



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/07

Dinâmica de campos escalares fora do equilíbrio

Ricardo Luciano Sonego Farias

Orientador

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein

Junho de 2007

Agradecimentos

Em primeiro lugar, eu gostaria de agradecer a minha família: Carlos, Vera, Sabrina, Zeca, Zaira, Lela, Nilson e, principalmente, à minha esposa Márcia pelo apoio nos momentos bons e ruins.

Não posso deixar de agradecer ao meu orientador Gastão Krein pela oportunidade e pelo aprendizado.

Também agradeço aos meus amigos Orimar e Teca, e claro a malacada: desculpem se esqueci de algum nome, mas nesse instante os nomes que me vêm a cabeça são: Casana, Cabelo, Lc, Gadelha, Doff, Gino, Mario, João, Chucky(Gabriel), Nishi, Wu, Bolinha, Dafni, Gilson, ...

E um agradecimento especial ao professor Rudnei O. Ramos pelas discussões pessoalmente, por email e pelo Skype.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

“ Nunca diga que está ruim porque sempre pode piorar...”

autor desconhecido

Resumo

Consideramos a dinâmica de não equilíbrio da formação de um condensado numa teoria quântica de campos relativística descrevendo campos escalares com acoplamento $\lambda\phi^4$ com quebra espontânea de simetria. A equação de movimento do correspondente parâmetro de ordem é uma equação estocástica do tipo Ginzburg-Landau-Langevin, a qual é derivada a partir da ação efetiva quântica da teoria. Esta equação incorpora ruídos aditivo e multiplicativo, o que permite estudar o papel da flutuação e da dissipação no processo de formação do condensado. A ação efetiva é derivada empregando o formalismo de tempo real da teoria de campos à temperatura finita tanto para fase simétrica como para fase espontaneamente quebrada da teoria. No cálculo da ação efetiva empregamos um método não perturbativo conhecido como teoria de perturbação otimizada até a ordem de três loops, e comparamos com os correspondentes resultados obtidos com a usual teoria de perturbação na constante de acoplamento. Resultados numéricos para as soluções das equações de Ginzburg-Landau-Langevin são obtidos de simulações numéricas de larga escala numa rede espacial em três dimensões. Uma atenção particular é dedicada à renormalização das divergências ultravioletas que aparecem nas simulações destas equações numa rede.

Palavras Chave:

Teoria de Campos à Temperatura Finita; Transições de Fase; Equações de Ginzburg-Landau-Langevin; Teoria de Perturbação Otimizada.

Áreas do conhecimento:

Física de Partículas Elementares, Teoria de Campos à Temperatura Finita

Abstract

We consider the nonequilibrium dynamics of the formation of a condensate in a spontaneously broken $\lambda\phi^4$ relativistic quantum scalar field theory. The equation of motion of the corresponding order parameter is a stochastic Ginzburg-Landau-Langevin equation, derived from the quantum effective action of the theory. This equation incorporates additive and multiplicative noises, which allows to study the role of fluctuation and dissipation in the formation process of the condensate. The effective action is derived using the real time formalism of finite temperature quantum field theory for both the symmetric and spontaneously broken phases. For the calculation of the effective action we employ the nonperturbative method known as optimized perturbation theory and compare the corresponding results with the usual perturbation theory in the coupling constant. Numerical results for the solutions of the Ginzburg-Landau-Langevin equations are obtained through large scale numerical simulations on a three-dimensional spatial lattice. Particular attention is paid to the renormalization of ultraviolet divergences that appear in the simulations of the equations on a spatial lattice.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita	12
2.1	Formalismo de tempo imaginário	13
2.1.1	Potencial efetivo à temperatura finita	18
2.1.2	Temperatura crítica	20
2.2	Formalismo de tempo real	23
2.2.1	Formulação de tempo real através de integrais de trajetória	28
3	Ação Efetiva	42
3.1	Contribuições de um <i>loop</i>	47
3.2	Contribuições de dois <i>loops</i>	51
3.2.1	Termo $\frac{i}{2(3!)^2} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (S_3 [\varphi] \phi^3) \rangle$	54
3.2.2	Termo $\frac{1}{4!} \langle S_4 [\varphi] \phi^4 \rangle$	55
3.2.3	Termo $-\frac{i}{3!} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (\bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \phi) \rangle$	56
3.2.4	Termo $\frac{i}{2} \langle (\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi) (\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi) \rangle$	57
4	Equação de Ginzburg-Landau-Langevin	62
4.1	Fase simétrica	62
4.2	Fase quebrada	75
4.2.1	Contribuições de um <i>loop</i>	76
4.2.2	Contribuições de dois <i>loops</i>	78

5	Equação de GLL em Teoria de Perturbação Otimizada	82
5.1	Teoria de perturbação otimizada em teoria de campos à temperatura finita	84
5.2	Equação de GLL Não Perturbativa - Fase simétrica	87
6	Energia Livre em Teoria de Perturbação Otimizada	93
6.0.1	Energia Livre no Formalismo de Tempo real	93
6.0.2	Energia livre em tempo imaginário	101
6.0.3	Otimização	106
7	Análise Qualitativa e Resultados Numéricos	107
7.1	Soluções das equações de GLL para tempos longos e tempos curtos	108
7.2	Renormalização na rede	112
7.3	Soluções numéricas das equações de GLL	114
7.4	Resultados obtidos com teoria de perturbação otimizada	119
7.4.1	Fase Simétrica	119
7.4.2	Fase quebrada	122
8	Conclusões e Perspectivas	126
A	Demonstração de (2.92)	131
B	Demonstração da Eq (2.93)	133
C	Fatorização do gerador funcional	136
D	Funções de Green térmicas livres	141
D.1	Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112) . .	145
D.1.1	Cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{11}(k)$	151
D.1.2	Cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{22}(k)$	152
D.1.3	Cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{12}(k)$ e $\mathcal{G}_\beta^{21}(k)$	153
E	Expansão perturbativa de $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$	154

F	Propagador vestido	161
F.1	Demonstração de (F.4)	162
F.2	Demonstração da Eq (F.9)	162
F.3	Demonstração de (F.22)	164
F.4	Propagador livre em termos da função espectral	165
F.5	Derivação da função espectral para o propagador vestido	166
F.6	Demonstração de (F.60)	168
F.7	Demonstração de (F.81)	172
F.8	Limite $\Gamma \rightarrow 0$ em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$	174
F.9	Aproximação $\beta\Gamma \ll 1$ em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, \Gamma(\mathbf{q}), t - t')$	175
G	Introdução dos campos estocásticos	177
H	Coeficiente dissipativo usando propagadores livres	183
I	Coeficiente dissipativo vestido	186
J	Coeficiente dissipativo no limite de altas temperaturas	190
K	$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle$ usando propagadores vestidos	193
L	Cálculo dos diagramas utilizando regularização dimensional	196
L.1	<i>Tadpole</i>	196
L.2	<i>Tadpole</i> com inserção η^2	200
L.3	<i>Four point</i>	200
L.4	<i>Snow man</i>	201
M	Contra-termos para as equações de GLL	202
M.1	Potencial efetivo no contínuo	202
M.2	Potencial efetivo na rede	204

Capítulo 1

Introdução

A importância da investigação de transições de fase em condições extremas de temperatura foi reconhecida há muito tempo [1, 2] e, esforços têm sido dedicados para desenvolver uma descrição dentro do contexto de uma teoria quântica de campos relativística à temperatura finita (TQCTF) [3, 4, 5]. Entre a variedade de fenômenos associados com a dinâmica das transições de fase, o ordenamento de fase é de particular importância. Este refere-se ao fenômeno de relaxação de um parâmetro de ordem de um sistema que é rapidamente forçado para um estado fora do equilíbrio. Um exemplo típico deste fenômeno ocorre quando um sistema magnético a altas temperaturas, acima de sua temperatura crítica T_c , é subitamente resfriado a temperaturas muito abaixo de T_c , deixando o sistema num estado altamente instável. A evolução temporal do parâmetro de ordem associado ao problema, a magnetização, cujo valor logo após o resfriamento é zero (ou muito pequeno) se dá através do desenvolvimento de flutuações térmicas de grandes comprimentos de onda. Estas flutuações levam a um crescimento explosivo (ou muito rápido) do parâmetro de ordem a tempos curtos e, para tempos longos, vão levar a um ordenamento do sistema para um novo estado de equilíbrio. Neste estado, o parâmetro de ordem assume um valor diferente de zero correspondente ao mínimo da energia livre de equilíbrio do sistema. Este crescimento inicial muito rápido do parâmetro de ordem é conhecido como decomposição espinodal [6].

A influência da presença de um meio quente e denso na dinâmica de partículas e campos é codificada “macroscopicamente” em atributos que entram em equações de evolução estocásticas, usualmente na forma de termos de dissipação e de ruídos. Escalas de tempo relevantes para diferentes estágios da conversão de fase podem depender dramaticamente dos detalhes desses atributos. Em particular, em colisões de íons pesados a altas energias, onde supostamente [7] forma-se um plasma de quarks e glúons quente e denso e fortemente interagente, campos efetivos que descrevem, por exemplo, o condensado de quarks da cromodinâmica quântica (QCD), evoluem sob condições extremas de temperatura e densidade de energia, e uma transição de fase é esperada. Esta transição de fase, em que o condensado desaparece, é conhecida como restauração da simetria quiral, a qual é espontaneamente quebrada no vácuo. Para ter um entendimento claro dos dados provenientes do BNL-RHIC e, especialmente dos dados que serão produzidos no CERN-LHC, precisamos de uma descrição realística da hierarquia das escalas associadas com dissipação, ruído e radiação. Para uma comparação com dados experimentais, necessita-se também incorporar efeitos devido à expansão e tamanho finito do sistema.

Efeitos de dissipação no cenário da decomposição espinodal explosiva foram considerados de uma maneira simples na Ref. [8] para a produção de hádrons [9, 10, 11, 12] durante a transição quiral na QCD. Usando uma descrição fenomenológica baseada numa equação de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL), inspirada por resultados da teoria de campos microscópicos fora do equilíbrio [13, 14, 15], a evolução temporal do parâmetro de ordem num modelo quiral efetivo [16] foi investigada. Simulações na rede em tempo real para o comportamento de campos quirais não homogêneos foram feitas em $(3+1)$ dimensões e foi mostrado que os efeitos de dissipação podem ser dramáticos apesar de suposições muito conservadoras feitas naquele trabalho. De fato, mesmo que o sistema alcance rapidamente a região instável, ainda não garante que os modos instáveis irão crescer o suficientemente rápido para termalizar o sistema antes deste se resfriar consideravelmente devido à expansão do sistema. Em particular, no caso da hadronização em escalas de tempo do

RHIC, o cenário explosivo torna-se bastante restrito. Mais recentemente, fortes efeitos (análogos) foram obtidos no caso de transição de desconfinamento da teoria de calibre $SU(2)$ usando a mesma abordagem [17].

Em estudos fenomenológicos, como o da Ref. [8], a forma da equação de GLL para a evolução do parâmetro ordem é da forma geral

$$\square \phi + \eta \dot{\phi} + \mathcal{V}'_{eff}(\phi) = \xi(\vec{x}, t) \quad (1.1)$$

Aqui, ϕ é um campo escalar real que representa efetivamente o condensado quiral, e $\mathcal{V}'_{eff}(\phi)$ é a derivada com relação ao campo do potencial efetivo de Ginzburg-Landau. O parâmetro η codifica a intensidade da dissipação (usualmente assumido como sendo uma função apenas da temperatura), e define escalas de tempo da evolução do sistema. A função $\xi(\vec{x}, t)$ representa um ruído (força estocástica), assumido gaussiano e branco, tal que $\langle \xi(\vec{x}, t) \rangle = 0$ e $\langle \xi(\vec{x}, t) \xi(\vec{x}', t') \rangle = 2\eta T \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$, satisfazendo o teorema de flutuação-dissipação.

Contudo, uma descrição da teoria quântica de campos mais completa da dinâmica dissipativa de não equilíbrio [13] mostra que a forma completa para a equação de movimento efetiva de GLL pode levar a cenários muito mais complicados que os descritos pela Eq. (1.1), dependendo dos termos de interação envolvendo ϕ . Em geral, a dissipação será não local (e não markoviana) e com ruído colorido, havendo também a possibilidade de termos de ruídos dependentes do campo (ruído multiplicativo) $\sim \phi \xi$. O termo típico proveniente de flutuações na equação de movimento para ϕ será um funcional da forma

$$\mathcal{F}[\phi(x)] = \phi(x) \int d^4x' \phi^2(x') K_\phi(x, x') \quad (1.2)$$

onde $K_\phi(x, x')$ é um kernel não local escrito em termos das funções de Green retardadas e, cuja forma explícita depende da natureza das interações envolvendo ϕ . Tratamentos explícitos para esses kernels não locais mostram que, sob condições apropriadas, é justificado expressar a equação de movimento efetiva para ϕ numa forma local [18, 19, 20, 21].

A existência desses termos adicionais na equação de GLL irão, com certeza, desempenhar um papel importante na dinâmica da formação de condensados. Em conexão com isto, foi mostrado recentemente [22] que os efeitos de ruído multiplicativo são bastante significativos num cenário de formação de defeitos numa teoria de campos escalar a uma dimensão espacial.

Nesta tese, inicialmente consideraremos a dinâmica da formação de condensados em uma teoria de campos descrevendo campos escalares com acoplamento $\lambda\phi^4$, com quebra de simetria dentro de uma abordagem perturbativa para a ação efetiva da teoria. Isto nos leva a uma equação de GLL que inclui efeitos de ruído multiplicativo e termos dissipativos dependentes da densidade. A correspondente equação estocástica de GLL é derivada em detalhes a partir da ação efetiva, generalizando os resultados da Ref. [13] para o caso com quebra de simetria. A evolução no tempo para a formação de condensado, sob a influência de termos de ruído aditivo e multiplicativo, é resolvida numericamente em uma rede com 3+1 dimensões. Uma particular atenção é dedicada à renormalização da equação estocástica de GLL para obter resultados de equilíbrio independentes do espaçamento da rede.

Após este desenvolvimento perturbativo inicial, vamos considerar um método não perturbativo para a ação efetiva. É sabido desde há muito tempo, que o estudo de fenômenos de transições de fase em teorias quânticas de campos requer métodos não perturbativos que vão além dos métodos usuais baseados em expansões na constante de acoplamento. Este é o caso, por exemplo, quando estudamos mudanças de fase a altas temperaturas, onde ocorre a quebra da teoria de perturbação [3]. Também, próximo aos pontos críticos grandes flutuações podem aparecer no sistema, devido a divergências infra-vermelhas, como em transições de fase de segunda ordem, ou mesmo em transições de fase fracas de primeira ordem [23]. Situações desta natureza podem acontecer, por exemplo, quando estudamos aspectos de quebra e restauração de simetrias em meios quentes e densos, como em processos de QCD, relevantes para os recentes experimentos

de colisões de íons pesados, como também para eventos que certamente ocorreram no universo primitivo.

Métodos não perturbativos que têm sido usados para estudar esses fenômenos de mudança de simetrias à temperatura finita são: técnicas de ressonância de diagramas, como esquemas *daisy* e *super-daisy* [24, 25], método de operadores compostos [26, 27], métodos de propagadores vestidos [28, 29], métodos baseados em expansão de parâmetros não relacionados às constantes de acoplamento do modelo em estudo, como a expansão $1/N$ e a expansão ϵ [30] e métodos numéricos, como o mais notável que é o da teoria de campos na rede [31]. Uma boa referência sobre métodos não perturbativos é a Ref. [32].

Cada método tem suas vantagens e desvantagens. Em métodos numéricos, por exemplo, temos problemas de precisão, limites no tamanho das redes utilizadas nas simulações e outros problemas, como o considerável problema de simular férmions na rede a densidades finitas [31]. Em qualquer outro método não perturbativo baseado em técnicas analíticas (não numéricas), podemos nos deparar com problemas ao calcularmos quantidades em altas ordens, em geral esses termos tornam-se intratáveis. Caso típico deste problema é encontrado em cálculos que vão além da ordem dominante na expansão $1/N$. Outras questões que podem aparecer com estes métodos, quando não aplicados cuidadosamente, estão relacionados à possibilidade de dupla contagem, ou por não serem auto-consistentes, o que pode levar, em muitos casos, a resultados errados. Casos conhecidos, como os primeiros trabalhos sobre ressonância que tratavam de esquemas *daisy* e *super-daisy*, levaram a resultados errados quando aplicados à teoria $\lambda\phi^4$ prevendo, por exemplo, uma transição de primeira ordem [33]. Um resultado inesperado, a previsão que a transição como sendo de primeira ordem, prevendo, em particular, uma forte transição de fase no modelo padrão eletrofraco, foi provada ser um erro [34].

Duas exigências são, então, desejadas para qualquer técnica analítica não perturbativa - deve ser auto-consistente e deve produzir resultados úteis sem ter a necessidade de ir a ordens muito altas, ou seja, que produza resultados que sejam rapidamente conver-

gentes. Embora alguns dos métodos citados anteriormente satisfaçam às exigências acima, nesta tese vamos nos concentrar no método conhecido como expansão δ linear, também conhecida como teoria de perturbação otimizada (TPO). Este método tem sido aplicado com muito sucesso em diferentes problemas em teoria de partículas [35, 36, 37, 38], mecânica quântica [39, 40], física estatística [41], matéria nuclear [42], e teoria de campos na rede [43].

No método de teoria de perturbação otimizada [44] uma interpolação linear no modelo original é feita em termos de um parâmetro de expansão fictício δ que, no final dos cálculos é tomado igual a $\delta = 1$. A aplicação da TPO para uma teoria descrita por uma densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}$ começa com uma interpolação definida por

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^\delta = \mathcal{L}_0(\eta) + \delta [\mathcal{L} - \mathcal{L}_0(\eta)] \quad (1.3)$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a densidade de Lagrangeana de uma teoria solúvel, que é modificada pela introdução de um parâmetro de massa arbitrário (ou parâmetros) η . A densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}^\delta$ interpola entre a solúvel $\mathcal{L}_0(\eta)$ (quando $\delta = 0$) e a original $\mathcal{L}$ (quando $\delta = 1$). Certamente, o processo descrito em (1.3) leva a vértices de Feynman modificados, que tornam-se multiplicados por δ e, propagadores modificados, que agora dependem de η . Todas as quantidades calculadas em alguma ordem finita em TPO irão depender explicitamente de η , a menos que seja possível fazer o cálculo em todas as ordens. Até este estágio os resultados permanecem estritamente perturbativos e muito similares aos que podem ser obtidos via a verdadeira teoria de perturbação, através da liberdade de fixar η resultados não perturbativos podem ser gerados neste método. Já que η não aparece na teoria original, podemos requerer que uma quantidade física $\Phi^{(k)}$ calculada perturbativamente até ordem δ^k seja calculada num ponto onde esta seja menos sensível a este parâmetro. Este critério, conhecido como Princípio de Mínima Sensitividade (PMS), traduz-se numa relação variacional [45] dada por

$$\left. \frac{d\Phi^{(k)}}{d\eta} \right|_{\bar{\eta}, \delta=1} = 0 \quad (1.4)$$

O valor otimizado $\bar{\eta}$ que satisfaz a Eq. (1.4) deve ser uma função dos parâmetros originais incluindo acoplamentos, os quais geram resultados não perturbativos. Outro procedimento de otimização, conhecido como critério de convergência aparente rápida (FAC - *Fastest Apparent Convergence*) [45], pode também ser empregado. Este critério requer que o k -ésimo coeficiente da expansão perturbativa

$$\Phi^{(k)} = \sum_{i=0}^k c_i \delta^i \quad (1.5)$$

satisfaça

$$\left[\Phi^{(k)} - \Phi^{(k-1)} \right] \Big|_{\delta=1} = 0 \quad (1.6)$$

o que equivale a tomar o k -ésimo coeficiente (com $\delta = 1$) na Eq. (1.5) igual a zero. Uma característica muito interessante deste método é que a seleção e o cálculo de diagramas de Feynman são feitos exatamente como em teoria de perturbação ordinária, incluindo o procedimento de renormalização. Este também é livre de divergências infra-vermelhas, próximo do ponto crítico, e até mesmo no ponto crítico, tornando-se assim, um método particularmente adequado para estudar o fenômeno de transições de fase em TQC.

Nesta tese, vamos implementar este método da TPO no estudo da teoria $\lambda\phi^4$ para obter uma equação de GLL. Para a obtenção do parâmetro de dissipação, vamos calcular o potencial efetivo em equilíbrio (energia livre). A energia livre (que a menos de um sinal é igual à pressão) e a temperatura crítica, são obtidas em um cálculo explícito até $\mathcal{O}(\delta^2)$. Isto requer cálculos de gráficos de três *loops*. Os resultados são comparados com os obtidos com teoria de perturbação padrão na constante de acoplamento. Além de reproduzir corretamente a esperada transição de fase padrão para o modelo, uma transição de fase de segunda ordem, nossos resultados até $\mathcal{O}(\delta^2)$ são mostrados ser suficientes para obtermos toda a termodinâmica do modelo, no sentido que os resultados $\mathcal{O}(\delta^2)$ não são muito diferentes dos de $\mathcal{O}(\delta)$. Deste modo, fica aparente a convergência da TPO, como apontado em estudos anteriores em diferentes contextos [46, 47].

Esta tese está organizada da seguinte maneira. No Cap. 2, fazemos uma revisão de

TQCTF, onde analisamos os formalismos de tempo imaginário e de tempo real (Schwinger-Keldysh). No Cap. 3, calculamos a ação efetiva para a teoria $\lambda\phi^4$ no formalismo de Schwinger-Keldysh até ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$. A derivação de equações estocásticas de GLL é discutida no Cap. 4. Mostramos, em particular, como surgem termos de ruídos aditivo e multiplicativo a partir de correções quânticas perturbativas para a teoria, tanto para a fase simétrica como para a fase quebrada. No Cap. 5, descrevemos o método de TPO em detalhes e derivamos a equação estocástica de GLL no contexto não perturbativo. Com o objetivo de determinar os parâmetros de dissipação e os parâmetros do potencial que entram na equação de GLL, no Cap. 6 calculamos a energia livre $\mathcal{O}(\delta^2)$ nos formalismos de tempo imaginário e de tempo real, tanto para a fase simétrica como para a quebrada. Uma análise qualitativa e os resultados numéricos serão discutidos no Cap. 7. Discutimos os métodos numéricos utilizados e apresentamos os resultados das nossas simulações para o comportamento do condensado. Também fazemos uma discussão sobre a necessidade de renormalizar o potencial efetivo da equação de GLL quando esta é discretizada numa rede espacial, de maneira que resultados independentes do espaçamento da rede sejam obtidos no equilíbrio. Ainda neste capítulo, apresentamos e discutimos nossos resultados para o procedimento de otimização; a pressão é calculada e comparada com o resultado perturbativo. A temperatura crítica, a massa térmica e o coeficiente dissipativo são determinados até a ordem $\mathcal{O}(\delta^2)$. Por fim, no Cap. 8, apresentamos nossas conclusões e perspectivas de desenvolvimentos futuros. A tese ainda apresenta 13 apêndices, os quais mostram detalhes da derivação de resultados usados nos diferentes capítulos da tese.

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita

Historicamente Matsubara [50] foi o primeiro a construir uma Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita (TQCTF) incorporando uma variável temporal puramente imaginária dentro de um operador de evolução. Seu nome foi associado com as frequências de energia discretas, as conhecidas frequências de Matsubara no Formalismo de Tempo Imaginário (FTI), que vamos discutir mais adiante. Posteriormente, apareceram contribuições importantes de Schwinger [51], Mills [52] e Keldysh [53] os quais desenvolveram um formalismo baseado na escolha de um contorno no plano complexo, conhecido como formalismo de tempo real. Os últimos avanços incluem uma formulação funcional da teoria [54]. Independentemente, Umezawa e coautores [55, 56, 57] construíram uma abordagem diferente baseada na álgebra C^* , conhecida como Thermo-Field Dynamics (TFD), a qual fornece essencialmente os mesmos resultados.

Neste capítulo faremos uma breve introdução sobre os formalismos de tempo imaginário e de tempo real, sendo que discutiremos em mais detalhes o formalismo de tempo real, pois este será o mais utilizado nesta tese.

2.1 Formalismo de tempo imaginário

Primeiramente, revisaremos alguns conceitos gerais de termodinâmica estatística de equilíbrio [58]. O comportamento estatístico de um sistema quântico, em equilíbrio térmico, é normalmente estudado através de um ensemble apropriado. Em geral, definimos um operador matriz densidade para um sistema como sendo

$$\rho(\beta) = \exp(-\beta\mathcal{H}) \quad (2.1)$$

onde β representa o inverso da temperatura de equilíbrio (assumimos a constante de Boltzmann $k = 1$, $\beta = 1/T$), e $\mathcal{H}$ o Hamiltoniano apropriado para um particular ensemble escolhido. Por exemplo para o ensemble grande canônico, temos

$$\mathcal{H} = H - \mu N \quad (2.2)$$

onde H e N representam, respectivamente, o operador Hamiltoniano dinâmico e o operador número para o particular sistema estudado, e μ corresponde ao potencial químico. No ensemble canônico, temos

$$\mathcal{H} = H \quad (2.3)$$

Na abordagem desta tese escolheremos um ensemble arbitrário, já que as propriedades qualitativas de um sistema à temperatura finita não dependem da natureza do ensemble. Dado o operador matriz densidade, definimos a função de partição do sistema como

$$Z(\beta) = \text{Tr} \rho(\beta) = \text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) \quad (2.4)$$

onde Tr representa o traço ou a soma sobre os valores esperados em qualquer base completa. A média no ensemble de qualquer observável A é definida como

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \rho(\beta) A = \frac{\text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) A}{\text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H})} \quad (2.5)$$

A média térmica de uma função de correlação de quaisquer dois operadores, A e B, com diferentes coordenadas pode similarmente ser escrita como

$$\langle AB \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \rho(\beta) AB \quad (2.6)$$

na equação acima suprimimos a dependência dos operadores com as coordenadas. Notamos que, dado um ensemble e um conjunto de operadores de Schrödinger, podemos definir operadores numa representação de Heisenberg (modificada). Para qualquer operador de Schrödinger A_S , temos um operador de Heisenberg $A_H(t)$ definido como

$$A_H(t) = \exp(i\mathcal{H}t) A_S \exp(-i\mathcal{H}t) \quad (2.7)$$

Para uma função de correlação térmica geral de dois operadores de Heisenberg $A_H(t)$ e $B_H(t')$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) B_H(t') \rangle_\beta &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \rho(\beta) A_H(t) B_H(t') \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) A_H(t) B_H(t') \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) A_H(t) \exp(\beta\mathcal{H}) \exp(-\beta\mathcal{H}) B_H(t') \end{aligned} \quad (2.8)$$

Na equação acima reescrevemos o termo

$$\exp(-\beta\mathcal{H}) A_H(t) \exp(\beta\mathcal{H}) \quad (2.9)$$

usando a Eq. (2.7) e mostramos que

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mathcal{H}) A_H(t) \exp(\beta\mathcal{H}) &= \exp(-\beta\mathcal{H}) \exp(i\mathcal{H}t) A_S \exp(-i\mathcal{H}t) \exp(\beta\mathcal{H}) \\ &= \exp(-\beta\mathcal{H} + i\mathcal{H}t) A_S \exp(-i\mathcal{H}t + \beta\mathcal{H}) \\ &= \exp\left(i\mathcal{H}\left(t - \frac{\beta}{i}\mathcal{H}\right)\right) A_S \exp\left(-i\mathcal{H}\left(t - \frac{\beta}{i}\mathcal{H}\right)\right) \\ &= \exp(i\mathcal{H}(t + i\beta)) A_S \exp(-i\mathcal{H}(t + i\beta)) \\ &= A_H(t + i\beta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substituindo a expressão acima na equação para função de correlação térmica Eq. (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A_H(t) B_H(t') \rangle_\beta &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \exp(-\beta \mathcal{H}) A_H(t) \exp(\beta \mathcal{H}) \exp(-\beta \mathcal{H}) B_H(t') \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} A_H(t + i\beta) \exp(-\beta \mathcal{H}) B_H(t') \\
&= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \exp(-\beta \mathcal{H}) B_H(t') A_H(t + i\beta) \\
&= \langle B_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Nas manipulações acima usamos a propriedade cíclica do traço e a relação obtida acima é conhecida como relação de Kubo-Martin-Schwinger (KMS). Os operadores acima A e B podem ser bosônicos ou fermiônicos. Notamos que da relação KMS

$$\langle A_H(t) A_H(t') \rangle_\beta = \langle A_H(t') A_H(t + i\beta) \rangle_\beta \tag{2.12}$$

Posteriormente isso é o que levará à periodicidade ou anti-periodicidade em várias funções de Green de dois pontos à temperatura finita.

Em geral, a função de partição de um sistema estatístico não pode ser calculada exatamente. A partir da equação

$$Z(\beta) = \text{Tr} \rho(\beta) = \text{Tr} \exp(-\beta \mathcal{H}) \tag{2.13}$$

vemos que mesmo uma expansão perturbativa em potências da constante de acoplamento seria um trabalho muito pesado, porque nós temos uma soma dos valores esperados de todos os possíveis estados no espaço de Hilbert e existe um número infinito destes estados em qualquer Teoria Quântica de Campos (TQC).

É bom ressaltar que, para uma teoria livre, podemos calcular $Z(\beta)$, pois podemos decompor a mesma em infinitos osciladores (e este limite existe), mas quando trabalhamos com uma teoria com interação não existe como calcular $Z(\beta)$ exatamente.

O formalismo de Matsubara fornece uma caminho de como calcular a função de partição perturbativamente usando o método diagramático o qual é análogo ao utilizado

em TQC à temperatura zero. Existem diferentes maneiras de introduzir o formalismo de Matsubara, podendo ser operatorial ou também pelo método de integral de trajetória.

Nesta revisão de tempo imaginário introduziremos o formalismo de Matsubara no contexto de integrais de trajetória. Lembrando que uma amplitude de transição numa TQC à temperatura zero tem a representação funcional dada por ($\hbar = 1$)

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1, t_1) | \phi(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \langle \phi_1 | \exp[-i(t_1 - t_2)H] | \phi_2 \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi \exp(iS) \quad (2.14)$$

onde ϕ é uma variável de campo quântico, N' é uma constante de normalização irrelevante e S a ação definida como sendo

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \mathcal{L}[\phi] \quad (2.15)$$

Na equação acima $\mathcal{L}[\phi]$ representa a densidade Lagrangeana apropriada para o sistema, e a integral funcional (integral de trajetória), neste caso, é definida sobre as trajetórias que satisfazem

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}_1, t_1) &= \phi_1 \\ \phi(\mathbf{x}_2, t_2) &= \phi_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

e os pontos extremos são mantidos fixos (não integrados). Dadas as equações (2.14)-(2.16), se identificarmos

$$t_1 - t_2 = -i\beta \quad (2.17)$$

podemos escrever a função de partição para um sistema quântico (utilizando a completeza dos estados de campo(espectro contínuo)) como sendo

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) = \int d\phi_1 \langle \phi_1 | \exp(-\beta\mathcal{H}) | \phi_1 \rangle \\ &= N' \int \mathcal{D}\phi \exp(-S_E) \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $\mathcal{S}_E$ é relacionada com a ação Euclideana (tempo imaginário) com (se o potencial químico for diferente de zero)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_E &= S_E + \beta\mu N \\ &= \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_E + \beta\mu N\end{aligned}\tag{2.19}$$

Além disso, as variáveis de campo devem satisfazer condições periódicas(anti-periódicas)

$$\phi(\mathbf{x}, \beta) = \pm \phi(\mathbf{x}, 0)\tag{2.20}$$

dependendo se as variáveis de campo são bosônicas ou fermiônicas. Notamos que estas condições de (anti)periodicidade essencialmente aparecem devido ao traço existente na definição da função de partição (2.18).

A formulação de integral de trajetória da função de partição é interessante no sentido que esta formulação permite um paralelo entre a descrição de TQC à temperatura zero e à temperatura finita. As definições dos diagramas redutíveis a uma partícula (1PI), conexos, etc... - tem exatamente as mesmas expressões formais e podem ser obtidas a partir de uma expansão da integral de trajetória. A única diferença é que as variáveis de campo agora devem satisfazer condições (anti)periódicas (2.20) e com isso a variável temporal fica contida num intervalo finito e sua transformada de Fourier é uma soma, somas estas conhecidas como soma de frequências de Matsubara, levando a valores de energia discretos.

O formalismo de Matsubara tem sido desenvolvido completamente dentro do contexto de sistemas em equilíbrio, onde trocamos a variável tempo em favor do inverso da temperatura ($\beta = T^{-1}$). Assim, este método é ideal para um estudo estático de propriedades de equilíbrio de um sistema quântico. A dependência temporal pode ser introduzida nas funções de Green através de uma continuação analítica (não trivial). Portanto, este formalismo descreve apenas desenvolvimentos temporais de sistemas quânticos em equilíbrio térmico e é completamente inadequado para estudos de fenômenos de não-equilíbrio. Além

disso, relações dinâmicas como identidades de Ward de teorias de gauge são difíceis de serem calculadas com este formalismo. Mas este é largamente usado no cálculo de quantidades em equilíbrio termodinâmico.

2.1.1 Potencial efetivo à temperatura finita

Faremos uma breve revisão do cálculo do potencial efetivo à temperatura finita para a teoria $\lambda\phi^4$ com quebra espontânea de simetria (um *loop*) [59], e vamos mostrar que estes resultados podem ser úteis no estudo de transições de fase em teoria de campos.

No formalismo de tempo imaginário, a única diferença formal entre teoria de campos à temperatura zero e à temperatura finita, é a forma do propagador o qual carrega toda a dependência em temperatura. Os vértices à temperatura finita são exatamente os mesmos à temperatura zero. Assim, dada uma teoria quântica de campos, efetuamos nossos cálculos de interesse termodinâmico via diagramas de Feynman.

Considerando a teoria com auto-interação quártica descrita pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (2.21)$$

uma representação para o propagador do campo escalar no espaço dos momentos é dada por

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \quad (2.22)$$

Ao calcularmos quantidades dependentes da temperatura, tratamos o tempo como um parâmetro imaginário, neste caso, a teoria torna-se uma teoria Euclideana. O propagador para esta teoria é dado pela Eq. (2.22). Onde ω_n são as frequências de Matsubara e, como estamos tratando de uma teoria constituída por bósons, temos

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad \text{com} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.23)$$

Os cálculos diagramáticos podem ser feitos de maneira análoga aos feitos à temperatura zero. A única diferença é que os valores de energia são quantizados e as integrais sobre energias intermediárias tem de ser substituídas por somas sobre valores discretos, ou seja

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \quad (2.24)$$

Primeiramente, recordamos a expressão do potencial efetivo Euclideano para teoria $\lambda\phi^4$ a um *loop*, a qual está deduzida em diversos livros-texto, como por exemplo [60]

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \log \left(k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2 \right) \quad (2.25)$$

Fazendo uso de (2.24) e de

$$k_4 \rightarrow \omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} \quad (2.26)$$

o potencial efetivo calculado até a ordem de um loop à temperatura finita torna-se

$$V_{\text{1loop}}^\beta(\phi_c) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \log(\omega_n^2 + \omega^2) \quad (2.27)$$

onde ω foi definido como

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2 \quad (2.28)$$

Nesta discussão sobre potencial efetivo não vamos mostrar detalhes do procedimento de renormalização, mas é fácil ver que o somatório na Eq. (2.27) diverge e que a parte divergente não depende de ϕ_c . Desprezaremos esta contribuição, procedimento este conhecido como renormalização da energia de ponto zero e, é interessante mencionar que a partir deste termo que a constante cosmológica é calculada.

Fazendo a soma das frequências de Matsubara ω_n em (2.27) obtemos

$$V_{\text{1loop}}^\beta(\phi_c) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta} \log(1 - e^{-\beta\omega}) \right] \quad (2.29)$$

É fácil ver que a primeira integral na expressão acima é o potencial efetivo a um loop a $T = 0$

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \log \left(k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2 \right) \quad (2.30)$$

e a parte dependente da temperatura pode ser escrita como

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log(1 - e^{\beta\omega}) = \frac{1}{2\pi^2\beta^4} J_B[m(\phi_c)\beta] \quad (2.31)$$

onde escrevemos $m^2(\phi_c) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2$ e a função $J_B[m(\phi_c)\beta]$ é definida como

$$J_B(y) = \int_0^\infty dx x^2 \log(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}}) \quad (2.32)$$

A integral acima, que é o potencial efetivo bosônico térmico, admite uma expansão em altas temperaturas, para $y \ll 1$, a qual é dada por [1, 61]

$$\begin{aligned} J_B(y) &= -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}y^2 - \frac{\pi}{6}(y^2)^{3/2} - \frac{1}{32}y^4 \log\left(\frac{y^4}{a_b}\right) \\ &\quad - 2\pi^{7/2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+1)!} \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{y^2}{4\pi^2}\right)^{l+2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $a_b = 16\pi^2 e^{3/2-2\gamma}$, $\log(a_b) = 5.4076$ e ζ é a função ζ de Rieman.

Um aspecto muito interessante é que as divergências ultravioletas na expressão para o potencial efetivo estão inteiramente contidas no termo correspondente à temperatura zero. A parte dependente da temperatura é livre de divergências ultravioleta. No entanto, os contratermos à temperatura zero são suficientes para renormalizar a teoria à temperatura finita. Obviamente isso é uma característica geral de TQCTF, não somente do potencial efetivo.

2.1.2 Temperatura crítica

Vamos considerar a teoria $\lambda\phi_c^4$ com quebra de simetria ($m^2 < 0$) à temperaturas suficientemente altas $T > T_c$ onde a simetria pode ser restaurada. Para determinar a temperatura crítica T_c na qual a transição de fase ocorre, faremos uso da expressão do potencial efetivo térmico calculado até a ordem de um *loop*. O ponto principal é que à temperatura finita o valor de equilíbrio do valor esperado do campo escalar ϕ_c , $\langle\phi_c\rangle = \sigma(T)$, não corresponde ao mínimo do potencial efetivo $V_{\text{eff}}^{\text{T}=0}(\phi_c)$, mas sim ao mínimo do potencial efetivo térmico

$V_{\text{eff}}^\beta(\phi_c)$. Assim, mesmo que o mínimo de $V_{\text{eff}}^{T=0}(\phi_c)$ ocorra em $\langle\phi_c\rangle = \sigma_0 \neq 0$, geralmente, para temperaturas suficientemente altas, o mínimo do $V_{\text{eff}}^\beta(\phi_c)$ ocorre em $\langle\phi_c\rangle = 0$. Este fenômeno é conhecido como “restauração de simetria a altas temperaturas”, e resulta no aparecimento de uma transição de fase de $\langle\phi_c\rangle = \sigma_0$ em $\langle\phi_c\rangle = 0$.

Definiremos a temperatura crítica da restauração de simetria a partir do potencial efetivo, e o valor esperado do campo dependente da temperatura $\sigma(T)$ é definido a partir do potencial efetivo térmico $V_{\text{eff}}^\beta(\phi_c)$ da mesma maneira que é definido à temperatura zero (ou a partir do potencial clássico $V(\phi_c)$, na ausência de correções quânticas e térmicas)

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}^\beta}{\partial \phi_c} \right|_{\phi_c=\sigma(T)} = 0 \quad (2.34)$$

e a temperatura crítica para a restauração de simetria é definida pela condição que $\sigma(T) = 0$, ou a partir da Eq. (2.34), T_c é definida por

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}^\beta}{\partial \phi_c} \right|_{\phi_c=0, T=T_c} = 0 \quad (2.35)$$

Após a renormalização da energia de ponto zero, ainda é necessário renormalizar a parte do potencial efetivo dependente de ϕ_c à temperatura zero. É importante mencionar que as quantidades físicas (renormalizadas) como massa (m_T) e acoplamento (λ_T) são obtidas a partir de derivadas do potencial efetivo com relação a ϕ_c . Como mencionado anteriormente mostraremos somente as contribuições finitas.

O potencial efetivo (um *loop*), escrito como uma parte de $T = 0$ e uma parte dependente de T , é dado por $V_{\text{eff}}^\beta(\phi_c) = V_{\text{eff}}^{T=0}(\phi_c) + V_{\text{eff}}^{T \neq 0}(\phi_c)$. A parte do potencial efetivo renormalizado à temperatura zero pode ser escrita como [60]

$$V_{\text{eff}}^{T=0} = \frac{m^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2}m^4(\phi_c) \left[\ln \left(\frac{m^2(\phi_c)}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] \quad (2.36)$$

e a contribuição à temperatura finita, $V_{\text{eff}}^{T \neq 0}$ a partir das equações (2.29), (2.31) e (2.33) é dada por

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{T \neq 0}(\phi_c) &= -\frac{\pi^2}{90\beta^4} + \frac{m^2(\phi_c)}{24\beta^2} - \frac{m^3(\phi_c)}{12\pi\beta} - \frac{m^4(\phi_c)}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m^2(\phi_c)\beta^2}{a_b} \right) \\ &+ \mathcal{O}(m^6(\phi_c)\beta^2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Devemos tomar cuidado ao aplicarmos a Eq. (2.35) nas eqs. (2.36) e (2.37), pois aparecerão problemas. A dificuldade é que T_c é determinada pelo V_{eff}^β com $\phi_c = 0$. Mas para pequenos valores de ϕ_c , $m^2(\phi_c) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2$ é negativo (lembrando que para o caso com quebra de simetria $m^2 < 0$). Isso pode levar a uma temperatura crítica complexa, o que é fisicamente inaceitável. O problema é que os termos que se tornam imaginários quando $\phi_c \rightarrow 0$, ou $T \rightarrow T_c^-$ são termos de ordens mais altas na constante de acoplamento λ (ordem λ^2 e ordens superiores). Para um cálculo consistente a estas ordens em λ necessitamos levar em conta altas ordens (além de um *loop*) que são muito importantes se desejamos calcular T_c exatamente. Se restringimos o cálculo da temperatura crítica a ordem λ , uma expressão aproximada para T_c pode ser obtida da equação do potencial efetivo térmico, expressando o potencial efetivo em ordem λ , a partir das equações (2.36) e (2.37), obtemos

$$V_{\text{eff}}^\beta(\phi_c) \simeq -\frac{|m^2|}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 + \frac{T^2 \lambda}{24 \cdot 2}\phi_c^2 \quad (2.38)$$

Usando o resultado acima na Eq. (2.34) obtemos o valor esperado no vácuo do campo escalar à temperatura finita

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{24|m^2|}{\lambda} - T^2 \right) \quad (2.39)$$

A partir desta expressão para o valor esperado no vácuo do campo escalar à temperatura finita obtemos a temperatura crítica para a transição de fase como sendo

$$T_c^2 = \frac{24|m^2|}{\lambda} \quad (2.40)$$

Notamos que outra solução para a Eq. (2.39) seria $\sigma(T) = 0$. Mas esta solução não descreve um mínimo do potencial efetivo, e sim um máximo. A partir da Eq. (2.39), para $T = 0$ obtemos $\sigma_0^2 = \frac{6|m^2|}{\lambda}$, o qual é o valor esperado do campo escalar no vácuo a $T = 0$.

Notamos também que, a partir da Eq. (2.39), o valor esperado no vácuo (ou o análogo da magnetização em sistemas de Ising) é uma função contínua da temperatura para $T \leq T_c$, $\sigma(T) = 0$ por definição. Este comportamento caracteriza uma transição de fase de

segunda ordem e isto está de acordo com o que esperamos da teoria $\lambda\phi^4$, a qual possui a mesma classe de universalidade do modelo de Ising tridimensional, o qual tem uma transição de fase de segunda ordem.

Com a discussão sobre transição de fase feita acima, encerramos a nossa revisão sobre o formalismo de tempo imaginário, e voltamos a ressaltar a grande aplicabilidade deste formalismo em problemas de equilíbrio termodinâmico. Ao trabalhar com este formalismo fizemos algumas investigações e aplicações deste formalismo em problemas os quais trabalhamos com modelos de quatro férmions a temperatura e densidade finitas [62, 63, 64, 65].

Como o foco desta tese é a dinâmica em tempo real de campos escalares fora do equilíbrio, descreveremos a seguir o formalismo que será utilizado na maior parte desta tese.

2.2 Formalismo de tempo real

Nesta seção faremos uma revisão da TQCTF formulada diretamente em tempo real [59]. O formalismo de tempo real pode ser aplicado em problemas onde não é possível aplicarmos o formalismo de tempo imaginário, como por exemplo: problemas que envolvam expansões para baixas temperaturas e no cálculo de quantidades que dependam explicitamente do tempo, principalmente devido a dificuldade de fazer as continuações analíticas para obter resultados em tempo real (Minkowski).

Definido o propagador de Feynman, todas as regras de Feynman definidas a $T = 0$, com poucas modificações, serão aplicadas agora e não será necessário fazer nenhuma continuação analítica do tempo imaginário para obter resultados em tempo real, as quais são trabalhosas e problemáticas em muitos casos.

Primeiro relembremos que o propagador de Feynman à temperatura zero é relacionado com a função de Green de dois pontos por

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T \left[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right] | 0 \rangle \quad (2.41)$$

onde o operador de campo escalar pode ser expresso em termos dos operadores de criação e aniquilação como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}] \quad (2.42)$$

O propagador de Feynman, no caso de $x_0 > y_0$, pode ser escrito como

$$\Delta_F(x-y) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(x-y)} \Big|_{k_0=\omega_k} \quad (2.43)$$

Quando trabalhamos à temperatura finita, podemos expressar a média da função de dois pontos como uma média térmica com os valores esperados no vácuo agora substituídos por valores esperados estatísticos quânticos,

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &\rightarrow \left\langle T \left[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right] \right\rangle_\beta \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T \left[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

e

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \quad (2.45)$$

onde $\hat{H}$ é a Hamiltoniana do sistema com autovalores e autoestados $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. Usando estes autoestados para calcular o traço, o propagador de Feynman pode ser escrito como

$$i\Delta_F^{T \neq 0}(x-y) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \langle n| T \left[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) \right] |n\rangle e^{-\beta E_n} \quad (2.46)$$

onde a soma é sobre todos os estados excitados termicamente e $\omega^2 = k^2 + m^2$. Usando as equações (2.41) em (2.46) para $x_0 > y_0$ obtemos

$$\begin{aligned} i\Delta_F^{T \neq 0}(x-y) &= \frac{1}{Z(\beta)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{2\omega_{k'}} \sum_n e^{-\beta E_n} \\ &\times \langle n| [a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx}] \\ &\times [a(k') e^{-ik'y} + a^\dagger(k') e^{ik'y}] |n\rangle \end{aligned} \quad (2.47)$$

Os estados de múltiplos bósons são obtidos pela atuação repetida com o operador de criação no estado de vácuo

$$|n\rangle = |n_1(k_1), n_2(k_2), \dots\rangle = \prod_i \frac{[a^\dagger(k_i)]^{n_i(k_i)}}{\sqrt{n_i(k_i)!}} |0\rangle \quad (2.48)$$

onde os estados $|n\rangle$ são estados ortonormais. Ao calcularmos (2.47) vamos precisar de

$$a(k)|n\rangle = \sqrt{n_i(k_i)} |n_1(k_1), n_2(k_2), \dots, n_i(k_i) - 1, \dots\rangle \quad (2.49)$$

$$a^\dagger(k)|n\rangle = \sqrt{n_i(k_i) + 1} |n_1(k_1), n_2(k_2), \dots, n_i(k_i) + 1, \dots\rangle \quad (2.50)$$

usando as relações de comutação a tempos iguais

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.51)$$

$$[a(k), a(k')] = 0 \quad (2.52)$$

$$[a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0 \quad (2.53)$$

obtemos para a Eq. (2.47) a expressão

$$\begin{aligned} i\Delta_F^{T \neq 0}(x-y) &= \frac{1}{Z(\beta)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{2\omega_{k'}} \sum_n e^{-\beta E_n} \\ &\times \left\{ [n(\mathbf{k}) + 1] (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{-ikx + ik'y} \right. \\ &+ \left. n(\mathbf{k}) (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (2\pi)^3 e^{-ikx + ik'y} \right\} \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_n e^{-\beta E_n} \left\{ [n(\mathbf{k}) + 1] e^{-ik(x-y)} \right. \\ &+ \left. n(\mathbf{k}) e^{ik(x-y)} \right\} \Big|_{k_0=\omega_k} \end{aligned} \quad (2.54)$$

agora podemos usar o resultado

$$\frac{1}{Z(\beta)} \sum_n n(\mathbf{k}) e^{-\beta E_n} = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1} \equiv n(\omega_k) \quad (2.55)$$

onde $E_n = \sum_k \omega_k n(\mathbf{k})$ e $n(\omega_k)$ é a distribuição de Bose Einstein (ver por exemplo [66]).

Outra maneira de obter este resultado é, por exemplo, definir a Hamiltoniana do campo como

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p a^\dagger(p) a(p) \quad (2.56)$$

podemos obter, usando as relações de comutação para a e $a^\dagger$, as médias termodinâmicas

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger(p) a(k) \rangle_\beta &= n(\omega_p) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \\ \langle a(p) a^\dagger(k) \rangle_\beta &= [1 + n(\omega_p)] \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})\end{aligned}\quad (2.57)$$

As equações (2.57) podem ser provadas da seguinte maneira: consideramos um simples exemplo de um estado quântico ocupado por bósons de mesma energia ω . No estado pode ter qualquer número de bósons e sem interação entre as partículas, e denotaremos que os estados serão iguais aos anteriores $|n\rangle$.

