência do pensamento de sto. Agostinho e do platonismo, desenvolvendo-se sobretudo a partir da chamada "Renascença Carolíngia", isto é, da criação da Academia palatina fundada na corte de Carlos Magno (séc.IX). O período áureo da escolástica corresponde ao da influência de Aristóteles, cujas obras foram traduzidas para o latim em torno dos sécs.XII-XIII, bem como às interpretações da filosofia aristotélica trazidas para o Ocidente pelos filósofos árabes e judeus. O aristotelismo forneceu assim a base de grandes sistemas da filosofia cristã como o de Tomás de Aquino. O período final da escolástica se deu nos séculos XIVXVII, sendo marcado pelo conflito entre diferentes correntes de pensamento e interpretação doutrinárias, e pelas novas descobertas científicas. A Reforma Protestante e o humanismo renascentista fizeram com que a escolástica, que representava a tradição atacada, entrasse em crise (JAPIASSÚ e MARCONDES, 2001, p.65)”.

¹⁰ “*Proficiency and Advancement of Learnings*” em 1605 e “*De Dignitate et Augmentis Scientiarum*” em 1623.

¹¹ Bacon (2007): BACON, Francis. O progresso do conhecimento. Tradução, apresentação e notas Raul Filker. São Paulo: Editora Unesp, 2007. Essa referência é uma versão traduzida da publicação de 1605, *Proficiency and Advancement of Learnings*.

árabe. Naquela época, o foco dos conhecimentos na Europa era em torno da Teologia, que se baseava nas chamadas artes liberais que tinham sido estabelecidas como o quadro fundamental para as aprendizagens na Europa. Mais especificamente, essas aprendizagens européias consistiam no quadrivium - aritmética, geometria, música e astronomia - e o trivium - retórica, gramática e lógica.

Oki (2013) comenta que a expressão "matemática mista" atraiu matemáticos holandeses e franceses a realizar uma série de discussões sobre o ensino de matemática nas universidades na virada do século XVII. É citado como exemplo, o matemático holandês, Adriaan van Roomen (1561-1615) que menciona a “matemática mista” em sua idéia de *Universes mathesis*. Indo ao encontro de Oki (2013), é apresentado por Oliveira (2011) que o matemático van Roomen, na primeira parte de sua obra *Mathesis Polemica* (1605), se empenhou em realizar uma classificação do conhecimento matemático.

Enquanto Bacon realizou uma classificação do conhecimento em geral, van Roomen focou nas disciplinas que ele considerava como parte da matemática, bem como a utilidade de cada uma dessas formas de matemática. Dessa forma, Oliveira (2011, p. 27-28), mostra que a classificação presente no diagrama (Anexo 1) da obra de van Roomen pode ser simplificada da seguinte maneira:

1. Principais

(A) Puras:

(i) *Suputatrice*, ou computo, computação; (ii) *Prima mathesis*; (iii) Aritmética e; (iv) Geometria.

(B) Mistas:

(i) Cosmografia; (ii) Uranografia; (iii) Geografia; (iv) Astronomia; (v) Cronologia; (vi) Geodésia; (vii) Ótica; (viii) Eutimetria e; (ix) Música.

2. Mecânicas

(A) Esferopoética; (B) Manganária; (C) Mekanopoética; (D) Organopoética e; (E) Automatopoética.

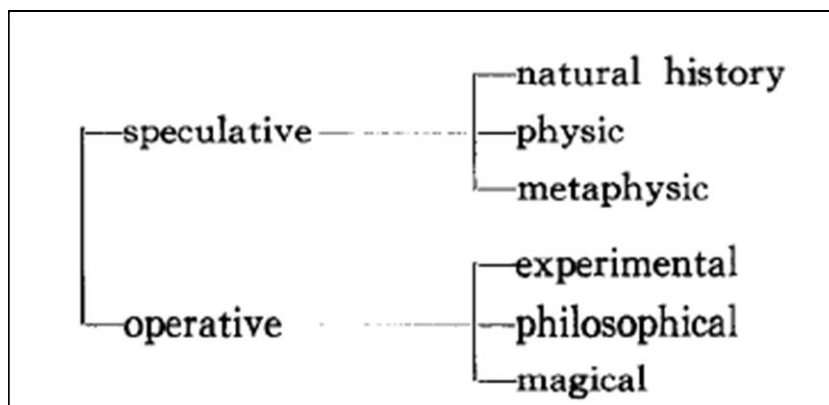
Como descrito anteriormente, de acordo com os historiadores Kawajiri (1979) e Brown (1991), o termo “*Mixed Mathematics*” ou “Matemática Mista”, parece ter suas origens em torno do ano de 1600 nas publicações “*Proficiency and Advancement of Learnings*” em 1605 e “*De Dignitate et Augmentis Scientiarum*” em 1623, ambas do filósofo Francis Bacon (1561-1626).

Brown (1991) comenta que não encontrou nenhuma evidência de que o termo "matemática mista" teria sido utilizado por outra pessoa antes de Bacon, nem mesmo por qualquer um dos geômetras proeminentes do século XVII. Por meio de suas pesquisas, Kawajiri (1979) relata que o termo apareceu no *Oxford English Dictionary* em 1648 da seguinte maneira: "Wilkins, Math. Magick: a matemática geralmente é dividida em pura e mista". Sendo que "Wilkins" era uma referência ao matemático John Wilkins (1614-1672) e "Math. Magick" ao livro *Mathematical Magick*¹², cujo legado era "as maravilhas que podem ser realizadas pela geometria mecânica".

Brown (1991) comenta que não verificou por que o termo "matemática mista" estava associado a Wilkins ao invés de Bacon ou quem mais o usara em torno desse período, mas de acordo com o autor, o termo "matemática mista" parecia estar bem estabelecido durante o século XVII e início do século XVIII. Kawajiri (1979) acredita que a omissão do *Oxford English Dictionary* em relação a Bacon pode ter sido uma mera falha ou até mesmo uma negligência deliberada, mas de qualquer forma, certamente Bacon foi a primeira pessoa influente a utilizar a denominação "matemática mista" para se referir aos tópicos da mecânica que não estavam englobados no campo da "matemática pura".

Para entender o modo que Bacon compreendia a matemática, vejamos brevemente como era empregada sua visão em relação a Filosofia Natural. Conforme a figura 1, vemos que Bacon (2007) classificou as questões voltadas a Filosofia Natural da seguinte maneira:

Figura 1: A classificação da Filosofia Natural de Francis Bacon



Fonte: Kawajiri (1979)

A parte especulativa visava a investigação das causas, e a parte operativa averiguava a produção dos efeitos. Nas próprias palavras de Bacon, ele descreveu o seguinte: "a História

¹² O livro de Winlkins foi publicado somente 43 anos após a introdução do termo "matemática mista" por Francis Bacon. A obra *Mathematikal Magik, or the Wonders that may be Performed by Mechanical Geometry* foi lançada em 1648. Ele escreveu claramente: "The mathematics are either Pure or Mixed".

Natural descreve *a variedade das coisas*, a Física, *as causas fixas e constantes*, a Metafísica, se ocupa das *Causas Formal e Final* (BACON, 2007, p.146)”.

Tomando primeiramente a obra, *Proficiency and Advancement of Learnings*, vemos que Bacon (2007) inicia seu relato em relação à Matemática, considerando que ela faz parte da Filosofia Natural, no mesmo grau que a Física e a Metafísica, entretanto, ele diz acreditar que devido a natureza das coisas e por uma questão de ordem, as ciências matemáticas devem ser colocadas dentro da ramificação¹³ da Metafísica. A justificativa para essa ação da parte de Bacon, se dá em virtude de que o objeto de estudo da matemática é a *quantidade*, que pode ser denominada como *Quantidade Determinada* ou *Quantidade Comensurada*, e essa quantidade é dita como ser uma das Formas Essenciais das coisas, sendo causadora de muitos efeitos na natureza. Além disso, ele também considera que dentre todas as formas, a Matemática é a mais abstrata e separável da matéria, sendo assim, essa ciência é mais apropriada à Metafísica:

tanto na escola de Demócrito como na de Pitágoras, vemos que a primeira *atribuiu figura às primeiras sementes das coisas*, e a segunda *supôs que os números fossem os princípios e origens das coisas*; e também é certo que de todas as formas (tal como nós as entendemos) é a mais abstrata e separável da matéria, e, portanto, a mais própria à Metafísica (BACON, 2007, p.154).

Pode-se dizer que a exemplificação, e conseqüentemente a definição de matemática, possui uma relação com sua metodologia, ou seja, seu princípio de indução. Em suma, ele pensou que a verdade existe em algo comum com muitas coisas coletadas. Bacon (2007) cita que faz parte da natureza humana se deleitar da ampla liberdade existente das generalidades como se tudo fosse um campo aberto, entretanto, a matemática não permite essa liberdade, criando cercados de particularidades. Dessa forma, a matemática acabou sendo, dentre todas as ciências do conhecimento, o melhor lugar para quem tem apetite de trabalhar nas particularidades.

Bacon (2007) aponta que não devemos lançar preocupação de aonde essa ciência foi colocada, mas sim, com sua classificação, na perspectiva de que essas divisões sejam capazes de lançar luzes umas às outras. Bacon finalmente apresenta como ele acreditava que a

¹³ Francis Bacon entende que a Ciência ou Teoria Natural pode ser dividida em Física e Metafísica. Definindo que a “Física deve estudar aquilo que está inserido na matéria e portanto é transitório, e a Metafísica // aquilo que é abstrato e fixo. E também que a Física deve tratar do que só supõe na natureza uma existência e um movimento, e a Metafísica deve tratar do que supõe além disso na natureza uma razão, um entendimento e um plano. (BACON, 2007, p.146)”.

matemática deveria ser dividida, isto é, ele classifica as ciências matemáticas como sendo “pura” ou “mista”.

Em relação a “matemática pura”, Bacon a define da seguinte forma:

A Matemática Pura pertencem aquelas ciências que lidam com a Quantidade Determinada, separada de todo axioma da filosofia natural; e estas ciências são duas, Geometria e Aritmética, a primeira ocupando-se da Quantidade contínua, e a segunda da Quantidade dividida (BACON, 2007, p.155).

Ele observa ainda que, nas ciências matemáticas, ele não foi capaz de assinalar nenhuma deficiência, exceto que muitos não compreendem suficientemente que a “matemática pura” tem utilidade para remediar ou até mesmo curar os mais variados defeitos das faculdades intelectuais e do engenho.

Bacon (2007) faz uma analogia entre a matemática e o jogo de tênis, atribuindo que o jogo de tênis em si não tem nenhuma utilidade se considerarmos somente em si, mas durante uma partida de tênis, se torna muito útil porque o jogador tem de pensar rapidamente e formar uma vista rápida de onde irá jogar a bola ou a direção que ela vai para rebatê-la, de modo que o corpo precisa estar disposto a se colocar em todas as posturas. E no caso da matemática, isso acontece da mesma forma, sua utilidade colateral e acidental é tão valiosa quanto sua utilidade principal e pretendida, dado que, se o engenho de uma dada pessoa é demasiadamente obtuso, essa matemática é capaz de aguçá-lo, bem como se for demasiado errante, ela o fixa e assim como se estiver descomedidamente no sensorial, ela é capaz de levar para a abstração.

Como apontamos anteriormente, Francis Bacon foi responsável por ser a primeira pessoa a atribuir a denominação “matemática mista” ao se referir a uma parte das ciências matemáticas, e ele a define da seguinte maneira:

A Mista tem por objeto certos axiomas ou partes da filosofia natural, e considera a Quantidade determinada auxiliar e incidente a eles. Pois muitas partes da natureza não podem ser desveladas com sutileza suficiente, nem expostas com clareza suficiente, nem acomodadas ao uso com facilidade suficiente, se não for com o auxílio e intervenção da Matemática; deste tipo são a Perspectiva, a Música, a Astronomia, a Cosmografia, a Arquitetura, a Engenharia e diversas outras (BACON, 2007, p.155).

Em relação a “matemática mista”, Bacon (2007) diz acreditar que à medida que a natureza tiver seus campos cada vez mais desvelados pelo homem, forçosamente irão existir novos tipos de “matemática mista”.

Quanto as ramificações da “matemática mista” elaboradas por Bacon (2007) em sua árvore do conhecimento, podemos observar que dentre os seis ramos de conhecimento, apenas a Música e a Astronomia estavam contidas nas artes liberais tradicionais européias, ou seja, no quadrivium¹⁴. Kawajiri (1979) acredita que as demais ramificações tiveram grande influência da cultura árabe que estava se espalhando na Europa, principalmente devido às conquistas de novos territórios por meio das guerras que aconteceram no período.

Por meio dessas novas aquisições de território, conseqüentemente a cultura dessa civilização geralmente é absorvida – tal como temos de exemplo quando o Império Romano invadiu a Grécia ainda na Antiguidade, e com essa invasão impactou diretamente na cultura da civilização romana que incorporou diversos hábitos e costumes da civilização grega. Então, no século XII quando a civilização árabe começou a fluir para a Europa, esse mesmo processo igual exemplificamos com os gregos e os romanos, deu início a um grande impacto à Europa da época, tendo inclusive essa nova civilização, os árabes, influenciado consideravelmente a classificação dos conhecimentos.

Kawajiri (1979) acredita que o primeiro exemplo dessa incorporação dos conhecimentos da civilização árabe teria aparecido em 1150 na Catedral de Toledo, um importante pilar para a aceitação da população árabe. E um dos grandes responsáveis por essa fusão de conhecimentos se deu por Domingo Gundisalvo (1115-1190), vice-bispo de Toledo e líder de tradução de literaturas árabes, que escreveu um livro intitulado de *Divisione Philosophiae*, e no que diz respeito à matemática, ele adicionou três ramos aos quatro tradicionais: perspectiva, *scientia de ponderibus* (ciência do peso) e *scientia de ingenis* (ciência da engenharia) foram adicionados à matemática.

Segundo o historiador Kawajiri (1979), Gundisalvo escreveu seu livro baseado no livro de um cientista e filósofo árabe no século X, conhecido como Al-Fārābī (???-951), e Al-Fārābī originalmente obteve suas ideias a partir do livro de Al-Khwarizumi¹⁵, que também era um cientista árabe no século X. É dito que em seu livro, Al-Khwarizumi dividiu todo o conhecimento em dois tipos: aborígenes e estrangeiros; assim, atribuindo a Aritmética, a Geometria, a Astronomia, a Música e a Mecânica eram todas aprendizagens estrangeiras, já que todos esses conhecimentos eram advindos da Grécia.

Em relação a Al-Fārābī e Al-Khwarizumi, Kawajiri (1979) nos diz ainda que ambos autores se basearam para formular seus conceitos de "mecânica" nas ideias que estavam

¹⁴ Quadrivium: composto pela Aritmética, Geometria, Música e Astronomia.

¹⁵ O Al-Khwarizumi que Kawajiri (1979) se refere não é o matemático de mesmo nome que é conhecido por seus trabalhos em álgebra no século IX.

contidas em *Mechanica*, um livro que era conhecido por Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), mas provavelmente escrito por um de seus discípulos e que abordava instrumentos como a alavanca e equilíbrio geométrico. Por conseguinte, temos que Al-Khwarizumi foi influenciado por Aristóteles, que por sua vez, influenciou Al-Fârâbi, que por meio do advento da chegada da civilização e cultura árabe na Europa, influenciou Gundisalvo, que é dito um dos que inspiraram a classificação matemática de Bacon (2007), nos levando a pensar que Bacon também acabou incorporando essas ideias e estava sob as influências do aristotelismo. Assim, por meio da Arábia, os livros de Aristóteles foram introduzidos na Europa e podem ter influenciado diversos dos estudos no continente europeu a partir do século XII.

Por meio desse cenário, Kawajiri (1979) acredita que a origem e a variedade do conceito de “matemática mista” de Bacon deve ter sido influenciada pela civilização árabe, embora ele sendo um erudito do século XVII, talvez não tenha sido consciente de uma influência direta, eliminando a glória da civilização árabe e sua contribuição para a cultura europeia, mas, pode não ser demais dizer que a classificação de Bacon (2007) foi o resultado da superação da visão árabe de aprendizagens sobre as tradições gregas. Portanto, com esse cenário que Kawajiri (1979) nos apresenta, utilizando a classificação de Al-Khwarizumi podemos deduzir que os conhecimentos estrangeiros foram incorporados aos conhecimentos aborígenes, assim, para formar a classificação matemática, Bacon (2007) fez uma junção desses conhecimentos aborígenes aos conhecimentos do quadrivium, congregando de tal modo novos conhecimentos a ramificação das “matemáticas mistas”.

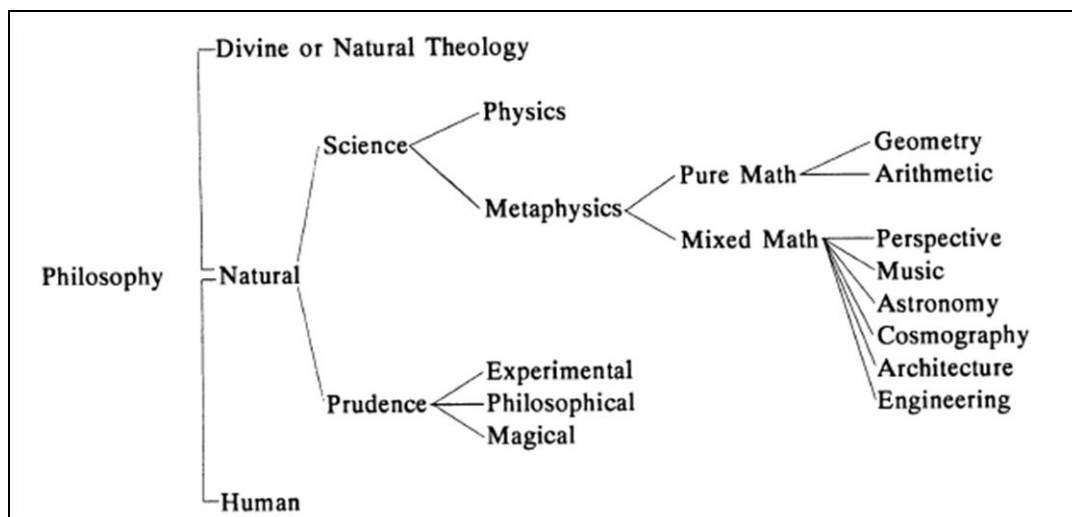
Resumindo, vimos que Bacon (2007) formulou uma definição de matemática baseada na própria classificação de Filosofia Natural, bem como introduziu o termo “matemática mista” na árvore do conhecimento junto com a “matemática pura”, ambas como uma das ramificações pertencentes à metafísica ao invés da Física. No entanto, a matemática também deve existir na Física, devido ao seu objetivo de investigar as “causas fixas e constantes”, dessa forma, Bacon deu o nome da “matemática mista” aos sujeitos que pertenciam à física e cuja natureza originavam uma quantidade determinada. Devemos observar ainda, que essa quantidade determinada era sujeita a mudanças, ou seja, essa quantidade variava de acordo com o objeto considerado em cada uma de suas ramificações.

Assim, por meio da figura 2 que mostra uma parte da árvore¹⁶ do conhecimento de Bacon, podemos ver que a “matemática mista” considerada por Francis Bacon compreende os

¹⁶ A árvore do conhecimento completa proposta por Bacon, pode ser visualizada no Anexo 2.

seguintes tópicos: Perspectiva, Música, Astronomia, Cosmografia, Arquitetura e Engenharia; e a “matemática pura” abrange os tópicos de Geometria e Aritmética.

Figura 2: Parte da Árvore do Conhecimento proposta por Francis Bacon



Fonte: Brown (1991).

O historiador Kawajiri (1979) comenta que a cosmografia não está contida nos exemplos das ciências compostas de Aristóteles nem em Gundisalvo, e assim pode-se dizer que esse ramo deve ter aparecido neste momento na história da matemática para manter o passo da necessidade dos tempos. Originalmente, a cosmografia tinha o significado de discutir especulativamente a forma do cosmos. Bacon, partindo do seu significado original, usou isso como sinônimo de geografia. Além disso, embora tenha sido listado como um dos exemplos de “matemática mista”, ele é explicado como um ramo da história.

A cargo de curiosidade, vale a pena destacar que a matemática foi a última ciência que Bacon (2007) classificou no que ele chamou de Ciência Natural¹⁷, ou a parte Especulativa da natureza. Após fazer essas definições à respeito da matemática ser “pura” ou “mista”, ele não diz nada a respeito do que ele entende por Geometria, Aritmética, nem dos elementos que ele classifica nas “matemáticas mistas”, simplesmente faz essa classificação matemática e parte para tecer considerações a respeito do que ele chamou de Prudência Natural¹⁸, ou a parte Operativa da Filosofia Natural.

Em 1623, no trabalho *De Dignitate et Augmentis Scientiarum*, Bacon relança sua categorização do conhecimento humano, e consequentemente classifica novamente as

¹⁷ Essas ciências são a História Natural, Física e a Metafísica.

¹⁸ São divididas em Experimental, Filosófica e Mágica.

ciências matemáticas, entretanto, ao compararmos a nova classificação com a antiga, observa-se que Bacon (1779)¹⁹ não refere que a Matemática tem como objeto a *Quantidade Determinada* como classificou anteriormente, apenas se refere sendo a ciência que tem a *Quantidade* como objeto, isto é, ele removeu a palavra *Determinada* da definição. Essa observação que parece simples num primeiro momento, certamente merece ser destacada, pois foi justamente por essa questão da quantidade que Bacon definiu que a matemática deveria pertencer ao ramo da Metafísica.

Quando Bacon (1779) faz suas considerações a respeito da *quantidade*, ele agora usa a palavra “dose” para indicar essa quantidade: “para Quantidade (que é o assunto da Matemática), quando aplicado à natureza, é como se fosse uma dose da Natureza, e é a causa de uma série de efeitos nas coisas naturais e, portanto, deve ser considerado como uma das Formas Essenciais das coisas (BACON, 1779, p.260, tradução nossa)”.

Kawajiri (1979) acredita que a essência da definição de “matemática mista” por Francis Bacon teve duas fases: uma pertencente à metafísica e a outra à física que estudava mudança de matéria. Dessa forma, vejamos as palavras de Bacon na sua obra *Augmentis* para classificar a matemática:

A Matemática é Pura ou Mista. A Matemática Pura pertence às ciências que manipulam a Quantidade inteiramente separada da matéria e dos axiomas da filosofia natural, que são: Geometria e Aritmética; A Matemática Mista tem por seu objeto alguns axiomas e partes da filosofia natural, e considera a quantidade na medida em que ajuda a explicar, demonstrar e atualizar estes (BACON, 1779, p. 261, tradução nossa).

Deste modo, a nova classificação de Bacon (1779) mantém a matemática como parte da Filosofia Natural e dividida em “matemática pura” e “matemática mista”. Entretanto, dessa vez, Bacon não considera que a matemática esteja no mesmo nível da Física, nem da Metafísica, muito pelo contrário, Bacon fala que a Matemática deve ser considerada como serva dessas duas ciências. Em outras palavras, ele mantém as definições de Física e Metafísica inalteradas, mas mudou a localização da matemática de “um ramo da metafísica” para “auxiliares da metafísica e da física”:

Aristóteles observou bem que Física e Matemática produzem Prática ou Mecânica; portanto, como já tratamos da parte especulativa e operativa da filosofia natural,

¹⁹ Bacon (1779): BACON, Francis. De dignitate et Augmentis Scientiarum. Tomus I et II / Wirceburgi: Apud Jo. Jac. Stahel, 1779. Essa referência é uma versão reimpressa da publicação de 1623, *De Dignitate et Augmentis Scientiarum*.

resta a falar de Matemática, que é uma ciência auxiliar para ambas. Agora isso na filosofia comum é anexada como uma terceira parte para a Física e a Metafísica, mas, de minha parte, agora me envolvendo em revisar e retratar essas coisas, se eu pretendesse colocá-la como uma ciência substantiva e principal, eu deveria pensar isso em conformidade tanto com a natureza do assunto quanto com a clareza da ordem para colocá-la como um ramo da Metafísica (BACON, 1779, p.259-260, tradução nossa).

Por meio da citação anterior observa-se que Bacon parece ter mudado seu pensamento em relação aos conhecimentos da Matemática, entretanto, ele mantém como em sua publicação anterior, que a Matemática poderia ser um ramo da Metafísica. Kawajiri (1979) acredita que, em termos grosseiros, Bacon (1779) deve ter reescrito o *Advancement* para acompanhar os tempos, colocando mais ênfase no lado operacional dos conhecimentos nessa nova publicação, mudando inclusive de ordem alguns desses conhecimentos para enfatizar os fatos.

Após essas afirmações, assim como fez na sua publicação anterior, Bacon (1779) novamente faz uma referência a Demócrito e Pitágoras, e mostra outro exemplo de como mudou sua visão em relação à matemática:

Mas, embora isso seja verdade, considerando que não só a verdade e a ordem, mas também a vantagem e a conveniência da humanidade, eu tenho pensado melhor para designar a Matemática, visto que ela é tão importante tanto em Física como em Metafísica e Mecânica e Magia, como apêndices e auxiliares para todas elas (BACON, 1779, p.261, tradução nossa).

Bacon (2007) se referiu anteriormente que a Matemática era mais pertinente como uma parte da Metafísica, depois, Bacon (1779) diz que a matemática é uma auxiliar da Física e Metafísica, e agora, nessa mesma publicação, ainda observa que a Matemática deve ser então designada como apêndice e auxiliar da Física, da Metafísica, da Mecânica e da Magia. Dessa forma, parece que há uma confusão quanto ao entendimento de Bacon em relação à Matemática, que então, é natural que façamos a pergunta: “O que é a Matemática afinal?”.

Outra frase de Bacon nos chama a atenção, dando continuidade a aparente mudança em relação a sua visão à respeito das ciências matemáticas:

O que de fato eu sou de uma maneira compelido a fazer, por causa da delicadeza e do orgulho dos matemáticos, que precisam ter esta ciência quase dominadora da Física. Por ter acontecido, não sei como, a Matemática e a Lógica, que deveriam ser apenas as servas da Física, no entanto, presumem da força da certeza que possui exercer domínio sobre ela. Mas o lugar e a dignidade desta ciência são de menor importância (BACON, 1779, p.261, tradução nossa).

Não podemos esquecer, que em sua publicação de 1605, Bacon (2007) apreciou muito positivamente a matemática, chegando inclusive a escrever que a “matemática pura” não tinha nenhum tipo de deficiência comparada com demais ciências, entretanto, ao compararmos essas novas declarações, é visível observarmos que há uma mudança de opinião em relação a sua apreciação pela matemática tão drástica carregada subestimações da própria matemática e de um certo cinismo em relação aos matemáticos, que mal parece ter sido a mesma pessoa que discorreu aquelas opiniões no passado.

Além disso, em relação à “matemática pura”, Bacon (1779) considera que os matemáticos modernos fazem uso o tempo todo da obra de Euclides e outros antigos mestres da Geometria, mas ainda assim continua um grande intervalo em relação às novas descobertas, dado que esses matemáticos não acrescentaram praticamente nenhuma contribuição efetiva na Geometria. Quanto à Aritmética, Bacon diz que ela consiste numa variedade de vantagens para responder algumas reflexões, especialmente em relação às progressões, mas que a Álgebra ainda está inacabada, vem sendo muito considerada interna à Aritmética, fora do místico da aritmética desenvolvida pelos pitagóricos e dentro da Aritmética cheia de regras, derivada de Euclides.

Ao abordar a “matemática mista”, Bacon (1779) mantém as previsões a respeito dessa ciência realizada na publicação da classificação anterior, e também preserva sua definição, deixando bem claro que os axiomas dessa matemática, são na verdade um assunto da Física em que as quantidades são consideradas de acordo com cada uma das partes da natureza, e para determiná-las é necessário a intervenção e auxílio das ciências matemáticas. Assim, podemos entender que a “matemática mista” para Bacon, é a “matemática com conexões físicas”.

Kawajiri (1979) conjectura que essa mudança de visão da parte de Bacon em relação às “matemáticas”, esteja diretamente envolvido com o progresso das ciências Físico-matemáticas, dado que dentre sua primeira classificação até a segunda, se passou um período de aproximadamente vinte anos, e foi bem nesse intervalo, que houve uma efervescência da Revolução Científica, com praticamente todas as descobertas de Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) que ocorreram nesse período de tempo.

O historiador Kawajiri (1979) afirma ainda que, embora Bacon não tenha tido conhecimento sobre as conquistas de Kepler, em 1616, ele recebeu notícias das atividades de Galileu por um amigo que viajou pela Itália. Assim, é praticamente impossível que Bacon tenha compreendido completamente essa nova ciência, mas parece ter entendido a tendência do tempo através de várias fontes de notícias. Dessa forma, Kawajiri (1979) considera por

meio dessa sua afirmação, que é extremamente possível que Bacon teria dado essas declarações à respeito da matemática em virtude de seu conhecimento do progresso das ciências Físico-matemática, no entanto, não sendo capaz de apreciar a natureza da nova ciência, ele repeliu a tendência dizendo essas palavras.

Apesar das não contribuições em relação aos conteúdos matemáticos, Bacon foi bastante influente ao moldar o curso da história do pensamento matemático, e a maior prova dessa afirmação, é a elaboração da famosa *Encyclopédie* que trataremos então, no segundo capítulo dessa tese.

1.2 O SURGIMENTO DAS CIÊNCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Bacon iniciou seu trabalho, segundo Kawajiri (1979), com o objetivo de criticar o Escolasticismo, que foi em grande parte baseado no aristotelismo. Oki (2013) afirma ter parecido que o próprio Bacon simplesmente adotou a terminologia que circula entre os matemáticos – matemática "pura" e "mista" – sem se interessar muito por seus argumentos sobre a necessidade de investigações quantitativas.

É inegável que a sua classificação sistemática das ciências era a mais influente à luz do despertar do interesse pela visão enciclopédica do conhecimento humano, e, de fato, tornou-se bem reconhecido em meados do século XVII. A definição de Bacon teve base em sua própria classificação de filosofia natural, que segundo Kawajiri (1979), era diferente de Aristóteles. Portanto, embora pareça que o protótipo dessa classificação tenha sido fundamentada em Aristóteles, havia uma grande diferença com relação ao modo que Aristóteles enxergava a matemática e como Bacon classificou às “matemáticas mistas” como possíveis de obter *quantidades determinadas* do mundo físico.

Antes da classificação do conhecimento proposto por Bacon, houve outros interessados em perpassar as ideias da escolástica. Outros matemáticos do século XVI também foram citados por Oki (2013), como o holandês Rudolf Snellius (1546-1613) e o francês Petrus Ramus (1515-1572), que também compartilhavam a noção de matemática apresentada por van Roomen, juntamente com seus conhecimentos relacionados a antiga literatura filosófica e matemática. Eles desafiaram a definição aristotélica tradicional de ciências, na qual a matemática, com todos os seus ramos, foi considerada subordinada à física definida como ciência qualitativa do mundo natural.

As preocupações desses matemáticos, estavam diretamente ligadas ao manifesto intelectual que elevava o status dessas ciências das “matemáticas mistas”. Uma atitude tipicamente discutível pelo professor matemático jesuíta Cristóvão Clávio (1538-1612), Dear (1995) comenta que “as mudanças no conceito de experiência entre matemáticos jesuítas incidem diretamente sobre as implicações da mudança de um escolástico para um filosófico natural (DEAR, 1995, p. 32, tradução nossa)”, essa mudança conceitual proporcionada pelos jesuítas ajudou a explicar a importância dos modelos matemáticos na prática científica permeados em uma ideologia do conhecimento natural que foram bastante instituídos ao final do século XVII.

As escolas jesuítas²⁰, criadas como parte da missão de contra-reforma, estavam espalhadas pelo continente europeu e possuíam um grande prestígio entre as instituições educacionais da época. O ensino era focado em Teologia Racional, habilidades missionárias e cultura geral com a finalidade de intimidar o progresso do protestantismo.

Dear (1995) aponta que no início do século XVII, as disciplinas matemáticas ocupavam um lugar proeminente no currículo dessas escolas jesuíticas, variando seu modo de ensino de instituição para instituição, tendo apenas como impasse um número insuficiente de professores para ministrar aulas dessa disciplina. Além disso, como regra geral, os professores das disciplinas de matemática nesses colégios não eram professores das disciplinas de filosofia, dado que a matemática era tratada apenas como um mero conjunto de técnicas de cálculos matemáticos.

Apesar disso, os matemáticos jesuítas formularam importantes tratados na área e escreveram livros que foram amplamente lidos em seu período, tendo como um dos principais nomes de destaque, Cristóvão Clávio, que foi professor de matemática no *Collegio Romano* a partir de 1565 até sua morte em 1612, e por meio de seu trabalho é considerado o responsável por ter moldado o estilo e as atitudes manifestadas na escrita da matemática jesuítica, assim, desempenhando um papel importante na formação de uma tradição jesuíta nas disciplinas matemáticas que foram colocadas em prática ao longo do século XVII.

Dear (1995) e Oki (2013) consideraram que as obras e os livros-texto escritos por Clávio, foram o início de uma abordagem que tratou de aspectos do mundo natural num mesmo patamar de igualdade metodológico no tratamento atribuído a filosofia natural aristotélica. Dessa forma, as publicações de Clávio formaram a base introdutória das ciências

²⁰ Os jesuítas integravam a Companhia de Jesus e eram compostos por padres, bispos e outras pessoas religiosas que eram ligadas à Igreja Católica. A Companhia de Jesus foi criada em 1534, logo após o advento da Reforma Protestante em 1517. Essa ordem religiosa tinha como propósito barrar o avanço da religião protestante no mundo.

matemáticas para os alunos das escolas jesuítas, tendo como destaque Descartes (1596-1650) no rol de alunos que foram instruídos segundo os preceitos jesuítas, e consequentemente, pela matemática jesuítica.

Nos trabalhos de Clávio, a matemática tem uma gama aplicabilidades em outras áreas do conhecimento, entretanto, conforme Dear (1995), Clávio restringiu suas próprias contribuições matemáticas aos aspectos de ordem mais prática com uma considerável ênfase em Astronomia Esférica, Geografia, levantamento topográfico, bem como o uso concomitantes dos instrumentos para realizar os experimentos.

Clávio foi o principal defensor do currículo matemático nas escolas jesuítas, de modo que a matemática tivesse uma posição respeitável nessas instituições. Dear (1995) aponta que uma inserção maior da matemática no currículo sofreu grande resistência por outros membros das corporações jesuítas, que consideravam essa ciência um grande obstáculo aos alunos e de que nada servia para eles. Logo, a defesa desses filósofos era de manter o espaço das disciplinas que tratassem questões teológicas e filosóficas, assim, poderiam seguir com o propósito de trabalhar com os alunos os ensinamentos católicos e barrar qualquer semente protestante nos estudantes.

Esses filósofos alegavam ainda que os objetos matemáticos (números ou figuras geométricas) não eram reais, existindo apenas no intelecto, logo, não a consideravam uma causa operativa (seja ela eficiente, material, formal ou final) devido as definições e demonstrações matemáticas não serem essenciais aos objetos reais, e não poder fazer as deduções de propriedades por meio dos objetos reais, sendo assim, não poderia fazer parte da filosofia.

Dear (1995) comenta que Clávio argumentou rebatendo esses filósofos jesuítas opositores, influenciado pela visão de Aristóteles, ponderando que a matemática era importante para estudar diversos tópicos da filosofia natural, dado que possui uma série de aplicações na área de astronomia à cosmologia. Dessa forma, Clávio recorreu aos dizeres de Aristóteles, Platão (428/427 a.C. – 348/347 a.C.) e seus comentadores, para responder que era possível verificar uma infinidade de exemplos que não poderiam ser entendidos a não ser que contassem com auxílio das ciências matemáticas. Quanto a questão de não responder propriedades físicas da matéria, Clávio ponderou que as ciências matemáticas seriam capazes de discutir quaisquer coisas relacionada a questão sensível (sentir fisicamente), visto que a matemática estaria imersa na matéria, logo, ela consegue explicar as causas, então deveria pertencer a filosofia.

Na publicação *Analytica Posteriora*, Aristóteles comenta da matemática e sua importância, considerando que a matemática não deve ser tomada em si própria a todo momento, mas sim em que há certos momentos que algumas demonstrações de outras ciências que explicam causas da natureza também necessitam da teoria matemática para terem suas propriedades tidas como verdade, então, ele comenta das relações entre as demonstrações matemáticas e físicas da seguinte maneira:

Isto é assim porque ela conhece melhor, cujo conhecimento é deduzido de causas superiores, pois seu conhecimento é de premissas anteriores quando deriva de causas que não são causadas: portanto, se ela sabe melhor do que outros ou o melhor de tudo, seu conhecimento em ciência seria alto ou em um grau mais alto. Mas, como são as coisas, a demonstração não é transferível para outra habilidade, com exceções que mencionamos sobre a aplicação de demonstrações geométricas a teoremas em mecânica ou óptica, ou de demonstrações aritméticas às de harmônica (ARISTÓTELES, 1928, p.11, tradução nossa).

Essa citação é apenas uma entre inúmeras outras que Aristóteles fez em relação às ciências matemáticas e suas aplicações em outros ramos do conhecimento em algumas de suas obras. Dear (1995) observa ainda que outros matemáticos do século XVII também se utilizaram dessas ideias, portanto, não foi exclusividade de Clávio recorrer a essas fontes aristotélicas e outros filósofos clássicos para abordar a ciência matemática.

Dear (1995) cita que o trabalho empírico de Galileu Galilei (1564-1642) que tratou dos corpos em queda, por exemplo, foi destinado a encontrar princípios para a sua "nova ciência do movimento" e não se destinava a descobrir fatos apenas através de procedimentos experimentais elaborados.

Ao invés de descrever uma experiência específica ou um conjunto de experiências realizadas num determinado momento, juntamente com um resumo quantitativo para registrar os resultados, Dear (1995) aponta que Galileu apenas diz que, com aparelhos de um certo tipo, ele encontrou os resultados para concordar exatamente com sua teoria e suposições, tendo repetido as experiências uma centena de vezes. Assim, a crítica para com os resultados de Galileu se dá principalmente por conta de que ele não forneceu as narrativas e descrição dos procedimentos tomados, divulgando apenas o que acontece, ou seja, os resultados das experiências, dado que para Galileu, a interpretação adequada do termo experiência não parece ter sido um problema para ele.

Galileu observou a construção de uma ciência matemática da natureza, nos mesmos termos de uma ciência matemática composta como definida por Aristóteles, fazendo uso de premissas totalmente empíricas para validar seus estudos e não de eventos particulares para contestar outros em seu apoio. Entretanto, apesar de compartilhar a mesma concepção em

relação às ciências matemáticas, Galileu ia contra o que pregava Aristóteles em relação ao discurso científico:

O conhecimento científico não é possível através do ato de percepção. Mesmo se a percepção como uma faculdade é de "o tal" e não meramente de um "isso de alguma forma", ainda assim, deve-se perceber de algum modo um "isso de alguma forma", e em um lugar e tempo presente definido: mas aquilo que é comensuradamente universal e verdadeiro em todos os casos não se pode perceber, já que não é "isso" e não é "agora"; se fosse, não seria comensuradamente universal - o termo que aplicamos ao que é sempre e em toda parte. Vendo, portanto, que as demonstrações são comensuradamente universais e universalmente imperceptíveis, nós claramente não podemos obter conhecimento científico pelo ato de percepção: não, é óbvio que mesmo se fosse possível perceber que um triângulo tem seus ângulos iguais a dois ângulos retos, nós ainda deveríamos estar procurando por uma demonstração. (ARISTÓTELES, 1928, p.31, tradução nossa).

Assim, como podemos observar, Aristóteles era um grande defensor das demonstrações, e justamente essa filosofia que era altamente defendida pelos defensores da escolástica, justificando as críticas daqueles filósofos jesuítas que relatamos anteriormente em relação a essas ciências matemáticas, pois elas levavam em consideração dados experimentais para atribuir verdades. Essa definição teve uma importante função, a de manter a filosofia natural separada e superior à matemática, a partir das críticas que, sendo antinatural, não poderia contribuir para o conhecimento da natureza. Logo, Galileu em suas teorias, e também a metodologia que Clávio colocou em prática durante suas aulas, iam na contramão do discurso científico adotado na Europa daquele período.

Dessa forma, os filósofos jesuítas em suas escolas defendiam que a ciência seguissem uma educação aristotélica não somente na sua visão de matemática, mas também na sua concepção de experiência, ou seja, praticamente nula, restringindo-se apenas aos cálculos e demonstrações matemáticas. Apesar das insistências de Clávio, Dear (1995) aponta que pelo menos nas primeiras décadas do século XVII, os matemáticos jesuítas pareciam acomodados em deixar as causas naturais para os físicos, assim não precisariam se submeter à filosofia natural como se a matemática fosse uma disciplina superior.

As tentativas de Clávio de dar à matemática um lugar significativo no currículo educacional jesuíta não foram em vão, ele havia estimulado professores de matemática nas escolas, cuja posição acadêmica em princípio era de que a matemática também fosse pertinente a filosofia natural, logo, vemos que essas mudanças começaram porque durante as aulas ministradas, os matemáticos jesuítas ao realizarem suas experiências, começaram a validar seus resultados, assim, esses resultados careciam ser defendidos metodologicamente contra os seus críticos. Posteriormente com a ajuda de outro matemático jesuíta que

corroborou com a visão da matemática defendida por Clávio, Giuseppe Biancani (1566-1624), visaram alcançar uma verdadeira igualdade para as disciplinas, alegando-as como genuínas ciências dignas de alto respeito.

Porém, Dear (1995) comenta que a insistência de Clávio em relação ao método da matemática jesuíta, implicou no status científico de suas próprias disciplinas, obrigando-o a usar apenas proposições empíricas que tivessem suas evidências consideradas manifestamente universais. Entretanto, apesar dessa recomendação dos jesuítas para Clávio, é destacado por Dear (1995) que as peculiaridades dos dados observacionais em astronomia não se intrometeram no papel científico da experiência nas aulas de Clávio, desde que a astronomia fosse considerada como uma disciplina matemática preocupada com modelos para o cálculo de tabelas, assim, as manifestações astronômicas caminhariam de acordo com as declarações universais de como são as coisas ou como elas se comportam nos céus.

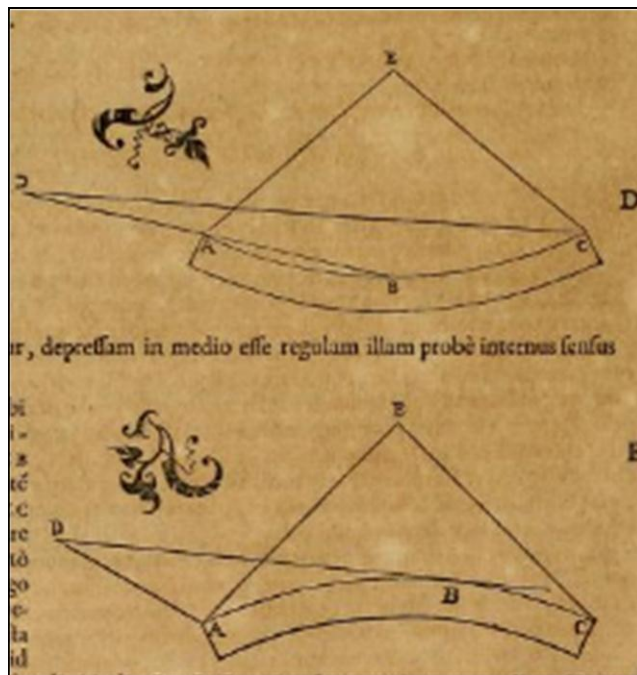
Na prática da astronomia, Clávio empregou dados que consistiam de observações feitas em horários e locais específicos com a ajuda de instrumentos. Assim, os fenômenos astronômicos claramente não eram todos conhecidos através da experiência comum, tal como no caso dos equinócios, que só poderiam ser construídos a partir de dados coletados ao longo tempo.

Os jesuítas também trabalharam em outra das ciências, que foi denominada como “matemáticas mistas” na classificação de Bacon (2007), a óptica. Dear (1995) salienta que a óptica era um componente curricular desses colégios, com uma tradição que incorporou os textos de Euclides, Ptolomeu (100-160) e Alhazen (965-1040).

Na segunda década do século XVII, duas obras abordando a óptica foram escritas por jesuítas buscando estabelecer propriedades da óptica tomando como base fundamentos aristotélicos. Ambas obras tiveram grande circulação na Europa naquele período, bem como eram utilizadas nas instituições educacionais dos jesuítas.

A primeira foi *Opticorum libri sex* de Franciscus Aguilonius (1567-1617) em 1613, entretanto, ele não deu sinais de ver problemas no uso de experiências especialmente construídas para serem utilizadas nas demonstrações científicas. Após coletar seus dados empiricamente, se utilizava da Geometria para descrever e validar seus resultados, como podemos ver no exemplo de uma propriedade de óptica em relação ao observador, mostrado na figura 3:

Figura 3: Demonstração de uma propriedade de óptica com uso da Geometria por Aguilonius



Fonte: Aguilonius (1613, p.166).

Aguilonius (1613) no prefácio de sua obra estima a união da matemática com a matéria “de modo algum revogar qualquer coisa da matemática (AGUILONIUS, 1613, p.10)”, ele também acrescenta ainda que “Nós, confiando em sua autoridade, assumimos o cultivo desta parte da matemática, que compreende ambos os gêneros, ou seja, o filosófico e matemático (AGUILONIUS, 1613, p.10)”, dessa forma, ele reforça que o seu livro é uma obra que pode ser útil tanto para os filósofos como para os matemáticos.

A segunda obra, foi a denominada *Oculus*, e foi escrita por Christopher Scheiner (1573-1650) em 1619, se mostrou mais preocupado com as implicações de tal admissão, como relatado por Dear (1995). Segundo o autor, Scheiner já deixa bem claro prefácio de sua obra que a óptica está totalmente subordinada a Geometria, além de considerar uma ciência que tem muitos elementos em comum com a Física, entretanto, não considera as linhas geométricas como uma linha física, indo na mesma ideia defendida por Aristóteles:

Óptica, verdadeira e propriamente denominada uma ciência, tem muita distinção e muito em comum com a física. Comum é o objeto e as coisas conhecidas de antemão. Para ambos, tanto a física quanto a óptica estão preocupadas com coisas visíveis ao órgão da visão; no entanto, em diferentes maneiras. Para geometria, como declara o filósofo, 1.2. Phys.t.20. [*Physics* 11.2], considera a linha física, mas não na medida em que é [linha física] da matéria: óptica, no entanto, realmente considera a linha matemática, mas não na medida em que é física. Ambos [óptica e física] investigam a verdade da mesma coisa, portanto, mas em maneiras diferentes (SCHEINER apud DEAR, 1995, p.54, tradução nossa).

Assim, é relatado que para Scheiner a experiência é considerada como sendo aquela repleta de tópicos de conhecimento empírico que vão compor uma generalização - uma experiência autenticada que pode atuar como um princípio. Dessa forma, Scheiner ao contrário de Aguilonius, se mostrou mais cuidadoso em definir sua concepção de experiência em sua obra, de modo que os leitores considerassem os experimentos possíveis de se fazer tanto com o olho ou com teorias envolvendo reflexão e refração, tornando assim essas teorias disponíveis como princípios para uso em demonstrações científicas apropriadas.

Essas experiências, na visão aristotélica, eram consideradas como artificiais, incapazes de representar o curso da natureza, e provavelmente devem ter sido responsáveis por impedir experiências matemáticas aplicadas à questões de ordem natural, mas como pudemos perceber, os matemáticos jesuítas tiveram de formular e tentar codificar a metodologia adotada em suas disciplinas de matemática e astronomia nas instituições educacionais jesuíticas, de modo que suas aulas estivessem genuinamente dentro da concepção aristotélica de experiência. Em relação as obras publicadas, tais como os trabalhos de óptica citados, tiveram de manter o cuidado de validar as teorias por meio de dados advindos da realização de observações e experimentos.

Embora essas obras e disciplinas, com tópicos que foram classificados como “matemáticas mistas” por Bacon em 1605, estivessem preocupadas com fenômenos físicos, só consideraram aspectos quantitativos: as causas físicas caem dentro do domínio da física, e fora da matemática. Dessa forma, a todo momento, era exigido um constante policiamento da fronteira disciplinar entre matemática e filosofia natural. Segundo Dear (1995), os matemáticos jesuítas mantiveram a integridade da estrutura metodológica das ciências matemáticas, enfatizando sempre que necessário, que certas questões estavam além do alcance do matemático. Logo, o prestígio da matemática para seus praticantes jesuítas, por conseguinte, baseou-se em grande medida na preservação da diferenciação acentuada da física, uma distinção filosófica que espelhava a disciplina e o currículo.

Aos poucos, as tradições da prática astronômica e óptica que exploravam maneiras particulares de gerar dados por meio de observações e experiências, e que no passado geraram problemas na forma de caracterizar e apresentar seus resultados nos colégios jesuíticos, estavam sendo superadas. Dear (1995) salienta que os matemáticos jesuítas no início do século XVII foram capazes de empregar técnicas para incorporar à experiências antes recônditas, tornando-as uma construção e representação do conhecimento em relação ao mundo natural. Essas normas de procedimento científico derivaram do modelo aristotélico – altamente empregado pelos filósofos naturais jesuítas – e foram iniciadas por Clávio na

tentativa de elevar o status das disciplinas matemáticas e seus praticantes no sistema acadêmico jesuíta.

Uma técnica que passou a ser utilizada com o propósito de aproximar essas ciências matemáticas da natureza com as definições de Aristóteles, como vimos brevemente ao relatarmos duas obras jesuítas abordando a óptica, foi a de utilizar a Geometria²¹ para descrever e demonstrar os fenômenos observados nas experiências de óptica e astronomia, por exemplo. Assim, as situações empíricas, mesmo que manipuladas por aparelhos especializados que exigiam habilidade de quem os utiliza, poderiam ser descritos segundo uma estrutura literária geométrica com o propósito de dar uma transparência aos procedimentos realizados. Então, por meio de construções geométricas, os resultados poderiam ser inevitavelmente gerados aos próprios olhos de quem formulasse ou fosse verificar a demonstração de uma dada teoria.

Essas situações, de acordo com Dear (1995) foram um passo inicial para a discussão de estabelecer novos princípios em relação às demonstrações científicas com a possibilidade de admitir um certo grau de flexibilidade, levando em consideração dados empíricos para que a explicação de uma determinada causa pudesse ser atribuída em meio a evidências aceitáveis e, dessa forma, os resultados seriam tratados como verdades. Logo, as portas para a aceitação de uma ciência matemática que tivesse fundamentos baseados nas questões da natureza começaram a ser abertas.

Durante o período do Iluminismo²², uma crescente rejeição na prática da distinção entre arte e natureza, conforme relatado por Dear (1995), implicou no ataque e na rejeição da filosofia natural aristotélica, entretanto, esse movimento teria sido pouco atraente para os jesuítas, dado que a base dessa companhia tinha os fundamentos do aristotelismo, dessa forma, para eles, a distinção entre arte e natureza não era algo a ser rejeitado, já que consideravam que foi uma divisão categórica legítima expressando o modo como as coisas eram feitas no estudo da natureza. Mas, no meio do século XVII um novo termo se estabeleceu nas obras dos escritores jesuítas e não-jesuítas em matemáticos que defendiam que ela poderia responder à questões físicas da natureza.

O surgimento gradual do termo "físico-matemática", segundo Dear (1995), não deve ser considerado como surpresa à luz do impulso, como os de vários matemáticos jesuítas e

²¹ As matemáticas puras eram vistas como dotadas de perfeição, desse modo, em termos da filosofia, seus resultados correspondiam com os propósitos de Deus.

²² O período do Iluminismo, segundo Hacking (2014), foi um período marcado por realizar diversos tipos classificações, fossem elas referentes aos diferentes tipos de minérios encontrados na natureza, quanto para as mais variadas doenças das quais se tinham conhecimento.

não-jesuítas da época, para a inversão prática da relação entre a matemática e a física. A ideia de que matemática e as ramificações das “matemáticas mistas” poderiam ser consideradas conhecimento científico causal dos corpos e fenômenos naturais, deixou de serem cada vez mais virtuais, ou seja, sem a mesma preocupação anterior em tomar certos cuidados de perpassar a visão aristotélica de discurso científico, e ocuparam um lugar proeminente nos escritos dos jesuítas no decorrer do século XVII.

As ciências “Físico-matemáticas” inevitavelmente se expandiram durante esse século e exploraram as relações simultâneas entre as questões físicas e matemáticas da matéria ou das causas naturais, logo, essas ciências também tiveram o papel de anular a divisão escolar e disciplinar padrão que existia entre física e matemática. Essa ciência defendia a matemática como uma ferramenta para a criação de conhecimento físico. Assim, Dear (1995) observa que a físico-matemática foi primordial para elevar o status das ciências matemáticas formando um par com a física sem que houvesse uma violação na divisão disciplinar entrincheirada e de longa data entre a matemática e a física.

Embora o significado histórico da expressão físico-matemática seja claro, quanto a origem desse termo, é dito como sendo obscuro por Dear (1995), entretanto, uma entrada no jornal do filósofo e matemático holândes Isaac Beeckman (1588-1637) em 1618, traz algumas indicações quanto à essa ciência. Moreno (2014), comenta que o matemático holândes e Descartes se encontraram no final de 1618 até meados de 1619, e nesses encontros, Descartes ficou impressionado com a abordagem de Beeckman (1939) ao tratar questões próprias da física e da filosofia natural, a partir de uma perspectiva matemática. Desse modo, percebe-se que Beeckman estendeu o alcance das ciências matemáticas misturadas ao território da física.

Beeckman (1939,1942) relata nesses encontros que Descartes apresentou a ele seu *Compendium Musicae*, em que ele lidou geometricamente com questões da harmônica com dados advindos desde tópicos da numerologia, como também lhe apresentou um tratado sobre a harmonia musical em que ele determinou a razão matemática da consonância di-tonal, aprofundando questões estudadas anteriormente por Gioseffo Zarlino (1517-1590) em *La Dimostrazioni Harmoniche* de 1558 e *Sopplementi musicali* de 1588.

Além disso, durante os primeiros meses de 1619, podemos ver pelos escritos de Beeckman (1939), que ele e Descartes abordaram os fenômenos da queda dos corpos e do paradoxo hidrostático de Simon Stevin (1548-1620). Moreno (2014) considera que o modo de abordagem desses dois problemas foram essenciais para fundamentação das ciências físico-matemáticas.

Vale a pena lembrarmos que Descartes foi educado em colégio jesuíta, e nesse encontro com Beeckman, ele tinha apenas 22 anos, então, apesar de ambos terem suas diferenças filosóficas, focaram no cálculo da velocidade de um corpo em queda livre e algumas propriedades de Hidrostática. Em relação ao primeiro problema, Moreno (2014) apresenta que Beeckman e Descartes postulam que:

Dependendo da força conferida pela atração natural da Terra em cada momento de sua descida, um corpo iria viajar em um segundo momento o dobro do espaço que atravessou em um primeiro momento e ambos consideram que o movimento de um corpo é composto indivisível da matemática (MORENO, 2014, p.151, tradução nossa).

Entretanto, apesar de terem pontos em comum, também apresentam alguns pontos diferentes. Moreno (2014) relata que Beeckman considera que a relação existente entre espaço e tempo como indivisivelmente composta de matemática, e a matéria sendo composta de átomos físicos nos termos da escola epicurista²³, enquanto Descartes considera essa relação na concepção de *continuum*²⁴ de Aristóteles. Resultando que quando Descartes considerou cada momento da descida de um corpo como indivisível da matemática, ele comparou a quantidade de movimento com a qual uma pedra desceu a cada momento do espaço já percorrido, isto é, a distância percorrida anteriormente. Beeckman, ao invés disso, comparou o espaço percorrido em um dado momento do corpo em queda livre, mesmo depois de tornar indivisível da quantidade cada momento do espaço que compõe a trajetória percorrida pelo corpo em movimento.

Assim, Beeckman relata esse diferente modo de pensar entre ele e Descartes:

Este Descartes foi educado com muitos jesuítas e outros estudiosos, pessoas e homens instruídos. Ele diz no entanto que ele nunca veio através de qualquer pessoa em qualquer lugar, além de mim, que usa com precisão desta forma de estudar que me agrada, com matemática ligada à física. Também nem eu contei a ninguém, para além dele, esse tipo de estudo (BEECKMAN, 1939, p.244, tradução nossa).

²³ Para Epicuro (341 a.C. – 270 a.C.) “todo o conhecimento tem como origem as sensações e impressões dos sentidos e todas as sensações são sempre verdadeiras. Por exemplo: um remo, se visto dentro da água, possui uma imagem retorcida, porém, se visto fora dela, possui aparência reta e plana. Neste caso, qual das sensações estaria correta? Para Epicuro, não há erro, apenas uma precipitação. O remo sempre aparentará ser retorcido, caso visto de dentro da água. Para esclarecer isto, o filósofo utilizou do termo “prolepsis”, que pode ser entendido como um resquício de percepção anterior, uma espécie de “arquivo de nossa memória.” Será a repetição das percepções que irão determinar qual a “verdadeira” forma do remo e construir o conhecimento dentro da ética epicurista (GUEDES, 2015, p.23)”.

²⁴ “No entanto, é impossível que o movimento venha a ser, ou deixe de ser (pois sempre existiu), assim como o tempo, pois não é possível haver algo anterior e algo posterior, se não há tempo. Ora, o movimento é contínuo do mesmo modo que o tempo, pois este é a mesma coisa, ou é certa afecção do movimento. Não é senão o movimento local que é contínuo, e, entre seus tipos, o movimento em círculo” (ARISTÓTELES, 2005, p.208).

Dear (1995) comenta que podemos deduzir que além de Beeckman, haviam poucos físicos-matemáticos. Porém, as próximas três décadas testemunharam o aparecimento de muitos mais. Até mesmo Descartes se envolveu em um estilo de filosofia natural semelhante ao de Beeckman, como podemos notar por meio de uma declaração publicada em seu Discurso do Método, em que podemos observar que Descartes relata sua mudança de enxergar as ciências matemáticas:

Comprazia-me sobretudo com as Matemáticas, por causa da certeza e da evidência de suas razões; mas não notava ainda seu verdadeiro emprego, e, pensando que serviam apenas às artes mecânicas, espantava-me de que, sendo seus fundamentos tão firmes e tão sólidos, não se tivesse edificado sobre eles nada de mais elevado (DESCARTES, 1979. p.6)

Descartes (1979) ainda considera “que as Matemáticas têm invenções bastante sutis, e que podem servir muito, tanto para contentar os curiosos, quanto para facilitar todas as artes e diminuir o trabalho dos homens (DESCARTES, 1979, p.5)”.

Dear (1995) relata que a partir da década de 1630, a expressão físico-matemática apareceu com mais frequência nas publicações de “matemáticas mistas” da época que envolviam temas em comum com a física, assim ele apresenta brevemente uma lista de autores e publicações desse período. Dentre essas publicações, ele cita que em 1631, Haraldo Vallerio ([?]-[?]) publicou *Dissertatio physico-mathematica de camera obscura*, um trabalho nos moldes dos estudos relacionados à óptica de Kepler. Na Suécia, o trabalho de Daniel Schwenter (1585-1636) foi aplicado a uma coleção de maravilhas abordando tópicos de magia natural, intitulada *Deliciae physico-mathematicae*. Ainda nesse mesmo ano de 1636, foi lançada a obra *Disputatio ordinaria continens controversias physico-mathematicas* que abordou tópicos discutindo a temática da gravidade como sendo uma tendência para o centro do universo, entre outros tópicos a partir dos trabalhos de Galileu Galilei.

Na década de 1640, Dear (1995) destaca que Marin Mersenne (1588-1648), foi um dos grandes nomes que propulsionou as ciências físico-matemáticas como uma forma de legitimar conhecimentos científicos. Em 1644, Mersenne publicou *Cogitata physico-mathematica*, obra em que ele discute assuntos como harmônica²⁵, pneumática, balística, hidráulica, navegação, técnicas para estabelecer pesos e medidas e mecânica do movimento, também tomando como base as publicações de Galileu e, como podemos denotar, outros físico-matemáticos da época.

Dear (1988) comenta que Mersenne também foi o responsável por levar a “matemática mista” como modelos para se entender a natureza, dado que por meio de sua formação jesuíta,

²⁵ Harmonic.

estava familiarizado com os textos de Clávio que continham uma série de propriedades que tentou denotar uma marca da superioridade da matemática sobre a física. Portanto, essa influência dos textos de Clávio, pode ter sido um dos motivos que levou Mersenne a considerar a “matemática mista” como um exemplar de uma nova filosofia natural carregada de uma aceitação generalizada e cada vez mais crescente de que a verdadeira matemática é capaz de combinar demonstrações matemáticas com causas naturais do assunto e mundo físico.

Em 1627, na publicação *Traité de l'harmonie universelle*, Mersenne publicou uma classificação dos tópicos de matemática contemplando tanto elementos do que foi definido por Bacon (2007) como “matemática pura” e “matemática mista”:

A geometria considera a quantidade contínua, pura e desprovida de matéria, e tudo o que cai sob os sentidos: A aritmética contempla a quantidade discreta, o saber dos números. A música considera os números harmônicos, ou seja, que são usados para sons. A cosmografia contempla a quantidade contínua do mundo. A Óptica é considerada unida aos raios de luz. A cronologia fala da quantidade contínua que é sucessivo para saber o tempo que se passou: e a Mecânica fala da quantidade, que é usada para Máquinas, instrumentos e tudo o que pertence aos nossos trabalhos. Alguns juntam-se à Astrologia Judiciária, mas esta parte não tem outras manifestações além daquelas emprestadas da Astronomia (que eu entendi sob a Cosmografia) e que ela leva a outras ciências (MERSENNE, 1627, p.5-6, tradução nossa).

Malet e Cozzoli (2010) por meio de uma listagem das obras de Mersenne, mostraram que ele abordou praticamente quase todos esses conhecimentos definidos como “matemática pura” e “matemática mista” em suas publicações. É relatado que primeiramente ele coletou vários tratados relacionados a Geometria e “matemática mista” nas duas edições de sua *Synopsys* (*Synopsys Mathematica* 1626 e *Universae geometriae synopsis* de 1644).

Mersenne ainda compôs vários tratados sobre música (o já citado *Traité de l'harmonie universelle* de 1627; *Questions harmoniques* em 1634; *Les preludes de l'harmonie universelle* 1634; *Harmonie universelle* em 1636 e *Harmonicorum libri XII* no ano de 1648) e óptica (*De Natura lucis* em 1623; *Opticae* de 1644; *L'Optique et la catoptrique* no ano de 1651). E por fim, mais tarde publicou *Cogitata physico-mathematica* em 1644, e *Novarum observationum physicomathematicarum tomus III* no ano de 1647, em que continuou a tratar os mesmos temas do *Cogitata*.

Conforme apontado por Dear (1995), o termo físico-matemática parecia ter se estabelecido em meados do século XVII e a aparição dessa expressão foi se tornando usual. Tal como Honoré Fabri (1608-1688), um matemático jesuíta, utiliza a expressão em um dos

apêndices de sua obra *Tractatus physicus de motu locali*, na parte “*Appendix prima physicomathematica, de centro percussione*” Fabri (1646, p. 420).

Fabri (1646) deixa claro em seu “*Appendix quarta de principio physico, rationis duplicata physica*” que tem a ambição de delinear um tipo de matemática abordando-a fisicamente, e que provavelmente não seria possível fazer essas relações algumas décadas atrás, claramente se referindo a visão da física aristotélica que não considerava a matemática como uma ciência capaz de responder questões de ordem natural e física. E para estabelecer essas relações “sobre o princípio físico da relação física duplicada: Isso inclui fenômenos como a queda corpos (a lei do tempo-quadrado), a ação dos sifões, a propagação de luz, a ação dos pêndulos e a relação da tensão das cordas musicais para determinar um tom (FABRI, 1646, p.443, tradução nossa)”.

Em relação aos jesuítas, outro matemático da ordem dos jesuítas também introduziu a expressão físico-matemática em suas obras, se trata de Giovanni Battista Riccioli (1598-1671) que definiu na obra *Almagestum novum* que a “Astronomia é uma ciência físico-matemática para determinar quantidades relativas aos corpos celestes e os seus acidentes sensíveis de determinação (RICCIOLI, 1651, p.2, tradução nossa)”, dessa forma, podemos ver que ele coloca a astronomia subordinada tanto a uma questão física, mas como também a matemática.

Ainda nessa mesma publicação, ele escreve que para abordar algumas propriedades de astronomia, irá abrir mão de todo aquele discurso científico defendido anteriormente, inclusive pelos jesuítas, para provar tópicos da “matemática mista”, ou seja, aplicações de aritmética e principalmente da geometria para validar suas demonstrações. Ele diz que “vamos proceder a partir das seguintes experiências, não por meio de conjecturas prováveis, mas de acordo com a infalível ciência físico-matemática, para certas conclusões (RICCIOLI, 1651, p.383, tradução nossa)”, ou seja, ele toma dados empíricos por meio das experiências para definir certas propriedades em relação aos corpos celestes, e o interessante de observarmos nessa citação também, é ver que Riccioli denota que as ciências físico-matemáticas tem um método científico infalível e certo.

Outro exemplo notável, de mais um jesuíta, que segundo Dear (1995) trouxe uma invasão da matemática na física sob o disfarce de ciências físico-matemáticas, apareceu em 1658 na publicação *Microcosmi physicomathematici*, escrito por Francesco Eschinardus (1???-1???) e tem como subtítulo “Em um claro e breve tratamento das partes mais importantes do céu, ar, água e terra; e seus acidentes particulares”²⁶. Em que, segundo Dear

²⁶ *In quo clare, & breviter tractantur praecipuae mundi partes, caelum, aer, aqua, terra; eorumque praecipua accidentia.*

(1995), Eschinardus apresenta uma forma disciplinar que promove uma interação entre a física e as várias ciências da “matemática mista”. Assim, ele então estrutura as disciplinas matemáticas (incluindo a geografia), sob títulos que normalmente se esperaria ver em tratados físicos.

Dear (1995) descreve que o trabalho como um todo é anunciado como tendo cinco partes, sendo que as quatro primeiras partes correspondem aos elementos mencionados no subtítulo de sua publicação: “Pois assim dividimos inteiramente os objetos da matemática, claramente a quantidade em contínua e discreta; e nós de fato dividimos o contínuo em quatro partes principais, os céus, ar, água e terra (ESCHINARDUS apud DEAR, 1995, p.176, tradução nossa)”, enquanto que a quinta parte é denominada como “*De numeris*”. Deste modo, Dear (1995) concluiu que esse livro é uma espécie de levantamento cosmográfico elaborado com uma coleção de material para ser utilizado como instrumentações matemáticas.

O trabalho póstumo do jesuíta Francisco Maria Grimaldi (1618-1663) intitulado “*Physico-mathesis de lumine, coloribus, et iride*” de 1665, como podemos ver, também traz a expressão físico-matemática no título, além disso, essa obra tem uma grande importância, porque pela primeira vez é formulada uma explicação de um fenômeno físico estudado em óptica, a difração da luz. Já no início de sua publicação ele afirma que “a luz é propagada ou difundida não apenas diretamente, refrativamente, e reflexivamente, mas também por outra certa quarta maneira, DIFRACTIVAMENTE (GRIMALDI, 1665, p.1, tradução nossa)”. Nessa obra, Grimaldi (1665) faz uso da óptica geométrica – forma padrão de abordar e demonstrar propriedades desse campo da “matemática mista” – para apresentar e abordar os seus tratados em relação a óptica.

Além disso, em relação aos seus experimentos, Grimaldi afirma que seus resultados “realmente tem sido manifestamente estabelecido pelo experimento repetido com muita frequência (GRIMALDI, 1665, p.9, tradução nossa)”, logo, podemos perceber que ele tem uma grande preocupação em deixar bem claro que as experiências foram repetidas por inúmeras vezes, comungando das mesmas ideias de Galileu Galilei, para garantir veracidade dos seus resultados dados que foram coletados empiricamente.

Como pudemos observar, as ciências físico-matemáticas estavam sendo consideravelmente utilizadas a partir da terceira década do século XVII. Dear (1995) nos fornece a informação de que na década de 1660, Isaac Barrow (1630-1677) dá um significado bastante útil para a expressão físico-matemática como introdução de suas *Mathematical Lectures*. Barrow faz a distinção usual entre “matemática pura” e “matemática mista”, porém, em relação às “mistas” ele acrescenta que ela é referente aos acidentes físicos ao invés da

natureza da quantidade em si, e que algumas pessoas então, chamam como uma de suas subdivisões as físico-matemáticas.

Dear (1995) também comenta que Barrow em discursos, insistentemente defendia que a física e a matemática são estritamente inseparáveis, de modo que toda física implica quantidade, conseqüentemente, faz uso da matemática. Dear (1995) nos aponta ainda que essa posição de Barrow se assemelha aos mesmos princípios matemáticos da filosofia natural de Isaac Newton (1643-1627).

Poderíamos continuar listando outras obras que ampliaram a ideia da “matemática mista” nas ciências físico-matemáticas, mas, acreditamos que os exemplos anteriores sejam suficientes para se ter uma ideia que essa expressão se popularizou nas mais diversas publicações com objetos matemáticos no campo das “matemáticas mistas” no decorrer do século XVII, dessa forma, nos mostrando uma direção no que concerne aos argumentos sobre o potencial da utilização que as “matemáticas mistas” haviam tomado em relação às décadas anteriores.

É importante observarmos que mesmo com uma certa resistência, dado que na visão aristotélica a matemática não é considerada uma ciência capaz de responder as causas naturais do mundo físico, vimos que principalmente a partir da segunda década do século XVII houve um avanço da abordagem das “matemáticas mistas” pelos matemáticos jesuítas por meio de suas publicações, e conseqüentemente podemos conjecturar que deve ter mudado o modo de se trabalhar a matemática nas instituições jesuíticas, do mesmo modo que Clávio vinha tentando introduzir no início do século.

Esse avanço parece ter se constituído a partir do momento que os tópicos de “matemática mista”, tais como a astronomia e a óptica foram atreladas às ciências físico-matemáticas. Dessa forma, aparentava-se que ambas as ciências, física e matemática, estavam em uma mesma situação de paridade em relação ao modo de tratar e explorar fenômenos que têm as suas propriedades bem como os seus resultados enraizados nas causas naturais do mundo físico.

Contudo, considerando esse cenário apresentado principalmente por Dear (1995), nos passou uma impressão de que essas matemáticas aplicadas à natureza, ou ainda, como Bacon (2007) classificou, as “matemáticas mistas”, parece que somente conseguiram desenvolver seus tópicos após quebrarem o interdito da visão de mundo aristotélico, e ao menos num primeiro momento, tiveram como princípio serem mascaradas por meio da criação de uma nova ciência que foi denominada como ciências físico-matemáticas para que assim o tratamento matemático pudesse ser aferido e utilizado para abordar questões diretamente

ligadas ao mundo físico, assim perpassando as questões ideológicas ligadas a filosofia escolástica adotada na Europa daquela época.

No livro *História da Matemática* de Montucla (1758), a “matemática mista” está definida com os mesmos propósitos da classificação de Bacon e D'Alembert, assim, ele denota, por exemplo, que um matemático que faz pesquisa em óptica não é capaz de estudar a natureza da luz, mas somente as consequências geométricas das leis de reflexão e refração. Lützen (2013) comenta que essa mesma visão de Montucla esteve presente em sua obra póstuma da *História da Matemática*, dividido em quatro volumes e lançado entre os anos de 1799 e 1802.

Essa impressão que tivemos, parece ter sido corroborada pelos estudos de Schuster (2012). Ele comenta que a “matemática mista” era originalmente considerada uma ciência subordinada à ciência da filosofia natural, que na visão de mundo aristotélico, a filosofia natural lidava com a matéria e causas, portanto, esses assuntos estavam fora do campo da “matemática mista” por conta dessa barreira filosófica. Schuster (2012) comenta que tal visão inibidora do que a matemática poderia fazer pelo estudo da natureza foi negada por Descartes, que cunhou o conceito de ciências físico-matemáticas para investigações matemáticas de causas físicas. Essa distinção entre “matemática mista” e as ciências físico-matemática ficou evidente na nova classificação do conhecimento em relação à matemática de D'Alembert, na *Encyclopédie*.

Deste modo, podemos discorrer sobre a possibilidade da matemática ter sido influenciada pelos contextos históricos/filosóficos em que ela esteve inserida. Condições históricas favoreceram o desenvolvimento de determinadas teorias, enquanto que outras condições em novos ambientes proporcionariam o desenvolvimento de teorias por vezes distintas daquelas criadas em períodos anteriores. Portanto, compreendemos que a matemática assim como a ciência, passou por alterações em suas estruturas e formulações, muitas vezes estimulada pelo contexto histórico que pode ter influenciado a necessidade de mudanças na concepção ou até mesmo no avanço de um determinado conhecimento matemático.

No próximo capítulo continuaremos abordar as “matemáticas mistas” e as ciências físico-matemáticas. Iremos apresentar uma nova classificação das ciências do conhecimento humano que foram introduzidas na *Encyclopédie*, a partir de 1751. Entretanto, focaremos apenas nas ciências matemáticas. Dessa forma, será possível ter uma ideia de como essas ciências foram estabelecidas no século XVIII, após perpassarem a barreira da visão aristotélica em relação às matemáticas defendida pelo escolasticismo, mas que foram superadas no período do Iluminismo.

CAPÍTULO 2

ENCYCLOPÉDIE E A CLASSIFICAÇÃO DA MATEMÁTICA DE D'ALEMBERT

O conceito de “matemática mista” continuou a ocupar uma posição central na classificação de matemática por muito tempo, porém, várias definições adotadas por estudiosos após Bacon eram quase todos meramente no sentido de “matemática na natureza”, que não levava em consideração sua posição em conhecimentos com base em aspectos filosóficos. Depois de Francis Bacon, Brown (1991) comenta que o primeiro intelectual significativo que usou o termo “Matemática Mista” foi o geômetra e filósofo Jean D'Alembert (1717-1783).

Uma vez que o termo “matemática mista” aparentemente teve suas raízes nos escritos de Francis Bacon, seu próprio domínio deve cair no domínio da filosofia natural, de modo que seria responsabilidade do filósofo dar uma definição razoável do termo. Entretanto, os matemáticos estavam preocupados em fazer matemática e os filósofos, analisando sua importância para a sociedade, dessa forma, quem melhor para escrever referente ao tema “matemática mista” do que a combinação de “matemático” e um “filósofo” numa mesma pessoa?

Ao final do Discurso Preliminar, após apresentar sua nova classificação do conhecimento, D'Alembert traz um breve sinopse da classificação do conhecimento realizada por Bacon. Ele assume em diversos momentos do texto que parte das ideias propostas anteriormente por Francis Bacon, serviram de base para formular com Denis Diderot (1713-1784) sua nova classificação, tais como: “Reconhecemos, em várias passagens do *Prospecto*, que o *principal débito* de nossa árvore enciclopédica era para com Lorde Bacon (D'ALEMBERT, 2015a, p.281)” e “Declaramos aqui que devemos sobretudo a Lorde Bacon a árvore enciclopédica de que já falamos detalhadamente e que será encontrada no final deste discurso (D'ALEMBERT, 2015a, p.163)”.

D'Alembert afirma que mesmo tomando as ideias de Bacon como base, jamais deveria ser acusado de plágio em virtude de admitir a fonte primária da nova classificação: “Assim,

após uma confissão tão explícita, não é lícito nos acusar de plágio nem lançar tal suspeita sobre nós (D'ALEMBERT, 2015a, p.281)”.

Entretanto, não é porque D'Alembert assume que utilizou as ideias de Bacon como base para sua nova classificação do conhecimento humano, que significa que ele concorde com o que fora publicado pelo filósofo. Nesse caso, o que ocorre é exatamente o contrário. D'Alembert em determinado momento faz uma crítica aos filósofos e teólogos do passado por conta de deixarem a religião influenciar demais as suas crenças e contribuições filosóficas, alegando que mesmo Bacon deveria ter quebrado as correntes que o impediam de lançar sua visão além do que propôs em suas obras, mas ainda assim, D'Alembert destaca que “à frente desses ilustres personagens deve ser colocado o imortal chanceler da Inglaterra, Lorde *Francis Bacon*, cujas obras, tão justamente estimadas, embora mais estimadas do que conhecidas, merecem mais serem lidas do que elogiadas (D'ALEMBERT, 2015a, p.161)”.

Como podemos observar, D'Alembert foi muito crítico em relação ao que os antepassados e Bacon deixaram como legado relacionados a classificação do conhecimento humano. No caso de Francis Bacon, D'Alembert admite que realizou várias modificações em relação as ideias elaboradas por Bacon, principalmente “por ser o plano de Bacon diferente do nosso, e por terem as ciências realizado desde então grandes progressos, não deve surpreender que tenhamos tomado, algumas vezes, um caminho diferente (D'ALEMBERT, 2015a, p.165)”, e nesses caminhos, tomando as próprias palavras de D'Alembert, só cruzaram em maior sintonia a respeito de um assunto: “Vê-se que o verbete *Lógica* é aquele em que mais o seguimos; mesmo assim, pensamos que seria necessário introduzir várias modificações (D'ALEMBERT, 2015a, p.287)”.

Em relação a matemática, “além das modificações introduzidas na ordem da divisão geral, e cujas razões já expusemos, em certos pontos levamos mais longe as divisões, sobretudo quanto à parte que se refere à Matemática e à Física em particular (D'ALEMBERT, 2015a, p.165)”. Ou seja, veremos que D'Alembert mantém em sua árvore do conhecimento a “matemática pura” e a “matemática mista”, entretanto, principalmente no segundo tópico, termos antes elencados por Bacon deixam de ser classificados como parte da “matemática mista” ganhando ramificações próprias ou sendo incorporadas a outros conhecimentos.

Além de Francis Bacon, D'Alembert assume outro personagem relevante que o inspirou para fomentar as suas ideias ao formular essa nova classificação do conhecimento humano – René Descartes (1596-1650). Ele considera Descartes como um homem corajoso, que não poupou de escrever suas inquietações e por conta de desconfiar de suas próprias luzes ao conhecimento, ousou a dar passos em direção à verdade, e devido a isso foi perseguido por

justamente tentar trazer a verdade aos homens, sendo acusado de negar a existência de Deus enquanto tentava usar sua sagacidade para prová-la, dessa forma, angariando alguns entusiastas e muitos inimigos pela coragem em combater preconceitos que eram comumente aceitos em sua época:

Podemos considerá-lo como um chefe de conjurados, que teve a coragem de ser o primeiro a levantar-se contra um poder despótico e arbitrário, e que, ao preparar uma revolução brilhante, deitou os alicerces de um governo mais justo e mais feliz, que não pôde ver estabelecido. Se acabou por julgar que havia explicado tudo, pelo menos começou por duvidar de tudo, e as armas de que nos servimos para combatê-lo não lhe pertencem menos por as voltarmos contra ele. Aliás, quando as opiniões absurdas são inveteradas, somos às vezes forçados, para não mais enganar o gênero humano, a substituí-las por outros erros, quando não se pode fazer coisa melhor (D'ALEMBERT, 2015a, p.169).

Além dessa característica em relação a não inquietação de Descartes ao promover suas ideias, uma obra em específico é notada como de grande admiração por parte dos feitos de Descartes: o Discurso do Método. Sendo este apontado por D'Alembert como uma grande glória alcançada por Descartes, tendo em vista que posteriormente seu discurso foi aplicado consideravelmente nas investigações científicas de outros cientistas. Entretanto, D'Alembert considera que Descartes obteve mais êxito em suas contribuições matemáticas do que em suas contribuições filosóficas, principalmente nos resultados que consistiam de aplicar a Álgebra na Geometria:

Mas o que imortalizou sobretudo o nome desse grande homem foi a aplicação da Álgebra à Geometria, ideia das mais vastas e das mais felizes que o espírito humano já teve, e que será para sempre a chave das mais profundas pesquisas, não apenas na Geometria sublime como em todas as ciências físico-matemáticas. Como filósofo, teve talvez a mesma grandeza, mas não foi tão afortunado (D'ALEMBERT, 2015a, p.167).

Além da ênfase da aplicação algébrica à Geometria, D'Alembert destaca que a Dióptrica de Descartes é a maior e mais bela aplicação já feita da Geometria à Física, e que apesar de todo esforço dispensado por outros físicos nas observações astronômicas com o propósito de desmenti-lo, essas eram imperfeitas ou restavam comprovar melhor seus resultados e foram insuficientes para impedir que a singular explicação da gravitação dos corpos pela força centrífuga do próprio turbilhão fosse considerada como uma das explicações da gravidade “mais belas e mais engenhosas hipóteses que a Filosofia já imaginou (D'ALEMBERT, 2015a, p.169)”.

Apesar de ter se enganado em alguns de seus resultados em relação as leis do movimento, para D'Alembert, Descartes deve ser creditado como responsável da criação de uma Física completamente nova, pois, mesmo com seus resultados²⁷ terem sido derrubados posteriormente por conta dos físicos realizarem novas experiências, Descartes foi o primeiro a caminhar na direção que essas leis de movimento deveriam existir.

Em seu Discurso Preliminar, D'Alembert destaca ainda outros nomes como fonte de inspiração para a elaboração de uma nova classificação do conhecimento humano – Isaac Newton (1643-1727), John Locke (1632-1704), Robert Boyle (1627-1691) e Nicolas Malebranche (1638-1715) – considerando que as ideias desses estudiosos se complementaram no sentido de um responder a atos que foram negligenciados em seus trabalhos. Por exemplo, em relação ao conceito de Metafísica, D'Alembert considera que:

Newton não chegou a negligenciá-la por completo. Era um filósofo demasiadamente grande para não sentir que ela é a base de nossos conhecimentos, e que somente nela é preciso procurar pelas noções precisas e exatas de tudo. Parece mesmo, tendo em vista as obras desse profundo geômetra, que chegara a adquirir tais noções sobre os principais objetos de que se ocupara. Contudo, seja porque estivesse pouco satisfeito com os progressos que ele mesmo realizara em outros pontos na Metafísica, seja porque acreditasse ser difícil propiciar ao gênero humano luzes muito satisfatórias ou extensas sobre uma ciência frequentemente incerta e controvertida, seja enfim porque temesse que, à sombra de sua autoridade, se abusasse de sua Metafísica como se abusara da de Descartes para defender opiniões perigosas ou erradas, absteve-se quase totalmente de falar a respeito dela em seus escritos mais conhecidos, e mal se pode apreender o que pensava sobre os diferentes objetos dessa ciência, a não ser nas obras de seus discípulos (D'ALEMBERT, 2015a, p.177).

Como pudemos observar por meio dessa citação, D'Alembert apresenta uma crítica em relação a pouca profundidade ao explorar o conceito de metafísica pelo grande filósofo e matemático Newton, entretanto, para suprir essa necessidade em relação a esse conceito, ele complementou com as ideias de John Locke, destacando que “o que Newton não ousara ou talvez não tivesse podido fazer, *Locke* empreendeu e executou com êxito. Pode-se dizer que ele criou a Metafísica mais ou menos como Newton criara a Física (D'ALEMBERT, 2015a, p.177)”.

D'Alembert acredita que Newton “viu que era tempo de banir da Física as conjecturas e as hipóteses vagas, ou pelo menos de tomá-las apenas pelo que valiam, e que essa ciência deveria ser submetida unicamente aos experimentos e à Geometria (D'ALEMBERT, 2015a, p.173)”, podendo essa ser uma explicação pelo não aprofundamento de Newton não ter

²⁷ Newton provou que os turbilhões de Descartes não podiam explicar o movimento dos planetas, visto que os fenômenos e as leis da Mecânica uniam-se para derrubá-lo por conta da existência de uma força pela qual os planetas tendem uns para os outros.

explorado conceitos e questões metafísicas. E talvez, por conta desse pensamento, D'Alembert, acredita ser o motivo que tenha propulsionado Newton a inventar o cálculo infinitesimal e o método das progressões, que possui uma variedade de aplicações tanto na Geometria quanto para determinar diversos fenômenos que podem ser observados na natureza.

Enfim, sem mais delongas, após um breve panorama de quais foram os protagonistas e grandes inspiradores das ideias que foram herdadas por D'Alembert, vamos tratar da classificação do conhecimento, mais especificamente ao que nos interessa, que é a nova classificação matemática publicada no texto de abertura da *Encyclopédie* (1751), juntamente ao lado de Diderot, cumprindo assim com um dos objetivos dessa tese no que consiste apresentar como foi realizada a classificação matemática de D'Alembert, mais especificamente o que ele definiu como “matemática mista”.

2.1 D'ALEMBERT E A ENCYCLOPÉDIE

De acordo com Diderot e D'Alembert (2015a), a *Encyclopédie* foi publicada originalmente entre os anos de 1751 e 1765, divididas em 17 volumes. D'Alembert e Denis Diderot foram os editores da publicação até meados de 1759, sendo que a partir daquele ano, Diderot passou a ser auxiliado na edição por Louis de Jacourt (1704-1779) e Paul-Henry Thiry, o Barão D'Holbach (1723-1789).

A *Encyclopédie* contou com a participação de grandes filósofos da época para realizar a classificação do conhecimento, totalizando aproximadamente 140 colaboradores, e, podemos destacar, além dos já citados, os seguintes nomes: François-Marie Arouet, conhecido pelo pseudônimo Voltaire (1694-1778), Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), Anne Robert Jacques Turgot (1727-1781), Louis Daubenton (1716-1800), Cesar Chesneau Dumarsais (1676-1756), Jean-François Marmontel (1723-1799), Charles-Louis de Secondat, mais conhecido como Montesquieu (1689-1755) e outros filósofos da época. Dessa forma, os editores da *Encyclopédie*, Diderot e D'Alembert, advertiram aos leitores que os verbetes enciclopédicos foram organizados por diversos autores:

Enciclopédia que ora apresentamos ao público é obra de uma sociedade de letrados (...) Se não estivéssemos entre eles, poderíamos afirmar com segurança que têm todos boa reputação ou são dignos de tê-la. Mas, sem querer antecipar um julgamento que somente aos sábios cabe proferir, é pelo menos nosso dever afastar, antes de tudo, a objeção que tende a ser mais prejudicial para o êxito de um

empreendimento de envergadura como este. Declaramos que de modo algum cometeríamos a temeridade de nos encarregar sozinhos de um peso muito superior às nossas forças, e que nossa função de editores consiste principalmente em organizar materiais cuja parte mais considerável recebemos de outros (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015a, p.43).

No *Discours Préliminaire*, D'Alembert alerta que escreveu ou revisou todos os verbetes relacionados a Matemática e Física publicados na *Encyclopédie*, além disso, como editor da publicação, ele comenta que foi necessário suprir alguns verbetes, em pequeno número, para ser incorporados a outras partes da obra, mas complementa que embora o seu trabalho na obra seja considerável, ele pondera que fez menos do que Diderot. D'Alembert (2015a) enaltece o trabalho de Diderot com as seguintes palavras:

É ele o autor, nesta *Encyclopédie*, da parte mais extensa, mais importante, mais ansiada pelo público, e, se ousar dizer, mais difícil de ser realizada: a descrição das artes. O Sr. Diderot realizou-a a partir das memórias que lhe foram fornecidas por operários ou amadores, cujos nomes ler-se-ão em breve, ou a partir de conhecimentos que obteve ele mesmo dos operários, ou ainda, por fim, a partir dos ofícios que se deu ao trabalho de testemunhar e dos quais chegou mesmo a encomendar modelos, para estudá-los mais à vontade. A essa tarefa, que é imensa, e que ele realizou com muito cuidado, acrescenta-se outra, não menos enorme, e que consiste em suprir, nas diferentes partes da *Encyclopédie*, um número prodigioso de verbetes que faltavam. Entregou-se a essa tarefa com um desinteresse que honra as letras e com um zelo digno da gratidão de todos os que as amam ou as cultivam, em particular as pessoas que concorreram para o trabalho da *Encyclopédie*. Ver-se-á, por este volume, o considerável número de verbetes que a obra lhe deve (D'ALEMBERT, 2015a, p. 257).

Para D'Alembert²⁸ (2015a), o filósofo era um homem literário que exercia a responsabilidade pública e cuja função era criticar, analisar e redefinir normas intelectuais e práticas institucionais. Para atingir esses objetivos, o filósofo procura "verdades científicas" e busca a cadeia adequada de raciocínios dedutivos que acostumam os homens, pouco a pouco, a se fundamentarem.

Em relação aos conhecimentos humanos, os filósofos operaram e especularam, tendo em vista identificar pontos que os separavam ou os uniam, e até mesmo procurar os caminhos mais obscuros e secretos para encontrar possíveis interconexões entre esses conhecimentos. Sendo assim, ele fez uma analogia da classificação do conhecimento humano com o mapa-múndi:

²⁸ Quando me referir somente a D'Alembert (2015a), trata-se da referência bibliográfica *Discours Préliminaire* publicada em 1751 que foi traduzida e inserida na publicação Diderot e D'Alembert (2015a). O "Discurso Preliminar" foi escrito por D'Alembert e é o texto de abertura da *Encyclopédie*.

É uma espécie de mapa-múndi, que deve mostrar os principais países, sua posição e sua dependência mútua, o caminho em linha reta entre um e outro, frequentemente entrecortado por mil obstáculos que, em cada país, só podem ser conhecidos pelos habitantes ou pelos viajantes, e que só os mapas mais detalhados poderiam indicar. Tais mapas particulares são os diferentes verbetes de nossa *Enciclopédia*; a árvore, ou seu sistema figurado, é o seu mapa-múndi (D'ALEMBERT, 2015a, p.115).

D'Alembert (2015a) estava convencido de que o homem conhecia apenas alguns conjuntos de relações que se juntaram a essa gigantesca cadeia de conhecimentos. De acordo com D'Alembert, havia quatro grandes seções na história do pensamento: conhecimento, opiniões, disputas e erros. A história das disputas envolveu abusos de palavras e o uso de noções vagas. De acordo com o filósofo-matemático, o avanço das ciências foi retardado por essas questões de nome e o uso de termos vagos, indicando que as divisões seguiram o mais próximo possível de uma ordem genealógica e enciclopédica dos conhecimentos:

O Universo é um vasto oceano, em cuja superfície percebemos algumas ilhas, maiores ou menores, cuja ligação com o continente é indiscernível para nós. Poder-se-ia formar a árvore de nossos conhecimentos dividindo-os em naturais ou revelados, em úteis ou agradáveis, em especulativos ou práticos, em evidentes, certos, prováveis ou sensíveis, em conhecimentos das coisas e conhecimentos dos signos, e assim por diante, ao infinito. Escolhemos uma divisão que nos pareceu satisfazer, ao mesmo tempo e o mais possível, à ordem enciclopédica de nossos conhecimentos e à sua ordem genealógica (D'ALEMBERT, 2015a, p.119).

Dessa forma, D'Alembert (2015a) conclui que a história dos erros, por outro lado, ensinou aos homens letrados a desconfiarem de si mesmo e dos outros. O filósofo deve usar uma dosagem saudável de "dúvida metódica" na análise de reivindicações de outros.

De acordo com D'Alembert (2015a) a memória, a razão propriamente dita e a imaginação são as três diferentes maneiras pelas quais nossa alma opera sobre os objetos de seus pensamentos. Ele considera que essas três faculdades formam “três objetos gerais dos conhecimentos humanos: a História, que se refere à memória; a Filosofia, que é o fruto da razão; e as belas-artes, que a imaginação dá à luz” (D'ALEMBERT, 2015a, p.122). Entretanto, ele pondera que não considera a imaginação como a capacidade que os seres humanos possuem de representar objetos, pois, ele considera essa aptidão como parte da própria memória dos objetos sensíveis, então, a imaginação é tomada num sentido de “criação” e “imitação”.

Para D'Alembert (2015a), a imaginação é uma faculdade humana com capacidade de criar, e o espírito, antes de pensar em criar, inicia um processo de raciocínio em relação ao que se vê e o que é conhecido, ou seja, “o espírito só cria e imagina objetos enquanto forem semelhantes aos que ele conheceu através das ideias diretas e das sensações; mais ele se afasta

desses objetos, mais os seres que forma são bizarros e pouco agradáveis” (D’ALEMBERT, 2015a, p.122-123).

D’Alembert (2015a) considera que a faculdade da razão em suas operações sucessivas, deve preceder a imaginação na ordem de nossas faculdades, visto que a razão, através das últimas operações é a competência que realiza ação nos objetos, e que de alguma maneira, conduz à imaginação, na medida em que tais operações consistem apenas em criar e que além disso, a própria invenção está sujeita a regras, e são essas regras que formam a parte filosófica. Para exemplificar essa questão, ele cita que a Geometria e a Metafísica “são, de todas as ciências que pertencem à razão, aquelas em que a imaginação tem a maior parte” (D’ALEMBERT, 2015a, p.123).

D’Alembert, ao exemplificar que a razão precede a imaginação, faz uma crítica aos que atribuem uma grande importância à Geometria de forma a menosprezar outras atividades. Para ele, todas tem sua importância, atuam sobre as mesmas faculdades do conhecimento humano, tendo como diferença apenas o modo de operar seus objetos:

A imaginação, num geômetra que cria, não é menos atuante que num poeta que inventa. É verdade que operam diferentemente sobre seu objeto: o primeiro despoja-o e o analisa, o segundo o compõe e o embeleza. É verdade também que essas maneiras diferentes de operar só existem em diferentes tipos de espíritos, e é por isso que os talentos do grande geômetra e do grande poeta talvez nunca se encontrem juntos. Mas, excluam-se ou não reciprocamente, não têm o direito de se desprezar um ao outro. De todos os grandes homens da Antiguidade, Arquimedes é talvez o que mais mereça ser posto ao lado de Homero. Espero que se perdoe essa digressão a um geômetra que ama sua arte, mas que de forma alguma poderá ser acusado de admirá-la extravagantemente (D’ALEMBERT, 2015a, p.123).

Posteriormente a essa crítica, D’Alembert (2015a) define os principais objetos da memória são refletir e raciocinar. E ainda classifica que:

Tanto os seres espirituais quanto os materiais, sobre os quais ela se exerce, têm algumas propriedades gerais, como a existência, a possibilidade, a duração, e o exame dessas propriedades forma, em primeiro lugar, o ramo da Filosofia, do qual todos os outros extraem em parte seus princípios; chama-se Ontologia ou Ciência do Ser ou Metafísica Geral (D’ALEMBERT, 2015a, p.125).

A *Encyclopédie* tem como principal objetivo fazer a classificação dos conhecimentos humanos, e como vimos, os editores da obra, a princípio Diderot e D’Alembert, classificaram esses conhecimentos de acordo com três faculdades dos seres humanos: a memória, a razão e a imaginação. D’Alembert (2015a) comenta que o propósito dessa publicação é fornecer ao leitor uma explicação das coisas que compõem esses conhecimentos por meio dos verbetes que irão compor o corpo da *Encyclopédie*:

neste *Dicionário*, têm a particularidade de servir sobretudo para indicar a ligação das matérias, enquanto nas outras obras do gênero elas são apenas destinadas a explicar um verbete por um outro. Frequentemente, até omitimos a remissão, pois os termos de arte ou de ciência sobre os quais ela poderia recair encontram--se explicados em seu verbete, que o leitor irá procurar por si mesmo. Foi sobretudo nos verbetes gerais das ciências que se procurou explicar o auxílio mútuo que se prestam. Assim, três coisas formam a ordem enciclopédica: o nome da ciência à qual pertence o verbete; a posição dessa ciência na árvore; a ligação do verbete com outros na mesma ciência ou numa ciência diferente, ligação indicada pelas remissões ou fácil de notar, tendo em vista os termos técnicos explicados segundo sua ordem alfabética. Não se trata aqui das razões que nos levaram a privilegiar nesta obra a ordem alfabética em detrimento de qualquer outra; serão expostas posteriormente, quando considerarmos esta coleção como *Dicionário das ciências e das artes* (D'ALEMBERT, 2015a, p.133).

2.2 DISCOURS PRÉLIMINAIRE E A CLASSIFICAÇÃO DA MATEMÁTICA DE D'ALEMBERT

Em junho de 1751, D'Alembert publica seu *Discours Préliminaire*, ou Discurso Preliminar, em português, como texto inicial da *Encyclopédie* editada por Diderot e pelo próprio D'Alembert. Em seu parágrafo de abertura, D'Alembert deixa bem claro o propósito desse discurso:

Esta abertura é, portanto, destinada exclusivamente aos nossos leitores que não julgarem conveniente ir mais longe. Aos demais, devemos uma explicação muito mais extensa sobre a execução da Enciclopédia. Eles a encontrarão na continuação deste discurso, com os nomes de cada um de nossos colegas. Mas essa explicação, tão importante por sua natureza e por sua matéria, deve ser precedida de algumas reflexões filosóficas. A obra cujo primeiro volume publicamos hoje tem dois objetivos. Como Enciclopédia, deve expor, tanto quanto possível, a ordem e o encadeamento dos conhecimentos humanos; como Dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios, deve conter, sobre cada ciência e cada arte, seja liberal, seja mecânica, os princípios gerais em que se baseia e os detalhes mais essenciais que formam o seu corpo e substância. Esses dois pontos de vista, de Enciclopédia e de Dicionário razoado, formarão, portanto, o plano e a divisão de nosso Discurso preliminar. Iremos considerá-los, acompanhá-los em sua sucessão, e relatar os meios pelos quais procuramos satisfazer esse duplo objetivo (D'ALEMBERT, 2015a, p.44).

O filósofo-matemático afirma que todos os nossos conhecimentos podem ser divididos em diretos ou refletidos. Conhecimentos diretos são “os que recebemos imediatamente, sem nenhuma operação de nossa vontade, e que, encontrando abertas, se pudermos falar assim, todas as portas de nossa alma, nela entram sem resistência e sem esforço (D'ALEMBERT,

2015a, p.47)” e os conhecimentos refletidos “são os que o espírito adquire operando os conhecimentos diretos, unindo-os e combinando-os (D’ALEMBERT, 2015a, p.49)”.

D’Alembert (2015a) conclui que é por meio das sensações humanas que devemos todas as nossas ideias, pois, de acordo com sua definição dos conhecimentos diretos, esses conhecimentos reduzem-se aos que recebemos pelos sentidos, portanto, a primeira coisa que aprendemos com nossas sensações, é algo inseparável delas, a nossa existência. Dessa forma, é possível ultimar que nossas primeiras ideias refletidas devem recair sobre nós mesmos. O segundo conhecimento que aprendemos devido às nossas sensações é a existência dos objetos externos, dentre os quais nosso próprio corpo deve estar incluído.

Considerando todos os objetos que nos afetam por meio de sua presença, D’Alembert (2015a) acredita que devido nosso próprio corpo nos pertencer mais intimamente, é aquele cuja existência mais nos impressiona. Entretanto, nós seres humanos mal sentimos a existência de nosso corpo, mas ao mesmo tempo, percebemos a atenção que ele exige de nós, para afastar os perigos que o rodeiam à ação dos corpos exteriores. Sem tomar os cuidados necessários com nosso corpo, ele seria logo destruído se não nos preocupássemos com a sua conservação. É importante deixar claro que D’Alembert não considera que todos os corpos exteriores façam o ser humano experimentar sensações desagradáveis, “alguns parecem compensar-nos pelo prazer que sua ação nos causa (D’ALEMBERT, 2015a, p.53).

A necessidade de proteger o nosso corpo da dor e da destruição nos obriga a examinar dentre os objetos exteriores, os quais podem ser úteis para nós ou os quais são prejudiciais ao nosso corpo, dessa forma, procuramos entrar em contato com alguns objetos que nos trazem sensações boas e evitar os objetos externos que nos façam algum mal. Assim sendo, D’Alembert considera que essa nossa preocupação com o corpo pode ter sido a principal resposta para o nascimento de ciências ligadas a Agricultura e a Medicina:

Sua conservação deve ter por objeto prevenir os males que o ameaçam ou remediar os que o atingem. Isso nós procuramos fazer de duas maneiras, quais sejam, através de nossas descobertas particulares, e das pesquisas dos outros homens, que nosso intercâmbio com eles nos permite aproveitar. Devem ter nascido daí, em primeiro lugar, a Agricultura a Medicina e, por fim, todas as artes absolutamente necessárias (D’ALEMBERT, 2015a, p.59).

D’Alembert (2015a) pondera que apesar de muitos estudos relacionados ao nosso corpo bem como a própria conservação do mesmo, “encontraram, pela experiência e pela observação deste vasto Universo, certos obstáculos que seus maiores esforços não puderam vencer (D’ALEMBERT, 2015a, p. 61)”. Portanto, na busca por tentar acalmar essas

inquietações, ele considera que “a curiosidade é uma necessidade para quem sabe pensar, sobretudo quando esse desejo inquieto é animado por uma espécie de despeito por não poder se satisfazer completamente (D’ALEMBERT, 2015a, p. 63)”.

Sendo assim, ele afirma que devemos agradecer a sensação de impotência perante a necessidade de respostas, pois, é por meio da tentativa de satisfazer nossa saciedade pela curiosidade que ao decorrer do tempo diversos números de conhecimentos foram surgindo ao longo da história. Essa sensação para saciar a curiosidade é o que ele considera “a origem e a causa dos progressos dessa vasta ciência chamada em geral Física ou Estudo da Natureza, que compreende tantas partes diferentes (D’ALEMBERT, 2015a, p. 63)”.

Duas propriedades estão sempre ligadas aos corpos - a cor e a figura. Conforme D’Alembert (2015a), essas propriedades podem ser variáveis, mas são responsáveis, de alguma maneira, por destacar o corpo no espaço.

Para realizar esse destaque, basta apenas uma propriedade, e para isso, o filósofo-matemático considera a figura e não a cor, justificando que a figura é algo mais familiar e ao mesmo tempo pode ser reconhecida pela vista e pelo tato, além do fato de que é mais simples considerar num corpo a figura sem cor do que a cor sem figura, sem contar que a figura pode ser fixada de modo muito menos vaga às partes do espaço, portanto, o homem deve ser levado a determinar as propriedades da extensão dessas figuras, e para realizar esse propósito, D’Alembert considera que:

É o objetivo da Geometria, e esta, para atingi-lo mais facilmente, considera primeiro a extensão limitada por uma única dimensão, em seguida por duas e, por fim, pelas três dimensões que constituem a essência do corpo inteligível, isto é, de uma porção de espaço demarcada em todos os sentidos por limites intelectuais. Assim, através de operações e abstrações sucessivas de nosso espírito, despojamos a matéria de quase todas as suas propriedades sensíveis, para considerar, de certa maneira, apenas seu fantasma. Percebe-se assim, em primeiro lugar, que as descobertas às quais essa pesquisa nos conduz não podem senão ser muito úteis, todas as vezes que não seja absolutamente necessário levar em consideração a impenetrabilidade dos corpos, como quando, por exemplo, se trata do estudo de seu movimento, considerando-os como partes do espaço, figuradas, móveis e afastadas umas das outras (D’ALEMBERT, 2015a, p. 65).

Um grande número de combinações podem ser feitas para examinar uma determinada extensão figurada, portanto, foi necessário criar um método que facilitasse determinar essas combinações. Dessa necessidade, de acordo com D’Alembert (2015), houve o surgimento da Aritmética ou Ciência dos Números, que ele definiu como “a arte de encontrar, de forma abreviada, a expressão de uma relação única que resulte da comparação de várias outras (D’ALEMBERT, 2015a, p. 67)”. Essas comparações consistem no cálculo e na relação das

diferentes partes formadas pelos corpos geométricos, e os diferentes modos de comparar essas relações são o que o formam a base das inúmeras regras aritméticas.

Quando se faz uma reflexão dessas regras, D'Alembert (2015a) considera que certos princípios ou propriedades gerais dessas relações podem ser observadas de modo que é presumível exprimirmos relações de uma maneira universal, e por meio disso, descobrir as diferentes combinações possíveis.

Os resultados dessas combinações, são cálculos aritméticos que estão representados pela expressão mais simples, de modo a admitir um estado de generalização. Sendo assim definido “a ciência ou arte de assim designar as relações é o que se chama Álgebra (D'ALEMBERT, 2015a, p. 67)”.

D'Alembert (2015a) faz uma observação se referindo que há dois limites em que se encontram, por assim dizer, confinados quase todos os conhecimentos certos concedidos às nossas luzes naturais. Sendo que um desses limites, é “o de que partimos, é a ideia de nós mesmos, que conduz à do Ser todo-poderoso e às de nossos principais deveres (D'ALEMBERT, 2015a, p. 77)”.

O outro limite “é essa parte da Matemática que tem por objeto as propriedades gerais dos corpos, da extensão e da grandeza (D'ALEMBERT, 2015a, p. 77)”. Ele pondera que entre esses dois apontamentos há um abismo em que a “Inteligência suprema” parece brincar com a curiosidade humana, em virtude das inúmeras obscuridades que foram espalhadas quanto por alguns pontos de claridade que brilham uma vez ou outra para atrair a busca pela ansiedade de respostas.

Essas ciências matemáticas, que compõem o segundo dos limites, é principalmente à brandura de seu objeto que elas devem a sua certeza. D'Alembert (2015a) considera que todas as partes da Matemática não têm um objeto igualmente simples, ou seja, não possuem a veracidade propriamente dita baseada em princípios necessariamente verdadeiros e evidentes por si próprios, dado que várias delas são apoiadas em princípios físicos. Ele ainda é mais específico e afirma que somente a Álgebra, a Geometria e a Mecânica possuem um cunho de evidências porque tratam do cálculo das grandezas e das propriedades gerais da extensão.

Para abordar as Ciências da Natureza, D'Alembert (2015a) a dividirá em Matemática e Física, e explica que essa divisão se dá mediante a um processo de reflexão e de sua inclinação de generalização. Dessa forma ele relembra que podemos sentir o conhecimento da natureza de maneira real ou abstrata:

Alcançamos através dos sentidos o conhecimento dos indivíduos reais: *Sol, Lua, Sírío* etc., astros; *ar, fogo, terra, água* etc., elementos; *chuva, neve, granizo, trovões*

etc., meteoros; e assim para o resto da História Natural. Ao mesmo tempo, tomamos conhecimento dos abstratos: *cor, som, sabor, odor, densidade, rarefação, calor, frio, moleza, dureza, fluidez, solidez, rigidez, elasticidade, peso, leveza* etc.; *figura, distância, movimento, repouso, duração, extensão, quantidade, impenetrabilidade* (D'ALEMBERT, 2015a, p. 275).

