

Nathalia Massambani

Investigação de Múltiplos Pontos de Ótimo
do Problema de Despacho Econômico com
Efeito dos Pontos de Carregamento de
Válvula Através de um Método Baseado em
Sistemas Dinâmicos

Bauru - SP

2024

Nathalia Massambani

**Investigação de Múltiplos Pontos de Ótimo do
Problema de Despacho Econômico com Efeito dos
Pontos de Carregamento de Válvula Através de um
Método Baseado em Sistemas Dinâmicos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Câmpus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Faculdade de Engenharia de Bauru

Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo

Coorientador: Prof. Dr. André Christóvão Pio Martins

Bauru - SP

2024

Massambani, Nathalia

Investigação de múltiplos pontos de ótimo do problema de despacho econômico com efeito com efeito dos pontos de carregamento de válvula através de um método baseado em sistemas dinâmicos / Nathália Massambani. - Bauru, 2024
148 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Faculdade de Engenharia de Bauru

Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo

Coorientador: Prof. Dr. André Christóvão Pio Martins

1. Despacho econômico com efeitos de ponto de carregamento de válvula. 2. Soluções ótimas globais. 3. Sistema dinâmico de otimização. I. Título.

IMPACTO POTENCIAL DESSA PESQUISA

O trabalho sobre a investigação de múltiplos pontos de ótimo do problema de despacho econômico, com efeito dos pontos de carregamento de válvula através de um método baseado em sistemas dinâmicos, é uma pesquisa metodológica que pode contribuir com algum impacto social e econômico. Ao otimizar a geração de potência ativa visando o despacho econômico em sistemas de energia, busca-se auxiliar na melhoria da eficiência energética, implicando em uma redução de custos de produção enquanto se atende à demanda de energia. Como resultado, espera-se uma diminuição potencial de custos tanto para as empresas geradoras quanto para os consumidores finais.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

The work on investigating multiple optimal points of the economic dispatch problem, with the valve-point loading effect through a method based on dynamic systems, is a methodological research that can contribute with some social and economic impact. By optimizing active power generation aiming at economic dispatch in power systems, the goal is to assist in the improving energy efficiency, which implies a reduction in production costs and meeting energy demand. As a result, a potential decrease in costs is expected for both generating companies and final consumers.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE NATHALIA MASSAMBANI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 06 dias do mês de março do ano de 2024, às 09:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de NATHALIA MASSAMBANI, intitulada **INVESTIGAÇÃO DE MÚLTIPLOS PONTOS DE ÓTIMO DO PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO COM EFEITO DOS PONTOS DE CARREGAMENTO DE VÁLVULA ATRAVÉS DE UM MÉTODO BASEADO EM SISTEMAS DINÂMICOS**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Faculdade de Ciências, Profa. Dra. EDILAINE MARTINS SOLER (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru UNESP, Prof. Dr. DIEGO NUNES DA SILVA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP. Após a exposição pela mestranda e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, a discente recebeu o conceito final: Aprovada . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO



AGRADECIMENTOS

A Deus. À minha família por todo o suporte. Ao meu orientador, professor Dr. Antonio Roberto Balbo e o coorientador, professor Dr. André Christóvão Pio Martins, pela oportunidade concedida, orientação técnica, ensinamentos, dedicação, paciência e cobrança durante todo o trabalho.

A todos os professores e amigos do Departamento de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista (UNESP) - Campus Bauru, na qual tive a honra de conhecer durante o curso.

Aos funcionários do Departamento de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista (UNESP) - Campus Bauru, pela atenção e carinho durante o mestrado.

RESUMO

O despacho econômico com representação do efeito dos pontos de carregamento de válvula (PDE-PV) é um problema desafiador na operação de sistemas elétricos de potência e de energia. Este problema busca a minimização dos custos de combustível das unidades geradoras, sujeitas a restrições de balanço de potência e limites físicos e operacionais de geração. O PDE-PV é formulado como um problema de otimização não linear, não convexo, não diferenciável e multimodal. Suas características de multimodalidade dificultam a busca de soluções globais por meio de métodos exatos ou heurísticos de otimização. Várias abordagens meta-heurísticas e determinísticas têm sido propostas na literatura para resolver o problema PDE-PV. Neste trabalho é proposta uma nova abordagem de solução capaz de encontrar múltiplos ótimos locais e, possivelmente, a solução ótima global do problema. Esta proposta é uma extensão de um método descrito na literatura para problemas irrestritos de otimização, posteriormente estendido a problemas com restrições de igualdade. Assim, propõe-se a generalização dessa abordagem de modo a introduzir o tratamento de restrições de igualdade e desigualdade (variáveis canalizadas), visando resolver o PDE-PV. Na abordagem de solução proposta, substitui-se o problema PDE-PV original por um sistema dinâmico auxiliar, obtido de forma que seus pontos de equilíbrio correspondam às soluções ótimas locais do problema de otimização original. O método busca iterativamente todos os pontos de equilíbrio que correspondem aos ótimos locais e, possivelmente, ao ótimo global do problema PDE-PV original. A abordagem de solução proposta é aplicada para encontrar múltiplos ótimos locais do PDE-PV para sistemas com 3, 6, 10, 13, 19 e 40 geradores e em outro problema multimodal, proposto na literatura. Neste contexto, o método identifica diversos pontos de mínimo e, ao final, seleciona o melhor deles, com o propósito de comparar os resultados com aqueles determinados por métodos meta-heurísticos e determinísticos previamente propostos na literatura.

Palavras-chave: Despacho econômico com efeitos de ponto de carregamento de válvula, soluções ótimas globais, sistema dinâmico de otimização.

ABSTRACT

The economic dispatch problem with representation of the valve point loading effects (EDP-VP) is a challenging problem in power system operation. This problem seeks to minimize the fuel costs of thermal generating units, subject to power balance constraints and physical and operational generation limits. The EDP-VP is formulated as a non-linear, non-convex, non-differentiable and multimodal optimization problem. Its multimodality characteristics make it difficult to find global solutions using exact or heuristic optimization methods. Various metaheuristic and deterministic approaches have been proposed for solving the EDP-VP. In this work, we propose a new solution approach that is capable of finding multiple local optima and, possibly, the global optimum solution of the problem. A solution approach similar to the one proposed in this work has been described in the literature for unconstrained optimization problems, later extended for constrained problems with equality constraints. Therefore, we propose a generalization of the previous approach in order to introduce means of dealing with both equality constraints and bound constraints on the optimization variables, for the resolution of the EDP-VP. In the solution approach proposed, we replace the original EDP-VP problem with an auxiliary dynamic system, whose equilibrium points correspond to the local optimal solutions of the original optimization problem. The method searches iteratively for all equilibrium points that correspond to local optima and, possibly, determines a global optimum of the original EDP-VP. The proposed solution approach is applied to locate multiple local optima of the EDP-VP for systems with 3, 6, 10, 13, 19, and 40 generators, as well as in another multimodal problem proposed in the literature. In this context, the method identifies several local minima and, in the end, selects the best one, with the purpose of comparing the results with those determined by meta-heuristic and deterministic methods previously proposed in the literature.

Keywords: Economic dispatch with valve-point loading effects, global optimal solutions, optimization dynamic system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Curva de custo de geração em função da potência de saída.	23
Figura 2.2 – Curva de custo de geração em função da potência de saída com ponto de válvula.	24
Figura 3.1 – Gráfico da tangente T à curva $y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$ cuja equação é dada por: $y(x) - y(x_0) = dy/dx(x_0)(x - x_0)$	43
Figura 3.2 – Método de Euler Melhorado	44
Figura 3.3 – Método de Heun ou Euler Modificado	46
Figura 3.4 – Metodologia de Chiang et al. (2022) ilustrada.	60
Figura 3.5 – Gráfico de contorno apresentado por Karrem (2007). Os pontos A e B são os dois mínimos locais e DDP é o ponto de decomposição dinâmico a ser calculado. A direção de busca é a direção do vetor que une AB. O ponto de saída (X_{ex}) é obtido encontrando o pico do valor da função ao longo deste vetor. A linha pontilhada indica o limite de estabilidade e a linha tracejada indica a direção da busca.	62
Figura 3.6 – Ilustração da <i>Etapa 3</i> do algoritmo. m_1 é integrado até que m'_1 seja alcançado e rastreado ao longo do vetor $m'_1 B$ para obter m_2 , e assim por diante. m_n são os ' n ' pontos de saída no limite de estabilidade. . .	63
Figura 4.1 – Diagrama da relação entre a metodologia proposta e o trabalho de Chiang e Chu (1996)	66
Figura 4.2 – Função $\vartheta(x)$ para diferentes valores de η	67
Figura 5.1 – Gráfico da função objetivo suavizada $f(P_{G,1}, P_{G,2})$	72
Figura 5.2 – Comportamento dinâmico do sistema gradiente $-\nabla f(P_{G,1}; P_{G,2})$	73
Figura 5.3 – Trajetória do ponto inicial até um novo mínimo local.	75
Figura 5.4 – Trajetória do mínimo local em direção ao ponto de decomposição. . . .	76
Figura 5.5 – Novos mínimos locais encontrados através do método do gradiente refletido.	77
Figura 5.6 – Segundo passo do método do gradiente refletido.	78
Figura 5.7 – Trajetórias do sistema gradiente negativo e do sistema gradiente refletido para $P_{G,0} = (500; 120)$	79
Figura 5.8 – Trajetórias do sistema gradiente negativo e do sistema gradiente refletido para $P_{G,0} = (370; 80)$	79
Figura 5.9 – Pontos de mínimos encontrados para o PDE-PV com 3 geradores. . . .	80
Figura 5.10–Representação gráfica do problema adaptado por Tavazoei e Haeri (2006). .	94
Figura 5.11–Gráfico do problema adaptado por Tavazoei e Haeri (2006).	95
Figura 5.12–Curvas de nível do problema adaptado por Tavazoei e Haeri (2006) . .	96

Figura 5.13–Trajetória para o mínimo partindo do ponto inicial $P_0(1,5789; -7,5146)$	98
Figura 5.14–Trajetória para o mínimo partindo do ponto inicial $P_0(-1,5814; 7,5122)$	99
Figura A.1–Diagrama de Campo Vetorial.	123
Figura A.2–Exemplo de retrato de fase.	124
Figura A.3–Máquina síncrona conectada ao barramento infinito.	125
Figura A.4–Pontos de operação estável e instável do sistema SMIB.	126
Figura A.5–Trajetória projetada no eixo do sistema SMIB.	127
Figura A.6–Trajetória no espaço de estado.	127
Figura A.7–Órbitas do sistema SMIB	128
Figura A.8–Retrato de fase de:	132
Figura A.9–Retrato de fase para:	133
Figura A.10–Retrato de fase de um ponto de sela:	134
Figura A.11–Trajetórias típicas no caso de autovalores complexos.	135
Figura A.12–Retratos de fase para:	136
Figura A.13–Retratos de fase para o caso de autovalores múltiplos não nulos quando $k = 0$:	138
Figura A.14–Retratos de fase para o caso de autovalores múltiplos não nulos quando $k = 1$:	139
Figura A.15–Retratos de fase para:	141
Figura A.16–Retratos de fase quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	142
Figura A.17–Retratos de fase de um sistema perturbado quando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$: . .	144

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Características do sistema - PDE-PV com 3 geradores	71
Tabela 5.2 – Parâmetros de inicialização: 3 geradores	74
Tabela 5.3 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 3 geradores	81
Tabela 5.4 – Características do sistema - PDE-PV com 6 geradores	81
Tabela 5.5 – Parâmetros de inicialização: 6 geradores	82
Tabela 5.6 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 6 geradores	82
Tabela 5.7 – Ponto mínimo [MW] para método SDAEGR – PDE-PV: 6 geradores. .	82
Tabela 5.8 – Características do sistema - PDE-PV com 10 geradores	83
Tabela 5.9 – Parâmetros de inicialização: 10 geradores	83
Tabela 5.10–Pontos de mínimo [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 10 geradores.	84
Tabela 5.11–Características do sistema - PDE-PV com 13 geradores	85
Tabela 5.12–Resultados do PDE-PV para sistemas com 13 geradores.	85
Tabela 5.13–Pontos de mínimo [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 13 geradores.	86
Tabela 5.14–Características do sistema - PDE-PV com 19 geradores	87
Tabela 5.15–Parâmetros de inicialização: 19 geradores	87
Tabela 5.16–Resultados do PDE-PV para sistemas com 19 geradores.	88
Tabela 5.17–Pontos de mínimo [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 19 geradores.	89
Tabela 5.18–Características do sistema - PDE-PV com 40 geradores	90
Tabela 5.19–Parâmetros de inicialização: 40 geradores	91
Tabela 5.20–Resultados do PDE-PV para sistemas com 40 geradores.	91
Tabela 5.21–Pontos de mínimo em [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 40 geradores.	93
Tabela 5.22–Resultados encontrados a partir de P_0 para o método SDAEGR	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	O Problema de Despacho Econômico Clássico	21
2.2	O Problema de Despacho Econômico com Efeito de Ponto de Carregamento de Válvula	23
2.3	Métodos de Otimização	25
2.3.1	Métodos Determinísticos	27
2.3.2	Métodos Heurísticos, Metaheurísticos e Híbridos	28
2.4	Métodos de otimização para a resolução do PDE-PV	30
2.4.1	Histórico da resolução do PDE	30
2.4.1.1	Métodos determinísticos	30
2.4.1.2	Métodos heurísticos e metaheurísticos	32
2.4.1.3	Métodos híbridos	36
3	MÉTODOS DETERMINÍSTICOS BASEADOS EM OTIMIZAÇÃO CLÁSSICA E SISTEMAS DINÂMICOS	41
3.1	Método de Euler, Euler Melhorado e Euler Modificado	41
3.2	Método do Gradiente	46
3.3	Método de Newton	48
3.4	Métodos de otimização para Problemas Restritos	49
3.4.1	Método da Penalidade	49
3.4.2	Barreira Logarítmica Interior	51
3.4.3	Suavização Hiperbólica	52
3.5	Método proposto por Chiang e Chu (1996) para problemas de otimização irrestritos	54
3.6	Método proposto por Chiang et al. (2022) para problemas de otimização com restrição de igualdade	58
3.6.1	Método TRUST-TECH	61
4	METODOLOGIA DA SOLUÇÃO PROPOSTA	65
4.1	Método SDAEGR para o PDE-PV	65
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	71
5.1	PDE-PV com 3 geradores	71
5.2	PDE-PV com 6 geradores	81

5.3	PDE-PV com 10 geradores	83
5.4	PDE-PV com 13 geradores	84
5.5	PDE-PV com 19 geradores	86
5.6	PDE-PV com 40 geradores	89
5.7	Método SDAEGR aplicado em um problema clássico multimodal	94
6	CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTU- ROS	101
7	TRABALHOS DIVULGADOS E APRESENTADOS EM CON- GRESSOS	105
	REFERÊNCIAS	107
	APÊNDICE A – SISTEMAS DINÂMICOS	117
A.1	Ponto de equilíbrio, região de estabilidade e região de atração .	120
A.2	Espaço de fase e retrato de fase	122
A.3	Análise espectral do sistema dinâmico	128

1 INTRODUÇÃO

Países com grande capacidade hidrelétrica, como Noruega, Brasil e Canadá, dependem frequentemente de usinas hidrelétricas e termelétricas para o suprimento de energia elétrica. Apesar da crescente preocupação ambiental, as usinas termelétricas ainda são a principal fonte de eletricidade global. Mesmo no Brasil, onde há uma forte presença de hidroelétricas e eólicas, as usinas termelétricas desempenham um papel fundamental na garantia do fornecimento de eletricidade durante os meses secos. Contudo, essas usinas termelétricas (UTE) enfrentam uma desvantagem significativa devido aos altos custos de geração associados ao uso de combustíveis fósseis (SILVA, 2014).

Diante dessa questão, a formulação matemática do Problema do Despacho Econômico (PDE), inicialmente proposta por Steinberg e Smith (1943), tem como objetivo minimizar os custos de geração de energia, atendendo à demanda e respeitando as restrições operacionais, como os limites mínimos e máximos de potência de cada unidade geradora.

Por outro lado, o Problema de Despacho Econômico com Efeito de Ponto de Carregamento de Válvula (PDE-PV), também busca minimizar os custos de geração, mas leva em consideração a não diferenciabilidade da função custo, decorrente da abertura e fechamento das válvulas de admissão de vapor das unidades geradoras termelétricas (SILVA, 2014). Atualmente, para solucionar esses problemas, as técnicas mais utilizadas são baseadas em metodologias heurísticas, podendo também se fundamentar em técnicas determinísticas ou híbridas, visando produzir soluções locais de qualidade em tempo computacional reduzido (SILVA, 2014).

Entretanto, a resolução desse problema encontra diversas dificuldades, pois se trata de um problema de otimização não linear, não convexo, não diferenciável e multimodal. Suas características de multimodalidade tornam desafiadora a busca por soluções ótimas globais através de métodos exatos e meta-heurísticos de otimização. Apesar de várias abordagens propostas na literatura para resolver o problema PDE-PV, nenhuma delas garantiu encontrar a solução ótima global, ou seja, a melhor solução possível do problema (SILVA, 2014).

A maioria dos métodos determinísticos buscam encontrar apenas um mínimo local em uma região limitada e próxima ao ponto inicial, devido às complexidades impostas pelo problema. Exemplos incluem o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica (SILVA, 2014), o método multiobjetivo de restrições canalizadas progressivas e de programação por metas ponderadas em conjunto com o método de pontos interiores (MARTINS, 2020) e

o Algoritmo de Otimização e Caos (AOC) aplicado junto ao método de gradientes de otimização via teoria de Julia (HOMBO, 2023). Existem também os métodos híbridos, que combinam abordagens heurísticas e determinísticas, como o método de estratégia evolutiva e o método quase-Newton (COELHO, 2008) e o método de evolução diferencial híbrida com o método BFGS (DIAS, 2021). Na literatura, diversos trabalhos abordam o Problema de Despacho Econômico com Efeito de Ponto de Carregamento de Válvula (PDE-PV) por meio de métodos heurísticos ou meta-heurísticos, que são os mais utilizados na resolução desse problema. Exemplos incluem o trabalho de Al-Betar et al. (2018), que propuseram um algoritmo inspirado na busca por harmonia (BH), modificado para melhorar o conceito de diversidade de soluções nos algoritmos genéticos e o método de busca tabu direcionada a pontos singulares (LIMA, 2019). Tais métodos baseiam-se em buscas aleatórias, as quais não garantem otimalidade na determinação de soluções ótimas locais ou globais.

Considerando a importância e a complexidade do problema, este trabalho tem como objetivo buscar pontos de ótimo global do PDE-PV utilizando sistemas dinâmicos auxiliares. A abordagem visa explorar de maneira abrangente o espaço de possíveis soluções, levando em consideração restrições de igualdade e desigualdade canalizadas. O método proposto, denominado SDAEGR (Sistema Dinâmico Auxiliar com método de Euler e Gradiente Refletido), é uma extensão dos métodos apresentados por Chiang e Chu (1996) para problemas diferenciáveis de otimização irrestrita, e Chiang et al. (2022) para problemas com restrições de igualdade. Tais métodos realizam o processo de otimização por meio de sistemas dinâmicos auxiliares.

Baseando-se nessas abordagens, especialmente em Chiang e Chu (1996), propõe-se uma extensão mais abrangente, que encontra um ponto ótimo local e, a partir dele, determina novos pontos de ótimos locais. Isso busca, potencialmente, identificar a solução ótima global. Para isso, utiliza-se um método numérico de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem, como o método de Euler aplicado ao sistema dinâmico gradiente e gradiente refletido. Busca-se, assim, vários pontos de ótimo local do PDE-PV, possivelmente determinando a solução ótima global, mesmo em presença de uma função custo não-diferenciável. Essa não diferenciabilidade é tratada por técnicas de suavização de funções, respeitando as restrições operacionais de igualdade e variáveis canalizadas presentes na formulação do problema.

Ao analisar os múltiplos pontos de mínimo encontrados no PDE-PV e em outro problema multimodal testado, proposto por Tavazoei e Haeri (2006), identificam-se o pior, o intermediário e o melhor ponto de mínimo que minimizam a função objetivo desses problemas. Esses resultados proporcionam uma visão abrangente das soluções encontradas.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: Este capítulo apresentará uma análise detalhada do PDE e PDE-PV, contextualizando-os dentro do cenário energético, e oferecerá uma visão geral dos métodos

de otimização frequentemente aplicados.

- Capítulo 3: Neste capítulo, serão explorados alguns métodos de otimização existentes, que desempenham um papel crucial na resolução do PDE. Além disso, apresentará os métodos do Chiang e Chu (1996) e Chiang et al. (2022).
- Capítulo 4: Este capítulo propõe o método SDAEGR como uma abordagem para a resolução dos problemas previamente citados.
- Capítulo 5: No capítulo 5 serão abordados em detalhes os problemas tratados neste trabalho, sendo aplicada a metodologia proposta e apresentados os resultados obtidos.
- Por fim, são apresentadas as conclusões derivadas dos resultados obtidos, destacando as contribuições do método proposto. Além disso, são discutidas propostas para trabalhos futuros, visando a contínua evolução e aprimoramento das abordagens de otimização no contexto do PDE. Após estas considerações, um apêndice apresenta alguns conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos, com destaque para um exemplo de análise de estabilidade do sistema SMIB (*Single Machine Infinite Bus*).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, a fim de contextualizar os desafios inerentes ao despacho econômico de energia, serão apresentados conceitos relacionados ao Problema de Despacho Econômico (PDE), destacando tanto a formulação clássica quanto aquela que incorpora o ponto de válvula. A seguir, será realizada uma revisão bibliográfica abrangente, introduzindo os principais métodos determinísticos, heurísticos, metaheurísticos e híbridos de otimização.

2.1 O Problema de Despacho Econômico Clássico

O Problema de Despacho Econômico (PDE) é considerado um problema de otimização que visa minimizar os custos de combustíveis utilizados na geração termelétrica de energia. Assim, busca-se a distribuição ótima da demanda entre as unidades geradoras do sistema de potência, visando não só a redução de custo, mas também atender às condições de operação do sistema.

Em 1943, Steinberg e Smith sugeriram que o PDE clássico fosse apresentado matematicamente e modelado como um problema de otimização não-linear, cujas restrições estão associadas aos limitantes operacionais de cada uma das unidades geradoras para atender a demanda de energia. Alguns modelos de PDE são considerados mais complexos por incluir outras restrições, como a restrição de transmissão, relacionada ao fluxo de potência nos ramos do sistema, conforme proposto por Carpentier em 1962.

Segundo Happ (1977), a questão de otimizar o preço da geração de energia é antiga e remonta aos anos 1920, ou até mesmo antes, quando engenheiros preocupavam-se com a alocação econômica da geração ou como dividir adequadamente a carga entre as unidades geradoras disponíveis. Com isso, um dos métodos pioneiros na minimização dos custos de geração foi o Carregamento por Ordem de Mérito, que tinha como princípio o carregamento sucessivo das unidades mais eficientes. Assim, a partir desse método, era gerada e demandada a potência do gerador mais eficiente, ou seja, o de melhor custo-benefício. Ao atingir seu limite de geração, passava-se para o próximo gerador mais eficiente e assim sucessivamente. No entanto, a desvantagem desse método para minimizar os custos era que desconsiderava que a eficiência de uma unidade geradora é uma função da potência gerada. A partir da criação desse método, outros foram surgindo, sendo a técnica supracitada uma das mais econômicas da época, substituindo os métodos anteriores a ela (HAPP, 1977).

Entre as novas metodologias desenvolvidas, a abordagem do custo incremental ganhou destaque ao considerar que a eficácia está intrinsecamente relacionada à potência

gerada e que o ponto ótimo de menor custo é alcançado quando os custos incrementais de todas as unidades geradoras são equivalentes. Ou seja, o princípio do método baseava-se no carregamento das unidades geradoras e era realizado de modo que o próximo aumento incremental de carga no sistema deveria ser feito alocando-o na unidade geradora com menor custo incremental, determinado medindo a derivada da curva de custo.

Em 1931, o Critério dos Custos Incrementais Iguais já havia se consolidado empiricamente, mas somente em 1943, Steinberg e Smith apresentaram uma comprovação matemática dessas classificações. Teoricamente, eles explicam que na ausência de restrições ativas para os limites de geração de potência ativa no ponto de operação ótimo, todas as unidades geradoras operam com mesmo custo incremental. Esta regra continua sendo amplamente empregada pelos operadores de sistemas de potência até os dias atuais.

O Problema de Despacho Econômico clássico é um problema apresentado na área de Sistemas de Potência e possui como propósito a otimização dos custos de geração de energia elétrica, considerando as demandas de energia entre as unidades geradoras e contemplando suas restrições operacionais, como potência máxima e mínima de cada gerador. Assim, a tarefa dos algoritmos de otimização é minimizar uma função quadrática associada aos custos dos combustíveis empregados na geração termelétrica de energia. Em (2.1a)-(2.1c) consta o modelo de otimização para o PDE clássico sem a consideração de perdas de transmissão.

$$\text{minimizar } F_e(P_G) = \sum_{k \in G} a_k P_{G,k}^2 + b_k P_{G,k} + c_k \quad (2.1a)$$

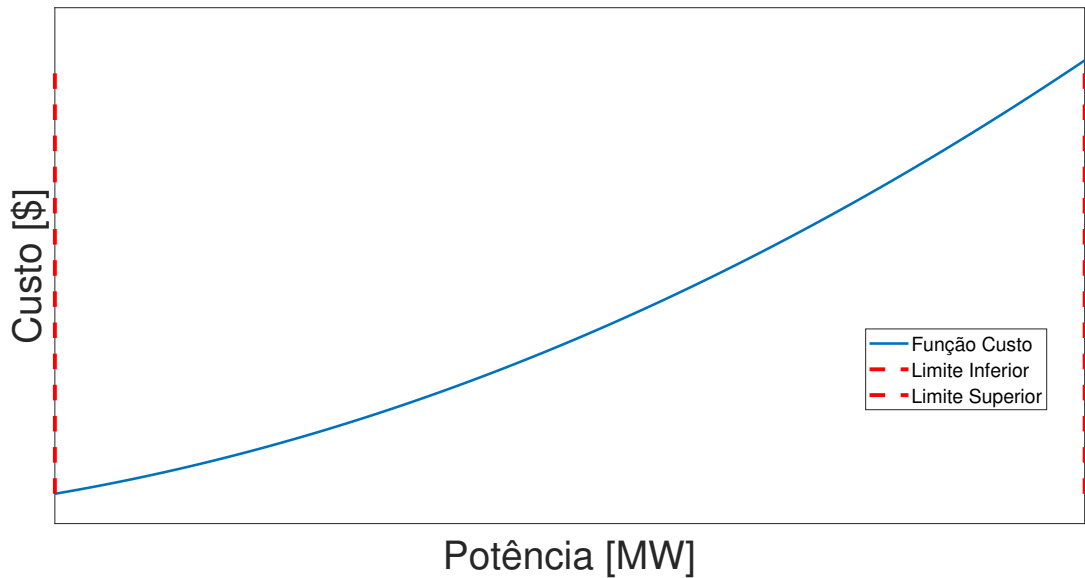
$$\text{sujeito a } \sum_{k \in G} P_{G,k} = P_D, \quad (2.1b)$$

$$P_{G,k}^{\min} \leq P_{G,k} \leq P_{G,k}^{\max}, \quad \forall k \in G \quad (2.1c)$$

- G : Conjunto das unidades de geração termelétrica do sistema;
- F_e : Função custo total;
- a_k, b_k, c_k : Coeficientes da função custo;
- $P_{G,k}$: Potência ativa gerada pela unidade k ;
- P_D : Demanda de energia;
- $P_{G,k}^{\min}$ e $P_{G,k}^{\max}$: Limites operacionais inferior e superior de saída da unidade de geração termelétrica k .