O conjunto $\{|n\rangle\}$ é completo. Os operadores de criação e aniquilação são denotados por $a^\dagger$ e a , respectivamente. Eles atuam no estado $|n\rangle$ da seguinte maneira: $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ e $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, e satisfazem a relação de comutação, $[a^\dagger, a] = 1$.

A Hamiltoniana e o operador número são definidos como: $\hat{H} = \omega \hat{N}$ e $\hat{N} = a^\dagger a$, com autovalores ωn e n , respectivamente. Com estas definições facilmente podemos calcular $\langle a^\dagger a \rangle_\beta$ e $\langle a a^\dagger \rangle_\beta$ assim como em (2.47) usando a completeza de $\{|n\rangle\}$. Em particular

$$\text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega}} \quad (2.58)$$

e

$$\text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} a^\dagger a \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta \omega n} = \frac{e^{-\beta \omega}}{(1 - e^{-\beta \omega})^2} \quad (2.59)$$

onde obtemos $\langle a^\dagger a \rangle_\beta = n(\omega)$ e $\langle a a^\dagger \rangle_\beta = 1 + n(\omega)$, como desejávamos mostrar.

Retornando à Eq. (2.54), usando a Eq. (2.55), ou a Eq. (2.57), encontramos para o propagador de Feynman térmico para $x_0 > y_0$ a expressão

$$\begin{aligned}i\Delta_F^{T \neq 0}(x-y) \Big|_{x_0 > y_0} &= D^>(x,y) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left\{ [n(\mathbf{k}) + 1] e^{-ik(x-y)} \right. \\ &\quad \left. + n(\mathbf{k}) e^{ik(x-y)} \right\} \Big|_{k_0 = \omega_k}\end{aligned}\quad (2.60)$$

Fazendo o mesmo cálculo para $y_0 > x_0$ obtemos

$$i\Delta_F^{T \neq 0}(x-y) \Big|_{y_0 > x_0} = D^<(x,y) = D^>(y,x) \quad (2.61)$$

Para $T = 0$, que é $n = 0$, obtemos o resultado do obtido no vácuo

$$i\Delta_F^{T=0}(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega_{\mathbf{k}}} [e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(x_0-y_0)}\theta(x_0-y_0) + e^{i\omega_{\mathbf{k}}(x_0-y_0)}\theta(y_0-x_0)] \quad (2.62)$$

E o propagador de Feynman à temperatura finita é dado por

$$\begin{aligned} i\Delta_F^{T\neq 0}(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} i\Delta_F^{T\neq 0}(k) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + 2\pi n(k_0) \delta(k^2 - m^2) \right] e^{-ik(x-y)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

A integração no plano complexo de k_0 do primeiro termo dá o termo $T = 0$, Eq. (2.62), que é o primeiro termo da Eq. (2.63) tomando $n = 0$. O segundo termo fica

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi n(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dk_0 n(k_0) \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)] e^{-ik_0(x_0-y_0)} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega_k)}{2\omega_k} [e^{-i\omega_k(x_0-y_0)} + e^{i\omega_k(x_0-y_0)}] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [n(\omega_k) e^{-ik(x-y)} + n(\omega_k) e^{ik(x-y)}] \Big|_{k_0=\omega_k} \end{aligned} \quad (2.64)$$

se multiplicarmos a equação acima por $1 = \theta(x_0 - y_0) + \theta(y_0 - x_0)$, obtemos os termos de temperatura finita das Eqs.(2.60) e (2.61).

A representação (2.63) tem algumas vantagens, entre elas

- não é necessário fazer soma de frequências de Matsubara, e sim uma integração em k_0 similar à feita em $T = 0$
- não é necessário um tempo imaginário, o qual é restrito à temperatura finita e não pode ser generalizado a não equilíbrio.

Atualmente, o formalismo de tempo real vem sendo usado como ponto de partida para a teoria de campos de não equilíbrio, infelizmente existe um sério problema se o formalismo de tempo real for aplicado ingenuamente. Em contribuições com dois ou

mais propagadores ocorre o aparecimento de singularidades devido as funções δ de Dirac. Estas singularidades são denominadas na literatura como singularidades *pinch* e ocorrem devido ao aparecimento de produtos das funções δ de Dirac com o mesmo argumento, o que matematicamente não é bem definido.

Existe uma maneira de evitar este tipo de singularidade e direcionaremos nossa atenção a esta outra formulação do formalismo de tempo real.

2.2.1 Formulação de tempo real através de integrais de trajetória

Métodos de tempo real, conhecidos na literatura como formalismo de integrais de trajetória, foram originalmente introduzidos por Schwinger, Keldysh e outros autores [51, 53, 52] e aplicados a problemas de Mecânica Estatística de não equilíbrio. O formalismo de tempo real também foi desenvolvido pelo uso de métodos canônicos e teoria de perturbação diagramática, conhecido como Dinâmica de campos térmicos, desenvolvido por Takahashi e Umezawa [55, 56, 57]. As regras de Feynman são um pouco diferentes comparadas com o caso de $T = 0$, já que o número de graus de liberdade de campo são duplicados e o propagador adquire uma estrutura matricial.

Faremos uma revisão do formalismo de tempo real usando métodos funcionais [3, 54, 67]. Para isso, consideraremos uma TQCTF descrita pelo Hamiltoniano $H[\Phi, \Pi]$, onde $\Phi(x)$ é um operador de campo bosônico na representação de Heisenberg e $\Pi(x)$ é o momento canônico conjugado ($\hbar = 1$)

$$[\Phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.65)$$

A evolução temporal destes operadores é gerada pela Hamiltoniana

$$\Phi(\mathbf{x}, t') = \exp(iH(t' - t))\Phi(\mathbf{x}, t)\exp(-iH(t' - t)) \quad (2.66)$$

$$\Pi(\mathbf{x}, t') = \exp(iH(t' - t))\Pi(\mathbf{x}, t)\exp(-iH(t' - t)) \quad (2.67)$$

Seja $|\phi(\mathbf{x}, t)\rangle$ um vetor de estado na representação de Heisenberg descrevendo um estado que num tempo t é um auto-estado do operador de campo $\Phi(\mathbf{x}, t)$ com autovalor $\phi(\mathbf{x})$

$$\Phi(\mathbf{x}, t)|\phi(\mathbf{x}), t\rangle = \phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{x}), t\rangle \quad (2.68)$$

Autoestados de $\Pi(\mathbf{x}, t)$ são definidos da mesma maneira

$$\Pi(\mathbf{x}, t)|\pi(\mathbf{x}), t\rangle = \pi(\mathbf{x})|\pi(\mathbf{x}), t\rangle \quad (2.69)$$

A evolução destes vetores de estado é governada pela Hamiltoniana

$$|\phi(\mathbf{x}), t'\rangle = \exp[iH(t' - t)]|\phi(\mathbf{x}), t\rangle \quad (2.70)$$

$$|\pi(\mathbf{x}), t'\rangle = \exp[iH(t' - t)]|\pi(\mathbf{x}), t\rangle \quad (2.71)$$

e como consequência de (2.66), (2.67), (2.70) e (2.71) os autovalores $\phi(\mathbf{x})$ e $\pi(\mathbf{x})$ em (2.68) e (2.69) são independentes do tempo.

Em qualquer tempo dado t , os vetores de estado formam um conjunto completo de estados

$$\int D\phi |\phi, t\rangle \langle \phi, t| = \int D\pi |\pi, t\rangle \langle \pi, t| = 1 \quad (2.72)$$

Estamos interessados no cálculo das funções de Green térmicas $\mathcal{G}_\beta(x_1, \dots, x_n)$, definidas pela média do produto ordenado no tempo de operadores $\Phi(x)$,

$$\mathcal{G}_\beta(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\text{Tr} \exp(-\beta H)} \text{Tr} \{ \exp(-\beta H) T[\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)] \} \quad (2.73)$$

É conveniente, para estudar as propriedades analíticas destas funções de Green térmicas (2.73), estender o suporte das variáveis de campo a todo o plano complexo (onde z é uma variável complexa) através da generalização das translações temporais (2.66), (2.67), (2.70), (2.71)

$$\Phi(\mathbf{x}, t + z) = e^{iHz} \Phi(\mathbf{x}, t) e^{-iHz} \quad (2.74)$$

$$|\phi(\mathbf{x}), t + z\rangle = e^{iHz} |\phi(\mathbf{x}), t\rangle \quad (2.75)$$

$$\langle \phi(\mathbf{x}), t + z| = \langle \phi(\mathbf{x}), t| e^{-iHz} \quad (2.76)$$

e similarmente para $\Pi(\mathbf{x}, t)$ e $|\pi(\mathbf{x}), t\rangle$.

Após ligar uma fonte externa J no intervalo de tempo $[-T, T]$, desejamos derivar a representação funcional do gerador funcional $Z[J]$, a qual tem a propriedade

$$\mathcal{G}_\beta(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (2.77)$$

Claramente o funcional

$$Tr \left\{ e^{-\beta H} T \left[\exp \left(i \int_{-T}^{+T} dt \int d^3 \mathbf{x} J(x) \Phi(x) \right) \right] \right\} \quad (2.78)$$

tem a propriedade mencionada anteriormente para argumentos temporais t_i no intervalo $-T < t_i < T$. Em (2.78) a integração estende-se sobre todo espaço tridimensional e sobre o segmento de $-T$ a $+T$ no eixo temporal real. No entanto, ao calcular as funções de Green térmicas perturbativamente generalizamos (2.78) como

$$Z[J] = Tr \left\{ e^{-\beta H} T_c \left[\exp i \int_c d\tau \int d^3 \mathbf{x} J(\mathbf{x}, \tau) \Phi(\mathbf{x}, \tau) \right] \right\} \quad (2.79)$$

na equação acima colocamos um índice c no ordenamento temporal e na integração temporal pois estendemos a integração do eixo real $[-T, T]$ para uma integração sobre o contorno C no plano complexo Fig. (2.1).

Tomamos $\sigma = \frac{\beta}{2}$, trabalharemos com o contorno que começa em $-t_i$ e vai ao longo do eixo real até $+t_f$ (denominamos este segmento de C_1). A partir de $+t_f$ o contorno continua ao longo da direção imaginária no tempo até $+t_f - \frac{i\beta}{2}$ (segmento C_3), a partir de $+t_f - \frac{i\beta}{2}$ paralelo ao eixo real até $-t_i - \frac{i\beta}{2}$ (segmento C_2) e finalmente paralelo ao eixo imaginário no tempo até $-t_i - i\beta$ (segmento C_4). Nós damos aos segmentos C_1 e C_2 do contorno inclinações infinitesimais para baixo (com o aumento do parâmetro do contorno), isto garante que o propagador tenha propriedades causais. Também generalizamos o operador ordenamento temporal T em (2.73) e (2.78) como um operador T_c , o qual ordena operadores de acordo com seus argumentos temporais no contorno. No contorno podemos

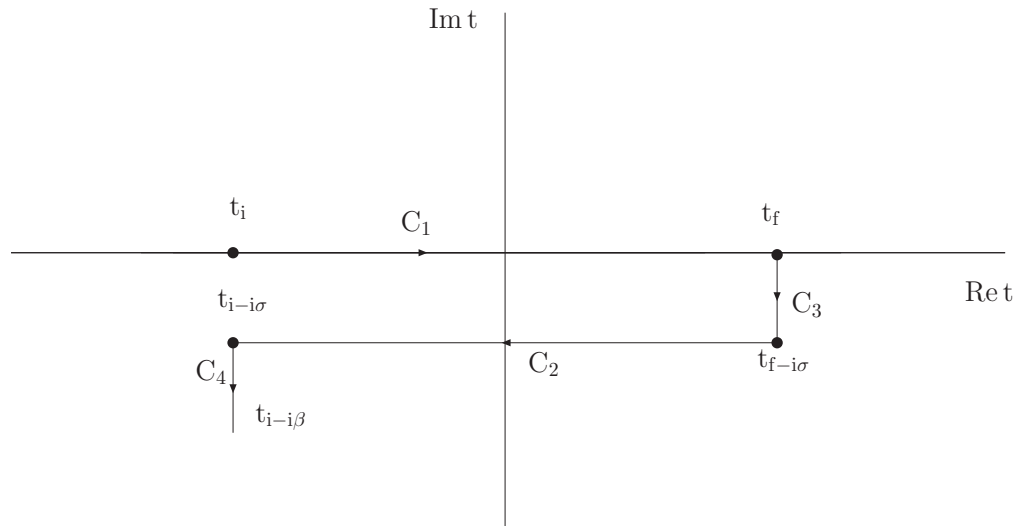


Figura 2.1: Contorno no plano complexo

definir a função $\delta_c(\tau' - \tau)$

$$\int_c d\tau' \delta_c(\tau - \tau') f(\tau) = f(\tau') \quad (2.80)$$

O ordenamento T_c pode ser feito pela função θ no contorno, e para definir as funções θ e δ de Dirac no contorno podemos usar uma definição paramétrica $\tau = z(\nu)$ no contorno, com ν real e monotonicamente crescente [3]. O ordenamento ao longo do caminho corresponderá ao ordenamento em ν . Introduzimos essas funções no contorno

$$\theta_C(\tau - \tau') = \theta(\nu - \nu') \quad (2.81)$$

$$\delta_C(\tau - \tau') = \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} \right)^{-1} \delta(\nu - \nu') \quad (2.82)$$

com estas definições podemos escrever, por exemplo,

$$\begin{aligned} T_C \left(\hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(x') \right) &= \theta_C(\tau - \tau') \hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(x') + \theta_C(\tau' - \tau) \hat{\Phi}(x') \hat{\Phi}(x) \\ \partial_\tau T_C \left(\hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(x') \right) &= \delta_C(\tau - \tau') \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}(x') \right] + T_C \left(\partial_\tau \hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(x') \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

podemos também estender a noção da diferencial funcional

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x')} = \delta_C(\tau - \tau') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.84)$$

Várias outras operações algébricas também podem ser estendidas no contorno de uma maneira direta, se for necessário.

Podemos considerar (2.79) como um gerador funcional para as funções de Green ordenadas por T_c com suporte no contorno C . Se o suporte da função fonte $J(\mathbf{x}, \tau)$ em (2.79) é restrito ao segmento no eixo real $[-T, T]$, (2.79) reproduz (2.78).

Calculamos o traço (2.79) fazendo uso do conjunto completo de estados do operador de campo $\Phi(x)$ no tempo $t = 0$,

$$Z[J] = \int D\phi \langle \phi, 0 | e^{-\beta H} T_c \left[\exp \left(i \int_c J \Phi \right) \right] | \phi, 0 \rangle \quad (2.85)$$

Por conveniência, usamos (2.75) e (2.76) e transladamos os vetores de estado em (2.85) até os pontos finais do contorno C

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \langle \phi, 0 | e^{-iHT} e^{+iHT} e^{-\beta H} T_c e^{i \int_c J \Phi} | \phi, 0 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \langle \phi, 0 | e^{+iHT} e^{-\beta H} T_c e^{i \int_c J \Phi} e^{-iHT} | \phi, 0 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\phi \langle \phi, -T - i\beta | T_c e^{i \int_c J \Phi} | \phi, -T \rangle \end{aligned} \quad (2.86)$$

Inserimos em (2.86) conjuntos completos de estados nos pontos finais dos segmentos

C_1, C_2, C_3

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}'\phi \mathcal{D}\phi'' \mathcal{D}\phi''' \langle \phi, -T - i\beta | T_c e^{i \int_{c_4} J\Phi} | \phi''', -T \rangle \\
&\times \langle \phi''', -T - i\frac{\beta}{2} | T_c e^{i \int_{c_2} J\Phi} | \phi'', -T - i\frac{\beta}{2} \rangle \\
&\times \langle \phi'', -T - i\frac{\beta}{2} | T_c e^{i \int_{c_3} J\Phi} | \phi', +T \rangle \\
&\times \langle \phi', +T | T_c e^{i \int_{c_1} J\Phi} | \phi, -T \rangle
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Cada elemento de matriz em (2.87) tem uma representação funcional de uma integral de trajetória. Usando manipulações conhecidas [68], podemos mostrar que o gerador funcional pode ser escrito como

$$Z[J] = \int_{\tau \in C} \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp \left[i \left[\int_C \left(\pi \dot{\phi} - H + J\phi \right) \right] \right] \tag{2.88}$$

Aqui $\dot{\phi}$ é a derivada de ϕ com direção tangencial a C no plano complexo t . A independência de τ dos autovalores em (2.68) fornece a seguinte condição de contorno na integral de trajetória (2.88)

$$\phi(-T) = \phi(-T - i\beta) \tag{2.89}$$

a qual é a familiar condição de periodicidade.

A partir da derivação feita acima é evidente que existem algumas arbitrariedades na escolha do contorno C . Uma restrição óbvia é que os pontos finais sejam separados por $-i\beta$. O contorno deve passar através dos pontos $\tau_1, \dots, \tau_n$, os quais aparecem como argumentos nas funções de Green desejadas $\mathcal{G}_\beta(x_1, \dots, x_n)$. Outra condição é derivada a partir de requerermos que os valores dos argumentos temporais esteja dentro do domínio da analiticidade das funções de Green $\mathcal{G}_\beta(\tau_1, \dots, \tau_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$. Este domínio é restrito [52] tal que se τ_i antecede τ_j ao longo de C o domínio da definição é dado por

$$-\beta \leq \text{Im}(\tau_j - \tau_i) \leq 0 \tag{2.90}$$

Esta condição de analiticidade é satisfeita se C não estiver em nenhuma direção para cima do plano complexo t (isto garante que a parte real do expoente em (2.88) seja limitado). Satisfazendo estas condições, vários contornos podem ser escolhidos. Para calcular as funções de Green com argumentos temporais reais diretamente, devemos escolher um contorno o qual englobe todo eixo temporal real. Um contorno largamente usado em Mecânica Estatística parte de $-T$ (eventualmente o limite $T \rightarrow \infty$ é feito) e vai ao longo do eixo real até $+T$ com uma inclinação infinitesimal como no presente caso, então retorna a $-T$ e baixa até $-T - i\beta$. Outras discussões dessa abordagem e outras escolhas de contorno foram investigadas na literatura [51, 53, 74, 75]. O contorno usado nesta revisão do formalismo de tempo real é o que leva a um tratamento simétrico dos segmentos C_1 e C_2 ($\sigma = \frac{\beta}{2}$) [3, 54].

Consideraremos uma teoria quântica de campos com a densidade Hamiltoniana dada por

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\phi(-\nabla^2 + m^2)\phi + V[\phi] \quad (2.91)$$

Depois de efetuar a integral Gaussiana sobre as variáveis de momento canônico $\pi(x)$ o gerador funcional (2.88) torna-se (a menos de uma normalização)

$$Z[J] = \int_c D\phi \exp[i \int_c (L(\phi) + J\phi)] \quad (2.92)$$

A demonstração da Eq. (2.92) está feita em detalhes no apêndice A.

Usando a definição (2.84) junto com a definição da função δ de Dirac no contorno, podemos reescrever (2.92) como

$$\begin{aligned} Z[J] = & \exp \left[-i \int_c V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] d^4x \right] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\int_c d^4y \int_c d^4x J(x) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.93)$$

A Eq. (2.93) é demonstrada em detalhes no Apêndice B.

O propagador térmico é a função de Green no contorno

$$(-\square_c - m^2)\mathcal{G}_\beta(x - y) = i\delta_C(x - y) \quad (2.94)$$

para $\mathcal{G}_\beta(x - y)$ consideramos o *Ansatz*

$$\mathcal{G}_\beta(x - y) = \mathcal{G}_\beta^>(x - y)\theta_c(\tau_x - \tau_y) + \mathcal{G}_\beta^<(x - y)\theta_c(\tau_y - \tau_x) \quad (2.95)$$

Ao especificar as condições de contorno notamos que indo de (2.92) a (2.93) fizemos a mudança de variável

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + i \int_c \mathcal{G}_\beta(x - y) j(y) \quad (2.96)$$

Juntamente com (2.89) obtemos a conhecida condição de contorno de Kubo-Martin-Schwinger [76, 77]

$$\mathcal{G}_\beta^>(\tau_x - \tau_y - i\beta, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{G}_\beta^<(\tau_x - \tau_y, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.97)$$

A solução de (2.94) sujeita a (2.97) é

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta(\tau - \tau', \omega_k) &= \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}} \left\{ \left[e^{-i\omega_k(\tau - \tau')} + e^{-\beta\omega_k + i\omega_k(\tau - \tau')} \right] \theta(\tau - \tau') \right. \\ &\quad \left. + \left[e^{i\omega_k(\tau - \tau')} + e^{-\beta\omega_k - i\omega_k(\tau - \tau')} \right] \theta(\tau' - \tau) \right\} \end{aligned} \quad (2.98)$$

onde fizemos a transformada de Fourier nas variáveis espaciais e $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Podemos agora tomar o limite $T \rightarrow \infty$ em (2.93). Neste limite ambos os segmentos C_3 e C_4 vão a infinito e

$$\mathcal{G}_\beta(\tau_{1,2} - \tau_{3,4}) \rightarrow 0 \quad (2.99)$$

pelo lema de Riemann $\tau_{1,2}$ e $\tau_{3,4}$ são pontos nos segmentos $C_{1,2}$ e $C_{3,4}$ do contorno, respectivamente. A partir de (2.93) concluimos que $Z[J]$ fatoriza e a demonstração dessa fatorização está feita em detalhes no Apêndice C.

O gerador funcional fatorizado é dado por

$$Z[J] = Z[J, C_1 C_2] Z[J, C_3 C_4] \quad (2.100)$$

onde

$$Z[J, C_1 C_2] = \exp \left\{ -i \int_{C_1 C_2} V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{C_1 C_2} J \mathcal{D} J \right\} \quad (2.101)$$

$$Z[J, C_3 C_4] = \exp \left\{ -i \int_{C_3 C_4} V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{C_3 C_4} J \mathcal{D} J \right\} \quad (2.102)$$

Quando (2.93) é utilizado para calcularmos funções de Green com argumentos no eixo temporal real a parte relevante de $Z[J]$ é $Z[J, C_1 C_2]$: as contribuições de $Z[J, C_3 C_4]$ podem ser absorvidas numa normalização. Definimos

$$Z[J] = Z[J, C_1 C_2] \quad (2.103)$$

e $Z[J]$ definido por (2.103) gera as funções de Green em tempo real (2.73) por derivadas funcionais em relação a J com argumentos temporais reais. Em (2.101) definimos

$$\int_{C_1 C_2} J(x) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} J_a(t, \mathbf{x}) \mathcal{G}_\beta^{a,b}(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{y}) J_b(t', \mathbf{y}) \quad (2.104)$$

onde $a, b = +, -$ e

$$\begin{aligned} J_+(x) &= J(x) \\ J_-(x) &= J\left(t - \frac{i\beta}{2}, \mathbf{x}\right) \end{aligned} \quad (2.105)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^{++}(x-y) &= \mathcal{G}_\beta(x-y) \\ \mathcal{G}_\beta^{--}(x-y) &= \mathcal{G}_\beta(y-x) \\ \mathcal{G}_\beta^{+-}(x-y) &= \mathcal{G}_\beta^<\left(x_0 - y_0 + \frac{i\beta}{2}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\right) \\ \mathcal{G}_\beta^{-+}(x-y) &= \mathcal{G}_\beta^>\left(x_0 - y_0 - \frac{i\beta}{2}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

A Eq. (2.104) está demonstrada no Apêndice D.

O gerador funcional (2.103) adquire a forma

$$\begin{aligned}
 Z[J_1, J_2] &= \exp \left\{ -i \left[\int V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_+} \right] - V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_-} \right] \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int J_a \mathcal{G}_\beta^{ab} J_b \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi_a \exp \left\{ \left[-\frac{1}{2} \int \phi_a \mathcal{G}_\beta^{-1ab} \phi_b - i \int d^4x \left(V[\phi_+] - V[\phi_-] \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. - J_a \phi_a \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

As funções de Green em tempo real (2.73) são geradas derivando (2.107) repetidamente com relação a J_+ e tomando J_+ e J_- igual a zero.

$$\mathcal{G}_\beta(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{1}{Z[0, 0]} \frac{\delta}{\delta J_+(x_n)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_+(x_1)} Z[J_+, J_-] \Big|_{J_+=J_-=0} \tag{2.108}$$

No espaço de momentos o propagador $\mathcal{G}_\beta^{ab}$ é dado por

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \tag{2.109}$$

onde

$$\cosh^2 \theta = \frac{1}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \tag{2.110}$$

Aplicando a relação

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \tag{2.111}$$

podemos escrever (2.109) na forma

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) & \frac{2\pi e^{-\beta|k_0|/2}}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \delta(k^2 - m^2) \\ \frac{2\pi e^{-\beta|k_0|/2}}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \delta(k^2 - m^2) & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \end{pmatrix} \tag{2.112}$$

As equações (2.109 e (2.112) são demonstradas em detalhes no Apêndice D.1

Em (2.112) reconhecemos que o elemento $\mathcal{G}_\beta^{11}$ do propagador é o propagador livre derivado em [1]. No entanto, no espaço de Minkowski as regras de Feynman não são

dadas por uma generalização ingênua da teoria de campos à temperatura zero. Mesmo que as estruturas topológicas e combinatoriais não mudem, o propagador calculado em tempo real adquire uma estrutura matricial e aparecem dois tipos de campos - tipo $+$ e $-$. Por (2.108) apenas campos tipo $+$ aparecerão nas linhas externas, já que os campos tipo $-$ desempenham um papel de campos fantasmas. Existem dois tipos de vértices: o tipo $+$ e o tipo $-$, que são equivalentes a menos de um sinal. Estes vértices interagem através dos elementos dependentes da temperatura que ficam fora da diagonal principal do propagador $\mathcal{G}_\beta$. O uso do formalismo de tempo real, explicado anteriormente, além de nos fornecer resultados em tempo real (Minkowski) elimina as singularidades *pinch* [59].

Essa duplicação do número de campos pode ser melhor entendida se colocarmos o problema em termos de uma situação mais geral que envolve tanto situações de equilíbrio quanto de não equilíbrio, caso no qual o formalismo de tempo real torna-se muito importante. Neste caso, a descrição de não equilíbrio de um sistema é determinada pela evolução temporal do operador matriz densidade $\hat{\rho}$. Essa evolução (na representação de Schrödinger) é determinada pela equação de Liouville quântica

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad (2.113)$$

Uma situação de não equilíbrio aparece quando o Hamiltoniano não comuta com a matriz densidade. Notamos que temos uma dependência temporal explícita na Hamiltoniana. A solução formal da equação de Liouville é

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_0(t) \hat{U}^{-1}(t, t_0) \quad (2.114)$$

com $\hat{\rho}_0(t)$ sendo a matriz densidade em algum tempo inicial t_0 que determina a condição inicial para a evolução e $\hat{U}(t, t_0)$ é o operador evolução, que, no equilíbrio, é dado por

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0) \right] \quad (2.115)$$

Médias dos operadores no ensemble e funções de correlação podem ser obtidas como

usualmente (Apêndice B em [3])

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(t) \rangle = \frac{1}{\text{tr} \hat{\rho}(t_0)} \text{tr} \left[\hat{\mathcal{O}} \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t, t_0) \right] \quad (2.116)$$

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(t_1) \hat{\mathcal{O}}(t_2) \rangle = \frac{1}{\text{tr} \hat{\rho}(t_0)} \text{tr} \left[\hat{\mathcal{O}} \hat{U}(t_1, t_2) \hat{\mathcal{O}} \hat{U}(t_2, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^{-1}(t_1, t_0) \right] \quad (2.117)$$

As expressões acima têm um significado muito intuitivo. Ao calcular médias no ensemble, temos o estado inicial (ou matriz densidade), evoluímos este para frente no tempo de t_0 até t , inserimos o operador em questão e evoluímos o estado para trás no tempo até t_0 . Para a função de correlação ($t_1 > t_2$), evoluímos o estado inicial até t_2 , inserimos o operador, evoluímos até t_1 , inserimos o segundo operador e, finalmente evoluímos o estado para trás até t_0 . Na maioria dos casos de interesse o operador matriz densidade inicial é qualquer estado puro ou térmico correspondendo ao estado fundamental de algum Hamiltoniano inicial. Em ambos os casos a matriz densidade inicial é da forma

$$\hat{\rho}(t_0) = \exp \left[-\beta \hat{H}_i \right] \quad (2.118)$$

o estado fundamental de $\hat{H}_i$ pode ser projetado tomando o limite $\beta \rightarrow \infty$.

Funções de correlação e médias no ensemble podem ser obtidas considerando a inserção de operadores e a evolução para frente no tempo (de $t_0 \rightarrow -\infty$) e para trás até o tempo original e, finalmente para baixo no eixo imaginário do tempo até $t_0 - i\beta$ levando em conta a condição inicial térmica. Calculamos o traço das quantidades e identificando as configurações de campos inicial e final e fazemos a integração funcional sobre esta configuração, assim consideramos as integrais de trajetória no plano complexo temporal. Como mostrado anteriormente, podemos negligenciar as partes C_3 e C_4 do contorno e assim, recaímos num contorno mais simples para o formalismo de tempo real. Este é conhecido como contorno de trajetória fechada de Schwinger (CTFS), onde contém apenas as partes C_1 e C_2 , para $t_i \rightarrow -\infty$ e $t_f \rightarrow \infty$.

Essa formulação em termos da evolução temporal ao longo de um contorno no plano complexo tem sido muito usada em Mecânica Estatística de não equilíbrio. Existem vários

artigos na literatura usando essas técnicas de estudar funções de correlação em tempo real e ações efetivas fora do equilíbrio (por exemplo [13] e referências desta referência).

Construções usuais de teorias de muitos corpos à temperatura zero (ou equilíbrio) [69, 70] envolvem o procedimento de ligar interações adiabáticas num passado distante e então desligamos esta num futuro distante. A suposição crucial é que, partindo do estado fundamental (equilíbrio) do sistema a $t = -\infty$, encontramos o mesmo estado em $t = +\infty$ (adquirindo algum fator de fase ao longo da trajetória). Isso claramente não é um caso fora do equilíbrio. Partindo de alguma distribuição arbitrária e então ligando e desligando interações, vamos encontrar o sistema em algum estado imprevisível. O “depois” depende, em geral, de peculiaridades do procedimento de ligar/desligar. A ausência de um conhecimento de estados finitos estraga completamente uma construção completa.

Gostaríamos de construir uma teoria que evitasse qualquer referência com o estado a $t = +\infty$, ainda que necessitássemos conhecer um estado finito (já que calculamos traços). A sugestão de Schwinger foi fazer o estado finito ser exatamente igual ao estado inicial. A idéia central é deixar um sistema quântico evoluir primeiro numa direção para frente no tempo e então voltar sua evolução para trás, evoluindo na direção para trás. Terminando assim com a necessidade de construir uma teoria com uma evolução temporal ao longo de um contorno com dois ramos Fig.(2.2).

Então, não importa que esteja o estado em $t = +\infty$, depois da evolução para trás este retornará ao estado inicial conhecido. Nesta construção não liga-se interações no futuro, ambos ligar/desligar acontecem no passado. Usando este contorno de Schwinger, obtemos os mesmos propagadores derivados anteriormente com o contorno da Fig.(2.1), assim como a função de partição para o campo escalar.

Gostaríamos de chamar a atenção de que existem muitos aspectos interessantes no formalismo de tempo real que não foram discutidos nesta sucinta revisão como por exemplo: causalidade, a formulação de Keldysh e sua aplicação na derivação de equações

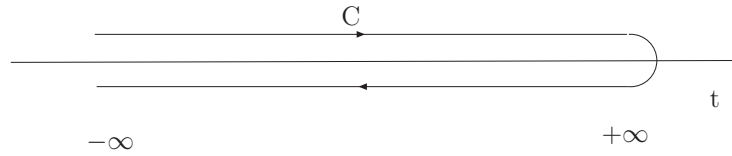


Figura 2.2: Contorno de integração de Schwinger.

cinéticas. Logo, deixaremos estes tópicos para um estudo futuro.

Já no próximo capítulo desta tese, derivaremos a ação efetiva para a teoria $\lambda \frac{\phi^4}{4!}$ em tempo real usando o contorno de Schwinger e obteremos as contribuições da mesma até $O(\lambda^2)$ em teoria de perturbação.

Capítulo 3

Ação Efetiva

Nesta tese estamos interessados em derivar equações de GLL para teoria escalar e, estas são derivadas a partir da ação efetiva à temperatura finita. É conhecido que a dissipação está relacionada à partes imaginárias na auto-energia, pois estas partes imaginárias são essenciais para vestir os propagadores e com isso gerar termos dissipativos não nulos na equação de GLL. Logo é necessário derivarmos a ação efetiva para a teoria até ordem λ^2 (considerando algumas contribuições de dois *loops*).

Neste capítulo vamos mostrar a derivação da ação efetiva no formalismo de Schwinger para a teoria escalar com interação $\frac{\lambda\phi^4}{4!}$, onde faremos uso da expansão em *loops* para obter as contribuições de um e dois *loops*. Esta derivação é original e foi feita de uma maneira simples e elegante, onde explicitamos as informações do contorno apenas no final dos cálculos, tornando a derivação compacta e simples. Esta derivação foi baseada em uma derivação da ação efetiva feita à temperatura zero na Ref. [71].

Consideraremos o modelo de um campo escalar com a densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (3.1)$$

e com o gerador funcional das funções de Green $Z[J]$, escrito em termos de uma fonte externa J , dado por

$$Z[J] = \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi, J] \right\} \quad (3.2)$$

onde $S[\phi, J]$ é a ação clássica, a qual é dada por

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= \int_C d^4x \left\{ \mathcal{L}[\phi] + J(x) \phi(x) \right\} \\ &= S_c[\phi] + \int_C d^4x J(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Neste capítulo trabalharemos com $c = 1$ e $\hbar \neq 1$, o índice C indica que a integração temporal é feita no contorno dado pela Fig. 2.2.

Partimos da definição do gerador funcional $Z[J]$

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W[J]\right) = \int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c[\phi] + \frac{i}{\hbar} \int_C d^4x J(x) \phi(x)\right) \quad (3.4)$$

Derivando ambos os lados em relação a $J(x)$, obtemos

$$\frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x)} \equiv \varphi(x) \quad (3.5)$$

onde $\varphi(x)$ é identificado como um campo clássico, lembrando que $\varphi(x)$ é um funcional de J . Um comentário importante a ser feito é que φ é um *c-number* e este campo contém correções quânticas.

Tendo (3.5) é possível construir outro gerador funcional, o qual dependerá somente de $\varphi(x)$, usando a seguinte transformação de Legendre

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_C d^4x J(x) \varphi(x) \quad (3.6)$$

onde $\Gamma(\varphi)$ é conhecida como ação efetiva. Fazendo uso de (3.6), reescrevemos o gerador funcional como

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W[J]\right) = \int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c[\phi] + \frac{i}{\hbar} \int_C d^4x J(x) \phi(x)\right) \quad (3.7)$$

Agora, fazemos a seguinte mudança de variável no campo escalar

$$\phi \rightarrow \phi + \varphi \quad (3.8)$$

e obtemos

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]\right) = \int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[S_c[\phi + \varphi] + \int_C d^4x J(x)\phi(x)\right]\right) \quad (3.9)$$

Fazemos uma expansão funcional em série de Taylor de $S[\phi + \varphi]$ em torno de $\phi = 0$

$$\begin{aligned} S_c[\phi + \varphi] &= S_c[\varphi] + \int_C d^4x_1 \frac{\delta S[\phi + \varphi]}{\delta\phi(x_1)} \Big|_{\phi=0} \phi(x_1) \\ &+ \frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\phi + \varphi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} \Big|_{\phi=0} \phi(x_1)\phi(x_2) + \dots \\ &= S_c[\varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C d^4x_1 \dots d^4x_n S_n[\varphi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde definimos

$$S_n[\varphi] = \frac{\delta^n S[\phi + \varphi]}{\delta\phi(x_1) \dots \delta\phi(x_n)} \Big|_{\phi=0} \quad (3.11)$$

Substituindo a Eq. (3.10) na Eq. (3.9) e usando a definição (3.11) obtemos

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]\right) &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[S_c[\varphi] + \int_C d^4x_1 \frac{\delta S[\phi + \varphi]}{\delta\phi(x_1)} \Big|_{\phi=\varphi} \phi(x_1) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\phi + \varphi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)} \Big|_{\phi=\varphi} \phi(x_1)\phi(x_2) \\ &\left. \left. + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} S_c^n[\varphi] \phi^n(x) + \int_C d^4x J(x)\phi(x)\right]\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Derivando (3.6) em relação a $\varphi(x)$ temos

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} = -J \quad (3.13)$$

$$J = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} \equiv -\Gamma^{(1)}[\varphi] \quad (3.14)$$

substituindo (3.14) em (3.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]\right) &= \int \mathcal{D}_c\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[S_c[\varphi] + \frac{1}{2}\int_C d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi]\phi(x_1)\phi(x_2)\right.\right. \\
&\quad + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_C d^4x_1\dots d^4x_n S_c^n[\varphi]\phi(x_1)\dots\phi(x_n) \\
&\quad \left.\left.+ \int_C d^4x_1\phi(x_1)(S_1[\varphi] - \Gamma^{(1)}[\varphi])\right]\right) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

por razões que ficarão claras a seguir, reescrevemos o último termo da equação acima da seguinte maneira

$$\phi[S_1(\varphi) - \Gamma^{(1)}(\varphi)] = -\phi\frac{\delta}{\delta\varphi}[\Gamma - S] \quad (3.16)$$

com isso podemos reescrever a Eq. (3.15) como sendo

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\Gamma[\varphi] - S_c[\varphi])\right) &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\int_C d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi]\phi(x_1)\phi(x_2)\right.\right. \\
&\quad + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_C d^4x_1\dots d^4x_n S_n[\varphi]\phi(x_1)\dots\phi(x_n) \\
&\quad \left.\left.- \int_C d^4x_1\phi(x_1)\frac{\delta}{\delta\varphi}[\Gamma - S]\right]\right) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Fazemos outra mudança de variável

$$\phi \rightarrow \hbar^{1/2}\phi \quad (3.18)$$

esta mudança de variável vai ser muito importante no sentido que após este reescalonamento dos campos a expansão em $\hbar$ corresponderá a uma expansão em *loops* da ação efetiva.

Fazendo uso de (3.18) obtemos

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{i}{\hbar} (\Gamma [\varphi] - S_c [\varphi]) \right) &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int_C d^4 x_1 d^4 x_2 S_2 [\varphi] \phi (x_1) \phi (x_2) \right. \right. \\ &+ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} \hbar^{\frac{n}{2}-1} \int_C d^4 x_1 \dots d^4 x_n S_n [\varphi] \phi (x_1) \dots \phi (x_n) \\ &\left. \left. - \hbar^{-1/2} \int_C d^4 x_1 \phi (x_1) (\Gamma_1 [\varphi] - S_1 [\varphi]) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde definimos $\Gamma_1 [\varphi] \equiv \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi}$.

Notamos que a ação efetiva $\Gamma [\varphi]$ sempre aparece na relação (3.19) apenas na combinação

$$\Gamma [\varphi] - S_c [\varphi] \equiv \bar{\Gamma} [\varphi] \quad (3.20)$$

ou seja, o funcional $\bar{\Gamma} [\varphi]$ contém todas as correções a ação clássica $S_c(\varphi)$, e este funcional pode ser escrito como uma série de potências em $\hbar$ da seguinte forma

$$\bar{\Gamma} [\varphi] = \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \bar{\Gamma}^{(m)} [\varphi] \quad (3.21)$$

Usando as eqs. (3.20) e (3.21) reescrevemos a Eq. (3.19) na forma

$$\begin{aligned} \exp \left(i \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^{m-1} \bar{\Gamma}^{(m)} [\varphi] \right) &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int_C d^4 x_1 d^4 x_2 S_2 [\varphi] \phi (x_1) \phi (x_2) \right. \right. \\ &+ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} \hbar^{\frac{n}{2}-1} \int_C d^4 x_1 \dots d^4 x_n S_n [\varphi] \phi (x_1) \dots \phi (x_n) \\ &\left. \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^{-\frac{1}{2}+m} \int_C d^4 x_1 \phi (x_1) \bar{\Gamma}_1^{(m)} [\varphi] \right] \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

A ação efetiva é o gerador funcional das funções de Green irreduzíveis a uma partícula, e um comentário muito importante a ser feito é que o funcional $\bar{\Gamma} [\varphi]$ representa todas as correções quânticas e térmicas a ação clássica $S [\varphi]$.

3.1 Contribuições de um *loop*

As contribuições em *loops* são obtidas expandindo ambos os lados da Eq. (3.22) em $\hbar$, fazendo essa expansão obtemos

$$\begin{aligned} \exp(i\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi])[1 + iO(\hbar)] &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \\ &\times \left[1 + iO\left(\hbar^{\frac{1}{2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

considerando apenas os termos independentes de $\hbar$ obtemos as contribuições de um *loop*

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi] = -i \ln \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \right) \right\} \quad (3.24)$$

onde

$$S_2[\varphi] = \left[-\square_{x_1} - m_0^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^2(x_1) \right] \delta^4(x_1 - x_2) \quad (3.25)$$

Reescrevemos a ação efetiva a um *loop* como

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}[\varphi] &= -i \ln \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 (-\square_{x_1} - m_0^2) \delta^4(x_1 - x_2) \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \left(-\frac{\lambda}{2} \varphi^2(x_1) \right) \delta^4(x_1 - x_2) \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

usando o fato que o propagador livre satisfaz a equação

$$G_0^{-1}(x_1 - x_2) = -i(-\square_{x_1} - m_0^2) \delta^4(x_1 - x_2) \quad (3.27)$$

e separando a parte livre da parte de interação obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}[\varphi] &= -i \ln \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1) [G_0(x_1 - x_2)]^{-1} \phi(x_2) \right] \\ &\times \exp \left[\int_C d^4x_1 \left[-\frac{i\lambda}{2} V''[\varphi(x_1)] \right] \phi^2(x_1) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde definimos

$$V''[\varphi(x)] = \frac{1}{2}\varphi^2(x) \quad (3.29)$$

Como o cálculo da equação de GLL será efetuado até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, por consistência expandimos $\bar{\Gamma}[\varphi]$ em teoria de perturbação em λ até $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Escrevendo a expressão obtida numa notação compacta temos

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= S_c[\varphi] - i \ln \left(\int_C \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1) [G_0(x_1 - x_2)]^{-1} \phi(x_2) \right] \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_C d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\ &\quad + i \frac{\lambda^2}{8} \int_C d^4x \int_C d^4y V''[\varphi(x)] V''[\varphi(y)] \langle \phi(x) \phi(x) \phi(y) \phi(y) \rangle_0 \\ &\quad - i \frac{\lambda^2}{8} \int_C d^4x \int_C d^4y V''[\varphi(x)] V''[\varphi(y)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \phi(y) \rangle_0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde o índice 0 indica que trabalharemos com propagadores livres

$$\langle \dots \rangle_0 = \frac{\int_C \mathcal{D}\phi(\dots) \exp \left[\frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1) [G_0(x_1 - x_2)]^{-1} \phi(x_2) \right]}{\int_C \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1) [G_0(x_1 - x_2)]^{-1} \phi(x_2) \right]} \quad (3.31)$$

Usando o teorema de Wick obtemos a expressão para as contribuições a um *loop* da ação efetiva

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= S_c[\varphi] - i \ln \left(\int_C \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 \phi(x_1) [G_0(x_1 - x_2)]^{-1} \phi(x_2) \right] \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_C d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\ &\quad + i \frac{\lambda^2}{4} \int_C d^4x \int_C d^4y V''[\varphi(x)] V''[\varphi(y)] \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Antes de explicitarmos os efeitos do contorno, mostraremos as expressões para os propa-

gadores no contorno, que são dados por [67, 72]

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\beta^{++}(x-x') &= i\langle T_+\phi(x)\phi(x') \rangle \\
\mathcal{G}_\beta^{--}(x-x') &= i\langle T_-\phi(x)\phi(x') \rangle \\
\mathcal{G}_\beta^{+-}(x-x') &= i\langle \phi(x')\phi(x) \rangle \\
\mathcal{G}_\beta^{-+}(x-x') &= i\langle \phi(x)\phi(x') \rangle
\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde T_+ e T_- indicam os ordenamentos cronológico e anti-cronológico, respectivamente. $\mathcal{G}_\beta^{++}$ é o propagador físico (causal). Os outros propagadores aparecem como consequência do contorno e são considerados como auxiliares (não físicos) [67]. As expressões explícitas para $\mathcal{G}_\beta^{a,b}(x-x')$ ($a, b = +, -$) em termos de sua transformada de Fourier são dadas por [72, 73]

$$\mathcal{G}_\beta(x-x')^{a,b} = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{k}, t-t') & \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{k}, t-t') \\ \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{k}, t-t') & \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{k}, t-t') \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{k}, t-t') &= \mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{k}, t-t')\theta(t-t') + \mathcal{G}_\beta^<(\mathbf{k}, t-t')\theta(t'-t) \\
\mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{k}, t-t') &= \mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{k}, t-t')\theta(t'-t) + \mathcal{G}_\beta^<(\mathbf{k}, t-t')\theta(t-t') \\
\mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{k}, t-t') &= \mathcal{G}_\beta^<(\mathbf{k}, t-t') \\
\mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{k}, t-t') &= \mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{k}, t-t')
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Para os propagadores livres à temperatura finita, usaremos expressões análogas as derivadas no Cap. 2, Eq. (2.112), que são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{k}, t-t') &= \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} \left[(1 + 2n(\omega)) \cos[\omega(t-t')] - i \sin[\omega(t-t')] \right] \\
\mathcal{G}_\beta^<(\mathbf{k}, t-t') &= \mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{k}, t'-t)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $n(\omega) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}$ é a distribuição de Bose e $\omega \equiv \omega(\mathbf{k})$ é a energia da partícula livre, $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Negligenciaremos as contribuições independentes do campo φ , pois estes termos não contribuirão para a equação de GLL, pois esta equação é obtida através de derivadas da ação efetiva com relação ao campo φ . Explicitando o contorno no plano complexo temos

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi] &= S_c[\varphi] - \frac{\lambda}{2} \left[\int_{-\infty}^t dt^+ - \int_{-\infty}^t dt^- \right] d^3x V''[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\ &+ i \frac{\lambda^2}{4} \left[\int_{-\infty}^t dt^+ - \int_{-\infty}^t dt^- \right] \left[\int_{-\infty}^t dt'_+ - \int_{-\infty}^t dt'_- \right] d^3x d^3x' V''[\varphi(x)] \\ &\times V''[\varphi(x')] \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0 \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0\end{aligned}\quad (3.37)$$

usamos as expressões para os propagadores no contorno Eq. (3.33) e o fato que cada contração de Wick corresponde a

$$\langle \phi_a(x) \phi_b(y) \rangle_0 = -i \mathcal{G}_\beta^{ab}(x - y) \quad (3.38)$$

por simplicidade separamos as contribuições a ordem de um *loop* da seguinte maneira

$$\Gamma^{(1)}[\varphi] = S_c[\varphi] + \Gamma_\lambda^{(1)}[\varphi] + \Gamma_{\lambda^2}^{(1)}[\varphi] \quad (3.39)$$

onde

$$\Gamma_\lambda^{(1)}[\varphi] = i \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{G}_\beta^{++}(x - x) \{V''[\varphi_+(x)] - V''[\varphi_-(x)]\} \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda^2}^{(1)}[\varphi] &= i \frac{\lambda^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \left\{ -V''[\varphi_+(x)] V''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{++}(x - x') \mathcal{G}_\beta^{++}(x - x') \right. \\ &+ V''[\varphi_+(x)] V''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{+-}(x - x') \mathcal{G}_\beta^{+-}(x - x') \\ &+ V''[\varphi_-(x)] V''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{-+}(x - x') \mathcal{G}_\beta^{-+}(x - x') \\ &\left. - V''[\varphi_-(x)] V''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{--}(x - x') \mathcal{G}_\beta^{--}(x - x') \right\}\end{aligned}\quad (3.41)$$

Fazendo a transformada de Fourier dos propagadores

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(x - x') = i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \mathcal{G}_\beta^{ab}(\mathbf{k}, t - t') \quad (3.42)$$

e usando o fato que

$$\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{k}, 0) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \quad (3.43)$$

obtemos

$$\Gamma_\lambda^{(1)}[\varphi] = -\frac{\lambda}{2} \int d^4x \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \{V''[\varphi_+(x)] - V''[\varphi_-(x)]\} \quad (3.44)$$

Fazendo transformada de Fourier dos propagadores em $\Gamma_{\lambda^2}^{(1)}[\varphi]$ obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda^2}^{(1)}[\varphi] &= i\frac{\lambda^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &\times \{V''[\varphi_+(x)] V''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t') \\ &- V''[\varphi_+(x)] V''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t') \\ &- V''[\varphi_-(x)] V''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t') \\ &+ V''[\varphi_-(x)] V''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t')\} \quad (3.45) \end{aligned}$$

Estas contribuições da ação efetiva a um *loop* em termos de diagramas de Feynman são dadas por

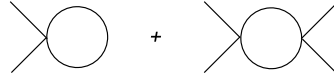


Figura 3.1: Contribuições de um *loop* da ação efetiva: $\Gamma_\lambda^{(1)}[\varphi]$ e $\Gamma_{\lambda^2}^{(1)}[\varphi]$, respectivamente

3.2 Contribuições de dois *loops*

Como mencionado anteriormente, para obter dissipação numa TQC, precisamos de uma parte imaginária na auto-energia. E para teoria $\lambda\phi^4$ com o campo escalar tendo apenas uma componente, a auto-energia só adquire parte imaginária se forem incluídas contribuições de dois *loops*.