Por meio dessa reflexão, D'Alembert (2015a) considera que essas sensações abstratas convêm a todos os indivíduos corpóreos, como extensão, movimento, impenetrabilidade etc., e dessa forma esses objetos foram tomados como parte da Metafísica dos Corpos ou Física Geral, sendo que as propriedades que podem ser observadas particularmente em cada corpo ou indivíduo, se dão por algumas variedades que os distinguem, tais como a elasticidade, a dureza, a fluidez, etc., tomando essas características do objeto como parte da Física particular. Além disso, outra propriedade que deve ser levada em conta quando se trata dos corpos, é que eles possuem uma quantidade ou grandeza, dessa forma, esse objeto será ramo da Matemática.

Na seção sobre "Física Geral e Experimental", D'Alembert explicou o processo de investigação como sendo uma coleção de tantos fatos quanto possível, de modo que sejam arranjados na ordem mais natural e, finalmente, sua relação com um certo número de fatos principais dos quais os outros são apenas as consequências. Este plano diferiu das ciências física-matemáticas, na medida em que:

Ela difere das Ciências Físico-Matemáticas pelo fato de não ser propriamente uma coletânea ponderada de experiências e de observações, enquanto estas, pela aplicação dos cálculos matemáticos à experiência, deduzem algumas vezes de uma mesma e única observação um grande número de consequências que, por sua certeza, estão estreitamente ligadas às verdades geométricas (D'ALEMBERT, 2015a, p.75).

Em relação a *Física particular*, D'Alembert (2015a) comenta que ela seguirá a mesma divisão da História Natural, ou seja:

Da História, apreendida através dos sentidos, dos *astros*, de *seus movimentos, aparências sensíveis* etc., a reflexão passa à pesquisa de sua origem, das causas de seus fenômenos etc., e produz a ciência chamada *Astronomia Física*, à qual deve-se referir a *ciência de suas influências*, que chamamos *Astrologia*; de onde a *Astrologia Física* e a quimera da *Astrologia Judiciária* (D'ALEMBERT, 2015a, p.276).

A *Meteorologia* será produzida por meio da História, “apreendida pelos sentidos, dos ventos, das chuvas, granizos, trovões etc., a reflexão passa à pesquisa de suas origens, causas, efeitos etc (D'ALEMBERT, 2015a, p.277). A História, “apreendida pelos sentidos, do mar, da terra, dos rios, dos afluentes, das montanhas, dos fluxos e refluxos etc., a reflexão passa à

pesquisa de suas causas, origens etc. (D'ALEMBERT, 2015a, p.277)” origina a *Cosmologia* ou *ciência do Universo*, que se divide em *Uranologia* ou *ciência do céu* e *Aerologia* ou *ciência do ar*, em *Geologia* ou *ciência dos continentes* e em *Hidrologia* ou *ciência das águas*. Finalizando os tópicos abordados pelas ciências da natureza, a Mineralogia e a Botânica elas se produzem por meio dos sentidos:

Da História das *minas*, apreendida pelos sentidos, a reflexão passa à pesquisa de sua formação, trabalho etc. e origina a ciência chamada *Mineralogia*. Da História das *plantas*, apreendida pelos sentidos, a reflexão passa à pesquisa de sua economia, propagação, cultura, vegetação etc. e engendra a *Botânica*, da qual a *Agricultura* e a *Jardinagem* são dois ramos (D'ALEMBERT, 2015a, p.277).

A “Física Particular” não foi classificada no grupo das “matemáticas mistas”, tendo uma ramificação própria para si, essa diferença entre a as ciências “físico-matemáticas” e “física particular” não foi uma classificação exclusiva de D'Alembert.

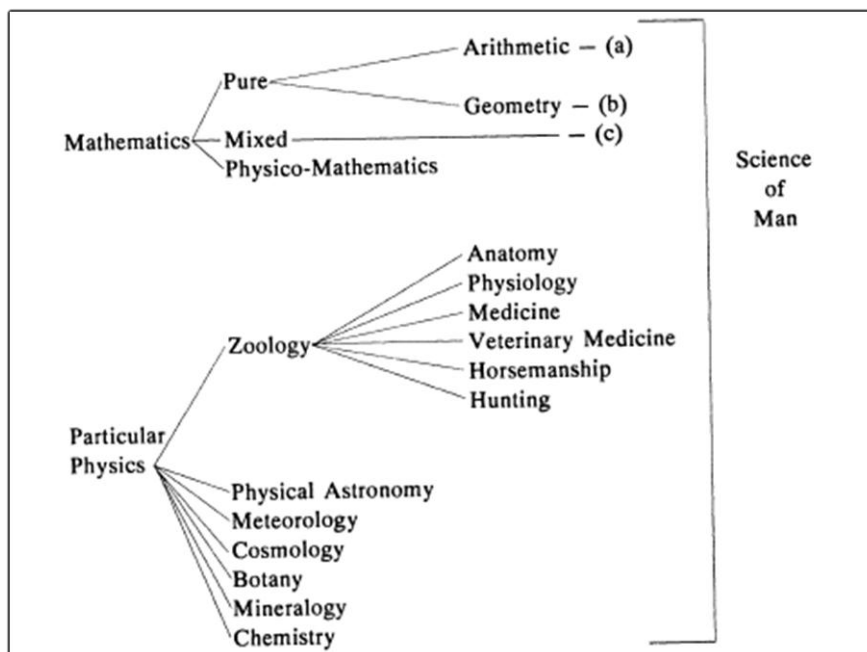
A quantidade ou grandeza pode ser definida de acordo com D'Alembert (2015a) como aquilo que pode ser aumentado ou diminuído, além disso, a quantidade, pode ser considerada sozinha ou independente dos indivíduos reais e abstratos dos quais temos conhecimento, bem como os seus efeitos podem ser investigados a partir de causas reais ou supostas, sendo esses efeitos o motivo de se dividir a matemática em “matemática pura”, “matemática mista” e “físico-matemática”.

Podemos verificar que o termo “grandeza” proposto por D'Alembert, distinguiu a quantidade “concreta” da quantidade “abstrata”, sendo a primeira no que se referia à extensão e ao tempo, e era contínua, e quanto a segunda, se referia a números inteiros e era discreta. A geometria e a mecânica poderiam ser facilmente associadas ao “concreto” ou à quantidade física, enquanto a álgebra e a aritmética foram associadas à quantidade “abstrata”.

Portanto, na classificação matemática, que pode ser observada na figura 4, as ciências matemáticas continuaram ligadas com as questões metafísicas. D'Alembert na sua proposta de árvore²⁹ do conhecimento dividiu a matemática em três categorias, “Matemática pura”, “Matemática Mista” e “Físico-Matemáticas”, sendo que a Aritmética e Geometria fazem parte da ramificação da Matemática Pura.

²⁹ A árvore do conhecimento proposta por D'Alembert pode ser encontrada integralmente no Anexo 3.

Figura 4: Parte da Árvore do Conhecimento proposta por D'Alembert



Fonte: Brown (1991).

Dessa forma, D'Alembert classificou a Matemática em seu verbete na *Encyclopédie*:

Matemática, ciência que tem por objeto as propriedades da grandeza enquanto calculáveis ou mensuráveis. *Matemáticas*, no plural, é hoje em dia o termo mais utilizado do que *Matemática* no singular. Quase não se diz mais *Matemática*, prefere-se *Matemáticas*. A opinião mais comum deriva a palavra *matemática* de uma palavra grega que significa ciência, pois, com efeito, pode-se considerar as *Matemáticas* como a ciência por excelência, pois contêm os únicos conhecimentos certos concedidos às nossas luzes naturais; dizemos às nossas luzes naturais, para que não se incluam aqui as verdades da fé e os dogmas teológicos. Outros atribuem à palavra *matemática* uma origem diferente, sobre a qual não insistiremos, e que pode ser encontrada em Montucla, *Histoire des Mathématiques*. No fundo, pouco importa qual origem se dê a essa palavra, desde que se tenha uma ideia justa do que são as *Matemáticas* (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 114).

Além disso, vimos que D'Alembert no seu Discurso Preliminar, classifica que as *Matemáticas* dividem-se em três classes, sendo a primeira, o que ele definiu como “*Matemática Pura*”, responsável por considerar as propriedades da grandeza de modo abstrato, dessa forma, a grandeza pode ser calculável ou mensurável. No primeiro caso, caso essa grandeza seja calculável são representadas por números e integram a *Aritmética*, enquanto que no segundo caso, essa grandeza ser mensurável, ela é representada pela sua extensão e integra o ramo da *Geometria*.

A segunda classe é chamada de “*Matemáticas Mistas*”, que têm por objeto as propriedades da grandeza concreta, enquanto mensuráveis ou calculáveis. Quanto

denominamos que a grandeza é concreta, ela pode ser encontrada em certos corpos ou em objetos particulares, dessa forma, integram o ramo das “matemáticas mistas” a Mecânica, a Ótica, a Astronomia, a Geografia, a Cronologia, a Arquitetura Militar, a Hidrostática, a Hidráulica, a Hidrografia, a Navegação etc.

E a terceira classe foi denominada ciências físico-matemáticas, que consiste na ampla aplicação de cálculos matemáticos em experimentos físicos, de modo que a partir de poucas observações, é possível realizar um grande número de inferências.

Nessa extensa publicação introdutória de D'Alembert ele também define o contexto geral da *Encyclopédie*, relatando da importância da realização da classificação dos conhecimentos humanos, bem como da classificação dos verbetes nas mais diversas áreas do conhecimento, além de dar uma noção geral ao leitor as interpretações filosóficas relacionadas ao corpo humano, bem como as relações do corpo humano com os objetos externos.

Dessa forma, após dar todo o panorama das outras³⁰ ciências além das ciências da natureza, ele conclui seu Discurso Preliminar da seguinte maneira:

É o que tínhamos a dizer sobre esta imensa coleção. Ela se apresenta com tudo o que tenha interesse a seu respeito: a impaciência que se mostrou por vê-la publicada; os obstáculos que atrasaram sua publicação; as circunstâncias que nos forçaram a encarregar-nos dela; o zelo com que nos entregamos a este trabalho, como se o tivéssemos escolhido; os elogios que os bons cidadãos fizeram ao empreendimento; os numerosos auxílios, e de todos os tipos, que recebemos; a proteção do governo; os inimigos, tanto fracos quanto poderosos, que procuraram, ainda que em vão, sufocar a obra antes que ela nascesse; enfim, dos autores, sem cabala e sem intrigas, que não esperam outra recompensa para seus cuidados e esforços a não ser a satisfação de serem beneméritos de sua pátria. Não compararemos este *Dicionário* com outros. Reconhecemos de bom grado que todos nos foram úteis, e nosso trabalho não consiste em desabonar o de ninguém. Ao público leitor cabe julgar-nos; pareceu-nos necessário distingui-lo daquele que só fala, mas não lê (D'ALEMBERT, 2015a, p. 365).

Concluindo, vemos então que D'Alembert apresentou, influenciado pelo proposto anteriormente por Bacon, uma classificação de matemática dentro de sua árvore de conhecimento em *Discours Préliminaire* para a *Encyclopédie* de Diderot. Entretanto, dentro da classificação de "matemática", muito havia mudado desde o tempo de Bacon. Os novos temas de cálculo e probabilidade surgiram na segunda metade do século XVII, e houve muitos novos desenvolvimentos em mecânica, óptica e astronomia.

³⁰ D'Alembert relata também das Artes, da Moral, da Política, entre outros tópicos, entretanto, nos fixamos apenas às ciências da natureza pelo fato da matemática ter sido classificada nesse ramo do conhecimento.

2.2.1 D'ALEMBERT: MATEMÁTICA PURA

Na “matemática pura”, D'Alembert (2015a) considera a quantidade abstrata como objeto, e essa quantidade pode ser numerável ou extensa. Em relação a quantidade abstrata numerável ela se tornou objeto da Aritmética, enquanto que a quantidade extensa é objeto da Geometria. Vejamos então, como D'Alembert classifica essas duas ramificações da “matemática pura”, a Aritmética e a Geometria.

2.2.1.1 ARITMÉTICA

A figura 5 mostra que a "aritmética" foi dividida em duas categorias, Aritmética Numérica e Álgebra, e a Álgebra em duas subdivisões, "Elementar" e "Infinitesimal", sendo esta última, o meio pelo qual se poderia operar o Cálculo Diferencial e Integral.

Ao abordar a primeira classificação, Brown (1991) cita que D'Alembert foi um grande defensor³¹ para que o conceito de limite fosse bem definido e, portanto, não gostou de usar diferenciais, que pareciam ser apenas quantidades independentes de toda percepção sensorial, cuja manipulação não era mais do que uma aritmética de ordem elevada.

Apesar de D'Alembert, de acordo com Brown (1991), não gostar de usar diferenciais, não havia como negar sua utilidade e seu emprego por muitos geômetras continentais. A maioria desses resultados em "matemática mista" parecia ser verificável através da experiência e, além disso, os diferenciais estavam entre aquelas ideias simples a partir das quais o geômetra poderia construir todo o cálculo diferencial e integral. O geômetra certamente não queria descartar todos os frutos do novo cálculo porque algumas questões fundamentais não tinham sido resolvidas.

A questão permaneceu onde colocar o Cálculo dentro da árvore do conhecimento. O diferencial dificilmente poderia ser considerado um objeto físico sensível, antes era uma quantidade abstrata "independente da mente".

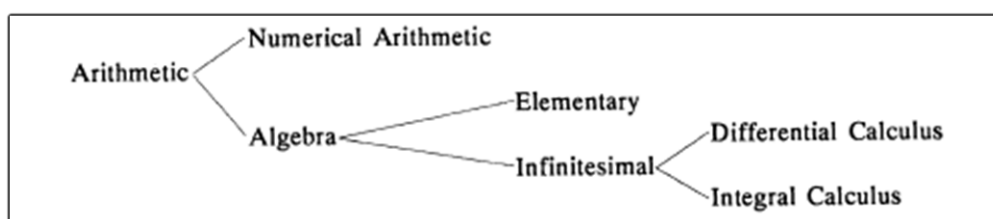
Brown (1991), comenta que se D'Alembert tivesse conseguido encontrar uma definição de velocidade na teoria dos limites, talvez sua classificação de cálculo pudesse estar

³¹ Os livros de Henk Bos, "Differentials, Higher-order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus," *Archives of History of Exact Sciences*, 24 (1974-75), 1-90; e Carl Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (New York, 1959); Charles Henry Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (New York, 1979) são sugeridos por Brown (1991) para uma discussão do ponto de vista de D'Alembert em relação a sua concepção do conceito de limite.

dentro da ramificação da "matemática mista", mas, a noção de movimento para D'Alembert envolveu corpo, extensão e tempo. A mecânica de D'Alembert limitou as suas razões para querer definir a velocidade como um certo limite, e então ele colocou o Cálculo dentro da categoria de Álgebra.

Dessa forma, os elementos do cálculo, incluindo a noção de infinitesimais, podem ser encontrados sob a divisão da álgebra dentro da categoria de “matemática pura”.

Figura 5: Divisão da Aritmética na Árvore do Conhecimento proposta por D'Alembert



Fonte: Brown (1991).

No Discurso Preliminar, em relação a Aritmética temos que ela foi dividida em Aritmética Numérica ou Aritmética Universal:

A Aritmética foi dividida em Aritmética numérica ou por algarismos, e em Álgebra ou Aritmética universal por Letras, que é o cálculo das grandezas em geral, cujas operações são operações aritméticas, indicadas de forma abreviada. Pois para falar com exatidão, só há cálculo de números. A *Álgebra* é *elementar* ou *infinitesimal*, segundo a natureza das quantidades a que é aplicada. A *infinitesimal* é *diferencial* ou *integral*: *diferencial* quando se trata de descer da expressão de uma quantidade finita, ou considerada tal, à expressão de seu aumento ou de sua diminuição instantânea; *integral*, quando se trata de remontar dessa expressão à própria quantidade finita (D'ALEMBERT, 2015a, p.275-276).

No verbete da *Encyclopédie*, a Aritmética está definida como a ciência que possui “a arte de demonstrar, ou, é a parte da matemática que confere as propriedades dos números (ENCYCLOPÉDIE, 1751, p.673, tradução nossa)”, ou então, como a Aritmética sendo a ciência que aborda sobre o conhecimento da quantidade.

Para se obter os resultados, ela se opera por quatro regras que compõem toda a Aritmética e que regem as ciências matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão. No verbete, é dito que as operações aritméticas eram utilizadas para facilitar e expedir de forma rápida cálculos comerciais, cálculos econômicos, entre outros cálculos rotineiros. Além disso, é relatado que muitas das regras que foram criadas na aritmética, tais como regras de proporções, extração de raízes, taxas de câmbio, permutações, entre outras, são de ordem muito úteis, e todas fazem uso das quatro operações básicas.

A partir dessas quatro operações da aritmética é possível estabelecermos diferentes combinações entre as relações numéricas, bem como realizar reduções ou ainda considerar o excesso de uma grandeza em relação a outra. A multiplicação pode ser entendida como uma aplicação de excessivas parcelas da adição, bem como a divisão é uma aplicação de excessivas subtrações, portanto, a multiplicação e a divisão são formas abreviadas para realizar, respectivamente, adições e subtrações, entretanto, cada uma dessas quatro operações possui certo rigor nas regras para efetuação dos cálculos, garantindo que seus resultados sejam verdadeiros.

Em relação a origem e invenção da Aritmética, comenta-se que ela deve ser atribuída aos homens, entretanto, não há um autor ou uma data em que possa ser identificado seu criador e quando foi criada. Essa criação da Aritmética é geralmente atribuída pela necessidade da arte de contar³², para assim compartilhar os resultados das contagens bem como poder realizar diversas combinações. É comentado que os gregos e os egípcios parecem ter sido as primeiras civilizações a contribuírem com grandes realizações de modo a promover certos avanços no ramo da Aritmética.

A partir da evolução da Aritmética com o passar do tempo, diversos tratados foram elaborados em relação a essa ciência. Dessa forma, o verbete³³ apresenta que a Aritmética contempla algumas subdivisões:

- A *Aritmética Teórica* como sendo aquela parte da ciência que explora as propriedades dos números e também fornece as regras numéricas para que as demonstrações sejam realizadas. O livro IX de Euclides é indicado, no verbete, para exemplificar do que se trata a Aritmética Teórica.
- A *Aritmética Prática* foi tida como sendo aquela que possui a arte de calcular e encontrar resultados por meio de determinados números, dado que para isso tem se a exigência de alguns dados numéricos sejam fornecidos de início,

³² Para D'Alembert (2015c), a contagem é a medida de tudo que existe, bem como é “uma operação do espírito que, por meio de diferentes nomes e signos, reúne muitas coisas de uma mesma espécie, como as unidades, e por esse meio forma a ideia distinta de uma dezena, de uma vintena, de uma centena: *dez, 10; vinte, 20; cem, 100* (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p.37)”. Aplicando as técnicas de contagem, temos a ideia de contar, que nada mais é do que “acrescentar à ideia mais simples que temos de unidade a ideia de *mais*, da qual fazemos uma ideia coletiva que chamamos de dois; e em seguida avançar, acrescentando sempre mais uma unidade à ideia coletiva precedente para, por fim, dar ao número total, considerado contido numa única ideia, um nome e um signo novos e distintos, pelos quais possamos discernir esse número dos que se encontram antes ou depois dele e distingui-lo de multidões de unidades maiores ou menores do que ele (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p.37)”.

³³ Encyclopédie, 1751, p.674-675.

dessa forma, será possível obter as conclusões e respostas práticas a partir dos números que foram elencados inicialmente.

- A *Aritmética Instrumental* ficou definida como sendo aquela que opera as regras comum a arte da contagem por meio de instrumentos de cálculo, dessa forma, os cálculos podem ser realizados com mais facilidade e agilidade por meio da utilização de máquinas de calcular ou outros instrumentos que permitissem realizar a arte de contar.
- A *Aritmética Logarítmica* é aquela que faz uso das tabelas logarítmicas para obtenção dos resultados, destacando que a multiplicação é feita pela adição dos logaritmos e a divisão é realizada pela subtração dos logaritmos.
- A *Aritmética Numérica* é a que envolve o cálculo de números ou quantidades abstraídas por números. Todas as operações nessa aritmética são realizadas apenas por quantidades numéricas simbolizadas pelos algarismos. Podemos também chamar a Aritmética Numérica como aquela parte da aritmética que é desprovida de calcular quantidades representadas pelas letras do alfabeto.
- A *Aritmética Especiosa* é geralmente conhecida como aritmética literal ou como popularmente é denominada, Álgebra. Nessa aritmética os algarismos podem ser representados por letras do alfabeto para indicar uma quantidade.
- A *Aritmética Binária* faz uso apenas dos algarismos 0 e 1 para realizar as operações aritméticas.
- A *Aritmética Quaternária* é uma extensão da aritmética binária, de modo que nessa aritmética se emprega quatro algarismos: 0, 1, 2 e 3.
- A *Aritmética Decimal* é aquela que é executada de forma que a progressão ocorre de dez em dez. Ou seja, a princípio fazemos uso dos dez algarismos conhecidos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9; tendo de posteriormente, a cada dezena, ou de dez em dez, repetir os algarismos, resultando em 10, 11, 12, 13, ..., e

assim por diante. É indicado que a aritmética decimal expressa os números de uma maneira mais abreviada justamente por fazer uso dos dez símbolos de algarismos conhecidos.

- *A Aritmética Vulgar* é aquela que compreende os números inteiros e também as frações.
- *A Aritmética Sexagesimal* é aquela que se refere a quantidades de sessenta, bem como estabelece os princípios das frações sexagesimais³⁴. É comentado que Samuel Reyher (1694-1768) inventou uma espécie de hastes sexagesimais semelhantes aos bastões de Neper (1550-1617), por meio das quais facilitam todas as operações da Aritmética Sexagesimal.
- *A Aritmética do Infinito* é aquela que aplica métodos para encontrar a soma de uma sequência de números cujos termos são infinitos, ou de determinar suas relações.
- *A Aritmética dos Incomensuráveis* é aquela que aborda os tratados para medidas incomensuráveis e números irracionais.

Essas subdivisões da Aritmética foram colocadas no verbete da *Encyclopédie* e teve como objetivo fazer um levantamento dos tipos de aritmética que são encontradas nas literaturas matemáticas, de modo que possibilite dar uma noção de quais são os princípios que norteiam essa ciência.

No verbete da aritmética, é relatado que é importante observarmos que as grandezas numéricas, são geralmente comparadas uma a outra, podendo ser maior, menor ou igual, portanto, a Aritmética também pode ser entendida como a ciência que nos fornece elementos que possibilitam realizar uma comparação entre grandezas.

Na *Encyclopédie* é possível encontrarmos outro verbete³⁵ relacionado a Aritmética, denominado como *Aritmética Universal*. Essa denominação foi atribuída a Newton, e ficou definido que essa aritmética contempla a Álgebra e o cálculo das grandezas em geral. Essa

³⁴ No verbete da *Encyclopédie* (1765) que explica o que significa o termo Sexagesimal, podemos encontrar que essas frações sexagesimais são aquelas frações cujo denominador são múltiplos de sessenta, por exemplo, um minuto = $1/60$; um segundo = $1/3600$.

³⁵ *Encyclopédie*, 1751, p.675-678.

aritmética é responsável por estabelecer as regras básicas e fundamentais para efetuar os cálculos aritméticos.

É dado como exemplo a regra³⁶ de que dado um número, é possível retirarmos uma quantidade desse número e quando essa quantidade é incluída a outro número, temos o primeiro número dado. Outro exemplo dado é o da proporcionalidade: “Se você dividir uma grandeza por outra multiplicado pelo divisor, então deve ser tomado o dividendo multiplicado pelo resultado do produto”. Esses e outros princípios aritméticos são garantidos porque a aritmética é estabelecida por regras que são capazes de generalizar as propriedades, tornando que dado qualquer grandeza, o resultado respeitará essas regras, ou seja, os princípios são regidos por meio de uma universalização da aritmética.

Nesse verbete são apresentados exemplos de regras universais da aritmética, e essas regras são aplicadas de acordo com a operação indicada. É dado inicialmente como exemplo a noção da adição. Fazendo uso da álgebra, temos que nessa operação para adicionarmos as quantidades devemos operar com os coeficientes de quantidades semelhantes. Caso tenhamos dois tamanhos diferentes, a e b , escrevemos como $a + b$. Esse resultado nada mais é que uma maneira de indicar que ao definir um número a e um número b , será necessário somar esses dois números $a + b$.

Já em relação para adicionar $5a$ com $3a$, a operação aritmética referida deve ser escrita como $5a + 3a$, e como pode ser observado que a operação requerida indica que uma quantidade a esta representada por um número de 5 vezes dessa quantidade, e essa mesma quantidade também se repetiu 3 vezes, então podemos ver que essa quantidade se repete por 8 vezes, então é possível escrever que a operação algébrica $5a + 3a$ tem como resultado dessa expressão $8a$. Em relação a subtração, é explicado que a regra segue o mesmo fundamento, entretanto, ao subtrair uma quantidade a de uma quantidade b , temos a expressão $a - b$. Igualmente o processo se dá para operações algébricas em que a quantidade de um mesmo elemento repete um determinado número de vezes, tal como, ao subtrairmos $3a$ de $5a$, o resultado será $2a$.

Nesse mesmo verbete da Aritmética Universal, é dado como exemplo em relação a multiplicação que ao multiplicar $a + b$ por $c + d$, podemos escrever³⁷ a expressão $(a + b) \times (c + d)$, que resulta $ac + bc + ad + bd$, sendo esta o resultado de uma regra aritmética que envolve propriedades da adição e da multiplicação. Ainda em relação a multiplicação é

³⁶ Atualmente conhecemos essa regra como tirar a prova real de um número. Geralmente é ensinada nos anos iniciais para mostrar que a adição e subtração são operações inversas, assim como a multiplicação e a divisão.

³⁷ Essa propriedade dada como exemplo de uma regra universal da aritmética na *Encyclopédie*, é o que chamamos atualmente de propriedade distributiva.

descrito que para multiplicar a grandeza $5a$ por $3a$, o resultado da expressão³⁸ $5a \times 3a$ é igual a $15aa$. Por fim, outras duas propriedades são mencionadas em relação a multiplicação, a primeira é a que atualmente chamamos de diferença entre dois quadrados, ou seja, se multiplicarmos $a + b$ por $a - b$, o resultado será $aa - bb$. A segunda é uma propriedade relacionada a binômios elevado a segunda potência em que $aa + 2ab + bb$, é o resultado da multiplicação entre $a + b$ por $a + b$.

Em relação a quarta e última operação básica – a divisão – temos como exemplo de regra universal da aritmética dividir uma determinada quantidade por outra quantidade, tal como é apresentada, dividir $20ab$ por $5b$, é o mesmo que escrever a expressão $\frac{20ab}{5b}$, que tem como resultado $4a$.

No restante do verbete da Aritmética Universal é dado outros exemplos de regras que podem ser aplicadas para resolver equações de primeiro grau, sistemas de equações com duas incógnitas e também de proporcionalidade, além de tecer considerações a respeito de que essas regras universais da aritmética continuam valendo mesmo quando a aritmética ou a álgebra são aplicadas a outras ciências, tais como a Geometria e a Mecânica por exemplo.

Retomando a divisão da Aritmética por D'Alembert, vimos pela figura 5 que além da Aritmética Numérica, ela também teve como ramificação a *Álgebra*. Podemos ver que o verbete em que é definido o que é Álgebra na *Encyclopédie* ficou a cargo de D'Alembert e dessa forma, ele deliberou a Álgebra da seguinte maneira:

Álgebra é o método de realização do cálculo de toda sorte de quantidades em geral, representadas por signos de abrangência universal. Para tanto, foram adotadas como signos as letras do alfabeto, por serem mais fáceis e mais cômodas de utilizar do que qualquer outra espécie de signos. (...) A Álgebra é, propriamente dizendo, o método de calcular quantidades indeterminadas, uma espécie de Aritmética por meio da qual calculam-se quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas. Nos cálculos algébricos, considera-se como dada a grandeza procurada, o número, a linha ou qualquer outra quantidade, e, por meio de uma ou mais quantidades dadas, caminha-se de consequência em consequência até que a quantidade suposta no início como desconhecida, ou alguma de suas potências, torne-se igual a uma quantidade conhecida, dando a conhecer assim a quantidade em questão. Podem-se distinguir duas espécies de Álgebra, a Numeral e a Literal. A Álgebra Numeral ou Vulgar é a dos antigos algebristas, utilizada unicamente na resolução de problemas numéricos. A quantidade procurada era representada por uma letra ou caractere, as quantidades dadas eram expressadas por números. A Álgebra Literal ou Especiosa, ou Nova Álgebra, é aquela em que as quantidades dadas ou conhecidas, bem como as desconhecidas, são expressadas ou representadas em geral por letras do alfabeto (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 23-24).

³⁸ Em relação a $15aa$, é observado que denotar o resultado dessa forma, uma vantagem é ter menos contas a fazer ao atribuir um valor para a grandeza a , bastando resolver apenas $15 \times aa$, ao invés de resolver $5a \times 3a$.

Nesse mesmo verbete em que D'Alembert (2015c) define Álgebra, ele comenta que alguns autores costumam postular que a Álgebra pode ser definida como arte de resolver os problemas matemáticos, mas que pensar dessa forma é um equívoco, pois essa ideia é antes uma arte aritmética do que da Álgebra. Entretanto, ele propõe que a Álgebra pode ser dividida em duas partes: 1º) O método de calcular as grandezas representando-as com letras do alfabeto e 2º) A maneira de servir-se desse cálculo para a solução de problemas.

D'Alembert (2015c) lança uma questão em relação ao entendimento da Álgebra e ele mesmo responde:

Como acreditar que uma simples definição do que é a Álgebra poderia dar a ideia desse objeto para quem ignorasse a ciência? É recomendável que se comece um tratado de Álgebra pela explicação clara da marcha segundo a qual o espírito chegou ou pode chegar a encontrar as suas regras, e a obra termine com estas palavras: *a ciência que acabamos de ensinar é a que se chama Álgebra* (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 107).

Para D'Alembert (2015c) a Álgebra tem a capacidade de aliviar a memória e a imaginação, pois ela é capaz de reduzir os esforços para reter as diferentes coisas necessárias no processo de busca pela descoberta da verdade sobre a qual trabalha, e devido a essa habilidade, alguns autores também consideram a Álgebra como a ciência denominada Geometria Metafísica, em que as letras do alfabeto que são utilizadas, podem significar linhas ou números, ou seja, podem abordar problemas geométricos ou aritméticos.

Ao fazer a junção desses problemas, elas representam os produtos, os planos, os sólidos e as potências mais elevadas dependendo do número de letras. Para ficar mais claro, vejamos um exemplo que ele propõe para explicar essa definição:

Por exemplo, em Geometria, duas letras, como ab , representam um retângulo cujos lados são expressados um pela letra a , o outro pela letra b , de sorte que, multiplicadas uma pela outra, produzem o plano ab . A mesma letra, repetida duas vezes, como aa , significa um quadrado. Três letras, abc , representam um sólido ou um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões são expressas por três letras, abc , o comprimento por a , a largura por b , a profundidade ou espessura por c , de tal sorte que, multiplicadas umas pelas outras, produzem o sólido abc . Como nos quadrados, cubos, potências quádruplas etc., a multiplicação das dimensões ou graus é expressa pela multiplicação das letras, e o número de letras pode crescer a ponto de se tornar bastante incômodo, os matemáticos se contentam em escrever a raiz uma única vez e assinalar à direita o expoente da potência, vale dizer, o número de letras de que é composta a potência ou o grau que se trata de exprimir, como a^2 , a^3 , a^4 , a^5 . Esta última expressão, a^5 , quer dizer o mesmo que *elevado à quinta potência*, e assim para as outras (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 25).

D'Alembert (2015c) escreve que o mais usual e conveniente é aplicar a Álgebra à Geometria ao invés da Geometria na Álgebra, entretanto, essa aplicação pode ocorrer em

alguns casos. Dado que as linhas geométricas podem ser representadas por letras, então é possível representar por linhas as grandezas numéricas expressas pelas letras, resultando numa maior facilidade para demonstrar ou resolver determinados problemas. Ele exemplifica:

Suponha-se que eu queira obter o quadrado de $a + b$; posso, pelo cálculo algébrico, demonstrar que esse quadrado contém o quadrado de a , mais o de b , mais duas vezes o produto de a por b . Mas posso também demonstrar essa proposição servindo-me da Geometria. Para tanto, tenho apenas que traçar um quadrado, cuja base e altura dividirei em duas partes, uma eu chamarei de a , a outra de b ; a seguir, a partir dos pontos de divisão, traçarei linhas paralelas aos lados do quadrado, dividirei esse quadrado em quatro superfícies, e verei, com um golpe de vista, que uma é o quadrado de a , a outra o quadrado de b , e que as outras duas serão, cada uma delas, um retângulo formado por a e b ; do que se segue que o quadrado do binômio $a + b$ contém o quadrado de cada uma das duas partes, mais duas vezes o produto da primeira pela segunda. Esse exemplo muito simples, que se encontra ao alcance de todos, mostra bem como a Geometria aplica-se à Álgebra, vale dizer, como a Geometria pode servir para demonstrar teoremas de Álgebra (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 31).

Dessa forma, D'Alembert denota que também podemos chamar a Álgebra de Geometria Simbólica justamente por causa dessa representação das letras em objetos geométricos e que servem de solução dos problemas. Por meio da Álgebra, ela “não somente exprime os objetos da Geometria por meio de caracteres gerais como pode facilitar a aplicação da Geometria a outros objetos (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 110)”. Temos então que a Geometria, quando auxiliada pelo uso da Álgebra, se torna aplicável às demais ciências das matemáticas, pois na ciência matemática é toda fundamentada na comparação de grandezas entre si.

Assim sendo, com essa aplicação da Álgebra em outras ciências, tal como na Mecânica por exemplo, é possível representar as relações existentes entre as partes do tempo pela relação entre as partes de uma linha, bem como o movimento de um corpo por meio da equação de uma determinada curva, cujas coordenadas tem por suas abscissas representadas o tempo enquanto que as ordenadas mostram as velocidades correspondentes.

Quando aplicamos além da Álgebra, mas também a Geometria à Mecânica, essas aplicações consistem em principalmente na representação por equações as curvas que são descritas pelos corpos em suas trajetórias; quando os corpos são animados por forças quaisquer, é possível determinar a equação entre os espaços descritos pelos corpos; é possível calcular o tempo que os corpos levam para percorrer tais espaços, entre outros exemplos. D'Alembert (2015c) pondera que não é possível comparar duas coisas de naturezas diferentes, tais como o espaço e o tempo. Entretanto, é possível estabelecer comparações entre as partes do tempo e as partes do espaço percorrido.

Por meio de uma equação podemos expressar a relação entre as partes de uma linha e a as partes do espaço percorrido por um corpo que se move de uma maneira qualquer. Dessa forma, pode-se:

imaginar uma curva cujas abscissas representem as porções do tempo escoado desde o início do movimento, as ordenadas correspondentes designarão os espaços percorridos durante essas porções de tempo. A equação dessa curva exprimirá não a relação entre os tempos e os espaços, mas sim a relação entre as partes do tempo escoado e a unidade deste, e entre essa relação e aquela entre as partes do espaço percorrido e a unidade deste, pois a equação de uma curva pode ser considerada ou como exprimindo a relação entre as ordenadas e as abscissas, ou como equação entre a relação que as ordenadas têm para com a sua respectiva unidade e a relação entre as abscissas correspondentes e sua respectiva unidade (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 33).

Portanto, conforme D'Alembert (2015c), quando recorremos da aplicação da Geometria e do Cálculo (algébrico), é possível, sem precisar recorrer a nenhum outro princípio, encontrar as propriedades gerais do movimento segundo uma lei qualquer.

Para finalizar, com o propósito de desfazer algumas confusões entre a Álgebra e a Análise Matemática³⁹, D'Alembert (2015c) define que a “Álgebra é a ciência do cálculo das grandezas em geral, Análise é o meio de empregar a Álgebra à solução de problemas (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 110)”. Portanto, a Álgebra deve ser entendida como uma ferramenta da Análise “para encontrar desconhecidos em meio a conhecidos (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 110)”.

Dessa forma, concluímos então que a “Aritmética, ou Ciência dos Números, que não é outra coisa senão a arte de encontrar, de forma abreviada, a expressão de uma relação única que resulte da comparação de várias outras (D'ALEMBERT, 2015a, p.67), de modo que as diferentes maneiras de comparar essas relações, dão as diferentes regras da Aritmética.

³⁹ Em seu verbete, a Análise está definida como “propriamente dizendo, o método de resolução dos problemas matemáticos pela redução destes a equações. Para resolver problemas, a Análise recorre ao auxílio da Álgebra, ou cálculo das grandezas em geral. As palavras *Análise* e *Álgebra* são, por isso, muitas vezes consideradas sinônimos (..) A Análise divide-se, em relação ao seu objeto, em *Análise das Quantidades Finitas* e *Análise das Quantidades Infinitas*. A *Análise das Quantidades Finitas* é o que se chama também de *Aritmética Especiosa*, ou *Álgebra*. A *Análise das Quantidades Infinitas*, ou *dos Infinitos*, também chamada de *Nova Análise*, calcula as relações entre quantidades que tomamos por infinitas ou infinitamente pequenas. Um de seus principais ramos é o *Método das Fluxões*, ou *Cálculo Diferencial* (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 25-26)”.

2.2.1.2 GEOMETRIA

Em relação a Geometria, embora afirme que a Geometria tem evidências de observarmos as suas verdades, o filósofo-matemático faz algumas críticas quanto as certezas ou verdades que são encontradas:

Falo dessas verdades consideradas em si mesmas. Que são a maioria desses axiomas de que a Geometria tanto se orgulha, senão a expressão de uma mesma ideia simples por dois signos ou palavras diferentes? Quem disser que dois e dois são quatro terá um conhecimento maior do que outro que se contenta em dizer que dois e dois são dois? As ideias de todo, de parte, de maior e de menor não são, falando com propriedade, a mesma ideia simples e individual, já que não se poderia ter uma sem que as outras se apresentassem todas ao mesmo tempo? Muitos de nossos erros, observaram alguns filósofos, são devidos ao abuso das palavras; é talvez a esse mesmo abuso que devamos os axiomas (...) Se examinarmos uma série de proposições de Geometria deduzidas umas das outras, de maneira que duas proposições vizinhas se toquem imediatamente e sem nenhum intervalo, perceberemos que todas elas são apenas a primeira proposição, por assim dizer desfigurada sucessivamente e pouco a pouco, na passagem de uma consequência para a seguinte, mas que não foi de fato multiplicada por esse encadeamento, apenas recebeu formas diferentes (D'ALEMBERT, 2015a, p. 81).

Essa crítica de D'Alembert se dá porque ele considera como objeto da Geometria os corpos com todas as suas propriedades sensíveis, tais como que esses corpos tenham em suas características porções de extensão penetráveis, divisíveis e figuradas. Portanto, esses corpos geométricos devem ser entendidos como uma porção de extensão circunscrita em todos os sentidos.

D'Alembert (2015c) considera que a Geometria aborda os corpos num estado de abstração em que na realidade não se encontram. Essa explicação se dá porque na natureza não encontramos formas tão perfeitas que são exigidas no rigor da Geometria, logo, as verdades e demonstrações que são descobertas nos corpos geométricos são verdades hipotéticas, ou ainda verdades de pura abstração. Ele exemplifica essa afirmação citando como exemplo o caso do círculo que “na natureza, por exemplo, não há círculo perfeito; mas, quanto mais um círculo se aproxima de sê-lo, mais se aproxima de ter, exata e rigorosamente, as propriedades do círculo perfeito demonstradas pela Geometria (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 99)”, dessa forma, sendo capaz de aproximar de ter todas essas propriedades, possibilitando que sejam úteis num grau suficiente para nosso uso.

Fica então uma questão na cabeça, se os teoremas matemáticos não ocorrem com exatidão na natureza, para que servem? D'Alembert (2015c) comenta que apesar dessa diferença em relação ao que se é encontrado de fato na natureza, esses resultados são úteis

porque permitem que se encontrem – com uma precisão suficiente para serem aplicados na prática – a “distância inacessível de um lugar a outro, a medida de uma superfície dada, a metragem de um sólido para calcular o movimento e a distância dos astros e que se prevejam os fenômenos celestes (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 99)”.

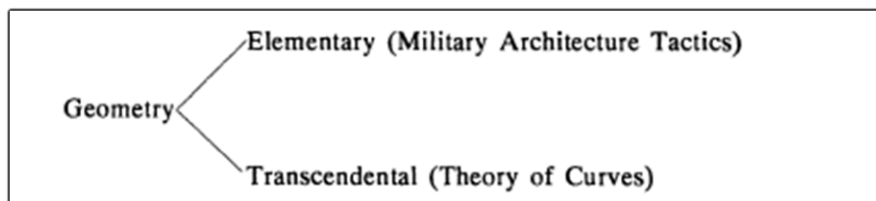
D'Alembert (2015c) pondera que para que seja possível demonstrar verdades com máximo rigor ao abordar a figura dos corpos, é necessário avaliar que esses corpos estão num estado de extraordinária perfeição abstrata que na realidade não teriam, e que na realidade estamos lidando com uma aproximação dos resultados. Afinal se fossemos levar ao pé da letra e resolvêssemos não realizar essa convenção, por exemplo, senão considerássemos “o círculo como perfeito, seriam necessários tantos teoremas diferentes sobre o círculo quantas fossem as diferentes figuras imaginadas, mais ou menos próximas do círculo perfeito; e essas figuras, por seu turno, também poderiam ser absolutamente hipotéticas, sem um modelo correspondente na natureza (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 99)”.

Sendo assim, na Geometria, as linhas consideradas não são nem perfeitamente retas nem perfeitamente curvas, bem como as superfícies não são nem perfeitamente planas nem perfeitamente curvilíneas. Entretanto, “quanto mais se aproximam de sê-lo, mais próximas estão de ter as propriedades demonstradas a propósito de linhas exatamente retas ou curvas, de superfícies exatamente planas ou curvilíneas (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 99)”.

Em relação a toda essa aproximação da verdade, mas sem nunca tocar nessa verdade de fato, D'Alembert (2015c) faz uma analogia de que o que fazemos quando abordamos a temática da Geometria com o propósito de buscar uma verdade geométrica, o que estamos fazendo de fato é igual a representação de uma *assíntota*, visto que chegaremos muito próximo do limite da verdade, mas nunca tocaremos exatamente na verdade de fato, pois, por mais que tentemos se aproximar dela, jamais atingiremos essa verdade de maneira precisa por conta dessa representação não ser fiel ao encontrado na natureza, linhas sem largura ou superfícies sem profundidade.

Portanto, de acordo com D'Alembert “a *Geometria* tem por objeto primeiro as propriedades do círculo e da linha reta, ou então abarca, em suas especulações, todo tipo de curvas, o que a divide em *elementar* e em *transcendente*” (D'ALEMBERT, 2015a, p.276).

Figura 6: Divisão da Geometria na Árvore do Conhecimento proposta por D'Alembert



Fonte: Brown (1991).

Dessa forma, temos geometria dividida em régua e compasso, a geometria euclidiana e a geometria analítica à maneira de Descartes. Conforme apresentado na figura 6, podemos observar ainda que as Teorias das Fortificações ("táticas de arquitetura militar") foram colocadas na divisão da geometria e dentro da categoria da matemática pura. No verbete da *Encyclopédie*, D'Alembert (2015c) define a Geometria da seguinte forma:

A Geometria é a ciência das propriedades da extensão, considerada simplesmente como extensa e figurada. A palavra é formada por duas palavras gregas, γῆ, ou γαῖα, terra, e μέτρον, medida. Essa etimologia parece nos indicar o que propiciou o nascimento da Geometria. Imperfeita e obscura em sua origem, como todas as ciências, começou por uma espécie de tatear, com mensurações e operações grosseiras, e elevou-se aos poucos ao grau de exatidão e sublimidade em que a encontramos (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 89).

Em relação a propriedade de extensão da Geometria, para D'Alembert, elas devem ser refletida em três dimensões, sendo no primeiro momento considerado apenas uma única dimensão – o comprimento – com o propósito de determinar mais facilmente algumas propriedades. Em seguida, considerar uma segunda dimensão, a superfície, e por fim, reunir as três dimensões para tratar da solidez. Dessa forma, “as propriedades das linhas, das superfícies e dos sólidos constituem o objeto e a divisão natural da Geometria (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 99)” e as linhas serão consideradas sem largura, e as superfícies, sem profundidade.

Para D'Alembert (2015c) a Geometria poderia ter sido dividida de diferentes maneiras, entretanto, como vimos ele a divide em elementar e transcendente. Em relação a Geometria Elementar:

não considera se não as propriedades das linhas retas, das linhas circulares, das figuras e dos sólidos mais simples, vale dizer, das figuras retilíneas ou circulares e dos sólidos circunscritos por elas. O círculo é a única figura curvilínea de que se fala nos elementos da Geometria. A simplicidade de sua descrição, a facilidade com que suas propriedades se deixam deduzir, e a necessidade de recorrer a ele para realizar diferentes operações bastante simples, como elevar uma perpendicular, medir um ângulo etc., todas essas razões determinam que o círculo, e somente ele, entre nos elementos de Geometria. No entanto, algumas curvas, como a parábola, têm uma equação mais simples que a do círculo; outras, como a hipérbole equilátera, têm

uma equação tão simples quanto a dele. Sua descrição, porém, é muito menos fácil que a do círculo, e suas propriedades não se deixam deduzir com a mesma naturalidade (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 100).

Dentre as propriedades que podem ser estudadas em Geometria Elementar, D'Alembert (2015c) destaca que dada uma figura, considerando a medida dos ângulos, e tomando um arco descrito a partir de seu vértice unida ao princípio da superposição é o suficiente para demonstrar todas as proposições relacionadas à Geometria Elementar das Linhas.

Por exemplo⁴⁰, ao se querer demonstrar que dois triângulos de bases iguais e ângulos de bases iguais são iguais em tudo, o princípio da superposição é uma ferramenta de demonstração que pode ser empregada com êxito, visto que dada a suposta igualdade das bases e dos ângulos, ao sobrepormos esses triângulos um ao outro, podemos concluir certamente que essas bases e ângulos irão coincidir. E a partir dessa coincidência, evidenciamos como uma consequência necessária para que essa igualdade se mantenha, a justaposição do resto.

D'Alembert conclui que o método da superposição, “contrariamente ao que afirmam alguns geômetras modernos, não é um princípio mecânico e grosseiro, pelo contrário, é um princípio rigoroso, claro e simples, extraído da verdadeira natureza da coisa (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 103)”.

Ao se utilizar esse princípio da superposição, temos de imaginar uma figura superposta a outra, assim, podemos concluir alguns resultados:

1º) pressuposta uma igualdade entre as partes ou figuras dadas, devemos visualizar se há coincidência dessas partes ou figuras;

2º) dada a coincidência das partes, é possível observar a coincidência do resto e consequentemente a igualdade total e perfeita das duas figuras.

Assim, da mesma forma que esse método pode ser utilizado para mostrar a igualdade das figuras, ele também pode ser aplicado para demonstrar que as partes ou as figuras não são iguais. Dessa forma, o que concluimos é que para D'Alembert (2015c), o princípio da superposição não consiste somente em aplicar uma figura sobre a outra, mas sim dessa aplicação obter resultados que possibilitem comparar figuras entre si, possibilitando esse método para ser utilizado em diversas demonstrações da Geometria Elementar das Linhas.

Se a superposição é utilizada em relação à posição na Geometria das Linhas para obter uma melhor relação entre essas linhas, D'Alembert considera que isso se dá por conta do

⁴⁰ Atualmente conhecemos essa propriedade como ângulo, lado e ângulo.

Teorema⁴¹ que garante que uma linha paralela à base de um triângulo, corta os lados desse triângulo proporcionalmente.

Para demonstrar esse teorema⁴², basta mostrar que se essa linha paralela passa pelo ponto mediano de um dos lados, ela consequentemente passará pelo ponto mediano do outro, ficando evidente que as partes cortadas serão proporcionais, desde que essa parte cortada sempre seja comensurável à linha tomada como um todo.

Outra maneira de demonstrar esse teorema, seria por meio da redução ao absurdo⁴³, mostrando que se a relação não pode ser menor nem maior, sendo assim, ela teria de ser proporcional.

Tomando duas dimensões, teremos então a Geometria das Superfícies, que para D'Alembert (2015c), essa Geometria se reduz à sua medição – e essa medição está fundamentada num princípio único: que é justamente o da medida do paralelogramo retângulo que se sane ser o resultado do produto de sua altura por sua base.

Por meio da medida do paralelogramo retângulo é possível extrair a medida dos outros paralelogramos, tal como a dos triângulos – como mostra o princípio da superposição – são exatamente a sua metade; bem como é possível demonstrar as medidas de todas figuras planas retilíneas que podem ser consideradas como uma composição de triângulos.

Essa mesma ideia não pode ser adotada para o círculo, dessa forma, em relação à medida do círculo, D'Alembert (2015c) adota que essa medida pode ser determinada pelo uso do princípio dos limites ou da exaustão. No caso do círculo, é suficiente mostrar que o resultado do produto da circunferência pela metade do raio é o limite da área dos polígonos circunscritos e inscritos. Com esse resultado, é possível concluir que como a área do círculo é também a do limite, tem-se que o produto da circunferência pela metade do raio ou do raio pela metade da circunferência resulta justamente na área do círculo.

⁴¹ D'Alembert se refere ao que conhecemos atualmente como Teorema de Tales.

⁴² D'Alembert (2015c) aponta que para evitar a dificuldade dos incomensuráveis, geralmente costuma-se demonstrar esse teorema supondo que os dois triângulos possuem a mesma altura e estão um para o outro na mesma proporção em relação às suas bases. Entretanto, ele considera que mesmo que a abordagem dos incomensuráveis possa deixar a Geometria mais difícil, é preciso abordá-los cedo ou tarde para que não parem dúvidas e questões em aberto sobre esses assuntos, dessa forma, recomendando que quanto antes melhor, a teoria das proporções das linhas conduz naturalmente para esse tópico, sendo a introdução perfeita para tratar dos incomensuráveis.

⁴³ D'Alembert (2015c) comenta que a maior parte dos incomensuráveis só se deixa demonstrar pela redução ao absurdo, dado que a ideia de infinito – que D'Alembert relata que possuía uma visão negativa por conta da negação do finito – entra nessa espécie de quantidade, impossibilitando as demonstrações diretas de tudo o que envolva o infinito matemático. D'Alembert considera uma quantidade infinita como sendo “uma quantidade maior que toda grandeza atribuível. Como tal quantidade não existe na natureza, segue-se que a quantidade infinita só se encontra propriamente em nosso espírito, e existe nele em virtude de uma espécie de abstração, por meio da qual descartamos os limites de grandeza (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 113)”.

Ao reunir três dimensões, tem-se então a Geometria dos Sólidos. Nessa geometria, para D'Alembert (2015c) o princípio para medição segue o mesmo método que no da Geometria das Superfícies, entretanto, tudo será reduzido à medida do paralelepípedo retangular. A única dificuldade apontada por D'Alembert (2015c) será provar que uma pirâmide é um terço de um paralelepípedo com a mesma base e altura que ela.

Para fazer essa demonstração D'Alembert (2015c) faz uso do método da exaustão⁴⁴ para mostrar que pirâmides de mesma base e altura são iguais. Em seguida, podendo se provar de diferentes maneiras, que determinada uma pirâmide, ela possui o terço de um prisma de mesma base e altura. Dessa forma, utilizando as medidas de um paralelepípedo regular pode se determinar a medida de todos os sólidos delimitados por figuras planas.

Resta então apenas aplicar à superfície e à solidez da esfera nas proposições que são encontradas por meio da medida das superfícies e dos sólidos. Essas construções recairão na aplicação do método da exaustão, igualmente como foi utilizado na medição do círculo na Geometria das Superfícies.

Além do que foi definido acima, de acordo com D'Alembert (2015c), cabe também à Geometria Elementar a solução de problemas de segundo grau por recurso à linha reta e ao círculo.

Além da Geometria Elementar, vimos que D'Alembert também divide a Geometria em Geometria Transcendente, que:

é a que tem como objeto todas as curvas diferentes do círculo, como as secções cônicas e as curvas de gênero mais elevado. Ela se ocupa ainda da solução de problemas de terceiro e quarto graus, e de graus superiores. Os primeiros, como se sabe, são resolvidos por meio de duas secções cônicas, ou, mais simplesmente e em geral, por meio de um círculo e de uma parábola; os demais são resolvidos por linhas de terceira ordem ou acima. A parte da Geometria Transcendente que aplica o Cálculo Diferencial e Integral à pesquisa das propriedades das curvas é a que propriamente se chama Geometria Transcendente, e poderia ser denominada, como querem alguns autores modernos, Geometria Sublime, distinguindo-se não somente da Geometria Elementar como também da Geometria das Curvas, que não emprega os cálculos Diferencial e Integral e se restringe à síntese dos antigos ou à simples aplicação da análise ordinária (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p.100-101).

Em relação ao que as demonstrações dos tópicos em Geometria Elementar e Geometria Transcendente devem ser realizadas por meio da aplicação do cálculo algébrico em suas proposições, D'Alembert (2015c) responde que na Geometria Elementar os cálculos

⁴⁴ D'Alembert (2015c) faz uma seguinte observação em relação ao método da exaustão. Ele considera que esse método é simples de se utilizar, entretanto, a sua aplicação às vezes pode tornar com que as demonstrações fiquem longas e complicadas. Portanto, ele sugere que o método da exaustão pode ser convenientemente substituído pelo método dos infinitamente pequenos, então, por meio desse método, as demonstrações ficam mais fáceis de serem realizadas sem nada a perder na questão do rigor matemático.

algébricos não devem ser aplicados em absoluto, devem ser empregados apenas para facilitar as demonstrações, entretanto, ele acredita que “não parece haver na Geometria Elementar nenhuma demonstração que realmente possa ser facilitada por esse cálculo (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 108)”.

A única exceção dessa afirmação de D'Alembert se dá quando o objetivo é obter a solução de problemas de segundo grau por meio do uso da linha reta e do círculo, dado que, ao se fazer uso de cálculos algébricos nesse caso, simplifica ao extremo o processo para obtenção da solução das questões desse gênero, além de abreviar as demonstrações. Entretanto, essa ressalva é feita apenas caso queira se manter esse problema dentro da Geometria Elementar, pois caso se deseje tomar esse tópico como passagem da Geometria Elementar para a Geometria Transcendente, não há restrição em relação à aplicação dos cálculos algébricos.

Em relação a essa aplicação dos cálculos algébricos, como pudemos verificar quando abordarmos a Álgebra, essa prática é utilizada em Geometria para representar linhas geométricas por letras, entretanto, embora menos comum, D'Alembert (2015c) relata que também é possível aplicar a Geometria na Álgebra. Por exemplo, ao considerar o propósito “obter o quadrado de $a + b$ ”, algebricamente basta demonstrar que esse quadrado contém o quadrado de a , mais o de b e ainda, mais duas vezes o produto de a por b . Ou então, podemos utilizar a Geometria para demonstrar esse teorema da Álgebra:

Para tanto, tenho apenas que traçar um quadrado, cuja base e altura dividirei em duas partes, uma eu chamarei de a , a outra de b ; a seguir, a partir dos pontos de divisão, traçarei linhas paralelas aos lados do quadrado, dividirei esse quadrado em quatro superfícies, e verei, com um golpe de vista, que uma é o quadrado de a , a outra o quadrado de b , e que as outras duas serão, cada uma delas, um retângulo formado por a e b ; do que se segue que o quadrado do binômio $a + b$ contém o quadrado de cada uma das duas partes, mais duas vezes o produto da primeira pela segunda (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p.31).

Esse exemplo, de acordo com D'Alembert (2015c), se refere a apenas uma maneira de mostrar que a Geometria pode ser aplicada à Álgebra, entretanto, não seria necessário nessa situação. Essa aplicação é muito mais considerada em se utilizar ao tratar das curvas de gênero parabólico, e do caminho dessas curvas em relação ao seu eixo, extremamente útil aplicar a Geometria nessa situação para evidenciar de modo que facilite a demonstração da grande variedade dos inúmeros teoremas das equações e suas raízes.

Já que estamos nos referindo a aplicação da Geometria na Álgebra, vale a pena comentar outros exemplos da Geometria em outras ciências do conhecimento. D'Alembert

(2015c) destaca que a aplicação da Geometria aliada com a Astronomia nas ciências geográficas, são extremamente úteis em questões de ordem prática na navegação, dado que por meio dessa aplicação é possível determinar com o auxílio de operações geométricas e astronômicas a figura do globo que habitamos; é possível ainda ao se observar as latitudes e longitudes, encontrar a posição dos lugares; e também é bastante utilizada porque ao fazer uso das operações geométricas, sermos capaz de determinar a posição dos lugares mais distantes entre si.

O último exemplo de aplicação da Geometria em outras ciências que traremos é o caso de Aplicar a Geometria à Aritmética. D'Alembert (2015c) traz como exemplo que a sequência de números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...) ao serem somados sucessivamente, resulta na mesma soma da sequência de quadrados (1, 4, 9, 16, 25, ...). É importante salientar que essa proposição poderia ser demonstrada algebricamente, mas o que se pretende é aplicar a Geometria para fazer a demonstração desse resultado, portanto, primeiramente:

desenhai um triângulo retângulo ABE, com um lado horizontal e outro vertical (designo-os assim para fixar a sua imagem); dividis o lado vertical AB em tantas partes iguais quanto quizerdes, e, a partir dos pontos de divisão, 1, 2, 3, 4 etc., extraís as paralelas 1f, 2g até BE; obtereis assim o pequeno triângulo A1f, a seguir o trapézio 1fg2, que valerá três vezes esse triângulo, e depois o trapézio 2gh3, que valerá cinco vezes o triângulo.

Os espaços terminados pelas paralelas 1f, 2g etc. serão representados pelos números 1, 3, 5, 7 etc., a começar pelo triângulo A1f, e designando-se esse triângulo por 1, 5. As somas desses espaços serão os triângulos A1f, A2g, A3h etc., que são como os quadrados dos lados A1, A2, A3, vale dizer, como 1, 4, 9 etc., cuja soma de números ímpares equivale à soma dos números quadrados (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p.32).

Com relação ao verbete da Geometria, D'Alembert (2015c) comenta que ela poderia ser dividida de outras formas, e uma sugestão apresentada por ele, seria dividir a Geometria em três categorias: Geometria Elementar, ou Geometria das linhas retas e do círculo; Geometria Transcendente, ou Geometria das curvas; e Geometria Sublime, ou Geometria dos novos cálculos.

O filósofo-matemático D'Alembert (2015c) sugere ainda que a Geometria poderia ser dividida de duas formas: em *antiga* e *moderna*. O que ele considerou como Geometria antiga foi aquela em que não se utiliza cálculo analítico ou então faz uso do que ele considera como um cálculo analítico ordinário, ou seja, é aquela Geometria que não emprega os cálculos Diferencial e Integral na obtenção de suas propriedades e resultados.

Diferentemente da Geometria antiga, a Geometria moderna faz uso do Cálculo Diferencial e Integral empregando a análise de Descartes para investigar as propriedades das

curvas. Entretanto, D'Alembert (2015c) pondera que mesmo essa Geometria Moderna poderia ser considerada antiga. Isso é possível porque, a Geometria seria moderna em relação aos resultados de Apolônio e Arquimedes – que não empregavam o uso do cálculo, mas essa Geometria seria antiga quando comparada a Geometria denominada como Sublime, pois essa empregava os resultados de Leibniz (1646-1716) e Newton, bem como o que seus sucessores aperfeiçoaram.

No verbete da Geometria, D'Alembert (2015c) traça uma breve história da Geometria começando desde o Antigo Egito, lugar esse, que ele considera o berço do conhecimento humano e que dentre todos os países que conhecemos, o Egito parece ser o local em que as ciências foram cultivadas primeiro lá. Dessa forma, ele comenta que segundo Heródoto (acreditam que viveu no período de 485-420 a.C.) e Estrabão (acreditam que viveu no período de 64 a.C. - 21 d.C.), os egípcios na tentativa de reconhecer os limites de suas terras por conta das confusões provocadas pelas cheias do rio Nilo, inventaram a arte de mensurar e dividir a terra com o propósito de distinguí-las considerando o seu contorno e a superfície delimitada, sendo assim, esse fato considerado a primeira aurora da Geometria, em que o homem não demorou muito para realizar nesses terrenos operações de mensuração, extensão, bem como de superfície, integral ou parcialmente.

Do Egito, D'Alembert (2015c) nos “transporta” para a Grécia abordando que essa passagem da Geometria do Egito para a Grécia se deu, supostamente, graças a Tales de Mileto (acreditam que viveu no período de 624-546 a.C.), em que ele acrescentou o que aprendera e enriqueceu a Geometria com numerosas proposições, passando a “tarefa” posteriormente para Pitágoras. Depois de Pitágoras, D'Alembert comenta que os filósofos e suas escolas continuaram a cultivar o ensino e o estudo da Geometria:

Plutarco nos ensina que Anaxágoras se ocupou do problema da quadratura do círculo na prisão em que se encontrava, e teria redigido uma obra sobre o assunto. Anaxágoras havia sido acusado de impiedade por ter dito que os astros eram feitos de matéria, e teria sido condenado à morte, não fosse Péricles lhe salvar a vida. Vê-se por esse exemplo que não é de hoje que os filósofos são perseguidos por ter razão. Os sacerdotes gregos eram tão hábeis quanto certos teólogos modernos, quando se tratava de erigir em artigo de religião o que não o era. Platão, que dedicou a Anaxágoras grandes elogios por sua habilidade em Geometria, os teria merecido ele mesmo. Sabe-se que encontrou uma solução bastante simples para o problema da duplicação do círculo. Sabe-se ainda que esse grande filósofo chamava Deus de *eterno geômetra* (ideia verdadeiramente justa e digna do Ser Supremo) e considerava a Geometria tão necessária ao estudo da Filosofia que fez gravar no pórtico de sua escola estas palavras memoráveis: *quem ignora a Geometria não será admitido*. Entre Anaxágoras e Platão encontra-se Hipócrates de Quio, que deve ser mencionado por sua famosa quadratura da lúnula. O falecido Cramer, professor de Filosofia em Genebra, nos oferece nas *Mémoires de l'Académie de Prusse pour l'année 1748* uma dissertação muito boa sobre esse geômetra, em que se pode ler

que Hipócrates, numa viagem a Atenas, teve a oportunidade de ouvir os filósofos e tomou tanto gosto pela Geometria que logo realizou progressos admiráveis. Esse estudo desenvolveu seus talentos; para todo o resto, ele tinha o espírito lento e obtuso. O mesmo se diz de Clavius, bom geômetra do século XVI (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 90-91).

D'Alembert (2015c) comenta que Euclides de Alexandria reuniu o que seus predecessores haviam encontrado a respeito dos elementos da Geometria. Dessa forma, Euclides compôs a obra *Os Elementos*, nessa obra ele considera somente as propriedades da linha reta, do círculo, das superfícies, e dos sólidos retilíneos ou circulares. D'Alembert acrescenta que não é que na época de Euclides não se conhecesse outra curva além do círculo, os geômetras já haviam percebido que, ao seccionar-se um cone de modos variados, é possível se formar diferentes curvas dos círculos, chamadas secções cônicas.

Com relação aos geômetras, D'Alembert afirma que alguém que é geômetra não se limita somente para referir que essa pessoa é boa somente em geometria, mas é também um sinônimo para dizer que é um bom matemático:

Geômetra é, propriamente dizendo, uma pessoa versada em Geometria; mas esse nome se aplica em geral a todo matemático. Pois, como a Geometria é uma parte essencial das Matemáticas que tem sobre quase todas as outras partes uma influência incontornável, dificilmente é possível ser versado com profundidade em qualquer parte das Matemáticas sem sê-lo, ao mesmo tempo, em Geometria. Assim, quando se diz que Newton foi um grande geômetra, quer-se dizer com isso que ele foi um grande matemático. Um geômetra que não queira se restringir a compreender o que já foi encontrado por outros deve ser dotado de muitas qualidades bastante raras: justeza de espírito, para apreender os raciocínios e desfazer os paralogismos; concepção desenvolvida, para compreender com prontidão; capacidade extensa, para abarcar de uma só vez as diferentes partes de uma demonstração complicada; memória, para reter as proposições principais, as suas demonstrações ou ao menos o seu espírito, e, em caso de necessidade, lembrar-se delas e utilizá-las (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015b, p. 295).

Voltando a falar das curvas, de acordo com D'Alembert (2015c), essas diferentes propriedades de curvas descobertas por um número sucessivo de matemáticos foram reunidas em oito livros e publicados por Apolônio de Perga (que viveu cerca de 250 a.C.), sendo ele o autor dos nomes dados às três secções cônicas, *parábola*, *elipse* e *hipérbole*, cujas razões são explicadas nos artigos respectivos. Nessa mesma época de Apolônio, D'Alembert (2015c) cita que Arquimedes deixou de legado, obras que abordaram a esfera e o cilindro, as conoides e as esferoides, a quadratura do círculo, além de um tratado sobre a espiral. Devem-se ainda a Arquimedes outros escritos não menos admiráveis, mas relacionados mais à Mecânica do que à Geometria, tais como *De aequiponderantibus*, *De insidentibus húmido*, entre outros.

Em relação à essas descobertas geométricas, D'Alembert (2015c, p.109) faz uma reflexão de que atualmente muitas das propriedades relacionadas às curvas e suas tangentes, seus pontos de inflexão, suas assíntotas, suas ramificações, suas retificações e quadraturas, que os matemáticos do passado tiveram muita dificuldade de acompanhar esses desenvolvimentos, hoje podem ser resolvidas de uma maneira muito simples por meio do progresso da Análise.

D'Alembert relata que após a destruição do Império Romano pelos bárbaros, o Ocidente passou por um período de ignorância profunda, em que não se encontravam mais entre os latinos, nem entre os gregos, homens versados em Geometria. O que havia eram apenas alguns homens denominados como “doutos”, que segundo D'Alembert (2015c), por serem menos ignorantes do que os demais. Embora estivessem cientes das descobertas de seus antecessores, nada fizeram para acrescentá-las.

Entretanto, no oriente, os árabes, entre os séculos IX e XIV, tiveram um considerável número de astrônomos, geômetras, químicos, geógrafos, etc, que se dedicaram em estudar e avançar essas ciências. Mas, em relação a Geometria, ao contrário da Álgebra, poucas chegaram até o Ocidente, e muitas permaneceram em manuscrito. No período do renascimento das letras, D'Alembert (2015c) comenta que os homens praticamente se limitaram a traduzir e comentar obras dos geômetras antigos, tendo um avanço considerável na Geometria somente após Descartes.

Em 1637, Descartes publicou o trabalho intitulado *Geometria*, começando pela solução de um problema empregando a aplicação da Álgebra à Geometria, dessa forma, dando um grande passo na Geometria depois de Arquimedes. D'Alembert (2015c) afirma que não se deve a Descartes somente a aplicação da Álgebra à Geometria, mas também os primeiros ensaios de aplicação da Geometria à Física, tais ensaios, que se veem principalmente em sua *Dióptrica*, e em passagens de seus *Meteoros*, levaram alguns a afirmar que toda a sua física não passava de uma geometria. Entretanto, a física de Descartes era feita mais de hipóteses do que de cálculos, e estas foram posteriormente desmentidas pela análise.

D'Alembert, considera que “a Geometria, que tanto deve a Descartes, foi o que houve de mais nocivo à sua física (2015c, p.95)”. Além do êxito na aplicação da Geometria à ciência da natureza, para D'Alembert (2015c), Descartes deve receber o mérito de ter sido o primeiro a pensar na existência de leis do movimento, mesmo que tenha se enganado a respeito delas. Foi a partir dessas hipóteses, que Descartes abriu caminho para que outros matemáticos também realizassem avanços em outras áreas, até culminar no Cálculo Diferencial e Integral e consequentemente na Geometria Diferencial:

O momento dessa venturosa descoberta, no entanto, estava próximo. Fermat foi o primeiro a conceber o método das tangentes pelas diferenciais; Barrow o aperfeiçoou, imaginando um pequeno triângulo diferencial e servindo-se do cálculo analítico para descobrir as relações entre os pequenos lados desse triângulo e, por esse meio, a subtangente das curvas. Ao mesmo tempo, viu-se que os planos ou sólidos infinitamente pequenos, cujas superfícies ou sólidos podem ser supostos como formados, crescem ou decrescem em cada superfície ou sólido segundo leis diferentes, e, assim, a pesquisa da mensuração dessas superfícies ou sólidos se reduziria a conhecer a soma de uma série ou sequência infinita de quantidades crescentes ou decrescentes. Daí a pesquisa da soma das sequências, chamada *Aritmética dos Infinitos*: somam-se muitas e aplicam-se às figuras geométricas os resultados obtidos. Wallis, Mercator, Brouncker, Jacques Grégori, Huyghens e outros destacaram-se no gênero. Fizeram mais, reduziram certos espaços e arcos de curvas a séries convergentes, quer dizer, cujos termos diminuem progressivamente, e encontraram assim o meio para obter o valor desses espaços e desses arcos, se não exatamente, ao menos por aproximação (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 96).

Finalmente D'Alembert (2015c) chega até Newton e considera que as contribuições de Newton à Geometria pura não foram menores que os seus antecessores. Na obra intitulada *Quadratura curvarum*, ele ensina a maneira de obter a quadratura das curvas pelo Cálculo Integral e de reduzir a quadratura das curvas, quando isso é possível, à de outras curvas mais simples, principalmente do círculo e da hipérbole. Em outra obra, chamada *Enumeratio linearum tertii ordinis*, Newton aplicou o cálculo a curvas cuja equação é de terceiro grau, e dividiu essas curvas em gêneros e espécies, e enumerou-as. Entretanto, para D'Alembert (2015c) nada se comparou ao que ele considera a obra imortal de Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, principalmente pela extensa aplicação da Geometria à Física, que representou uma revolução na Física e fez dessa ciência uma nova ciência fundamentada na observação, na experimentação e no cálculo.

D'Alembert (2015c) encerra seu histórico da Geometria fazendo uma análise de que a maioria das contribuições nesse campo foram dadas por geômetras⁴⁵ de origem alemã ou inglesa, entretanto, ele enfatiza a importância dos franceses no processo do avanço dessa ciência da seguinte forma:

Porém, antes de terminarmos esta história, não podemos deixar de mencionar, para honra de nossa nação, que se a nova Geometria é de autoria principalmente dos ingleses e dos alemães, é aos franceses que se devem as duas grandes ideias que levaram a ela. A Descartes se deve a aplicação da Álgebra à Geometria, sobre a qual se funda o Cálculo Diferencial; e a Fermat, a primeira aplicação do cálculo às

⁴⁵ D'Alembert (2015c) comenta que depois de Newton, os ingleses não realizaram nenhuma descoberta relevante na Geometria. Para ele, devemos a outras nações, aos franceses e aos alemães, mas sobretudo aos franceses “o mérito de terem realizado novas pesquisas sobre o sistema do mundo, a figura da Terra, a teoria da Lua, a precessão dos equinócios, estendendo assim prodigiosamente a Astronomia Física (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 109)”.

quantidades diferenciais, para obter as tangentes, que é o método de generalização da nova Geometria. Se acrescentarmos a isso o que os franceses atualmente contribuem para a Geometria, há que se convir que essa ciência não deve menos à nossa nação do que às outras (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 98).

Finalizando seu verbete da Geometria, D'Alembert (2015c) tece outras considerações em relação ao modo que a Geometria tem sido abordada por seus contemporâneos. Para ele, poucos geômetras estão à altura de contribuir com essa ciência (Geometria) como fez Descartes, Newton, Leibniz, Bernoulli e outros matemáticos do passado. D'Alembert (2015c) comenta que a Geometria é uma ciência rica em elementos, e que muitos ainda estão por ser descobertos, entretanto, para D'Alembert (2015c) muitos desses “elementos são obra de matemáticos medíocres, cujos conhecimentos de Geometria não vão além de seu próprio livro, e que são incapazes, por isso, de tratar a matéria adequadamente (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 106)”. Ele ainda acrescenta que:

praticamente não há autor que, no prefácio, a seus elementos de Geometria, não desdenhe os que o precederam. Uma obra do gênero que seja do agrado de todos é algo que ainda não foi feito, mas talvez seja uma quimera acreditar que ela seja possível. Os que estudam Geometria nem sempre têm a mesma intenção. Uns se restringem à prática, e para eles um bom tratado de Geometria prática pode ser suficiente, talvez com o acréscimo de raciocínios que esclareçam as operações, até certo ponto, retirando-os do que de outro modo seria uma rotina cega. Outros querem adquirir uma tintura de Geometria especulativa, mas sem ir muito longe; para estes, não é preciso ter muito rigor nos elementos, podem-se supor verdadeiras várias proposições cuja verdade se percebe suficientemente por si mesma ou é demonstrada em elementos ordinários (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 106-107).

É possível inclusive fazermos uma analogia das palavras de D'Alembert (2015c) em relação ao ensino de Geometria. Ele acredita que para que se tenha progresso na Geometria deve se pensar em como ela vinha sendo feita até o momento: uma ciência cheia de rigor e demonstrações complicadas. Então propõe que a melhor maneira de tratar os elementos geométricos possibilitando novas descobertas sem se desfazer do rigor é mudar a maneira de como são apresentadas as demonstrações. O ideal seria propor a aqueles que possuísem um espírito verdadeiramente capacitado para Geometria sempre que possível “antes problemas a serem resolvidos do que teoremas a serem provados, desde que esse método não prejudique a genealogia natural das ideias e das proposições e não leve a supor como verdadeiro o que a rigor precisa ser provado (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 107)”.

D'Alembert faz alguns questionamentos, tais como “que necessidade haveria, para ver que a metade de uma linha é menor que a linha inteira, de axiomas sobre o todo e a parte?

(DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 107)”. Em relação às definições⁴⁶, o filósofo-matemático acredita que elas sejam necessárias, entretanto, questiona o porquê delas serem apresentadas bruscamente de início, sem qualquer tipo de análise e respondendo que essa prática parece ser pouco filosófica e indo contra a natureza do espírito.

Ele aborda um exemplo de como um tema em Geometria poderia ser tratado. É citado o caso de se dizer que dada uma superfície, ela é a extremidade de um corpo e é desprovida de profundidade. Para D'Alembert (2015c), seria muito melhor considerar o corpo como ele realmente é, e para isso mostrar por meio de sucessivas abstrações tomando as ideias de que esse corpo pode ser tomado simplesmente extenso e figurado, tendo por conseguinte, a aplicação de novas abstrações, entretanto, nesse momento deve se considerar, sucessivamente, a superfície, a linha e o ponto.

Por fim, em relação ao rigor das demonstrações geométricas, D'Alembert (2015c) conclui que o maior problema não é abandonar o rigor exato, mas sim a tentativa de buscar um rigor imaginário. D'Alembert relata que um geômetra moderno tentou demonstrar “a partir da mera ideia de um fio esticado, as propriedades da linha reta, independentemente do plano, e que não admitia a hipótese que imagina que a reta vai de um ponto a outro sobre uma superfície plana (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 108)”, e ironiza que essa ideia de utilizar um fio esticado para representar a linha ter sido “mais simples e mais rigorosa do que a hipótese em questão, ou pior, como se essa ideia não tivesse o inconveniente de representar, com uma imagem física, grosseira e imperfeita, uma hipótese abstrata e matemática (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 108)”, portanto, ele conclui que em relação as propriedades de que as superfícies são planas e de que as linhas são retas, essas ideias devem ser pressupostas por abstração.

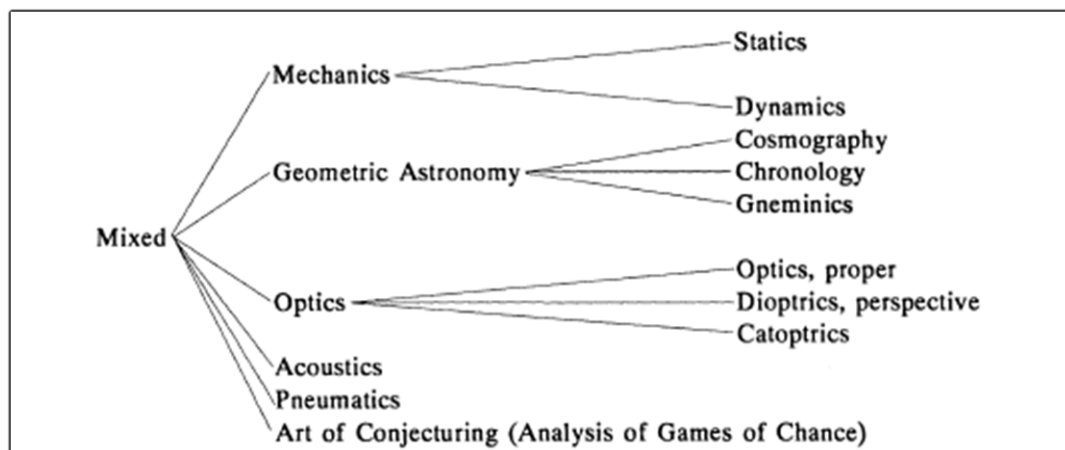
2.2.2 D'ALEMBERT: MATEMÁTICA MISTA

Na “matemática mista”, D'Alembert (2015a) observa que a quantidade deve ser considerada de acordo com as suas divisões ou subdivisões. Por exemplo, na Mecânica, o objeto da quantidade nos corpos é a grandeza enquanto eles estão em movimento ou tendendo para o movimento.

⁴⁶ D'Alembert (2015c) acredita que o único lugar adequado para certas definições é após a análise do seu objeto.

Por meio da figura 7, poderemos observar que a teoria da probabilidades ("arte de conjecturar") foi colocada na categoria de “matemática mista” juntamente aos tópicos de Mecânica, Astronomia, Óptica, Acústica e Pneumática.

Figura 7: Divisão da Matemática Mista na Árvore do Conhecimento proposta por D'Alembert



Fonte: Brown (1991).

Dessa forma, vejamos cada um dos objetos das “matemáticas mistas” com o propósito de entendermos melhor como foi definida essa categoria da matemática por D'Alembert.

2.2.2.1 MECÂNICA

No Discurso Preliminar, D'Alembert dá uma definição da divisão e o que é estudado nos conhecimentos humanos que foram elencados em “matemática mista”. Ele cita primeiramente a Mecânica e seus dois ramos, a *Estática* e a *Dinâmica* e as define do seguinte modo:

A Estática tem por objeto a quantidade considerada nos corpos em equilíbrio e tendendo apenas ao movimento. A Dinâmica tem por objeto a quantidade considerada nos corpos atualmente em movimento. A Estática e a Dinâmica têm cada uma duas partes. A Estática divide-se em Estática propriamente dita, que tem por objeto a quantidade considerada nos corpos sólidos em equilíbrio e apenas tendendo ao movimento, e Hidrostática, que tem por objeto a quantidade considerada nos corpos fluidos em equilíbrio e apenas tendendo ao movimento. A Dinâmica divide-se em Dinâmica propriamente dita, que tem por objeto a quantidade considerada nos corpos sólidos atualmente em movimento, e em Hidrodinâmica, que tem por objeto a quantidade considerada nos corpos fluidos

atualmente em movimento. Mas, se considerarmos a *quantidade* nas águas atualmente movidas, a *Hidrodinâmica* toma então o nome de *Hidráulica*. Poder-se-ia referir a *navegação* à Hidrodinâmica, e a *balística*, ou o jato das bombas, à Mecânica (D'ALEMBERT, 2015a, p.276).

No verbete da *Encyclopédie*, a *Mecânica* é definida novamente por D'Alembert como a “parte das Matemáticas mistas que considera o movimento e as forças motrizes, sua natureza, leis, e efeitos em máquinas (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 119)”. Como pudemos ver na divisão da Mecânica na árvore do conhecimento, ela foi dividida em Estática e Dinâmica.

Para D'Alembert (2015c) a Estática é a parte da mecânica em que o movimento dos corpos depende da inércia. Nesse mesmo verbete ele pondera que alguns autores definem a estática como oposição à parte que considera as forças móveis e sua aplicação, definida como Mecânica por esses mesmos autores. Entretanto, o correto é denominar a estática como a parte da Mecânica que considera as forças e os corpos em estado de equilíbrio, e denominar como Mecânica a parte que considera as forças e os corpos em movimento.

Quando aborda a aplicação geométrica na Mecânica, D'Alembert (2015c) recorre as contribuições de Newton, que consistia em distinguir duas espécies de Mecânica, uma prática e a outra especulativa ou racional. De acordo com D'Alembert, o intuito de Newton ao fazer essa distinção era distinguir a Mecânica da Geometria, de modo que a parte dos cálculos com base em operações aritméticas fizesse parte da Geometria, enquanto as questões menos relacionadas a esses cálculos fossem remetidas à Mecânica.

Dessa forma, as descrições de linhas e as figuras da Geometria pertencem à Mecânica, sendo que a Geometria tem como objeto verdadeiro somente demonstrar as propriedades da Mecânica, então D'Alembert acrescenta que o fato da Geometria se fundir nas práticas mecânicas é:

A Geometria funda-se em práticas mecânicas, e outra coisa não é do que essa Mecânica universal que explica e demonstra a arte de medir com exatidão. Mas, como a maioria das artes manuais têm como objeto o movimento dos corpos, aplicou-se o nome de Geometria à parte cujo objeto é a extensão, reservando-se o nome de Mecânica àquela que considera o movimento. Tomada neste último sentido, a Mecânica racional é a ciência dos movimentos que resultam de toda força necessária para produzir qualquer movimento que seja (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 120).

Em relação a Aplicação da Mecânica à Geometria, em seu verbete na *Encyclopédie*, D'Alembert denota que essa aplicação “consiste principalmente no eventual uso do centro de gravidade das figuras para determinar os sólidos formados por elas (DIDEROT e

D'ALEMBERT, 2015c, p. 33)” e afirma que assim como a Mecânica se beneficia da Geometria, a Geometria também se beneficia da Mecânica para abreviar a solução de determinados problemas, como por exemplo:

O Sr. Bernouilli mostrou que a curva formada por uma corda fixada sobre um plano vertical em suas duas extremidades é a que forma a maior superfície curva ao girar em torno de seu próprio eixo, pois é aquela cujo centro gravitacional é mais alto. Ver nas *Mémoires de l'Académie des Sciences de 1714* a contribuição do Sr. Varignon, intitulada *Réflexions sur l'usage que la Méchanique peut avoir en Géometrie* (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 121).

Outro exemplo que D'Alembert (2015c) apresenta para ilustrar a aplicação da Geometria à Mecânica se trata da aceleração dos corpos, em que por meio dessa aplicação é possível representarmos os tempos da queda de um corpo pesado pela abscissa de um triângulo, as velocidades pelas ordenadas, bem como os espaços percorridos pela área das partes de um triângulo.

Finalizando o seu verbete da Mecânica, D'Alembert (2015c) ainda cita que Newton acrescenta que os antigos somente consideravam as forças que tinham relação com as artes manuais, tais como a alavanca, a polia, etc., e a inércia era considerada apenas como uma força aplicada a um peso a ser deslocado pela utilização de uma máquina, sendo Newton o primeiro a abordar na Mecânica, questões como leis da inércia, do movimento, forças centrais e centrífugas, a resistência dos fluídos e outros tópicos em sua obra denominada *Princípios matemáticos da Filosofia Natural*, tendo seu primeiro volume publicado em 1687 e os dois volumes finais em 1713 e 1726.

2.2.2.1.1 ESTÁTICA

Embora no verbete da Mecânica, a Estática já tenha sido bem definida, vamos ver também como a Estática está definida em seu verbete da *Encyclopédie* (1765) e escrito por D'Alembert. Lá está descrito que a Estática é uma parte da mecânica, cujo objeto são as leis do equilíbrio de corpos ou poderes que agem um no outro. É dito ainda que a mecânica em geral está preocupada com as leis do equilíbrio e movimento dos corpos, mas o nome da mecânica é mais perfeitamente dado à parte que lida com o movimento, enquanto a estática é dado à parte que lida com o equilíbrio. A palavra estática tem origem no latim, e tem como

significados a ideia de parar ou descansar, que é justamente o efeito do equilíbrio, produzir repouso, mesmo que exista no corpo em equilíbrio uma tendência ao movimento.

De acordo com a *Encyclopédie* (1765), a estática pode ser ainda dividida em duas partes: a estática e a hidrostática. Quanto a parte que preserva o nome de estática, seu objeto de estudo são as leis do equilíbrio de sólidos. É nessa parte que se tratam suas diferentes máquinas simples ou compostas, como a polia, a alavanca, o plano inclinado, etc. Em relação a outra parte, chamada hidrostática, tem por objeto de estudo as leis do equilíbrio dos fluidos.

2.2.2.1.2 DINÂMICA

Vale a pena também observar, que a Dinâmica foi bem definida no verbete da Mecânica, mas ao procurarmos pelo seu verbete, escrito por D'Alembert, na *Encyclopédie* (1755), vimos que em sua descrição é comentado que a palavra Dinâmica tem sua origem no idioma grego, significando poder, vindo do verbo “eu posso”. Dessa forma, a Dinâmica é definida como a ciência dos poderes ou causas motoras, isto é, as forças que colocam corpos em movimento.

O verbete relata ainda que Leibniz (1646-1716) foi o primeiro a usar este termo para designar a parte da mecânica que lida com o movimento dos corpos, na medida em que é causada por forças motrizes atuantes ao corpo tirando de seu estado de repouso ou ainda forças motrizes que atuam de forma contínua sobre esses corpos. Assim, o princípio geral da Dinâmica tomada neste sentido é que o produto da força aceleradora ou retardadora ao longo do tempo é igual ao elemento da velocidade. Logo, a razão dada para isto é porque a velocidade aumenta ou diminui a cada instante, em virtude da soma dos pequenos golpes repetidos que a força motriz dá ao corpo durante um determinado momento.

A palavra Dinâmica, conforme a *Encyclopédie* (1755), tem sido usada há alguns anos entre os geômetras, para significar, em particular, a ciência do movimento de corpos que agem uns sobre os outros, de qualquer maneira, seja empurrando ou puxando os meios de algum corpo interposto entre eles, e ao qual eles estão ligados, como um fio, uma alavanca inflexível, um plano, etc. Então, segundo esta definição, os problemas em que se determinam as leis da percussão dos corpos são problemas de dinâmica.

Finalizando suas considerações em relação a Dinâmica, o verbete faz uma explanação de como alguns autores lidam no que diz respeito aos problemas em que se trata de determinar o movimento de vários corpos, que se sustentam uns aos outros por algum corpo

flexível ou inflexível, e que mutuamente alteram seus movimentos, também conhecido como o problema dos centros de oscilação.

2.2.2.2 ASTRÔNOMIA GEOMÉTRICA

A Astronomia Geométrica é outro ramo da “matemática mista” em que a quantidade considerada nos movimentos dos corpos celestes dá origem a *Astronomia* geométrica, e, por conseguinte: a “*Cosmografia* ou *descrição do Universo*, que se divide em *Uranografia* ou *descrição do céu*, em *Hidrografia* ou *descrição das águas*, e em *Geografia*, de onde, ainda, a *Cronologia* e a *Gnomônica* ou *arte de construir quadrantes* (D’ALEMBERT, 2015a, p.276).

Dessa forma, como pudemos observar, a Astronomia Geométrica está classificada na categoria de “matemática mista”, apresentando ainda três ramificações que se referem a Cosmografia, Cronologia e Gnomônica. Dessa forma, abordaremos ainda como estão definidos esses tópicos em seus respectivos verbetes na *Encyclopédie*.

2.2.2.2.1 COSMOGRAFIA

Em seu verbete da *Encyclopédie* (1752), a Cosmografia está definida como sendo a ciência capaz de realizar a descrição do mundo, ensinando a construção, a figura, a disposição e as relações de todas as partes que compõem o Universo.

D’Alembert define no verbete da cosmografia, que ela se difere da cosmologia na medida em que raciocina na construção e formação do universo, enquanto a cosmologia é apenas a descrição histórica da evolução do universo. A cosmografia em sua definição geral abrange, tudo o que é objeto da física. No entanto, esta palavra designa a parte da física que lida com o sistema geral do mundo. Nesse sentido, a Cosmografia tem duas partes: Astronomia, que torna conhecida a estrutura dos céus e o arranjo das estrelas; e Geografia, cujo objeto é a descrição da terra.

Cada um dos dados abaixo, podem ser explicados em seus respectivos verbetes, entretanto, D’Alembert, em seu verbete na *Encyclopédie* (1752), os considera importantes exemplos para mostrar como a Cosmografia descreve o nosso universo. Ele inicia fazendo uma breve descrição dos principais astros que compõem nossa galáxia, partindo do sol e chegando até os planetas⁴⁷ descobertos até a escrita desse verbete, 1752.

⁴⁷ D’Alembert define que os planetas não são globos perfeitos e suas órbitas são elipses e não círculos.

Em relação ao Sol, é apontado que ele está no centro do nosso sistema. É um globo luminoso, cerca de um milhão de vezes maior que a Terra; gira em seu eixo em 25 dias; vemos manchas que desaparecem.

Quanto a Mercúrio, comenta-se que gira em torno do Sol em três meses; não sabemos se ele gira em torno de si mesmo. Seu diâmetro é $1/300$ daquele do sol. A sua maior distância até o Sol é o equivalente a 5137 diâmetros terrestres, e a menor distância é de 3377 diâmetros terrestres.

Em seguida, é relatado que Vênus tem um diâmetro de $1/100$ do Sol. Não há um consenso sob a movimentação em torno de seu eixo, segundo alguns ocorre em 24 dias, segundo os demais esse período leva 24 horas. Sua maior distância do Sol é de 8008 diâmetros terrestres e o menor de 7898 diâmetros terrestres.

Chegando ao nosso planeta Terra, D'Alembert aponta que a Terra está em sua maior distância ao Sol em 11187 diâmetros terrestres e no menor em 10813 diâmetros terrestres. Acontece em 24 horas o movimento em torno de seu próprio eixo, e este eixo tem além disso um movimento cônico, cuja revolução é de 25.000 anos. Tem como eclíptica⁴⁸ um ângulo de $66^{\circ} 1/2$. Nossa Terra está coberta de dois grandes fluidos: um é o mar, no qual a ação da Lua e do Sol causa um contínuo fluxo e refluxo; o outro é o ar, no qual muitas propriedades podem ser notadas.

A próxima descrição se refere ao planeta Marte, que leva por volta de 25 horas para girar em torno de si mesmo e em torno do Sol, dois anos. Sua maior distanciada sol é de 18315 diâmetros terrestres e a menor de 15213 diâmetros terrestres. O diâmetro de Marte é de $1/170$ a do sol.

Já em relação a Júpiter, D'Alembert escreve que o planeta gira em torno de seu próprio eixo em 10 horas e em torno do Sol em 12 anos. Seu diâmetro é $1/9$ daquele do Sol, sua maior distância é 59950 diâmetros terrestres e o menor de 54450 diâmetros terrestres.

Por fim, chegamos até o último planeta que se tinha conhecimento até o ano de 1752, Saturno. É descrito que leva trinta anos para dar uma volta completa ao redor do Sol, entretanto, não se sabia se ele girava em torno de seu próprio eixo. Sua maior distância ao sol é de 110935 diâmetros terrestres e a sua menor 98901 diâmetros terrestres.

Ainda em seu verbete da Cosmografia, D'Alembert comenta que além desses seis planetas principais, existem secundários ou satélites. A lua é o satélite da Terra; gira em torno

⁴⁸ É a projeção sobre a esfera celeste da trajetória aparente do Sol observada a partir da Terra. O plano da eclíptica é o plano da órbita da Terra ao redor do Sol. É o plano de referência primária ao descrever a posição de um corpo no Sistema Solar, com a latitude celeste sendo medida em relação ao plano eclíptico.

de si e da Terra em um mês; está a uma distância de nós em 30 diâmetros terrestres. Seu diâmetro é 1/4 do diâmetro terrestre. Júpiter também tem quatro satélites e Saturno cinco. Além disso, este último planeta tem um anel muito singular. Os eclipses dos satélites são de grande utilidade para as longitudes.

Em relação a luz emitidas pelos astros, D'Alembert denota em seu verbete na *Encyclopédie* (1752) que a luz dos planetas é fosca e baixa em comparação com a do Sol, as suas fases, seus pontos constantes, e os seus diferentes eclipses provam que eles são terras opacas que recebem luz solar. A luz solar é um composto de sete cores primitivas: vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, índigo, violeta; e esta luz chega até nós em 7 a 8 minutos. E quanto às estrelas fixas são tantos sóis quanto os nossos, cuja distância é tão grande que não pode ser medida. Existem diferentes tamanhos, mudanças, nebulosas, etc.

Para finalizar o verbete em que descreve a Cosmografia, D'Alembert afirma que as conchas e peixes petrificados encontrados nos lugares mais altos e mais remotos do mar, provam que as águas uma vez inundaram os lugares que habitamos.

2.2.2.2.2 CRONOLOGIA

A Cronologia tem seu verbete publicado na *Encyclopédie* (1752), entretanto, não é possível identificar quem foi o autor desse verbete extremamente longo e que contém uma sequência de informações históricas discutindo as diversas tentativas de provar a criação do mundo e também identificar possíveis datas que relatem o surgimentos de algumas civilizações do nosso planeta, tais como os argonautas, os egípcios, e para isso utiliza as ideias e estudos de diversos autores que se debruçaram em relação ao assunto, sendo possível observarmos que até Newton tentou dar respostas para algumas questões nesse sentido se aliando de dados da Astronomia para validar suas hipóteses para determinar o surgimentos de antigas civilizações no planeta Terra.

Após essa extensa e rica discussão, o verbete se propõe a discutir a Cronologia Sagrada, sendo esta tomada como a Cronologia dos primeiros tempos após o dilúvio e os acontecimentos que se seguiram após esse fato, entretanto, essa Cronologia segue como fonte de seu estudo os documentos deixados pelos antepassados relatando questões de ordem da religião, ou seja, textos sagrados, além de estudar a cronologia dos acontecimentos sagrados tais como a passagem de Moisés, Abraão entre outras figuras bíblicas, inclusive é feito uma discussão sobre a passagem de Jesus na Terra.

Quanto mais remotos são os tempos, mais incerta é a medida, por isso é principalmente para a Cronologia dos primeiros tempos que os homens mais instruídos se aplicaram. O verbete nos apresenta uma analogia bem interessante em referência ao estado que pode ser encontrado informações a respeito da História Antiga, como se ela fosse um palácio em ruínas, cujos restos são amontoados desordenadamente e a maioria desapareceu. Quanto mais faltam esses materiais, mais é possível imaginar e formar com os materiais que permanecem, planos diferentes que não teriam nada em comum entre si, mas, na verdade essa é uma crítica por conta da diversidade de teorias apresentadas pelos autores que abordam esse período, considerando-se extremamente contraditórios entre si, refletindo que todas as pesquisas das questões cronológicas que foram realizadas até aquele momento se tratavam de serem apenas combinações mais ou menos felizes desses materiais disformes.

Entretanto, nesse verbete é destacado ainda que a ciência da Cronologia não se limita a tempos remotos e à fixação de tempos antigos; estende-se também a outros usos, particularmente, aos usos eclesiásticos. É por sua ajuda que é possível celebrar festas como a da Páscoa, Natal, e isto se deu por meio da observação de períodos, ciclos, culminando na construção do calendário. Então, pode ser concluído que existem propriamente dois tipos de cronologia; um, como puramente histórico e, com base nos fatos que a antiguidade tem; e a outra que por meio dos matemáticos e astronômicos, que usam observações e cálculos para gerir períodos, seja para os seus mais diversos usos, mas que foram elaborados principalmente para a utilização de uma religião – referindo-se ao calendário Gregoriano.

O verbete aponta que as obras mais úteis que tem aparecido nos últimos tempos na Cronologia, são aquelas em que contém tópicos que promovem e constituem a arte de verificar as datas, tais como tabelas cronológicas que apresentam todas as diferentes marcas que caracterizam cada ano. Estas marcas são as indicações, os episódios, o ciclo pascal, o ciclo solar, os eclipses, etc.

2.2.2.2.3 GNÔMONICA

A Gnômonica está definida em seu verbete da *Encyclopédie* (1757), escrito por D'Alembert, como sendo a arte de desenhar quadrantes ao sol, a lua e as estrelas, mas, principalmente, quadros solares, em um determinado plano ou na superfície de um determinado corpo.

Os gregos e romanos chamavam essa ciência como a arte da Gnomonica Sciaterica, a primeira apenas, gnômon⁴⁹, e a segunda, significa sombra, porque eles diferiam horas pela sombra de um gnômon. Alguns também chamavam de Horografia, porque é propriamente a arte de escrever em um dado plano, a hora que é. Outros, finalmente, chamam de Horologigrafia, porque os contadores eram antigamente chamados de horologium.

D'Alembert comenta que alguns atribuem a invenção dos quadrantes a Anaximandro de Mileto (610 a.C. – 546 a.C.) e outros a Thales de Mileto (624 a.C. – 558 a.C.). Observa ainda que os romanos também não levaram muito tempo para ter conhecimento em relação a utilização dos relógios de sol. Ele aponta que na cidade de Roma, por volta de 400 anos após sua fundação⁵⁰, havia um relógio de sol que foi utilizado para calcular o tempo do nascer e do pôr do sol, mais especificamente no Templo de Quirino, na região do Monte Quirinal.

Ainda no verbete da *Encyclopédie* (1757), é também relatado que, posteriormente, outros relógios de sol foram construídos na cidade de Roma, como por exemplo, no Templo de Diana (ou Templo de Ártemis) localizado no Monte Aventino. Marco Valério Messala Corvino (64 a.C. – 8 d.C.), um senador romano, foi eleito cônsul na região da Sicília e construir um novo pilar com a finalidade de marcar as horas, entretanto, esse relógio de sol não foi construído para a latitude do lugar dele, fazendo com que as marcações horárias fossem imprecisas.

Além desses relógios de sol fixos, o verbete da Gnomônica na *Encyclopédie* (1757) relata que um relógio de sol portátil foi encontrado nas ruínas de Herculano – uma antiga cidade romana que foi destruída por conta de uma erupção do vulcão Vesúvio. A descrição desse relógio de sol é dada como sendo um marcador redondo e alinhado com uma alça, no final do qual é um anel que foi, sem dúvida, usado para pendurar o marcador em todos os lugares, onde quer que você quera. Todo o instrumento é de metal e um pouco convexo por suas duas superfícies: de um lado há um estilete um pouco longo e serrilhado, que é a quarta parte do diâmetro deste instrumento. Uma das duas superfícies, que pode ser considerada como a superfície superior, é inteiramente coberta de prata e dividida por doze linhas

⁴⁹ Está definido em seu verbete da *Encyclopédie* (1757), também escrito por D'Alembert, que um gnômon em Astronomia, significa literalmente um instrumento usado para medir as alturas dos meridianos e as variações do sol e das estrelas. Por meio desse gnômon astronômico, é possível observar por seus meios a altura do meridiano ao sol. Eleva-se uma perpendicular de altura considerável e conhecida na linha meridiana; marca-se o ponto em que a sombra do gnômon projetada ao longo da linha meridiana termina, mede-se a distância de sua extremidade até o pé do gnômon, ou seja, o comprimento da sombra: quando se tiver a altura do gnômon e o comprimento da sombra, encontramos facilmente a altura do meridiano do sol. O gnômon de um relógio de sol representa o eixo do mundo, ou, para dizer mais precisamente, o fim do gnômon representa o centro da terra; e se a outra extremidade do gnômon passa pelo centro do mostrador, o gnômon é então paralelo ao eixo da terra.

⁵⁰ Roma foi fundada no ano 753 a.C.

paralelas que formam tantos pequenos quadrados um pouco ociosos; os últimos seis quadrados, que são terminados pela parte inferior da circunferência do círculo, são organizados contendo caracteres, que são as letras iniciais do nome de cada mês.

Finalizando o verbete da Gnomônica, conforme está descrito na *Encyclopédie* (1757), a ciência Gnomônica é inteiramente baseada no movimento dos corpos celestes, e principalmente a do sol, ou melhor, sobre o movimento diário da terra, por isso é necessário ter aprendido os elementos esféricos e astronomia esférica, antes de aplicar a teoria da Gnomônica.

2.2.2.3 ÓPTICA

D'Alembert define no Discurso Preliminar que em relação a grandeza dessa ciência, temos que:

A quantidade considerada na luz dá a Ótica; considerada no movimento da luz, os diferentes ramos da Ótica. Luz movida em linha reta, Ótica propriamente dita; luz refletida num único e mesmo meio, Catóptrica; luz partida passando de um meio a outro, Dióptrica. É à Ótica que se deve referir a perspectiva (D'ALEMBERT, 2015a).

A Óptica também é definida por D'Alembert no verbete publicado na *Encyclopédie* em 1765, explicando primeiramente a definição dessa palavra e suas propriedades na Anatomia, e posteriormente, em relação às “matemáticas mistas” é definido que por meio dessa ciência podemos explicar como funciona a visão e onde lidamos com a visão, ou seja, em geral, o objetivo é encontrar as razões para as diferentes alterações ou modificações dos raios em sua passagem pelo olho, bem como entender o porquê de os objetos às vezes parecerem maiores ou menores, às vezes até mesmo mais confusos, como também até mesmo às vezes mais próximos ou mais distantes, entre outras coisas que enxergamos por meio da percepção da visão.

Segundo a *Encyclopédie* (1765), a Óptica fica definida como sendo a ciência da visão direta, em outras palavras, a visão dos objetos pelos raios que vêm de forma direta e imediatamente desses objetos para os nossos olhos sem serem quebrados ou refletidos por algum corpo. Em um sentido mais amplo, considerando também as suas definições da Anatomia, em geral, a Óptica⁵¹ pode ser considerada como a ciência da visão.

⁵¹ D'Alembert em seu verbete da *Encyclopédie* (1765) comenta que na Física, às vezes, a óptica também é estudada como a parte lida com as propriedades da luz e das cores, sem qualquer relação com a visão.

Conforme a *Encyclopédie* (1765), na Filosofia Natural, a Óptica tem aplicações tanto para explicar as leis da natureza, por meio do qual a visão é feita, quanto para esclarecer uma infinidade de fenômenos físicos que seriam inexplicáveis sem a ajuda do som. Dessa forma, a Óptica também é importante para explicar questões da Física e da Astronomia, por exemplo, se não for pela Óptica como explicar o aumento de objetos por microscópios e óculos? E em relação a alguns fenômenos da natureza, como explicar o arco-íris, o movimento aparente dos planetas, e em particular, suas estações e seus eclipses se não for pelo auxílio da Óptica?

Justamente por essa infinidade de aplicações, e também de que as leis gerais da visão se utilizam muito da Metafísica, D'Alembert afirma nesse verbete que a Óptica é a ciência que possui a maior quantidade de erros cometido pelos filósofos, e que as demonstrações de suas propriedades deveriam ter o mesmo rigor que há em outras partes da matemática. Ele acredita que para amenizar esses erros, o aperfeiçoamento dessa ciência se daria apenas por um grande número de experimentos e pelas combinações resultantes dessas experiências.

Em virtude desse apontamento que a Óptica precisa avançar no modo que lida com a demonstração de suas propriedades, D'Alembert faz um histórico por meio da obra⁵² “*Histoire des mathématiques*” de Jean-Étienne Montucla (1725-1799) com o objetivo de mostrar os erros em relação a óptica no passado e de como essa ciência precisa ser aperfeiçoada. Esse histórico começa considerando que os platonistas já tinham conhecimento da propagação da luz em linha reta e da igualdade dos ângulos de incidência e reflexão, passando por Euclides, sendo que as duas publicações creditadas a esse matemático relacionadas a óptica, para D'Alembert estão tão cheia de erros, sendo por isso que esses trabalhos precisaram ser alterados nos séculos seguintes, não mais sendo conhecido como Euclides tinha originalmente feito.

Nesse mesmo histórico D'Alembert destaca também as contribuições de Ptolomeu (100-160) em seu livro *Almagesto*, principalmente em relação a óptica, mas que também foram derrubadas, afinal suas teorias foram dadas considerando o sistema geocêntrico. Seguindo essa mesma ideia, ele aponta as ideias do matemático árabe Abu Ali al-Hasan Ibn Al-Haitham (965-1040), conhecido também pela forma latinizada Alhazen, que tentou contribuir na óptica, principalmente nas questões tocantes à problemas da Catóptrica, mas que D'Alembert considerou que há fortes indícios para se acreditar que suas obras sejam uma cópia das ideias de Ptolomeu. Posteriormente, Vitello de Silesia (1230-1275), também seguiu

⁵² Essa obra teve uma parte lançada em 1758, inclusive D'Alembert faz uso dela. Entretanto, a obra completa “*Histoire des mathématiques*” de Montucla, foi lançada após sua morte e dividida em quatro volumes no período que compreende os anos de 1799-1802 por Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande (1732-1807).

essas mesmas ideias, entretanto, as ordenou de uma forma melhor, contribuindo em relação aos princípios da câmara escura, possibilitando que Kepler (1571-1630) descobrisse como a visão é feita.

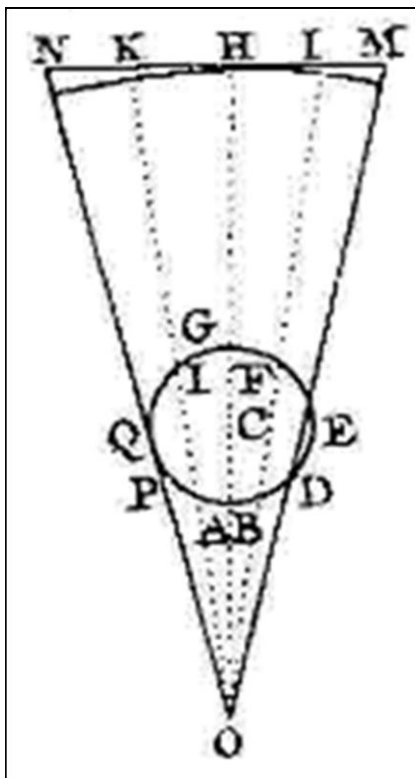
Continuando com o histórico, outro exemplo que mostra como a Óptica precisa ser aperfeiçoada, é apresentada por D'Alembert em seu verbete na *Encyclopédie* (1765). Marco Antoine de Dominis (1556-1624) deu as primeiras ideias para explicar o fenômeno natural arco-íris, ideias essas que para D'Alembert, eram ruins. Deixando que o trabalho fosse melhorado por Descartes acrescentando novas explicações e finalmente teve o retoque final dado por Newton.