Nas usinas termelétricas o custo de operação é expresso em função da potência, sendo o custo do combustível o principal fator para as usinas de combustíveis fósseis. Com isso, na Figura 2.1 pode-se notar que a função de custo não é linear e sim uma função quadrática como representado no problema (2.1a).

Figura 2.1 – Curva de custo de geração em função da potência de saída.



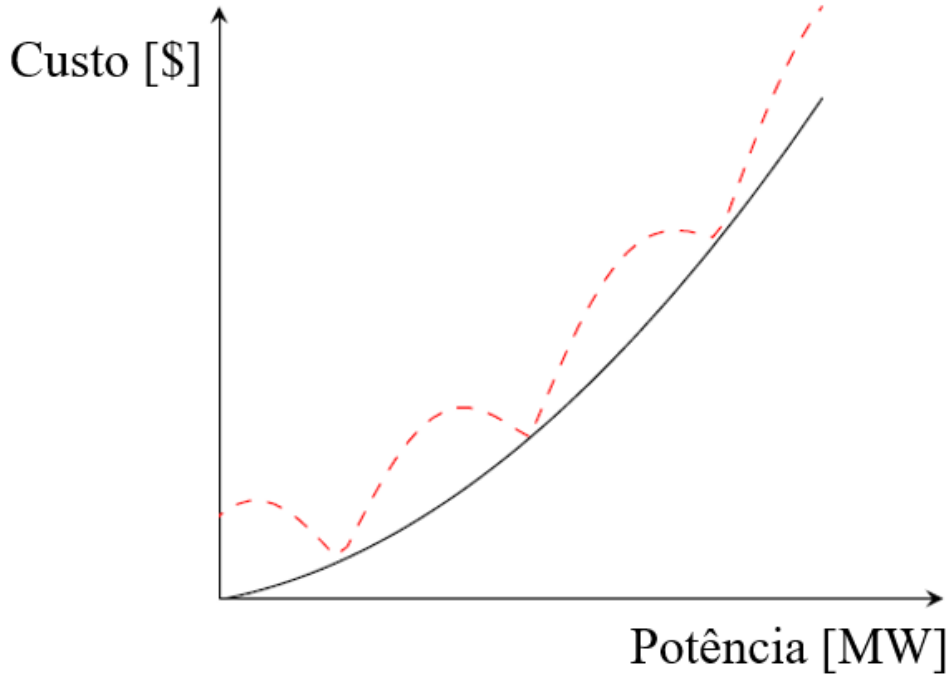
Fonte: Adaptado de Samed (2004).

Portanto, as restrições (2.1b) e (2.1c) indicam que a soma da produção de energia de todas as usinas deve ser equivalente à demanda de potência do sistema, desconsiderando as perdas de potência ativa P_L . Por outro lado, as restrições (2.1c) estão associadas aos limites físicos de cada unidade, limitados pelos valores mínimo e máximo de geração para cada usina.

2.2 O Problema de Despacho Econômico com Efeito de Ponto de Carregamento de Válvula

Durante a operação das usinas termelétricas, pode ser necessário aumentar ou diminuir a potência gerada. Para isso, é preciso ajustar a vazão de vapor nas turbinas. Esse controle do vapor pode ser realizado por *by-pass*, parâmetros deslizantes ou estrangulamento parcial por meio de válvulas de controle. No último caso, ainda sendo a forma mais comum de controle, especialmente nas grandes centrais mais antigas, o vapor é estrangulado em válvulas que vão abrindo sucessivamente. Dessa forma, se uma válvula está completamente aberta e é necessário mais vapor, uma nova válvula começará a abrir para fornecer a vazão requerida de vapor. No entanto, essa válvula parcialmente aberta estrangula o vapor e apresenta eficiência menor do que uma válvula totalmente aberta. Isso faz com que a curva de eficiência agregada, assim como o custo do combustível, seja composta por senoidais, mas com derivadas descontínuas em suas junções, conforme mostrado na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Curva de custo de geração em função da potência de saída com ponto de válvula.



Fonte: Adaptado de Sum-Im (2015).

Neste trabalho, será utilizado o modelo de otimização para o PDE, considerando os efeitos do ponto de carregamento da válvula (PDE-PV). O PDE-PV é um problema clássico na área de sistemas elétricos de potência, e seu objetivo é a minimização dos custos de produção de energia elétrica, sujeito ao atendimento da demanda e aos limites na geração. Pode ser descrito matematicamente, desconsiderando as perdas de potência ativa no sistema, pelo modelo de otimização apresentado por:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{k \in G} C_k(P_{G,k}) = \sum_{k \in G} [a_k P_{G,k}^2 + b_k P_{G,k} + c_k + |e_k \sin(f_k(P_{G,k}^{min} - P_{G,k}))|] \quad (2.2a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k \in G} P_{G,k} = P_D \quad (2.2b)$$

$$P_{G,k}^{min} \leq P_{G,k} \leq P_{G,k}^{max}, \quad \forall k \in G \quad (2.2c)$$

em que:

- G : Conjunto das unidades de geração termelétrica do sistema;
- $P_{G,k}^{min}$, $P_{G,k}^{max}$: Potência gerada mínima e máxima, respectivamente, associados à potência ativa gerada pela unidade termelétrica k ;
- P_D : Potência ativa demandada pelo sistema;

- a_k, b_k, c_k : Parâmetros da porção quadrática da função custo de geração da unidade geradora k ;
- e_k e f_k : Parâmetros da porção com efeito de ponto de carregamento de válvula da função custo de geração da unidade geradora k ;
- $C_k(P_{G,k})$: custo de geração da unidade geradora k ;
- $P_{G,k}$: Potência ativa gerada pela unidade de geração termelétrica k ;

A função do problema (2.2a) representa o custo de produção de energia, incluindo os efeitos dos pontos de carregamento de válvula (representados pelo termo modular) que ocorrem em unidades de geração termelétricas com regulação do vapor por estrangulamento. Por sua vez, a restrição de igualdade (2.2b) no problema representa o balanço de potência ativa, assegurando que a potência gerada total seja igual à potência demandada. As restrições de desigualdade apresentadas no problema (2.2c) são restrições operacionais que têm como objetivo garantir o funcionamento das unidades geradoras dentro de seus limites mínimo e máximo de geração. É importante enfatizar que a formulação apresentada em (2.2a)-(2.2c) não abrange as restrições operacionais relacionadas ao sistema de transmissão nem suas perdas. Portanto, o PDE-PV descrito em (2.2a)-(2.2c) é uma formulação simplificada para o problema de despacho econômico, considerando os efeitos do ponto de carregamento de válvula.

Na literatura, diversos métodos têm sido empregados na resolução do PDE, e os algoritmos evolucionários têm se destacado quando problemas relacionados à não-diferenciabilidade estão envolvidos. Nesse contexto, este trabalho propõe a suavização da função objetivo nos pontos de válvula, de modo que seja possível aplicar métodos de otimização clássicos, como os métodos de gradientes ou suas variantes, os quais demandam a diferenciabilidade da função objetivo e das restrições. A próxima seção discutirá os métodos determinísticos, heurísticos, metaheurísticos e híbridos. Posteriormente, serão examinados diversos trabalhos que abordaram o PDE e PDE-PV, apresentando metodologias determinísticas e heurísticas aplicadas a esse desafio específico.

2.3 Métodos de Otimização

Nesta seção, serão abordados os métodos usuais de otimização, os quais podem ser divididos em métodos determinísticos, heurísticos, metaheurísticos e híbridos.

Desde os primórdios, os seres humanos têm buscado simplificar diversas tarefas para melhorar a qualidade de vida. Por exemplo, ao procurar por comida, escolhiam o melhor caminho e atribuíam funções específicas a cada indivíduo de acordo com suas aptidões. A otimização, portanto, consiste em obter a melhor solução possível para um problema matematicamente descrito, expresso por um conjunto de funções e restrições. A

modelagem matemática representa a descrição matemática de um fenômeno ou problema, permitindo a análise e compreensão do mesmo. Essa representação possibilita a utilização da matemática para analisar situações reais do mundo, mesmo com simplificações no problema. Modelos matemáticos são essenciais para o planejamento e a tomada de decisões em diversas áreas, como engenharia e medicina.

Conforme o problema, é necessário implementar ao algoritmo as características do modelo utilizado. Segundo Soares (1997), alguns tipos básicos de métodos de otimização incluem métodos determinísticos (baseados em gradientes), métodos enumerativos (heurísticos, de ramificação e combinatórios), métodos bioinspirados ou metaheurísticos (algoritmos evolucionários, genéticos e baseados em fenômenos naturais como o *Simulated Annealing*, entre outros), métodos estocásticos e métodos híbridos. Outra característica importante na otimização é a sua subdivisão, principalmente em problemas lineares e não-lineares, bem como em problemas definidos por sua característica, como otimização inteira, discreta, mista, entre outras.

Os problemas de programação linear tiveram início em 1947, quando George B. Dantzig publicou o método Simplex. Para esses problemas, se um valor ótimo finito existe para a função objetivo, então pelo menos um vértice de sua região viável é o ponto minimizador desse problema. O método Simplex, criado por Dantzig, consistia em mover-se a cada iteração de um vértice inicial para um vértice adjacente até atingir o vértice ótimo.

Com o passar dos anos, houve a necessidade de estudos embasados na complexidade computacional, buscando algoritmos com convergência mais rápida. Apesar da eficácia do método Simplex para problemas lineares de grande porte, havia preocupações em relação ao tempo e à complexidade computacional, que era comprovadamente não polinomial.

Segundo Wright (1997), em meados dos anos 1984, surgiu outra proposta de métodos de solução para o problema de otimização linear, baseada em técnicas de solução não lineares. O primeiro desses métodos foi o método de transformações projetivas de Karmarkar (1984), que iniciou a classe de métodos de pontos interiores para programação linear. Assim, Karmarkar apresentou um algoritmo de tempo polinomial, garantindo resolução em tempo limitado superiormente por um polinômio relacionado ao tamanho do problema. Esse método explorava uma função objetivo modificada, chamada de função potencial, baseada na técnica de barreira logarítmica, desenvolvida por Frisch (1955) e divulgada por McCormick (1968, 1990). Seu algoritmo foi anunciado com soluções de tempo computacional 50 vezes mais rápidas para problemas de grande porte, comparadas ao método Simplex, sendo o propulsor para o surgimento de vários métodos conhecidos hoje como os métodos de pontos interiores. Nos anos seguintes, surgiram várias versões do método de Karmarkar, sendo os mais conhecidos os métodos afins de pontos interiores, os métodos de trajetória central e os métodos primal-dual de pontos interiores. A principal variante dessa classe de métodos é o chamado primal-dual de pontos interiores, apresentado

e analisado por Monteiro et al. (1989) e também por Kojima et al. (1989), sendo amplamente investigado por Fang e Puthenpura (1993).

Na literatura, diversos métodos foram desenvolvidos e categorizados de acordo com as características do problema, tais como linearidade, não linearidade, entre outras. Esses métodos são agrupados em tipos ou categorias, com os mais proeminentes sendo os métodos determinísticos, heurísticos, metaheurísticos e híbridos. As seções subsequentes abordam detalhadamente cada uma dessas categorias.

2.3.1 Métodos Determinísticos

Os métodos determinísticos de otimização recebem esse nome por gerarem uma sequência determinística de possíveis soluções, o que implica, na maioria das vezes, o uso do gradiente da função objetivo em relação às variáveis do problema de otimização em análise.

A partir de uma função objetivo na qual as restrições são expressas por meio de funções matemáticas e relações funcionais, é possível empregar o método de otimização para determinar o ponto de mínimo ou máximo da função, considerando essas restrições. Assim, a definição desse tipo de problema pode ser representada matematicamente da seguinte forma, permitindo a inclusão de até a segunda ordem tanto para a função objetivo quanto para as restrições:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar / maximizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a:} && g(x) = 0 \\ &&& h(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$ são definidas tais que: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $x \in \mathbb{R}^n$, na qual x é o vetor de variáveis de decisão (BASTOS, 2004).

Os métodos determinísticos operam iterativamente para aprimorar uma solução inicial. Eles utilizam derivadas ou gradientes da função objetivo e das restrições para guiar o processo de otimização. A ideia fundamental é ajustar as variáveis do problema em direção a regiões que minimizam ou maximizam a função objetivo, dependendo se é um problema de minimização ou maximização. Essa abordagem iterativa é repetida até que uma convergência para uma solução ótima local. Vale ressaltar que, devido à natureza determinística desses métodos, a solução encontrada depende do ponto de partida inicial. Isso significa que, em problemas com várias soluções ótimas locais, os métodos determinísticos podem convergir para diferentes ótimos locais, dependendo da escolha do ponto de partida.

Dependendo das características do problema, como ser não linear e não convexo, como é o caso do PDE-PV, os métodos determinísticos garantem geralmente a convergência para uma solução ótima local. Isso significa que não é necessariamente encontrada a solução ótima global, pois a convergência é influenciada pelo ponto de partida fornecido, resultando em um ótimo local. Portanto, esse método apresenta um desempenho limitado na otimização de problemas com funções objetivo multimodais, como no PDE-PV, ou seja, funções que possuem vários ótimos locais. Conforme as características da função objetivo e das restrições, Olivieri (2004), Bastos (2004) e Haftka (1993) destacam outros tipos de métodos determinísticos próprios para a resolução de problemas, como programação inteira, discreta, combinatória, estocástica e mista.

O Problema de Programação Não-Linear é definido quando a função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, é uma função não-linear das variáveis do problema. Para esses problemas, geralmente, os métodos clássicos utilizados incluem o Método de Newton-Raphson, Método dos Gradientes e de Gradientes Reduzidos, Quase Newton, Método de Programação Quadrática Sequencial, Método Lagrangiano Aumentado, Métodos Duais Lagrangianos e Métodos Primal-Dual (POLAK, 1971; SARAMAGO, 2003; HOLTZ, 2005).

Os métodos determinísticos de interesse neste trabalho serão apresentados no Capítulo 3 e serão considerados para a resolução do PDE-PV.

2.3.2 Métodos Heurísticos, Metaheurísticos e Híbridos

Os métodos heurísticos possuem características exploratórias para solucionar problemas e são usualmente classificados como “busca cega”. Para encontrar uma solução incumbente (ou subótima), parte-se de uma solução viável, e seu princípio de busca baseia-se em sucessivas aproximações direcionadas a um ponto ótimo. Portanto, o método nem sempre determina, ao menos, um mínimo local do problema. Esta imprecisão dos métodos heurísticos não se trata de uma deficiência, mas de uma particularidade do método que, dependendo do problema a ser solucionado, é muitas vezes eficaz (BUENO, 2009). Exemplos desses tipos de métodos incluem o método de busca Tabu (desenvolvido por Fred Glover na década de 1980), os métodos de arredondamento (de soluções inteiras) e o algoritmo guloso, sendo as duas últimas técnicas desenvolvidas e utilizadas ao longo do tempo por diversos pesquisadores e praticantes em diversas áreas de pesquisa, como ciências exatas e engenharias.

O termo “metaheurística” surgiu para separar os métodos que utilizam estratégias de alto desempenho dos métodos heurísticos convencionais. Assim, possuem a capacidade de escapar de ótimos locais e realizar buscas no espaço de solução (OLIVEIRA, 2013).

Em meados do século XX, iniciou-se a teoria genética, permitindo integrar o conceito de gene no processo evolutivo. Posteriormente, houve inspiração natural para os

métodos de otimização, denominados métodos bio-inspirados, sendo o mais conhecido o Algoritmo Genético. Seu princípio de funcionamento parte do processamento de conjuntos de elementos do espaço de busca. Esses conjuntos são evoluídos ao longo de diversas iterações, obtendo gerações, a fim de encontrar o melhor indivíduo evoluído, ou seja, uma melhor solução (GASPAR-CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012). A computação evolucionária refere-se a algoritmos inspirados na genética e no princípio da evolução das espécies de Darwin, localizando soluções por meio de uma busca baseada na sobrevivência dos mais aptos e na reprodução. Algoritmos evolucionários, frequentemente, dispensam o uso de informações específicas, como gradientes, jacobianas e hessianas, sendo aplicados à resolução de problemas complexos, com amplo espaço de busca e modelagem desafiadora (OLIVEIRA et al., 2008).

Assim, os métodos metaheurísticos, em sua maioria, são fundamentados em comportamentos observados na seleção natural, ou seja, são bioinspirados. Outros métodos evolutivos que simulam o processo de seleção natural e evolução das espécies incluem a otimização por colônias de formigas (DORIGO, 1992; DORIGO e STUTZLE, 2004) e a programação evolutiva (do inglês *evolutionary programming* ou EP) (YURYEVICH; WONG, 1999). O algoritmo de colônia de formigas (*ant colony optimization algorithm*), apresentado por Dorigo em 1992, inspira-se no comportamento das formigas na busca por alimento, sendo utilizado em problemas como o roteamento de redes de computadores e de transporte urbano. A técnica envolve o caminhar aleatório das formigas até encontrar alimento; ao encontrá-lo, elas retornam pelo mesmo caminho, reforçando os rastros percorridos. Com o tempo, esses rastros tendem a desaparecer, evitando a convergência para uma solução local ótima. Com isso, o método tende a explorar uma variedade de caminhos que representam as soluções do problema investigado.

Na literatura, há vários outros métodos, que, embora não sejam bioinspirados, baseiam-se em fenômenos naturais. Dentre eles, destaca-se o método de recozimento simulado (*Simulated Annealing*), desenvolvido por Kirkpatrick et al. (1983). Esse método realiza uma otimização com base no processo térmico de recozimento dos metais, buscando níveis de baixa energia interna e estruturas altamente sólidas. Inicialmente, visa garantir uma ampla movimentação por todo o espaço de busca para permitir uma solução global. No processo de “resfriamento”, a busca é reduzida no espaço de soluções, convergindo para a solução final.

Com o intuito de aprimorar o tempo computacional e a eficiência de métodos puramente heurísticos ou metaheurísticos, foram desenvolvidos os métodos híbridos, uma combinação de algoritmos de busca local e heurísticos que acumulam características para escapar de mínimos locais, proporcionando boa eficiência computacional (GOLDBERG, 1989). Os métodos híbridos de otimização são definidos pela combinação de duas ou mais técnicas, ou algoritmos diferentes, visando resolver problemas de otimização de forma

mais eficiente. Essas técnicas devem ser combinadas de maneira que suas vantagens se complementam, buscando melhorar o desempenho do método na busca por soluções ótimas em problemas complexos. Uma aplicação comum do método híbrido é gerar um número de soluções de qualidade a partir de um método de busca local. Essas soluções melhoradas são então realimentadas no algoritmo heurístico até que o critério de término seja atendido. Diversas variações desse método podem ser citadas, como o algoritmo genético híbrido apresentado por Kragekud (1997), que solucionou o problema das escalas de trabalho de médicos durante as férias de verão, obedecendo a várias restrições.

A próxima seção apresenta, em termos gerais, a aplicação de métodos (determinísticos, heurísticos, metaheurísticos ou híbridos) ao PDE-PV.

2.4 Métodos de otimização para a resolução do PDE-PV

Nesta seção, são examinados alguns trabalhos, que foram desenvolvidos, com o propósito de abordar o PDE e PDE-PV, apresentando metodologias determinísticas, heurísticas e metaheurísticas aplicadas a esse desafio específico. O objetivo dessa seção não é apenas identificar as soluções propostas, mas também contextualizar as escolhas metodológicas feitas pelos pesquisadores. A profundidade dessas análises visa contribuir para o desenvolvimento do entendimento teórico e prático dos métodos empregados na solução de PDE-PV.

2.4.1 Histórico da resolução do PDE

Conforme mencionado anteriormente, o método do critério dos custos incrementais emergiu como uma abordagem popular, contribuindo para a eficiência econômica na geração de energia. Este método, conforme teoricamente estudado por Steinberg e Smith (1943), demonstrou ser apropriado para alcançar o custo mínimo em cenários envolvendo duas unidades geradoras.

Atualmente, uma quantidade significativa de esforços de pesquisa está dedicada à resolução do PDE. Este trabalho se propõe a apresentar alguns dos métodos mais recentes discutidos na literatura em relação a essa problemática.

2.4.1.1 Métodos determinísticos

Hemamalini e Simon (2010) resolveram o PDE por um método Lagrangiano baseado na série MacLaurin. No trabalho foi proposto uma função senoidal retificada representada pela expansão da série senoidal de MacLaurin e resolvida pelo método Lagrangiano. O problema é resolvido iterativamente usando o método de iteração lambda. A eficácia do algoritmo foi comprovada mediante a teste realizado em um caso monoperíodo de 40

geradores, e em um multiperíodo com 5 geradores. Os resultados obtidos comprovam a aplicabilidade do método proposto para resolver o PDE com funções de custo não suaves.

Em Balbo et al. (2012) os autores apresentaram um método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores para resolução do PDE clássico. O método desenvolvido possui dois tipos de busca unidimensional: a busca de Fibonacci no passo previsor e a busca de Armijo no passo corretor. A ideia básica, segundo os autores, é utilizar uma busca unidimensional mais precisa no passo previsor (que utiliza aproximação de primeira ordem para o cálculo dos resíduos), e uma busca mais simples, porém robusta, no passo corretor (que utiliza uma aproximação de segunda ordem para o cálculo dos resíduos). Foram realizados testes para o PDE com 3, 6 e 13 geradores, e análises pós-otimização a respeito do preço da energia para os sistemas investigados.

Silva et al. (2013) trouxe os primeiros resultados sobre a utilização de métodos de pontos interiores/exterores e de aproximantes de funções para a resolução de problemas de despacho com a inserção de pontos de válvula.

Já Stanzani et al. (2014) aplicaram um método previsor corretor primal dual de pontos interiores em problemas de programação não-linear convexa, com restrições lineares e quadráticas e canalização de variáveis, para a resolução de problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental (PMDEA), utilizando as estratégias da soma ponderada e do ϵ -restrito.

No mesmo ano, Borckmans et al. (2014), desenvolveram um método de subgradientes riemanniano, o qual foi aplicado com sucesso à resolução do PDE-PV.

No trabalho de Silva (2014) foi proposto um método determinístico para a resolução do PDE-PV. Neste trabalho, é apresentado um método Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica Modificada (PDPCBLM) associado a uma estratégia de correção de inércia e uma técnica de suavização hiperbólica. A estratégia de correção de inércia visa garantir a convergência do método para mínimos locais do problema. Foram realizados testes que mostram que o método é eficiente na resolução do PDE-PV e suas variantes, obtendo resultados de boa qualidade, quando comparados a resultados presentes na literatura.

Posteriormente vieram os trabalhos desenvolvidos em Gonçalves et al. (2019), envolvendo técnica de suavização hiperbólica, bem como em Pinheiro et al. (2019), que utilizou procedimento baseado em métodos de pontos interiores/exterores e de regularização da função de custos do despacho econômico em problemas de despacho com perdas na transmissão, ambos mostrando a viabilidade da metodologia determinística.

Em Hombo (2023) foi apresentado um método de otimização determinística e fractais aplicados à Determinação de Múltiplos Pontos de Mínimo em Problemas de Otimização Não Linear. Isso possibilitou a resolução do PDE-PV com 3 geradores, oferecendo

uma abordagem promissora para resolver problemas de otimização.

2.4.1.2 Métodos heurísticos e metaheurísticos

Na linha dos heurísticos e metaheurísticos o trabalho de Lin et al. (2002) propôs a solução do PDE com funções de custo não contínuas e não suaves, usando um algoritmo de Busca Tabu (BT). A BT tem como princípio armazenar valores de ótimos em sua memória flexível, evitando que o algoritmo caia em um ponto de mínimo local, buscando assim em sua vizinhança outros valores melhores. Segundo Lin et al. (2002), foram realizados testes em duas instâncias do PDE-PV, envolvendo 3 e 30 unidades geradoras, a fim de mostrar a eficiência do método. Assim, comparado com os métodos convencionais, obteve soluções precisas com desempenho razoável, apresentando um grande potencial para outras aplicações no sistema elétrico de potência.

Ling et al. (2003) apresentaram uma contribuição significativa ao desenvolver um método metaheurístico para resolver o problema PDE-PV. Eles propuseram um algoritmo genético aprimorado, ao qual foram posteriormente adicionadas operações de cruzamento e mutação. Uma análise comparativa entre os resultados obtidos com este algoritmo genético melhorado e outros algoritmos genéticos demonstrou um desempenho superior do método proposto.

No trabalho de Ravi et al. (2006), o PDE-PV é solucionado com a utilização de um algoritmo baseado em programação evolutiva. Foi determinada uma população inicial de vetores “pais”, sobre a qual foram determinados vetores filhos pela escolha do melhor filho gerado por mutação Gaussiana ou mutação de Cauchy. Em um ciclo à parte do método, os coeficientes-B e a função de perdas são atualizados utilizando um algoritmo de fluxo de potência. Foram realizados testes com sistemas de 6, 14 e 30 geradores, mostrando a eficiência do método proposto.

A programação evolutiva também inclui uma forma eficaz de mutação adaptativa usando pequenas populações. Suas vantagens residem em sua estrutura simples, facilidade de implementação, qualidade de solução e robustez. Nesse contexto, Coelho e Mariani (2008) propuseram uma abordagem inovadora, combinando a programação evolutiva com um gerador de sequências de caos e a técnica de Programação Quadrática Sequencial (PQS) para otimizar o desempenho de PDE. Na metodologia proposta, a programação evolutiva com sequências de caos atua como otimizador global, enquanto a PQS é empregada para ajustar sua execução de maneira sequencial. Os experimentos foram conduzidos em sistemas compostos por 13 e 40 unidades geradoras. Os resultados evidenciam um método que se destaca em relação às abordagens existentes até a data de publicação para o problema em questão.

Em Yuan et al. (2009), é apresentado um método para a solução do PDE-PV, cuja principal abordagem é a Evolução Diferencial (ED), utilizada como técnica de comparação

de seleção baseada em viabilidade, enquanto regras de busca heurística são planejadas para lidar eficazmente com as restrições. Assim, foram realizados testes para o exemplo de aplicação, demonstrando sua eficácia em comparação com outros métodos relatados na literatura.

Um algoritmo diferenciado foi apresentado por Pothiya et al. (2010), baseado na otimização de colônias de formigas (ACF) para resolver o PDE com funções de custo não suaves. Posteriormente, para melhorar a eficácia dos métodos, foram apresentadas três técnicas adicionais, como a lista de prioridades, redução de variável e recurso de zoom. Foram realizados testes nos dois tipos de PDE com funções de custo não suaves, o PDE-PV com 13 e 40 unidades geradoras e o PDE considerando múltiplos combustíveis contendo 10 unidades. Posteriormente, os resultados são comparados com os das abordagens heurísticas convencionais, obtendo assim resultados de eficácia para soluções de maior qualidade e menor tempo computacional.

Posteriormente, Arul et al. (2011) utilizaram um algoritmo de busca harmônica para a resolução do PDE-PV, consistindo em uma meta-heurística baseada no processo de desempenho musical, onde um músico visa atingir um melhor estado de harmonia. Neste método, a harmonia da música é considerada análoga ao vetor solução, enquanto o comportamento de improvisação do músico é análogo à busca local. Neste algoritmo, os operadores básicos de otimização são a memória harmônica, o tamanho da memória harmônica, o número de improvisações e a taxa de ajuste do som. Para isso, foram realizados testes em sistemas com 6, 14 e 30 barras.

No mesmo ano, Hemamalini e Simon (2011) propuseram um algoritmo de colônia artificial de abelhas para a resolução do PDE-PV. Este método é uma meta-heurística baseada em como as abelhas buscam as fontes de néctar, utilizando abelhas artificiais que “voam” pelo espaço de busca multidimensional. Foram aplicados testes para sistemas de 5 e 10 unidades geradoras em um período de 24 horas.