As contribuições de dois *loops* da ação efetiva, são obtidas expandindo ambos os lados da Eq. (3.22) em $\hbar$ e considerando os termos até primeira ordem em $\hbar$. Fazendo esta expansão obtemos

$$\begin{aligned} \exp \left(i\bar{\Gamma}^{(1)} [\varphi] + i\hbar\bar{\Gamma}^{(2)} [\varphi] \right) &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 S_2 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right. \\ &+ \frac{i}{3!} \hbar^{\frac{1}{2}} \int_C d^4x_1 \dots d^4x_3 S_3 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \\ &+ \frac{i}{4!} \hbar \int_C d^4x_1 \dots d^4x_4 S_4 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \\ &\left. - i\hbar^{\frac{1}{2}} \int_C d^4x_1 \phi(x_1) \bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Com isto, obtemos em ordem $\hbar$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(2)} [\varphi] \exp \left(i\bar{\Gamma}^{(1)} [\varphi] \right) &= \int_C \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{2} \int_C d^4x_1 d^4x_2 S_2 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right) \\ &\times \left\{ \frac{i}{2} \left(\int_C d^4x_1 \phi(x_1) \bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \right)^2 \right. \\ &+ \frac{1}{4!} \int_C d^4x_1 \dots d^4x_4 S_4 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \\ &+ \frac{i}{2(3!)^2} \left(\int_C d^4x_1 \dots d^4x_3 S_3 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \right)^2 \\ &- \left[\frac{i}{3!} \int_C d^4x_1 \dots d^4x_3 S_3 [\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \right] \\ &\left. \times \left[\int_C d^4x_1 \phi(x_1) \bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Reescrevemos $\bar{\Gamma}^{(2)}$ em termos de uma notação compacta

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(2)} [\varphi] &= \frac{i}{2(3!)^2} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (S_3 [\varphi] \phi^3) \rangle + \frac{1}{4!} \langle S_4 [\varphi] \phi^4 \rangle \\ &+ \frac{i}{2} \langle (\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi) (\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi) \rangle - \frac{i}{3!} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (\bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \phi) \rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde denotamos

$$\langle \dots \rangle = \frac{\int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{2} S_2[\varphi] \phi^2\right) (\dots)}{\int_C \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{2} S_2[\varphi] \phi^2\right)} \quad (3.49)$$

e usamos uma definição análoga a do propagador $\mathcal{G}_\beta$

$$\langle \phi_a(x) \phi_b(y) \rangle = -i G^{ab}(x, y|\varphi) \quad (3.50)$$

onde $a, b = \pm$ $G^{\alpha\beta}(x, y|\varphi)$ é a expressão para o propagador “vestido”, pois $G^{\alpha\beta}(x, y|\varphi)$ é a função de Green, que depende do campo médio $\varphi(x)$ e satisfaz a equação

$$\int_C dz S_2^{ab}(x, z|\varphi) G^{bc}(z, y|\varphi) = \delta_c^{ac}(x - y) \quad (3.51)$$

ou em uma notação compacta

$$\begin{aligned} S_2[\varphi] G[\varphi] &= 1 \\ G[\varphi] &= S_2[\varphi]^{-1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Na Eq. (3.48) foi usada a seguinte notação

$$\begin{aligned} \langle (S_3[\varphi] \phi^3) (S_3[\varphi] \phi^3) \rangle &\equiv \int_C d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 S_3(x_1, x_2, x_3|\varphi) \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(y_3) \rangle \\ &\times S_3(y_1, y_2, y_3|\varphi) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \langle S_4[\varphi] \phi^4 \rangle &\equiv \int_C d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 S_4(x_1, x_2, x_3, x_4|\varphi) \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \rangle \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\langle (\Gamma_1^{(1)}[\varphi] \phi) (\Gamma_1^{(1)}[\varphi] \phi) \rangle = \int_C d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi]}{\delta \phi(x_1)} \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi]}{\delta \phi(x_2)} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \langle (S_3[\varphi] \phi^3) (\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi] \phi) \rangle &= \int_C d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4y_1 S_3(x_1, x_2, x_3|\varphi) \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(y_1) \rangle \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi]}{\delta \phi(y_1)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Agora consideraremos os termos do lado direito de (3.48) separadamente

3.2.1 Termo $\frac{i}{2(3!)^2} \langle (S_3[\varphi] \phi^3) (S_3[\varphi] \phi^3) \rangle$

Escrevendo este termo explicitamente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{i}{2(3!)^2} \langle (S_3[\varphi] \phi^3) (S_3[\varphi] \phi^3) \rangle &= \frac{i}{72} \int_C d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 S_3(x_1, x_2, x_3|\varphi) \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(y_3) \rangle \\ &\times S_3(y_1, y_2, y_3|\varphi) \end{aligned} \quad (3.57)$$

usando que

$$\begin{aligned} S_2[\varphi] &= \left[-\square_{x_1} - m_0^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^2(x_1) \right] \delta^4(x_1 - x_2) \\ &= \left[-\square_{x_1} - m_0^2 - \lambda V''[\varphi(x_1)] \right] \delta^4(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} S_3(x_1, x_2, x_3|\varphi) &= \frac{\delta S_2(x_1, x_2|\varphi)}{\delta \varphi(x_3)} \\ &= [-\lambda V'''[\varphi(x_1)]] \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \end{aligned} \quad (3.59)$$

e

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4|\varphi) = [-\lambda V''''[\varphi(x_1)]] \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4) \quad (3.60)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} V''[\varphi(x_1)] &= \frac{1}{2} \varphi^2(x_1) \\ V'''[\varphi(x_1)] &= \varphi(x_1) \\ V''''[\varphi(x_1)] &= 1 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Redefinimos S_n como sendo

$$\begin{aligned} S_2(x_1, x_2|\varphi) &= \bar{S}_2[\varphi(x_1)] \delta^4(x_1 - x_2) \\ S_3(x_1, x_2, x_3|\varphi) &= \bar{S}_3[\varphi(x_1)] \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \\ S_4(x_1, x_2, x_3, x_4|\varphi) &= \bar{S}_4[\varphi(x_1)] \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4) \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{S}_2 [\varphi (x_1)] &= -\square_{x_1} - m_0^2 - \lambda V'' [\varphi (x_1)] \\
\bar{S}_3 [\varphi (x_1)] &= -\lambda V''' [\varphi (x_1)] \\
\bar{S}_4 [\varphi (x_1)] &= -\lambda V'''' [\varphi (x_1)]
\end{aligned} \tag{3.63}$$

usando as definições acima, reescrevemos $S_3 (x_1, x_2, x_3 | \varphi)$ como sendo

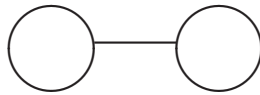
$$\begin{aligned}
\frac{i}{2(3!)^2} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (S_3 [\varphi] \phi^3) \rangle &= \frac{i}{72} \int_C d^4 x_1 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi (x_1)] \bar{S}_3 [\varphi (y_1)] \\
&\times \langle \phi (x_1) \phi (x_1) \phi (x_1) \phi (y_1) \phi (y_1) \phi (y_1) \rangle \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Agora aplicamos o teorema de Wick

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{72} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (S_3 [\varphi] \phi^3) \rangle \\
&= \int_C d^4 x_1 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi (x_1)] \bar{S}_3 [\varphi (y_1)] \left[\frac{i}{8} \langle \phi (x_1) \phi (x_1) \rangle \langle \phi (x_1) \phi (y_1) \rangle \langle \phi (y_1) \phi (y_1) \rangle \right. \\
&+ \left. \frac{i}{12} \langle \phi (x_1) \phi (y_1) \rangle \langle \phi (x_1) \phi (y_1) \rangle \langle \phi (x_1) \phi (y_1) \rangle \right] \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Em termos de diagramas de Feynman temos

$$\begin{aligned}
\frac{i}{72} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (S_3 [\varphi] \phi^3) \rangle &= \int_C d^4 x_1 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi (x_1)] \bar{S}_3 [\varphi (y_1)] \\
&\times \left\{ \frac{i}{8} \text{Diagrama 1} + \frac{i}{12} \text{Diagrama 2} \right\} \tag{3.66}
\end{aligned}$$




3.2.2 Termo $\frac{1}{4!} \langle S_4 [\varphi] \phi^4 \rangle$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4!} \langle S_4 [\varphi] \phi^4 \rangle &= \frac{1}{24} \int_C d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 S_4 (x_1, x_2, x_3, x_4 | \varphi) \\
&\times \langle \phi (x_1) \phi (x_2) \phi (x_3) \phi (x_4) \rangle \\
&= \frac{1}{24} \int_C d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \bar{S}_4 [\varphi (x_1)] \delta^4 (x_1 - x_2) \delta^4 (x_1 - x_3) \\
&\times \delta^4 (x_1 - x_4) \langle \phi (x_1) \phi (x_2) \phi (x_3) \phi (x_4) \rangle \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Integrando sobre as funções δ de Dirac e aplicando o teorema de Wick obtemos

$$\frac{1}{4!} \langle S_4 [\varphi] \phi^4 \rangle = \frac{1}{8} \int_C d^4 x_1 \bar{S}_4 [\varphi (x_1)] \langle \phi (x_1) \phi (x_1) \rangle \langle \phi (x_1) \phi (x_1) \rangle \quad (3.68)$$

A contribuição acima pode ser escrita em termos de diagrama de Feynman

$$\frac{1}{4!} \langle S_4 [\varphi] \phi^4 \rangle = \int_C d^4 x_1 \bar{S}_4 [\varphi (x_1)] \left[\frac{1}{8} \quad \text{Diagrama de dois loops} \right] \quad (3.69)$$

3.2.3 Termo $-\frac{i}{3!} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (\bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \phi) \rangle$

Usando a definição de $S_3 (x_1, x_2, x_3 | \varphi)$ escrevemos este termo explicitamente

$$\begin{aligned} -\frac{i}{3!} \langle (S_3 [\varphi] \phi^3) (\bar{\Gamma}_1^{(1)} [\varphi] \phi) \rangle &= -\frac{i}{6} \int_C d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi (x_1)] \delta^4 (x_1 - x_2) \\ &\times \delta^4 (x_1 - x_3) \langle \phi (x_1) \phi (x_2) \phi (x_3) \phi (y_1) \rangle \\ &\times \bar{\Gamma}_{1(y_1)}^{(1)} (\varphi) \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde compactificamos nossa notação fazendo $\frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)} [\varphi]}{\delta \phi (y_1)} \equiv \bar{\Gamma}_{1(y_1)}^{(1)} (\varphi)$ e mostramos algumas relações que serão úteis a seguir

$$\begin{aligned} S_3 (x_1, x_2, x_3 | \varphi) &= \bar{S}_3 [\varphi (x_1)] \delta^4 (x_1 - x_2) \delta^4 (x_1 - x_3) \\ S_3 (z_1, z_2, y_1 | \varphi) &= \bar{S}_3 [\varphi (z_1)] \delta^4 (z_1 - z_2) \delta^4 (z_1 - y_1) \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{S}_3 [\varphi (x_1)] &= -\lambda V''' [\varphi (x_1)] \\ \bar{S}_3 [\varphi (z_1)] &= -\lambda V''' [\varphi (z_1)] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Faremos uso também da expressão encontrada para as contribuições da ação efetiva calculada a um *loop*

$$\bar{\Gamma}^{(1)} [\varphi] = -i \ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 S_2 [\varphi] \phi (x_1) \phi (x_2) \right] \right) \right\} \quad (3.73)$$

A partir desta expressão podemos calcular $\frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi]}{\delta \varphi(y_1)}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi]}{\delta \varphi(y_1)} &= -i \frac{\delta}{\delta \varphi(y_1)} \left[\ln \left\{ \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \right) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 S_3[x_1, x_2, y_1 | \varphi] \\
&\times \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \left[\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \right)} \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 S_3[x_1, x_2, y_1 | \varphi] \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle
\end{aligned} \tag{3.74}$$

logo obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{3!} \left\langle (S_3[\varphi] \phi^3) \left(\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi] \phi \right) \right\rangle &= -\frac{i}{12} \int_C d^4x_1 d^4z_1 \bar{S}_3[\varphi(x_1)] \bar{S}_3[\varphi(z_1)] \\
&\times \langle \phi(z_1) \phi(z_1) \rangle \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(x_1) \phi(z_1) \rangle
\end{aligned} \tag{3.75}$$

aplicando o teorema de Wick

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{3!} \left\langle (S_3[\varphi] \phi^3) \left(\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi] \phi \right) \right\rangle &= -\frac{i}{4} \int_C d^4x_1 d^4z_1 \bar{S}_3[\varphi(x_1)] \bar{S}_3[\varphi(z_1)] \\
&\times \langle \phi(z_1) \phi(z_1) \rangle \langle \phi(x_1) \phi(z_1) \rangle \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \rangle
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Esta contribuição pode ser escrita em termo de um diagrama de Feynman

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{3!} \left\langle (S_3[\varphi] \phi^3) \left(\bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi] \phi \right) \right\rangle &= \int_C d^4x_1 d^4z_1 \bar{S}_3[\varphi(x_1)] \bar{S}_3[\varphi(z_1)] \\
&\times \left\{ -\frac{i}{4} \text{ (diagrama de dois loops)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

3.2.4 Termo $\frac{i}{2} \left\langle \left(\Gamma_1^{(1)}[\varphi] \phi \right) \left(\Gamma_1^{(1)}[\varphi] \phi \right) \right\rangle$

Usando o fato que

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{1[x_3]}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_C dx_1 dx_2 \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle [S_3(x_1, x_2, x_3 | \varphi)] \\
\bar{\Gamma}_{1[y_3]}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_C dy_1 dy_2 \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle [S_3(y_1, y_2, y_3 | \varphi)]
\end{aligned} \tag{3.78}$$

reescrevemos o termo $\frac{i}{2} \left\langle \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \right\rangle$ termo explicitamente

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \left\langle \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \right\rangle &= \frac{i}{8} \int_C d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 S_3 (x_1, x_2, x_3 | \varphi) \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3) \phi(y_3) \rangle \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle \\ &\times S_3 (y_1, y_2, y_3 | \varphi) \end{aligned} \quad (3.79)$$

usando que

$$\bar{S}_3 [\varphi(x_1)] = -\lambda V''' [\varphi(x_1)] \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} S_3 (x_1, x_2, x_3 | \varphi) &= \bar{S}_3 [\varphi(x_1)] \delta^4 (x_1 - x_2) \delta^4 (x_1 - x_3) \\ S_3 (y_1, y_2, y_3 | \varphi) &= \bar{S}_3 [\varphi(y_1)] \delta^4 (y_1 - y_2) \delta^4 (y_1 - y_3) \end{aligned} \quad (3.81)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \left\langle \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \right\rangle &= \frac{i}{8} \int_C d^4 x_1 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi(x_1)] \bar{S}_3 [\varphi(y_1)] \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \rangle \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(y_1) \rangle \langle \phi(y_1) \phi(y_1) \rangle \end{aligned} \quad (3.82)$$

A contribuição acima reescrita em termos de um diagrama de Feynman é dada por

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \left\langle \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \left(\Gamma_1^{(1)} [\varphi] \phi \right) \right\rangle &= \int_C d^4 x_1 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi(x_1)] \bar{S}_3 [\varphi(y_1)] \\ &\times \left\{ \frac{i}{8} \text{ (diagrama de dois loops)} \right\} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Então ao juntar todos as contribuições de dois *loops* da ação efetiva à temperatura finita para teoria escalar $\lambda\varphi^4$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(2)} [\varphi] &= \frac{1}{8} \int_C d^4 x_1 \bar{S}_4 [\varphi(x_1)] \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_1) \phi(x_1) \rangle \\ &+ \frac{i}{12} \int_C d^4 x_1 d^4 y_1 \bar{S}_3 [\varphi(x_1)] \bar{S}_3 [\varphi(y_1)] \langle \phi(x_1) \phi(y_1) \rangle \langle \phi(x_1) \phi(y_1) \rangle \\ &\times \langle \phi(x_1) \phi(y_1) \rangle \end{aligned} \quad (3.84)$$

Escrevendo a equação acima em termos de diagramas de Feynman

$$\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{8} \text{ (two circles joined at a point) } + \frac{i}{12} \text{ (circle with a horizontal line) } \quad (3.85)$$

A ação efetiva é o gerador funcional das funções de Green irredutíveis a uma partícula (1PI) e, em nossa derivação usando o formalismo de Schwinger ficou claro o cancelamento dos diagramas redutíveis a uma partícula. Outro fator importante a ser mencionado é que os propagadores em $\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi]$ não são propagadores livres. $\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi]$ em termos do propagador livre é dada pela expansão perturbativa de $\langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle$ (demonstração em detalhes no Apêndice E), que é dada por

$$\langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle = \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 - i\lambda \int_C d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(y_1) \phi(x) \rangle_0 \langle \phi(y_2) \phi(x) \rangle_0 \quad (3.86)$$

Substituindo esta expansão em $\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi]$, negligenciamos os termos independentes do campo (pela mesma justificativa usada na derivação das contribuições a um *loop*) e como estamos trabalhando até $O(\lambda^2)$ obtemos

$$\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi] = \bar{\Gamma}_c^{(2)}[\varphi] + \bar{\Gamma}_d^{(2)}[\varphi] \quad (3.87)$$

$\bar{\Gamma}_c^{(2)}[\varphi] + \bar{\Gamma}_d^{(2)}[\varphi]$ em termos de diagramas de Feynman, respectivamente, são dados por

$$\bar{\Gamma}_c^{(2)}[\varphi] + \bar{\Gamma}_d^{(2)}[\varphi] = \text{ (two circles joined at a point) } + \text{ (circle with a horizontal line) } \quad (3.88)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_c^{(2)}[\varphi] &= -\frac{i\lambda}{4} \int_C d^4x \int_C d^4x' \bar{S}_4[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 V''[\varphi(x')] \\ &\times \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0 \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_d^{(2)}[\varphi] &= \frac{i}{12} \int_C d^4x d^4x' \bar{S}_3[\varphi(x)] \bar{S}_3[\varphi(x')] \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0 \\ &\times \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0 \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

agora explicitamos o contorno C , usamos a definição dos propagadores e algumas propriedades

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta^{--}(x-x) &= \mathcal{G}_\beta^{++}(x-x) \\ \mathcal{G}_\beta^{-+}(x'-x) &= \mathcal{G}_\beta^{+-}(x-x')\end{aligned}\quad (3.91)$$

e como o contorno foi explicitado, podemos tomar o limite $t \rightarrow \infty$. Fazendo a transformada de Fourier dos propagadores em $\bar{\Gamma}_c^{(2)}[\varphi]$ e $\bar{\Gamma}_d^{(2)}[\varphi]$ obtemos estas contribuições no espaço dos momentos

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_c^{(2)}[\varphi] &= i\frac{\lambda}{4} \int d^4x dt' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \\ &\times \left\{ -\bar{S}_4[\varphi_+(x')] V''[\varphi_+(x)] [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \right. \\ &+ \bar{S}_4[\varphi_+(x')] V''[\varphi_-(x)] [\mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \\ &+ \bar{S}_4[\varphi_-(x')] V''[\varphi_+(x)] [\mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \\ &\left. - \bar{S}_4[\varphi_-(x')] V''[\varphi_-(x)] [\mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \right\}\end{aligned}\quad (3.92)$$

e

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_d^{(2)}[\varphi] &= \frac{i}{12} \int d^4x d^4x' \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}_3}{(2\pi)^3} \\ &\times \left\{ \bar{S}_3[\varphi_+(x)] \bar{S}_3[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_3, t-t') \right. \\ &- \bar{S}_3[\varphi_+(x)] \bar{S}_3[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_3, t-t') \\ &- \bar{S}_3[\varphi_-(x)] \bar{S}_3[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_3, t-t') \\ &\left. + \bar{S}_3[\varphi_-(x)] \bar{S}_3[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_3, t-t') \right\} \\ &\times \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3)\end{aligned}\quad (3.93)$$

Obtemos então as contribuições de um e dois *loops* da ação efetiva para a teoria $\lambda\varphi^4$ no formalismo de Schwinger até $\mathcal{O}(\lambda^2)$. A ação efetiva até $\mathcal{O}(\delta^2)$ em termos de diagramas de Feynman é dada por

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (3.94)$$

No próximo capítulo mostraremos em detalhes como obter equações efetivas de GLL a partir da ação efetiva da teoria $\lambda\phi^4$ à temperatura finita. Faremos uma análise, no contexto perturbativo, para a teoria nos casos com e sem quebra espontânea da simetria.

Capítulo 4

Equação de Ginzburg-Landau-Langevin

Neste capítulo mostraremos a derivação de uma equação efetiva de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL) a partir da ação efetiva de uma TQCTF no contexto perturbativo. Pois estamos interessados na dinâmica de não equilíbrio da formação de um condensado numa teoria quântica de campos escalar relativística $\lambda\phi^4$ com quebra espontânea de simetria.

Estas equações incorporarão ruídos aditivo e multiplicativo e, através de dinâmica do parâmetro de ordem (valor esperado do campo) poderemos estudar o papel da flutuação e da dissipação no processo de formação do condensado. Primeiramente faremos, em detalhes, a derivação da equação de GLL para a fase simétrica e, posteriormente, estendemos a derivação para a fase com quebra espontânea de simetria. A derivação para a fase simétrica será baseada na Ref. [13].

4.1 Fase simétrica

Obtivemos anteriormente as contribuições de dois loops à temperatura finita para ação efetiva no formalismo de Schwinger. Usamos teoria de perturbação em λ até $\mathcal{O}(\lambda^2)$ e estas contribuições escritas em termos de diagramas de Feynman são dadas por

$$\Gamma[\varphi_c] = S[\phi] + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} \quad (4.1)$$

Escrevendo estas contribuições explicitamente ($t - t' \equiv \tau$), temos

$$\text{Diagram 1} = -\frac{\lambda}{4} \int d^4x [\varphi_+^2(x) - \varphi_-^2(x)] \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 2} = & i \frac{\lambda^2}{16} \int d^4x d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ \varphi_+^2(x) \right. \\ & \times \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau) \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \varphi_+^2(x') \\ & - \varphi_+^2(x) \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}, \tau) \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \varphi_-^2(x') \\ & - \varphi_-^2(x) \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}, \tau) \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \varphi_+^2(x') \\ & \left. + \varphi_-^2(x) \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}, \tau) \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \varphi_-^2(x') \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 3} = & -i \frac{\lambda^2}{8} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(1 + 2n(\omega))}{2\omega(\mathbf{k})} \int d^4x \int dt' \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ \varphi_+^2(x) \right. \\ & \times [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 - \varphi_+^2(x) [\mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}, \tau)]^2 - \varphi_-^2(x) [\mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}, \tau)]^2 \\ & \left. + \varphi_-^2(x) [\mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}, \tau)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram 4} = & i \frac{\lambda^2}{12} \int d^4x d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int \frac{d^3\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{q}_3}{(2\pi)^3} \\ & \times \left\{ \varphi_+(x) \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_1, \tau) \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_2, \tau) \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_3, \tau) \varphi_+(x') \right. \\ & - \varphi_+(x) \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_1, \tau) \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_2, \tau) \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_3, \tau) \varphi_-(x') \\ & - \varphi_-(x) \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_1, \tau) \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_2, \tau) \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_3, \tau) \varphi_+(x') \\ & \left. + \varphi_-(x) \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_1, \tau) \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_2, \tau) \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_3, \tau) \varphi_-(x') \right\} \\ & \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \end{aligned} \quad (4.5)$$

É vantajoso reescrever as variáveis de campo φ_+ e φ_- em (4.1) em termos de novas variáveis de campo φ_c e φ_Δ , definidas por

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}\varphi_\Delta + \varphi_c \quad (4.6)$$

$$\varphi_- = \varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_\Delta \quad (4.7)$$

O significado físico dessas variáveis foi sugerido em [78], com φ_Δ sendo basicamente associado com um campo de resposta, enquanto φ_c é o campo físico que sente as flutuações do sistema. Essas mudanças de variáveis (4.7) facilitam a identificação na ação efetiva dos termos responsáveis pelas flutuações no sistema, isto é as partes imaginárias. A associação de φ_c com um campo físico impõe que tomamos $\varphi_\Delta = 0$ ($\varphi_+ = \varphi_-$) após a obtenção da equação de GLL efetiva [72, 84].

É necessário empregar propagadores contendo os efeitos das interações, pois senão, não haverá dissipação no sistema [13]. Correções de auto-energia no propagador introduzem efeitos não triviais (decaimento) devido a contribuições imaginárias na auto-energia : $\Sigma(q) = \text{Re}\Sigma + i\text{Im}\Sigma(q)$. A primeira contribuição $\text{Im}\Sigma$ é proveniente do diagrama “*setting sun*”, sendo portanto de ordem λ^2 , motivo este que nos levou a calcular a ação efetiva até esta ordem. Contribuições com um número maior de *loops* para a auto-energia são de ordens mais altas em λ e podem ser consistentemente negligenciadas para acoplamento fraco e dentro da ordem em teoria de perturbação na qual estamos trabalhando. Escrevendo o propagador $\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')$ em termos da função espectral $\rho(\mathbf{q}, q_0)$ (Apêndice F) é possível mostrar que, devido ao aparecimento de $\text{Im}\Sigma(q)$, $\rho(\mathbf{q}, q_0)$ adquire uma largura finita $\Gamma(q)$, que é $\mathcal{O}(\lambda^2)$ para acoplamento fraco, $\Gamma(q)$ gera contribuições finitas nos termos proporcionais a φ_c na equação de movimento. Este é essencialmente o mesmo procedimento não perturbativo adotado nas Refs. [79, 80, 81, 82] no cálculo de coeficientes de dissipação.

Embora a introdução de um propagador vestido forneça um coeficiente dissipativo não nulo, esta implementação deve ser feita com cuidado. Existem sugestões que melhoram o potencial efetivo à temperatura finita, as quais incluem termos com divergências infra-vermelhas que podem ser obtidos ao vestir o propagador, levando em conta diagramas *daisy* e *superdaisy* [83]. Foi mostrado que, se este procedimento de ressonância não for implementado cuidadosamente, pode haver dupla contagem de diagramas, gerando o aparecimento de resultados errados, tais como um potencial efetivo com um termo linear no campo escalar. Embora nosso foco seja a dinâmica, uma introdução imprópria dos

propagadores vestidos pode também gerar uma dupla contagem dos termos na equação de movimento que derivaremos. Para tratar esse problema de uma maneira auto-consistente, aplicamos o procedimento de Parwani [29], Arnold e Espinosa na [83] para o problema da ressonância à altas temperaturas.

Reescrevemos a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}[\phi]$ como

$$\mathcal{L}[\phi] \rightarrow \mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} (m^2 + \Sigma) \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{1}{2} \Sigma \phi^2 \quad (4.8)$$

onde somamos e subtraímos termos dependentes de auto-energias em $\mathcal{L}[\phi]$. Podemos agora tratar $\frac{1}{2} (m^2 + \Sigma) \phi^2$ como parte do propagador e $\frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \frac{1}{2} \Sigma \phi^2$ como um termo de interação. Fazendo isso, podemos escrever sistemática e autoconsistentemente a equação para a ação efetiva em termos do propagador vestido e, ao mesmo tempo, remover qualquer dupla contagem gerada pelo vestimento através da interação modificada, como ilustrado no Apêndice F. Escrevemos os propagadores vestidos como

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2 - \Sigma(q) + i\varepsilon} \quad (4.9)$$

onde $\Sigma(q)$ é a contribuição de auto-energia

Figura 4.1: Auto-energia até $\mathcal{O}(\lambda^2)$

Consideramos explicitamente apenas as contribuições de $\Sigma(q)$ a partir dos diagramas até $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

No Apêndice F mostramos que o propagador físico $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$, incorporando estas correções, muda para

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &\simeq \frac{e^{-\Gamma(\mathbf{q})|t-t'|}}{\omega(\mathbf{q})} \left\{ (1 + 2n) \cos[\omega |t - t'|] - i \sin[\omega |t - t'|] \right. \\ &\quad \left. + 2\beta\Gamma(\mathbf{q}) n(1 + n) \sin[\omega |t - t'|] \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma^2}{T^2}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\Gamma(\mathbf{q})$ é a largura de decaimento [67]

$$\Gamma(q) = -\frac{\text{Im}\Sigma(q)}{2\omega(q)} \quad (4.11)$$

Na Eq. (4.10) usamos a aproximação $\beta\Gamma \ll 1$ (Apêndice F), a qual é consistente com escalas lentas de tempo de relaxação. Também, $\omega \equiv \omega(\mathbf{q})$ e $n(\omega)$ são agora dadas em termos da massa à temperatura finita m_T

$$m_T^2 = m^2 + \text{Re}\Sigma(m_T) \stackrel{T \gg m}{\simeq} m^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} \right) - \frac{\lambda^2 T^3}{384\pi m} + \frac{\lambda^2 T^2}{192\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{T^2} \right) + \dots \quad (4.12)$$

onde escrevemos explicitamente apenas as contribuições dominantes térmicas para cada diagrama da Fig.(4.1) e, negligenciamos contribuições subdominantes. O segundo e terceiro termos no lado direito de (4.12) são facilmente obtidos. O último termo no lado direito de (4.12), associado com o diagrama “*setting sun*”, é explicitamente calculado em [29].

Em termos das novas variáveis φ_c e φ_Δ , usando (3.35) e (3.36), obtemos para as partes real e imaginária da ação efetiva $\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + i\text{Im}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c]$, as seguinte expressões

$$\begin{aligned} \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = & \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1+2n(\omega)}{2\omega(\mathbf{k})} \right. \right. \\ & - \frac{\lambda^2}{2} \int dt' \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Im}[\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \theta(t-t') \\ & \times \left. \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1+2n(\omega)}{2\omega(\mathbf{k})} \right] \varphi_c(x) - \frac{\lambda}{4!} [4\varphi_\Delta(x) \varphi_c^3(x) + \varphi_\Delta^3(x) \varphi_c(x)] \Big\} \\ & + \int d^4x \int d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left\{ -\frac{\lambda^2}{8} [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \varphi_\Delta^2(x') \right. \\ & + 4\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \varphi_c^2(x')] \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Im}[\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t')] \\ & \times \left. \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t') \right] \theta(t-t') - \frac{\lambda^2}{3} (2\pi)^3 \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x') \\ & \times \left. \text{Im} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t-t') \right] \theta(t-t') \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3) \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Im}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \int d^4x \int d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left\{ \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') \right. \\
&\times \text{Re} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t') + \frac{\lambda^2}{12} (2\pi)^3 \varphi_\Delta(x) \varphi_\Delta(x') \\
&\times \left. \text{Re} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3\mathbf{q}_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t-t') \right] \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3) \right\} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

A expressão acima está escrita apenas em termos do propagador $\mathcal{G}_\beta^{++}$. Esta forma foi obtida fazendo uso das expressões explícitas dos propagadores no espaço dos momentos e de propriedades entre as componentes do propagador. Após uma série de manipulações algébricas obtivemos a ação efetiva em termos apenas do propagador físico $\mathcal{G}_\beta^{++}$. Para não deixar a apresentação desta tese muito pesada, mostramos somente o resultado final.

Podemos associar estes termos imaginários como sendo termos vindos de integrais funcionais sobre campos estocásticos (de flutuação) ξ_1 e ξ_2 [84, 85]

$$\begin{aligned}
&\int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\
&= \exp \left\{ i \int d^4x d^4x' \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \frac{\lambda^2}{12} \varphi_\Delta(x) \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \varphi_\Delta(x') \right] \right\} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

onde $P[\xi_1]$ e $P[\xi_2]$ são as distribuições de probabilidade para ξ_1 e ξ_2 , respectivamente, que são dadas por

$$P[\xi_1] = N_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) \left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \right)^{-1} \xi_1(x') \right\} \quad (4.15)$$

$$P[\xi_2] = N_2^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_2(x) \left(\frac{\lambda^2}{6} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \right)^{-1} \xi_2(x') \right\} \quad (4.16)$$

N_1^{-1} e N_2^{-1} são fatores de normalização e, em (4.14)-(4.16) introduzimos uma notação compacta

$$[\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t') \quad (4.17)$$

$$[\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 = \int d^3k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t - t') \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \quad (4.18)$$

A partir da equação para a distribuição de probabilidade para ξ_1 , $P[\xi_1]$, a função de correlação de dois pontos para ξ_1 dada por

$$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle = \frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \quad (4.19)$$

A Eq. (4.14) está demonstrada em detalhes no Apêndice G. Uma boa referência introdutória sobre a dinâmica de processos estocásticos é a Ref. [86].

Portanto, usando (4.14), a ação efetiva pode ser reescrita como

$$\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = \frac{1}{i} \ln \int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \{i S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2]\} \quad (4.20)$$

onde

$$S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2] = \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \quad (4.21)$$

Em (4.21) os campos ξ_1 e ξ_2 com distribuições de probabilidades dadas por (4.15) e (4.16), respectivamente, atuam como fontes de flutuação para a configuração de campo escalar φ . ξ_1 acopla-se com os campos de resposta φ_Δ e com o campo físico φ_c , levando a um termo de ruído multiplicativo ($\varphi_c \xi_1$) na equação de movimento para φ_c , enquanto ξ_2 dá origem a um termo de ruído aditivo.

Agora mostraremos a derivação da equação de movimento efetiva para o campo φ_c . Esta pode ser obtida a partir de

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2]}{\delta \varphi_\Delta} \right|_{\varphi_\Delta=0} = 0 \quad (4.22)$$

usando $\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c]$ e

$$S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2] = \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \quad (4.23)$$

facilmente obtemos

$$\begin{aligned}
& \left[\square + m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega)}{2\omega(\mathbf{k})} \left(1 + \lambda \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \right) \right] \\
& \times \varphi_c(x) + \frac{\lambda}{3!} \varphi_c^3(x) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 \\
& + \frac{\lambda^2}{3} \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^3 = \varphi_c(x) \xi_1(x) + \xi_2(x)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Para obtermos uma equação tipo Ginzburg-Landau-Langevin (GLL), precisamos fazer uma série de aproximações na equação de movimento obtida anteriormente. Essas aproximações certamente limitarão o âmbito da aplicabilidade da equação de movimento obtida (muito similar à teoria de resposta linear), perderemos, por exemplo, efeitos de memória. Porém, por outro lado, esclarecemos importantes aspectos da física de não equilíbrio. Estritamente falando, uma equação de GLL pode ser utilizada apenas para descrever a dinâmica de não equilíbrio de modos que variem lentamente em situações próximas do equilíbrio. Para ver estes aspectos, focamos nossa atenção nos últimos dois termos do lado esquerdo da Eq. (4.24).

Primeiro consideramos o termo da equação de movimento que é proporcional a $[\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2$. Analisando (4.17) fica claro que a não localidade espacial pode ser tratada considerando apenas contribuições com momento externo nulo, como no cálculo de funções de resposta linear [79]. Isso é que é usualmente feito no cálculo do potencial efetivo a um *loop* como uma expansão de funções de vértice com momento externo nulo, o que é fisicamente equivalente a considerar apenas campos homogêneos no espaço $\varphi_c^2(\mathbf{x}', t') = \varphi_c^2(\mathbf{x}, t')$.

Denominamos o termo proporcional a $[\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2$ de Ω_2

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &\equiv \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}, t') \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \\
&\quad \times \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t')] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}, t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \delta(k) (2\pi)^3 \\
&\quad \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t')] \\
&= \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}, t') \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Agora fazemos algumas manipulações em Ω_2

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' [\varphi_c^2(\mathbf{x}, t') - \varphi_c^2(\mathbf{x}, t)] \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t')]^2 \quad (4.26)
\end{aligned}$$

na equação acima somamos e subtraímos o último termo no lado direito. Ao tratar a não localidade temporal (memória) assumimos que φ_c varia pouco no tempo, tal que expandimos o primeiro termo do lado direito de Ω_2 até primeira ordem em t . Isso é uma suposição válida para sistemas próximos do equilíbrio, quando φ_c não é esperado mudar consideravelmente com o tempo (Esta é a chamada aproximação quase-adiabática [84,

80]). Expandindo $\varphi_c^2(\mathbf{x}, t')|_{t'=t}$ e substituindo na Eq. (4.26) obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(\mathbf{x}, t) 2\varphi_c(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \\
&= \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \tag{4.27}
\end{aligned}$$

retornando a notação explícita, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 \\
&\simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \tag{4.28}
\end{aligned}$$

O aparecimento de uma direção temporal dentro dessa aproximação é certamente relacionada a negligenciarmos modos rápidos na descrição da dinâmica. Isso é uma questão interessante que merece um futuro estudo. O último termo do lado esquerdo da Eq. (4.24) pode ser tratado de maneira análoga a Ω_2 , onde obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda^2}{3} \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^3 \\
&\simeq \frac{\lambda^2}{3} \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \text{Im} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t - t') \right] \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \\
&+ \frac{\lambda^2}{3} \varphi_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \text{Im} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t - t') \right] \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Os primeiros termos do lado direito das eqs. (4.28) e (4.29) são os correspondentes termos dissipativos associados aos campos de flutuação ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. O último termo do lado direito de (4.28) é a correção de vértice térmica a um *loop*, enquanto o último termo do lado direito de (4.29) é a contribuição da correção de massa à temperatura finita do diagrama “*setting sun*”. A integração temporal (4.28) e (4.29) pode ser facilmente feita usando a expressão para $\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \mathbf{t} - \mathbf{t}')$ dada em (3.35) e por uma mudança de variável na variável de integração temporal $t - t' = t''$. No entanto, se quando calcularmos os coeficientes de dissipação usarmos as expressões para os propagadores livres dadas em (3.36), encontraremos que ambos os termos dissipativos são nulos e, isso está demonstrado em detalhes no Apêndice H.

Os resultados são bastante diferentes se, ao invés de propagadores livres, nós usarmos o propagador dado na Eq. (F.81). Usando este propagador na expressão para o termo dissipativo (4.28) e fazendo a integral em t' , obtemos até ordem λ^2 ,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 &= \frac{\lambda^2}{8} \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \beta \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{\omega^2 \Gamma} \\ &- \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega^2} \left[\frac{(1+2n)}{2\omega(\mathbf{q})} \right. \\ &\left. + \beta n(1+n) \right] + O\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

No Apêndice I mostramos a derivação acima em detalhes.

O primeiro termo no lado direito de (4.30) fornece o termo dissipativo, $\eta_1 \varphi_c^2 \dot{\varphi}_c$, com o coeficiente dissipativo η_1 dado por

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2}{8} \beta \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega^2(\mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{q})} + O\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \quad (4.31)$$

O segundo termo no lado direito de (4.30) claramente fornece apenas a correção de vértice a um *loop* à temperatura finita. Para obter (4.30) fizemos uma expansão até primeira ordem em potências de Γ/ω , consistente com a aproximação de que os modos do campo variem pouco. (omitindo termos de $O(\lambda^4)$, já que $\Gamma \propto O(\lambda^2)$).

A expressão para o coeficiente dissipativo pode ser simplificada se considerarmos o limite de altas temperaturas $T \gg m_T$. Como foi mostrado nas Refs. [29, 81] o limite de altas temperaturas de $\Gamma(\mathbf{q})$ é

$$\Gamma \simeq \frac{\lambda^2 T^2}{1536 \pi \omega(\mathbf{q})} \quad (4.32)$$

No Apêndice J mostramos em detalhes que usando (4.31) e (4.32), obtemos para η_1 , no limite de altas temperaturas

$$\eta_1 \stackrel{T \gg m_T}{\simeq} \frac{96}{\pi T} \ln \left(\frac{2T}{m_T} \right) \quad (4.33)$$

Este resultado mostra que o coeficiente dissipativo associado com o campo com ruído multiplicativo ξ_1 tem, neste limite, uma dependência logaritmica com a constante de acoplamento λ , o que em outras palavras pode ser dito como uma dependência fraca.

Podemos prosseguir de maneira análoga e calcular Eq. (4.29) para obter a expressão para o coeficiente dissipativo associado com o segundo campo (ruído) de flutuação ξ_2 . Esta expressão vem do primeiro termo da Eq. (4.29). A partir do segundo termo da Eq. (4.29) podemos obter a correção de dois loops para a massa térmica. Substituindo a Eq. (4.10) para $\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t - t')$ em (4.29) e, fazendo a integral em t' , é possível mostrar que o coeficiente dissipativo associado com ξ_2 é pelo menos da ordem $\lambda^2 \Gamma(\mathbf{q}_j) = O(\lambda^4)$ (isto está demonstrado em detalhes no Apêndice C em [13]). Portanto, num modelo fracamente interagente, a contribuição dominante para a dissipação na equação de movimento para φ_c aparece somente do termo dissipativo associado com o campo de ruído multiplicativo ξ_1 .

Até dois *loops* e $O(\lambda^2)$, considerando momento externo nulo e dentro da aproximação quase adiabática obtemos, a partir de (4.24), a seguinte equação de movimento para φ_c

$$[\square + m_T^2] \varphi_c(\mathbf{x}, t) + \frac{\lambda_T}{3!} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) + \eta_1 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) = \varphi_c(\mathbf{x}, t) \xi_1(\mathbf{x}, t) \quad (4.34)$$

onde η_1 é dado por (4.33), m_T e λ_T são a massa e a constante de acoplamento renormalizadas à temperatura finita, respectivamente, obtidas a partir da ação efetiva renormalizada, Eq. (4.21). A renormalização de S_{eff} pode ser definida pela usual introdução de

contratermos na densidade Lagrangiana inicial, Eq. (3.1). Escrevendo $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, onde $\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4$, com $\mathcal{Z}$, δm^2 e $\delta\lambda$ sendo os contratermos de função de onda, massa e vértice, respectivamente. $\delta\lambda$ cancela a divergência logaritma da correção de vértice a um *loop*, enquanto $\mathcal{Z}$ e δm^2 renormalizam a contribuição da auto-energia, Fig. (4.1). No limite de altas temperaturas, m_T é dado por Eq. (4.12) e λ_T é dado por

$$\lambda_T \simeq \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} \left\{ \frac{T}{8\pi m} + \frac{1}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{m}{4\pi T}\right) + \gamma \right] + O\left(\frac{m}{T}\right) \right\} + O(\lambda^3) \quad (4.35)$$

A equação (4.34) pode também ser escrita em termos do potencial efetivo à temperatura finita $V_{eff}(\varphi_c, T)$

$$\square\varphi_c + V'_{eff}(\varphi_c, T) + \frac{96}{\lambda^2\pi T} \ln\left(\frac{T}{m_T}\right) [V^{(3)}(\varphi_c)]^2 \dot{\varphi}_c = \varphi_c \xi_1 \quad (4.36)$$

onde

$$V^{(3)}(\varphi_c) = \left. \frac{d^3 V[\phi]}{d\phi^3} \right|_{\varphi_c} \quad (4.37)$$

Notamos que esta equação, a menos da importante fonte de ruído multiplicativo no lado direito, é análoga a obtida por Hosoya e Sakagami, usando métodos diferentes para a evolução da média térmica do campo escalar φ_c [81]. Usando (4.17) e (4.10) obtemos para a função de correlação de dois pontos (4.19) a expressão (para momento externo nulo)

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle &= \frac{\lambda^2}{2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega^2(\mathbf{q})} \{ 2n(\omega) [1 + n(\omega)] \\ &+ [1 + 2n(\omega) + 2n^2(\omega)] \cos[2\omega|t - t'|] \\ &+ 2\beta\Gamma(\mathbf{q}) n(\omega) [1 + n(\omega)] [1 + 2n(\omega)] \sin[2\omega|t - t'|] \} \\ &\times e^{-2\Gamma(\mathbf{q})|t-t'|} + O\left(\frac{\lambda^2\Gamma^2}{T^2}\right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

A equação acima é demonstrada em detalhes no Apêndice K, e esta expressão mostra que o ruído é colorido (dependente do tempo), embora seja Gaussiano. Até a ordem λ^2 e para $\Gamma/\omega \ll 1$, $\Gamma/T \ll 1$, obtemos a relação de flutuação dissipação

$$\eta_1 = \frac{1}{T} \int d^4 x' \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle \theta(t - t') \quad (4.39)$$

Podemos também obter o limite Markoviano de (4.38), que é o limite no qual o ruído é não correlacionado no tempo. Notamos que para $T \rightarrow \infty$, $\Gamma \rightarrow \infty$, o integrando torna-se acentuado a $|t - t'| \sim 0$. Neste limite, podemos aproximar (4.38) por

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega) [1 + n(\omega)]}{2\omega^2(\mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{q})} \\ &= 2T\eta_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde η_1 é dada por (4.33). A equação (4.40) é a conhecida expressão do teorema de flutuação dissipação para um ruído Gaussiano branco.

4.2 Fase quebrada

Ao analisarmos a teoria escalar $\lambda\phi^4$ na fase simétrica, mostramos que a equação de GLL é derivada a partir da ação efetiva da teoria à temperatura finita. Aplicamos o mesmo procedimento utilizado no Cap. 3 para obter as contribuições para a ação efetiva à temperatura finita na fase quebrada no formalismo de Schwinger.

A densidade de Lagrangeana da teoria de campos escalar é dada pela Eq. (2.21), e como estamos trabalhando na fase com quebra espontânea de simetria $m^2 < 0$. Consideraremos a dinâmica de uma configuração de campo satisfazendo $\phi < \phi_c < \phi + \nu$, onde $\nu = \pm\sqrt{(-6m^2)/\lambda}$ é o valor esperado no vácuo na fase quebrada (nível de árvore), e supomos que teoria de perturbação seja válida para amplitudes neste limite. Para configurações ϕ ao redor do mínimo consideramos o deslocamento

$$\phi \rightarrow \phi + \nu \quad (4.41)$$

substituindo a Eq. (4.41) na Eq. (3.1) obtemos

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \nu \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \quad (4.42)$$

onde $\mu^2 = 2|m^2|$ é um parâmetro positivo.

As contribuições para a ação efetiva à temperatura finita são derivadas até $O(\lambda^2)$ em teoria de perturbação. Por simplicidade, reescrevemos a densidade de Lagrangeana como sendo

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \lambda V(\phi) \quad (4.43)$$

onde a interação fica contida em $V(\phi)$ que é dado por

$$V(\phi) = \frac{\phi^4}{4!} + \nu \frac{\phi^3}{3!} \quad (4.44)$$

Para derivar as contribuições da ação efetiva seguimos da mesma maneira que foi feita para a fase simétrica, e para a leitura desta tese não ficar muito pesada, só mostraremos os resultados. Um detalhe importante a ser mencionado é que o que mudará na fase quebrada é a forma de $S[\phi + \varphi]$ e que a expansão em Taylor deste funcional será feita em torno de $\phi = \varphi$.

Obtemos para a ação efetiva no formalismo de Schwinger a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \exp \left(i \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^{m-1} \bar{\Gamma}^{(m)}[\varphi] \right) &= \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right. \right. \\ &\quad + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} \hbar^{\frac{n}{2}-1} \int_c d^4 x_1 \dots d^4 x_n S_n[\varphi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \\ &\quad \left. \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^{-\frac{1}{2}+m} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) \bar{\Gamma}_1^{(m)}[\varphi] \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.2.1 Contribuições de um *loop*

Expandindo ambos os lados da Eq. (4.45), considerando apenas termos independentes de $\hbar$, e calculando $S_2[\varphi]$, obtemos as contribuições a um loops para a ação efetiva na fase

com quebra espontânea de simetria

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}[\varphi] = & S_c[\varphi] - \frac{\lambda}{2} \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{k}, t-t) \{V''[\varphi_+(x)] - V''[\varphi_-(x)]\} \\
& + i \frac{\lambda^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
& \times \left[V''[\varphi_+(x)] V''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t-t') \right. \\
& - V''[\varphi_+(x)] V''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t-t') \\
& - V''[\varphi_-(x)] V''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t-t') \\
& \left. + V''[\varphi_-(x)] V''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t-t') \right] \quad (4.46)
\end{aligned}$$

onde V'' é a segunda derivada do potencial com relação a φ . E não mostraremos explicitamente as contribuições de cada diagrama para a leitura não ficar muito pesada, pois os kernels são os mesmos da fase simétrica (mudando a massa nos propagadores), o que muda na fase quebrada são as pernas externas dos diagramas e o número dos mesmos. Estas contribuições em termos de diagramas de Feynman são dadas por

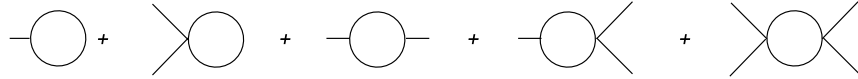


Figura 4.2: Contribuições a um loop para a ação efetiva à temperatura finita na fase quebrada até $O(\lambda^2)$.