A Óptica em geral, de acordo com seu verbete da *Encyclopédie* (1765), seja ela considerando apenas a visão por raios diretos ou a visão por raios refletidos ou quebrados, tem duas questões principais a serem resolvidas: a distância aparente do objeto e o tamanho aparente do mesmo objeto observado.

Para finalizar o verbete da Óptica, D'Alembert explica o que é uma desigualdade óptica na visão da Astronomia, como sendo aquela aparente irregularidade no movimento dos planetas. Ele explica que se consiste “aparente” porque não está observando diretamente o movimento desses corpos, mas sim apenas do olho do observador, e que essa ilusão ocorre quando um corpo se move uniformemente em um círculo cujo olho não ocupa o centro, fazendo com que o movimento desse corpo não seja uniforme a não ser que o olho do observador estivesse exatamente no centro do movimento, assim ele sempre veria esse movimento uniformemente.

D'Alembert ainda dá um exemplo para demonstrar essa desigualdade óptica: ele considera supor um corpo que se move na circunferência do círculo A B C D E F G Q P (ver figura 8), e esse corpo viaja pelos arcos iguais a AB, BD, ED e EF em igualdade de tempo.

Figura 8: Explicando Desigualdade Óptica (1)



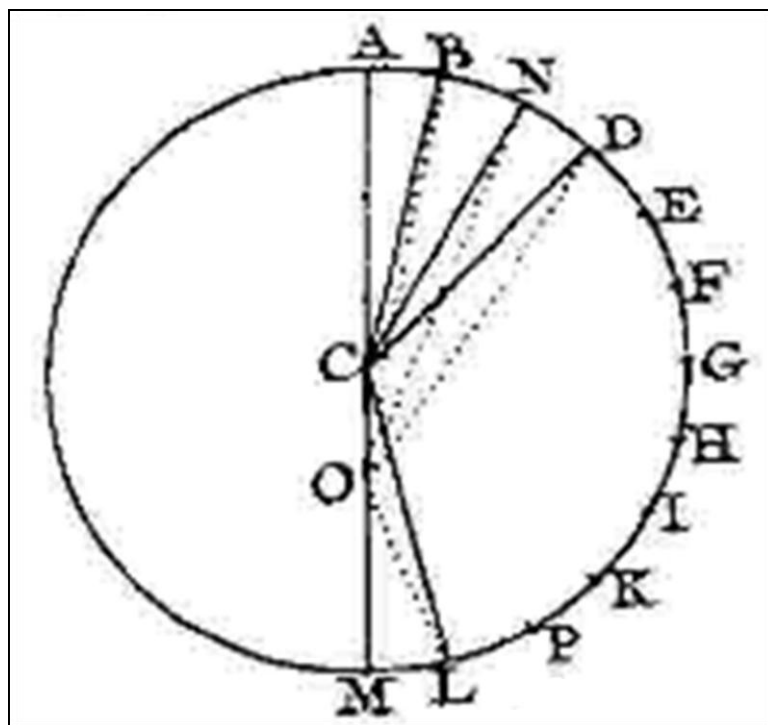
Fonte: Encyclopédie (1765)

Em seguida, deve-se supor que o olho está no mesmo plano do círculo, mas fora do círculo, que chamamos, por exemplo, como ponto O, sendo por este ponto que é possível observar o movimento do corpo no círculo ABQP: assim, quando o corpo vai de A a B, seu movimento aparente pode ser medido pelo ângulo AOB, ou ainda pelo arco HL; mas em tempo igual, esse corpo percorre o arco BD, de modo que seu movimento aparente pode ser medido pelo ângulo DBO, ou ainda pelo arco LM, que é menor que o arco HL; quando o corpo chegar em D, ele será visto pelo ponto M da linha NLM. Mas esse corpo leva o mesmo tempo para percorrer DE, passando por AB ou BD, e quando esse corpo chega ao ponto E, ele é visto a partir do ponto M, de modo que parece quase estacionário durante o tempo que percorre DE. Quando esse corpo chega ao ponto F, o olho vê esse corpo em L; e quando esse corpo está em G, parece que está em H, de modo que esse corpo pareceu ter voltado ou tornou-se retrógrado; e por fim, esse corpo quando vai de Q para P, seu movimento parece novamente quase estacionário.

Sendo assim, D'Alembert conclui no verbete da *Encyclopédie* (1765), que por meio dessa explicação, seria possível dizer que a desigualdade óptica depende da situação do olho que não é o centro do movimento do planeta. Ao considerar que esse olho, ao invés de estar no ponto O, fosse transportado para o ponto C (ver figura 9), e que esse olho permanecesse

nesse ponto durante todo o tempo de revolução do planeta, considerando ainda que o planeta realizasse seu movimento com a suposição de que esses arcos de círculo e os tempos fossem iguais, o observador poderia visualizar a partir do ponto C, que os movimentos são perfeitamente iguais entre eles.

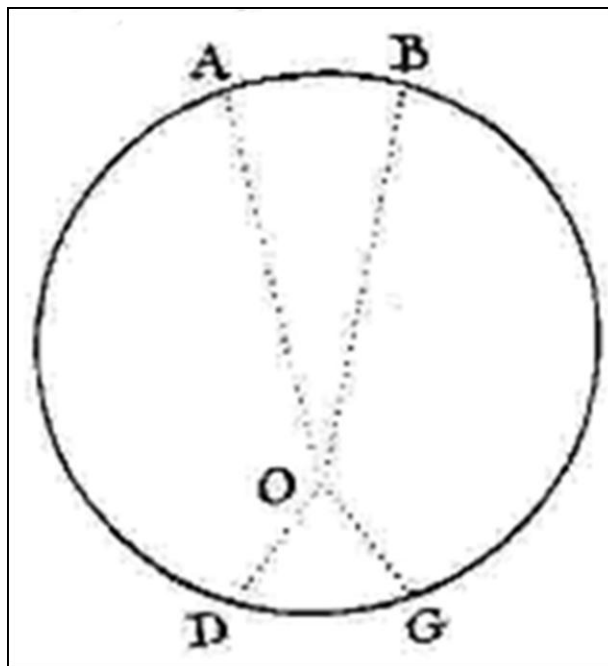
Figura 9: Explicando Desigualdade Óptica (2)



Fonte: Encyclopédie (1765)

Uma terceira situação ainda é apresentada por D'Alembert no verbete da óptica para explicar a desigualdade óptica na *Encyclopédie* (1765). Ele ainda apresenta que se tomarmos no círculo qualquer ponto que o olho não esteja no centro, ou seja, entre o centro e a circunferência como o observador situado no ponto O na figura 10, então, embora esse mesmo planeta atravessasse arcos iguais em tempos iguais, seu movimento parecerá desigual visto a partir do ponto O, pois, quando o planeta está em sua maior distância em relação ao ponto A, seu movimento parecerá lento. Ao contrário, esse corpo parecerá estar o mais rápido possível quando se aproximar do ponto G. Isso se dá porque o ângulo GOD é maior que o ângulo AOB, embora os arcos AB e GD sejam iguais entre si.

Figura 10: Explicando Desigualdade Óptica (3)



Fonte: Encyclopédie (1765)

Após algumas considerações a respeito da desigualdade óptica em seu verbete na *Encyclopédie* (1765), D'Alembert esclarece ainda que deve ser chamado de ilusões de óptica, todos os erros em que nossa visão nos faz cair na distância aparente dos corpos, em sua figura, seu tamanho, sua cor, a quantidade e a direção de seu movimento. D'Alembert finaliza seu verbete tecendo pequenas considerações a respeito do que significa lugar óptico de uma estrela, pirâmide óptica e triângulo óptico.

E como vimos na classificação de “matemática mista”, a Óptica ainda apresenta ramificações que se referem a Catóptrica, Dióptrica e Perspectiva. Dessa forma, abordaremos ainda como estão definidos esses tópicos em seus respectivos verbetes na *Encyclopédie*.

2.2.2.3.1 CATÓPTRICA

Na *Encyclopédie* (1752) está publicado o verbete da Catóptrica, escrito por D'Alembert. Ele define que essa ciência é uma parte da Óptica e tem como objetivo abordar como se reflete a visão e tratar as leis em relação à luz refletida pelos espelhos. Além disso, ele também enfatiza que a Catóptrica não lida apenas com o reflexo dos raios de luz e as leis que esta reflexão segue. Essa ciência também é responsável por estudar os fenômenos que resultantes da visão, entretanto, os princípios relacionados a essas questões, D'Alembert

considera que ainda não estão bem desenvolvidos, especialmente no que diz respeito ao local da imagem e seu tamanho aparente.

No quesito dos principais autores que abordaram tópicos da Catóptrica, no verbete da *Encyclopédie* (1752), entre os antigos, destaque para os já citados no verbete da Óptica: Euclides, Alhazen e Vitello de Silesia. Já entre os autores modernos, destaque para os padres jesuítas André Tacquet (1612-1660) e Honoré Fabri⁵³ (1608-1688), Jacques Gregory⁵⁴ e Isaac Barrow⁵⁵ (1630-1677). D'Alembert considera que o trabalho de Barrow utilizou princípios mais exatos e inquestionavelmente mais brilhantes em relação aos autores que o precederam. D'Alembert relata no verbete que nessas obras de Barrow, os tópicos tratados em relação à Catóptrica abordou as propriedades dos espelhos esféricos, côncavos ou convexos – sem menção aos espelhos planos.

O verbete ainda faz menção ao telescópio catóptrico como sendo o telescópio capaz de representar os objetos por reflexão devido ser formado por um conjunto de espelhos curvos e planos que possibilitam refletir a luz e formar uma imagem. É mencionado também os quadrantes catóptricos que são capazes de marcar as horas por conta dos raios refletidos; e ainda, menciona-se as caixas catóptricas como uma espécie de caixa, com auxílios de espelhos dispostos de acordo com as regras da Catóptrica, capaz de representar pequenos corpos por meio de ampliar o tamanho dos objetos quando colocados dentro dessa caixa.

Antes de finalizar o verbete na *Encyclopédie* (1752), D'Alembert comenta que essa caixa pode ser encontrada de diferentes maneiras, em que cada uma pode ter um propósito, tais como multiplicar objetos, deformar objetos ou ampliar o tamanho dos objetos por exemplo. Ele ainda traz dois exemplos de como se construir uma caixa catóptrica.

No 1º exemplo, D'Alembert considera uma caixa na forma de um polígono (ver figura 11), e que ao dividir as suas cavidades pelos planos diagonais EB, FC e DA, esses planos se interceptam ao longo do eixo, formando pequenas caixas triangulares na mesma quantidade que o polígono tem de lados. Duplique os planos diagonais com espelhos planos, bem como é necessário deixar buracos redondos nos planos laterais, sendo esses os quais será possível olhar nas células da caixa. Posteriormente, ele dá como próximo passo que esses buracos devam ser preenchidos por vidros planos, depois basta colocar nas células os diferentes objetos cujas imagens se deseja observar. Por fim, deve-se cobrir a parte superior dessa caixa

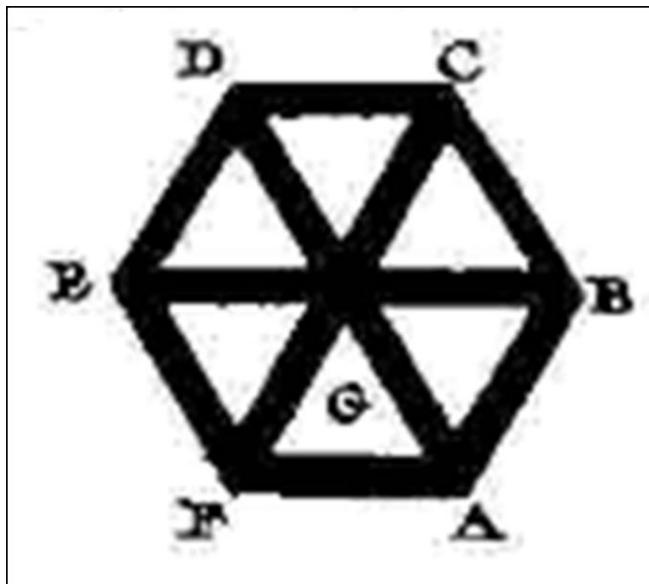
⁵³ Com destaque para sua obra publicada em 1669, intitulada *Synopsis Optica*. D'Alembert também faz menção aos seus estudos em relação aos espelhos planos.

⁵⁴ Menção a obra intitulada *Promota Optica*.

⁵⁵ Barrow foi professor do *Trinity College*, da Universidade de Cambridge, e em 1669 publicou as lições de óptica que ele ministrou na sua função de professor numa obra intitulada *Optical Lectures*.

catóptrica com alguma membrana fina ou transparente, ou então com um pergaminho que permita a passagem da luz e assim, a caixa estará pronta.

Figura 11: Caixa Catóptrica (1)

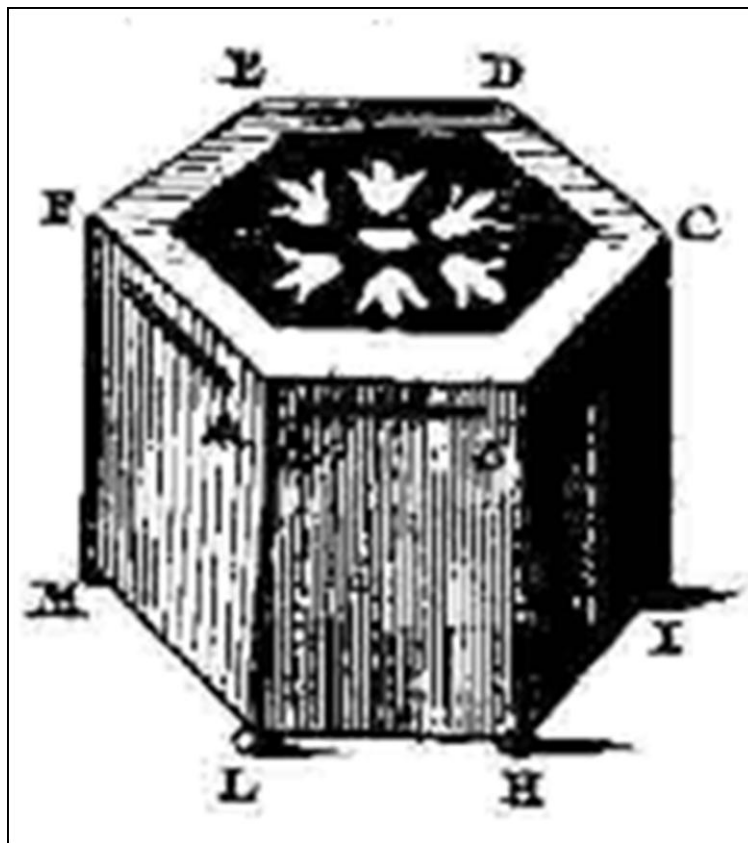


Fonte: Encyclopédie (1752)

No verbete da Catóptrica da *Encyclopédie* (1752), D'Alembert explica que as leis da reflexão ensinam que as imagens colocadas nos ângulos de um espelho são multiplicadas, e aparecem umas mais distantes das outras; do qual se segue que os objetos colocados em uma célula, parecerão ocupar mais espaço que toda a caixa: assim, ao olhar pelos buracos, será possível enxergar os objetos da célula correspondente multiplicados e espalhados num espaço muito maior do que a caixa inteira, fazendo que por cada um desses buracos se tenha uma nova vista.

D'Alembert dá um 2º exemplo considerando uma caixa catóptrica no formato de um prisma multilateral ABCDEF (ver figura 12). Ao terminar de construir uma caixa como a apresentada a seguir, não se deve dividir a cavidade interna em planos, mas sim duplicar os planos laterais CBHI, BHLA e ALMF com espelhos planos. Nos orifícios ou aberturas remover o estanho e o mercúrio que cobre a superfície interna do espelho para que o olho possa ver através dele. Feito isso, basta colocar um objeto dentro da caixa, dessa forma, ao olhar por meio do buraco h, será possível observar o objeto no fundo multiplicado, além de suas imagens ficarem dispostas a uma distância igual uma das outras.

Figura 12: Caixa Catóptrica (2)



Fonte: Encyclopédie (1752)

D'Alembert finaliza concluindo que os espelhos paralelos são os que têm maior capacidade de multiplicar os objetos, entretanto, deve se tomar cuidado para que realmente esses espelhos estejam paralelos, com uma superfície plana e unidos, caso contrário, as reflexões serão um número repetido de imagens deformadas.

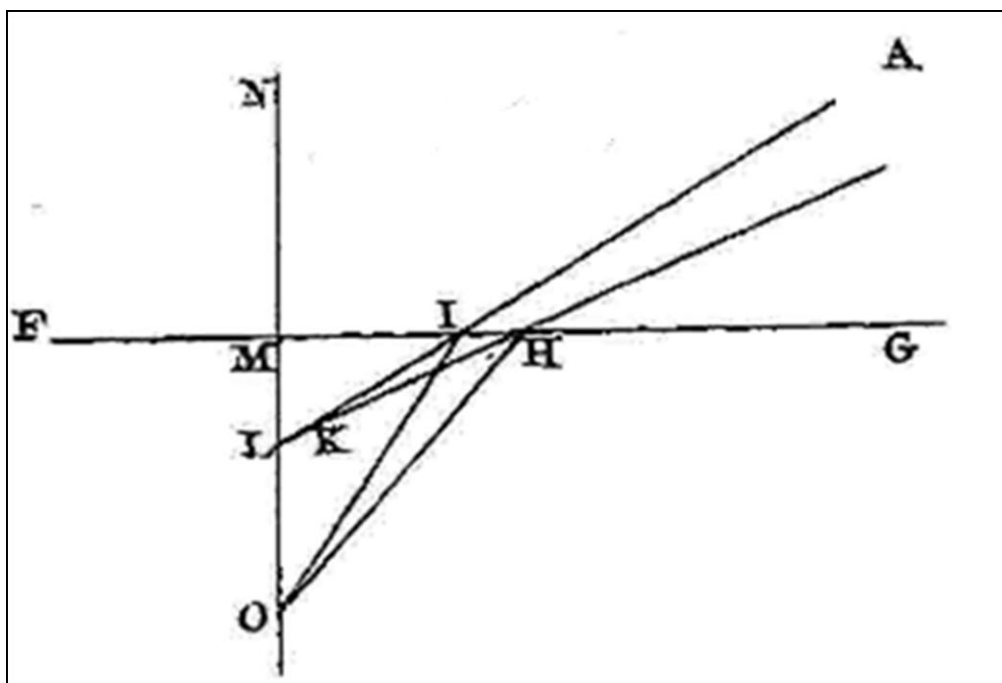
2.2.2.3.2 DIÓPTRICA

O verbete da Dióptrica foi publicado na *Encyclopédie* de 1754, e teve como autor D'Alembert. Ela está definida como a ciência da visão que estuda os raios “quebrados”, ou seja, aborda os raios que passam de um meio para outro, como o vidro no ar ou na água, “quebrando” quando passam e assim, mudando de direção. Essa palavra tem origem grega, podendo ser chamada também de ciência da Refração, ou ainda de ciência Anaclástica. Portanto, a Dióptrica tem como objetivo considerar e explicar os efeitos da refração da luz quando ela passa por diferentes ambientes: como o ar, água, vidro e especialmente lentes.

Dessa forma, é comentado que é possível distinguir a Dióptrica em duas partes: 1º) aquela que considera, independentemente da visão, as propriedades da luz, à medida que ela passa pelos corpos transparentes, e a maneira pela qual os raios se partem e se afastam, ou se aproximam uns dos outros; 2º) a outra parte fica responsável por examinar o efeito desses raios nos olhos e os fenômenos que devem resultar deles em relação à visão.

D'Alembert comenta no verbete (1754), que uma das maiores dificuldades da Dióptrica é determinar o lugar da imagem de um objeto visto pela refração, mas que não há um consenso entre os autores de Óptica quanto a essa questão. Então, para explicar essa divergência, ele propõe que devemos considerar a figura 13 abaixo.

Figura 13: Divergência de autores em Dióptrica



Fonte: Encyclopédie (1754)

D'Alembert inicia sua explicação pedindo para que imaginemos um objeto O imerso em uma água parada, cuja superfície é dada por FG, e que do olho A é possível ver o raio refratado OHA. Então daí vem a questão que constitui determinar em que lugar este objeto O deve aparecer. A princípio esse objeto deve aparecer no prolongamento do raio AH, já que o olho também é afetado de igual modo como se o objeto estivesse no prolongamento desse raio, mas daí tem um porém, em que parte dessa extensão o objeto será trazido? A partir dessa questão, conforme dito na *Encyclopédie* (1754), é que os autores da Dióptrica começam a se dividir.

D'Alembert relata no verbete que alguns afirmariam que o objeto O deve aparecer no local onde o raio interrompido HA intercepta a perpendicular, conduzido a partir do objeto O na superfície FG, ou seja, no ponto L. A principal razão por essa resposta, consiste em que todo objeto visto por um raio refletido é sempre reportado para o local onde o raio refletido intercepta a perpendicular, levado do objeto para a superfície refletora, e esses devem ser os mesmos raios quebrados. Entretanto, conforme a *Encyclopédie* (1754), o 1º princípio sobre o lugar da imagem vista pelos raios refletidos, está sujeito a muitas dificuldades; e 2º mesmo que esse princípio fosse verdadeiro e geral, não seria correto aplicá-lo sem qualquer tipo de prova, para determinar o lugar da imagem vista pelos raios quebrados.

D'Alembert ainda relata que a afirmação anterior não é a única solução dada. Outras pessoas poderiam dizer que o lugar da imagem do objeto O deveria estar no ponto K. Esse ponto K é o ponto de intersecção dos dois raios quebrados infinitamente próximos IA e HA. O motivo dessa afirmação se dá é considerado que o objeto O envia para o olho um certo número de raios porque a pupila tem uma certa largura. Se supormos que IA e HA são dois desses raios, é possível ver que esses raios entram no olho, da mesma forma como se viessem diretamente do ponto K: mas, todos os outros raios que entram no olho coincidem quase no mesmo ponto K, porque a pupila tem pouca largura, e assim o número de raios que entram nela não é muito grande, assim, o objeto O deve aparecer no ponto K. Esse raciocínio, para D'Alembert parece ser mais plausível de se considerar do que a hipótese levantada pelos autores partidários da hipótese anterior, inclusive os autores destacados que também são favoráveis a essa segunda hipótese são Barrow e Newton, que são autores com grandes contribuições na Óptica.

2.2.2.3.3 PERSPECTIVA

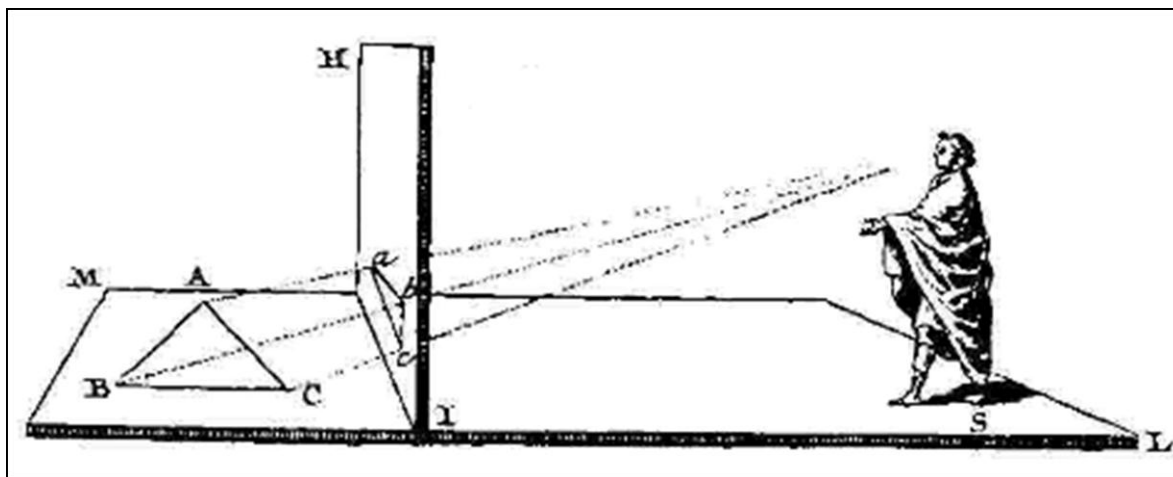
Louis de Jacourt (1704-1779) foi o autor do verbete publicado na *Encyclopédie* em 1765. Ele define a Perspectiva como a arte de representar numa superfície plana objetos visíveis à medida que eles aparecem a uma dada distância ou altura através de um plano transparente colocado perpendicularmente ao horizonte entre o olho e o objeto. Além disso, está escrito que a Perspectiva pode ser dividida em especulativa ou prática. Sendo a Perspectiva Especulativa como a teoria das diferentes aparências ou representações de certos objetos, de acordo com as diferentes posições do olho que os observa. Quanto a Perspectiva Prática é definida como sendo a responsável pelo método de representar o que aparece aos

nossos olhos ou o que nossa imaginação concebe, e representá-lo de uma forma semelhante aos objetos que vemos.

Segundo a *Encyclopédie* (1765), a Perspectiva é mais especificamente chamada de Perspectiva Linear, porque considera posição, tamanho, forma, linhas diferentes ou contornos de objetos. Ela é considerada um ramo da matemática, entretanto, alguns elementos fazem parte da óptica, e outros simplesmente fazem dela uma ciência derivada da óptica. Além disso, na Perspectiva as suas operações são todas de ordem geométricas.

Para dar uma ideia mais precisa do que se trata a Perspectiva, Jacourt dá uma série de exemplos. No primeiro exemplo ele pede para supormos um plano transparente HI que se eleva perpendicularmente em um plano horizontal, e que o espectador S direciona o olho O para o triângulo ABC (ver figura 14), concebemos então os raios AO, OB e OC que passam pelo plano HI deixando traços de sua passagem nos pontos *a*, *b* e *c* do plano, então neste plano teremos a aparência do triângulo abc, que chega aos olhos pelos mesmos raios *aO*, *Ob* e *Oc* e trazem para esse mesmo olho a aparência do triângulo ABC, mostrando a verdadeira aparência desse triângulo no plano HI, mesmo que se remova o objeto e se mantenha a mesma distância e ao mesmo nível dos olhos.

Figura 14: Perspectiva (1)



Fonte: Encyclopédie (1765)

Conforme descrito na *Encyclopédie* (1765), o autor do verbete considera adequado esclarecer algumas propriedades: *plano geométrico*, é o plano paralelo ao horizonte, no qual está situado o objeto a ser colocado em perspectiva. Por sua vez, o *plano horizontal*, é o plano paralelo ao horizonte por onde o olho enxerga. A *linha terrestre* ou *linha fundamental*, é a seção do plano geométrico e da mesa (essa mesa é como uma ideia de plano liso). Define

Posteriormente, é definido que a *Perspectiva da Cenografia*, ou, a perspectiva da projeção de corpos em um plano, é responsável pela representação de um corpo em um plano com todas as dimensões, como aparece aos olhos.

Em relação à *Perspectiva da Vista de Pássaro*, está definida como sendo aquela que faz a representação de um objeto supondo que o olho está logo acima do plano onde este objeto é representado, de modo que esse olho consiga perceber um grande número de dimensões para fazer, por exemplo, o plano de uma cidade com suas ruas e suas casas, é um plano de vista de pássaro.

Quanto à *Perspectiva Aérea*, conforme a *Encyclopédie* (1765), é aquela que representa os corpos diminuídos numa proporção em relação ao afastamento. Esse tipo de perspectiva depende, principalmente, da cor dos objetos, sendo que por essas cores em maior ou menor tonalidade, indicam como fazer a representação dos objetos. Este método é baseado no fato de que quanto mais longa a coluna de ar através da qual se vê o objeto, mais fraco é o raio visual que o objeto envia para o olho.

Finalizando os tipos de perspectiva, Jacourt define a *Perspectiva Militar* (Fortificação), como sendo a arte de desenhar num plano um objeto tal como ele aparece aos olhos, colocado a certa altura e a certa distância, e visto numa mesa transparente, que colocamos entre o olho e o objeto. Por exemplo, considere um pentágono ABDEF, entre o qual e o olho C é levado perpendicularmente a mesa VP sobre o plano horizontal HR. Imaginando que de todos os pontos de raios passam pelo olho e também pela mesa, tais como os pontos CA, CB, CD, etc, e que esses raios aparecem na mesa VP, do modo que esses raios que aparecem em direção ao olho, assim terão o mesmo efeito como se o pentágono A B D E F estivesse realmente lá. Portanto, ele considera que a perspectiva militar ensina o modo de encontrar, por meio de regras geométricas, os pontos ABDEF na mesa VP, ou seja, instrui como desenhar um objeto segundo o qual se apresenta à vista, considerando a distância e a posição do olho.

Ainda, segundo a *Encyclopédie* (1765), a Perspectiva também é considerada como um tipo de pintura que normalmente se vê nos jardins, ou no fundo das galerias, que é feito de propósito para enganar a vista, representando a continuação de um beco, de um edifício, de uma paisagem, de longe, ou algo similar.

Dessa forma, a Perspectiva é uma arte que tem como finalidade representar os objetos que estão em um plano, de acordo com a diferença que o afastamento traz para ele, seja para a figura ou seja para a cor, baseando-se no tamanho dos ângulos ópticos e nas imagens que transportam a diferentes distâncias.

O verbete finaliza fazendo um breve histórico das técnicas de perspectiva que foram evoluindo de acordo com o tempo, além disso faz uma discussão de que um pintor que se preze deve ter conhecimentos em Perspectiva para realizar pinturas, ou caso não tenha, que esse pintor esteja acompanhado por uma pessoa que vá instruindo a aplicação das técnicas durante a composição da pintura.

2.2.2.4 ACÚSTICA

No Discurso Preliminar, em relação a Acústica, D'Alembert define que “a *quantidade* considerada no som, em sua intensidade, movimento, graus, reflexões, velocidade etc. dá a *Acústica* (D'ALEMBERT, 2015a, p.276)”, ou seja, a grandeza da Acústica é o som, bem como as suas variações.

E o som, está caracterizado da seguinte forma: “Quando a agitação comunicada ao ar por um corpo violentamente atingido chega ao nosso ouvido, nele produz uma sensação que chamamos de ruído. Mas há uma espécie de ruído contínuo e apreciável que chamamos de som (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015d, p. 372)”. D'Alembert aponta que quando nos propomos a estudar o som, devemos considerar três coisas:

- 1º) o grau de elevação entre o grave e o agudo;
- 2º) o de intensidade entre o forte e o fraco;
- 3º) a qualidade do timbre, que também é suscetível de comparação do surdo ao estridente, ou do agudo ao suave.

Voltando nos a referir a acústica, ao fazermos uma consulta do que está descrito no verbete⁵⁶ na *Encyclopédie*, é indicado que o termo Acústica vem da palavra grega *AKOUSTIKÓS*, que tem como significado “o que pode ser ouvido”. É dito que a Acústica é propriamente uma parte da teoria da Música. É descrito ainda, que a palavra “*acústica*⁵⁷” pode ser denotada de outra forma em que manterá o mesmo sentido, “*fônica*⁵⁸”.

Dessa forma, verificando o verbete⁵⁹ da palavra Fônica, ela é a ciência dos sons, e que é chamada de outra forma, mais comumente de acústica. Assim, confirmando que essas palavras são de fato sinônimos. Entretanto, há mais algumas informações a respeito dessa ciência no verbete.

⁵⁶ Encyclopédie (1751, p.111). Foi escrito por D'Alembert.

⁵⁷ Acoustique.

⁵⁸ Phonique.

⁵⁹ Encyclopédie (1765). Foi escrito por D'Alembert.

Está descrito que a palavra Fônica tem origem grega, e significa voz / som. E quanto ao objeto dessa ciência, o som, ele pode ser aperfeiçoado quanto à geração e propagação dos sons. Esse aperfeiçoamento, ao gerar sons, pode se dar sob todas as formas de produzir sons; e por todas formas de produzir sons, é entendido que pode ser por fala, música, instrumentos, etc. A propagação de sons pode se tornar melhor de acordo com a posição dos corpos sonoros.

Ao colocar o corpo do som, ou seja, o instrumento gerador do som, perto da superfície da água, o som fica mais suave; e se for colocado em um lugar plano e bem colocado, o som será levado a uma distância muito maior do que se o corpo do som estivesse em um terreno irregular ou acidentado.

Finalizando esse verbete, D'Alembert acrescenta que para o órgão do som, que é o ouvido, ele é reproduzido melhor empregando instrumentos que aumentam a intensidade do som e ajudam os de ouvidos fracos.

Voltando ao verbete da Acústica, está denotado que a acústica é considerada a ciência responsável para produzir as razões que podem ser mais ou menos satisfatória em relação aos prazeres de se ouvir algo que a Harmonia nos dá, e que determina as afeições ou as propriedades das cordas vibrantes.

O verbete que vem logo em seguida a palavra Acústica na *Encyclopédie*, é o verbete da palavra “Acústicas⁶⁰”, ou seja, o seu plural. Curiosamente, o significado dessa palavra no plural tem uma definição diferente, embora sejam tópicos relacionados. De acordo com o verbete, temos que “acústicas” são os remédios que eram utilizados contra defeitos na audição e doenças no ouvido.

2.2.2.5 PNEUMÁTICA

D'Alembert, relata no Discurso Preliminar que no caso da Pneumática, ela é formada por ser a ciência que tem “a *quantidade* considerada no ar, seu peso, movimento, condensação, rarefação etc., (D'ALEMBERT, 2015a, p.277)”.

Já em seu verbete da *Encyclopédie* (1765), de autor desconhecido, podemos ver que a Pneumática também é chamada de Pneumatologia, e é propriamente a ciência que lida com espíritos e substâncias espirituais. Entretanto, essa palavra de origem grega tem como significados: espíritos, respiração ou ar; portanto, é por isso que, a partir do significado diferente dessa palavra, ela é tomada como uma substância incorpórea para significar o ar,

⁶⁰ Acoustiques.

surgindo assim dois tipos de ciência pneumática a partir dela. Mas a palavra pneumática é mais comumente usada para significar a ciência das propriedades do ar, e as leis que este fluido segue em sua condensação, sua rarefação, sua gravitação, etc.

Em seu verbete, ainda é descrito que alguns escritores consideram a Pneumática como um ramo da Mecânica, porque se considera o movimento do ar e seus efeitos; comparando ainda que essa ciência é bastante semelhante à hidrostática, considerando o ar da mesma maneira que a outra ciência considera a água. Comenta-se também que em vez da palavra pneumática, alguns autores usam a palavra Aerometria, ou Arometria, que significa ar.

2.2.2.6 ARTE DE CONJECTURAR

Em relação ao cálculo de probabilidades, segundo D'Alembert apud Brown (1991, p.15), "a arte de conjecturar" muitas vezes envolveu lacunas tão numerosas no processo de modo que qualquer filósofo prudente sempre deve ter em mente suas limitações.

Como descrito na classificação de “matemática mista”, cada uma das ramificações tem a quantidade determinada de acordo com o objeto de estudo. No caso das probabilidades ou arte de conjecturar temos que, definido no Discurso Preliminar, “a *quantidade* considerada na possibilidade dos acontecimentos dá a *arte de conjecturar*, de onde nasce a *análise dos jogos de azar*. Sendo o objeto das ciências matemáticas puramente intelectual, não devemos nos espantar com a exatidão de suas divisões (D'ALEMBERT, 2015a, p.277)”.

O verbete da Probabilidade na *Encyclopédie* foi publicado em 1765, porém, não foi escrito por D'Alembert, mas provavelmente deve ter passado por sua revisão, conforme ele indicou no início do Discurso Preliminar. O autor desse verbete foi Charles-Benjamin de Lubières (1714-1790) que definiu a probabilidade como:

Considerada em si mesma, toda proposição é verdadeira ou falsa. Mas, relativamente a nós, pode ser certa ou incerta. Percebemos bem ou mal as relações existentes entre duas ideias, ou uma conveniência entre elas, fundada sobre certas condições que as ligam, e que, quando conhecidas integralmente, dão-nos a certeza de uma verdade ou proposição. Se, porém, só conhecemos uma parte das relações, não temos mais do que uma simples *probabilidade*, e esta é tão mais verossímil quanto maior a nossa garantia a respeito de um maior número de condições. Formam-se assim os graus de probabilidade, cuja justa estima e exata medida perfazem o sumo da sagacidade e da prudência (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 126).

Para Lubières, diversos geômetras julgaram que os resultados de seus cálculos eram suficientes para avaliar os graus de probabilidade, recorrendo a ciência Lógica para descobrirem princípios e estabelecerem como teorias, considerando a certeza como um todo, e as probabilidades como uma parte desse todo. Ou seja, na medida que pudessem provar, e assim, afirmar que essa probabilidade valia um meio, um quarto ou então ainda, um terço de certeza, entretanto, frequentemente, esses geômetras contentavam-se em supô-la como um todo, mas apesar disso, nem por isso esses resultados são menos significativos dado que os cálculos quando considerados em si mesmo permanecem razoáveis. Para esclarecer essa declaração, Lubières comenta que exemplos extraídos de jogos, apostas ou apólices seriam o suficiente.

Ele cita como exemplo, duvidar quando alguém lhe diz ter ganho um prêmio de dez mil libras na loteria e propõe que uma terceira pessoa presente na ocasião lhe pergunte quanto em dinheiro ele pagaria em troca da garantia da veracidade da informação. Logo, Lubières propõe oferecer a metade, avaliando a probabilidade dessa notícia ser verdadeira como uma meia certeza. Caso tivesse oferecido a essa pessoa mil libras, significa que teria nove vezes mais razão para crer na veracidade da notícia do que para não crer nela, ou seja, isso equivale a elevar a probabilidade a nove graus, de tal modo que, se tomamos a certeza como dez, faltaria então um grau para que fosse possível acreditar na inteira credibilidade da notícia recebida.

No uso comum, o autor do verbete chama de provável “algo que tenha mais de meia certeza verossímil ou a ultrapasse consideravelmente, e moralmente certo o que resvala numa certeza integral (DIDEROT e D’ALEMBERT, 2015c, p. 127)”. Ele pondera que se refere apenas a certeza moral, deixando de lado a certeza matemática, pois embora essas certezas tenham pontos de coincidência, elas não são suscetíveis das mesmas provas. A evidência moral é aquela que tem uma probabilidade tão grande, resultando que ao homem cabe pensar e agir ao ser exposto diante de uma certeza como essa, do mesmo modo que deveria pensar e agir quando exposto a uma certeza matemática.

Lubières exemplifica no verbete essa comparação que ele faz entre a certeza moral e a certeza matemática. Por exemplo, considere como evidência moral que existe uma cidade chamada Roma, portanto, o contrário dessa evidência não implica numa contradição. Entretanto, ele pondera que não é impossível que todas as pessoas que tenham visto a cidade de Roma tenham combinado para lhe enganar, ou ainda que os livros que a mencionam a cidade de Roma tenham esse objetivo expresso, ou até mesmo que os documentos a respeito dessa cidade não sejam forjados. Contudo, Jacourt afirma que se ele se recusasse a aceitar

uma evidência apoiada em provas obtidas da evidência de Roma, meramente porque elas não são capazes de serem demonstradas matematicamente, ele deveria ser tratado como um insensato, afinal a probabilidade de existir uma cidade chamada Roma se exprime com tanta força, frente a qualquer suspeita de Roma não existir, que dificilmente se poderia explicar essa diferença numericamente, ou seja, o valor dessa probabilidade.

Logo, Lubières segundo Diderot e D'Alembert (2015c) considera esse exemplo suficiente para elucidar a evidência moral e os seus graus, consistem em muitas probabilidades. Assim, ele considera que uma meia certeza forma o incerto propriamente dito, pois o espírito, ao constatar que as razões tem suas partes iguais, fica impossibilitado de tomar qualquer tipo de juízo. Quando ocorre esse estado de equilíbrio, Lubières comenta que basta uma prova ligeira aparecer, que ela é justamente o suficiente que falta para determinar que decisão poderíamos tomar, assim, saindo desse grau de incerteza. Entretanto, ele relata que há muitos casos que as razões opostas praticamente se igualam, tornando difícil determinar qual razão deve prevalecer. Dessa forma, o campo da incerteza pode ser considerado mais ou menos vasto, de acordo com a maior ou menor falta de luzes, bem como de coragem e de lógica, dado que essa meia certeza, em geral nas pessoas, promove a desconfiança e a dúvida, fazendo com que o medo da tomada de uma decisão possa restringir mais do que a prudência, assim, resolvem por fim considerando que a proposição é falsa.

Lubières, relata que não se contenta com o simples cálculo geométrico em relação aos graus de probabilidade entre duas evidências opostas, indo em direção contrária ao que pessoas sábias e prudentes certamente fariam, e explica suas razões pra isso:

1º) Não se deve buscar a razão apenas pelo cálculo das probabilidades e contentar-se com elas, as razões também são extremamente possíveis de se buscar por meio das evidências. Por exemplo, na Geometria ao se provar uma proposição seria ridículo um matemático recorrer simplesmente a opiniões e verossimilhanças para fazer sua demonstração, ou então, um juiz que resolva dar um veredito de culpado ou não somente adivinhando pela sua vida pregressa ao invés de ouvir dele a confissão de seu crime.

2º) Se utilizar de uma ou duas provas que ofereçam uma saída não é suficiente, é necessário também pesar essas provas e examinar que possam servir de conhecimento para descobrir a verdade. Por exemplo, diante a pergunta em relação à qual a probabilidade de considerar que um homem de 50 anos venha a morrer em determinado ano, não é suficiente levar em consideração de que no geral de cada 100 pessoas com idade de 50 anos, 3 ou 4 morram por ano, e com isso concluir que existe a paridade de 96 contra 4 ou de 24 contra 1. É preciso observar com atenção o temperamento desse homem, como está seu estado de saúde e

seu estilo de vida, qual é sua profissão, qual é a região onde esse homem vive, enfim, devem ser buscados quaisquer elementos que influenciem na duração de sua vida.

3º) Quando se tem provas de um fato para estabelecer uma verdade, essas provas ainda não são suficientes, é necessário ainda examinar as provas que possam combatê-las. Por exemplo, ao questionar se uma pessoa conhecida que esteja ausente de seu país por 25 anos, e nesse tempo, não se teve mais notícia, deva ser considerada como morta. Por um lado podemos dizer que apesar de todas as investigações, não foi possível obter nenhuma informação a respeito dessa pessoa, e que no caso dela ser viajante, podemos supor que esse indivíduo pode ter passado por uma infinidade de situações adversas e perigos, uma doença pode ter atingido essa pessoa numa determinada região que ela não era conhecida pelos nativos do local, e que se essa pessoa estivesse viva, ela não teria deixado de mandar notícias, mesmo que periodicamente, sobretudo no caso de ter uma herança ou quaisquer outros motivos. Em contrapartida, há também considerações que se opõe a essas e que não devem ser negligenciadas, tais como essa pessoa tem um caráter apático e não quer ser encontrada, ou que talvez tenha tentado dar notícias e suas cartas tenham sido extraviadas, ou ainda que ela possa não estar em condição de escrever ou enviar cartas. Assim, para que vejamos as coisas é preciso que coloquemos as provas e as probabilidades numa balança e opô-las umas às outras, pois há casos que uma proposição muito provável de ser verdadeira, pode ser falsa, e quando o assunto se trata de probabilidade, a oposição de uma proposição é a mais possível de combater uma determinada situação.

4º) Nós seres humanos não podemos esquecer que só é prudente aderirmos a uma determinada proposição se ela tiver um grau considerável de verossimilhança. Entretanto, essa capacidade só parece ser alcançada pelos espíritos mais evoluídos com toda sabedoria possível, enquanto que aos de espírito mais comum, é necessário com atenção, distinguir o verdadeiro do falso, assim como o provável da incerteza e do duvidoso.

5º) Um ser humano sábio e de conduta prudente, não leva somente a probabilidade em consideração, ele também pesa a dimensão do bem ou do mal que pode acontecer ao se atribuir um juízo verdadeiro, um juízo contrário, ou ainda a indeterminação em relação a ambos. A saída então, é escolher aquele que tem uma ligeira aparência de se obter êxito, observando ainda que o risco por essa escolha seja mínimo ou inexistente. Além disso, pode obter desse êxito um resultado considerável.

6º) Devido a impossibilidade de fixar os graus de probabilidade com precisão, o que se espera é que nos contentemos com o que mais se aproxima e esteja ao nosso alcance. As vezes, por um simples equívoco podemos expor a nós mesmos ou a sociedade, males ainda

maiores que não estávamos dispostos a enfrentar, dessa forma, é uma arte se afastar da perfeição em alguns aspectos, bem como buscar a proximidade dela em outros que sejam mais essenciais e interessantes.

7º) Por fim, vale a pena adicionar que no caso de uma incerteza, as determinações devem ser suspensas até que se atinja um ponto que clareie essas imprecisões. Caso a situação enfrentada não admita um momento de hesitação, devemos nos atentar naquilo que pareça ser o mais provável, e uma vez que se tenha atribuído um julgamento, não cabe arrependimentos, mesmo que o resultado dessa decisão não corresponda ao que se esperava. Por exemplo, numa situação de incêndio, se a única saída for saltar pela janela, por pior que essa decisão pareça ser é preciso tomar um partido, pois a incerteza seria ainda pior.

Após essas regras da probabilidade, podemos ver por meio de Diderot e D'Alembert (2015c) que Lubières passa a abordar às fontes da probabilidade, reduzindo-a em duas espécies: uma que os resultados da probabilidade são extraídas provenientes da natureza e da quantidade de causas ou razões que podem implicar na veracidade de uma proposição em questão; e outra que está fundamentada na experiência do passado, dessa forma, permitindo conjecturar com segurança aspectos do futuro, desde que essa mesma certeza que se tinha sejam as mesmas causas que produziram o passado continuem a existir.

Em relação a essa probabilidade que tem suas fontes provenientes de resultados que já aconteceram anteriormente é comentado que:

A atenção que se dá ao passado, a fidelidade com que a memória retém o acontecido, a exatidão com que os registros conservam os eventos, tudo isso perfaz o que no mundo se chama experiência. Um homem que tem experiência é aquele que, tendo visto muitas coisas e refletido sobre elas, poderá vos dizer praticamente (pois não chegamos aqui à precisão matemática) qual a probabilidade de que, acontecendo tal evento, um outro se siga. Assim, mantendo-se as mesmas condições, quanto mais se realizam testes ou experimentos, mais garantia se adquire acerca da relação precisa entre o número de causas favoráveis e o número de causas contrárias (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 130-131).

Dessa forma, Lubières questiona se essa probabilidade, ao ser aumentada infinitamente devido a uma sequência de experimentos repetidos, não tornaria esse resultado uma certeza moral, ou então se esses acréscimos não reduziriam ao infinito uma probabilidade finita, dado que há aumentos, que embora sejam perpétuos, não totalizam o infinito. Por exemplo, se um determinado experimento produzisse na primeira vez um resultado de que a probabilidade não passasse de $1/3$ de certeza, já o segundo resultado obtido gere uma probabilidade de $1/3$ desse $1/3$, refazendo essa experiência pela terceira vez, e então o resultado obtido seja uma probabilidade de $1/3$ dessa segunda e um quarto de $1/3$ dessa

primeira, e assim sucessivamente, seria possível por intermédio do cálculo chegar a uma probabilidade que fosse passível de confundir com a certeza moral.

Dessa forma, parece que “a conclusão inevitável é que a experiência é inútil e que o passado nada prova acerca do futuro (DIDEROT e D’ALEMBERT, 2015c, p.131)”, mas não, desde que se considere as mesmas razões provenientes do que fora anteriormente, então por meio das experiências do passado é fornecido “um princípio de probabilidade para o futuro, que temos razão para esperar eventos conforme aos que vimos suceder, e que quanto mais os vejamos suceder com frequência, mais razão teremos para esperar que eles novamente sucedam (DIDEROT e D’ALEMBERT, 2015c, p.132)”. Assim, com esse princípio aceito, é extremamente comum ver as suas aplicações na Física, na Política e até mesmo em situações do cotidiano.

Quanto a D’Alembert, como vimos, ele não foi o responsável pela escrita do verbete da probabilidade nas publicações da *Encyclopédie*, entretanto, ele elaborou uma visão em relação à Arte de Conjecturar na obra *Elémens de Philosophie* (1759):

Não conseguindo, então, alcançar o caminho, ou pelo menos assegurar-se de que alguém chegou a ele, é necessário abordá-lo o mais próximo possível. Imitamos os geômetras que, por falta de dados ou por falta de análise adequada, não quando não conseguem resolver um problema de forma exata, resolvem de modo aproximado. Mas, como em tais soluções, o geômetra está ciente das limitações que medem sua proximidade ou distanciamento da solução, então deve ser entendido que em questões conjecturais não podemos confundir com rigoroso o que é puramente provável, e saber até mesmo em probabilidade, se está mais próximo do resultado ou não. O valor desse espírito de conjecturar, às vezes, é mais admirável até mesmo do que o espírito da descoberta, por causa da sagacidade que exige naquele que tem a capacidade para isso; pela habilidade com o qual é necessário discernir do que não se sabe perfeitamente, e fornecer aproximações a resoluções mais rigorosas e substituir quando preciso a probabilidade para demonstração, com as restrições do ceticismo razoável.

A arte de conjecturar é, portanto, um ramo da lógica, tão essencial como a arte da demonstração, e muito negligenciado nos elementos comuns da lógica. No entanto, quanto mais a arte da conjectura for imperfeita por sua natureza, maior a necessidade da função de sua aplicação; Deixe-nos acrescentar que são insuficientes, se por uso frequente, não se aprender a aplicá-los com sucesso. Duas coisas são necessárias para adquirir a qualidade preciosa com sucesso; primeiro exercitar-se em demonstrações rigorosas e, em segundo lugar, não se limitar a tal. Basta acostumar a reconhecer tudo em toda a sua pureza, assim podemos posteriormente distinguir se o resultado está próximo ou não. O único fato que temos de temer é que devido ao grande e longo hábito da contínua busca pela verdade absoluta e rigorosa sintamos a sensação de o que é não ser; os olhos comuns habitualmente acostumados a uma luz brilhante não conseguem diferenciar as graduações da luz fraca e veem apenas uma escuridão pesada, onde outros ainda conseguem distinguir alguma iluminação. A mente que reconhece a força apenas quando está em contato imediato com ela é distintamente inferior da mente que sabe não apenas como reconhecê-la de perto, mas também como prever e notá-la na distância por suas características que fogem de imediato. É isso que distingue, em primeiro lugar, o espírito geométrico do espírito do geômetra, cujo talento é restrito a uma esfera estreita e limitada (D’ALEMBERT apud BROWN, 1991, p.15, tradução nossa).

Na obra *Elémens de Philosophie*, segundo Brown (1991), D'Alembert, distinguiu três ramos da "arte de conjecturar". O primeiro envolveu a análise de probabilidades que pode ocorrer nos jogos de azar, onde as ocorrências seguem certos papéis. Segundo D'Alembert, "os princípios desta ciência ainda deixam em certos aspectos algo a desejar (apud BROWN, 1991, p.16)". O segundo ramo da arte da conjectura foi de como determinar a probabilidade quando os dados não foram baseados em regras matemáticas, mas extraídos de experiências passadas. Os problemas que ocorrem neste ramo podem ser resolvidos com base no método analítico de "matemática mista". O terceiro ponto que foi discutido em relação a "arte da conjectura" lidava com aquelas ciências em que era raro ou impossível prover demonstração, e ainda assim a arte da conjectura era essencial.

Segundo Brown (1991), D'Alembert dividiu essas ciências em especulativas (por exemplo, física e história) e práticas (por exemplo, medicina e jurisprudência). As ciências especulativas foram consideradas altamente experimentais e, portanto, colocadas sob a categoria de "física particular" dentro da árvore de conhecimento de D'Alembert.

Felizmente para D'Alembert, houve muitos problemas controversos relacionados à teoria da probabilidade durante o século XVIII que ele poderia escolher demonstrar o método analítico adequado que o filósofo deveria usar em "matemática mista". D'Alembert analisou o paradoxo de São Petersburgo como um exemplo da diferença entre as leis físicas da probabilidade e as leis matemáticas da probabilidade.

De acordo com Cusinato (2003), o paradoxo de São Petersburgo foi publicado em 1731 originalmente por Nicholas Bernoulli (1687-1759), primo de Daniel Bernoulli (1700-1782). O paradoxo propõe o seguinte: Suponha que uma moeda é jogada repetidamente até que a primeira "cara" apareça. O jogo paga 2^{n-1} dólares se a primeira cara aparecer na n -ésima jogada. Qual o preço que um indivíduo pagaria para entrar nesse jogo? A resposta dada para o problema, matematicamente se daria pelo cálculo da Esperança Matemática, que resulta em $+\infty$, ou seja, a pessoa estaria disposta a pagar o que for pelo jogo. Entretanto, o que D'Alembert argumenta fazendo uso do seu método analítico da "matemática mista", é que o valor que uma pessoa atribui a sua riqueza não é o próprio valor monetário desta, mas sim seu "valor moral" ou a sua "utilidade", visto que no cenário real, a maioria das pessoas não estariam dispostas a pagar mais do que apenas alguns dólares para participar deste jogo.

Em sua publicação *Doubts and Questions on the Calculus of Probability*⁶¹, D'Alembert discutiu a necessidade de distinguir as leis físicas das leis matemáticas, argumentando que, se

⁶¹ Dúvidas e Perguntas sobre o Cálculo de Probabilidade, publicado em 1767.

uma série de “coroas” sucessivas ocorreram, a maioria dos observadores colocaria alguma causa uniforme subjacente, como uma moeda assimétrica. Ele então propôs um único experimento: imagine uma experiência massiva (ou simulação) na qual 2^{100} pessoas jogaram uma moeda justa 100 vezes sucessivas e compararam seus resultados. D'Alembert considerou que sequências com todas as moedas virassem “caras” ou “coroas” nunca ocorreriam, contradizendo experimentalmente a previsão da teoria clássica de equiprobabilidade para qualquer e todas as sequências. Portanto, a esta ordem que o mesmo efeito ocorre 100 vezes ou 50 vezes em sequência, por exemplo, é absolutamente rejeitada, embora matematicamente seja possível. Podemos ver nas próprias palavras de D'Alembert (1767) que ele fez uma crítica em relação aos resultados serem possíveis matematicamente, entretanto, quando são realizados experimentalmente, esses resultados matemáticos são bem improváveis de acontecer:

Estes dois casos são, sem dúvida, igualmente possíveis, matematicamente falando; não é esse o ponto da dificuldade, e os matemáticos medíocres de quem falei há algum tempo tomaram um esforço bastante inútil para escrever algumas longas dissertações para provar que essa igualdade é possível. Mas a questão é saber se esses dois casos, que são matematicamente iguais e possíveis de acontecer, também são fisicamente e na ordem das coisas; se também é fisicamente possível que o mesmo efeito aconteça cem vezes em sequência, então é que esse mesmo efeito é misturado com os outros, de acordo com essa lei que gostaríamos de indicar (D'ALEMBERT, 1767, p.2, tradução nossa).

Nessa mesma publicação, D'Alembert continuou a dar mais exemplos do que ele considerou como limitação da teoria matemática do cálculo das probabilidades em relação a incompatibilidade dos resultados quando realizados experimentalmente (fisicamente). Em todos os exemplos a seguir D'Alembert argumenta que os filósofos e os matemáticos devem tomar algumas precauções para não mecanizar uma teoria matemática em determinados problemas sem considerar as questões físicas e, ao invés disso, ser prudente e fazer uso do método analítico da “matemática mista” de forma a considerar além da teoria matemática. Vejamos três exemplos que ele utiliza para criticar esta questão:

1º exemplo) D'Alembert considerou 25 letras e fez um arranjo com essas letras de três maneiras diferentes:

Constantinopolitanensibus
a a b c e i i i l n n n n n o o o p s s s t t t u
n b s a e p t o l n o i a u o s t n i s n i c t n

D'Alembert (1767) comenta que esses três arranjos, como pudemos verificar, contêm absolutamente as mesmas letras. Entretanto, no primeiro arranjo essas letras formam uma palavra conhecida da época: Constantinopolitanensibus; no segundo arranjo essas letras não formam nenhuma palavra conhecida, mas as letras estão dispostas seguindo uma ordem lógica, as letras aparecem em ordem alfabética, e as letras que são repetidas aparecem em sequência; e finalmente no terceiro arranjo, as letras estão ordenadas sem lógica ou com algum significado conhecido, apenas foram permutadas aleatoriamente, mas matematicamente possível. O matemático conclui afirmando que se um homem ao olhar essas três situações, não duvidará ou apostará que o primeiro arranjo foi ordenado de forma pensada, o mesmo acontece com o segundo caso, dessa forma, embora os três arranjos sejam igualmente possíveis de ocorrer do ponto de vista do aspecto matemático, fisicamente falando ele não acreditaria que a possibilidade matemática seja igual para todos os três ao arranjar essas letras aleatoriamente.

2º exemplo) D'Alembert comenta que a lua gira em torno de seu eixo em um tempo precisamente igual ao que gasta para realizar o movimento de revolução em torno da Terra. O matemático argumenta que se o período de rotação e o período de revolução estivessem na proporção, por exemplo, de 21 para 33, não haveria surpresas e não seria buscado a causa desse fenômeno, dessa forma, ele pergunta por que devemos nos debruçar e questionar uma proporção de 1 para 1 ao invés de uma proporção de 21 para 33?

3º exemplo) D'Alembert atacou os cálculos de Daniel Bernoulli pelo fato dele ter considerado que as órbitas dos planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Saturno e Júpiter estejam arranjados da maneira que estão alinhados do mesmo modo que a Terra em relação ao Sol. Em sua crítica, D'Alembert afirma que se os planetas estivessem todos no mesmo plano e, se aplicássemos a esse caso os raciocínios de Bernoulli, acharíamos que há infinitas probabilidades contra uma possibilidade, que esse arranjo não aconteceria, e nós concluiríamos que as probabilidades são infinitas, portanto, a disposição dos planetas calculada por Bernoulli é produzido por uma causa particular e não pelo destino, isto é, que é impossível que este arranjo seja o efeito do acaso, porque para apostar no infinito que uma coisa não é, é assegurado que é impossível. No entanto, qualquer outro arranjo particular e arbitrário que se pudesse imaginar, por exemplo, Mercúrio a 20° de inclinação, Vênus aos 15°, Marte aos 52°, Júpiter aos 40° e Saturno em 83° de inclinação, é único, como o dos arranjos dos planetas no mesmo plano, há probabilidades

também do infinito contra um que este caso não acontecerá. Dessa forma, D'Alembert (1767, p. 7, tradução nossa) questiona “por que, portanto, Bernoulli procura uma causa no primeiro caso, quando não o procuraria no segundo, se não for pelo motivo que disse?”

É um espetáculo singular ver esses autores resolverem, com uma penada, problemas de Hidráulica e de Estática que poderiam deter por toda a vida os maiores geômetras. Quanto a nós, mais sábios ou mais tímidos, contentemo-nos em encarar a maioria desses cálculos e suposições vagas como jogos de espírito aos quais a Natureza não é obrigada a se submeter e concluamos que a única verdadeira maneira de filosofar, em Física, consiste na aplicação da análise matemática às experiências ou na simples observação, esclarecida pelo espírito de método, amiúde auxiliada por conjecturas, quando estas possam fornecer ideias, mas decididamente isenta de toda hipótese arbitrária (D'ALEMBERT, 2015a, p. 75).

Ao definir o uso adequado da "matemática mista", D'Alembert argumentou que o filósofo nunca deve hesitar em apontar os abusos da teoria e usar sempre o método da "dúvida metódica".

D'Alembert comenta que os filósofos devem sempre denunciar aqueles que cometem abusos da não aplicação do método analítico em questões de “matemática mista”. Como pudemos observar no terceiro exemplo, um dos alvos constantes do filósofo e matemático, era o matemático suíço Daniel Bernoulli, do qual ele diz que:

O que há de singular, é isso que este ótimo geômetra de quem eu falo, encontrou o *ridículo*, pelo menos é o que assegura, meus raciocínios sobre o *cálculo das probabilidades*. Para uma resposta completa, rezo apenas para que ele concorde consigo mesmo, e nos faça entender claramente por que ele não procura uma causa em certas combinações, enquanto ele a procura em outros, o que, *matematicamente falando*, é igualmente possível? (D'ALEMBERT, 1767, p.7, tradução nossa)

D'Alembert usou a inoculação⁶² da varíola como um exemplo de distinção entre as noções de significados de "vida física", "vida real" e "vida civil" na aplicação de seu método analítico dentro de um contexto de "matemática mista". Essas discussões apareceram em sua publicação intitulada *Reflexions sur l'Inoculation* (1760). Dessa forma, D'Alembert então embarcou em uma abordagem positivista para analisar esse problema ao retornar a uma abordagem de "jogos de azar", argumentando que havia três tipos de duração da vida: "vida física" (a duração normal da vida de alguém), "vida real" (a parte da "vida física" que foi vivida completamente) e a "vida civil" (essa parcela da "vida física", na qual a pessoa era útil

⁶² Lestienne e Barros (2008) comentam que em 1760, D'Alembert se opõe a Daniel Bernoulli em relação as expectativas de vida promulgadas por conta do ato de inoculação, ou seja, de vacinação. Na época a varíola era uma doença comum na população, e a crítica de D'Alembert se deu considerando que muitos homens preferiam considerar os riscos a longo prazo do que a curto prazo. Dessa forma, ele comenta que o defeito clássico dos cálculos de probabilidade é desprezar a dimensão temporal.

para o estado). Dependendo do ponto de vista do indivíduo envolvido, os benefícios e riscos relativos a serem derivados da inoculação variariam amplamente.

Brown (1991) aponta que a maioria dos filósofos favoreceu o uso da inoculação e que Daniel Bernoulli deu um argumento matemático, em favor da aplicação da vacina, com base nos cálculos da média "após a vida", ou seja, mortas, considerando uma amostra de 1000 pessoas divididas entre aquelas que tiveram a varíola e aqueles que não contiveram. Ele considerou apenas pessoas que assumiram ter pelo menos 5 anos de idade, dessa forma, percebemos que a faixa etária dessas pessoas podem variar entre crianças, jovens, adultos e talvez até idosos. Bernoulli descobriu que a diferença média no "pós-vida" média dos dois grupos era aproximadamente 2,75 anos, ou seja, praticamente 3 (três) anos de "vida a menos" para as pessoas que contraíram a doença. Ele então assumiu que o ganho em outras idades com a aplicação da inoculação era quase proporcional à média de vida.

Brown (1991) comenta que D'Alembert argumentou que a abordagem matemática de Bernoulli não incluía algumas condições psicológicas naturais e que ele não considerou o risco imediato de morrer da inoculação contra o ganho distante de sobrevivência. D'Alembert primeiro atacou a premissa de Bernoulli de que o ganho em outras idades era quase proporcional à vida média:

Podemos de fato acreditar que quando alguém é infectado de varíola o perigo de morrer é o mesmo em todas as idades? Em um número igual de pessoas de 20 a 24 anos, por um lado, e de outras crianças de 4, 5 ou 6 que adquirem varíola, podemos supor de forma sensata que morrerão menos pessoas do primeiro grupo do que o segundo grupo? A experiência parece provar o contrário; e é fácil conceber que, na verdade, essa doença é mais perigosa em uma época em que o sangue provavelmente está mais fortemente alterado pelas paixões, pelo modo de vida e por outras mil causas do que na infância, quando o sangue é infinitamente mais puro e mais doce (D'ALEMBERT apud BROWN, 1991, p.18, tradução nossa).

Concluindo, podemos ver que o verbete da probabilidade na *Encyclopédie* (1765) escrito por Lubières, segue os mesmos princípios que foram estabelecidos anteriormente por D'Alembert em suas publicações a respeito de como se devem operar e abordar o cálculo de probabilidades não bastando considerar em cada uma das situações somente os aspectos matemáticos, ou como foi chamado, as certezas matemáticas não devem ser completamente sobrepostas em relação às certezas morais de modo que essas certezas sejam descartadas.

É então, necessário na visão tanto de D'Alembert quanto de Lubières, que ambas certezas morais que contenham as questões sociais e da psicologia estejam aliadas das

certezas matemáticas e por conseguinte, essas certezas devem estar totalmente incorporadas no processo de obtenção dos resultados nos cálculos das probabilidades.

2.2.3 D'ALEMBERT: FÍSICO-MATEMÁTICA

Para D'Alembert (2015c) são chamadas de ciências físico-matemáticas “as partes da Física em que se reúnem a observação e a experiência ao cálculo matemático e ao qual se aplicam o cálculo aos fenômenos da natureza (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 51)”.

De acordo com Oki (2013), o termo "físico-matemática" foi usado principalmente por matemáticos como Isaac Beeckman (1588-1637), Marin Mersenne (1588-1648), John Wilkins e Isaac Barrow (1630-1677) para designar campos quase idênticos à "matemática mista", com a imagem das ciências matemáticas em um nível epistologicamente igual à física tradicional.

D'Alembert (2015c) considera que as ciências físico-matemáticas são tão numerosas quanto os ramos das “matemáticas mistas”, dessa forma, tópicos de Mecânica, Hidrostática, Hidrodinâmica ou Hidráulica, Estática, Óptica, Aerometria, Música, Acústica, Dióptrica, Catóptrica, entre outros, podem ser incorporados pelas ciências físico-matemáticas.

Para obter os mais diversos e profundos conhecimentos a respeito das propriedades dos corpos, D'Alembert (2015a) considera que é necessário mergulhar por completo no “mundo corporal” e para esse fim, o uso da Geometria e da Mecânica se torna indispensável, sendo mais ou menos dessa maneira, que nasceram todas as ciências chamadas Físico-Matemáticas. Ele ainda faz um destaque para algumas dessas ciências colocando-as num determinado grau de prioridades:

Podemos colocar em primeiro lugar a Astronomia, cujo estudo é, após o de nós mesmos, o mais digno de nosso esforço, pelo espetáculo magnífico que nos apresenta. Unindo a observação ao cálculo e iluminando-os um pelo outro, essa ciência determina, com uma exatidão digna de admiração, as distâncias e os movimentos mais complicados dos corpos celestes e assinala até as próprias forças pelas quais esses movimentos são produzidos ou alterados. Por isso, podemos vê-la, com toda a razão, como a mais sublime e mais segura aplicação conjunta da Geometria e da Mecânica, e aos seus progressos, como o mais incontestável documento do sucesso a que o espírito humano pode se elevar por seus esforços (D'ALEMBERT, 2015a, p. 71).

Portanto, dentre todos os tópicos de estudo possíveis no campo das ciências físico-matemáticas, D'Alembert (2015c) aponta que a Astronomia Física é um dos ramos mais úteis, entendendo “por Astronomia Física não a quimera dos turbilhões, mas a explicação dos fenômenos astronômicos pela admirável teoria da gravitação (DIDEROT e D'ALEMBERT,

2015c, p. 52)”, ao se referir a explicação⁶³ que Newton deu e que procedeu em que os resultados em relação as leis de movimentos de Descartes estavam errados.

A Astronomia, para D'Alembert (2015c) era uma das ciências que mais honravam o espírito humano, entretanto, se aliar a ciência da Astronomia à Física Newtoniana, então passará a ser uma das ciências que mais honra a Filosofia Moderna. Essa observação de D'Alembert se dá em virtude de sua crítica de que os resultados obtidos por alguns físicos não passavam de especulações, principalmente das causas dos fenômenos celestes, tendo mérito apenas pela grandeza do objeto observado e sua dificuldade em aprendê-lo, não havendo motivos para esses físicos, por exemplo, se gabarem por terem sido responsáveis de encontrarem as verdadeiras causas dos movimentos dos planetas sem que pudessem mostrar que o cálculo e os efeitos dessas causas concordassem com os resultados obtidos durante a observação do fenômeno.

Na contramão dessa crítica de D'Alembert, ele considera que os resultados obtidos por Newton envolveram seriedade justamente por aliar aos resultados das observações a aplicação da Geometria em suas observações astronômicas:

Ora, a combinação entre esses efeitos é bastante considerável para que reste muito a descobrir, e, por conseguinte, uma vez conheçamos bem o princípio, as conclusões geométricas que dele deduziremos darão a perceber e permitirão prever fenômenos recônditos ou fugidios, que de outro modo requereriam bastante trabalho para serem conhecidos, deslindados e fixados tão-somente pela observação (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 52-53).

Uma explicação física digna de ser examinada ou até mesmo levada em consideração, para D'Alembert (2015c) deve ser aquela que por natureza forneçam meios infalíveis para assegurar de que são verdadeiras. Ao considerar o sistema de gravitação como uma suposição a ser averiguada, ele alerta que os filósofos não devem temer o abuso do cálculo e da Geometria para defender ou derrubar hipóteses. No caso do sistema da gravitação formulada por Newton, D'Alembert (2015c) comenta que um único artigo que desmentisse os cálculos derrubaria muitas teorias, entretanto, não há motivos de receio por conta desse sistema não permitir ilusões, visto que os fenômenos celestes e os cálculos que permearam o sistema de

⁶³ D'Alembert manifesta em seu escrito que “Seria desejável que todas as questões da Física também pudessem ser decididas de maneira tão incontestável. Só podemos considerar como verdadeiro o sistema da gravitação após termos a garantia, por cálculos precisos, de que ele corresponde exatamente aos fenômenos; do contrário, a hipótese newtoniana não mereceria nenhuma preferência em relação à dos turbilhões, pela qual se explicam, é verdade, muitas circunstâncias atinentes ao movimento dos planetas, mas de uma maneira tão incompleta, e por assim dizer tão frouxa, que se os fenômenos fossem diferentes do que são, seriam igualmente explicados, senão mais bem explicados (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 53)”.

gravitação podem ser observados todos os dias, tendo convencido aos filósofos a adotarem esse sistema em definitivo.

Outra suposição para reforçar o uso do sistema newtoniano e fortalecer teorias da Astronomia Física, é a de que os planetas se movam no vácuo ou num espaço sem resistência, e ao se saber as forças pelas quais esses planetas atuam uns sobre os outros é um problema puramente matemático determinar os fenômenos que podem ocorrer dessa movimentação. Dessa forma, D'Alembert (2015c) asserta que fazer uso do sistema newtoniano para julgar suposições desse tipo deve ser utilizada sem hesitação, com a ressalva de que:

Esse método deve ser adotado principalmente em relação a fenômenos cuja causa não pode ser mostrada pelos raciocínios, cujo encadeamento não percebemos e nos quais vemos ligação muito imperfeitamente, como a imantação, a eletricidade e uma infinidade de outros semelhantes (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 52).

Além das Ciências Físico-Matemáticas, é considerado a existência de uma vasta parte da Física chamada de Física Geral e Experimental. A principal diferença entre essas físicas se dá pelo fato de que as ciências físico-matemáticas:

não ser propriamente uma coletânea ponderada de experiências e de observações, enquanto estas, pela aplicação dos cálculos matemáticos à experiência, deduzem algumas vezes de uma mesma e única observação um grande número de consequências que, por sua certeza, estão estreitamente ligadas às verdades geométricas (D'ALEMBERT, 2015a, p. 75).

Na seção sobre "Física Geral e Experimental", D'Alembert explicou o processo de investigação como sendo uma coleção de tantos fatos quanto possível, de modo que sejam arranjados na ordem mais natural e, finalmente, sua relação com um certo número de fatos principais dos quais os outros são apenas as consequências. Este plano diferiu das ciências física-matemáticas, na medida em que:

A física em particular é propriamente apenas uma coleção sistemática de experimentos e observações. Por outro lado, as ciências física-matemáticas, aplicando cálculos matemáticos para experimentar, às vezes deduzem de uma única observação, um grande número de inferências que permanecem próximas das verdades geométricas em virtude de sua certeza (D'ALEMBERT apud BROWN, 1991, p.12, tradução nossa).

Ele critica que essa prática deseja reduzir ao cálculo a arte de curar, sendo o corpo humano, tratado por médicos algebristas, como se fosse a “máquina mais simples ou mais fácil de decompor (D'ALEMBERT, 2015a, p. 75)”.

Entretanto, ele deixa claro que é apenas contra o abuso praticado por alguns geômetras no excesso do uso de cálculos matemáticos para abordar temas físicos por conta de permitir

uma flexibilização de hipóteses dadas como verdadeiras pelos meios mais cômodos possíveis, tendo seus resultados frequentemente muito afastados do que realmente existe na natureza.

Assim, uma única experiência sobre a reflexão da luz dá toda a Catóptrica ou ciência das propriedades dos espelhos; outra, sobre a refração da luz, produz a explicação matemática do arco-íris, a teoria das cores e toda a Dióptrica ou ciência dos vidros côncavos e convexos; de uma única observação sobre a pressão dos fluidos extraem-se todas as leis do equilíbrio e do movimento desses corpos; por fim, uma experiência única sobre a aceleração dos corpos que caem leva a descobrir as leis de sua queda sobre planos inclinados, bem como a do movimento dos pêndulos. Mas é preciso confessar que os geômetras às vezes abusam dessa aplicação da Álgebra à Física (D'ALEMBERT, 2015a, p. 75).

Dessa forma, concluímos que as ciências físico-matemáticas, na visão de D'Alembert, consiste na ampla aplicação de cálculos matemáticos em experimentos físicos, de modo que a partir de poucas observações, é possível realizar um grande número de inferências para determinar o efeito resultante dos fenômenos:

A maioria das propriedades dos corpos têm entre si relações mais ou menos constantes, que podemos comparar, e a isso somos levados pela Geometria e pela Análise ou Álgebra. Sobre essa aplicação repousam todas as ciências físico-matemáticas. Uma única observação ou experimento pode resultar numa ciência completa (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 34).

Entretanto, deve se tomar certas precauções ou outras formas de demonstração de uma teoria quando as “observações que servem de base ao cálculo são pouco numerosas, quando são simples e luminosas, o geômetra extrai delas a maior vantagem possível, deduzindo os conhecimentos físicos mais propícios a satisfazer o espírito (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 51)”, ou seja, voltamos a antiga crítica relatada por D'Alembert em relação desses resultados serem mais especulativos do que verídico:

Os geômetras por vezes incorrem no erro de substituir experimentos por hipóteses, e calculam as consequências destas. Esses cálculos, porém, só podem ter força na medida em que as hipóteses sobre as quais se apoiam sejam confirmadas na natureza; é necessário que observações as confirmem, o que infelizmente nem sempre acontece. Mesmo hipóteses verdadeiras podem não ser suficientes. Se houver num efeito um grande número de circunstâncias devidas a muitas causas que atuam ao mesmo tempo e nos contentarmos em considerar apenas algumas dessas causas, e não todas, o efeito delas, por ser mais simples, poderá ser mais facilmente calculado, e poderemos muito bem, com esse método, obter o efeito parcial dessas causas. Esse efeito, porém, será bem diferente do efeito total, que resulta da reunião de todas as causas (DIDEROT e D'ALEMBERT, 2015c, p. 34).

Portanto, como vimos, para D'Alembert deve se tomar muito cuidado nas ciências físico-matemáticas, que apesar do auxílio da aplicação da Geometria e da Análise serem

extremamente necessárias para comparações e examinar fatos que nem sempre a realização de uma experiência é capaz de revelar, como o de determinar uma certa quantidade de um efeito que depende de outro efeito conhecido, é importante sempre não esquecer que os mais diferentes objetos da Física não são igualmente apropriados e suscetíveis à aplicação da Geometria.

CAPÍTULO 3

A MATEMÁTICA MISTA E AS CIÊNCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS NA REVOLUÇÃO INDUSTRIAL

O objetivo desse capítulo será investigar possibilidades de como as “matemáticas mistas” e as ciências físico-matemáticas contribuíram de modo prático para a sociedade. Partindo dessa hipótese, identificamos que elas foram importantes para impulsionar o avanço tecnológico no período da Revolução Industrial. Então, decidimos limitar uma região – Inglaterra – e fixamos uma sociedade científica – Sociedade Lunar de Birmingham, ou ainda, *Lunar Society of Birmingham* – para estudar possíveis contribuições dessas matemáticas durante a Revolução Industrial.

Para escolhermos uma sociedade científica, nos apoiamos em Gleason (2011). Ela aponta que as maiores contribuições científicas do século XVIII e da primeira metade do século XIX na Inglaterra, não foram realizadas pela *Royal Society of London*, a maior sociedade científica britânica. O desenvolvimento científico e tecnológico nesse período, de acordo com Gleason (2011), aconteceu nas sociedades científicas provinciais da Inglaterra. Portanto, para realizarmos essa pesquisa relacionada em como as “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas contribuíram nesse contexto, nos limitamos a estudar somente a produção científica da Sociedade Lunar de Birmingham. Dessa forma, esse terceiro capítulo se inicia dando um breve panorama dessa sociedade científica em relação a seus fundadores, seus principais membros e como era organizada.

Veremos que os resultados das pesquisas⁶⁴ dos membros da *Lunar Society of Birmingham* com aplicações dessas matemáticas, consistiram principalmente na construção de máquinas de motores a vapor, no intuito de suprir as demandas e necessidades industriais da época para alavancar a produção e conseqüentemente o faturamento dos donos das fábricas. Sendo assim, os documentos que utilizamos como base para nossa busca, consistem em

⁶⁴ O arquivo Boulton & Watt disponibilizados pelo *Soho House Museum* e que fazem parte da *Archives of Soho collection* é uma fonte incrivelmente rica de ilustrações de fontes de energia industrial no século XVIII, pois Boulton & Watt muitas vezes faziam desenhos sobre o que seus motores estavam substituindo. Incluíam máquinas a vapor atmosféricas, rodas de água e moinhos de vento.

inúmeros protótipos de máquinas a vapor, e também patentes dessas máquinas que foram idealizados pelos membros da *Lunar Society*.

A “matemática mista” e as ciências físico-matemáticas parecem se fazer “presente” de forma direta nesses protótipos das máquinas e motores produzidos pela Sociedade Lunar, pois cada uma dessas máquinas foram resultados da aplicação direta da matemática em questões de ordem da física que compreendem essencialmente temas abordados nas ciências da mecânica e da pneumática, ambas classificadas como “matemática mista” por D'Alembert.

Bacon em sua classificação, apesar dos indícios, não chegou a categorizar as ciências físico-matemáticas. As principais descobertas desse ramo do conhecimento foram após a sua morte. É importante destacarmos que os significados de “matemática mista” de D'Alembert e Bacon, apesar de pontos em comum, foram elaboradas em contextos e épocas distintas, tendo sido D'Alembert privilegiado, pois muitos tópicos de matemática tiveram avanços e se desenvolveram desde a época de quando Bacon publicou a classificação que realizou dos conhecimentos humanos.

Dessa forma, adotamos a classificação de D'Alembert ao invés da classificação de Bacon, por considerarmos que essa nova categorização do conhecimento, ocorreu no mesmo período que os historiadores definem como início da Revolução Industrial, segunda metade do século XVIII. Além de que, D'Alembert forneceu mais elementos para compreender e identificar os aspectos referentes a cada um dos conhecimentos elencados em sua árvore do conhecimento. D'Alembert ainda reuniu como base de sua classificação matemática, as novas descobertas que ocorreram no século XVII e na primeira metade do século XVIII, principalmente no que concerne às ciências físico-matemáticas e novas descobertas nos tratados das “matemáticas mistas”.

3.1 LUNAR SOCIETY OF BIRMINGHAM E SOHO MANUFACTORY AND ESTATE

Por conta da Revolução Industrial, iniciada no século XVIII, houve uma mudança de foco no cenário britânico, principalmente em transformações que envolveram a estrutura tradicional de camponeses, dado que, devido a construção de indústrias nas cidades, houve o crescimento do número de moradias, ocupadas pelos operários, que foram surgindo nos entornos dessas indústrias. O êxodo rural, para Gleason (2011), ocasionou na perda da noção de família que os ingleses tinham, destruída aos poucos por conta da migração em massa dos

moradores do campo para passar a viver nas cidades, ou seja, uma nação de artesãos e agricultores estava se transformando em uma nação de operários e moradores da cidade.

Essa transformação foi significativa para evidenciar a desigualdade social da população em virtude do predomínio crescente do interesse mercantil, gerando uma classe média forte e cuja base era sustentada por injustiças cometidas aos pobres⁶⁵ que aos poucos foram se aglomerando em pequenas casas nas cidades, formando o que hoje conhecemos como “bairros”, nas áreas industriais.

Como uma forma de reação a essas mudanças políticas, sociais e econômicas relativas a sociedade britânica, Gleason (2011) aponta que uma nova consciência de responsabilidade social surgiu: os homens iniciaram debates em relação às questões prementes do crescimento populacional, a situação dos pobres e o estado da educação inglesa. Dessa forma, um segmento da sociedade que estava intimamente afetado pelas mudanças trazidas pela Revolução Industrial, era a comunidade científica, em virtude da crescente ascensão industrial no cenário britânico. Principalmente no norte da Inglaterra, o desenvolvimento da tecnologia assumiu um papel mais proeminente na sociedade.

Essa tecnologia se desenvolveu principalmente para aprimorar a maquinaria das indústrias, com o objetivo de que a produção fosse agilizada e consequentemente aumentar o ritmo de produção, de modo que as fábricas tivessem maior demanda de produtos para comercializar dentro da Inglaterra e com outros países.

Para que a produção escoasse mais rápido, melhorias viárias também eram necessárias, portanto, a tecnologia também se desenvolveu para dinamizar e otimizar o transporte dos produtos, principalmente na construção da malha ferroviária, pontes, estradas e aprimoramento dos navios.

A Revolução Industrial na Inglaterra não se desenvolveu tanto em Londres, mas sim principalmente nas cidades provincianas da Inglaterra, com grande destaque para as cidades de Manchester, Liverpool e Birmingham. Na figura 16 podemos ver a localização das cidades de Londres e Birmingham indicadas, além de Manchester e Liverpool um pouco mais ao Norte do mapa:

⁶⁵ Essa classe social era formada pelos desempregados e seus familiares, além dos trabalhadores (classe operária) e sua família, entretanto, possuíam um pouco mais de condições e conforto do que os que não trabalhavam nas fábricas.

era pelo amor a ciência, pois quando esses projetos eram finalizados pelos membros científicos, eram colocados em prática na fábrica desses membros não científicos.

Ao fixarmos a *Lunar Society of Birmingham*, como uma das sociedades provinciais da Inglaterra, encontramos algumas características em relação aos seus membros. Desde a sua fundação, a partir da década de 1760, até o final do século, a Sociedade Lunar incluiu (embora não todos ao mesmo tempo) John Whitehurst, Matthew Boulton, Josiah Wedgwood, Erasmus Darwin, Joseph Priestley, William Small, James Keir, James Watt, William Withering, Richard Lovell Edgeworth, Thomas Day e Samuel Galton. Pela tabela 2 podemos ter uma breve noção do perfil dos participantes dessa sociedade:

Tabela 2 - Alguns membros da Sociedade Lunar de Birmingham

Membros	Nascimento-Morte	Atividades
Matthew Boulton	1728-1809	Dono de fábrica e fundador da Sociedade.
James Watt	1736-1819	Matemático e engenheiro.
Erasmus Darwin	1731-1802	Físico, poeta e zoologista. Era também avô paterno de Charles Darwin.
Thomas Day	1748-1789	Reformador Educacional.
Richard Lovel Edgeworth	1744-1817	Reformador Educacional. Pioneiro na invenção do telégrafo.
Samuel Galton	1783-1844	Bancário e dono de fábrica.
Josiah Wedgwood	1730-1795	Industrial dono de fábrica de cerâmica. Avô materno de Charles Darwin.
Joseph Priestley	1733-1804	Químico, político e descobridor do elemento químico oxigênio ⁶⁶ .
Samuel Garbett	1717-1805	Dono de fábrica de produtos químicos.

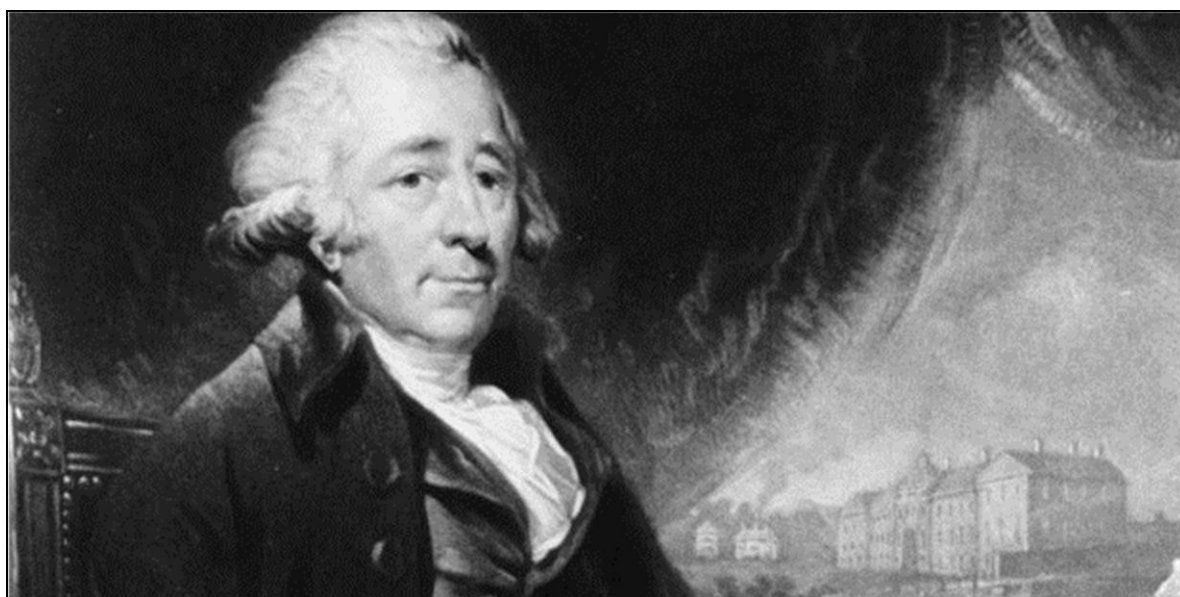
⁶⁶ O francês Antoine Laurent de Lavoisier (1743-1794) e o sueco Carl Wilhelm Scheele (1742-1786) também reivindicaram o título de descobridor do átomo de oxigênio.

James Keir	1735-1820	Dono de fábrica de vidros e um dos pioneiros em fábricas com manejo de produtos químicos.
William Small	1734-1775	Matemático e médico.
Jonathan Stokes	1755-1831	Botânico.
William Withering	1741-1792	Médico e botânico. Desenvolvia atividades na área de metalurgia.
John Whitehurst	1713-1788	Geologista e Inventor.

Fonte: Ede e Cormack (2012, p.187)

Por meio da tabela 2, podemos notar que entre os membros que integravam a *Lunar Society* havia os que eram somente donos de fábricas. Esses senhores são exemplos do que relatamos que se constituíam como membros não científicos, entretanto, eram detentores de riquezas, posses de terras e especificamente no caso da Sociedade de Birmingham, detinham o papel de comandantes do setor industrial. Destaque para Matthew Boulton (Figura 17), um industrial metalúrgico, que foi o idealizador e fundador da *Lunar Society of Birmingham*.

Figura 17 - Matthew Boulton (1728-1809)



Fonte: <http://www.libraryofbirmingham.com/article/archivesofsohofigures/matthewboulton> (Acesso em Novembro de 2017)

É possível observarmos na tabela 2, a existência de membros que obtinham alguma instrução científica. Esses integrantes são os que foram denominados por Ede e Cormack (2012), como membros científicos. É importante destacarmos que nesse período o acesso ao estudo não era livre a qualquer cidadão inglês, maioritariamente na Inglaterra, o acesso ao conhecimento era privilégio aos integrantes da nobreza ou da burguesia, portanto, o fato desses membros não possuírem indústrias, não significava que não tinham poder aquisitivo.

Os donos de fábricas procuravam membros científicos que fossem capazes de desenvolver projetos que visassem seus próprios interesses, e obviamente, que resultassem num acréscimo aos seus montantes de riquezas. Como já relatamos, esses projetos consistiam principalmente em modernização de máquinas, métodos para otimizar a produção com o maquinário já existente, além de construção de embarcações ou linhas férreas ou abertura de novas estradas e construções de pontes para dinamizar o processo de escoamento do material produzido pelas fábricas.

Outro grande fator importante para o desenvolvimento da *Lunar Society of Birmingham* era a região em que ela estava situada. A Sociedade tinha uma localização privilegiada, estava no centro de uma região denominada *West Midlands* (Figura 18), cuja característica principal dessa comarca era o fato de concentrar uma grande quantidade de metalúrgicas.

Figura 18 - West Midlands



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6a/West_Midlands_in_England.svg/200px-West_Midlands_in_England.svg.png (Acesso em Agosto de 2016)

Os historiadores consideram essa região a grande motriz da Revolução Industrial na Inglaterra por abrigar diversas indústrias de manufatura e manejo com metais pesados. Portanto, com uma localização favorável, a Sociedade poderia dispor aos membros uma alternativa para arrematar acordos, fechar negócios e firmar parcerias entre os estabelecimentos do entorno, bem como com membros científicos da região com maior facilidade em seus encontros.

As reuniões da *Lunar Society of Birmingham* ocorriam geralmente uma vez por mês e eram realizadas preferencialmente às segundas-feiras na casa de algum de seus participantes. De acordo com Soares (2007), a razão do nome “Lunar” se deu porque esses encontros ocorriam no período noturno e nas noites de Lua Cheia, dessa forma, com a iluminação da lua, facilitava o acesso do percurso para os membros chegarem aos locais das reuniões com mais tranquilidade. Essas reuniões da Sociedade Lunar eram classificadas como uma mistura de encontros sociais, experiências e discussões. Boulton conheceu Erasmus Darwin, o pai de Charles, em 1757, por meio de seus sogros. Os dois criaram uma amizade firme com base em experiências científicas e curiosidades. Em 1765, Boulton foi introduzido a William Small e foi o Dr. Small quem apresentou James Watt em 1767 para Boulton.

No entanto, só após a morte prematura de William Small em 1775 que o grupo de amigos decidiu se encontrar mensalmente no domingo mais próximo da lua cheia, de modo que o luar ajudasse a iluminar o caminho quando voltarem pras suas casas. Geralmente realizavam uma refeição às duas horas da tarde e continuavam com a reunião até pelo menos oito da noite. Havia casos também de serem oferecidos jantares, dessa forma, as reuniões adentravam a madrugada e os participantes iriam embora apenas no dia seguinte.

Além dos encontros presenciais, muitas vezes eles escreveriam um para o outro, prática comum e natural da época, independente de ser membro de alguma sociedade científica ou não. Nesses cartas trocadas entre os membros, os assuntos variavam desde discussões científicas a troca de informações e discussões de pontos que seriam tratados em futuras reuniões da sociedade.

Exemplificadamente vejamos uma mensagem⁶⁷ que Erasmus Darwin enviou para Matthew Boulton, enviada em 5 de Abril de 1778: “*Lord! What inventions, what wit, what rhetoric, metaphysical, mechanical and pyrotechnical, will be on the wing, bandy'd like a shuttlecock fro, one to another of your troop of philosophers!*”. Podemos ver que Darwin comenta sobre estar impressionado com alguma invenção de um dos membros da Sociedade,

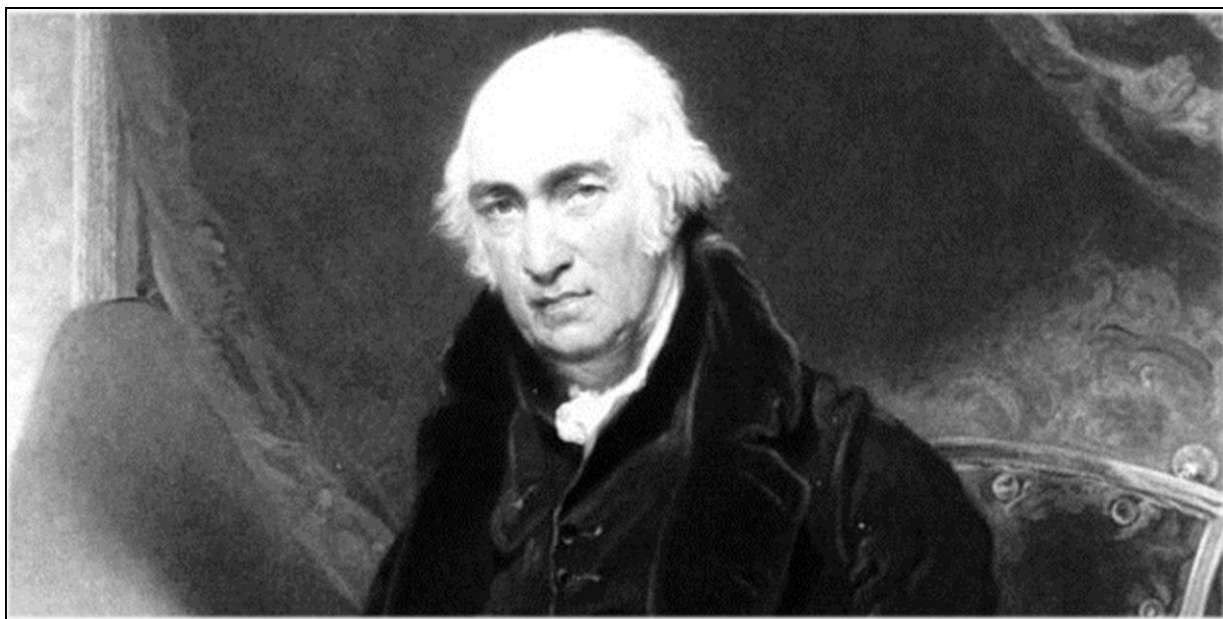
⁶⁷ Ref. MS3782/Portfolio/13/53/87.

destacando elementos como retórica, metafísica e mecânica da descoberta. Entretanto, nem só elogios estavam presentes nessas trocas de mensagens.

Em uma carta⁶⁸ de Joseph Priestley para James Watt, enviada em 29 de Abril de 1783, podemos ver que Priestley faz críticas em alerta do que Watt vinha desenvolvendo em seus trabalhos: “*Behold with surprise and with indignation the figure of an apparatus that has utterly ruined your beautiful hypothesis, and has rendered your works of labour in working, making, and writing, almost useless*”. Priestley comenta que algum dispositivo que surgiu, arruinou algumas de suas teorias, fazendo com que o tempo de trabalho dispensado por Watt na elaboração daquelas hipóteses foram uma perda de tempo.

A descrição de James Watt (figura 19) na Biblioteca de Birmingham denota que em 1775, Matthew Boulton persuadiu o engenheiro escocês Watt a mudar-se para Birmingham e investir na fabricação de motores a vapor, além de se tornar o braço direito de Boulton na Sociedade e também um dos fundadores.

Figura 19 - James Watt (1736-1819)



Fonte: <http://www.libraryofbirmingham.com/article/archivesofsohofigures/jameswatt> (Acesso em Dezembro de 2017)

Nascido em Greenock, na Escócia, em 1736, Watt passou um ano em Londres como fabricante de instrumentos de navegação antes de voltar para Glasgow para se instalar como um fabricante de instrumentos autônomo. O tempo de Watt em Londres foi marcado por uma dificuldade em encontrar trabalho, bem como um medo da "pressão" que existia na época,

⁶⁸ Ref. MS3219/Portfolio/4/86/7.

pois homens foram tomados à força e sem aviso para servir na marinha para a Guerra dos Sete Anos com a França (1755-1762).

A descrição ainda relata que inicialmente James Watt⁶⁹ não obteve grande êxito na reparação de máquinas a vapor, suas primeiras intenções era bombear água de volta ao fluxo e aumentar o fluxo de água que passava pelos motores, mas os resultados não se mostraram eficientes.

Então, Watt começou a experimentar o vapor, mas foi depois de ter sido solicitado a reparar o modelo de um motor *Newcomen*⁷⁰ *Steam* que seus experimentos o levaram ao sucesso. Isso o levou a inventar uma máquina a vapor com um condensador⁷¹ separado do cilindro em 1765, muito mais eficiente que o até então popular motor *Newcomen*.

Farey (1827) enumera os benefícios do motor desenvolvido por Watt em relação ao antigo motor *Newcomen*:

1º: Sendo o cilindro rodeado de vapor quente da caldeira, é sempre mantido à mesma temperatura do próprio vapor; portanto, incapaz de condensar qualquer parte do vapor quente que é admitido nele.

2º: O condensador sendo sempre mantido resfriado a uma temperatura de 100 graus, ou, se possível, mais frio, o vapor será completamente condensado e exaurido do cilindro, que a pequena proporção que permanece não pode se opor à descida do pistão, é, portanto, pressionado por quase toda a força elástica do vapor da caldeira; e isso pode ser maior ou menor que o da atmosfera, conforme a ocasião exigir.

3: A elasticidade do vapor da caldeira, sendo empregada para forçar o pistão a descer em vez da pressão da atmosfera, o ar não entra no cilindro de modo a arrefecer a sua superfície interna (FAREY, 1827, p.332, tradução nossa).

Por conta desses fatores, as vantagens variam desde economizar a quantidade de combustível quanto para aumentar o desempenho útil do motor. Essa economia se dá porque a quantidade de vapor perdido por condensação, quando entra no cilindro frio do motor de

⁶⁹ James Watt é mais conhecido por suas melhorias na máquina a vapor, mas a descoberta de um método de cópia de letras tornou-se a base dos dispositivos de cópia até o advento da fotocopadora. Em uma carta enviada em 24 de Julho de 1778 para o químico Joseph Black (1728-1799), James Watt escreveu: “*I have lately discovered a method of copying [letters] instantaneously, provided it has been written [____] or within 24 hours. I send you a specimen an[d I will]impart the secret if will be of any use to you*”(Ref. MS3219/Portfolio/4/127/6). O processo de impressão da cópia funcionou usando tinta modificada na letra original. Um pedaço úmido de papel era colocado sobre o original, numa “máquina de prensar”, pressionando um papel sobre o outro, dessa forma, “sangrando” a tinta pela parte de trás do papel de cópia, criando uma imagem espelhada da letra que, quando girada, era uma réplica do documento original. E como pudemos ver nas palavras de Watt, esse processo deveria ser aplicado no máximo em 24 horas da escrita do documento original. No ano seguinte, em 1779, Watt solicitou uma patente e teve Matthew Boulton e James Keir como parceiros no negócio. As primeiras prensas foram vendidas em 1780.

⁷⁰ O Motor a vapor de Newcomen foi inventado por Thomas Newcomen (1664-1729) em 1712, muitas vezes chamado como *máquina atmosférica Newcomen* e foi muito utilizado por toda a Inglaterra principalmente para bombear água para fora das minas, sendo posteriormente substituído pelas máquinas e motores de James Watt.

⁷¹ Um dispositivo ou unidade usado para condensar uma substância do estado gasoso ao líquido, resfriando-a, o que transfere o calor latente da substância para refrigerar do condensador.

Newcomen, é na maioria dos casos quase tão grande quanto a que produz sua potência. Portanto, “esses motores consomem o dobro da quantidade de combustível que seria necessária, se o resíduo pudesse ser inteiramente evitado (FAREY, 1827, p.333, tradução nossa)”.

Farey (1827) comenta que no motor melhorado de Watt, o desperdício de vapor não é maior do que um quarto da quantidade necessária para encher o cilindro, de modo que $1\frac{1}{4}$ vezes o conteúdo do cilindro deve ser fornecido em cada curso. E é provável que uma porção considerável deste desperdício seja ocasionada pelo vazamento no pistão, e não muito pela condensação.

Além dessa vantagem de economizar vapor, que de outra forma seria desperdiçada, a potência do motor aumenta tanto que o motor de Watt, segundo Farey (1827), também funciona a uma taxa de 10 libras por polegada quadrada do pistão, enquanto o *Newcomen* opera até 7 libras.

Farey (1827) explica ainda que essa diferença se dá porque no mecanismo de *Newcomen*, para funcionar adequadamente, não pode ser resfriado abaixo de 152 graus, portanto, a elasticidade do vapor não condensado, que permanece no cilindro durante todo o curso de trabalho, deve ser de quase 4 libras por polegada quadrada. Já no motor desenvolvido por Watt, ele pode ser resfriado a uma temperatura de cerca de 102 graus, e então a elasticidade do vapor não condensado no cilindro, durante o curso de trabalho, não será de 1 libra por polegada quadrada, assim, tendo menos desperdício de vapor, e aumentando a eficiência da máquina.

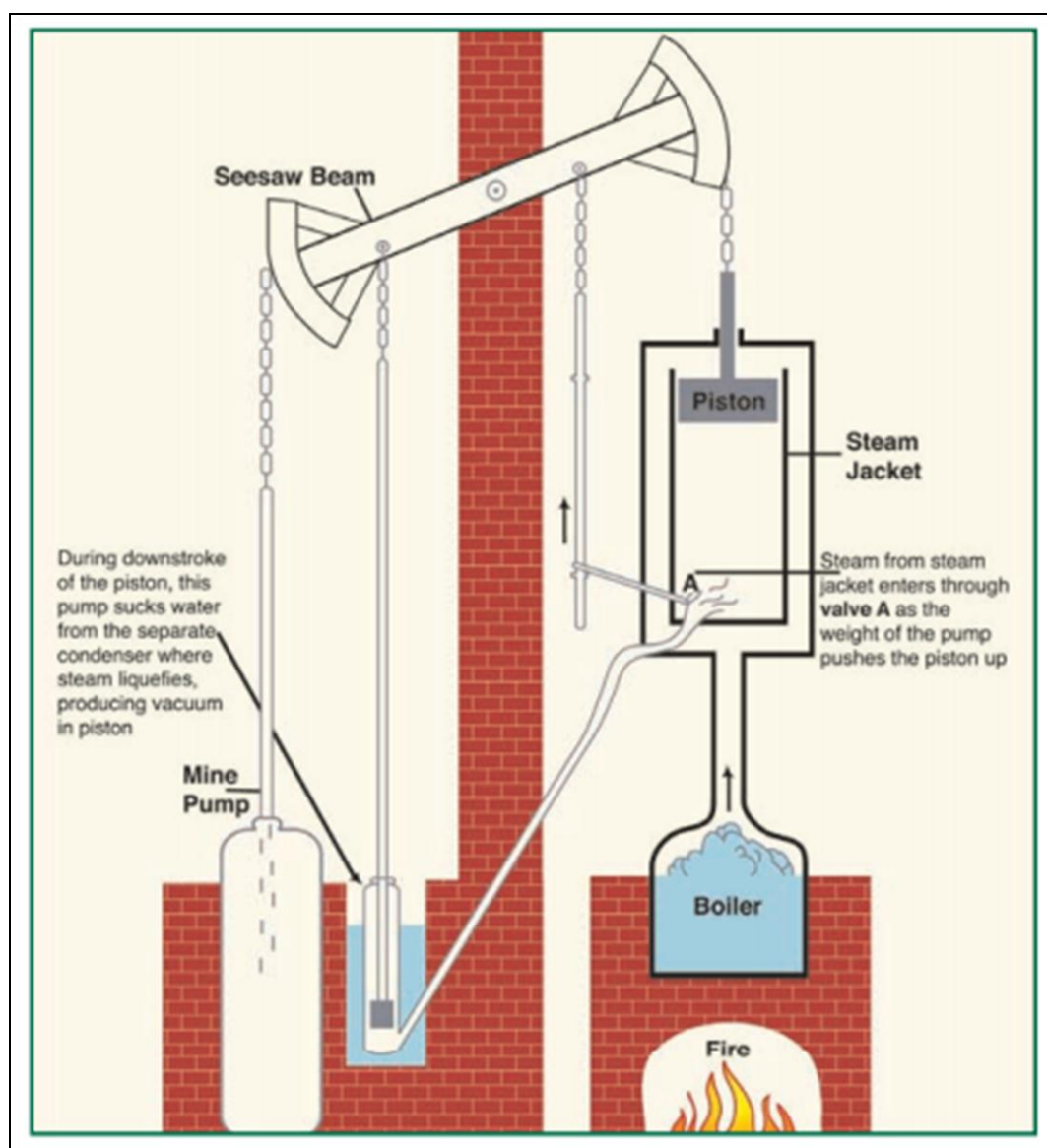
Além disso, antes que o motor *Newcomen* fosse edificado, o engenheiro realizava uma estimativa precisa do trabalho a ser realizado devendo ser proporcional ao tamanho da máquina. Essa tarefa era extremamente cuidadosa para que após o funcionamento do motor, a potência não excedesse a carga, pois, isso produziria um movimento tão rápido, a ponto de fazer os pinos de sustentação da alavanca baterem nos feixes da mola a cada golpe, com uma força que nenhum prédio ou maquinário poderia suportar. Os motores eram frequentemente quebrados pelo ar da bomba, ou pela quebra da bomba na maioria das operações de mineração. Mesmo tomando as devidas precauções, era muito difícil administrar um motor atmosférico, quando seu poder é muito maior que sua tarefa.

Em contrapartida, Farey (1827) destaca que o motor desenvolvido por Watt não apresentava nenhum destes inconvenientes, porque a sua potência poderia ser adaptada em todos os momentos à carga de trabalho que tem de realizar, pois à medida que o pistão é pressionado durante o curso de trabalho, pela elasticidade do vapor que é admitida no

cilindro, era apenas necessário administrar o vapor a uma elasticidade adequada, para superar a resistência e produzir um movimento moderado.

A figura 20 ilustra o motor a vapor básico da Watt inclui um invólucro cheio de vapor que é colocado em volta de um cilindro para aquecer seu conteúdo, que ele acrescentou ao modelo de Newcomen para condensar o vapor mais rapidamente, e uma bomba de ar, que suga o ar do condensador, criando um vácuo que força o vapor do cilindro quente para o condensador, assim, o ar quente imediatamente condensa e move o pistão.