Um ano depois, Yang et al. (2012) criaram um algoritmo bioinspirado nos vaga-lumes para a resolução do PDE-PV, baseado nas características de brilho em vaga-lumes. Assim, foram exploradas as características dos vaga-lumes, para os quais não há distinção entre os indivíduos, independentemente do sexo, a atração provocada por um vaga-lume é proporcional ao brilho, e inversamente proporcional à distância entre eles. Dessa maneira, para quaisquer dois vaga-lumes, o menos brilhante se moverá na direção do mais brilhante. Se nenhum dos vaga-lumes é mais brilhante que o outro, a direção se dá de forma aleatória. Já a última característica baseada é que a intensidade do brilho é influenciada pela função objetivo a ser otimizada. Tendo isso em vista, o algoritmo foi implementado para tratar das restrições do problema, utilizando uma função penalidade.

A partir desse trabalho, Coelho e Mariani (2014) apontaram um método metaheurístico baseado em algoritmos evolutivos (AE), que são algoritmos candidatos a

produzir ótimos resultados para a resolução de problemas de otimização não lineares, não diferenciáveis e multimodais na área de sistemas elétricos de potência. O método de evolução diferencial (ED) é um algoritmo evolutivo que utiliza uma abordagem estocástica para a resolução de problemas do que os algoritmos evolutivos clássicos, como algoritmos genéticos, programação evolutiva e estratégias de evolução.

Os autores Kheshti et al. (2017) apresentaram um método diferenciado chamado *Lightning Flash Algorithm* (LFA) para solucionar o PDE em sistemas de energia de larga escala, considerando várias opções de combustível e efeitos de ponto de válvula nos geradores. Assim, foram realizados testes com cinco sistemas de estudo de casos, incluindo 10 unidades, 40 unidades, 80 unidades, 160 unidades e 640 unidades, para validar a aplicabilidade e eficácia do método LFA proposto para resolver o PDE. Os resultados são comparados com outros métodos publicados na literatura e confirmam a aplicabilidade e eficácia do LFA em relação a outros métodos existentes.

Em Al-Betar et al. (2018), é proposto um algoritmo inspirado na Busca por Harmonia (BH) que foi modificado para melhorar seu conceito de diversidade. Assim, o processo de atualização no BH é baseado em um mecanismo ganancioso no qual a nova solução de harmonia, criada em cada geração, substitui o pior indivíduo da população. Este processo poderia ser melhorado com outros mecanismos de atualização, a fim de controlar a diversidade perfeitamente. Posteriormente, foram propostas três versões do BH: (1) Natural Proporcional BH; (2) Torneio Natural BH; (3) Classificação Natural BH. As três variantes se baseiam no princípio da seleção natural da “sobrevivência do mais apto”, não substituindo apenas o pior indivíduo da população, mas qualquer indivíduo pode ser substituído com base em determinados critérios. O algoritmo foi aplicado ao PDE-PV em diversos testes, nos quais os resultados mostram que o algoritmo é promissor.

Ainda merecem destaque na literatura os seguintes métodos para a solução do PDE-PV, baseados na metodologia meta-heurística e bio-inspirada (algoritmos genéticos, genético híbrido, co-evolutivo e cultural): Kim et al. (2002), Sinha et al. (2003), Abido (2006), Alsumait et al. (2009), Sonmez (2011) e Yang et al. (2012).

O trabalho de Hoorebeeck (2020) descreve um método heurístico baseado em sucessivas aproximações em trechos da função de custo. Esse método é composto por duas etapas distintas: inicialmente, ocorre a otimização sobre todo o conjunto viável, resultando na obtenção de um limite inferior para o objetivo ótimo; em seguida, as soluções viáveis coletadas na etapa anterior são refinadas por meio de buscas locais. Essa abordagem é testada em diversos sistemas IEEE, os quais foram expandidos para o PDE-PV.

O estudo de Sakthivel et al. (2020) introduz uma nova abordagem de inteligência de enxame, o Algoritmo de Busca de Esquilos denominado *Squirrel Search Algorithm* (SSA), inspirado no comportamento de forrageamento dos esquilos, os quais utilizam estratégias dinâmicas de saltar e deslizar. A praticidade desse algoritmo é avaliada em seis diferentes

sistemas de teste de energia, com variações de tamanho e complexidade. Os resultados da simulação confirmam que a abordagem SSA supera outras técnicas de otimização heurística existentes em termos de qualidade da solução, robustez e eficiência computacional. Assim sendo, o SSA proposto pode representar uma abordagem eficaz para resolver o PDE-PV.

Em 2021, Ahmed et al. (2021) introduziram um método de otimização denominado Algoritmo do Mofo Slime (SMA) para PDE e PDE-PV. Para avaliar a eficácia deste algoritmo, foram conduzidos testes considerando o impacto do ponto de válvula em sistemas com 10 e 40 unidades, na qual a eficácia do algoritmo proposto é comparada com a de outros algoritmos existentes, demonstrando resultados eficientes.

O trabalho de Basetti et al. (2021) apresenta um algoritmo meta-heurístico denominado Otimizador Político baseado em Busca Quase-Oposicional (QOPO). A eficácia da técnica QOPO foi avaliada em sistemas compostos por 3, 6, 10, 11, 13 e 40 unidades. Os resultados obtidos utilizando o QOPO foram comparados com os de outras técnicas reportadas na literatura, na qual as análises revelaram uma sólida capacidade de exploração na busca da solução global ótima, em comparação com os métodos existentes na literatura, sem violar quaisquer restrições ou limites definidos.

Proposto por Benyekhlef et al. (2021), o algoritmo de busca de Cuckoo (CSA) é inspirado na natureza. Os resultados obtidos confirmam a eficiência e a robustez do algoritmo de busca de Cuckoo em comparação com outras técnicas de otimização publicadas na literatura. Além disso, os resultados da simulação mostram as vantagens do algoritmo proposto na otimização do custo total do combustível de produção, das emissões totais e das perdas totais em todas as linhas de transmissão.

Já Deb et al. (2021) propõem um algoritmo meta-heurístico denominado Otimização do Fluxo Turbulento de Água (TFWO), inspirado no comportamento de redemoinhos em fluxos de água turbulentos. Em comparação com sete meta-heurísticas bem conhecidas, como o Algoritmo de Busca de Cuckoo (CSA), Algoritmo do Lobo Cinzento - *Gray Wolf* (GW), Algoritmo Seno-Cosseno (SCA), Algoritmo de Otimização de Minhoca da Terra (EWA), Algoritmo de Enxame de Tunicados (TSA), Algoritmo de Busca de Mariposa (MSA) e Otimização Baseada em Aprendizado de Ensino (TLBO), o TFWO oferece o menor custo de combustível e soluções significativamente robustas para o PDE em todos os sistemas testados. Os resultados confirmam o potencial e a eficácia do TFWO como uma técnica promissora para resolver diversos PDE.

O estudo de Ramli et al. (2022) demonstra a eficácia da abordagem de otimização impulsionada pelo vento denominado *Wind-driven Optimization* (WDO), a qual se baseia no conceito do movimento natural do vento para estabilizar a desigualdade de pressão do ar na atmosfera. Segundo os autores, uma das grandes vantagens do WDO em comparação com outras técnicas é sua precisão na busca. O algoritmo proposto foi aplicado em dois sistemas distintos, 10 e 40 geradores. Os resultados da simulação evidenciaram a capacidade

do WDO em determinar o valor ótimo de geração de energia com custo mínimo e baixa taxa de perda de energia.

2.4.1.3 Métodos híbridos

Em Victoire e Jeyakumar (2004), foi apresentado um híbrido muito eficiente para a resolução do PDE-PV, abrangendo a técnica de otimização de enxame de partículas (PSO) com a técnica de programação quadrática sequencial (PQS). Nesse método, o PSO tem o papel de otimizador global, e a técnica PQS melhora/refina a solução na solução da execução do PSO. O PQS é um método de otimização não linear que inicia a partir de um único ponto de pesquisa e localiza uma solução usando as informações de gradiente. No método de programação quadrática sequencial, utiliza-se um aproximante de Taylor de segunda ordem para a função objetivo e efetua-se a linearização das restrições. A matriz hessiana é determinada e atualizada mediante a uma fórmula empregada em métodos quasi-Newton, e o tamanho do passo aceito é determinado pela utilização de uma função mérito. Com vários testes em diferentes PDE-PV, esse trabalho proporcionou soluções de qualidade em comparação com outras técnicas existentes para este problema, realizando simulações com 3, 13 e 40 geradores.

Em Chiou (2007), foi desenvolvido um método híbrido nomeado *Variable Scaling Hybrid Differential Evolution* (VSHDE) para a resolução do PDE-PV com sistemas teste de 15 e 40 unidades geradoras. O autor, considerou no trabalho as restrições de desigualdade referentes à capacidade de geração de cada unidade geradora, a restrição de balanço de potência, zonas de operação proibidas e perdas de potência ativa nas linhas de transmissão. Os testes mostraram um bom desempenho para sistemas de grande porte.

Posteriormente, Wang, Chiou e Liu (2007) apresentaram uma nova versão do método mencionado anteriormente, para o PDE-PV aplicado em 3, 13 e 40 unidades geradoras. O algoritmo proposto foi chamado de *self-tuning hybrid differential evolution* (*self-tuning* HDE) e traz uma abordagem evolucionária. Seus resultados comparados com o anteriormente citado trouxeram soluções com menor custo e obtiveram um melhor desempenho computacional.

No trabalho de He, Wang e Zhizhong (2008), trata-se de um método híbrido denominado *hybrid genetic algorithm* (HGA). Na qual os autores utilizaram o AG (Algoritmo Genético) como o otimizador principal, enquanto o ED e o SQP são usados para ajustar a solução da execução do AG. Foram analisados dois casos de testes do PDE-PV com 13 e 40 geradores, resultando em bons resultados comparados aos da literatura já encontrados.

No ano seguinte, Selvakumar e Thanushkodi (2009) sugeriram um método heurístico denominado Otimização por Enxame Civilizado (OEC), que combinava o Algoritmo de Civilização da Sociedade (ACS) com Otimização por Enxame de Partículas (OEP). Nesse algoritmo, as possíveis soluções, ou seja, os indivíduos, eram agrupados em pequenas

sociedades, sendo que os indivíduos com melhores resultados em cada grupo atuam como “elites”, baseando-se nos aspectos sociais de uma civilização humana. Foram realizados testes em diversas instâncias do PDE, incluindo casos de grande porte com 200 geradores.

No estudo conduzido por Yuan et al. (2009), foi introduzido um método inovador que combina diferentes abordagens. Esse método integra o poder da ED para resolver o PDE-PV, considerando restrições de limite de rampa. Para alcançar isso, o método principal utilizado foi a evolução diferencial, enquanto o refinamento da solução foi realizado através do r-algoritmo de Shor. Este último é reconhecido por sua eficácia na otimização de problemas não diferenciáveis, utilizando subgradientes. Foram realizados testes para sistemas com 10 unidades geradoras e com horizonte de planejamento de 24 horas, obtendo, nestes testes, soluções de boa qualidade.

Em Niknam (2010), foi apresentado um método de otimização por enxame de partículas adaptativo, que consistia em um sistema fuzzy, juntamente com o método de Nelder-Mead. O sistema fuzzy é utilizado para auxiliar no controle dos parâmetros de otimização por enxame de partículas, enquanto o método de Nelder-Mead foi utilizado como uma busca local, sendo empregado para a resolução do PDE-PV.

Chiang e Wang (2010) trouxeram uma proposta híbrida, chamada de *Hybrid Differential Evolution with Multiplier Updating* (HDE-MU) para resolver problemas de *Cogeneration Economic Dispatch* (CED). A atualização do multiplicador (MU) é introduzida para evitar a deformação da função Lagrangiana aumentada, adotada para gerenciar as restrições do CED. Os dois exemplos de cogeração empregados demonstram que o algoritmo proposto possui os benefícios da objetividade, facilidade de implementação, melhor eficácia que os métodos anteriores, melhor eficácia e eficiência do que a ED clássica e ajuste automático da penalidade atribuída aleatoriamente a um valor apropriado.

Duvvuru e Swarup (2011) propõem um algoritmo híbrido que combina o método de ponto interior (MPI) com o método ED para resolver o PDE-PV. O método proposto foi utilizado para resolver três diferentes casos de teste envolvendo 13 e 40 unidades geradoras, obtendo assim valores de função objetivo menores e também tempo de computacional menor.

Além desses, destacam-se na literatura métodos que utilizam um procedimento híbrido envolvendo métodos determinísticos e heurísticos, tais como aqueles apresentados nos trabalhos de Ravi et al. (2006), Coelho e Mariani (2008), Basu (2011), Balamurugan (2014) e Nepomuceno et al. (2015).

Em Gonçalves et al. (2013) foi elaborado um método híbrido, combinando algoritmos culturais e sistemas imunológicos artificiais para a resolução do PDE-PV. Os sistemas imunológicos artificiais herdam determinadas características baseadas no sistema imunológico. Assim o sistema possui agentes denominados anticorpos, que interagem com os

outros visando impedir danos ao organismo causados por agentes invasores, chamados de antígenos. No sistema imunológico artificial desenvolvido pelo autor, o principal mecanismo utilizado foi a seleção clonal, que consiste em selecionar, para proliferar, aquelas células que conseguem reconhecer os antígenos. O método híbrido elaborado utiliza o espaço de crenças do algoritmo cultural para extrair informações dos anticorpos e utiliza este conhecimento como guia para gerar novos anticorpos e melhorar o desempenho do sistema imunológico artificial.

Santra et al. (2016) apresentaram um algoritmo híbrido com as meta-heurísticas PSO e ACO, que simula o comportamento das formigas na construção de rotas de busca por alimento, aplicado a quatro casos diferentes, sendo um deles o PDE-PV.

No artigo de El-Sayed et al. (2020), é proposto um algoritmo que introduz duas modificações significativas para melhorar a capacidade de exploração do algoritmo de colônia de abelhas artificiais. A primeira modificação concentra a busca das abelhas observadoras e operárias ao redor da melhor solução encontrada até o momento. A segunda modificação otimiza o comportamento de escape de mínimos locais usando abelhas exploradoras. Essas modificações formam uma busca concêntrica de vários níveis ao redor da melhor solução encontrada. Além disso, combinando o algoritmo de colônia de abelhas artificiais modificado com ciclos de voo de Levy, que melhoram a capacidade de escape de mínimos locais, leva ao algoritmo proposto pelos autores. A melhoria adicionada pelos autores foi confirmada usando o teste de soma de postos de Wilcoxon. Os resultados obtidos pelo algoritmo proposto são superiores em comparação com os relatados na literatura, alcançando probabilidades estimadas de mais de 99,9% para obter a solução ótima global.

Os autores Al-Bahrani et al. (2021) apresentaram uma técnica de otimização denominada algoritmo de otimização de enxame de partículas de múltiplos gradientes (MG-PSO), composto por duas etapas, para explorar a área do espaço de busca. Este algoritmo utiliza M partículas na primeira etapa para explorar novos vizinhos e M partículas na segunda etapa para explorar o melhor vizinho. A variação negativa do gradiente das partículas em ambas as etapas equilibram as capacidades de busca global e local. A eficácia deste algoritmo é validada em cinco sistemas de energia de médio a muito grande porte. O MG-PSO demonstra uma redução efetiva na dificuldade de lidar com o PDE em grande escala, e os resultados da simulação confirmam a adequação deste algoritmo para problemas multi-objetivo complexos, com medidas de desempenho de aptidão variadas e consistentes. Além disso, o algoritmo é aplicado para estimar a geração necessária em 24 horas, a fim de atender às mudanças na demanda de carga. Essa pesquisa oferece valiosas referências técnicas para os operadores de despacho econômico atualizarem seus programas de sistema de energia, visando alcançar benefícios econômicos.

Pode-se citar também o método híbrido desenvolvido por Pavan (2023) utilizando o algoritmo de enxame de partículas de aprendizagem abrangente com os métodos determinís-

ticos de Newton-Raphson (NR) e de Branch-and-Bound (BB) com SQP, para a resolução de problemas do fluxo de potência ótimo com variáveis discretas. Outra questão abordada pelo autor é a proposta de uma nova estratégia para o tratamento das variáveis discretas. Experimentos numéricos foram realizados nos casos testes de 13, 19 e 40 geradores e nos sistemas elétricos do IEEE de 118 e 300 barras. Em testes computacionais, realizados nos casos de testes de 13, 19 e 40 geradores e nos sistemas elétricos do IEEE de 118 e 300 barras, mostrou-se a eficiência e obteve soluções de boa qualidade quando comparadas a *solvers*, metaheurísticas e métodos encontrados na literatura.

Na literatura, são encontrados diversos métodos para resolver o PDE, especialmente quando há a presença de efeitos senoidais decorrentes de pontos de carregamento de válvula. Esses métodos abrangem tanto abordagens determinísticas, que tendem a encontrar mínimos locais da função objetivo, quanto métodos metaheurísticos e híbridos, que exploram de maneira mais ampla o espaço de soluções em busca de mínimos potenciais, possivelmente identificando o mínimo global. Entretanto, até o momento, nenhum desses métodos apresenta a propriedade de multimodalidade que esta pesquisa procura identificar, isto é, a busca por de múltiplos ótimos locais na função objetivo.

Devido à significativa importância e os desafios inerentes aos métodos previamente mencionados, este trabalho propõe um método inovador fundamentado em sistemas dinâmicos para abordar a resolução do PDE-PV e outro problema multimodal apresentado na literatura. Inspirado na abordagem de Chiang e Chu (1996) e fundamentado em métodos clássicos determinísticos de otimização, como discutido no próximo capítulo, este método busca superar as limitações identificadas. As estratégias da metodologia proposta foram inspiradas em otimização clássica, tais como o Método de Euler, Euler Modificado, Método do Gradiente, Método de Newton e Método de Otimização com Penalidade. Uma análise detalhada desses métodos será abordada de forma mais abrangente no próximo capítulo, oferecendo uma compreensão mais profunda de sua aplicação e eficácia na resolução do problema em questão.

3 MÉTODOS DETERMINÍSTICOS BASEADOS EM OTIMIZAÇÃO CLÁSSICA E SISTEMAS DINÂMI- COS

Neste capítulo, serão apresentados métodos de otimização não linear, com ênfase em estudos de problemas irrestritos e restritos. Serão discutidos métodos baseados em gradientes de máxima descida, de Newton e de gradiente refletido, tanto para problemas irrestritos quanto para problemas restritos. Destacam-se, ainda, métodos numéricos para EDOs de ordem 1, como os métodos de Euler e Euler Modificado. Estes últimos são empregados na resolução das equações geradas pelo sistema dinâmico, proporcionando uma análise mais aprofundada dessas abordagens no contexto da pesquisa em questão. Além disso, serão abordadas as propostas de Chiang e Chu (1996) e Chiang et al. (2022), que serviram de base para este trabalho.

3.1 Método de Euler, Euler Melhorado e Euler Modificado

O método de Euler, também conhecido como método da reta tangente, foi desenvolvido por Leonhard Euler por volta de 1768, conforme discutido por Maioli (2015). Este método oferece uma abordagem simples para obter soluções aproximadas de equações diferenciais ordinárias de ordem 1. O propósito dessa técnica de simulação matemática é buscar soluções com base em um valor inicial ao longo de um intervalo de tempo determinado.

Ao lidar com uma EDO ou Equação Diferencial Parcial (EDP) que descreve o comportamento dinâmico ao longo do tempo, o método de Euler permite a aproximação da solução em pequenos incrementos discretos. Isso é feito com base na taxa de mudança de uma função em um determinado ponto, que deve ser aproximadamente igual à inclinação da tangente à curva da função naquele ponto. Assim, o método de Euler se move em direção à solução em passos pré-definidos, que podem ser variáveis ou não, ao longo do tempo, atualizando sua solução em cada iteração (VALLE, 2012).

Assim, seja o Problema de Valor Inicial (PVI) apresentado em (3.1) onde se deseja determinar aproximações $y_1, \dots, y_n$ para as soluções exatas $y(x_1), \dots, y(x_n)$.

$$\begin{cases} dy/dx &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $a \leq x \leq b$, $y \in \mathbb{R}$

Como o valor de $y(x_1)$ não é conhecido, é necessário considerar que y_1 será uma aproximação para $y(x_1)$. Assim, ao traçar a tangente T à curva $y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$, conforme definido pela Equação (3.2), pode-se estimar o valor de y_1 .

$$y(x) - y(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0) \quad (3.2)$$

Escolhendo um valor para o passo h e admitindo a cada passo um ponto dentro do intervalo $[a, b]$, considerando-se n subintervalos igualmente espaçados em $[a, b]$, $h = \frac{(b-a)}{n}$, temos que $x_1 = x_0 + h$. Com isso, o próximo passo será x_{k+1} a partir do anterior x_k definindo então $x_{k+1} = x_k + h$, então $x_{k+1} = x_{k+h}$. Logo, $y_{k+1} - y_k = dy/dx(x_k)(x_{k+1} - x_k)$, em que $dy/dx(x_k) \approx f(x_k, y_k)$ e $x_{k+1} - x_k = h$. Portanto, $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, $k = 0, \dots, n-1$, conhecido como método de Euler. Dessa forma, melhor será a aproximação para um valor pequeno de h em um dado subintervalo $[a, b]$. Pode-se descrever o método de Euler no Algoritmo 1.

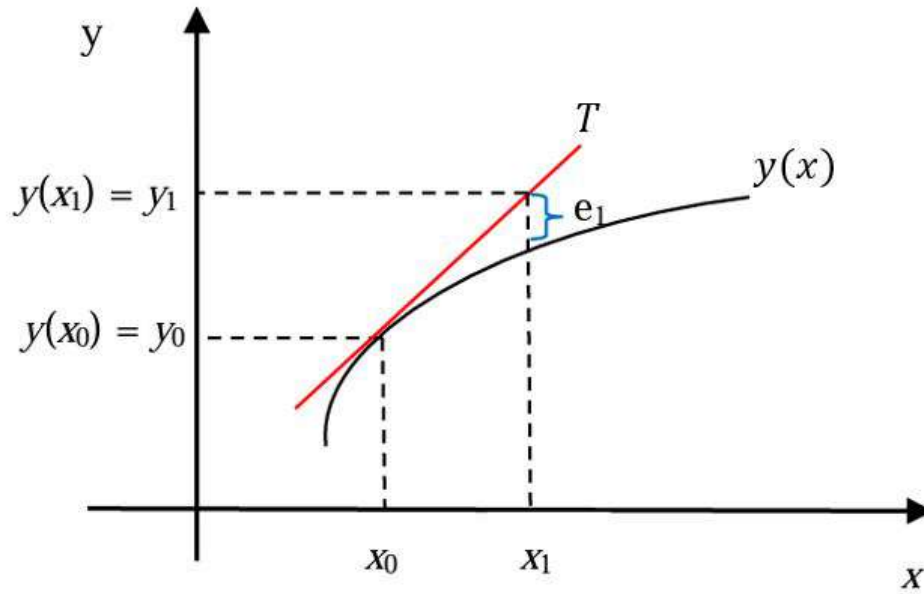
Na Figura 3.1, é apresentada a representação gráfica da evolução de uma variável ao longo do tempo. O eixo horizontal representa o tempo, enquanto o eixo vertical representa o valor da variável. O plano cartesiano facilita a visualização da aproximação da solução utilizando o método de Euler. As condições iniciais do problema definem o ponto inicial $(x_0, y(x_0))$, em que $y(x_0) = y_0$. Na *Etapa 3* do Algoritmo 1, mencionada anteriormente, o tempo é dividido em pequenos incrementos (passos de tempo). Quanto menores esses passos, mais precisa será a aproximação. Observa-se uma reta tangente à curva da solução no ponto inicial, representando graficamente a taxa de mudança constante durante o intervalo de tempo. Ao longo dos passos e repetições, estimativas das soluções são encontradas, ou seja, $y(x_1) \approx y_1$, sendo que $y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$ e $h = x_1 - x_0$. O termo e_1 representa o erro cometido na aproximação de $y(x_1)$ por y_1 .

Algoritmo 1: Método de Euler

- 1 Inicialize $x = x_0$, $y = y_0$ e $k = 0$;
 - 2 Escolha um passo h ;
 - 3 **Enquanto** $k < n$ **faça**:
 - Calcule $f(x_k, y_k)$;
 - Atualize $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$;
 - $x_{k+1} = x_k + h$;
 - $k = k + 1$;
 - 4 **Fim-Enquanto**
 - 5 Retorne x e y .
-

O método de Euler é repetido até atingir o ponto desejado no tempo ou até o número especificado de passos. Cada novo ponto estimado é utilizado como ponto inicial para calcular o próximo ponto na aproximação da solução. Esse processo iterativo é fundamental para a obtenção de uma solução aproximada ao longo do tempo.

Figura 3.1 – Gráfico da tangente T à curva $y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$ cuja equação é dada por: $y(x) - y(x_0) = dy/dx(x_0)(x - x_0)$



Fonte: Autor.

Conforme apontado por Valle (2012), o método de Euler pode apresentar falta de precisão em alguns casos, especialmente em problemas sensíveis a pequenas mudanças, sendo o passo h uma influência significativa nas resoluções.

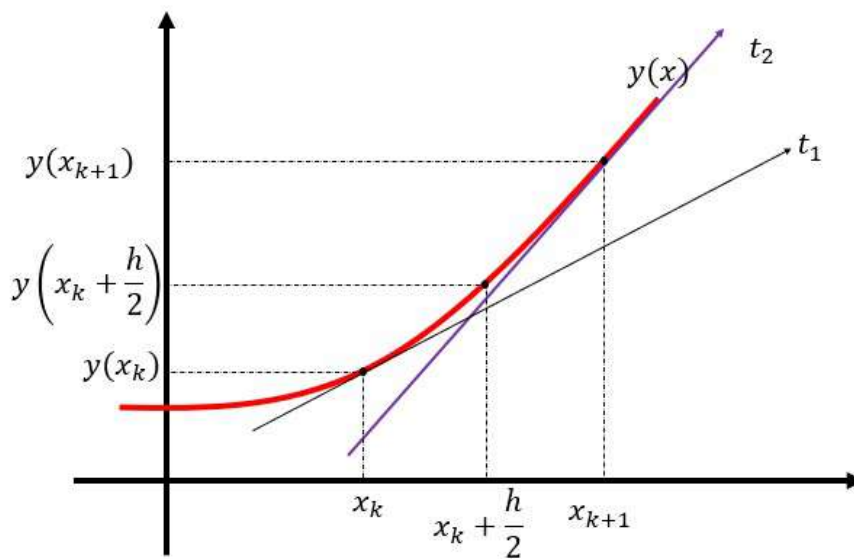
Diante dessa limitação, foi proposta uma melhoria do método de Euler, também conhecidos como métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem, que incluem os métodos de Euler Melhorado e Euler Modificado. O Método de Euler Melhorado apresenta uma correção na estimativa da solução em x_{k+1} e (x_{k+1}, y_{k+1}) , estimando o valor de y_{k+1} por Euler (y_{k+1}^E). A nova solução aproximada y_{k+1} é calculada considerando a atual y_k adicionada à média da soma de $f(x_k, y_k)$ com $f(x_{k+1}, y_{k+1}^E)$, multiplicado por $h/2$. O Algoritmo 2 apresenta o funcionamento do método de Euler Melhorado.

Algoritmo 2: Método de Euler Melhorado

-
- 1 Inicialize $x = x_0$, $y = y_0$ e $k = 0$;
 - 2 Escolha um passo h e número de pontos n ;
 - 3 **Enquanto** $k < n$ **faça**:
 - Calcule $k_1 = f(x_k, y_k)$;
 - Calcule $k_2 = f(x_k + h, y_k + k_1 h)$
 - Atualize $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$
 - Atualize $x_{k+1} = x_k + h$
 - $k = k + 1$;
 - 4 **Fim-Enquanto**
 - 5 Retorne x e y .
-

No método de Euler Melhorado a nova solução aproximada y_{k+1} é calculada considerando o valor atual da variável y_k acrescido da solução estimada multiplicada por h , ou seja, neste método: $y_{k+1} = y_k + h/2(k_1 + k_2)$, em que $k_2 = f(x_k + h, y_k + k_1 h)$ e $k_1 = f(x_k, y_k)$, para $k = 0, \dots, n - 1$. A Figura 3.2 representa graficamente o Método de Euler Melhorado.