4.2.2 Contribuições de dois *loops*

As contribuições de dois loops da ação efetiva podem ser obtidas expandindo ambos os lados da Eq. (4.45) e considerando os termos lineares em $\hbar$

$$\begin{aligned}
\exp \left(i\bar{\Gamma}^{(1)}[\varphi] + i\hbar\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi] \right) &= \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 S_2[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \right. \\
&+ \frac{i}{3!} \hbar^{\frac{1}{2}} \int_c d^4 x_1 \dots d^4 x_3 S_3[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \\
&+ \frac{i}{4!} \hbar \int_c d^4 x_1 \dots d^4 x_4 S_4[\varphi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \\
&\left. - i\hbar^{\frac{1}{2}} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) \bar{\Gamma}_1^{(1)}[\varphi] \right\} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Negligenciando os termos independentes do campo, e usando a expansão perturbativa para os propagadores, obtemos as contribuições da ação efetiva a dois loops $\mathcal{O}(\lambda^2)$ no espaço dos momentos

$$\bar{\Gamma}^{(2)}[\varphi] = \bar{\Gamma}_{\text{snow-man}}^{(2)}[\varphi] + \bar{\Gamma}_{\text{setting-sun}}^{(2)}[\varphi] \quad (4.48)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\text{snow-man}}^{(2)}[\varphi_\alpha] &= \frac{i\lambda^2}{4} \int d^4 x dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \\
&\times \left[V_\alpha''[\varphi_+(x)] [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 - V_\alpha''[\varphi_-(x)] [\mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \right. \\
&\left. - V_\alpha''[\varphi_+(x)] [\mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}, t - t')]^2 + V_\alpha''[\varphi_-(x)] [\mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \right] \quad (4.49)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \bar{\Gamma}_{\text{setting-sun}}^{(2)}[\varphi_\alpha] \\
&= \frac{i\lambda^2}{12} \int d^4x d^4x' \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q_3}{(2\pi)^3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \\
&\times \left[V_\alpha'''[\varphi_+(x)] V_\alpha'''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_3, t-t') \right. \\
&- V_\alpha'''[\varphi_+(x)] V_\alpha'''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{+-}(\mathbf{q}_3, t-t') \\
&- V_\alpha'''[\varphi_-(x)] V_\alpha'''[\varphi_+(x')] \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{-+}(\mathbf{q}_3, t-t') \\
&\left. + V_\alpha'''[\varphi_-(x)] V_\alpha'''[\varphi_-(x')] \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_1, t-t') \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_2, t-t') \mathcal{G}_\beta^{--}(\mathbf{q}_3, t-t') \right] \quad (4.50)
\end{aligned}$$

As contribuições até dois *loops* e $O(\lambda^2)$ da ação efetiva à temperatura finita, em termos de diagramas de Feynman são dadas na Fig. 4.3

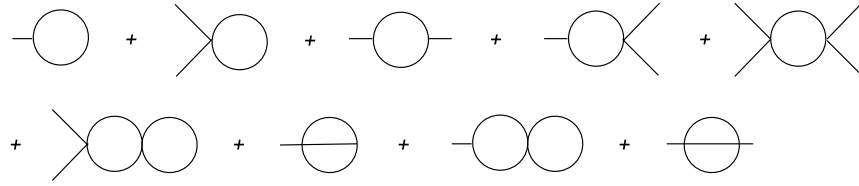


Figura 4.3: Contribuições da ação efetiva à temperatura finita na fase quebrada até dois *loops* e $O(\lambda^2)$.

Novamente não mostraremos detalhes do procedimento de renormalização, mas para a fase com quebra de simetria lembramos que a massa nua é dada por

$$m_0^2 = -m^2 + \frac{\lambda}{2}\nu^2 \quad (4.51)$$

E que a massa térmica m_T até $O(\lambda)$ é dada por

$$m_T^2 \simeq m_0^2 + \frac{\lambda}{24}T^2 + \dots = -m^2 + \frac{\lambda}{4!}T^2 + \frac{\lambda}{2}\nu^2 + \dots \quad (4.52)$$

para $T \gg m_T$. Portanto, correções térmicas podem restaurar a simetria: o potencial pode mudar de um poço duplo para um poço simples para temperaturas maiores que a temperatura crítica T_c que é dada por

$$T_c^2 = \frac{1}{(\lambda/4!)}m^2 \quad (4.53)$$

Escrevemos ação efetiva em termos dos campos φ_c e φ_Δ e calculamos a equação de movimento até $O(\lambda^2)$ usando as mesmas aproximações usadas na derivação da equação de GLL na fase simétrica. Após efetuarmos os cálculos encontramos uma maneira muito interessante de mostrar os resultados, pois estes podem ser escritos em termos de um campo $\Phi = \phi + \nu$.

Implementando as mesmas aproximações e considerando as não localidades espaço-temporais usadas para a fase simétrica, obtemos a seguinte equação de GLL para o campo Φ

$$[\square + m_T^2] \Phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\lambda_T}{3!} \Phi^3(\mathbf{x}, t) + \eta \Phi^2(\mathbf{x}, t) \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t) \xi_1(\mathbf{x}, t) \quad (4.54)$$

onde o coeficiente dissipativo η tem a mesma forma do obtido na fase simétrica, mudando obviamente a massa. Isto é fácil de mostrar devido ao coeficiente dissipativo estar ligado à parte imaginária da auto-energia. Na fase quebrada temos um gráfico adicional na auto-energia



Figura 4.4: Contribuição adicional a auto-energia na fase quebrada

Na Ref. [87] foi mostrado que para a teoria de campos escalares $\lambda\phi^4$ com o campos tendo apenas uma componente (nosso caso), a parte imaginária que apareceria devido ao diagrama da Fig. 4.4 é nula. Ou seja, as partes imaginárias tanto da fase simétrica quanto da fase quebrada são provenientes do diagrama “*setting-sun*”.

No Cap. 7 vamos discutir com algum detalhe a abordagem numérica e nossos resultados das simulações numéricas das equações de GLL em ambas as fases, simétrica e quebrada. Pois um dos objetivos desta tese foi estudar estudar o papel da flutuação e da dissipação no processo de formação do condensado (parâmetro de ordem, que neste caso é o valor esperado do campo escalar).

No próximo capítulo descreveremos em detalhes a abordagem não perturbativa que adotaremos na derivação da equação de GLL e, para introduzir efeitos não perturbativos usaremos o método da expansão δ linear otimizada ou também conhecida como teoria de perturbação otimizada.

Capítulo 5

Equação de GLL em Teoria de Perturbação Otimizada

O objetivo deste capítulo é empregar um método não perturbativo para derivar a equação de GLL efetiva para a teoria $\lambda\phi^4$. Este e o próximo capítulo serão dedicados a esta abordagem não perturbativa. Em teoria de campos dispomos de muito poucos métodos que sejam sistemáticos para calcular quantidades não perturbativas. Um método não perturbativo bem desenvolvido é o método de teoria de campos na rede, no qual formulamos teoria de campos numa rede discreta no espaço euclidiano. Porém, devido a não aplicabilidade deste método para o caso de problemas tipicamente Minkoskianos, como a dinâmica de transições de fase, torna-se necessário desenvolver e aperfeiçoar outros métodos não perturbativos.

Um problema não perturbativo, que recentemente foi definitivamente resolvido, é o deslocamento da temperatura crítica T_c devido a interações para a condensação de Bose-Einstein (BEC). Se o potencial entre dois bósons é de curto alcance, o deslocamento em ordem dominante é linear no comprimento de espalhamento a em onda S : $\Delta T_c/T_c = cn^{1/3}a$, onde n é a densidade dos bósons e c é uma constante numérica. Baym e coautores [88] mostraram que o coeficiente c pode ser determinado por um cálculo não perturbativo no ponto crítico de uma teoria de campos estatística efetiva tridimensional com simetria $\mathcal{O}(2)$. Cálculos de rede com Monte Carlo de Kashurnikov, Prokof'ev, e Svistunov e por

Arnold e Moore [89] deram o resultado $c = 1.32 \pm 0.02$. A correção de segunda ordem para $\Delta T_c/T_c$ proporcional a $(an^{1/3})^2$ foi calculada em [90]. A solução definitiva desse problema é muito útil como um teste para outros métodos não perturbativos.

Outro método não perturbativo que tem sido aplicado a BEC é a *expansão δ linear* [35], também conhecida como *teoria de perturbação otimizada* (TPO) [45] ou *teoria de perturbação variacional* [91]. Este método, cuja formulação geral foi dada pela primeira vez por Yukalov [92] tem sido aplicado em muitos problemas em mecânica quântica e em teoria de campos [93]. Neste método, um parâmetro arbitrário η é introduzido na teoria e os cálculos são feitos usando teoria de perturbação em um parâmetro de expansão formal δ , o qual é tomado igual a 1 ao final dos cálculos. A convergência do método tem sido testada e aperfeiçoada [94]. Este método foi aplicado para o cálculo de ΔT_c pela primeira vez por Souza Cruz, Pinto, e Ramos [95]. Até segunda, terceira e quarta ordens em δ , eles obtiveram $c = 3.06, 2.45, \text{ e } 1.48$, respectivamente [95], o que parece estar convergindo para o resultado do cálculo na rede.

A TPO tem sido muito utilizada e com muito sucesso em diferentes problemas em teoria de partículas, mecânica quântica, física estatística, matéria nuclear e teoria de campos na rede. Uma vantagem do método é que a seleção e o cálculo (incluindo renormalização) dos diagramas de Feynman são feitos exatamente como em teoria de perturbação, mas usando um propagador modificado que depende de um parâmetro de massa arbitrário. Resultados não perturbativos são obtidos fixando este parâmetro. Um resultado muito interessante com este método foi obtido no domínio de temperatura finita em [37], onde o valor da temperatura crítica para o modelo de Gross-Neveu em 1+1 dimensões converge ordem a ordem, em direção ao resultado exato determinado pelo Teorema de Landau.

5.1 Teoria de perturbação otimizada em teoria de campos à temperatura finita

A aplicação padrão da TPO numa teoria descrita pela densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ começa com uma interpolação definida por

$$\mathcal{L}^\delta = \mathcal{L}_0(\eta) + \delta [\mathcal{L} - \mathcal{L}_0(\eta)] \quad (5.1)$$

onde $\mathcal{L}_0(\eta)$ é a densidade Lagrangiana de uma teoria solúvel que contém um parâmetro de massa arbitrário (η) . A densidade Lagrangeana $\mathcal{L}^\delta$ interpola entre a solúvel $\mathcal{L}_0(\eta)$ (quando $\delta = 0$) e a original $\mathcal{L}$ (quando $\delta = 1$). Nesta tese estamos trabalhando com o modelo $\lambda\phi^4$ que é descrito por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \mathcal{L}_{\text{ct}} \quad (5.2)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} = A\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{B}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}C\phi^4 \quad (5.3)$$

representa os contratermos necessários para deixar o modelo finito. Escolhendo

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}\eta^2\phi^2 \quad (5.4)$$

e seguindo a prescrição geral podemos escrever

$$\mathcal{L}^\delta = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4 - \frac{1}{2}(1-\delta)\eta^2\phi^2 + \mathcal{L}_{\text{ct}}^\delta \quad (5.5)$$

ou

$$\mathcal{L}^\delta = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\Omega^2\phi^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi^4 + \delta\frac{1}{2}\eta^2\phi^2 + \mathcal{L}_{\text{ct}}^\delta \quad (5.6)$$

onde $\Omega^2 = m^2 + \eta^2$ e

$$\mathcal{L}_{\text{ct}}^\delta = A^\delta\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\Omega^2}{2}B^\delta\phi^2 - \frac{\delta\lambda}{4!}C^\delta\phi^4 + \frac{1}{2}\eta^2B^\delta\phi^2 \quad (5.7)$$

Notamos que, como a interpolação na expansão δ introduz apenas termos quadráticos novos, ela não altera a renormalizabilidade da teoria original. Em outras palavras, os

5.1. Teoria de perturbação otimizada em teoria de campos à temperatura finita 85

contratermos contidos em $\mathcal{L}_{\text{ct}}^\delta$, assim como os da Lagrangeana de contratermos original $\mathcal{L}_{\text{ct}}$, possuem a mesma estrutura polinomial. Aqui não vamos discutir detalhes do procedimento de renormalização, vamos apresentar apenas as contribuições finitas (renormalizadas). A renormalização de teorias escalares foi feita em detalhes nas Refs. [97, 98, 99].

Uma característica muito interessante do método é a sua simplicidade. Isso torna-se claro quando olhamos para as regras de Feynman geradas por $\mathcal{L}^\delta$. Primeiro, o vértice original ϕ^4 que tem sua regra de Feynman original $-i\lambda$, muda para $-i\delta\lambda$. Esta pequena mudança é apenas um lembrete vamos expandir em ordens do parâmetro artificial δ . A mudança mais importante é devido a adição de uma parte quadrática arbitrária, com isso temos um novo vértice na densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\phi) = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \text{X} \quad (5.8)$$

e o propagador original

$$\mathcal{G}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.9)$$

torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k) &= \frac{i}{k^2 - \Omega^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[1 - \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (-i\eta^2) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

indicando que o termo proporcional a $\eta^2\phi^2$ contido em $\mathcal{L}_0$ está entrando na teoria de uma maneira não perturbativa. Por outro lado, a parte proporcional a $\delta\eta^2\phi^2$ é tratada como um vértice quadrático (de peso $i\delta\eta^2$) perturbativamente. Já que apenas um cálculo de infinitas ordens em δ seria capaz de compensar o número infinito de inserções $-i\eta^2$ contidas na Eq. (5.10), nós sempre terminamos com uma dependência em η em qualquer quantidade calculada em uma ordem finita em δ . Então, ao fim do cálculo tomamos $\delta = 1$ (valor que a teoria original é recuperada) e fixamos η com o procedimento variacional conhecido como princípio de mínima sensibilidade (PMS) [45]

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (5.11)$$

865.1. Teoria de perturbação otimizada em teoria de campos à temperatura finita

onde P representa a quantidade física calculada perturbativamente em potências de δ .

Este procedimento de otimização, junto com o problema da convergência, tem sido discutido em detalhes para casos simples em dimensões baixas nas Refs. [39] e [40] onde possíveis implicações para teorias mais realísticas têm sido investigadas. Ambas referências fornecem provas da convergência. Usando o oscilador anarmônico, Bellet e coautores [100] estudaram a convergência de uma versão alternativa da expansão δ linear. O método foi posteriormente estendido ao modelo de Gross-Neveu onde o procedimento de otimização foi estudado juntamente com o grupo de renormalização [101]. Apesar destes progressos, a convergência da TPO em teoria quântica de campos ainda é um assunto que merece uma futura investigação mais detalhada, caso a caso.

Ainda sobre o procedimento de otimização, é muito importante mencionarmos que existem outras maneiras de determinarmos os valores do parâmetro otimizado η , como por exemplo, o critério de aparente convergência rápida - FAC (*fastest apparent convergence*) [49, 97, 103]. Este critério FAC requer que a partir do k -ésimo coeficiente da expansão perturbativa

$$\Phi^{(k)} = \sum_{i=0}^k c_i \delta^i \quad (5.12)$$

que

$$[\Phi^{(k)} - \Phi^{(k-1)}] \Big|_{\delta=1} = 0 \quad (5.13)$$

o que é equivalente a tomar o k -ésimo coeficiente na Eq. (5.12) igual a zero. Para leitores interessados em mais detalhes sobre o procedimento de otimização, estes são encontrados nas Refs. [39, 40, 42, 94, 95, 97, 98, 100, 104] [48, 49, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111], onde o método da TPO foi aplicado com muito sucesso em diferentes problemas.

Como a renormalização está garantida é importante ressaltarmos que, em geral, como resultado do procedimento de otimização o parâmetro arbitrário η torna-se uma função dos parâmetros originais do modelo, como escalas de regularização e parâmetros externos como temperatura e densidade. Portanto, para obtermos resultados físicos aceitáveis,

o procedimento de otimização deve ser feito depois de todas as divergências terem sido eliminadas.

Na próxima seção mostraremos em detalhes a derivação da equação de GLL no contexto não perturbativo, onde utilizaremos a TPO para introduzir efeitos não perturbativos.

5.2 Equação de GLL Não Perturbativa - Fase simétrica

Neste capítulo mostraremos a derivação de uma equação de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL) não perturbativa utilizando a TPO. A derivação é muito semelhante a feita no contexto perturbativo do capítulo 4 e será mostrada em poucos detalhes para evitar repetições desnecessárias e a leitura da tese não ficar muito pesada.

Aplicando a TPO até $O(\delta^2)$, obtemos a ação efetiva à temperatura finita no Schwinger. Usando teoria de perturbação em δ , escrevemos estas contribuições da ação efetiva em termos de diagramas de Feynman

$$\Gamma[\varphi_\alpha] = S(\varphi) + \text{diagramas} \quad (5.14)$$

Note que nesta aborgagem não perturbativa, temos um diagrama a mais devido ao novo vértice

$$\frac{\delta\eta^2\phi^2}{2} \quad (5.15)$$

Com exceção do diagrama novo, as contribuições são as mesmas na forma como as perturbativas com algumas modificações, importantes e cruciais

- λ muda para $\delta\lambda$;
- o parâmetro de massa nos propagadores muda de m^2 para Ω^2 , onde $\Omega^2 = m^2 + \eta^2$;

A contribuição nova para a ação efetiva devido a TPO ($t - t' \equiv \tau$) é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= i \frac{\delta^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
&\times \left\{ -\frac{\lambda}{2} \eta^2 \left[\varphi_+^2(x') + \varphi_+^2(x) \right] G^{++}(\mathbf{q}, \tau) G^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right. \\
&+ \frac{\lambda}{2} \eta^2 \left[\varphi_+^2(x) + \varphi_-^2(x') \right] G^{+-}(\mathbf{q}, \tau) G^{+-}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \\
&+ \frac{\lambda}{2} \eta^2 \left[\varphi_-^2(x) + \varphi_+^2(x') \right] G^{-+}(\mathbf{q}, \tau) G^{-+}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \\
&\left. - \frac{\lambda}{2} \eta^2 \left[\varphi_-^2(x') + \varphi_-^2(x) \right] G^{--}(\mathbf{q}, \tau) G^{--}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \tau) \right\} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Um aspecto muito importante a ser ressaltado nesta derivação da equação de GLL não perturbativa é que no caso perturbativo negligenciamos os diagramas de vácuo (independentes do campo), pois estes não contribuem para a equação de movimento. No entanto, estes diagramas contém uma dependência no parâmetro η que, devido aos critérios FAC/PMS passa a depender do campo, e portanto, não podem ser negligenciados na abordagem não perturbativa, pois contribuirão para o valor de tal parâmetro.

Seguindo exatamente da mesma maneira como no caso perturbativo, obtemos a equação de movimento efetiva para φ_c (no limite de $\delta = 1$)

$$\begin{aligned}
&\left[\square + m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega)}{2\omega(\mathbf{k})} \left(1 + \lambda \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \right) \right] \\
&\times \varphi_c(x) - \lambda \eta^2 \varphi_c(x) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')^2] \\
&+ \frac{\lambda}{3!} \varphi_c^3(x) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \\
&+ \frac{\lambda^2}{3} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 = \varphi_c(x) \xi_1(x) + \xi_2(x) \quad (5.17)
\end{aligned}$$

onde as expressões para $\text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2$ e $\text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3$ são as mesmas expressões que as usadas no caso perturbativo, mas com a modificação crucial de $m^2 \rightarrow \Omega^2$.

Novamente, para a obtenção do termo dissipativo relacionado com o campo de flutuação ξ_1 é preciso adicionar inserções de auto-energias para obter uma largura de decaimento. Estas expressões serão calculadas usando TPO.

Escrevemos os propagadores vestidos como sendo

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2 - \Sigma(q) + i\varepsilon} \quad (5.18)$$

onde $\Sigma(q)$ é a contribuição de auto-energia

Figura 5.1: Auto-energia até $\mathcal{O}(\delta^2)$

Considerando explicitamente apenas as contribuições de $\Sigma(q)$ a partir dos diagramas até $\mathcal{O}(\delta^2)$, a massa térmica fica sendo dada por ($\delta = 1$)

$$\begin{aligned} \Omega_T^2 = m^2 + \text{Re}\Sigma(\Omega_T) &\stackrel{T \gg \Omega_T}{\simeq} m^2 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{T^2}{12} - \frac{\Omega_T T}{4\pi} \right) - \frac{\lambda^2 T^3}{384\pi\Omega_T} + \frac{\lambda^2 T^2}{192\pi^2} \ln \left(\frac{\Omega_T^2}{T^2} \right) \\ &+ \frac{\lambda T \eta^2}{16\pi\Omega} - \frac{\lambda \eta^2}{32\pi^2} \log \left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde novamente escrevemos explicitamente apenas as contribuições térmicas dominantes para cada diagrama da Fig. (5.1) e negligenciamos contribuições subdominantes.

Usando o propagador vestido na expressão para o termo dissipativo obtemos até or-

dem δ^2 , obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 \\
&= \frac{\delta^2 \lambda^2}{8} \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \beta \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{\omega^2 \Gamma} \\
&- \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega^2} \left[\frac{(1+2n)}{2\omega(\mathbf{q})} + \beta n(1+n) \right] \\
&+ O\left(\frac{\delta^2 \lambda^2 \Gamma}{\omega}\right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

O primeiro termo no lado direito desta equação fornece o termo dissipativo, $\eta_1 \varphi_c^2 \dot{\varphi}_c$, com o coeficiente dissipativo η_1 dado por

$$\eta_1 = \frac{\delta^2 \lambda^2}{8} \beta \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega^2(\mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{q})} + O\left(\delta^2 \lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \tag{5.21}$$

O segundo termo no lado direito de (5.20) claramente fornece apenas a correção de vértice a um *loop* à temperatura finita. Para obter (5.20) fizemos uma expansão até primeira ordem em potências de Γ/ω , consistente com a aproximação de que os modos do campo variem pouco. (omitindo termos de $O(\delta^4 \lambda^4)$, já que $\Gamma \propto O(\delta^2 \lambda^2)$).

A expressão para o coeficiente dissipativo pode ser simplificada se considerarmos o limite de altas temperaturas $T \gg \Omega_T$. O limite de altas temperaturas de $\Gamma(\mathbf{q})$ é

$$\Gamma \simeq \frac{\lambda^2 T^2}{1536 \pi \omega(\mathbf{q})} \tag{5.22}$$

η_1 , no limite de altas temperaturas, é dado por

$$\eta_1 \stackrel{T \gg \Omega_T}{\simeq} \frac{96}{\pi T} \ln\left(\frac{2T}{\Omega_T}\right) \tag{5.23}$$

Este resultado, como no caso perturbativo, mostra que o coeficiente dissipativo associado com o campo com ruído multiplicativo ξ_1 é, neste limite, fracamente dependente da constante de acoplamento λ (logaritmicamente). No entanto, é importante notar que Ω_T possui dependência não perturbativa devido a TPO.

Podemos prosseguir de maneira análoga e calcularmos o coeficiente dissipativo associado com o segundo campo (ruído) de flutuação ξ_2 mas, novamente, o coeficiente dissipativo associado com ξ_2 é pelo menos da ordem $\delta^2 \lambda^2 \Gamma(\mathbf{q}_j) = O(\delta^4 \lambda^4)$, e pode ser desprezado.

Até dois *loops* e $O(\delta^2 \lambda^2)$, considerando momento externo nulo e dentro da aproximação quase adiabática obtemos, a partir de (5.17), a seguinte equação de movimento para φ_c

$$[\square + \Omega_T^2] \varphi_c(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta \lambda_T}{3!} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) + \eta_1 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) = \varphi_c(\mathbf{x}, t) \xi_1(\mathbf{x}, t) \quad (5.24)$$

onde η_1 é dado por (5.23), Ω_T e λ_T são a massa e a constante de acoplamento renormalizadas à temperatura finita, respectivamente, obtidas a partir da ação efetiva renormalizada. No limite de altas temperaturas, Ω_T é dado por Eq. (5.19) e λ_T é dado por

$$\lambda_T \simeq \lambda - \frac{3\delta^2 \lambda^2}{2} \left\{ \frac{T}{8\pi\Omega_T} + \frac{1}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega_T}{4\pi T} \right) + \gamma \right] + O \left(\frac{\Omega_T}{T} \right) \right\} + O(\lambda^3) \quad (5.25)$$

Analogamente ao caso perturbativo, a função de correlação de dois pontos para ξ_1 é dada por

$$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle = \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \quad (5.26)$$

onde $\mathcal{G}_\beta^{++}$ é o propagador obtido em TPO.

Obtemos para a função de correlação de dois pontos (5.26) a expressão (para momento externo nulo)

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle &= \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega^2(\mathbf{q})} \{ 2n(\omega) [1 + n(\omega)] \\ &+ [1 + 2n(\omega) + 2n^2(\omega)] \cos[2\omega|t - t'|] \\ &+ 2\beta\Gamma(\mathbf{q}) n(\omega) [1 + n(\omega)] [1 + 2n(\omega)] \sin[2\omega|t - t'|] \} \\ &\times e^{-2\Gamma(\mathbf{q})|t-t'|} + O \left(\frac{\delta^2 \lambda^2 \Gamma^2}{T^2} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Como no caso perturbativo o ruído é colorido (dependente do tempo), embora seja *Gaussiano*. Até a ordem $\delta^2 \lambda^2$ e para $\Gamma/\omega \ll 1$, $\Gamma/T \ll 1$, obtemos a relação de flutuação dissipação

$$\eta_1 = \frac{1}{T} \int d^4 x' \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle \theta(t - t') \quad (5.28)$$

Podemos também obter o limite Markoviano de (5.27), que é o limite no qual o ruído é não correlacionado (branco). Notamos que para $T \rightarrow \infty$, $\Gamma \rightarrow \infty$, o integrando torna-se acentuado a $|t - t'| \sim 0$. Neste limite, podemos aproximar (5.27) por

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega) [1 + n(\omega)]}{2\omega^2(\mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{q})} \\ &= 2T\eta_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde η_1 é dado por (5.23).

Um ponto muito importante agora é escolher a maneira para determinar o valor do parâmetro de otimização η a ser usado na equação de GLL não perturbativa. Para isso, temos que escolher alguma quantidade física para fazermos a otimização e determinarmos o valor de η . Pretendemos implementar a otimização usando a ação efetiva $\Gamma[\varphi]$ devido a este funcional ser o gerador de todas as funções de Green irreduzíveis a uma partícula. Como $\Gamma[\varphi]$ depende do campo e este depende do espaço e do tempo, este processo de otimização é muito complicado de ser implementado numericamente.

Como uma primeira análise escolhemos otimizar o potencial efetivo térmico, ou energia livre [112]. A justificativa para esta escolha é que como nossa equação de GLL não perturbativa foi derivada dentro de um conjunto de aproximações válidas somente próximas ao equilíbrio e, portanto, parece razoável empregar um valor de η determinado a partir de uma quantidade de equilíbrio, como a energia livre. A otimização e os resultados numéricos serão explicados em detalhe no Cap. 7.

No próximo capítulo mostraremos nossos resultados obtidos para a energia livre calculada dentro do contexto da teoria de perturbação otimizada.

Capítulo 6

Energia Livre em Teoria de Perturbação Otimizada

O objetivo deste capítulo é obter o coeficiente dissipativo η_1 a partir da otimização da energia livre. Primeiramente, mostraremos em detalhes nossos resultados sobre o cálculo da energia livre ou potencial efetivo térmico para a teoria $\lambda\phi^4$ dentro do contexto da TPO.

Usualmente é utilizado teoria de perturbação como método de aproximação para calcular a energia livre. Portanto, como mencionado anteriormente, é conhecido que a teoria de perturbação quebra no limite de altas temperaturas, pois as constantes de acoplamento tornam-se acompanhadas de potências da temperatura. Assim invalidando a expansão perturbativa a altas temperaturas, regime este que efetuamos nossos cálculos.

Introduziremos efeitos não perturbativos através da TPO e, a seguir, mostraremos como calcular a energia livre nos formalismos de Schwinger e no de tempo imaginário.

6.0.1 Energia Livre no Formalismo de Tempo real

A energia livre, ou potencial efetivo à temperatura finita, é definida como [113]

$$F[\Phi] = \Omega[J] - V\Phi J \tag{6.1}$$

onde $\Omega [J]$ é o potencial termodinâmico, V é o volume, J é uma fonte constante no espaço e tempo e Φ é a media do operador de campo definida por

$$\Phi (t) = \frac{1}{V} \int_V d^3x \Phi (x, t) \quad (6.2)$$

A energia livre satisfaz

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \Phi} \right|_{\mu, T, V} = -VJ \quad (6.3)$$

onde μ, T são o potencial químico e temperatura respectivamente. A partir de (6.3), temos J em função de Φ . A seguir estaremos interessados na relação funcional $F = F [\Phi]$ com T, μ e V fixos. Consequentemente, se conhecemos $J = J [\Phi]$ podemos encontrar a densidade de energia livre integrando (6.3)

$$f [\Phi] = \frac{1}{V} F [\Phi] = - \int J [\Phi] d\Phi \quad (6.4)$$

note que nesta relação definimos $f [\Phi]$ a menos de uma constante independente de Φ , que são os diagramas de vácuo.

Para obtermos $J [\Phi]$, vamos partir da expressão para a ação efetiva $\Gamma [\phi_+, \phi_-]$ com campos constantes no espaço e no tempo ϕ_+, ϕ_- , o que nos fornece

$$\Gamma [\phi_+, \phi_-] = -V_{eff} [\phi_+, \phi_-] \int_V d^3x \int dt \quad (6.5)$$

Lembrando que a ação efetiva é dada, por exemplo na fase simétrica, pela Eq. (3.94)

$$\Gamma [\phi_+, \phi_-] = W [j_+, j_-] - \int j_\alpha \phi_\alpha \quad (6.6)$$

e derivando $\Gamma [\phi_+, \phi_-]$ em relação a ϕ_a ($\alpha = +, -$) e, tomamos o limite

$$j_+ \rightarrow -j_- \rightarrow -J \quad (6.7)$$

com

$$\phi_+ [J] = \phi_- [J] = \phi_c \quad (6.8)$$

temos o resultado

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \Gamma [\phi_+ \phi_-]}{\delta \phi_+} \right|_{\phi_{\pm}=\phi_c} &= - \left. \frac{\delta \Gamma [\phi_+ \phi_-]}{\delta \phi_-} \right|_{\phi_{\pm}=\phi_c} \\ &= J[\phi_c] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Mas por invariância translacional, temos também que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_{eff} [\phi_+ \phi_-]}{\partial \phi_+} \right|_{\phi_{\pm}=\phi_c} &= - \left. \frac{\partial V_{eff} [\phi_+ \phi_-]}{\partial \phi_-} \right|_{\phi_{\pm}=\phi_c} \\ &= -J[\phi_c] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Comparando (6.10) com a expressão (6.4) temos

$$f[\Phi] = \int \left\{ \left. \frac{\partial V_{eff} [\phi_+ \phi_-]}{\partial \phi_+} \right|_{\phi_{\pm}=\phi_c} \right\} d\phi_c \quad (6.11)$$

a qual resulta na conexão desejada entre termodinâmica e TQC. Em termos da ação efetiva, a densidade de energia livre é, portanto, dada por

$$f[\Phi] = - \int \left\{ \left. \frac{\delta \Gamma [\phi_+ \phi_-]}{\delta \phi_+} \right|_{\phi_{\pm}=\phi_c} \right\} d\phi_c \quad (6.12)$$

Agora escrevemos as contribuições dependentes do campo para a energia livre derivadas no formalismo de Schwinger dentro do contexto da TPO até $\mathcal{O}(\delta^2)$, as quais em termos de diagramas de Feynman são dadas por

$$F[\varphi_\alpha] = S(\varphi_\alpha) + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} \quad (6.13)$$

onde $S(\varphi_\alpha)$ é a contribuição a nível de árvore e $\alpha = +, -$.

Agora mostraremos os cálculos explícitos de algumas contribuições da energia livre em tempo real para a teoria escalar na fase simétrica. Tomando campos constantes na ação efetiva $\Gamma[\varphi_c, \varphi_\Delta]$, obteremos suas contribuições e, faremos as integrais temporais para explicitar o fator de volume em cada contribuição.

Para o diagrama de *tad pole* (TP) obtemos

$$\begin{aligned} \text{diagrama 1} &= -\frac{\delta \lambda}{2} \varphi_\Delta \varphi_c \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \int d^4 x \\ &= -\frac{\delta \lambda}{2} \varphi_\Delta \varphi_c \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] V \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para o diagrama *four-point* (*FP*) obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= i \frac{\delta^2 \lambda^2}{4} \varphi_\Delta^2 \varphi_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x d^4 x' \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
&\times \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t')] \\
&- \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \left[\frac{1}{4} \varphi_c \varphi_\Delta^3 + \varphi_\Delta \varphi_c^3 \right] \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x d^4 x' \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\
&\times \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t')] \theta(t - t') \quad (6.15)
\end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= i \frac{\delta^2 \lambda^2}{4} \varphi_\Delta^2 \varphi_c^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 V \\
&- \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \left[\frac{1}{4} \varphi_c \varphi_\Delta^3 + \varphi_\Delta \varphi_c^3 \right] \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d\tau \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 V \quad (6.16)
\end{aligned}$$

usando que

$$\text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 = -\frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] \quad (6.17)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Diagram} &= \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_\Delta \varphi_c^3 \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \\
&\times \int_0^{\infty} d\tau \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] V \quad (6.18)
\end{aligned}$$

escrevemos apenas o termo proporcional a $\text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2$ devido ao outro termo não contribuir para a energia livre.

É fácil mostrar que a integral em τ acima é dada por

$$\int d\tau \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] \theta(\tau) = \frac{1}{4\omega} \quad (6.19)$$

logo obtemos

$$\text{Diagram} = \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_\Delta \varphi_c^3 \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{8\omega^3(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] V \quad (6.20)$$

Para o diagrama *tad-pole* com inserção η^2 obtemos

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \delta^2 \lambda \eta^2 \varphi_{\Delta} \varphi_c \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x d^4 x' \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &\times \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, t - t') \mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t')] \theta(t - t') \end{aligned} \quad (6.21)$$

que pode ser reescrito como

$$= -\delta^2 \lambda \eta^2 \varphi_{\Delta} \varphi_c \int d^4 x' \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int d\tau \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 \theta(\tau) \quad (6.22)$$

usando que

$$\text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 \theta(\tau) = -\frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] \theta(\tau) \quad (6.23)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= -\delta^2 \lambda \eta^2 \varphi_{\Delta} \varphi_c \int d^4 x' \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \\ &\times \int_0^{\infty} d\tau \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

fazendo a integral em τ temos

$$\text{Diagram} = -\delta^2 \lambda \eta^2 \varphi_{\Delta} \varphi_c \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{8\omega^3(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] V \quad (6.25)$$

Para o diagrama *snow man* obtemos

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_{\Delta} \varphi_c \int d^4 x dt' \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \\ &\times \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \theta(t - t') \end{aligned} \quad (6.26)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_{\Delta} \varphi_c \int d^4 x' \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \\ &\times \int d\tau \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 \theta(\tau) \end{aligned} \quad (6.27)$$

onde

$$\text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, \tau)]^2 \theta(\tau) = \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] \theta(\tau) \quad (6.28)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_\Delta \varphi_c \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \\ &\times \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \int_0^\infty d\tau \sin[\omega(\tau)] \cos[\omega(\tau)] V \end{aligned} \quad (6.29)$$

fazendo a integral em τ obtemos

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{\delta^2 \lambda^2}{2} \varphi_\Delta \varphi_c \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \\ &\times \frac{1}{8\omega^3(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] V \end{aligned} \quad (6.30)$$

Lembrando que a energia livre é dada por

$$f[\Phi] = - \int^\Phi \left\{ \frac{\delta \Gamma[\phi_+ \phi_-]}{\delta \phi_+} \bigg|_{\phi_+ = \phi_- = \nu} \right\} d\nu \quad (6.31)$$

e esta expressão para a energia livre em tempo real pode ser reescrita em termos das variáveis φ_c e φ_Δ

$$f[\Phi] = - \int^\Phi \frac{\delta \Gamma[\varphi_\Delta \varphi_c]}{\delta \varphi_\Delta} \bigg|_{\varphi_\Delta=0, \varphi_c=\hat{\phi}_c} d\hat{\phi}_c \quad (6.32)$$

Nas contribuições mostradas acima, tomamos campos constantes em $\Gamma[\varphi_\Delta \varphi_c]$ e consideramos somente os termos lineares em φ_Δ , pois ordens superiores não contribuem para

a energia livre. Usando a definição acima obtemos

$$\begin{aligned}
f[\hat{\phi}_c] = & \left\{ \frac{\Omega^2 \hat{\phi}_c^2}{2} + \frac{\delta\lambda}{4!} \hat{\phi}_c^4 - \delta \frac{\eta^2 \hat{\phi}_c^2}{2} \right. \\
& + \frac{\hat{\phi}_c^2}{2} \left[\frac{\delta\lambda}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})} [1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))] \right] \\
& + \frac{\hat{\phi}_c^2}{2} \left[\frac{\delta^2 \lambda \eta^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{4\omega^3(\mathbf{q})} \right] \\
& + \frac{\hat{\phi}_c^4}{4!} \left[-\delta^2 \frac{3\lambda^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{4\omega^3(\mathbf{q})} \right] \\
& + \frac{\hat{\phi}_c^2}{2} \left[-\delta^2 \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{k}))]}{2\omega(\mathbf{k})} \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{4\omega^3(\mathbf{q})} \right] \\
& + \left. \frac{\hat{\phi}_c^2}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} \right\} + c
\end{aligned} \tag{6.33}$$

a constante c representa os diagramas de vácuo, que serão mencionados a seguir. E para o diagrama do *setting-sun* usaremos resultados da literatura [98]. No apêndice L mostramos em detalhes o cálculos explícitos de algumas integrais de $f[\hat{\phi}_c]$ usando regularização dimensional.

Não mostraremos detalhes sobre o procedimento de renormalização, portanto consideraremos somente as contribuições finitas e negligenciaremos os termos divergentes. E um comentário interessante a ser feito é que os efeitos térmicos no limite de altas temperaturas dominam os termos quânticos, ou seja, os termos finitos dos diagramas à temperatura zero são muito pequenos comparados com os termos finitos (dominantes) dependentes de T .

As contribuições para a energia livre calculadas em tempo real no limite de altas temperaturas são dadas por

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{\delta\lambda\Omega^2}{32\pi^2} \left[\ln\left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2}\right) - \gamma \right] + \frac{\delta\lambda}{24} T^2 - \frac{\delta\lambda}{8\pi} \Omega T \tag{6.34}$$

$$\text{---}\bigcirc\bullet\text{---} = \frac{\delta^2 \lambda T \eta^2}{16\pi\Omega} - \frac{\delta^2 \lambda \eta^2}{32\pi^2} \left[\ln\left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2}\right) - \gamma \right] \tag{6.35}$$

$$\text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---} = -\delta^2 \frac{3\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{4\pi T^2}\right) + \gamma \right] + \frac{1}{8\pi} \frac{T}{\Omega} \right\} \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &\simeq -\delta^2 \lambda^2 \frac{T^3}{384\pi\Omega} + \delta^2 \lambda^2 \frac{T^2}{128\pi^2} + \delta^2 \frac{\lambda^2}{(16\pi)^2} \left\{ \frac{T^2}{3} - \frac{3T\Omega}{2\pi} \right. \\
&+ \frac{\Omega^2}{4\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2} \right) - \gamma \right] \left. \right\} \left[\ln \left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2} \right) - \gamma \right] \\
&+ \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{(32\pi^2)^2} \left[\ln^2 \left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2} \right) + (2\gamma - 1) \ln \left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2} \right) + 2.4 \right] \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 2} &\simeq \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{2(4\pi)^4} \left[\ln^2 \left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(2\gamma - \frac{17}{6} \right) \ln \left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2} \right) + \gamma^2 \right. \\
&- \frac{17\gamma}{6} + 3.5140 \left. \right] - \delta^2 \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[-\ln \left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2} \right) 2 - \gamma \right] \\
&\times \left\{ \frac{T^2}{24} - \frac{T\Omega}{8\pi} - \frac{\Omega^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega}{4\pi T} \right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] \right\} \\
&+ \delta^2 \frac{\lambda^2 T^2}{24(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{\Omega^2}{T^2} \right) + 5.0669 \right] \quad (6.38)
\end{aligned}$$

Ainda faltam os diagramas de vácuo que são independentes do campo. Como mencionado na Ref. [114], enquanto o formalismo de tempo imaginário dá um certo resultado para um cálculo que envolva estes diagramas, no formalismo de tempo real a correspondente soma de gráficos desaparece identicamente, sendo que estes diagramas de vácuo não possuem linhas externas e não é possível fixar vértices externos tipo $+$. A solução deste problema é conhecida [115, 116, 117]. Inicialmente para gráficos com energia externa nula, fixamos um vértice que pode ter sido atachado a uma linha externa sendo do tipo $+$. Posteriormente são somadas todas as possíveis configurações do tipo $+$ e tipo $-$ dos outros vértices. Esta soma coincide com o resultado de tempo imaginário.

Utilizando TPO até $\mathcal{O}(\delta^2)$ estas contribuições em termos de diagramas de Feynman são dadas por

$$\bigcirc + \bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc\bigcirc \quad (6.39)$$

Por simplicidade usamos os resultados de tempo imaginário para estas contribuições, devido aos formalismo fornecerem o mesmo resultado. A seguir, mostraremos a derivação da energia livre usando o formalismo de tempo imaginário dentro do contexto da teoria de perturbação otimizada.

6.0.2 Energia livre em tempo imaginário

Agora vamos apresentar nossos resultados para a energia livre ou potencial efetivo à temperatura finita dentro do contexto da TPO até $\mathcal{O}(\delta^2)$ [118], onde utilizamos o formalismo de tempo imaginário.

Dependendo do sinal do termo de massa *bare* $m_0^2 = +|m_0|^2$ ou $m_0^2 = -|m_0|^2$, significa que estamos trabalhando com o sistema na fase simétrica ou na fase quebrada, respectivamente.

Por simplicidade, trabalharemos com a teoria escalar em ambas as fases, simétrica e quebrada, juntas. As configurações de campo são escolhidas de maneira que elas satisfaçam $\phi < \phi_c < \phi + \varphi$, onde a $T = 0$, $\varphi = \pm\sqrt{6|m_0|^2/\lambda}$ é o valor esperado do campo na fase quebrada (a nível de árvore). Consideramos que teoria de perturbação em δ seja válida ao redor destes valores limites, de maneira que estaremos prontos para comparar os resultados provenientes tanto de teoria de perturbação como de TPO. Para configurações ϕ_c ao redor do mínimo consideramos, como usual [1], o deslocamento

$$\phi \rightarrow \phi_c + \varphi \quad (6.40)$$

Fazemos a derivação padrão do potencial efetivo à temperatura finita (energia livre), similar ao feito em [1], até $\mathcal{O}(\delta^2)$. Um campo constante é introduzido através da transformação (6.40) e a densidade Lagrangeana é reescrita como

$$\mathcal{L}[\phi_c(x), \varphi] = \mathcal{L}_0[\phi_c(x), \varphi] + \mathcal{L}_I[\phi_c(x), \varphi] \quad (6.41)$$

onde

$$\mathcal{L}_0[\phi_c(x), \varphi] = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_c)^2 - \frac{1}{2}\bar{\Omega}^2 \phi_c^2 \quad (6.42)$$

$$\mathcal{L}_I[\phi_c(x), \varphi] = -\frac{\delta\lambda}{6}\varphi\phi_c^3 - \frac{\delta\lambda}{4!}\phi_c^4 \quad (6.43)$$

e

$$\bar{\Omega}^2 = m_0^2 + \frac{\delta\lambda}{2}\varphi^2 + (1 - \delta)\eta^2 \quad (6.44)$$

Notamos que todas nossas contribuições de *loops* carregam um termo de massa como o dado pela Eq. (6.44). Estes termos são então expandidos em δ até a ordem que estamos trabalhando, assim gerando as inserções de η^2 , o que aparece como consequência do novo vértice quadrático que surge devido a TPO.

A energia livre é

$$F[\varphi] = F_0(\varphi) + F_{1\text{-loop}}(\varphi) + \frac{1}{V} i \ln \left\langle \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I[\phi_c(x), \varphi] \right\} \right\rangle \quad (6.45)$$

onde $F_0(\varphi)$ é o potencial clássico a nível de árvore e $F_{1\text{-loop}}(\varphi)$ é a contribuição a um *loop* da energia livre (V é o fator de volume),

$$F_{1\text{-loop}}(\varphi) = \frac{1}{V} i \ln \int d\phi_c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0[\phi_c(x), \varphi]} \quad (6.46)$$

maiores valores de *loops* são dados pelo último termo da Eq. (6.45) e a notação compacta $\langle \dots \rangle$ significa

$$\langle \dots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi_c (\dots) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0[\phi_c(x), \varphi]}}{\int \mathcal{D}\phi_c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0[\phi_c(x), \varphi]}} \quad (6.47)$$

Os propagadores dos campos escalares usados nos diagramas podem ser deduzidos a partir de $\mathcal{L}_0[\phi_c(x), \varphi]$, a qual é quadrática em ϕ_c e os vértices são determinados por $\mathcal{L}_I[\phi_c(x), \varphi]$.

Similarmente ao procedimento usado em [1], usamos o formalismo de tempo imaginário para calcular o potencial efetivo térmico. Assim, o bóson escalar tem um quadrimomento no espaço Euclideo $P = (\omega_n, \mathbf{p})$, com $P^2 = \omega_n^2 + \mathbf{p}^2$. A energia Euclidea $p_4 = \omega_n$ é dada pelas frequências de Matsubara para bósons, com valores discretos, $\omega_n = 2\pi n/\beta$, onde n é um número inteiro e $\beta = 1/T$. Os *loops* dos diagramas contém somas sobre as frequências de Matsubara e integrais sobre o espaço dos momentos $\mathbf{p}$. Todas as integrais no espaço dos momentos são feitas em uma dimensão arbitrária $d = 3 - 2\epsilon$ e a renormalização é feita numa subtração mínima modificada ($\overline{\text{MS}}$). A medida usada nas somas e integrais é definida como sendo

$$\oint_P = \left(\frac{e^\gamma \mu^2}{4\pi} \right)^\epsilon \beta^{-1} \sum_{p_0} \int \frac{d^{3-2\epsilon} p}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} \quad (6.48)$$

onde μ é uma escala de momento arbitrária em regularização dimensional. O fator $\left(\frac{e\gamma\mu^2}{4\pi}\right)^\epsilon$ é introduzido tal que, depois da subtração mínima dos pólos em ϵ (devido as divergências ultravioleta) μ coincida com a escala de renormalização do esquema ($\overline{\text{MS}}$).