Figura 20 - Soho Manufactory and Estate



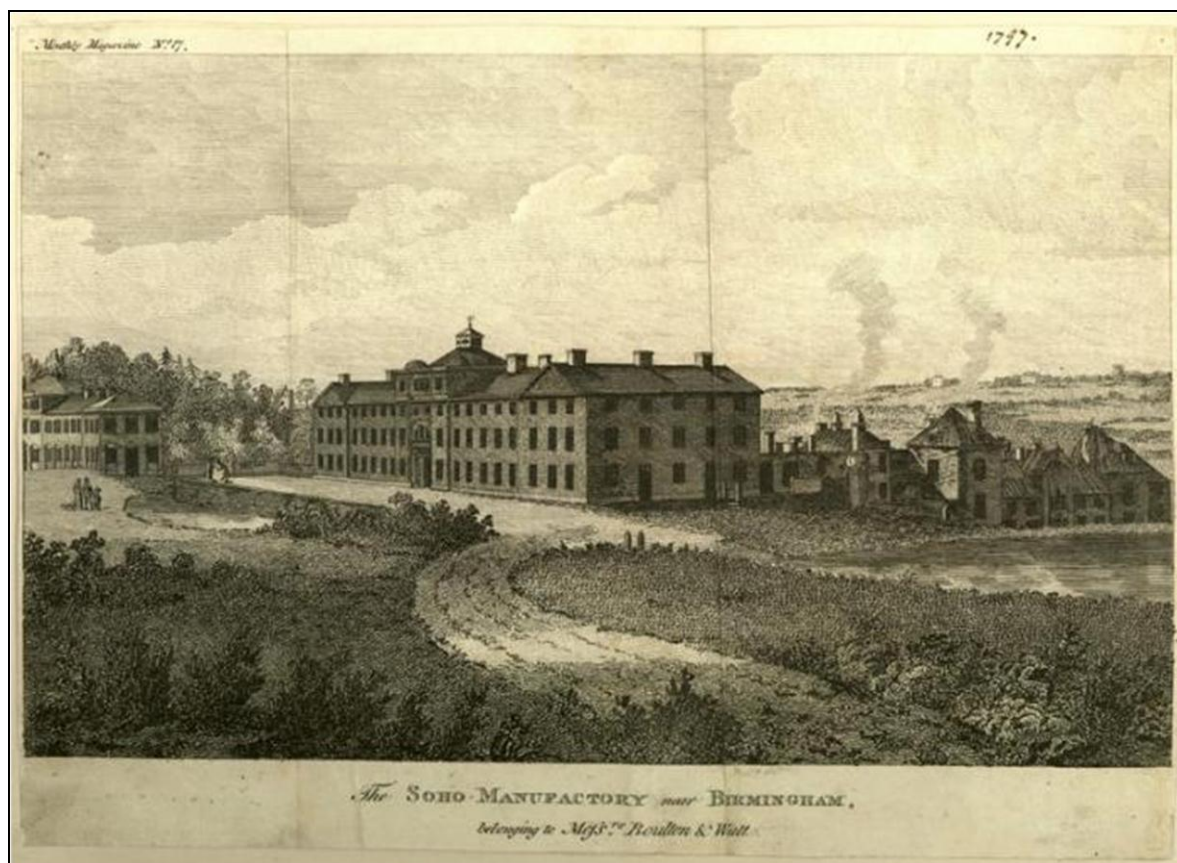
Fonte: Kras (2004)

Matthew Boulton foi fundamental para obter a extensão da patente do condensador desenvolvido por Watt para os próximos vinte e cinco anos após o registro da patente no ano

de 1775. Kras (2004) comenta que no ano de 1773 Boulton e Watt tornaram-se oficialmente⁷² parceiros de negócios.

Com base no lucro, a parceria de Boulton e Watt foi firmada no mesmo ano e seus experimentos em máquinas a vapor foram realizadas na fábrica *Soho Manufactory and Estate* (figura 21) de Boulton. Poderemos observar o sucesso que foi adquirido em virtude dessa parceria por meio dos registros em documentos que mostram a comercialização desses produtos. Dessa forma, veremos que o alcance dos frutos obtidos pela dupla foram exportados nacionalmente e internacionalmente para bombas de água, barcos, moinhos, indústrias e minas de exploração de minérios.

Figura 21 - Soho Manufactory and Estate



Fonte: <http://www.bmagic.org.uk/objects/1996V145.79/images/138904> (Acesso em Dezembro de 2017)

⁷² Em 1776, Watt criou seus primeiros motores e elaborou projetos novos. Em relação a esses projetos, Storer (1969) traz uma curiosidade em relação a vida pessoal de Watt que envolve Boulton. A primeira esposa de Watt havia morrido muitos anos antes e agora, aos 40 anos, ele estava se preparando para se casar novamente. No entanto, sogro prospectivo não ficou muito impressionado com Watt ou suas invenções. Ele insistiu em ver um contrato legal entre Watt e Boulton, a fim de definir sua relação de trabalho. Os parceiros nunca criaram esse documento e Watt implorou a Boulton em uma carta: “Eu acho que o velho cavalheiro deseja ver o contrato de parceria entre você e eu. . . . Preciso pedir-lhe o favor de obter um contrato legal por escrito e assinado por você, enviado por correio ou o mais breve possível (STORER, 1969, p.57).

De acordo com Quickenden, Baggott e Dick (2013), Boulton passou a ajudar na empresa de seu pai no ano de 1745, que desenvolvia pequenos acessórios para composição de brinquedos. Após a morte do pai, em 1759, mudou a empresa para o ramo de metalurgia⁷³, alcançando grande renome internacional. A propriedade de *Soho* foi adquirida por Boulton em 1761, e os trabalhos de construção da nova fábrica começaram no próximo ano. Antes que Boulton se mudasse para a *Soho House* em 1766, no terreno da propriedade havia mais de 2.000 árvores coníferas plantadas.

Matthew Boulton e sua segunda esposa, Anne, se mudaram para *Soho House* em 1766. Desde então, a *Soho House* passou a representar muito do que Boulton realizou em sua vida. A *Soho* tornou-se o local de encontro frequente da Sociedade Lunar de Birmingham e em 1790, ele reestruturou a casa, para ampliar e reconstruir a casa.

O interesse contínuo de Boulton nas ciências foi solidificado pela adição de um laboratório e espaço para um telescópio durante a reconstrução. Em algum momento durante o tempo de Matthew Boulton na *Soho*, um sistema de aquecimento de ar quente foi introduzido e, como tal, a *Soho House* foi descrita como a primeira casa aquecida na Inglaterra desde a época romana.

Projetado pelo arquiteto local William Wyatt, a *Soho House* foi concebida como uma declaração ao luxo clássico em virtude da sofisticação da construção para os padrões da época. De acordo com os registros⁷⁴, essa propriedade foi avaliada em 4 de Junho de 1788 por J. A. Smiths no valor de £ 10.185.000,15 sendo parte desse valor, £ 8.519.000,10 referente apenas as instalações da *Soho Manufactory and Estate*.

Segundo Quickenden, Baggott e Dick (2013), a fábrica da *Soho* trouxe uma imagem que colocaria Birmingham como uma fonte de produtos de qualidade. Dessa forma, com a inclusão da máquina a vapor de Watt na linha de fabricação do estabelecimento, foi exatamente a força motriz que faltava para a expansão da produção, e edifícios circundantes para provisão dos trabalhadores foram estendidos para acompanhar o crescimento da fábrica e o entorno da região, dado que com o progresso foi instalado novas indústrias nas proximidades da *Soho Manufactory*.

⁷³ Grande parte da fortuna que Boulton utilizou para a expansão de sua empresa metalúrgica, veio em consequência do casamento com Mary Robinson (1727-1759) e posteriormente casou com Anne Robinson (1735-1783), após o falecimento de sua irmã Mary. Ambas eram filhas de Luke Robinson (1711-????), um grande mercador de Birmingham.

⁷⁴ Ref. MS3147/Portfolio/5/1447.

Quando a *Soho Foundry*⁷⁵ abriu em Smethwick em 1796, uma ala de casas foi fornecida para os trabalhadores, e uma segunda ala foi distribuída em 1801. Os planos⁷⁶ para essas casas incluíram uma cozinha, uma despensa, um lavatório e três dormitórios. Foram feitas disposições similares para os trabalhadores de Boulton e Watt no *Soho* em Birmingham.

Portanto, podemos concluir que os esforços comerciais da Matthew Boulton ajudaram a melhorar a cidade de Birmingham. Sua fábrica trouxe produção de alta qualidade para uma cidade até então criticada por seus bens pobres e baratos, além de criar uma série de empregos para diversos camponeses da região seja por meio de sua indústria, ou pelas novas fábricas que se instalaram ao entorno, em virtude das atividades da *Soho Manufactory*.

As contribuições de Boulton na cidade de Birmingham também consistiram na construção de equipamentos que trouxeram progresso e desenvolvimento para a cidade. Juntamente com Watt, foi desenvolvido um motor a vapor para bombear água para distribuir para a população e também alimentar as máquinas a vapor das indústrias da cidade de Birmingham na década de 1770. A figura 22 mostra os planos de instalação, elaborado em 1778, desse motor de bombeamento para captação de água no *Canal Company Smethwick*.

De acordo com a descrição do documento⁷⁷, esse foi o segundo⁷⁸ motor de Boulton & Watt que foi comprado pela companhia *Birmingham Canal Navigation*, daí a legenda “Navigation Engine No. 2”. O motor foi finalizado e dessa forma, iniciou suas operações em 1779, tendo permanecido em funcionamento até 1891. Em 1897, esse motor foi desmontado e reconstruído no depósito do *Canal Co. Ocker Hill* em Tipton.

O motor foi apresentado ao Museu de Ciência e Indústria de Birmingham em 1959, e geralmente é chamado de “*The Smethwick Engine*”. Atualmente está em exibição no Museu Thinktank, em *Millenium Point*, na cidade de Birmingham. Esse motor foi construído para substituir o motor de bombeamento atmosférico, figura 23, desenvolvido por Thomas Newcomen, que ao contrário do motor Watt, o cilindro era aberto na parte superior e montado diretamente sobre a caldeira.

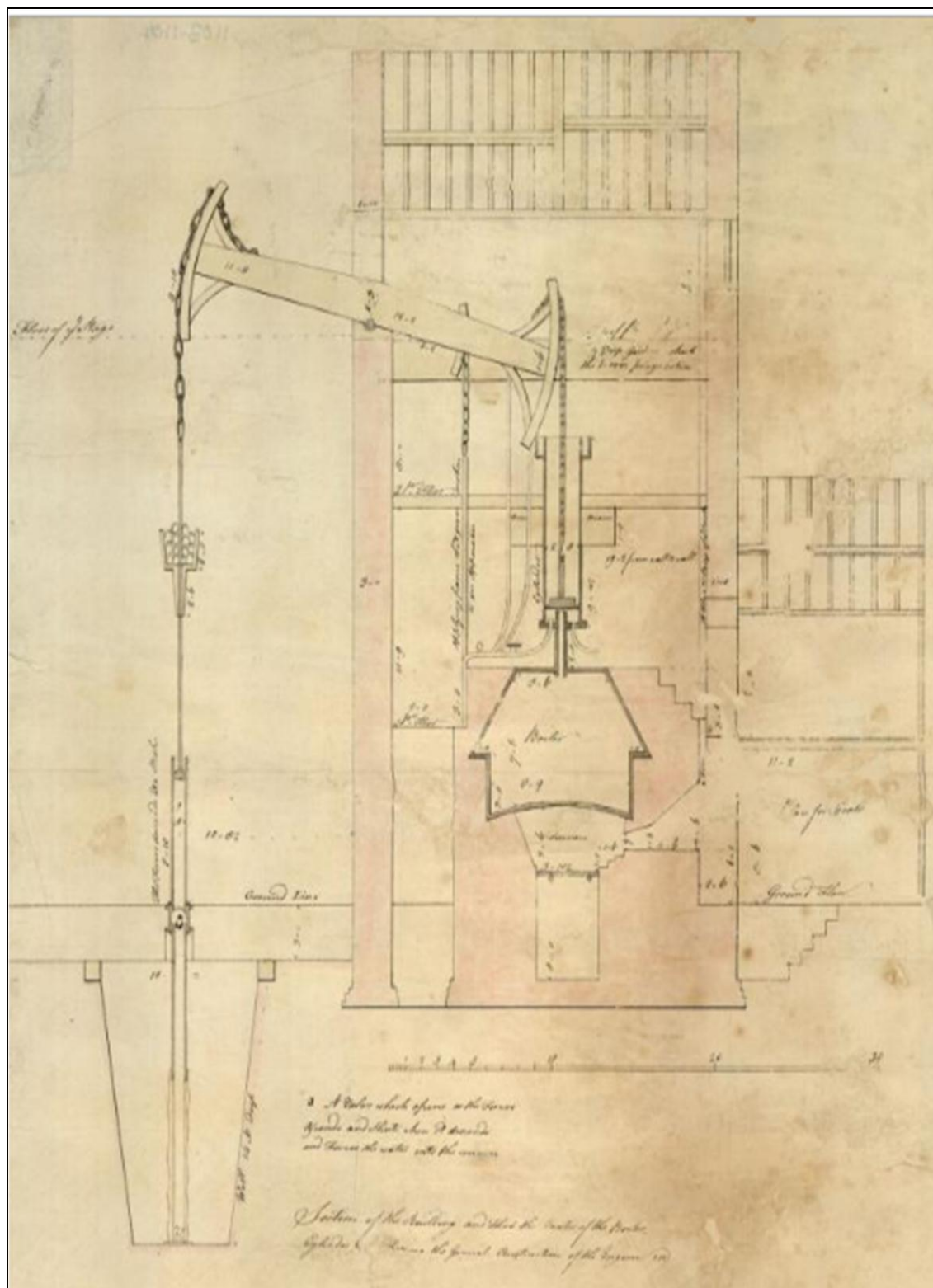
⁷⁵ A *Soho Foundry* foi uma extensão da *Soho Manufactory and Estate*. Foi uma fábrica construída para a fabricação de máquinas a vapor em 1795 por Matthew Boulton, James Watt e seus filhos Matthew Robinson Boulton (1770-1842) e James Watt Jr (1769-1848) em Smethwick, West Midlands, Inglaterra.

⁷⁶ Ref. MS3147/Portfolio/5/1455.

⁷⁷ Ref. MS3147/Portfolio/5/597a

⁷⁸ O primeiro motor foi para o *Canal Spon Lane Junction*, que também compõe a série de canais de captação para abastecimento e distribuição de água da região de Birmingham.

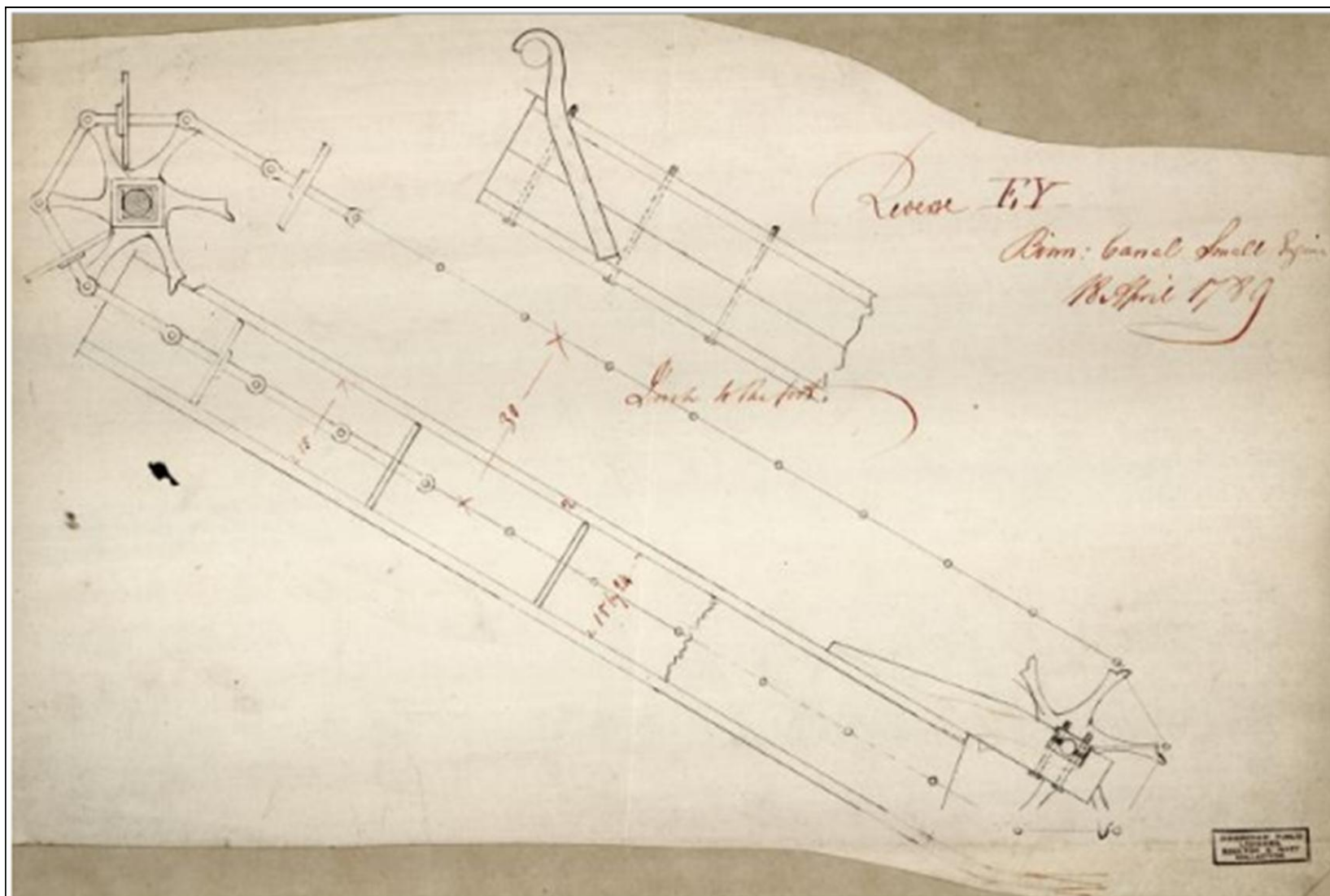
Figura 23 - Motor de bombeamento atmosférico no Chelsea Water Works



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1103

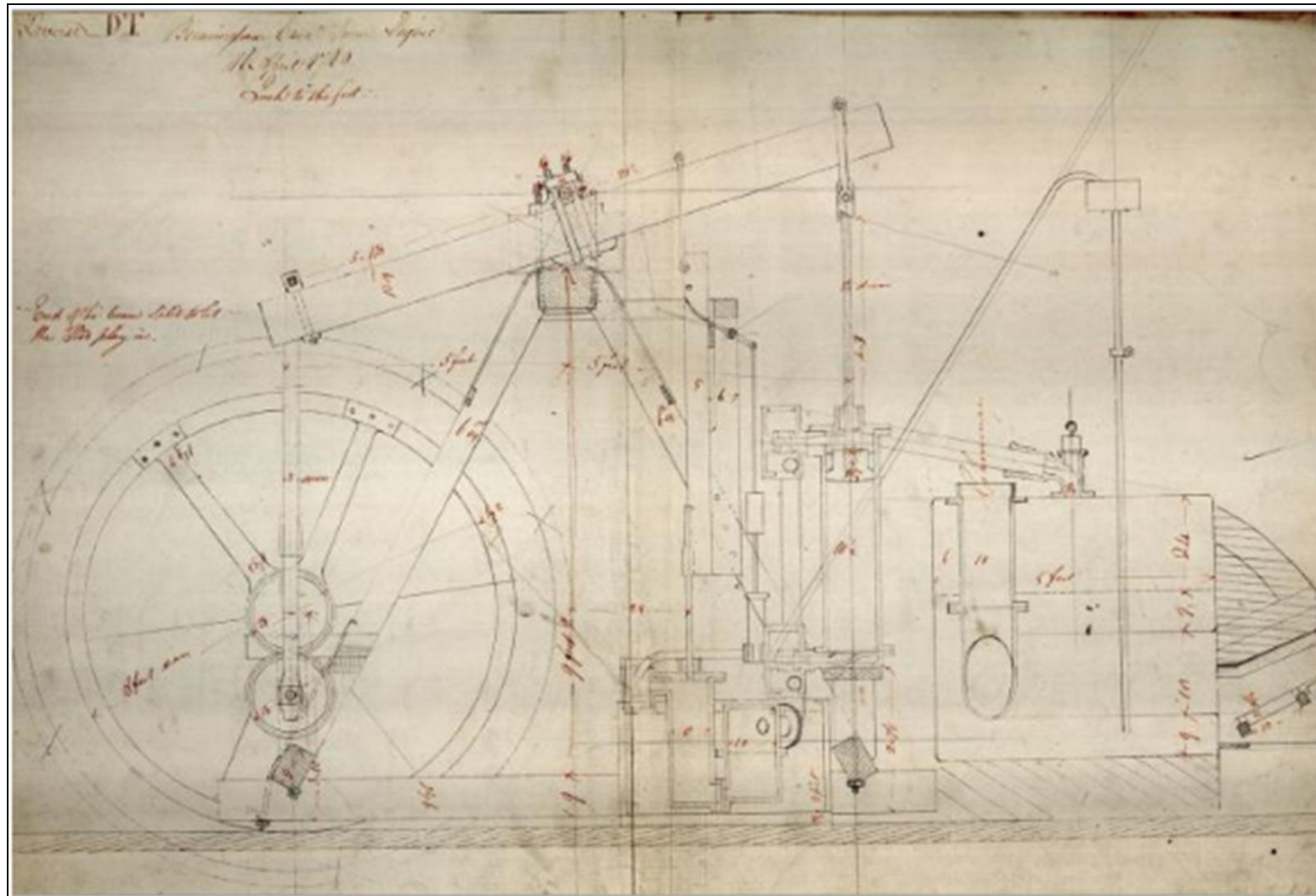
Boulton e Watt foram encorajados por John Rennie (1761-1821), que percebeu um mercado crescente para esses motores (figuras 24 e 24.1) que continuaram a ser utilizados na expansão dos canais de captação e distribuição de água da região de Birmingham.

Figura 24 - Parte geral inversa do pequeno motor para Canal Co. de Birmingham



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1279a

Figura 24.1 - Parte geral inversa do pequeno motor para Canal Co. de Birmingham



mas também para a Sociedade Lunar de Birmingham e, conseqüentemente seus membros⁷⁹, visto que a sede da Sociedade e a realização das reuniões entre os membros aconteciam nas dependências de *Soho* e os principais cabeças por trás da *Soho Manufactory* também eram os pilares da Sociedade Lunar. Os estudos realizados pelos integrantes, bem como as discussões entre os membros nas reuniões ou por envio de correspondências eram aplicadas como testes e experimentações na *Soho*.

Esses motores que inicialmente foram projetados para bombear água, devido aos resultados obtidos nesse processo, chamaram a atenção dos grandes industriais da época e passaram a alimentar a maquinaria das fábricas da região de Birmingham, posteriormente sendo comercializado com outras regiões da Inglaterra e exportado para outros países do continente europeu. Muitos desses motores foram encomendados no intuito de suprir as demandas e necessidades industriais da época, com destaque para aumentar a produção dos donos das fábricas, e conseqüentemente seus faturamentos, já essas máquinas uma vez instaladas, trabalhariam por um longo período e com custos de manutenção quase desprezíveis.

Entretanto, segundo Von Tunzelmann (1995), em razão da necessidade de aquecer e resfriar o cilindro em cada ciclo operacional, essas máquinas, a princípio tiveram um alto nível de consumo de combustível, mas como a máquina a vapor gradualmente foi se tornando um fator importante na produção, então, segundo Hessem (1993), passou-se a priorizar estudos no que poderia torná-las mais econômica, com o propósito de reduzir o gasto com carvão para alimentar as máquinas, vapor e conseqüentemente, água.

Por alguns anos após a primeira introdução de seus motores melhorados, Watt estava totalmente ocupado em substituir os grandes motores atmosféricos das minas, onde a despesa de combustível ameaçava pôr fim aos seus procedimentos. Dessa forma, tornou-se imprescindível um estudo detalhado dos processos físicos que ocorrem na máquina.

⁷⁹ Segundo Schofield (1963) “Com a vinda de Priestley, a Sociedade Lunar entrou na sua década de atividade mais incessante e produtiva. Os anos entre 1781 e 1791 foram, para quase todos os membros da Sociedade, anos de sucesso pessoal (...). Durante este período, Boulton, Watt e Keir finalmente começaram a alcançar as fortunas que eles tinham trabalhado por tanto tempo, Thomas Day e Erasmus Darwin escreveram livros para os quais eles alcançaram fama contemporânea e subsequente notoriedade. O excelente trabalho de Withering foi concluído, e as mais memoráveis realizações “científicas” e tecnológicas de Wedgwood foram atingidas, e Edgeworth encontrou sua casa e carreira (SCHOFIELD, 1963, p.193, tradução nossa). Por essa citação, podemos ver que o trabalho obtido pela produção e comercialização das máquinas e motores a vapor, não era uma conquista exclusiva de James Watt, mas que havia grande participação de outros membros da Sociedade Lunar de Birmingham.

3.2 TIPOS DE MÁQUINAS A VAPOR

Farey (1827) considera os ajustes que Watt proporcionou para ser realizados nas máquinas atmosféricas, bem como a produção das próprias máquinas a vapor, foram extremamente eficientes, principalmente em razão de ter minimizado um grande problema para os donos das indústrias da época, que era o alto gasto com compra de carvão para alimentar as caldeiras, por conta do excessivo consumo desse insumo pelas máquinas atmosféricas *Newcomem*:

A aplicação geral da energia a vapor, para fins de fabricação, é com muita justiça, atribuída a Watt, pois embora o motor atmosférico seja muito capaz de trabalhar nas usinas, e na verdade é usado para tais propósitos em considerável medida, ainda sem as melhorias do Sr. Watt, que davam certeza e regularidade à sua ação, e diminuía o consumo de combustível, o motor a vapor não poderia ter sido beneficentemente empregado em um grande número de casos em que agora é a principal máquina. A aplicação da energia a vapor para produzir movimento circular para usinas, é extremamente importante na história das invenções mecânicas, e é desejável registrar que várias tentativas foram feitas antes de serem realizadas (FAREY, 1827, p.406, tradução nossa).

Watt registrou cada uma das melhorias e aperfeiçoamentos que realizou por meio das patentes⁸⁰ de cada uma de suas invenções. Ele também patenteou alguns tipos de máquinas como: as máquinas do tipo Sol e Planeta, dupla ação e motores rotativos, bem como as do tipo comedores de fogo, e também fazia adaptações em máquinas já existentes, principalmente as atmosféricas. Vamos primeiramente apresentar alguns exemplos idealizados pelos membros da Sociedade Lunar e que, de acordo com Schofield (1963), o funcionamento e execução dessa maquinaria contribuiu para o avanço tecnológico no período da Revolução Industrial.

3.2.1 MÁQUINAS A VAPOR DO TIPO: SOL E PLANETA

O motor “Sun & Planet” foi denominado dessa forma por causa de como as duas engrenagens na roda giravam uma em torno do outra, como um planeta ao redor do sol. Este método de obter o movimento circular do sol e das rodas planetárias, aos poucos tornou-se comumente adotado para máquinas a vapor, mas a princípio, conforme Farey (1827), o Sr. Watt não conseguiu implementar imediatamente seus motores individuais para transformar as

⁸⁰ Trechos dessas patentes referentes aos tipos de máquinas de vapor que iremos apresentar, e melhorias realizadas por Watt, como o movimento paralelo, podem ser visualizadas nos Apêndices de 1 a 6.

fábricas. Antes de instalarem essas máquinas do tipo Sol e Planeta, foram exigidos testes para que a eficiência dessas máquinas fossem comprovadas, assim, com uma constatação de melhoria dos resultados, os industriais teriam garantia de seus investimentos, e consequentemente, permitiriam a construção e instalação dessas máquinas a vapor nas indústrias.

James Watt descreve o funcionamento do motor “*Sun & Planet*” na quinta invenção que foi apresentada na:

ESPECIFICAÇÃO DA PATENTE, DE 25 DE OUTUBRO DE 1781, PARA CERTAS NOVAS FORMAS DE APLICAR O MOVIMENTO VIBRATIVO OU RECIPROCATIVO DE MOTORES A VAPOR OU COMEDOR DE FOGO, PRODUZIREM UM MOVIMENTO ROTATIVO OU CIRCULAR CONTINUADO POR UM EIXO OU CENTRO, E DAR MOVIMENTO PARA AS RODAS DE MOINHOS OU OUTRAS MÁQUINAS (WATT, 1781, p.1, tradução nossa).

De acordo com Robinson e Musson (1969), essa especificação descreve cinco métodos diferentes, em que a ação alternativa da máquina a vapor pode ser convertida em movimento rotativo sem usar uma manivela, evitando assim a patente registrada em 1780 por James Pickard que usava combinadamente uma manivela para transformar o movimento do motor a vapor em uma força rotativa.

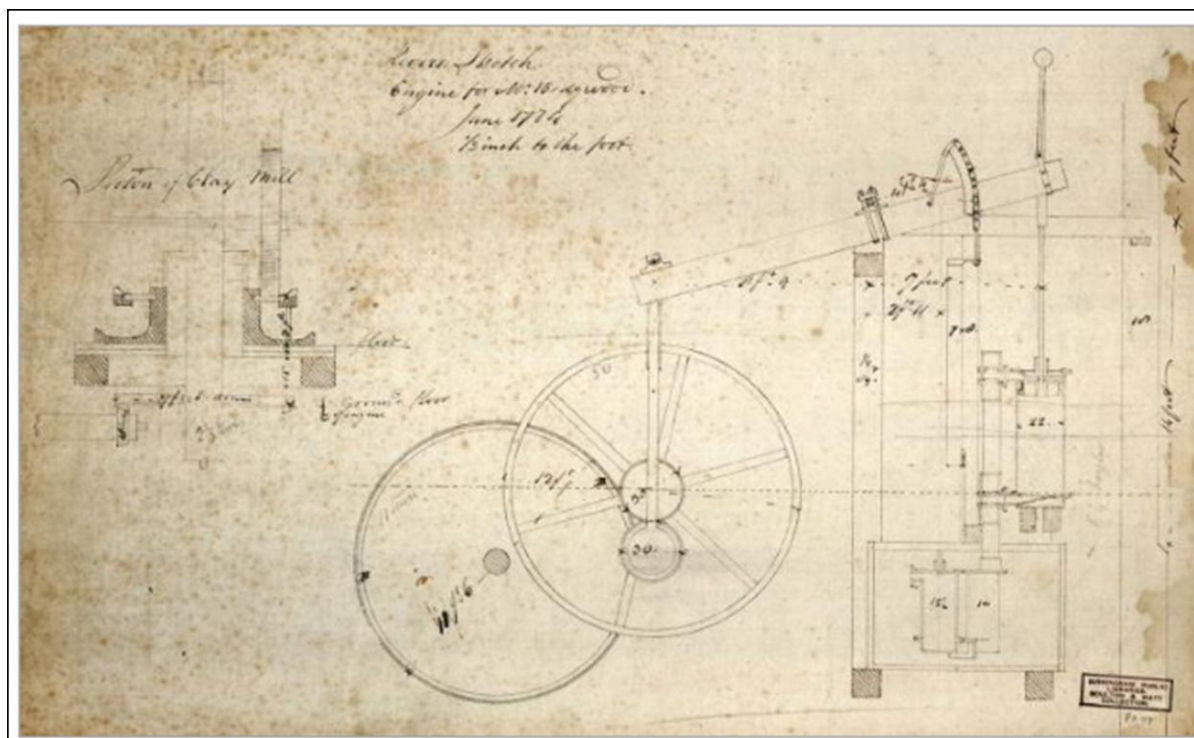
A especificação de Pickard afirma que uma alavanca curta ou manivela, é fixada na extremidade do eixo que deve ser girado, e a extremidade dessa manivela deve ser unida por um pino, na extremidade inferior de uma haste, que é articulada até o final da alavanca de trabalho (ou que, em alguns casos, pode ser articulada ao próprio pistão), de modo a girar a manivela uma vez em cada curso do motor. Em casos que for necessário um movimento regular, uma roda dentada deve ser fixada no eixo da manivela, para girar outra roda dentada de metade do tamanho, fixada em um segundo eixo, que fará duas revoluções para cada curso do motor.

Uma característica interessante do arranjo Sol e Planeta, quando comparada à de uma manivela simples, é que quando os motores do tipo Sol e o Planeta têm o mesmo número de dentes, o eixo de transmissão completa duas rotações para cada golpe duplo do feixe ao invés de um. A primeira vista, parece ser semelhante a uma manivela, mas o disco não é transmitido através dele, enquanto que nos tipos de máquinas patenteadas por Pickard, um impulso é dado da manivela com as duas rodas dentadas ao peso da balança rotativa, mas o motor não é representado, nem é feita qualquer menção à aplicação de um volante. Sendo assim, James Watt não violou a patente da manivela.

Farey (1827) comenta que nas máquinas que seguissem a especificação de Pickard, um peso de balanço rotativo deve ser aplicado na circunferência de uma roda dentada com o propósito de virar duas vezes em cada curso do motor, produzindo assim uma grande uniformidade na força exercida pelo movimento rotativo, mas para conseguir esse efeito seria necessário um volante para regular a velocidade. Então, Farey acredita que a patente do Sr. Pickard não foi colocada em prática, embora os motores com uma manivela simples e volante tenham começado a ser usados logo depois.

Assim, o renomado oleiro Josiah Wedgwood (1730-1795), que era membro da Sociedade Lunar ao lado de Matthew Boulton e James Watt, era um forte defensor do desenvolvimento de projetos e máquinas que propulsionassem energia a vapor, tanto que foi um dos principais financiadores do motor denominado "*Sun & Planet*", chegando inclusive encomendar esse novo motor para alimentar vários itens de máquinas em sua fábrica. Nas figuras 26 e 26.1 podemos ver o projeto de construção do motor "*Sun & Planet*" para ser instalado na sua fábrica situada na região de Etruria no ano de 1784.

Figura 26 - Máquina Sun & Planet (Sol e Planeta)



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/97

A figura 26.1, que ilustra o plano inverso do motor "*Sun & Planet*", nos dá uma noção maior da localização da caldeira, martelos, panelas e maquinas de argila. Entretanto, na figura 26 podemos observar mais detalhadamente um "sol" e um "planeta motor" para alimentar

As imagens anteriores (figuras 26 e 26.1) são desenhos do protótipo de um dos primeiros motores “Sol e Planeta” elaborado por James Watt - embora a invenção inicial tenha sido feita pelo engenheiro manufaturista da *Soho*, William Murdoch⁸¹ (1754-1839).

A descrição do documento⁸² relata que uma das primeiras aplicações para esse motor rotativo consistia em trabalhar com martelos de forja para malhar o metal. Boulton e Watt experimentaram extensivamente os martelos de forja a vapor na *Soho Manufactory*.

O próximo exemplo traz outro grande motor “Sol e Planeta”, projetado entre 1776 e 1777, contendo um cilindro de 42 polegadas, figura 27, encomendado pelo “mestre dos ferros” John Wilkinson⁸³ (1728-1808), que fez a maioria dos cilindros Boulton & Watt, utilizados em suas máquinas de vapor durante esse período.

⁸¹ De acordo com o artigo de 1911 da Encyclopædia Britânica, em 1777, William Murdoch tornou-se empregado da empresa de Boulton & Watt na *Soho Manufactory*, e cerca de dois anos depois foi encarregado para trabalhar para eles em Cornwall, como engenheiro de motores a vapor por dez anos e para supervisionar o encaixe dos motores. Murdoch foi o primeiro a conceber um motor oscilante, do qual ele fez um modelo em 1784, e a iluminação a gás lhe é atribuída no início da década de 1790, além do termo “gasômetro”. Após seu retorno a Birmingham em 1799, ele fez progresso na descoberta de métodos práticos para fazer, armazenar e purificar gás, tanto que, em 1802, uma parte do exterior da fábrica de Soho, estava iluminada com a celebração da paz de Amiens - um tratado de paz firmado em 25 de março de 1802 na cidade francesa de Amiens. Esse tratado pôs fim às hostilidades existentes entre França e Reino Unido durante as chamadas Guerras Revolucionárias Francesas. O tratado, que foi assinado entre José Bonaparte (1768-1844) e o Marquês de Cornwallis (1738-1805), foi chamado de “tratado de paz definitivo”, pois trouxe fim ao conflito entre as duas maiores potências bélicas da Europa naquele tempo, entretanto, esse “fim” infelizmente não durou muito, pois foi quebrado um ano depois - no ano seguinte, a iluminação a gás inventada por Murdoch foi posta em uso para o interior da Soho. Murdoch também foi inventor de importantes melhorias na máquina a vapor, tanto que ele também acreditava ter sido o verdadeiro inventor do movimento do motor “Sol e Planeta” patenteado por Watt em 1781. Em 1786, ele estava ocupado com uma carruagem a vapor ou locomotiva rodoviária; e em 1799 ele inventou a longa válvula de correção. Além disso, ele inventou a arma de vapor e o sistema de mensagem do tubo pneumático, e trabalhou em um dos primeiros barcos a vapor britânicos para atravessar o Canal da Mancha. Ele se retirou dos negócios em 1830 e morreu em 15 de novembro de 1839.

⁸² Ref. MS3147/Portfolio/5/239c.

⁸³ De acordo com as informações da BBC inglesa, John Wilkinson foi um industrial inglês pioneiro na fabricação de ferro fundido e no uso de produtos de ferro fundido durante a Revolução Industrial. No início da década de 1760, John e seu irmão William herdaram a fábrica de ferro do pai em Bersham, no norte do País de Gales e fundaram a New Bersham Company. Bersham logo liderou o mundo no campo da tecnologia de ferro. Mais tarde, John se juntou a James Watt na fabricação de máquinas a vapor. Por cerca de vinte anos, eles desfrutaram de um quase monopólio, com Boulton & Watt. Essa relação acolhedora terminou quando, no final da década de 1780, quando William e John separaram sua sociedade. William forneceu a Boulton & Watt com detalhes, informações dos motores piratas que John estava construindo em paralelo. Em 1774-1775, Wilkinson inventou uma máquina de canhão-chato que produziu canhões mais seguros e precisos. Mais tarde, ele patenteou um método para fazer ranhuras espirais em canhões que projetariam a bola mais e mais retas. Wilkinson foi uma peça importante por trás da construção em 1779 de uma ponte de ferro, a primeira do mundo, através do rio Severn em Coalbrookdale. Ele também desenvolveu um dispositivo de sopro para fornos que permitiu temperaturas mais altas, aumentando sua eficiência. Sua obsessão de ferro atingiu seu pico no final da década de 1790, quando ele pagou para ter janelas de ferro, um púlpito e outros acessórios instalados em uma capela metodista em Bradley. Ele ficou conhecido como ‘Iron-Mad Wilkinson’, algo parecido como “Maluco dos Ferros Wilkinson”. Morreu em 1808, em seu funeral, foi enterrado em um caixão de ferro. **Fonte:**

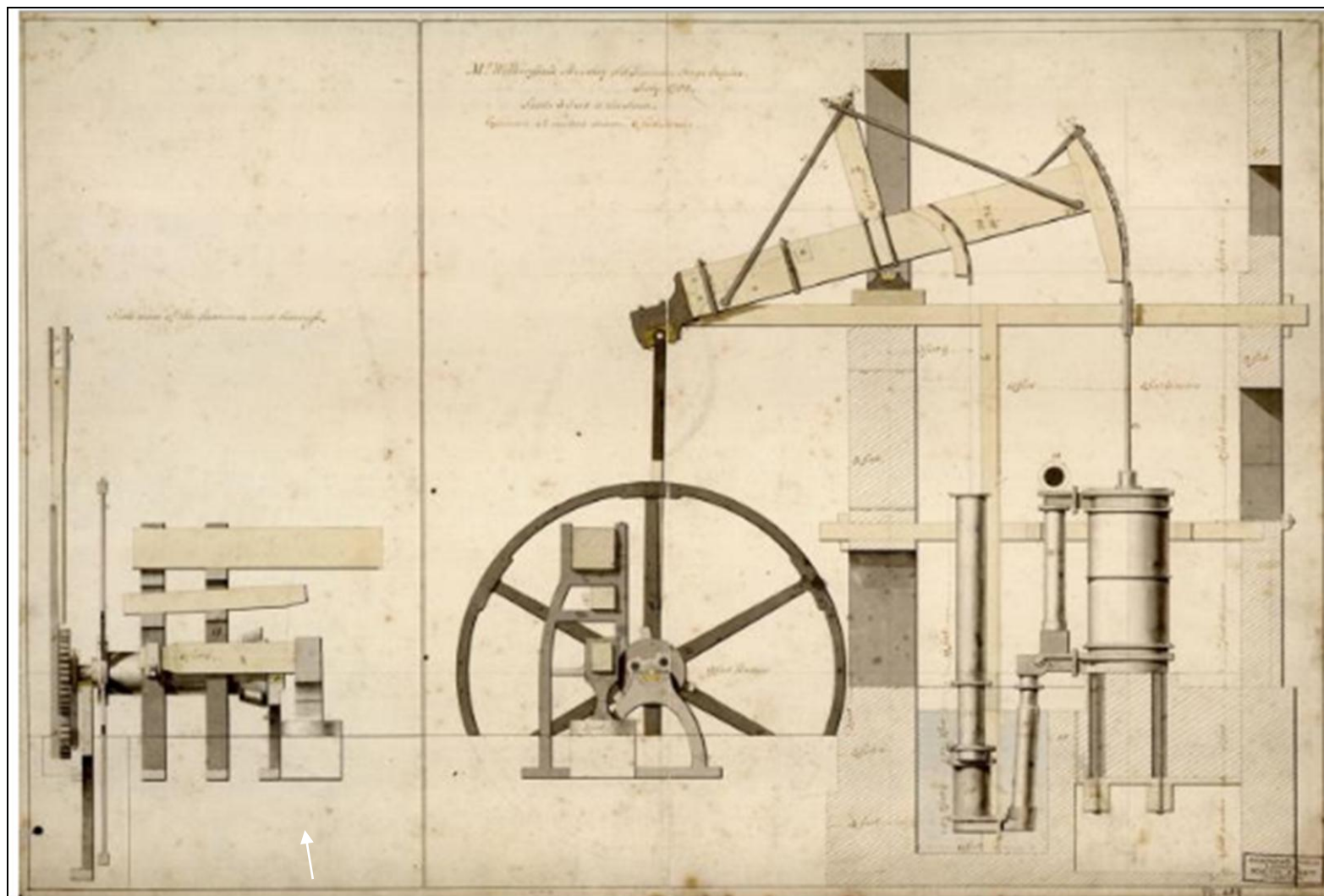
<http://www.bbc.co.uk/history/historic_figures/wilkinson_john.shtml> Acessado em 27 de Novembro de 2017.

É possível observarmos, por meio da figura 27, que o desenho que está na parte esquerda da figura mostra uma vista lateral do motor “Sol e Planeta”, enquanto a cabeça do martelo está melhor visualizada à direita do desenho, no final do feixe marcado "6 pés 6" (seta branca indicada na figura). Além disso, as projeções na roda que elevaram o martelo podem ser vistas com maior facilidade na vista lateral. Esse motor foi construído antes de James Watt patentear-lo em 1781, sendo um dos motores teste para verificar o rendimento e performance da máquina a vapor.

É importante notar que o eixo da engrenagem do “planeta” está ligado ao eixo da engrenagem do “sol” por um elo que roda livremente em torno do eixo da engrenagem “solar” e mantém a engrenagem do “planeta” engatada com a engrenagem “solar”, mas não contribui para o torque da movimentação. A engrenagem “planetária” é fixada à biela e, portanto, não roda em torno de seu próprio eixo.

Dessa forma, a engrenagem “Sol e Planeta” converte o movimento vertical de um feixe, conduzido por uma máquina a vapor, em movimento circular usando um "planeta", que consiste numa roda dentada fixada na extremidade da biela (conectada ao feixe) do motor. Com o movimento do feixe, isso gira ao redor, e conseqüentemente gira o "sol", uma segunda roda giratória fixada ao eixo de transmissão, gerando assim um movimento rotativo.

Figura 27 - Máquina 'Sun & Planet' para o “mestre dos ferros” John Wilkinson



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/239c

3.2.2 MÁQUINAS A VAPOR DO TIPO: MOTORES ROTATIVOS

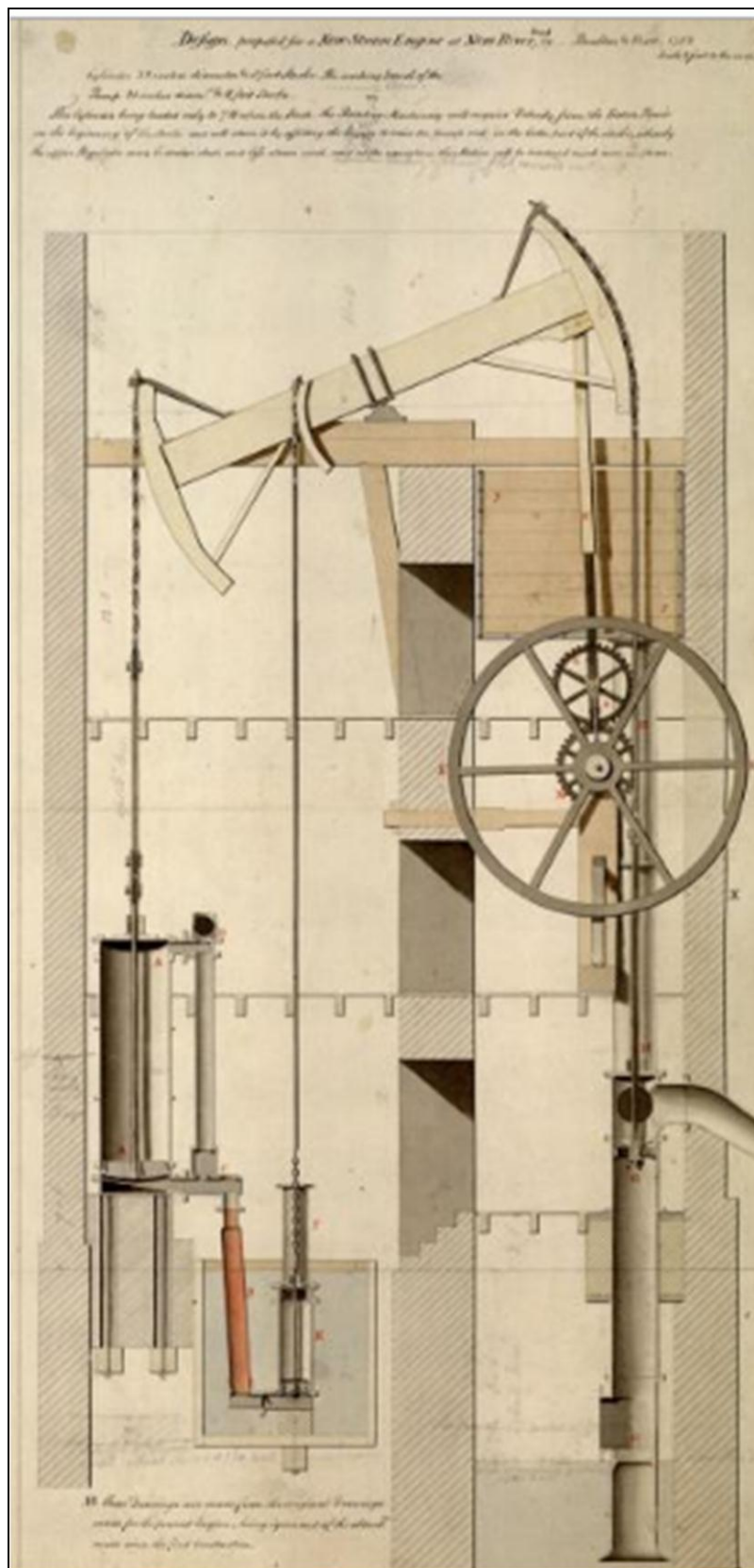
Alguns dos primeiros motores da Boulton & Watt foram fornecidos às obras de água da capital inglesa, ou seja, a cidade de Londres. Na década de 1780 eles receberam mais alguns pedidos, e posteriormente, tiveram como um dos principais clientes do século XIX, a *New River Company*. As figuras 28 e 28.1 mostram o desenho de uma proposta para um novo motor de bombeamento com um cilindro de 32 polegadas em 1782.

Farey (1827) aponta que a aplicação dessas máquinas a vapor para produzir um movimento rotativo contínuo, foi bastante utilizada para fomentar a produção em moinhos e fábricas a partir da década de 1780, e que na maioria das ocasiões essas máquinas são responsáveis para fazer o bombeamento de água, proporcionando toda a energia para o trabalho do motor principal.

Poderemos visualizar na figura 28 uma visão interna da máquina rotativa e também do trabalho do motor de bombeamento. Usualmente, é um motor rotativo do tipo “Sol e Planeta” – em que a maioria dos motores de bombeamento foram conectados diretamente às barras de bomba do feixe. No entanto, de acordo com a descrição⁸⁴ do documento, parece que esse motor para a *River Head Water Works* nunca foi realmente construído, apenas constam-se os protótipos do que seria sua implementação.

⁸⁴ Ref. MS3147/Portfolio/5/1090.

Figura 28.1 - Máquina de bombeamento “Sun & Planet” rotativo para as obras da River Head Water Works



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1090

Um arranjo incomum de motores rotativos foi instalado na fábrica⁸⁵ de armas de Henry P. Whately em French Walls em Smethwick. Por meio das figura 29 e 29.1, podemos ver um motor mostrado no plano superior, que consiste em um motor rotativo do tipo "Sol e Planeta" de 20 cavalos de potência, enquanto o menor é um motor de manivela de 9 cavalos.

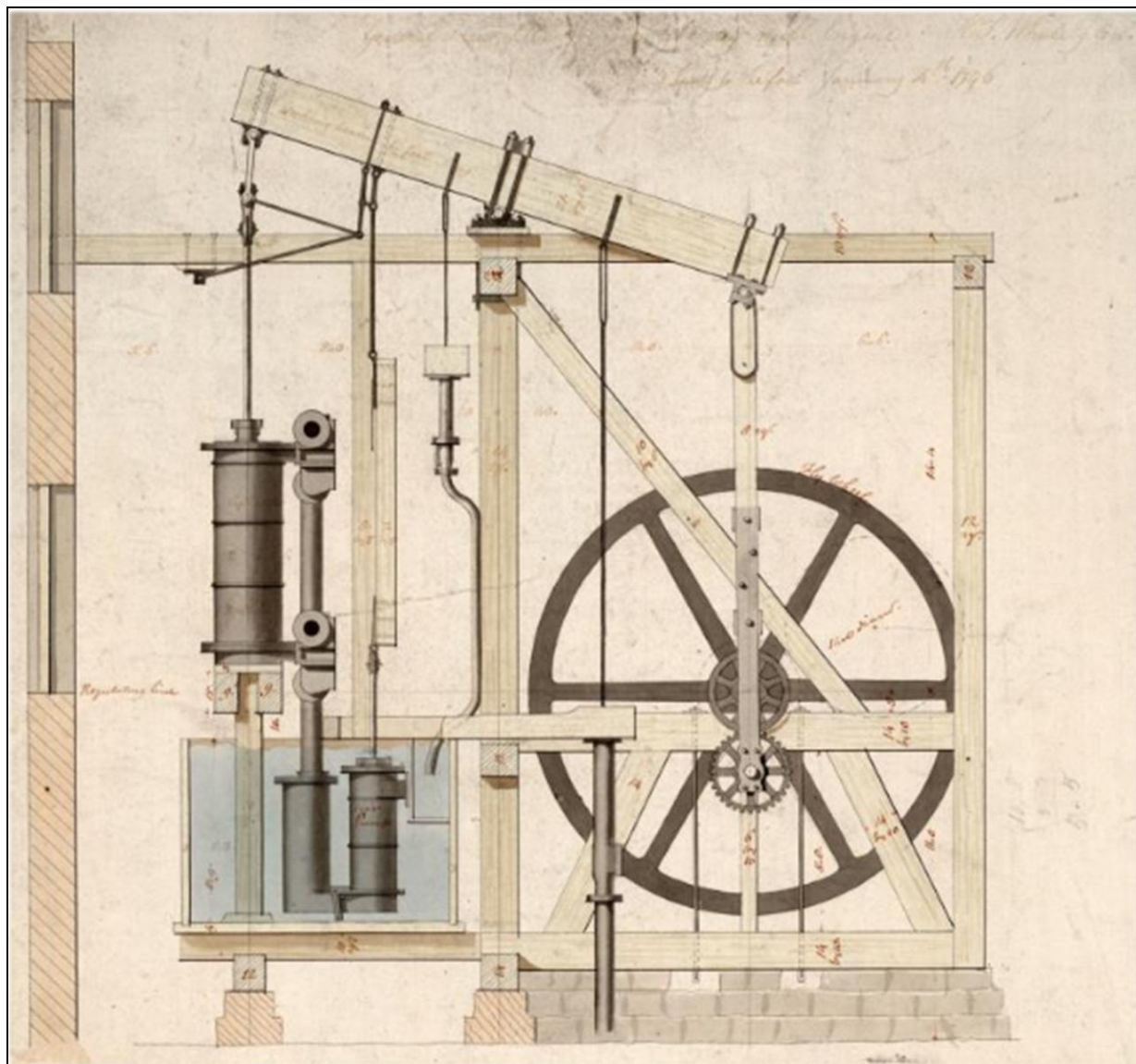
O irmão de Henry, John Whately, ordenou o motor de 20 cavalos em 1791, para alimentar a forja e o moinho de moagem para a fabricação de canos de armas - parte crucial das armas à distância, como pequenas armas de fogo e peças de artilharia.

No entanto, parece que o motor não foi construído até o final de 1795 / início de 1796, quando Henry estava executando as obras. Ao mesmo tempo, Henry comprou o motor de 9 cavalos da Cox & Hall of Nottingham, que ele usou para alimentar a forja, deixando o motor de 20 cavalos para aumentar o poder de tritura da fábrica.

Os motores foram colocados em um arranjo incomum, sendo lado a lado e ambos conectados a um tambor grande, que parece ter sido conectado ao aparelho de forja. Ambos os motores foram alimentados a partir de uma caldeira comum, embora um segundo foi adicionado em 1799. James Watt Jr. comprou o motor de 20 cavalos e as caldeiras quando comprou a fábrica de French Walls em 1816.

⁸⁵ De acordo com Inikori (2002), a fábrica de armas foi fundada por John Whately (pai), e fez bastante fortuna devido ao comércio de armamento com o mercado africano. Por meio de um acordo firmado verbalmente, em maio de 1766 deixa responsabilidade de metade da empresa para seus filhos Henry Piddock Whately e John Whately (filho). Após o casamento de John Whately (filho), John (pai) se retira totalmente dos negócios, deixando sua parte para seu filho como presente de casamento. Após o morte de Whately (pai), os irmãos continuaram a produção de armas e inclusive expandiram a comercialização no continente africano. O autor ainda comenta que em 24 de outubro de 1791 havia mais de 50.000 armas no armazém da fábrica em Birmingham, reservadas para comercializar principalmente com o mercado africano. Por meio dessas vendas juntaram uma fortuna considerável e além da fábrica de armas, possuíam outras propriedades espalhadas na região de *Midland*. Para finalizar, o autor ainda relata que em 1801, a empresa ainda estava fortemente envolvida na fabricação de armas e que "a população da aldeia de Smethwick aumentou muito nos últimos anos devido ao canal que passa por Birmingham ... e que nesse canal os Srs. Whately estabeleceram uma grande indústria de fabricação de cano de armas, que foram forjados e talhados com a assistência de uma máquina a vapor (IKINORI, p. 465, 2002, tradução nossa)".

Figura 29.1 – Máquina rotativa de 20 e 9 cavalos para Fabricante de Armas



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/77

3.2.3 MÁQUINAS A VAPOR DO TIPO: DUPLA AÇÃO

Outro tipo de máquina patenteada por Watt, e assim elaborada pelos membros da Sociedade lunar de Birmingham, foram as máquinas de dupla ação, pela qual o pistão exerce uma força contínua e não requer contrapeso. Dessa forma, Watt incluiu um motor de dupla ação em sua patente⁸⁶ na data de 12 de março de 1782, e mais tarde no ano começou a projetar motores de teste para a *Soho Manufactory*, e como o pistão de um motor a vapor opera por um movimento recíproco, é vantajoso permitir que ele atue com força em ambas as

⁸⁶ Apêndice 4.

direções e, assim, exercer um esforço contínuo, em vez de gastar metade do tempo em movimento de retorno inútil.

Farey (1827) relata que não foi fácil produzir uma ação dupla em um cilindro, até que Watt inventou seu motor, no qual o pistão é impulsionado pela força elástica do próprio vapor, independentemente da pressão da atmosfera, assim, a força do vapor sendo aplicada alternadamente para pressionar o pistão para baixo em seu cilindro, e então forçá-lo para cima novamente, de modo que o contrapeso se torne desnecessário faz com que a ação seja contínua. Watt diz em sua patente:

MINHA SEGUNDA MELHORIA em motores de vapor ou comedores de fogo consiste em empregar a potência elástica do vapor para forçar o pistão para cima, e também pressioná-lo para baixo alternadamente, fazendo um vácuo acima ou abaixo do pistão, respectivamente, e ao mesmo tempo empregando o vapor para agir sobre o pistão naquela extremidade ou parte do cilindro que não está esgotada; de modo que um motor construído dessa maneira pode realizar o dobro da quantidade de trabalho, ou exercer o dobro da potência ao mesmo tempo, (com um cilindro do mesmo tamanho), que até agora foi feito por qualquer motor a vapor em que a força ativa do vapor é exercida sobre o pistão apenas em uma direção, seja para cima ou para baixo (WATT, 1782, p.2, tradução nossa).

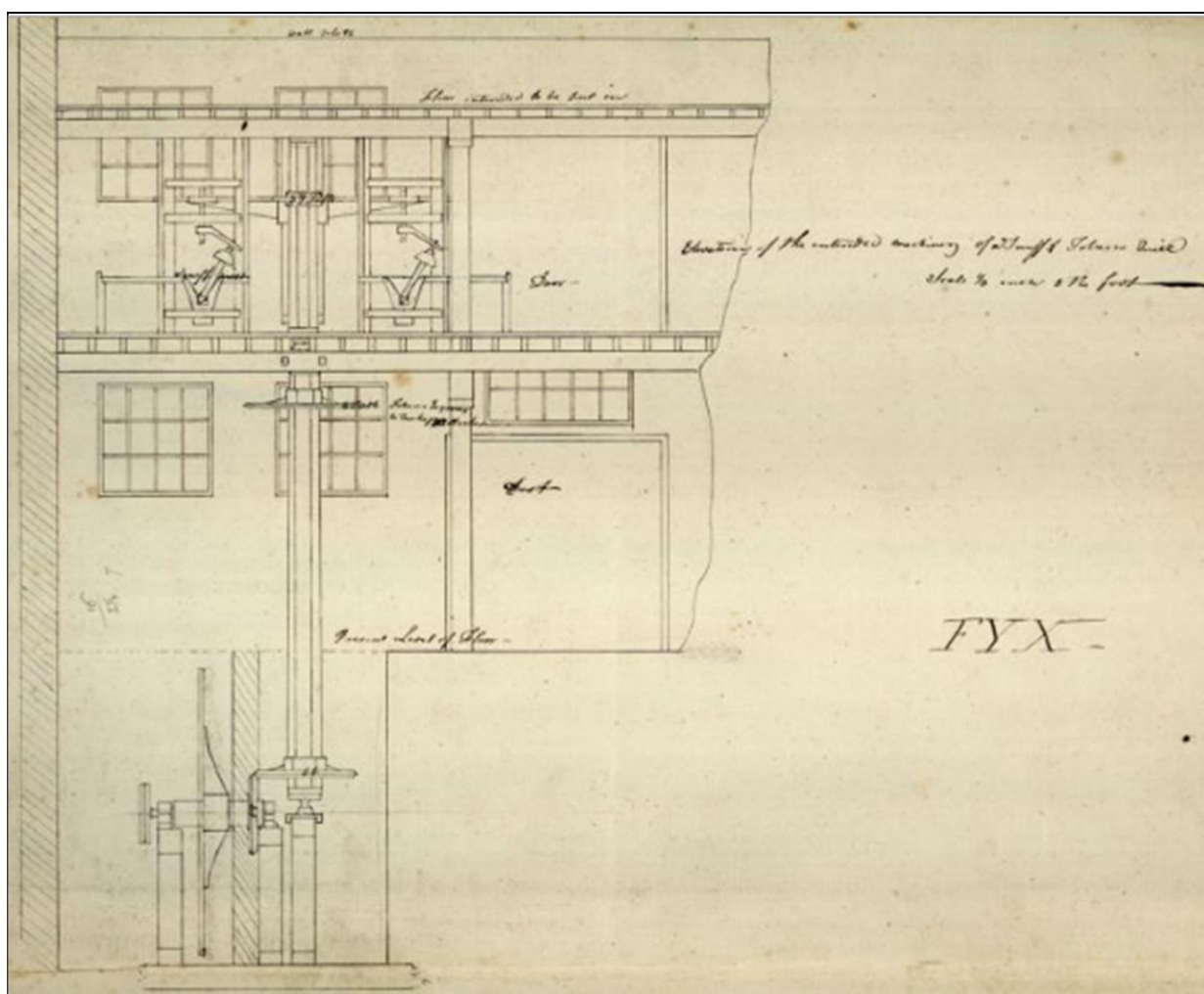
Dessa forma, o motor de dupla ação de Watt, opera da mesma maneira que seu motor de ação única ao executar seu curso de trabalho, e o curso de retorno é executado da mesma maneira que o curso de trabalho. Para produzir esse efeito, as válvulas para admitir e exaurir o vapor do cilindro exigiam um novo arranjo, e também o mecanismo de trabalho para abrir e fechar essas válvulas. Também se tornou necessário aplicar correntes adicionais às cabeças do arco da grande alavanca, para permitir que o pistão force a alavanca para cima, assim como para puxá-la para baixo, atuando em um setor dentado formado na cabeça do arco da grande alavanca, de modo a transmitir o duplo movimento do pistão a ela. Isso constitui outro item da especificação de sua patente de 1782:

MINHA QUARTA NOVA MELHORIA em máquinas a vapor ou a fogo consiste na aplicação de cremalheiras dentadas e setores dentados de círculos para suspender ou conectar as hastes ou pistões com as alavancas de trabalho, ou outro maquinário usado no lugar deles, em vez das correntes e arcos que até agora foram usados para esses propósitos (WATT, 1782, p.4, tradução nossa).

Então, quando Watt começou a aplicar seu motor de ação dupla para transformar as máquinas, descobriu que a cremalheira e o setor dentado, que ele usou pela primeira vez para conectar o pistão com a grande alavanca, não se movia com suavidade, e os dentes eram sujeito a um excessivo desgaste.

Podemos citar como exemplo, a máquina de dupla ação encomendada pelos industriais Samuel Fish e John Yates, figuras 30 e 30.1, que compraram um motor de “Sol e Planeta” de dupla ação. Conforme descrição do documento⁸⁷, o motor foi planejado com uma potência de 8 cavalos, com um cilindro de 16 polegadas e um golpe de 4 pés para alimentar seu moinho de tabaco e rapé na rua St. John na Paróquia de St. Sepuchre, em Londres. Boulton & Watt, se referiram ao motor um tanto de forma criptográfica pelo código "FYX", sendo o F provavelmente ao Fish do sobrenome de Samuel, e o Y ao Yates, também sobrenome do outro industrial, John.

Figura 30 - Motor “Sol e Planeta” de dupla ação para um moinho de tabaco e rapé

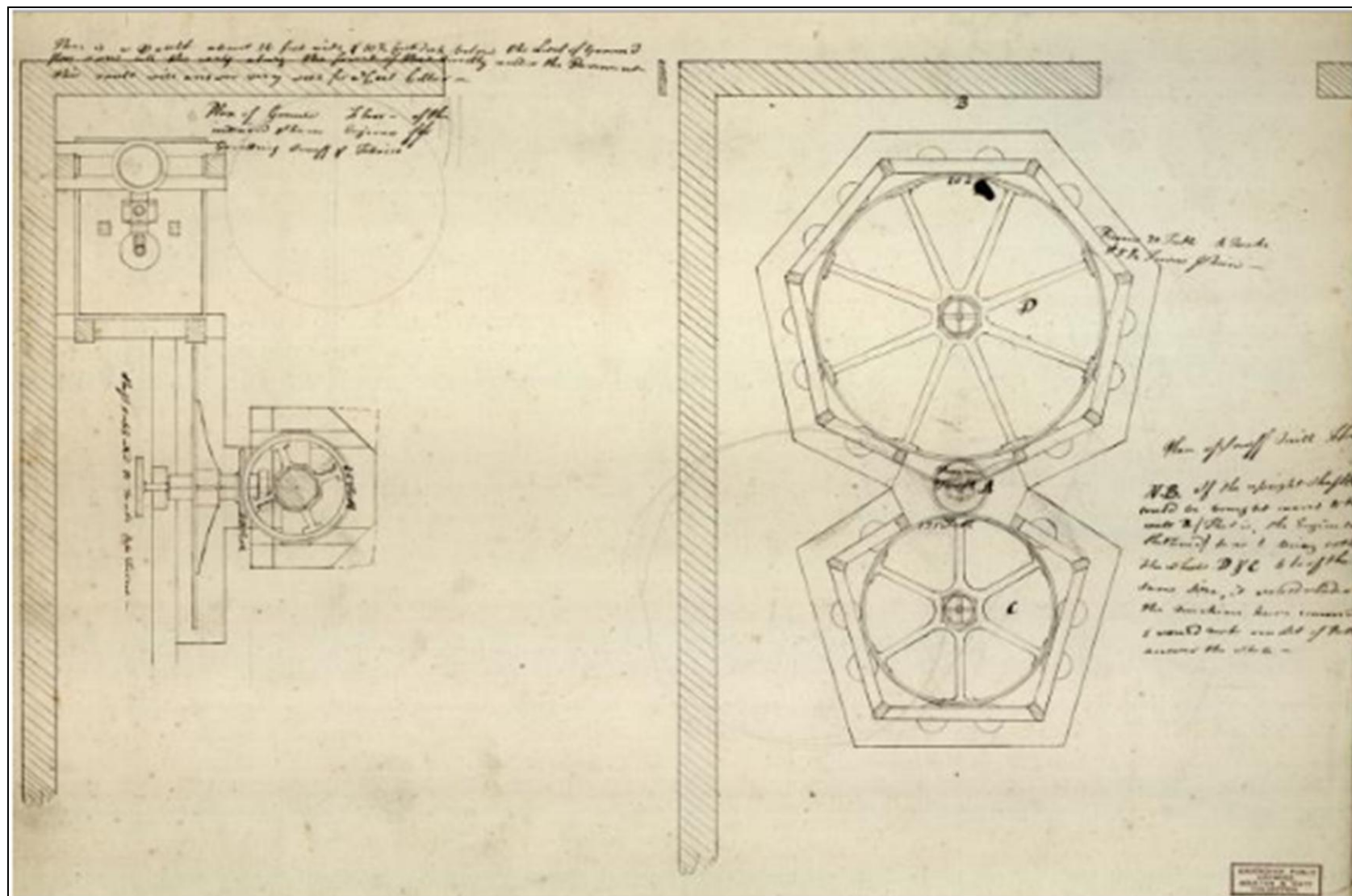


Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/12

A elevação na figura 30, mostra o espaço para o motor na parte inferior esquerda do moinho, o volante e os eixos que conectam o motor à máquina. A figura 30.1 mostra a parte inferior do desenho da elevação, o motor e os eixos, e a maquinaria do rapé.

⁸⁷ Ref. MS3147/Portfolio/5/12

Figura 30.1 - Motor de “Sol e Planeta” de dupla ação para um moinho de tabaco e rapé



Farey (1827) comenta que Watt aperfeiçoou as hastes ou alavancas, movendo-as sobre os centros, de modo a contrabalançar o movimento circular da extremidade da grande alavanca, e reter o pistão em sua direção vertical, tanto empurrando para cima quanto puxando para baixo. Obtendo assim, um movimento mais suave, e com menos sujeabilidade de desgaste. Ao perseguir essa ideia, no decorrer do ano de 1783, e no ano seguinte ele patenteou uma série de melhorias em relação aos motores a vapor e às aplicações de seu poder, mas o movimento paralelo⁸⁸ provou ser o mais importante e engenhoso entre essas novas especificações.

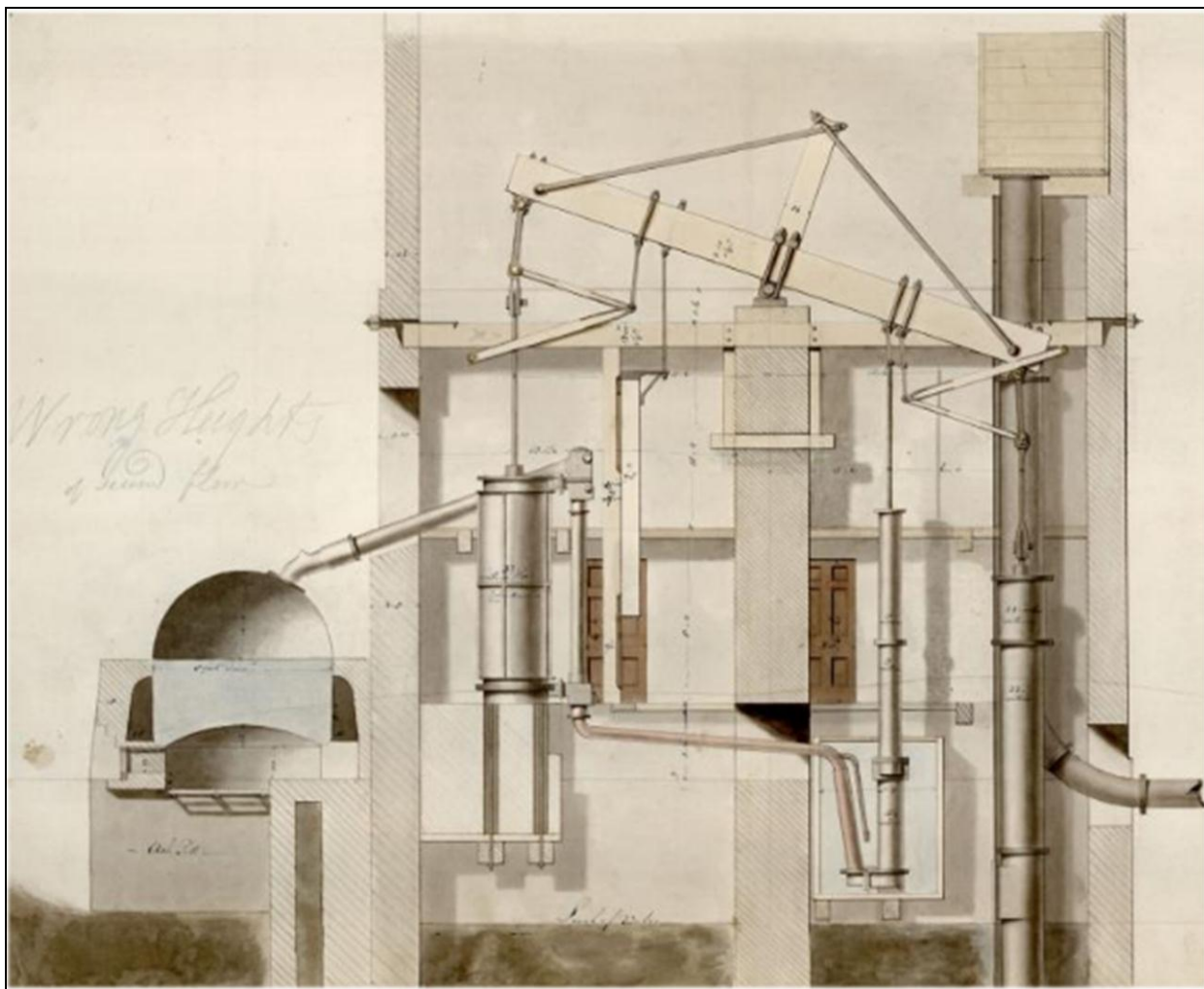
Esse tipo de motor foi considerado um grande desenvolvimento na tecnologia a vapor. Além disso, esses motores eram chamados de "dupla ação" porque o vapor estava sendo utilizado duas vezes, ou seja, de fato duplicava a potência exercida dentro do mesmo cilindro. Watt considerou a ideia em torno do tempo de extensão de sua patente em 1775, e fez um desenho que foi apresentado ao Parlamento. No entanto, o primeiro motor de dupla ação não foi feito até 1783.

A ideia das máquinas de dupla ação era usar o vapor para empurrar um pistão para cima e para baixo, permitindo assim que um motor fizesse um curso motorizado em ambas as direções. Segundo Farey (1827), o próprio Watt diz ter encontrado muita dificuldade em ensinar aos outros o uso e a construção das suas máquinas de ação única, e na superação dos preconceitos, assim, ele não avançou nos motores de dupla ação a princípio. Os primeiros motores de dupla ação de Watt, com algumas melhorias subsequentes no projeto original da patente de 1782.

Os motores de dupla ação, alguns deles, voltando as origens do propósito da construção das máquinas a vapor, também foram destinados para atender as demandas de captação de água das cidades da região de Birmingham e para suprir a necessidade dos canais que estavam sendo cada vez mais explorados o desenvolvimento e conexão entre eles, fortalecendo as rotas de embarcações. A figura 31 apresenta um protótipo elaborado para atender a demanda de abastecimento e captação de água na estação de *River Head Water Works*.

⁸⁸ O movimento paralelo nas ciências mecânicas, é responsável por comunicar o movimento vertical do pistão, com a maior certeza, para a extremidade da grande alavanca, que se move em forma de arco de um círculo. De acordo com Robinson e Musson (1969), a patente⁸⁸ que descreve o movimento paralelo de Watt foi concedida em 28 de abril de 1784 e a especificação foi registrada em 24 de agosto de 1784. Nessa patente há uma inclusão de uma série de melhorias, de significados maiores ou menores: (i) outra roda de vapor; (ii) vários mecanismos, incluindo o movimento paralelo, para conectar a haste do pistão ao feixe, (iii) vários métodos de balanceamento de barras de bomba; (iv) novos métodos de aplicação de energia de vapor para moinhos de rolar e cortar, (v) martelos de forja a vapor; (vi) método melhorado de válvulas de regulação de abertura e dosagem; (vii) aplicação de máquinas a vapor "para dar movimento a carrinhos de rodas", isto é, locomotivas a vapor.

Figura 31 - Motor de bombeamento de dupla ação para o River Head Water Works



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1090

Esse desenho, presente na figura 31, mostra um típico motor de bombeamento Boulton & Watt dos anos 1780 e 1790. O motor era de dupla ação, com um cilindro de 32 polegadas.

Apesar do patenteamento desse tipo de máquina em 1782, a venda do primeiro motor de dupla ação desenvolvido por Boulton & Watt aconteceu somente dois anos após sua patenteação, em 1784, quando Henry Coates e John Jarratt compraram um motor do tipo “Sol e Planeta” com dupla ação e 7 cavalos de potência para o seu moinho de óleo em *Sculcoates, Kingston-upon-Hull, Yorkshire*.

Em alguns casos, onde as minas eram muito profundas, essas máquinas foram extremamente vantajosas ao serem aplicadas ao funcionamento de dois conjuntos de bombas na mesma cava, por um movimento alternativo, um conjunto ou metade das hastes da bomba sendo suspensas por meio de uma haste inclinada conectado com a grande alavanca perto da extremidade do cilindro, e a outra metade dessas hastes sendo suspensa diretamente da extremidade externa da alavanca; de modo que o movimento ascendente do pistão atua em

metade das hastes, e aciona as bombas interligadas a elas, enquanto o movimento de descida do pistão puxa a outra metade para as hastes.

Em outros casos, quando não foi conveniente dividir as hastes da bomba em dois conjuntos, o movimento ascendente do pistão foi empregado para levantar um contrapeso, igual a metade do peso da coluna de água nas bombas. Este contrapeso atua em auxílio da potência do motor, durante o curso de descida do pistão

3.2.4 OUTROS TIPOS DE MÁQUINAS A VAPOR

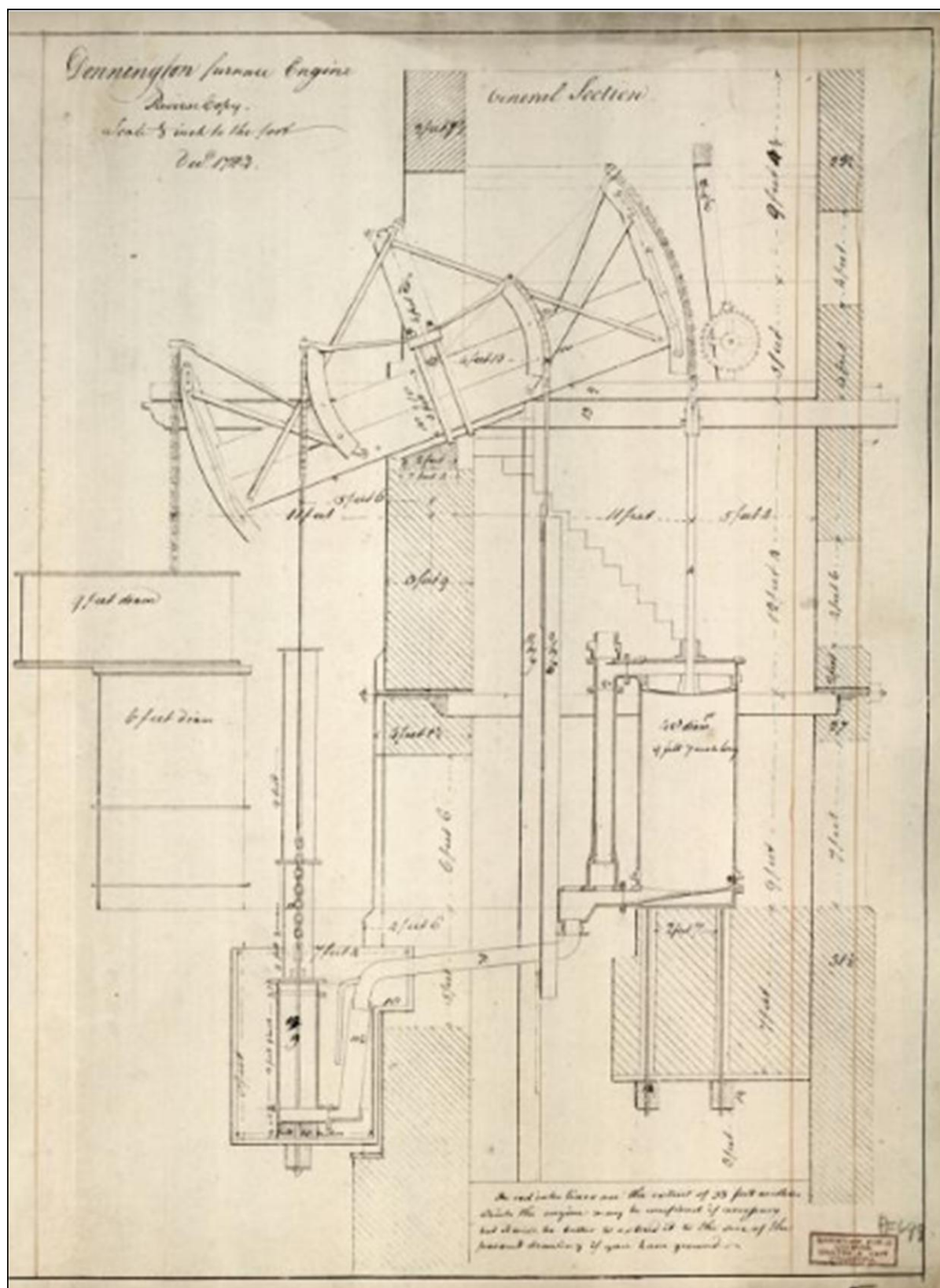
Outro tipo de máquina a vapor produzido por Boulton e Watt que podemos citar, são as máquinas com motores de sopro ou combustão. Tal como aconteceu com os motores de bombeamento, as ordens de pedidos para motores de combustão para fornos à companhia criada Boulton & Watt aumentaram na década de 1780, e os motores ficaram maiores e mais poderosos.

Esses motores de sopro, geralmente consistiam em grandes máquinas de vapor estacionárias ou motores de combustão no interior das máquinas diretamente acoplado aos cilindros de bombeamento de ar, dessa forma, fornecendo uma grande quantidade de ar a uma pressão menor do que um compressor de ar, mas maior que um ventilador centrífugo. Eram bastante utilizados para fornecer a explosão de ar para fornos, altos-fornos⁸⁹ e outras formas de fundição.

Conforme a figura 32, podemos observar que o grande cilindro de sopro está à esquerda do motor. Este protótipo foi designado para a Donnington Wood Forge em Shropshire no ano de 1783. Era um motor de ação única com um cilindro de 48 polegadas.

⁸⁹ Grande forno, revestido por fora de chapas metálicas e por dentro de tijolos refratários, destinado a fundir e a reduzir o minério de ferro para transformá-lo em ferro-gusa.

Figura 32 - Parte geral reversa do motor de sopro para Donnington Wood, Shropshire



Farey (1827) aponta que por volta dos anos 1790 a 1793, quando as máquinas a vapor começaram a ser introduzidas em todas as grandes cidades industriais, com os motores melhorados de Watt, um grande número de motores atmosféricos também foi fabricado para tornos, especialmente nos distritos onde os carvões eram baratos. Esses motores responderam aos propósitos aos quais foram aplicados e foram usados por muitos anos, porém, alguns deles já tinham condensadores e bombas de ar aplicados a eles com as melhorias de Watt, dessa forma, quando solicitados, os membros da *Lunar Society* também faziam algumas alterações em outros tipos de máquinas.

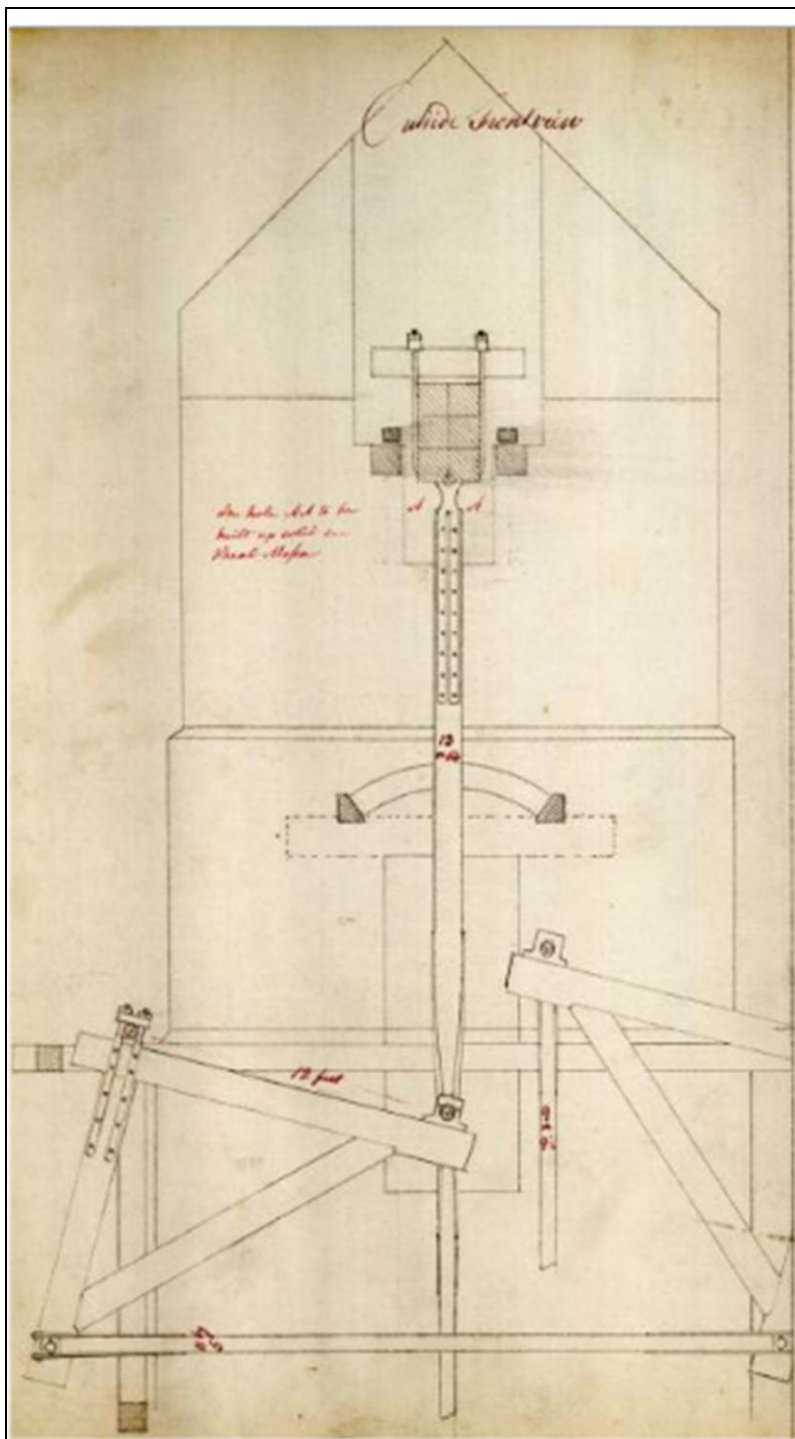
3.3 A SOHO HOUSE E SUA ATUAÇÃO NA REGIÃO DE CORNWALL

Cardwell (1967) afirma que Watt foi o pioneiro em avançar nos projetos de máquinas de vapor como uma fonte conveniente de energia produzida com baixo consumo de carvão, sendo essas máquinas muito requisitadas em áreas de mineração, como as da região de *Cornwall*⁹⁰, como poderemos observar por meio dos protótipos de algumas de suas máquinas.

Devido a grande quantidade de minas de exploração e extração de minérios, a região de *Cornwall*, foi um importante mercado para a corporação Boulton & Watt durante a década de 1780, e eles forneceram motores maiores e cada vez mais potentes à medida que as minas foram se tornando mais profundas. Em 1785 foi elaborado um projeto para preparar um motor de dupla ação com um cilindro de 5 polegadas (figura 33).

⁹⁰ Atualmente conhecida como região da Cornualha, possui fronteiras com o Oceano Atlântico ao norte, ao sul com o Canal da Mancha e a leste com o condado de Devon, depois do rio Tamar.

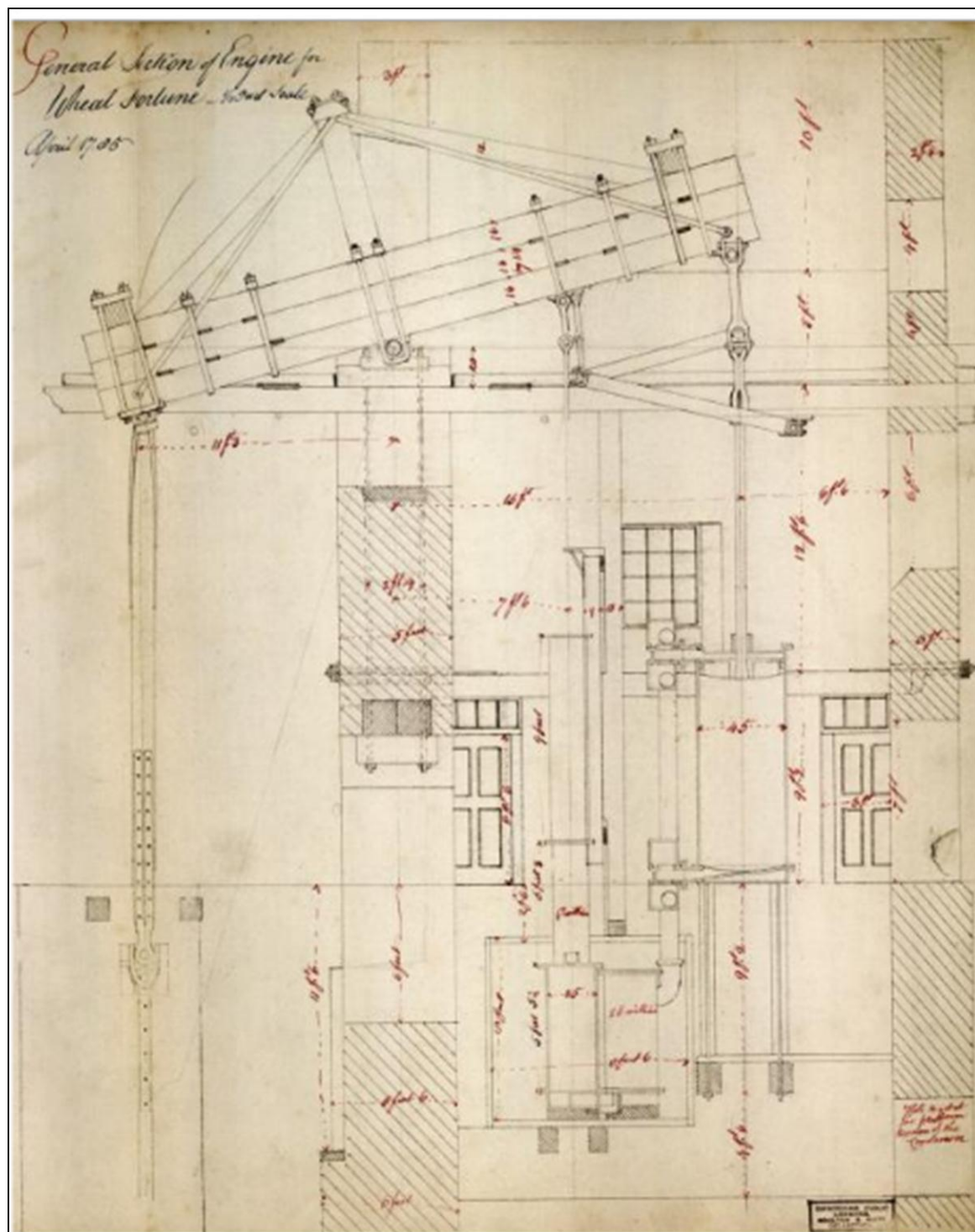
Figura 33 - Vista frontal reversa do motor para Wheal Fortune Copper Mine



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1301

A vista frontal mostra o arranjo particularmente complexo de feixes de bomba para funcionamento do motor de dupla ação. O protótipo com a seção geral do motor pode ser observado na figura 33.1.

Figura 33.1 - Motor de dupla ação para a Wheal Fortune Copper Mine



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1301

Watt e Boulton prestaram serviços no desenvolvimento de motores para atender uma grande quantidade de minas de extração e exploração de minérios da região de *Cornwall*. A Ale & Cakes Mine, que fazia parte do grupo de minas conhecido como *United Mines*, foi mais uma que solicitou os serviços da dupla. Em 1779, ainda não havia sido desenvolvido o

motor de dupla ação, dessa forma, de acordo com a descrição do documento⁹¹, o motor de bombeamento projetado para essa mina era de ação simples, tinha um cilindro de 58 polegadas e um golpe de 8 pés.

De acordo com a documentação⁹², o primeiro motor Boulton & Watt construído para o grupo de minas da região de Cornwall, embora fosse na verdade o segundo pedido, começou a funcionar em 1777. Esse motor foi encomendado para alavancar as atividades produzidas pela *Chacewater Mine*, entretanto, esse motor funcionou nas dependências dessa mina de minérios por um curto período de tempo, pois, posteriormente foi vendido para a *Scorrier Mine*. De lá, foi vendido para várias outras minas, e ainda estava em uso em *Wheal Susan Mine* em 1798.

Esse motor tinha a característica de possuir ação única, ou seja, o vapor era utilizado apenas uma vez, com um cilindro de 30 polegadas e um golpe de 8 pés. Uma curiosidade em relação a esse motor é o fato de que os senhores Scott & Jeffreys, proprietários da *Bog Mine*⁹³ em *Shropshire*, especializada principalmente na extração de barita, chumbo, prata e zinco, solicitaram um mecanismo muito similar no mesmo período, dessa forma, esse protótipo foi utilizado na construção de ambos os motores.

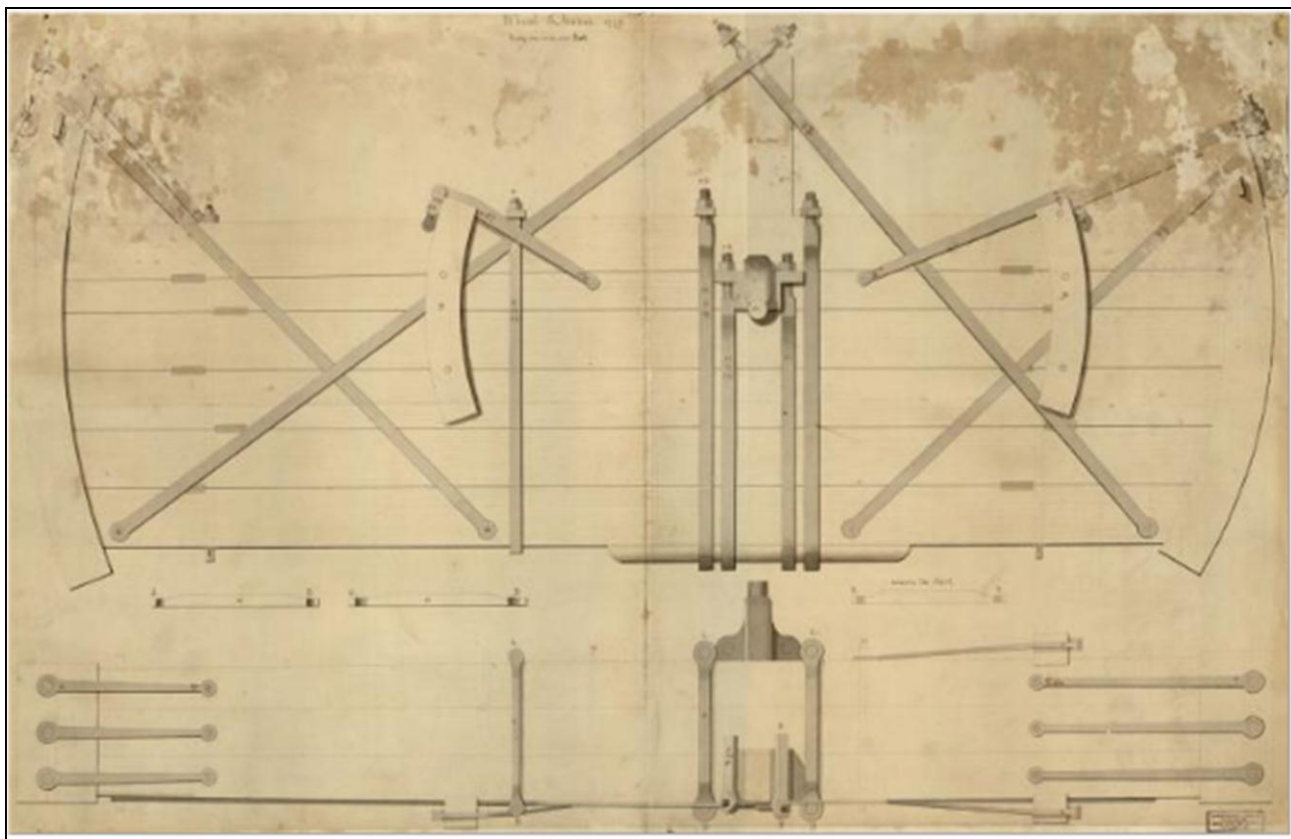
Ainda tomando protótipos elaborados para atender a demanda de pedidos na região de *Cornwall*, a figura 34 apresenta um desenho para o desenvolvimento de um motor de bombeamento nas instalações da *Wheal Chance Mine*, em 1779.

⁹¹ Ref. MS3147/Portfolio/5/1293

⁹² Ref. MS3147/Portfolio/5/1295

⁹³ De acordo com o site <<http://shropshirehistory.com/mining/mines/bog.htm>> (Acessado em 18/10/2017), essa mina iniciou suas atividades sob o comando de Matthew Dore e seus sócios em 1739, mas foi adquirida pelos senhores Scott e Jeffreys no ano de 1777. Nesse mesmo ano, foi instalado o primeiro motor Boulton & Watt na região, como citamos por meio das informações contidas no documento Ref. MS3147/Portfolio/5/1295, se tratava de um motor de bombeamento de 30 polegadas custando £ 800 sendo vendido em 1782 para um moinho da região. Em 1789, a mina foi vendida e incorporada para a companhia de John Weston & Co., que continuaram clientes de Boulton & Watt, adquirindo um motor de 45 polegadas, no entanto, esse novo motor foi vendido em 1797 para Alex McDonald e mudou-se para uma mina de carvão em Nuneaton.

Figura 34 - Feixe do motor de bombeamento para Wheal Chance Mine, Cornwall



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1292

Podemos observar na ilustração, de acordo com a descrição do documento⁹⁴, a projeção de um feixe de madeira maciço para um motor de ação única com um cilindro de 63 polegadas e um golpe de 9 pés.

Na mesma descrição, é relatado que para a confecção dos feixes para motores de bombeamento de grande porte, várias árvores precisavam ser cortadas com o propósito de serem utilizadas no processo de finalização do motor, porém, a partir do final dos anos 1790 e início dos anos 1800, as vigas de ferro fundido começaram a substituir os de madeira na construção dos motores nesse período.

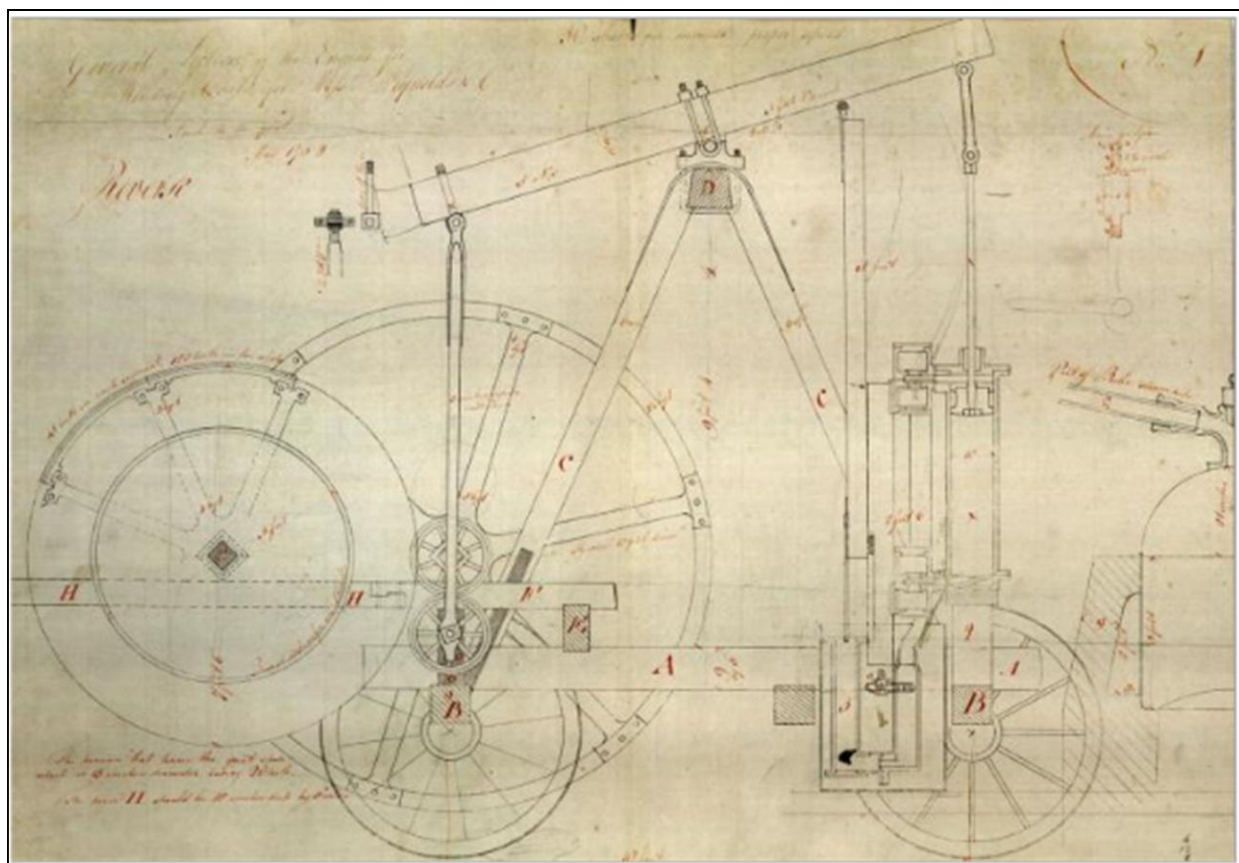
Nem só motores de grande porte do modelo “Sol e Planeta” foram fabricados e comercializados por Boulton e Watt, eles também investiram na construção desses motores rotativos com portes menores. Esses modelos de tamanhos reduzidos foram vendidos e mantidos através de uma nova parceria denominada *Boulton Watt & Co. Cornwall*, cujos os sócios eram Matthew Boulton, James Watt, William Murdoch e Thomas Wilson, que era o agente da Boulton & Watt’s Cornish.

⁹⁴ Ref. MS3147/Portfolio/5/1292.

da bomba. Contudo, venderam alguns motores rotativos para enrolar cestas de minério ou, como neste exemplo, para bombas de trabalho.

Esses pequenos motores chamaram atenção da mineradora *Reynolds & Co.*, que ordenou a encomenda de dois desses motores de potência de 3 cavalos, com cilindros de 10 polegadas e traçados de 3 pés. A principal vantagem desses motores é que eles eram portáteis, dessa forma, eram simples de realizar o transporte até o local de instalação. A figura 35 mostra o protótipo do motor “Sol e Planeta” em fase de transporte para a *Reynolds & Co.*, Ketley, Shropshire. O desenho mostra o motor montado em um caminhão de 4 rodas, com o barril de enrolar na frente e a caldeira na parte de trás. Este foi um dos primeiros motores pequenos fabricados pela Boulton & Watt.

Figura 35 - Motor 'Sun & Planet' montado em um caminhão de 4 rodas



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/30

Como pudemos perceber por meio dos protótipos que apresentamos, Boulton e Watt desenvolveram diversos motores de bombeamento de ação simples ou de dupla ação para as minas de extração de minérios na região de *Cornwall*. Devido a aquisição de motores mais modernos e o desgaste por conta do uso constante, os donos das minas de porte maior

encomendavam novos motores para suprir suas novas necessidades visando aumentar a produtividade e consequentemente o lucro obtido devido a maior eficiência dos novos motores.

Portanto, era comum depois de um certo tempo que esses motores muitas das vezes deixassem seu destino de origem após um período de uso, e fossem revendidos para outras minas, geralmente de menor porte, dessa forma, gerando uma circulação desses motores entre as minas da região.

Dessa forma, certamente podemos afirmar que Boulton e Watt, bem como a Sociedade Lunar de Birmingham e seus demais membros, contribuíram diretamente para o crescimento e progresso dessa região. Além disso, é importante termos em mente que esses minérios não eram apenas para comércio interno na Inglaterra, esses produtos também eram exportados para outros países da Europa, sendo assim, fortalecendo a economia britânica.

3.4 A SOHO HOUSE E SUA ATUAÇÃO NO CONTINENTE

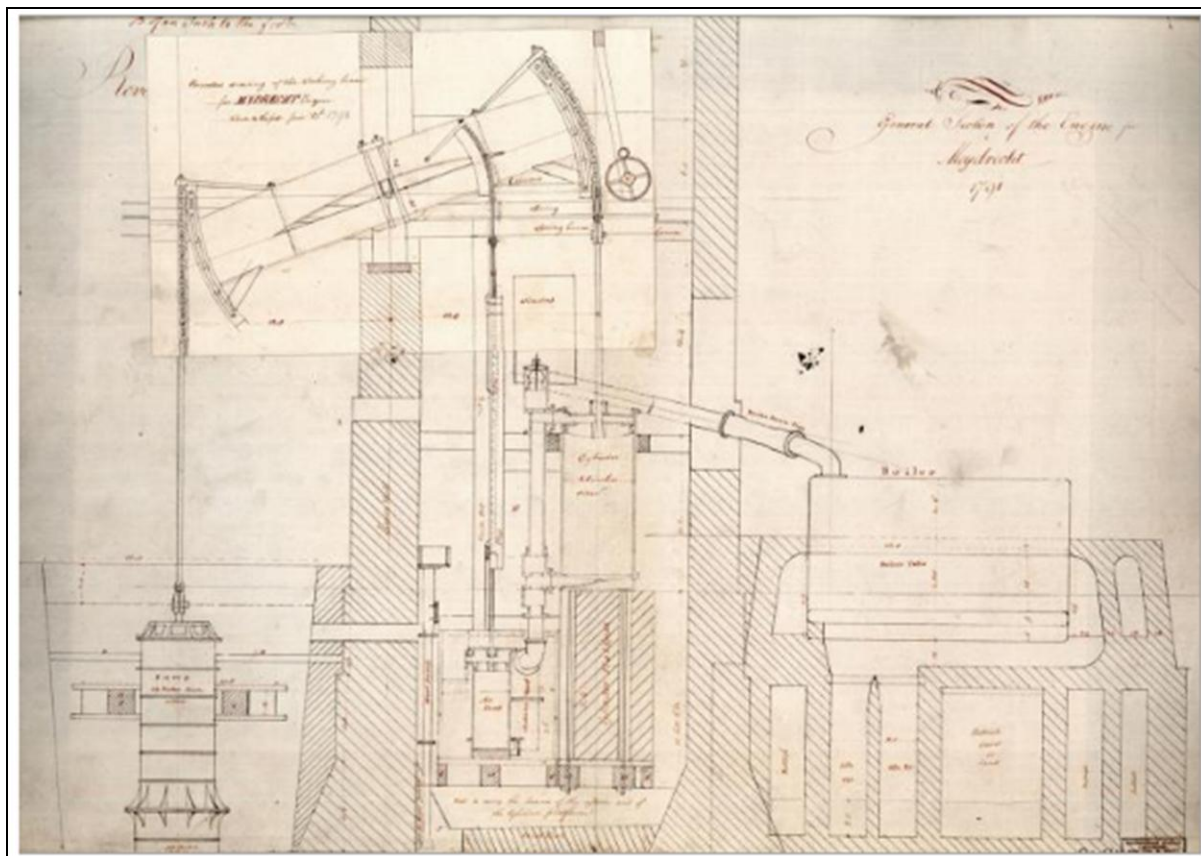
O alcance dos pedidos desses motores desenvolvidos pelos fundadores da Sociedade Lunar de Birmingham não se limitaram apenas ao território britânico. Por meio do reconhecimento do trabalho empregado, a reputação atingiu mercados que extrapolaram a Ilha e confeccionaram protótipos para a construção de motores para outros países europeus do Continente⁹⁶. Citaremos como primeiro exemplo, um motor de ação simples desenvolvido no ano de 1791 para um engenheiro e comerciante holandês (figura 36).