Figura 3.2 – Método de Euler Melhorado



Fonte: Autor.

O método de Euler Modificado, também conhecido como Euler-Cromer, Heun ou Runge-Kutta de segunda ordem, representa uma evolução em relação ao método de Euler básico. Essa abordagem busca oferecer uma aproximação mais precisa da solução, incorporando a variação da derivada ao longo dos passos. O algoritmo de Euler Modificado, que também é conhecido como método de Heun, é apresentado no Algoritmo 3 (MAIOLI, 2015).

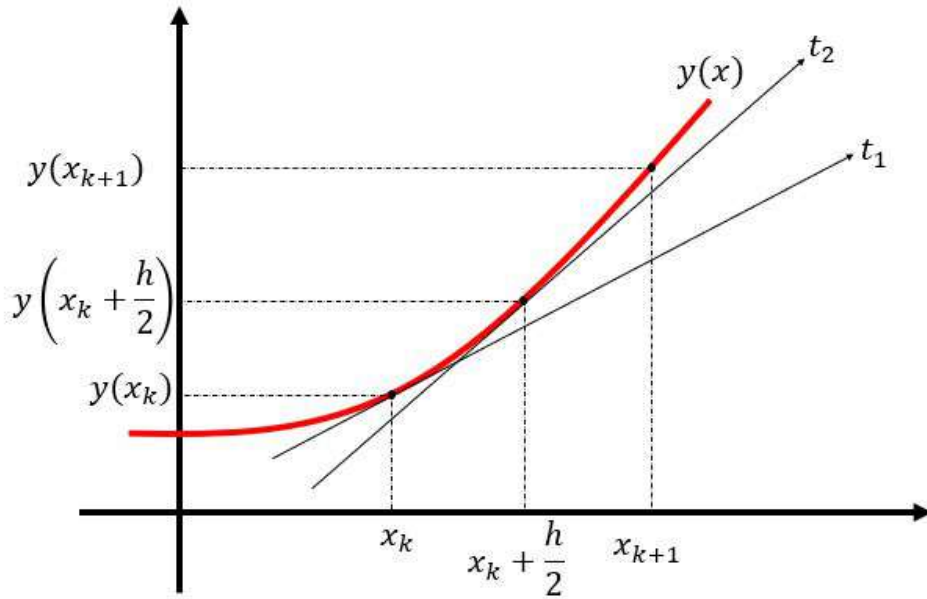
Algoritmo 3: Método de Euler Modificado

-
- 1 Inicialize $x = x_0$, $y = y_0$ e $k = 0$;
 - 2 Escolha um passo h e número de pontos n ;
 - 3 **Enquanto** $k < n$ **faça**:
 - Calcule $k_1 = f(x_k, y_k)$;
 - Calcule $k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1 \frac{h}{2})$
 - Atualize $y_{k+1} = y_k + k_2 h$
 - Atualize $x_{k+1} = x_k + h$
 - $k = k + 1$;
 - 4 **Fim-Enquanto**
 - 5 Retorne x e y .
-

O método de Heun ou de Euler Modificado considera apenas a inclinação no ponto médio $x_k + h/2$ expressa por $k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1 \frac{h}{2})$. O novo valor de y_{k+1} é calculado, sendo expresso por $y_{k+1} = y_k + k_2 h$, em que $k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + k_1 \frac{h}{2})$ e $k_1 = f(x_k, y_k)$. Esse processo é repetido até atingir o ponto desejado no tempo ou até o número especificado de passos ser alcançado. Neste método, com a inclinação de Heun, visa melhorar a precisão das estimativas ao levar em consideração a variação da derivada ao longo dos passos, resultando em uma solução mais precisa que o método de Euler. Essa mesma afirmação vale para o método de Euler Melhorado, o qual utiliza a média entre os coeficientes da reta t_1 , tangente pelo ponto (x_k, y_k) e a reta t_2 , tangente pelo ponto (x_{k+1}, y_{k+1}) .

Na Figura 3.3 é feita uma interpretação geométrica do método de Heun ou de Euler Modificado, em que são feitas duas estimativas, utilizando a inclinação da curva no ponto inicial e a inclinação da curva no primeiro ponto estimado. Essa abordagem visa proporcionar estimativas mais precisas. Na representação gráfica, a primeira inclinação é ilustrada pelo ponto $(x_k, y(x_k))$, com sua reta tangente indicada por t_1 . A segunda inclinação é uma estimativa da derivada da função no ponto médio do intervalo, definida pelo ponto $(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k + \frac{h}{2}))$, indicada pela tangente t_2 .

Figura 3.3 – Método de Heun ou Euler Modificado



Fonte: Autor.

3.2 Método do Gradiente

Conforme abordado por Torres (2021), o método do Gradiente, também conhecido como método do Gradiente Descendente, é um algoritmo de otimização utilizado para encontrar o mínimo de uma função em um espaço multidimensional. Este método é aplicado em problemas de *machine learning*, redes neurais artificiais e em diversas áreas da engenharia e ciências.

O princípio fundamental do método do Gradiente é realizar a otimização de uma função por meio do ajuste refinado dos valores das variáveis da função. Esse ajuste é feito de maneira a reduzir gradualmente o valor da função objetivo, indicando a direção de maior decréscimo da função. O método do Gradiente pode ser descrito no Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Método do Gradiente

-
- 1 Inicialize $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$ e $\epsilon > 0$ (precisão)
 - 2 **Enquanto** $k < n$ e $\|\nabla f(x^k)\| > \epsilon$ **faça**:
 - Calcule $\nabla f(x^k)$;
 - $d^k = -\nabla f(x^k)$;
 - Minimize: $\psi(\alpha_k) = f(x^k + \alpha_k d^k)$;
 - Seja α_k uma aproximação do minimizante desse problema.
 - Atualize $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$;
 - $k = k + 1$;
 - 3 **Fim-Enquanto**
 - 4 Retorne x^k .
-

Para resolver o problema restrito em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 , dada pelo problema (2.3), o método do gradiente busca encontrar, a partir de um ponto inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$, o mínimo local aproximado da função $f(x)$. Nesse processo, em cada iteração k , o gradiente busca na direção de maior decrescimento da função, e a aproximação x^k é atualizada de acordo com a Equação (3.3).

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \quad (3.3)$$

em que: d^k é a direção de busca no ponto x^k , dada por $d^k = -\nabla f(x^k)$, ou seja, a direção oposta ao gradiente da função no ponto x^k . Essa escolha garante que se esteja caminhando na direção de descida mais rápida em cada iteração; α_k é o tamanho do passo na iteração k . É um valor positivo que controla o tamanho do avanço que se faz a cada iteração. É importante escolher um valor adequado para α_k , pois um valor muito pequeno pode tornar a convergência lenta, enquanto um valor muito grande pode causar oscilações ou até mesmo a divergência do método. Uma maneira para determinar α_k é resolver o problema de busca unidimensional:

$$\text{minimizar } \psi(\alpha_k) = f(x^k + \alpha_k d^k) \quad (3.4)$$

É importante mencionar que o método do gradiente é usualmente aplicado em problemas convexos ou quase convexos, ou seja, problemas que possuem um único ponto de mínimo. Em funções não lineares ou com muitos mínimos locais, o método do gradiente pode não ser eficiente. Uma extensão do método do gradiente é o Gradiente Refletido, que será apresentado na Seção 4.1. Essa extensão visa superar algumas limitações do método do gradiente em problemas mais complexos.

3.3 Método de Newton

Baseado em Torres (2021) e Izmailov e Solodov (2012), o método de Newton é um algoritmo amplamente conhecido e eficaz na otimização de funções diferenciáveis de classe C^2 . Ele é especialmente aplicado a problemas de otimização com restrições. O método leva o nome do físico e matemático Isaac Newton, em homenagem às suas contribuições para o cálculo diferencial.

O objetivo fundamental do método de Newton é encontrar o ponto onde o vetor gradiente da função é nulo, indicando a presença de um mínimo local, máximo local ou ponto de sela. O Algoritmo 5 apresenta a proposta do método de Newton.

Assim, suponha que se deseja resolver o problema apresentado em (2.3). Para x numa vizinhança de $\bar{x}$, o valor $f(x)$ poderá ser aproximado pela aproximação quadrática de Taylor:

$$f(x) \approx h(x) := f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (3.5)$$

Note que h é uma função quadrática e assumindo que a matriz H é definida positiva, é resolvido o sistema $\nabla h(x) = 0$. Uma vez que o gradiente de h é dado:

$$\nabla h(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) + H(\bar{x})(x - \bar{x}), \quad (3.6)$$

sendo motivados a resolver o sistema:

$$\nabla f(x) + H(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0. \quad (3.7)$$

Assumindo que $H(\bar{x})$ é não singular, obtém-se da equação anterior que:

$$x - \bar{x} = -[H(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x}) \Leftrightarrow x = \bar{x} - [H(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x}). \quad (3.8)$$

Portanto, no método de Newton, a cada iteração, atualiza-se a aproximação atual x^{k+1} usando a fórmula:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k [H(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad (3.9)$$

em que $H(x^k)$ é a matriz Hessiana de f avaliada em x^k , $\nabla f(x^k)$ é o gradiente de f avaliado em x^k e α_k é o tamanho do passo, que é o minimizante de (3.4).

Assim, inicialmente, o método define o índice k , que conta as iterações, como zero. Em seguida, verifica-se se a norma do gradiente $\nabla f(x^k)$ é menor ou igual à tolerância

Algoritmo 5: Método de Newton

```

1  Inicialize  $x = x^0$ ,  $\epsilon$ ,  $k = 0$  e  $n$ ;
2  Enquanto  $k < n$  e  $\|f(x^k)\| > \epsilon$  faça:
    Atualize  $x^{k+1} = x^k - \alpha_k [H(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$ ;
     $k = k + 1$ ;
3  Fim-Enquanto
4  Retorne  $x^k$ .

```

estabelecida. Caso essa condição seja satisfeita, a busca é encerrada, pois uma solução com a precisão desejada foi encontrada. Caso contrário, a busca continua.

Na continuação da busca, a direção de procura (d^k) é definida por $-[H(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$, em que $H(x^k)$ é a matriz Hessiana de f avaliada no ponto x^k . O tamanho do passo α_k depende da natureza do problema e das características da função a ser otimizada. Pode-se utilizar busca unidimensional, exata ou inexata. A cada valor encontrado, a aproximação atual x^k é atualizada usando a fórmula $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$, e o contador k é incrementado em 1 para indicar uma nova iteração efetuada.

O algoritmo continua iterando até que o critério de parada seja satisfeito, o que ocorre quando a norma do gradiente é menor ou igual à tolerância desejada. Esse processo é repetido até que a solução seja encontrada com a precisão desejada.

3.4 Métodos de otimização para Problemas Restritos

Nesta seção, será abordada uma visão geral de alguns métodos iterativos para problemas restritos, com base nas referências principais de Bazaraa, Sherali, Shetty (1979), Tavazoei e Haeri (2006), Griva et al. (2009) e Torres (2021).

3.4.1 Método da Penalidade

Para resolver problemas com restrições de desigualdade e principalmente igualdade, pode-se empregar o método de Penalidade, uma abordagem que visa transformar problemas com restrições em problemas sem restrições, a fim de encontrar soluções que satisfaçam as restrições. Neste método, é resolvida uma sequência de problemas irrestritos baseados em um parâmetro de penalidade, cujas soluções, no limite, convergem para a solução do problema restrito. Com isso, os problemas irrestritos a serem resolvidos empregam uma função objetivo auxiliar que incorpora a função objetivo original, combinada com uma função de penalidade que impõe um custo sobre violações de restrições, ou seja, penalizando pontos infactíveis.

Um parâmetro de penalidade crescente, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, é aplicado à função de penalidade, determinando o nível de penalização. A função auxiliar do método de penalidade é expressa

da seguinte forma:

$$f_\sigma(x) = f(x) + \sigma P(x) \quad (3.10)$$

de modo que o problema irrestrito a ser solucionado, conhecido como problema de penalidade, é formulado como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f_\sigma(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (3.11)$$

De modo geral, quanto maior o valor de σ , maior é a ênfase na factibilidade. Ou seja, ao resolver o problema irrestrito com a função auxiliar $f_\sigma(x)$, à medida que σ se aproxima do infinito e $P(x)$ se aproxima de 0, espera-se que a solução do problema de penalidade convirja para a solução ótima x^* do problema original. A função penalidade P , associada ao problema (2.3), é definida como:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \zeta(g_i(x)) + \sum_{j=1}^p \phi(h_j(x)), \quad (3.12)$$

em que $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \zeta(y) = 0, & \text{se } y = 0 \\ \zeta(y) > 0, & \text{se } y \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \phi(y) = 0, & \text{se } y \leq 0 \\ \phi(y) > 0, & \text{se } y > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

A função ζ penaliza a violação das restrições de igualdade, enquanto ϕ penaliza a violação das restrições de desigualdade. As funções penalidades tradicionalmente utilizadas são:

$$\zeta(y) = |y|^\beta \quad \text{e} \quad \phi(y) = (\max\{0, y\})^\beta, \quad (3.14)$$

em que β é um número inteiro positivo. Neste caso, se $\beta = 2$, diz-se que P é uma função penalidade quadrática. Uma vez que se deseja que $f_\sigma(x) \rightarrow f(x)$ quando $\sigma \rightarrow \infty$, então o produto $\sigma P(x) \rightarrow 0$, ou seja, o parâmetro σ deve aumentar em relação a $P(x)$ à medida que este se aproxima de 0. Portanto, o valor de $\sigma P(x)$ também é utilizado como critério de parada para o método, quando seu valor absoluto for suficientemente pequeno. O Algoritmo 6 apresenta uma explicação detalhada de seu funcionamento.

Algoritmo 6: Método da Penalidade

-
- 1 Determine $f_\sigma(x)$ conforme (3.11);
 - 2 Faça $k = 0$ e entre com os dados iniciais: ponto inicial x^0 , parâmetro de penalidade $\sigma_0 > 0$, parâmetro de atualização da penalidade $\kappa > 1$ e precisão ε ;
 - 3 **Enquanto** $|\sigma_k P(x^k)| > \varepsilon$ e $\|\nabla f_{\sigma_k}(x^k)\| > \varepsilon$ **faça**:
 Resolva o problema de minimização penalizado com σ_k fixo:
 $\min_{x \in \Omega} f(x) + \sigma_k P(x)$
 e obtenha uma solução x^{k+1} ;
 Atualize o parâmetro de penalidade por $\sigma_{k+1} = \kappa \sigma_k$;
 Faça $k = k + 1$;
 - 4 **Fim-Enquanto**
 - 5 Retorne $f(x^k)$ e x^k .
-

O método de penalidade é uma abordagem eficaz para lidar com problemas de otimização com restrições. A escolha ou determinação dos parâmetros de penalidade é crucial para a eficácia dessa técnica, pois influencia a minimização da função objetivo e o atendimento de todas as restrições.

Conforme mencionado pelos autores em Griva et al. (2009), embora a técnica de penalidade seja capaz de lidar com desigualdades, ela é mais indicada para o tratamento de restrições de igualdade. Isso se deve ao fato de que os problemas irrestritos obtidos geralmente não possuem derivadas de segunda ordem contínuas, tornando métodos de barreira mais viáveis. Além disso, a combinação do método de penalidade com a função Lagrangiana resulta em métodos conhecidos como Lagrangiana aumentada. Esses métodos oferecem uma abordagem eficaz para resolver problemas de otimização com restrições, combinando as vantagens das penalidades com as técnicas da Lagrangiana aumentada.

3.4.2 Barreira Logarítmica Interior

Para a solução de problemas de otimização com restrições de desigualdade, é comum utilizar o método de Barreira Logarítmica Interior. Este é um método clássico proposto por Frisch (1955) e popularizado por Fiacco e McCormick (1968). A ideia principal do método é substituir as restrições de desigualdade por funções suavizadas de barreira logarítmica, que penalizam pontos factíveis próximos à fronteira da região definida pelas desigualdades multiplicadas por um parâmetro de barreira. Isso transforma o problema original em um problema irrestrito. Conforme o parâmetro de barreira tende a zero e controla o crescimento da função logarítmica, a solução do problema se aproxima da solução ótima original. Assim, o método de barreira é desenvolvido para tratar de problemas com restrições de desigualdade, cujo interior da região viável é não vazio, isto é, problemas no formato:

Algoritmo 7: Barreira Logarítmica Interior

-
- 1 Forneça a formulação do problema, como expresso na Equação (3.15) e inicialize ε ;
 - 2 **Enquanto** $\|\nabla F(x)\| > \varepsilon$ e $|\mu \sum \log(-g_i(x))| > \varepsilon$ **faça**:
 Introduza $g_i(x) : B_i(x) = -\log(-g_i(x))$, $i = 1, 2, \dots, m$;
 Calcule (3.16);
 Aplique algum algoritmo de otimização para minimizar a função objetivo auxiliar $F(x)$
 Atualize μ e $B_i(x) = -\log(-g_i(x, \mu))$, $i = 1, 2, \dots, m$;
 - 3 **Fim-Enquanto**
 - 4 Retorne $f(x)$ e x .
-

$$\begin{aligned} &\text{minimiza} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Os métodos de barreira preservam a factibilidade criando uma barreira que mantém os pontos iterativos no interior da região factível, razão pela qual também são conhecidos como métodos de pontos interiores. Nesse método, a função auxiliar assume a forma expressa em (3.16).

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m \mu [\log(-g_i(x))] \tag{3.16}$$

Os passos básicos do método são apresentados no Algoritmo 7.

Com isso, pode-se observar que o algoritmo de Barreira Logarítmica auxilia na resolução de problemas com restrições de desigualdade, sendo de extrema importância a escolha cuidadosa do parâmetro de barreira μ e do ponto inicial para a resolução do problema original por meio desse método.

Além disso, segundo Stanzani (2012) o parâmetro de barreira pode ser atualizado pela seguinte heurística de redução:

$$\mu_{k+1} = \tau_1 \mu_k \tag{3.17}$$

em que $\tau_1 \in (0, 1)$. Segundo o autor, o valor τ_1 não deve ser escolhido muito pequeno, a fim de evitar o comportamento oscilatório do método, nem muito grande, evitando a parada prematura do método em pontos que não sejam ótimos.

3.4.3 Suavização Hiperbólica

Uma técnica amplamente utilizada em otimização, lidando com funções diferenciáveis, é a técnica da suavização, frequentemente empregada em problemas reais que envolvem restrições ou funções não diferenciáveis, como é o caso do PDE. Essa abordagem

também é conhecida como Suavização Hiperbólica, e consiste em substituir uma função não diferenciável por sua versão suavizada, tornando-a diferenciável. Isso possibilita a aplicação de métodos de otimização que requerem derivadas, como gradientes, Newton e outros métodos, em problemas que envolvem a minimização de funções não diferenciáveis.

Como este trabalho utilizará funções modulares, será abordada a suavização hiperbólica específica para funções modulares. A função módulo é definida por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

A suavização hiperbólica pode ser realizada substituindo a função módulo por uma sequência de funções suaves que se aproximam da função módulo. Portanto, uma função de suavização hiperbólica é definida como:

$$\vartheta(x, \eta) = \sqrt{x^2 + \eta}, \quad (3.19)$$

em que η é um parâmetro maior que zero que controla a suavidade da função. Ao substituir a função módulo pela função suavizada, obtém-se uma função suave e diferenciável que se aproxima da função módulo. Por causa disso, essa função suavizada pode ser utilizada em problemas de otimização que envolvem a função módulo, permitindo a aplicação de métodos tradicionais de otimização que requerem derivadas.

A suavização hiperbólica possui as seguintes propriedades:

1. Suavização: A função $\vartheta(x, \eta)$ é diferenciável para todos os valores de x , incluindo $x = 0$, e seu valor absoluto tende a $|x|$ para $|x|$ suficientemente grande. Conforme η se aproxima de zero, a função se torna cada vez mais próxima da função módulo $|x|$.
2. Suavidade crescente: À medida que o valor de η aumenta, a função $\vartheta(x, \eta)$ se torna suavizada, ou seja, sua derivada se torna mais contínua. Isso significa que a inclinação da função em torno de pontos críticos, como mínimos e máximos, se torna menos acentuada à medida que η aumenta.
3. Conservação de mínimos: A função $\vartheta(x, \eta)$ preserva os mínimos da função módulo $|x|$. Isso significa que se um mínimo ocorre em x_0 na função $|x|$, então também ocorrerá um mínimo em x_0 na função suavizada $\vartheta(x, \eta)$ para qualquer valor de $\eta > 0$. No entanto, o valor do mínimo na função suavizada será ligeiramente maior do que na função módulo.
4. Estabilidade numérica: A função de suavização hiperbólica $\vartheta(x, \eta)$ é numericamente estável, o que significa que ela pode ser avaliada e diferenciada com

precisão mesmo para valores de x muito grandes ou muito pequenos. Isso torna a função útil para aplicações numéricas e algoritmos de otimização.

Na técnica de suavização hiperbólica, a solução do problema original é obtida através da utilização de funções suaves ou diferenciáveis, em que η pode ser atualizado conforme a Equação (3.20) (SILVA, 2014).

$$\eta_{k+1} = \rho_k \eta_k \quad (3.20)$$

em que $\rho \in (0, 1)$ é o fator decrescente de η e pode ser calculado por $\rho_k = \frac{1}{\rho_1 + \frac{\rho_2}{k}}$, com $\rho_1 > 1$ e $\rho_2 \geq 0$. Essa atualização visa garantir um decréscimo mais acentuado do parâmetro η nas primeiras iterações e um decréscimo mais suave ao final do processo. Isso é importante para evitar instabilidades devido à proximidade da natureza não diferenciável do problema (SILVA, 2014).

A parametrização do limite de η deve ser feita cautelosamente devido à sua sensibilidade, pois valores pequenos podem causar problemas de otimização difíceis de resolver, ou seja, muito próximos da função módulo original, enquanto valores altos podem levar a funções imprecisas ou descaracterizadas. Além disso, a suavização hiperbólica permite, como um pós-processamento adequado, obter uma solução próxima da solução original do problema (SILVA, 2014).

3.5 Método proposto por Chiang e Chu (1996) para problemas de otimização irrestritos

Chiang e Chu (1996) apresentaram um método de busca do ótimo global que utiliza um sistema dinâmico auxiliar para a busca desse ótimo. Vale destacar que os conceitos sobre sistema dinâmico e análise de estabilidade estão detalhados no Apêndice A. Assim, seja o problema de otimização global irrestrita dado em (2.3). Seja a função objetivo limitada inferiormente, na qual exista um número finito de mínimos locais, $\hat{x}$, e que existam números reais ε e δ tais que:

$$\|\nabla f(x)\| > \varepsilon; \forall x \notin B_\delta(\hat{x}) \quad (3.21)$$

isso irá eliminar comportamentos desfavoráveis, como subespaços de mínimos e funções assintóticas (não limitadas radialmente). A ideia principal é determinar um sistema dinâmico auxiliar de maneira que seus pontos de equilíbrio correspondam aos pontos críticos do problema de minimização representado em (2.3). Seja o sistema quase-gradiente negativo:

$$\dot{x} = -\text{grad}_R f(x) = -R(x)^{-1} \nabla f(x) \quad (3.22)$$

em que $R(x)$ é um mapeamento C^∞ e definido como positivo $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Esses sistemas compartilham os mesmos pontos de equilíbrio, onde os pontos de equilíbrio podem ser classificados de acordo com os autovalores da matriz Jacobiana, assim como citado na subseção A.3 na qual apresenta em detalhe a análise de estabilidade mencionada.

Assim, o método se baseia nas seguintes etapas para achar um suposto ótimo global:

Etapa 1: Inicialmente, busca-se um ponto de mínimo local utilizando um método de descida qualquer.

Etapa 2: Em seguida, e esta é a principal questão em um problema de otimização global, deve-se buscar um novo mínimo local, ou, em termos dinâmicos, sair da região de estabilidade deste ponto de equilíbrio estável (mínimo local) para atingir a região de estabilidade de outro ponto de equilíbrio estável.

Etapa 3: Repetindo-se o procedimento sucessivamente, até que todos os mínimos locais tenham sido encontrados.

Etapa 4: A partir de todos os mínimos locais encontrados, o mínimo global pode ser diretamente determinado.

Na *Etapa 2*, para se encontrar um novo ponto de equilíbrio é primeiramente feita a busca por pontos de sela que estão na fronteira da área de atração de um ponto de equilíbrio estável (mínimo local). Essa fronteira da área de atração é caracterizada pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio tipo-1, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$, contidos na mesma, isto é:

$$\delta A(x^s) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \delta A(x^s)} W^s(\sigma_i) \quad (3.23)$$

em que $W^s(\sigma_i)$ é a variedade estável do ponto de equilíbrio σ_i .

Esse processo é parte fundamental da estratégia do método, pois permite a transição entre diferentes mínimos locais na busca do mínimo global.

O termo “ponto de equilíbrio tipo-1”, utilizado por Chiang e Chu (1996), se refere a um ponto crítico ou estacionário de um sistema dinâmico em que a dinâmica na vizinhança deste ponto é típica de uma sela. Ou seja, a matriz Jacobiana do sistema dinâmico gradiente (matriz Hessiana da função custo, que é simétrica) tem autovalores reais diferentes de zero e com sinais distintos. Para $\mathbb{R}^n$, a Jacobiana calculada nas selas têm n autovalores, dos quais m são positivos e $n - m$ são negativos, podendo ser do “tipo-1”, “tipo-2”, “tipo-3”,

etc. O número associado a cada tipo representa o número de autovalores positivos, para $\mathbb{R}^2$ haverá apenas dois autovalores, sendo um negativo e o outro positivo. Selas do tipo-1 têm apenas um autovalor positivo, resultando que sua variedade estável é uma hipersuperfície de dimensão $n - 1$, que separa o espaço $\mathbb{R}^n$ em duas regiões, cada uma contendo a região de atração de um ponto de equilíbrio estável distinto. É importante ressaltar que a sela é um ponto de equilíbrio instável.

Nessa etapa não é necessário encontrar todos os pontos de equilíbrio tipo-1 na fronteira da região de estabilidade, mas sim aqueles que possuem uma variedade instável que intersecta a região de estabilidade de dois pontos de equilíbrio distintos, também chamados de pontos de decomposição x^d . No entanto, quanto maior o número de pontos encontrados, melhor o desempenho do método, pois aumenta a chance desses pontos pertencerem às fronteiras de atração de mínimos locais distintos e ainda não encontrados em etapas anteriores.

Os pontos de decomposição são encontrados por meio do método do gradiente refletido, proposto em Jonger et al. (1983). O método do gradiente refletido transforma os pontos de decomposição em pontos de equilíbrio estáveis, possibilitando a utilização de métodos de descida convencionais para encontrá-los.

Se para um ponto de equilíbrio estável x , $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$ e $v_1, v_2, \dots, v_n(x)$ são os autovalores e os autovetores associados da matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$, então $P_j(x) = v_j(x)v_j^T(x)$ para $j = 1, 2, \dots, n$ são matrizes de projeção ortogonal no autoespaço associadas a $\lambda_j(x)$ conforme o teorema da decomposição espectral (NOBEL, 1987).

A matriz Hessiana pode ser decomposta na soma direta de tais matrizes:

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) P_j(x) \quad (3.24)$$

em que $P_j(x)$ é a matriz de projeção associada ao autovetor $v_j(x)$. O método do gradiente refletido modifica os autovalores da Hessiana, refletindo os autovalores negativos para tornar todos os autovalores positivos, transformando pontos de decomposição em pontos de equilíbrio estáveis. Essa transformação é feita por meio da aplicação de operadores de reflexão parciais em cada autoespaço associado a um autovalor negativo.