Escrevemos as contribuições da energia livre Eq. (6.45) até três *loops* ($\mathcal{O}(\delta^2)$) em termos de diagramas de Feynman, as quais são dadas por

$$F_{1\text{-loop}}[\varphi] = \bigcirc \quad (6.49)$$

$$F_{2\text{-loops}}[\varphi] = \bigcirc\bigcirc + \bigoplus \quad (6.50)$$

$$F_{3\text{-loops}}[\varphi] = \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigoplus \quad (6.51)$$

onde

$$\bigcirc = \frac{1}{2} \oint_P \log [P^2 + \bar{\Omega}^2] \quad (6.52)$$

$$\bigcirc\bigcirc = \frac{1}{8} \delta\lambda \left(\oint_P \frac{1}{P^2 + \bar{\Omega}^2} \right)^2 \quad (6.53)$$

$$\bigoplus = -\frac{1}{6} \delta^2 \lambda^2 \oint_{QR} \frac{1}{Q^2 + \bar{\Omega}^2} \frac{1}{R^2 + \bar{\Omega}^2} \frac{1}{(P + Q + R)^2 + \bar{\Omega}^2} \quad (6.54)$$

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc = -\frac{1}{16} \delta^2 \lambda^2 \left(\oint_P \frac{1}{P^2 + \bar{\Omega}^2} \right)^2 \oint_Q \frac{1}{(Q^2 + \bar{\Omega}^2)^2} \quad (6.55)$$

$$\bigoplus = -\frac{1}{48} \delta^2 \lambda^2 \oint_{PQR} \frac{1}{P^2 + \bar{\Omega}^2} \frac{1}{Q^2 + \bar{\Omega}^2} \frac{1}{R^2 + \bar{\Omega}^2} \frac{1}{(P + Q + R)^2 + \bar{\Omega}^2} \quad (6.56)$$

Os resultados para as expressões análogas as dadas pelas Eqs. (6.52-6.56) foram derivados por outros autores na Ref. [119]. Definimos as integrais dependentes da temperatura

$(n = 0, 1, 2)$,

$$J_n(a) = \frac{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} - n\right)} \int_0^\infty dx \frac{x^{4-2n}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1} \quad (6.57)$$

e por simplicidade definimos também que

$$L = \ln \left(\frac{\mu^2}{\bar{\Omega}^2} \right) \quad (6.58)$$

e depois do procedimento de renormalização [98, 119] a energia livre renormalizada em TPO torna-se

$$\begin{aligned} F(\varphi, \eta) &= \frac{1}{2} [m_0^2 + (1 - \delta)\eta^2] \varphi^2 + \delta \frac{\lambda}{24} \varphi^4 \\ &+ \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{1}{8} [2L + 3] \bar{\Omega}^4 - \frac{1}{2} J_0 (\beta \bar{\Omega}) T^4 \right\} \\ &+ \frac{\delta \lambda}{8 (4\pi)^4} [(L + 1) \bar{\Omega}^2 - J_1 T^2]^2 \\ &+ \frac{\varphi^2 \delta^2 \lambda^2}{256 (\pi)^4} \left\{ \frac{[-C_1 \bar{\Omega}^2 - 3 (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) T^2]}{12} \frac{1}{6} \left(\frac{17}{4} \bar{\Omega}^2 - 3 J_1 T^2 \right) L \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} \bar{\Omega}^2 L^2 \right\} - \delta^2 \frac{\lambda^2}{48 (4\pi)^6} \left\{ \left[5L^3 + 17L^2 + \frac{41}{2} L^2 - 23 \right. \right. \\ &- \left. \frac{23}{12} \pi^2 - \psi''(1) + C_0 + 3(L + 1)^2 J_2 (\beta \bar{\Omega}) \right] \bar{\Omega}^4 \\ &- \left[12L^2 + 28L - 12 - \pi^2 - 4C_1 + 6(L + 1) J_2 (\beta \bar{\Omega}) \right] J_1 (\beta \bar{\Omega}) \bar{\Omega}^2 T^2 \\ &+ \left. \left[3(3L + 4) J_1^2 (\beta \bar{\Omega}) + 3J_1^2 (\beta \bar{\Omega}) J_2 (\beta \bar{\Omega}) + 6K_2 + 4K_3 \right] T^4 \right\} \quad (6.59) \end{aligned}$$

onde $\tilde{K}_1$ e $\tilde{K}_2$, na aproximação de altas temperaturas, $\bar{\Omega}/T \ll 1$, são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &\simeq \frac{4\pi^2}{3} \left[\ln \left(\frac{\beta \bar{\Omega}}{4\pi} \right) + 3 + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} \right] \\ \tilde{K}_2 &\simeq -4\pi^2 \left[\ln \left(\frac{\beta \bar{\Omega}}{4\pi} \right) - \frac{1}{3} + 4 \log(2) + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} \right] \quad (6.60) \end{aligned}$$

onde $\psi''(1) = -2\zeta(3)$ e $\zeta(x)$ é a função zeta. As constantes C_0 e C_1 na Eq. (6.59) são $C_0 \simeq 39.429$ e $C_1 \simeq -9.8424$, enquanto K_2 e K_3 são integrais tridimensionais que podem ser calculadas numericamente [99]. Na aproximação de altas temperaturas, $\bar{\Omega}/T \ll 1$,

eles são dados por [119]

$$K_2 \simeq \frac{32\pi^4}{9} [\ln(\beta\bar{\Omega}) - 0.04597] - 372.65\beta\bar{\Omega} [\ln(\beta\bar{\Omega}) + 1.4658] \quad (6.61)$$

e

$$K_3 \simeq 453.51 + 1600\beta\bar{\Omega} [\ln(\beta\bar{\Omega}) + 1.3045] \quad (6.62)$$

Na Eq. (6.59) as integrais envolvendo a distribuição de Bose-Einstein $J_0(\beta\bar{\Omega})$, $J_1(\beta\bar{\Omega})$ e $J_2(\beta\bar{\Omega})$ podem ser reescritas como [1, 3, 120]

$$\begin{aligned} J_0(\beta\bar{\Omega}) &= \frac{8\pi}{3} (\beta\bar{\Omega})^3 + (\beta\bar{\Omega})^4 \left(\ln\left(\frac{\beta\bar{\Omega}}{4\pi}\right) + \gamma - \frac{3}{4} \right) \\ &+ 128 \sum_n \frac{(-1)^n (2n-1)!! \zeta(2n+1) (\beta\bar{\Omega})^{(2n+4)}}{32(n+2)! 2^{n+1} (2\pi)^{2n}} - \frac{4\pi^2}{3} (\beta\bar{\Omega})^2 \\ &+ \frac{16}{45} \pi^4 \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} J_1(\beta\bar{\Omega}) &= -4\pi\beta\bar{\Omega} - 2(\beta\bar{\Omega})^2 \left[\ln\left(\frac{\beta\bar{\Omega}}{4\pi}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] + \frac{4\pi^2}{3} \\ &- 16 \sum_n \left(\frac{(-1)^n (2n-1)!! \zeta(2n+1) (\beta\bar{\Omega})^{(2n+2)}}{4n! 2^{n+1} (n+1) (2\pi)^{2n}} \right) \end{aligned} \quad (6.64)$$

e

$$\begin{aligned} J_2(\beta\bar{\Omega}) &= \frac{2\pi}{\beta\bar{\Omega}} + 2 \ln\left(\frac{\beta\bar{\Omega}}{4\pi}\right) + 2\gamma \\ &+ 4 \left[\sum_n \frac{(-1)^n (2n-1)!! \zeta(2n+1) (\beta\bar{\Omega})^{2n}}{n! 2^{n+1} (2\pi)^{2n}} \right] \end{aligned} \quad (6.65)$$

As contribuições para a energia livre para as fases simétrica/quebrada ($\pm|m_0|^2$) são obtidas expandindo nossos resultados anteriores Eq. (6.59) em δ até $\mathcal{O}(\delta^2)$ (lembrando que o parâmetro de massa $\bar{\Omega}$ é dado pela Eq. (6.44)).

Outro fator importante é que os resultados obtidos com o formalismo de tempo imaginário são os mesmos obtidos no formalismo de Schwinger, como era esperado.

A seguir, mostraremos o critério utilizado nesta tese para determinar o valor do parâmetro η .

6.0.3 Otimização

Escolhemos como quantidade a ser otimizada a energia livre e, como discutido anteriormente, existe mais de uma maneira de determinarmos o valor do parâmetro arbitrário η . Nesta tese usaremos o critério FAC. Como efetuamos o cálculo da energia livre até $\mathcal{O}(\delta^2)$, pelo critério FAC igualamos as contribuições de $\mathcal{O}(\delta^2)$ a zero e calculamos as raízes da função não linear obtida e as substituímos na energia livre, introduzindo assim efeitos não perturbativos.

Obtemos ótimos resultados com o cálculo da energia livre usando TPO, como a ordem da transição de fase e a convergência dos resultados ordem a ordem. Estes resultados serão discutidos em detalhe no Cap.7.

Um detalhe importante a ser mencionado é que ao efetuarmos o processo de otimização usando o critério PMS na fase quebrada, não obtemos raízes reais. Devido a este fato usamos o critério FAC em ambas as fases (simétrica e quebrada) e, na fase simétrica, o critério PMS fornece resultados muito semelhantes ao FAC.

Outro fator muito importante é que devemos obter resultados consistentes com as aproximações usadas, tanto para derivar as equações de movimento de GLL, quanto para efetuar o cálculo dos diagramas de Feynman. Como trabalhamos no limite de altas temperaturas, devemos obter o parâmetro η tal que seja satisfeita a condição $\Omega_T \ll T$.

No próximo capítulo mostraremos detalhes dos métodos numéricos utilizados nesta tese e faremos uma discussão dos resultados obtidos, tanto para dinâmica de campos escalares fora do equilíbrio quanto para a energia livre dentro do contexto da TPO.

Capítulo 7

Análise Qualitativa e Resultados Numéricos

Os resultados analíticos principais desta tese foram obtidos nos três capítulos anteriores. Obtivemos as equações de GLL em teoria de perturbação na constante de acoplamento e empregando o método não perturbativo da expansão δ . Talvez seja importante enfatizar mais uma vez que na derivação das equações de GLL perturbativas, estão incluídos efeitos não perturbativos através do emprego de propagadores vestidos. Como visto, caso propagadores livres fossem empregados, não haveria dissipação. Talvez os resultados mais importantes desta tese obtidos com a expansão δ sejam os seguintes: o comportamento crítico correto do modelo e, pela primeira vez, foram obtidos os coeficientes de dissipação não perturbativos tanto para a fase simétrica, quanto para a fase quebrada. Estes parâmetros definem o comportamento dinâmico da transição de fase.

A seguir, vamos inicialmente fazer uma discussão qualitativa sobre as soluções das equações de GLL. Nesta discussão vamos analisar as soluções para tempo longo, próximo ao equilíbrio, e para tempo curto, quando ocorre o fenômeno da decomposição espinodal. Vamos também verificar o papel desempenhado pelo ruído nas soluções. Logo após, vamos discutir o problema do aparecimento de divergências ultravioleta na solução numérica das equações de GLL discretizadas numa rede espacial. Vamos também apresentar alguns resultados concretos de simulações numéricas, onde vamos fazer uso das técnicas desen-

volvidas nas Refs. [121, 122, 123]. Por fim, serão discutidos os resultados numéricos para a energia livre, a massa térmica, e o coeficiente de dissipação para as fases simétrica e quebrada.

7.1 Soluções das equações de GLL para tempos longos e tempos curtos

Primeiramente vamos investigar o comportamento da solução da equação de GLL para a fase quebrada para tempos longos, próximo ao equilíbrio. A forma geral da equação de GLL obtida na fase quebrada é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + \eta_1\phi^2\frac{\partial}{\partial t}\phi + U'[\phi] = \phi\xi \quad (7.1)$$

onde o potencial é dado por

$$U[\phi] = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (7.2)$$

Inicialmente, notamos que a equação acima foi derivada para situações próximas ao equilíbrio, em que o campo não varia muito, nem nas coordenadas espaciais, nem no tempo. Vamos então considerar a situação em que ϕ não seja muito diferente de ϕ_0 ,

$$\phi \approx \phi_0 = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}m \quad (7.3)$$

Podemos escrever para ϕ

$$\phi = \phi_0 + \varphi \quad (7.4)$$

onde φ é pequeno. Retendo somente termos de primeira ordem, temos que

$$U'[\phi] = \frac{\lambda}{3}\phi_0^2\varphi \quad (7.5)$$

e

$$\phi^2\frac{\partial}{\partial t}\phi \simeq \phi_0^2\frac{\partial}{\partial t}\varphi \quad (7.6)$$

Como o termo de dissipação ($\approx \phi^2 \dot{\phi}$) está relacionado com o termo de flutuação ($\phi \xi$) pelo teorema de flutuação dissipação, o termo de ruído pode ser escrito como

$$\phi \xi \simeq \phi_0 \xi \quad (7.7)$$

No mesmo espírito de que ϕ varia pouco, podemos desprezar a derivada segunda no tempo. Assim, a equação de GLL fica na forma

$$\eta_1 \phi_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \nabla^2 \varphi + \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 \varphi = \phi_0 \xi \quad (7.8)$$

Note esta equação linearizada, obviamente, é da forma de uma equação de GLL com ruído aditivo [6].

Como a Eq. (7.8) é linear, ela pode ser resolvido utilizando a transformada de Fourier $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}[\varphi]$. Em termos de $\tilde{\varphi}$, a Eq. (7.8) leva á seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem inhomogênea

$$k^2 \tilde{\varphi} + \eta_1 \phi_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} + \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 \tilde{\varphi} = \phi_0 \tilde{\xi} \quad (7.9)$$

A solução da equação homogênea

$$k^2 \tilde{\varphi} + \eta_1 \phi_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} + \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (7.10)$$

é da forma

$$\tilde{\varphi}_h \sim e^{\alpha t} \quad (7.11)$$

onde

$$\alpha = -\frac{1}{\eta_1 \phi_0^2} \left(k^2 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 \right) \quad (7.12)$$

Portanto, podemos escrever a solução da equação homogênea

$$\tilde{\varphi}_h = \exp \left[-\frac{1}{\eta_1 \phi_0^2} \left(k^2 + \frac{\lambda}{3} \phi_0^2 \right) t \right] \tilde{\varphi}(0) \quad (7.13)$$

onde $\tilde{\varphi}(0)$ é a transformada de Fourier da condição inicial. É fácil mostrar que a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(k, t) &= \tilde{\varphi}(k, 0) \exp \left[\frac{-\left(k^2 + \frac{\lambda}{3}\phi_0^2\right)t}{\eta_1\phi_0^2} \right] \\ &+ \frac{1}{\eta_1\phi_0} \int_0^t dt' \tilde{\xi}(k, t') \exp \left[\frac{-\left(k^2 + \frac{\lambda}{3}\phi_0^2\right)(t-t')}{\eta_1\phi_0^2} \right]\end{aligned}\quad (7.14)$$

Uma quantidade de interesse é a função de correlação

$$S(k, t) = \langle \phi^*(k, t) \phi(k, t) \rangle \quad (7.15)$$

onde $\langle \dots \rangle$ significa média sobre o ruído. Usando a solução explícita para ϕ , não é difícil mostrar que $S(k, t)$ é dada por

$$\begin{aligned}S(k, t) &= |\tilde{\varphi}(k, 0)|^2 \exp \left[-\frac{2}{\eta_1\phi_0^2} (k^2 + 2m^2) t \right] \\ &+ \frac{\phi_0^2 T}{(k^2 + 2m^2)} \left\{ \exp \left[-\frac{2}{\eta_1\phi_0^2} (k^2 + 2m^2) t \right] - 1 \right\}\end{aligned}\quad (7.16)$$

onde foi usado o fato que $\frac{\lambda}{3}\phi_0^2 = 2m^2$.

Para $t \rightarrow \infty$, quando o sistema termaliza,

$$S(k, \infty) \sim T \frac{1}{k^2 + 2m^2} \quad (7.17)$$

Isto significa que as correlações das flutuações decaem exponencialmente no espaço de configuração como

$$S(r, \infty) \sim T \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (7.18)$$

onde $\mu = \sqrt{2m^2}$. Ou seja, a “massa” $\sqrt{2m^2}$ do sistema determina o decaimento das correlações próximo ao equilíbrio; o inverso da massa é o comprimento de correlação. Obviamente, na transição de fase, o comprimento de correlação diverge.

Um outro limite interessante é o de tempos curtos, i.e. $t \approx 0$. A situação de interesse é estudar a evolução do sistema quando $\phi(x, t = 0) \approx 0$. Neste caso, para tempos suficientemente curtos, podemos desprezar o termo quártico de $U[\phi]$. Antes de analisar

o comportamento das soluções da Eq. (7.1) neste limite, vamos analisar o caso de ruído aditivo, em que a equação de GLL é dada por

$$\eta_1 \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \nabla^2 \varphi - m^2 \varphi = \xi \quad (7.19)$$

onde desprezamos o termo de derivada segunda, como acima. A solução pode ser obtida como no caso anterior, sendo dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(k, t) &= \tilde{\varphi}(k, 0) \exp \left[-\frac{1}{\eta_1} (k^2 - m^2) t \right] \\ &+ \int_0^t dt' \tilde{\xi}(k, t') \exp \left[-\frac{1}{\eta_1} (k^2 - m^2) (t - t') \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Notamos que, para $k^2 < m^2$, as soluções crescem exponencialmente no tempo. Ou seja, as flutuações de grandes comprimentos de onda levam a um crescimento do parâmetro de ordem a tempos curtos. Este resultado é conhecido pelo nome de decomposição espinodal. É importante notar que, este resultado é válido para tempos curtos somente, pois foi derivado de uma equação linearizada, onde o termo quártico foi desprezado. Para tempos maiores, não se pode mais desprezar este termo. Na presença do termo quártico, as soluções não crescem mais, elas relaxam em direção à solução de equilíbrio.

Agora, é importante notar que a Eq. (7.1) não pode ser linearizada para tempos curtos, obviamente devido à sua natureza de ruído multiplicativo. No entanto, podemos obter uma solução explícita para tempos curtos considerando somente os modos de momento zero do campo, i.e. tomando ϕ independente de x . Neste caso, desprezando novamente a derivada segunda no tempo, obtemos a equação não linear

$$\eta_1 \phi \frac{d\phi}{dt} = \xi + m^2 \quad (7.21)$$

A solução desta equação é

$$\phi^2(t) = \phi^2(0) + \frac{2}{\eta_1} \int_0^t (\xi(t') + m^2) \quad (7.22)$$

e a auto-correlação $\langle \phi^2(t) \rangle$ é dada por

$$\langle \phi^2(t) \rangle = \phi^2(0) + \frac{2}{\eta_1} m^2 t \quad (7.23)$$

Uma característica interessante desta solução (7.22) é que não necessariamente a solução cresce em relação ao seu valor em $t = 0$, pois as flutuações, representadas pelo ruído, que flutuam ao redor de uma média nula, podem exceder o termo difusivo, representado por m^2 . Como será visto a seguir, quando vamos discutir as soluções numéricas da equação completa, esta característica é bem visível nas soluções.

7.2 Renormalização na rede

Soluções analíticas de equações de GLL são obtidas apenas em situações muito especiais, como por exemplo na aproximação linear do potencial efetivo $U[\varphi]$, usualmente válidas para tempos curtos, como visto acima. Soluções completas descrevendo a evolução do sistema para o equilíbrio podem ser obtidas apenas através de extensivas simulações numéricas. Em geral, simulações numéricas são feitas numa rede espacial de comprimento finito sob condições periódicas de contorno. No entanto, ao efetuar simulações na rede, devemos ser cuidadosos em preservar os resultados independentes do espaçamento da rede, principalmente quando estamos interessados com o comportamento do sistema no contínuo. A distribuição de probabilidade de equilíbrio para configurações de campo φ que são soluções de uma equação de GLL é $P_{eq}[\varphi] = e^{-\beta U[\varphi]}$, onde $U[\varphi]$ é o potencial efetivo do problema. A correspondente função de partição é dada pela integral de trajetória

$$Z[\varphi] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\beta U[\varphi]} \quad (7.24)$$

Cálculos de valores esperados e funções de correlação de φ com esta função de partição levam a divergências ultravioleta. Na presença de ruído térmico, modos com pequenos e grandes comprimento são misturados durante a dinâmica, levando a uma sensibilidade

não física com o espaçamento da rede. A obtenção de resultados robustos, como o comportamento correto no ultravioleta, ao fazer dinâmica de Langevin foi discutido por vários autores [129, 130]. O problema, que não é evidente na formulação de Langevin, é relacionado à conhecida catástrofe ultravioleta de Rayleigh-Jeans na teoria clássica de campos. A dinâmica ditada por uma equação de GLL é clássica e é bem definida para grandes momentos. Estas divergências podem ser eliminadas pela renormalização do potencial U através da adição de apropriados contratermos. Já que os termos divergentes são todos perturbativos, podemos identificar os diagramas apropriados, subtrair seu resultado calculado com a teoria clássica, e então adicionar os termos equivalentes calculados na teoria quântica. No nosso caso, isso corresponde a substituir o peso de Maxwell-Boltzmann pela distribuição de Bose-Einstein nas integrais de momento para os apropriados termos divergentes. Já que a teoria é super renormalizável em três dimensões, apenas os diagramas *tadpole* a um *loop* e o *setting-sun* a dois *loops* são divergentes, levando a uma renormalização do parâmetro de massa m_0^2 em U . Usar o potencial renormalizado numa equação de GLL leva a soluções de equilíbrio φ que são independentes do espaçamento da rede. Na prática, este procedimento de renormalização na rede corresponde a adicionar contratermos dependentes da temperatura ao potencial original U , que garante o correto comportamento de comprimentos de onda curtos da teoria discretizada como foi mostrado originalmente pelos autores [129, 130].

No Apêndice M apresentamos a derivação explícita dos contratermos. Estes são dados pela Eq. (M.35), e dependem da temperatura T , do espaçamento da rede h , e de μ , uma escala de renormalização

$$V_{ct}[\phi] = \left\{ -9.5277 \frac{\lambda T}{4\pi h} + \frac{6\lambda^2 T^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{6}{\mu h} \right) + 0.09 \right] \right\} \frac{\phi^2}{2} \quad (7.25)$$

Especificamente, para se obter resultados de simulações das equações de GLL que sejam independentes do espaçamento da rede h , ao invés de U , deve-se usar

$$U_R[\phi] = U[\phi] - V_{ct}[\phi] \quad (7.26)$$

A escala μ , em princípio deveria ser fixada de maneira a tornar as soluções independentes deste parâmetro. Isto é feito introduzindo uma “massa física” dependente de μ , de maneira que o potencial $U_R[\phi]$ seja independente de μ , como é feito usualmente em teorias de campos que apresentam divergências ultravioletas. No entanto, como a dependência de $U_R[\phi]$ é somente logarítmica, para todos os efeitos práticos nesta tese, a mudança de um fator 5, por exemplo, no valor de μ não muda as soluções de maneira perceptível.

7.3 Soluções numéricas das equações de GLL

Ao fazer simulações das equações de GLL fenomenológicas numa rede espacial, diferentes métodos de discretização já foram testados em [124, 125], como o método de diferenças finitas e o método de colocação de Fourier. Para um potencial da forma

$$U(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4}\phi^4 \quad (7.27)$$

ambos métodos de discretização foram testados para o caso com ruído aditivo e na ausência do mesmo e, forneceram resultados muito semelhantes, maiores detalhes podem ser encontrados em [121]. Discretizamos o Laplaciano com a usual fórmula de diferenças finitas e, no caso de equações com ruído aditivo, ainda empregamos transformada de Fourier rápida. Para a variável temporal utilizamos o algoritmo *leap frog*.

Para simular ruído branco na rede para as equações de GLL com coeficiente dissipativo η_1 e a uma temperatura T fazemos uso da fórmula

$$\xi = \sqrt{2\eta_1 T} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{1}{h^{3/2}} \zeta \quad (7.28)$$

onde ζ é um ruído Gaussiano

$$\langle \zeta \rangle = 0 \quad (7.29)$$

$$\langle \zeta^2 \rangle = 1 \quad (7.30)$$

Na nossa análise sobre dependência (independência) dos resultados com o espaçamento

de rede, usaremos um potencial com a forma

$$U[\phi] = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (7.31)$$

e usamos os seguintes parâmetros: $\lambda = T = m = 1, \eta_{1,2} = 0, 1$ dependendo do tipo de ruído considerado (aditivo ou multiplicativo), $\Delta t = 0.001$, e os outros parâmetros como tamanho e número de pontos da rede estarão nas figuras que serão mostradas a seguir. Como mencionado anteriormente, adicionamos contratermos (M.35) ao potencial. Na Fig. 7.1 mostramos nossos resultados com e sem contratermos. Notamos que na presença de contratermos nossos resultados convergem para um mesmo valor independente do espaçamento de rede utilizado. Porém, um detalhe muito importante a ser mencionado

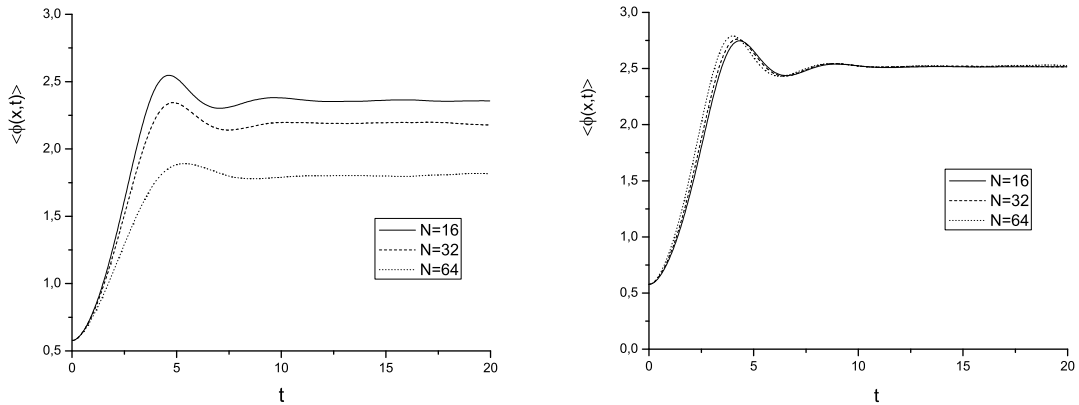


Figura 7.1: Soluções da equação de GLL com ruído aditivo para diferentes espaçamentos de rede: painel esquerdo sem contratermos e no direito com contratermos.

é que as soluções obtidas em nossas simulações são independentes do espaçamento da rede h somente no equilíbrio (tempos longos). Para tempos curtos, os resultados apresentam uma pequena dependência com h , como mostrado na Fig 7.2. Esta dependência com o espaçamento da rede a tempos curtos acontece devido ao fato de que os contratermos usados foram calculados com uma função de partição de equilíbrio.

Agora, vamos apresentar os resultados de nossas simulações para as equações de GLL derivadas no contexto perturbativo para as fases simétrica e quebrada. Começamos

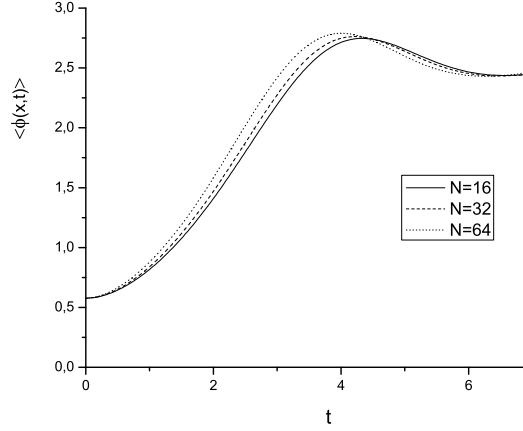


Figura 7.2: Soluções da equação de GLL com ruído aditivo para tempos curtos na presença de contratermos.

mostrando nossos resultados para a fase simétrica, nesta fase a equação de GLL obtida tem a forma

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) + \eta_1 \phi^2(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + U'[\phi, T] = \phi(\mathbf{x}, t) \xi_1(\mathbf{x}, t) \quad (7.32)$$

onde

$$U'[\phi, T] = m_T^2 + \frac{\lambda_T}{3!} \phi^3(\mathbf{x}, t) \quad (7.33)$$

e as expressões para m_T , λ_T e η_1 são dadas no Cap.4. Como estas equações foram derivadas em teoria de perturbação até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, ficamos com uma equação com ruído multiplicativo, já que o ruído aditivo incluiria correções de ordem λ^4 como mostrado na Ref. [13].

Primeiramente reescalamos nossas quantidades por m , trabalhando em unidades de m e usamos os seguintes parâmetros: $\lambda = 0.25$, $T = 10$, $m = 1$, $\mu = 1$, $\Delta t = 0.01$ e a condição inicial para o valor do campo é igual ao ponto de inflexão do potencial a $T = 0$. Na Fig. 7.3 mostramos o comportamento do valor esperado do campo (parâmetro de ordem) na presença dos contratermos para diferentes espaçamentos de rede. Notamos que a dissipação no limite de altas temperaturas é muito forte, não existindo oscilações do parâmetro de ordem antes da termalização, fazendo com que o campo atinja seu valor de equilíbrio rapidamente. No caso de dissipação fraca, o termo de derivada segunda no

tempo dominaria e o parâmetro apresentaria oscilações próximo ao equilíbrio.

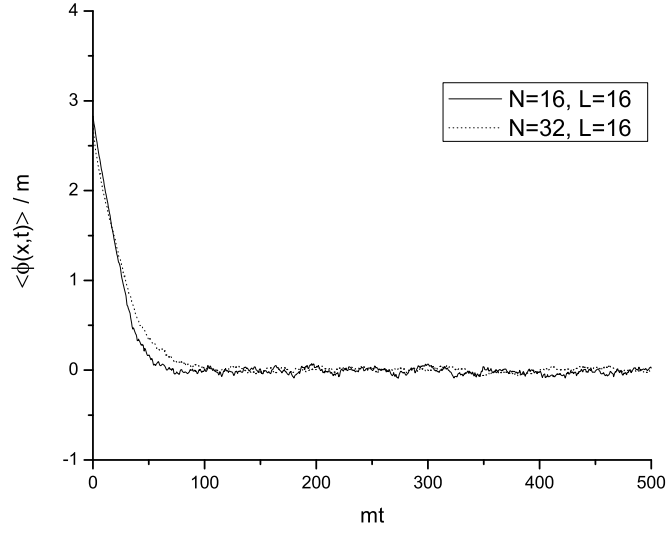


Figura 7.3: Solução da equação de GLL para a fase simétrica, m é o parâmetro de massa da densidade Lagrangeana original.

Para a fase com quebra de simetria a equação de movimento efetiva de GLL tem a forma (por simplicidade consideramos $\Phi = \phi$)

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) + \eta_1 \phi^2(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + U'[\phi, T] = \phi(\mathbf{x}, t) \xi_1(\mathbf{x}, t) \quad (7.34)$$

onde

$$\begin{aligned} U'[\phi, T] &= -\frac{\lambda}{24} (T_c^2 - T^2) \phi + \frac{\lambda}{6} \phi^3 \\ T_c &= \sqrt{\frac{24 m^2}{\lambda}} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Notamos que para $T < T_c$ os pontos de mínimo do potencial *bare* $U[\phi, T]$ são dados por

$$\phi_0^2 = \frac{1}{4} T_c^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (7.36)$$

já para $T > T_c$ o potencial tem apenas um mínimo, $\phi_0 = 0$.

Novamente reescalamos nossas quantidades por m , trabalhando em unidades de m e usamos os seguintes parâmetros: $\lambda = 0,25$, $\frac{T}{T_c} = 0,5$, $m = 1$, $\mu = 1$, $\Delta t = 0,01$ e a

condição inicial para o valor do campo é igual ao ponto de inflexão do potencial a $T = 0$. Os contratermos são os mesmos utilizados na fase simétrica, pois as divergências são as mesmas.

Na Fig.7.4 mostramos o resultado de nossas simulações para o valor esperado do campo para diferentes espaçamentos de rede. Novamente, como a dissipação no limite de altas temperaturas é muito forte, não ocorrem oscilações do parâmetro de ordem antes da termalização. Para tempos curtos ocorre uma diminuição do valor parâmetro de ordem. Esta diminuição, conforme argumentado no início deste capítulo, é devido ao ruído. No entanto, é importante observar que estes resultados são obtidos com uma única realização de ruído. Quando uma média sobre várias realizações de ruído for feita, espera-se que este decréscimo no parâmetro de ordem desapareça completamente ou, seja muito mais fraco. Notamos, também, que o parâmetro de ordem termaliza em um valor próximo do valor do mínimo do potencial *bare* para os respectivos parâmetros.

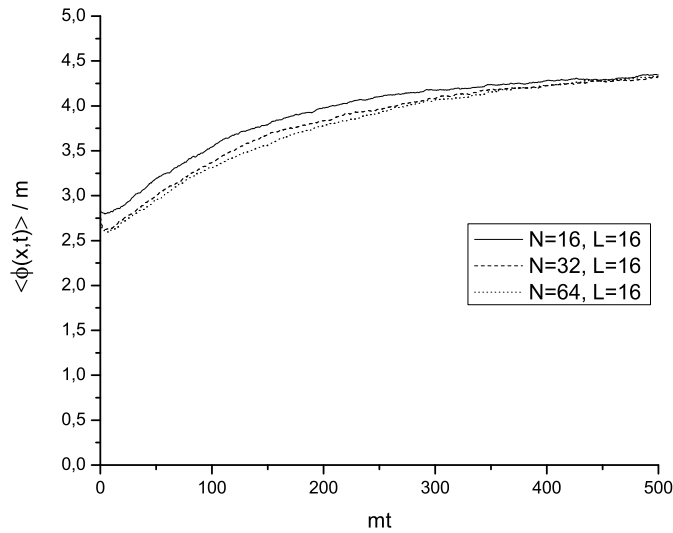


Figura 7.4: Solução da equação de GLL para a fase quebrada.

A seguir mostramos nossos resultados obtidos com teoria de perturbação otimizada para a energia livre, para a massa térmica, e para o coeficiente dissipativo η_1 , nas fases com e sem quebra de simetria.

7.4 Resultados obtidos com teoria de perturbação otimizada

Agora mostramos os resultados numéricos obtidos na nossa investigação da energia livre calculada via TPO [118]. Para determinar o valor do parâmetro η existem mais de um critério de otimização, usualmente é utilizado o critério baseado no princípio da mínima sensibilidade PMS, onde calcula-se alguma quantidade física $\mathcal{F}$ até uma determinada ordem em δ e usa-se o princípio variacional

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right|_{\delta=1} = 0 \quad (7.37)$$

Outro critério de otimização é o FAC, onde calcula-se alguma quantidade física $\mathcal{F}$ até uma determinada ordem, por exemplo $\mathcal{O}(\delta^2)$ e este critério consiste em

$$\mathcal{F}_{\delta^2} - \mathcal{F}_{\delta} \Big|_{\delta=1} = 0 \quad (7.38)$$

Encontradas as raízes destas equações não lineares, estas são substituídas na quantidade física $\mathcal{F}$ introduzindo, assim, efeitos não perturbativos.

Nesta tese optamos por utilizar o critério FAC em ambas as fases, devido ao fato que a equação não linear acima fornecida pelo critério PMS na fase quebrada não possui raízes reais. No entanto, é importante ressaltar que ambos critérios fornecem resultados muito semelhantes para a fase simétrica.

7.4.1 Fase Simétrica

Começamos mostrando os resultados para a pressão. Durante as simulações numéricas testamos vários valores dos parâmetros, mas para a leitura desta tese não ficar muito cansativa, mostraremos somente os resultados para $\mu = 1$, $m = 1$, $T = 25$, $\lambda = 0,1$ e $\lambda = 1$. Na Fig. 7.5 mostramos o comportamento da pressão, calculada com teoria de perturbação usual (em λ), para diferentes valores de λ no limite de altas temperaturas ($T \gg \Omega$). Fica evidente nesta figura a quebra da teoria de perturbação para T 's grandes.

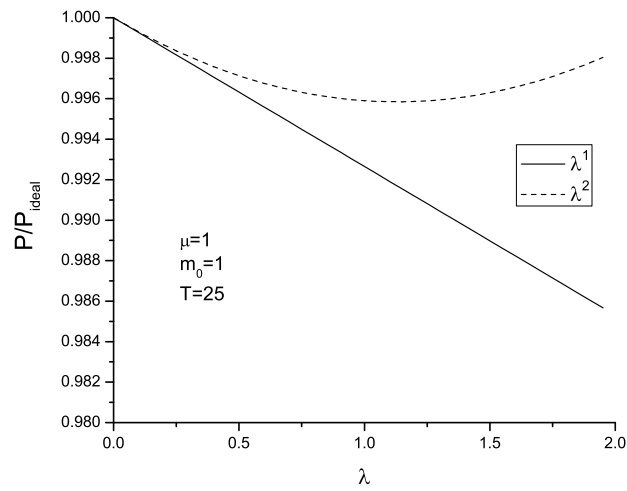


Figura 7.5: Pressão calculada em teoria de perturbação usual (em λ).

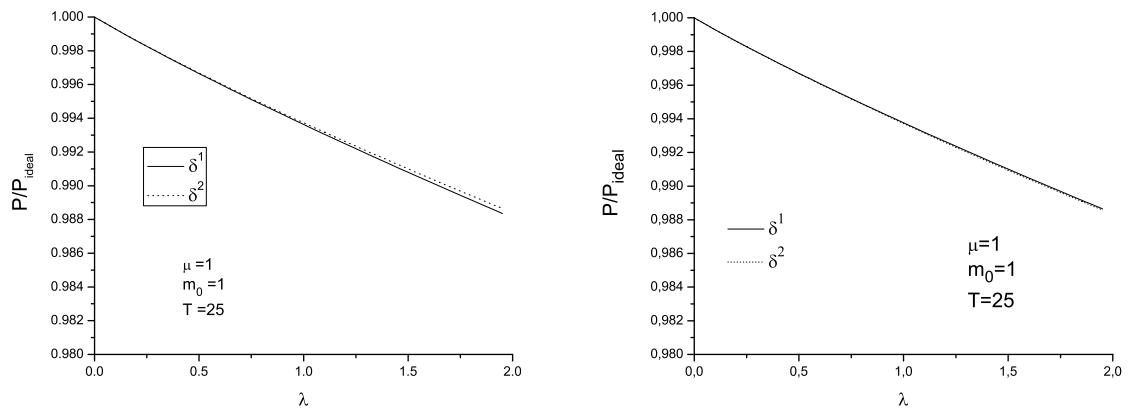


Figura 7.6: Comportamento da pressão calculada com teoria de perturbação otimizada: painel esquerdo com FAC e painel direito com PMS.

Calculamos a energia livre até $\mathcal{O}(\delta^2)$ e utilizamos o critério FAC, determinamos as raízes da função não linear e substituímos estes valores de η na expressão da energia livre, introduzindo assim efeitos não perturbativos. Os resultados para a pressão no limite de altas temperaturas estão na Fig. 7.6. Fica evidente uma convergência dos resultados da teoria de perturbação em δ , ou em outras palavras, a $\mathcal{O}(\delta^2)$ fica muito próxima da $\mathcal{O}(\delta)$. Ainda na Fig. 7.6 mostramos os resultados utilizando os critérios PMS e FAC, mostrando novamente que estes fornecem resultados semelhantes.

Analizamos também o comportamento da pressão para valores suficientemente grandes de λ . Aqui é importante mencionar que para λ 's grandes, o FAC não apresenta raízes reais. Os resultados estão mostrados na Fig. 7.7, onde comparamos resultados obtidos em teoria de perturbação em λ e teoria de perturbação otimizada com critério PMS.

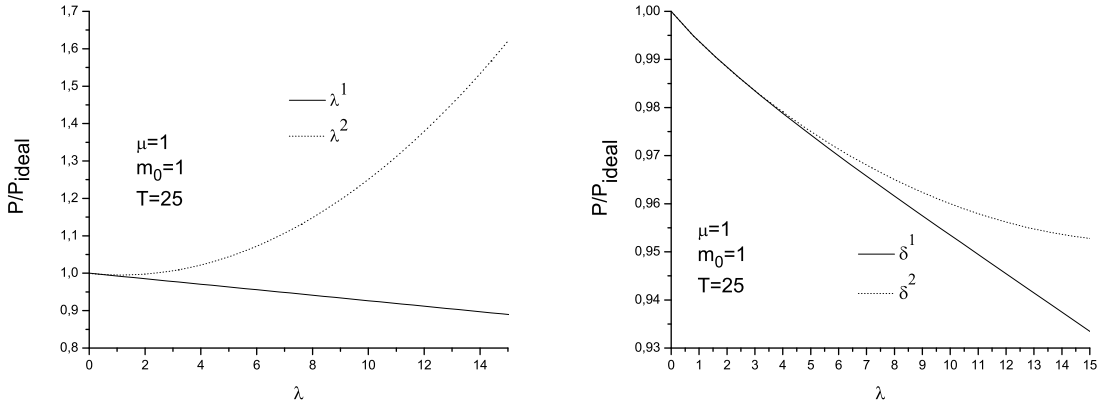


Figura 7.7: Comportamento da pressão calculada via teoria de perturbação em lambda (esquerda) e via TPO com o critério PMS (direita).

Investigamos também os efeitos não perturbativos na massa térmica m_T . Este parâmetro (juntamente com η_1) determina a dinâmica do valor esperado do campo. O resultado está mostrado na Fig. 7.8. A figura mostra que os efeitos não perturbativos são substanciais, da ordem de 25 % em $T = 10$, sendo ainda maiores à medida que T cresce.

Finalmente, mostramos os resultados para o coeficiente dissipativo na Fig. 7.9. O resultado importante é que a dissipação é um pouco menor no caso não perturbativo.

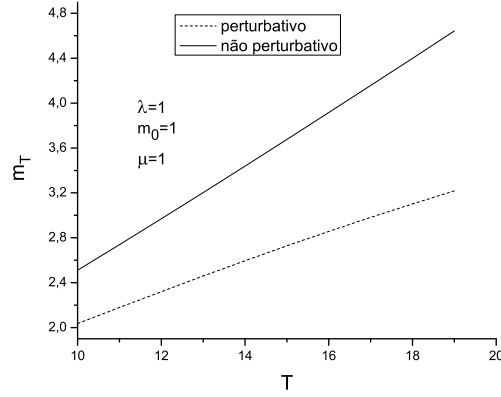


Figura 7.8: Massa térmica perturbativa e não perturbativa como função da temperatura.

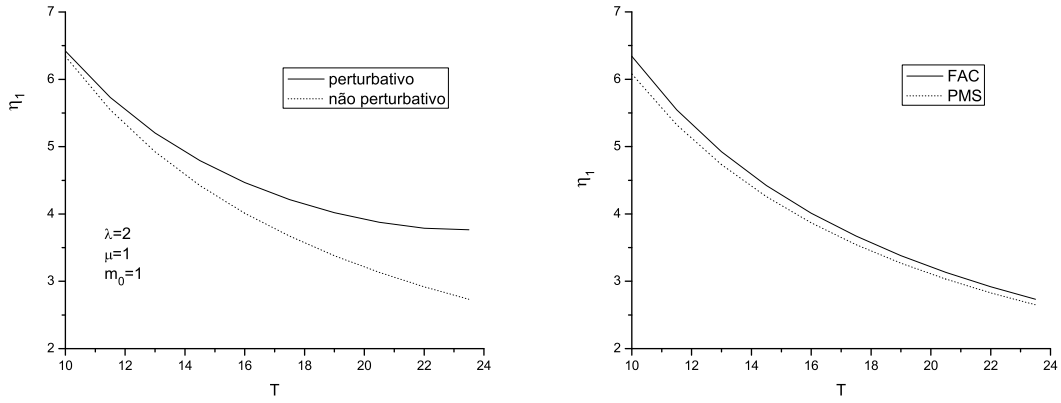


Figura 7.9: Coeficiente dissipativo como função da temperatura. Esquerda: comparação entre os casos perturbativo e não perturbativo usando o FAC. Direita: a comparação entre PMS e FAC.

Note que η_1 é uma função logarítmica da massa térmica m_T e, portanto, mesmo que m_T seja sensível a efeitos não perturbativos, esta sensibilidade torna-se muito menos significativa em η_1 .

7.4.2 Fase quebrada

Nesta subsecção vamos apresentar os resultados para a fase quebrada, a fase mais interessante, no sentido que os efeitos não perturbativos são mais marcantes. É conhecido que a transição de fase para uma teoria puramente escalar é de segunda ordem [34], e isto

esta explicado em qualquer livro texto sobre fenômenos críticos. Nossos resultados para a energia livre na fase quebrada mostram que a transição de fase é de segunda ordem. Isto pode ser visto na Fig. 7.10.

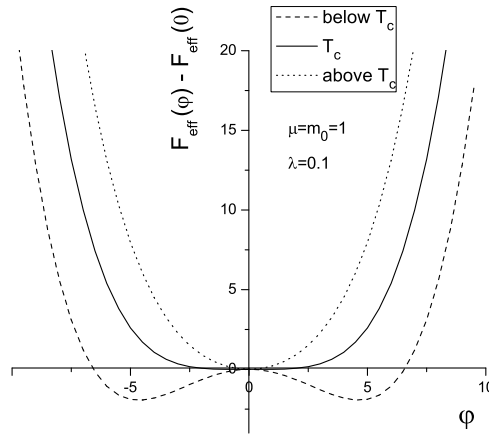


Figura 7.10: Comportamento da energia livre com a aumento da temperatura.

Uma quantidade que nos mostra de maneira mais clara que a transição é contínua é a evolução do mínimo da energia livre como função da temperatura. Na Fig. 7.11 mostramos o comportamento do mínimo da energia livre $\nu(T)$ com a temperatura e observamos o mínimo da energia livre indo a zero continuamente.

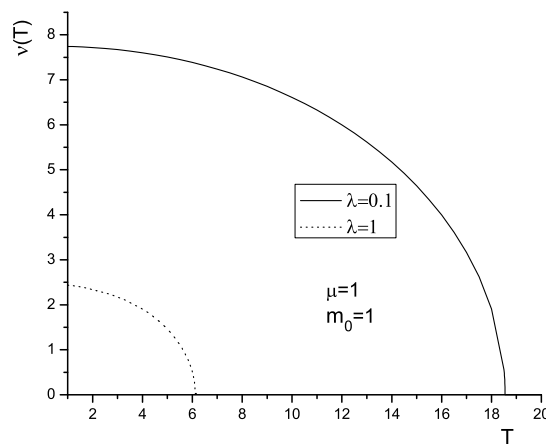


Figura 7.11: Comportamento do mínimo da energia livre com a temperatura.

Na Fig. 7.12 mostramos o comportamento do termo quadrático da energia livre $\frac{d^2\mathcal{F}(\varphi)}{d^2\varphi}$ para $\varphi = 0$ com a temperatura para dois valores de λ : 0.1 e 1. Nota-se novamente uma transição contínua e suave, sendo possível determinar as temperaturas críticas quando esta quantidade muda de sinal.

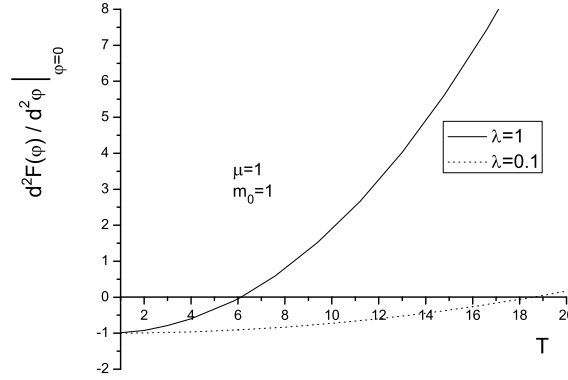


Figura 7.12: Comportamento do termo quadrático da energia livre com a temperatura.

A massa térmica m_T , que pode ser determinada a partir da quantidade $\frac{d^2\mathcal{F}(\varphi)}{d^2\varphi}$ calculada no mínimo de $\mathcal{F}(\varphi)$, está mostrada na Fig. 7.13. Nesta figura, mostramos também o

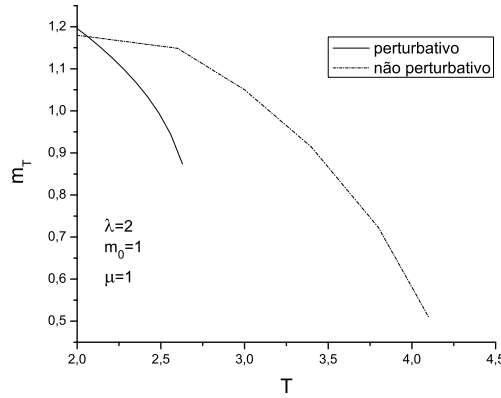


Figura 7.13: Comportamento da massa térmica com a temperatura nos contextos perturbativo e não perturbativo.

resultado perturbativo. O fato de a curva não continuar a partir de $T \simeq 2,5$ é consequência da quebra da teoria de perturbação. A curva do resultado não perturbativo claramente vai continuamente a zero.

Uma vez determinada a massa térmica, podemos calcular o coeficiente dissipativo η_1 como função da temperatura. O resultado está mostrado na Fig. 7.14. Nesta figura comparamos os η_1 's calculados em teoria de perturbação usual e com TPO. Inicialmente é

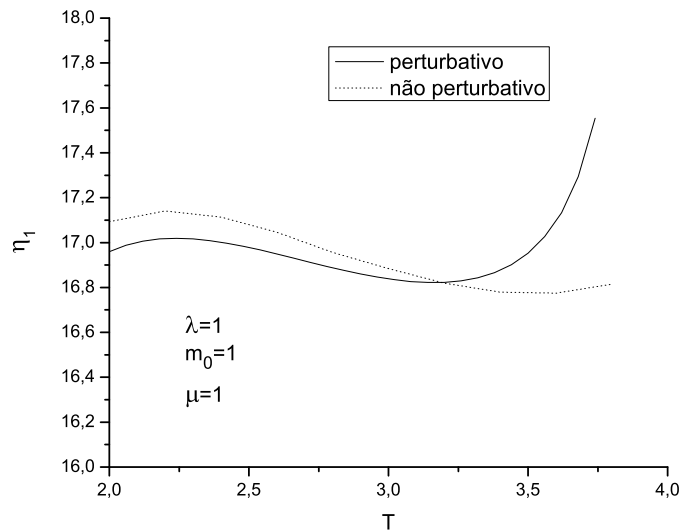


Figura 7.14: Coeficiente dissipativo não perturbativo da fase quebrada calculado com com teoria de perturbação e com TPO.

importante ressaltar aqui que o cálculo de η_1 com TPO permite investigar a dinâmica da transição de fase para qualquer temperatura. No caso perturbativo isto não era possível, pois m_T não podia ser determinado a partir de um certo valor de T , como mostrado acima. Com relação ao comportamento específico de η_1 com a temperatura, os efeitos não perturbativos não parecem ser dramáticos. Vale novamente a observação anterior que devido à dependência logarítmica com m_T , qualquer efeito mais substancial em m_T não é muito importante em η_1 . Fica evidente nesta figura que o crescimento muito rápido com a temperatura de η_1 no caso perturbativo é puro artefato devido à quebra da teoria de perturbação.

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

O objetivo principal desta tese foi implementar um cálculo não perturbativo baseado na expansão δ – também conhecida como teoria de perturbação otimizada (TPO) – para determinar uma equação de Ginzburg-Landau-Langevin (GLL) efetiva no contexto de uma teoria quântica de campos relativística. A motivação para um estudo desta natureza é investigar a dinâmica de transições de fase em condições extremas de temperatura, tópico de grande interesse atual em vários campos da Física, em particular nos estudos de quebra e restauração de simetrias na QCD, relevantes para os recentes experimentos de colisões de íons pesados, como também para eventos que certamente ocorreram no universo primitivo. A necessidade do desenvolvimento de técnicas não perturbativas para o estudo da dinâmica de transições de fase é o reconhecimento de que a teoria de perturbação usual, baseada numa expansão na constante de acoplamento, não é adequada para o estudo de mudanças de fase a altas temperaturas. Também, próximo aos pontos críticos grandes flutuações podem aparecer no sistema, devido a divergências infra-vermelhas, como em transições de fase de segunda ordem, ou mesmo em transições de fase fracas de primeira ordem.