De acordo com a descrição do documento⁹⁷, esse motor de bombeamento consistia em um modelo de ação simples, com um cilindro de 48 polegadas e foi especialmente confeccionado para ser transportado até a região de Utrecht, na Holanda. O motor foi utilizado para drenar terra nas proximidades de Mydrecht, no rio Amstel, perto de Uithorn, uma província da Holanda do Sul. A idealização do pedido motor, foi realizada pelo comerciante holandês John Daniel Huichelbos van Liender, com quem James Watt desfrutou de uma longa correspondência.

⁹⁶ Com exceção da Inglaterra, na época era comum se referir aos demais países que faziam parte do continente europeu como Europa Continental ou simplesmente Continente. A Inglaterra era referida como Ilha.

⁹⁷ Ref. MS3147/Portfolio/5/564.

Figura 36 - Motor de bombeamento de ação simples para Mydrecht, Holanda



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/564

Nos arquivos⁹⁸ disponibilizados pela Soho House, podemos encontrar uma série de registro de cartas e memorandos endereçadas a sede da Sociedade Lunar de Birmingham no período de 1797 a 1801, em que as discussões presentes nessas cartas geralmente consistiram no pedido de novos motores para a Holanda, e também na substituição das partes de madeira por ferro para os motores dos moinhos de vento já existentes no país. Nesse portfólio há o registro de aproximadamente 50 (cinquenta) trocas de mensagem entre o comerciante holandês e a dupla Watt e Boulton. Entretanto, selecionamos apenas algumas dessas mensagens contidas no arquivo:

Mensagem 8 - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 24 de Fevereiro de 1798:

Docketed "Confirming his order for rotative shaft."

Conforme pudemos verificar, esse simples contato trata-se apenas de uma simples confirmação de um pedido para aquisição de um eixo rotativo, provavelmente para incorporar alguns dos motores já existentes na Holanda.

⁹⁸ Ref. MS3147/Portfolio/3/506.

Mensagem 12 - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 31 de Julho de 1798

Docketed “Has heard of the drawings etc. The progress of steam engines retarded by the state of things in Holland and the price of coals. Praises of the new constitution. Beneficial effects which will probably result from it.”

Por meio dessa mensagem, podemos deduzir que a Inglaterra levava vantagem em comparação com a Holanda no progresso de construção de máquinas de vapor. É dito por van Liender que em vista do estado atual que a Holanda estava passando na época e também o alto custo do preço do carvão, fez com que o investimento no progresso das máquinas de vapor no país fossem relativamente atrasadas. Entretanto, ele ainda comenta que uma nova constituição foi aprovada na Holanda, e possivelmente efeitos positivos resultariam em virtude das novas medidas implementadas.

Mensagem 14a - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 18 de Maio de 1799

Docketed “Receipt of drawings of little engine. Difficulty of setting it to work. Answer of the Directors of the Drainage to our remarks on the substitution of iron in windmills. Money advanced to Mrs. Swellingrebel and death of that lady. Progress made by the Mydrecht engine. Wants explanation of large copying machine.”

Essa carta inicia comentando o recebimento de um pequeno motor, entretanto, o holandês comenta estar tendo dificuldades de configurar o seu funcionamento. Apresenta também que houve resposta dos Diretores da Drenagem às observações da subestação de ferro de moinhos de vento, provavelmente se tratando de firmar novas parcerias, pois na carta ainda havia uma transcrição da resposta desses diretores pedindo detalhes do uso de ferro fundido em moinhos para trazer água.

Mensagem 14b – Na mesma mensagem é apresentada a transcrição da resposta dos diretores relatados na carta 14.

Remarques du Directeur General et des Inspecteurs du Desséchement de Nieuwkoop et Zevenhoven sur certain mémoire Anglais touchant l’usage qu’on pourrait faire du fer de fonte dans les moulins à évaiser l’eau.

O fato interessante que está contido na mensagem 14b é uma referência ao motor que apresentamos na figura 47, o comerciante holandês relata que houve progresso em virtude desse motor enviado a região de Mydrecht.

Mensagem 24 - Carta de J. D. H. van Liender (Hamburgo) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 7 de Julho de 1800

Docketed "Agrees to the delay in furnishing the windmill castings. Has forwarded the trough from Embden. Journey to Hamburg and proposal to meet him there. Engine wanted before the end of the year."

Nessa mensagem podemos ver que van Liender inicia relatando compreender o atraso do envio do fornecimento dos moldes de moinho de vento encomendados anteriormente, mas que apesar desse atraso foram entregues. Provavelmente a fim de evitar novos atrasos de encomendas, ele relembra a Watt e Boulton de que um motor já combinado seja finalizado e enviado antes do final do ano, entretanto, um fato interessante é que van Liender envia essa mensagem em território alemão, na cidade de Hamburgo, sua viagem até a Alemanha foi na tentativa de encontrar novos fornecedores para a Holanda. Ele inclusive faz um convite para que Watt ou Boulton pudessem viajar e encontrá-lo na cidade de Hamburgo, mas de acordo com um trecho retirado da **mensagem 27** enviada em 17 de Agosto de 1800: *"Regret at our not being able to meet him at Hamburg. His motives for going thither"*, podemos ver que esse encontro não aconteceu.

Mensagem 33 - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 24 de Fevereiro de 1801

Docketed "Has received our letter of 28 th Nov. and drawings of the engine. Accepts our terms for a 30¾ inch cylinder. Enquiry about the trough and state of castings for Nieuwkoop drainage. New copper boiler wanted for Mydrecht."

Apesar das novas parcerias firmadas pelo comerciante holandês van Liender com fornecedores alemães, podemos ver por meio das mensagens recebidas que a parceria entre o mercado holandês e os ingleses Watt e Boulton continuaram a todo vapor, sendo inclusive consolidado novos pedidos de motores. Dessa forma, o engenheiro e comerciante holandês John Daniel Huichelbos van Liender, continuou a corresponder com a dupla da Sociedade

Lunar de Birmingham, e as cartas e mensagens trocadas no período de 1802 a 1809 também estão disponibilizadas nos arquivos⁹⁹ da *Soho House*. Os assuntos abordados nessas mensagens, que novamente consistem em aproximadamente 50 (cinquenta) registros, incluem tópicos de novos pedidos de vários motores para a Holanda, e o pagamento para eles, e também há cartas escritas durante a visita de van Liender à Grã-Bretanha em 1802. Novamente, selecionamos apenas algumas dessas trocas de mensagens contidas no arquivo:

Mensagem 2 - Carta de J. D. H. van Liender (Londres) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 3 de Agosto de 1802:

Docketed "Is arrived in London and wishes to know if any of the firm are there. Intends visiting Soho."

Podemos observar por meio dessa mensagem que o holandês van Liender viajou para o território inglês em 1802, e comenta com a dupla da *Soho House* se eles têm interesse de saber informações de alguma empresa londrina, além disso ele relata intenções de visitar Watt e Boulton em Birmingham.

Mensagem 4 - Carta de J. D. H. van Liender (Northampton) para Boulton & Watt Co. (Birmingham). Enviada em 3 de Agosto de 1802:

Docketed "Preference given by him to Birmingham over Manchester. Favourable opinion of Mr. Jee. Meeting with Mr. William Chapman at Hull. Sentiments upon the commerce of Liverpool and Hull. Wishes to know the price of a goldbeater's mould. Answered by James Watt Jr."

Nessa mensagem, nota-se que a parceria continua chegando inclusive a obter prioridade nas negociações para o contrato de novos motores a vapor, passando na frente do projeto de membros da sociedade científica concorrente localizada em Manchester, a *Literary and Philosophical Society of Manchester*¹⁰⁰. Outra informação importante que podemos tirar

⁹⁹ Ref. MS3147/Portfolio/3/507.

¹⁰⁰ De acordo com Soares (2005), a *Literary and Philosophical Society of Manchester*, também conhecida pela denominação *Lit. and Phil.*, foi fundada a partir das reuniões que cientistas e industriais da região da cidade de Manchester realizavam na *Warrington Academy*. O autor ainda comenta que na lista de sócios fundadores da Sociedade, constavam uma relação de mais de 40 pessoas. Ele relata também que essa instituição era muito maior e mais organizada do que a Sociedade Lunar de Birmingham, sendo suas reuniões registradas em atas a partir de 1781 e os trabalhos apresentados, nestes eventos ou à direção da entidade, passaram a ser publicados a partir de 1785, sob o título de *Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester*. Soares (2005) ainda apresenta brevemente alguns membros que ocuparam as principais posições no início da fundação da *Lit.*

dessa mensagem é a presença de James Watt Junior (1769-1848) nos negócios, filho de James Watt, seguiu o caminho do pai, e se juntou na luta pela expansão da Boulton & Watt Co. no desenvolvimento de novos projetos e mercados para vendas de motores.

Mensagem 5 - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 12 de Outubro de 1802

Docketed "Safe arrival in Holland. Receipt of sundry letters for Mr. Gregory Watt. Estimate of new pumping engine wanted."

De acordo com essa mensagem, é possível percebermos que a viagem durou menos de um ano, e de volta para a Holanda, eles continuaram firmando novas parcerias para construção de novos motores.

Mensagem 20 - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 25 de Março de 1805

Docketed "Animadversions upon the state of public affairs. Receipt of our letter of the 18 Apr. 1804. Hopes that his of 27 th same month with the seconds of bills of exchange had been received. The engine for the Crimpenrewaerd finished and gives much satisfaction. Observations of Mr. Duyster thereon. Laments the fatal consequences of the war – his friends' intention of erecting an engine at Amsterdam suspended in consequence of it. The iron machinery for the windmill answers perfectly. Others similar making at Amsterdam. The bearer of this letter the son of his friend Mr. van Heukelom – recommends him to our notice."

Além de informações do andamento do progresso e pedido de aquisição de novos motores, nas trocas de mensagens é possível também observarmos que havia um respeito entre os correspondentes, como por exemplo em situações em que relatavam brevemente acontecimentos públicos de seus países. Na mensagem 20, van Liender, além de repassar os recados positivos dos compradores, os parabenizam pelo sucesso dos motores e lamenta pelo estado atual de guerra que a Inglaterra estava passando, e conforme foi relatado, devido a essa

and Phil., começando por citar que o primeiro presidente da Sociedade foi o médico Thomas Percival (1740-1804), que estudou na *Warrington Academy*, sob a orientação de Joseph Priestley (1733-1804); e o seu primeiro secretário foi o farmacêutico Thomas Henry (1734-1816). Além dessas personalidades, ele escreve que nos seus primeiros tempos, a *Lit. and Phil.* teve como sócio mais importante o químico John Dalton (1766-1844), que mais tarde chegou a presidir a instituição por um longo período que compreendeu os anos de 1817 até sua morte em 1844.

fase conturbada de guerra, alguns moinhos de vento de Amsterdã deixaram de fechar negócio principalmente por receio das consequências dessa guerra no território inglês, pois, talvez os pedidos pudessem ser atrasados ou até mesmo extraviados.

Mensagem 39 - Carta de J. D. H. van Liender (Rotterdam) para Boulton & Watt (Soho). Enviada em 25 de Novembro de 1807

Docketed "Receipt of sundry of our letters. Difficulty of epistolary intercourse and of making remittances. Cannot at present procure a passport for the 14 horse engine. 15 Remarks upon the system of the English Ministry and the progress making in manufactures on the Continent. Description of the Imperial foundry at Liege. Progress made in the Katwyk & Rhine Canal. Much pleased with the engine, which will be started next month. Mr. Duyster understands the hot water pump, but wants explanation of what he calls the steam fountain."

Em algumas mensagens eram relatadas algumas dificuldades que para o recebimento dos motores, como por exemplo, no caso de não ser permitido mais um passaporte para transportar um motor de 14 cavalos. Em alguns casos, as mensagens também pediam informações de dados contidos nos protótipos dos motores, como por exemplo, nessa mensagem, um dos engenheiros dos compradores, o Sr. Duyster diz compreender o que seria uma bomba de água quente, mas quer uma explicação sobre o que ele chama de fonte de vapor. Dúvidas assim eram recorrentes nas mensagens, e essenciais para a instalação correta dos motores. Novamente, é comentado que os motores estão em perfeito funcionamento, e que está com expectativas positivas do motor, que será iniciado no próximo mês. Dessa forma, as trocas de mensagens entre van Liender datadas até 1809 seguem essa linha de conversa.

Além da Holanda, veremos que os motores a vapor projetados pela companhia *Boulton & Watt Co.* alcançaram outros países do continente europeu. O destaque fica para a abrangência do território francês, ou seja, mesmo com toda rivalidade econômica entre França e Inglaterra na época, esses membros da Sociedade Lunar de Birmingham mantiveram uma relação comercial que ultrapassou as barreiras da época.

Em 1779, Joseph Jary¹⁰¹ (1739-1805), encomendou um motor a vapor, figura 48, para as minas “*Concessionaire du Roi*”. Na descrição do documento¹⁰² desse motor, é comentado que Joseph obteve um decreto real para admitir a atuação de equipamentos da corporação *Boulton & Watt Co.* no território francês. O motor bombeou água para fora das minas de carvão perto de Nantes, na Bretanha, no norte da França. As legendas no canto direito da figura 37 e as dimensões neste desenho foram denotadas em francês.

Após a permissão da execução do motor, existia ainda uma outra finalidade nessa negociação, que era a de que esse motor fosse utilizado para testes com o intuito de provar a superioridade desse novo motor aos tipos anteriores de máquinas a vapor e dessa forma, estimular o desenvolvimento de novos motores para suprirem a demanda industrial do território francês.

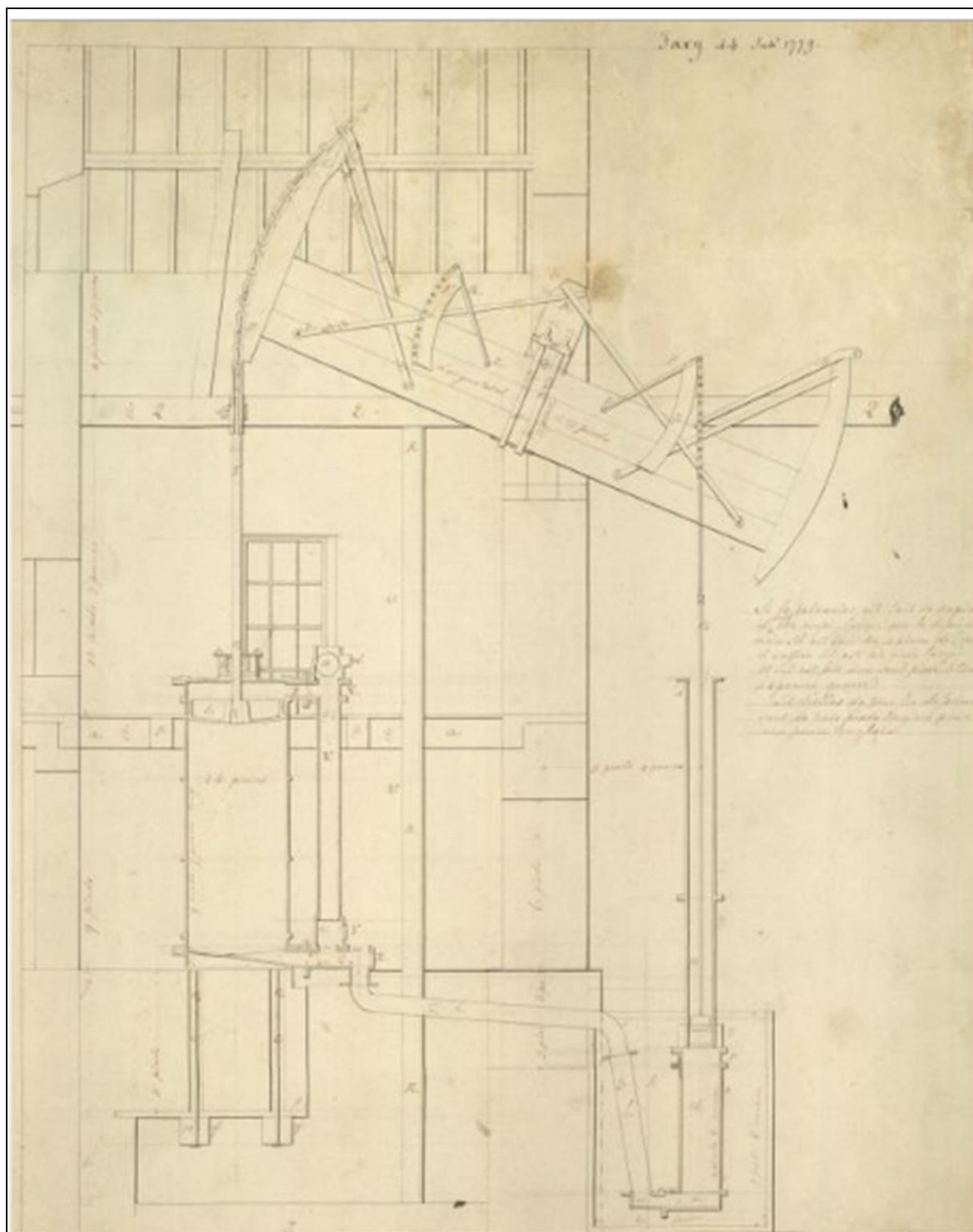
Apesar dessa descrição no documento, particularmente, acredita-se que o propósito era ter uma noção do que a Inglaterra vinha desenvolvendo em sua expansão tecnológica e industrial, pois mesmo após o envio desse motor até Nantes, Jary nunca efetuou o pagamento a corporação *Boulton & Watt*.

Além de permissão do território francês para a entrada do motor, foi necessário obter permissão especial do governo britânico para exportar o motor, enquanto a Grã-Bretanha e a França estavam em guerra. Dessa forma, após os trâmites legais para exportação e importação do produto, esse motor de 44 polegadas, ação única e com um golpe de 8 pés foi o primeiro motor Boulton & Watt construído na Europa continental, menos de quatro anos depois que a Boulton & Watt entraram em negócios juntos.

¹⁰¹ François-Joseph Jary foi um político francês. Iniciou sua carreira política em Nantes, e posteriormente ocupou diversos cargos e posições políticas na França. Em meio ao acontecimento da Revolução Francesa, Joseph Jary foi eleito para a Comissão de Segurança em 1793, chegando inclusive a ser uma das pessoas que deu voto de condenação e execução ao rei Luis XVI (1754-1793), deposto e guilhotinado na Revolução Francesa.

¹⁰² Ref. MS3147/Portfolio/5/648.

Figura 37 - Motor de bombeamento para Les Mines du Nord, Nantes



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/648

Nesse mesmo período, Boulton e Watt, tiveram um novo pedido ordenado pelo engenheiro e empresário francês Jacques Constantin Perier¹⁰³ (1742-1818) para auxiliar no

¹⁰³ Jacques Constantin Perier ficou conhecido por ter introduzido na França a máquina a vapor de Watt em 1779 e ter construído a primeira máquina de dupla ação em 1789, apenas 6 anos após Watt, graças às indicações

fornecimento de água na cidade de Paris. Juntamente com seu irmão Augustes Charles, também empresário, ele desenvolveu o projeto de fornecer água para a cidade de Paris por uma bomba de incêndio, como era o caso em Londres. Dessa forma, obtiveram a concessão em 1777 e fundaram a *Compagnie des Eaux*¹⁰⁴ de Paris em 1778. Até 1770, apenas duas antigas máquinas hidráulicas, as bombas *Notre-Dame* e *Samaritaine*, eram responsáveis pela captação e abastecimento de água para o consumo da capital francesa. Portanto, Perier tinha um privilégio exclusivo para abastecer água em Paris a partir da empresa formada com seus irmãos e outros investidores.

Perier visitou a sede da *Soho* em Birmingham para ter mais detalhes das máquinas a vapor e dos motores desenvolvidos pela fábrica da Sociedade Lunar. Após as negociações, ficou decidido que a companhia Boulton & Watt concordou em licenciar todos os motores de 63 polegadas que seriam necessários para bombeamento e captação de água, dessa forma, realizando o fornecimento e abastecimento de água para a capital francesa. Os motores e máquinas desenvolvidos deveriam ter apenas o propósito de abastecimento e não deveriam ser utilizados em outras atividades, além disso ficou estabelecido¹⁰⁵ um pagamento de 24 mil libras ou 20 ações da empresa.

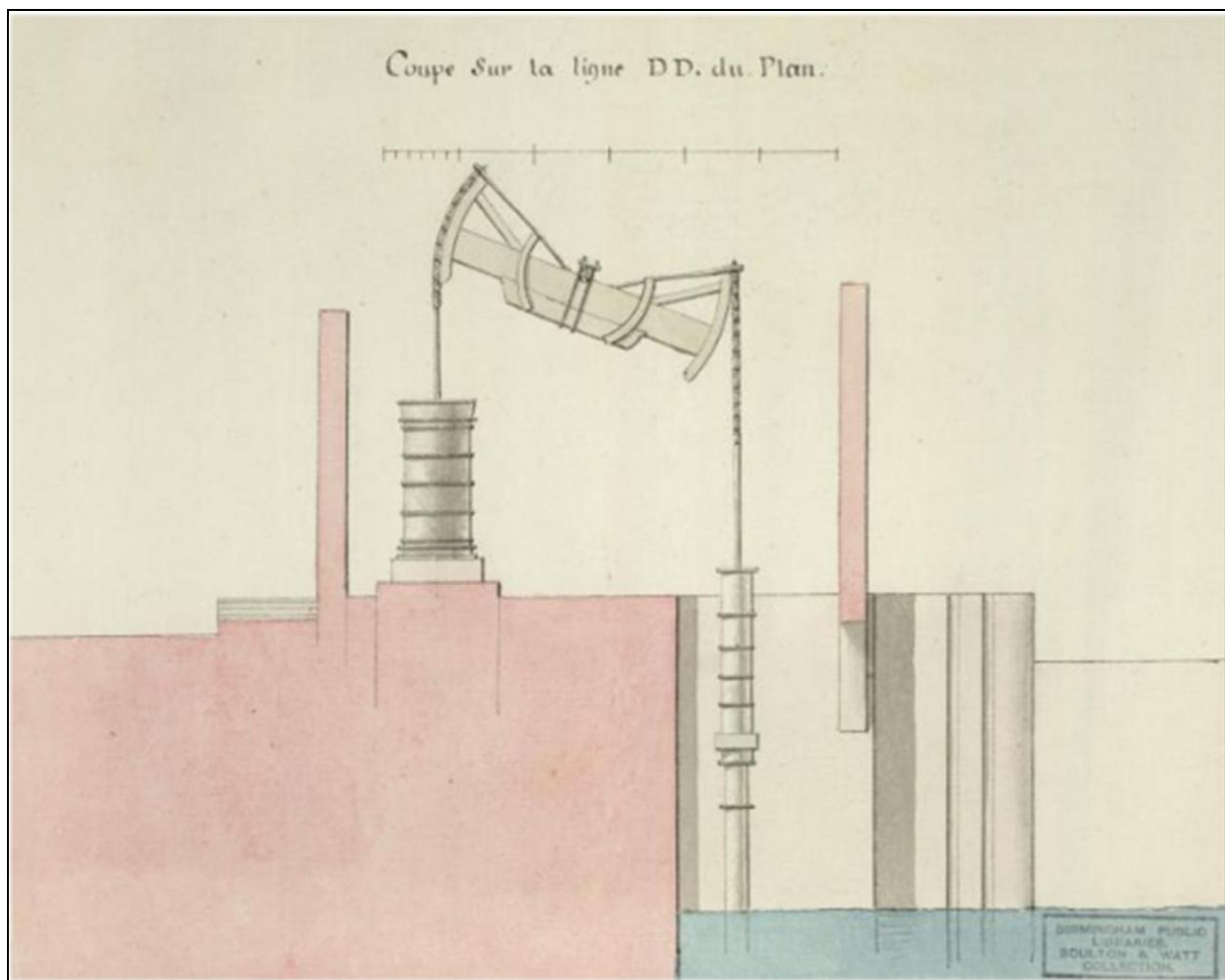
De volta a França, Perier começa os preparativos para cumprir os acordos estabelecidos no encontro em Birmingham. Dando prosseguimento para a obtenção do pedido, ele envia dados do local da futura instalação das máquinas para bombeamento e captação de água para a *Soho Manufactory and State*. A figura 38 apresenta um desses dados enviados pela companhia francesa, é possível observarmos o esboço que mostra claramente o arranjo do motor e a bomba que desce para o rio Sena. Este desenho foi feito na França e enviado para Boulton & Watt para mostrar como o motor seria configurado.

coletadas pelo engenheiro espanhol Agustín de Betancourt y Molina (1758-1824) durante uma visita de moinhos de Albion. Blackfriars em Londres. É importante observarmos que esses locais visitados por Agustín em sua grande maioria eram fomentados pelos motores construídos pela organização *Boulton & Watt Co*.

¹⁰⁴ A Companhia de Água de Paris foi fundada em 1778 sob o estatuto de parceria limitada dos irmãos Périer, e também patrocinada pelo Duque de Chartres e do Duque de Orleans que inventaram uma bomba centrífuga. O propósito dessa companhia era de que por meio do pagamento de uma taxa, os cidadãos de Paris poderiam desfrutar de ter suas propriedades particulares abastecidas por água extraída das conexões de captação do rio Sena, movimentadas ao nível da planície de Chaillot. Além da venda de água diretamente aos indivíduos que pagassem pelo serviço, a companhia ainda tinha a pretensão de instalar hidrantes pela capital francesa no intuito de lutar contra incêndios e auxiliar na limpeza das ruas da cidade.

¹⁰⁵ Ref. MS3147/Portfolio/5/1070.

Figura 38 - Motor de Bombeamento e Bomba para o 'Paris Water Works'



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1070

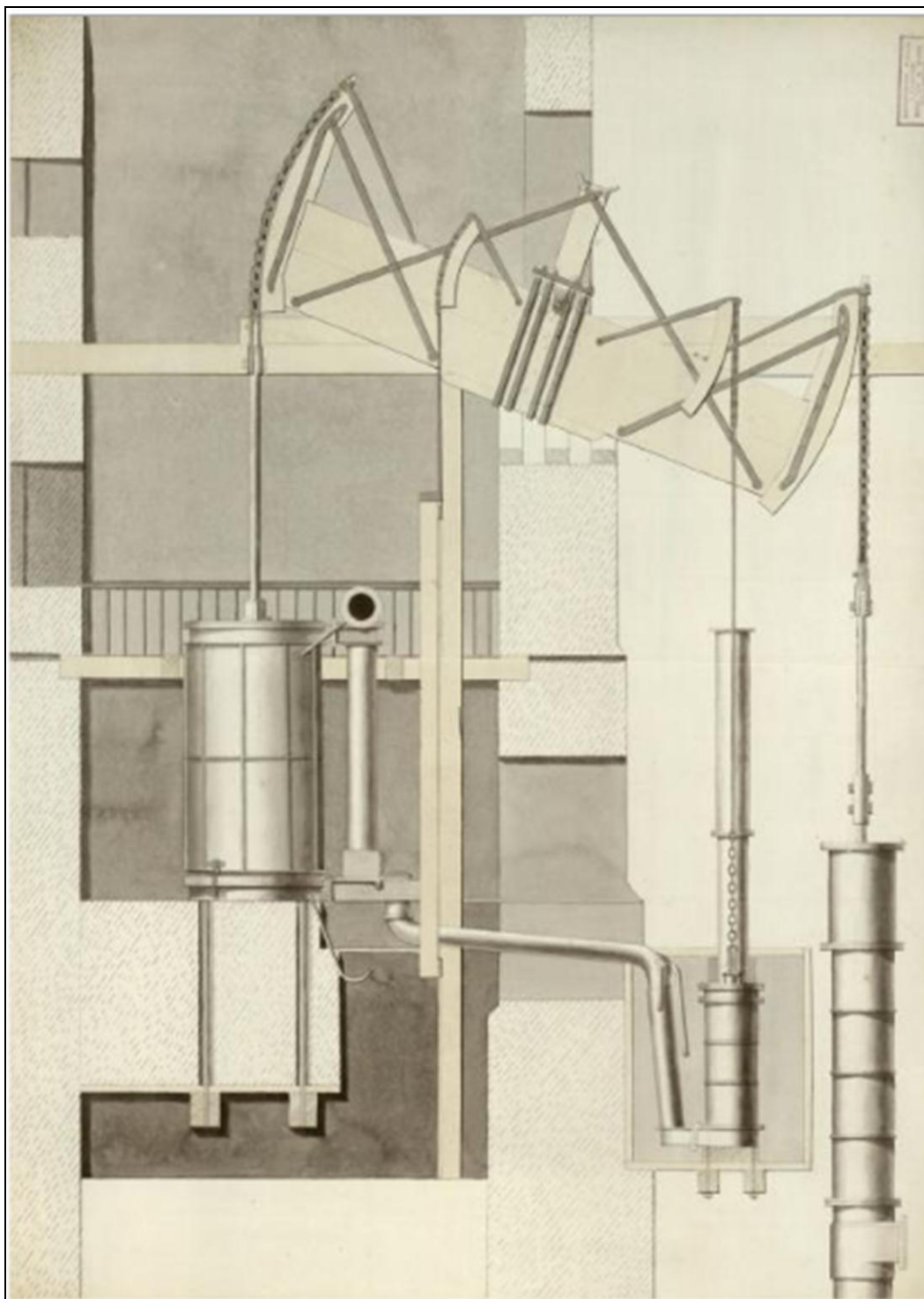
Após as transações e os acordos comerciais, no ano de 1779, James Watt concede o direito de construir máquinas de sua invenção, fornecendo os planos de sua maquinaria para Perier executar em Paris. Por meio dessa ação de Watt, podemos dizer que a Inglaterra teve um demasiado protagonismo na expansão da Revolução Industrial francesa, provocando até mesmo uma declaração recheada de orgulho de Perier, que no ano de 1810 chegou a professar a seguinte frase: "Eu não sou o inventor das máquinas a vapor. Mas eu sou o criador deste ramo da indústria na França (PAYEN, 1971, p.208, tradução nossa)".

A figura 38.1 apresenta detalhes do projeto desenvolvido por Watt para atender ao pedido de Perier. De acordo com a descrição do documento¹⁰⁶, o desenho ilustra um motor de ação única com um cilindro de 63 polegadas e um golpe de 8 pés.

¹⁰⁶ Ref. MS3147/Portfolio/5/1070.

A bomba de vapor Chaillot foi instalada em 1781, incluindo os elementos fornecidos pela Boulton & Watt e consequentemente a partir desse ano a máquina entrou em operação com a finalidade de bombear água do rio Sena e distribuí-la através de condutas em Paris.

Figura 38.1 - Motor de Bombeamento e Bomba para o 'Paris Water Works'



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/1070

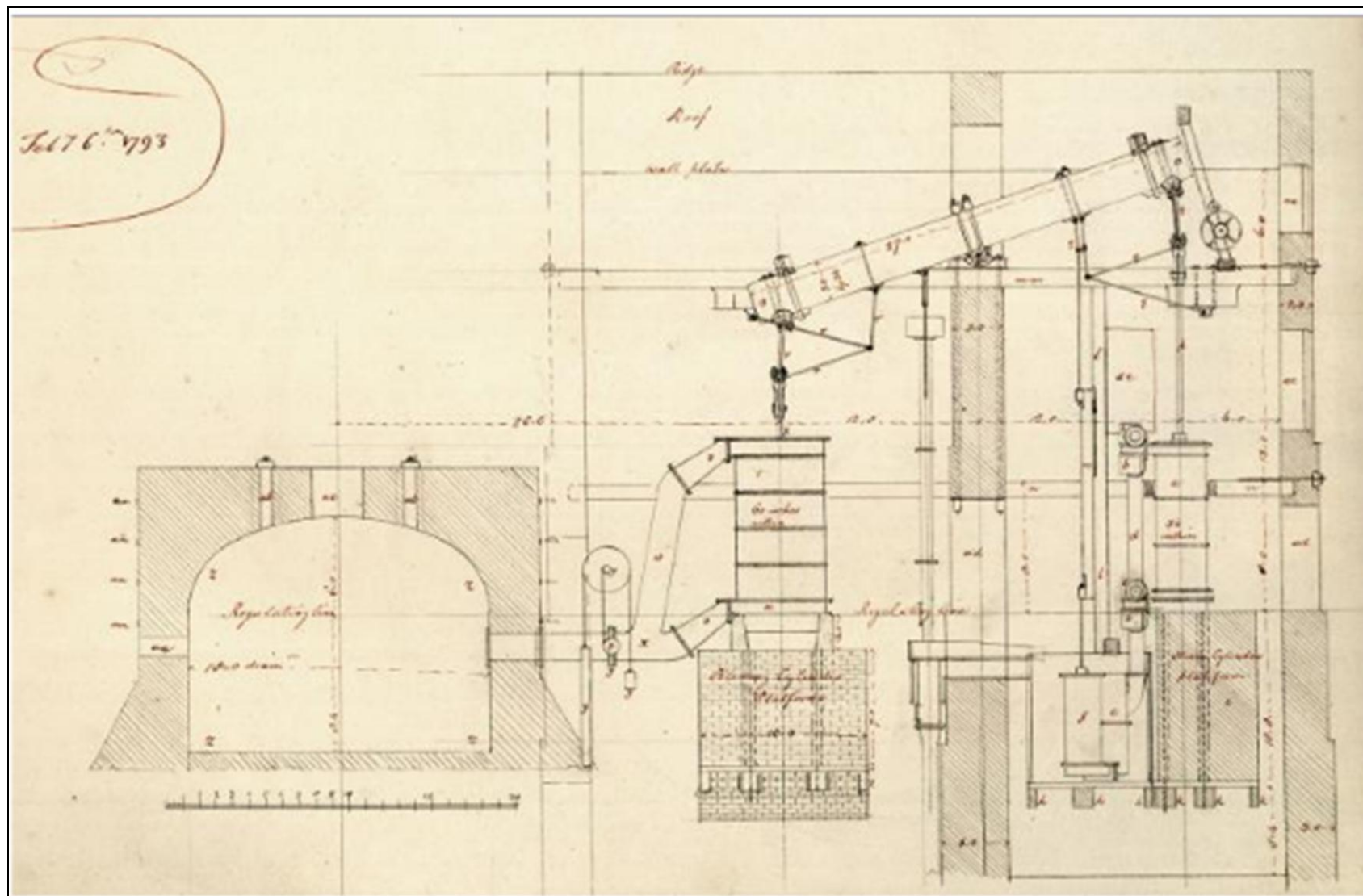
Perier instalou dois desses motores para captação de água do rio Sena, mas a companhia Boulton & Watt teve extrema dificuldade em fazê-lo pagar por eles. Somente no ano de 1786, que James Watt recebeu uma compensação de 51.600 libras como forma de pagamento. Novamente podemos perceber que o comércio com os franceses não era tão amistoso quanto possa parecer, pois no primeiro caso Boulton e Watt não receberam nada de pagamento, enquanto no segundo, até houve uma recompensação, mas que ainda ficou abaixo do acordo estabelecido na visita de Perier na sede da Sociedade Lunar em Birmingham.

O reconhecimento das máquinas e motores desenvolvidos pela *Soho Manufactory and State* também alcançou o território espanhol. A Boulton & Watt continuou a fornecer motores para alimentar altos-fornos durante a década de 1790 e dessa forma, Don Diego Gardoqui¹⁰⁷ (1735-1798) encomendou dois motores de sopro para serem instalados na casa comercial *Fermin de Tastet & Co.*

A figura 39 mostra o desenho de um dos motores de sopro confiados para construção no ano de 1793, enquanto que a figura 39.1 mostra os seis fornos separados, movidos pelo motor, que estavam dispostos em torno de uma cova de ar central alimentada pelo cilindro de sopro. O motor tinha um cilindro de 34 polegadas de diâmetro e aproximadamente 50 cavalos de potência.

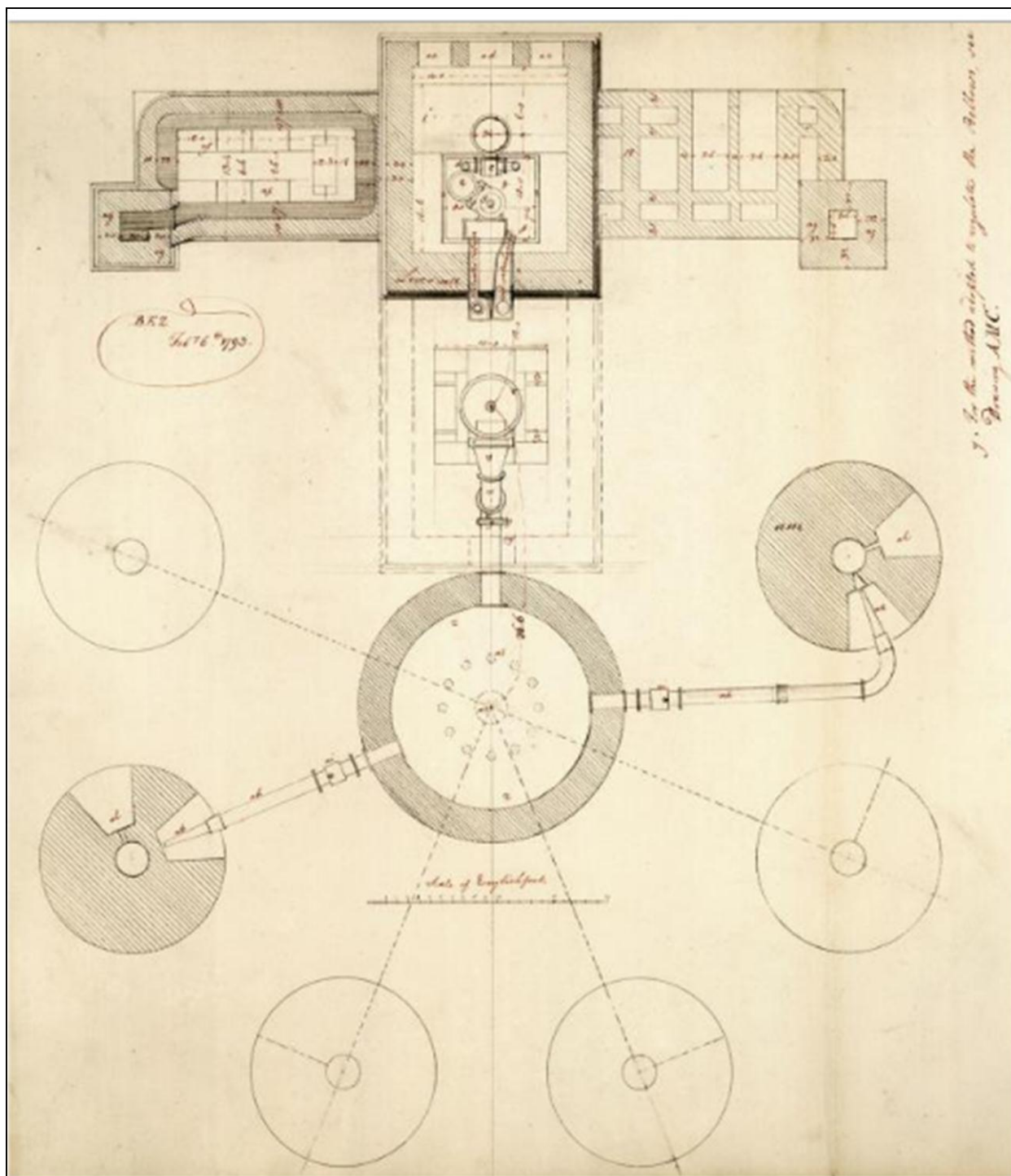
¹⁰⁷ Diego de Gardoqui, o quarto de oito filhos, foi o intermediário financeiro entre o tribunal espanhol e as Colônias durante a Guerra Revolucionária Americana. Ele era de origem vasca e membro da família rica Gardoqui de Bilbao, na Espanha. O negócio mercantil de "*José de Gardoqui e Hijos*" em Bilbao -dos quais Diego era um dos três filhos em parceria com seu pai - forneceu aos patriotas 215 canhões de bronze, 30.000 mosquetes, 30.000 baionetas, 51.314 bolas de mosquete, 300.000 quilos de pólvora, 12.868 granadas, 30.000 uniformes e 4.000 tendas de campo durante a guerra. Após a Revolução, tornou-se enviado da Espanha para os Estados Unidos no ano de 1785. Gardoqui continuou como ministro da Espanha nos Estados Unidos até retornar a cidade Bilbao em outubro de 1789.

Figura 39 - Motor de sopro para fornos em Cádiz, Espanha



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/692

Figura 39.1 - Motor de sopro para fornos em Cádiz, Espanha



Fonte: Ref. MS3147/Portfolio/5/692

Assim, pudemos observar por meio dos documentos disponibilizados nos arquivos da *Lunar Society* que alguns tipos de máquinas produzidas pelos membros da Sociedade, tiveram um alto poder de alcance em diversas regiões da Inglaterra, sendo inclusive exportadas para outros países, tais como a Holanda, Espanha e a França. Essas máquinas foram essenciais para impulsionar as indústrias dessas regiões:

O rápido aumento das cidades industriais da Inglaterra e da Escócia nos últimos trinta anos, e sua grande prosperidade, foram inteiramente devidas à invenção de Watt do motor a vapor rotativo; pois teria sido impossível, por qualquer outro meio ainda conhecido, ter obtido poder suficiente para a execução da obra que agora é executada pela sua assistência, ou para ter estabelecido o atual sistema fabril que é tão vantajoso para este país (FAREY, 1827, p.406, tradução nossa).

Entretanto, nada disso seria possível se não fosse pela aplicação de teorias físicas e matemáticas, cruciais para que as máquinas funcionassem de forma eficiente e dinâmica, capazes de realizar o serviço que antes era realizado principalmente por meio de força humana ou animal.

3.5 AS MATEMÁTICAS MISTAS E AS CIÊNCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS APLICADAS ÀS MÁQUINAS DE VAPOR

No caso das teorias matemáticas utilizadas para a construção dessas máquinas, considerando a classificação matemática de D'Alembert no Discurso Preliminar de 1751, veremos que as “matemáticas mistas” e as ciências físico-matemáticas tiveram um papel importante para a implementação e funcionamento de toda a maquinaria, em especial os tópicos compreendidos pela mecânica e pneumática.

Para Farey (1827), os termos *Machine*, *Engine* e *Mill* são frequentemente empregados sem uma discriminação apropriada e essas três palavras significam a aplicação prática da ciência da mecânica aos propósitos das artes, consistindo em simples combinações das forças mecânicas.

A definição de Farey (1827) em relação às máquinas e seus elementos já nos dá pistas da presença das ciências matemáticas. Os termos *Machine* ou *Engine*, apesar de que ambos possam ser traduzidos como *Máquina*, existem certas diferenças em seu emprego. A palavra *Machine* deve ser aplicada somente a ferramentas ou instrumentos, para executar operações intrincadas ou forçadas, e nos quais os poderes mecânicos são visíveis. *Machine* é quase sinônimo de *Engine*, mas em relação a segunda palavra, é tida como um termo moderno que tinha a intenção de transmitir uma distinção honrosa, sendo concedido somente a invenções mecânicas, nas quais a habilidade incomum de engenhosidade se manifestava. Ainda segundo Farey (1827), *machine* deve ser um termo geral para qualquer máquina, instrumento ou aparelho que tenha partes móveis, e que seja empregado para aumentar a intensidade das forças móveis, ou para regular sua ação.

Por meio dessa definição apresentada por Farey (1827), podemos denotar que os protótipos das máquinas que apresentamos anteriormente são classificadas como *Engine*, dado que para serem construídas elas precisaram de uma engenhosidade em sua implementação. E realmente assim está nos documentos obtidos nos arquivos da Sociedade Lunar de Birmingham, mas ao traduzir *Engine*¹⁰⁸, essa distinção fica difícil de ser observada pelo fato de que em português tem o mesmo significado de *Machine*, ou seja, máquina. Além disso, ele deixa bem claro a presença dos tópicos de “matemática mista” e das ciências físico-matemáticas no significado da palavra *Engine*:

O termo *Engine* deve ser restrito àquelas máquinas que aplicam algum princípio de Hidráulica ou Pneumática, às artes úteis, suas operações dependendo de fluidos atuantes; como uma máquina a vapor, uma máquina hidráulico, uma máquina de bombeamento, uma máquina de sopro, uma máquina sob pressão e uma máquina de extinção de incêndios (FAREY, 1827, p.55, tradução nossa).

Em relação a expressão *Mill*, que podemos traduzir como usina ou fábrica, Farey (1827) considera que ela deve ser aplicada em máquinas de compostos grandes e potentes, ou que possuem um sistemas de máquinas, como por exemplo, em uma fábrica (*mill*) de algodão, que contém um número de máquinas diferentes, e também a roda d'água, ou motor a vapor, que atua em todos eles. Ele ainda comenta que a palavra *mill* tem uma derivação latina que significa *to grind*, ou seja, moer com o intuito de tornar corpos sólidos em pó, assim, essa palavra também serve para se referir a um laminador ou a moagens, tais como um moinho de trigo (*flour mill*), moinho de serragem (*sawing mill*), por exemplo.

O termo *machinery*, que podemos traduzir como maquinaria ou mecanismo, segundo Farey (1827), deve ser usado como um termo geral, significando as partes móveis e operacionais de qualquer máquina ou motor e, portanto, incluem as forças mecânicas e suas combinações. É ainda definido que *mechanism* pode ser aplicado como sinônimo de *machinery* em uma escala menor, como uma parte de relógios, instrumentos matemáticos, ou para as menores partes de qualquer outra máquina. Por exemplo, *machinery* de um moinho de milho, ou moinho de serragem; e o *mechanism* de um relógio.

Farey (1827) considera que a expressão *machinery* é um termo geral para todos os instrumentos mecânicos, que podem ser combinados de modo a formar os membros ou partes móveis das máquinas, incluindo as partes fixas. São responsáveis para designar os instrumentos pelos quais os princípios da mecânica serão executados, tornando-os aplicáveis a todos os propósitos das manufaturas.

¹⁰⁸ Outra tradução pertinente de *Engine*, é motor.

Por fim, Farey (1827) aponta que o objetivo comum de todo *mechanism*, ou *machinery*, é transmitir e modificar a força e o movimento, ou potência, do primeiro motor da máquina, transmitindo esses princípios mecânicos de maneira apropriada ao contexto a ser operado. Assim, por meio do mecanismo (*machinery*) de rodas dentadas, manivelas e alavancas, o movimento rotativo lento de uma roda d'água pode ser convertido em um movimento alternativo rápido, para serrar, ou ligar outras máquinas; ou em um movimento lento e recíproco para trabalhar as bombas. A velocidade do movimento do primeiro propulsor pode ser aumentada ou diminuída pelo mecanismo do trabalho das rodas, de acordo com a ocasião em que pode ser necessário um grande poder a ser exercido.

De igual modo, o mecanismo de um movimento paralelo, biela, manivela e volante, pode operar um movimento alternado retilíneo da haste do pistão de uma máquina a vapor, bem como convertê-lo em um movimento circular contínuo como pudemos observar nos modelos apresentados sejam eles, máquinas do tipo Sol e Planeta, Dupla Ação ou Rotativas.

O mecanismo das rodas dentadas podem ser adaptados para controlar a velocidade ou a potência, seja para alimentar uma ou várias máquinas. Como exemplo, serras circulares e máquinas de fiação, exigem grande velocidade, enquanto que moinhos, fábricas de açúcar e máquinas de perfuração requerem grande poder para lhes dar movimento, portanto, devem ser operados com menos velocidade. Para alcançar esses e outros propósitos, a aplicação de teorias físicas e matemáticas na construção das máquinas, tal como foi apontado por Farey (1827), se fazem extremamente necessárias.

A partir dessas definições, considerando a classificação matemática de D'Alembert, tal como vimos, por exemplo, no significado de *Engine*, foi possível obtermos indícios de que determinados tópicos ilustram a aplicação das “matemáticas mistas” e das ciências físico-matemáticas empregadas às máquinas de vapor: a mecânica e a pneumática.

Portanto, essas ciências matemáticas, por meio do que D'Alembert classificou como “matemática mista” e ciências físico-matemáticas fizeram parte de toda essa evolução tecnológica da Revolução Industrial, afinal, como brevemente mostraremos, sem a aplicação das teorias dessas ciências, cabe a nós imaginar que dificilmente a tecnologia teria se desenvolvido da mesma forma. É válido destacarmos que poderíamos trazer inúmeros exemplos para mostrar a veracidade dessa afirmação, mas abordaremos apenas alguns para cumprir os objetivos desse capítulo, que é o de mostrar a importância dos tópicos dessas ciências matemáticas aplicadas no contexto da Revolução Industrial.

No intuito de dar um breve panorama de como as ciências matemáticas aplicadas à construção e implementação das máquinas a vapor, apresentadas na seção 3.2 desse trabalho,

foram de extrema importância que corroboraram no avanço tecnológico industrial na Inglaterra, traremos alguns exemplos que acreditamos ser o suficiente para cumprirmos com esse propósito. É importante destacarmos que as ciências matemáticas não são as únicas responsáveis no desempenho das máquinas a vapor, estando presentes as ciências químicas e também a engenharia empregada na construção da maquinaria.

3.5.1 ALGUMAS PROPRIEDADES QUE DÃO EFEITO ÀS OPERAÇÕES DE UMA MÁQUINA A VAPOR

Poderíamos utilizar livros contemporâneos para definir os conceitos apresentados a seguir, mas optamos em considerar principalmente as obras de Farey (1827) e Ripper (1920), para tentar manter o mais próximo possível da realidade do período da Revolução Industrial, e principalmente, por serem autores que escreveram princípios teóricos voltados a aplicação das ciências nas máquinas a vapor.

As propriedades que elencaremos, estão diretamente e indiretamente presentes nas máquinas construídas a partir dos protótipos que apresentamos dos membros da Sociedade Lunar de Birmingham. Elas são fundamentais para as máquinas a vapor entrar em ação, ou seja, que os efeitos mecânicos e pneumáticos ajam na máquina e produzam o vapor necessário para alimentar o funcionamento delas, além de que são importantes para o desempenho da máquina, bem como para tirar o melhor aproveitamento da maquinaria.

MATÉRIA¹⁰⁹ é conhecida como tudo aquilo que ocupa um lugar no espaço, ou em outras palavras, é a substância da qual cada coisa na natureza é composta. As qualidades mecânicas essenciais da matéria são:

- 1) Extensão, a propriedade de ocupar um espaço;
- 2) Peso, a propriedade de ser atraído pela Terra;
- 3) Inércia, a propriedade de indiferença passiva ao movimento ou descanso.

CORPO¹¹⁰ é uma quantidade coletiva de matéria que ocupa uma porção definida do espaço. Os corpos podem ser encontrados nos estados sólidos, fluidos ou aeriformes.

MASSA¹¹¹ é um corpo que contém uma quantidade determinada de matéria, mas sem considerar a extensão, ou o espaço que pode ocupar.

¹⁰⁹ Farey (1827, p.13, tradução nossa).

¹¹⁰ Idem.

¹¹¹ Idem.

VOLUME¹¹² é a medida da extensão de um corpo, isto é, a porção do espaço que ele ocupa.

CAPACIDADE¹¹³ é também uma porção determinada do espaço, mas sem contemplar qualquer assunto incluído naquele espaço.

O volume e a capacidade devem ser determinados combinando as três dimensões de comprimento, largura e espessura. Assim, o espaço de um pé de comprimento, um pé de largura e um pé de espessura, é chamado de pé cúbico, e pode ser utilizado como uma medida de capacidade, assim, podemos dizer, que o volume de uma determinada massa de ferro fundido, ou água, ou ar, é igual a um pé cúbico. E que a capacidade ou conteúdo sólido de um certo recipiente oco é igual a um pé cúbico.

PESO¹¹⁴ é o resultado da atração contínua da gravitação que a terra exerce para atrair todos os corpos para o centro. Concluimos que dois pesos são iguais, quando produzem exatamente o mesmo efeito nas mesmas circunstâncias, como quando se contrapõem nas extremidades de um equilíbrio, cujos braços são exatamente iguais. A massa ou quantidade de matéria em qualquer corpo é sempre estimada pelo seu peso, pois, se a terra atrai dois corpos igualmente, supõe-se que eles contêm massas iguais ou quantidades de matéria iguais. Por exemplo, $62\frac{1}{2}$ libras de ferro fundido, $62\frac{1}{2}$ libras de água, ou $62\frac{1}{2}$ libras de ar, são consideradas como massas iguais de matéria.

DENSIDADE¹¹⁵ é um termo de comparação para expressar as quantidades relativas de matéria contidas em diferentes corpos, tendo o mesmo volume. Por exemplo, um pé cúbico de ferro fundido pesa 450 libras e um pé cúbico de água pesa $62\frac{1}{2}$ libras. Portanto, a densidade do ferro fundido é 7,2 vezes a densidade da água.

RARIDADE¹¹⁶ é o inverso da densidade. Assim, a água é 7,2 vezes mais rara do que a do ferro fundido.

MOVIMENTO¹¹⁷ é uma ideia composta, que envolve as ideias de tempo e lugar. Um corpo em movimento pode ser descrito como estando no ato de mudar seu lugar, ou posição, em relação a outros corpos com os quais o comparamos.

¹¹² Idem.

¹¹³ Idem.

¹¹⁴ Farey (1827, p.14, tradução nossa).

¹¹⁵ Idem.

¹¹⁶ Idem.

¹¹⁷ Idem.

LUGAR¹¹⁸ é aquela porção do espaço que um corpo ocupa em relação a outros corpos. A única maneira podemos identificar o lugar como uma parte do espaço, é, por referência a alguns corpos que ocupam outras parte adjacentes.

TEMPO¹¹⁹ é aquela parte da duração ou existência, ou da sucessão de eventos, que ocorre durante algum movimento definido de um corpo. Podemos conceber melhor as partes do tempo indicadas pelo movimento, ou ainda, como a operação de um corpo passando sucessivamente por diferentes partes do espaço. Assim, nossas medidas padrão de tempo são os movimentos dos corpos celestes: o período em que a terra gira em torno do sol determinando o ano, o circuito na lua ao redor da terra mede o mês, a rotação da terra em seu eixo marca o dia. E, pelo movimento dos pêndulos e relógios, o dia é artificialmente dividido em horas, minutos e segundos.

VELOCIDADE¹²⁰ é a expressão da rapidez ou celeridade do movimento, isto é, a extensão do movimento, ou o espaço, que um corpo passa em um determinado momento. Diz-se que um corpo se move com velocidade uniforme quando sua taxa de movimento continua sempre a mesma, ou quando passa através de espaços iguais em cada intervalo de tempo sucessivo. Diz-se que um corpo se move com **velocidade acelerada** quando a rapidez do movimento aumenta continuamente, de modo que o corpo se move através de um espaço maior, a cada intervalo de tempo sucessivo. A **velocidade retardada** é o inverso da velocidade acelerada, os espaços passaram a ser menor em cada intervalo de tempo sucessivo.

MEDIDA DA VELOCIDADE¹²¹ é o espaço ou a distância através da qual um corpo se move uniformemente em uma determinada porção do tempo. Assim, dizemos que um ônibus, ou um barco a vapor, viaja com uma velocidade de dez quilômetros por hora, ou 880 pés por minuto, ou 144 pés por segundo: esses são termos de expressão diferentes para a mesma velocidade. Em velocidades variadas, a taxa de aumento ou diminuição da velocidade deve ser expressa. Quando o aumento ou a diminuição da velocidade continua a mesma em intervalos de tempo iguais sucessivos, diz-se que são velocidades uniformemente aceleradas ou uniformemente retardadas.

OS TRÊS AXIOMAS DA MECÂNICA¹²², ou leis do movimento, estabelecidos por Sir Isaac Newton são:

¹¹⁸ Idem.

¹¹⁹ Idem.

¹²⁰ Idem.

¹²¹ Idem.

¹²² Idem.

I. A Lei da Inércia. Todo corpo continua em seu estado de repouso, ou de movimento uniforme em linha reta, até que esse estado é alterado pela aplicação de alguma força.

II. A lei das forças perturbadoras. Qualquer alteração que seja efetuada na quiescência¹²³ ou movimento de um corpo, observará a direção da força perturbadora, e a mudança de quiescência ou movimento será proporcional a essa força.

III A lei da reação. A reação em todos os casos é igual e contrária a ação. As ações mútuas de dois corpos uns sobre os outros, são sempre iguais e elas operam em direções contrárias.

INÉRCIA¹²⁴ é uma propriedade inerente à matéria, pela qual ela tende a continuar em seu estado atual, seja de repouso ou de movimento uniforme, e resistir a qualquer mudança desse estado. Assim, um corpo estando em repouso, requer um esforço de força para dar movimento; e um corpo que está se movendo com uma certa velocidade, requer um esforço de força para dar uma velocidade maior ou menor.

FORÇA¹²⁵ é qualquer ação ou causa, que pode produzir movimento em corpos em repouso, ou aumentar, diminuir ou modificar o movimento de corpos em movimento. É qualquer esforço que um corpo possa exercer sobre o outro, movê-lo de um estado inativo, ou fazer qualquer mudança, na direção ou na velocidade de seu movimento.

EQUILÍBRIO¹²⁶ é aquele estado de igualdade entre a ação oposta e as forças em conflito, em que elas são contrárias uma da outra e se neutralizam, deixando de afetar a quietude ou movimento dos corpos sobre os quais elas agem. Equilíbrio pode ser caracterizado em dois tipos: a dos corpos quiescentes chamados de *equilíbrio estático* e a dos corpos que se movem uniformemente, chamados de *equilíbrio dinâmico*.

PRESSÃO¹²⁷, é qualquer força que exerça um esforço contínuo para mover um corpo que é retido do movimento, seja por uma força reagente equivalente, ou pela resistência passiva de outros corpos com os quais está em contato.

POTÊNCIA MECÂNICA¹²⁸, ou potência, é uma expressão para a quantidade de movimento forçado que é transferida aos corpos pela operação ativa de qualquer força impelida sobre eles; sendo o composto da força exercida sobre os corpos e o movimento produzido por esse esforço.

¹²³ Estado de repouso.

¹²⁴ Farey (1827, p.15, tradução nossa).

¹²⁵ Idem.

¹²⁶ Idem.

¹²⁷ Idem.

¹²⁸ Farey (1827, p.16, tradução nossa).

ENERGIA DOS CORPOS EM MOVIMENTO¹²⁹ é a potência mecânica que lhes é transferida, para produzir seu movimento a partir de um estado de repouso, em oposição à inércia da matéria. A potência transferida continua a residir em tais corpos em movimento, desde que eles preservem seu movimento não diminuído, e constituam o que é chamado de sua energia, ou força inerente.

ÍMPETO¹³⁰, ou força de ímpeto, é a força mecânica que é extraída de corpos em movimento e exercida sobre quaisquer obstáculos que ocasionem uma diminuição de sua velocidade. É uma consequência da inércia da matéria em movimento e é derivada daquela potência mecânica que sempre reside nos corpos em movimento, e que é denominada energia, enquanto em estado latente; mas quando é colocado em atividade, é chamado ímpeto.

MOVIMENTO RETILÍNEO¹³¹ é quando um corpo descreve uma linha reta em seu movimento. Este é o movimento natural dos corpos, pois eles sempre se movem em linhas retas, a menos que sejam expostos a alguns atos de força extrínseca, para afastá-los do caminho reto, e então, por sua inércia, resistem a forças como tendem a desviá-las da linha reta.

MOVIMENTO CURVILÍNEO¹³² é quando um corpo descreve uma curva em seu movimento. O corpo em movimento irá, pela sua inércia, continuar em movimento com a mesma velocidade, e em mesma direção, até que sua perseverança nesse estado seja impedida por obstáculos ou forças adversas. Consequentemente, um corpo não pode descrever uma linha curva, a menos que seja submetido à influência de alguma força que age constantemente, ou encontre uma sucessão continuada de obstáculos, que a cada instante mudem a direção de seu movimento e o desvie do curso retilíneo.

MOVIMENTO LIVRE¹³³ é quando um corpo está em uma circunstância, a ponto de ter a liberdade de se mover para qualquer direção sem impedimento. Um corpo absolutamente livre, uma vez posto em movimento, só pode se mover em linha reta e com velocidade uniforme, mas todos os corpos com os quais estamos familiarizados são influenciados por certas forças, pelas quais esse movimento natural é modificado, e o movimento curvilíneo, ou velocidade variável, é produzido. Diz-se que um corpo tem movimento livre, quando é desprendido do contato com todos os outros corpos, e portanto livre para se mover em tal direção e com tal velocidade que mantenha um equilíbrio constante entre sua própria

¹²⁹ Farey (1827, p.17, tradução nossa).

¹³⁰ Farey (1827, p.19, tradução nossa).

¹³¹ Farey (1827, p.25, tradução nossa).

¹³² Idem.

¹³³ Farey (1827, p.26, tradução nossa).

tendência natural ao movimento retilíneo uniforme, e todas as forças diferentes que operam sobre ele, para mudar esse movimento natural.

MOVIMENTO RESTRITO¹³⁴ é quando um corpo é compelido, pelo contato real com outros corpos, em qualquer direção particular, ou com qualquer velocidade declarada. Por exemplo, em uma roda que é fixada em um eixo e girada por força mecânica, cada parte é obrigada a girar em círculos, descritos sobre o centro comum; e as partes que estão a distâncias diferentes desse centro devem se mover com velocidades diferentes: e embora a matéria assim restrita a se mover em círculos possa ser provocada pela força da gravidade, e por sua inércia e força centrífuga, para sair do caminho circular, não tem a liberdade de fazê-lo.

MOVIMENTO CIRCULAR¹³⁵ é aquele caso particular de movimento curvilíneo, quando um corpo é restrito para descrever um círculo em seu movimento. Se ele continuar avançando, para descrever todo o círculo, ele é chamado de *movimento rotativo*, ou movimento circular contínuo, e o corpo é dito girar em um círculo: o centro do círculo é chamado de centro do movimento, ou o eixo do movimento.

FORÇA CENTRÍFUGA¹³⁶ em um corpo que descreve o movimento curvilíneo, é o resultado de uma tendência constante que o corpo tem de se afastar da curva e assumir o movimento retilíneo, que é natural aos corpos.

FORÇA CENTRÍPETA¹³⁷ é a força necessária para contrabalancear a força centrífuga e reter um corpo em seu caminho curvilíneo; a atração da gravitação é a força centrípeta, que opera nos corpos celestes, para retê-los em suas órbitas.

CENTRO DE GIRO EM CORPOS QUE SE MOVEM EM CÍRCULOS¹³⁸ é um ponto em que se pode supor que o efeito da inércia, ou a energia de todo o conjunto é refletida. As diferentes partes de corpos que descrevem círculos, ou se movem em torno de um centro fixo, devem ter diferentes velocidades, de acordo com as suas distâncias desse centro fixo. E como as energias de corpos móveis é medido pelo produto de suas massas, multiplicado pelo quadrado de suas velocidades, segue-se que as energias daquelas partes do corpo que estão perto do centro do movimento, serão muito menores do que o das partes mais remotas desse centro.

¹³⁴ Idem.

¹³⁵ Farey (1827, p.27, tradução nossa).

¹³⁶ Idem.

¹³⁷ Idem.

¹³⁸ Farey (1827, p.29-30, tradução nossa).

PÊNDULO¹³⁹ é um corpo pesado, suspenso livremente por uma haste, ou linha, de um suporte fixo, com liberdade para executar movimentos alternados no arco de um círculo descrito sobre o centro da suspensão.

A posição quiescente natural de um corpo pendular é quando a haste ou linha de suspensão é vertical; porque o centro de gravidade do corpo está em sua posição mais baixa quando está exatamente abaixo do centro da suspensão.

Se pelo esforço de qualquer força, um pêndulo for removido ou afastado da posição vertical, o centro de gravidade deve subir e, conseqüentemente, o pêndulo retornará ou cairá na direção da linha vertical pela ação da gravidade quando a perturbação dessa força deixar de agir. A massa em movimento adquire uma considerável energia de movimento, pela descida de seu centro de gravidade no arco circular, durante o retorno à linha vertical, e como esta energia não é extinguida ou neutralizada quando chega a essa posição, ela carregará o pêndulo para a frente no arco circular, no lado oposto da linha vertical, e então o centro de gravidade subindo contrastando a energia, até que seja completamente gasta, e conseqüentemente o movimento nessa direção cessa, deixando o pêndulo retornar à linha vertical.

ALAVANCA¹⁴⁰ é uma barra inflexível, que é capaz de se mover livremente sobre um ponto ou centro, ou eixo de movimento, para que cada parte da alavanca descreva o arco de um círculo sobre o centro comum, e o movimento de todas as diferentes partes serão proporcionais às suas distâncias em relação ao centro comum. Quando qualquer força é aplicada para agir sobre uma alavanca em um ponto situado a determinada distância o centro do movimento, essa distância pode ser chamado de comprimento real ou raio da alavanca, porque é o raio do círculo que tal ponto deve descrever durante o movimento da alavanca.

AÇÃO HIDROSTÁTICA¹⁴¹ da água, ou ação pneumática de fluidos elásticos em pistões móveis, que são encaixados em cilindros ocos, preenchidos com tais fluidos, é uma das mais importantes forças mecânicas; e sendo a base da operação do motor a vapor e das bombas, exige uma explicação completa. Deriva sua eficácia de uma importante propriedade dos fluidos, que pode ser assim explicada: quando qualquer massa de fluido é assim contida dentro de qualquer recipiente próximo, de modo a ocupar completamente todo o espaço interior ou capacidade do mesmo, e fazer contato com o limite de suas superfícies internas em todos os lados; se o limite é completado perfeitamente em cada parte, uma força de compressão pode ser exercida sobre a massa de fluido, movendo qualquer parte do limite

¹³⁹ Farey (1827, p.38-39, tradução nossa).

¹⁴⁰ Farey (1827, p.46, tradução nossa).

¹⁴¹ Farey (1827, p.51-52, tradução nossa).

interior, de modo a invadir o espaço incluído; mas o fluido contido resistirá a esse movimento, em consequência de sua incompressibilidade ou de sua elasticidade; e ele transmitirá e distribuirá tal força igualmente em todas as direções, para cada parte da superfície interior do limite com o qual o fluido está em contato, de modo a pressionar tal limite para fora com uma força proporcional à superfície de cada parte, respectivamente .

Suponha, por exemplo, que a capacidade interior de um cilindro oco, no qual um pistão móvel é precisamente montado, seja completamente preenchida com água, e que o pistão seja pressionado, a fim de forçá-lo mais para dentro do cilindro oco, de modo a diminuir o espaço ocupado pela água; mas esse espaço estava estreitamente limitado por todos os lados, e a água sendo um fluido incompressível¹⁴², não permitirá qualquer movimento sensível do pistão tão circunstanciado, a menos que haja alguma abertura ou deficiência do limite, pelo qual parte da água possa escapar do cilindro; mas qualquer que seja a força de compressão exercida pelo pistão sobre a água, será transmitida por meio dela, para atuar igualmente contra todas as partes da superfície interior com as quais a água está em contato; e a água pressionará contra todas as partes daquela superfície; forçando o mesmo para fora em uma direção à direita e para aquela superfície, e com uma intensidade igual de presumir, qualquer que seja essa direção, seja para cima, para baixo ou para os lados; e consequentemente a força exercida pela água, contra qualquer parte particular da superfície com a qual está em contato, será proporcional à extensão dessa superfície, comparada com a superfície do pistão móvel, à qual a força de compressão é aplicada.

Por exemplo, o fundo plano, ou extremidade próxima do cilindro, oposta ao pistão móvel, sendo do mesmo tamanho com o mesmo, será pressionado pela água, com uma força igual àquela que o pistão exerce sobre a água; pois a água meramente transmite essa força; e assim, se considerarmos a força exercida sobre qualquer outra porção da superfície interior contra a qual a água atua, essa força terá a mesma proporção da força de compressão aplicada pelo pistão, já que a superfície em questão suporta a superfície do pistão em si.

Se supormos que ao invés de fechar a parte inferior do cilindro, outro pistão móvel é encaixado nele, oposto ao primeiro pistão mencionado, e o espaço incluído entre eles sendo totalmente lavrado com água, é muito óbvio que se um pistão for forçado, e movido mais para dentro do cilindro, então a água incluída atuará contra o outro pistão, de modo a movê-lo ainda mais para fora do cilindro com uma força e movimento igual. Esta transmissão de força e movimento ocorrerá, por mais longo que o cilindro possa ser, e se essa parte intermediária

¹⁴² É qualquer fluido cuja densidade sempre permanece constante com o tempo, e tem a capacidade de opor-se à compressão do mesmo sob qualquer condição.

do cilindro em que os pistões não são obrigados a passar, for alterada na forma ou contraída em tamanho, não haverá diferença, desde que esteja suficientemente aberto para permitir que a água passe livremente de um pistão para atuar sobre o outro; ou os dois pistões podem ser encaixados em dois cilindros distintos colocados a qualquer distância necessária um do outro, com um tubo ou passagem aberta comunicando-se livremente do interior de um cilindro para o outro, então se qualquer um dos pistões for movido, ou forçado para dentro de seu cilindro, a água se deslocará desse cilindro e irá expeli-la através do tubo, que a transportará para o interior do outro cilindro, onde deslocará e mais o outro pistão se acumulará em um espaço igual e com a mesma força que o primeiro pistão atua sobre a água, o que meramente transmite a força inalterada.

Nos casos acima, os dois cilindros são considerados do mesmo tamanho, mas se um pistão é maior do que o outro, então o movimento do pistão pequeno, será tão maior do que o do pistão grande, como a área do primeiro é menor que o do segundo; porque toda a água que é deslocada de um cilindro pelo movimento de seu pistão, será transferida para o outro cilindro, deslocando mais seu pistão, a ponto de abrir espaço para a captação da água assim transferida; conseqüentemente, a extensão do movimento assim produzido em qualquer pistão, será inversamente como a área daquele pistão, comparada com a área do outro pistão.

PRENSA HIDRÁULICA¹⁴³, é a mais forte entre todas as potências mecânicas, é uma aplicação do princípio acima. Um cilindro grande é equipado com um pistão móvel; e para este pistão, a resistência a ser superada é aplicada; o pistão é movido pela entrada forçada de água por uma bomba na capacidade interior do cilindro, de modo a deslocar e mover o pistão para fora desse cilindro. A bomba é, na realidade, um cilindro menor, semelhante ao grande, e equipado com o seu pistão móvel, que sendo empurrado para dentro desse cilindro, expulsa a água do mesmo e o força através de um tubo para dentro do cilindro grande.

O espaço através do qual o pistão maior é movido é muito menor do que o espaço através do qual o pistão menor da bomba é movido, pois a área do pistão pequeno é menor que a do pistão grande; conseqüentemente, a força que o pistão grande irá exercer sobre a resistência que é necessária para superar, é maior do que a força que o pistão pequeno exerce sobre a água, na mesma proporção em que a área do pistão grande é maior do que a área do pistão pequeno.

A mesma proporção será aplicada em casos de bombas, em que há apenas um pistão empregado para expelir a água de um cilindro e forçá-lo através de um tubo; para descobrir

¹⁴³ Farey (1827, p.52-53, tradução nossa).

que velocidade, ou extensão do movimento, será transmitida à água ao passar através deste tubo, relativamente à velocidade ou extensão do movimento com o qual o pistão é movido no seu cilindro; a velocidade do pistão sendo multiplicada pela sua área, e o produto dividido pela área do tubo ou orifício, através do qual a água é forçada, o quociente será a velocidade com que a água passará através de tal tubo ou orifício.

FORÇA MOTRIZ¹⁴⁴ são forças naturais que admitem ser coletadas e acumuladas de maneira adequada para atuar sobre as máquinas, de modo a dar-lhes um movimento forçado ou uma potência mecânica; isto é, movimento em oposição a alguma resistência que é superada. As forças motrizes são comumente usadas na mecânica prática, e podem ser dadas da seguinte forma:

I. A força muscular dos homens é aplicada para atuar em todos os tipos de máquinas pequenas; e a força de animais brutos é aplicada para mover carruagens e girar as rodas dos moinhos.

II. O vento ou corrente natural fora do ar atmosférico é aplicado para impulsionar navios no mar e para virar as velas dos moinhos de vento.

III A corrente natural de água em rios e riachos é usada para girar as rodas dos moinhos de água.

IV. A força elástica do vapor é a força motriz nos motores a vapor. O vapor é água rarefeita e expandida pelo calor até um vasto aumento de volume, e de tal maneira que se torne um fluido elástico, possuindo uma tendência constante para expansão adicional ou aumento de volume; conseqüentemente, o vapor exercerá uma força de pressão contra as superfícies e limites em qualquer espaço que ocupar. Esta força de pressão pode ser aplicada para dar um movimento forçado a um pistão montado em um cilindro, admitindo o vapor no cilindro, a fim de deslocar o pistão da capacidade interna de tal cilindro. E depois que o vapor produziu esse efeito, ele pode ser privado de quase toda a sua força elástica, e muito grandemente reduzido em volume, retirando-se da água da qual o vapor é composto, aquele calor que ocasionou seu volume aumentado e sua elasticidade; conseqüentemente, qualquer espaço que seja ocupado por vapor elástico pode ser feito quase vazio, ou pode ser muito exaurido, por resfriamento e condensação desse vapor elástico em água líquida.

Este método é usado para esgotar a capacidade do interior de um cilindro no qual um pistão móvel é encaixado, em que o vapor elástico quente sendo admitido para pressionar contra a superfície oposta de tal pistão, força-o com quase toda a força elástica do vapor,

¹⁴⁴ Farey (1827, p.56, tradução nossa).

porque essa força não é materialmente oposta ou contrária pelo vapor remanescente que anteriormente ocupava esse espaço, mas que foi condensado retirando seu calor do mesmo.

FORÇAS DE RESISTÊNCIA¹⁴⁵ são todas aquelas forças naturais que se opõem a qualquer movimento da matéria sobre a qual nossas máquinas artificiais são necessárias para operar. O objetivo comum de construir máquinas é superar tais forças de resistência e dar movimento a corpos, ou partes de corpos, em oposição a elas; ou, em outras palavras, para produzir mudanças, seja no lugar que os corpos ocupam, ou na forma que eles possuem.

Para efetuar tal propósito, deve ser fornecida uma força motriz adequada e a máquina deve ser combinada de modo a constituir uma máquina que possua partes de três descrições; ou seja, partes que são adaptadas para receber a ação dos corpos nos quais a força motriz reside; e outras partes adaptadas para atuar sobre os corpos que é necessário para impulsionar com o movimento, ou cujas formas devem ser alteradas, em oposição às forças de resistência; também partes intermediárias combinadas de modo a adquirir as propriedades das potências mecânicas, e que sendo interpostas entre as partes às quais a força motriz é aplicada, e aquelas às quais as forças de resistência são aplicadas, transmitirão a força e o movimento de uma para a outra, para que possa operar com uma direção adequada de ação e intensidade de força, para superar as forças de resistência, e assim produzir aquela rapidez de movimento, em oposição à elas, que é necessária. A rapidez dependerá das proporções dadas às partes que atuam como potências mecânicas, para lhes permitir transmitir a força motriz, com tal modificação de sua intensidade de ação, de modo a exceder a intensidade da força de resistência com uma preponderância suficiente, enquanto a máquina está em repouso.

As forças de resistência são medidas pela aplicação de um peso suficiente para superá-las, e que, por sua descida, produzirá movimento em oposição a elas. As forças de resistência que se opõem ao movimento das máquinas são tão variadas quanto os objetos aos quais as máquinas são aplicadas, mas podem ser organizadas sob as seguintes maneiras:

I. A força da gravidade deve ser superada em todas as máquinas para elevar a água e para levantar pesos de qualquer tipo; sendo esta a força de resistência mais comum, e a mais precisa, todas as outras serão medidas e comparadas por referência a ela.

II. A força de coesão acarreta que as partículas da matéria se adiram juntas e formem corpos sólidos, capazes de resistir à mudança de forma. A coesão deve ser superada, em todas as operações de moagem, esmagamento, serragem, perfuração, etc. Sempre que a força de

¹⁴⁵ Farey (1827, p.58, tradução nossa).

coesão é destruída nos corpos, o calor é gerado. Em corpos líquidos, há também uma adesão entre as partículas, pelo que elas resistem à mudança de forma.

III. A força elástica em corpos sólidos, é aquela que os restitui à sua forma original, à cessação de qualquer força, que produziu uma mudança temporária da forma. A reação, ou o retorno ao original, resulta da força coesiva das partículas, quando a coesão não é destruída, mas somente cedeu, durante a ação de alguma força superior. A elasticidade dos corpos sólidos é uma força de resistência, que deve ser superada, em todas as operações de prensagem de substâncias elásticas, como cânhamo, algodão, tecido, papel, sementes oleaginosas, etc.

IV. A força elástica dos fluidos aeriformes é sua tendência a aumentar o volume e assim ocupar mais espaço, ao mesmo tempo que podem, por força superior, ser condensados e comprimidos em um espaço menor do que realmente ocupam; esta é a força de resistência, na operação de condensação de ar para soprar fornos, no engarrafamento de água de soda e no gás portátil para iluminação.

ATRITO¹⁴⁶ é aquela resistência que é ocasionada ao movimento dos corpos pelo seu contato com outros corpos que não participam do movimento, de modo que um movimento relativo de deslizamento ou fricção deve ocorrer entre as superfícies que estão em contato. O atrito é o resultado de uma atração natural da força de adesão que existe entre as superfícies dos corpos quando eles estão em contato próximo, e que lhes dá uma tendência a se unirem, com mais ou menos força. Há também uma penetração mútua ou entrelaçamento, de certas saliências imperceptíveis ou asperezas, em poros ou cavidades correspondentes, que podem existir em todas as superfícies, por mais suaves que sejam; conseqüentemente, quando qualquer movimento ocorre entre duas superfícies que são retidas à força em contato umas com as outras, pequenas partículas das saliências que se interligam, devem ser quebradas e separadas da massa; ou então as saliências minúsculas de uma superfície devem se apoiar e passar sobre as da outra superfície, de modo a remover os corpos a uma distância maior uns dos outros, em oposição à força que tende a mantê-los em contato.

I. A força que deve ser exercida para superar o atrito, e produzir movimento relativo entre as superfícies lisas dos corpos que estão em contato, é quase proporcional à pressão pela qual o contato é preservado; e dentro de certos limites parece que a maior ou menor extensão da superfície em contato, não faz nenhuma diferença sensata na quantidade de atrito.

¹⁴⁶ Farey (1827, p.60-61, tradução nossa).

II. A força que deve ser exercida para superar o atrito e produzir movimento relativo entre as superfícies lisas dos corpos que estão em contato, é independente da velocidade desse movimento, em todos os casos quando o desgaste ou corte e aquecimento é insensivelmente lento, pois a mesma força produzirá qualquer velocidade de movimento, de acordo com a velocidade com que essa força atua.

PREPONDERÂNCIA¹⁴⁷ é aquela parte da força motriz de uma máquina, que é um excesso além da força de resistência, e que se supõe estar perdida na operação da máquina, ou gasta na produção de seu movimento. Se uma estimativa correta é formada da força necessária para superar o atrito das partes móveis de uma máquina, e todas as resistências incidentais que operam antes do movimento começar, parecerá que a força de movimento excede as forças de resistência.

Na realidade, quando um movimento uniforme é alcançado, toda a preponderância da força motriz deve ser gasta para superar o atrito e a resistência do ar, ou outra resistência incidental que surge ou aumenta durante o movimento, e que, combinada com a resistência de forças, forma um total exatamente igual ao das forças motrizes, de modo a não deixar nenhuma força preponderante; este é o estado de equilíbrio dinâmico que constitui movimento uniforme. Enquanto persistir qualquer preponderância das forças motrizes sobre as forças de resistência, essa preponderância deve produzir um movimento acelerado; e o movimento uniforme não pode ser alcançado, até que a preponderância que existia no início do movimento se torne nula; isso acontecerá quando alguma certa velocidade for alcançada, e a aceleração cessa, e a rotação continuará uniforme.

Em todos os casos, quando a força preponderante é a gravidade, o movimento uniforme não pode ser alcançado, a menos que alguma parte da resistência que é superada tenha a propriedade de aumentar com a velocidade; nem atrito e nem inércia tem essa propriedade, mas a resistência dos fluidos tem.

Como exemplo de preponderância, suponha que a pressão média do vapor no pistão de uma máquina a vapor, seja de 2.200 libras, quando esse pistão estiver se movendo a uma velocidade de 200 pés por minuto. A potência mecânica exercida pela forma de movimento será de 440.000 lbs aumentando um pé por minuto. Se este motor for empregado para elevar a água por meio de bombas, provavelmente será estabelecido para elevar apenas 1.600 lbs a uma velocidade de 200 pés por minuto, portanto, o efeito mecânico de seu desempenho será de apenas 830.000 lbs aumentando um pé por minuto.

¹⁴⁷ Farey (1827, p.63-64, tradução nossa).

A preponderância ou excesso da força motriz além da força de resistência é 550 lbs agindo com uma velocidade de 200 pés por minuto, que é uma potência mecânica de 2.200 lbs subindo um pé por minuto. Esta potência é gasta ao superar o atrito das partes móveis do motor, e várias outras resistências incidentais, que entram em operação quando o movimento do pistão é de 200 pés por minuto, de modo a ser igual à preponderância de 550 libras. As causas de tais resistências incidentais já foram declaradas, mas como não fazem parte do efeito útil que o motor é obrigado a produzir, elas não são geralmente submetidas ao cálculo e são contabilizadas como perda.

TEMPERATURA¹⁴⁸ é aquela qualidade de corpos que determina a intensidade da energia térmica contida por eles. Se dois corpos de diferentes temperaturas, ao serem colocados próximos uns dos outros, o calor tende a passar do mais quente para o mais frio até que ambos alcancem a mesma temperatura. Diferentes temperaturas é o que determina a transferência de calor entre os corpos, e quanto maior a diferença de temperatura mais rapidamente o calor flui.

Diferença de temperatura é o que torna a energia térmica possível para desempenhar o trabalho mecânico, e quanto maior a diferença ou intervalo de temperatura, maior a eficiência possível do calor. O calor contido por um corpo à temperatura comum dos corpos ao redor, não está disponível para desempenhar o trabalho mecânico.

PONTO DE EBULIÇÃO DO VAPOR¹⁴⁹. É importante destacarmos que o volume de 1 libra de água na sua temperatura de densidade máxima é igual a 0,016 pés cúbicos. Conforme a temperatura vai aumentando, o seu volume por libra conseqüentemente também aumentará. Esse valor pode ser obtido pela multiplicação de 0,016 por um fator conforme determinado por Hirn:

Tabela 3 – Fator multiplicativo de Hirn

Temperatura (Fahrenheit)	Fator de Multiplicação
212°	1,0431
284°	1,0795
356°	1,127
392°	1,159

Fonte: Ripper (1920).

¹⁴⁸ Ripper (1920, p.6, tradução nossa)

¹⁴⁹ Ripper (1920, p.25-26, tradução nossa).

Ao aplicar calor em 1 libra de água a 32° Fahr que está inclusa em um cilindro sob um pistão móvel sem atrito e exposto à pressão atmosférica, suponha que a área do pistão tenha 1 metro quadrado. Então, negligenciando o peso do pistão, a pressão sobre o pistão = a pressão da atmosfera = p libras por polegada quadrada = $p \times 144$ lbs por pé quadrado = P .

Os efeitos do calor sobre a água são:

1. A temperatura sobe, mas o pistão permanece estacionário, exceto pela pequena expansão da água, até que uma certa temperatura seja atingida dependendo da pressão no pistão. Essa temperatura é chamada de ponto de ebulição e varia conforme a pressão da água varia:

Tabela 4 – Ponto de Ebulição da Água

Pressão sobre a água (libras por polegada quadrada)	Ponto de Ebulição (Fahrenheit)
1	102
5	162
10	194
14,7 (pressão atmosférica – 1 atm)	212
20	228
100	328
350	432

Fonte: Ripper (1920).

2. Assim que a água atingir o ponto de ebulição, embora a aplicação do calor ainda continue, não há aumento da temperatura, mas o vapor começa a subir e o pistão a subir contra a pressão exterior. Entretanto, a água desaparece gradualmente, o peso do vapor formado corresponde ao peso da água que desaparece, até que toda 1 libra de água seja convertida em 1 libra de vapor. O vapor durante a formação permanece na mesma temperatura que a água da qual é produzido. O calor adicionado durante todo o tempo em que a evaporação está ocorrendo é chamado de "calor latente".

3. Tendo a água sido completamente evaporada, se o calor ainda continuar, a temperatura, em vez de permanecer constante como antes, voltará a subir, agora que o vapor não está mais em contato com a água; e o pistão também continuará subindo; e o resultado será a formação de vapor superaquecido e a pressão constante, mas aumentando o volume e

aumentando a temperatura. Diz-se que o vapor é "superaquecido" quando ele é aquecido acima da temperatura do ponto de ebulição da água, correspondendo à pressão em que é gerado.

VAPOR SATURADO¹⁵⁰, é o vapor na maior densidade possível para exercer pressão. É invisível e seco, mas é como se não fosse, pois deve conter umidade ou água em suspensão, e isso não seria apenas vapor, mas uma mistura de vapor e água, ou vapor úmido, que não é mais invisível.

Se 1 libra de água é gradualmente convertida em vapor em um cilindro sob um pistão móvel, o vapor fica saturado durante todo o tempo de formação até que a última gota de água seja evaporada. Além desse ponto, se o calor continuar, o vapor ficará superaquecido, aumentará de volume e o reservatório não conterá mais vapor na maior densidade possível.

PRESSÃO E TEMPERATURA DO VAPOR SATURADO¹⁵¹. A temperatura do vapor saturado na presença de água é igual ao da água com a qual está em contato, e há somente uma temperatura para o vapor a qualquer pressão dada. Em qualquer outra pressão, a temperatura terá outro valor, mas sempre fixa para essa pressão específica. Se a temperatura cair, a pressão cai e uma parte do vapor é ao mesmo tempo condensada; ou se a temperatura aumenta, então a pressão também aumenta, e a maior parte da água presente é convertida em vapor.

Pode-se notar aqui que, na prática, a água em uma caldeira, quando a circulação é ruim, a temperatura nem sempre é a mesma. A temperatura da água da parte superior é a mesma que a do vapor, mas a temperatura da água abaixo do fogo não é necessariamente a mesma, e onde isso ocorre, o efeito é produzir uma expansão desigual na caldeira, que é a causa de muitos sérios problemas das caldeiras.

Nosso conhecimento das relações entre a pressão, temperatura, e volume de vapor saturado é principalmente devido aos experimentos de Regnault¹⁵². Os resultados desses experimentos foram declarados na forma de equações, a partir das quais as tabelas agora em uso foram determinadas. Os experimentos de Regnault foram deduzidos com grande cuidado e precisão, e os resultados plotados, curvas desenhadas e fórmulas, foram obtidas por meio de experimentos com cobre.

A relação geral entre pressão e temperatura é definida adiante na seguinte figura (ver figura 40), a partir da qual será possível visualizar que a pressão não só varia com a

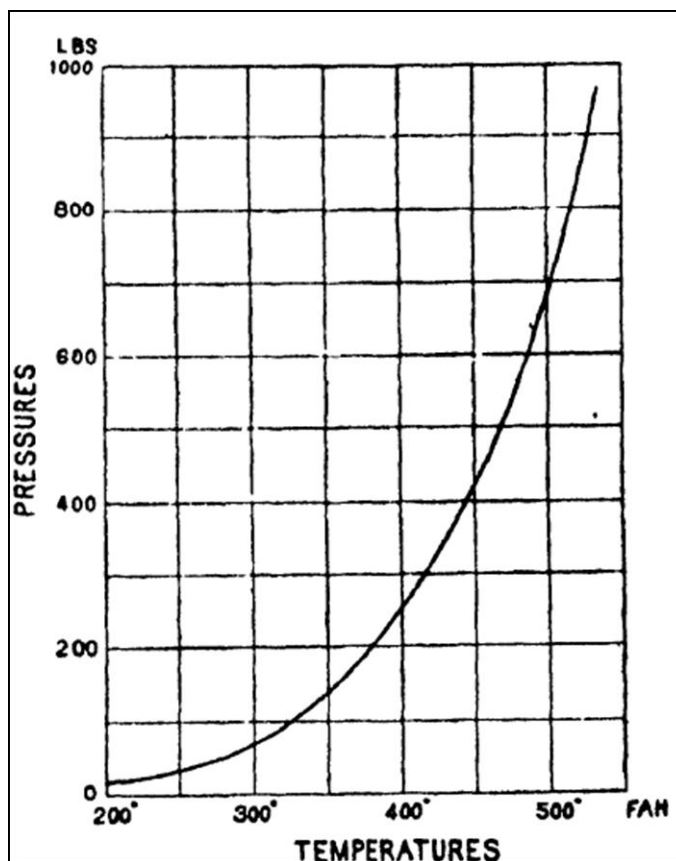
¹⁵⁰ Ripper (1920, p.26, tradução nossa).

¹⁵¹ Ripper (1920, p.26-27, tradução nossa).

¹⁵² Henri Victor Regnault (1810-1878), químico e físico francês.

temperatura, mas que a taxa de mudança de pressão é mais rápida à medida que as temperaturas aumentam.

Figura 40 – Temperatura x Unidades de calor



Fonte: Ripper (1920).

Assim, a 212°F, na pressão atmosférica, um aumento de 1°F na temperatura é seguido por um aumento da pressão de apenas $\frac{1}{3}$ libras por polegada quadrada, enquanto que a 400°F, ou 250 libras de pressão, um aumento de 1°F da temperatura é acompanhado por um aumento de pressão de 3 libras por polegada quadrada. E a pressão aumenta rapidamente, assim, um vapor a 546°F, tem uma pressão de 1000 libras por polegada quadrada.

Rankine¹⁵³ fornece a seguinte equação conectando a pressão e temperatura do vapor saturado em que os resultados são bastante precisos:

$$\log_{10} p = A - \frac{B}{T} - \frac{C}{T^2}$$

¹⁵³ William John Macquorn Rankine (1820-1872), engenheiro e físico escocês.

Em que T é dado em Farenheits por meio da expressão $T = t + 461,2$.

Os valores de A, B e C são dados em libras por polegadas quadradas. E esses valores são iguais a, $A = 6,1007$, $\log B = 3,43642$ e $\log C = 5,59873$.

CALOR ESPECÍFICO DE ÁGUA E VAPOR¹⁵⁴. Para fins práticos, o calor específico da água é considerado como unidade em todas as temperaturas normais. Em outras palavras, se considerarmos t como sendo a temperatura da água, então a unidade de calor exigido para levantar 1 libra da água de 32° para $t^\circ = t - 32$. Isto, entretanto, embora suficientemente preciso para propósitos práticos, não é estritamente verdade.

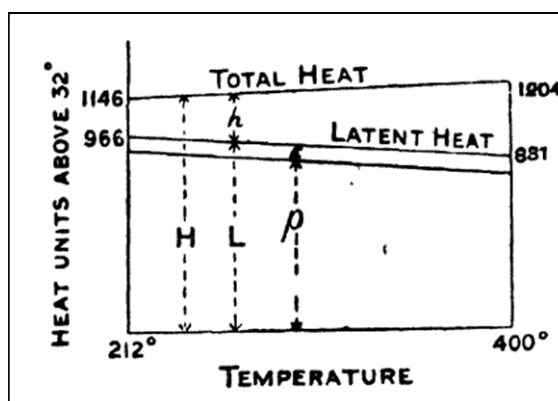
O calor específico do vapor, de acordo com Regnault, é 0,4805 a pressão constante e 0,346 o volume constante.

CALOR TOTAL DO VAPOR¹⁵⁵. O calor total de evaporação (H) é definido como sendo o número de unidades de calor necessárias para levantar uma libra de água a 32°F a uma dada temperatura, para converter tudo em vapor a essa temperatura. A equação pela qual o valor de H pode ser calculado para qualquer temperatura, t° , do vapor em unidades Fahrenheit é:

$$H = 1082 + 0,305t$$

Por meio dessa equação, podemos observar que o calor total aumenta lentamente à medida que a temperatura de evaporação aumenta, ou seja, por 0,305 unidade térmica por grau de aumento de temperatura (ver figura 41).

Figura 41 – Temperatura x Unidades de calor



Fonte: Ripper (1920).

¹⁵⁴ Ripper (1920, p.27, tradução nossa).

¹⁵⁵ Ripper (1920, p.28, tradução nossa).

CALOR PARA ELEVAR A TEMPERATURA DA ÁGUA¹⁵⁶ (h) durante a evaporação, considerado a partir de 32°F, é o número de unidades térmicas por libra para elevar a temperatura da água a partir de 32°F à temperatura de evaporação t . Na prática, é usual obter o valor de h , desse modo:

$$h = t - 32$$

CALOR LATENTE DO VAPOR¹⁵⁷. O calor latente de evaporação (L) é definido como o calor necessário para converter 1 libra de água a uma dada temperatura em vapor à temperatura ambiente, e sob pressão constante.

$$H = L + h \text{ ou } L = H - h$$

Ou ainda, L pode ser obtido aproximadamente pela seguinte fórmula:

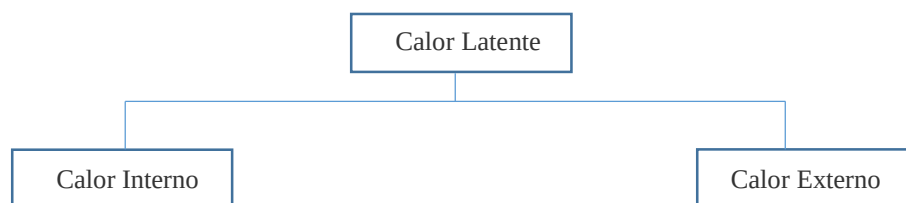
$$L = 1114 - 0,7t$$

A partir desta equação, pode ser observado que o calor latente diminui conforme a temperatura aumenta (ver figura 40). Durante a evaporação de 1 libra de água, para cada unidade de calor, $\frac{1}{L}$ parte de 1 libra de água é convertida em vapor até a última gota de água evaporada. O calor L fornecido durante este processo de evaporação foi gasto de duas maneiras (figura 42):

1. Ultrapassando as resistências moleculares internas durante a mudança de estado da água à temperatura de ebulição para o vapor. O calor assim usado é denominado como calor latente interno, e é geralmente representado pela letra grega ρ .

2. Ao fazer o trabalho externo pela sobreposição da resistência ou pressão externa, P , por pé quadrado através de um espaço equivalente ao volume ocupado por 1 libra de vapor na pressão dada, menos o volume original de 1 libra de água. Esse calor é chamado de calor latente externo e está denotado como E .

Figura 42 – Calor Latente



¹⁵⁶ Idem.

¹⁵⁷ Ripper (1920, p.28-29, tradução nossa).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, durante a formação de vapor ocorre que:

$$H = h + L$$

$$H = h + \rho + E$$

Além disso¹⁵⁸, $E = \frac{PV}{J} = \frac{PV}{778}$ unidades de calor.

PV é o trabalho feito em libra por pé, omitindo o volume ocupado pela água da qual o vapor foi gerado. Se s = volume da água em pés cúbicos antes do início da evaporação, e V = volume do vapor quando a última gota de água tiver evaporado, e P = externa pressão em libras por pé quadrado, então a mudança¹⁵⁹ de volume = $V - s = u$, e o trabalho externo realizado = $E = P(V - s) = P(V - 0,016) = Pu$.

O valor de V é muito grande em comparação com s , quanto menor a pressão. Assim, na pressão atmosférica, $V = 1644$ vezes maior que s , enquanto que numa pressão de 200 libras, $V = 141$ vezes maior que s .

O calor latente interno do vapor (ρ) pode ser escrito em unidades de trabalho, portanto:

$$\rho = J(L) - P(V - s)$$

Temos ainda que o "calor latente interno" (ρ) deve distinguir-se da "energia interna ou intrínseca" ($\rho + h$) do vapor.

3.5.2 EXEMPLOS DAS MATEMÁTICAS MISTAS E DAS CIÊNCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS APLICADAS ÀS MÁQUINAS DE VAPOR

Cada uma dessas propriedades relatadas anteriormente, são tópicos explorados pelas ciências mecânicas e pneumáticas, conseqüentemente, abrangem a “matemática mista” e as ciências físico-matemáticas, assim classificadas por D'Alembert em 1751, e estão presentes em cada componente das máquinas a vapor, sendo indispensáveis para o funcionamento satisfatório de todo o sistema maquinário, bem como para dar origem ao movimento de cada um desses componentes.

¹⁵⁸ $J = 778$ libra por pé. J é a abreviação de Joule.

¹⁵⁹ u é a força de trabalho líquido, resultado da pressão exercida do efeito de reduzir o volume de uma substância.

Podemos, por exemplo, destacar que todas as operações das máquinas a vapor pertencem à classe do movimento restrito, pois a operação dessas máquinas é produzida de modo artificial, sendo assim, não ocorrem naturalmente. Como vimos na definição, o movimento livre é encontrado apenas em corpos que caem no vácuo, e nos movimentos dos corpos celestes.

Além disso, os movimentos das máquinas a vapor são fortemente influenciados pelo tipo de resistência a que são aplicadas, em comparação com o tipo de forças motrizes pelas quais são impelidas, porque diferentes tipos de forças de resistência e de forças motrizes são afetadas diferentemente pelo movimento. Sem contar que a inércia das partes móveis, e dos corpos que são postos em movimento por essas forças, têm uma influência sobre as operações das máquinas, sempre que qualquer mudança ocorrer na rapidez de tais movimentos, em todos os casos que seus movimentos não forem uniformes.

Farey (1827) comenta que a resistência do ar é um impedimento considerável à continuação de movimentos rápidos nas máquinas, e o movimento de tais corpos, imersos em água ou outros líquidos, é retardado pela resistência que as partículas do líquido se opõem à sua separação. Algumas dessas resistências ocorrerão inevitavelmente por conta dos processos de operações de todas as máquinas, e assim, serão deduzidas dos efeitos úteis com os quais entram em contato.

Segundo Farey (1827), para determinarmos a velocidade dos movimentos realizados pelos mecanismos das máquinas de vapor, é preciso considerarmos que o resultado é consequência do que foi definido como preponderância ou excesso das forças motrizes sobre as forças de resistência. Se supormos que a força preponderante seja medida quando a máquina estiver em repouso, o movimento que será gerado por sua ação, não pode ser predeterminado sem considerar a alteração que ocorrerá na intensidade da força motriz, e das forças de resistência, quando elas agem com movimento.

Quase todas as operações úteis das máquinas a vapor são executadas com movimento uniforme, e como vimos na definição de preponderância, é comentado que, toda a força preponderante deve ser gasta na superação de certas resistências, mas como o movimento não pode ser iniciado a partir do repouso, exceto pela preponderância da força motriz, o início do movimento de aceleração de uma máquina, e a continuação uniforme desse movimento quando atingido, devem observar leis diferentes. A preponderância deve ser uma força ativa no início da operação, mas deve tornar-se gradualmente passiva, ou tornar-se neutralizada no curso da aceleração. Caso contrário, não poderá ser alcançado uma aceleração de movimento uniforme na máquina.

Farey (1827) aponta que em alguns casos, a resistência, ou parte dela, aumenta com a velocidade, de modo que em alguma velocidade a resistência aumentada se tornará igual à força motriz, não deixando preponderância, e então o equilíbrio dinâmico sendo estabelecido, o movimento continuará uniforme. Em outros casos, a força motriz diminui com a velocidade, de modo a tornar-se igual à resistência, e não deixa nada dessa preponderância que deve ter existido em um primeiro momento que originou o início do movimento.

Na prática, ambas as causas frequentemente coincidem, e o movimento uniforme nas máquinas é o resultado da diminuição da força motriz, por um lado, e do aumento da resistência, por outro, pelo qual elas chegam a uma igualdade em alguma velocidade. Desse modo, Farey (1827) descreve que não pode haver uma proporção determinada entre a força motriz e as forças de resistência, ou qualquer quantidade estabelecida de preponderância que faça com que a máquina se mova com qualquer velocidade particular, mas sim que há uma dependência da combinação de várias circunstâncias para regular essa velocidade.

Seguiremos com mais alguns exemplos que enfatizam efeitos da aplicação de propriedades, provenientes do que foi definido como “matemática mista” e ciências físico-matemática por D'Alembert, nas máquinas a vapor.

3.5.2.1 EFEITO MÁXIMO DE UMA MÁQUINA A VAPOR

Em relação a aproveitar o efeito máximo das máquinas, as ciências matemáticas estabelecem condições sob as quais as máquinas a vapor podem produzir maior efeito. Devem ser consideradas tanto em relação à quantidade de potência mecânica que elas produzem derivadas de um dado esforço da força motriz pela qual elas estão submetidas; ou ainda em relação à quantidade de potência mecânica que qualquer máquina é capaz de exercer, sem referência ao dispêndio de força impulsora.

Essas considerações são importantes e raramente são separáveis, mas, para atingir o máximo num sentido, Farey (1827) pondera que são exigidas algumas condições diferentes àquelas que são produzidas um no outro, pois não se segue que uma máquina que esteja agindo de modo a exercer o seu poder supremo, também arcará com esse poder ao menor custo. Então, para obter o máximo de efeito de um gasto determinado de força motriz, uma máquina deve ser adaptada para receber toda a potência daquela força motriz, sem permitir que qualquer de suas atividades dissipe, ou seja, gasta em desperdício, de modo a falhar em exercer seu efeito completo, para impulsionar a máquina.

Para Farey (1827), aproveitar o máximo efeito de uma máquina a vapor depende principalmente da maneira como a máquina foi construída. Suas partes atuantes devem ser proporcionais às forças que devem atuar sobre elas, de acordo com as velocidades, intensidades e direções dessas ações. Estas circunstâncias devem ser consideradas em referência a alguma velocidade particular com a qual a força motriz é necessária para impulsionar a máquina, porque cada tipo de força motriz tem alguma velocidade particular, que lhe permitirá agir com a maior vantagem sobre o maquinário, de modo a comunicar a maior potência mecânica a ele, dado que a atividade de todas aquelas forças motrizes que são aplicadas para dar movimento às máquinas, diminui com a velocidade de sua ação, e por outro lado, a intensidade da maioria das forças de resistência aumenta com a velocidade do movimento com o qual elas são superadas.

De acordo com Farey (1827), a intensidade ou a atividade de qualquer força motriz pode ser medida considerando-a como uma força ou pressão quiescente, e aplicando um peso que neutralize e produza um equilíbrio estático com a força, de modo a impedir o movimento do corpo em que opera. A força quiescente assim averiguada, sendo multiplicada pelo espaço através do qual essa força atua no corpo ao qual ela dá movimento, o produto representará o poder mecânico possuído pela força motriz. Para descobrir quanto desse poder é realizado ao impulsionar o corpo, devemos investigar se a intensidade da força motriz permanece a mesma, quando ela age com movimento, como quando estava quieta; pois forças motrizes diferentes são afetadas diferentemente pelo movimento, e exceto pela gravidade, todas elas perdem parte de sua atividade à medida que a velocidade de sua ação aumenta.

Assim, para atingir o efeito máximo em qualquer máquina, a força de resistência deve ser proporcional à força motriz, ocasionando um equilíbrio dinâmico, quando a máquina for impulsionada com uma velocidade na qual o produto será obtido pela multiplicação da força de resistência superada pela máquina, pelo espaço através do qual ela atua.

Farey (1827) acrescenta que a força elástica do vapor é limitada na velocidade do movimento com o qual ele pode agir, mas sua velocidade máxima seria tão grande que os pistões das máquinas a vapor admitiriam um movimento muito mais rápido do que aquele com o qual costumam agir antes que o efeito máximo fosse atingido. Na maioria das máquinas a vapor, o poder é regulado pela contração da abertura através da qual o vapor entra no cilindro, para agir sobre o pistão. A força motriz não pode agir livremente sobre o pistão, mas apenas com uma atividade limitada. O tamanho da abertura a ser determinada, propulsionará uma velocidade particular do pistão, em que a quantidade de vapor que irá passar através da abertura, no cilindro, produzirá um efeito máximo.

No caso do movimento das rodas d'água, esse máximo efeito é regulado restringindo o fluxo de água sobre a roda, através da abertura de uma eclusa, mas a extensão de sua potência deve ser limitada pela quantidade de água que a corrente do rio oferecerá e a altura pela qual ela cai.

3.5.2.2 DESEMPENHO DAS MÁQUINAS A VAPOR

Nos primeiros dias de teste das máquinas a vapor, Ripper (1920) relata que era comum expressar o desempenho do motor em termos do número de libras de carvão consumido por cavalo de potência¹⁶⁰ a cada hora. Se o objetivo fosse expressar o desempenho de toda a máquina – motor e o cilindro inclusos – o resultado esperado era que o valor do calor de 1 libra de carvão fosse uma quantidade constante a cada medição.

Entretanto, incluir o cilindro nos testes de desempenho das máquinas, a unidade de medida cavalos de potência podia não expressar com precisão a performance do motor, em virtude da boa ou má qualidade dos cilindros a quais foram interligados. Nesses casos, o mais usual era expressar o desempenho do motor em libras de vapor por hora por cavalos de potência. Em outras palavras, seria não considerar somente o consumo de carvão, mas também a quantidade de vapor produzida pela máquina.

Ainda assim, Ripper (1920) alerta que essa unidade de medida não é satisfatória, porque o número de unidades de calor empregado para gerar uma libra de vapor não é uniforme, pois, depende da pressão do vapor, da temperatura da água que alimenta o cilindro da máquina e o grau de superaquecimento empregado. Porém, esse erro é praticamente desprezível quando o vapor saturado está dentro dos limites normais de pressão. A exceção se dá nos casos em que o vapor está superaquecido.

Assim, o calor total de 32°F por libra de vapor saturado em 50 libras de pressão absoluta é igual a 1167 unidades de calor, e em 150 libras de pressão gera 1190 unidades de calor; enquanto que o calor total de vapor a 150 libras de pressão superaquecida de 300°F é igual a 1334 unidades de calor. E como é o calor que faz o trabalho, e não o vapor, o peso do vapor usado como medida de eficiência relativa pode induzir ao erro. Em cada um dos casos acima, 1 libra de vapor é utilizado, mas no último caso - o vapor superaquecido - contém 14,3% mais calor do que 1 libra de vapor saturado à 50 libras de pressão.

Assim, para melhorar a eficiência na medição do desempenho das máquinas a vapor, a aplicação das ciências matemáticas foi essencial para fornecer os resultados que Ripper

¹⁶⁰ Em energia, 1 hp (horse-power) ou 1 cavalo de potência corresponde a 745,7 watts.