O método do gradiente refletido, portanto, é utilizado para transformar os pontos de decomposição em pontos de equilíbrio estáveis, permitindo que métodos de descida convencionais, como gradiente, sejam aplicados para encontrá-los. Esse processo é fundamental para o método proposto por Chiang e Chu (1996) na *Etapa 2*, em que se busca a transição entre diferentes mínimos locais na busca do mínimo global.

Define-se então a matriz:

$$M_k(x) = \sum_{j=1}^k P_j(x) - \sum_{j=k+1}^n P_j(x) \quad (3.25)$$

e o sistema gradiente refletido de ordem k :

$$\dot{x} = F_k(x) = M_k(x) \nabla f(x) \quad (3.26)$$

Constata-se que, se $k = 0$, $F_0(x) = -\nabla f(x)$ estabelece um sistema dinâmico cujos pontos de equilíbrio estáveis correspondem aos mínimos locais do problema representado em (2.2a)-(2.2c). Já se $k = n$, $F_n(x) = \nabla f(x)$ estabelece um sistema dinâmico cujos pontos de equilíbrio estáveis correspondem aos máximos locais do problema citado.

Como explicado no Apêndice A para determinação da estabilidade de um sistema, é calculada a matriz jacobiana, composta por suas derivadas parciais. Ao calcular os autovalores da matriz jacobiana, a multiplicidade dos autovalores é fundamental, pois fornece informações sobre quantas vezes um autovalor específico é uma solução da equação característica e, portanto, quantos autovetores linearmente independentes estão associados a esse autovalor, determinando a natureza das soluções em torno de um ponto de equilíbrio. Assim, resumidamente, assume-se que todos os valores próprios tiverem parte real negativa (ou zero), o sistema será estável; caso contrário, o sistema é instável.

Além disso, pelas propriedades da decomposição ortogonal, a jacobiana do campo vetorial gradiente refletido de ordem k calculada em $x = \tilde{x}$ pode ser escrita como:

$$\nabla F_k(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(\tilde{x}) P_j(\tilde{x}) - \sum_{j=k+1}^n \lambda_j(\tilde{x}) P_j(\tilde{x}) \quad (3.27)$$

Essa expressão reflete a decomposição espectral da matriz jacobiana em termos das matrizes de projeção associadas aos autoespaços da Hessiana de $f(x)$ em x . Isso é fundamental para analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico associado.

Assim, por analogia com a decomposição, os autovalores da jacobiana do campo vetorial gradiente refletido de ordem k são:

$$\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x), -\lambda_{k+1}(x), \dots, -\lambda_n(x) \quad (3.28)$$

De fato, a aplicação da reflexão parcial inverte o sinal dos $n - k$ maiores autovalores da matriz hessiana $\nabla^2 f(x)$. Como os pontos de decomposição são pontos de equilíbrio tipo-1, com a Hessiana tendo um autovalor positivo e os demais sendo negativos, a reflexão parcial com $k = 1$ é aplicada ao campo vetorial $\nabla f(x)$. Em síntese, todas as trajetórias do sistema $\dot{x} = F_1(x) = M_1(x) \nabla f(x)$ iniciadas nas vizinhanças de um mínimo local do

sistema dinâmico original tenderão aos pontos de equilíbrio tipo-1 do sistema dinâmico quase-gradiente negativo.

Ainda na *Etapa 2*, para buscar novos pontos de mínimo local, através do ponto de selas, é necessário aplicar um método de descida. O sistema dinâmico quase-gradiente negativo pode ser aplicado, com condições iniciais em dois pontos vizinhos do candidato a ponto de decomposição, em direções opostas segundo o autovetor instável calculado neste ponto. O algoritmo é repetido até encontrar vários pontos de equilíbrio de interesse.

Em relação à *Etapa 3* e *4*, os autores sugerem que todos os mínimos locais devem ser encontrados para determinar diretamente o mínimo global. No entanto, eles não fornecem indicações claras de como isso deve ser feito, pois não há garantia de que todos os mínimos locais serão encontrados, e a busca de pontos de decomposição também não é detalhada para cobrir todos os casos possíveis. Esses aspectos podem representar desafios práticos na aplicação do método proposto.

3.6 Método proposto por Chiang et al. (2022) para problemas de otimização com restrição de igualdade

Em 2022, Chiang et al. apresentaram uma melhoria do método proposto por Chiang e Chu (1996). O método aprimorado possui dois principais componentes: o método da trajetória unificada (TJU) e o método TRUST-TECH, os quais são utilizados para calcular um conjunto de múltiplas soluções ótimas locais de um problema de otimização não linear com restrição de igualdade. A metodologia proposta é dividida em duas etapas, a saber:

Etapa 1: O algoritmo inicia buscando uma solução ótima local em toda a região. Para realizar isso, implementa-se numericamente um procedimento de três estágios, semelhante ao realizado em Chiang e Chu (1996). Esses três estágios são projetados para encontrar um ponto de equilíbrio estável do sistema de gradiente lagrangiano aumentado.

Etapa 2: Após encontrar o ponto de equilíbrio estável na etapa anterior, o algoritmo passa para a próxima fase. Nesta etapa, é necessário calcular um conjunto de soluções ótimas locais que estejam próximas ao ponto identificado anteriormente. Para alcançar esse objetivo, recorre-se à metodologia TRUST-TECH, a qual é utilizada para orientar a busca para longe de uma solução ótima já calculada, possibilitando a continuação da busca determinística por soluções vizinhas.

Na *Etapa 1*, é proposta uma busca por pontos de equilíbrio estáveis na região de estabilidade do sistema gradiente lagrangiano aumentado. Essa abordagem é escolhida

devido à correspondência biunívoca entre as soluções ótimas locais do problema e os pontos de equilíbrio estáveis do sistema gradiente lagrangiano aumentado.

Essa busca, realizada na *Etapa 1*, é fundamentada no método da trajetória unificada de três estágios. Assim, o *Estágio 1* do TJU requer a construção de um sistema dinâmico, como um sistema gradiente lagrangiano aumentado. Para a função objetivo apresentada em (3.29), a resolução utiliza a formulação exibida em (3.30), em que $\mathcal{F}(z; c)$ representa a função Lagrangiana aumentada.

$$\min f(x)$$

$$\text{sujeito } h(x) = 0 \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.29)$$

$$\min_z \mathcal{F}(z; c) = \mathcal{F}(x, \lambda; c)$$

$$\text{para } z = [x, \lambda] \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (3.30)$$

Portanto, a partir desse ponto, localizado dentro ou fora da região viável do problema de otimização, é construído um sistema dinâmico para o problema. Isso é feito de maneira que as soluções ótimas locais a serem encontradas sejam mapeadas e convergidas precisamente para uma região de estabilidade.

No *Estágio 2*, é implementado o método pseudo-transiente por n iterações, buscando uma solução ótima local próxima. De acordo com os autores, em comparação com o método da trajetória unificada (TJU), o método pseudo-transiente é mais eficiente em termos de tempo, embora seja menos preciso do que um *solver* local. Portanto, o método pseudo-transiente é usado como um passo intermediário para gerar eficientemente uma estimativa inicial para o *solver* local (*Estágio 3*) sem consumir tanto tempo. O *Estágio 2* emprega o esquema pseudo-transitório apresentado na Equação (3.31).

$$z^{k+1} = z^k - (\delta_k^{-1} V + \nabla F(z^k)) F(z^k) \quad (3.31)$$

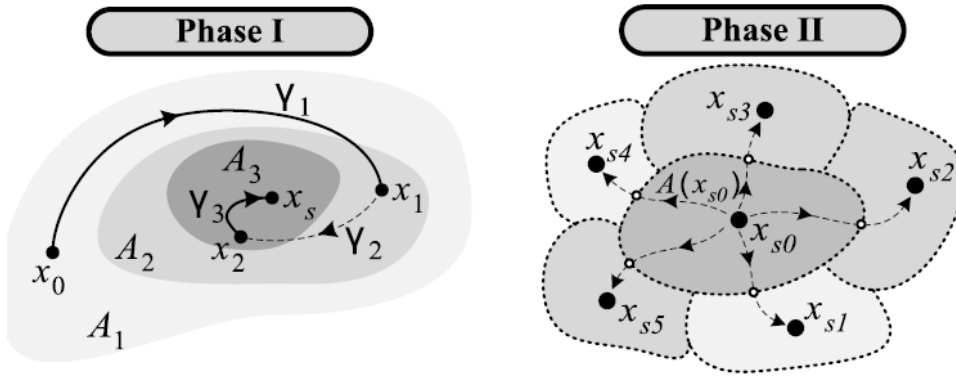
em que a sequência de $\{z^0, z^1, \dots\}$ é a integração transitória, e δ_k é o passo de tempo que pode ser determinado pelo método de relaxação de evolução comutada (SER). $F = (f_1, \dots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função suave que denota o campo de vetores.

No *Estágio 3*, o valor encontrado na última iteração anterior é utilizado para aplicar um solucionador local, buscando localizar uma solução ótima local para o problema. Segundo os autores, pode-se utilizar, por exemplo, o ponto interior, métodos de conjunto

ativo e programação quadrática sequencial. Dado que os *Estágios* 1 e 2 geram uma trajetória que leva a uma solução ótima local, o *Estágio* 3 pode ter várias vantagens se a estimativa inicial estiver próxima de uma solução.

A Figura 3.4 apresenta uma visualização dessas trajetórias, denominada *Etapa 1* (*Phase I*), e seus respectivos estágios, nomeados de Y_1 , Y_2 e Y_3 . Observa-se que, em cada um dos estágios, há uma convergência para o centro da região de estabilidade.

Figura 3.4 – Metodologia de Chiang et al. (2022) ilustrada.



Fonte: Chiang et al. (2022).

Na *Etapa 2* (*Phase II*), a metodologia envolve a busca de ótimos locais na vizinhança, utilizando o método TRUST-TECH e, posteriormente, o TJU, para todos os ótimos locais encontrados, conforme apresentado na Figura 3.4. Em outras palavras, após encontrar uma solução ótima local na *Etapa 1*, a busca proposta na *Etapa 2* se afasta dessas soluções e continua a encontrar outras soluções vizinhas, camada por camada, utilizando os seguintes passos, denominado método dinâmico de pontos de decomposição (DDP):

Passo 0: Dado uma solução ótima local na *Etapa 1*.

Passo 1: Construa uma trajetória (por exemplo, ao longo de um autovetor das soluções ótimas locais) de modo a se aproximar do limite de estabilidade dessa solução.

Passo 2: Identifique o ponto de saída no qual a trajetória construída cruza o limite de estabilidade.

Passo 3: Mova-se ao longo do limite de estabilidade, começando no ponto de saída, e calcule o ponto de decomposição que separa a solução ótima local inicial e uma solução ótima local adjacente aos limites de estabilidade que compartilham o esse ponto de decomposição.

Passo 4: Gere um ponto distante do ponto de decomposição que seja situado dentro da região de estabilidade da solução ótima local adjacente.

Passo 5: Simule a trajetória a partir do ponto gerado no *Passo 4* e siga a trajetória para convergir para uma nova solução ótima local.

A metodologia DDP proposta pelos autores direciona a busca para longe da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, ou seja, uma solução ótima local do problema de otimização original. Se a busca entrar em uma nova região de estabilidade, o método TJU de três estágios pode ser utilizado para localizar novamente o ponto de equilíbrio assintoticamente estável na nova região, resultando na descoberta de uma nova solução ótima local para o problema de otimização.

Os autores reconhecem que esse procedimento pode levar a uma busca sistemática que pode repetidamente convergir para o mesmo ótimo local já encontrado. No entanto, essa abordagem também oferece a vantagem de encontrar diferentes pontos de mínimos locais e, potencialmente, o ótimo global em problemas mais desafiadores.

É importante notar que, de acordo com os autores, a metodologia DDP é aplicável a quase todos os sistemas dinâmicos continuamente diferenciáveis, tornando-a versátil para diferentes problemas de otimização. No entanto, eles observam que essa abordagem não é adequada para problemas com restrições de desigualdade e funções não diferenciáveis, o que é o caso do PDE-PV.

3.6.1 Método TRUST-TECH

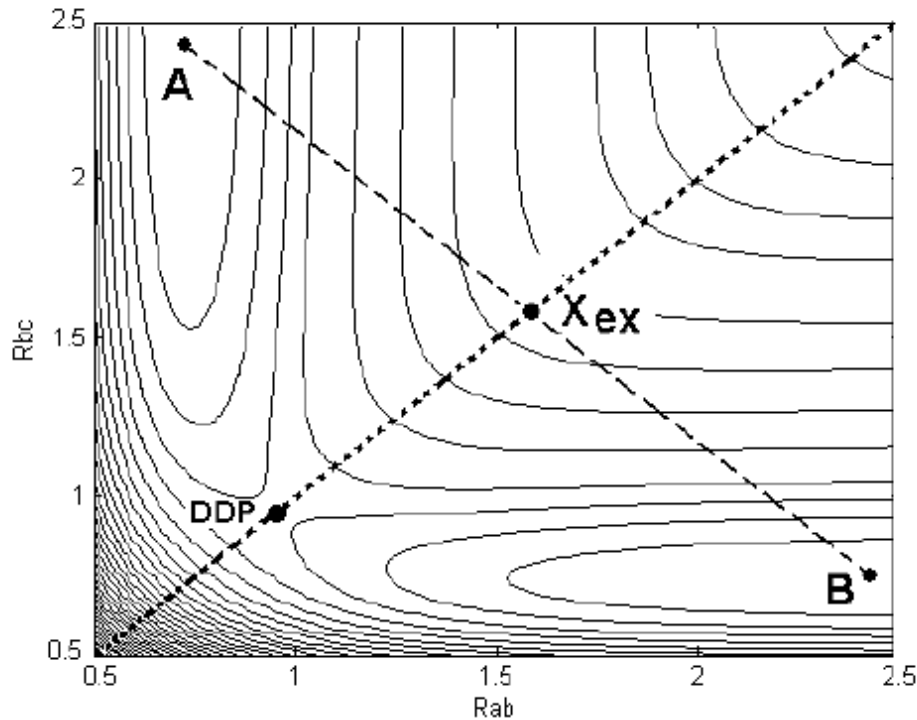
O método TRUST-TECH (*TRransformation Under STabilityre Taining Equilibria CHaracterization*) é destacado por sua capacidade de obter soluções ótimas locais vizinhas de maneira determinística. De acordo com Karrem (2007), esse método não apenas assegura que um novo mínimo local obtido difira do original, mas também garante que nenhuma solução em uma determinada direção será perdida. Essa característica faz com que o TRUST-TECH seja mais confiável quando comparado a abordagens estocásticas que dependem de movimentos aleatórios para explorar novas soluções.

Embora Chiang et al. (2022) não forneçam uma explicação detalhada do funcionamento do TRUST-TECH, Karrem (2007) apresenta algumas soluções para problemas, como o Meller-Brown, utilizando esse método baseado no limite de estabilidade. Assim, no início do método, propõe-se a convergência da função não linear a ser solucionada para sua correspondente no sistema dinâmico. Posteriormente, o algoritmo segue as seguintes etapas:

Na *Etapa 1*, ocorre a Inicialização da direção de busca. Isso é feito estipulando dois pontos de mínimo local quaisquer, referenciados como A e B. A direção de busca é então definida pelo vetor que une esses dois pontos, sendo este o vetor de inicialização para a busca de novos pontos.

Na *Etapa 2*, o objetivo é Localizar o ponto de saída (X_{ex}). Ao longo do vetor de direção AB, a função é avaliada em diferentes intervalos de passo. Como o vetor está entre dois mínimos locais iniciais (A e B), o valor da função aumentará monotonicamente e depois diminuirá até atingir o outro mínimo local (B). O ponto onde o valor da função atinge seu pico é chamado de ponto de saída. A Figura 3.5 mostra a trajetória indicada nesse processo.

Figura 3.5 – Gráfico de contorno apresentado por Karrem (2007). Os pontos A e B são os dois mínimos locais e DDP é o ponto de decomposição dinâmico a ser calculado. A direção de busca é a direção do vetor que une AB. O ponto de saída (X_{ex}) é obtido encontrando o pico do valor da função ao longo deste vetor. A linha pontilhada indica o limite de estabilidade e a linha tracejada indica a direção da busca.



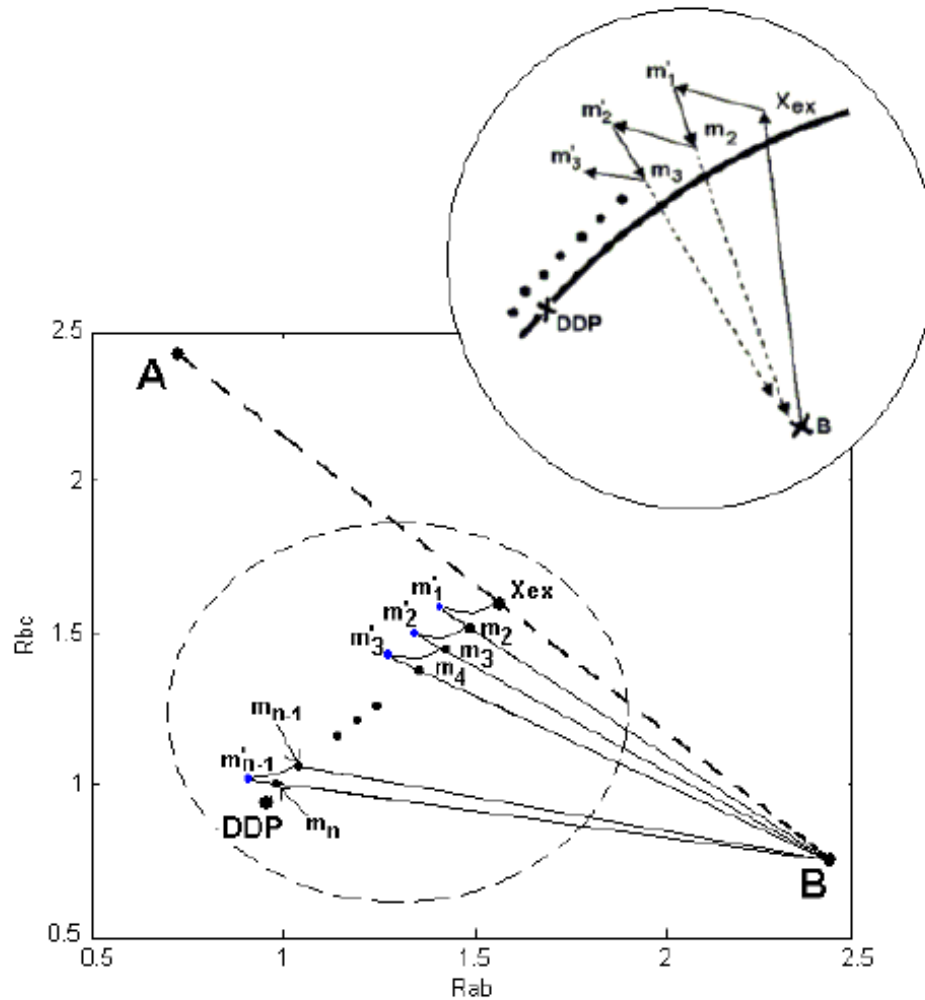
Fonte: Adaptado de Karrem (2007).

Na *Etapa 3*, o processo é de movimento ao longo do limite de estabilidade para localizar o Ponto de Gradiente Mínimo (MGP). Após identificar o ponto de saída, novos pontos podem ser encontrados verificando a estabilidade prática. Isso envolve integrar numericamente o ponto (X_{ex}) um número ' n ' de vezes para obter um novo ponto m'_1 . O valor da função varia entre m'_1 e o mínimo local é avaliado, e o valor de pico é obtido. Seja m'_1 o novo ponto de fronteira ao longo do vetor m'_1B , começando no ponto m'_1 , onde o valor atinge o pico. Este

processo é repetido várias vezes, e diversos pontos no limite de estabilidade são obtidos.

Durante essa trajetória, o valor do gradiente ao longo dos pontos de contorno é registrado, e o processo de movimentação ao longo do contorno é encerrado quando o Ponto de Gradiente Mínimo (MGP) é alcançado. Em resumo, a trajetória de integração está sendo ajustada para mover em direção ao MGP, não convergindo para um dos mínimos locais. Este é um esquema baseado no TRUST-TECH para seguir o limite de estabilidade, que é o cerne do método proposto. Essa etapa é denominada como o procedimento seguidor do limite de estabilidade. A trajetória resultante é apresentada na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Ilustração da *Etapa 3* do algoritmo. m_1 é integrado até que m'_1 seja alcançado e rastreado ao longo do vetor $m'_1 B$ para obter m_2 , e assim por diante. m_n são os ' n ' pontos de saída no limite de estabilidade.



Fonte: Adaptado de Karrem (2007).

Na *Etapa 4*, após encontrar o Ponto de Gradiente Mínimo (MGP) na etapa anterior, esse ponto (m_n) será localizado na vizinhança do Ponto de Decomposição Dinâmica (DDP). Um minimizador local é utilizado para resolver o sistema de equações não lineares, aplicando m_n como estimativa inicial, e isso resultará no DDP. Esse procedimento é essencial para a continuidade do método e a busca de novos pontos de mínimo local.

Sendo assim, o novo método proposto no trabalho de Chiang et al. (2022) mostra ser promissor. No entanto, neste trabalho não foi aplicado ao PDE-PV devido ao problema envolver restrições de igualdade, desigualdade e funções não diferenciáveis, deixando a aplicação para trabalhos futuros. Neste contexto, foi criada uma extensão apenas para o método proposto por Chiang e Chu (1996), com o objetivo de adaptá-lo para resolver tanto um problema teste da literatura quanto para problemas associados ao PDE-PV.

4 METODOLOGIA DA SOLUÇÃO PROPOSTA

Neste capítulo, será apresentada a metodologia SDAEGR proposta neste trabalho para a resolução do PDE-PV e para o problema apresentado por Tavazoei e Haeri (2006).

4.1 Método SDAEGR para o PDE-PV

O algoritmo proposto é uma extensão daquele apresentado em Chiang e Chu (1996), com estratégias visando a sua aplicação para problemas restritos e com variáveis canalizadas, tais como o PDE-PV.

Com relação ao método de Chiang e Chu (1996) considerou-se a utilização do método de Euler e um método de gradiente (de gradientes, de Newton, de gradientes refletidos, entre outros) para determinar uma solução de mínimo local. A partir da determinação dos autovetores da Hessiana nesse ponto, esses são utilizados como direções iniciais para o método do gradiente refletido iniciar a busca de pontos de sela do problema. A partir desses pontos de sela, novos mínimos locais são determinados pelo método de Euler e de gradiente.

Para transformar o PDE-PV em um problema de otimização irrestrito consideraram-se, neste trabalho, as seguintes estratégias: utilização de uma suavização hiperbólica diferenciável para representar o efeito de ponto de carregamento de válvula, implementação da barreira logarítmica para tratamento das restrições de desigualdade e utilização do balanço energético para tratar a restrição de igualdade de atendimento de demanda na função objetivo do problema. A Figura 4.1 apresenta um diagrama da relação do trabalho de Chiang e Chu (1996) e da metodologia proposta do algoritmo SDAEGR.

Em (2.2a)-(2.2c) tem-se a função objetivo de custo total, contemplando os efeitos de pontos de carregamento de válvula. A parte da função objetivo definida por funções valor absoluto senoidais, relativas ao ponto de carregamento de válvula, é não-diferenciável nesses pontos. Portanto, esta parcela da função objetivo foi tratada com o procedimento de suavização da função objetivo através da técnica de suavização hiperbólica, vista na Seção 3.4.3. A suavização, apresentada em (3.19), utiliza um parâmetro de aproximação positivo em que, à medida que este parâmetro tende a zero, a função suavizada se aproxima cada vez mais da função objetivo não-diferenciável original. Pode-se verificar isso na Figura 4.2 a qual apresenta a função $\vartheta(x, \eta)$ para diferentes valores do parâmetro de suavização η .

A função custo suavizada, e agora diferenciável, é apresentada em (4.2). De modo

Figura 4.1 – Diagrama da relação entre a metodologia proposta e o trabalho de Chiang e Chu (1996)



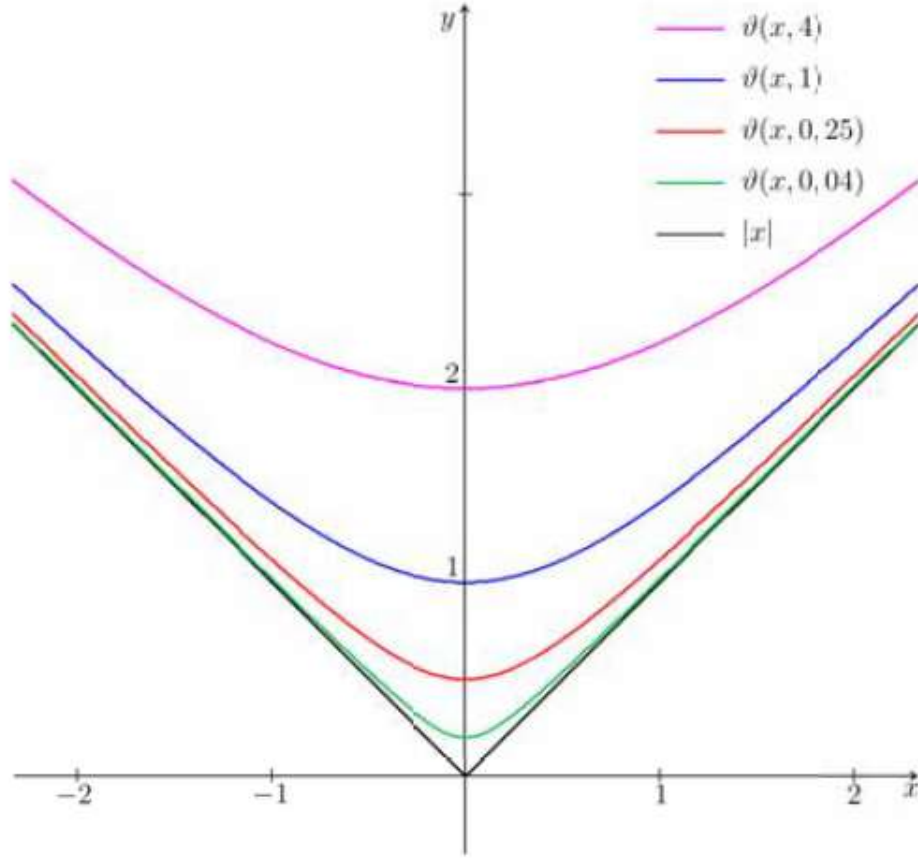
Fonte: Autor.

a evitar problemas de mau condicionamento, quando o parâmetro de suavização é muito baixo, adotou-se assim um método de atualização do valor de η . Em que a escolha do valor η tem um papel fundamental no refinamento da solução obtida pois, à medida que $\eta \rightarrow 0$, recupera-se o valor correto da função objetivo original do PDE-PV. Assim, para que não haja problemas de condicionamento devido um valor muito baixo de η durante as atualizações, adotou-se a seguinte estratégia: fixou-se um valor $\bar{\eta} > 0$, de modo que a partir do momento em que $\eta_k \leq \bar{\eta}$, o parâmetro não é mais atualizado.

Com relação à restrição de igualdade, (2.2b), relativa ao balanço de potência ativa, adotou-se a estratégia de reescrever uma das potências geradas como combinação linear da demanda e das demais potências geradas, da seguinte forma:

$$P_{G,k} = P_D - \sum_{G=k}^i P_{G,i} \quad (4.1)$$

Isso restringe as trajetórias do sistema dinâmico auxiliar ao subespaço gerado pela restrição de igualdade, eliminando a necessidade de se trabalhar com um sistema lagrangiano aumentado como proposto em Chiang et al. (2022). Além disso, para os sistemas elétricos desenvolvidos nos testes numéricos, essa estratégia reduz a complexidade, permitindo interpretações geométricas das soluções encontradas para o sistema com 3 geradores. É importante ressaltar que essa estratégia é aplicável, de maneira geral, a

Figura 4.2 – Função $\vartheta(x)$ para diferentes valores de η .