Os resultados principais da tese foram os seguintes. Sob o ponto de vista de formalismo, foi desenvolvido um método elegante para obter a ação efetiva no formalismo de Schwinger (tempo real) que é ao mesmo tempo compacto e transparente. O método

desenvolvido na Capítulo 3 é compacto e transparente porque o contorno de Schwinger somente é explicitado ao final dos cálculos, o que permite obter resultados de maneira muito mais simples e direta do que quando se explicita o contorno desde o início, como é usualmente feito na literatura. Neste formalismo, também é possível tratar simultaneamente as fases simétrica e quebrada. Sob o ponto de vista de resultados novos, derivamos, pela primeira vez, a equação de GLL para a teoria escalar com quebra espontânea de simetria nos contextos perturbativo e não perturbativo, obtivemos o coeficiente dissipativo não perturbativo, e eliminamos as divergências ultravioleta nas simulações das equações de GLL. Especificamente, obtivemos inicialmente em teoria de perturbação uma equação de GLL para a fase quebrada [122, 123]. Além da obtenção formal desta equação, implementamos simulações numéricas explícitas, obtendo soluções de equilíbrio independentes do espaçamento da rede. Após este cálculo perturbativo, implementamos o cálculo da ação efetiva em TPO, obtendo a correspondente equação de GLL [112]. Obtivemos [118] explicitamente a energia livre e o coeficiente de dissipação, quantidades da equação de GLL que contêm os efeitos não perturbativos. Obtivemos através da TPO uma transição de fase de segunda ordem, em acordo com resultados gerais da mecânica estatística. Além disso, os resultados para a energia livre são válidos para temperatura abaixo e acima da temperatura crítica, bem como também na própria temperatura crítica.

Explicitamente, o desenvolvimento da tese transcorreu da seguinte maneira. Nos capítulos 2 e 3 fizemos uma revisão dos formalismos de temperatura finita utilizados nesta tese. Primeiramente, revisamos o formalismo de tempo imaginário e mostramos a importância do potencial efetivo no estudo de transições de fase. Posteriormente, analisamos o formalismo de contorno temporal fechado de Schwinger-Keldysh, devido a este nos fornecer resultados em tempo real (Minkowsky). Mostramos também a derivação da ação efetiva para a teoria escalar com interação $\frac{\lambda\phi^4}{4!}$ usando o formalismo de Schwinger-Keldysh, fizemos uma expansão em *loops* e obtemos as contribuições de um e dois *loops* à temperatura finita.

Os detalhes da derivação das equações estocásticas de GLL, usando teoria de perturbação até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, estão desenvolvidos no capítulo 4. Generalizamos os resultados da Ref. [13] para o caso com quebra de simetria. A TPO foi desenvolvida nos capítulos 5 e 6, onde discutimos com mais detalhes a necessidade de aplicar métodos não perturbativos em TQCTF. Este método tem sido aplicado em diferentes problemas de distintas áreas da física com muito sucesso, fornecendo resultados muito interessantes. Após a descrição do método, mostramos sua aplicação em TQCTF e derivamos a equação de GLL não perturbativa para a fase simétrica no limite de altas temperaturas. Calculamos a energia livre para a teoria escalar na fase simétrica e na fase com quebra de simetria até $\mathcal{O}(\delta^2)$, apresentamos sua derivação tanto no formalismo de tempo real como no de tempo imaginário, obtendo o mesmo resultado como era esperado.

No capítulo 7 expomos os métodos numéricos utilizados e os resultados das nossas simulações para o comportamento do condensado. Além disso, fizemos uma discussão da renormalização do potencial efetivo para obter resultados independentes do espaçamento da rede, evitando assim, a catástrofe de Rayleigh-Jeans. Discutimos nossos resultados para o procedimento de otimização determinando o valor do parâmetro arbitrário que foi introduzido via TPO. A pressão (comparada com os resultados obtidos com teoria de perturbação usual), a temperatura crítica, a massa térmica e o coeficiente dissipativo foram calculados até $\mathcal{O}(\delta^2)$.

Como desenvolvimentos futuros, pretendemos fazer um estudo detalhado sobre as diferentes realizações de simetria que possam ocorrer numa TQCTF com dois campos escalares e, obter um melhor entendimento da evolução temporal das transições de fase existentes nesta teoria. Mais especificamente, pretendemos obter, a partir de ações efetivas quânticas 1PI de uma teoria de campos relativística, as equações de movimento para os parâmetros de ordem que caracterizarão as fases do sistema. Estas equações (de GLL), serão obtidas depois de serem feitas algumas aproximações motivadas fisicamente e, estas certamente limitarão a aplicabilidade de tais equações. Mas, por outro lado, descobriremos

aspectos muito importantes para física de não equilíbrio.

Trabalharemos com uma TQCTF com dois campos escalares $\phi(x)$ e $\chi(x)$ com auto-acoplamentos e acoplamentos entre os campos $\phi(x)$ e $\chi(x)$. Utilizando derivações formais dentro da descrição da teoria de campos para dinâmica dissipativa de não equilíbrio obteremos as equações de GLL para cada campo. Trabalharemos com diferentes sinais nos acoplamentos entre os campos e com os campos podendo estar tanto na fase simétrica como na fase quebrada e, resolvendo tais equações poderemos descobrir como os valores esperados dos campos escalares termalizam, ou seja, como vão para o equilíbrio. Além disso, descobriremos se há algum sinal dos fenômenos de “não restauração de simetria” (SNR) e “quebra de simetria inversa” (ISB).

A obtenção de resultados, independentes do espaçamento da rede, poderá ser obtida com a introdução de contratermos no potencial efetivo, similar ao que já foi feito para uma teoria com um único campo escalar. Esses contratermos podem ser calculados similarmente aos calculados para o caso de campos escalares com simetria $O(N)$ [131], mas é importante ressaltar que os mesmos devem corresponder aos contratermos da teoria em três dimensões (reduzida dimensionalmente).

Os resultados das simulações fornecerão detalhes sobre a dinâmica de não equilíbrio dos parâmetros de ordem acoplados, como por exemplo a competição entre a termalização de um ou outro. Isso nos dará uma idéia da competição entre as transições quiral e de desconfinamento. Após um tempo longo, quando os parâmetros de ordem já estiverem termalizados, teremos obtido as soluções de equilíbrio para as equações de GLL. Estas, terão informações se houve ou não a existência dos fenômenos de SNR e ISB. Sendo assim, poderemos comparar os resultados vindos da dinâmica dos campos escalares descrita via equações de GLL com os resultados da literatura sobre a existência ou não de SNR e ISB que foram obtidos por diferentes métodos.

Uma outra direção futura seria implementar simulações na rede da teoria escalar com multicampos à temperatura finita utilizando o método de Monte Carlo. Obtendo assim

resultados não perturbativos que poderão fornecer algum sinal da existência ou não dos fenômenos de SNR e ISB. Além da possível comparação com resultados de simulações já existentes, pode-se contrastar os resultados vindos de simulações feitas no espaço Euclideo com os obtidos para as soluções de equilíbrio via equações de GLL que serão feitas em tempo real (Minkowski).

Apêndice A

Demonstração de (2.92)

Partimos de (2.88)

$$Z[J] = \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp \left[i \left[\int_C \left(\pi \dot{\phi} - H + J\phi \right) \right] \right] \quad (\text{A.1})$$

substituindo (2.91) na expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp \left\{ i \left[\int_C -\frac{1}{2} \left(-2\pi \dot{\phi} + \pi^2 + \dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-\frac{1}{2} \phi (-\nabla^2 + m^2) \phi - V[\phi] \right) + J\phi \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp i \left\{ \int_C \left[-\frac{1}{2} \left(\pi - \dot{\phi} \right)^2 \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left(i \left[\int_C \left(-\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{1}{2} \phi (-\nabla^2 + m^2) \phi - V[\phi] \right) + J\phi \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

com

$$\begin{aligned} \int_c \dot{\phi}^2 &= \int_c (\partial_0 \phi)^2 \\ &= \int_c -\phi \partial_0^2 \phi \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

temos

$$Z[J] = \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp i \left\{ \int_C \left[-\frac{1}{2} (\pi - \dot{\phi})^2 \right] \right\} \\ \times \exp \left(i \left[\int_C \left(-\frac{\phi \partial_0^2 \phi}{2} - \frac{1}{2} \phi (-\nabla^2 + m^2) \phi - V[\phi] \right) + J\phi \right] \right) \quad (\text{A.5})$$

Como estamos trabalhando no espaço de Minkowski

$$\square = \partial_0^2 - \nabla^2 \quad (\text{A.6})$$

$$Z[J] = \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp i \left\{ \int_C \left[-\frac{1}{2} (\pi - \dot{\phi})^2 \right] \right\} \\ \times \exp \left(i \left[\int_C \left(-\frac{\phi \partial_0^2 \phi}{2} - \frac{1}{2} \phi (-\nabla^2) \phi - \frac{1}{2} \phi m^2 \phi - V[\phi] \right) + J\phi \right] \right) \quad (\text{A.7})$$

$$Z[J] = \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp i \left\{ \int_C \left[-\frac{1}{2} (\pi - \dot{\phi})^2 \right] \right\} \\ \times \exp \left(i \left[\int_C \left(-\frac{1}{2} \phi (\partial_0^2 - \nabla^2 - m^2) \phi - V[\phi] \right) + J\phi \right] \right) \quad (\text{A.8})$$

$$Z[J] = \int_{\tau \in C} \Pi \frac{D\phi(\tau) D\pi(\tau)}{2\pi} \exp \left[i \left\{ \int_C \left[-\frac{1}{2} (\pi - \dot{\phi})^2 \right] \right\} \right] \\ \times \exp \left(i \left[\int_C \left(\frac{1}{2} \phi (-\square - m^2) \phi - V[\phi] \right) + J\phi \right] \right) \quad (\text{A.9})$$

então

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \phi (-\square - m^2) \phi - V[\phi] \quad (\text{A.10})$$

Nós temos (2.92). Usando a definição (2.84) juntamente com a propriedade (2.80) da função delta δ_c no contorno, podemos escrever (2.92) como

$$Z[J] = \exp \left\{ -i \int_c V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_c J \mathcal{G}_\beta J \right\} \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Demonstração da Eq (2.93)

Lembramos as seguintes expressões

$$\frac{\delta J(\mathbf{x}'\tau')}{\delta J(\mathbf{x}\tau)} = \delta_c(\tau - \tau') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{B.1})$$

$$\int_c d\tau \delta_c(\tau - \tau') f(\tau) = f(\tau') \quad (\text{B.2})$$

$$Z[J] = \int D_c \phi \exp \left[i \int_c (L(\phi) + J\phi) \right] \quad (\text{B.3})$$

$$L(\phi) = \frac{1}{2} \phi (-\square_c - m^2) \phi - V[\phi] \quad (\text{B.4})$$

E ao usarmos uma abordagem funcional, é muito útil notarmos que

$$\begin{aligned} F &\equiv \exp \left\{ i \int_c J(x) \phi(x) d^4x \right\} \\ \frac{\delta}{\delta J} F &= \frac{\delta}{\delta J} \exp \left\{ i \int_c J(x) \phi(x) d^4x \right\} \\ \frac{\delta}{\delta J} \exp \left\{ i \int_c J(x) \phi(x) d^4x \right\} &= i \phi(x) \exp \left\{ i \int_c J(x) \phi(x) d^4x \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} = \phi(x) \quad (\text{B.6})$$

Ao especificar as condições de contorno, notamos que ao ir da Eq. (2.92) a Eq. (2.93) fizemos as seguintes mudanças de variáveis

$$\phi'(x) = \phi(x) - i \int_C \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) \quad (\text{B.7})$$

$$\phi(x) = \phi'(x) + i \int_C \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) \quad (\text{B.8})$$

Onde o propagador térmico é a função de Green no contorno

$$(-\square_c - m^2) \mathcal{G}_\beta(x-y) = i \delta_C(x-y) \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[-i \int_c V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] d^4x \right] \int \mathcal{D}\phi \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4x \phi(x) (-\square_c - m^2) \phi(x) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \int_c d^4x \int_c d^4y \phi(x) (-\square_c - m^2) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) \right] \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \int_c d^4x \int_c d^4y \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) (-\square_c - m^2) \phi(x) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_c d^4x \int_c d^4z \int_c d^4y \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) (-\square_c - m^2) \mathcal{G}_\beta(x-z) J(z) \right\} \\ &\times \exp \left[i \int_c d^4x J(x) \phi(x) - \int_c d^4x \int_c d^4y J(x) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

usando (B.9) e fazendo algumas integrais por partes, obtemos

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[-i \int_c V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] d^4x \right] \int \mathcal{D}\phi \\ &\times \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4x \phi(x) (-\square_c - m^2) \phi(x) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_c d^4x \int_c d^4y J(y) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

o termo

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4x \phi(x) (-\square_c - m^2) \phi(x) \right] \quad (\text{B.12})$$

é conhecido como diagrama de vácuo, o qual é absorvido na energia de ponto zero.

Finalmente obtemos (2.93)

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[-i \int_c V \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] d^4x \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\int_c d^4y \int_c d^4x J(x) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

Fatorização do gerador funcional

Neste apêndice mostraremos a fatorização do gerador funcional das funções de Green $Z[J]$ no contorno de Schwinger-Keldysh. Esta demonstração está baseada na Ref. [67].

Partimos de

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int_C d^4x \mathcal{L}_I \left[\frac{\delta}{i\delta J(x)} \right] \right\} Z[0] \quad (\text{C.1})$$

para o gerador funcional. Onde $Z[0]$ é apenas

$$Z[J] = N \int [d\phi] \exp i \int_C d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\phi(x)] \quad (\text{C.2})$$

com

$$L(x) = \frac{1}{2} \phi(x) (-\partial^2 - m^2) \phi(x) + L_I(x) \quad (\text{C.3})$$

e com L_0 ao invés de L .

Com C sendo o contorno em tempo real da Fig. 2.1. Como trabalhamos com um campo escalar de uma componente, temos

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= N \exp -\frac{i}{2} \left[\int_{C_{12}} \int_{C_{12}} + \int_{C_{12}} \int_{C_{34}} + \int_{C_{34}} \int_{C_{12}} + \int_{C_{34}} \int_{C_{34}} \right] d^4x d^4x' \\ &\times J(x) D^{(c)}(x-x') J(x') \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A integração no contorno foi dividida em quatro partes, como indicado na Fig.2.1, e $C_{rs} = C_r U C_s$.

Agora consideremos o caso t em C_1 , e t' em C_3 . Parametrizamos C_3 por $t' = t_f - i\lambda$, $0 \leq \lambda \leq \sigma$, e usamos o fato que $\theta(t - t') = 0$ para escrever o correspondente propagador como

$$iD^{(13)}(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[ip_0(t_f - t)] \tilde{F}(p_0) \quad (C.5)$$

com

$$\tilde{F}(p_0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \rho_0(p) n(p_0) \exp(\lambda p_0) \quad (C.6)$$

Onde apenas a dependência relevante de p_0 foi indicada. Um vez que nós temos $0 \leq \lambda \leq \beta$, a combinação $n(p_0) \exp(\lambda p_0)$ é amortecida para valores grandes de $|p_0|$, tal que $D^{(13)}(x - x')$ é analítico para estes valores de λ . Para justificar que $D^{(13)}(x - x')$ é analítico, fazemos a seguinte análise

$$\begin{aligned} iD^{(13)}(x - x') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[ip_0(t_f - t)] \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \\ &\times \rho_0(p) n(p_0) \exp(\lambda p_0) \end{aligned} \quad (C.7)$$

onde

$$\rho_0(p) = i \left[\frac{1}{(p_0 + i\varepsilon)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} - \frac{1}{(p_0 - i\varepsilon)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} \right] \quad (C.8)$$

e

$$E_{\mathbf{p}}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (C.9)$$

$$\rho_0(p) = i \left[\frac{1}{\mathbf{p}^2 - f_1(p_0)} - \frac{1}{\mathbf{p}^2 - f(p_0)} \right] \quad (C.10)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(p_0) &= p_0^2 - 2i\varepsilon p_0 - \varepsilon^2 - m^2 \\ f(p_0) &= p_0^2 + 2i\varepsilon p_0 - \varepsilon^2 - m^2 \end{aligned} \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned} \rho_0(p) &= i \left[\frac{-f(p_0) + f_1(p_0)}{[\mathbf{p}^2 - f_1(p_0)][\mathbf{p}^2 - f(p_0)]} \right] \\ &= \frac{4\varepsilon p_0}{[\mathbf{p}^2 - f_1(p_0)][\mathbf{p}^2 - f(p_0)]} \end{aligned} \quad (C.12)$$

Primeiro fazemos a análise da integral em $\mathbf{p}$ de $D^{(13)}(x - x')$

$$\begin{aligned} iD^{(13)}(x - x') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[ip_0(t_f - t)] n(p_0) \exp(\lambda p_0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\ &\times \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \frac{4\varepsilon p_0}{[\mathbf{p}^2 - f_1(p_0)][\mathbf{p}^2 - f(p_0)]} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

O lado direito da equação acima é a transformada de Fourier de $D^{(13)}(x - x')$, e o importante é que o integrando é analítico, devido a integral ser finita para altos valores de $\mathbf{p}$

$$\int d\mathbf{p} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \quad (\text{C.14})$$

Agora analisamos a integral em p_0

$$\begin{aligned} iD^{(13)}(x - x') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \exp[ip_0(t_f - t)] \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \\ &\times \frac{e^{-(\beta-\lambda)p_0}}{1 - e^{-\beta p_0}} \frac{4\varepsilon p_0}{[\mathbf{p}^2 - f_1(p_0)][\mathbf{p}^2 - f(p_0)]} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Como mencionamos, a combinação $\frac{e^{-(\beta-\lambda)p_0}}{1 - e^{-\beta p_0}}$ é amortecida para grandes valores de p_0 , lembrando que

$$0 < \lambda < \beta \quad (\text{C.16})$$

e

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}) \frac{1}{\mathbf{p}^2 - f(p_0)} \sim \frac{\exp(-|p_0|\mathbf{z})}{\mathbf{z}} \quad (\text{C.17})$$

onde $\mathbf{z} > 0$ e a transformada de Fourier acima é uma Yukawa. O propagador $D^{(13)}(x - x')$ é analítico em p_0 . Agora, a parte C_3 do contorno pode ser ignorada para grandes valores de t_f , temos que mostrar que o lado direito da Eq. (C.5) desaparece para t_f tendendo ao infinito. O lema de Riemann-Lebesgue afirma que a transformada de Fourier mapeia uma função no espaço L^1 em um espaço de funções contínuas as quais desaparecem no infinito. Com relação ao propagador (C.5) e com a transformada de Fourier de $\tilde{F}(p_0)$, vemos que podemos aplicar o lema de Riemann-Lebesgue se

(i) $\tilde{F}(p_0)$ for integrável, ou seja, a densidade espectral $\rho_0(p)$ em (C.6) for uma função ordinária

(ii) $t \neq t_f$

A forma explícita

$$\rho_0(p) = i \text{ Disc} \prod_l \frac{1}{p^2 - m_l^2} \quad (\text{C.18})$$

Deixa claro que a densidade espectral torna-se uma função generalizada no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Já que isso invalida a condição (i), concluímos que devemos manter ε uniformemente finito durante os cálculos e tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ no final. Em outras palavras, as funções delta devem sempre ser entendidas como regularizadas. Podemos facilmente ver a necessidade desta regularização ε fazendo $\tilde{F}(p_0) = \delta(p_0)$ em (C.5). É muito importante mencionar que esta prescrição não viola a condição KMS, fornecido o argumento p_0 da função distribuição em (C.6), e não substituída pelo valor na concha de massa $\pm\omega_p$.

A condição (ii) não é satisfeita para $t \rightarrow \infty$. Contudo, ainda obtemos o resultado desejado

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{C_1} \int_{C_3} d^4x d^4x' J(x) D^{(C)}(x - x') J(x') = 0 \quad (\text{C.19})$$

se tivermos

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} J(x) = 0 \quad (\text{C.20})$$

Impondo esta condição nas fontes é equivalente a restringir a ocorrência dos campos na integral de trajetória satisfazendo as equações de campo livre para $t = t_i \rightarrow -\infty$ e $t = t_f \rightarrow \infty$. Fisicamente, esta condição desempenha o mesmo papel que a condição de Bogoliubov no formalismo de Keldysh. Para a teoria de campos relativística com as relações de comutação canônicas usuais, esta condição de contorno extra é compatível com a condição de contorno KMS. Portanto, no nosso caso podemos consistentemente impor (C.20), e concluir que (C.19) seja válida.

Fazendo a mesma análise nas partes C_2 e C_4 do contorno chegamos a conclusão que a segunda e assim como a terceira contribuição do contorno em (C.4) desaparecem no

limite $t_i \rightarrow -\infty, t_f \rightarrow \infty$. Além disso, obviamente temos

$$\frac{\delta J(x')}{\delta J(x)} = 0, \quad t \in C_{12}, \quad t' \in C_{34} \quad (\text{C.21})$$

ou vice e versa. Isto nos mostra o importante resultado que o gerador funcional fatora em uma contribuição de C_{12} e uma contribuição de C_{34}

$$Z[J] = \mathcal{N} Z_{12}[J] Z_{34}[J] \quad (\text{C.22})$$

com os dois geradores funcionais parciais dados por

$$\begin{aligned} Z_{12}[J] &= \exp \left\{ i \int_{C_{12}} d^4x L_1 \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{C_{12}} d^4x d^4x' J(x) D^{(C)}(x-x') J(x') \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

e uma expressão similar para $Z_{34}[J]$

Para o cálculo das funções de Green o fator Z_{34} é uma constante multiplicativa, tipo $\mathcal{N}$, ou seja, as partes verticais do contorno podem ser ignoradas completamente. É importante mencionar que os outros propagadores não desaparecem com estes argumentos temporais, mesmo que consideremos seus argumentos temporais tendendo ao infinito.

Apêndice D

Funções de Green térmicas livres

Neste apêndice demostramos em detalhes que

$$\int_{C_1 C_2} J(x) \mathcal{G}_\beta(x-y) J(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \int d\bar{x} d\bar{y} J_a(t\bar{x}) \mathcal{G}_\beta^{a,b}(t-t', \bar{x}-\bar{y}) J_b(t'\bar{y}) \quad (D.1)$$

e por simplicidade consideramos somente os argumentos temporais

$$\int_{C_1 C_2} dt \int_{C_1 C_2} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' J_a(t) \mathcal{G}_\beta^{a,b}(t-t') J_b(t') \quad (D.2)$$

Explicitando os limites de integração no contorno, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{C_1 C_2} dt \int_{C_1 C_2} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') \\ &= \int_{C_1 C_2} dt \left(\int_{-T}^{+T} dt' + \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt' \right) J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') \\ &= \left(\int_{-T}^{+T} dt + \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt \right) \left(\int_{-T}^{+T} dt' + \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt' \right) J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') \end{aligned} \quad (D.3)$$

Reescrevemos a expressão acima como

$$\int_{C_1 C_2} dt \int_{C_1 C_2} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') = I + II + III + IV \quad (D.4)$$

onde

$$I = \int_{-T}^{+T} dt \int_{-T}^{+T} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t') \quad (\text{D.5})$$

$$II = \int_{-T}^{+T} dt \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t') \quad (\text{D.6})$$

$$III = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt \int_{-T}^{+T} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t') \quad (\text{D.7})$$

$$IV = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t') \quad (\text{D.8})$$

Escolhemos $\sigma = i\frac{\beta}{2}$ no contorno adotado em [54], para obtermos os resultados simétricos para os propagadores livres, obtendo assim as mesmas expressões encontradas em [3]

$$I = \int_{-T}^{+T} dt \int_{-T}^{+T} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t') \quad (\text{D.9})$$

$$II = \int_{-T}^{+T} dt \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t') \quad (\text{D.10})$$

fazendo a mudança de variável

$$t' \rightarrow t'' \quad (\text{D.11})$$

$$II = \int_{-T}^{+T} dt \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt'' J(t) \mathcal{G}_\beta(t - t'') J(t'') \quad (\text{D.12})$$

e

$$t'' = t' - i\sigma \quad (\text{D.13})$$

obtemos

$$II = \int_{-T}^{+T} dt \int_T^{-T} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t + i\sigma - t') J(t' - i\sigma) \quad (\text{D.14})$$

agora reescrevemos III como

$$III = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt \int_{-T}^{+T} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') \quad (D.15)$$

fazendo

$$t = t'' \quad (D.16)$$

obtemos

$$III = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt'' \int_{-T}^{+T} dt' J(t'') \mathcal{G}_\beta(t''-t') J(t') \quad (D.17)$$

Fazendo outra mudança de variável

$$t'' = t - i\sigma \quad (D.18)$$

$$III = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt \int_{-T}^{+T} dt' J(t-i\sigma) \mathcal{G}_\beta(t-i\sigma-t') J(t') \quad (D.19)$$

finalmente reescrevemos (IV) como

$$IV = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt' J(t) \mathcal{G}_\beta(t-t') J(t') \quad (D.20)$$

fazendo

$$\begin{aligned} t &= t'' \\ t' &= t''' \end{aligned} \quad (D.21)$$

$$IV = \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt'' \int_{T-i\sigma}^{-T-i\sigma} dt''' J(t'') \mathcal{G}_\beta(t''-t''') J(t''') \quad (D.22)$$

e fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} t'' &= t - i\sigma \\ t''' &= t' - i\sigma \end{aligned} \quad (D.23)$$

obtemos

$$IV = \int_T^{-T} dt \int_T^{-T} dt' J(t - i\sigma) \mathcal{G}_\beta(t - t') J(t' - i\sigma) \quad (D.24)$$

Tomando o limite $T \rightarrow \infty$ e usando que $\sigma = \frac{\beta}{2}$, podemos escrever $(I + II + III + IV)$ em uma forma compacta

$$\int_{C_1 C_2} J(x) \mathcal{G}_\beta(x - y) J(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \int d\bar{x} d\bar{y} J_a(t\bar{x}) \mathcal{G}_\beta^{a,b}(t - t', \bar{x} - \bar{y}) J_b(t'\bar{y}) \quad (D.25)$$

onde $a, b = 1, 2$ e

$$\begin{aligned} j_1(x) &= j(x) \\ j_2(x) &= j\left(t - \frac{i\beta}{2}, \bar{x}\right) \end{aligned} \quad (D.26)$$

e

$$\mathcal{G}_\beta^{11}(x - y) = \mathcal{G}_\beta(x - y) \quad (D.27)$$

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(x - y) = \mathcal{G}_\beta(y - x) \quad (D.28)$$

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(x - y) = \mathcal{G}_\beta^<\left(x_0 - y_0 + \frac{i\beta}{2}, \bar{x} - \bar{y}\right) \quad (D.29)$$

$$\mathcal{G}_\beta^{21}(x - y) = \mathcal{G}_\beta^>\left(x_0 - y_0 - \frac{i\beta}{2}, \bar{x} - \bar{y}\right) \quad (D.30)$$

Onde as expressões para os propagadores são

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) & 2\pi \frac{e^{-\beta|k_0|/2}}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \delta(k^2 - m^2) \\ 2\pi \frac{e^{-\beta|k_0|/2}}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \delta(k^2 - m^2) & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \end{pmatrix} \quad (D.31)$$

Na próxima seção obteremos cada componente do propagador $\mathcal{G}_\beta^{ab}(k)$ e reescreveremos este propagador como uma matriz diagonal no espaço dos momentos.

D.1 Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112)

Sabemos que a solução para a equação diferencial que define o propagador tem a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta(\tau - \tau'; \omega_k) &= \frac{1}{2\omega_k} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}} \left\{ \left[e^{-i\omega_k(\tau - \tau')} \right. \right. \\ &+ \left. e^{-\beta\omega_k + i\omega_k(\tau - \tau')} \right] \theta(\tau - \tau') \\ &+ \left. \left[e^{i\omega_k(\tau - \tau')} + e^{-\beta\omega_k - i\omega_k(\tau - \tau')} \right] \theta(\tau' - \tau) \right\}\end{aligned}\quad (\text{D.32})$$

Vamos reescrever o propagador em duas partes, uma independente e outra dependente de T . Por simplicidade redefinimos $\omega_k \equiv E$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta(\tau - \tau'; E) &= \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \left[e^{-iE(\tau - \tau')} + e^{-\beta E + iE(\tau - \tau')} \right] \theta(\tau - \tau') \\ &+ \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \left[e^{iE(\tau - \tau')} + e^{-\beta E - iE(\tau - \tau')} \right] \theta(\tau' - \tau)\end{aligned}\quad (\text{D.33})$$

reescrevemos $\tau - \tau' \equiv t$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta(t; E) &= e^{-\beta E} f(E) e^{-iEt} \theta(t) + \frac{1}{2E} e^{-iEt} \theta(t) + f(E) e^{iEt} \theta(t) \\ &- \frac{1}{2E} e^{iEt} \theta(t) + e^{-\beta E} f(E) e^{iEt} \theta(-t) + \frac{1}{2E} e^{iEt} \theta(-t) \\ &+ f(E) e^{-iEt} \theta(-t) - \frac{1}{2E} e^{-iEt} \theta(-t)\end{aligned}\quad (\text{D.34})$$

onde

$$f(E) = \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \quad (\text{D.35})$$

Reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta(t; E) &= \frac{1}{2E} [e^{-iEt} \theta(t) + e^{iEt} \theta(-t)] \\ &+ e^{iEt} e^{-\beta E} f(E) [\theta(t) + \theta(-t)] \\ &+ e^{-iEt} e^{-\beta E} f(E) [\theta(-t) + \theta(t)]\end{aligned}\quad (\text{D.36})$$

146D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112)

como

$$[\theta(t) + \theta(-t)] = 1 \quad (\text{D.37})$$

Reescrevemos $\mathcal{G}_\beta(t, E)$ como

$$\mathcal{G}_\beta(t; E) = \frac{1}{2E} [e^{-iEt}\theta(t) + e^{iEt}\theta(-t)] + \frac{1}{2E} \frac{1}{e^{\beta E} - 1} [e^{iEt} + e^{-iEt}] \quad (\text{D.38})$$

Notamos que a contribuição dependente de T está inteiramente contida no segundo termo da equação acima. Baseado nisso, reescrevemos o propagador como

$$\mathcal{G}_\beta(t; E) \equiv \mathcal{G}_0(t; E) + \tilde{\mathcal{G}}_\beta(t; E) \quad (\text{D.39})$$

Analizamos o primeiro termo da equação acima

$$\mathcal{G}_0(t; E) = \frac{1}{2E} [e^{-iEt}\theta(t) + e^{iEt}\theta(-t)] \quad (\text{D.40})$$

fazendo a transformada de Fourier obtemos

$$\mathcal{G}_0(k'_0, E) = \frac{1}{2E} \int dt [e^{-iEt}\theta(t) + e^{iEt}\theta(-t)] e^{ik'_0 t} \quad (\text{D.41})$$

e fazemos uso da representação integral para a função θ

$$\theta(t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 t}}{(k_0 + i\varepsilon)} \quad (\text{D.42})$$

Temos

$$\mathcal{G}_0(k'_0, E) = \frac{i}{2E} \left[\frac{2E - 2i\varepsilon}{k_0'^2 + k_0' E - i\varepsilon k_0' - E k_0' - E^2 + i\varepsilon E + i\varepsilon k_0' + i\varepsilon E - \varepsilon^2} \right] \quad (\text{D.43})$$

$$\mathcal{G}_0(k'_0, E) = \frac{i}{2E} \left[\frac{2E - 2i\varepsilon}{k_0'^2 - E^2 + 2i\varepsilon E - \varepsilon^2} \right] \quad (\text{D.44})$$

Onde $E = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, é um número positivo. A expressão acima é válida para $k'_0 > 0$ e $k'_0 < 0$, e usando o fato de que ε é pequeno escrevemos

$$\mathcal{G}_0(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\text{D.45})$$

D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112)147

onde denotamos $k = k_0, \mathbf{k}$. E $\mathcal{G}_0(k)$ é o propagador a $T = 0$.

Agora analisamos o segundo termo

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(t; E) = \frac{1}{2E} \frac{1}{e^{\beta E} - 1} [e^{iEt} + e^{-iEt}] \quad (\text{D.46})$$

usando que

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \\ &= \frac{1}{2E} \frac{e^{\beta E}}{e^{\beta E} - 1} \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(t; E) = \frac{1}{2E} \frac{1}{e^{\beta E} - 1} [e^{iEt} + e^{-iEt}] \quad (\text{D.48})$$

fazendo a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_\beta(k'_0, E) &= \frac{1}{2E} \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \left[\int dt e^{it(E+k'_0)} + \int dt e^{it(k'_0-E)} \right] \\ &= 2\pi \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \frac{1}{2E} [\delta(k'_0 + E) + \delta(k'_0 - E)] \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

onde $E > 0$

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(k'_0, E) = 2\pi \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \frac{1}{2E} \delta(k'_0 + E) + 2\pi \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \frac{1}{2E} \delta(k'_0 - E) \quad (\text{D.50})$$

Usando a propriedade

$$\delta(k'^2_0 - E^2) = \frac{1}{2E} [\delta(k'_0 + E) + \delta(k'_0 - E)] \quad (\text{D.51})$$

obtemos

$$\tilde{\mathcal{G}}_\beta(k'_0, E) = 2\pi \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k'^2_0 - E^2) \quad (\text{D.52})$$

Onde o módulo aparece porque $\delta(k'^2_0 - E^2)$ seleciona ambos os casos: $k'_0 > 0$ e $k'_0 < 0$.

Escrevendo as duas contribuições do propagador juntas, obtemos

$$\mathcal{G}_\beta(k) = \mathcal{G}_0(k) + \tilde{\mathcal{G}}_\beta(k) \quad (\text{D.53})$$

$$\mathcal{G}_\beta(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + 2\pi \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.54})$$

148D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112)

Lembrando que o propagador no formalismo de Schwinger-Keldysh tem uma estrutura matricial

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \mathcal{G}_0(k) + \tilde{\mathcal{G}}_\beta(k) \quad (\text{D.55})$$

onde

$$\mathcal{G}_\beta^{11}(x-y) = \mathcal{G}_\beta(x-y) \quad (\text{D.56})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(x-y) = \mathcal{G}_\beta(y-x) \quad (\text{D.57})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(x-y) = \mathcal{G}_\beta^<\left(x_0 - y_0 + \frac{i\beta}{2}, \bar{x} - \bar{y}\right) \quad (\text{D.58})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{21}(x-y) = \mathcal{G}_\beta^>\left(x_0 - y_0 - \frac{i\beta}{2}, \bar{x} - \bar{y}\right) \quad (\text{D.59})$$

O propagador calculado acima (D.54) é exatamente a componente $\mathcal{G}_\beta^{11}(x-y)$. Além disso

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(x-y) = \mathcal{G}_\beta^{11}(y-x) \quad (\text{D.60})$$

Em outras palavras $\mathcal{G}_\beta^{22}(x-y)$ é o complexo conjugado de $\mathcal{G}_\beta^{11}(x-y)$, e isto é facilmente justificado porque apenas uma mudança ocorre no cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{22}$, que é a mudança de sinal nas exponenciais das transformadas de Fourier. Então temos que

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(x-y) = (\mathcal{G}_\beta^{11}(k))^* \quad (\text{D.61})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(x-y) = \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + 2\pi \frac{1}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.62})$$

Agora calculamos $\mathcal{G}_\beta^{12}(x-y)$ e $\mathcal{G}_\beta^{21}(x-y)$.

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(x-y) = \mathcal{G}_\beta^<\left(x_0 - y_0 + \frac{i\beta}{2}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\right) \quad (\text{D.63})$$

Nós temos uma parte imaginária no argumento temporal do propagador acima, mas usando a condição de contorno KMS

$$\mathcal{G}_\beta^>(x_0 - y_0 - i\beta, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{G}_\beta^<(x_0 - y_0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{D.64})$$

Vamos negligenciar o argumento espacial do propagador e vamos restringir nossa análise considerando apenas os argumentos temporais

$$\mathcal{G}_\beta^>(x_0 - y_0 - i\beta) = \mathcal{G}_\beta^<(x_0 - y_0) \quad (\text{D.65})$$

D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112) 149

O propagador faz sentido se o argumento temporal for real. Calcularemos agora a componente $\mathcal{G}_\beta^{12}(x_0 - y_0)$ onde

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(x_0 - y_0) = \mathcal{G}_\beta^<\left(x_0 - y_0 + \frac{i\beta}{2}\right) \quad (\text{D.66})$$

definindo $x_0 - y_0 \equiv t$

E usando a solução para a equação diferencial que define o propagador $\mathcal{G}_\beta(t, \omega_k)$

$$\mathcal{G}_\beta(t; E) = \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \left\{ [e^{-iEt} + e^{-\beta E + iEt}] \theta(t) + [e^{iEt} + e^{-\beta \omega_k - iEt}] \theta(-t) \right\} \quad (\text{D.67})$$

lembrando que

$$E = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (\text{D.68})$$

Para obter $\mathcal{G}_\beta(t; E)$, usamos o *Ansatz*

$$\mathcal{G}_\beta(t; E) = \mathcal{G}_\beta^>(t; E) + \mathcal{G}_\beta^<(t; E) \quad (\text{D.69})$$

onde

$$\mathcal{G}_\beta^<(t; E) = \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} [e^{iEt} + e^{-\beta \omega_k - iEt}] \quad (\text{D.70})$$

As funções θ selecionam os propagadores avançados e retardados. Nesta derivação

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(t) = \mathcal{G}_\beta^<\left(t + \frac{i\beta}{2}\right) \quad (\text{D.71})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(t) = \frac{e^{-\frac{E\beta}{2}}}{1 - e^{-\beta E}} \frac{1}{2E} [e^{iEt} + e^{-iEt}] \quad (\text{D.72})$$

Fazendo a transformada de Fourier, obtemos

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(k'_0, E) = 2\pi \frac{e^{-\frac{E\beta}{2}}}{1 - e^{-\beta E}} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.73})$$

No cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{11}(t)$ demostramos que $E = |k_0|$, onde

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(k'_0, E) = 2\pi \frac{e^{\frac{\beta|k_0|}{2}}}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.74})$$

Calculamos agora a componente $\mathcal{G}_\beta^{21}(k'_0, E)$

$$\mathcal{G}_\beta^{21}(x_0 - y_0) = \mathcal{G}_\beta^>\left(x_0 - y_0 - \frac{i\beta}{2}\right) \quad (\text{D.75})$$

150D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112)

onde

$$\mathcal{G}_\beta^>(t) = \frac{1}{2E} \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} [e^{-iEt} + e^{-\beta E + iEt}] \quad (\text{D.76})$$

fazendo

$$t = x_0 - y_0 \quad (\text{D.77})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{21}(t) = \frac{e^{-\frac{\beta E}{2}}}{1 - e^{-\beta E}} \frac{1}{2E} [e^{-iEt} + e^{iEt}] \quad (\text{D.78})$$

E fazendo a transformada de Fourier

$$\mathcal{G}_\beta^{21}(k'_0, E) = 2\pi \frac{e^{\frac{\beta E}{2}}}{e^{\beta E} - 1} \delta(k^2 - E^2) \quad (\text{D.79})$$

com $E = |k_0|$ e

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ k &= k_0, \mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

E o propagador $\mathcal{G}_\beta^{ab}(k)$ no espaço de momentos adquire a forma

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) & 2\pi \frac{e^{\frac{\beta E}{2}}}{e^{\beta E} - 1} \delta(k^2 - m^2) \\ 2\pi \frac{e^{\frac{\beta E}{2}}}{e^{\beta E} - 1} \delta(k^2 - m^2) & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \end{pmatrix} \quad (\text{D.81})$$

Agora faremos algumas manipulações para escrevermos o propagador $\mathcal{G}_\beta^{ab}(k)$ na forma diagonal no espaço dos momentos. Para isso definimos

$$\cosh^2 \theta = \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \quad (\text{D.82})$$

e usamos a relação

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\text{D.83})$$

É possível escrever $\mathcal{G}_\beta^{ab}$ como

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.84})$$

D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112) 151

Agora demostramos a expressão acima

$$\cosh^2 \theta = \frac{1}{(1 - e^{-\beta E})} \quad (\text{D.85})$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1 \quad (\text{D.86})$$

$$\sinh^2 \theta = \frac{e^{-\beta E}}{(1 - e^{-\beta E})} \quad (\text{D.87})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^{ab}(k) &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \cosh \theta & \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \sinh \theta \\ \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \sinh \theta & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \cosh \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.88})$$

Calculamos os elementos da matriz separadamente

D.1.1 Cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{11}(k)$

$$\mathcal{G}_\beta^{11}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \cosh^2 \theta + \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \sinh^2 \theta \quad (\text{D.89})$$

com

$$\cosh^2 \theta = \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \quad (\text{D.90})$$

$$\sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta - 1 \quad (\text{D.91})$$

$$\sinh^2 \theta = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \quad (\text{D.92})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^{11}(k) &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \cosh^2 \theta + \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \sinh^2 \theta \\ &+ \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \sinh^2 \theta - \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \sinh^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{D.93})$$

152D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112)

Fazendo algumas modificações obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta^{11}(k) &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \left[i \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \right\} \right] \\ &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2}{e^{\beta E} - 1} \left[\frac{\varepsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \varepsilon^2} \right]\end{aligned}\quad (\text{D.94})$$

usando que

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\text{D.95})$$

$$\frac{\varepsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.96})$$

obtemos

$$\mathcal{G}_\beta^{11}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta E} - 1} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.97})$$

D.1.2 Cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{22}(k)$

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \sinh^2 \theta - \frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \cosh^2 \theta \quad (\text{D.98})$$

$$\cosh^2 \theta = \frac{1}{1 - e^{-\beta E}} \quad (\text{D.99})$$

$$\sinh^2 \theta = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \quad (\text{D.100})$$

$$\sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta - 1 \quad (\text{D.101})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\beta^{22}(k) &= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \sinh^2 \theta - \frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} [\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta] \\ &\quad - \frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \sinh^2 \theta \\ &= -\frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + \frac{i}{e^{\beta E} - 1} \left[\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \right]\end{aligned}\quad (\text{D.102})$$

demonstramos anteriormente que

$$\left[\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \right] = -2\pi i \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.103})$$

logo

$$\mathcal{G}_\beta^{22}(k) = -\frac{i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta E} - 1} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.104})$$

D.1. Propagador térmico diagonal no espaço dos momentos (2.109) e (2.112) 153

D.1.3 Cálculo de $\mathcal{G}_\beta^{12}(k)$ e $\mathcal{G}_\beta^{21}(k)$

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(k) = \sinh \theta \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \cosh \theta + \cosh \theta \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \sinh \theta \quad (\text{D.105})$$

usando

$$\begin{aligned} \cosh \theta &= \frac{1}{(1 - e^{-\beta E})^{1/2}} \\ \sinh \theta &= \frac{e^{-\beta E/2}}{(1 - e^{-\beta E})^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.106})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^{12}(k) &= \frac{e^{-\beta E/2}}{(1 - e^{-\beta E})^{1/2}} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(1 - e^{-\beta E})^{1/2}} \\ &+ \frac{1}{(1 - e^{-\beta E})^{1/2}} \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \frac{e^{-\beta E/2}}{(1 - e^{-\beta E})^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.107})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(k) = \frac{e^{-\beta E/2}}{(1 - e^{-\beta E})} i \left[\frac{-2i\varepsilon}{(k^2 - m^2)^2 + \varepsilon^2} \right] \quad (\text{D.108})$$

$$\mathcal{G}_\beta^{12}(k) = 2\pi \frac{e^{-\beta E/2}}{(1 - e^{-\beta E})} \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{D.109})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^{12}(k) &= \mathcal{G}_\beta^{21}(k) \\ \mathcal{G}_\beta^{12}(k) &= 2\pi \frac{e^{-\beta E/2}}{(1 - e^{-\beta E})} \delta(k^2 - m^2) \end{aligned} \quad (\text{D.110})$$

Finalmente obtemos

$$\mathcal{G}_\beta^{ab}(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) & 2\pi \frac{e^{-\beta|k_0|/2}}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \delta(k^2 - m^2) \\ 2\pi \frac{e^{-\beta|k_0|/2}}{1 - e^{-\beta|k_0|}} \delta(k^2 - m^2) & \frac{-i}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} + \frac{2\pi}{e^{\beta|k_0|} - 1} \delta(k^2 - m^2) \end{pmatrix} \quad (\text{D.111})$$

Apêndice E

Expansão perturbativa de $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(y) \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_1) \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_1) \right]} \quad (\text{E.1})$$

onde

$$\begin{aligned} S_2[\varphi] &= \left[-\square_{x_1} - \mu^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^2(x_1) - \lambda \nu \varphi(x_1) \right] \\ &= \left[-\square_{x_1} - \mu^2 - \lambda V''[\varphi(x_1)] \right] \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(y) \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_1) \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_1) \right]} \quad (\text{E.3})$$

reescrevemos $S_2[\varphi]$ como sendo

$$\bar{S}_2[\varphi] = -iG_0^{-1}(x_1 - x_2) - \lambda V''[\varphi(x_1)] \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} &\langle \phi(x) \phi(y) \rangle \\ = &\frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(y) \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) \bar{S}_2[\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) \bar{S}_2[\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right]} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

escrevendo explicitamente

$$\begin{aligned}
& \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) \bar{S}_2 [\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&= \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) V''[\varphi(x_1)] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \quad (E.6)
\end{aligned}$$

Expandindo a segunda exponencial acima

$$\begin{aligned}
& \exp \left[-\frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) V''[\varphi(x_1)] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&= 1 - \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) V''[\varphi(x_1)] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) + O(\lambda^2) \quad (E.7)
\end{aligned}$$

notamos que

$$\begin{aligned}
& \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) \bar{S}_2 [\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&= \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&\times \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) V''[\varphi(x_1)] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right\} \quad (E.8)
\end{aligned}$$

distribuindo os termos obtemos

$$\begin{aligned}
& \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) \bar{S}_2 [\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&= \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&- \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x \phi(x) V''[\varphi(x)] \phi(x) \\
&\times \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \quad (E.9)
\end{aligned}$$

até a ordem λ obtemos

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) \phi(x_1) \right] \\
&= \int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \\
&- \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \\
&\times \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \tag{E.10}
\end{aligned}$$

Agora expandimos o denominador

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_1) \right] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \right. \\
&\times \left. \left[1 - \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) V''[\varphi(x_1)] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \right\}^{-1} \tag{E.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_1) \right] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \right. \\
&- \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(x) \\
&\times \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \left. \right\}^{-1} \tag{E.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2 [\varphi] \phi(x_1) \right] \right\}^{-1} \\
&= \left[a - \frac{i\lambda}{2} b \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

onde

$$a = \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right] \tag{E.14}$$

$$\begin{aligned}
b &= \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(x) \\
&\times \exp \left[\frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right]
\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$\begin{aligned}
\left[a - \frac{i\lambda}{2} b \right]^{-1} &= a^{-1} \left[1 - \frac{i\lambda}{2} \frac{b}{a} \right]^{-1} \\
&= a^{-1} \left[1 + \frac{i\lambda}{2} \frac{b}{a} \right]
\end{aligned} \tag{E.16}$$

antes de escrevermos a expressão explicitamente, definimos uma notação compacta

$$Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)] = \frac{1}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) G_0^{-1}(x_1 - x_2) \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \tag{E.17}$$

usando esta notação temos

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 \phi(x_1) S_2 [\varphi] \phi(x_1) \right] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \int \mathcal{D}_c \phi \exp [Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]] \right\}^{-1} \\
&\times \left[1 + \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \right. \\
&\times \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(x) \exp [Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp [Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}
\end{aligned} \tag{E.18}$$

relembrando que

$$\begin{aligned} & \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[\frac{i}{2} \int_c d^4 x_1 d^4 x_2 \phi(x_1) S_2[\varphi] \phi(x_2) \delta^4(x_1 - x_2) \right]} \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle &= \left\{ \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \right. \\ &\quad - \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \\ &\quad \times \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \left. \right\} \\ &\quad \times \{1 + \lambda c\} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

$$c = \frac{i}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(x) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \quad (\text{E.21})$$

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle \quad (\text{E.22})$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \right. \\ &\quad - \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \\ &\quad \times \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \left. \right\} \\ &\quad \times \{1 + \lambda c\} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \\ &\quad - \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4 x V''[\varphi(x)] \\ &\quad \times \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \\ &\quad + \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp \left[Z \left[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x) \right] \right]} \\ &\quad \times \lambda c + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

e relembrando que

$$c = \frac{i}{2} \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(x) \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]} \quad (\text{E.25})$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]} \\ &+ \frac{i\lambda}{2} \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]} \\ &\times \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(x) \phi(x) \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]} \\ &- \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \\ &\times \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]} \quad (\text{E.26}) \end{aligned}$$

reescrevemos a expressão acima numa notação compacta obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle &= \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 \\ &+ \frac{i\lambda}{2} \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\ &- \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \quad (\text{E.27}) \end{aligned}$$

onde

$$\langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 = \frac{\int \mathcal{D}_c \phi \phi(y_1) \phi(y_2) \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]}{\int \mathcal{D}_c \phi \exp[Z[G_0^{-1}(x_1 - x_2), \phi(x)]]} \quad (\text{E.28})$$

no termo $\langle \phi(y_1) \phi(y_2) \phi(x) \phi(x) \rangle$ aplicamos o teorema de Wick