(1920) apresenta em um documento com 8 critérios que a Instituição dos Engenheiros Civis¹⁶¹ (ICE) da Inglaterra elaborou para padronizar a metodologia de quais elementos deveriam ser ou não considerados durante a medição do desempenho de uma máquina. Destaquemos os itens 1, 3, 5, 6 e 7 desse documento:

“1. Que a eficiência térmica, aplicada a qualquer máquina térmica, é a relação entre o calor utilizado no trabalho do pistão da máquina e o calor fornecido a ele.

3. Que no caso de um motor a vapor, o calor fornecido é calculado como sendo o calor total do vapor que entra no motor, subtraído do peso da água que está na mesma temperatura da exaustão do motor; ambas devem ser consideradas a partir de 32°F.

5. Que seja adotado um motor a vapor padrão para comparação, e que esse motor a vapor esteja trabalhando no ciclo de Rankine com os mesmos limites de temperatura e pressão que o motor real a ser comparado.

6. Que a relação entre a eficiência térmica do motor real e a eficiência térmica correspondente do motor a vapor padrão utilizado para comparação seja denominada como índice de eficiência.

7. Que é desejável estabelecer a economia térmica de uma máquina a vapor em termos das unidades térmicas requeridas por minuto por I.H.P.¹⁶², e que, quando possível, as unidades térmicas requeridas por minuto por B.H.P.¹⁶³ também sejam declaradas (ICE apud RIPPER, p.300-301, tradução nossa)”.

Nesse documento elaborado pelo ICE, vemos que no quinto item há uma recomendação que o desempenho dessas máquinas seguem o ciclo de Rankine, sendo classificado como o ideal e eficiente para realizar os ciclos de potência a vapor das máquinas. Esses ciclos de potência nas máquinas a vapor consistem no processo que o fluido trabalhado

¹⁶¹ *Institution of Civil Engineers (ICE).*

¹⁶² *Indicated Horse-Power (I.H.P.)* é o trabalho realizado pelo vapor no cilindro, obtido pelo auxílio do relógio comparador (indicator), e expresso em unidades de cavalo de potência. Essa força inclui, o necessário para acionar o motor contra a resistência externa e para superar a resistência ao atrito do próprio motor:

$$I.H.P = \frac{\text{unidades de trabalho por minuto}}{33000} = \frac{PLAN}{33000}$$

Sendo, P: a pressão efetiva média em libras por polegada quadrada no pistão; L: comprimento do curso em pés, ou distância percorrida pelo pistão de uma extremidade a outra do cilindro; A: área efetiva do pistão em polegadas quadradas; N: número de golpes por minuto. 33000 é a quantidade em libras de água que um cavalo levanta a altura de um pé em um minuto.

¹⁶³ *Brake Horse-power (B.H.P.)* representa a potência que o motor é capaz de transmitir para fins de trabalho útil, isto é, a potência total exercida pelo vapor no cilindro menos a potência absorvida na condução do próprio motor. Esta potência é medida, exceto quando os motores são muito grandes, por meio de um dinamômetro de freio.

é alternadamente vaporizado e condensado dentro dos cilindros ou caldeiras das máquinas, substituindo o método que era utilizado anteriormente, denominado como Ciclo de Carnot¹⁶⁴.

O B.T.H. que foi estabelecido como obrigatório no desempenho das máquinas a vapor por minuto por I.H.P. para o motor padrão de comparação é dada dividindo 42,42 pelo índice de eficiência do ciclo de Rankine. Essa eficiência para vapor saturado é apresentada pela ICE, sendo obtida pela expressão **(1)**:

$$\frac{(T_{\alpha} - T_e) \left(1 + \frac{L_{\alpha}}{T_{\alpha}}\right) - T_e \text{hyp. log } \frac{T_{\alpha}}{T_e}}{L_{\alpha} + T_{\alpha} - T_e}$$

Dados que T_{α} e T_e correspondem a temperatura absoluta de vapor saturado na válvula de parada e escape, respectivamente. Nos casos de vapor superaquecido, a eficiência torna-se possível obter pela expressão **(2)**:

$$\frac{(T_{\alpha} - T_e) \left(1 + \frac{L_{\alpha}}{T_{\alpha}}\right) + 0,48(T_{\delta} - T_{\alpha}) - T_e \left(\text{hyp. log } \frac{T_{\alpha}}{T_e} + 0,48 \text{hyp. log } \frac{T_{\delta}}{T_{\alpha}}\right)}{L_{\alpha} + T_{\alpha} - T_e + 0,48(T_{\delta} - T_{\alpha})}$$

Sendo T_{δ} o valor da temperatura absoluta do vapor superaquecido na válvula de parada.

Considerando que a expressão **(1)** seja = a , e a expressão **(2)** seja = b , então podemos obter que $42,42 \cdot \frac{1}{a}$ é a quantidade de B.T.U.¹⁶⁵ por I.H.P. por minuto para o motor padrão de comparação com o vapor saturado, enquanto que $42,42 \cdot \frac{1}{b}$ é quantidade de B.T.U. por I.H.P. para o vapor superaquecido.

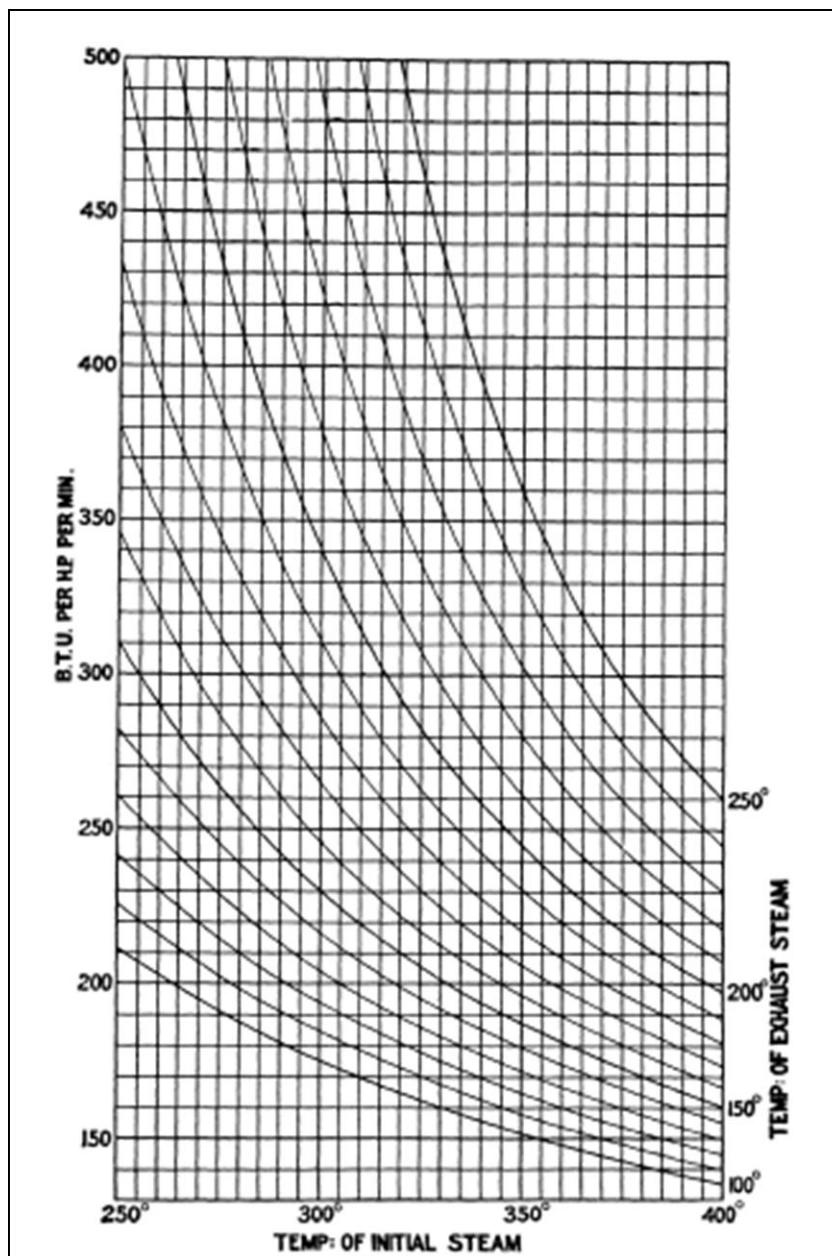
Para facilitar o uso do padrão estabelecido pelo ICE, e evitar cálculos, Sankey¹⁶⁶ formulou um diagrama e podemos ver na figura 43, um gráfico gerado pela aplicação desse diagrama, utilizado para mostrar o número de B.T.U. por I.H.P. por minuto, podendo ser lido diretamente do motor trabalhando entre limites conhecidos das temperaturas T_{α} e T_e .

¹⁶⁴ Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832), físico e matemático francês.

¹⁶⁵ British Thermal Units (B.T.U.). A quantidade de 1 B.T.U. é definida como a quantidade de energia necessária para se elevar a temperatura de uma massa de uma libra de água de 59,5° F a 60,5° F, sob pressão constante de 1 atmosfera.

¹⁶⁶ Matthew Henry Phineas Riall Sankey (1853-1925), engenheiro irlandês.

Figura 43 – B.T.U. x I.H.P. por minuto



Fonte: Ripper (1920).

Farey (1827) não estabelece que o tempo seja uma parte essencial para diversos resultados dos princípios mecânicos e pneumáticos que ocorrem nas máquinas a vapor, entretanto, ele pondera que se quiséssemos saber, por exemplo, qual quantidade de energia mecânica é excitada em um dado momento por um primeiro propulsor da máquina, é preciso considerarmos um tempo, portanto, o tempo em que se pode completar uma determinada tarefa particularmente essencial, caso contrário as máquinas continuariam indefinidamente sem termos uma noção do quanto foi produzido no período considerado.

3.5.2.3 PESO DO VAPOR UTILIZADO PELA MÁQUINA

As ciências matemáticas podem ser aplicadas quando um motor expelle o vapor nos condensadores, assim, o vapor condensado armazenado pode ser pesado. Nesse caso, Ripper (1920) comenta que o peso desse vapor condensado deve corresponder ao peso da água que serviu para alimentar¹⁶⁷ o cilindro da máquina durante o mesmo período. Nas máquinas em que o motor expelle o vapor em um condensador a jato, é mais difícil determinar o consumo de vapor na extremidade do condensador, e geralmente será obtido pela medição da água que foi inclusa no cilindro para ser evaporada.

Se considerarmos S = peso do vapor condensado, e W = peso da água injetada, então o peso total de água = $W + S$ por minuto **(1)**.

Se t_1 e t_2 correspondem a temperatura inicial e final da água injetada, respectivamente, obtida por meio de termômetros, então $W(t_2 - t_1)$ é igual ao calor exalado pela água injetada. Permita que t_2 seja igual a temperatura da água que alimenta a máquina.

O calor fornecido por vapor é igual a $S(H - h_2)$, em que H é o calor total da pressão, e $h_2 = (\text{temperatura de alimentação} - 32)$. Então, podemos obter a expressão **(2)**:

$$S(H - h_2) = (\text{trabalho realizado em unidades de calor por minuto}) + W(t_2 - t_1)$$

Se a temperatura t_3 da alimentação não for a mesma que a do vapor condensado, então obteremos:

$$S(H - h_3) = \text{trabalho realizado} + S(t_2 - t_3) + W(t_2 - t_1) \quad \textbf{(3)}$$

Temos agora duas equações (2 e 3), e (1) igual ao valor numérico em libras de $W + S$ por peso durante o teste. Combinando estas equações, o valor de S , ou o peso de vapor por minuto utilizado pela máquina, pode ser obtido por $\frac{S}{I.H.P.} = \text{peso de vapor por I.H.P. por minuto}$.

3.5.2.4 CONSUMO DE VAPOR E A LEI DA LINHA RETA

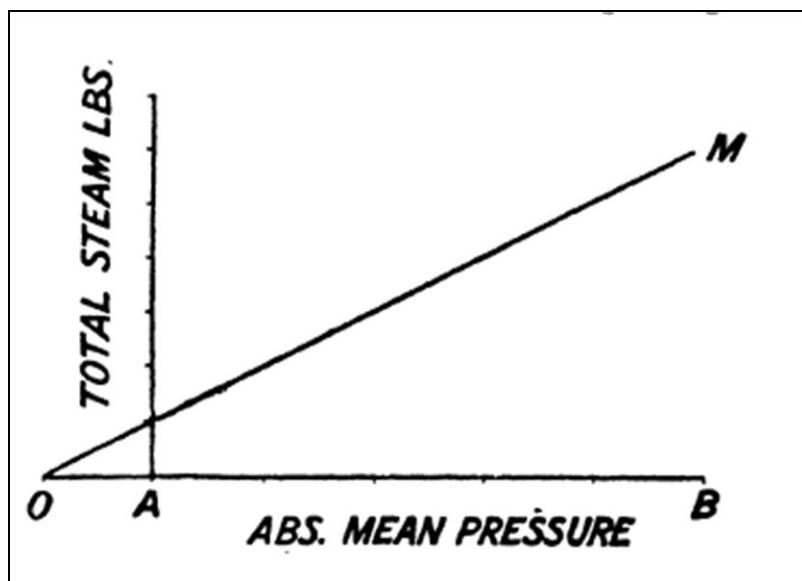
A aplicação das ciências matemáticas para medir o consumo de vapor durante o curso de uma máquina pôde ser expressa graficamente a partir dos trabalhos de Willans¹⁶⁸, que de acordo com Ripper (1920), ele foi o primeiro a plotar graficamente o consumo total de vapor,

¹⁶⁷ As expressões água que alimenta, água de alimentação vem do termo *feed-water*. Essa água é inserida no cilindro ou caldeira de uma máquina, e ao esquentar produzirá o vapor que abastece ou “alimenta” o funcionamento da máquina.

¹⁶⁸ Percy Williams Bridgman (1882-1961), físico americano.

em uma máquina a vapor, por hora de um motor de supressão ou expansão constante tomando como base as coordenadas do gráfico dadas em unidade cavalo de potência. O resultado foi uma linha reta oblíqua, também conhecida como lei da linha reta, que relaciona a pressão média de vapor com o consumo total de vapor pelo motor da máquina, conforme podemos observar nas figuras 44 e 46.

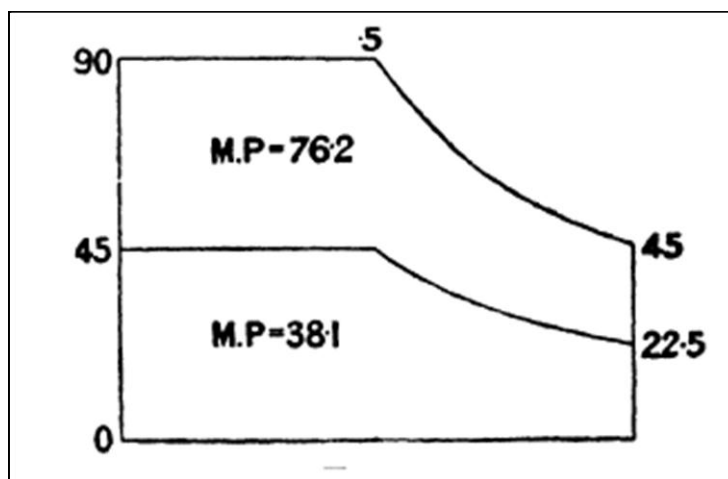
Figura 44 – Lei da linha reta



Fonte: Ripper (1920).

Utilizando a ideia de Willians de representação gráfica do consumo de vapor, podemos observar que na figura 56, duas expansões de vapor são tomadas, uma com pressão inicial a 90 libras e outra a 45 libras:

Figura 45 – Diagrama da Pressão média x Consumo total de vapor



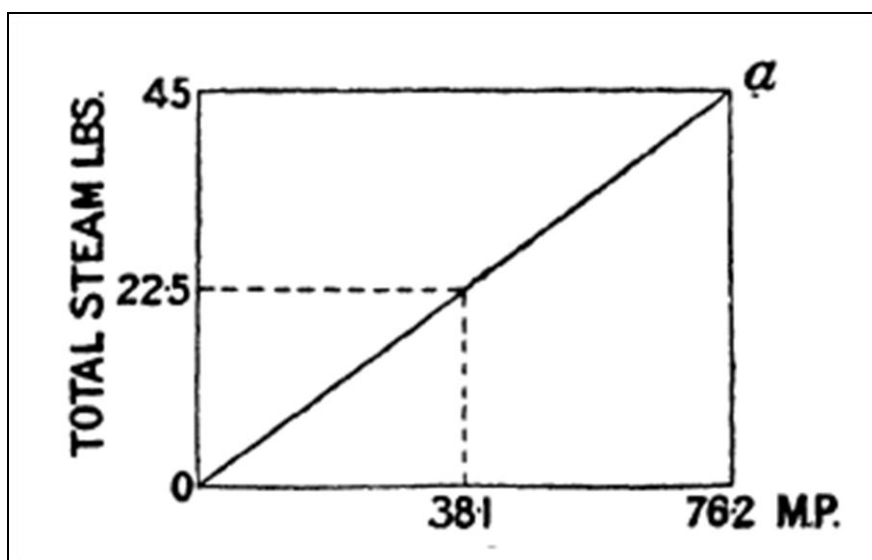
Fonte: Ripper (1920).

Considerando a expansão de vapor em uma pressão inicial de 90 libras, vemos na figura 45, que a pressão final no período de tempo considerado é de 45 libras, resultando uma pressão média de 76,2 libras. No caso da segunda expansão de vapor, ela iniciou em uma pressão inicial de 45 libras, com uma pressão final de 22,5 libras, e que nesse período obteve uma pressão média de 38,1 libras. Essa pressão média pode ser obtida por meio da fórmula:

$$p_m = p \frac{1 + \text{hyp. log } r}{r}$$

Por meio dos dados obtidos, é possível realizar uma nova representação gráfica considerando as pressões finais colocadas no eixo das ordenadas, enquanto as pressões médias são dispostas no eixo das abscissas. Na figura 46, podemos observar que as coordenadas dão a linha reta de consumo de vapor 0α , e que o consumo desse vapor é proporcional à pressão final nos motores.

Figura 46 – Reta de Consumo de Vapor



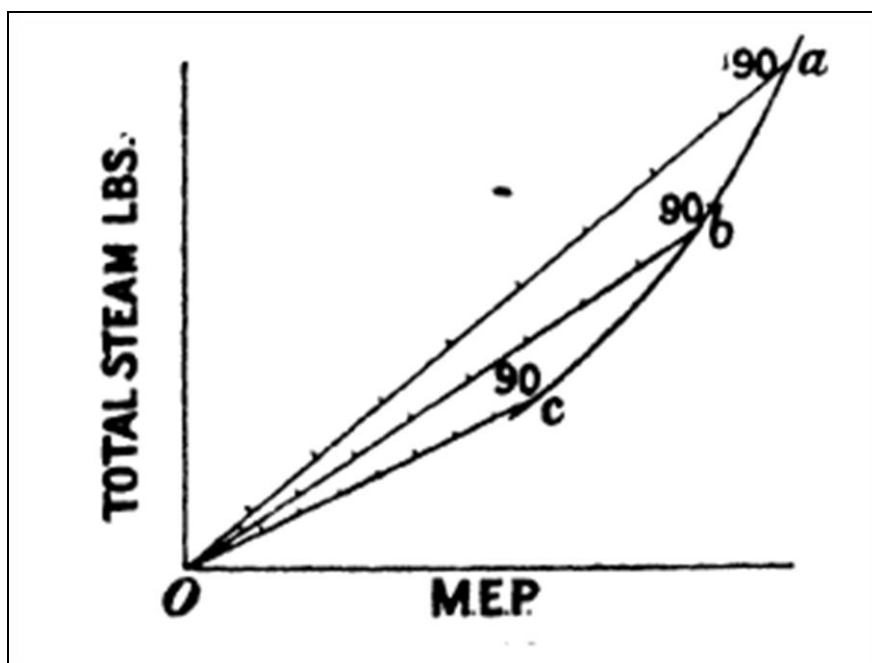
Fonte: Ripper (1920).

3.5.2.5 A CURVA DE CONSUMO DE EXPANSÃO VARIÁVEL DO VAPOR

Partindo da Lei da Linha Reta, se uma escala de pressões de vapor iniciais forem marcadas ao longo das linhas oblíquas em cada caso, uma curva livre pode ser desenhada juntando os pontos de pressão correspondentes às respectivas linhas oblíquas. Então, Ripper (1920) salienta que as curvas obtidas darão uma coordenada que mede o consumo total de vapor em relação a pressão inicial de vapor.

Desse modo, na figura 47 temos a reta $0a$ que indica a linha de consumo do vapor em um cilindro com corte¹⁶⁹ de 0,6, está marcada em vários pontos o início das medições em diversas pressões, tomadas como iniciais em cada medição. Igualmente, são marcadas as linhas de consumo de vapor $0b$ e $0c$ e os respectivos cortes do cilindro são 0,4 e 0,2. Se juntarmos os pontos a , b e c nos pontos em comum que ambos alcançam uma pressão de 90 libras, a curva de consumo de vapor abc é obtida.

Figura 47 – Curva abc de consumo do vapor

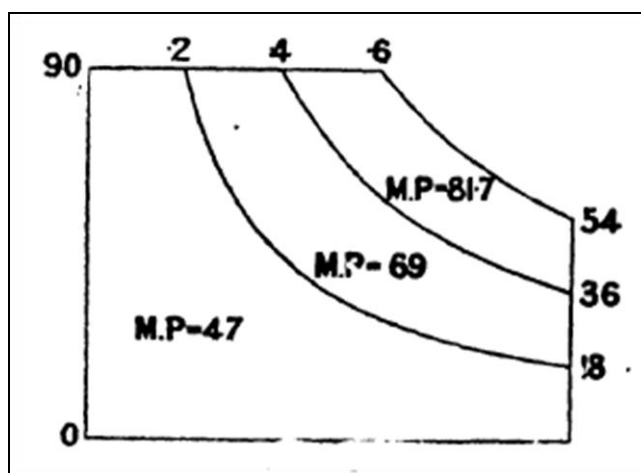


Fonte: Ripper (1920).

¹⁶⁹ Em um motor a vapor, o corte é o ponto no curso do pistão no qual a válvula de entrada está fechada. Segundo Allen (1949), o ponto em que a válvula de entrada fecha e impede a entrada de vapor no cilindro da caldeira desempenha um papel crucial no controle de uma máquina a vapor. Uma vez que a válvula tenha fechado, o vapor preso no cilindro expande-se adiabaticamente, ou seja, sem trocar calor com o meio ambiente e com a vizinhança ao entorno. A pressão do vapor diminui à medida que se expande. Um corte final fornece pressão total de vapor para mover o pistão durante todo o curso.

Um diagrama dessa situação pode ser elaborado, tal como é apresentado na figura 48, mostrando as curvas de expansão variáveis para pressão inicial constante com os cortes de 0,2; 0,4 e 0,6 do curso do pistão. É possível determinar a pressão média para cada caso, dessa forma, temos que no corte de 0,6 a pressão média é de 81,7 libras com uma pressão final de 54 libras. Os cortes de 0,4 e 0,2 têm pressões médias, respectivamente, iguais a 69 libras e 47 libras, bem como pressões finais de 36 libras e 18 libras.

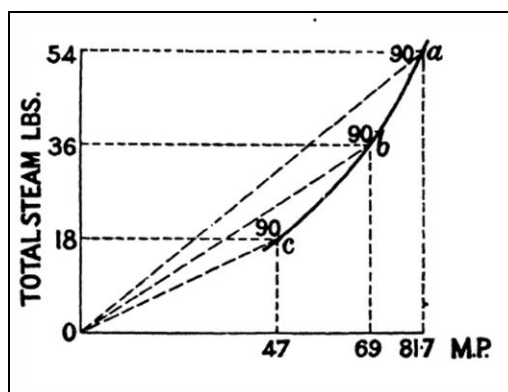
Figura 48 – Diagrama da curva de consumo do vapor



Fonte: Ripper (1920).

Igualmente realizado no caso da Lei da linha reta, as pressões finais podem ser tomadas como ordenadas, e as pressões médias como abscissas, tal como apresentado na figura 49. As pressões finais são proporcionais ao peso do vapor exaurido e a escala vertical representar o consumo de vapor. Além disso, as intersecções das pressões médias e pressões finais da curva *abc* obtida anteriormente, também estão representadas.

Figura 49 – Curva de consumo total do Vapor



Fonte: Ripper (1920).

É possível visualizar que a curva de consumo, abaixo da linha reta 0α , une a origem com o ponto a da potência máxima, e se uma ordenada for medida a partir da linha de base a uma determinada pressão média, a altura vertical medida pela curva é igual à medida para a linha reta 0α . E a diferença entre as duas alturas, é a diferença relativa entre o consumo total de vapor sob os dois sistemas. As retas representam o consumo variável de vapor em pontos fixos do corte, quando a potência é regulada por supressão, seja manualmente ou por um governador centrífugo¹⁷⁰. A curva representa o consumo de vapor à pressão inicial constante quando a potência é regulada pela variação do ponto de corte à mão ou por um governador.

3.5.2.6 DESEMPENHO DE MOTORES UTILIZANDO VAPOR ALTAMENTE SUPERAQUECIDO

Em alguns tipos de máquinas, foi proposto o uso de vapor de alta pressão em tubulações de pequeno diâmetro para atuar como um meio de superaquecimento do vapor colocado em contato com a superfície externa dos tubos, mas a pressão deve ser enormemente alta antes que uma temperatura possa ser alcançada.

Para regulamentar o desempenho dessas máquinas que utilizam vapor altamente superaquecidos, também foi necessário a aplicação de cálculos que foram obtidos por meio da realização de experimentos em máquinas testes, até que fosse possível estabelecer os resultados padronizados para nortear tanto a quem construía essas máquinas, como também aqueles que iriam comprá-las.

No caso dos vapores superaquecidos, o consumo de vapor foi garantido pela *Schmidt Stationary Engine Co.* de Londres. Os dados obtidos na tabela 5, foram a partir da temperatura do vapor sendo empregado em todos os casos de 350°C ou 662°F, temperaturas extremamente altas. Dessa forma, as “matemáticas mistas” por meio dos testes experimentais foram essenciais para regulamentar os dados obtidos na tabela.

¹⁷⁰ O governador centrífugo, “criado por James Watt (em 1788) (...) permite regular a velocidade da máquina, reduzindo ou aumentando a pressão do vapor. O governador está ligado à máquina através de uma correia, este controla uma válvula que fecha ou abre, deixando entrar menos ou mais vapor, respetivamente, no motor. Quando a velocidade do motor aumenta, as 2 esferas ligadas ao governador vão rodopiar e afastar-se, o que vai provocar a obstrução parcial da válvula (RIBEIRO E., VELOSO, CABRAL, AZEVEDO, RIBEIRO R., 2015, p.19)

Tabela 5 – Recomendações para máquinas de vapor superaquecidos

Tipo de Motor	Cavalo de Potência indicado	Libras de água alimentada por I.H.P. por hora	B.T.U. por I.H.P. por minuto na temperatura de 100°F
Cilindro único de dupla ação sem condensador	50 a 300	16,8 a 15,5	403 a 373
Cilindro único de dupla ação com condensador	50 a 300	13,5 a 12,4	325 a 298
Cilindro composto de dupla ação com condensador	50 a 800	11,5 a 9,8	277 a 236

Fonte: Ripper (1920).

Os seguintes resultados são de experiências de P. W. Willans mostram que conforme a velocidade da máquina diminui, o vapor por I.P.H. por hora tem um leve aumento:

Revolução por minuto	401	301	198	116
Vapor por I.H.P. por hora	17,3	17,6	18,9	20

Tabela 6 – Revolução x Vapor por I.H.P. por hora

Fonte: Ripper (1920).

Assim, o efeito da velocidade de rotação é reduzir o peso do vapor usado por potência de cavalo indicada por hora, à medida que a velocidade de rotação aumenta. Isto acontece, provavelmente devido à perda reduzida pela condensação do cilindro em altas velocidades.

3.5.2.7 ATRITO DOS MOTORES

Por meio da realização de experimentos nos motores, foi possível obter dados de que se um diagrama indicador for feito quando não houver carga no motor, será obtido um diagrama atenuado, incluindo uma área de trabalho representando o trabalho necessário para acionar o motor contra o próprio atrito.

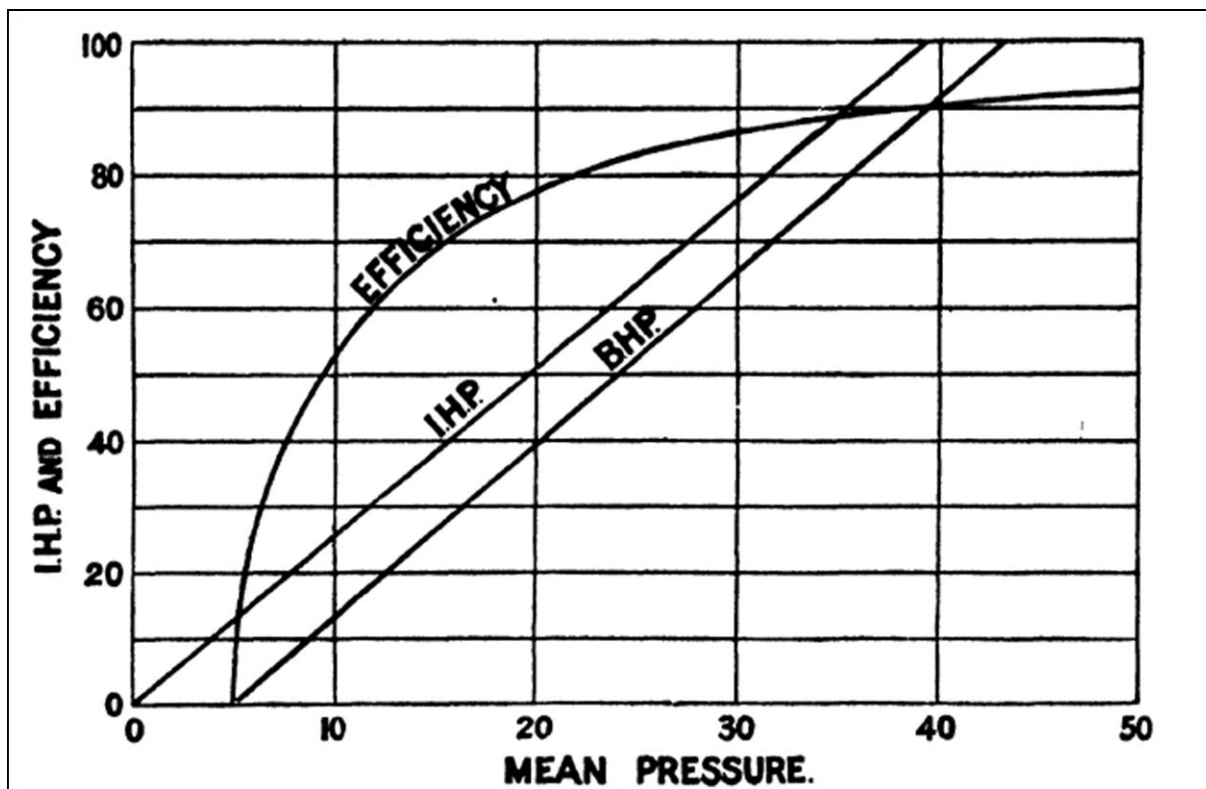
Ripper (1920), comenta que Thurston¹⁷¹ foi o primeiro a demonstrar que, sob condições usuais, e em todas as velocidades e pressões de vapor comuns, o atrito do motor permanece praticamente constante, e que a placa de atrito do motor quando descarregada representa também o atrito do motor quando totalmente carregado.

¹⁷¹ Robert Thurston (1839–1903), engenheiro americano.

Estas conclusões podem ser representadas graficamente, tal como o diagrama apresentado na figura 50. Os resultados desse diagrama é composto pelo que Willans encontrou durante a realização de seus testes, em que foi possível ilustrar que há praticamente uma diferença constante ou quase constante em todas as cargas entre o I.H.P. e o B.H.P. de um motor.

A curva de eficiência mecânica pode ser encontrada em qualquer motor, ao se tomar o valor de $B.H.P. \div I.H.P.$ para várias pressões médias, e então configurar o valor das frações para uma escala vertical de porcentagem. Assim, juntando os pontos encontrados, a curva é obtida.

Figura 50 – Curva de eficiência mecânica



Fonte: Ripper (1920).

Por meio da figura 50, podemos observar pela curva de eficiência mecânica que quando o motor está sob ação de uma pressão média de 9 libras por polegada quadrada, a eficiência desse motor foi de apenas 50%, enquanto que ao ser exercido uma pressão média de 50 libras por polegada quadrada, o motor teve uma eficiência de 93%.

Temos então que para o motor obter uma grande eficiência mecânica, esse motor deve ser trabalhado até à sua carga máxima para obter a máxima eficiência. O atrito de um motor

aumenta, sem dúvida, até certo ponto com a carga, mas o aumento proporcional é tão pequeno que praticamente não afeta o resultado.

3.5.2.8 GARANTIA DE ECONOMIA

A importância de obter garantias de economia de vapor é fundamental considerando que o vapor consumido por um motor a cada ano, muitas vezes custa tanto quanto o custo inicial do próprio motor.

Então, Farey (1827) aponta que os resultados dos ensaios de motores e caldeiras, quando novos das mãos dos fabricantes, geralmente não serão repetidos na prática de trabalho comum, devido, infelizmente, às várias fontes de perda de eficiência que ocorrem a menos que atenção excepcional seja dada aos detalhes das máquinas.

As ciências matemáticas são fundamentais, e nesse caso a arte de conjecturar é aplicada juntamente às forças mecânicas e pneumáticas que agem sobre as máquinas, para estipular uma margem que representa a soma de um grande número de perdas pequenas, em maior ou menor grau evitáveis, bem como também a extensão da redução de qualidade da máquina é apreciada levando em conta a manutenção da maquinaria como uma medida da inteligência e habilidade da equipe operacional em manusear as máquinas.

Dessa forma, Ripper (1920), que por meio de todos esses fatores considerados, a taxa de segurança para medir a garantia de economia da máquina, permite uma margem de pelo menos 25 por cento, entre os testes dos fabricantes e o trabalho real desempenhado da planta.

CAPÍTULO 4

O DESUSO E UMA HERANÇA DAS MATEMÁTICAS MISTAS

A expressão “matemática mista”, bem como as ciências físico-matemáticas, atualmente, não são mais utilizadas para se referir aos diversos campos compreendidos pelas ciências matemáticas. Desse modo, o objetivo desse capítulo é buscar respostas ao que possa ter levado ao desaparecimento¹⁷² dessa expressão.

O significado de conceitos como o de “matemática mista” mudaram ao longo da história, e é relativo mesmo dentro de qualquer período, em razão das diversas matemáticas formuladas pelos matemáticos. Por exemplo, tópicos rotulados como pertinentes ao conceito de “matemática mista” por Bacon e D'Alembert, antes dessas classificações eram mencionados como parte das ciências que compunham as “matemáticas da natureza”.

Nos dois primeiros capítulos, relatamos que Bacon foi creditado pela introdução do termo “matemática mista” em 1605, e posteriormente, essa expressão foi reforçada pela nova classificação de D'Alembert em 1751 na *Encyclopédie*. Entretanto, no final do século XVIII e principalmente em meados do século XIX, o termo “matemática mista” começa a ser utilizado com menos frequência, sendo integralmente “substituído” pelo conceito denominado como “matemática aplicada”. E é justamente esta transição gradual do desaparecimento da “matemática mista” que denominamos como “desuso”.

A “matemática mista” e as ciências físico matemáticas foram importantes na contribuição de elementos que serviram de base para o desenvolvimento de teorias das “matemáticas puras”. Os trabalhos de mecânica de Newton e Lagrange, por exemplo, são citados por matemáticos como Boole e Jacobi, nos dando indícios de que serviram de inspiração para esses matemáticos.

A definição de herança geralmente consiste em uma partilha de bens dada a morte de alguém, desso modo, fazemos uma analogia e utilizamos esta noção para apresentar que elementos da “matemática mista” foram partilhadas por matemáticos, dado que essas

¹⁷² É importante destacarmos que quando falamos em desaparecimento da “matemática mista” nos referimos somente a denominação desse campo da matemática e não aos resultados produzidos por essas ciências. Há diversas descobertas da Astronomia geométrica, óptica, acústica, mecânica, pneumática e arte de conjecturar que são válidos e ainda utilizados no século XXI.

matemáticas embora tenham tido seu ostracismo, as teorias desenvolvidas nesse campo continuaram presentes e influenciaram o desenvolvimento de novos conceitos até mesmo de matemáticos do campo da “pura”. Desse modo, posteriormente, abordaremos brevemente esse tema ao apresentarmos três situações de matemáticos que se inspiraram em tópicos da “matemática mista” e ciências matemáticas.

4.1 O DESUSO DA MATEMÁTICA MISTA

Kawajiri (1979) considera que as matemáticas após o Renascimento, espalharam sua frente especialmente nas finalidades práticas, e Hacking (2014), afirma que o Iluminismo deixou como grande herança: a *aplicação*. Porém, os historiadores da matemática e historiadores das ciências, dentre as bibliografias que utilizamos, não chegaram em um consenso do que realmente levou ao desuso da expressão “matemática mista”. Inclusive, alguns deles acenam que nessa transição, não há um fato ou momento específico apontado como marco zero da “matemática aplicada” e que denote o fim da “matemática mista”.

Lützen (2013) cita que no início do século XIX, a tradicional escola politécnica francesa valorizava altamente a matemática aplicada e a maioria das pesquisas matemáticas estavam intimamente ligadas às aplicações, e mesmo na virada do século XIX para o século XX, as atividades matemáticas continuaram em grande medida inspiradas direta ou indiretamente nas aplicações, impulsionados pela crítica kantiana em relação ao conhecimento puro e por ideias neohumanistas de que o conhecimento humano é uma experiência viva do mundo, então, o século XIX viu uma mudança na relação entre a “matemática pura” e a aplicação da matemática, em que a notação de “matemática mista” nesse processo, não fazia mais sentido.

Os termos “puro” e “mista” mudaram gradativamente ao final do século XVIII e no decorrer do século XIX, de tal modo que “a matemática de 1800 estava profundamente envolvida com técnicas e com a ciência natural, e certamente provou sua utilidade, ao passo que os desenvolvimentos desde então, devem ser esperados (...) para ampliar o espectro de aplicações e para facilitá-las (FERREIRÓS, 2013, p.729, tradução nossa)”.

Anjos (2018) afirma que: “O campo da matemática aplicada pode ser compreendido como originário da área da ciência anteriormente denominada por matemática mista, especialmente no que tange às preocupações práticas e agregadoras de diferentes vertentes do conhecimento científico (ANJOS, 2018, p.15)”. Assim sendo, as entidades matemáticas das

“puras” e das “mistas” passaram a ser tratadas como um corpo constituído de aplicação dessas teorias.

Brown (1991), considera que a partir do ano de 1875, as teorias matemáticas não eram mais "mistas" com as experiências. Contudo, essas teorias tinham o significado de que estavam sendo matematicamente "aplicadas" às experiências. É importante notar que esses dois conceitos coexistiram até o final do século XIX, isto é, até o momento em que o sentido de uma “matemática aplicada” foi amplamente difundido entre a comunidade matemática, de tal maneira que se sobrepôs ao conceito das "matemáticas mistas".

Temos então que o emprego do termo “matemática aplicada” substituiu a utilização do termo “matemática mista”, dado que “a ‘matemática aplicada’ foi cada vez mais considerada como parte de uma ‘disciplina matemática’, enquanto as ‘matemáticas mistas’ tinha sido algo entre a matemática e outras ciências (SIEGMUND-SCHULTZE, 2013, p.663, tradução nossa)”.

Diante dessas questões, podemos observar que não foi fácil chegar num consenso de como definir o que eram as “matemáticas aplicadas”:

Enquanto a noção de matemática mista ainda estava em uso no início do século, a noção de matemática aplicada logo assumiu. No entanto, não é uma tarefa fácil obter uma ideia precisa do significado do século XIX dessa noção. Na maioria dos trabalhos de pesquisa feitos por matemáticos, é tomado como uma noção autoexplicativa, e em enciclopédias e trabalhos similares sobre matemática não há concordância compartilhada sobre o significado da palavra e o modo como a matemática aplicada difere da matemática pura (LÜTZEN, 2013, p.688, tradução nossa).

Ferreirós (2013) corrobora com Lützen (2013) de que definir a “matemática aplicada” no século XIX é uma tarefa complexa, e acrescenta que David Hilbert (1862-1943) considerou que os números, conjuntos, funções e as estruturas são “objetos puros” da matemática, logo, eles eram independentes do mundo real. Entretanto, o significado de “abstrato” era outra questão que estava sendo discutida na época.

Todavia, a noção que se tinha das matemáticas no século XIX, era que existia as partes “abstratas” da matemática, atribuídas como campo das “matemáticas puras”, e também haviam tipos peculiares de grandezas, tais como o tempo, o movimento, que eram caracterizadas como pertencentes às “matemáticas mistas”. Então, em meio a esse cenário, “a matemática aplicada surge quando essas estruturas são empregadas em relação a outras disciplinas, seja física, engenharia, biologia ou economia (FERREIRÓS, 2013, p.728, tradução nossa).

Tobies (2013) relata que por volta de 1900, a matemática se tornou parte das recém-formadas ciências técnicas – engenharia mecânica, engenharia elétrica, etc – e desse modo, os matemáticos se propuseram a começar a discutir, em termos concretos, o significado das “matemáticas aplicadas”.

Assim, como parece não haver um consenso dessa transição, iremos abordar brevemente nesse capítulo, alguns dos fatores que foram apontados como aqueles que contribuíram para o ostracismo do conceito das “matemáticas mistas”: a crítica em relação ao conhecimento puro, a crítica à mecânica clássica e o surgimento da matemática aplicada. Vale a pena destacar, que um fato unânime entre os historiadores estudados, é que a expressão “matemática mista” deixou de ser utilizada a partir do momento que a ideia de “matemática aplicada” se estabeleceu no século XIX.

4.1.1 A CRÍTICA DE KANT

Os historiadores Hacking (2014), Siegmund-Schultze (2013) e Brown (1991) consideram que as ideias de Kant (1724-1804), em sua obra *Kritik der reinen Vernunft* publicada originalmente no ano de 1781, ao fazer uma crítica ao racionalismo, desempenhou um papel fundamental na mudança do cenário que era enxergado a “matemática pura”. Consequentemente, teve implicações nas “matemáticas mistas”, dado que mais e mais teorias das “matemáticas puras” foram desenvolvidas para serem “aplicadas” a cada vez mais dados obtidos fisicamente.

Na perspectiva kantiana, todo nosso conhecimento começa pela experiência. Kant questiona: se não for pela experiência, que outra coisa poderia colocar em ação a capacidade humana de conhecer os objetos e seus sentidos? É somente pelo exercício da experiência, que o ser humano é capaz de originar por si mesmo as representações, e colocar em prática a faculdade intelectual que possuímos nos levando a comparar, ligar ou separar os objetos, transformando a matéria bruta das impressões em conhecimento. Assim, “na ordem do tempo, nenhum conhecimento precede em nós a experiência e é com esta que todo o conhecimento tem o seu início (KANT, 2001, p.62)”. Ele define a experiência da seguinte forma:

A experiência é um conhecimento empírico, isto é, um conhecimento que determina um objeto mediante percepções. É, pois, uma síntese das percepções, que não está contida na percepção, antes contém, numa consciência, a unidade sintética do seu diverso, unidade que constitui o essencial de um conhecimento dos *objetos* dos sentidos, isto é, da experiência (não simplesmente da intuição ou da sensação dos sentidos) (...) Como, porém, a experiência é um conhecimento dos objetos mediante

percepções e, consequentemente, não deverá ser nela representada a relação na existência do diverso, tal como se justapõe no tempo, mas tal como é objetivamente no tempo; e como o próprio tempo não pode ser percebido, assim também a determinação da existência dos objetos no tempo só pode surgir da sua ligação no tempo em geral, isto é, mediante conceitos que os liguem *a priori*. (KANT, 2001, p.234).

Portanto, concluímos que a experiência só será possível quando a representação estiver ligada às percepções. Entretanto, não é porque todo conhecimento se inicia *com* a experiência, que significa que todo esse conhecimento derive *da* experiência. Ele pode ser um composto do que recebemos das impressões sensíveis, e do que a nossa própria capacidade de conhecer produz por si mesmo. Assim, Kant (2001) denomina que se haverá um conhecimento independente da experiência e de todas as impressões dos sentidos, esse conhecimento é denominado como *a priori*, enquanto que o conhecimento empírico, tem sua origem *a posteriori*, ou seja, na experiência. Dessa forma, Kant define que “dos conhecimentos *a priori*, são puros aqueles em que nada de empírico se mistura. Assim, por exemplo, a proposição, segundo a qual toda a mudança tem uma causa, é uma proposição *a priori*, mas não é pura, porque a mudança é um conceito que só pode extrair-se da experiência (KANT, 2001, p.63)”.

A experiência é capaz de ensinar que algo é constituído de uma determinada maneira, mas não que não possa ser diferente. Então, Kant nos fornece elementos pelo qual podemos distinguir um conhecimento puro de um conhecimento empírico. O primeiro critério diz que “se encontrarmos uma proposição que apenas se possa pensar como *necessária*, estamos em presença de um juízo *a priori* (KANT, 2001, p. 64)”. Ou seja, o juízo é proveniente de uma fonte particular de uma faculdade de conhecimento *a priori*, em que a necessidade e a universalidade rigorosa são inseparáveis uma da outra.

No segundo critério, é dito que a experiência é incapaz de conceder aos seus juízos uma universalidade rigorosa e verdadeira, mas sim uma universalidade suposta e comparativa por indução. Quando nenhuma exceção é admitida como possível para uma determinada regra, esse juízo com rigorosa universalidade, não é derivado da experiência, mas é absolutamente válido *a priori*. No caso da universalidade empírica, ela transfere a validade da maioria dos resultados, como sendo a totalidade dos casos, ou seja, numa dada experiência, o resultado será generalizado por aquele que tiver uma maior incidência.

Kant (2001) faz uma crítica aos conhecimentos puros e considera a substância e a causalidade, como algo enraizado no sujeito transcendental, ou seja, aquele sujeito que possui as condições de possibilidade da experiência. Esse sujeito transcendental por meio do

conhecimento arraigado na experiência, tem condições de atribuir uma validade objetiva, mas limitada a uma experiência possível. Nessa obra, Kant faz uma crítica a razão “pura” das ciências, mas vamos nos ater o máximo possível às ciências matemáticas, portanto, no caso da matemática, ele argumentou que a atividade matemática envolve a construção e a experiência.

A matemática e a física são os dois conhecimentos teóricos da razão que devem determinar a priori o seu objeto, a primeira de uma maneira totalmente pura e a segunda, pelo menos, parcialmente pura, mas também por imperativo de outras formas de conhecimento que não as da razão (KANT, 2001, p.41-42).

Por exemplo, o conceito de círculo, para Kant, foi obtido ao exibi-lo a priori na intuição¹⁷³ do espaço, bem como os conceitos aritméticos foram obtidos através de construções intuitivas de espaço e tempo. Para ficar mais claro, é importante lembrarmos que nas classificações matemáticas de Bacon e D'Alembert, a geometria e a aritmética foram classificadas como “matemática pura”, e em ambas, a matemática era uma ramificação da metafísica. Assim, a geometria não era material, mas para Kant, a geometria envolvia intuições a priori de espaço e tempo, portanto, a geometria que estava bem separada da ciência do movimento, deveria aplicar-se a experiência conforme a física newtoniana para determinar as qualidades sensíveis dos objetos. O mesmo vale para a aritmética.

Este método, é semelhante aos métodos físicos, pois, consistem em procurar os elementos da razão pura naquilo que se pode confirmar ou refutar por uma experimentação. Desse modo, temos que:

Para examinar as proposições da razão pura, sobretudo quando ousam ultrapassar os limites da experiência possível, não se podem submeter à experimentação os seus objetos (como na física); pelo que só é viável dispor os conceitos e princípios admitidos a priori, de tal modo que os mesmos objetos possam ser considerados de dois pontos de vista diferentes; por um lado, como objetos dos sentidos e do entendimento na experiência; por outro, como objetos que apenas são pensados, isto é, como objetos da razão pura isolada e que se esforça por transcender os limites da experiência (KANT, 2001, p.47).

A matemática é um exemplo do quanto se pode ir longe no conhecimento a priori, independente da experiência. Ela se ocupa de conhecimentos e objetos na medida em que possam ser representados pela intuição (tempo e espaço), além disso, ela é uma ciência cujo domínio é a certeza, ultrapassando o círculo da experiência. Ou seja, na matemática é criada uma rigorosa universalidade, certa de que ela não será refutada pela experiência.

¹⁷³ A intuição é responsável por nos promover o entendimento do conceito, por meio da sensibilidade, de modo receptivo - passivo - pelo qual somos afetados pelos objetos.

A matemática fornece o exemplo mais brilhante de uma razão pura que se estende com êxito por si mesma, sem o auxílio da experiência. Os exemplos são contagiosos, especialmente para esta faculdade, que se sente naturalmente lisonjeada por ter noutros casos a mesma felicidade que teve num caso particular. Por isso, a razão pura espera poder alargar-se, no uso transcendental, com a mesma felicidade e solidez que conseguiu no uso matemático, sobretudo se aplicar aí o mesmo método, que neste caso foi de tão evidente utilidade (KANT, 2001, p.591).

Kant (2001) comenta que o conhecimento humano se regula pelos objetos. Assim, muitas tentativas para descobrir *a priori*, algo que ampliasse nosso conhecimento, apenas imitava o conhecimento racional com a metafísica, entretanto, a experimentação resolveria melhor as questões da metafísica ao admitir “que os objetos se deveriam regular pelo nosso conhecimento, o que assim já concorda melhor com o que desejamos, a saber, a possibilidade de um conhecimento *a priori* desses objetos, que estabeleça algo sobre eles antes de nos serem dados (KANT, 2001, p. 46)”. Assim, em relação a experiência, ele ainda complementa que:

Com efeito, a própria experiência é uma forma de conhecimento que exige concurso do entendimento, cuja regra devo pressupor em mim antes de me serem dados os objetos, por conseqüência, *a priori* e essa regra é expressa em conceitos *a priori*, pelos quais têm de se regular necessariamente todos os objetos da experiência e com os quais devem concordar (KANT, 2001, p.46).

Para exemplificar essa afirmação, ele traz a primeira ideia de Nicolau Copérnico (1473-1543), que não pode prosseguir na explicação dos movimentos celestes porque admitia que toda multidão de estrelas se movia em torno do espectador. Kant (2001) sugere que talvez o resultado poderia ter sido melhor caso Copérnico, perpassasse a metafísica, e então, tivesse considerado o espectador em movimento, permanecendo assim, os astros imóveis.

Na metafísica, a capacidade de conhecimento *a priori* pelos sujeito nunca ultrapassaria os limites da experiência, porém, essa afirmação não faz sentido para Kant. E a prova disso pode ser obtida quando consideramos o conhecimento racional pela contra-prova da experimentação, pelo fato desse conhecimento “apenas se referir a fenômenos e não às coisas em si que, embora em si mesmas reais, se mantêm para nós incognoscíveis (KANT, 2001, p.48)”, ou seja, impossível de se conhecer. Para que os conhecimentos se tornem cognoscíveis, devem ser reconhecidos pela forma *a priori* da intuição externa e interna, ou seja, a noção de espaço e tempo, respectivamente, que o sujeito transcendente carrega consigo

como atributo da faculdade mental. Dessa forma, para Kant é impossível, ou incognoscível reconhecer um objeto, sem ordená-los em uma forma espacial e temporal.

Todavia não é apenas nos juízos, mas ainda em alguns conceitos, que se revela uma origem *a priori*. Eliminaí, pouco a pouco, do vosso conceito de experiência de um *corpo* tudo o que nele é empírico, a cor, a rugosidade ou macieza, o peso, a própria impenetrabilidade; restará, por fim, o *espaço* que esse corpo (agora totalmente desaparecido) ocupava e que I não podereis eliminar. De igual modo, se eliminardes do vosso conceito empírico de qualquer objeto, seja ele corporal ou não, todas as qualidades que a experiência vos ensinou, não poderíeis contudo retirar-lhe aquelas pelas quais o pensais como substância ou como inerente a uma substância (embora este conceito contenha mais determinações do que o conceito de um objeto em geral). Obrigados pela necessidade com que este conceito se vos impõe, tereis de admitir que tem a sua sede *a priori* na nossa faculdade de conhecer (KANT, 2001, p.65).

Em relação ao espaço, ao considerarmos um espaço qualquer, vamos supor, por exemplo, que existe somente um corpo em uma determinada sala. Para fins de compreensão, vamos pensar que o corpo que está nessa sala, seja uma mesa. Agora, mentalmente, retire a mesa desse ambiente, e então, sobrarão apenas o espaço vazio. Algo que é totalmente experienciável pela nossa mente, ou seja, cognoscível. Agora façamos, como Kant sugere, a contra-prova dessa situação. Mentalmente, tente retirar o espaço vazio, e deixe somente a mesa. A não ser que extrapolemos nossa noção de percepção, essa mesa flutua em uma dimensão extraterrena, no entanto, essa situação é incognoscível da intuição do conhecimento humano.

Em relação ao tempo, só podemos conceber a existência de algo quando está relacionado a um tempo de antes, um tempo agora e a um tempo depois. Tomando a mesma situação anterior, é possível eliminarmos a mesa do tempo. Ou seja, ela foi destruída, existiu durante um período, mas agora não existe mais. Entretanto, ao considerarmos essa mesa novamente, é incognoscível eliminarmos o tempo dela, sempre iremos buscar uma relação de duração temporal dessa mesa, seja antes ou depois.

O espaço e o tempo não representam coisas em si mesmo, eles se referem apenas aos objetos enquanto são considerados como fenômenos, assim, o conhecimento pode ser tomado pela experiência, sejam pelos objetos inerentes em si mesmo, ou então da nossa intuição sensível de tais objetos. Assim, o tempo e o espaço, quando tomados conjuntamente, são as formas puras de toda intuição, tornando-se duas fontes para obtermos conhecimentos sintéticos *a priori*, principalmente, daqueles provenientes da “matemática pura”. Desse modo, os fenômenos “são todos eles grandezas e *grandezas extensivas*, porque, enquanto intuições

no espaço ou no tempo, têm de ser representados pela mesma síntese que determina o espaço e o tempo em geral (KANT, 2001, p.224-225)”.

Kant denomina como grandeza extensiva toda aquela parte que tem possibilidade de representar o todo. Assim, caso o propósito, por exemplo, seja fazer a representação de uma linha, mesmo que pequena, é impossível fazê-la sem pensar em suas partes a partir de um ponto e então, traçar essa linha. O próprio tempo é uma grandeza extensível, pois mesmo que consideremos um tempo mínimo, há uma progressão sucessiva de um instante para o outro, que quando somados, determinam todo o tempo decorrido. Portanto, todas as intuições são grandezas extensivas porque são intuídas por uma sucessão de parte por parte, até então expressar o todo.

E é exatamente essa síntese sucessiva da imaginação, por meio da produção de figuras, que funda a matemática da extensão, ou seja, a geometria. Assim, Kant (2001) afirma que os axiomas da geometria são capazes de evidenciar as condições da intuição sensível a priori, e subordinar a essa intuição, o esquema de um conceito puro do fenômeno. Assim, proposições como “entre dois pontos só é possível uma linha reta” e “duas linhas retas não circunscrevem um espaço”, só fazem sentido porque tomamos a intuição como conhecimento a priori.

Kant define que podemos atribuir juízos aos objetos quando se é pensado na relação entre um sujeito e um predicado, e então, esses juízos podem ser classificados de duas maneiras. Quando o predicado B pertence ao sujeito A, como algo que está implicitamente contido nesse conceito A, temos o *juízo analítico*. Ou seja, o predicado nada mais é do que uma impressão extraída por análise da própria noção do sujeito, desse modo, explicita o que já é implicitamente sabido, não se criam conhecimentos novos. No caso de que o predicado B tenha ligação com o sujeito A, mas estar totalmente fora do conceito A, temos os *juízos sintéticos*. Ou seja, o predicado se acrescenta ao sujeito, de modo a enriquecer o conhecimento, e a base desse enriquecimento é advinda da experiência.

Dessa forma, Kant afirma que os juízos matemáticos são todos sintéticos e que “esta proposição parece até hoje ter escapado às observações dos analistas da razão humana e mesmo opôr-se a todas as suas conjecturas; é, contudo, incontestavelmente certa e de conseqüências muito importantes (KANT, 2001, p.72)”. Kant acrescenta que todos os raciocínios matemáticos se processaram segundo o princípio da contradição¹⁷⁴, característica exigida pela natureza de qualquer certeza apodítica, ou seja, aquilo que é demonstrado e não pode ser contestado.

¹⁷⁴ O princípio da contradição explicita que duas afirmações contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo.

E com isso, os analistas julgaram que os princípios matemáticos eram conhecidos graças ao princípio da contradição, o que para Kant, isso é um engano, porque dada uma proposição sintética, ela realmente pode ser considerada pelo princípio da contradição desde que se pressuponha outra proposição sintética de onde possa ser deduzida, e assim, jamais considerada somente em si própria. Assim, as verdadeiras proposições matemáticas eram sempre juízos a priori e não empíricos, porque elas comportam a necessidade universalmente válidas, abstraídas de qualquer suporte na experiência.

Para os descrentes de que todos os conhecimentos da matemática sejam sintéticos, Kant (2001) propõe a limitar sua tese à “matemática pura”, cuja definição vimos em Bacon e D'Alembert, é exigida que não contenha conhecimentos empíricos, mas sim um conhecimento puro e a priori (Kant).

Kant acrescenta que a matemática não constrói somente grandezas extensivas (quanta), tal como é procedido na geometria. Ela também constrói a *pura grandeza* (quantitas), tal como é operado na aritmética, em que o objeto é tomado de forma totalmente abstraída da natureza, devendo ser pensado segundo as suas grandezas. Essas grandezas são representadas por uma notação de todas as grandezas em geral, ou seja, os números. A partir desses números, há certas regras universais para que possam ser adicionados, subtraídos, multiplicados, etc. Assim, quando se quer fazer a divisão de uma grandeza por outra, basta combiná-las mediante a forma que designa a divisão, obtendo assim uma construção simbólica do resultado operado entre os objetos e as grandezas consideradas. Na verdade, uma das questões que Kant estava se perguntando, era algo no sentido de: “como é possível aplicarmos a aritmética na vida cotidiana se ela é uma ciência pura?”.

Desse modo, ele considera a proposição aritmética $7 + 5 = 12$. A primeira vista, sem dúvida, é uma proposição simplesmente analítica, resultante do princípio da contradição, de que não há possibilidade de outra solução do conceito da soma de sete e cinco. Porém, ao verificarmos o conceito da soma entre sete e cinco, nada mais é do que a reunião de dois números em um, em que, é pensado qual é esse único número que reúne os dois. O conceito de doze, em nenhum momento foi concebido além da reunião de sete e cinco. Se considerarmos a proposição apenas como ela está colocada, seria uma proposição analítica, pois dizer $7 + 5 = 12$, em nada o predicado (12), acrescentou na representação do sujeito ($7 + 5$), dado que 12 era o resultado sabido do sujeito expresso numericamente sem a reunião entre 7 e 5. Desse modo:

Para formular um juízo sintético de um conceito devemos sair desse conceito e mesmo recorrer à intuição na qual é dado. Com efeito, se permanecermos no que está contido no conceito, o juízo seria meramente analítico e uma explicação do pensamento segundo aquilo que realmente nele está contido (KANT, 2001, p.597).

O que Kant propõe, é que esses conceitos devem ser superados, procurando a intuição deles, e exemplifica, para tomarmos cinco dedos de nossa mão, e a partir deles, acrescentar um a um, o conceito de sete. Assim, com a ajuda dos dedos das mãos, podemos também primeiramente considerar o número 7, e depois acrescentarmos uma a uma, cinco unidades. Em ambos os casos, o número doze foi juntado por meio de um processo figurativo, desse modo, ao conceituar uma soma de $7 + 5$, o que foi pensado é que deveria se acrescentar cinco unidades ao número sete, e não que o resultado dessa soma fosse igual a doze. As proposições evidentes da relação entre números, tal como $7 + 5 = 12$, embora sintéticas, Kant as considera como proposições individuais. Portanto:

A proposição aritmética é, pois, sempre sintética, do que nos compenetrarmos tanto mais nitidamente, quanto mais elevados forem os números que se escolherem, pois então se torna evidente que, fossem quais fossem as voltas que déssemos aos nossos conceitos, nunca poderíamos, sem recorrer à intuição, encontrar a soma pela simples análise desses conceitos (KANT, 2001, p.73).

Hacking (2014) propõe um exemplo para elucidar a explanação de Kant. Ao olharmos para uma tigela em que foi despejada cinco claras de ovos, caso você não soubesse da quantidade de claras que foi depositada nesse recipiente, dificilmente visualizaríamos as cinco claras de ovos. No entanto, em uma tigela ao lado, contendo cinco gemas inteiras, poderíamos dizer que há cinco só de olhar. Assim, uma vez que separamos as claras de ovos, não podemos simplesmente contar novamente somente ao considerarmos a visão. É necessário inferir, de modo a comparar as duas tigelas, para determinar a quantidade de ovos restantes para completar a receita, que pode uma quantidade de doze claras de ovos ao todo. Desse modo, podemos observar que o julgamento sintético foi além de notarmos cinco claras de ovos e das outras sete restantes para concluir a receita.

Não podemos esquecer que a “matemática pura” também contempla a geometria, e como Kant afirma que todos os conhecimentos matemáticos são sintéticos, temos que nenhum princípio da geometria é analítico.

Desse modo, para exemplificar que os conceitos geométricos são sintéticos, Kant considera a proposição geométrica de que a linha reta é a distância mais curta entre dois pontos. Ele argumenta que o conceito de reta não contém nada de quantitativo, mas sim representa uma qualidade do objeto. Assim, para que a reta tenha algum tipo de quantificação,

é necessário acrescentar valores, para que assim possamos conceituar a reta como “mais curta” ou “mais longa”. Dessa forma, temos de recorrer novamente a intuição, para assim extrairmos algum tipo de análise do conceito de linha reta. Desse modo, “por exemplo, $a = a$, o todo é igual a si mesmo, ou $(a + b) > a$, o todo é maior do que a parte. E, contudo, mesmo estes axiomas, embora extraiam a sua validade de simples conceitos, são admitidos na matemática apenas porque podem ser representados na intuição (KANT, 2001, p.74)”.

As ciências da natureza (*physica*) também são consideradas por Kant como contendo em si, princípios de juízos sintéticos *a priori*. E toma como exemplo duas proposições para exemplificar sua afirmação. A primeira trata de que a “quantidade de matéria permanece constante em todas modificações do mundo corpóreo”, enquanto a segunda, “em toda a transmissão de movimento, a ação e reação têm de ser sempre iguais uma à outra”. Concluindo que:

Em ambas as proposições é patente não só a necessidade, portanto a sua origem *a priori*, mas também que são proposições sintéticas. Pois no conceito de matéria não penso a permanência, penso apenas a sua presença no espaço que preenche. Ultrapasso, assim, o conceito de matéria para lhe acrescentar algo *a priori* que não pensei *nele*. A proposição não é, portanto, analítica, mas sintética e, não obstante, pensada *a priori*; o mesmo se verifica nas restantes proposições da parte pura da física (KANT, 2001, p. 74).

Mesmo na metafísica, na visão kantiana, deve haver juízos sintéticos formados *a priori*. Essa ciência não deveria ser tomada simplesmente para decompor os conceitos, que foram formados *a priori* acerca das coisas, para então, explicar esses conceitos analiticamente. Kant entende que a metafísica deveria ser tomada como capaz de:

alargar o nosso conhecimento *a priori*, para o que temos de nos servir de princípios capazes de acrescentar ao conceito dado alguma coisa que nele não estava contida e, mediante juízos sintéticos *a priori*, chegar tão longe que nem a própria experiência nos possa acompanhar. Isso ocorre, por exemplo, na proposição: o mundo tem de ter um primeiro começo, etc (KANT, 2001, p.75).

Kant relata que dentre todos os filósofos, o que mais se aproximou dessas questões, foi o escocês David Hume (1711-1776). Entretanto, ele ainda estava bem longe de conceber sua universalidade com suficiente rigor, pois, no que ele estabeleceu como *principium causalitatis*, Hume se deteve apenas em enunciar a proposição sintética do efeito com suas causas. Kant¹⁷⁵ pressupõe que se Hume tivesse ido mais além, a metafísica seria considerada

¹⁷⁵ Kant sugere que Hume não foi tão além, talvez porque “o seu bom-senso, por certo, tê-lo-ia preservado dessa afirmação (KANT, 2001, p.76)”.

nada mais do que uma simples ilusão do conhecimento racional extraído da experiência. Assim, essa afirmação destruiria toda a filosofia pura, e consequentemente, ele seria obrigado a reconhecer, movido pelo seu raciocínio, que não poderia mais haver “matemática pura”, dado que ela também seria composta de proposições sintéticas a priori.

Para Kant, a solução desse problema, teria incluído a possibilidade do uso puro da razão no processo de fundamentação e desenvolvimento de quaisquer ciências que contenham conhecimentos teóricos a priori dos objetos, e com isso seria respondido a seguinte questão: “*Como é possível a matemática pura?*” e “*Como é possível a física pura?*”. Assim, é conveniente interrogarmos como essas ciências são possíveis, e a resposta deve ser dada no sentido que elas são capazes de demonstrar a nossa realidade. No caso da metafísica, Kant coloca em dúvida que ela possa retratar o mundo real, mas pondera que:

a metafísica, embora não seja real como ciência, pelo menos existe como disposição natural (*metaphysica naturalis*), pois a razão humana, impelida por exigências próprias, que não pela simples vaidade de saber muito, prossegue irresistivelmente a sua marcha para esses problemas, que não podem ser solucionados pelo uso empírico da razão nem por princípios extraídos da experiência. Assim, em todos os homens e desde que neles a razão ascende à especulação, houve sempre e continuará a haver uma metafísica (KANT, 2001, p.76-77).

Desse modo, Kant faz o seguinte questionamento, “*como é possível a metafísica enquanto ciência?*”. Para responder essa questão, ele considera que a metafísica não deve fazer o uso dogmático¹⁷⁶ da razão. Essa prática pode levar a afirmações sem fundamento, e que podem ser opor a outras declarações verossímeis, fazendo-se necessário o cepticismo¹⁷⁷. Portanto, a metafísica não deve se ocupar dos objetos da razão, mas somente da própria razão, bem como de todos os problemas engendrados a razão propriamente dita pela sua própria natureza ao invés da natureza das coisas. Desse modo, essa ciência terá aprendido “a conhecer a sua capacidade em relação aos objetos que a experiência lhe pode apresentar, ser-lhe-á fácil determinar de maneira completa e segura a extensão e os limites do seu uso, quando se ensaia para além das fronteiras da experiência (KANT, 2001, p.77-78)”.

¹⁷⁶ “A crítica não se opõe ao *procedimento dogmático da razão* no seu conhecimento puro, enquanto ciência (pois esta é sempre dogmática, isto é, estritamente demonstrativa, baseando-se em princípios *a priori* seguros), mas sim ao *dogmatismo*, quer dizer, à presunção de seguir por diante apenas com um conhecimento puro por conceitos (conhecimento filosófico), apoiado em princípios, como os que a razão desde há muito aplica, sem se informar como e com que direito os alcançou. O dogmatismo é, pois, o procedimento dogmático da razão *sem uma crítica prévia da sua própria capacidade* (KANT, 2001, p. 56)”.

¹⁷⁷ Cepticismo é uma atitude crítica que questiona sistematicamente a noção de que o conhecimento e certeza absoluta são possíveis. É a “concepção segundo a qual o conhecimento do real é impossível à razão humana. Portanto, o homem deve renunciar à certeza, suspender seu juízo sobre as coisas e submeter toda afirmação a uma dúvida constante. Oposto a dogmatismo (JAPIASSÚ e MARCONDES, 2001, p.34)”.

Desse modo, segundo a visão kantiana, a matemática, a física e o conhecimento empírico são essenciais para responder os anseios da humanidade, mediados pelo conhecimento racional dos conceitos, isto é, a metafísica.

Precisamente por isso, a metafísica é também o acabamento de toda a *cultura* da razão humana, acabamento imprescindível, mesmo deixando de lado a sua influência, como ciência, sobre certos fins determinados. Com efeito, considera a razão segundo os seus elementos e máximas supremas, que devem encontrar-se como fundamento da *possibilidade* de algumas ciências e do uso de todas (KANT, 2001, p.681).

Portanto, para Kant, a metafísica deveria ser especulativa, sendo muito mais utilizada para prevenir erros do que ampliar os conhecimentos das ciências puras. Só assim, a metafísica terá o seu valor, lhe dando “dignidade e consideração, através do ofício de censor que assegura a ordem pública, a concórdia e o bom estado da república científica e impede os seus trabalhos ousados e fecundos de se desviarem do fim principal, a felicidade universal (KANT, 2001, p.681)”.

4.1.2 A MECÂNICA RACIONAL

Durante os séculos XVII e XVIII, a mecânica e as suas ramificações, eram parte das “matemáticas mistas”, primeiramente na classificação de Bacon em 1605, e posteriormente em D'Alembert, 1751. Como relatamos em capítulos anteriores, a “matemática mista” tinha como uma característica fundamental a utilização de números, figuras, grandezas, fórmulas, etc, em fenômenos cujos objetos eram físicos. Conforme a definição da mecânica na *Encyclopédie*, o principal objetivo da mecânica era determinar as leis primárias de movimento, fossem elas de causas naturais ou de ações humanas.

Assim, como essas leis do movimento foram entendidas como conceitos matemáticos, pode ser uma explicação do porquê da mecânica ter sido classificada como uma ciência matemática. Pulte (2013) aponta que o sentido da mecânica nas ciências matemáticas, não significou meramente uma “matemática aplicada à ciência”, mas sim uma ciência de fato “tendo essencialmente a ver com entidades matemáticas (PULTE, 2013, p.682, tradução nossa)”. Ou seja, a mecânica era uma parte organizada dedutivamente da matemática.

Assim, Pulte (2013) comenta que devido a razões internas e externas, a compreensão que havia dos conceitos de mecânica começaram a modificar drasticamente no final do século XVIII, e principalmente no decorrer do século XIX, em virtude das aparentes mudanças nas

relações entre as visões a priori e a posteriori da álgebra, da geometria e da mecânica, culminando que a mecânica deixou de ser entendida como uma parte das ciências matemáticas, passando a ser uma das ciências componentes da Física.

Portanto, com essa transição da matemática para a física, as definições da mecânica não eram mais empregadas como conceitos matemáticos, mas sim que a matemática era utilizada para ser aplicada aos conceitos da mecânica, o que foi denotado na idade moderna como mecânica racional. Como consequência desse processo, “os ‘primeiros princípios’ ou ‘axiomas’ da mecânica perderam seu status de verdades matemáticas e empíricas. Essa dissolução abriu o caminho para uma compreensão moderna da mecânica como uma ciência empírica falível (PULTE, 2013, p.282, tradução nossa)”.

É válido destacarmos que antes dessas críticas, a mecânica clássica, segundo Pulte (2013), era considerada epistemologicamente equivalente à geometria euclidiana por quase todos os cientistas e a maioria dos filósofos da ciência.

O ponto inicial que ocasionou essa mudança de ponto de vista das ciências mecânicas, segundo Pulte (2013), foi a partir da obra *Méchanique Analitique* de Lagrange (1736-1813) no ano de 1788, e o ponto final dessa passagem, foi a publicação em 1869 de Carl Neumann (1832-1925), intitulada *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*.

Quanto a obra de Lagrange, a publicação foi marcada pelo fato de que os princípios mecânicos desenvolvidos nessa obra, tornaram-se axiomas formais da ciência ao invés de serem considerados como princípios de leis da natureza. Pulte (2013) relata que Lagrange encontrou problemas para realizar suas formalizações, levando-o a um conflito com o tradicional significado de axiomas, ou seja, proposições verdadeiras e autoevidentes que não são prováveis, e não tem necessidade de prova.

Pulte (1998) comenta que para Clifford Truesdel (1919-2000), Lagrange apresenta o princípio das velocidades virtuais, a estática e a dinâmica de forma dedutiva no *Méchanique Analitique*, e que o objetivo dessa obra foi uma tentativa de organizar a mecânica dos séculos XVII e XVIII utilizando técnicas recém-descobertas, e que isso resultou num amontoado de conceitos mecânicos repaginados e com ainda mais conteúdo empírico. Porém, é destacado que Truesdel direcionou seu olhar somente em relação à matemática, sem levar em conta o interesse filosófico de Lagrange: apresentar a mecânica como uma ciência axiomática.

Em outras palavras, para Pulte (1998), a pretensão de Lagrange era reduzir a teoria mecânica e os problemas relacionados a essa ciência, em fórmulas gerais. Entretanto, essa observação não deve ser entendida como o anúncio de uma teoria abstrata de “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas, e sim, entendida como uma expressão para a crença de

que as matemáticas fossem intrínsecas a estruturas da própria natureza, tornando assim, a mecânica “um novo ramo” de análise que se basearia na convicção de que o cálculo seria apropriado para descobrir as leis da natureza e suas relações lógicas.

Essa ambição de Lagrange, ao se fazer um retrospecto, vem desde seus tradicionais predecessores da mecânica analítica. Pulte (1998) destaca que Leonhard Paul Euler (1707-1783), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) e D'Alembert, aderiram à mesma crença matemática e na capacidade da mente humana em condensar essa realidade em uma estrutura simbólica dedutiva com alguns princípios indiscutíveis.

D'Alembert é particularmente interessante a este respeito porque ele influenciou o ideal de mecânica de Lagrange mais do que qualquer outro cientista ou filósofo. Ele se declarou um empirista, mas suas afirmações filosóficas sobre a mecânica mostram nem mesmo o menor traço de um Ceticismo humeano sobre as capacidades da física-matemática para revelar as reais leis da natureza (PULTE, 1998, p.158, tradução nossa).

O termo euclideanismo¹⁷⁸ de Lakatos, é utilizado para expressar a mecânica racional pretendida por D'Alembert, Lagrange, entre outros físicos, matemáticos e filósofos do século XVIII e XIX. Pulte (1998) apresenta três fatos do porquê esse termo é apropriado para Lagrange:

1º) A mecânica de Lagrange cumpre a definição de euclideanismo, em virtude de que ele alega que tanto a estática e a dinâmica podem ser baseadas em um “princípio fundamental”, ou seja, dado um princípio, ele é indubitavelmente questionado.

2º) O euclideanismo é um rótulo epistemologicamente neutro, ou seja, inclui tanto fundamentos empíricos, quanto racionalistas. Na mecânica, os princípios são supostamente revelados “a luz da razão” (Descartes) ou “deduzidos dos fenômenos” (Newton). A posição de Lagrange a esse respeito não é clara, ou seja mantendo-se na neutralidade.

3º) O euclideanismo de Lakatos deixa explícito que a geometria euclidiana serviu de modelo para a mecânica. Na publicação *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange descreveu a “mecânica como uma geometria com quatro dimensões”, incluindo o tempo como a quarta dimensão, e complementa que a “análise mecânica é uma extensão da análise geométrica”. Por meio dessas palavras, pode se concluir que para Lagrange, todo conhecimento mecânico pode ser formulado sob uma estrutura axiomática-dedutiva e que possui a mesma característica do conhecimento matemático: infalibilidade.

¹⁷⁸ O euclideanismo expressa a visão de que a teorial ideal é aquela composta por um sistema dedutivo com verdades incontestáveis, com um número finito de axiomas “auto-evidentes”, cujo objetivo é tornar a ciência antiespeculativa.

No primeiro capítulo, relatamos que para abordar os tópicos de “matemáticas mistas”, os matemáticos jesuíticos utilizavam a geometria como uma forma de manter a matemática no campo da metafísica, a fim de evitar conflitos em relação a crítica da utilização de dados provenientes do empirismo. Em contrapartida, Pulte (1998) destaca que Lagrange rejeita todos os meios geométricos, restringindo a mecânica exclusivamente aos métodos de análise, e isso implica não somente dispensar métodos matemáticos, mas também extramatemáticos. Ele conclui que o livro de Lagrange, um século depois do *Principia* de Newton, pode ser visto como uma tentativa de atualizar os princípios matemáticos da Filosofia Natural abandonando os temas tradicionais da *philosophia naturalis*, bem como é um exemplo notável de instrumentalismo matemático. Ele ainda complementa que o *Méchanique Analytique* é:

o primeiro grande livro-texto da história de mecânica que eu conheço que abandona qualquer tipo de reflexão explicitamente filosófica. Não diz nada sobre como espaço, tempo, massa, força (no sentido de Newton), ou vis viva (no sentido de Leibniz) devem ser estabelecidos como conceitos básicos de mecânica, nem sobre como uma teoria matemática dedutiva sobre essa base é possível. Nem as premissas metafísicas de sua mecânica são tornadas explícitas, nem existe justificativa epistemológica dada para o presumível caráter infalível do princípio básico dos princípios da mecânica. Isto está em notável contraste não apenas com as fundações do século XVII de mecânica como a de Descartes, Leibniz e Newton, mas também da abordagem dos predecessores imediatos de Lagrange, Euler, Maupertuis ou D'Alembert (PULTE, 1998, p.158, tradução nossa).

Pulte (2013) destaca que a recepção pela comunidade científica alemã, da mecânica e da físico-matemática contidas na obra de Lagrange, contribuíram no sentido de que uma nova compreensão da matemática deveria ser repensada quanto a ela ser considerada uma ciência “pura”. Esses pensamentos foram fortemente influenciados pela filosofia kantiana e pelo movimento cultural do Neohumanismo, em mudar a concepção de que a matemática “era primariamente entendida como uma mera atividade mental baseada em leis do pensamento que são independentemente de qualquer experiência ou intuição empírica (PULTE, 2013, p.683, tradução nossa)”. Assim, essa concepção trouxe um verdadeiro anacronismo em relação a aplicabilidade da matemática, por meio das ciências mecânicas, à natureza.

Essa noção de aplicabilidade não foi simplesmente aceita assim que evidenciada por aqueles favoráveis a visão kantiana e neohumanista da experiência. Pulte (1998) comenta que o matemático Jacobi¹⁷⁹ foi um dos principais críticos quanto a essa concepção, e rejeitou a abordagem de Lagrange, por considera-lo incapaz de descrever os comportamentos de corpos

¹⁷⁹ Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), matemático alemão.

físicos reais, bem como criticou as tentativas de Lagrange demonstrar matematicamente os “axiomas” da mecânica.

Jacobi é descrito por Pulte (2013) como um dos expoentes da “matemática pura” e representante da tradição analítica, e que era expressamente contrário da utilização do euclideanismo como um ideal para as ciências empíricas em geral: “A semelhança formal entre o sistema dedutivo da mecânica analítica e sistemas de matemática pura (como a teoria dos números) não deve levar à falsa crença de que ambas as teorias atendem aos mesmos padrões epistemológicos (JACOBI apud PULTE, 2013, p.683, tradução nossa)”. Assim, para Jacobi, as evidências empíricas não podiam ser determinadas como verdadeiras pela matemática ou quaisquer outros raciocínios.

Pulte (2013) cita que para Jacobi as confirmações empíricas se fazem necessárias, mas jamais fornecem certeza. Desse modo, ele considera que os princípios da mecânica analítica ou newtoniana não estão certos, porque a certeza de tais princípios não podem ser alcançadas seguindo uma tentativa de “euclideanizar” a mecânica, mas provavelmente poderiam ser verdadeiros. Além disso, para Jacobi, a busca por princípios mecânicos sempre deixa espaço para que alternativas diferentes fossem escolhidas, assim, esses primeiros princípios não passam de “convenções” da mecânica.

Diante dessa questão, em relação a sua compreensão da mecânica racional, para Jacobi, “a matemática é aplicada à realidade empírica e não ‘confundida’ com ela (JACOBI apud PULTE, 2013, p.683, tradução nossa)”. Assim, vemos que há uma defesa em que a matemática seja aplicada à mecânica, e não que seja utilizada para formalizar princípios mecânicos a partir de uma “axiomatização” da ciência mecânica.

Posteriormente, essas críticas de Jacobi voltadas ao euclidianismo das ciências mecânicas, foram corroboradas por Poincaré¹⁸⁰, Riemann¹⁸¹ e Newmann. Em relação a esse último matemático, é relatado que as críticas dele aos princípios básicos da mecânica, juntamente às críticas ao espaço absoluto newtoniano, nas palavras de Pulte (2013), é indiscutivelmente o “começo do fim” da mecânica clássica, ou seja, a mecânica que estabelecia leis ou primeiros princípios vinculados às ciências e entidades matemáticas.

As considerações de Neumann em *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*, de 1869, para Pulte (2013) foi extremamente decisiva para derrubar a mecânica como uma ciência das “matemáticas mistas”. Popper¹⁸² cerca de seis décadas depois,

¹⁸⁰ Jules Henri Poincaré (1854-1912) matemático, físico e filósofo francês.

¹⁸¹ Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão.

¹⁸² Karl Raimund Popper (1902-1994), filósofo austríaco, naturalizado britânico.

reforçou as ideias de Neumann, em relação ao falibilismo das ciências. Neumann descreveu os princípios básicos da mecânica, tal como a Inércia, como sendo “nem verdadeiro, nem provável”, dado que são hipóteses matemáticas "arbitrárias" e “móveis” – no sentido de que suas definições poderiam ser derrubadas por novas descobertas posteriores. Assim a partir de considerar um corpo-alpha, Newmann:

decompõe a lei de Newton (ou hipótese) de inércia como um princípio dogmático indubitável a três proposições diferentes (existência de Alpha, retilinearidade, uniformidade), que juntas formam o conteúdo empírico desta lei. Sua explicação dos diferentes atributos empíricos pode ser entendida como um exemplo perfeito para o processo de explicar condições e estabelecer convenções que são típicas para o surgimento do pensamento hipotético em geral (PULTE, 2013, p.684, tradução nossa).

Em consonância com as ideias de Pulte (1998,2013), temos também o historiador Brown (1991) que apontou a questão da aplicabilidade da mecânica como um dos fatores que contribuíram para o desuso da expressão “matemática mista”. As aplicações da mecânica nas “matemáticas puras”, e vice-versa, eram extremamente recorrentes para obter uma melhor definição de objetos e fenômenos físicos. Desse modo, como consequência dessa constante aplicação, a mecânica foi principalmente associada com o conhecimento da geometria, e a propensão da demonstração no processo de geometria passou para a mecânica, portanto, o método analítico da geometria passou para a mecânica.

D'Alembert e Diderot preservaram a classificação baconiana das ciências, no entanto, Oki (2013) considera que outro elemento que minou gradualmente a estrutura baconiana foi o desenvolvimento da "análise" em matemática, a que D'Alembert também contribuiu. Brown (1991) nos lembra que D'Alembert associou o método analítico de "matemática mista" com o método analítico associado à álgebra. Além disso, ele comenta que o aumento da análise de Euler (1707-1783) e das considerações mecânicas de Lagrange, fez com que alguns matemáticos enxergassem a mecânica como um novo ramo de análise do cálculo e capaz de estabelecer princípios, assim como vimos nos estudos de Pulte (1998,2013).

Na última metade do século XVIII, Oki (2013) comenta que a análise tornou-se um ramo quase autônomo da geometria e da álgebra e demonstrou sua potencialidade como a verdadeira linguagem da ciência pela sua aplicação a muitos objetos relacionados à mecânica e às ciências da engenharia. Então, a partir desse momento, foi que as críticas em relação as ciências mecânicas como sendo parte das ciências matemáticas vieram a tona.

E uma vez que o "cálculo" foi associado à álgebra como uma espécie de aritmética de ordem superior, a mecânica se tornaria mais associada à álgebra e poderia ser considerada

como parte da "matemática pura". Portanto, Brown (1991) conclui seu raciocínio de que um ramo das ciências "físico-matemáticas" e das "matemáticas mistas", a mecânica, tornou-se um ramo de análise ou "matemática pura" ou estava associado a uma visão empirista mais positivista da ciência.

O conceito de matemática pura, isolando aritmética, álgebra e análise como o "paraíso" matemático remanescente de evidência e certeza da área maior das ciências matemáticas, desempenhou um papel crucial neste processo. A mecânica, no entanto, foi repudiada desse paraíso de uma vez por todas (PULTE, 2013, p.684, tradução nossa).

Com isso, a classificação da mecânica clássica de D'Alembert na *Encyclopédie*, como sendo uma ciência que pudesse ser creditada com a evidência e a certeza da matemática, não fazia mais sentido, dando origem a mecânica racional em meados do século XIX.

Por fim, no decorrer do século XIX, um "processo de retração" da evidência matemática e da certeza ocorreu, e a geometria física, bem como as ciências físico-matemáticas e as "matemáticas mistas", foram afetadas por esse processo. O desenvolvimento da criação da mecânica racional, associando-a à uma ciência genuinamente física, e tomando a matemática apenas para ser aplicada aos resultados dessa nova ciência, pode ter sido um dos fatores que contribuíram para repensar se as "matemáticas mistas" ainda faziam sentido perante os novos descobrimentos do mundo moderno.

4.1.3 AS PRIMEIRAS APARIÇÕES DO TERMO MATEMÁTICA APLICADA

O historiador Siegmund-Schultze (2013) realizou uma pesquisa para verificar a primeira vez que o termo "matemática aplicada" foi utilizado em diversos idiomas, desse modo, foi possível verificar que a palavra "matemática aplicada", independente do idioma, tem sua primeira aparição na página 5 da obra *Prolegomena* de Johann Friedrich Weidler (1691-1755) no ano de 1718, em que, ele apresenta a seguinte afirmação "*Mathesis applicata, quam nonnulli mixta appellant*"¹⁸³.

Ainda em sua pesquisa, podemos observar que Siegmund-Schultze (2013) encontrou dados em relação da primeira aparição do termo "matemática aplicada" em outros idiomas, tais como o russo, em que na obra de Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), intitulada

¹⁸³ Matemática aplicada, que não dependem das mistas.

Anfangsgründe der angewandten Mathematik publicada¹⁸⁴ em 1780 que significa “*Elements of Applied Mathematics*”¹⁸⁵.

Essa obra, conforme Hacking (2014) foi dividida em dois volumes, sendo que o primeiro volume faz uma abordagem de temas relacionados a Mecânica e Óptica, exemplos clássicos de “matemática mista”. O segundo volume lida com assuntos referentes a Astronomia, Geografia, Cronologia (cronometragem mecânica) e Gnomônica (relógios de sol), sendo que esses dois últimos tópicos em especial, também, de acordo com a classificação de D'Alembert podem ser classificados como “matemática mista” na ramificação que contempla a Astronomia Geométrica.

No cenário francês, o uso da expressão “matemática mista” se fez presente no século XVIII, consequência da publicação da *Encyclopédie* de Diderot e D'Alembert, que como vimos no segundo capítulo, fez uma classificação do conhecimento humano e dentre esses conhecimentos, classificou a matemática em “pura” ou “mista”. Siegmund-Schultze (2013) aponta que outra obra que contribuiu para o fortalecimento do uso da expressão “matemática mista” na França, foi a publicação do livro “*Histoire des Mathématiques*” de Jean-Étienne Montucla (1725-1799) em 1799.

Entretanto, o termo “matemática mista”, de acordo com Brown (1991), não foi usado quase sempre no século XIX como no século XVIII. No início do século XIX, havia exemplos do termo “matemática aplicada” substituindo o termo “matemática mista”. Por exemplo, o primeiro periódico para matemática, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, editado pelo matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), foi publicado em 1810 e substituiu a palavra “mista” pela palavra “aplicada”.

No idioma francês, Siegmund-Schultze (2013) considera que o primeiro francês que utilizou a expressão “matemática aplicada” em seus escritos, curiosamente, foi o Marquês Jean Antoine Nicolas de Condorcet (1743-1794), discípulo matemático de D'Alembert e secretário da Academia Real desde a década de 1770. Em um de seus relatórios para a criação de futuros centros de estudo, chamado de *Instituts*, Condorcet propôs a contratação:

Um professor de matemática pura. Um professor de matemática aplicada, que compreenderá em suas aulas os elementos da mecânica, da óptica, da astronomia e das aplicações elementares mais úteis do cálculo e da geometria às ciências físicas, morais e políticas (CONDORCET apud SIEGMUND-SCHULTZE, p. 663, 2013, tradução nossa).

¹⁸⁴ Esse mesmo autor publicou no início de 1760 uma obra dividida em 11 volumes intitulada somente como *Anfangsgründe der Mathematik*, ou seja, “*Elements of Mathematics*”. Para Hacking (2014), esse livro serviu como base para o livro que foi lançado 20 anos depois, em 1780.

¹⁸⁵ Elementos de Matemática Aplicada.

É comentado por Oki (2013) que um volume de matemática publicado em 1785 pela *Encyclopédie méthodique* manteve a categoria "matemática mista" quase como estava na *Encyclopédie* na década de 1750, entretanto, Oki (2013) relata que claramente sente uma hesitação quanto ao uso deste termo por parte de um matemático bem influente da época, e esse matemático referido se tratava justamente de Condorcet.

A justificativa de Oki (2013) para essa hesitação se dá em virtude de que desde o início de sua carreira, Condorcet esforçou-se incansavelmente para estabelecer uma nova classificação das ciências, principalmente pelos dois motivos a seguir. Primeiro, ele estava buscando uma maneira de reconciliar a tradição da teoria da probabilidade com a preocupação de D'Alembert com o rigor matemático, e em segundo lugar, a classificação da ciência continuou a interessá-lo, especialmente como secretário da Academia Real das Ciências em Paris, nos anos 1770 e 1780, e depois como reformador revolucionário da educação na década de 1790, corroborando com as informações encontradas na pesquisa de Siegmund-Schultze (2013).

Por meio de um manuscrito escrito provavelmente no início da década de 1770, Oki (2013) aponta que Condorcet realizou uma de suas primeiras tentativas em tentar classificar os campos relacionados à matemática, dividindo-a em dois ramos, conforme podemos observar na figura 51, sem recorrer à terminologia tradicional da “pura” ou “mista”: *Mathématiques proprement dites* (matemática propriamente dita) e *Mathématiques phisique* (matemática física).

Figura 51 - Tableau historique des progrès de l'esprit humain de Condorcet

Mathématiques	
I.	proprement dites
1.	Science de la grandeur
a.	Science de la grandeur en général
b.	Science des nombres
2.	art de mesurer
a.	Science de l'étendue
b.	repos
c.	mouvement
II.	Phisiques [sic]
1.	Science de la nature
a.	mesure de la nature en repos
b.	loix de la nature
c.	explication des Phénomènes et conjonctures de causes
2.	Science de la nature employée
a.	Science des rapports moraux ou Politiques
b.	Science de l'usage des Corps

Fonte: Oki (2013, p.89)

A categoria *Mathématiques proprement dites*, abordava uma investigação teórica das entidades abstraídas da mente, independentemente dos fenômenos externos, como a

geometria, a aritmética e as teorias de análise utilizadas para calcular ou aproximar as quantidades.

A seção *Mathématiques physiques*, correspondia aos campos criados pela aplicação da matemática aos "fenômenos diante de nós", isto é, as ciências naturais e alguns campos relacionados à vida e à sociedade humana, como *Science des rapports moraux ou Politiques* (ciência de relações morais ou políticas) e *Science de l'usage des Corps* (ciência do uso dos corpos).

Embora esse esquema de Condorcet ainda não apresente uma grande distinção da definição tradicional de matemática como uma ciência "abstrata", é interessante ver que ele introduziu outro critério de divisão – objetos de investigação preocupados com fenômenos fora da mente – dessa forma, foi possível colocar fenômenos sociais e fenômenos naturais juntos na mesma categoria "*Mathématiques physiques*".

Na década de 1790, no meio da Revolução Francesa, de acordo com Oki (2013), Condorcet abandonou claramente a classificação baconiana. Como reformador do sistema educacional, ele tentou inventar uma nova classificação de acordo com os objetos de investigação científica, não pelas faculdades mentais, ou pelo uso de um método particular. As próprias definições de "artes" e "ciências" e suas relações pouco clara vieram no centro de sua preocupação. Ele escreve que “é mais simples e mais exato unir a teoria de uma arte à arte em si, do que fazer das verdades de uma mesma ciência aplicável às diferentes artes uma parte dessa ciência (CONDORCET apud OKI, 2013, p.90)”.

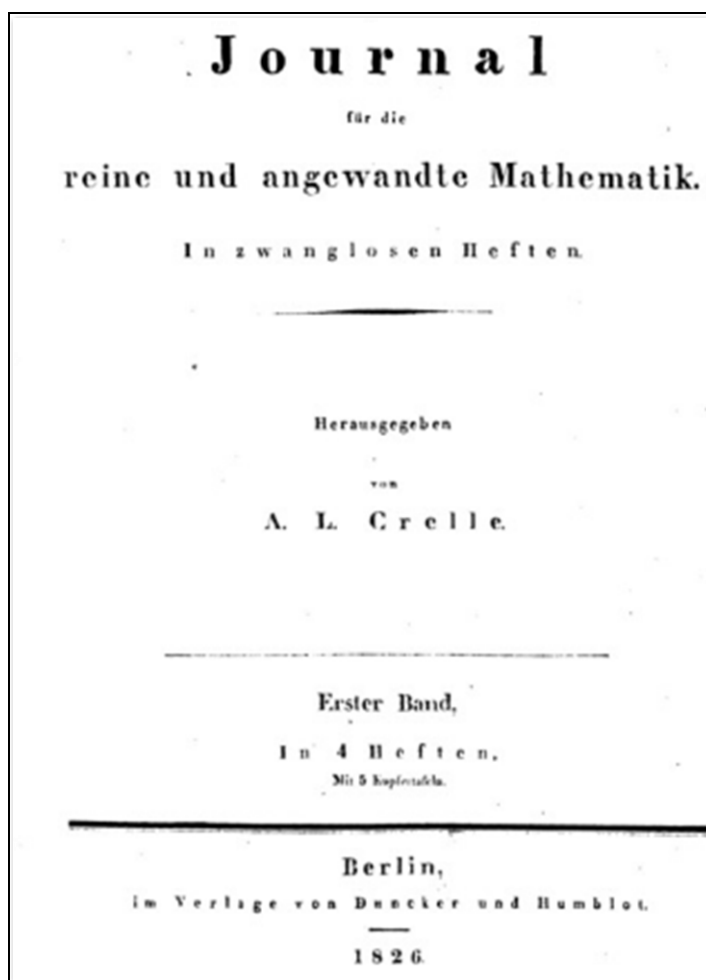
Dessa forma, Oki (2013) afirma que é possível reconhecermos que o argumento de Condorcet é aplicável à relação entre a “matemática mista” e os objetos técnicos, mesmo que sua definição do termo "arte" como "a coleta dos meios para alcançar um propósito" conota não apenas todos os tipos de instrumentos técnicos ou máquinas, mas também várias habilidades mentais, como a "arte de apresentar ideias" ou a "arte da educação". A “matemática mista” era, de fato, uma parte da matemática, consistindo nas teorias matemáticas que poderiam ser aplicadas, respectivamente, a diferentes entidades técnicas ou materiais. Então, Oki (2013) considera que Condorcet achou melhor colocar cada uma dessas teorias em conjunto com seu objeto de aplicação, ao invés de tratar cada uma como parte da matemática.

No idioma alemão, Siegmund-Schultze (2013) constata em sua pesquisa que o termo “matemática mista” foi gradualmente sendo substituído pela expressão “matemática aplicada” no século XVIII, apoiada principalmente pelas reflexões filosóficas sobre matemática “pura” e “aplicada” nos trabalhos do filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804). A primeira vez

que o termo “matemática aplicada” aparece nos títulos de obras alemãs foram encontrados em dois periódicos: *a Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik* (1786–1789) e *a Archiv für reine und angewandte Mathematik* (1795–1799), ambos editados pelo matemático Karl Friedrich Hindenburg (1741-1808).

Quando o *Journal für die reine und angewandte Mathematik*¹⁸⁶ ou, simplesmente *Crelle*, teve início de suas atividades na Alemanha em 1826 sob edição do matemático August Leopold Crelle (1780-1855), como podemos observar pelo título da revista matemática, o termo “matemática aplicada” já estava presente (figura 52). Dessa forma, vemos que desde a sua criação, um dos periódicos mais influentes da Alemanha e da Europa em geral, não fez uso da expressão “matemática mista” desde seu início.

Figura 52 – Capa da primeira edição do Crelle em 1826



Fonte: Crelle (1826)

Em relação ao cenário britânico, Siegmund-Schultze (2013) relata que o termo “matemática mista” continuou sendo utilizado no século XIX. De acordo com Brown (1991),

¹⁸⁶ *Jornal (Periódico) para Matemática Pura e Aplicada.*

parecia que os matemáticos ingleses e continentais usavam os termos "matemática pura" e "matemática mista" de diferentes maneiras no início do século XIX. Em Cambridge, William Whewell¹⁸⁷ (1794-1866) lutou contra a "revolução analítica" liderada pela Sociedade Analítica que defendeu o ensino de princípios abstratos para além das suas aplicações. Em contradição direta com os desejos da Sociedade Analítica, Whewell publicou em 1819 seu livro intitulado *Elementary Treatise on Mechanics* para que os alunos pudessem ler "uma parcela considerável" da mecânica antes de aprender o cálculo diferencial.

Ainda no cenário inglês, segundo um levantamento de dados realizado por Brown (1991), é comentado que o termo "matemática mista", assim como dito anteriormente por Siegmund-Schultze (2013), ainda estava sendo utilizado em meados do século XIX, como na oitava edição (1853-60) da *Encyclopedia Britannica*, que incluiu uma subdivisão de matemática em "matemática pura" e "matemática mista". Entretanto, na nona edição (1875-89), a classificação foi alterada para "matemática pura" e "matemática aplicada". Até 1908, pode-se encontrar a noção de "ciência mista" no *Oxford English Dictionary*, em que é apontado que esse termo é obsoleto "exceto para matemática mista".

Historiadores relatam que no século XVIII até meados do século XIX, a Inglaterra teve uma crise em relação ao prestígio científico, mais especificamente na principal sociedade científica do país, a *Royal Society of London*. As três primeiras décadas do século XIX foram marcadas por uma reavaliação do estado da ciência no país, especialmente na matemática.

A *Royal Society* recebeu diversas críticas durante o século XVIII e metade do século XIX. De acordo com Gleason (1991), Charles Babbage (1791-1871), membro desde 1816 da Sociedade, por meio de seu livro - intitulado *Reflections on the Decline of Science in England, and on some of its Causes* - foi o primeiro a expressar sua insatisfação sobre os assuntos internos da Sociedade. Em seu livro ele denuncia diversos aspectos, principalmente as desigualdades no sistema eleitoral, alegando que o interesse da ciência e seu avanço, tem sido negligenciada em favor daqueles que podiam pagar as taxas elevadas para admissão na *Royal Society of London*.

¹⁸⁷ De acordo com Crilly (2006), em 1841, William Whewell se tornou o diretor do *Trinity College*, um dos colégios da Universidade de Cambridge, marcando o início de seu reinado de 25 anos, e durante sua administração, o *Trinity* buscou reforçar de forma mais respeitável sua reputação. Whewell era um político universitário, cujos pontos de vista sobre questões da Reforma Curricular assumiu maior destaque. Ele mostrou uma postura conservadora, tinha idéias firmes sobre quais eram os temas adequados para alunos de graduação e expressou a opinião de que o estudo de Clássicos, Gregos e Latim, eram elementos indispensáveis de uma educação liberal, mas era a Matemática que iria suplementar e servir de apoio para a formação do raciocínio lógico. Para Whewell, as disciplinas que valiam a pena, eram aquelas que ele considerava como atemporais.

Além de Babbage, o ex-patriota italiano e médico Augustus Bozzi Granville (1783-1872), membro da *Royal Society* desde 1817, também publicou um livro na mesma época, intitulado como *Science Without a Head*, em que declarou que, embora a Sociedade tivesse aumentado sua lista de membros para mais de setecentos, seria difícil destacar mais do que meia dúzia de trabalho relevante e homens da ciência experimental tornado-se visível por suas descobertas.

Dentre os diversos comentários que o estado da ciência na Inglaterra recebeu nesse período, destacamos o trecho de uma crítica que foi direcionada no sentido de que a matemática ensinada na Inglaterra era diferente da matemática ensinada na França e na Alemanha:

It is certainly a curious problem with respect to national genius, whence it arises, that the country in Europe most generally acknowledged to abound in men of strong intellect and sound judgment, should, for the last 70 or 80 years, have been inferior to so many of its neighbours in the cultivation of the science which requires the greatest and most steady exertion of the understanding; and that this relaxation should immediately follow the period when the greatest of all mathematical discoveries had been made in the same country (EDINBURGH REVIEW, VOL 27, 1816, p.99).

Essa crítica publicada pelos editores do *Edinburgh Review*¹⁸⁸ vai no sentido de que o país após as grandes descobertas de Newton ao invés de prosseguir no avanço das ciências matemáticas, seguiu o caminho contrário passando por um período sem grandes contribuições e descobertas matemáticas. Dessa forma, um dos fatores que possa ter contribuído na utilização tardia do termo “matemática aplicada” na Inglaterra, pode ter sido pelo fato da ciência no cenário britânico ter sofrido com crises internas na sua estrutura, preocupando-se primeiramente em resolver as questões para recuperar o prestígio da ciência desenvolvida no país.

Para se ter uma noção, segundo Crilly (2006), somente no século XIX a “Matemática Pura” tornou-se um componente curricular nas universidades inglesas de Cambridge, tendo sido implementada¹⁸⁹ no ano de 1863. Sendo assim, baseado nos resultados de Siegmund-Schultze (2013), embora a expressão “matemática aplicada” pareça ter sido utilizado primeiramente em uma publicação da Rússia ao invés da Alemanha, é observado que a discussão da relação entre a “matemática pura” e a “matemática mista” começou na

¹⁸⁸ Influente revista de circulação na sociedade britânica no século XIX, fundada em 1802 e encerrando suas atividades em 1929.

¹⁸⁹ O matemático Arthur Cayley (1821-1895) foi o primeiro matemático a ocupar a cadeira de Matemática Pura na Universidade de Cambridge (Inglaterra).

Alemanha. Um pouco mais tarde repercutiu no território francês, e por fim, na Inglaterra, esse assunto foi debatido quando os alemães e franceses já tinham avançado em relação ao tema.

4.2 UMA HERANÇA DA MATEMÁTICA MISTA: CONTRIBUIÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DE TEORIAS DAS MATEMÁTICAS PURAS

Apesar do desuso das “matemáticas mistas” no decorrer do século XIX, elas contribuíram para o desenvolvimento de conceitos das “matemáticas puras”. Portanto, consideramos que essas contribuições foram uma herança, que foi partilhada por diversos matemáticos que desenvolveram¹⁹⁰ teorias do campo das “matemáticas puras” em razão de utilizarem conceitos formulados para tópicos das “matemáticas mistas”. Assim, apresentaremos brevemente para exemplificar essa afirmação, algumas influências entre Lagrange (“matemática mista” e físico-matemática) e os matemáticos Boole, Jacobi e Cayley (“matemática pura”).

4.2.1 LAGRANGE E BOOLE

George Boole (1815-1864) escreve em seu artigo intitulado “*Exposition of a General Theory of Linear Transformation*”, publicado em 1841 no *The Cambridge Mathematical Journal*, que “*the transformation of homogeneous functions by linear substitutions, is an important and oft-recurring problem of analysis* (BOOLE, 1841, p.1)” e complementa ainda que “*in the Méchanique Analitique of Lagrange, it occupies a very prominent place* (BOOLE, 1841, p.1)”, dessa forma, Boole nos induz a pensar que essa obra citada de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) foi uma das influências matemáticas para a escrita de seu artigo.

Juntamente do *Principia* de Newton, essa influência de Lagrange também foi destacada por Wolfson: “Seu trabalho de 1841 e sua continuação em 1842 explicitamente generalizaram um cálculo do *Méchanique Analitique* (WOLFSON, 2008, p.2, tradução nossa)”. Depois da publicação de seu artigo referente à teoria dos Invariantes, Boole não publicou mais nada relacionado ao tema, e passou a se dedicar a outros campos da Álgebra e da Lógica. Entretanto, por conta dessa obra, de acordo com Wolfson (2008), Parshall (2006) e Crilly (1986), ele é referido como o primeiro a abordar essa Teoria no cenário britânico.

¹⁹⁰ Maddy (2008) traz uma discussão de como a “matemática aplicada” se tornou “matemática pura”, por meio do desenvolvimento da “pura” utilizando conceitos da “aplicada”.

Essa publicação de Boole, pode ser classificada estritamente como uma contribuição para a “matemática pura”, mais especificamente, em relação à Teoria dos Invariantes. Essa teoria, segundo Olver (1999), se tornou moda em meados do século XIX. Nesse período, o tema esteve presente com grande frequência em inúmeras revistas de matemática na Europa. De acordo com Godoy e Mattos (2011), a movimentação em torno do assunto envolveu vários matemáticos num propósito comum, saber sobre “...*the finitude of the number of fundamental invariants* (OLVER, 1999, p.6)”.

Além disso, essa publicação foi importante para que novos desenvolvimentos da teoria dos Invariantes viessem à tona, pois, segundo Parshall (2006) e Crilly (1986), os matemáticos Arthur Cayley (1821-1895) e James Joseph Sylvester (1814-1897), que são apontados como os principais contribuidores da Teoria dos Invariantes no cenário britânico, embora tenham calculado os invariantes de uma forma homogênea¹⁹¹ a partir da criação de métodos próprios, foram influenciados pela publicação de George Boole.

Em relação ao *Méchanique Analytique*, essa obra foi publicada em 1788 e é dividida em duas partes: *La Statique* (A Estática) e *La Dynamique* (A Dinâmica). Como pudemos ver nas ramificações da árvore do conhecimento formulada por D'Alembert, estas teorias fazem parte do que ele classificou como “Matemática Mista”, e conseqüentemente, das ciências físico-matemáticas.

O fato de George Boole ter destacado a obra de Lagrange em seu artigo, por si só, seria suficiente para concluirmos o quão essas teorias provenientes das “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas, foram importantes para o desenvolvimento de uma teoria com demanda das “matemáticas puras”, no caso, os Invariantes. No entanto, vamos destacar algumas aproximações entre as obras de Boole e Lagrange.