Fonte: Silva (2014).

qualquer restrição linear de balanço de potência sem problema.

Por fim, para serem atendidas as restrições de desigualdade definidas pelas inequações (2.2c), as quais são restrições operacionais cujo objetivo é garantir o funcionamento das unidades geradoras dentro de seus limites mínimo e máximo de geração, foi utilizada a estratégia de barreira logarítmica, vista na Seção 3.4.2. Esta estratégia garante que as potências geradas operem dentro de seus limites mínimos e máximos pré-estabelecidos para o problema. No contexto do problema irrestrito em questão, a função barreira logarítmica é aplicada conforme em (4.2), conforme descrito no Algoritmo 7. Este parâmetro também foi atualizado simultaneamente com a atualização do parâmetro de suavização hiperbólica η , cujas respectivas atualizações são apresentadas nas equações (3.17) e (3.20).

Assim, a restrição de igualdade foi considerada com a redução de variáveis, tais que o atendimento de demanda foi respeitado, cada uma das restrições de desigualdade foi tratada através de uma função barreira logarítmica, de modo a incorporar essa à função objetivo original, dando origem a uma função objetivo ampliada ao tratamento do problema original por um problema irrestrito equivalente, definido em (4.2).

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(P_G) = & \sum_{k \in G} [a_k P_{G,k}^2 + b_k P_{G,k} + c_k + \sqrt{(e_k \sin(f_k(P_{G,k}^{\min} - P_{G,k})))^2 + \eta}] + \\ & -\mu \sum_{k \in G} (\ln(-P_{G,k}^{\min} + P_{G,k}) + \ln(-P_{G,k} + P_{G,k}^{\max})) \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que $P_{G,n}$ é definido conforme a Equação (4.1), para o PDE-PV definido na Seção 2.2, problema (2.2a)-(2.2c).

Portanto, o problema irrestrito (4.2) tende ao problema original (2.2a)-(2.2c) quando η e μ tende a zero. Note que, na resolução desse problema, os pontos de solução encontrados estarão sempre no interior da região factível do problema ao longo das iterações, devido à utilização do método de barreira logarítmica no tratamento das restrições de desigualdades. Assim, o método proposto neste trabalho para a resolução do PDE-PV, com a estratégia de barreira logarítmica, operou com a determinação de pontos interiores à região viável desse problema, podendo então ser considerado um método de pontos interiores.

Além disso, nas etapas de descida para os pontos de mínimo do problema foi utilizado o método de Euler simples, sendo um método numérico de resolução de equações diferenciais ordinárias, que será utilizado na resolução numérica de Equações (3.22) aplicando-o à Equação definida (3.21). Na etapa de subida, para o ponto de decomposição, foi utilizado o método do gradiente refletido com a adaptação de busca de novos pontos de selas em direção aos autovetores, definido através das Equações (3.24) a (3.28).

Assim, nessa etapa iniciou-se encontrando os autovetores (v_k) da Hessiana nos pontos de mínimos obtidos na etapa anterior. Logo após foi realizada uma perturbação na direção desses autovetores em ambos os sentidos para a obtenção das condições iniciais de busca dos pontos de sela. Portanto, para cada sentido do autovetor foi incrementado um passo $\Delta > 0$, calculando-se $2n$ novos pontos através da Equação (4.3).

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm \Delta v_k \\ k &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Logo em seguida, considerando esses novos pontos, o sistema dinâmico de gradiente refletido é integrado numericamente pelo método de Euler para determinar novos pontos de sela (possivelmente $2n$ pontos). A partir dos pontos de sela, novos pontos de mínimos são determinados, possibilitando um maior número de soluções de mínimos locais, encontrados na região viável do problema. Os passos do método proposto neste trabalho são descritos no Algoritmo 8 (pseudocódigo).

No próximo capítulo, o método SDAEGR, desenvolvido neste capítulo, será aplicado em um problema teste adaptado de Tavazoei e Haeri (2006) e em instâncias ao PDE-PV.

Algoritmo 8: Método de otimização baseado em sistemas dinâmicos - SDAEGR

- 1 Inicialize os parâmetros e o conjunto dos pontos de descida com o ponto de operação inicial. Exemplo Tabela 5.2;
 - 2 **Enquanto** *houver pontos de descida não verificados nesse conjunto* ($\aleph$) **faça:**
 - 3 Integre numericamente as EDOs do sistema gradiente (3.22), utilizando o Método de Euler, com um ponto não verificado do conjunto de descida como condição inicial, para obter um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico auxiliar e um mínimo local do PDE-PV;
 Inclua este ponto no conjunto dos pontos de mínimo, caso ele já não esteja nele;
 Nesta etapa, o parâmetro μ , é atualizado conforme (3.17), e η é recalculado através de (3.20);
 - 4 **Enquanto** *houver pontos não verificados no conjunto de mínimos* **faça:**
 - 5 Calcule a Hessiana da função custo suavizada (4.2);
 Calcule os autovetores (3.24);
 Perturbe este ponto em ambos os sentidos e em todas as direções dadas pelos autovetores calculados ($v_j(x), j = 1, \dots, n$);
 - 6 **Para** *cada um desses pontos perturbados* **faça:**
 - 7 Integre numericamente as EDOs do sistema gradiente refletido (3.26) utilizando o Método de Euler e os pontos perturbados como condição inicial até a obtenção do ponto de decomposição;
 Nesta etapa, o parâmetro μ , é atualizado conforme (3.17), e η é recalculado através de (3.20);
 - 8 A partir do ponto de sela (ponto de equilíbrio tipo-1) determine dois novos pontos obtidos na direção e ambos os sentidos do autovetor associado ao autovalor positivo da Hessiana calculada neste ponto;
 - 9 Caso algum destes dois pontos não esteja no conjunto de descida, inclua-o neste conjunto;
 - 10 **Fim-Para**
 - 11 **Fim-Enquanto;**
 - 12 **Fim-Enquanto;**
 - 13 Inspeccione todas os mínimos locais encontrados e retorne como global o que tiver menor valor da função objetivo (x^*).
-

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos pela implementação e aplicação do método desenvolvido, descrito no Algoritmo 8, para o PDE-PV e exemplo. O método foi programado em linguagem Matlab, utilizando o Matlab 2018b. A execução do programa foi realizada em um notebook com processador Intel Core i7 de 7^a geração, com 12GB de memória RAM e sistema operacional Windows 10 *Home Single Language*.

Neste trabalho o método proposto foi utilizado na resolução de problemas relativos aos PDE-PV para sistemas com 3, 6, 10, 13, 19 e 40 geradores, comparando-os com resultados divulgados na literatura, bem como em um problema multimodal clássico da literatura encontrado em Tavazoei e Haeri (2006). Para o sistema com 3 geradores e para o problema clássico uma interpretação geométrica e visualização do funcionamento do método são apresentados.

5.1 PDE-PV com 3 geradores

Os coeficientes da curva de custo, incluindo os efeitos dos pontos de carregamento de válvula, bem como os limites operacionais das unidades geradoras são apresentados na Tabela 5.1. A formulação do modelo do PDE-PV para este caso possui:

- 3 variáveis;
- 1 restrição de igualdade;
- 6 restrições de desigualdade.

Os dados (coeficientes) deste caso foram extraídos de Sinha et al. (2003) e são apresentados na Tabela 5.1:

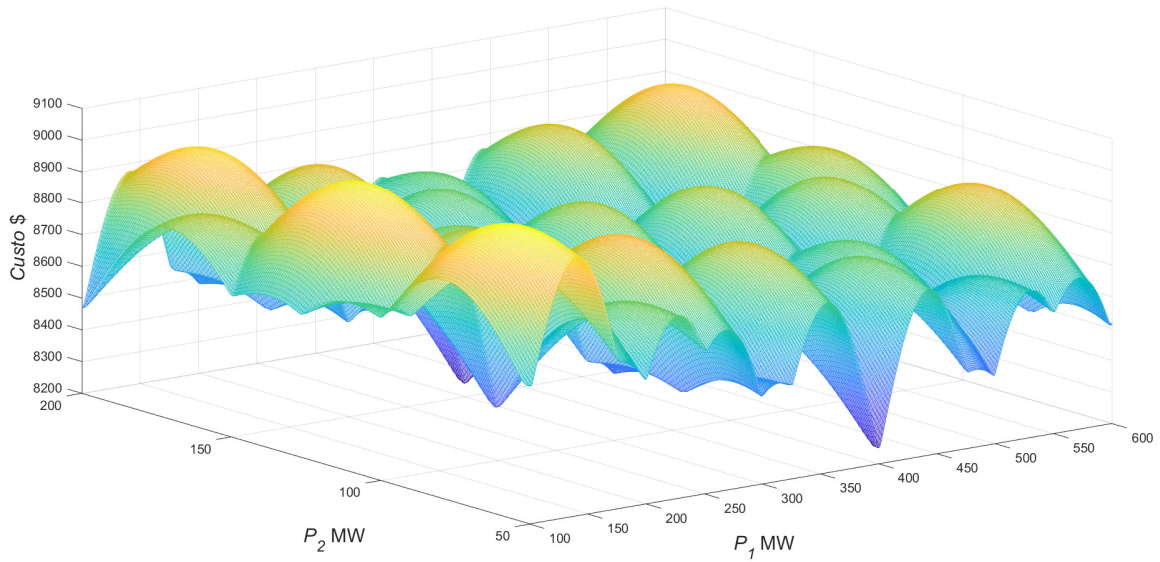
Tabela 5.1 – Características do sistema - PDE-PV com 3 geradores

Ger.	$P_{G,k}^{min}$ [MW]	$P_{G,k}^{max}$ [MW]	a_k [\$/MW ²]	b_k [\$/MW]	c_k [\$]	e_k [\$]	f_k [1/MW]
1	100	600	0,001562	7,92	561	300	0,0315
2	50	200	0,00482	7,97	78	1550	0,0630
3	100	400	0,001940	7,85	310	200	0,0420
Demanda: $P_D = 850$ MW							

O modelo original (2.2a)-(2.2c) foi transformado em um problema de otimização irrestrita definido em (4.2). Consideraram-se as seguintes estratégias utilizadas no problema (4.2): i) a função objetivo de (2.2a)-(2.2c) foi suavizada pela estratégia de suavização

hiperbólica apresentada em (4.2); ii) foram trabalhadas somente as potências $P_{G,1}$ e $P_{G,2}$, sendo então a última potência $P_{G,3}$ tratada individualmente como o balanço de potência e é representada da seguinte forma: $P_{G,3} = P_D - P_{G,1} - P_{G,2}$; iii) as variáveis canalizadas entre as potências mínimas e máximas do problema foram tratadas através da função barreira logarítmica. Com as considerações i), ii) e iii) o problema (4.2) foi solucionado pelo método proposto. Com isso, foi possível, neste caso, visualizar a função objetivo de custo e suas curvas de nível no espaço tridimensional, apresentada na Figura 5.1, em que se considera $\eta = 10$ na função custo suavizada do modelo, para fazer sua representação gráfica.

Figura 5.1 – Gráfico da função objetivo suavizada $f(P_{G,1}, P_{G,2})$.



Fonte: Autor.

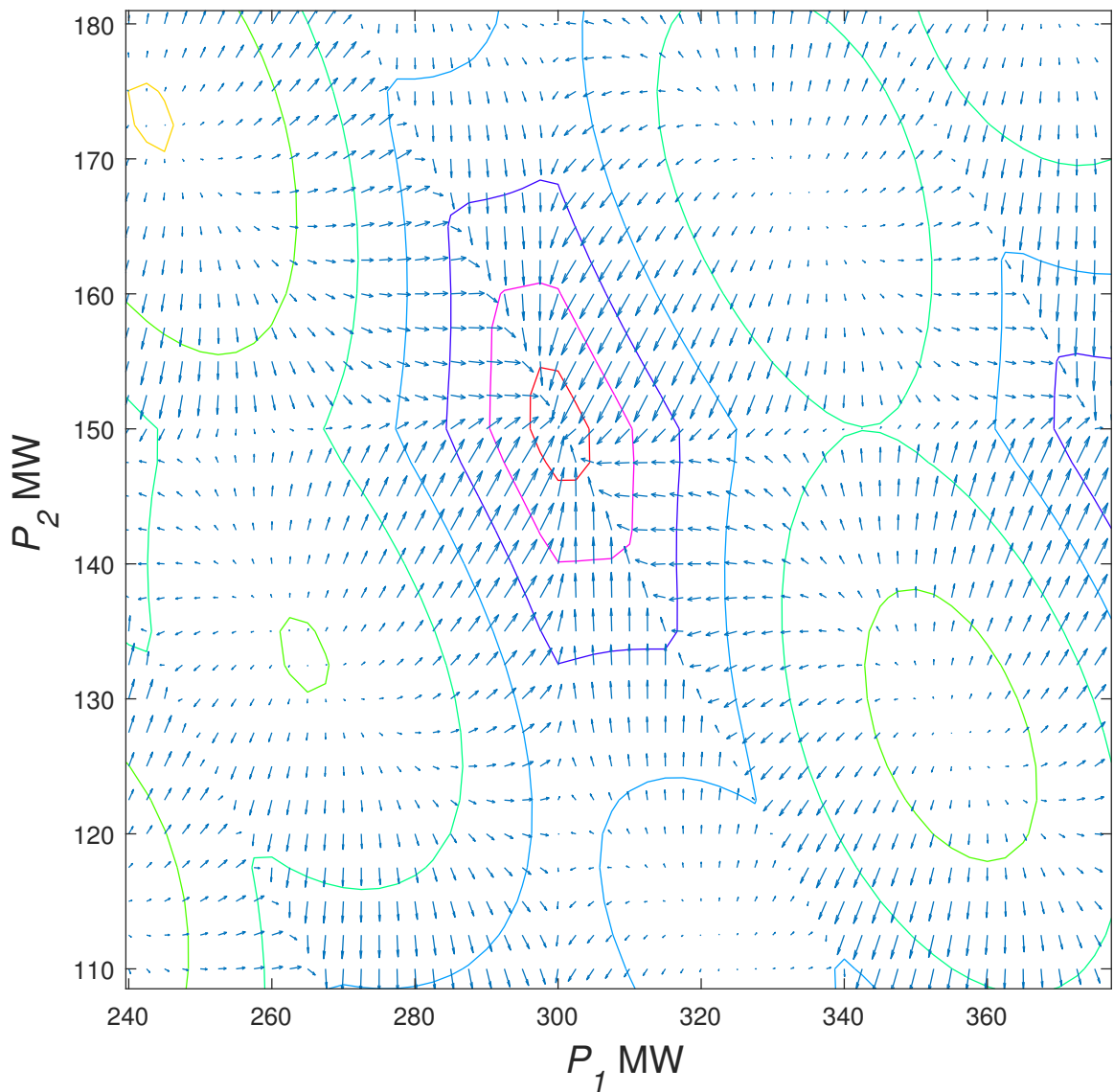
Na implementação do método proposto, as variáveis associadas às potências $P_{G,1}$ e $P_{G,2}$ do problema (4.2) tornam-se as variáveis de estado do sistema dinâmico gradiente auxiliar dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{G,1} \\ \dot{P}_{G,2} \end{bmatrix} = -\nabla f(P_{G,1}; P_{G,2}) \quad (5.1)$$

Uma análise qualitativa do comportamento dinâmico do sistema gradiente é indicado pelo campo vetorial, mostrado na Figura 5.2, representado pelas setas azuis juntamente com as curvas de nível da função custo suavizada $f(P_{G,1}; P_{G,2})$, do problema (4.2). Nota-se que no entorno dos pontos de sela existem setas que saem do ponto e setas que chegam no ponto, enquanto nos pontos de equilíbrio estáveis do sistema dinâmico (pontos de

mínimo do PDE-PV) as setas estão sempre chegando no ponto e nos pontos de equilíbrio instáveis (pontos de máximo do PDE-PV) as setas estão sempre saindo do ponto. Além disso, todos os vetores são ortogonais às curvas de nível da função objetivo, uma vez que o campo vetorial é definido pelo gradiente negativo desta função, conforme definido em (5.1). Nota-se também que as setas tendem a ter norma nula nos pontos críticos, seja de sela ou de equilíbrio. Essas análises são abordadas com mais detalhes no Apêndice A.

Figura 5.2 – Comportamento dinâmico do sistema gradiente $-\nabla f(P_{G,1}; P_{G,2})$.



Fonte: Autor.

Os parâmetros apresentados na Tabela 5.2 foram utilizados para a execução do método descrito no Algoritmo 8, para o sistema com 3 geradores.

Tabela 5.2 – Parâmetros de inicialização: 3 geradores

Parâmetro de suavização	$\eta = 10$
Fatores de redução do parâmetro de suavização	$\rho_1 = 2,5$ e $\rho_2 = 5$
Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-4}$
Parâmetro de barreira	$\mu = 20$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0,5$
Critério de parada	$cont_{max} = 1100$ $erro_{max} = 0,02$
Passo de integração	$h = 0,1$
Deslocamento na direção dos autovetores	$\Delta = 1,2$
Número máximo de pontos testados	$\aleph = 2000$
Potência inicial [MW] caso 1	$P_{G,1} = 500$; $P_{G,2} = 120$
Potência inicial [MW] caso 2	$P_{G,1} = 370$; $P_{G,2} = 80$

O valor do passo de integração utilizado na execução do método foi $h = 0,1$, o qual forneceu um bom desempenho na determinação de novos pontos de sela e de mínimos para o PDE-PV com 3 geradores. Nota-se que o passo de integração tem papel fundamental no método, pois, quanto menor o tamanho do passo escolhido, maior será a precisão na determinação desses pontos, porém com um maior esforço computacional.

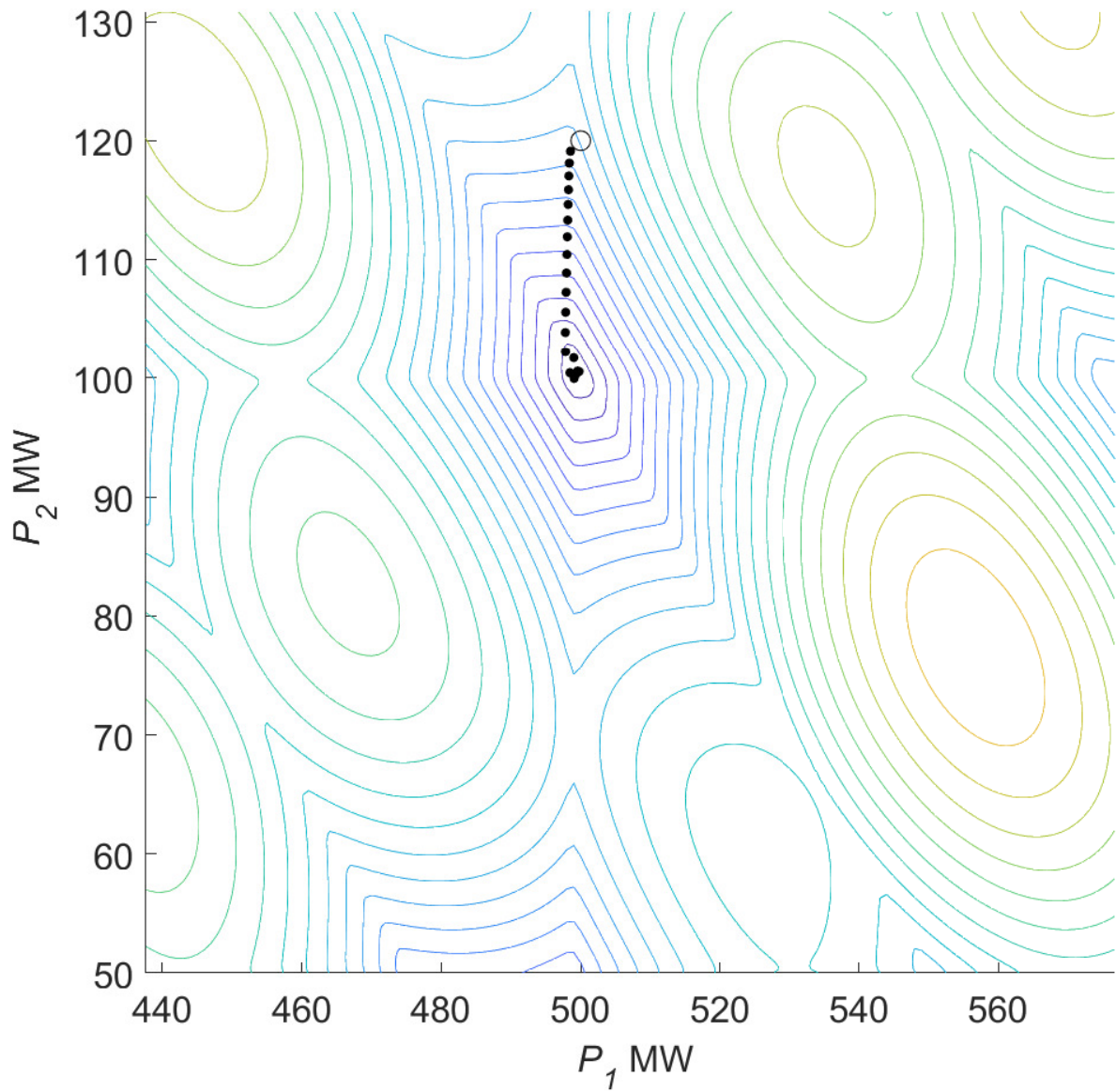
Para o parâmetro de suavização η foi adotada uma técnica de atualização em cada descida para um ponto de mínimo, de modo a trazer uma maior eficiência ao método, na qual foi citada na seção 3.4.3. Esta atualização é realizada juntamente com a atualização do parâmetro de barreira μ , e visa garantir um decréscimo mais acentuado dos parâmetros nas iterações finais. Isto porque se a atualização for realizada de modo inapropriado, o método pode apresentar instabilidades, devido à proximidade da natureza não diferenciável do problema.

Para o caso 1 foi utilizado o ponto inicial $P_{G,0} = (500; 120)$, apresentado na Figura 5.3 como o círculo preto. O sistema gradiente foi integrado numericamente e o mínimo local $(499,34; 100,34)$ foi obtido, a trajetória é indicada pelos pontos pretos na Figura 5.3. O critério de parada para esse ponto foi definido por um limitante para o erro máximo ($erro_{max}$), calculado pela norma euclidiana do gradiente, ou pelo número máximo de iterações ($cont_{max}$).

A partir desse mínimo local foram obtidas quatro condições iniciais perturbando o ponto de equilíbrio nas direções indicadas pelos autovetores da matriz $\nabla^2 f(P_{G,1}; P_{G,2})$, calculada nesse ponto de mínimo local. O sistema gradiente refletido foi integrado numericamente e foi determinado o primeiro ponto de decomposição $(457,35; 99,74)$, indicado pelo círculo vermelho, sendo sua trajetória mostrada com os pontos em vermelho na Figura 5.4.

Esse ponto de decomposição foi perturbado na direção do autovetor instável

Figura 5.3 – Trajetória do ponto inicial até um novo mínimo local.

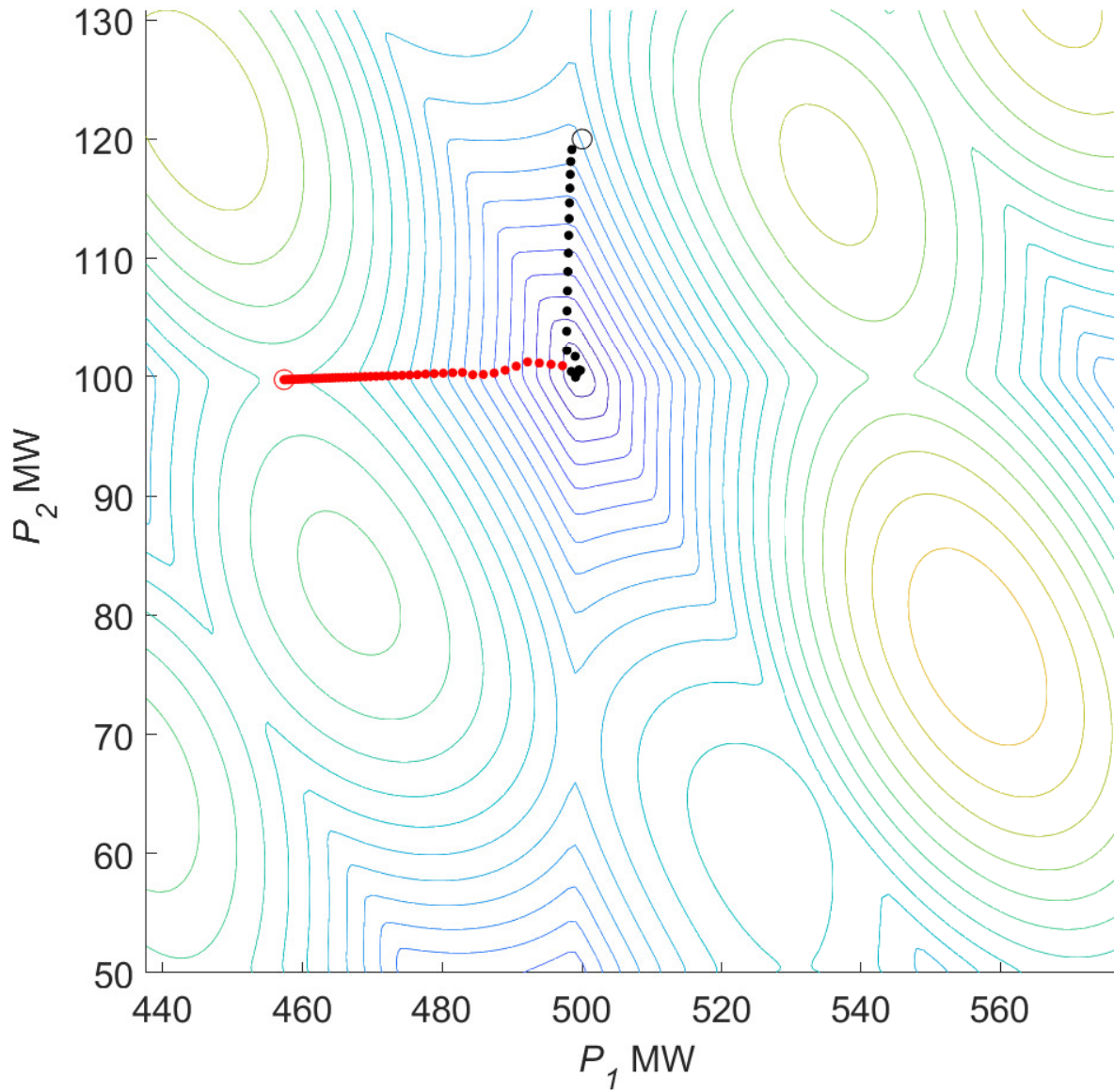


Fonte: Autor.

da matriz hessiana $\nabla^2 f(P_{G,1}; P_{G,2})$ e os pontos obtidos foram utilizados para integrar numericamente o sistema gradiente negativo até a obtenção de novos mínimos locais. Os pontos de decomposição (458, 55; 99, 76), (467, 22; 133, 59) e (534, 17; 65, 74) estão indicados pelos círculos azuis na Figura 5.5.

A seguir um novo ponto de decomposição é encontrado (535, 17; 65, 74) e, a partir desse ponto, a mesma estratégia, baseada no método do gradiente refletido, é utilizada para buscar novas soluções, obtendo assim os pontos de mínimo local (499, 34; 100, 34) e (424, 21; 100, 49) como apresentado na Figura 5.6, em que os pontos pretos indicam a

Figura 5.4 – Trajetória do mínimo local em direção ao ponto de decomposição.