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(y_1) \phi_2(y_2) \phi_3(x) \phi_4(x) \rangle_0 &= \langle \phi_1(y_1) \phi_2(y_2) \rangle_0 \langle \phi_3(x) \phi_4(x) \rangle_0 \\ &+ \langle \phi_1(y_1) \phi_3(x) \rangle_0 \langle \phi_2(y_2) \phi_4(x) \rangle_0 \\ &+ \langle \phi_1(y_1) \phi_4(x) \rangle_0 \langle \phi_2(y_2) \phi_3(x) \rangle_0 \\ &= \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\ &+ 2 \langle \phi(y_1) \phi(x) \rangle_0 \langle \phi(y_2) \phi(x) \rangle_0 \quad (\text{E.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle &= \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 \\
&+ \frac{i\lambda}{2} \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\
&- \frac{i\lambda}{2} \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(x) \phi(x) \rangle_0 \\
&- \frac{i\lambda}{2} \int_c d^4x V''[\varphi(x)] 2 \langle \phi(y_1) \phi(x) \rangle \langle \phi(y_2) \phi(x) \rangle_0 \quad (E.30)
\end{aligned}$$

$$\langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle = \langle \phi(y_1) \phi(y_2) \rangle_0 - i\lambda \int_c d^4x V''[\varphi(x)] \langle \phi(y_1) \phi(x) \rangle_0 \langle \phi(y_2) \phi(x) \rangle_0 \quad (E.31)$$

Apêndice F

Propagador vestido

Neste apêndice obteremos a expressão para o propagador escalar vestido no limite de altas temperaturas, Eq.(4.10). A temperatura finita, o propagador em tempo real $\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')$ pode ser escrito em termos da função espectral $\rho(q, q_0)$ [67, 79]

$$\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} \rho(\mathbf{q}, q_0) \{ [1 + n(q_0)] \theta(t - t') + n(q_0) \theta(t' - t) \} \quad (\text{F.1})$$

A equação acima esta demonstrada em detalhes no Apêndice A da Ref.[1]. Onde $n(q_0) = \frac{1}{e^{\beta q_0} - 1}$ e a função espectral para o propagador vestido (4.9), é

$$\rho_v(\mathbf{q}, q_0) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\Gamma)^2 - \omega^2(q)} - \frac{1}{(q_0 - i\Gamma)^2 - \omega^2(q)} \right] \quad (\text{F.2})$$

Onde o índice v significa que a quantidade é vestida, $\omega(q)$ é a solução de $\omega^2(q) = \mathbf{q}^2 + m^2 + \text{Re}\Sigma(\mathbf{q}, \omega)$ e $\Sigma(\mathbf{q})$ é a auto-energia escalar até dois *loops* e $\mathcal{O}(\lambda^2)$. A função espectral (F.2) tem um pico em $q_0 = \omega(q)$, com uma largura dada por $\Gamma \equiv \Gamma(q)$

$$\Gamma(q) = -\frac{\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}, \omega)}{2\omega(q)} \quad (\text{F.3})$$

Para o propagador livre

$$\rho(\mathbf{q}, q_0) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2} - \frac{1}{(q_0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2} \right] \quad (\text{F.4})$$

Substituindo (F.4) em (F.1), obtemos as expressões para os propagadores livres

$$\mathcal{G}_\beta^>(t - t', E) = \frac{1}{2E} \{ (1 + 2n(E)) \cos(E(t - t')) - i \sin(E(t - t')) \} \quad (\text{F.5})$$

$$\mathcal{G}_\beta^<(t - t', E) = \mathcal{G}_\beta^>(t' - t, E) \quad (\text{F.6})$$

F.1 Demonstração de (F.4)

A função espectral para o propagador livre é dada por

$$\rho(\mathbf{q}, q_0) \rightarrow i \left[\frac{1}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - E_q^2} - \frac{1}{(q_0 - i\varepsilon)^2 - E_q^2} \right] \quad (\text{F.7})$$

A expressão acima foi derivada por uma continuação analítica feitas nas Eq.(A14b) até a Eq.(A15) do Apêndice A da Ref.[1], onde

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \mathbf{k}) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\rho(k_0, \mathbf{k})}{\omega_n - k_0} \quad (\text{F.8})$$

Para determinar $\rho(k)$ Jackiw estendeu $\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \mathbf{k})$ para uma função contínua $\mathcal{G}_\beta(k_0, \mathbf{k})$ e

$$\rho(k) = \mathcal{G}_\beta(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) - \mathcal{G}_\beta(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}) \quad (\text{F.9})$$

F.2 Demonstração da Eq (F.9)

Nesta parte deste apêndice vamos usar a notação usada em Ref.[1]

$$\mathcal{G}_\beta(k) = \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (\text{F.10})$$

O propagador térmico calculado no formalismo de tempo imaginário é dado por

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n, \mathbf{k}) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\rho(q_0, \mathbf{k})}{\omega_n - q_0} \quad (\text{F.11})$$

fazendo a continuação analítica $\omega_n \rightarrow k_0 \pm i\varepsilon$

$$\mathcal{G}_\beta(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\rho(q_0, \mathbf{k})}{k_0 - q_0 + i\varepsilon} \quad (\text{F.12})$$

$$\mathcal{G}_\beta(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\rho(q_0, \mathbf{k})}{k_0 - q_0 - i\varepsilon} \quad (\text{F.13})$$

definindo

$$\mathcal{G}_\beta(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) = \mathcal{G}_\beta^>(k_0 + i\varepsilon, \mathbf{k}) \quad (\text{F.14})$$

$$\mathcal{G}_\beta(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}) = \mathcal{G}_\beta^<(k_0 - i\varepsilon, \mathbf{k}) \quad (\text{F.15})$$

e fazendo $\mathcal{G}_\beta^> - \mathcal{G}_\beta^<$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^> - \mathcal{G}_\beta^< &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \rho(q_0, \mathbf{k}) \left[\frac{1}{k_0 - q_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{k_0 - q_0 - i\varepsilon} \right] \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \rho(q_0, \mathbf{k}) \frac{k_0 - q_0 - i\varepsilon - k_0 + q_0 - i\varepsilon}{(k_0 - q_0)^2 + \varepsilon^2} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \rho(q_0, \mathbf{k}) \frac{-2i\varepsilon}{(k_0 - q_0)^2 + \varepsilon^2} \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

Usando a seguinte representação para a função $\delta(x)$ de Dirac

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(x) \quad (\text{F.17})$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^> - \mathcal{G}_\beta^< &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \rho(q_0, \mathbf{k}) (-2i) \frac{\varepsilon}{(k_0 - q_0)^2 + \varepsilon^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} \rho(q_0, \mathbf{k}) 2\pi \delta(k_0 - q_0) \\ &= \rho(k_0, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

logo

$$\rho(k) = \mathcal{G}_\beta^>(k_0 + i\varepsilon) - \mathcal{G}_\beta^<(k_0 - i\varepsilon) \quad (\text{F.19})$$

Notamos que a função espectral é dada por

$$\rho(k) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - E_q^2} - \frac{1}{(q_0 - i\varepsilon)^2 - E_q^2} \right] \quad (\text{F.20})$$

onde

$$E_q^2 = \mathbf{q}^2 + m^2 \quad (\text{F.21})$$

e

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) \quad (\text{F.22})$$

Onde $\varepsilon(q_0) = \theta(q_0) - \theta(-q_0)$

F.3 Demonstração de (F.22)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\mathbf{q}, q_0) &= i \left[\frac{1}{q_0^2 + 2i\varepsilon q_0 - \varepsilon^2 - E_q^2} - \frac{1}{q_0^2 - 2i\varepsilon q_0 - \varepsilon^2 - E_q^2} \right] \\ &= \left[\frac{4\varepsilon q_0}{(q_0^2 - \varepsilon^2 - E_q^2)^2 - (2i\varepsilon q_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.23})$$

O sinal da expressão acima depende do sinal de q_0

$$q_0 > 0 \rightarrow + \quad (\text{F.24})$$

$$q_0 < 0 \rightarrow - \quad (\text{F.25})$$

e usamos que $\varepsilon(q_0) = \theta(q_0) - \theta(-q_0)$ e como $\varepsilon \ll 1$ e $2\varepsilon q_0 \rightarrow \varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\mathbf{q}, q_0) = \varepsilon(q_0) 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{(q^2 - m^2 - \varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2} \right] \quad (\text{F.26})$$

como $q^2 - m^2 \gg \varepsilon^2$, definimos

$$q^2 - m^2 \equiv x \quad (\text{F.27})$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\mathbf{q}, q_0) = \varepsilon(q_0) 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \right] \quad (\text{F.28})$$

usando

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \right] = \pi \delta(x) \quad (\text{F.29})$$

obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\mathbf{q}, q_0) = 2\pi\varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) \quad (\text{F.30})$$

F.4 Propagador livre em termos da função espectral

O propagador escrito em termos da função espectral, é dado por

$$\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} \rho(\mathbf{q}, q_0) \{ [1 + n(q_0)] \theta(t - t') + n(q_0) \theta(t' - t) \} \quad (\text{F.31})$$

Substituindo $\rho(\mathbf{q}, q_0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{-iq_0(t-t')} \varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) [1 + n(q_0)] \theta(t - t') \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{-iq_0(t-t')} \varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) n(q_0) \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

Por simplicidade definimos

$$\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') = A\theta(t - t') + B\theta(t' - t) \quad (\text{F.33})$$

Primeiro calculamos A

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{-iq_0(t-t')} \varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) [1 + n(q_0)] \quad (\text{F.34})$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{-iq_0(t-t')} \theta(q_0) \delta(q^2 - m^2) [1 + n(q_0)] \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{-iq_0(t-t')} \theta(-q_0) \delta(q^2 - m^2) [1 + n(q_0)] \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

usando a propriedade

$$\delta(q^2 - E^2) = \frac{1}{2E} [\delta(q_0 + E) + \delta(q_0 - E)] \quad (\text{F.36})$$

obtemos

$$A = \frac{1}{2E} e^{-iE(t-t')} [1 + n(E)] - e^{iE(t-t')} \frac{1}{2E} [1 + n(-E)] \quad (\text{F.37})$$

usando que $n(-E) = -n(E) - 1$ obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2E} \cos(E(t-t')) [1 + 2n(E)] - i \frac{1}{2E} \sin(E(t-t')) \\ A &= \mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{q}, t-t') \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

Agora calculamos B

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{-iq_0(t-t')} \varepsilon(q_0) \delta(q^2 - m^2) n(q_0) \theta(t' - t) \quad (\text{F.39})$$

$$B = \frac{1}{2E} \cos(E(t-t')) [1 + 2n(E)] + i \frac{1}{2E} \sin(E(t-t')) \quad (\text{F.40})$$

ou

$$B = \mathcal{G}_\beta^<(\mathbf{q}, t-t') \quad (\text{F.41})$$

e

$$\mathcal{G}_\beta^<(\mathbf{q}, t-t') = \mathcal{G}_\beta^>(\mathbf{q}, t'-t) \quad (\text{F.42})$$

As expressões são exatamente as dadas na Eq.(3.36).

F.5 Derivação da função espectral para o propagador vestido

Lembrando que escrevemos a função espectral para o propagador vestido

$$\rho_v(\mathbf{q}, q_0) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\Gamma)^2 - E^2(q)} - \frac{1}{(q_0 - i\Gamma)^2 - E^2(q)} \right] \quad (\text{F.43})$$

e o propagador vestido é dado por

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2 - \Sigma(q) + i\varepsilon} \quad (\text{F.44})$$

escrevemos $\Sigma(q)$ como

$$\Sigma(q) = \text{Re}\Sigma(q) + i\text{Im}\Sigma(q) \quad (\text{F.45})$$

Como a auto-energia tem uma parte imaginária (devido ao diagrama “*settig-sun*”), não é necessário manter o fator $i\varepsilon$

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2 - \Sigma(q)} \quad (\text{F.46})$$

e substituindo a contribuição da auto-energia obtemos para o propagador vestido a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta^v(q) &= \frac{1}{q^2 - m^2 - \text{Re}\Sigma(q) - i\text{Im}\Sigma(q)} \\ &= \frac{1}{q_0^2 - E^2 - i\text{Im}\Sigma(q)} \end{aligned} \quad (\text{F.47})$$

onde

$$E^2 = \mathbf{q}^2 + m_{eff}^2 \quad (\text{F.48})$$

e

$$m_{eff}^2 = m^2 + \text{Re}\Sigma(q) \quad (\text{F.49})$$

Em analogia com o caso livre derivamos a expressão para a função espectral vestida

$$\begin{aligned} \rho_v(q_0, \mathbf{q}) &= \mathcal{G}_\beta^>(q_0 + i\varepsilon, \mathbf{q}) - \mathcal{G}_\beta^<(q_0 - i\varepsilon, \mathbf{q}) \\ &= i \left[\frac{1}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2 - \Sigma(q_0 + i\varepsilon, \mathbf{q})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(q_0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2 - \Sigma(q_0 - i\varepsilon, \mathbf{q})} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

$$\rho_v(q_0, \mathbf{q}) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - E^2 - i\text{Im}\Sigma(q_0 + i\varepsilon, \mathbf{q})} - \frac{1}{(q_0 - i\varepsilon)^2 - E^2 - i\text{Im}\Sigma(q_0 - i\varepsilon, \mathbf{q})} \right] \quad (\text{F.51})$$

onde

$$E^2 = \mathbf{q}^2 + m^2 + \text{Re}\Sigma(q) \quad (\text{F.52})$$

Agora usamos a propriedade da auto-energia

$$\Sigma(z^*, \mathbf{q}) = \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\sigma(\mathbf{q})}{z^* - q_0} \quad (\text{F.53})$$

$$\Sigma^*(z, \mathbf{q}) = \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{\sigma(\mathbf{q})}{z^* - q_0} \quad (\text{F.54})$$

$\sigma(\mathbf{q})$ é real.

$$\Sigma(z^*, \mathbf{q}) = \Sigma^*(z, \mathbf{q}) \quad (\text{F.55})$$

usando estas propriedades em $\rho(q_0, \mathbf{q})$

$$\rho_v(q_0, \mathbf{q}) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\varepsilon)^2 - E^2 - i\text{Im}\Sigma(q_0 + i\varepsilon, \mathbf{q})} - \frac{1}{(q_0 - i\varepsilon)^2 - E^2 + i\text{Im}\Sigma(q_0 + i\varepsilon, \mathbf{q})} \right] \quad (\text{F.56})$$

Definindo a largura Γ

$$\Gamma \equiv -\frac{\text{Im}\Sigma(q)}{2q_0} \quad (\text{F.57})$$

Se Γ é pequena podemos ignorar os termos proporcionais a Γ^2 . E os termos proporcionais a ε são negligenciados devido a auto-energia ter uma parte imaginária

$$\rho_v(q_0, \mathbf{q}) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\Gamma)^2 - E^2} - \frac{1}{(q_0 - i\Gamma)^2 - E^2} \right] \quad (\text{F.58})$$

A equação acima tem quatro pólos no plano complexo q_0 : $E \pm i\Gamma$ e $-E \pm i\Gamma$. Usando (F.2) em (F.1) e fazendo a integração em q_0 , obtemos

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t - t') \theta(t - t') + \mathcal{G}_{\beta}^{<}(\mathbf{q}, t - t') \theta(t' - t) \quad (\text{F.59})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{>}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \left\{ [1 + n(E - i\Gamma)] e^{-i(E - i\Gamma)(t - t')} + n(E + i\Gamma) e^{i(E + i\Gamma)(t - t')} \right\} \\ \mathcal{G}_{\beta,v}^{<}(\mathbf{q}, t - t') &= \mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t' - t) \end{aligned} \quad (\text{F.60})$$

As expressões para $\mathcal{G}_{\beta,v}^{--}, \mathcal{G}_{\beta,v}^{+-}$ and $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}$ são as mesmas do caso livre, mas com $\mathcal{G}_{\beta,v}^{>,<}$ dados agora por (F.60).

F.6 Demonstração de (F.60)

Partimos da expressão para o propagador vestido

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t - t')} \rho_v(\mathbf{q}, q_0) \{ [1 + n(q_0)] \theta(t - t') + n(q_0) \theta(t' - t) \} \quad (\text{F.61})$$

e da função espectral vestida

$$\rho_v(\mathbf{q}, q_0) = i \left[\frac{1}{(q_0 + i\Gamma)^2 - E^2(q)} - \frac{1}{(q_0 - i\Gamma)^2 - E^2(q)} \right] \quad (\text{F.62})$$

Substituindo $\rho_v(\mathbf{q}, q_0)$ em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} \left[\frac{i}{(q_0 + i\Gamma)^2 - E^2(q)} - \frac{i}{(q_0 - i\Gamma)^2 - E^2(q)} \right] \\ &\times [1 + n(q_0)] \theta(t - t') \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} \left[\frac{i}{(q_0 + i\Gamma)^2 - E^2(q)} - \frac{i}{(q_0 - i\Gamma)^2 - E^2(q)} \right] \\ &\times n(q_0) \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (\text{F.63})$$

novamente, por simplicidade definimos

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = C\theta(t - t') + D\theta(t' - t) \quad (\text{F.64})$$

$$E(q) = E \quad (\text{F.65})$$

Primeiro calculamos C

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} \left[\frac{i}{(q_0 + i\Gamma)^2 - E^2} - \frac{i}{(q_0 - i\Gamma)^2 - E^2} \right] [1 + n(q_0)] \quad (\text{F.66})$$

$$\begin{aligned} C &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(q_0 + i\Gamma) - E} [1 + n(q_0)] \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(q_0 + i\Gamma) + E} [1 + n(q_0)] \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(q_0 - i\Gamma) - E} [1 + n(q_0)] \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi} e^{-iq_0(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(q_0 - i\Gamma) + E} [1 + n(q_0)] \end{aligned} \quad (\text{F.67})$$

Calculamos as integrais acima no plano complexo

$$\begin{aligned} q_0 &\rightarrow z \\ z &= \text{Re}z + i\text{Im}z \end{aligned} \quad (\text{F.68})$$

Como C é multiplicado por $\theta(t - t') \rightarrow t - t' > 0$, para a exponencial convergir

$$\begin{aligned} -iz(t - t') &= -i[\text{Re}z + i\text{Im}z](t - t') \\ &= -i\text{Re}z(t - t') + \text{Im}z(t - t') \end{aligned} \quad (\text{F.69})$$

Pela convergência $\text{Im}z < 0$. Logo, o contorno é o semi-círculo ($\text{Im}z < 0$). Como o denominador é quadrático, pelo lema de Jordan, a integração no contorno vai a zero e o raio do contorno vai a infinito. E, temos um sinal negativo devido ao sentido do contorno. Então temos

$$\begin{aligned} C &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(z + i\Gamma) - E} [1 + n(z)] \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(z + i\Gamma) + E} [1 + n(z)] \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(z - i\Gamma) - E} [1 + n(z)] \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi} e^{-iz(t-t')} i \frac{1}{2E} \frac{1}{(z - i\Gamma) + E} [1 + n(z)] \end{aligned} \quad (\text{F.70})$$

As duas últimas integrais são zero devido ao contorno não englobar nenhum pólo. Calculando as integrais restantes

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2E} e^{-i(E-i\Gamma)(t-t')} [1 + n(E - i\Gamma)] \\ &- \frac{1}{2E} e^{-i(-E-i\Gamma)(t-t')} [1 + n(-E - i\Gamma)] \end{aligned} \quad (\text{F.71})$$

como

$$n(-E - i\Gamma) = -n(E + i\Gamma) - 1 \quad (\text{F.72})$$

temos

$$C = \frac{1}{2E} \left\{ e^{-i(E-i\Gamma)(t-t')} [1 + n(E-i\Gamma)] + n(E+i\Gamma) e^{i(E+i\Gamma)(t-t')} \right\} \quad (\text{F.73})$$

Aplicando o mesmo procedimento para calcular as integrais no plano complexo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(E, t' - t) &= \frac{1}{2E} \left\{ e^{-i(E-i\Gamma)(t'-t)} [1 + n(E-i\Gamma)] + e^{i(E+i\Gamma)(t'-t)} n(E+i\Gamma) \right\} \\ &= C(E, t' - t) \end{aligned} \quad (\text{F.74})$$

Substituindo as expressões obtidas para C e D

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= C\theta(t - t') + D\theta(t' - t) \\ &= \left\{ \frac{1}{2E} \left[e^{-i(E-i\Gamma)(t-t')} [1 + n(E-i\Gamma)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n(E+i\Gamma) e^{i(E+i\Gamma)(t-t')} \right] \right\} \theta(t - t') \end{aligned} \quad (\text{F.75})$$

$$\begin{aligned} &+ \left\{ \frac{1}{2E} \left[e^{-i(E-i\Gamma)(t'-t)} [1 + n(E-i\Gamma)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{i(E+i\Gamma)(t'-t)} n(E+i\Gamma) \right] \right\} \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (\text{F.76})$$

ou

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t - t') \theta(t - t') + \mathcal{G}_{\beta}^{<}(\mathbf{q}, t - t') \theta(t' - t) \quad (\text{F.77})$$

onde

$$\mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t - t') = C \quad (\text{F.78})$$

$$\mathcal{G}_{\beta}^{<}(\mathbf{q}, t - t') = D \quad (\text{F.79})$$

$\Gamma(q)$ é dada em termos da parte imaginária da auto-energia com a primeira contribuição não trivial proveniente do diagrama “*settig-sun*”, onde $\text{Im}\Sigma(q)$ é [82, 79]

$$\text{Im}\Sigma(q) = \text{Im} \quad \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$= -\frac{\lambda^2}{12} (1 - e^{-\beta q_0}) \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \rho(k_j) [1 + n(k_j^0)] \right] (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2 - k_3) \quad (\text{F.80})$$

O limite de altas temperaturas de (F.3) é dado nas Refs.[29, 81] e nesta tese vamos usar o resultado final. A expressão para $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$ em (F.59) pode ser escrita explicitamente como

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \frac{e^{-\Gamma|t-t'|}}{[\cosh(\beta E) - \cos(\beta \Gamma)]} [\sinh(\beta E) \cos(E|t - t'|)] \\ &+ \sin(\beta \Gamma) \sin(E|t - t'|) \\ &+ +i [\cos(\beta \Gamma) - \cosh(\beta E)] \sin(E|t - t'|)\end{aligned}\quad (\text{F.81})$$

Expandindo a equação acima para $\beta \Gamma \ll 1$, obtemos a Eq.(4.10)

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &\simeq \frac{e^{-\Gamma(\mathbf{q})|t-t'|}}{\omega(\mathbf{q})} \left\{ (1 + 2n) \cos[\omega|t - t'|] - i \sin[\omega|t - t'|] \right. \\ &+ \left. 2\beta \Gamma(\mathbf{q}) n(1 + n) \sin[\omega|t - t'|] \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma^2}{T^2}\right)\end{aligned}\quad (\text{F.82})$$

F.7 Demonstração de (F.81)

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \mathcal{G}_{\phi}^{>}(\mathbf{q}, t - t') \theta(t - t') + \mathcal{G}_{\phi}^{<}(\mathbf{q}, t - t') \theta(t' - t) \quad (\text{F.83})$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \left\{ [1 + n(E - i\Gamma)] e^{-i(E - i\Gamma)(t - t')} + n(E + i\Gamma) e^{i(E + i\Gamma)(t - t')} \right\} \\ \mathcal{G}_{\beta}^{<}(\mathbf{q}, t - t') &= \mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t' - t)\end{aligned}\quad (\text{F.84})$$

Substituindo as expressões para $\mathcal{G}_{\beta}^{>}(\mathbf{q}, t - t')$ e $\mathcal{G}_{\beta}^{<}(\mathbf{q}, t - t')$ obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \left\{ [1 + n(E - i\Gamma)] e^{-i(E - i\Gamma)(t - t')} \right. \\ &+ \left. n(E + i\Gamma) e^{i(E + i\Gamma)(t - t')} \right\} \theta(t - t')\end{aligned}\quad (\text{F.85})$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{1}{2E} \left\{ [1 + n(E - i\Gamma)] e^{+i(E - i\Gamma)(t - t')} \right. \\ &+ \left. n(E + i\Gamma) e^{-i(E + i\Gamma)(t - t')} \right\} \theta(t' - t)\end{aligned}\quad (\text{F.86})$$

Usando o fato que a função θ seleciona o intervalo de tempo

$$\theta(t - t') \rightarrow t - t' > 0 \quad (\text{F.87})$$

$$\theta(t' - t) \rightarrow t' - t > 0 \quad (\text{F.88})$$

Se explicitarmos o sinal dos argumentos temporais, colocamos o módulo da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \left\{ [1 + n(E - i\Gamma)] e^{-i(E - i\Gamma)|t - t'|} + n(E + i\Gamma) e^{i(E + i\Gamma)|t - t'|} \right\} \\ &\times [\theta(t - t') + \theta(t' - t)] \end{aligned} \quad (\text{F.89})$$

e as distribuições n são dadas por

$$n(E - i\Gamma) = \frac{1}{e^{\beta(E - i\Gamma)} - 1} \quad (\text{F.90})$$

$$n(E + i\Gamma) = \frac{1}{e^{\beta(E + i\Gamma)} - 1} \quad (\text{F.91})$$

e

$$\theta(t - t') + \theta(t' - t) = 1 \quad (\text{F.92})$$

substituindo as expressões anteriores em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$ e fazendo algumas manipulações, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} e^{-\Gamma|t - t'|} \\ &\times \left[\frac{e^{\beta E} e^{-iE|t - t'|} - e^{-i\beta\Gamma} e^{-iE|t - t'|} + e^{-i\beta\Gamma} e^{iE|t - t'|} - e^{-\beta E} e^{iE|t - t'|}}{e^{\beta E} - e^{-i\beta\Gamma} - e^{i\beta\Gamma} + e^{-\beta E}} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.93})$$

e usando a seguintes expressões

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (\text{F.94})$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (\text{F.95})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{F.96})$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{F.97})$$

vemos que

$$\frac{1}{e^{\beta E} + e^{-\beta E} - e^{i\beta\Gamma} - e^{-i\beta\Gamma}} = \frac{1}{2 [\cosh(\beta E) - \cos(\beta\Gamma)]} \quad (\text{F.98})$$

Substituindo esta expressão em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \frac{1}{2} \frac{e^{-\Gamma|t-t'|}}{[\cosh(\beta E) - \cos(\beta\Gamma)]} \left[e^{\beta E} e^{-iE|t-t'|} - e^{-i\beta\Gamma} e^{-iE|t-t'|} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\beta\Gamma} e^{iE|t-t'|} - e^{-\beta E} e^{iE|t-t'|} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.99})$$

fazendo algumas manipulações obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \frac{e^{-\Gamma|t-t'|}}{[\cosh(\beta E) - \cos(\beta\Gamma)]} [\sinh(\beta E) \cos(E|t-t'|) \\ &\quad + \sin(\beta\Gamma) \sin(E|t-t'|) \\ &\quad + i [\cos(\beta\Gamma) - \cosh(\beta E)] \sin(E|t-t'|)] \end{aligned} \quad (\text{F.100})$$

F.8 Limite $\Gamma \rightarrow 0$ em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$

O propagador vestido $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} \frac{e^{-\Gamma|t-t'|}}{[\cosh(\beta E) - \cos(\beta\Gamma)]} \{ \sinh(\beta E) \cos(E|t-t'|) \\ &\quad + \sin(\beta\Gamma) \sin(E|t-t'|) + i [\cos(\beta\Gamma) - \cosh(\beta E)] \sin(E|t-t'|) \} \end{aligned} \quad (\text{F.101})$$

fazendo o limite de $\Gamma \rightarrow 0$

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \frac{1}{2E} \frac{\sinh(\beta E)}{[\cosh(\beta E) - 1]} \cos(E|t-t'|) - i \frac{1}{2E} \sin(E|t-t'|) \quad (\text{F.102})$$

reescrevendo

$$\frac{\sinh(\beta E)}{[\cosh(\beta E) - 1]} = \frac{e^{\beta E} - e^{-\beta E}}{e^{\beta E} + e^{-\beta E} - 2} \quad (\text{F.103})$$

usando que

$$n(E) = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \quad (\text{F.104})$$

temos

$$\frac{\sinh(x)}{[\cosh(x) - 1]} = 1 + 2n \quad (\text{F.105})$$

E com isso obtemos o propagador livre

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \mathcal{G}_{\beta}^{++}(\mathbf{q}, t - t') \\ &= \frac{1}{2E} [(1 + 2n) \cos(E|t - t'|) - i \sin(E|t - t'|)] \end{aligned} \quad (\text{F.106})$$

F.9 Aproximação $\beta\Gamma \ll 1$ em $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, \Gamma(\mathbf{q}), t - t')$

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\Gamma \ll 1} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \lim_{\beta\Gamma \ll 1} \frac{1}{2E} \frac{e^{-\Gamma|t-t'|}}{[\cosh(\beta E) - \cos(\beta\Gamma)]} \\ &\times [\sinh(\beta E) \cos(E|t - t'|) + \sin(\beta\Gamma) \sin(E|t - t'|)] \\ &+ i [\cos(\beta\Gamma) - \cosh(\beta E)] \sin(E|t - t'|) \end{aligned} \quad (\text{F.107})$$

Neste limite temos

$$\lim_{\beta\Gamma \ll 1} \cos(\beta\Gamma) = 1 \quad (\text{F.108})$$

$$\lim_{\beta\Gamma \ll 1} \sin(\beta\Gamma) = \beta\Gamma \quad (\text{F.109})$$

então ficamos com

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\Gamma \ll 1} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} e^{-\Gamma|t-t'|} \left\{ \frac{\sinh(\beta E)}{[\cosh(\beta E) - 1]} \cos(E|t - t'|) \right. \\ &+ \left. \frac{\beta\Gamma}{[\cosh(\beta E) - 1]} [\sin(E|t - t'|)] - i \sin(E|t - t'|) \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.110})$$

Usando o resultado

$$\frac{\sinh(\beta E)}{[\cosh(\beta E) - 1]} = 1 + 2n \quad (\text{F.111})$$

onde

$$n = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \quad (\text{F.112})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\Gamma \ll 1} \mathcal{G}_{\phi}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} e^{-\Gamma|t-t'|} \{ (1 + 2n) \cos(E|t - t'|) \\ &+ \frac{\beta\Gamma}{[\cosh(\beta E) - 1]} [\sin(E|t - t'|)] - i \sin(E|t - t'|) \} \end{aligned} \quad (\text{F.113})$$

Agora reescrevemos o termo

$$\frac{1}{[\cosh(\beta E) - 1]} = 2 \left[\frac{1}{e^{\beta E} + e^{-\beta E} - 2} \right] \quad (\text{F.114})$$

e usamos que

$$\begin{aligned} e^{\beta E} &= \frac{1 + n}{n} \\ e^{-\beta E} &= \frac{n}{1 + n} \end{aligned} \quad (\text{F.115})$$

obtendo assim

$$\frac{1}{[\cosh(\beta E) - 1]} = 2n(1 + n) \quad (\text{F.116})$$

Substituindo estes resultados em $\lim_{\beta\Gamma \ll 1} \mathcal{G}_{\phi}^{++}(\mathbf{q}, t - t')$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\Gamma \ll 1} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{1}{2E} e^{-\Gamma|t-t'|} \{ (1 + 2n) \cos(E|t - t'|) \\ &+ 2\beta\Gamma(\mathbf{q}) n(1 + n) [\sin(E|t - t'|)] - i \sin(E|t - t'|) \} \end{aligned} \quad (\text{F.117})$$

Apêndice G

Introdução dos campos estocásticos

Neste Apêndice demostramos como reescrever a parte imaginária da ação efetiva em termos de integrais funcionais sobre campos estocásticos ξ_1 e ξ_2 . Começamos escrevendo as contribuições da parte imaginária da ação efetiva $\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c]$, até a ordem de teoria de perturbação considerada ($\mathcal{O}(\lambda^2)$)

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] &= \text{Re}\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + \int d^4x \int d^4x' \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\ &\times \left\{ i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') \text{Re} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t-t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}-\mathbf{k}, t-t')] \right. \\ &+ \left. i \frac{\lambda^2}{12} (2\pi)^3 \varphi_\Delta(x) \varphi_\Delta(x') \text{Re} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t-t') \right] \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_3) \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Reescrevemos estes termos como provenientes de integrações funcionais sobre campos de flutuação Gaussianos ξ_1 and ξ_2 (campos estocásticos) como sendo

$$\begin{aligned} &\int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\ &= \exp \left\{ i \int d^4x d^4x' \left[i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') \right. \right. \\ &+ \left. \left. i \frac{\lambda^2}{12} \varphi_\Delta(x) \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \varphi_\Delta(x') \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Onde $P[\xi_1]$ e $P[\xi_2]$, são as distribuições de probabilidade para ξ_1 e ξ_2 , respectivamente,

são dadas por

$$P[\xi_1] = N_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) \left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \right)^{-1} \xi_1(x') \right\} \quad (\text{G.3})$$

$$P[\xi_2] = N_2^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_2(x) \left(\frac{\lambda^2}{6} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \right)^{-1} \xi_2(x') \right\} \quad (\text{G.4})$$

Onde N_1^{-1} e N_2^{-1} são fatores de normalização, e introduzimos a notação compacta

$$[\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t') \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t') \quad (\text{G.5})$$

$$[\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}_j, t - t') \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \quad (\text{G.6})$$

Substituindo $P[\xi_1]$ e $P[\xi_2]$ em (G.2)

$$\begin{aligned} & \int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\ &= \int D\xi_1 N_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) \left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \right)^{-1} \xi_1(x') \right\} \\ &\times \int D\xi_2 N_2^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_2(x) \left(\frac{\lambda^2}{6} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \right)^{-1} \xi_2(x') \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Por simplicidade definimos

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \right)^{-1} = O_1^{-1}(x, x') \quad (\text{G.8})$$

$$\left(\frac{\lambda^2}{6} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \right)^{-1} = O_2^{-1}(x, x') \quad (\text{G.9})$$

$$A(x) = \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \quad (\text{G.10})$$

então

$$\begin{aligned}
& \int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\
&= \int D\xi_1 N_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') \right\} \\
&\times \int D\xi_2 N_2^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_2(x) O_2^{-1}(x, x') \xi_2(x') \right\} \\
&\times \exp \left[i \int d^4x A(x) \xi_1(x) \right] \exp \left[i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \xi_2(x) \right] \tag{G.11}
\end{aligned}$$

Agora separamos as contribuições de ξ_1 e ξ_2 como

$$\begin{aligned}
& \int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\
&= I * II \tag{G.12}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I &= \int D\xi_1 N_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') \right\} \\
&\times \exp \left[i \int d^4x A(x) \xi_1(x) \right] \tag{G.13}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
II &= \int D\xi_2 N_2^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_2(x) O_2^{-1}(x, x') \xi_2(x') \right\} \\
&\times \exp \left[i \int d^4x \varphi_\Delta(x) \xi_2(x) \right] \tag{G.14}
\end{aligned}$$

Fazemos os deslocamentos nos campos ξ_1 e ξ_2 , para cancelar os termos lineares nos campos, analisando separadamente Para ξ_1

$$\xi_1(x) \Rightarrow \xi_1(x) + f_1(x) \tag{G.15}$$

Com este deslocamento, encontramos a função específica na qual cancela os termos lineares em ξ_1 . Substituindo o deslocamento obtemos

$$-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') + i \int d^4x A(x) \xi_1(x) \equiv \alpha \tag{G.16}$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \{ \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') + \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') f_1(x') \\ &+ f_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') + f_1(x) O_1^{-1}(x, x') f_1(x') \} \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x A(x) \xi_1(x) + \frac{i}{2} \int d^4x A(x) \xi_1(x) + i \int d^4x A(x) f_1(x) \quad (G.17)\end{aligned}$$

Para cancelar os termos lineares em $\xi_1(x)$

$$\begin{aligned}(i) &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') f_1(x') + \frac{i}{2} \int d^4x A(x) \xi_1(x) \\ &= 0 \quad (G.18)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(ii) &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' f_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') + \frac{i}{2} \int d^4x A(x) \xi_1(x) \\ &= 0 \quad (G.19)\end{aligned}$$

como $O(x, x')$ é simétrico determinamos $f_1(x)$ usando (i)

$$\int d^4x \xi_1(x) \left[\int d^4x' O_1^{-1}(x, x') f_1(x') - i \int d^4x' A(x) \delta^4(x - x') \right] = 0 \quad (G.20)$$

como ξ_1 é integrado sobre todas as possibilidades, a expressão acima é zero se $[\dots] = 0$.

fazendo algumas manipulações obtemos

$$f_1(x) = i \int d^4z O_1(z, x) A(z) \quad (G.21)$$

Fazemos agora outro deslocamento em I

$$\xi_1(x) = \xi'_1(x) + i \int d^4y O_{y,x} \varphi_\Delta(y) \varphi_c(y) \quad (G.22)$$

$$I = \int D\xi_1 N_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi_1(x) O_1^{-1}(x, x') \xi_1(x') \right\} \exp \left[i \int d^4x A(x) \xi_1(x) \right] \quad (G.23)$$

Por simplicidade trabalhamos somente com o argumento da exponencial (α)

$$\alpha = \int d^4x d^4x' \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \xi_1(x) O_{x,x'}^{-1} \xi_1(x') + i \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) \delta^4(x - x') \right] \quad (G.24)$$

tomamos $\xi'_1 = \xi_1$ e após alguns manipulações obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \xi_1(x) O_{x,x'} \xi_1(x') \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4z \int d^4x' \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') O_{z,x'} \varphi_\Delta(z) \varphi_c(z) \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

substituindo α em I obtemos

$$I = \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') O_1(x, x') \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \right] \quad (\text{G.26})$$

Aplicando o mesmo procedimento para ξ_2 obtemos

$$II = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \varphi_\Delta(x) O_2(y, x) \varphi_\Delta(y) \right\} \quad (\text{G.27})$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} &\int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\ &= I \times II \end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

usando os resultados obtidos para I e II

$$\begin{aligned} &\int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') O_1(x', x) \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' \varphi_\Delta(x) O_2(x', x) \varphi_\Delta(x') \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

usando que

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \right)^{-1} = O_1^{-1}(x, x') \quad (\text{G.30})$$

$$\left(\frac{\lambda^2}{6} \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \right)^{-1} = O_2^{-1}(x, x') \quad (\text{G.31})$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} &\int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \xi_1(x) + \varphi_\Delta(x) \xi_2(x)] \right\} \\ &= \exp \left[i \int d^4x \int d^4x' \left\{ i \frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x) \varphi_c(x) \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^2 \varphi_\Delta(x') \varphi_c(x') \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left[i \frac{\lambda^2}{12} \varphi_\Delta(x) \text{Re} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x,x'}^3 \varphi_\Delta(x') \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{G.32})$$

Outra maneira de mostrar o resultado acima é completando quadrados.

Apêndice H

Coeficiente dissipativo usando propagadores livres

Ao analisar a contribuição que gera o termo dissipativo, (relacionado ao campo de flutuação ξ_1), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 \\ & \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2 \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

Quando reescrevemos ação efetiva em termos somente do propagador físico $\mathcal{G}_\beta^{++}$, usamos os propagadores livres e obtemos a expressão para $\text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(q, t - t')]^2$

$$\begin{aligned} \text{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 &= \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [-[1 + 2n(\omega)] \cos[\omega(t - t')] \sin[\omega(t - t')] \theta(t - t') \\ &+ [1 + 2n(\omega)] \cos[\omega(t - t')] \sin[\omega(t - t')] \theta(t' - t)] \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Em (H.1) analisamos somente o termo proporcional a $\dot{\varphi}$, pois o segundo termo é a correção de vértice à temperatura finita.

Fazendo a mudança de variável

$$t - t' = t'' \quad (\text{H.3})$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}]_{x,x'}^2 \\
& \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^0 dt'' t'' \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}(q, t'')]^2
\end{aligned} \tag{H.4}$$

Substituindo $\text{Im} [G^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2$ na equação acima

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}]_{x,x'}^2 \\
& \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \\
& \times \left\{ - \int_{-\infty}^0 dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \theta(t'') + \int_{-\infty}^0 dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \theta(-t'') \right\}
\end{aligned} \tag{H.5}$$

usando $\theta(t'') + \theta(-t'') = 1$ e fazendo algumas manipulações obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_{\phi}^{++}]_{x,x'}^2 \\
& \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \\
& \times \left\{ 2 \int_0^{\infty} dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \theta(t'') - \int_0^{\infty} dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \right\}
\end{aligned} \tag{H.6}$$

usando a definição para $\theta(t'')$

$$\theta(t'') = \begin{cases} 1 \rightarrow t'' > 0 \\ 0 \rightarrow t'' < 0 \end{cases} \tag{H.7}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \operatorname{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 \\
& \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \\
& \times \left\{ 2 \int_0^\infty dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] - \int_0^\infty dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \right\} \\
& \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^2(\mathbf{q})} [1 + 2n(\omega)] \left[\int_0^\infty dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \right]
\end{aligned} \tag{H.8}$$

precisamos saber o resultado da integral

$$\int_0^\infty dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] \tag{H.9}$$

cujo integrando é oscilante e, após colocarmos um regulador ε e fazermos algumas manipulações é fácil mostrarmos que

$$\int_0^\infty dt'' t'' \cos[\omega(t'')] \sin[\omega(t'')] = 0 \tag{H.10}$$

Com este resultado mostramos que o primeiro termo da Eq. (H.1) desaparece se usarmos propagadores livres.

$$\frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \operatorname{Im} [\mathcal{G}_\beta^{++}]_{x, x'}^2 = 0 \tag{H.11}$$

O procedimento para o termo dissipativo relacionado ao campo de flutuação ξ_2 é nulo pelo mesmo motivo.

Apêndice I

Coeficiente dissipativo vestido

Neste apêndice derivaremos o coeficiente dissipativo usando os propagadores vestidos. Por simplicidade usamos a seguinte notação

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{q}) &\equiv \Gamma \\ \omega(\mathbf{q}) &\equiv \omega \\ n(\omega) &\equiv n \\ |t - t'| &\equiv t \\ \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') &\equiv \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}\end{aligned}\tag{I.1}$$

Obtemos anteriormente a expressão para o propagador vestido no limite de altas temperaturas

$$\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') = \frac{e^{-\Gamma t}}{2\omega} \left[(1 + 2n) \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) + 2\beta\Gamma n(1 + n) \sin(\omega t) \right] \tag{I.2}$$

Precisamos saber o valor de $\text{Im}[\mathcal{G}^{++}]^2$, que é dado por

$$\text{Im}[\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2 \simeq \frac{e^{-2\Gamma t}}{4\omega^2} \left[-2(1 + 2n) \cos(\omega t) \sin(\omega t) - 4\beta\Gamma n(1 + n) [\sin(\omega t)]^2 \right] \tag{I.3}$$

Agora usando o propagador vestido $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}$ calculamos o termo dissipativo relacionado

ao campo de flutuação ξ_1 , que é dado por

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]_{x,x'}^2 \\
& \simeq \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2 \\
& + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2 \\
& \equiv (i) + (ii)
\end{aligned} \tag{I.4}$$

Vamos calcular (i), que é o termo dissipativo, e vamos negligenciar a correção de vértice, que é dada por (ii).

Substituindo $\text{Im} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2$ em (i) obtemos

$$\begin{aligned}
(i) &= \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \frac{e^{-2\Gamma|t-t'|}}{4\omega^2} \\
&\times [-2(1+2n) \cos(\omega|t-t'|) \sin(\omega|t-t'|)] \\
&+ \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \frac{e^{-2\Gamma|t-t'|}}{4\omega^2} \\
&\times [-4\beta\Gamma n(1+n) [\sin(\omega|t-t'|)]^2] \\
&\equiv A + B
\end{aligned} \tag{I.5}$$

Primeiro calculamos A

$$\begin{aligned}
A &= \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \frac{e^{-2\Gamma|t-t'|}}{4\omega^2} \\
&\times [-2(1+2n) \cos(\omega|t-t'|) \sin(\omega|t-t'|)]
\end{aligned} \tag{I.6}$$

fazendo a mudança de variável

$$t - t' = t'' \tag{I.7}$$

obtemos

$$A = \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} 2(1+2n) \zeta \tag{I.8}$$

Onde ζ é dado por

$$\begin{aligned}\zeta &= \int_0^{\infty} dt t e^{-2\Gamma t} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{4i} \int_0^{\infty} dt [t e^{-t(-2i\omega+2\Gamma)} - t e^{-t(2i\omega+2\Gamma)}]\end{aligned}\quad (\text{I.9})$$

usando o resultado

$$\int_0^{\infty} dt t e^{-t(\varepsilon+ia)} = \frac{1}{[a-i\varepsilon]^2} \quad (\text{I.10})$$

obtemos

$$\zeta = -\frac{\Gamma}{4\omega^3 \left[1 + \frac{\Gamma^2}{\omega^2}\right]^2} \quad (\text{I.11})$$

Redefinimos $\frac{\Gamma}{\omega} = x$ e expandimos

$$\frac{1}{1+x^2} \quad (\text{I.12})$$

considerando $\omega \gg \Gamma$ e primeiro expandimos $\frac{1}{1+x}$ para pequenos valores de x

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (\text{I.13})$$

derivando a equação acima em relação a x e, fazendo algumas manipulações, obtemos

$$\zeta = -\frac{\Gamma}{\omega} \frac{1}{4\omega^2} \left[1 - 2 \left[\frac{\Gamma}{\omega} \right]^2 + 3 \left[\frac{\Gamma}{\omega} \right]^3 - \dots \right] \quad (\text{I.14})$$

Como estamos trabalhando até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, notamos que ζ é $\mathcal{O}\left(\frac{\Gamma}{\omega}\right)$, ou seja, nesta ordem em teoria de perturbação em λ o termo A não contribui.

Agora calculamos B

$$B = \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{4\omega^2} (-4\beta\Gamma) \Xi \quad (\text{I.15})$$

onde

$$\Xi = \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) e^{-2\Gamma|t-t'|} [\sin(\omega|t-t'|)]^2 \quad (\text{I.16})$$

Fazendo a mudança de variável

$$t - t' = t'' \quad (\text{I.17})$$

obtemos

$$\Xi = \frac{1}{4} \left[\int_0^\infty dt t e^{-t(-2i\omega+2\Gamma)} + \int_0^\infty dt t e^{-t(2i\omega+2\Gamma)} - 2 \int_0^\infty dt t e^{-2\Gamma t} \right] \quad (\text{I.18})$$

No cálculo de ζ mostramos que as duas primeiras integrais acima são $\mathcal{O}\left(\frac{\Gamma}{\omega}\right)$, ou seja, não contribuem. Calculamos B até $\mathcal{O}(\lambda^2)$, obtendo

$$B = \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{4\omega^2} (-4\beta\Gamma) \tilde{\Xi} + \mathcal{O}\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \quad (\text{I.19})$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} &= \frac{1}{4} (-2) \int_0^\infty dt t e^{-2\Gamma t} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dt t e^{-2\Gamma t} \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

$$B = \lambda^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{4\omega^2} \beta \int_0^\infty dt t 2\Gamma e^{-2\Gamma t} + \mathcal{O}\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \quad (\text{I.21})$$

usando que

$$\int_0^\infty dx a e^{-ax} x = \frac{1}{a} \quad (\text{I.22})$$

obtemos

$$B = \frac{\lambda^2}{8} \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \beta \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{\omega^2 \Gamma} + \mathcal{O}\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \quad (\text{I.23})$$

Negligenciando a correção de vértice à temperatura finita, usando os propagadores vestidos, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3 x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\mathbf{x}', t') \text{Im} [\mathcal{G}_{\beta, v}^{++}]_{x, x'}^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{8} \varphi_c^2(\mathbf{x}, t) \dot{\varphi}_c(\mathbf{x}, t) \beta \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{\omega^2 \Gamma} + \mathcal{O}\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Apêndice J

Coeficiente dissipativo no limite de altas temperaturas

A Eq. (4.33) mostra o coeficiente dissipativo η_1 com $\Gamma(\mathbf{q})$ calculada no limite de altas temperaturas. Onde obtemos η_1 no limite de altas temperaturas a seguinte expressão

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2}{8} \beta \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega^2(\mathbf{q})\Gamma(\mathbf{q})} + O\left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega}\right) \quad (\text{J.1})$$

onde Γ no limite de altas temperaturas é dada por

$$\Gamma \simeq \frac{\lambda^2 T^2}{1536\pi\omega(\mathbf{q})} \quad (\text{J.2})$$

Substituindo Γ na equação para η_1 obtemos

$$\eta_1 = \frac{96}{\pi} \frac{1}{T^3} \int_0^\infty dq q^2 \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega(\mathbf{q})} \quad (\text{J.3})$$

A distribuição de Bose é dada por

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (\text{J.4})$$

onde

$$\omega(\mathbf{q}) = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \quad (\text{J.5})$$

Um detalhe importante a ser ressaltado aqui é que, neste caso, não é correto expandir a distribuição de Bose a altas temperaturas, pois a distribuição está no integrando de

uma integral sobre os momentos e, ao expandir obtemos

$$n(\omega) \underset{T \gg m_T}{=} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \underset{T \gg m_T}{=} \frac{T}{\omega} \quad (\text{J.6})$$

Este limite é válido se $\frac{\omega}{T}$ for pequeno, mas em uma integração nos momentos onde os momentos forem da ordem de T , o parâmetro de expansão não será pequeno, invalidando a expansão.