Na primeira seção¹⁹², “*Sur les différen[t]s Principes de la Statique*”¹⁹³, Lagrange define que “la statique est la Science de l'équilibre des forces”, ou seja, a estática é a ciência do equilíbrio das forças. Para Lagrange (1788), força ou energia trata-se de causa que produz ou tende a produzir movimento aos corpos, sendo a quantidade de movimento produzida, ou potencialmente a produzir, aspecto ligado à força ou à energia aplicada aos mesmos. No estado de equilíbrio, a força não tem esta função, ela não produz movimento, mas devemos

¹⁹¹ O cálculo de invariantes se refere apenas a formas homogêneas, que podemos entender como sendo polinômios que sempre mantêm o mesmo valor da soma dos expoentes das variáveis de cada um de seus termos. No primeiro exemplo podemos observar que em qualquer termo os expoentes das variáveis somadas resultam o valor dois, enquanto que no segundo, resultam três. Vejamos: 1º) $xy + 2y^2$ e 2º) $x^3 + 3x^2y + 4xy^2 + y^3$.

¹⁹² *La Statique* foi subdividida em oito seções.

¹⁹³ Sobre os Diferentes Princípios da Estática.

sempre medi-la pelo efeito que ela produziria se não estivesse parada (neutralizada ou interrompida por outras forças ou energias).

Tomando uma força aplicada qualquer, ou o seu efeito em uma unidade, a expressão de outra força qualquer deixa de ser uma representação de uma quantidade matemática que pode ser representado por números ou linhas, isto é, sob este ponto de vista, devemos considerar as forças na Mecânica. (LAGRANGE, 1788, p. 2, tradução nossa).

Lagrange (1788) considerou que o equilíbrio resulta da destruição de várias forças que se combatem e se aniquilam reciprocamente por meio das ações que elas exercem umas nas outras. Desse modo, o objetivo da Estática é estabelecer as leis segundo as quais esta destruição se opera. Estas leis são fundamentadas por princípios gerais que podem ser reduzidas em três: equilíbrio das alavancas, composição de movimentos e velocidades virtuais.

Para a lei de equilíbrio das alavancas, Lagrange (1788) se baseou no *Princípio da Alavanca* de Arquimedes. Lagrange inicia dizendo que uma alavanca direita é carregada de dois pesos, um para cada lado do ponto de apoio, e se as distâncias a este ponto de apoio forem reciprocamente proporcionais (inversamente proporcionais) aos pesos, a alavanca estará em equilíbrio, e o apoio estará carregado da soma dos dois pesos. Desse modo, se uma alavanca direita, for carregada com dois pesos iguais e colocados a distâncias iguais de seu ponto de apoio, ela estará em equilíbrio. Posteriormente, se dividirmos os dois pesos em vários pedaços iguais, e os distribuirmos de modo a manter as distâncias iguais entre si em relação ao ponto de apoio, a alavanca ainda estará em equilíbrio. Em outras palavras:

Se carregarmos uma alavanca direita, com dois pesos de massas P_1 e P_2 , com as distâncias respectivamente d_1 e d_2 de seus centros de massa em relação ao ponto de apoio de maneira com que esta alavanca fique em equilíbrio em relação a este mesmo apoio, teremos então que $P_1 \cdot d_1 = P_2 \cdot d_2$. Portanto determinadas transformações relativas aos pesos, são invariantes em relação ao equilíbrio da alavanca. Mudar a forma dos pesos é uma transformação invariante, desde que não alteremos massa e distância, a expressão $P_1 \cdot d_1 = P_2 \cdot d_2$, se manterá (LEITE e GODOY, 2018, p.33).

Lagrange (1788) fez uso da *lei das velocidades virtuais* para ampliar a noção de equilíbrio e de estática:

Seja um sistema qualquer, em estado de equilíbrio, de tantos corpos ou pontos que estejam sob ação de uma certa quantidade de forças, ao darmos a esse sistema um pequeno movimento, em virtude do qual cada ponto percorre um espaço infinitamente pequeno, expressará sua velocidade virtual; a soma dessas forças, cada

uma delas será multiplicada pelo espaço traçado após a aplicação das forças com resultado sempre igual a zero, em virtude que os pequenos espaços percorridos na mesma direção da força são tomadas como positivos, enquanto os que traçaram uma direção oposta são tomados como negativos (LAGRANGE, 1788, p. 10 e 11, tradução nossa).

Lagrange (1788) afirmou que esta lei consiste no *Princípio das velocidades virtuais*, sendo um importante axioma das ciências da Mecânica. Para dedução da fórmula desse princípio, Lagrange (1788) supõe que as energias $P, Q, R, \dots$ são direcionadas seguindo uma determinada linha, produzindo o equilíbrio em um sistema mecânico, isto é, essas energias são colocadas apropriadamente no intuito de gerar a estática do sistema.

É destacado ainda que os pontos por onde essas energias são aplicadas, levam à linhas retas iguais a $p, q, r, \dots$ que são as direções nas quais estas energias são aplicadas nestes pontos para gerar a estática do sistema. Qualquer alteração nessas linhas são designadas por $dp, dq, dr, \dots$, de modo que as variações nessas linhas, podem resultar uma mudança qualquer infinitamente pequena nas posições dos diferentes corpos ou pontos do sistema.

Partindo desta ideia ele analisou as leis de equilíbrio entre duas forças P e Q . Depois de algumas deduções e alguns cálculos ele chegou à seguinte expressão:

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp}$$

Ou seja,

$$Pdp + Qdq = 0 \quad (1a)$$

Posteriormente, Lagrange (1788) substituiu cada uma dessas energias por um ponto fixo inicialmente R , que resultou em:

$$Pdp + Rdr = 0 \quad (1b)$$

$$Qdq + Rdr = 0 \quad (1c)$$

A partir de (1a), (1b) e (1c), foi possível concluir que:

$$Pdp + Qdq + Rdr = 0 \quad (2)$$

Entretanto, Lagrange (1788) observa que deve haver uma relação entre as variações dp , dq e dr , por consequência das quantidades finitas p , q e r . Então, seja essa relação qual for, a variável p pode ser considerada como uma função das outras duas variáveis q e r , assim como, a diferencial dp , por definição, pode ser expressa como $dp = mdq + ndr$. Desse modo, ele afirma que ao considerarmos r como constante, podemos obter $dp = mdq$, bem como ao tomarmos q como uma constante, iremos obter $dp = ndr$.

Desse modo, é possível obtermos o termo Pdp a partir de (1a) como sendo representado por $Pmdq$, enquanto que na equação (1b), obteremos esse termo como sendo igual a $Pndr$, o que irá gerar que:

$$P(mdq + ndr) = Pdp \quad (3)$$

Lagrange (1788) diz que esse mesmo raciocínio é válido ao tomarmos q como uma função de p e r em (1a) e (1c) que resultará em Qdq , bem como ao considerarmos r como uma função de p e q em (1b) e (1c) é possível chegarmos ao resultado Rdr . Desse modo, ele considera que a soma do resultado obtido por meio das substituições em cada uma dessas funções geram a fórmula do equilíbrio para quaisquer três forças P , Q e R aplicadas no sistema mecânico, confirmando a veracidade da equação (2). Lagrange (1788) afirma ainda que esse resultado pode ser estendido adicionando uma quarta força, gerando a equação:

$$Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0 \quad (4)$$

O mesmo raciocínio é válido para a adição de uma quinta força, e assim por diante. Portanto, com essas ideias apresentadas, Lagrange deduziu que a equação de equilíbrio de um sistema qualquer com uma quantidade qualquer de forças, ou seja, o princípio das velocidades virtuais é:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0 \quad (5)$$

Ao final, Lagrange (1788) chega a conclusão de que quando desejado obter a soma dos instantes de todas as forças de um sistema dado, é necessário considerar cada uma das forças que age nos corpos ou pontos do sistema. Assim, a soma dos produtos das diferentes

Vamos considerar primeiramente a forma homogênea quadrática binária (a soma de todos os graus em cada um dos termos resulta dois: quadrática; e a forma apresenta duas variáveis x e y : binária):

$$Q = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (13a)$$

Agora aplicaremos a esta função homogênea uma derivada em relação a x e outra em relação a y , assim teremos que:

$$\begin{aligned} \partial_x &= 2ax + 2by \\ \partial_y &= 2bx + 2cy \end{aligned} \quad (13b)$$

Trazendo para forma irreduzível e as igualando a 0, teremos:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ bx + cy &= 0 \end{aligned} \quad (13c)$$

Agora tomaremos uma matriz formada apenas pelos coeficientes destas duas expressões irreduzíveis:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} \quad (14)$$

Desenvolvendo o determinante obteremos:

$$ac - b^2 \text{ ou } b^2 - ac$$

Que é um invariante da função homogênea quadrática binária. Agora para a função homogênea binária de quarto grau, tomemos a seguinte função:

$$Q = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 \quad (15)$$

Agora aplicaremos a esta função homogênea uma derivada em relação a x e outra em relação a y , com isto obtemos:

$$\begin{aligned}\partial_x &= 4ax^3 + 12bx^2y + 12cxy^2 + 4dy^3 \\ \partial_y &= 4bx^3 + 12cx^2y + 12dxy^2 + 4ey^3\end{aligned}\quad (16)$$

Devido ao fato da função original ser de grau par¹⁹⁵, então precisamos aplicar derivadas em relação a x e a y, até conseguirmos expressões de primeiro grau. Sendo assim aplicaremos a estas duas derivadas, mais uma derivada em relação a x e outra em relação a y, obtendo:

$$\begin{aligned}\partial_{xx} &= 12ax^2 + 24bxy + 12cy^2 \\ \partial_{xy} &= 12bx^2 + 24cxy + 12dy^2 \\ \partial_{yx} &= 12bx^2 + 24cxy + 12dy^2 \\ \partial_{yy} &= 12cx^2 + 24dxy + 12ey^2\end{aligned}\quad (17)$$

Como ainda não obtivemos a expressão de grau 1 então aplicaremos mais uma vez este processo de derivação em relação a x e a y, desta maneira teremos:

$$\begin{aligned}\partial_{xxx} &= 24ax + 24by \\ \partial_{xxy} &= 24bx + 24cy \\ \partial_{xyx} &= 24bx + 24cy \\ \partial_{xyy} &= 24cx + 24dy \\ \partial_{yxx} &= 24bx + 24cx \\ \partial_{yxy} &= 24cx + 24dy \\ \partial_{yyx} &= 24cx + 24dy \\ \partial_{yyy} &= 24dx + 24ey\end{aligned}\quad (18)$$

Obtendo assim as expressões de grau 1, traremos estas para a forma reduzida e as igualando a zero, teremos:

$$ax + by = 0 \quad (19a)$$

¹⁹⁵ Há uma pequena diferença ao utilizar esse método para obter o cálculo de invariantes em formas homogêneas de grau ímpar que consiste na quantidade de aplicação de derivação em reduzir o grau para $(n - 1)$ até obter uma quantidade de equações que possibilitem ser ordenadas em uma matriz quadrada para o cálculo do determinante.

$$bx + cy = 0 \quad (19b)$$

$$bx + cy = 0 \quad (19c)$$

$$cx + dy = 0 \quad (19d)$$

$$bx + cy = 0 \quad (19e)$$

$$cx + dy = 0 \quad (19f)$$

$$cx + dy = 0 \quad (19g)$$

$$dx + ey = 0 \quad (19h)$$

Agora vamos associar este sistema de equações da seguinte maneira, a (19a) com a (19h), a (19b) com a (19g), a (19c) com a (19f) e a (19d) com a (19e), colocando-as em matrizes, e depois em determinantes temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} e \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} \quad (20)$$

Agora desenvolvendo os determinantes, temos que:

$$(ae - bd) - (bd - c^2) - (bd - c^2) - (bd - c^2)$$

Que é o mesmo que:

$$ae - 4bd + 3c^2$$

É possível observarmos que as relações entre x e y aplicadas nas formas homogêneas Q (12) e (15), são utilizadas do mesmo modo por Lagrange (1788) ao abordar as relações entre as forças P e Q . Portanto, Boole (1841) generalizou seu método para o cálculo de formas homogêneas utilizando o mesmo raciocínio de Lagrange quando generalizou seu axioma das velocidades virtuais em 1788 no *Méchanique Analytique*. Desse modo, a partir de resultados provenientes das “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas vimos que Boole (1841) desenvolveu resultados do campo das “matemáticas puras”.

4.2.2 LAGRANGE E JACOBI

Enquanto Boole tomou a teoria de Lagrange como uma inspiração para formular algumas definições no seu artigo relacionado a Teoria dos Invariantes, Jacobi (1804-1851) fez uma discussão crítica da mecânica de Lagrange. Essa análise crítica de Jacobi se deu por conta de não corroborar a visão de que as ciências mecânicas não poderiam ser abordadas como sendo uma ciência axiomática-dedutiva. Pulte (1998) mostra que a crítica de Jacobi foi motivada por uma avaliação do papel da matemática nas ciências empíricas como uma dissolução do euclideanismo.

É destacado que os pensamentos de Jacobi no século XIX, talvez possa ter sido influenciado por uma nova visão de mundo ou cosmovisão que surgiu durante o século XVIII, advinda do neohumanismo alemão, denominada *Weltanschauung*. A ideia compartilhada por essa visão de mundo demarcava que:

A ciência e a educação científica tinham fins em si mesmas. A matemática, em especial, deve ser considerada como uma expressão pura da intelectualidade criativa como meio de desenvolvê-la ainda mais, não necessitando de outra justificativa qualquer que seja. Matemática aplicada ou mista, que estava no centro da tradição francesa, dificilmente era tolerada e era vista como uma degradação da legitimação da matemática (PULTE, 1998, p.161-162, tradução nossa).

Jacobi iniciou sua carreira universitária por volta do ano de 1825, e desde o começo de sua carreira, Pulte (1998) comenta¹⁹⁶ que ele cultivou o papel de um matemático puro e não de um físico-matemático. Além disso, é dito que para Jacobi: “O sentido adequado da matemática é produto do ‘dinamismo inerente ao espírito humano’; ela não depende de nenhuma experiência sensorial em qualquer estudo epistemológico, nem precisa de verificação externa (KNOBLOCH, PIEPER e PULTE, 1995, p.112, tradução nossa)”. Desse modo, é comentado que Jacobi foi explicitamente hostil à física-matemática francesa como era praticada por Fourier (1768-1830), Laplace (1749-1827), Poisson (1781-1840), entre outros.

Contudo, ele não ignorou as aplicações da matemática em física, especialmente nas ciências mecânicas. Uma primeira inclinação de Jacobi em relação a essas ciências foi observada durante uma palestra que foi considerada com uma certa tendência a visão platonista, na Universidade de Königsberg em 1832. Para ele a matematização da natureza

¹⁹⁶ O autor ainda comenta que matemáticos voltados a físico-matemática era dominante no cenário francês, e quanto a Jacobi, ele foi na direção contrária dessa tradição.

exige, como pré-requisito necessário, que “os conceitos de nosso espírito sejam expressos na natureza. Se a matemática não foi criada pelo acordo do nosso espírito [e] de acordo com as leis inculcadas na natureza, essas idéias matemáticas implantadas na natureza podem não ser percebidas (KNOBLOCH, PIEPER e PULTE, 1995, p.112-113, tradução nossa)”. Nesse contexto, embora Jacobi não tenha mencionado a mecânica explicitamente, ele descreveu um significado filosófico da aplicação da matemática:

As mesmas leis eternas são válidas em nosso espírito como na natureza; este é o pré-requisito, sem o qual o mundo não pode ser entendido, sem o qual nenhum conhecimento das coisas da natureza seja possível ... Devemos considerar a natureza, na medida em que expressa as leis matemáticas (KNOBLOCH, PIEPER e PULTE, 1995, p.112, tradução nossa).

É observado por Pulte (1998) que as investigações matemáticas de Jacobi durante a primeira metade de sua carreira, mostram uma forte orientação em direção às “matemáticas puras”, e que até o ano de 1834, ele não publicou nada que valha a pena mencionar em físico-matemática ou astronomia. É dito também que, até mesmo quando Jacobi começou a trabalhar na teoria das equações diferenciais de movimento por volta de 1835, estimulado por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), ele não estava interessado em possíveis implicações físicas ou filosóficas da teoria de Hamilton-Jacobi ou da mecânica em geral.

Durante as palestras de Jacobi na Universidade de Königsberg no período de 1842-1843, denominadas *Vorlesungen über Dynamik*¹⁹⁷, Pulte (1998) relata que não foi possível identificar nenhuma crítica em relação ao *Méchanique Analytique*, entretanto, durante a série de palestras intituladas *Vorlesungen über analytische Mechanik*¹⁹⁸ realizadas entre os anos de 1847-1848 em Berlim, Jacobi comentava que o *Méchanique Analytique* de Lagrange devia ser lido com certa cautela, por conta de considerar seu conteúdo mais de caráter sobrenatural do que baseado em demonstrações rigorosas.

A primeira crítica de Jacobi durante essas palestras em 1847-1848, foi em relação ao “*Princípio Geral de velocidades virtuais*”. Lagrange (1788) comenta que esse princípio é capaz de resolver todas as questões da estática, e foi elaborado a partir de uma extensão do que D'Alembert apresentou na obra *Traité de Dynamique* de 1758.

Segundo Pulte (1994), Jacobi dedicou parte do tempo dessas palestras para abordar as leis de repouso e movimento do *Méchanique Analytique*. Ele interpretou o princípio das velocidades virtuais como uma representação simbólica de um sistema de equações

¹⁹⁷ Palestras de Dinâmica.

¹⁹⁸ Palestras sobre mecânica analítica.

diferenciais. Dado um sistema mecânica sem quaisquer restrições, cada um dos n pontos de massa m , está sujeito a um sistema de forças de coordenadas cartesianas X_i, Y_i e Z_i , e assume a seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right\} = 0 \quad (1)$$

A equação (1) também se aplica a um sistema mecânico com restrições. Nesse caso, obtêm-se m igualdades contendo as coordenadas $3n$ dos pontos de massa ($m < 3n$). Desse modo, as $3n$ quantidades diferenciais $\delta x_i, \delta y_i$ e δz_i , serão variações virtuais ao invés de valores completamente arbitrários. Em caso de equilíbrio, o instante total das forças móveis desaparece, e dado que não há variação de movimento (instante total das forças = 0), da equação (1) temos:

$$\sum_{i=1}^n \{X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i\} = 0 \quad (2)$$

Nesse sistema em equilíbrio, o resultado dessa soma deve ser igual a zero, do mesmo modo podemos dizer que se o instante total das forças é igual a zero, é porque o sistema está em equilíbrio. Essas definições, de acordo com Pulte (1998), foi denominada por Jacobi como “princípio fundamental da estática” ou “a famosa expressão que Lagrange deu para o princípio das velocidades virtuais”.

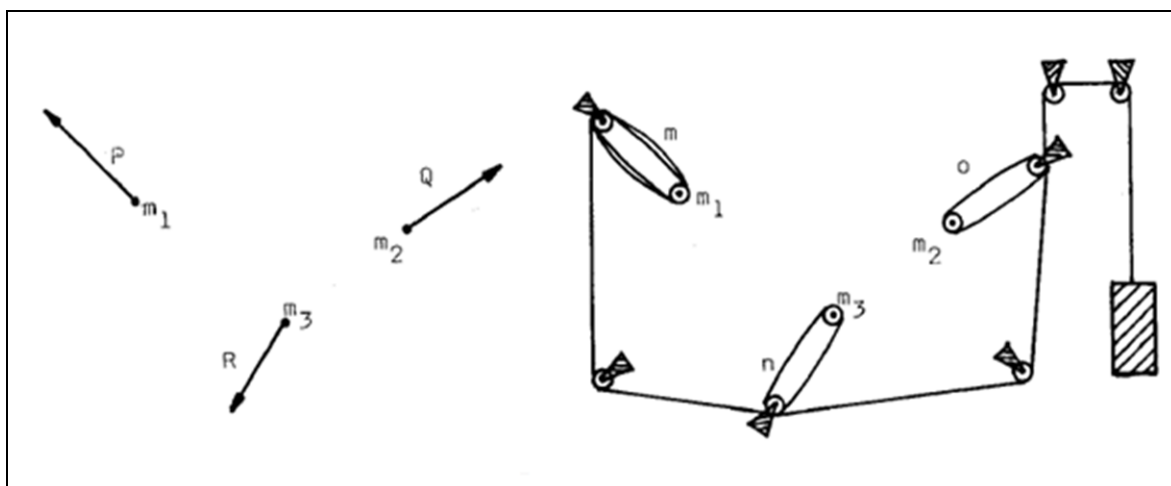
Lagrange (1788) não utiliza a representação cartesiana de Jacobi. Ele propõe um sistema de forças indivisas (que não podem ser tomadas separadas) $P, Q, R, \dots$, atuando ao longo das linhas $p, q, r, \dots$, em pontos de massa únicos. Uma simples perturbação no sistema de forças, provoca uma alteração na posição dos pontos de massa. Essas alterações são denominadas como *variações*, porque podem tomado o *primeiro momento* do movimento ou então, as *velocidades virtuais* desses pontos. Permitindo que as projeções nas linhas $p, q, r, \dots$, sejam $dp, dq, dr, \dots$, opostas às forças $P, Q, R, \dots$ indicadas por um sinal de menos. O instante total das forças do sistema, será de $Pdp + Qdq + Rdr + \dots$, e com isso, a equação (2) de Jacobi, em termos lagrangeanos, é dada por:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0 \quad (3)$$

Essa aproximação de Jacobi com a teoria lagrangeana, é descrita por Pulte (1998) como uma forma de reconhecimento das contribuições de Lagrange nas ciências físico-matemáticas, chegando até mesmo a considerar o princípio das velocidades virtuais como uma das maiores descobertas do século XVIII. Porém, ele critica o resultado dessa e outras proposições contidas no *Méchanique Analytique* por conta de não serem acompanhadas de uma demonstração.

A primeira tentativa que Lagrange utilizou para provar o princípio das velocidades virtuais, segundo Pulte (1998), foi baseada no *princípio das polias*. Isto é, ele introduziu um conjunto de polias sem massa e sem atrito, com um cordão inextensível e massa de peso unitário. Sua principal ideia era representar as forças $P, Q, R, \dots$, atuando em diferentes pontos do sistema mecânico por pares dessas polias com um número de enrolamentos $m, n, o, \dots$, desde que a tensão do cordão fossem iguais em todos os pontos do sistema (figura 53).

Figura 53 – Primeira prova de Lagrange



Fonte: Pulte (1998)

Lagrange (1788) assume que as forças $P, Q, R, \dots$ são valores racionais, e que é sempre possível encontrar números inteiros $m, n, o, \dots$, se forem escolhidos valores altos. Tomando essas informações como certas, pode ser obtida a expressão:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = mdp + ndq + odr + \dots \quad (4)$$

Se o sistema fosse submetido a um pequeno deslocamento, mdp é a alteração do comprimento para o primeiro par de polias, ndq para o segundo, ..., resultando numa soma

que fornece a mudança total de comprimento do cabo. No caso dessa soma ser igual a zero, a expressão (4) resulta no princípio das velocidades virtuais. Todavia, quando o comprimento total no cordão $mdp + ndq + odr + \dots$ pode ser assumido como igual a zero? Lagrange (1788) considera ser *evidente* que para manter o sistema em equilíbrio, dado que o peso tem a tendência de fazer descer as polias, é necessário que o peso não seja resultado de qualquer arbitrariedade do deslocamentos dos pontos do sistema.

Pulte (1998) relata que durante as palestras em 1847-1848, a partir dessa observação de Lagrange afirmar a *evidência* dos resultados, Jacobi dizia que “esta é certamente uma palavra ruim, onde quer que você a encontre, pode ter certeza de que existem sérias dificuldades; usar isso é um mau hábito dos matemáticos (PULTE, 1998, p.166, tradução nossa)”. Em outras palavras, onde Lagrange enxergava uma evidência confirmada e exatidão matemática, Jacobi averiguou a dificuldade de se observar essas evidências. Desse modo, é considerado duas proposições evidentes para Lagrange:

(L1) Se nenhum movimento fizer com que o peso desça, o sistema está em um estado de equilíbrio. Nesse caso, (4) é igual a zero.

(L2) Se houver (pelo menos) um movimento que permita que o peso desça, o sistema não está em equilíbrio. O peso vai necessariamente diminuir "por si só" e irá produzir um deslocamento do sistema. Nesse caso, (4) não é igual a zero.

Pulte (1998) mostra que as proposições (L1) e (L2) são problemáticas para Jacobi a partir de uma lógica e do ponto de vista matemático. Ele divide os argumentos de Jacobi em relação à primeira prova do princípio das velocidades virtuais, que foram apresentados durante essas palestras entre 1847-1848 em quatro aspectos:

(J1) A conclusão (L1) é possivelmente verdadeira quando restrita a estabilidade do equilíbrio. Porém, ainda assim essa proposição não pode ser tomada como certa porque foi baseada em evidências empíricas, além disso, descreve que um peso só pode se movimentar para baixo, a menos que esteja em estado de equilíbrio. Já o pêndulo simples mostra, no entanto, que a direção de uma força móvel não é necessariamente a mesma que a do próprio movimento. Então, Jacobi conclui que “você tem que perceber que essas possíveis considerações não são mais do que prováveis, e não deve ser tomada como uma demonstração [matemática] (PULTE, 1998, p. 167, tradução nossa)”.

(J2) A conclusão (L2) está definitivamente errada porque desconsidera, mesmo que quase irrelevantes, a instabilidade e o equilíbrio mediano. Mais uma vez, basta examinar um pêndulo simples, onde o peso é colocado perpendicularmente acima do ponto de suspensão. Isto mostra que é possível tirar o sistema do estado de equilíbrio por todos os deslocamentos

infinitesimais não inseridos na direção da biela. Desse modo, Lagrange não poderia afirmar que o peso iria necessariamente fazer o sistema descer porque (L2) se refere apenas a uma condição referente a estabilidade do sistema em equilíbrio.

(J3) Jacobi comenta que Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), também de Koenigsberg, compartilha a opinião de que os equilíbrios instáveis e medianos são irrelevantes na física porque eles são sempre e imediatamente destruídos por “forças que giram ao redor”, entretanto, isso não é motivo para restringir uma demonstração do princípio das velocidades virtuais para um sistema de equilíbrio estável.

(J4) Para Jacobi, quando uma proposição não é aplicável em sua totalidade, as condições do sistema não podem ser representadas por igualdades, mas sim, desigualdades. Assim, uma formulação mais geral para o princípio das velocidades virtuais deveria ser da forma:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots \leq 0 \quad (5)$$

Uma demonstração de (5) teria que abandonar a exclusão de Lagrange em relação aos instantes negativos, porque quando as desigualdades são levadas em consideração, o argumento de que dp , dq , dr , . . . , podem ser substituídas pelos seus opostos não são mais válidas nesse caso, pois geraria uma igualdade.

Desse modo, Pulte (1998) considera que tanto (J3) e (J4) se opõem a falta de generalização do axioma das velocidades virtuais de Lagrange, de modo que, (J3) se refere a transição de (2) ou (3) para um sistema dinâmico, enquanto (J4) se refere a transição de (2) ou (3) para um sistema estático mais geral (5). Em relação a (J1) e (J2), a preocupação de Jacobi caminha na direção de que há significados vagos quanto ao equilíbrio considerado por Lagrange, faltando uma distinção apropriada entre o equilíbrio estável e outras formas de equilíbrio. Portanto, é concluído que para Jacobi, o princípio das polias não pode ser considerada uma demonstração matemática, mas sim, uma construção artificial do princípio das velocidades virtuais.

Poucos meses antes de morrer, conforme Pulte (1998), Lagrange realizou outra tentativa de demonstração do princípio das velocidades virtuais. A prova dessa proposição está na publicação *Theory of fonctions analytiques* de 1813. Nessa nova demonstração, ele inicia com o princípio das polias, entretanto, ao invés de utilizar a polia como um sistema de forças atuando nas diferentes massas, Lagrange as considerou para representar as conexões ou restrições entre as massas:

(L3) Sejam duas massas M e N com as coordenadas x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 em repouso. Se essas massas estiverem relacionadas devido a uma ação ou restrição mútua, independente do tempo, essa restrição pode ser expressa pela função:

$$u(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = 0 \quad (6)$$

Tomando M ou N como fixo, (6) determina uma certa superfície bidimensional para o restante da massa M ou N, respectivamente. Lagrange queria mostrar que a força de restrição pode ser assumida como perpendicular a esta superfície, isto é, que a força em M e N pode ser expressa desta maneira:

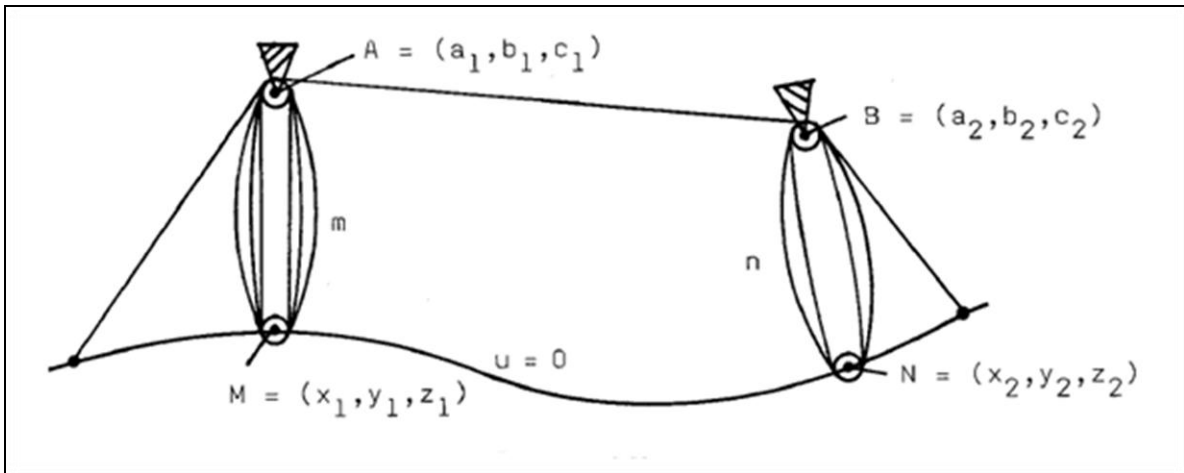
$$\text{Força sobre M: } \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1}, \lambda \frac{\partial u}{\partial y_1}, \lambda \frac{\partial u}{\partial z_1} \right); \quad (7)$$

$$\text{Força sobre N: } \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2}, \lambda \frac{\partial u}{\partial y_2}, \lambda \frac{\partial u}{\partial z_2} \right).$$

Sendo que, o multiplicador de Lagrange λ é um coeficiente indeterminado no momento. Além disso, (7) ao fornecer forças quantitativas correspondentes a certas restrições de forças físicas atuantes, é capaz de representar as forças de restrição em (6) por conta de minimizar a lacuna entre a representação puramente matemática das restrições concebidas geometricamente, e as ações físicas dadas por funções de força (tal como a lei da gravidade e as forças de atrito por exemplo).

(L4) Para conseguir a representação das forças das restrições (7), Lagrange assumiu que a restrição (6) pode ser substituída por uma polia ideal, seu cabo inextensível sendo fixado no ponto M, enrolado m vezes ao redor de M e um rolo fixo A, então indo para outro rolo fixo B, enrolado n vezes ao redor de B e o segundo ponto N, e depois fixado em N (figura 54).

Figura 54 – Segunda prova de Lagrange



Fonte: Pulte (1998)

A inextensibilidade do cordão pode ser expressa pela equação:

$$f = m\overline{AM} + n\overline{BN} - d = 0 \quad (8)$$

Com uma certa constante de comprimento d. A função f assume a forma:

$$f = m\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 + (z_1 - c_1)^2} + n\sqrt{(x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 + (z_2 - c_2)^2} - d \quad (9)$$

A partir de (7), vemos que as forças da polia podem ser obtidas por meio das derivadas parciais de f. Vemos em (9) que a função f contém nove constantes arbitrárias: as seis coordenadas dos pontos A e B, a constante de comprimento d e os dois números de enrolamento m e n. Assim, ao substituir a função da polia u em f, têm-se que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = m^2; \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 = n^2 \quad (10)$$

Para que essa substituição fosse possível, é necessário que u esteja em contato com f. Então, as derivadas parciais de u e f serão idênticas:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial y_1}; \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial u}{\partial z_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}; \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial y_2}; \frac{\partial f}{\partial z_2} = \frac{\partial u}{\partial z_2} \quad (11)$$

(L5) No caso de equilíbrio, essas forças de restrição são balanceadas por forças livres para cada ponto de massa. Pode-se substituir cada componente das forças livres pela derivada parcial correspondente da função u de acordo com (7). Para obter o instante total do sistema mecânico para expressar o princípio de velocidades virtuais (2), é necessário somar o produto dessas derivadas parciais e os deslocamentos arbitrários, dados por $\delta x_i, \delta y_i, \dots$, obtendo-se então:

$$\sum_{i=1}^2 (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum_{i=1}^2 \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \delta x_i + \frac{\partial u}{\partial y_1} \delta y_i + \frac{\partial u}{\partial z_1} \delta z_i \right) = 0 \quad (12)$$

É dito que a última igualdade é válida porque os deslocamentos $\delta x_i, \delta y_i, \dots$ são compatíveis com a restrição (6), implicando que o diferencial total de u deve ser igual a zero ($du = 0$). A equação (12) fornece a expressão analítica do princípio de velocidades virtuais (2) para duas massas e uma restrição. Também indica que o argumento é válido para um número arbitrário de pontos de massa n e um número de restrições m ($u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_m = 0$) porque nesse caso é possível repetir o argumento com m polias ($du_1 = 0, du_2 = 0, \dots, du_m = 0$) e obter o mesmo resultado de (2). Pulte (1998) comenta que Lagrange se deu por satisfeito com essas proposições para demonstrar o princípio das velocidades virtuais, por conta dela ser uma consequência natural das fórmulas que expressam as forças pelas equações das condições de restrição.

Essa segunda demonstração de Lagrange, também não satisfaz Jacobi. Pulte (1998) apresenta que a crítica do matemático em relação a essa segunda tentativa se deu principalmente aos resultados apresentados em (L4), quando Lagrange substituiu a função de restrição u pela função da polia f . É dito que a intenção de Jacobi era mostrar que essa proposição estava errada, e para isso ele se concentrou em criticar o que considerava o ponto mais fraco da mecânica de Lagrange: a transição da estática para a dinâmica.

Pulte (1998) relata ainda que Jacobi ponderou que essa transição foi abordada de forma muito simples, e que ao ler o *Mécanique Analytique* era possível acreditar que as equações de movimento seguissem o mesmo princípio das equações de equilíbrio, além de que cada um desses prováveis princípios foram apenas assumidos como verdadeiros, sem demonstrações matemáticas.

Os multiplicadores de Lagrange foram introduzidos como coeficientes indeterminados, mas Pulte (1998) mostra que para Jacobi esses multiplicadores tem um

significado mecânico especial porque eles expressam a maneira como as restrições afetam o sistema ou, em termos, eles são proporcionais à força exercida por uma restrição. Nesse caso, é possível livrar o sistema de uma restrição $u = 0$ de massa com coordenadas (x, y, z) se for aplicado uma força:

$$\left(-\lambda \frac{\partial u}{\partial x}; -\lambda \frac{\partial u}{\partial y}; -\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (13)$$

O sinal de menos indica que essa força tem direção oposta à força de restrição. Algebricamente significa que essa força é subtraída em ambos os lados da equação. Ou, nas palavras de Jacobi, "a essência da análise [de Lagrange] mecânica que as operações algébricas simples correspondem às considerações mecânicas. Esta substituição de restrições por forças corresponde a trazer termos sobre o outro lado das equações (JACOBI apud PULTE, 1998, p. 173, tradução nossa)". Portanto, para realizar essa substituição, é necessário determinar os multiplicadores de Lagrange do sistema.

Como dito anteriormente, a preocupação de Jacobi, segundo Pulte (1998), era com os problemas de como isso funciona se procedemos da estática à dinâmica, e se este procedimento é compatível com a segunda demonstração de Lagrange. Desse modo, Jacobi considera um sistema com n pontos e m restrições ($m < 3n$). As restrições independentes e suas duas primeiras derivadas são dadas por:

$$u_k = 0, k = 1, \dots, m \quad (14a)$$

$$\frac{du_k}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (14b)$$

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} = \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \ddot{x}_i \quad (14c)$$

De acordo com Lagrange (1788), essas restrições podem ser incorporadas ao princípio das velocidades virtuais (Equações (1) e (2)) restringindo as variações $\delta x_i, \dots$ nas mesmas condições de (14a), mas também adicionando as variações correspondentes, multiplicadas pelos multiplicadores de Lagrange para obter o instante total.

Neste último caso, a forma estática (2) do princípio de velocidades virtuais torna-se:

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \delta x_l \quad (15a)$$

No caso da dinâmica, é dada por¹⁹⁹:

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \delta u_l \quad (15c)$$

Novamente, se o equilíbrio se mantiver, (15a) fornece estas $3n$ equações de repouso:

$$X_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \quad (16a)$$

*Mutatis mutandis*²⁰⁰, (15c) leva a estas $3n$ equações de movimento:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \quad (16c)$$

Dada as considerações de Lagrange (1788), Pulte (1998) divide as críticas de Jacobi em relação a segunda demonstração do princípio das velocidades virtuais, apresentadas durante as palestras realizadas entre 1847-1848, em três etapas:

(J5) O caso de equilíbrio, isto é, o sistema mecânico sujeito às forças X_i e m restrições (14a), está em repouso, e a posição dos n pontos de massa tem que ser determinada. Isso não representa problema para o método dos multiplicadores, dado que existem equações $3n + m$ (16a) e (14a) para determinar os m multiplicadores de Lagrange λ_l e as coordenadas $3n$ dos pontos de massa. Depois de determinar λ_l , é possível interpretar que o sistema é livre ao adicionar em ambos os lados da equação (16a) o negativo da soma de todas as forças de restrição:

¹⁹⁹ As equações (15b) e (16b) serão dadas na crítica de Jacobi (J6).

²⁰⁰ *Mutatis mutandis* é uma expressão advinda do latim que significa "mudando o que tem de ser mudado".

$$X_i - \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0 \quad (17a)$$

Quanto a questão de como esse procedimento pode ser transferido para um sistema dinâmico, (15c) fornece $3n$ equações, advindas da aplicação da derivada segunda em (15a), sendo equações diferenciais de movimento (16c). Ao assumir que o sistema (16c) é solucionável, um problema ainda permanece se for considerado que as restrições sempre podem ser substituídas por forças adequadas, isto é, as posições iniciais e os pontos de massa devem ser escolhidos de modo que o movimento esteja em consonância com as restrições para todos os tempos anteriores: ". . . quando tudo está completamente integrado, este problema tem que ser resolvido apenas para determinar constantes (JACOBI apud PULTE, 1998, p.174, tradução nossa)", se referindo que resta determinar as $6n$ constantes arbitrárias pertencentes à solução de (16c) em acordo com as restrições (15c).

(J6) Jacobi inseriu um *intermezzo* dados por (15b) e (16b), que pode ser interpretado como um passo para preencher a lacuna entre (15a) e (15c) e suas soluções (16a) e (16c), respectivamente. Essas equações intermediárias foram acrescentadas decorrentes do seguinte questionamento: “o que acontece se um impulso instantâneo de tamanho finito, incompatível com as restrições, é exercido no sistema em repouso? (PULTE, 1998, p.175, tradução nossa)”. A resposta é que o movimento dos pontos de massa seriam modificados de acordo com as restrições. Se a_i for um desses impulsos materiais, mecanicamente dados em $t = 0$ e x'_i as velocidades adotadas pelos pontos de massa do sistema após o impulso, essa relação é dada por:

$$\sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i x'_i) \delta x_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \delta u_l \quad (15b)$$

$$a_i - m_i x'_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \quad (16b)$$

A equação (16b) mostra que um determinado impulso a_i , é subtraído do impulso $m_i x'_i$, ou seja, o impulso que foi adotado pelo sistema por aquele dado pelas restrições. Assim, com

o propósito de determinar os multiplicadores de Lagrange λ_l , e posteriormente, o impulso real dado no sistema, Jacobi substituiu as velocidades $\dot{x}_i$ em (14b) por meio de (16b) obtendo:

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{1}{m_i} \left(a_i - \sum_{l=1}^m \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} a_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{1}{m_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0$$

Ou,

$$b_k = \sum_{l=1}^m A_{kl} \lambda_k \quad (17b)$$

Onde,

$$b_k := \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} a_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} ; A_{kl} := \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \quad (18a)$$

Dado isso, o que foi mostrado por Jacobi, é que os multiplicadores de Lagrange sempre podem ser determinados por (17b) se, e somente se as m restrições forem independentes:

$$\det(A_{kl}) \neq 0 \quad (19)$$

Desse modo, os multiplicadores de Lagrange vão depender das restrições dadas pela derivada primeira em (14b) e pelo impulso a_i . A partir de (17b) é possível determinar os multiplicadores, o que resulta que os impulsos pertencentes às restrições (lado direito da equação 16b) também podem ser obtidos. Então, o sistema mecânico pode ser tratado como livre por meio da subtração desse sistema com restrições:

$$a_i - m_i \dot{x}_i - \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

A conclusão de Jacobi é que a ideia de Lagrange em eliminar as restrições de um sistema mecânico por meio de seu método de multiplicadores também trabalha para este

intermezzo (15b) e (16b). Com isso é possível ter garantia de que as constantes arbitrárias no sistema de equações diferenciais (15c) podem ser determinadas de forma adequada, sendo essa, uma condição essencial na dinâmica.

(J7) Em um sistema dinâmico, os pontos de massa estão subjacentes não apenas às restrições (14a), mas também há uma atuação contínua da força X_i conforme (15c). Porém, de modo algum é evidente que as forças em movimento $m_i \ddot{x}_i$ (15c) não violem as restrições do sistema, sendo assim, necessário uma prova dessa proposição. O procedimento dessa prova é análogo a crítica (J6), com (15b) e (16b) sendo substituídos por (15c) e (16c). No entanto, as acelerações em (16c) têm de serem compatíveis com as restrições, assim, pode-se substituir $\ddot{x}_i$ em (14c) por meio de (16c) e obter:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left(X_i - \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} X_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^m \lambda_l \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

Ou,

$$U_k + c_k = \sum_{l=1}^m A_{kl} \lambda_l \quad (17c)$$

Onde A_{kl} ainda é o mesmo que em (18a), mas U_k e c_k são dados por:

$$U_k := \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j; \quad c_k := \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} X_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (18b)$$

A equação (17c) fornece um sistema de equações para determinar os multiplicadores, do mesmo modo que (17b). Novamente, sua determinação é possível se as restrições forem independentes, isto é, se (19) for cumprido. Contudo, U_k é uma função homogênea de segunda ordem nas velocidades $\dot{x}_i$ e seus coeficientes também são derivadas de segunda ordem das funções de restrição (14a).

Como consequência desse resultado, os multiplicadores λ_i são dependentes das derivadas de ordem 2, e também serão funções de velocidade homogêneas. Porém, nessa segunda demonstração do princípio das velocidades virtuais, Lagrange aproximou somente as derivadas de primeira ordem quando ele substituiu as funções de restrição u_i com as funções da polia f_i , sem impor condições às derivadas de segunda ordem do sistema. Desse modo, para Jacobi:

Daí resulta uma objeção à transição da estática para a dinâmica. O princípio da estática não lida de modo algum com pontos em movimento e uma investigação particular, um princípio particular deve ser assumido, de como as velocidades são constituídas e modificadas... Nas equações que acabamos de formar, as segundas equações diferenciais das restrições u aparecem, mas com considerações que visam uma demonstração dessas proposições, e das quais Lagrange especialmente fez uso em sua *théorie des fonctions*, as restrições dadas são substituídas sem prévio aviso por um sistema diferente de restrições, que subjaz apenas a uma restrição, que as novas restrições são idênticas tanto nas posições dos pontos físicos em um determinado momento e nas primeiras equações diferenciais (JACOBI apud PULTE, 1998, p.177, tradução nossa).

Portanto, é possível observarmos que nessa segunda demonstração do princípio das velocidades virtuais, a principal preocupação de Jacobi foi a transição de um sistema em equilíbrio para um sistema dinâmico, dessa forma, ele criticou as substituições das funções de restrição do sistema com as funções da polia, bem como questionou o porquê de um sistema sob restrições ser tratado como livre utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Pulte (1998) acredita que essas críticas durante a série de palestras *Vorlesungen über analytische Mechanik*, realizadas entre os anos de 1847-1848, se deram por conta dos avanços dos tópicos de “matemática aplicada” que ocorreram entre o intervalo da realização das palestras proferidas entre 1842-1843. E acrescenta que Jacobi:

aderiu à matemática pura como o padrão de rigor e certeza, ele chegou a uma distinção mais clara de conhecimento matemático e empírico e desenvolveu uma atitude mais crítica em relação ao problema do porquê a matemática como produto da nossa mente deve ser aplicável à realidade natural. Ele desistiu de seu platonismo (...) e chegou a um ponto de vista mais moderno e modesto. Sua nova crítica à mecânica de Lagrange é a expressão mais distinta dessa mudança porque levou a uma dissolução do tradicional euclidismo mecânico (PULTE, 1998, p.163, tradução nossa).

Dessa forma, as contribuições nas “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas dadas por Lagrange, serviram de base para que Jacobi desenvolvesse novas formulações a respeito da “matemática pura” e das ciências mecânicas. Assim, mesmo que fosse para contestar as ideias de Lagrange, consideramos que os desenvolvimentos matemáticos no

Méchanique Analitique contribuíram para o campo das “matemáticas puras”, tal como é apontado por Pulte (1998).

Além disso, de acordo com Pulte (1998), juntamente de Jacobi, Hamilton foram os matemáticos mais bem-sucedidos durante a primeira metade do século XIX que desenvolveram a mecânica ao longo de “linhas Lagrangeanas”. É dito ainda que Hamilton chegou inclusive a escrever que a obra de Lagrange se tratou de “um tipo de poema científico”, e que ele foi responsável por adicionar novas “estrofes” para o mesmo “poema”. Segundo Chang²⁰¹ (2013), essa referência se deu principalmente ao tomar as equações de movimento na obra de Lagrange, e complementar essas ideias fornecendo métodos de integração nessas equações, que foram posteriormente denominadas como Equação de Hamilton-Jacobi, assim, sendo uma consequência lógica da abordagem de Lagrange.

4.2.3 LAGRANGE E CAYLEY

De acordo com Crilly (2006), Arthur Cayley (1821-1895) ao desenvolver as memórias referentes à Teoria dos Invariantes, teve como influência resultados matemáticos de Jacobi, Boole e também do *Méchanique Analitique* de Lagrange. Ao compararmos alguns dos resultados de Lagrange (1788) e Cayley (1854, 1856), podemos perceber algumas aproximações entre as ideias que foram utilizadas para tópicos das “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas com o desenvolvimento de tópicos das “matemáticas puras”.

Lagrange (1788) como vimos anteriormente, a partir de duas forças ou energias P e Q , expressou o equilíbrio por meio do *Princípio das Velocidades Virtuais* de em um sistema qualquer de forças, cuja estrutura do sistema mecânico deveria garantir a condição estática do sistema. Na segunda memória dos quânticos, Cayley (1856) considera uma função geral u pode ser determinada como um invariante ou covariante por meio de um sistema de equações diferenciais parciais. Assim, dado um conjunto $(a, b, c, \dots)$, covariante ou invariante de uma função, o sistema admite a forma $u = P, u = Q, \dots$, onde $P, Q, \dots$, são funções homogêneas do conjunto $(a, b, c, \dots)$.

Entretanto, na primeira memória dos quânticos, Cayley (1854) considera duas operações quaisquer P, Q , envolvendo cada uma ou qualquer uma das diferenciações em

²⁰¹ Vale a pena destacar, que Chang (2013), apresenta que Hamilton, além das ideias de Lagrange, também desenvolveu teorias embasada na física newtoniana. Em outras palavras, podemos dizer que para desenvolver seus tópicos de “matemática pura”, ele tomou como base teórica, dois autores que são referências em tópicos considerados como “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas.

relação às variáveis contidas em outras delas. É necessário investigar o efeito da operação $P.Q$, onde a operação Q deve ser primeiramente efetuada sobre algum operando Ω , e a operação P , é então, realizada sobre o operando $Q\Omega$.

Lagrange (1788) define o seguinte teorema:

Se a soma dos produtos das forças paralelas, pelas suas distâncias aos três planos perpendiculares entre eles, seja nula em relação a cada um destes três planos, o efeito das forças para fazer girar o sistema em torno de um ponto comum da intersecção dos mesmos planos, se encontrará destruída (LAGRANGE, 1788, p. 35, tradução nossa).

Desta forma para considerar valores máximo e mínimo de movimento no estado de equilíbrio, Lagrange (1788) retoma a fórmula geral $Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0$, lembrando que esta representa o equilíbrio das forças $P, Q, R, \dots$ direcionada nas retas $p, q, r, \dots$, supondo que estas forças sejam expressas de uma forma que a fórmula $Pdp + Qdq + Rdr + \dots$ seja uma diferencial exata de uma função de $p, q, r, \dots$ a qual é representada por ϕ , de modo que temos $d\phi = Pdp + Qdq + Rdr + \dots$. Então temos que equilibrar esta equação $d\phi = 0$, o que deixa claro que o sistema deve ser organizado de forma que a função ϕ seja de um modo geral um máximo ou um mínimo.

Assim, após algumas consideração do tipo $m'u'^2 + m''u''^2 + m'''u'''^2 + \dots = K - 2\phi$ (onde: $m, m', m'', m''', \dots$ representam as massas de cada corpo do sistema; $u, u', u'', u''', \dots$ representam as velocidades de cada um dos corpos do sistema, respectivamente; e o valor de ϕ é um mínimo ou um máximo, no estado de equilíbrio, segundo o valor de $m'u'^2 + m''u''^2 + m'''u'''^2 + \dots$ que expressa a força de todo o sistema); Lagrange (1788) encontra a expressão:

$$\phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \dots \quad (1)$$

E com esta e outras expressões encontrada anteriormente, ele desenvolve cálculos e deduções, realizando também algumas substituições encontrando enfim a equação:

$$\begin{aligned} M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \dots \\ = M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \dots - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Lagrange (1788) conclui dois resultados a partir dessa equação:

1º) Que no caso do mínimo do ϕ , no qual os coeficientes $f, g, h, \dots$ são todos positivos, o valor sempre positivo, $2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \dots$, deverá ser necessariamente menor, ou pelo menos não pode ser maior que o valor dado por $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \dots$ que é em si mesma muito pequena, por consequência se chamamos este valor de T , teríamos para cada uma das variáveis $\xi, \eta, \zeta, \dots$ estes limites $\pm\sqrt{\frac{T}{2f}}, \pm\sqrt{\frac{T}{2g}}, \pm\sqrt{\frac{T}{2h}}, \dots$ entre os quais eles estarão necessariamente contidos, de onde segue que, neste caso o sistema pouco desviará seu estado de equilíbrio, e apenas poderá fazer oscilações muito pequenas e de um alcance determinado.

2º) Que no caso do máximo do ϕ no qual os coeficientes $f, g, h, \dots$, são todos negativos, o valor sempre positivo $-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \dots$, poderá crescer para o infinito, portanto o sistema poderá se desviar mais e mais do seu estado de equilíbrio.

Desse modo, ao aplicar um operador ϕ em um sistema de forças em equilíbrio, de acordo com Lagrange (1788), esse sistema praticamente se manterá em equilíbrio quando o resultado desse operador ϕ for positivo. Cayley (1854), utiliza esse mesmo princípio para determinar um operador ϕ , entretanto, o objetivo é que ao aplicar ϕ em um quântico, o resultado dessa operação deve se manter invariante e covariante.

Para isso, Cayley (1854) supõe que P envolve as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \dots$ em relação as variáveis $a, b, \dots$ contidas em Q e Ω . Essas diferenciações são utilizadas na operação P para substituir $\partial_a, \partial_b, \dots$ por $\partial_a + \partial'_a, \partial_b + \partial'_b, \dots$ onde os símbolos não acentuados são operados somente sobre Ω , e os símbolos acentuados operados somente sobre Q .

Dito isso, Cayley (1854) supõe que P é expandido em potências ascendentes de $\partial'_a, \partial'_b, \dots$, na forma $P + P_1 + P_2 + \dots$, tendo primeiro de encontrar os valores de $P_1Q, P_2Q, \dots$, que atua efetivamente sobre Q como operador das diferenciações $\partial'_a, \partial'_b, \dots$. Os símbolos $PQ, P_1Q, P_2Q, \dots$, conterà então somente as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \dots$ que operam sobre Ω , e o significado da expressão é escrito por:

$$P.Q = PQ + P_1Q + P_2Q + \dots \quad (3a)$$

Em particular, se P for uma função linear de $\partial_a, \partial_b, \dots$, Cayley (1854) comenta que temos de substituir P por $P + P_1$, onde P_1 é a mesma função de $\partial'_a, \partial'_b, \dots$ e P é de $\partial_a, \partial_b, \dots$, portanto, nesse caso temos:

$$P.Q = PQ + P(Q) \quad (3b),$$

onde sobre o lado direito do termo PQ as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \dots$ são consideradas e não afetam de maneira alguma o símbolo Q , enquanto o termo $P(Q)$ é o que foi representado anteriormente em cada caso por P_1Q .

Da mesma maneira, se Q é uma função linear de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$, ou se P é uma função linear de $a, b, c, \dots$,

$$Q.P = QP + Q(P) \quad (3c)$$

e das duas equações ($PQ = QP$) derivam:

$$P.Q - Q.P = P(Q) - Q(P) \quad (4)$$

Dessa forma, como é atribuído por Cayley (1854) que $PQ = QP$, essas substituições também resultam num resultado igual a zero. Para Cayley, o resultado ser igual a zero significava o quântico²⁰² ser homogêneo, enquanto que para Lagrange (1788) significava que o sistema mecânico estava em equilíbrio.

Lagrange (1788) considera que durante a transição de um sistema estático para um sistema dinâmico, para que o equilíbrio seja estabelecido novamente deve ser subtraído do impulso que provocou esse movimento, a soma de cada uma das forças de restrição. Além disso, para determinar essas forças de restrição, é feito o uso dos multiplicadores de Lagrange.

Cayley (1854) utiliza esse mesmo raciocínio, entretanto, ele aplica esse resultado e as multiplicações entre os coeficientes, considerando operações lineares aplicadas aos quânticos para definir o que são covariantes e invariantes, pois mesmo com as operações e somas entre os elementos do quântico, eles se mantêm homogêneos. Desse modo, Cayley (1854) considera inicialmente um quântico de graus $m, m' \dots$ nos conjuntos $(x, y \dots), (x', y' \dots), \dots$ é representado em sua grande maioria por uma notação como,

²⁰² O termo Quântico para Cayley (1854) é usado para denotar todo o assunto de funções, equações e qualquer propriedade derivada destas funções e equações. A palavra “quântico” é um adjetivo, que significa algo como “um tal grau”, mas pode ser usada substantivamente, e esse substantivo pode ser entendido como uma função. Essa palavra pode ser utilizada também no plural, “quânticos”. Além disso, Quântico significa o mesmo que “forma homogênea” denominado por Boole (1841). O que Cayley fez, foi apenas mudar o nome de algo que já existia, o que trouxe algumas discussões na época da submissão desse artigo na *Philosophical Transaction of Royal Society of London*.

$$(*) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots \quad (5a)$$

onde a marca *, pode ser considerada como indicativo da generalidade absoluta do quântico; qualquer quântico pode ser considerado como soma de uma série de termos $x^\alpha y^\beta \dots x'^{\alpha'} y'^{\beta'} \dots$, dos graus adequados dos diversos conjuntos, cada termo multiplicado por um coeficiente; esses coeficientes podem ser meros múltiplos numéricos de únicas letras ou elementos como $a, b, c, \dots$, ou quaisquer funções de tais elementos. Foi dito que os coeficientes podem ser múltiplos numéricos de únicas letras ou elementos como $a, b, c, \dots$, pelo coeficiente numérico apropriado de um termo $x^\alpha y^\beta \dots x'^{\alpha'} y'^{\beta'} \dots$, ou seja, o coeficiente desse termo na expansão de:

$$(x + y \dots)^m (x' + y' \dots)^{m'} \dots \quad (5b),$$

e representado pela notação:

$$(a, b, \dots) (x, y \dots)^m (x', y' \dots)^{m'} \dots \quad (5c)$$

Desse modo, um quântico que cada termo é multiplicado por um apropriado coeficiente numérico como pelo coeficiente literal ou elemento que pertence ao conjunto $(a, b, \dots)$ dos coeficientes literais ou elementos. Em outras palavras, Cayley (1854) representa pela notação (5c) um quântico em que cada termo é multiplicado somente por coeficientes literais ou elementos pertencentes ao conjunto $(a, b, \dots)$ dos coeficientes literais ou elementos.

Quando os coeficientes são funções dos elementos $(a, b, \dots)$, Cayley (1854) a partir de (5a), ele observa que sempre haverá uma operação sobre os elementos, equivalente no que diz respeito ao quântico para a operação $x\partial_y$. Desse modo, ao derivar as relações entre cada elemento, é necessário multiplicar por funções próprias dos elementos, e ao somar esse resultado, é possível obter o mesmo resultado da diferenciação com ∂_y ao multiplicar por x .

Cayley (1854) representa por $\{x\partial_y\}$ a operação sobre os elementos equivalentes a $x\partial_y$, e escreve as séries de operações:

$$\{x\partial_y\} - x\partial_y, \dots \quad \{x'\partial_{y'}\} - x'\partial_{y'}, \dots \quad (6),$$

onde x, y são considerados como sendo sucessivamente substituídos por todas as permutações de dois diferentes facientes do conjunto $(x, y, \dots)$; x', y' como sucessivamente substituídos por todas as permutações de dois facientes do conjunto $(x', y', \dots)$, e assim por diante; e isso é chamado de “todo o sistema”, dessa forma, é possível concluir que o quântico é reduzido a zero por cada uma das operações do sistema todo.

Cayley (1854) complementa ainda que além do próprio quântico, há uma variedade de outras funções que são reduzidas a zero por cada uma das operações do sistema todo; tal função é chamada de *covariante* do quântico, e no caso que contém apenas os coeficientes, *invariante*. Assim, ele considera que a definição de um covariante pode ser generalizada em duas direções.

1º) É possível considerar dois ou mais quânticos ao invés de apenas um porque as operações $\{x\partial_y\}$, embora sejam representadas pelos mesmos símbolos x, y , se trata de diferentes quânticos, diferentes significados, logo, ao escrever a soma $\Sigma\{x\partial_y\}$, o somatório se refere aos diferentes quânticos. Então, a a definição de um covariante de dois ou mais quânticos é obtida ao aplicar o somatório no sistema (6):

$$\Sigma\{x\partial_y\} - x\partial_y, \dots; \quad \Sigma\{x'\partial_{y'}\} - x'\partial_{y'}, \dots \quad (7)$$

2º) Ao considerar uma combinação com cada conjunto de facientes, os facientes em qualquer um desses novos conjuntos correspondem cada um a cada um com os do conjunto original, e desse modo, é possível admitir todos esses novos conjuntos para o covariante. Essas combinações dão origem a soma $S\{x\partial_y\}$, onde o somatório refere-se a toda série de conjuntos correspondentes:

$$\{x\partial_y\} - S(x\partial_y), \dots \{x'\partial_{y'}\} - S(x'\partial_{y'}), \dots \quad (8)$$

Ou ainda, lidando com dois ou mais quânticos, têm-se a definição generalizada de um covariante pelo sistema ao aplicar o somatório em (8):

$$\Sigma\{x\partial_y\} - S(x\partial_y), \dots; \quad \Sigma\{x'\partial_{y'}\} - S(x'\partial_{y'}), \dots \quad (9)$$

Essas somas resultam num valor igual a zero, ou seja, são sistemas homogêneos. Portanto, como sinalizamos anteriormente, Cayley (1854) considera que ao invés de todas

essas generalizações, um covariante²⁰³ pode ser definido simplesmente como uma função reduzida à zero por cada uma das operações do sistema, analogamente às operações realizadas para recuperar o equilíbrio de um sistema em Lagrange (1788).

Desse modo, vimos que Cayley (1854) utilizou o mesmo raciocínio de Lagrange (1788), entretanto, o objetivo de Cayley é obter um outro método de encontrar os covariantes de um quântico. Assim, a partir de (5a), os coeficientes que são tomados como múltiplos numéricos dos elementos $(a, b, c, \dots)$; e em conexão com esse quântico, ele considera as funções lineares $\xi x + \eta y \dots, \xi' x' + \eta' y' \dots$, que podem ser tratadas como $(\xi, \eta, \dots), (\xi', \eta', \dots), \dots$ como coeficientes, podendo ser representada na forma:

$$(\xi, \eta, \dots)(x, y, \dots), \quad (\xi', \eta', \dots)(x', y', \dots), \dots \quad (10)$$

Assim, a partir do quântico (que por conveniência, Cayley (1854) denomina que será chamado de U), ele forma um quântico operatório (chamado de Θ):

$$(*) (\xi, \eta, \dots)^m (\xi', \eta', \dots)^{m'} \dots, \quad (11)$$

os coeficientes são meros múltiplos numéricos de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$, tal que:

$$\Theta U = (\xi, \eta, \dots)(x, y, \dots)^m (\xi', \eta', \dots)(x', y', \dots)^{m'} \dots, \quad (12)$$

O quântico Θ dá origem aos símbolos $\{\xi \partial_\eta\}, \dots$, analogamente aos símbolos $\{x \partial_y\}, \dots$, formado do quântico U . Cayley (1854) supõe que ϕ é qualquer quântico, contendo também os coeficientes de todos ou qualquer um dos conjuntos de Θ . Então $\{x \partial_y\}$ sendo uma função linear de $a, b, c, \dots$ as variáveis que as diferenciações em ϕ se relacionam da seguinte forma:

$$\phi. \{x \partial_y\} = \phi \{x \partial_y\} + \phi(\{x \partial_y\}) \quad (13)$$

$\{\eta \partial_\xi\}$ sendo uma função linear das diferenciações em relação as variáveis $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \dots$ em ϕ , obtém-se:

$$\{\eta \partial_\xi\}. \phi = \{\eta \partial_\xi\} \phi + \{\eta \partial_\xi\}(\phi); \quad (14)$$

²⁰³ É observado ainda que o termo “covariante” inclui os “invariantes” (os invariantes são transformações aplicadas por uma função de coeficientes, enquanto os covariantes considera além dos coeficientes, os facientes).

Em que essas equações servem para mostrar o significado das notações $\phi(\{x\partial_y\})$ e $\{\eta\partial_\xi\}(\phi)$, e existe entre esses símbolos, a equação singular:

$$\phi(\{x\partial_y\}) = \{\eta\partial_\xi\}(\phi) \quad (15)$$

Desse modo, Cayley (1854) sinaliza que para fazer a demonstração geral dessa equação, vai utilizar um exemplo para mostrar o princípio da transformação geral. Então ele considera o quântico cúbico binário:

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \quad (16)$$

isso dá

$$\Theta = \xi^3\partial_a + \xi^2\eta\partial_b + \xi\eta^2\partial_c + \eta^3\partial_d \quad (17a)$$

Cayley (1854) substitui os valores de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$ para serem representados por $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, então:

$$\Theta = \alpha\xi^3 + \beta\xi^2\eta + \gamma\xi\eta^2 + \delta\eta^3 \quad (17b)$$

A partir de (16), temos então que:

$$\{x\partial_y\} = 3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c, \quad (18a)$$

e,

$$\{\eta\partial_\xi\} = 3\alpha\partial_\beta + 2\beta\partial_\gamma + \gamma\partial_\delta \quad (18b)$$

Agora, considerando ϕ como uma função de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$, ou, o mesmo que dizer, de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aplicando em (18a), podemos escrever:

$$\phi(\{x\partial_y\}) = \phi(3b\alpha + 2c\beta + d\gamma) \quad (19)$$

E se na expressão de ϕ escrevermos $\alpha + \partial_a, \beta + \partial_b, \gamma + \partial_c, \delta + \partial_d$ para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (onde somente os símbolos $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$ devem ser considerados como afetando a, b, c, d conforme consta no operando $3b\alpha + 2c\beta + d\gamma$), e rejeitarmos o primeiro termo (ou termo independente de $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$ na expansão), temos o valor de $\phi(\{x\delta_y\})$. Esse valor é

$$(\partial_a \phi \partial_a + \partial_b \phi \partial_b + \partial_c \phi \partial_c)(3b\alpha + 2c\beta + d\gamma) \quad (20)$$

Realizando as diferenciações $\partial_a, \partial_b, \partial_c, \partial_d$, o valor é

$$(3\alpha\partial_\beta + 2\beta\partial_\gamma + \gamma\partial_\delta)\phi \quad (21)$$

isto é, temos a generalização (15) encontrada anteriormente.

Para exemplificar, vamos considerar ainda o caso da cúbica binária (16) ($U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$), partiremos da seguinte tabela, encontrada na segunda memória de Cayley (1856), que podemos perceber que é uma combinação dos coeficientes do quântico (16), tomados dois a dois:

a^2	ab	ac b^2	ad bc	bd c^2	cd	d^2

Utilizaremos um pensamento que consiste em tomarmos as linhas pelos termos em pares dos extremos para obter os múltiplos numéricos dos elementos (a, b, c, d) , obtendo assim a seguinte expressão:

$$a^2d^2 + abcd + acc^2 + b^2bd + (ad)^2 + (bc)^2$$

$$2a^2d^2 + abcd + ac^3 + b^3d + b^2c^2$$

E a partir desta expressão podemos escrever:

$$Aa^2d^2 + Babcd + Cac^3 + Db^3d + Eb^2c^2$$

Que é a base de nosso invariante, agora para descobrirmos os valores de A, B, C, D e E, aplicaremos a esta estrutura a seguinte operação:

$$a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d$$

Que gera:

$$a\partial_b = Ba^2cd + 3Dab^2d + 2Eabc^2$$

$$2b\partial_c = 2Bab^2d + 6Cabc^2 + 4Eb^3c$$

$$3c\partial_d = 6Aa^2cd + 3Babc^2 + 3Db^3c$$

Ou seja:

B		6A	a ² cd
3D	2B		ab ² d
2E	6C	3B	abc ²
	4E	3D	b ³ c

Com isto temos que:

$$B + 6A = 0; 3D + 2B = 0; 2E + 6C + 3B = 0; 4E + 3D = 0.$$

E a partir disto se assumirmos $A = 1$, obteremos:

$$B = -6; C = 4; D = 4; E = -3$$

Chegando assim ao invariante:

$$\phi = a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2$$

Há também, um covariante de ordem 3 e grau 3. O coeficiente de x^3 é:

$$Aa^2d + Babc + Cb^3,$$

que operado com $a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d$, resulta em:

- 3	+ 8 - 2	- 1 - 2	ad^2 bcd c^3

Dessa forma, temos que o coeficiente de y^3 é:

$$-ad^2 + 3bcd - 2c^3,$$

E o covariante ϕ dessa forma será:

$a^2d + 1$ $abc - 3$ $b^3 + 2$	$abd + 3$ $ac^2 - 6$ $b^2c + 3$	$acd - 3$ $b^2d + 6$ $bc^2 - 3$	$ad^2 - 1$ $bcd + 3$ $c^3 - 2$	$\chi(x, y)^3$

Vamos então considerar o operador $\phi = a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2$. Tal como apresentado por Goley e leite (2017), este operador foi calculado a partir do método apresentado por Cayley (1854,1856), dessa forma, ao aplicarmos ϕ em $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$, o quântico $Q = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ somente será invariante se manter a forma:

$$f(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p) = \phi(l, m, l', m') f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$$

Podemos então, aplicar uma transformação linear no quântico Q de modo que os coeficientes dessa transformação podem ser dispostos em linhas e colunas, formando o que chamaremos de *módulo de substituição* ou *módulo da transformação*. Este módulo será simbolizado pela letra M .

Ou seja, uma transformação linear $\begin{cases} x = lX + mY \\ y = l'X + m'Y \end{cases}$, também pode ser escrita na forma

$$M = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}.$$

Aplicando o módulo da transformação M em Q, iremos obter então:

$$Q = a(lX + mY)^3 + 3b(lX + mY)^2(l'X + m'Y) + 3c(lX + mY)(l'X + m'Y)^2 + d(l'X + m'Y)^3$$

Para facilitar o entendimento, iremos chamar cada um dos termos seguintes de I, II, III e IV respectivamente na mesma ordem que aparece na transformação acima.

Distribuindo e agrupando em **I**:

$$\begin{aligned} ax^3 &= a(l^2X^2 + 2lmXY + m^2Y^2)(lX + mY) \\ &= al^3X^3 + al^2mX^2Y + 2al^2mX^2Y + 2alm^2XY^2 + alm^2XY^2 + am^3Y^3 \\ &= al^3X^3 + 3al^2mX^2Y + 3alm^2XY^2 + am^3Y^3 \end{aligned}$$

Este coeficiente será anexado aos outros três novos coeficientes, porém ainda falta calculá-los.

Distribuindo e agrupando em **II**:

$$\begin{aligned} 3bx^2y &= 3b(l^2X^2 + 2lmXY + m^2Y^2)(l'X + m'Y) \\ &= 3bll'^2X^3 + 3bl^2m'X^2Y + 6bll'^2mX^2Y + 6blmm'XY^2 + 3bm^2l'XY^2 + 3bm^2m'Y^3 \\ &= 3bll'^2X^3 + (3bl^2m' + 6bll'^2m)X^2Y + (6blmm' + 3bm^2l')XY^2 + 3bm^2m'Y^3 \end{aligned}$$

Distribuindo e agrupando em **III**:

$$\begin{aligned} 3cxy^2 &= 3c(lX + mY)(l'^2X^2 + 2l'm'XY + m'^2Y^2) \\ &= 3c ll'^2X^3 + 3cl'^2mX^2Y + 6c ll'm'X^2Y + 6cl'mm'XY^2 + 3clm'^2XY^2 + 3cmm'^2Y^3 \\ &= 3c ll'^2X^3 + (3cl'^2m + 6c ll'm')X^2Y + (6cl'mm' + 3clm'^2)XY^2 + 3cmm'^2Y^3 \end{aligned}$$

Distribuindo e agrupando em **IV**:

$$\begin{aligned}
& A^2D^2 - 3B^2C^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D \\
&= (l^6m'^6 - 6l^5l'mm'^5 + 15l^4l'^2m^2m'^4 - 20l^3l'^3m^3m'^3 + 15l^2l'^4m^4m'^2 \\
&\quad - 6ll'^5m^5m' + l'^6m^6)(a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d)
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
& A^2D^2 - 3B^2C^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D \\
&= M^6(a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d)
\end{aligned}$$

Como esse operador calculado por Cayley (1856) a partir de $Q = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ mantém a igualdade $f(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p) = \phi(l, m, l', m') f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$, ele é de fato um invariante do quântico cúbico binário.

Dessa forma, é possível observarmos que Lagrange (1788) generalizou uma fórmula cuja finalidade foi calcular condições de equilíbrios dado um sistema mecânico qualquer de corpos, sob ação de uma quantidade qualquer de forças atuando sobre o sistema, de modo que a condição estática permanecesse invariante conforme o impulso aplicado no sistema. No caso de Cayley (1854, 1856), o matemático seguiu o mesmo caminho, entretanto, a intenção dele foi que o quântico (polinômios homogêneos) permanecessem invariantes mesmo após a aplicação de transformações lineares e operadores de diferenciação, com isso, obtendo um método para calcular invariantes e covariantes de Quânticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de tudo que tivemos oportunidade de estudar ao longo deste trabalho, parece-nos seguro extrair algumas conclusões, bem como sugerir alguns tópicos que podem servir de base para novas pesquisas e aprofundar o tema.

O primeiro ponto que destacamos é a introdução das “matemáticas mistas”. Segundo os historiadores Brown (1991) e Kawajiri (1979), essa denominação apareceu pela primeira vez na publicação de Francis Bacon, intitulada *Proficience and Advancement of Learnings*” no ano de 1605. Entretanto, no fechamento desta tese, encontramos um material na tese de Oliveira (2015), que mostra que o matemático van Roomen, ao definir os campos matemáticos, fez uso da expressão “matemáticas mistas” anterior a Francis Bacon, portanto, um futuro trabalho, será o de aprofundar essa investigação. As ciências matemáticas foram classificadas em “matemática pura” – Aritmética e Geometria – e “matemática mista” – Arquitetura, Astronomia, Cosmografia, Engenharia, Música e Perspectiva. Nesse trabalho, Bacon realizou uma classificação dos conhecimentos humanos e a matemática foi incorporada como uma ramificação da Metafísica, logo, os tópicos matemáticos, por consequência, foram tomados como abstratos (não estavam inseridos na matéria) e fixos (no sentido de não serem transitórios), e tinham como finalidade as causas formal e final, ou seja, a essência e a finalidade das coisas.

Kawajiri (1979) cita H. Apostle, um comentarista de Aristóteles, e sugere que a *ciência composta* foi uma inspiração ao que Bacon denominou como “matemática mista”:

Pode-se perguntar se a astronomia, a óptica, as harmônicas e o resto das ciências compostas devem ser chamados de físicas ou matemáticas. Na medida em que seus objetos são físicos, eles parecem estar subordinados à física, mas, na medida em que os atributos sob investigação são matemáticos e não físicos, eles parecem estar subordinados à matemática (APOSTLE apud KAWAJIRI, 1979, p. 7, tradução nossa).

As ciências compostas compreendiam a óptica, harmônica e astronomia, e esses tópicos são, respectivamente, objetos da perspectiva, música e astronomia na definição de “matemática mista” de Bacon. Hacking (2014) comenta que a noção de ciências mistas é tão antigo quanto Aristóteles, dessa forma, uma primeira sugestão de pesquisa²⁰⁴ para aprofundamento em trabalhos futuros, seria de verificar a “ciência composta” de Aristóteles,

²⁰⁴ Lima (2015) apresenta algumas possíveis relações entre Aristóteles, a matemática e a física.

assim chamada por H. Apostle ou ainda, anterior a Aristóteles. E talvez, em outro momento, estabelecer relações e aproximações entre a “matemática mista”.

Posteriormente, no ano de 1623, Bacon publica “*De Dignitate et Augmentis Scientiarum*”, que consistiu em uma nova versão de sua obra anterior (*Proficiencie*). Ao compararmos a classificação de matemática publicada em 1605 com a de 1623, foi possível constatar algumas mudanças em relação ao modo que ele enxergava a matemática. Acreditamos que dentre todas essas mudanças, a de maior relevância foi de conjecturar que além da Metafísica, as ciências matemáticas também poderiam auxiliar nas ciências da Física. Esta nova visão de Bacon, do mesmo modo que Kawajiri (1979) sugeriu, acreditamos estar em consonância com o desenvolvimento de novos trabalhos e descobertas matemáticas, tal qual Dear (1995) denominou como ciências físico-matemáticas, que haviam acontecido no período entre as publicações de 1605 a 1623.

Apesar de Francis Bacon ter sistematizado e expresso o conceito da “matemática mista”, é importante comentarmos que a estrada da “matemática mista” não foi trilhada apenas por Bacon. Galileu Galilei (1564-1642) expressou, em sua “*Discorsi e Dimostrazioni matematiche*” de 1638, uma matematização da natureza e conforme Hacking (2014), esse conceito se assemelha em alguns aspectos aos da “matemática mista” de Bacon. Além disso, Tomás de Aquino (1225-1274) também expressou por meio das certezas matemáticas, relações entre as ciências da Física e da Matemática²⁰⁵. Assim, deixamos como uma segunda sugestão de pesquisa, buscar se há uma relação entre essas concepções acerca da matemática.

Por meio das considerações de Dear (1995) e Schuster (2012), somos levados a pensar que a “matemática mista” foi o protótipo das ciências físico-matemáticas. Em virtude de algumas implicações filosóficas, principalmente a de estar classificada como uma ciência da área da metafísica, os estudos em “matemática mista” tiveram uma certa dificuldade de aceitação e de expressar os resultados num dado período, pois, a maior parte desses resultados eram provenientes de dados coletados a partir de experiências físicas, o que gerou um anacronismo entre a definição e a prática das “matemáticas mistas”.

Portanto, vimos que uma tentativa para contornar a crítica da veracidade dos resultados, foi a de expressar as demonstrações de tópicos de “matemática mista” com elementos de “matemática pura”, principalmente fazendo uso da geometria. Essas restrições também se aplicaram no método de ensino das escolas jesuítas. Desse modo, uma solução encontrada pelos matemáticos do século XVII para minimizar as críticas de estarem indo

²⁰⁵ Para mais informações das relações de Tomás de Aquino entre a matemática e a física, ver Lima (2015).

contra os princípios ao qual a matemática estava submetida – metafísica – foi aproximar as ciências matemáticas das ciências físicas. Nascendo assim, como um desdobramento da “matemática mista”, as ciências físico-matemáticas.

Vimos que no decorrer do século XVII, diversos trabalhos que apareceram e abordaram matematicamente questões do mundo físico, desse modo, fortalecendo a noção recém introduzida de ciências físico-matemáticas. Logo, diante dessas novas descobertas, uma nova classificação da matemática se fazia necessário.

No ano de 1751, D'Alembert e Diderot iniciaram uma série de publicações denominada como *Encyclopédie*, cujo objetivo é exposto no próprio subtítulo da enciclopédia, que é o de fornecer um “dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios”. As ciências do conhecimento humano foram reclassificadas, e nessa nova categorização do conhecimento, as matemáticas continuaram ramificadas na metafísica. Entretanto, como D'Alembert definiu no Discurso Preliminar, a matemática não estava dividida somente em “matemática pura” e “matemática mista”, foi acrescentada as ciências físico-matemáticas.

A partir da definição de Bacon, os tópicos da “matemática pura” se mantiveram como Aritmética e Geometria, porém, as novas descobertas como o Cálculo Diferencial e Integral foram incorporadas. A “matemática mista” também teve a adição de novos conhecimentos, bem como outros foram migrados para outras áreas do conhecimento. Nessa nova classificação, os elementos que compuseram a “matemática mista” foram: Acústica, Arte de Conjecturar (probabilidades), Astronomia Geométrica, Mecânica, Óptica e Pneumática. E por fim, as ciências físico-matemáticas, que contemplavam os mesmos tópicos da “matemática mista”, com a diferença de que seus resultados eram flexíveis na utilização das ciências matemáticas com as ciências físicas:

Tendo, enfim, entrado por completo no mundo corporal, logo percebemos o uso que podemos fazer da Geometria e da Mecânica para adquirir os mais variados e profundos conhecimentos a respeito das propriedades dos corpos. É mais ou menos dessa maneira que nasceram todas as ciências chamadas Físico-Matemáticas (D'Alembert, 2015a, p.71).

Bacon (2007) sugeriu que as causas matemáticas continham uma Quantidade Determinada, enquanto que D'Alembert considerou que as quantidades eram dadas de acordo com a grandeza do objeto matemático. Desse modo, é possível concluirmos que a "quantidade" de Bacon diferiu de D'Alembert, na medida em que aplicava a quantidade determinada por causas constantes, enquanto que a "quantidade" de D'Alembert poderia ser

aplicável a objetos que eram independentes de coisas reais ou que poderiam ser aplicáveis a objetos envolvendo coisas físicas. Em outras palavras, podemos dizer que a quantidade ainda se referia a coisas abstratas que podem ocorrer em geometria ou álgebra, mas a quantidade advinda dos objetos físicos que podem ocorrer em assuntos como mecânica, astronomia ou óptica tinham uma aplicação no mundo físico.

Assim, podemos concluir que a classificação da matemática de D'Alembert foi mais estruturada do que a de Bacon, entretanto, isso se deu, principalmente, em razão de que na época de D'Alembert houveram novos conhecimentos que foram esquematizados e se desenvolveram posterior a morte de Bacon, desse modo, é óbvio que D'Alembert foi privilegiado no sentido de que haviam mais elementos para organizar uma classificação dos conhecimentos matemáticos em 1751 do que em 1605 e 1623.

Outro ponto que apresentamos neste trabalho, foi que em virtude do aparecimento da “matemática aplicada”, a “matemática mista” teve seu desuso gradualmente durante o século XIX, o que gerou um novo desdobramento. É importante salientarmos que apesar de diferenças do ponto de vista conceitual entre a “matemática mista” e as ciências físico-matemáticas, Oki (2013) aponta que no terceiro volume da *Encyclopédie méthodique*²⁰⁶, sobre física, publicado em 1819, essas ciências eram tidas como sinônimos. Os autores definem essas ciências como “a aplicação da matemática pura aos resultados de observações ou experimentações (MONGE, CASSINI, BERTHOLON, HASSEZFRATZ apud OKI, p.91)”. Além de Oki (2013), Lützen (2013) também relata que na obra póstuma de História da Matemática de Montucla, lançada entre 1799 e 1802, ele afirma que diversas pessoas tratavam as ciências físico-matemáticas e as “matemáticas mistas” como sinônimos.

Então, é totalmente possível foi relacionarmos a “matemática aplicada”, as ciências físico-matemáticas e a “matemática mista”. Ao considerarmos a notação de que no decorrer do século XIX, “o objetivo da matemática aplicada é lidar com o funcionamento da natureza física e, em particular, descobrir hipóteses sobre as causas dos fenômenos naturais (LÜTZEN, 2013, p.688, tradução nossa)”, aproxima as ciências físico-matemáticas como sendo a base teórica responsável por formar todo o arquétipo do desenvolvimento das “matemáticas aplicadas”, dessa forma, as “matemáticas mistas” passaram por um processo de resignificação:

A visão difundida do século XIX de que o propósito da matemática aplicada era principalmente revelar as causas físicas dos fenômenos naturais mostra que a

²⁰⁶ Monge, Cassini, Bertholon, and Hassezfratz, *Encyclopédie méthodique. Physique*, t. III (Paris, 1819), “Mathematiques”, 811.

matemática aplicada era de fato mais uma sucessora das chamadas ciências físico-matemáticas, que por sua vez, foi originalmente sucessora da matemática mista (LÜTZEN, 2013, p.688-689, tradução nossa).

Contudo, um tópico para possíveis investigações, seria do aparecimento da “matemática aplicada” no cenário francês por meio dos trabalhos de Condorcet. Além do surgimento das “matemáticas aplicadas”, apresentamos que outro fator que contribuiu para o desuso da “matemática mista”, foram as críticas de Kant em relação aos conhecimentos puros, ou seja, as considerações a respeito do racionalismo. Em relação à matemática, para Kant, independente de ser “pura”, “mista” ou “aplicada”, podemos concluir que não havia sentido pensar a matemática no campo da metafísica, afinal, se assim fosse, como seria possível aplicar a matemática até mesmo em questões cotidianas? Por exemplo, numa transação comercial ou até mesmo numa simples compra, utilizamos o raciocínio matemático, logo, se esse raciocínio é metafísico, como é possível saber o quanto iremos gastar ou o quanto irá nos sobrar para efetuar a compra ou transação?

Assim, na visão de Kant, se utilizarmos a aritmética para inferirmos quantos pães serão necessários para levar em um piquenique de uma escola primária, a partir da intuição, estaremos aplicando uma aritmética, cujos dados são matematicamente elementares. Do mesmo modo, podemos utilizar o Cálculo para calcular a taxa de uma determinada anuidade, e ainda assim, estaremos aplicando a aritmética, embora nesse caso, os dados são menos elementares. Contudo, em ambos os casos, podemos intuir o resultado dessas “aplicações” porque é possível imaginarmos essa situação aplicada no mundo físico. E como os resultados dessas duas situações podem ser obtidos por uma análise da própria noção de mundo do sujeito sem a necessidade de criar novos conhecimentos a partir do que foi enunciado, esses juízos são denominados como *analíticos* e “puros” segundo a visão de Kant.

Se considerarmos, por exemplo, o projeto de construção de uma represa ou cálculos empregados para balística, nesse caso, é necessário incorporar premissas empíricas para obtenção dos resultados, dado que para solucionar o problema é necessário acrescentar conhecimentos que não são dados a priori, portanto são denominados como *sintéticos*, então, nesses casos, o julgamento só poderá ser atribuído pelo exercício da experiência, ou seja, a posteriori, e com isso descobriremos a verdade do mundo, dado que para Kant, é por meio da experiência que nossos pensamentos baseados na intuição e na sensibilidade (tempo e espaço) promovem o entendimento das coisas e dos sentidos dos objetos. Desse modo, mais e mais teorias das “matemáticas puras” foram desenvolvidas para serem “aplicadas” a cada vez mais dados obtidos fisicamente e empiricamente.

A “matemática mista”, nosso principal objeto de estudo neste trabalho, juntamente das ciências físico-matemáticas foram utilizadas principalmente para solucionar problemas de ordem de grandezas físicas. Dessa forma, o desenvolvimento dessas matemáticas foram importantes para contribuir com novos avanços no desenvolvimento da sociedade, com grande destaque para o aprimoramento tecnológico motivado pelo crescimento do setor industrial após a Revolução Industrial.

Sendo assim, a partir dos dados que fixamos para averiguarmos essa contribuição das “matemáticas mistas”, pudemos verificar brevemente que essas ciências matemáticas estiveram presentes diretamente e indiretamente no aperfeiçoamento das máquinas a vapor, que foram essenciais para alavancar o desenvolvimento econômico da Inglaterra. Por meio das invenções de James Watt na Sociedade Lunar de Birmingham, vimos que diversos tipos de máquinas a vapor foram construídas, tal como as de Dupla Ação ou Sol e Planeta por exemplo, e o funcionamento da maquinaria somente foi possível por considerar a existência de diversas forças mecânicas e efeitos pneumáticos durante a operação das máquinas.

Além disso, diversos métodos foram elaborados com a finalidade de otimizar as máquinas a vapor. Essas melhorias consistiram em aumento da performance, bem como redução de combustível durante o processo de operação das atividades a quais as máquinas eram destinadas. Todavia, a comercialização desses equipamentos, somente foi possível de ser colocadas em práticas em virtude do desenvolvimento de teorias que descrevessem a eficiência e certificassem a garantia dos resultados descritos. Para tanto, principalmente, as forças e efeitos mecânicos e pneumáticos foram aplicados e testados, até que finalmente, fosse possível concluir que as melhorias desenvolvidas realmente iriam suprir as necessidades dos industriais, que geralmente se baseava em reduzir custos de manutenção e aumento da produção.

Dessa forma, a força exercida por homens e cavalos, eram adotadas como padrões de comparação, porém, devido a serem muito indefinidas, e sujeitas a grande variação em diferentes indivíduos, passou a se determinar medidas padrões para procedimentos mecânicos nas máquinas a vapor, por exemplo, como a da potência mecânica, que é expressa pelo produto obtido pela multiplicação do peso que é equivalente à força de resistência, pelo espaço através do qual ele age com um movimento uniforme durante um dado tempo; foram importantes para determinar as quantidades de energia mecânica exercida por qualquer máquina em um certo tempo, dados extremamente necessários para uma maior precisão dos resultados e efeitos esperados pela máquina. Por meio da busca pela previsibilidade das máquinas, conceitos matemáticos avançaram nesse período da Revolução Industrial, tal como

a noção de função e as variáveis, entretanto, por conta do tempo, não pudemos explorar esse tema na tese, mas certamente estará presente em trabalhos futuros.

Além dessas contribuições práticas, brevemente exploramos que as “matemáticas mistas” e as ciências físico-matemáticas serviram base para o desenvolvimento de novas teorias do campo das “matemáticas puras”. Por meio do *Méchanique Analytique* de Lagrange (1788), pudemos ver que o princípio das velocidades virtuais e o princípio de equilíbrio foram temas de matemáticos como Boole e Cayley para criarem um método para obtenção de Invariantes de um polinômio homogêneo (denominação atual); e no caso de Jacobi, as críticas aos resultados de Lagrange, resultou que por meio da discussão em relação as implicações das deficiências das demonstrações para a transição da estática para a dinâmica, foram importantes para a formulação das equações de Hamilton-Jacobi. Podemos concluir que as ciências mecânicas, que era uma das “matemáticas mistas”, contribuíram para a criação de novos resultados na “matemática pura”.

Gostaríamos de ter explorado outras teorias das “matemáticas mistas” e ciências físico-matemáticas, tais como a óptica e a astronomia por exemplo, que possam ter servido de inspirações para tópicos de “matemática pura”, entretanto, acreditamos que esse trabalho não se esgota aqui, assim, fica dada essa sugestão para novos estudos que possam aprofundar esse tema.

Apesar das adversidades, principalmente no que se refere ao tempo que tivemos para elaborarmos esse trabalho, consideramos que os objetivos de cada capítulo foram cumpridos, e principalmente, o objetivo principal de “*contribuir bibliograficamente a respeito das matemáticas mistas no idioma português*” foi alcançado.

REFERÊNCIAS

Índice de Documentos

Os documentos (1) a (33) foram disponibilizados pelo *Soho House Museum* e fazem parte da *Archives of Soho collection*, que é organizada pelos Arquivos da Cidade de Birmingham:

- (1) Ref. MS3147/Portfolio/3/506
- (2) Ref. MS3147/Portfolio/3/507
- (3) Ref. MS3219/Portfolio/4/86/7
- (4) Ref. MS3219/Portfolio/4/127/6
- (5) Ref. MS3147/Portfolio/5/1
- (6) Ref. MS3147/Portfolio/5/12
- (7) Ref. MS3147/Portfolio/5/30
- (8) Ref. MS3147/Portfolio/5/34
- (9) Ref. MS3147/Portfolio/5/77
- (10) Ref. MS3147/Portfolio/5/97
- (11) Ref. MS3147/Portfolio/5/106
- (12) Ref. MS3147/Portfolio/5/149
- (13) Ref. MS3147/Portfolio/5/239c
- (14) Ref. MS3147/Portfolio/5/564
- (15) Ref. MS3147/Portfolio/5/597a
- (16) Ref. MS3147/Portfolio/5/625a
- (17) Ref. MS3147/Portfolio/5/648
- (18) Ref. MS3147/Portfolio/5/692
- (19) Ref. MS3147/Portfolio/5/699b
- (20) Ref. MS3147/Portfolio/5/1103
- (21) Ref. MS3147/Portfolio/5/1070
- (22) Ref. MS3147/Portfolio/5/1090
- (23) Ref. MS3147/Portfolio/5/1279a
- (24) Ref. MS3147/Portfolio/5/1282a
- (25) Ref. MS3147/Portfolio/5/1292
- (26) Ref. MS3147/Portfolio/5/1293
- (27) Ref. MS3147/Portfolio/5/1295

- (28) Ref. MS3147/Portfolio/5/1301
 (29) Ref. MS3147/Portfolio/5/1307
 (30) Ref. MS3147/Portfolio/5/1340
 (31) Ref. MS3147/Portfolio/5/1447
 (32) Ref. MS3147/Portfolio/5/1455
 (33) Ref. MS3782/Portfolio/13/53/87

Trabalhos impressos

AGUILONIUS, Franciscus. **Opticorum libri sex**: philosophis iuxtà ac mathematicis vtiles. Antuerpiae : Ex officina Plantiniana, apud viduam et filios Io. Moreti, 1613.

ALLEN, Cecil J. **Locomotive Practice and Performance in the Twentieth Century**. W. Heffer and Sons Ltda, Cambridge, 1949.

ANJOS, Marta Figueiredo. **Dois Ensaios sobre a institucionalização da matemática aplicada no Brasil**. 145f. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2018.

ARISTÓTELES. **Posterior Analytics**. Translated by G. R. G. Mure. Oxford: Clarendon Press, 1928.

ARISTÓTELES. **Metafísica**, livro XII. Tradução Lucas Angioni. Clássicos da filosofia, Editora Unicamp, 2005.

BABBAGE, Charles. **Reflections on the Decline of Science in England, and on some of its Causes**. Dorset Street, Manchester Square, 1830.

BACON, Francis. **De dignitate et Augmentis Scientiarum**. Tomus I et II / Wirceburgi: Apud Jo. Jac. Stahel, 1779.

BACON, Francis. **O progresso do conhecimento**. Tradução, apresentação e notas Raul Filker. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

BEECKMAN, Isaac. **Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634**. Tome 1: 1604-1619. Ed. Cornelis de Waard. Martinus Nijhoff, Den Haag, 1939.

BEECKMAN, Isaac. **Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634**. Tome 2: 1619-1627. Ed. Cornelis de Waard. Martinus Nijhoff, Den Haag, 1942.

BLOCH, Marc Leopold Benjamim. **Apologia da história ou o ofício de historiador**. Rio de Janeiro: J. Zahar, 2002.

BOOLE, George. **Exposition of a general theory of linear transformations**. The Cambridge Mathematical Journal. vol.III, November, Part. I. 1841.

BROWN, Gary. **The Evolution of the Term “Mixed Mathematics”**. Journal of the History of Ideas 52: 81-102, 1991.

BURKE, Peter et. al. **A escrita da história: novas perspectivas**. Tradução Magda Lopes. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1992.

BURRAGE, M.; TORSTENDAHL, R. **Professions in theory and history: rethinking the study of the professions**. London : Sage, 1990.

CARDWELL, D. S. L. **Some factors in the early development of the concepts of power, work and energy**. The British Journal for the History of Science, 3, 1967.

CAYLEY, A. **An Introductory memoir on quantics**. In: Philosophical Transaction of Royal Society of London. London, 144, pp. 244-258, 1854.

CAYLEY, A. **A Second memoir upon quantics**. In: Philosophical Transaction of Royal Society of London. London, 146, pp. 101-126, 1856.

CHANG, Alan. **An overview of the Hamilton-Jacobi equation**. Printed by Princeton University, 2013.

CHEVALLARD, Yves. **Quel avenir pour l’enseignement des mathématiques?** In J-P Ferrier, M. Henry, P-H Terracher, Actes du colloque L’enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l’université, 9-24. IUFM de Lorraine, 2003.

CRELLE. **Journal für die reine und angewandte mathematic**. Im Verlage von Duncker und Humblot. Berlim, 1826.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CRILLY, T. **The Rise of cayley’s Invariant Theory (1841-1862)**. In: Historia Mathematica. V.13, p. 241-254, 1986.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2006.

CUSINATO, Rafael Tiecher. **Teoria da decisão sob incerteza e a hipótese da utilidade esperada**: conceitos analíticos e paradoxos. 181 f. Dissertação (Mestrado em Economia) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.

D'ALEMBERT, Jean le Ronde. **Doubts and questions on the calculus of probabilities**. Opuscles mathématiques. Mélanges de Littérature et de Philosophie, 1767. D'ALEMBERT

DARNTON, Robert. **O grande massacre dos gatos, e outros episódios da História Cultural francesa**. Tradução de Sonia Coutinho - Rio de Janeiro, RJ: Graal, 1986.

DEAR, Peter Robert. **Mersenne and the learning of the schools**. (Cornell History of Science Series.) Ithaca: Cornell University Press, 1988.

DEAR, Peter Robert. **Discipline & Experience**: the mathematical way in scientific revolution. Chicago, University of Chicago Press, 1995.

DESCARTES. René. **Discurso do Método**. Tradução de Jaco Guinsburg e Bento Prado Jr. Edição Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

DIDEROT, DENIS; D'ALEMBERT, Jean le Ronde. **Enciclopédia, ou Dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios**. Volume 1: Discurso preliminar e outros textos / Denis Diderot, Jean le Ronde D'Alembert; organização e tradução Pedro Paulo Pimenta, Maria das Graças de Souza – 1 ed – São Paulo, SP: Editora Unesp, 2015a.

DIDEROT, DENIS; D'ALEMBERT, Jean le Ronde. **Enciclopédia, ou Dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios**. Volume 2: O sistema dos conhecimentos / Denis Diderot, Jean le Ronde D'Alembert; organização e tradução Pedro Paulo Pimenta, Maria das Graças de Souza – 1 ed – São Paulo, SP: Editora Unesp, 2015b.

DIDEROT, DENIS; D'ALEMBERT, Jean le Ronde. **Enciclopédia, ou Dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios**. Volume 3: Ciências da Natureza / Denis Diderot, Jean le Ronde D'Alembert; organização e tradução Pedro Paulo Pimenta, Maria das Graças de Souza – 1 ed – São Paulo, SP: Editora Unesp, 2015c.

DIDEROT, DENIS; D'ALEMBERT, Jean le Ronde. **Enciclopédia, ou Dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios**. Volume 5: Sociedade e Arte / Denis Diderot, Jean le Ronde D'Alembert; organização e tradução Pedro Paulo Pimenta, Maria das Graças de Souza – 1 ed – São Paulo, SP: Editora Unesp, 2015d.

EDE, A; Cormack, L. B. **A history of Science in Society: from the scientific revolution to the present**. Volume 2. University of Toronto Press. Canada, 2012.

ENCYCLOPÉDIE. **Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers**. Edited by Denis Diderot / Jean D'Alembert: A. Paris, 1751.

ENCYCLOPÉDIE. **Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers**. Edited by Denis Diderot / Jean D'Alembert: A. Paris, 1752.

ENCYCLOPÉDIE. **Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers**. Edited by Denis Diderot / Jean D'Alembert: A. Paris, 1754.

ENCYCLOPÉDIE. **Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers**. Edited by Denis Diderot / Jean D'Alembert: A. Paris, 1757.

ENCYCLOPÉDIE. **Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers**. Edited by Denis Diderot / Jean D'Alembert: A. Paris, 1765.

FABRI, Honoré. **Tractatus physicus de motu locali**: in quo effectus omnes, qui ad impetum, motum naturalem, violentum, & mixtum pertinent, explicantur, & ex principiis physicis demonstrantur. Lugduni [Lyon], 1646.

FAREY, John. **A treatise on the steam engine**: historical, practical and descriptive. Londres: Printed for Longman, Rees, Orme, Brown, and Green, Paternoster-row, 1827.

FERREIRÓS, José. **On the Very Notion of Applied Mathematics**. Oberwolfach Report, 2013.

GLEASON, M. L. **The Royal Society of London: Years of Reform 1827-1847**, Harvard Dissertations in the History of Science: Garland Publishing, 1991.

GODOY, K. V., MATTOS, A. C. **Um breve estudo sobre invariantes de formas quadradas**. Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, 2011. Disponível em:

<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1345/768>.

Acesso em: 20/12/2018.

GODOY, Kleyton Vinicyus. **Um estudo do processo de reconhecimento histórico**: o caso de Arthur Cayley. 2013. 252 f. Dissertação - (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013.

GODOY, Kleyton Vinicyus. LEITE, Douglas Gonçalves. **Boole, Cayley e Sylvester: o uso de seus métodos para o cálculo de invariantes homogêneos**. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

GRANVILLE, A. B. **Science Without a Head**. University of Wisconsin: Gregg, 1969.

GUEDES, Maria Helena. **Vivendo entre o bem e o mal**. Ed: Clube de autores, 2015.

GRIMALDI, Francesco Maria. **Physico-mathesis de lumine, coloribus, et iride: aliisque adnexis libri duo, in quorum primo asseruntur nova experimenta, & rationes ab iis deductae pro substantialitate luminis**. Bologna: heirs of Vittorio Benacci for Girolamo Bernia, 1665.

INIKORI, Joseph E. **Africans and the Industrial Revolution in England: a study in international trade and economic development**. Cambridge: UK, Cambridge University Press, 2002.

HACKING, Ian. **Why is there Philosophy of Mathematics at all?** Cambridge: UK, Cambridge University Press, 2014.

HESSEM, B. **As raízes socioeconômicas do Principia em Newton**. In Gama, R. org. Ciência e Técnica (antologia de textos históricos). São Paulo. T. A. Queiroz, Editor, Ltda, 1993.

JAPIASSÚ, Hilton. MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. Editora: Zahar, Rio de Janeiro, 2001.

JOHNSTON, S. **Making mathematical practice: gentlemen, practitioners and artisans in Elizabethan England**. Ph.D. in the History of Science: University of Oxford, 1994.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2001.

KNOBLOCH, Eberhard. PIEPER, Herbert. PULTE, Helmut. “... **das Wesen der reinen Mathematik verherrlichen**”: Reine Mathematik und mathematische Naturphilosophie bei C. G. J. Jacobi. Mit seiner Rede zum Eintritt in die philosophische Fakultät der Universität Königsberg. Mathematische Semesterberichte, 42, p. 99–132, 1995.

LEITE, Douglas Gonçalves. GODOY, Kleyton Vinicyus. **Elementos de uma matemática em transformação**. In: José Milton Lopes Pinheiro; Luiz Carlos Leal Júnior. (Org.). A MATEMÁTICA E SEU ENSINO: olhares em Educação Matemática. 1ªed. São Paulo: Livraria da Física, p. 23-42, 2018.

MADDY, Penelope. **How applied mathematics became pure**. The review of symbolic logic. Volume 1, 2008.

MALET, Antoni. COZZOLI, Daniele. **Mersenne and the Mixed Mathematics**. The Massachusetts Institute of Technology. Perspectives on Science vol. 18, no. 1, 2010.

MERSENNE, Marin. **TRAITÉ DE L'HARMONIE UNIVERSELLE**: où est contenu la musique theorique & pratique des anciens & modernes, avec les causes de ses effets, enrichie de raisons prises de la philosophie & des mathematiques. Academia de Paris, 1627.

MONTUCLA, Jean-Étienne. **Histoire des Mathematiques**. Academia de Paris, 1758.

MORENO, Jorge. **El encuentro entre René Descartes e Isaac Beeckman (1618-1619)**: El tratado hidrostático.THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science, 29 (1). pp. 149-166, 2014.

KAWAJIRI, Nobuo. **Francis Bacon's View of Mathematics** – Bacon concept of Mixed Mathematics. Proceedings of the Faculty of Science, Tokai University, Vol. XV, 1979.

KRAS, Sara Louise. **Transforming power of technology**: Steam Engine. Chelsea House Publishers, 2004.

LAGRANGE, Joseph Louis. **Méchanique Analytique**. Academia de Ciências de Paris e de Berlin. Pétersbourg – Turin. Editions Jacques Gabay, 1989; 1788.

LIMA, Rodrigo José de. **Sobre o uso da matemática na física segundo Tomás de Aquino**: possibilidades e limites de uma descrição matemática do mundo. 126 f. Dissertação - (Mestrado em Filosofia) - Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

LÜTZEN, Jesper. **Applications in the 19th century**. Oberwolfach Report, 2013.

OKI, Sayaka. **The establishment of 'Mixed Mathematics' and Its decline 1600 – 1800**. Historia Scientiarum, vol. 23, p. 82-91, 2013.

OLIVEIRA, Zaqueu Vieira. **As relações entre a Matemática e a Astronomia no século XVI**: tradução e comentários da obra Ouranographia de Adriaan van Roomen. 2011. 260 f. Dissertação - (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.

OLVER, P. J. **Classical Invariant Theory**. Cambridge: At the University Press, 1999.

PANOFSKY, E. **A perspectiva como forma simbólica**. Lisboa, Edições 70, 1999.

PARSHALL, K. H., **The British development of the theory of invariants (1841-1895).** *BSHM Bulletin*, 21, p. 186-199, 2006.

PAYEN, Jacques. **Capital et machine à vapeur au XVIIIe siècle, Les frères Pérrier et l'introduction en France de la machine à vapeur de Watt.** *Revue Historique*, Presses Universitaires de France, vol. 246, n° 499, p. 207-209, 1971.

PULTE, Helmut. **C. G. J. Jacobis Verma" chtnis einer 'konventionalen' analytischen Mechanik:** Vorgeschichte, Nachschriften und Inhalt seiner letzten Mechanik-Vorlesung, *Annals of Science* 51, 498–519, 1994.

PULTE, Helmut. **Jacobi's Criticism of Lagrange:** The Changing Role of Mathematics in the Foundations of Classical Mechanics. In: *Historia Mathematica* 25, p.154–184, 1998.

PULTE, Helmut. **The decline of "Mathesis mixta" in Rational Mechanics and its Philosophical Implications.** Oberwolfach Report, 2013.

QUICKENDEN, Kenneth; BAGGOTT, Sally; DICK, Malcolm. **Matthew Boulton:** enterprising industrialist of the enlightenment. Birmingham, UK: Surrey: Ashgate Publishing, 2013.

REVIEW, EDINBURGH. **The Edinburgh Review.** Printed by David Walison. Edinbrugh: Volume XXVII, p.99, 1816.

RIBEIRO, Eduardo Souza. VELOSO, Gonçalo Eduardo Esteves. CABRAL, Jóni Amílcar Fernandes Gonçalves. AZEVEDO, Manuel Varela Gomes de. RIBEIRO, Rui Pedro Pimenta. **O Papel da Engenharia Mecânica nas Energias Não Renováveis.** Máquina a Vapor: Obra da Engenharia Mecânica e o Contributo do Carvão. Projeto da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade do Porto. Elaborado por: Teresa Duarte. FEUP, 2015.

RICCIOLI, Giovanni Battista. **Almagestum novum:** astronomiam veterem novamque complectens observationibus aliorum, et propriis novisque theorematibus, problematibus, ac tabulis promotam, in tres tomos distributam quorum argumentum sequens pagina explicabit. Ex typographia Haeredis Victorii Benatii, 1651.

RIPPER, William. **Steam-engine:** theory and practice. Londres: Printed for Longman, Rees, Orme, Brown, and Green, Paternoster-row, 1920.

ROBINSON, Eric; MUSSON, A. E. **JAMES WATT and the steam revolution.** Londres, UK: Great Britain by Billing and Sons Limited, 1969.

SAITO, Fumikasu. **Algumas breves considerações sobre os tratados de geometria prática publicados no contexto do “saber-fazer” matemático quinhentista.** In: Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática. Itajubá: SBHMat, p. 271–277, 2017.

SCHOFIELD, Robert E. **The lunar society of Birmingham: A Social History of Provincial Science and Industry in Eighteenth-Century England.** Oxford: Clarendon Press, 1963.

SCHUBRING, Gert. **The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics.** In: Social history of nineteenth century mathematics. Birkhäuser, Boston, MA, p. 111-134, 1981.

SCHUSTER, John A. **Physico-Mathematics and the Search for Causes in Descartes’ Optics – 1619-37.** Synthese 185 [3] p. 467–499, 2012.

SCHWARTZMAN, S. **Formação da comunidade científica no Brasil.** Rio de Janeiro: Cia Editora Nacional/Finep, 1979.