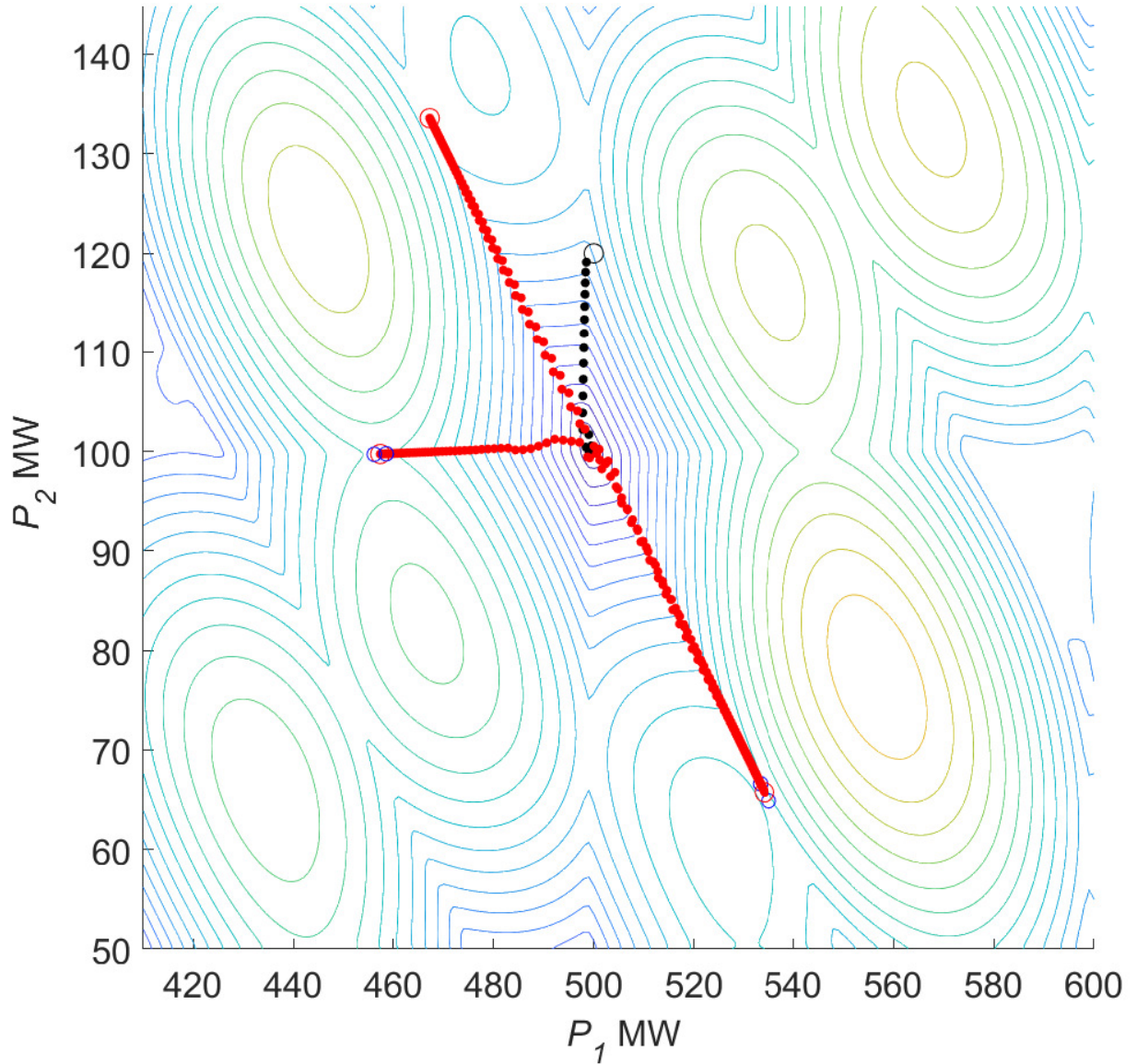


Fonte: Autor.

trajetória para o mínimo local.

Nota-se que cada ponto de decomposição encontrou o mínimo local original e mais um novo mínimo local, o que indica que a sela é de fato um ponto de decomposição que efetivamente faz parte da fronteira da região de estabilidade do mínimo original. Repetindo-se o procedimento a partir dos novos mínimos locais encontram-se todos os demais pontos de mínimo da região, os quais totalizam 42 pontos de mínimos diferentes, que são apresentados na Figura 5.7. Por inspeção direta, determina-se o melhor mínimo local dentre os pontos mínimos obtidos.

Figura 5.5 – Novos mínimos locais encontrados através do método do gradiente refletido.

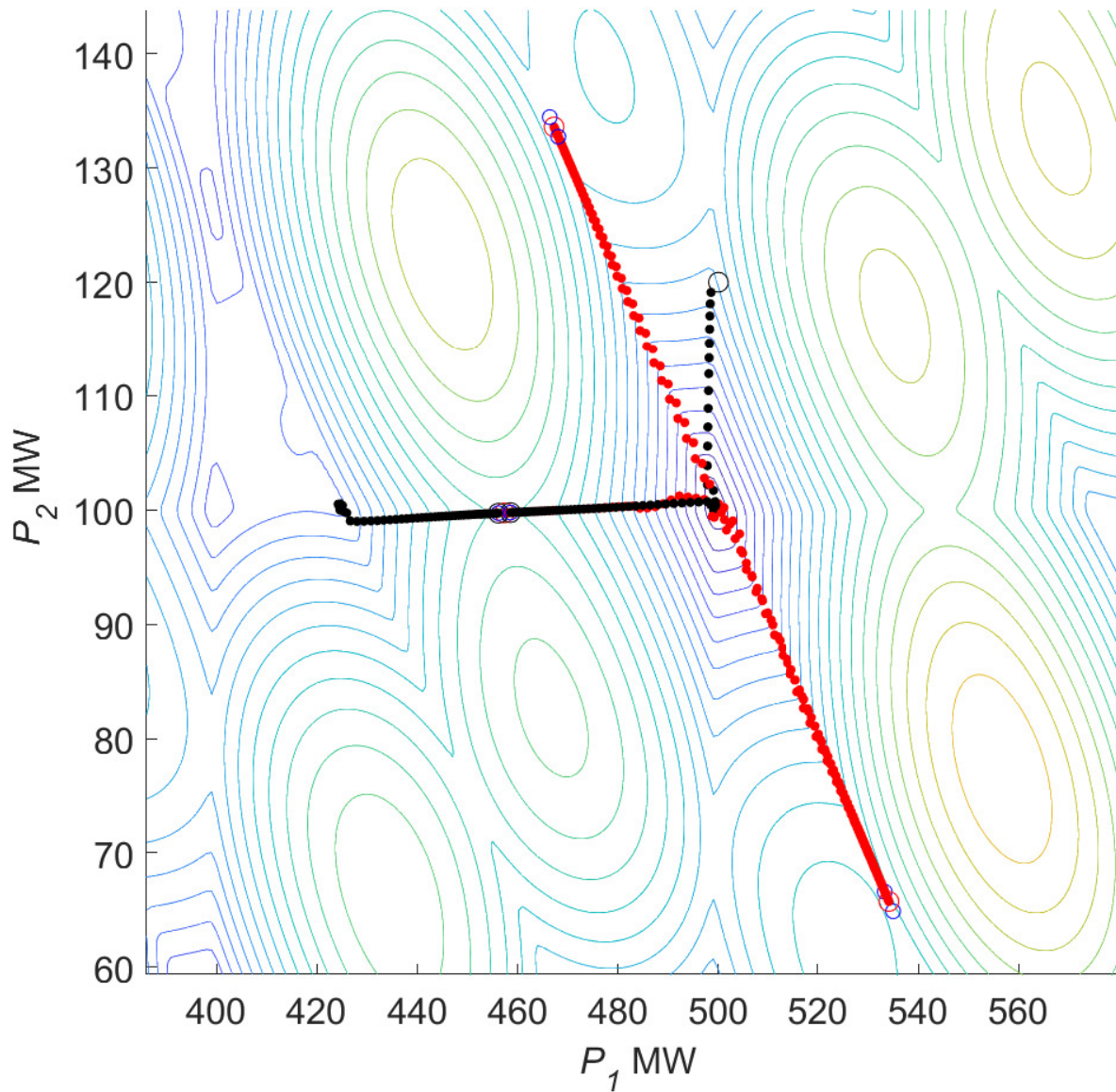


Fonte: Autor.

A partir da investigação de todos os pontos de mínimo local encontrados, foi estabelecida a melhor solução possível dentro das encontradas em todas as iterações, chegando assim a um custo de geração mínimo igual à \$ 8234,10, para potências geradas $P_{G,1} = 300,291$ MW, $P_{G,2} = 149,75$ MW e $P_{G,3} = 399,959$ MW. O tempo de processamento do algoritmo para obter essa solução foi de aproximadamente 97,59 segundos. Vale ressaltar que o foco deste trabalho não é a eficiência computacional, mas sim a obtenção do maior número possível de pontos de mínimos.

Para fins de investigação foi considerado o caso 2, em que o novo ponto inicial para

Figura 5.6 – Segundo passo do método do gradiente refletido.

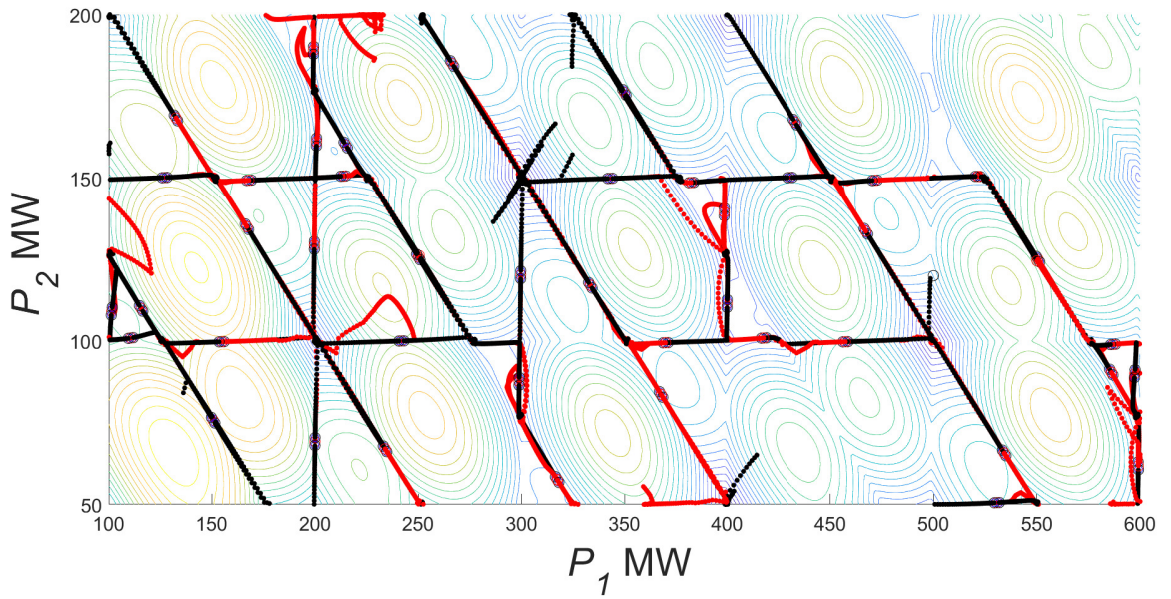


Fonte: Autor.

a execução do algoritmo computacional foi $P_{G,0} = (370; 80)$. A Figura 5.8 apresenta os resultados obtidos em que se pode notar a trajetória de subida para pontos de decomposição, indicada pelos pontos vermelhos, os pontos finais de decomposição indicados pelos círculos vermelhos, a trajetória para os pontos de mínimos indicados pelos pontos pretos e os pontos de mínimos locais indicados pelos círculos azuis. Para esse caso o tempo de processamento do algoritmo durou aproximadamente 104,55 segundos.

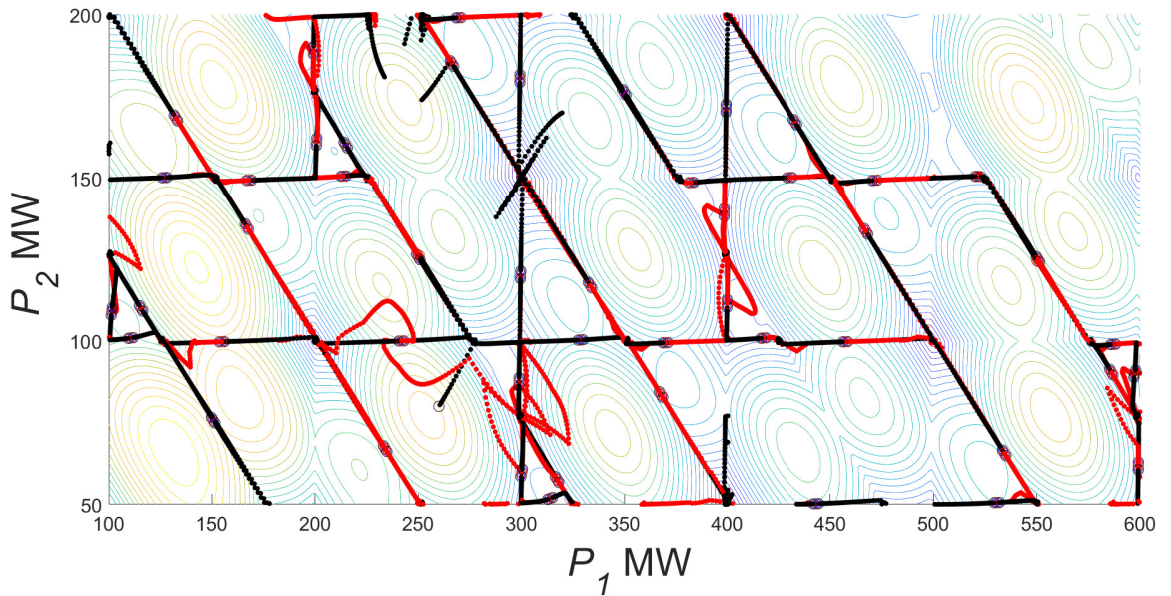
Observa-se em ambos os casos analisados, traçadas trajetórias nas fronteiras da região de estabilidade, com contornos bem comportados em relação aos pontos de máximo

Figura 5.7 – Trajetórias do sistema gradiente negativo e do sistema gradiente refletido para $P_{G,0} = (500; 120)$



Fonte: Autor.

Figura 5.8 – Trajetórias do sistema gradiente negativo e do sistema gradiente refletido para $P_{G,0} = (370; 80)$



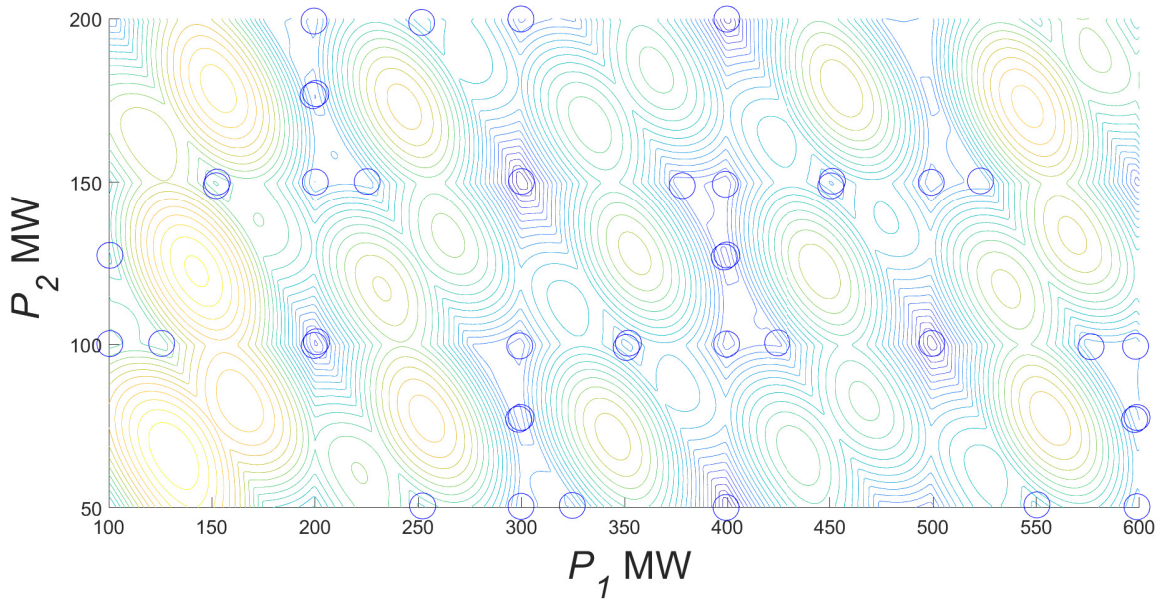
Fonte: Autor.

local visto na Figura 5.7 e 5.8. Isso foi possível utilizando o parâmetro $\Delta = 1, 2$ na Equação (4.3) para a execução do método à resolução do problema.

Os resultados obtidos para o caso 2 determinaram um valor de custo igual ao encontrado no caso 1. Com isso, é evidente que, apesar de começarem com pontos iniciais diferentes, o método convergiu para os mesmos pontos em ambas as situações. Esses pontos convergentes são destacados nas Figuras 5.7 e 5.8, demonstrando assim que o método alcançou consistentemente o possível mínimo global.

Seguindo a estratégia adotada para o método SDAEGR, conforme ilustrado nas Figuras 5.7 e 5.8, foi possível identificar todos os pontos de mínimo locais do PDE-PV. Isso foi alcançado através da resolução do problema auxiliar e suavizado definido em (4.2), na qual obteve-se 868 soluções ótimas locais, sendo o pior valor obtido para a função de custos do PDE-PV \$8757,2 e o custo intermediário encontrado igual a \$8490,7, em ambos os casos. Os resultados obtidos estão representados de forma gráfica na Figura 5.9, que mostra apenas os pontos de mínimos distintos.

Figura 5.9 – Pontos de mínimos encontrados para o PDE-PV com 3 geradores.



Fonte: Autor.

A Tabela 5.3 apresenta o despacho ótimo obtido pelo método proposto (SDAEGR) para sistema de 3 geradores, junto aos resultados apresentados em Meng et al. (2010) através de um algoritmo de otimização por enxame de partículas com inspiração quântica (QPSO) e Silva (2014) através do método Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica Modificada (PDPCBLM). Pode-se notar que os métodos possuem praticamente o mesmo valor da função objetivo, com diferenças na ordem dos décimos devido à tolerância calculada no método. Assim, todos convergiram para o mesmo ponto de operação, no qual a demanda de 850 MW foi atendida em todos os estudos avaliados. Portanto, para esse caso, pode-se concluir que essa é, de fato, a solução ótima global devido à análise gráfica.

Tabela 5.3 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 3 geradores

Método	$P_{G,1}$ [MW]	$P_{G,2}$ [MW]	$P_{G,3}$ [MW]	Função Objetivo [\$]
QPSO (MENG et al., 2010)	300,27	149,73	400	8234,07
PDPCBLM (SILVA, 2014)	300,03	149,94	399,98	8234,20
SDAEGR	300,291	149,75	399,959	8234,10

5.2 PDE-PV com 6 geradores

Para se obter os resultados com 6 geradores os dados foram extraídos de Gonçalves (2015). Na Tabela 5.4 são apresentados os coeficientes da curva de custo, incluindo os efeitos dos pontos de carregamento de válvula, bem como os limites operacionais das unidades geradoras. A formulação do modelo do PDE-PV para este caso possui:

- 6 variáveis;
- 1 restrição de igualdade;
- 12 restrições de desigualdade.

Tabela 5.4 – Características do sistema - PDE-PV com 6 geradores

Ger.	$P_{G,k}^{min}$ [MW]	$P_{G,k}^{max}$ [MW]	a_k [\$/MW ²]	b_k [\$/MW]	c_k [\$]	e_k [\$]	f_k [1/MW]
1	50	200	0,00375	2	0	120	0,073
2	20	80	0,0175	1,75	0	50	0,032
3	15	50	0,0625	1	0	30	0,051
4	10	35	0,00834	3,25	0	25	0,026
5	10	30	0,025	3	0	25	0,026
6	12	40	0,025	3	0	30	0,048
Demanda: $P_D = 283$ MW							

Da mesma forma feita para o caso de 3 geradores, foi investigada a solução obtida para 6 geradores. Neste caso, a escolha da potência inicial foi feita de modo a atender a demanda total, de 283,4 MW. Neste caso, manteve-se somente o mesmo valor do passo de integração h , já os demais parâmetros foram alterados, como apresentado na Tabela 5.5. Nos testes realizados observou-se uma sensibilidade grande na escolha de parâmetros, sendo que uma escolha inadequada dos valores de suavização, barreira e seus respectivos fatores de atualização levaram à divergência no método devido ao aumento dos números de pontos de mínimos com a dimensão do sistema.

Para este caso, foram comparados os resultados obtidos com o trabalho de Gonçalves (2015), que utilizou o método PDPCBLM e a técnica de suavização hiperbólica. Além disso, foram realizadas comparações com o trabalho de Angelo (2019), no qual foi desenvolvida um método Primal-Dual Previsor-Corretor Barreira Logarítmica (PDPCBL). Neste caso

Tabela 5.5 – Parâmetros de inicialização: 6 geradores

Parâmetro de suavização	$\eta = 75$
Fatores de redução do parâmetro de suavização	$\rho_1 = 6, 1$ e $\rho_2 = 12$
Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-8}$
Parâmetro de barreira	$\mu = 2$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0, 5$
Critério de parada	$cont_{max} = 200$ $erro_{max} = 0, 01$
Passo de integração	$h = 0, 1$
Deslocamento na direção dos autovetores	$\Delta = 2, 3$
Número máximo de pontos testados	$N = 1000$
Potência inicial [MW]	$P_{G,1} = 130; P_{G,2} = 55; P_{G,3} = 35;$ $P_{G,4} = 25; P_{G,5} = 18$

o método SDAEGR obteve o melhor valor da função objetivo com relação aos outros métodos comparados, com a demanda de 283,4 MW, apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 6 geradores

Método	Função Objetivo [\$]
PDPCBLM (GONÇALVES et al., 2015)	860,37
PDPCBL (ANGELO, 2019)	812,32
SDAEGR	811,22

Foram obtidas 1424 soluções ótimas locais através de um tempo computacional igual a 721,403 segundos, sendo o pior valor obtido para a função de custos do PDE-PV \$950,62, o valor intermediário de \$818,34 e o melhor valor obtido de \$811,22.

Os pontos de operação determinados pelo método SDAEGR são destacados na Tabela 5.7. Não foi possível compará-los com os resultados dos autores mencionados na Tabela 5.6, uma vez que estes não forneceram os pontos ótimos de operação obtidos por seus métodos. Os valores dos pontos de mínimo alcançados pelo método SDAEGR são apresentados para referência na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Ponto mínimo [MW] para método SDAEGR – PDE-PV: 6 geradores.

Método	SDAEGR
$P_{G,1}$	179,097
$P_{G,2}$	27,529
$P_{G,3}$	15,227
$P_{G,4}$	34,558
$P_{G,5}$	13,923
$P_{G,6}$	12,663

5.3 PDE-PV com 10 geradores

Para o PDE-PV com 10 geradores foram extraídos os dados de Basu (2011) e os parâmetros utilizados no método constam na Tabela 5.8. A formulação do modelo do PDE-PV para este caso possui:

- 10 variáveis;
- 1 restrição de igualdade;
- 20 restrições de desigualdade.

Tabela 5.8 – Características do sistema - PDE-PV com 10 geradores

Ger.	$P_{G,k}^{min}$ [MW]	$P_{G,k}^{max}$ [MW]	a_k [\$/MW ²]	b_k [\$/MW]	c_k [\$]	e_k [\$]	f_k [1/MW]
1	10	55	0,12951	40,5407	100,4030	33	0,0174
2	20	80	0,10908	39,5904	950,606	35	0,0178
3	47	120	0,12511	36,5104	900,705	32	0,0162
4	20	130	0,12111	39,5104	800,705	30	0,0168
5	50	160	0,15247	38,5390	756,799	30	0,0148
6	70	240	0,10587	46,1592	451,325	20	0,0163
7	60	300	0,03546	38,3055	1243,531	20	0,0152
8	70	340	0,02803	40,3978	1049,998	30	0,0128
9	135	470	0,02111	36,3178	1658,569	60	0,0136
10	150	470	0,01799	38,2704	1356,659	40	0,0141
Demanda: $P_D = 2000$ MW							

No sistema em questão, foi necessário modificar os parâmetros iniciais conforme indicado na Tabela 5.9, de acordo com os testes computacionais realizados para uma análise abrangente.

Tabela 5.9 – Parâmetros de inicialização: 10 geradores

Parâmetro de suavização	$\eta = 7$
Fatores de redução do parâmetro de suavização	$\rho_1 = 2$ e $\rho_2 = 5$
Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-2}$
Parâmetro de barreira	$\mu = 100$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0, 2$
Critério de parada	$cont_{max} = 50$ e $erro_{max} = 0, 02$
Passo de integração	$h = 0, 01$
Deslocamento na direção dos autovetores	$\Delta = 1, 2$
Número máximo de pontos testados	$\aleph = 1000$
Potência inicial [MW]	$P_{G,1} = 30; P_{G,2} = 70; P_{G,3} = 100;$ $P_{G,4} = 110; P_{G,5} = 110; P_{G,6} = 210;$ $P_{G,7} = 260; P_{G,8} = 300; P_{G,9} = 410$

O PDE-PV com 10 geradores, enfrentando uma demanda de 2000 MW, foi abordado pelo método SDAEGR, alcançando resultado e comparado ao método encontrado na literatura. Foram obtidas 1989 soluções ótimas locais em um tempo computacional igual a 781,6163 segundos, sendo o pior valor obtido para a função de custo do PDE-PV \$108879, 83, o valor intermediário de \$106278, 70 e o melhor valor igual a \$105950, 4789.

A solução obtida está detalhada na Tabela 5.10, e foi comparada com o resultado divulgado em Gonçalves (2019), através do método de Restrições Canalizadas Progressivas - Suavização Hiperbólica - Reescalamento Não-Linear com Correção de Inércia (RCP-SH-RNCH). Reiteradamente, o método SDAEGR demonstrou vantajoso na busca por soluções de melhor qualidade, quando comparado com o estudo de Gonçalves (2019). Além disso, é evidente que os resultados apresentados na Tabela 5.10 correspondem a pontos de operação distintos.

Tabela 5.10 – Pontos de mínimo [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 10 geradores.

Método	SDAEGR	RCP-SH-RNCH (GONÇALVES, 2019)
$P_{G,1}$	52,222	55
$P_{G,2}$	78,950	80
$P_{G,3}$	97,696	106,9364
$P_{G,4}$	82,298	100,5721
$P_{G,5}$	71,254	81,5009
$P_{G,6}$	134,170	83,0290
$P_{G,7}$	257,835	300
$P_{G,8}$	295,572	340
$P_{G,9}$	469,999	470
$P_{G,10}$	460,000	470
Função Objetivo [\$]	105950,4789	111493,7295

5.4 PDE-PV com 13 geradores

Para o PDE-PV com 13 geradores, os dados foram obtidos de Samed (2004), e os parâmetros empregados no método estão listados na Tabela 5.11. A formulação do modelo para este caso específico possui:

- 13 variáveis;
- 1 restrição de igualdade;
- 26 restrições de desigualdade.

Em testes computacionais realizados houve a necessidade de alteração somente do parâmetro de contagem máxima de mínimos por descida $cont_{max}$, ou seja, quantas

Tabela 5.11 – Características do sistema - PDE-PV com 13 geradores

Ger.	$P_{G,k}^{min}$ [MW]	$P_{G,k}^{max}$ [MW]	a_k [\$/MW ²]	b_k [\$/MW]	c_k [\$]	e_k [\$]	f_k [1/MW]
1	0	680	0,00028	8,1	550	300	0,035
2	0	360	0,00056	8,1	309	200	0,042
3	0	360	0,00056	8,1	307	200	0,042
4	60	180	0,00324	7,74	240	150	0,063
5	60	180	0,00324	7,74	240	150	0,063
6	60	180	0,00324	7,74	240	150	0,063
7	60	180	0,00324	7,74	240	150	0,063
8	60	180	0,00324	7,74	240	150	0,063
9	60	180	0,00324	7,74	240	150	0,063
10	40	120	0,00284	8,6	126	100	0,084
11	40	120	0,00284	8,6	126	100	0,084
12	55	120	0,00284	8,6	126	100	0,084
13	55	120	0,00284	8,6	126	100	0,084
Demanda: $P_D = 2520$ MW							

iterações máximas irá ocorrer no método de Euler, sendo equivalente a 500, com relação aos parâmetros iniciais utilizados no problema com 10 geradores e apresentado na Tabela 5.9. Já os valores de potências iniciais foram tomados como sendo o valor médio entre o mínimo e o máximo das unidades geradoras.