Para contornar este problema, separamos a integral na expressão para η_1 da seguinte maneira

$$\eta_1 = \frac{96}{\pi} \frac{1}{T^3} \left[\int_0^T dq q^2 \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega(\mathbf{q})} + \int_T^\infty dq q^2 \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega(\mathbf{q})} \right] \quad (\text{J.7})$$

Numericamente é fácil ver que a segunda integral é muito pequena, comparada com a primeira, logo a temperatura atua como um cutoff na integral sobre os momentos no coeficiente dissipativo η_1 . O que é equivalente a fazermos

$$\eta_1 = \frac{96}{\pi} \frac{1}{T^3} \int_0^T dq q^2 \frac{n(\omega)(1+n(\omega))}{\omega(\mathbf{q})} \quad (\text{J.8})$$

Expandindo a distribuição de Bose no limite de altas temperaturas $T \gg m_T$, obtemos

$$n(\omega) \underset{T \gg m_T}{=} \frac{T}{\omega} \quad (\text{J.9})$$

Agora fazemos as integrais em q

$$\eta_1 = \frac{96}{\pi} \frac{1}{T^2} \left[\int_0^T dq \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2}} + T \int_0^T dq \frac{q^2}{(q^2 + m^2)} \right] \quad (\text{J.10})$$

Fazendo estas integrais no Maple, obtemos

$$\eta_1 = \frac{96}{\pi T^2} \left[T - m \arctan \left(\frac{T}{m} \right) \right] + \frac{96}{\pi T} \left[-\frac{T}{\sqrt{T^2 + m^2}} + \ln \left(\sqrt{\frac{1}{m^2}} T + \sqrt{\frac{T^2 + m^2}{m^2}} \right) \right] \quad (\text{J.11})$$

No limite $T \gg m_T$

$$\lim_{T \gg m_T} \arctan \left(\frac{T}{m} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{J.12})$$

logo

$$\begin{aligned} \eta_1 \simeq & \lim_{T \gg m_T} \left\{ \frac{96}{\pi T^2} \left[T - m \arctan \left(\frac{T}{m} \right) \right] + \frac{96}{\pi T} \left[-\frac{T}{\sqrt{T^2 + m^2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \ln \left(\sqrt{\frac{1}{m^2}} T + \sqrt{\frac{T^2 + m^2}{m^2}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{J.13})$$

$$\eta_1 \stackrel{T \gg m_T}{\simeq} \frac{96}{\pi T} \ln \left(\frac{2T}{m} \right) \quad (\text{J.14})$$

Apêndice K

$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle$ usando propagadores vestidos

Partimos da expressão

$$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle = \frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_{\beta}^{++}]_{x,x'}^2 \quad (\text{K.1})$$

So que usaremos o propagador vestido $\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}$ e calcularemos $\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle$ até $\mathcal{O}(\lambda^2)$.

Quando introduzimos os campos estocásticos ξ_1 e ξ_2 mostramos que

$$[\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]_{x,x'}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t') \mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q} - \mathbf{k}, t - t') \quad (\text{K.2})$$

Com momento externo nulo $k = 0$ temos

$$[\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]_{x,x'}^2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \quad (\text{K.3})$$

$$= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \quad (\text{K.4})$$

Agora calculamos a função de correlação do campo ξ_1 , a qual é dada por

$$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle = \frac{\lambda^2}{2} \text{Re} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]_{x,x'}^2 \quad (\text{K.5})$$

Substituindo a expressão para $[\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]_{x,x'}^2$ para momento externo nulo

$$\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle = \frac{\lambda^2}{2} \text{Re} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}(\mathbf{q}, t - t')]^2 \quad (\text{K.6})$$

Usamos a expressão para o propagador vestido

$$\begin{aligned}
[\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2 &\simeq \frac{e^{-2\Gamma t}}{4\omega^2(\mathbf{q})} [(1+2n)^2 [\cos(\omega t)]^2 + 2\beta\Gamma(1+n)n(1+2n)\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\
&- [\sin(\omega t)]^2 + 2\beta\Gamma n(1+n)(1+2n)\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\
&+ 4\beta^2\Gamma^2 n^2(1+n)^2 [\sin(\omega t)]^2 \\
&- i(1+2n)\cos(\omega t)\sin(\omega t) - i(1+2n)\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\
&- i2\beta\Gamma n(1+n)[\sin(\omega t)]^2 - i2\beta\Gamma n(1+n)[\sin(\omega t)]^2]
\end{aligned} \tag{K.7}$$

onde

$$\begin{aligned}
\text{Re} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2 &\simeq \frac{e^{-2\Gamma t}}{4\omega^2} \{ (1+2n)^2 [\cos(\omega t)]^2 + 2\beta\Gamma(1+n)n(1+2n)\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\
&- [\sin(\omega t)]^2 + 2\beta\Gamma n(1+n)(1+2n)\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\
&+ 4\beta^2\Gamma^2 n^2(1+n)^2 [\sin(\omega t)]^2 \}
\end{aligned} \tag{K.8}$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \tag{K.9}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Re} [\mathcal{G}_{\beta,v}^{++}]^2 &\simeq \frac{e^{-2\Gamma t}}{4\omega^2} \{ (1+2n)^2 [\cos(\omega t)]^2 + \beta\Gamma(1+n)n(1+2n)\sin(2\omega t) \\
&- [\sin(\omega t)]^2 + \beta\Gamma n(1+n)(1+2n)\sin(2\omega t) \\
&+ 4\beta^2\Gamma^2 n^2(1+n)^2 [\sin(\omega t)]^2 \}
\end{aligned} \tag{K.10}$$

Substituindo a expressão acima na função de correlação obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle &= \frac{\lambda^2}{2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\Gamma|t-t'|}}{4\omega^2} \\
&\times \{ (1+2n)^2 [\cos(\omega t)]^2 - [\sin(\omega t)]^2 \\
&+ 2\beta\Gamma n(1+n)(1+2n)\sin(2\omega t) \\
&+ 4\frac{\Gamma^2}{T^2} n^2(1+n)^2 [\sin(\omega t)]^2 \}
\end{aligned} \tag{K.11}$$

usando que

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A \quad (\text{K.12})$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A \quad (\text{K.13})$$

e fazendo algumas manipulações, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(x) \xi_1(x') \rangle &= \frac{\lambda^2}{2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{-2\Gamma|t-t'|}}{4\omega^2} \\ &\times \{2n(1+n) + (1+2n^2+2n) \cos 2\omega t \\ &+ 2\beta\Gamma n(1+n)(1+2n) \sin(2\omega t)\} + O\left(\frac{\lambda^2\Gamma^2}{T^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{K.14})$$

Apêndice L

Cálculo dos diagramas utilizando regularização dimensional

L.1 *Tadpole*

Começamos calculando a parte de $T = 0$, que é dada por

$$I_0^{TP} = \frac{\delta\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{L.1})$$

A integral acima é quadraticamente divergente e usaremos regularização dimensional para regularizar a mesma. Primeiro reescrevemos a integral em d dimensões

$$\begin{aligned} I_0^{TP} &= \frac{1}{2} \frac{\delta\lambda\mu^{3-d}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta\lambda\mu^{3-d}}{2} II \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

a escala de massa μ aparece para mantermos a constante de acoplamento adimensional em d dimensões.

Escrevendo o elemento diferencial em coordenadas polares obtemos

$$II = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dr r^{d-1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \prod_{k=1}^{d-2} d\theta_k \sin^k(\theta_k) \frac{1}{(r^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{L.3})$$

e usamos a fórmula

$$\int_0^\pi (\sin \theta)^k d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \quad (\text{L.4})$$

calculamos $\prod_{k=1}^{d-2} d\theta_k \sin^k(\theta_k)$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \prod_{k=1}^{d-2} d\theta_k \sin^k(\theta_k) &= \int_0^\pi d\theta_1 \sin(\theta_1) \int_0^\pi d\theta_2 \sin^2(\theta_2) \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} \sin^{d-2}(\theta_{d-2}) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} \dots \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^{d-2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \end{aligned} \quad (\text{L.5})$$

substituindo o resultado acima em I_q temos

$$II = \frac{2}{(2\pi)^d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty dr r^{d-1} \frac{1}{(r^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{L.6})$$

Notamos que a integral em r acima pode ser escrita na forma de uma função Beta

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^\infty dt t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y} \quad (\text{L.7})$$

com isso, podemos reescrever II como sendo

$$II = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(\frac{1-d}{2})}{(\Omega^2)^{\frac{1-d}{2}}} \quad (\text{L.8})$$

a função $\Gamma(\frac{1-d}{2})$ possui pólos em zero e em inteiros negativos, e as divergências da integral se manifestam como um pólo simples em $d \rightarrow 3$. Tomando

$$d = 3 - 2\varepsilon \quad (\text{L.9})$$

reescrevemos II como

$$II = \frac{\Omega^2 (\Omega^2)^{-\varepsilon}}{8\pi^2} \left(\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2\varepsilon} \Gamma(-1 + \varepsilon) \quad (\text{L.10})$$

usando que

$$\Gamma(\varepsilon - 1) = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \quad (\text{L.11})$$

obtemos

$$II = \frac{\Omega^2 (\Omega^2)^{-\varepsilon}}{8\pi^2} \left(\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2\varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \quad (\text{L.12})$$

expandindo $\left[\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2\varepsilon}$ em torno de $\varepsilon = 0$, obtemos

$$\left[\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2\varepsilon} = 1 - 2\varepsilon \ln\left(\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \quad (\text{L.13})$$

substituindo esta expansão em II obtemos

$$I_0^{TP} = \frac{1}{2} \frac{\delta\lambda}{(4\pi)^2} \Omega^2 \left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^{2\varepsilon} \left[1 - 2\varepsilon \ln\left(\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{\varepsilon(\varepsilon - 1)} \quad (\text{L.14})$$

que pode ser reescrita como sendo

$$I_0^{TP} = \frac{1}{2} \frac{\delta\lambda}{(4\pi)^2} \Omega^2 \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{\Omega^2}\right) - 1\right] + O(\varepsilon) \quad (\text{L.15})$$

Agora analisamos a contribuição dependente da temperatura do diagrama *tadpole*, que é dada por

$$I_\beta^{TP} = \frac{1}{2} \frac{\delta\lambda\mu^{3-d}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}\sqrt{k^2 + \Omega^2}} - 1} \quad (\text{L.16})$$

usando o resultado derivado em I_0^{TP}

$$\begin{aligned} II &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{L.17})$$

reescrevemos I_β^{TP} como

$$I_\beta^{TP} = \frac{\delta\lambda}{2} \mu^{3-d} \frac{2}{(2\pi)^d} \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}\sqrt{k^2 + \Omega^2}} - 1} \quad (\text{L.18})$$

tomando $d = 3 - 2\varepsilon$

$$I_\beta^{TP} = \frac{\delta\lambda}{2} \mu^{2\varepsilon} \frac{2}{(2\pi)^{3-2\varepsilon}} \frac{\pi^{\frac{3-2\varepsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3-2\varepsilon}{2}\right)} \int_0^\infty dk \frac{k^{2-2\varepsilon}}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}\sqrt{k^2 + \Omega^2}} - 1} \quad (\text{L.19})$$

reescrevemos o termo

$$\frac{2}{(2\pi)^{3-2\varepsilon}} \frac{\pi^{\frac{3-2\varepsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3-2\varepsilon}{2}\right)} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\right)^{-2\varepsilon} \quad (\text{L.20})$$

obtendo

$$I_{\beta}^{TP} = \delta \frac{\lambda}{2} \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\right)^{-2\varepsilon} \int_0^{\infty} dk \frac{k^{2-2\varepsilon}}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}\sqrt{k^2 + \Omega^2}} - 1} \quad (\text{L.21})$$

fazemos algumas manipulações no coeficiente da integral acima, reescrevendo ela como

$$\delta \lambda \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\right)^{-2\varepsilon} = \delta \lambda \frac{\pi^{(-2+\varepsilon)4\varepsilon}}{2} + O(\varepsilon) \quad (\text{L.22})$$

reescrevendo I_{β}^{TP} como

$$I_{\beta}^{TP} = \delta \frac{\lambda}{2} \frac{\pi^{(-2+\varepsilon)4\varepsilon}}{2} \int_0^{\infty} dk \frac{k^{2-2\varepsilon}}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}\sqrt{k^2 + \Omega^2}} - 1} \quad (\text{L.23})$$

como a integral acima é finita, podemos tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I_{\beta}^{TP} = \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{(k^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{e^{\frac{1}{T}\sqrt{k^2 + \Omega^2}} - 1} \quad (\text{L.24})$$

após algumas manipulações algébricas reescrevemos I_{β}^{TP} como

$$I_{\beta}^{TP} = \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda}{2\pi^2} \Gamma(3) T^2 I_3(\beta\Omega) \quad (\text{L.25})$$

e usamos o resultado $I_3(\beta\Omega)$

$$\begin{aligned} I_3(\beta\Omega) &= -\frac{\pi}{4}\beta\Omega - \frac{(\beta\Omega)^2}{8} \left(\log \frac{\beta\Omega}{4\pi} + \gamma - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(m+1)(2\pi)^{2m}} (\beta\Omega)^{2(m+1)} \zeta(2m+1) + \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (\text{L.26})$$

logo

$$\begin{aligned} I_{\beta}^{TP} &= \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda}{2\pi^2} \Gamma(3) T^2 \left[-\frac{\pi}{4}\beta\Omega - \frac{(\beta\Omega)^2}{8} \left(\log \frac{\beta\Omega}{4\pi} + \gamma - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(m+1)(2\pi)^{2m}} (\beta\Omega)^{2(m+1)} \zeta(2m+1) + \frac{\pi^2}{12} \right] \end{aligned} \quad (\text{L.27})$$

como estamos interessados no limite de altas temperaturas ($\beta\Omega \rightarrow 0$)

$$I_{\beta}^{TP} = \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{12} T^2 - \frac{\pi}{4} \Omega T - \frac{\Omega^2}{8} \left(\log \frac{\Omega}{4\pi T} + \gamma - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (\text{L.28})$$

Juntando as duas contribuições do *tadpole* e fazendo algumas manipulações obtemos

$$\text{Diagram} = \frac{\delta \lambda}{32\pi^2} \Omega^2 \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{\delta \lambda \Omega^2}{32\pi^2} \left[\log \left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2} \right) - \gamma \right] + \frac{\delta \lambda}{24} T^2 - \frac{\delta \lambda}{8\pi} \Omega T \quad (\text{L.29})$$

L.2 *Tadpole* com inserção η^2

$$\text{Diagram} = \frac{\delta^2 \lambda \eta^2}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{4\omega^3(\mathbf{q})} \quad (\text{L.30})$$

usaremos o resultado derivado no cálculo do diagrama *tadpole*, usando o fato que

$$\int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{4\omega^3(\mathbf{q})} = -\frac{d}{d\Omega^2} \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{2\omega(\mathbf{q})} \quad (\text{L.31})$$

and

$$I_{TP} = \frac{1}{16\pi^2} \Omega^2 \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{\Omega^2}{16\pi^2} \left[\log \left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2} \right) - \gamma \right] + \frac{1}{12} T^2 - \frac{1}{4\pi} \Omega T \quad (\text{L.32})$$

$$\text{Diagram} = \delta^2 \frac{\lambda \eta^2}{2} \left(-\frac{d}{d\Omega^2} I_{TP} \right) \quad (\text{L.33})$$

$$\text{Diagram} = \frac{\delta^2 \lambda T \eta^2}{16\pi \Omega} - \frac{\delta^2 \lambda \eta^2}{32\pi^2} \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \log \left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2} \right) - \gamma \right] \quad (\text{L.34})$$

L.3 *Four point*

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= -\delta^2 \frac{3\lambda^2}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega(\mathbf{q}))]}{4\omega^3(\mathbf{q})} \\ &= -\delta^2 \frac{3\lambda^2}{2} \left(-\frac{d}{d\Omega^2} I_{TP} \right) \\ &= -\delta^2 \frac{3\lambda^2}{2} \left[\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{16\pi^2} \left[\log \left(\frac{\mu^2}{4\pi T^2} \right) + \gamma \right] + \frac{1}{8\pi} \frac{T}{\Omega} \right] \end{aligned} \quad (\text{L.35})$$

L.4 *Snow man*

$$\begin{aligned}
\text{Snow man diagram} &= -\delta^2 \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(1+2n(k))}{2(k^2+\Omega^2)^{1/2}} \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{(1+2n(\mathbf{q}))}{4(k^2+\Omega^2)^{3/2}} \\
&\simeq \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{(32\pi^2)^2} \frac{1}{\varepsilon^2} - \delta^2 \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{T^2}{24} - \frac{3T\Omega}{16\pi} \right. \\
&\quad + \left. \frac{\Omega^2}{16\pi^2} \left[\log\left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2}\right) - \gamma \right] \right\} - \delta^2 \lambda^2 \frac{T^3}{384\pi\Omega} + \delta^2 \lambda^2 \frac{T^2}{128\pi^2} \\
&\quad + \delta^2 \frac{\lambda^2}{(16\pi)^2} \left\{ \frac{T^2}{3} - \frac{3T\Omega}{2\pi} + \frac{\Omega^2}{4\pi^2} \left[\log\left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2}\right) - \gamma \right] \right\} \\
&\quad \times \left[\log\left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2}\right) - \gamma \right] + \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{(32\pi^2)^2} \left[\log^2\left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + (2\gamma - 1) \log\left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2}\right) + 2.4 \right] \tag{L.36}
\end{aligned}$$

Não mostramos em detalhes a contribuição do diagrama *snow man* devido a este ser o produto do resultado de duas integrais já calculadas nos diagramas de um *loop*. E para o diagrama de *setting-sun* vamos usar o resultado da referência [98].

$$\begin{aligned}
\text{Setting-sun diagram} &\simeq \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{(32\pi^2)^2} \frac{1}{\varepsilon^2} + \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{(32\pi^2)^2} \frac{1}{\varepsilon} + \delta^2 \frac{\lambda^2 p^2}{(32\pi^2)^2} \frac{1}{6\varepsilon} \\
&\quad - \delta^2 \frac{\lambda^2}{16\pi^2 \varepsilon} \left\{ \frac{T^2}{24} - \frac{T\Omega}{8\pi} + \frac{\Omega^2}{32\pi^2} \left[\log\left(\frac{4\pi T^2}{\mu^2}\right) - \gamma \right] \right\} \\
&\quad + \delta^2 \frac{\lambda^2 \Omega^2}{2(4\pi)^4} \left[\log^2\left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2}\right) \left(2\gamma - \frac{17}{6} \right) \log\left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2}\right) + \gamma^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{17\gamma}{6} + 3.5140 \right] - \delta^2 \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[-\log\left(\frac{\Omega^2}{4\pi\mu^2}\right) + 2 - \gamma \right] \\
&\quad \times \left\{ \frac{T^2}{24} - \frac{T\Omega}{8\pi} - \frac{\Omega^2}{16\pi^2} \left[\log\left(\frac{\Omega}{4\pi T}\right) + \gamma - \frac{1}{2} \right] \right\} \\
&\quad + \delta^2 \frac{\lambda^2 T^2}{24(4\pi)^2} \left[\log\left(\frac{\Omega^2}{T^2}\right) + 5.0669 \right] \tag{L.37}
\end{aligned}$$

Apêndice M

Contra-termos para as equações de GLL

Neste apêndice vamos obter os contratermos adequados para a renormalização de equações de GLL. Com o intuito de ter esta derivação auto-contida, vamos adaptar a notação para uma teoria tri-dimensional adequada para as equações de GLL. Poderíamos usar a notação de capítulos anteriores, onde discutimos a ação efetiva e o potencial efetivo para uma teoria quântica relativística de campos, no entanto, nos parece mais apropriado derivar os contratermos diretamente para a teoria clássica. Vamos inicialmente considerar a teoria no contínuo, onde definimos o potencial efetivo e em seguida, vamos formular o problema na rede.

M.1 Potencial efetivo no contínuo

O cálculo do potencial efetivo começa pela introdução de um campo constante φ através da transformação

$$\phi \rightarrow \phi + \varphi \tag{M.1}$$

e considerando a ação

$$\hat{S}[\varphi; \phi] \equiv S[\varphi + \phi] - S[\varphi] - \int d^3x \phi \frac{\partial S[\phi]}{\partial \phi} \Bigg|_{\phi=\varphi} \tag{M.2}$$

Os termos quadráticos em $\hat{S}$ são dispostos em uma ação “livre” $\hat{S}_2$ e, os termos restantes em uma ação de interação, $\hat{S}_I$. Então, o potencial efetivo é definido pela expressão

$$e^{-V \mathcal{V}_{eff}[\varphi]} = e^{-V \mathcal{V}[\varphi]} \int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}[\varphi; \phi]} \quad (\text{M.3})$$

onde V é o volume tridimensional. A partir desta expressão, obtemos para $\mathcal{V}_{eff}[\varphi]$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{eff}[\varphi] &= \mathcal{V}[\varphi] - \frac{1}{V} \ln \int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}_2[\varphi; \phi]} \\ &\quad - \frac{1}{V} \ln \langle e^{-\hat{S}_I[\varphi; \phi]} \rangle \end{aligned} \quad (\text{M.4})$$

onde

$$\langle e^{-\hat{S}_I[\varphi; \phi]} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}_2[\varphi; \phi]} e^{-\hat{S}_I[\varphi; \phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}_2[\varphi; \phi]}} \quad (\text{M.5})$$

O passo final é determinar φ através de

$$\frac{d \mathcal{V}_{eff}[\varphi]}{d \varphi} = 0 \quad (\text{M.6})$$

A ação $\hat{S}_2[\varphi; \phi]$ para o potencial nu sob consideração é dada por

$$\hat{S}_2[\varphi; \phi] = \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \phi \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \quad (\text{M.7})$$

onde

$$m^2 = -m_0^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \quad (\text{M.8})$$

Já que φ é constante, a primeira integral funcional na Eq. (M.4) pode ser facilmente feita no espaço dos momentos, com o resultado

$$\frac{1}{V} \ln \int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}_2[\varphi; \phi]} = -\frac{1}{2} \int_k \ln \tilde{G}^{-1}[\varphi; k^2] \quad (\text{M.9})$$

onde $\tilde{G}^{-1}[\varphi; k^2]$ é o inverso do propagador tridimensional

$$\tilde{G}[\varphi; k^2] = \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (\text{M.10})$$

e $\int_k \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$. O cálculo do diagrama *setting-sun* requer $\hat{S}_I$,

$$\hat{S}_I[\varphi; \phi] = \int d^3x \left(-\frac{1}{3} \kappa \phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right) \quad (\text{M.11})$$

com $\kappa = -\frac{1}{2}\lambda\varphi$. A expansão de $e^{-\hat{S}_I}$ em Eq. (M.4) da

$$\frac{1}{V} \ln \langle e^{-\hat{S}_I[\varphi, \phi]} \rangle_{\text{setting-sun}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \kappa \right)^2 6 H[\varphi] \quad (\text{M.12})$$

onde

$$\begin{aligned} H[\varphi] &= \frac{1}{6V} \int d^3x d^3y \langle \phi^3(x) \phi^3(y) \rangle \\ &= \int_k \int_q \tilde{G}[\varphi; k^2] \tilde{G}[\varphi; q^2] \tilde{G}[\varphi; (k+q)^2] \end{aligned} \quad (\text{M.13})$$

Agora, a parte divergente de $\mathcal{V}_{eff}[\varphi]$ é obtida a partir de

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{V}_{eff}[\varphi]}{d\varphi^2} \right|_{\text{tad+sun}} = \frac{\lambda}{2} I_{div}[\varphi] - \frac{\lambda^2}{6} H_{div}[\varphi] \quad (\text{M.14})$$

com

$$I[\varphi] = \int_k \tilde{G}[\varphi; k^2] \quad (\text{M.15})$$

onde $I_{div}[\varphi]$ e $H_{div}[\varphi]$ representam as partes divergentes de $I[\varphi]$ e $H[\varphi]$. Note que as derivadas de $H[\varphi]$ com relação a φ levam a integrais finitas e portanto são irrelevantes aqui. O cálculo das partes divergentes de I e H requerem um esquema de regularização. Já que simulamos nossas equações de GLL numa rede cúbica, calculamos estas partes divergentes pelo cálculo do potencial efetivo na rede.

M.2 Potencial efetivo na rede

Aqui consideramos a teoria em uma rede cúbica de volume $V = L^3$, com $L = Na$, onde a é o espaçamento da rede e N é o número de espaçamentos da rede. As coordenadas x_i dos sítios da rede são tais que $0 \leq x_i \leq a(N-1)$. O Laplaciano na rede, $\nabla_{latt}^2 \equiv \Delta$, é definido como

$$\Delta\phi(x) = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^3 [\phi(x + a\hat{i}) - 2\phi(x) + \phi(x - a\hat{i})] \quad (\text{M.16})$$

onde $\hat{i}$ é um vetor unitário cartesiano indicando as três direções ortogonais de uma rede quadrada. Também impomos condições periódicas de contorno (c.p.c) nos campos

$$\phi(x + aN\hat{i}) = \phi(x) \quad (\text{M.17})$$

e definimos a transformada de Fourier $\tilde{f}(k)$ de uma função $f(x)$ na rede como

$$\tilde{f}(k) = a^3 \sum_x e^{-ik \cdot x} f(x) \quad (\text{M.18})$$

Devido as c.p.c, os momentos na rede formam a zona de Brillouin $\mathcal{B}$

$$k_i = \frac{2\pi}{aN} n_i, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{M.19})$$

A transformada inversa é dada por

$$f(x) = \frac{1}{V} \sum_{k \in \mathcal{B}} e^{ik \cdot x} \tilde{f}(k) \quad (\text{M.20})$$

e as somas dos momentos na zona de Brillouin serão denotados por

$$\frac{1}{V} \sum_{k \in \mathcal{B}} \equiv \int_k \quad (\text{M.21})$$

Agora consideramos a derivação do potencial efetivo na rede. A ação na rede é dada por

$$S_{latt}[\phi] = a^3 \sum_x \left(-\frac{1}{2} \phi \Delta \phi + \mathcal{V}[\phi] \right) \quad (\text{M.22})$$

onde $\mathcal{V}[\phi]$ é o mesmo usado anteriormente. A derivação do potencial efetivo segue o mesmo procedimento utilizado no contínuo, levando a expressões para os diagramas *setting-sun* e *tadpole* como nas eqs. (M.13) e (M.15), mas com $\int_k$ dada por somas sobre os momentos na rede como indicado na Eq. (M.21). O que deve ser determinado é o propagador na rede correspondendo a $\tilde{G}$. O propagador na rede $\tilde{G}_{latt}$ pode ser obtido a partir da ação quadrática $\hat{S}_2[\varphi; \phi]$ na rede

$$\hat{S}_{2latt}[\varphi; \phi] = a^3 \sum_x \left(-\frac{1}{2} \phi \Delta \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (\text{M.23})$$

com m^2 dado pela Eq. (M.8). O propagador na rede $G_{latt}[\varphi; x, y]$ é o inverso de $(-\Delta + m^2)$, ou seja

$$a^3 \sum_y (-\Delta + m^2)_{x,y} G_{latt}[\varphi; x, y] = \frac{1}{a^3} \delta_{x,y} \quad (\text{M.24})$$

onde $\delta_{x,y}$ é a delta de Kronecker. Já que φ é uma constante, a solução desta equação pode ser obtida usando a transformada de Fourier de $G_{latt}[\varphi; x, y]$, definida como

$$G_{latt}[\varphi; x, y] = \int_k e^{ik \cdot x} \tilde{G}_{latt}[\varphi; k^2] \quad (\text{M.25})$$

Substituindo isso na Eq. (M.24), obtemos

$$\tilde{G}_{latt}[\varphi, k^2] = \frac{a^2}{4} \frac{1}{d(\varphi; n_1, n_2, n_3)} \quad (\text{M.26})$$

onde

$$\begin{aligned} d(\varphi; n_1, n_2, n_3) &= \frac{a^2}{4} \left[2a^{-2} \sum_{i=1}^3 (1 - \cos ak_i) + m^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \sin^2(\pi n_i/N) + (am/2)^2 \end{aligned} \quad (\text{M.27})$$

Podemos então escrever $I[\varphi]$ para o diagrama de *tadpole* como [131]

$$I[\varphi] = \frac{1}{4aN^3} \sum_{n_i=0}^N \frac{1}{d(\varphi; n_1, n_2, n_3)} \quad (\text{M.28})$$

e para a soma dupla em $H[\varphi]$ para o diagrama setting-sun temos

$$\begin{aligned} H[\varphi] &= \frac{1}{64N^6} \sum_{n_i, m_i=0}^{N-1} \frac{1}{d(\varphi; n_1, n_2, n_3) d(\varphi; m_1, m_2, m_3)} \\ &\times \frac{1}{d(\varphi; n_1 + m_1, n_2 + m_2, n_3 + m_3)} \end{aligned} \quad (\text{M.29})$$

As partes divergentes das somas podem ser isoladas nos limites de $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$. Por exemplo, a soma no *tadpole* no limite de $N \rightarrow \infty$ pode ser convertido na integral [131]

$$\begin{aligned} I[\varphi] &= \frac{1}{4a\pi^3} \int_0^\pi d^3x \frac{1}{\sum_i \sin^2 x_i + (am/2)^2} \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(am)^2/4} \left[e^{-\alpha/2} I_0(\alpha/2) \right]^3 \end{aligned} \quad (\text{M.30})$$

onde I_0 é a função de Bessel modificada. No limite de $a \rightarrow 0$, a parte divergente de $I[\varphi]$ é dada por [131]

$$I_{div}[\varphi] = \frac{3.1759}{4\pi a} \quad (\text{M.31})$$

$H_{div}[\varphi]$ também pode ser isolado, com o resultado [131]

$$H_{div}[\varphi] = \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{6}{a\mu} + 0.09 \right) \quad (\text{M.32})$$

onde μ é a escala de renormalização. O fator numérico finito 0.09 é escolhido em [131] tal que depois da renormalização o diagrama *setting-sun* é invariante ao esquema de renormalização.

A massa renormalizada é obtida pela subtração das partes divergentes destes diagramas como indicado na Eq. (M.14)

$$-\frac{1}{2} m^2 \phi^2 \rightarrow -\frac{1}{2} (m^2 + \delta m^2) \phi^2 \equiv -\frac{1}{2} m_R^2 \phi^2 \quad (\text{M.33})$$

onde o contratermo de massa é dado por

$$\delta m^2 = \frac{\lambda}{2} I_{div}[\varphi] - \frac{\lambda^2}{6} H_{div}[\varphi] \quad (\text{M.34})$$

Pelas expressões acima, introduzimos os seguintes contratermos à temperatura finita em nosso potencial original

$$V_{ct} = \left\{ -9.5277 \frac{\lambda T}{4\pi a} + \frac{6\lambda^2 T^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{6}{\mu a} \right) + 0.09 \right] \right\} \frac{\phi^2}{2} \quad (\text{M.35})$$

Bibliografia

- [1] L. Dolan e R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [2] D.A. Kirzhnits and A.D. Linde, Annals of Phys. **101**, 195 (1976).
- [3] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Inglaterra, 2000).
- [4] U. Kraemmer e A. Rebhan, Rept. Prog. Phys. **67**, 351 (2004).
- [5] J.O. Andersen e M. Strickland, Annals Phys. **317**, 281 (2005).
- [6] J.D. Gunton, M. San Miguel e P.S. Sahni, *Phase Transitions and Critical Phenomena* ed. por C. Domb e J.L. Lebowitz (Academic Press, vol.8, Nova York, 1983).
- [7] Proceedings of Quark Matter 2004, J. Phys. G **30**, S633 (2004).
- [8] E. Fraga, G. Krein, Phys. Lett. **B614**, 181 (2005).
- [9] J. Rafelski e J. Letessier, Phys. Rev. Lett. **85**, 4695 (2000).
- [10] A. Dumitru e R.D. Pisarski, Nucl. Phys. A **698**, 444 (2002); O. Scavenius, A. Dumitru e A.D. Jackson, Phys. Rev. Lett. **87**, 182302 (2001).
- [11] R.D. Pisarski, Phys. Rev. D **62**, 111501 (2000); A. Dumitru e R.D. Pisarski, Phys. Lett. **B504**, 282 (2001).
- [12] J. Rerup, Phys. Rev. Lett. **92**, 122301 (2004); nucl-th/0406031; V. Koch, A. Majumder e J. Rerup, Phys. Rev. C **72**, 064903 (2005).

- [13] M. Gleiser e R.O. Ramos, Phys. Rev. D **50**, 2441 (1994).
- [14] C. Greiner e B. Muller, Phys. Rev. D **55**, 1026 (1997).
- [15] D.H. Rischke, Phys. Rev. C **58**, 2331 (1998).
- [16] O. Scavenius, A. Dumitru, E.S. Fraga, J.T. Lenaghan e A.D. Jackson, Phys. Rev. D **63**, 116003 (2001).
- [17] A.J. Mizher, E.S. Fraga e G. Krein, hep-ph/0604123; E.S. Fraga, T. Kodama, G. Krein, A.J. Mizher e L.F. Palhares, Nucl. Phys. **A785**, 138 (2007); E.S. Fraga, G. Krein e A.J. Mizher, arXiv:0705.0226 [hep-ph].
- [18] A. Berera, M. Gleiser e R.O. Ramos, Phys. Rev. D **58**, 123508 (1998).
- [19] R. O. Ramos e F.A. R. Navarro, Phys. Rev. D **62**, 085016 (2000).
- [20] A. Berera e R.O. Ramos, Phys. Rev. D **63**, 103509 (2001).
- [21] A. Berera e R.O. Ramos, Phys. Rev. D **71**, 023513 (2005).
- [22] N.D. Antunes, P. Gera e R.J. Rivers, Phys. Rev. D **71**, 105006 (2005).
- [23] M. Gleiser e R.O. Ramos, Phys. Lett. **B300**, 271 (1993).
- [24] J.R. Espinosa, M. Quirós e F. Zwirner, Phys. Lett. **B291**, 115 (1992).
- [25] J. Arafune, K. Ogata e J. Sato, Prog. Theor. Phys. **99**, 119 (1998).
- [26] G. Amelino-Camelia e S.-Y. Pi, Phys. Rev. D **47**, 2356 (1993).
- [27] G.N.J. Añanos, A.P.C. Malbouisson e N.F. Svaiter, Nucl. Phys. **B547**, 221 (1999); G.N.J. Añanos e N.F. Svaiter, Mod. Phys. Lett A **15**, 2235 (2000).
- [28] N. Banerjee e S. Mallik, Phys. Rev. D **43**, 3368 (1991).
- [29] R. R. Parwani, Phys. Rev. D **45**, 4695 (1992); erratum, Phys. Rev. D **48**, 5965 (1993).

- [30] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1996).
- [31] S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka e T. Takaishi, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 615 (2003).
- [32] J.P. Blaizot, E. Iancu e A. Reban, *AIP* **739**, 63 (2004).
- [33] M. E. Carrington, *Phys. Rev. D* **45**, 2933 (1992).
- [34] P. Arnold e O. Espinosa, *Phys. Rev. D* **47**, 3546 (1993).
- [35] A. Duncan e M. Moshe, *Phys. Lett.* **B215**, 352 (1988).
- [36] A. Okopin'ska, *Phys. Rev. D* **36**, 2415 (1987).
- [37] S.K. Gandhi e M.B. Pinto, *Phys. Rev. D* **49**, 4258 (1994).
- [38] M.B. Pinto, *Phys. Rev. D* **50**, 7673 (1994).
- [39] I.R.C. Buckley, A. Duncan e H.F. Jones, *Phys. Rev. D* **47**, 2554 (1993); A. Duncan e H.F. Jones, *ibid.* **47**, 2560 (1993); C.M. Bender, A. Duncan e H.F. Jones, *ibid.* **49**, 4219 (1994); C. Arvanitis, H.F. Jones e C.S. Parker, *ibid.* **52**, 3704 (1995).
- [40] R. Guida, K. Konishi e H. Suzuki, *Ann. Phys.* **249**, 109 (1996).
- [41] S.K. Gandhi e A.J. McKane, *Nucl. Phys.* **B419**, 424 (1994).
- [42] G. Krein, D.P. Menezes e M.B. Pinto, *Phys. Lett.* **B370**, 5 (1996); G. Krein, R.S. Marques de Carvalho, D.P. Menezes, M. Nielsen e M.B. Pinto, *Eur. Phys. J. A* **1**, 45 (1998).
- [43] T.S. Evans, H.F. Jones e A. Ritz, *Nucl. Phys.* **B517**, 599 (1998).

- [44] R. Seznec e J. Zinn-Justin, J. Math. Phys. **20**, 1398 (1979); J.C. Le Guillou e J. Zinn-Justin, Ann. Phys. **147**, 57 (1983); V.I. Yukalov, Moscow Univ. Phys. Bull. **31**, 10 (1976); W.E. Caswell, Ann. Phys. (N.Y) **123**, 153 (1979); I.G. Halliday e P. Suranyi, Phys. Lett. **B85**, 421 (1979); J. Killinbeck, J. Phys. A **14**, 1005 (1981); R.P. Feynman e H. Kleinert, Phys. Rev. A **34**, 5080 (1986); H.F. Jones e M. Moshe, Phys. Lett. **B234**, 492 (1990); A. Neveu, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B18**, 242 (1990); V. Yukalov, J. Math. Phys **32**, 1235 (1991); C.M. Bender et al., Phys. Rev. D **45**, 1248 (1992); S. Gandhi e M.B. Pinto, Phys. Rev. D **46**, 2570 (1992); H. Yamada, Z. Phys. C **59**, 67 (1993); K.G. Klimenko, Z. Phys. C **60**, 677 (1993); A.N. Sissakian, I.L. Solovtsov e O.P. Solovtsova, Phys. Lett. **B321**, 381 (1994); H. Kleinert, Phys. Rev. D **57**, 2264 (1998); Phys. Lett. **B434**, 74 (1998); para uma revisão, ver H. Kleinert e V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, Cap.19 (World Scientific, Singapura 2001); K.G. Klimenko, Z. Phys. C **50**, 477 (1991); M.B. Pinto, R.O. Ramos e P.J. Sena, Physica A **342**, 570 (2004).
- [45] P.M. Stevenson, Phys. Rev. D **23**, 2916 (1981).
- [46] J.-L. Kneur e D. Reynaud, Eur. Phys. J. C **24**, 323 (2002); Phys. Rev. D **66**, 085020 (2002).
- [47] J.-L. Kneur, M.B. Pinto e R.O. Ramos, Phys. Rev. Lett. **89**, 210403 (2002); Phys. Rev. A **68**, 043615 (2003); E. Braaten e E. Radescu, Phys. Rev. Lett. **89**, 271602 (2002); Phys. Rev. A **66**, 06360 (2002).
- [48] H.F. Jones e P. Parkin, Nucl. Phys. **B 594**, 518 (2001).
- [49] E. Braaten e E. Radescu, Phys. Rev. A **66**, 063601 (2002).
- [50] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [51] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).

- [52] R. Mills, *Propagators for Many-Particle Systems* (Gordon e Breach, Nova York, 1969).
- [53] L. V. Keldysh, Sov. Phys. **20**,1018 (1964).
- [54] A.J. Niemi e G.W. Semenoff, Annals of Phys. **152**, 105 (1984).
- [55] Y. Takahashi e H. Umezawa, *Collective Phenomena* **2**, 55 (1975).
- [56] H. Umezawa, H. Matsumoto e M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics e Condensed States* (North Holland, Amsterdam, 1982).
- [57] I. Ojima, Ann. Phys. (NY) **137**, 1 (1981).
- [58] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, Singapure,1997).
- [59] R.O. Ramos, *Short Introduction to Quantum Field Theory at Finite Temperature and Applications* (Notas de um curso, não publicado, 2005).
- [60] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Inglaterra, 1996).
- [61] J.I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Inglaterra, 1993).
- [62] R.L.S. Farias, G. Krein e O.A. Battistel, AIP Conf. Proc. **739**, 431 (2005).
- [63] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. Krein e O.A. Battistel, Phys. Rev. C **73**, 018201 (2006).
- [64] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. Krein e O.A. Battistel, hep-ph/0604203, submetido para publicação.
- [65] R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. Krein e O.A. Battistel, Nucl. Phys. **A790**, 332 (2007).

- [66] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill, Nova York, 1965).
- [67] N.P. Landsman e Ch.G. van Weert, Phys. Rep. **145**, 141 (1987).
- [68] E.S. Abers e B.W. Lee, Phys. Rep. **9**, 1 (1973).
- [69] J.W. Negele e H. Orle, *Quantum Many-Particle Systems* (Addilson-Wesley, 1988).
- [70] G.D. Mahan, *Many-Particle Physics* (Plenum Press, NY, 1990).
- [71] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov e I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1992).
- [72] K. Chou, Z. Su, B. Hao e L. Yu, Phys. Rep. **118**, 1 (1985).
- [73] Uma acessível introdução ao formalismo de tempo real pode ser encontrada em R. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (Cambridge 1987).
- [74] R.A. Craig, J. Math. Phys. **9**,605 (1968).
- [75] G.Z. Zhou, Z.B. Su, B.L. Hao e Lu Yu, Phys. Rev. B **22**,3385 (1980).
- [76] R. Kubo, J.Phys.Soc. Japan **12**, 570 (1957).
- [77] P.C. Martin e J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [78] P.C. Martin, E.D. Siggia e H.A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [79] S. Jeon, Phys. Rev. D **47**, 4586 (1993).
- [80] M. Morikawa e M. Sasaki, Phys. Lett. **165B**, 59 (1985).
- [81] A. Hosoya e M. Sakagami, Phys. Rev. D **29**, 2228 (1984).
- [82] A. Hosoya, M. Sakagami e M. Takao, Ann. Phys. **154**, 229 (1984).

- [83] G. Boyd, D. Brahm e S.D.H. Hsu, Phys. Rev. D **48**, 4952 (1993); M.E. Carrington, Phys. Rev. D **45**, 2933 (1992); M. Dine, R. Leigh, P. Huet, A. Linde e D. Linde, Phys. Rev. D **46**, 550 (1992); J.R. Espinosa, M. Quiros e F. Zwirner, Phys. Lett. **B291**, 115 (1992); W. Buchmüller, T. Helbig e D. Walliser, Nucl. Phys. **B487**, 387 (1993); P. Arnold e O. Espinosa, Phys. Rev. D **47**, 3546 (1993); M. Gleiser e E. W. Kolb, Phys. Rev. D **48**, 1560 (1993).
- [84] M. Morikawa, Phys. Rev. D **33**, 3607 (1986).
- [85] D. Lee e D. Boyanovsky, Nucl. Phys. **B406**, 631 (1993).
- [86] T. Tomé e M.J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade* (EDUSP, São Paulo, 2001).
- [87] D. Boyanovsky, I.D. Lawrie e D.S. Lee, Phys. Rev D **54**, 4013 (1996).
- [88] G. Baym, J. Blaizot, M. Holzmann, F. Laloe e D. Vautherin, Phys. Rev. Lett. **83**, 1703 (1999).
- [89] V. A. Kashurnikov, N.V. Prokof'ev e B.V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **87**, 120402 (2001); P. Arnold e G.D. Moore, Phys. Rev. Lett. **87**, 120401 (2001).
- [90] P. Arnold, G.D. Moore e B. Tomasik, Phys. Rev. A **65**, 013606 (2002).
- [91] H. Kleinert, Phys. Lett. A **173**, 332 (1993).
- [92] V. I. Yukalov, Mosc. Univ. Phys. Bull. **31**, 10 (1976).
- [93] A. Okopinska, Phys. Rev. D **35**, 1835 (1987).
- [94] E. Braaten e E. Radescu, Phys. Rev. Lett. **89**, 271602 (2002).
- [95] F. F. de Souza Cruz, M. B. Pinto e R.O. Ramos, Phys. Rev. B **64**, 014515 (2001); F.F. de Souza Cruz, M.B. Pinto, R.O. Ramos e P. Sena , Phys.Rev. A **65**, 053613 (2002).

- [96] R. Seznec e J. Zinn-Justin, J. Math. Phys. **20**, 1398 (1979); J.C. LeGuillou e J. Zinn-Justin, Ann. Phys. **147**, 57 (1983).
- [97] S. Chiku e T. Hatsuda, Phys. Rev. D **58**, 076001 (1998).
- [98] M.B. Pinto e R.O. Ramos, Phys. Rev. D **60**, 105005 (1999).
- [99] J.O. Andersen, E. Braaten e M. Strickland, Phys. Rev. D **62**, 045004 (2000).
- [100] B. Bellet, P. Garcia e A. Neveu, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 5587 (1997); **11**, 5607 (1997).
- [101] C. Arvanitis, F. Geniet, M. Iacomi, J. L. Kneur e A. Neveu, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 3307 (1997).
- [102] P. Ginsparg, Nucl. Phys. **B170**, 388 (1980).
- [103] J.L. Kneur, M.B. Pinto e R.O. Ramos, Phys. Rev. A **68**, 043615 (2003).
- [104] F.F. de Souza Cruz, M.B. Pinto e R.O. Ramos, Laser Phys. **12**, 203 (2002).
- [105] D.J. Bedingham e T.S. Evans, Phys. Rev. D **64**, 105018 (2001).
- [106] H. Kleinert e W. Janke, Phys. Lett. A **206**, 283 (1995).
- [107] R. Guida, K. Konishi e H. Suzuki, Ann. Phys. **241**, 152 (1995).
- [108] J.-L. Kneur e D. Reynaud, Eur. Phys. J. C **24**, 323 (2002); Phys. Rev. D **66**, 085020 (2002).
- [109] J.-L. Kneur, M.B. Pinto e R.O. Ramos, Phys. Rev. Lett. **89**, 210403 (2002).
- [110] S.K. Gandhi, H.F. Jones e M.B. Pinto, Nucl. Phys. **B359**, 429 (1991).
- [111] G. Krein, D.P. Menezes e M.B. Pinto, Int. J. Mod. Phys. E **9**, 221 (2001).
- [112] R.L.S. Farias, G. Krein e R.O. Ramos, em preparação.

- [113] A.J. Niemi e G.W. Semenoff, Nucl. Phys. **B230**, 181 (1984).
- [114] R. Kobes, Phys. Rev. D **42**, 562 (1990).
- [115] H. Matsumoto, Y.Nakano e H. Umezawa, Phys. Rev D **31**, 1495 (1985).
- [116] T.S. Evans, Z. Phys. C **36**, 153 (1987); **41**, 333 (1988).
- [117] Y. Fujimoto e Y. Yamada, Z. Phys. C **37**, 365 (1988).
- [118] R.L.S. Farias, R.O. Ramos e G. Krein, “*Free Energy for a Scalar Field Theory in the Optimized Perturbation Theory: Unbroken and Broken Symmetry Cases*”, em preparação.
- [119] J.O. andersen, E. Braaten e M. Strickland, Phys. Rev. D **63**, 105008 (2001).
- [120] F.G. Gardim e F.M. Steffens, comunicação privada.
- [121] N.C. Cassol-Seewald, *Um estudo sobre transições de fase dinâmicas e equações estocásticas de Ginzburg-Landau-Langevin*, (Dissertação de Mestrado, IFT, 2006).
- [122] N.C. Cassol-Seewald, R.L.S. Farias, E.S. Fraga, G. Krein e R.O. Ramos, *Dynamics of condensate formation in a spontaneously broken scalar theory*, em preparação.
- [123] R.L.S. Farias, N.C. Cassol-Seewald, G. Krein e R.O. Ramos, Nucl. Phys. **A782**, 33 (2007).
- [124] M.I.M. Copetti e C.M. Elliot, Mat. Sci. Tecn. **6**, 273 (1990).
- [125] N.C. Cassol-Seewald, M.I.M. Copetti e G. Krein, “*Numerical analysis of spectral methods for the Ginzburg-Landau equation for fast phase transitions*”, submetido para publicação.
- [126] C.J. Gagne e M. Gleiser, Phys. Rev. E **61**, 3483 (2000).

- [127] L.M.A. Bettencourt, K. Rajagopal e J.V. Steele, Nucl. Phys. **A693**, 825 (2001).
- [128] G. Parisi, Statistical Field Theory (Addison-Wesley, Nova York, 1988).
- [129] J. Borrill and M. Gleiser, Nucl. Phys. B **483**, 416 (1997); L. M. A. Bettencourt, S. Habib and G. Lythe, Phys. Rev. D **60**, 105039 (1999); C. J. Gagne and M. Gleiser, Phys. Rev. E **61**, 3483 (2000); L. M. A. Bettencourt, K. Rajagopal, and J. V. Steele, Nucl. Phys. A **693**, 825 (2001).
- [130] E. S. Fraga, G. Krein and R. O. Ramos, AIP Conf. Proc. **814**, 621 (2006); E. S. Fraga, Eur. Phys. J. A **29**, 123 (2006).
- [131] K. Farakos, K. Kajantie, K. Rummukainen e M.E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. **B425**, 67 (1994).