SIEGMUND-SCHULTZE, Reinhard. **The establishment of the notion and of the word applied mathematics around 1800.** Oberwolfach Report, 2013.

SOARES, Luis Carlos. **Ciência aplicada e ilustração: duas sociedades científicas inglesas na segunda metade do século XVIII.** In: XXIII Simpósio Nacional de História, 2005, Londrina. **Anais eletrônicos.** Londrina: ANPUH, 2005. Disponível em: <<http://anais.anpuh.org/?p=16342>>. Acesso em: 20/10/2017.

SOARES, Luis Carlos. **A Albion revisitada – ciência, religião, ilustração e comercialização do lazer na Inglaterra do século XVIII.** Rio de Janeiro, RJ: 7 Letras, Faperj, 2007.

STORER, J. D. **A simply history of the steam engine.** Published by J. Baker (1st edition), 1969.

TOBIES, Renate. **Mathematical Modeling, mathematical consultants, and mathematical divisions in industrial laboratories.** Oberwolfach Report, 2013

VON TUNZELINANN, G. N. **Technology and Industrial Progress.** Aldershoot. Edward Elgar, 1995.

WATT, James. **Specification of Patent:** for certain new methods of applying the vibrating or reciprocating motion of steam or fire engines, to produce a continued rotative or circular motion round an axis or centre, thereby to give motion to the wheels of mills or other machines. Birmingham, 1781.

WATT, James. **Specification of Patent:** for certain new improvements upon steam or fire engines for raising water, and other mechanical purposes, and certain new pieces or; mechanism applicable to the same. Birmingham, 1782.

WATT, James. **Specification of Patent:** for certain new improvements upon fire and steam engines, and upon machines worked or moved by the same. Birmingham, 1784.

WOLFSON, Paul R. **George Boole and the origins of invariant theory.** *Historia Mathematica*, Volume 35, 2008.

APÊNDICES

Índice de Apêndices

Apêndice 1: Patente do motor “Sol e Planeta” (tradução nossa).....	318
Apêndice 2: Patente do movimento paralelo (tradução nossa).....	322
Apêndice 3: Melhorias e Patente dos Motores Rotativos (tradução nossa).....	330
Apêndice 4: Patente dos Motores de Dupla Ação (tradução nossa).....	342
Apêndice 5: Trecho da patente de James Watt em 1782 em que ele descreve o funcionamento para conectar duas ou mais máquinas a vapor (tradução nossa).....	346
Apêndice 6: Quarto Método para equalizar as potências dos vapores descrito por Watt na patente de 1782 (tradução nossa).....	350

Apêndice 1 – Patente do motor “Sol e Planeta” (tradução nossa)

A patente foi concedida em 25 de outubro de 1781 e a especificação do motor foi inscrita em 23 de fevereiro de 1782. A especificação descreve cinco métodos diferentes, mas apresentaremos a tradução do trecho em que Watt descreve o funcionamento do motor “*Sun & Planet*”:

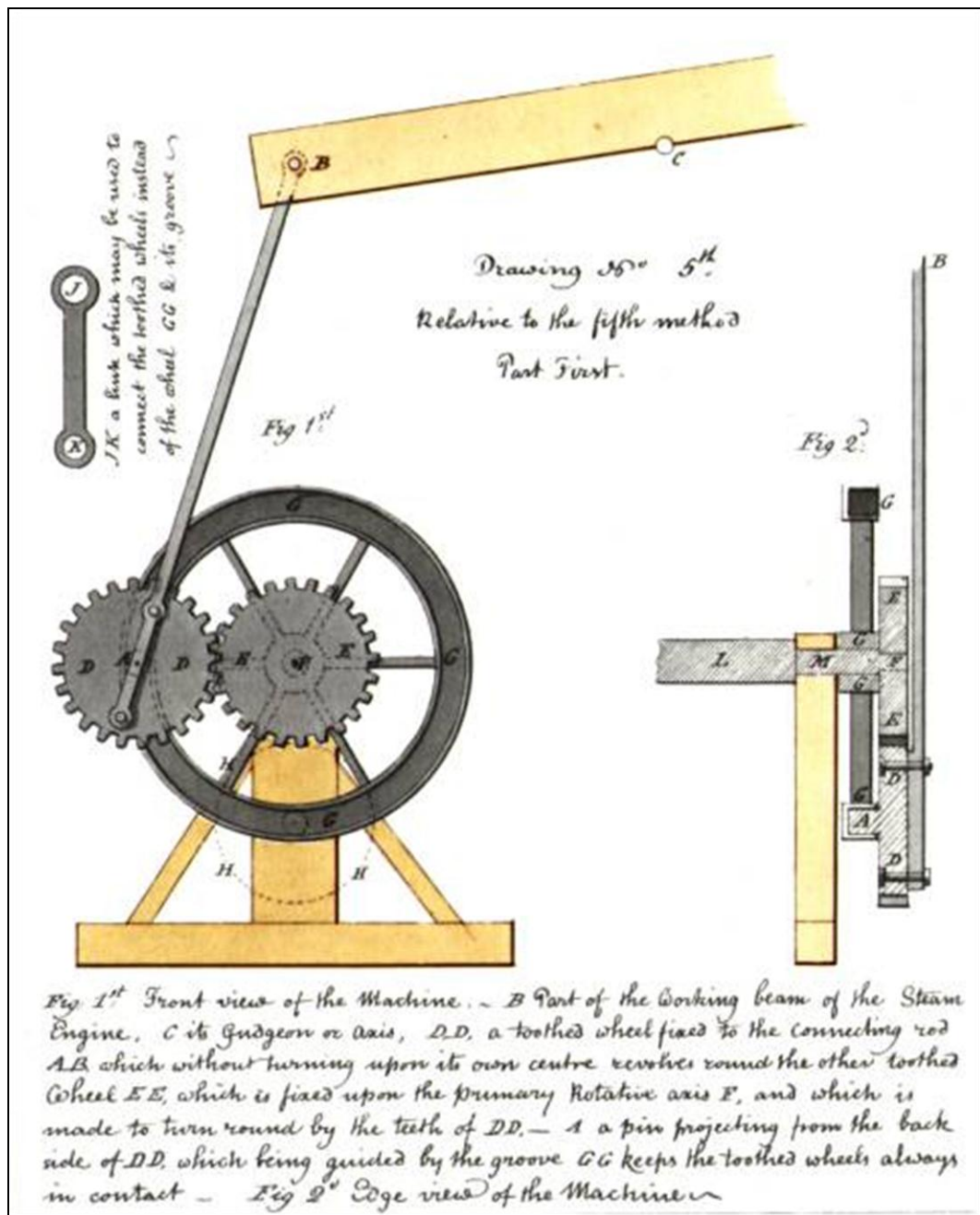
“O MEU QUINTO MÉTODO de produzir o movimento rotativo acima mencionado (delineado no desenho n. ° 5 aqui anexado) é realizado por meio de uma roda dentada E (figura 1), fixada na extremidade do eixo ou eixo F que é para receber o movimento rotativo; na qual a roda E age sobre e arranjada para girar por meio de uma segunda roda dentada D de um diâmetro igual ou maior ou menor, firmemente fixado ou conectado a uma haste AB (cuja outra extremidade está presa ou pendurada no feixe de trabalho BC da máquina a vapor, ou está de outra forma conectado com o pistão do referido motor), de tal maneira que a referida roda D não pode girar em torno de seu próprio eixo ou centro; e por meio de um pino A, que é fixado em, ou no centro da roda D, e entra em uma ranhura ou canal circular na roda grande GG, (ou por qualquer outro meio apropriado), a roda D é confinada de modo que não pode afastar-se da roda E, mas pode rodar ou girar a roda E sem virar em seu próprio eixo ou centro e o movimento é executado da seguinte forma. A roda D está quase na posição do círculo tracejado HH, e de modo que seu centro deve ser um pouco para cada lado da linha perpendicular que passa pelo centro F; O motor a vapor, por meio da biela BA, puxa a roda D para e, como os dentes estão trancados nos dentes da roda E, e não pode girar em seu próprio eixo, não pode subir para cima sem fazer girar a roda E ao redor de seu eixo F: quando a roda D é elevada tão alto que a sua borda inferior é colocado em contato com a borda superior da roda E, o motor completou seu curso para cima, o pistão do motor está disposto a retornar e a roda E, continuando a girar em virtude do movimento que adquiriu, carrega a roda D após o vértice ou a parte mais alta, e a gravidade da roda D, ou da biela AB, ou de qualquer outro peso ligado a eles, faz com que a roda D desça do outro lado da roda E, e assim continue o movimento que ele imprimiu sobre ele, por meio do qual a roda D completa sua revolução em volta de E; e quando as duas rodas D e E têm o mesmo número de dentes, a roda E faz duas rotações em seu eixo para cada curso do motor; e para que o referido movimento seja mais regular, eu determino ou sobre o eixo ou eixo FML, (figura 2), ou para ou sobre alguma outra roda ou eixo ao qual ele dá movimento, roda voadora ou roda pesada, para receber e continuar a circulação transmitida pelo movimento primário. E SEJA RECOMENDADO, que, em todos

os casos em que as rodas voadoras ou rodas pesadas ou movimentos rápidos não sejam de outra forma necessários para os usos para os quais qualquer dos quatro métodos anteriores aqui descritos podem ser aplicados, deve ser aplicado uma roda rotativa pesada para igualar seus movimentos. Nas figuras 3 e 4, delineei a aplicação deste método a uma roda CC, fixada sobre o eixo primário, e tendo dentes em sua circunferência interior, que é atuada pela roda E da maneira que acaba de ser descrita; mas como a roda E tem apenas metade do número de dentes que a roda CC tem, a roda CC fará apenas uma revolução por cada dois golpes do motor. Os desenhos deste quinto método também são delineados de acordo com uma escala de um quarto de polegada por cada pé do tamanho real da máquina. As figuras²⁰⁷ 1 e 2 são adaptadas a um traço de seis pés de comprimento, e as figuras²⁰⁸ 3 e 4 para um traço de três pés de comprimento, mas eu faço as máquinas maiores ou menores, e também faço essas variações em sua estrutura, que podem servir para acomodá-las ao seu uso; como eu altero os diâmetros proporcionais das duas rodas e coloco o eixo primário horizontalmente, perpendicularmente ou inclinado, e faço as rodas de uma forma elíptica, oval ou outra; e às vezes, no lugar da roda D, uso uma linha reta de dentes ou pinos fixados na biela AB, que prendem os dentes da referida roda E e fazem girar; algum ponto da biela sendo guiado por um pino que se move em uma ranhura, de modo a manter os dentes ou pinos sempre envolvidos nos dentes da roda E, e também para manter os dentes das rodas sempre envolvidos um no outro em vez da roda GG e sua ranhura. Eu uso uma alça de couro ou uma ligação de ferro ou outro material apropriado (como é desenhado em JK), que engloba os eixos M ou F, e o pino A, e os conecta, mantendo-os a uma distância adequada um do outro; e também faço as duas rodas E e D sem dentes, mas com superfícies rugosas, de modo que D gire E pelo atrito da sua circunferência sozinho. É IMPORTANTE LEMBRAR, que, embora tenha descrito todos esses movimentos como derivados ou produzidos a partir do movimento do final do feixe de trabalho da máquina a vapor, eles também podem ser derivados do movimento de vibração de qualquer outra parte do vapor ou do fogo o que é considerado conveniente: o final do feixe de trabalho parece ser o melhor adaptado para esse propósito: qualquer um ou todos esses métodos admitem que as máquinas sejam movidas com movimentos rotativos na direção, ou seja, à mão-direita ou mão-esquerda, de acordo com o movimento iniciado em qualquer uma dessas instruções, respectivamente”.

²⁰⁷ Figura 1.

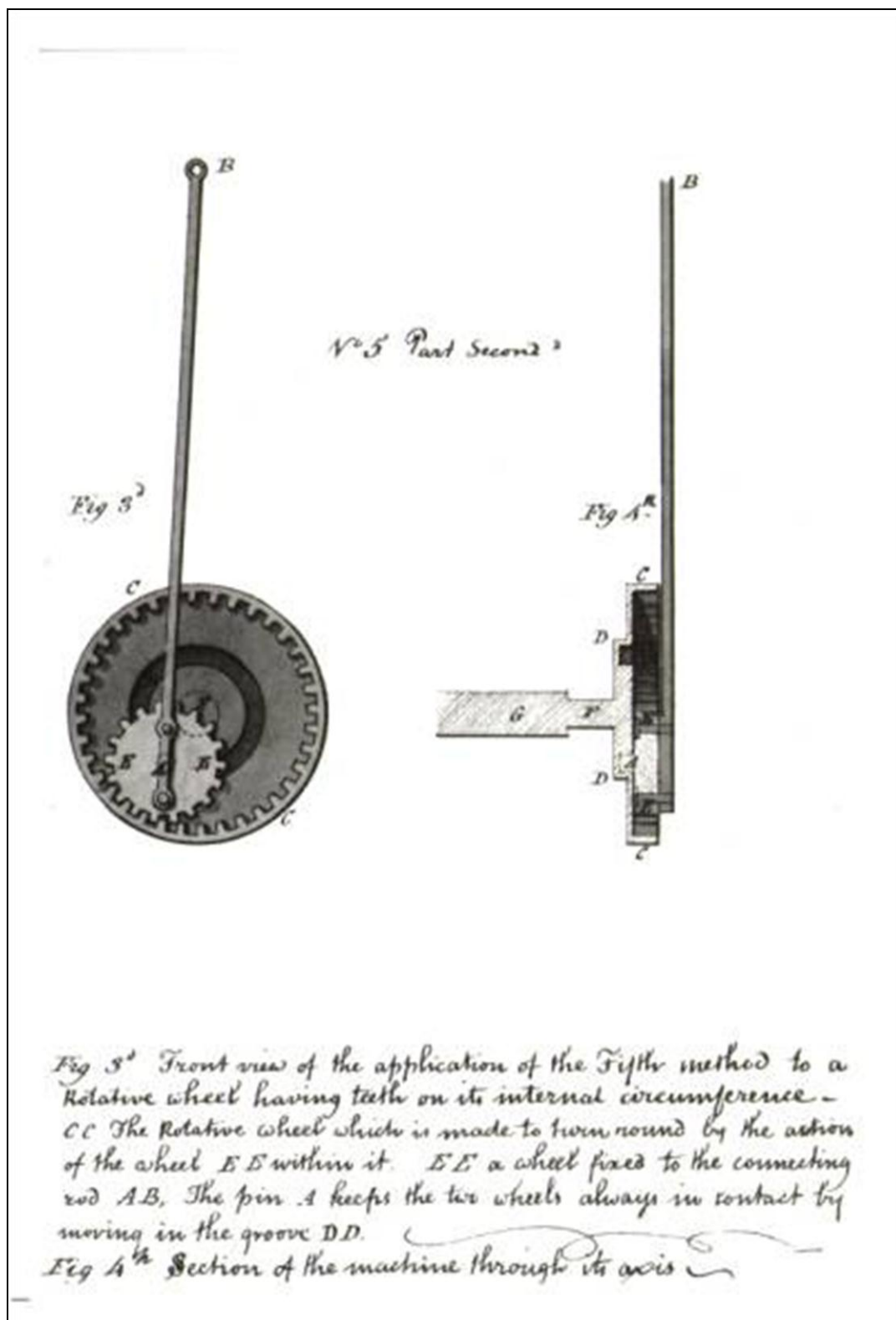
²⁰⁸ Figura 2.

Figura 1 - Desenho 5: figuras 1 e 2 da patente de 1781



Fonte: Watt (1781)

Figura 2 - Desenho 5: figuras 3 e 4 da patente de 1781



Fonte: Watt (1781)

Apêndice 2 – Patente do movimento paralelo (tradução nossa)

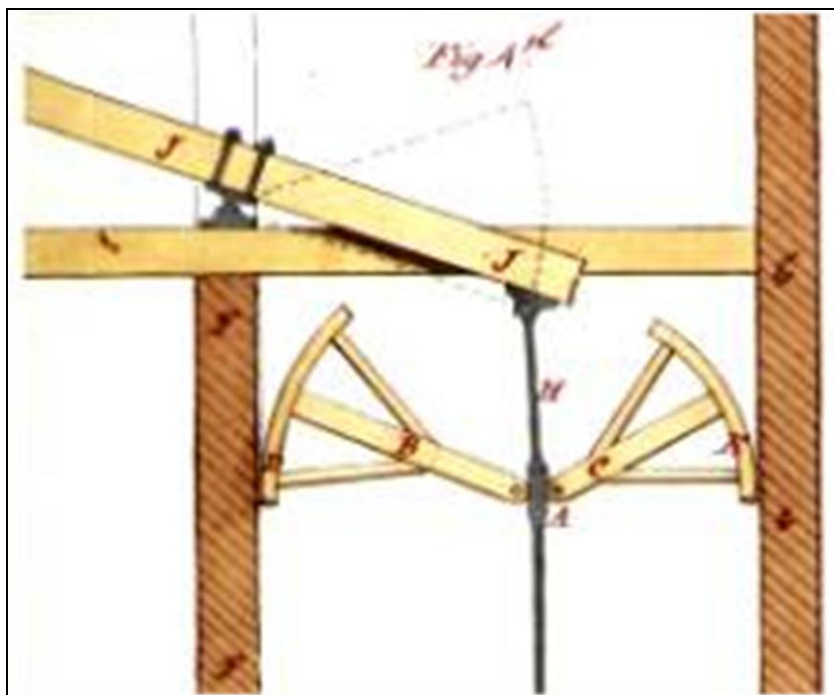
Vamos apresentar a tradução dos trechos em que James Watt descreve o movimento paralelo em sua “ESPECIFICAÇÃO DA PATENTE, 28 DE ABRIL DE 1784, PARA CERTAS NOVAS MELHORIAS SOBRE MOTORES COMEDORES DE FOGO E VAPOR, E SOBRE MÁQUINAS TRABALHADAS OU MOVIDAS PELO MESMO” (WATT, 1784, tradução nossa):

“MINHA SEGUNDA MELHORIA nas máquinas a vapor consiste em métodos para direcionar as hastes do pistão, as hastes de bombeamento e outras partes desses motores, de modo a mover-se perpendicularmente ou verticalmente ou em linhas retas sem usar as grandes correntes e arcos comumente fixados nos feixes de trabalho dos motores para esse fim, e para permitir que o motor atue nos feixes de trabalho ou grandes alavancas, ambos empurrando a extremidade desenhada; ou ambos na subida e descida de seus pistões. EXECUTO ISSO EM TRÊS PRINCÍPIOS:

O PRIMEIRO PRINCÍPIO é delineado na figura²⁰⁹ 4, e é realizado pela conexão com a parte superior da haste do pistão A por meio da junção, de duas alavancas ou feixes secundários BC, cujas outras extremidades são dadas pelos arcos DE, que rolam sobre os lados das estruturas FG, ou em pedaços de madeira ou outros corpos de resistência adequados fixados a distâncias convenientes paralelas à linha de movimento da haste que é necessária para receber o movimento direto ou perpendicular; e estes arcos são suspensos em seus lugares por meio de cintos de couro, correntes ou barras de ferro articuladas, presos a eles. A parte superior da haste do pistão ou da bomba e o feixe de trabalho também estão conectados através de um pedaço de ferro ou madeira H, com uma junta em cada extremidade, na qual ele pode se mover livremente e acomodar-se tanto ao movimento angular do feixe de trabalho JJ e ao movimento perpendicular do pistão ou da haste da bomba.

²⁰⁹ Figura 3.

Figura 3 - Figura 4 da patente de 1784



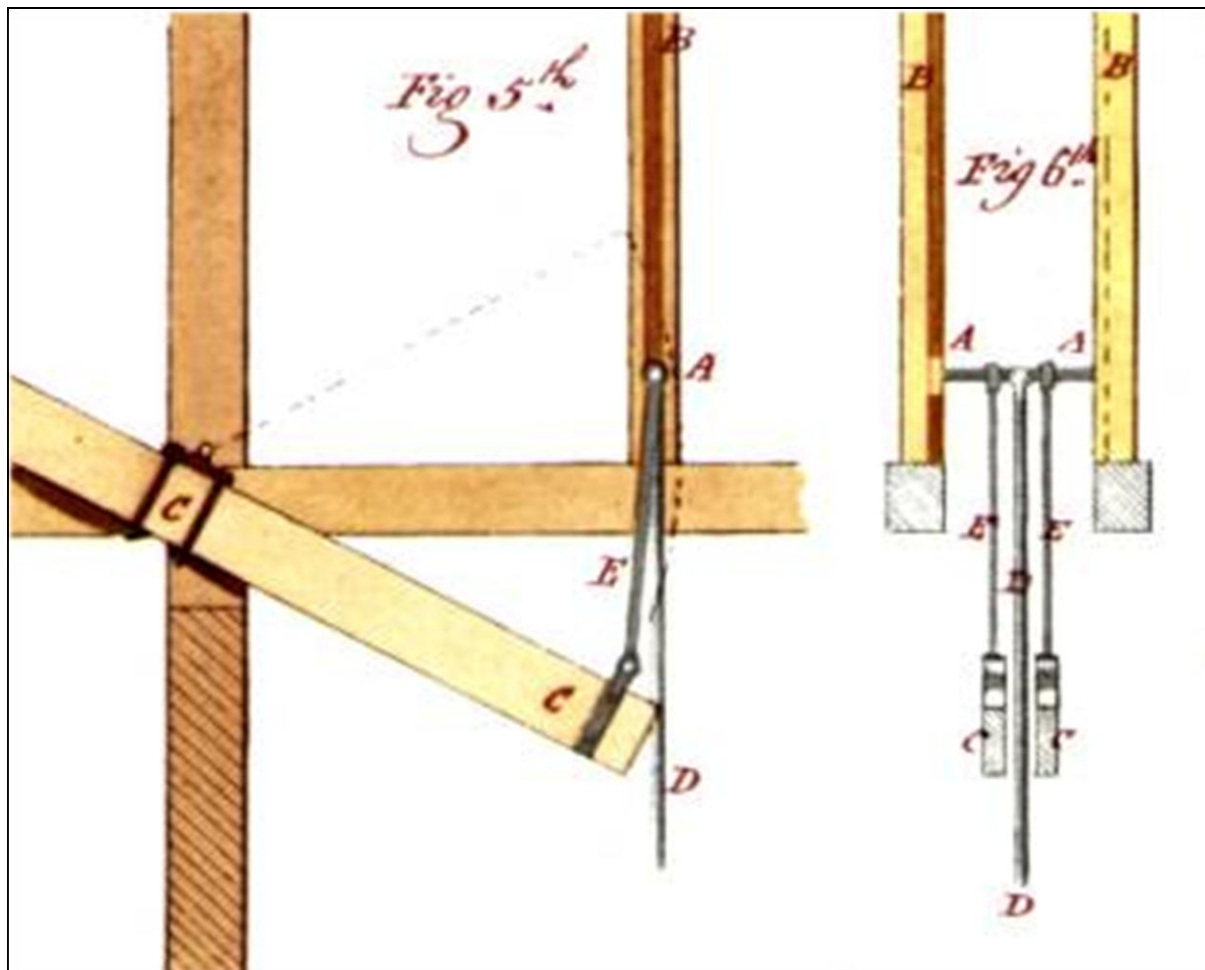
Fonte: Watt (1784)

O SEGUNDO PRINCÍPIO pelo qual produz um movimento direto de um movimento angular ou circular é delineado nas figuras²¹⁰ 5 e 6, e consiste em guiar o topo da haste do pistão ou da haste de bombeamento perpendicularmente por meio de um pedaço de madeira ou ferro, ou outro material A, deslizando em uma ranhura feita em na vertical B, firmemente deslizado para alguma parte da máquina, de modo a ser maior do que o feixe de trabalho C, e na direção do movimento requerido, e conectando o fim do feixe de trabalho com a parte superior da haste do pistão ou da haste de bombeamento D, ou com a referida peça deslizante A, por meio de uma barra ou barras de madeira ou ferro E, tendo uma junção em cada extremidade. A Figura 6 mostra a vista posterior do feixe de trabalho, haste de pistão, peça deslizante e barras de conexão; e as linhas circulares e angulares tracejadas, figura 5, mostra o valor do movimento angular do feixe de trabalho. Na figura 6 é delineado outro método de utilização deste princípio: AA é o pistão do motor, que tem uma cavidade na haste do pistão BB, e a barra de conexão CC está ligado ao fundo daquela haste oca por meio de uma junção e ao feixe de trabalho por meio de outra conexão, e a cavidade na haste do pistão, pelo deslizamento da corrente DD, serve para direcionar o movimento, e a haste oca é ampliada o

²¹⁰ Figura 4.

suficiente para permitir um movimento angular da barra de conexão, proporcionada pelo seno do ângulo descrito pelo feixe de trabalho.

Figura 4 - Figuras 5 e 6 da patente de 1784



Fonte: Watt (1784)

O TERCEIRO PRINCÍPIO sobre o qual derivo um movimento perpendicular ou em linha-reta de um movimento circular ou angular consiste em formar certas combinações de alavancas que se deslocam sobre centros, em que o desvio das linhas-retas da extremidade móvel de algumas dessas alavancas é compensado por desvios similares, mas nas direções opostas, da extremidade das outras alavancas. Nas figuras²¹¹ 7 e 8 está delineado o Método de colocar esse princípio em prática: AA representa o feixe de trabalho do motor; B, a parede ou o suporte em que descansa; CC, o feixe de mola; DE, uma alavanca ou barra de ferro, móvel sobre o eixo ou centro D, (que é fixado ao feixe de mola), e também sobre o eixo ou centro E, que está conectado ou faz parte da barra ou haste EF. A barra EF é capaz de deslizar em

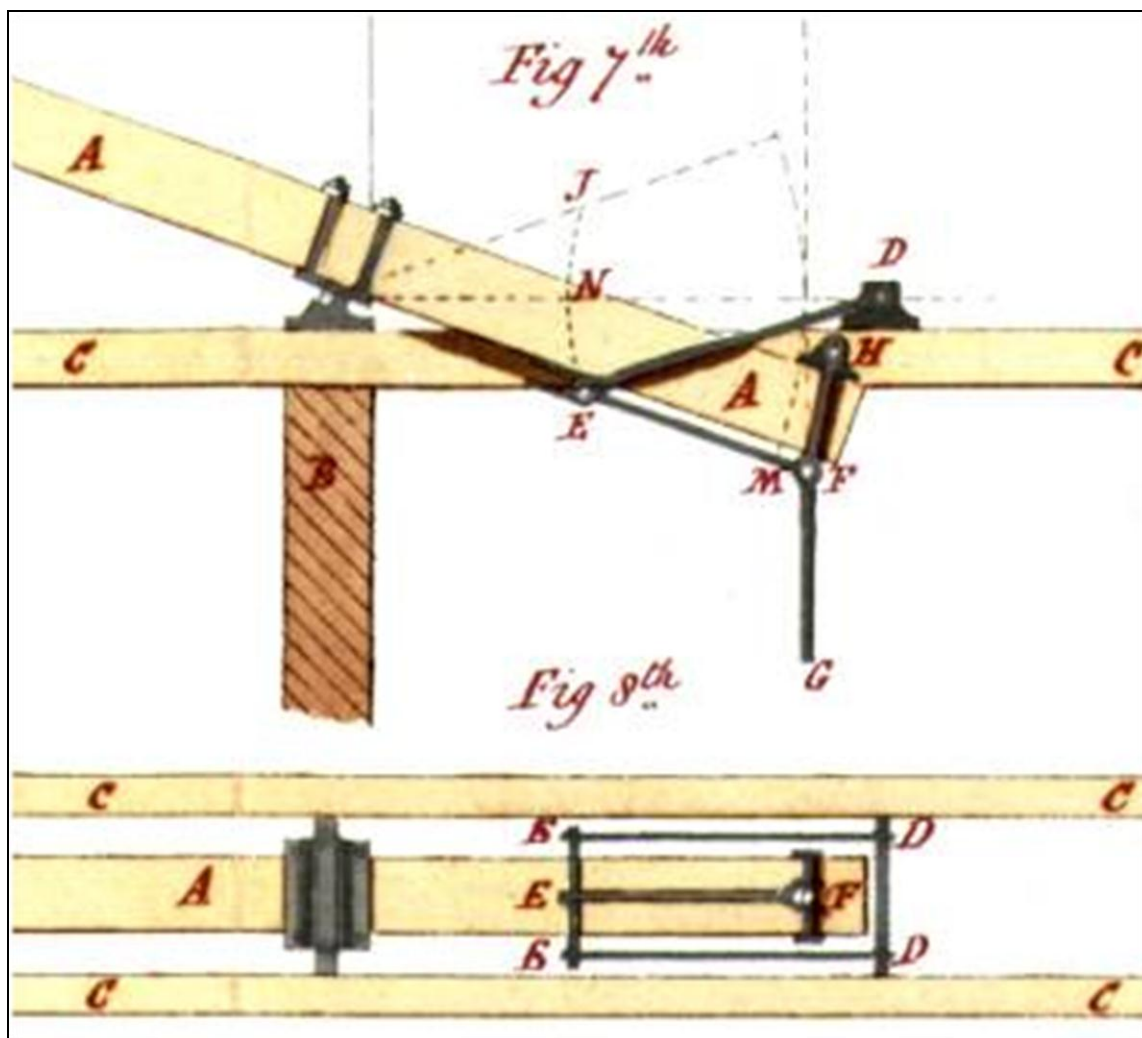
²¹¹ Figura 5.

direção ou a partir do eixo ou a partir do centro do feixe de trabalho por um movimento resvalando entre um par de amuras²¹² em E e por uma parte do movimento circular na extremidade F em volta do centro H, a partir do qual é suspenso pelas barras de acoplamento ou liga HF. A haste do pistão ou a haste de bombeamento G é fixada na barra FE e também na ligação HF pelo pino de ligação em F. A linha direita FL é aquela em que a haste do pistão ou a extremidade F se move para cima e para baixo. KM é uma parte de um círculo descrito a partir do centro do feixe de trabalho a que LF é uma tangente, e KL e MF mostram os maiores desvios da linha reta ou tangente. ENJ é uma parte do círculo descrito no centro D pelo pino de junção E, e o comprimento de DE e a situação do centro D são tais que as linhas JL, NO, EF são iguais e são representadas pela haste EF; portanto, sempre que o feixe de trabalho é movido em seu centro, as amuras em E e a conexão em F obriga a barra EF a se mover para cima ou para baixo junto com ela. Mas o centro D sendo fixado, a extremidade E da haste ED só pode mover-se no círculo ENJ e o pino de junção E obriga a haste EF a deslizar sob o feixe de trabalho entre as amuras e a aproximar-se do centro ou afastar-se do centro, de acordo com a posição do feixe de trabalho. E como as distâncias entre cada ponto do arco JNE e os pontos correspondentes da linha LOF são sempre iguais, o ponto ou a ligação F, juntamente com a parte superior da haste do pistão, devem se mover na linha reta LOF. Na figura 8 é delineada uma vista da parte inferior do feixe de trabalho, vista abaixo, na qual é mostrado que a barra ED é feita de forma dupla, de modo que uma parte possa ir de cada lado do feixe de trabalho e que a os pinos de articulação E, D e F, chegam de um lado para o outro do feixe. Embora o aparelho esteja nesses desenhos colocados abaixo do feixe de trabalho, e esse feixe é fixado acima de seu próprio eixo ou gudgeon²¹³, contudo o dispositivo responderá igualmente bem se o todo fosse invertido, ou se a haste EF e o eixo do feixe de trabalho forem colocados no meio de sua profundidade, tornando o feixe duplo. As proporções dos comprimentos e espessuras das peças entre si são tais como a resposta na prática, mas pode ser consideravelmente variada, desde que o princípio seja atendido.

²¹² Termo comumente utilizado na área náutica, que consiste num cabo que prende as velas para as segurar do lado em que sopra o vento, entretanto, no caso, as amuras (cabos) foram utilizadas para segurar a direção do feixe desenhado pelo movimento do pistão.

²¹³ Um gudgeon é um encaixe cilíndrico ligado a um componente para permitir uma conexão articulada ou articulada a um segundo componente.

Figura 5 - Figuras 7 e 8 da patente de 1784



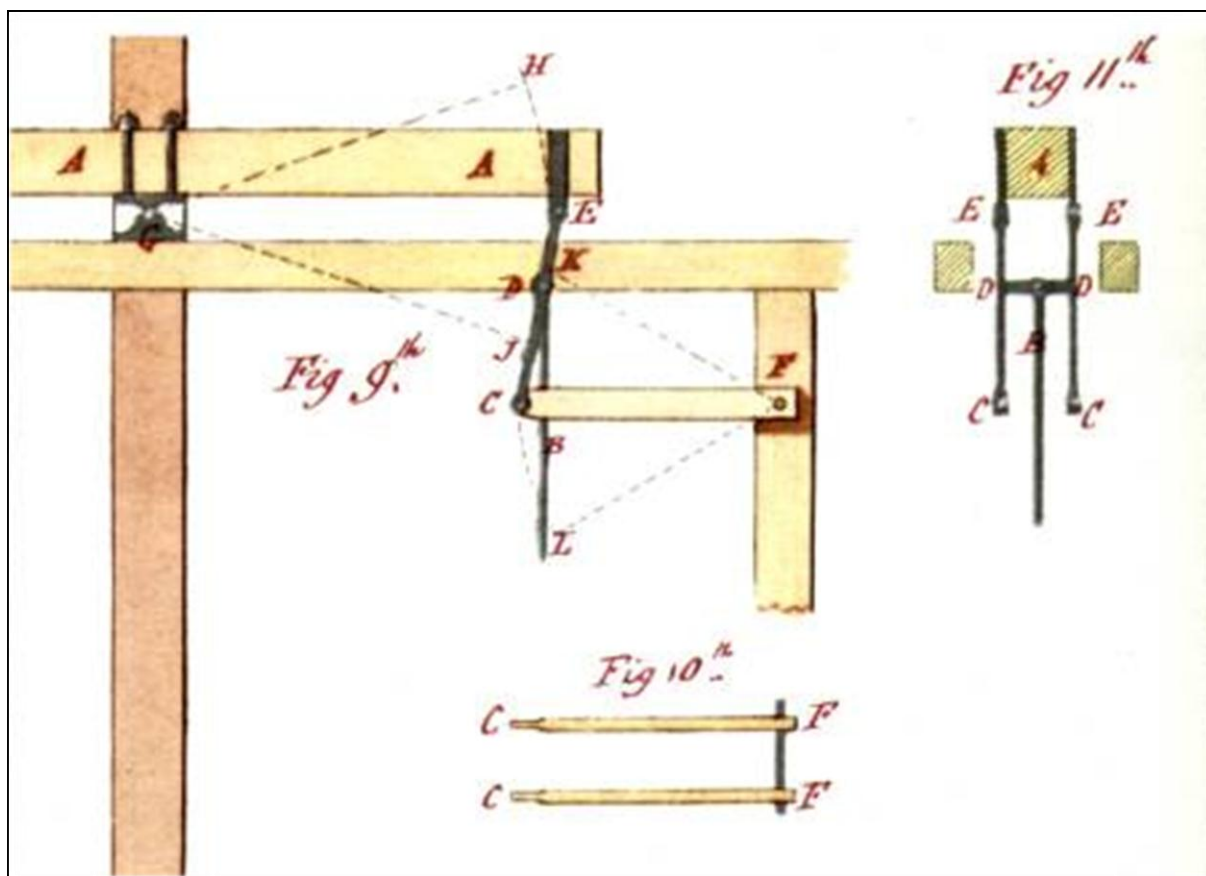
Fonte: Watt (1784)

Nas figuras²¹⁴ 9, 10 e 11, delineei outro Método, pelo qual eu monto este terceiro princípio. AA representa o feixe de trabalho de um motor; BD, a haste do pistão ou a haste de bombeamento; CDE, uma das duas barras de ferro ou madeira, conectadas, por junções em E e D, com a viga de trabalho e com a parte superior da haste do pistão respectivamente, e em C, por uma conexão, a uma barra disposta angularmente ou barra CF, cuja outra extremidade ou extremidades estão ou são conectadas com o lado da estrutura, ou algum suporte firme, por uma junção ou conexões em F, em que, como centro, a barra CF é móvel. Quando o feixe de trabalho é posto em movimento em seu eixo, o ponto E descreve o arco HEJ e o ponto C descreve o arco KCL no centro F, e as convexidades desses arcos, em direções opostas,

²¹⁴ Figura 6.

compensam as variações do outro em uma linha reta; de modo que a junção D na parte superior da haste do pistão ou da haste de bombeamento, que se encontra entre essas convexidades, sobe e desce de forma perpendicular ou reta. Os respectivos comprimentos dos raios GE e CF e suas proporções entre si podem variar, mas se o raio CF for alongado mais na proporção de GE, o ponto D deve ser colocado proporcionalmente mais longe de E e mais próximo de C e vice-versa, como é apontado pela geometria. O raio de regulação ou haste CF também pode ser colocada acima do feixe de trabalho, e o último pode ser revertido em relação ao seu próprio eixo, onde essa construção é mais conveniente. Na figura 10, delinee uma visão horizontal dos raios CF e, na figura 11, uma vista posterior do feixe de trabalho A e as barras de conexão EDC com a haste de pistão BB.

Figura 6 - Figuras 9, 10 e 11 da patente de 1784



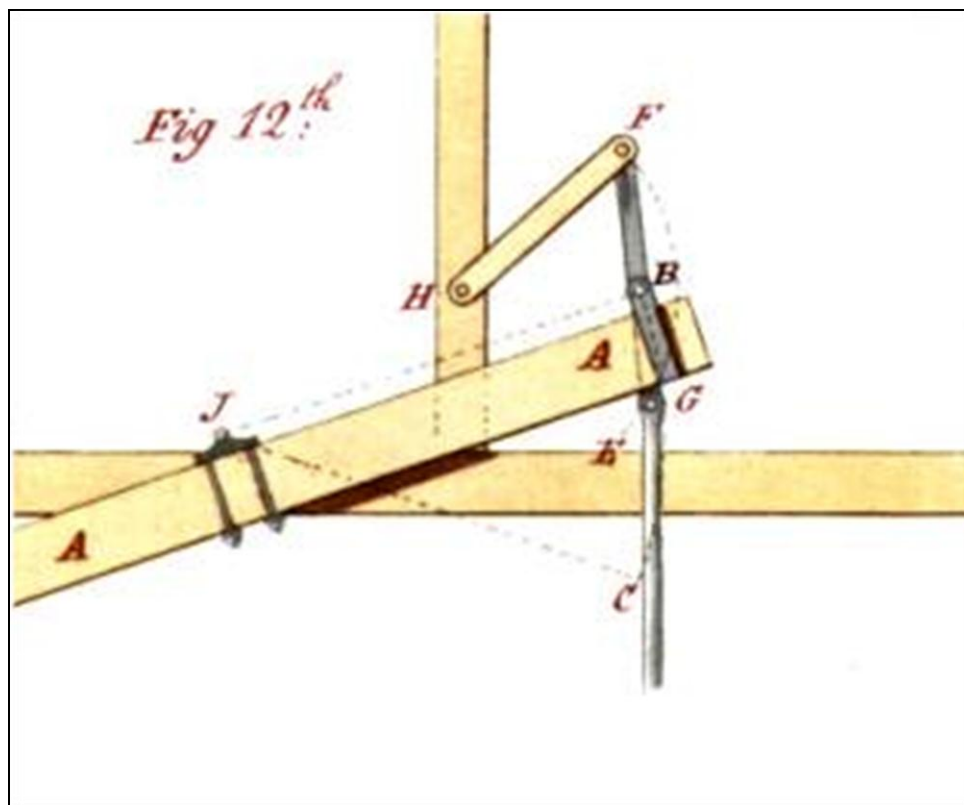
Fonte: Watt (1784)

Na figura²¹⁵ 12, delineei outro Método, por meio do qual eu coloco este terceiro princípio em prática. O raio de regulação FH centrado em H em um suporte firme e a barra de

²¹⁵ Figura 7.

conexão FBG conectada com o feixe de trabalho por uma junção em B, é prolongada para G, onde está conectada com a haste do pistão ou a haste de bombeamento GC por outra ligação. Na medida que o raio FH é menor do que o raio JB, as partes da biela FB, BG são proporcionadas uma à outra, que, devido à diferença das convexidades dos arcos FE e BC, o ponto G e a haste do pistão GC sempre subirá e descera em uma linha perpendicular ou reta. Esta maquinaria também admite ser revertida; ou seja, o raio de regulação HF pode ser colocado sob o feixe de trabalho e o feixe de trabalho acima do seu próprio centro de movimento, nos casos em que isso seja mais conveniente. Esse terceiro princípio também pode ser posto em prática por outros métodos, mas os delineados são em geral os mais elegíveis: todos eles são estabelecidos por uma escala de um quarto de polegada por cada pé do tamanho real, nas proporções próprias para motores cujos cilindros têm vinte polegadas de diâmetro, e cujo comprimento é de quatro pés; exceto figuras 5 e 6, que são delineadas por um golpe de seis pés; e a figura²¹⁶ 19, que é estabelecida para um cilindro de 15 polegadas de diâmetro e doze polegadas de comprimento; mas todas as dimensões admitem variações consideráveis, de acordo com a exigência do caso e, preservando as proporções, são aplicadas a cilindros de diferentes diâmetros e golpes de comprimentos”.

Figura 7 - Figura 12 da patente de 1784



²¹⁶ Figura 8

Apêndice 3 – Melhorias e Patente dos Motores Rotativos (tradução nossa)

James Watt descreveu seu método de utilizar um motor rotativo para bombeamento de água em sua “ESPECIFICAÇÃO DA PATENTE, 12 DE MARÇO DE 1782, PARA CERTAS NOVAS MELHORIAS EM MOTORES DE VAPOR E COMEDORES DE FOGO PARA ELEVAÇÃO DE ÁGUA, E OUTROS DESÍGNIOS MECÂNICOS, E CERTAS NOVAS PEÇAS OU; MECANISMO APLICÁVEIS AO MESMO” (WATT, 1782, tradução nossa):

“MINHA PRIMEIRA NOVA MELHORIA em máquinas comedores de fogo ou de vapor consiste em admitir vapores nos cilindros ou reservatório de vapor do motor apenas durante uma certa parte ou parte da descida ou subida do pistão do referido cilindro e usando as forças elásticas, com as quais o vapor se expande ao prosseguir para ocupar espaços maiores, como as potências de atuação no pistão através das outras partes ou partes do comprimento do curso do referido pistão; e na aplicação de combinações das alavancas, ou outros dispositivos, para causar uma desigualdade de potência com o qual o vapor atue sobre o pistão, para produzir efeitos uniformes no trabalho das bombas ou outras máquinas necessárias para serem trabalhadas pelo dito motor: por meio de algumas grandes proporções do vapor previamente encontrado sendo necessário preservá-lo para fazer o mesmo trabalho. Para explicar qual princípio ou melhoria, delineei uma seção de um cilindro oco na figura²¹⁷ 1 do desenho em anexo. O referido cilindro está perfeitamente fechado na extremidade inferior pelo seu fundo CD, e também na extremidade superior pela sua tampa AB; o pistão sólido EF é ajustado com precisão ao referido cilindro, de modo que ele pode deslizar facilmente para cima e para baixo, mas ainda não sofre do vapor passando por ele: o dito pistão é suspenso por uma haste ou vara GH, que é capaz de deslizar através de um orifício na tampa AB do cilindro, e sua circunferência é feita com ar e vapor untados por uma fileira de oakum²¹⁸, ou outros materiais adequados, bastante lubrificado, e contidos na caixa O; e perto da parte superior do cilindro há uma abertura J para admitir o vapor da caldeira. O cilindro inteiro, ou o máximo possível, é fechado em um caixa. MM contendo vapor ou, de outro modo, é mantido do mesmo calor com água fervente ou do vapor da caldeira. Estas coisas estão assim situadas, e o pistão colocado o mais próximo possível para o topo do cilindro, devemos supor que o espaço do cilindro sob o pistão seja esgotado ou esvaziado de ar, vapor e outros fluidos;

²¹⁷ Figura 9.

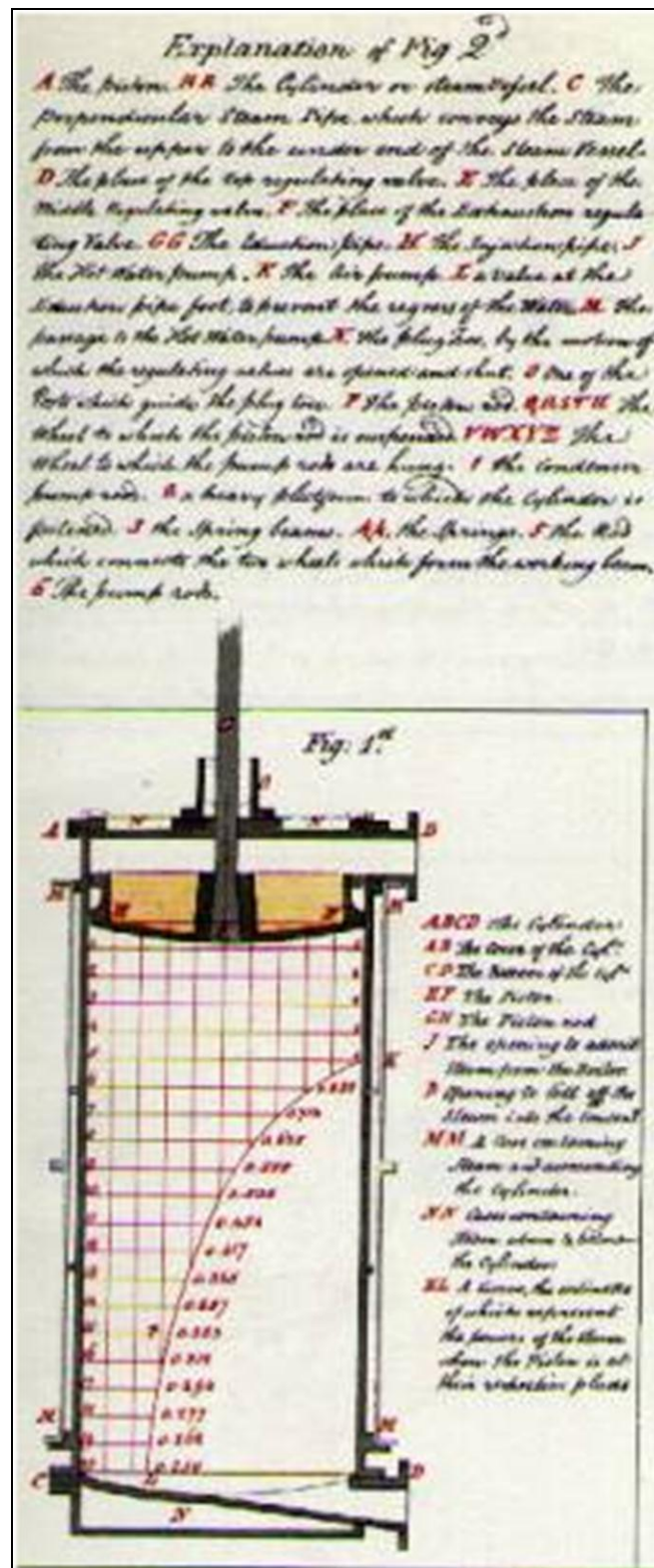
²¹⁸ Oakum é uma preparação de fibra alquílica usada para selar lacunas. Suas principais aplicações tradicionais foram na construção naval, para calafetar ou embalar as juntas de madeira e no caso descrito por Watt, em encanamentos, para juntas de vedação em tubos de ferro fundido.

e deixe que haja uma passagem livre acima do pistão para a entrada de vapor da caldeira e suponha que o vapor seja da mesma densidade ou força elástica que a atmosfera, ou que seja capaz de suportar uma coluna de mercúrio de trinta polegadas de altura no barômetro. Então eu digo que a pressão ou o poder elástico do dito vapor em cada centímetro quadrado da área ou lado superior do pistão serão quase quatorze libras avoirdupois²¹⁹ de peso, e que, se a referida energia fosse empregada para atuar sobre o pistão através de todo o comprimento do seu curso para trabalhar uma bomba ou bombas, ou imediatamente pela haste do pistão prolongada, ou por meio do meio de um feixe do trabalho ou grande alavanca, como é usual nas máquinas a vapor, ele elevaria através de todo o comprimento de seu curso uma coluna ou colunas de água, cujo peso deve ser igual a dez libras por cada polegada da área quadrada do pistão, além de superar todas as fricções e a inércia, da água e das partes da máquina ou do motor. Mas supondo que toda a distância do lado inferior do pistão para o fundo do cilindro seja de oito pés e a passagem que admitiu o vapor da caldeira para ser perfeitamente fechado quando o pistão desceu ao ponto K dois pés, ou um quarto do comprimento do curso ou movimento do dito pistão, digo que, quando o pistão desceu quatro pés, ou a metade do comprimento do curso, a potência elástica do vapor seria então igual a sete libras em cada centímetro quadrado da área do pistão, ou metade da potência original; e que, quando o pistão chegou ao ponto P, a potência do vapor seria um terço da potência original, ou quatro libras e dois terços de uma libra em cada centímetro quadrado da área do pistão; e que, quando o pistão chegou ao fundo ou ao fim de seu golpe, o poder elástico do vapor seria um quarto da sua potência original, ou três libras e meia libra em cada centímetro quadrado da referida área. E ainda digo que a potência elástica do vapor nas outras divisões marcadas nos comprimentos do referido cilindro são representadas pelos comprimentos das linhas horizontais ou ordenadas da curva KL, também marcados ou delineados no referido cilindro, e são expressas em frações decimais de toda potência original pelos números escritos opostos às referidas ordenadas ou linhas horizontais. E também digo que a soma de todas essas potência é maior do que 700 partes da potência original multiplicada pelo comprimento do cilindro; pelo que parece apenas um quarto do vapor necessário para preencher o cilindro inteiro é empregado e que o efeito produzido é igual a mais da metade do efeito que teria sido produzido por um cilindro inteiro cheio de vapor, admitindo entrar livremente acima do pistão durante todo o comprimento de sua descida; conseqüentemente, o dito Novo Motor ou Motor Expansivo é capaz de criar facilmente colunas de água cujos pesos são iguais a cinco libras em cada

²¹⁹ É um sistema de medição de pesos que usa libras e onças como unidades. A primeira vez que foi utilizado se deu no século XIII e posteriormente esse sistema foi atualizado em 1959.

centímetro quadrado da área do seu pistão e que com um quarto dos conteúdos do cilindro de vapor. E VAMOS RELEMBRAR QUE, por exemplo, mencionei a admissão de um quarto do preenchimento de vapor do cilindro (como sendo o mais conveniente), que qualquer outra proporção do preenchimento de um cilindro ou qualquer outra dimensão do cilindro, produzirá efeitos semelhantes, e na prática, na verdade, eu faço variar essas proporções conforme o caso exija. E também, em alguns casos, eu admito a quantidade necessária de vapor para entrar abaixo do pistão, e puxo o pistão para cima por algum poder externo contra a força elástica do vapor da caldeira, que então sempre se comunica livremente com a parte superior do cilindro, e que produz efeitos semelhantes aos descritos. Mas os poderes que o vapor exerce são desiguais, e o peso da água a ser levantada, ou outro trabalho a ser feito pelos motores, sendo supostamente resistente igual durante todo o comprimento do curso, é necessário tornar iguais todas as potências de atuação por outros meios”.

Figura 9 - Figura 1 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

Como pudemos observar, até o momento Watt ainda não descreveu o movimento rotativo, ele apenas explicou os benefícios econômicos e otimização de suas novas descobertas. Ele explica seis maneiras que ele aperfeiçoou para obter essa economia de combustível das máquinas e aumento da eficiência dos motores a vapor e comedores de fogo, e no sexto exemplo do que ele chamou de “primeira nova melhoria”, Watt descreve o movimento rotativo:

“MEU SEXTO MÉTODO, parte do mecanismo, ou o mecanismo para igualar as potências do vapor, consiste em empregar a potência excedente do vapor sobre o pistão nas primeiras partes do seu movimento, para gerar uma velocidade rotativa ou vibratória apropriada a uma quantidade de matéria que, mantendo essa velocidade, deverá atuar junto com o pistão e ajudá-lo a elevar as colunas de água na última parte de seu movimento, quando as potências do vapor estão incompletas: dois métodos pelos quais eu executo isso são delineados no desenho do motor, figura²²⁰ 12. A roda voadora²²¹ ou roda pesada XX é posta em movimento por meio de um pinhão²²² ou roda menor Y fixada sobre seu eixo, e os dentes do pinhão ou roda menor estão sob ação do setor dentado QQ, fixado sobre o arco do feixe de trabalho; ou a referida roda voadora é por outros meios ligada ao movimento do referido feixe de trabalho. Quando o pistão puxa para baixo a extremidade do feixe de trabalho, o setor dentado QQ dá movimento ao pinhão e, desse modo, dá velocidade à roda voadora; e quando a velocidade da descida ou da subida do arco ou setor do feixe de trabalho é inferior à velocidade que o pinhão e a roda voadora adquiriram, então a velocidade constante da roda voadora, faz com que o pinhão atue rotacionando sobre o setor, auxiliando na potência do vapor, até que sua velocidade seja extenuada, ou o pistão atinja o fundo do cilindro; e a referida roda voadora funciona da mesma maneira durante a subida do pistão, mas gira então na direção oposta. Na segunda variação desse método, uma roda voadora, ou roda pesada, é colocada em um movimento rotativo contínuo por uma manivela, por qualquer um dos movimentos rotativos para os quais obtive a Patente Real de Sua Majestade, datada no presente ano de seu reinado, ou por qualquer outro meio que deve ou possa produzir um movimento rotativo contínuo. E a referida máquina rotativa está conectada ou unida a cada extremidade do feixe de trabalho, para ou com a haste do pistão em si, para ou com as hastes de bombeamento, ou para ou com qualquer outra parte móvel do motor ou hastes de

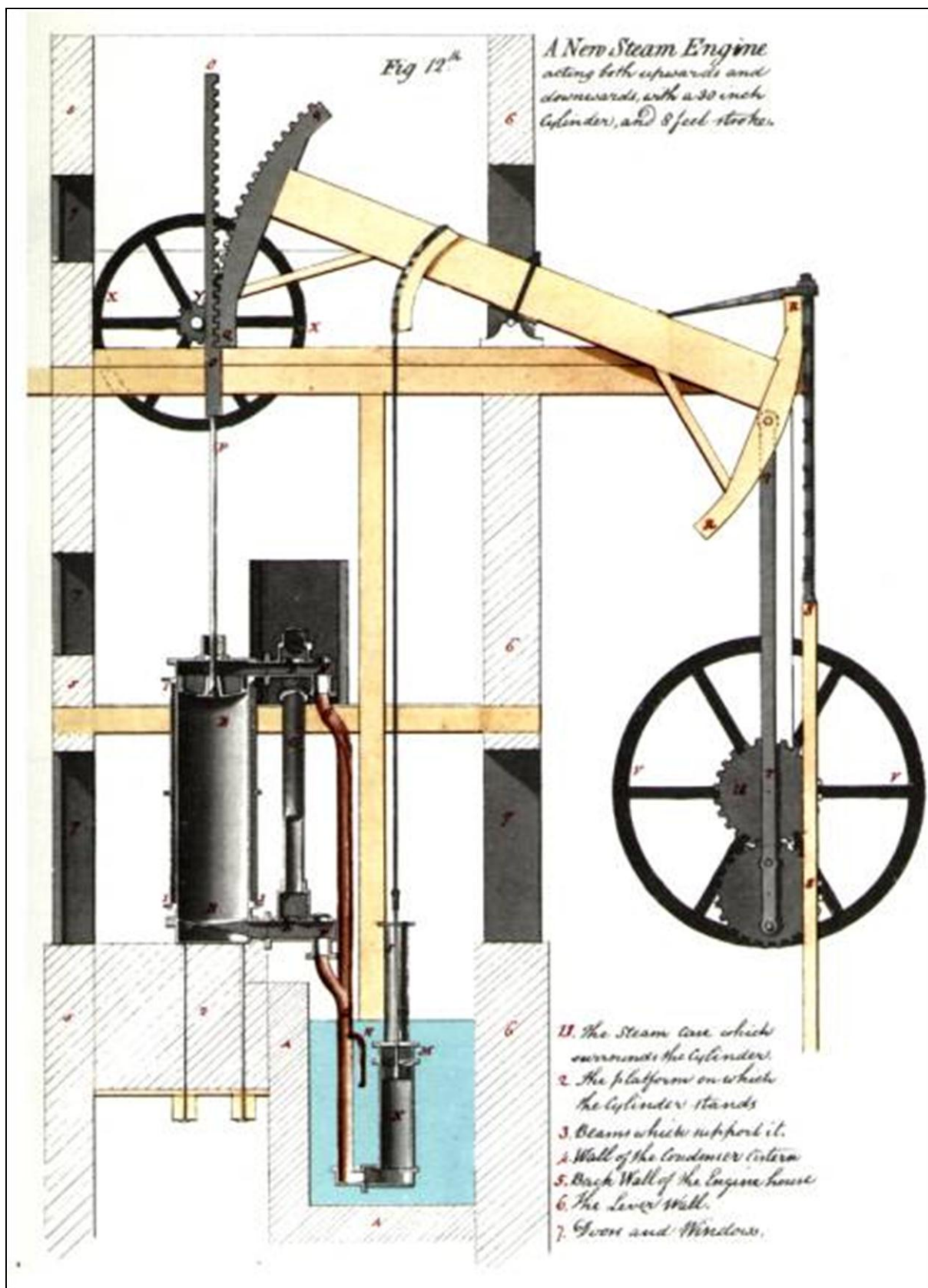
²²⁰ Figuras 10.

²²¹ É a roda que se encontra na parte superior da máquina de vapor.

²²² A menor engrenagem num conjunto de engrenagens.

bombeamento que seja adequadamente encontrada. No desenho da figura 12, T, U, W, V, V representam a aplicação do meu Quinto Método de produção de movimentos rotativos a partir de máquinas a vapor, como método ou artifício para igualar a potência do vapor. O pistão está na parte superior do cilindro e o feixe de trabalho na situação delineada, o motor começa seu curso e, por meio da biela TT, puxa para cima a roda dentada W, que é fixada à biela de tal forma que não pode girar sobre seu próprio eixo, e é confinado por meio de uma ligação ou cadeia que atinja do seu centro para o eixo da outra roda dentada U, ou que de outra forma é projetada para que não possa afastar-se dela; portanto, quando a ação do motor puxa a roda W para cima, ela gira em torno da outra roda U e faz com que (U) gire em seu próprio eixo; e a roda voadora ou roda pesada W sendo fixada no mesmo eixo, também seja posta em movimento, e devido a grande potência do vapor nas primeiras partes do traçado, a roda voadora adquire uma grande velocidade, pelo que, por meio das duas rodas e da biela, atue sobre o feixe de trabalho e auxilie a ação do vapor nas últimas partes do curso: quando o pistão completou seu curso para baixo, a borda inferior da roda W passou a borda superior ou a parte mais alta da roda U e, a velocidade constante da roda voadora, faz que a roda U atue sobre a roda W auxiliando no peso e desequilibrando as hastes de bombeamento na elevação do pistão para o topo do cilindro. MAS LEMBRE-SE, que eu (o referido JAMES WATT) não significa que qualquer coisa que eu indiquei aqui, tocando ou referente a esta segunda variedade de aplicação do meu Sexto Método ou disposição para igualar as potências dos vapores, deva ser interpretado ou pensado que se destine a impedir que qualquer outra pessoa ou pessoas usem ou apliquem para movimentação, torneamento ou funcionamento de máquinas-ferramentas ou outras máquinas, onde são necessários movimentos rotativos contínuos, quaisquer aparelhos ou invenções para produzir movimentos rotativos de máquinas a vapor, desde que tais movimentos ou máquinas rotativas não sejam da minha invenção, e tais motores não sejam aplicados principalmente ou unicamente para a elevação de água: a verdadeira intenção e significado do referido artigo anterior desta escrita, são para especificar os meios pelos quais eu aplico movimentos rotativos contínuos, como alguns dos meus métodos ou instrumentos para equalizar as expansivas potências do vapor, em motores que são usados principalmente ou totalmente para a captação de água de minas, rios, lagoas, pântanos, lagos e outros locais”.

Figura 10 - Figura 12 da patente de 1782 (parte 1)



Fonte: Watt (1782)

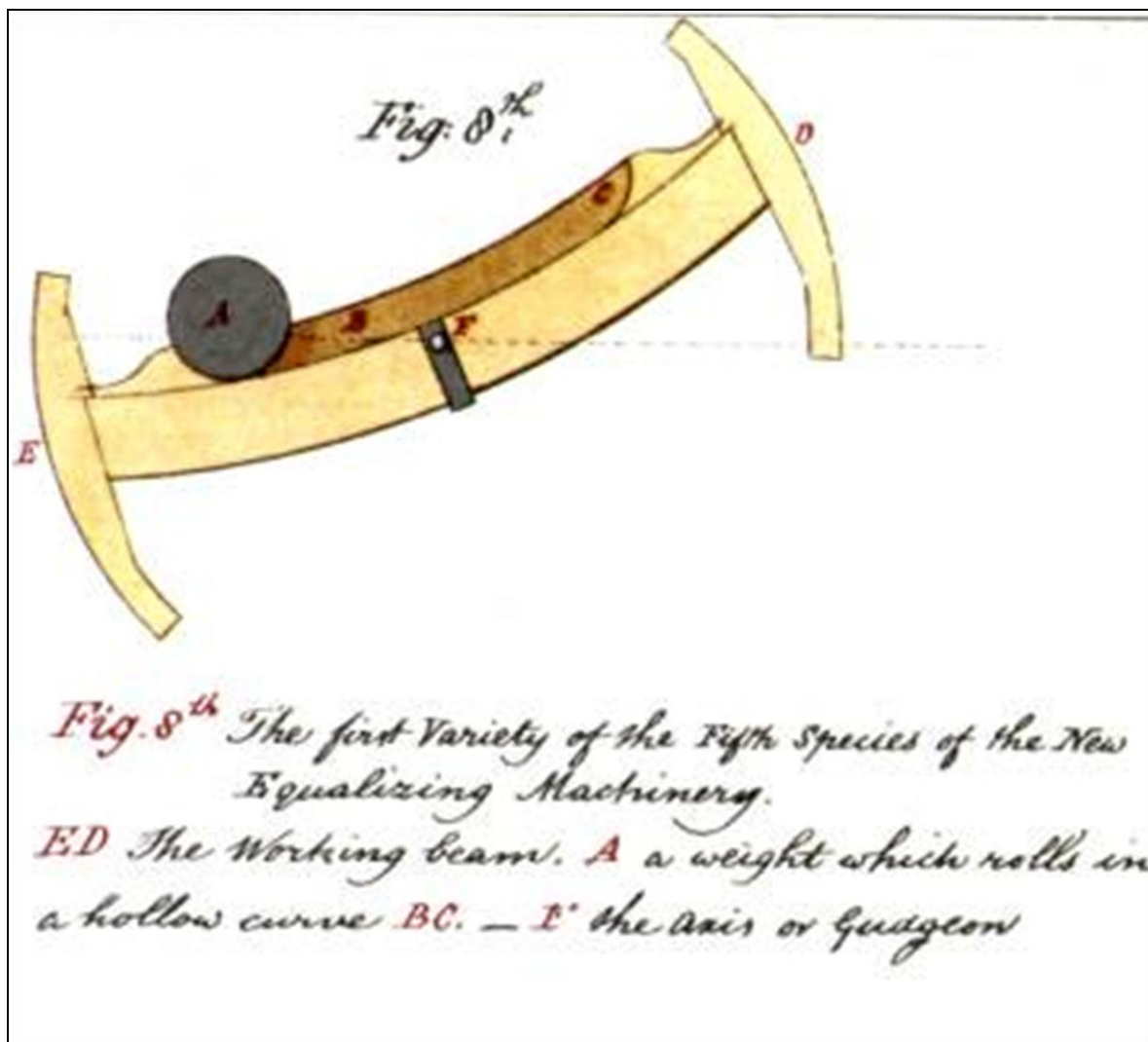
Como vimos, esse sexto método utiliza princípios para equalizar as potências dos vapores que foram descritos e estabelecidos no quinto²²³ método patenteado por Watt em 1782, dessa forma, se faz necessário compreender o que se refere o que ele denomina “Quinto método”:

“O MEU QUINTO MÉTODO, parte do mecanismo ou disposição para igualar a potência do vapor, consiste em colocar, suspender ou fixar o feixe de trabalho da máquina a vapor, ou algum outro feixe, roda ou alavanca conectada a ele, uma quantidade de matéria pesada, de tal maneira que o referido material pesado deve agir contra a potência do pistão no início da descida do dito pistão e, à medida que o pistão desce, deve avançar gradualmente para a extremidade do feixe para o qual o pistão está suspenso, ou de outra forma deve agir em favor do pistão na última parte do curso. Três Métodos ou Variações desse princípio estão representados nas figuras²²⁴ 8, 9 e 10. A Figura 8 opera por meio de um cilindro pesado A, de ferro ou outro material, que rola em uma curva oca BC na parte de trás do feixe de trabalho e, conseqüentemente, altera seu lugar e prossegue para a outra extremidade do cilindro do feixe, conforme o pistão desce.

²²³ A descrição original está apresentada no Anexo 9.

²²⁴ Figuras 11, 12 e 13, respectivamente.

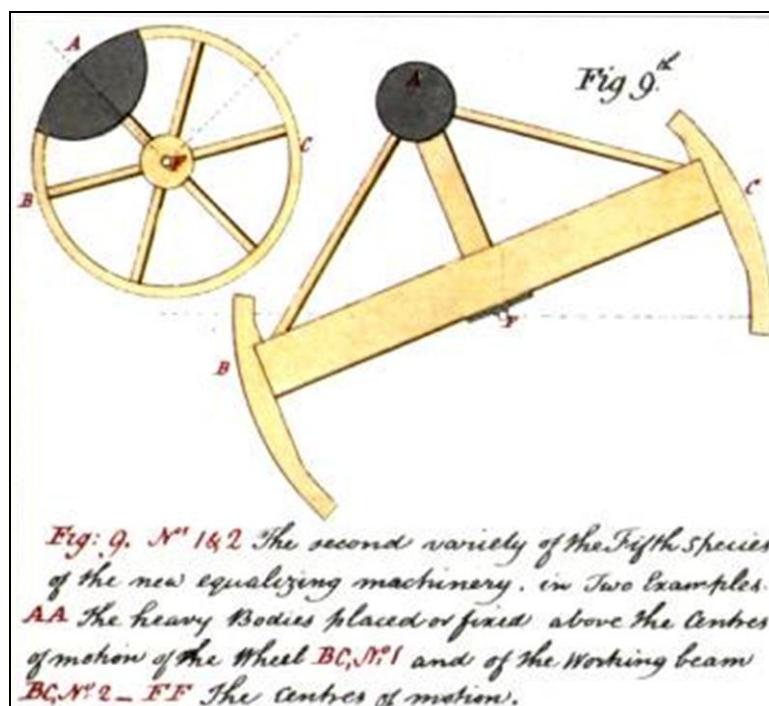
Figura 11 - Figura 8 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

Na figura 9, o mesmo é realizado por um peso de ferro denso ou outro material, A, fixado acima do feixe ou da roda, de modo que seu centro de gravidade no início do movimento esteja mais próximo da extremidade da bomba do que o centro de suspensão da viga, pelo qual atua contra o pistão e, finalmente, fica no mesmo lado desse centro, com a extremidade ao qual o pistão está suspenso e, desse modo, atue a seu favor.

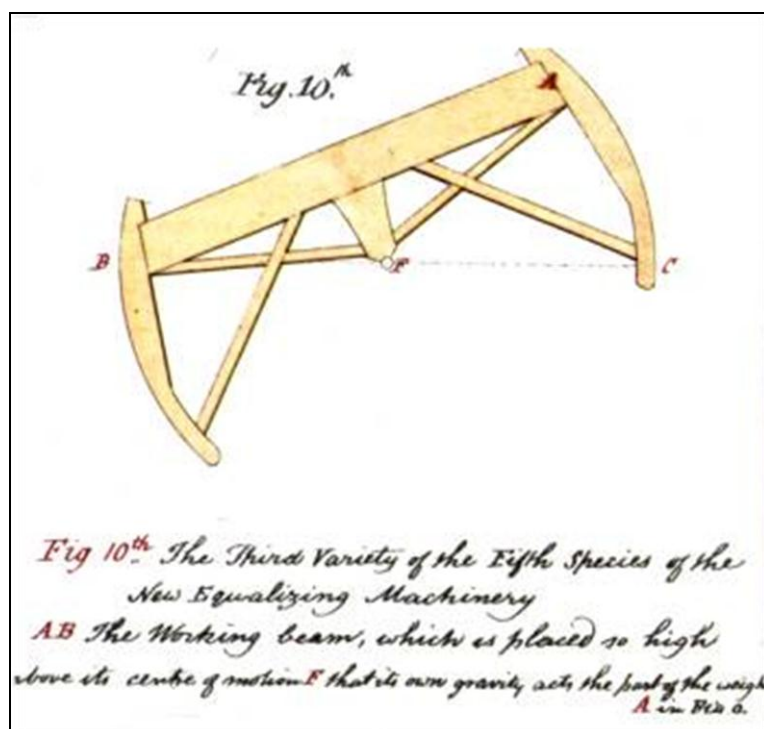
Figura 12 - Figura 9 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

A Figura 10 mostra um método de fixar o próprio feixe de trabalho, de modo a desempenhar em algum grau a mesma função do peso na figura 9.

Figura 13 - Figura 10 da patente de 1782

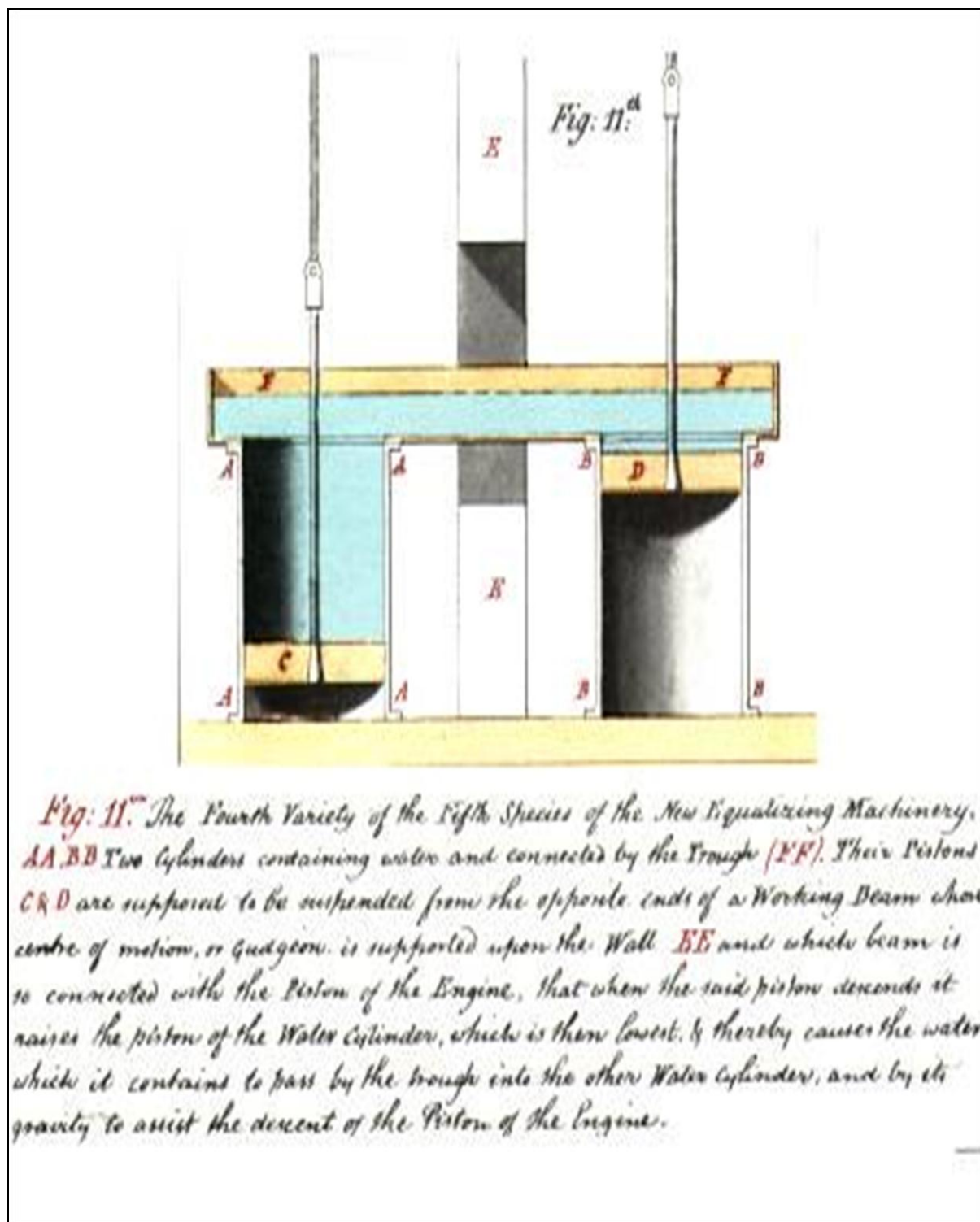


Fonte: Watt (1782)

A Figura²²⁵ 11 mostra um quarto método, pelo qual eu executo da mesma maneira, fazendo com que uma quantidade de água ou outro líquido se oponha à subida do pistão no início do golpe, e o auxilie na última parte. A e B representam dois cilindros ou outros reservatórios cheios de água, ou algum outro líquido, acima de seus pistões C e D, cujas hastes são fixas (ou suspensas) ao feixe de trabalho do motor, ou feixe secundário ou feixe auxiliar que pode ser aplicado a esse uso, nos lados opostos do eixo. Esses cilindros estão abertos no fundo e no topo, e na parte superior eles estão conectados entre si por um módulo ou calha, que abrem ou fecham: quando o pistão desce, eleva a extremidade oposta do feixe de trabalho e o pistão do cilindro B, e, desse modo, faz com que a água que ele contém se movimente para A, cujo pistão C, tornando-se carregado na proporção em que o pistão D sobe, vem gradualmente para auxiliar o pistão do reservatório de vapor na última parte do seu movimento. Esses cilindros, contendo água, podem ser colocados abaixo do feixe de trabalho ou acima dele, ou podem ser suspensos para um feixe de trabalho secundário, construído para esse propósito, ou necessário para algum outro uso conectado com a haste do pistão ou a haste de bombeamento ou outra parte e colocada de modo que os cilindros de água possam estar fora da “casa da máquina”, em algum local onde possa ser mais conveniente”.

²²⁵ Figura 14.

Figura 14 - Figura 11 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

Apêndice 4 – Patente dos Motores de Dupla Ação (tradução nossa)

Watt descreveu o que ele chamou como motor de dupla ação na sua patente publicada em 12 de Março de 1782. vejamos os trechos nos quais ele faz a descrição do funcionamento desse tipo de máquina de vapor:

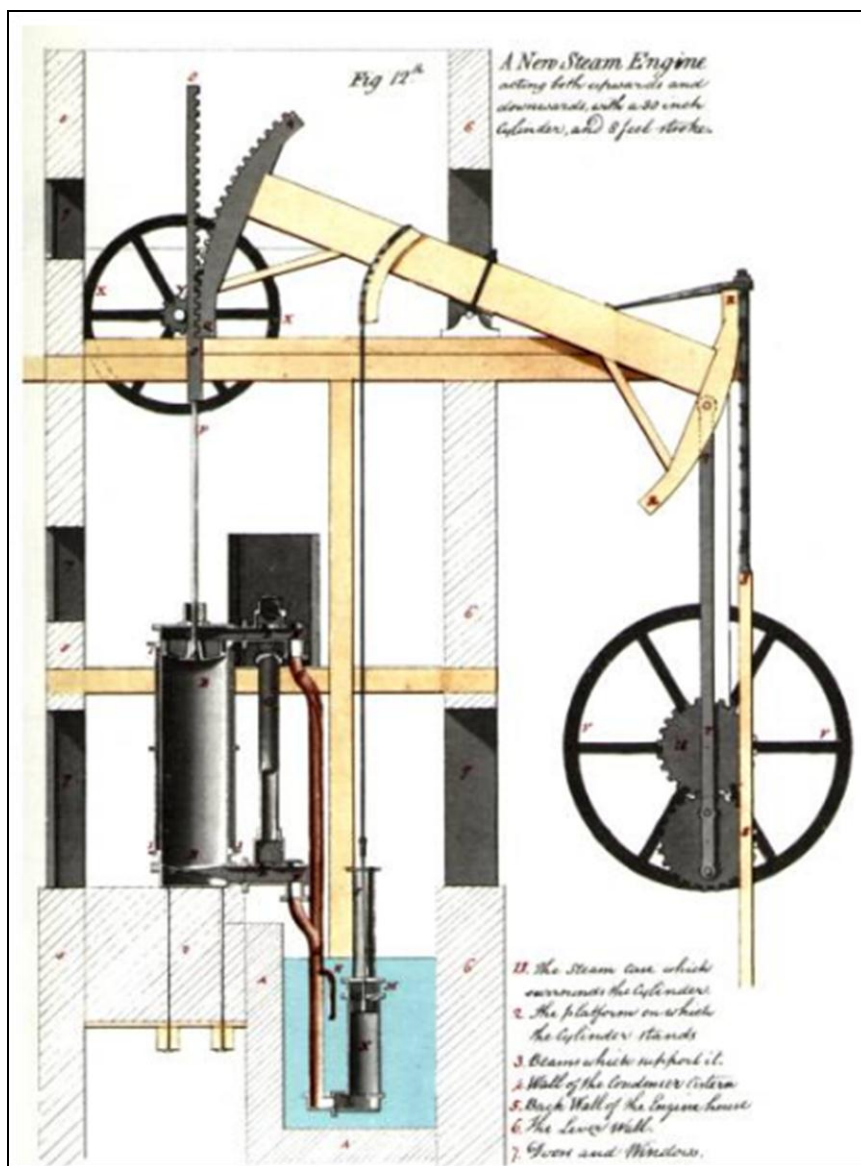
“MINHA SEGUNDA MELHORIA em motores de vapor ou comedores de fogo consiste em empregar a potência elástica do vapor para forçar o pistão para cima, e também pressioná-lo para baixo alternadamente, fazendo um vácuo acima ou abaixo do pistão, respectivamente, e ao mesmo tempo empregando o vapor para agir sobre o pistão naquela extremidade ou parte do cilindro que não está esgotada; de modo que um motor construído dessa maneira pode realizar o dobro da quantidade de trabalho, ou exercer o dobro da potência ao mesmo tempo, (com um cilindro do mesmo tamanho), que até agora foi feito por qualquer motor a vapor em que a força ativa do vapor é exercida sobre o pistão apenas em uma direção, seja para cima ou para baixo. Essa melhoria, aplicada a uma das máquinas a vapor da minha invenção, é delineada na figura²²⁶ 12. A parte inferior do cilindro B está esgotada de ar, vapor e outros fluidos, de modo que quando a válvula de regulação F está aberta, as válvulas de regulação E e N estão fechadas, abrindo a válvula de regulação D, dessa forma, admite que o vapor da caldeira pressione a parte superior do pistão, ação essa em que o vapor fará o pistão descer, puxando para baixo a extremidade do cilindro do feixe de trabalho e elevando a extremidade na qual as hastes da bombeamento estão suspensas. Quando o pistão chega na parte inferior do cilindro, ou na extremidade do seu curso, a válvula F se fecha e a válvula E se abrirá, admitindo vapor sob o pistão e, ao mesmo tempo, fechando válvula de regulação D, de forma a evitar que o vapor venha da caldeira para a extremidade do cilindro e permitindo que a outra válvula N no bocal superior ou caixa de regulação seja aberta, fazendo com que o vapor que se encontra acima do pistão avance para o tubo de alimentação GG, onde ele irá encontrar o jato de injeção de água, que o condensa e produz um vácuo na parte superior do cilindro, que, destruirá o equilíbrio, permitindo que o vapor sob o pistão force-o para cima. Então, a haste do pistão atuando rapidamente sobre o pistão, e tendo a cremalheira dentada OO fixada à sua extremidade superior por meio dos seus dentes, que estão envolvidos nos dentes do setor dentado que é fixado ou faz parte do arco QQ do feixe de trabalho, ou por meio de cadeias duplas ou qualquer outro método praticável, o pistão ou a sua haste levanta a extremidade do cilindro do feixe de trabalho, e também um peso-pesado

²²⁶ Figura 15.

oculto ou contido no arco do mesmo, ou de outro modo fixado, preso ou suspenso ao mesmo; qual peso deve ser igual, ou aproximadamente, à força ou potência do vapor quando atua sobre o pistão na direção ascendente. Quando o pistão chega no topo do seu movimento, as válvulas de regulação E e N são fechadas e as válvulas de regulação D e F se abrem, pelo qual, o pistão inicia novamente o movimento para baixo, conforme descrito; e, durante a descida do pistão, o peso QQ, fixo ou suspenso ao feixe de trabalho, auxilia a potência do vapor no pistão, elevando a coluna de água nas bombas ou trabalhando em outras máquinas. Na figura²²⁷ 13 é delineado uma vista frontal do cilindro e uma seção do condensador desse motor, em que os tubos que transportam o vapor da caldeira e para o condensador são devidamente distinguidos e explicados. Esta melhoria permite que o motor seja usado com o esforço uniforme de toda a potência do vapor no pistão, tanto na descida quanto na subida; ou, fazendo com que o peso das colunas de água nas bombas ou a resistência de outras máquinas que possam ser necessárias para trabalhar, igual à potência total do vapor sobre o pistão, quando atua em uma única direção, e o peso no raio de trabalho igual a metade desse poder, ele pode ser usado como um motor duplo expansivo, e forjado da maneira que aqui estabeleci na descrição da minha Primeira Melhoria. E, nesse caso, as invenções descritas para igualar as potências do vapor no quarto, quinto e sexto métodos, são peculiarmente aplicáveis a este modo de construção do motor. Por isso, delineei as duas variações que descrevi do Sexto Método aplicado a este motor. E LEMBRE-SE, que qualquer um ou ambos podem ser usados ao mesmo tempo, embora apenas se estritamente necessário, e que quaisquer outros dois ou mais dos seis métodos anteriormente descritos, ou suas variações, podem ser aplicados a um motor ao mesmo tempo; isto é, aqueles no qual a natureza do motor admite tal combinação”.

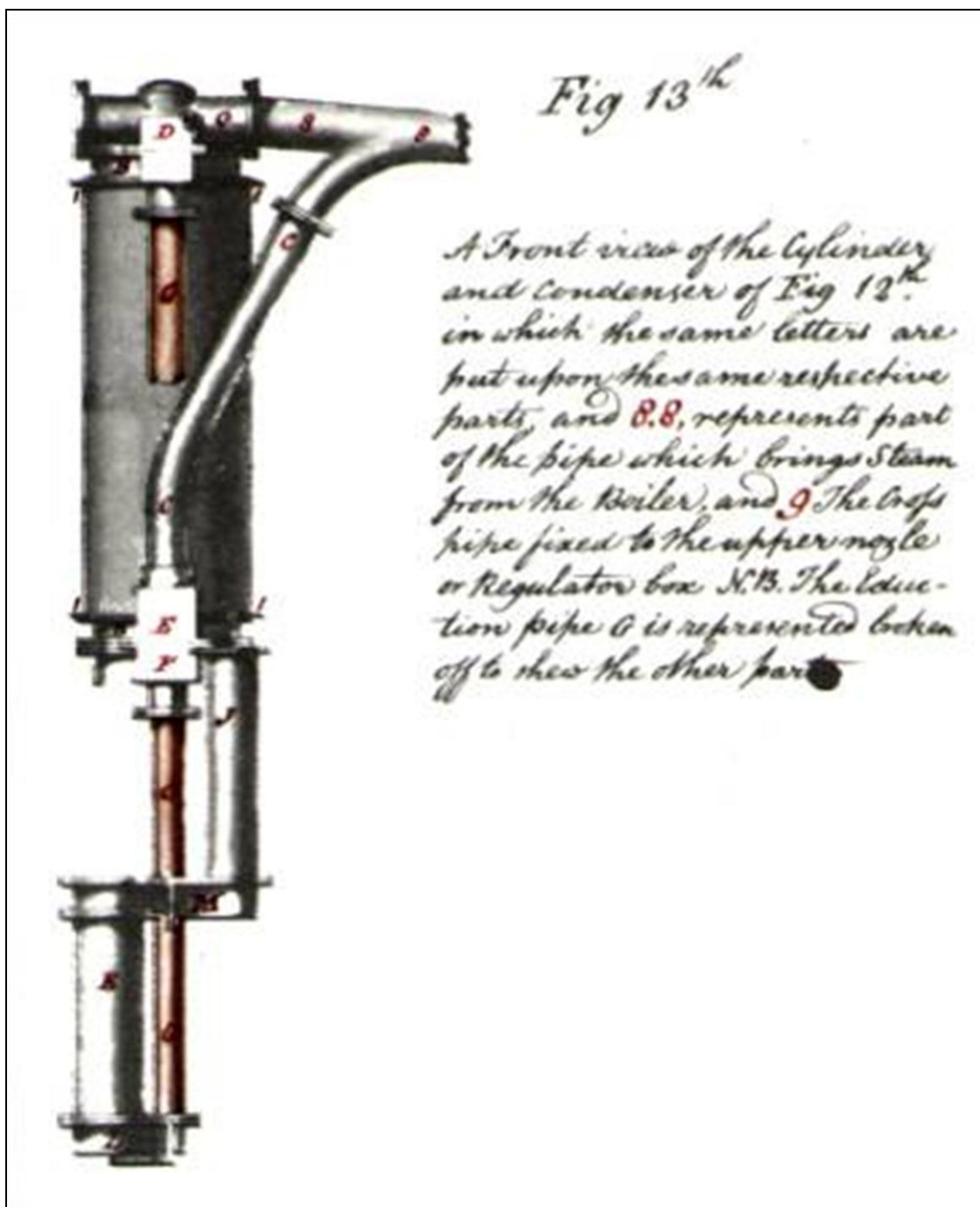
²²⁷ Figura 16.

Figura 15 - Figura 12 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

Figura 16 - Figura 13 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

Apêndice 5 - Trecho da patente de James Watt em 1782 em que ele descreve o funcionamento para conectar duas ou mais máquinas a vapor (tradução nossa)

“MINHA TERCEIRA MELHORIA em motores de vapor ou comedores de fogo consiste na conexão, por canos ou outros tubos de comunicação adequados, dos reservatórios de vapor e condensadores de duas ou mais máquinas a vapor distintas; cada um dos quais tem o seu feixe de trabalho separado e outras partes que constituem a máquina a vapor, ou está construído de outra forma que pode trabalhar com bombas ou outras máquinas que estejam conectadas ou sejam independentes daquelas produzidas pelo outro motor; e que dois motores podem tomar seus cursos alternadamente, ou os dois juntos, pode ser necessário. A construção da referida máquina é descrita como segue, e uma vista frontal externa dos reservatórios ou cilindros de vapor e condensador dos dois motores é delineada na figura²²⁸ 14 dos desenhos aqui anexados. A seção ou a vista lateral dos dois motores não são delineadas, porque, quando vistas nessa direção, apenas uma delas pode ser vista, a outra sendo escondida por ela; e o motor que pode ser visto parece o mesmo que o motor delineado na figura 2, ou, em relação aos feixes de trabalho, como o motor delineado na figura 12; - estes compostos ou motores duplos admitem a aplicação de qualquer uma das máquinas de equalização que foi descrita anteriormente. Na figura 14, o cilindro do motor primário, n. ° 1, recebe vapor da caldeira pelo tubo de vapor 8, 9, cujo vapor entra no cilindro por uma válvula de regulação situada em D, sendo o seu pistão na extremidade superior do golpe; e a parte do cilindro que está abaixo do pistão sendo esgotada, a potência elástica do vapor pressiona o pistão até chegar no fundo ou o término de seu curso: a válvula de regulação D é então fechada, e a válvula de regulação do meio em E é aberta, o que admite que o vapor entre dentro do pistão, tornando o motor habilitado para levantar o pistão no topo do curso, onde estava no início: a válvula de regulação do meio E é então fechada e as válvulas de regulação F e P são abertas: a válvula F permite que o vapor passe através do tubo de escoamento N para o tubo de vapor perpendicular R do motor secundário e pressione o seu pistão, sob qual pistão há um vácuo. O vapor que está ou foi contido sob o pistão do motor primário, n. ° 1, sendo da mesma densidade com a atmosfera, ou quase assim, será, enquanto o pistão do motor secundário, n. ° 2, permanece estacionário, atua sobre ele com toda potência pertencente à sua densidade ou elasticidade, e assim o levará a iniciar seu movimento para baixo; mas, à medida que o pistão

²²⁸ Figura 17.

do No. 2 se move para baixo, a densidade e a força elástica do vapor diminuirão na medida em que os espaços que ele ocupa são aumentados; de modo que (caso os cilindros dos dois motores tenham uma capacidade igual) quando o pistão do n.º 2 chega na parte inferior ou extremidade inferior do seu curso, a densidade e a força elástica do vapor serão apenas metade do que eram enquanto o pistão permaneceu no topo. Portanto, se uma simples alavanca, roda ou feixe de trabalho for usado para este motor secundário, nº 2, o motor deve ser carregado somente com uma coluna de água, ou outro trabalho, igual a metade do número de libras em cada polegada quadrada com a qual o motor primário, nº 1, é capaz de trabalhar com; mas se o motor secundário, n.º 2, for fornecido com qualquer convivência apropriada para equalizar a potência do vapor, pode, em caso dos cilindros dos dois motores tenham a mesma capacidade, fazer sete décimos do trabalho que é feito pelo motor primário, nº 1. Quando o pistão do motor secundário, n.º 2, chega ao fundo do seu curso, a válvula de regulagem do meio O é aberta, e o vapor passa para o condensador GK e, ao mesmo tempo, encontra com uma injeção de jato da água, desta forma, condensando; e, assim, a parte superior do cilindro do motor secundário e a parte inferior do cilindro do motor primário estão esgotadas de vapor. O pistão do motor secundário, nº 2, tendo então um vácuo acima e abaixo dele, é puxado facilmente pelo feixe de trabalho desse motor; e, tendo um vácuo sob o pistão do motor primário, n.º 1, o vapor da caldeira exerce seu poder sobre ele e pressiona-o para baixo e os outros movimentos são repetidos, conforme descrito. Esses motores compostos também podem ser feitos de outras maneiras, das quais eu descreverei melhor. Vamos retirar o tubo N sendo supostamente removido, e um tubo de vapor S (que é delineado em tinta vermelha), seja feito para conectar o tubo de vapor perpendicular C do motor primário e a caixa superior do regulador ou tubo cruzado Q do motor secundário; então, o pistão do motor primário, n.º 1, sendo pressionado no fundo por vapor, fecha a válvula de regulagem superior D e abre a válvula de regulagem superior Q do motor secundário: o pistão desse motor começará imediatamente a descer com uma potência reduzida (como já foi observado antes). Quando o pistão do motor secundário, n.º 2, chega ao fundo do seu curso, a regulagem média O é aberta, fazendo com que o vapor saia dos cilindros de ambos os motores para o condensador ou condensadores; e, havendo vácuo acima e abaixo dos pistões de ambos os motores, o equilíbrio dos dois é restaurado, e ambos os pistões permitem ser levantados pelo peso desequilibrado das hastes de bombeamento, ou outros pesos ou maquinaria aplicadas para esse fim. É adequado, nesse modo de aplicação, fazer um pequeno tubo que conduza a parte inferior do cilindro do motor primário para o tubo de alimentação, ou condensador, do motor secundário; pelo que o vácuo sob e acima de ambos os pistões possa ser mantido em

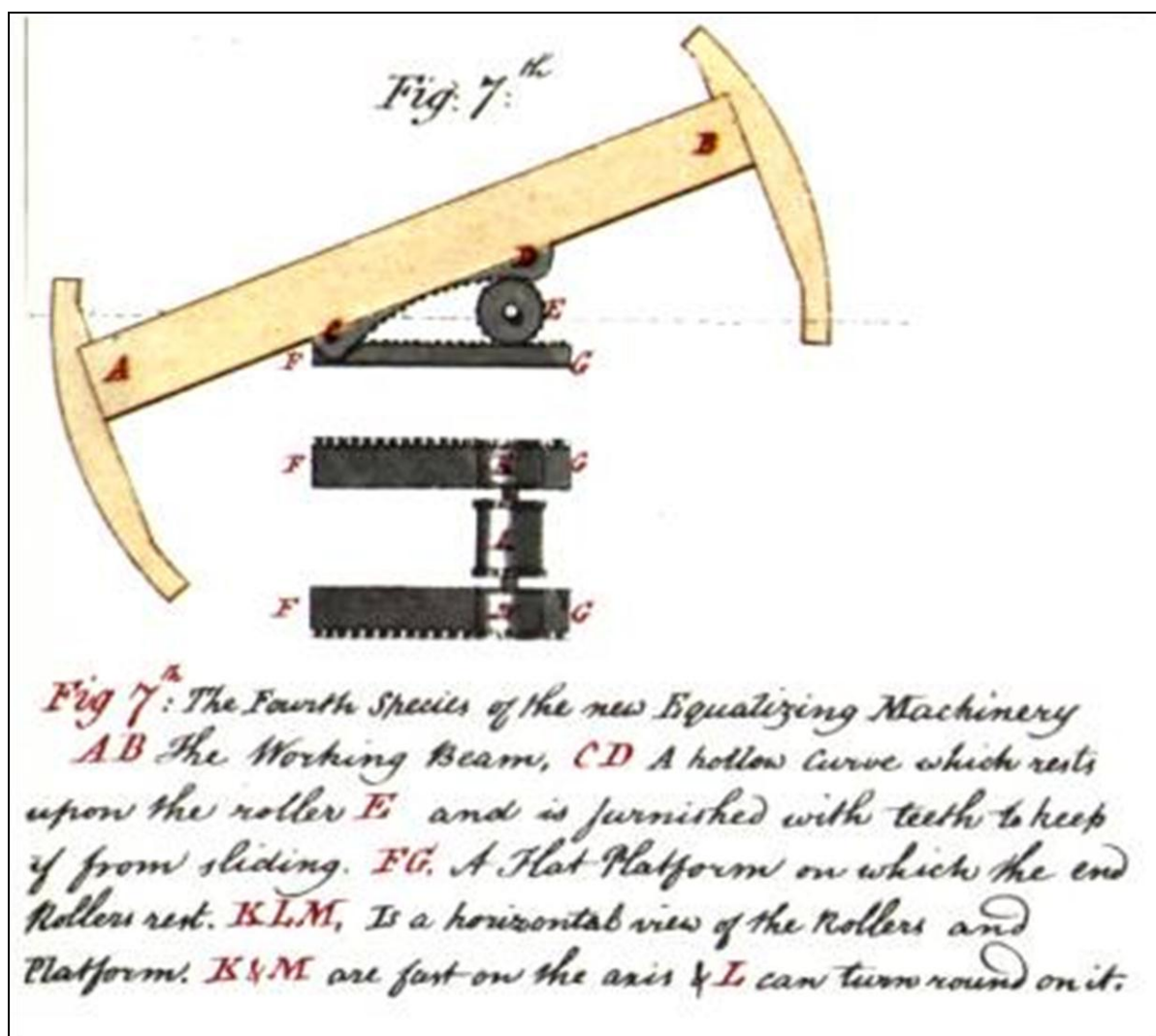
igual grau de raridade ou perfeição. Para obter uma compreensão mais clara dessas melhorias e delineamentos, descrevi nos parágrafos aqui anexados, de acordo com as escalas especificadas nos respectivos desenhos, e os adaptei todos, exceto a figura 1, para motores cujos cilindros tenham trinta polegadas de diâmetro e todo o comprimento do golpe cujos pistões tem oito pés; mas eu faço cilindros maiores ou menores, mais longos ou mais curtos, e variam as proporções e a forma deles e das outras partes, de acordo com as suas necessidades; e, como cada melhoria, método, peça de mecanismo ou disposição, admite inúmeras variações. Eu tenho estabelecido e delineado apenas o que estimo para estar entre os melhores, e que são os mais fáceis de serem executados”.

Apêndice 6 - Quarto Método para equalizar as potências dos vapores descrito por Watt na patente de 1782 (tradução nossa)

“MEU QUARTO MÉTODO, ou pedaço de mecanismo para equalizar a potência do vapor, é ocasionar que o centro de suspensão do feixe de trabalho, ou grande alavanca, mude o seu lugar durante o tempo do curso, pelo qual a extremidade da alavanca à qual o pistão está suspenso fique mais longa, e a extremidade pela qual as hastes de bombeamento estão suspensas tornem-se mais curtas, à medida que o pistão desce no cilindro. Um método fácil de fazer isso está representado na figura²²⁹ 7: AB representa o feixe de trabalho; B, a extremidade ao qual o pistão está suspenso; A, a extremidade para o qual as hastes de bombeamento estão suspensas; CD, uma curva oca de madeira ou metal fixada no lado inferior do feixe de trabalho; E, a extremidade de um rolo de fricção, que rola entre a curva CD e o plano ou suporte FG. Esse rolo de fricção é dividido em três partes, como pode ser observado na sua visão horizontal KLM: as duas partes de extremidade KM, que rolam sobre os suportes FG, são fixadas firmemente sobre um eixo; a parte do meio L, que rola sob a curva CD, pode girar em torno de seu eixo; portanto, quando, pela ação do pistão no feixe de trabalho, a extremidade B é puxada para baixo, o rolo prossegue em direção a C para a parte da curva que é então a mais alta e, por isso, prolonga a alavanca pela qual o pistão atua sobre as bombas, e encurta aquele pelo qual as bombas resistem ao cilindro e que em quaisquer proporções que possam ser necessárias, de acordo com a forma da curva.

²²⁹ Figura 18.

Figura 18 - Figura 7 da patente de 1782



Fonte: Watt (1782)

ANEXOS

Índice de Anexos

Anexo 1: Classificação das matemáticas por van Roomen.....	354
Anexo 2: Árvore do conhecimento de Francis Bacon	355
Anexo 3: Árvore do conhecimento de D'ALEMBERT e DIDEROT: Sistema detalhado do conhecimento humano	356

Anexo 1 - Classificação das Matemáticas por van Roomen

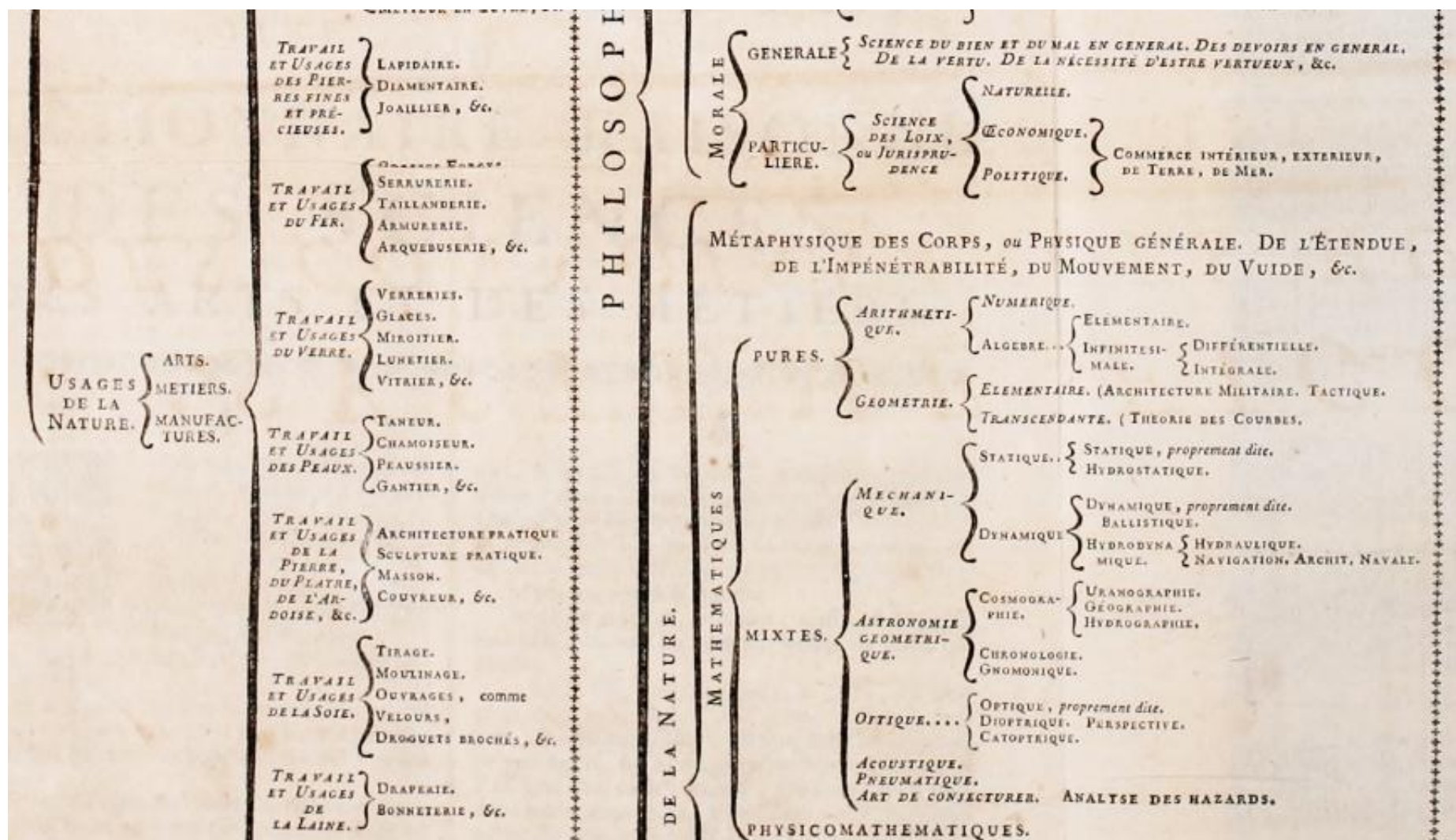


Fonte: Oliveira (2011, p.27)

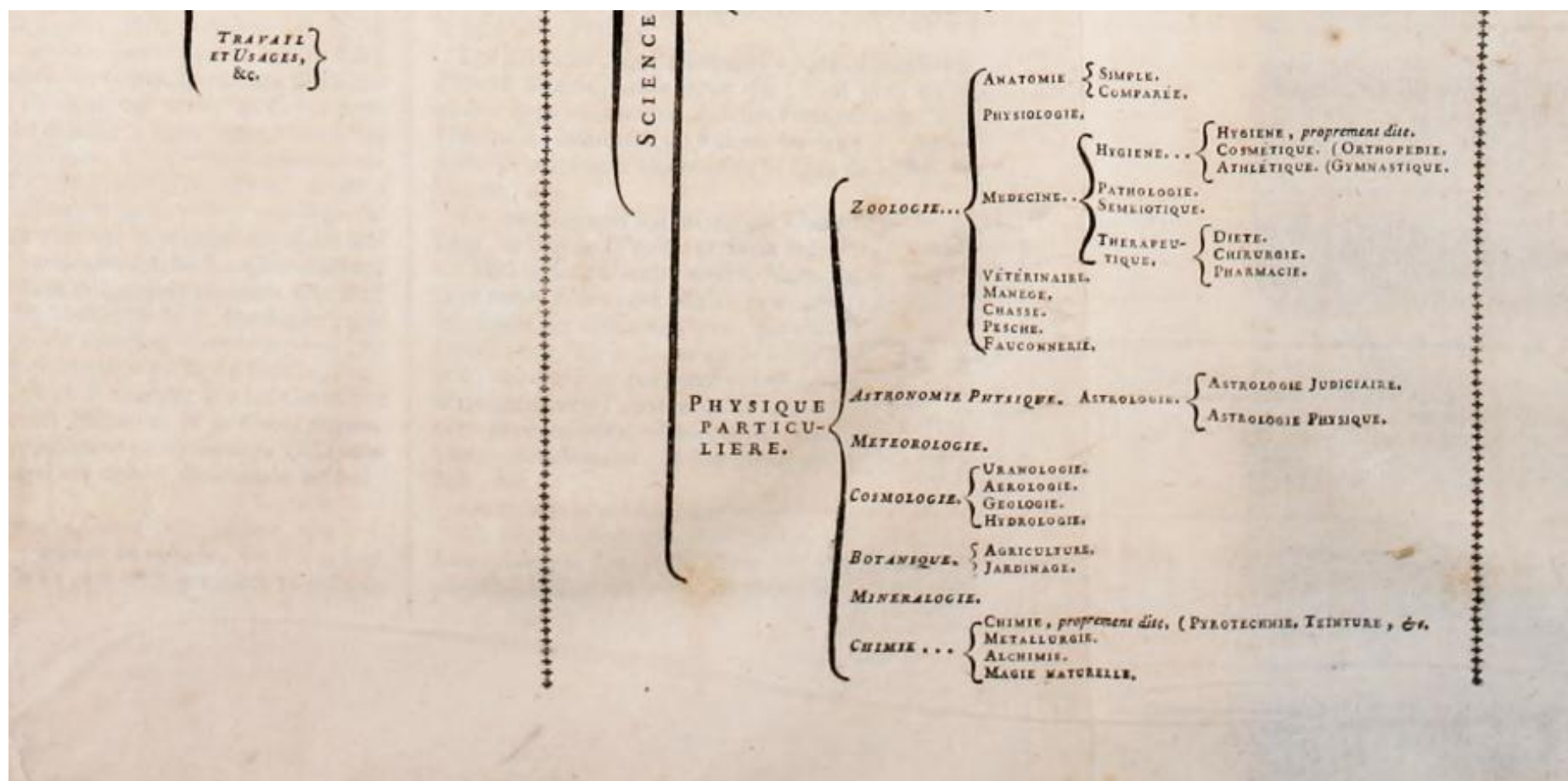
Anexo 3 - Árvore do conhecimento de D'ALEMBERT e DIDEROT: Sistema detalhado do conhecimento humano



Observar que “Imaginação” já está completamente classificada nessa figura.



Nessa figura está a continuação da classificação da “Memória” e da “Razão”. Ambas tem a classificação completa na próxima figura. A classificação de matemática está nessa segunda imagem do anexo como uma ramificação das Ciências da Natureza.



Fonte: <<https://i.pinimg.com/originals/08/ef/23/08ef236b0ca4c17e7368e49a096bad6e.jpg>>

Acessado

em

15/09/2017