Considerando que os dados e a formulação para o PDE-PV utilizados neste trabalho, para o sistema com 13 geradores, são os mesmos utilizados nos trabalhos de Samed (2004) (AGHCOE - Algoritmo Genético Híbrido Co-Evolutivo), Silva (2014) e Dias (2021), é possível realizar uma comparação entre os mesmos. Os métodos utilizados em cada trabalho são, respectivamente, AGHCOE, PDPCBLM e ED-BFGS. Na Tabela 5.12 é apresentado o custo mínimo obtido por cada um destes métodos, enquanto a Tabela 5.13 mostra a melhor solução de cada um, sendo a saída de potência $P_{G,i}$ (em MW) para cada uma das unidades geradoras de energia.

Tabela 5.12 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 13 geradores.

Método	Função Objetivo [\$]
AGHCOE (SAMED, 2004)	24799,03
PDPCBLM (SILVA, 2014)	24173,81
ED-BFGS (DIAS, 2021)	24169,91
SDAEGR	24170,22

Para 13 geradores o método SDAEGR obteve 1770 soluções ótimas locais com um tempo computacional igual a 864,1588 segundos, sendo o pior valor obtido para a função de custos do PDE-PV \$26640,00 o valor intermediário de \$24433,00 e o melhor valor igual a

\$24170, 22. Para esse sistema a demanda a ser atendida é de 2520 MW na qual foi atendida por todos os métodos comparados. Nesse caso em específico, devido às complexidades inerentes a esse sistema, tais como a proximidade dos limites inferiores e superiores de potência, a solução encontrada teve um valor ligeiramente maior àquela obtida por Dias (2021). No entanto, ao analisar os valores das potências despachadas, na Tabela 5.13, observa-se que esse ponto faz parte do mesmo conjunto de mínimos encontrado por Dias (2021).

Tabela 5.13 – Pontos de mínimo [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 13 geradores.

	AGHCOE	PDPCBLM	ED-BFGS	SDAEGR
$P_{G,1}$	617,194	628,080	628,318	628,312
$P_{G,2}$	300,424	298,793	299,199	299,180
$P_{G,3}$	297,281	298,793	299,199	299,180
$P_{G,4}$	165,630	159,537	159,733	159,718
$P_{G,5}$	159,001	159,537	159,733	159,718
$P_{G,6}$	164,556	159,537	159,733	159,718
$P_{G,7}$	140,762	159,537	159,733	159,718
$P_{G,8}$	157,132	159,537	159,733	159,718
$P_{G,9}$	165,953	159,537	159,733	159,718
$P_{G,10}$	76,516	76,922	77,399	77,371
$P_{G,11}$	74,810	76,922	77,399	77,371
$P_{G,12}$	80,658	91,630	92,399	92,368
$P_{G,13}$	120,077	91,630	87,684	87,909

5.5 PDE-PV com 19 geradores

Os dados deste caso foram extraídos de Balamurugan et al. (2014). Os coeficientes da curva de custo, incluindo os efeitos dos pontos de carregamento de válvula, bem como os limites operacionais das unidades geradoras são apresentados na Tabela 5.14. A formulação do modelo do PDE-PV para este caso possui:

- 19 variáveis;
- 1 restrição de igualdade;
- 38 restrições de desigualdade.

Os parâmetros listados na Tabela 5.15 foram adotados durante a fase inicial do método, os quais foram determinados por meio de testes computacionais realizados.

Tabela 5.14 – Características do sistema - PDE-PV com 19 geradores

Ger.	$P_{G,k}^{min}$ [MW]	$P_{G,k}^{max}$ [MW]	a_k [\$/MW ²]	b_k [\$/MW]	c_k [\$]	e_k [\$]	f_k [1/MW]
1	100	300	0,0097	6,8	119	90	0,72
2	120	438	0,0055	4	90	79	0,05
3	100	250	0,0055	4	45	0	0
4	8	25	0,0025	0,85	0	0	0
5	50	63,75	0	5,28	0,891	0	0
6	150	300	0,008	3,5	110	0	0
7	50	63,75	0	5,439	21	0	0
8	100	500	0,0075	6	88	50	0,52
9	200	600	0,0085	6	55	0	0
10	15	40	0,009	5,2	90	0	0
11	50	150	0,0045	1,6	65	0	0
12	25	75	0,0025	0,85	78	58	0,02
13	50	63,75	0	2,55	49	0	0
14	0	95	0,0045	1,6	85	0	0
15	20	220	0,0065	4,7	80	92	0,75
16	15	80	0,0045	1,4	90	0	0
17	15	80	0,0025	0,85	10	0	0
18	50	230	0,0045	1,6	25	0	0
19	400	500	0,008	5,5	90	0	0
Demanda: $P_D = 2908$ MW							

Tabela 5.15 – Parâmetros de inicialização: 19 geradores

Parâmetro de suavização	$\eta = 130$
Fatores de redução do parâmetro de suavização	$\rho_1 = 2$ e $\rho_2 = 4$
Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-8}$
Parâmetro de barreira	$\mu = 10$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0,5$
Critério de parada	$cont_{max} = 305$ e $erro_{max} = 0,01$
Passo de integração	$h = 0,0001$
Deslocamento na direção dos autovetores	$\Delta = 0,0001$
Número máximo de pontos testados	$\aleph = 1000$
Potência inicial [MW]	$P_{G,1} = 170; P_{G,2} = 300; P_{G,3} = 160;$ $P_{G,4} = 9; P_{G,5} = 53; P_{G,6} = 211;$ $P_{G,7} = 51; P_{G,8} = 305; P_{G,9} = 300$ $P_{G,10} = 25; P_{G,11} = 80; P_{G,12} = 42$ $P_{G,13} = 50,5; P_{G,14} = 10; P_{G,15} = 210$ $P_{G,16} = 40; P_{G,17} = 40; P_{G,18} = 200$

No caso de 19 geradores, o método SDAEGR produziu 1463 soluções ótimas locais, com valores correspondentes para a função de custo no problema PDE-PV variando de \$22330,5 (o pior resultado) a \$19606,1 (valor intermediário), em um tempo computacional igual a 1025,6589 segundos. A Tabela 5.16 apresenta os valores da melhor solução encontrada junto das soluções publicadas na literatura, incluindo o PDPCBLM apresentado por Silva (2014) e ED-BFGS desenvolvido por Dias (2021).

Tabela 5.16 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 19 geradores.

Método	Função Objetivo [\$]
PDPCBLM (SILVA, 2014)	17551,0460
ED-BFGS (DIAS, 2021)	16982,5601
SDAEGR	16988,6

A Tabela 5.17 expõe os pontos operacionais identificados para resolver o PDE-PV no sistema de 19 geradores, apresentando os resultados de Silva (2014) e Dias (2021) em conjunto. Embora os resultados do SDAEGR não tenham superado os obtidos por Dias (2021), destaca-se uma notável semelhança entre os pontos encontrados, sugerindo que o SDAEGR alcança uma solução próxima à fronteira de atração a esse mínimo, mas não a mesma. Essa capacidade de encontrar soluções próximas às já conhecidas é fundamental, pois indica que mesmo com o aumento da dimensão do problema, o método proposto está se movendo em direção a regiões de baixo custo de forma consistente. É relevante mencionar que a demanda foi atendida neste sistema, totalizando 2908 MW.

Tabela 5.17 – Pontos de mínimo [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 19 geradores.

	PDPCBLM	ED-BFGS	SDAEGR
$P_{G,1}$	200,35634	104,3720	113,089
$P_{G,2}$	308,49096	371,2835	370,333
$P_{G,3}$	226,22324	249,8589	248,888
$P_{G,4}$	25	24,92514	24,870
$P_{G,5}$	63,75	63,71548	54,677
$P_{G,6}$	186,77848	269,7616	268,620
$P_{G,7}$	63,75	62,93011	62,499
$P_{G,8}$	299,37001	130,1541	131,307
$P_{G,9}$	200	201,1047	239,044
$P_{G,10}$	40	39,59142	38,459
$P_{G,11}$	150	149,8667	149,945
$P_{G,12}$	75	74,86636	74,973
$P_{G,13}$	63,75	63,7417	63,509
$P_{G,14}$	95	94,86275	94,729
$P_{G,15}$	120,53097	216,8842	216,871
$P_{G,16}$	80	79,6400	79,150
$P_{G,17}$	80	79,97481	76,967
$P_{G,18}$	230	229,8043	229,492
$P_{G,19}$	400	400,3321	370,873

5.6 PDE-PV com 40 geradores

Os dados deste caso foram extraídos de Sinha et al. (2003). Os coeficientes da curva de custo, incluindo os efeitos dos pontos de carregamento de válvula, bem como os limites operacionais das unidades geradoras são apresentados na Tabela 5.18. A formulação do modelo do PDE-PV para este caso possui:

- 40 variáveis;
- 1 restrição de igualdade;
- 80 restrições de desigualdade.

Tabela 5.18 – Características do sistema - PDE-PV com 40 geradores

Ger.	$P_{G,k}^{min}$ [MW]	$P_{G,k}^{max}$ [MW]	a_k [\$/MW ²]	b_k [\$/MW]	c_k [\$]	e_k [\$]	f_k [1/MW]
1	36	114	0,00690	6,73	94,705	100	0,084
2	36	114	0,00690	6,73	94,705	100	0,084
3	60	120	0,02028	7,07	309,540	100	0,084
4	80	190	0,00942	8,18	369,030	150	0,063
5	47	97	0,01140	5,35	148,890	120	0,077
6	68	140	0,01142	8,05	222,330	100	0,084
7	110	300	0,00357	8,03	287,710	200	0,042
8	135	300	0,00492	6,99	391,980	200	0,042
9	135	300	0,00573	6,60	455,760	200	0,042
10	130	300	0,00605	12,9	722,820	200	0,042
11	94	375	0,00515	12,9	635,200	200	0,042
12	94	375	0,00569	12,8	654,690	200	0,042
13	125	500	0,00421	12,5	913,400	300	0,035
14	125	500	0,00752	8,84	1760,400	300	0,035
15	125	500	0,00752	8,84	1760,400	300	0,035
16	125	500	0,00752	8,84	1760,400	300	0,035
17	220	500	0,00313	7,97	647,850	300	0,035
18	220	500	0,00313	7,97	649,690	300	0,035
19	242	550	0,00313	7,97	647,830	300	0,035
20	242	550	0,00313	7,97	647,810	300	0,035
21	254	550	0,00298	6,63	785,960	300	0,035
22	254	550	0,00298	6,63	785,960	300	0,035
23	254	550	0,00284	6,66	794,530	300	0,035
24	254	550	0,00284	6,66	794,530	300	0,035
25	254	550	0,00277	7,10	801,320	300	0,035
26	254	550	0,00277	7,10	801,320	300	0,035
27	10	150	0,52124	3,33	1055,100	120	0,077
28	10	150	0,52124	3,33	1055,100	120	0,077
29	10	150	0,52124	3,33	1055,100	120	0,077
30	47	97	0,01140	5,35	148,890	120	0,077
31	60	190	0,00160	6,43	222,920	150	0,063
32	60	190	0,00160	6,43	222,920	150	0,063
33	60	190	0,00160	6,43	222,920	150	0,063
34	90	200	0,00010	8,95	107,870	200	0,042
35	90	200	0,00010	8,62	116,580	200	0,042
36	90	200	0,00010	8,62	116,580	200	0,042
37	25	110	0,01610	5,88	307,450	80	0,098
38	25	110	0,01610	5,88	307,450	80	0,098
39	25	110	0,01610	5,88	307,450	80	0,098
40	242	550	0,00313	7,97	647,830	300	0,035
Demanda : $P_D = 10500$ MW							

Na fase inicial do método, foram utilizados os parâmetros descritos na Tabela 5.19,

os quais foram derivados de testes computacionais realizados para fins de otimização.

Tabela 5.19 – Parâmetros de inicialização: 40 geradores

Parâmetro de suavização	$\eta = 20$
Fatores de redução do parâmetro de suavização	$\rho_1 = 2$ e $\rho_2 = 8$
Limitante da atualização do parâmetro de suavização	$\bar{\eta} = 10^{-8}$
Parâmetro de barreira	$\mu = 20$
Fatores de atualização do parâmetro de barreira	$\tau = 0, 2$
Critério de parada	$cont_{max} = 20$ $erro_{max} = 0, 01$
Passo de integração	$h = 0, 01$
Deslocamento na direção dos autovetores	$\Delta = 0, 1$
Número máximo de pontos testados	$\aleph = 2000$
Potência inicial [MW]	$P_{G,1} = 100; P_{G,2} = 95; P_{G,3} = 100;$ $P_{G,4} = 150; P_{G,5} = 65; P_{G,6} = 120;$ $P_{G,7} = 280; P_{G,8} = 280; P_{G,9} = 280$ $P_{G,10} = 280; P_{G,11} = 150; P_{G,12} = 150$ $P_{G,13} = 400; P_{G,14} = 400; P_{G,15} = 400$ $P_{G,16} = 400; P_{G,17} = 450; P_{G,18} = 450$ $P_{G,19} = 450; P_{G,20} = 450; P_{G,21} = 450$ $P_{G,22} = 450; P_{G,23} = 450; P_{G,24} = 450$ $P_{G,25} = 450; P_{G,26} = 300; P_{G,27} = 90$ $P_{G,28} = 30; P_{G,29} = 30; P_{G,30} = 90$ $P_{G,31} = 80; P_{G,32} = 80; P_{G,33} = 80$ $P_{G,34} = 180; P_{G,35} = 140; P_{G,36} = 115$ $P_{G,37} = 75; P_{G,38} = 90; P_{G,39} = 80$

No contexto de 40 geradores, o método SDAEGR gerou 1837 soluções ótimas locais para o PDE-PV. Os valores correspondentes da função de custo variaram de 136443,6123 (pior resultado), 122710,5225 (resultado intermediário) até o melhor valor encontrado, em um tempo computacional igual a 3564,1112 segundos. A Tabela 5.20 exibe os valores da solução mais otimizada, juntamente com as soluções encontradas na literatura.

Tabela 5.20 – Resultados do PDE-PV para sistemas com 40 geradores.

Método	Função Objetivo [\$]
FPSOGSA (DUMAN et al., 2015)	121412,5421
RCP-SH-RNCI (GONÇALVES, 2019)	121376, 9389
ED-BFGS (DIAS, 2021)	121490,9216
SDAEGR	121438,2450

A Tabela 5.21 fornece uma visão detalhada dos pontos operacionais alcançados para resolver o PDE-PV em um sistema composto por 40 geradores. Além disso, são apresentados os resultados obtidos por Duman et al. (2015) utilizando o algoritmo híbrido

que simula a teoria da gravitação universal elaborada por Newton (FPSOGSA), bem como os resultados do trabalho de Gonçalves (2019) e Dias (2021), considerando uma demanda de 10500 MW.

Tabela 5.21 – Pontos de mínimo em [MW] para os métodos avaliados – PDE-PV: 40 geradores.

	FPSOGSA	RCP-SH-RNCI	ED-BFGS	SDAEGR
$P_{G,1}$	110,7998	110,8467	110,7998	110,5580
$P_{G,2}$	110,7998	110,8467	110,7998	110,8780
$P_{G,3}$	97,3999	97,4063	97,39978	97,5922
$P_{G,4}$	179,7331	179,7320	179,7236	179,7331
$P_{G,5}$	87,7999	87,8614	87,79993	87,7999
$P_{G,6}$	140	140	140	139,9840
$P_{G,7}$	259,5997	259,6436	259,6003	300
$P_{G,8}$	284,5997	284,6463	280,5996	284,5997
$P_{G,9}$	284,5997	284,6442	284,5996	284,5997
$P_{G,10}$	130	130	130,0002	130
$P_{G,11}$	94	94	168,7977	94
$P_{G,12}$	94	94	168,7977	94
$P_{G,13}$	214,7598	214,6849	304,5196	125
$P_{G,14}$	394,2794	394,1909	304,5196	394,2794
$P_{G,15}$	394,2794	394,1909	304,5196	394,2794
$P_{G,16}$	394,2794	394,1909	304,5196	394,2794
$P_{G,17}$	489,2794	489,2913	489,2163	489,2794
$P_{G,18}$	489,2794	489,2918	489,2163	489,2794
$P_{G,19}$	511,2794	511,2877	511,2794	511,2794
$P_{G,20}$	511,2794	511,2877	511,2794	511,2794
$P_{G,21}$	523,2794	523,3249	523,2822	523,2794
$P_{G,22}$	523,2749	523,3249	523,2822	523,2794
$P_{G,23}$	523,2794	523,3280	523,2822	523,2794
$P_{G,24}$	523,2794	523,3280	523,2822	523,2794
$P_{G,25}$	523,2794	523,3182	523,2822	523,2794
$P_{G,26}$	523,2794	523,3182	523,2822	523,2794
$P_{G,27}$	10	10	10,00004	10
$P_{G,28}$	10	10	10,00004	10
$P_{G,29}$	10	10	10,00004	10
$P_{G,30}$	87,7999	87,8615	87,79993	96,3569
$P_{G,31}$	190	190	189,9999	190
$P_{G,32}$	190	190	189,9999	190
$P_{G,33}$	190	190	189,9999	190
$P_{G,34}$	164,7998	164,8704	196,4129	200
$P_{G,35}$	200	200	196,4129	200
$P_{G,36}$	194,3973	193,9949	196,4129	200
$P_{G,37}$	110	110	109,9999	110
$P_{G,38}$	110	110	109,9999	110
$P_{G,39}$	110	110	109,9999	110
$P_{G,40}$	511,2794	511,2877	511,2794	511,22

Neste caso, o algoritmo alcançou um resultado melhor que ao de Dias (2021) mas não superou o de Gonçalves (2019). É crucial destacar que, dada a complexidade deste,

caso, devido à quantidade de mínimos elevada, acaba tornando uma busca por todos os pontos mínimos uma tarefa extremamente desafiadora, dificultando assim a localização do mínimo global.

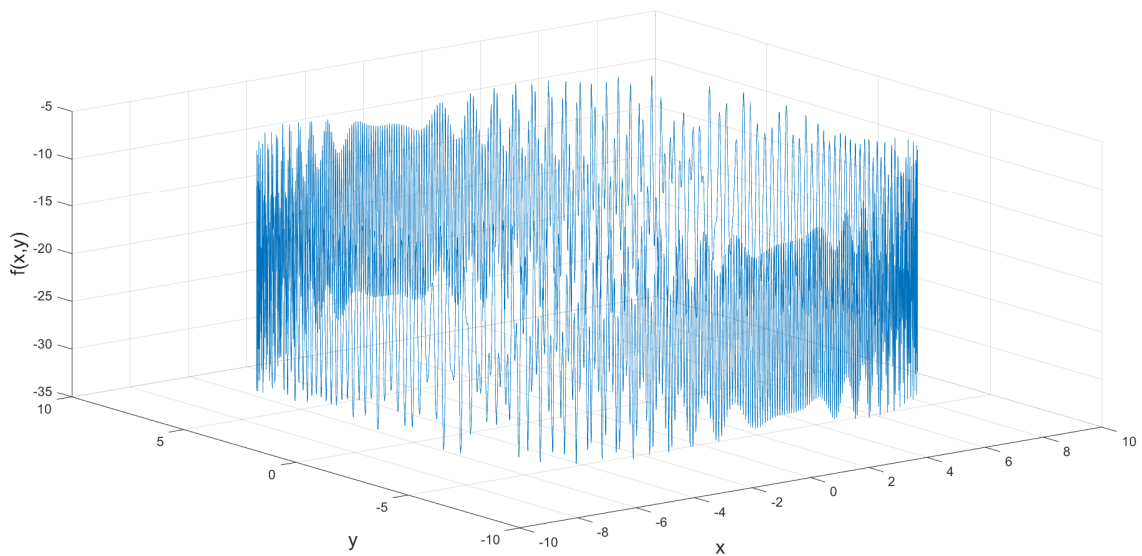
5.7 Método SDAEGR aplicado em um problema clássico multimodal

O problema (5.2) apresentado a seguir é uma representação matemática de um problema de minimização com restrições de desigualdade e variáveis canalizadas. Esse problema específico foi proposto por Kang et al. (2000) e adaptado por Tavazoei e Haeri (2006), em que os autores investigaram uma solução minimizada para esse problema.

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(x, y) &= -[x \sin(9\pi y) + y \cos(25\pi x) + 20] \\ \text{Sujeito a : } x^2 + y^2 &\leq 81 \\ x, y &\in [-10, 10] \end{aligned} \quad (5.2)$$

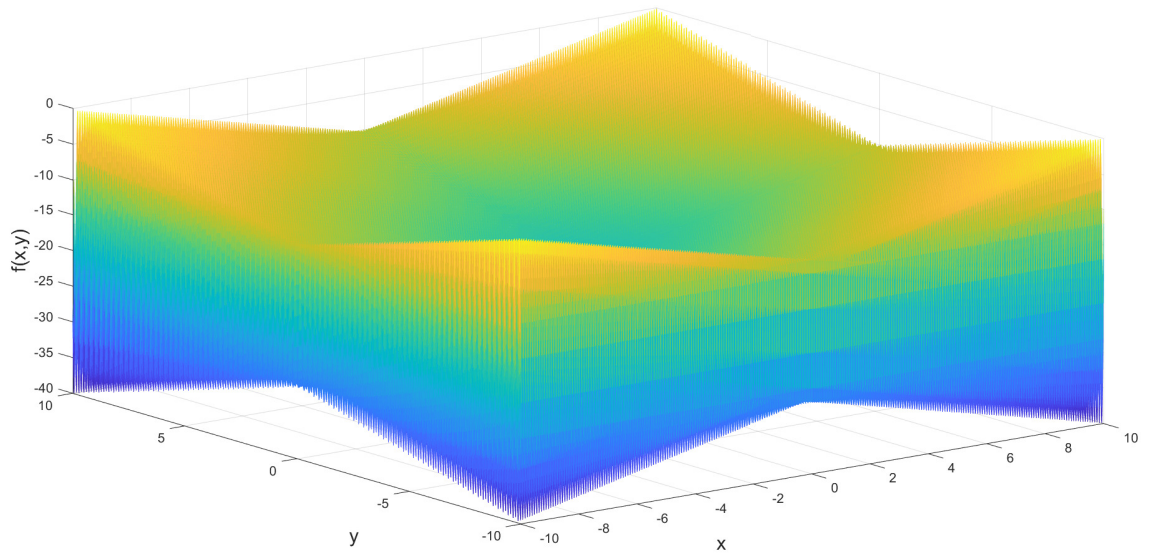
A função objetivo sobre a fronteira circular é ilustrada na Figura 5.10, exibindo milhares de mínimos locais. Por sua vez, a Figura 5.11 apresenta o gráfico associadas a este problema. A observação dessas figuras revela o comportamento oscilatório característico desse desafio de otimização, evidenciando sua alta complexidade de resolução.

Figura 5.10 – Representação gráfica do problema adaptado por Tavazoei e Haeri (2006).



Fonte: Autor.

Figura 5.11 – Gráfico do problema adaptado por Tavazoei e Haeri (2006).



Fonte: Autor.

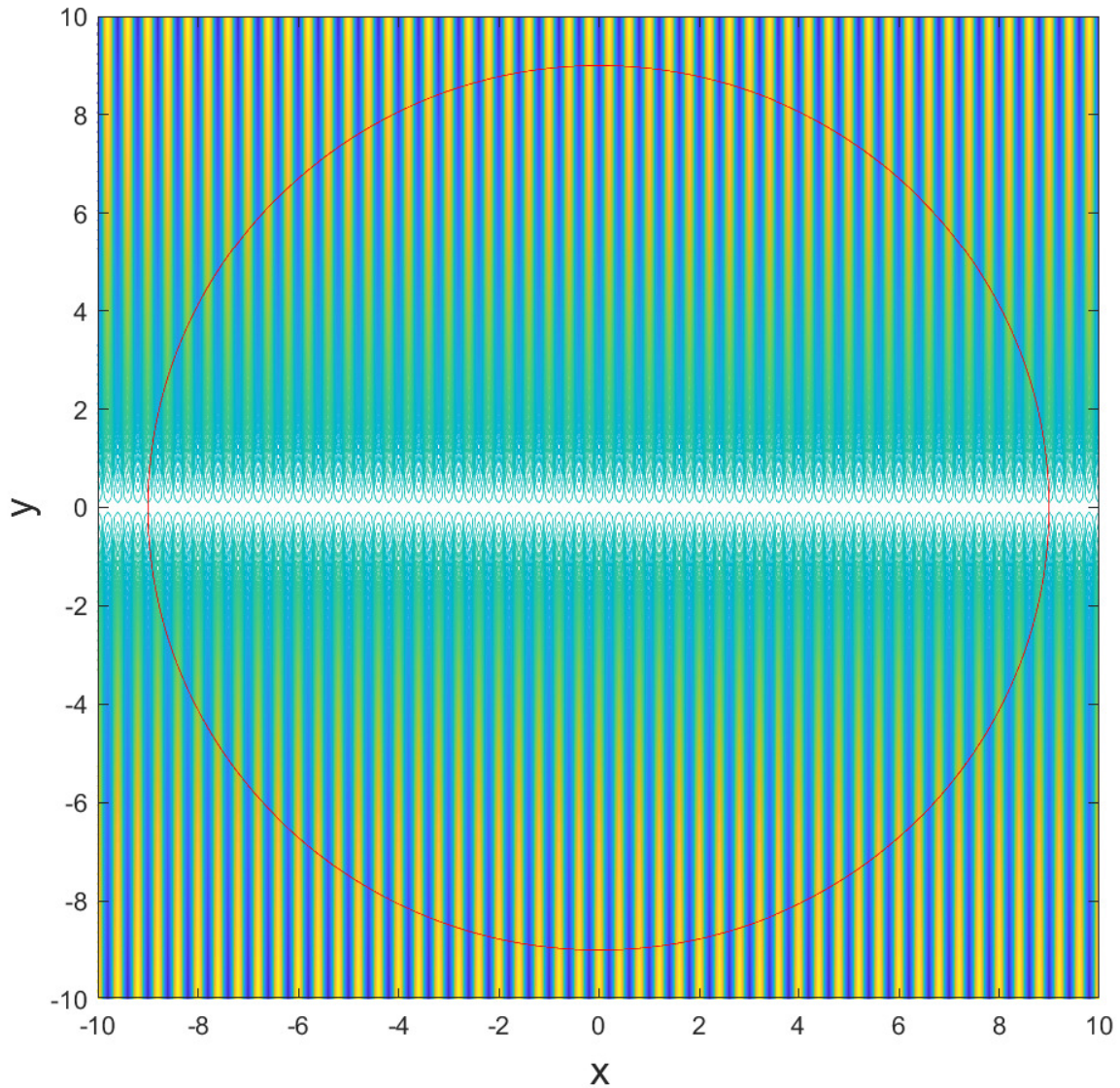
Neste trabalho, é apresentada uma abordagem destinada a enfrentar um desafio complexo, caracterizado pela presença de múltiplas soluções locais. O objetivo é avaliar a eficácia da busca por pontos de mínimo diante dessa complexidade. Para isso, uma das estratégias utilizadas no PDV-PV foi empregada, onde a restrição de desigualdade do problema (5.2) foi tratada por meio da estratégia de barreira logarítmica, conforme discutido na Seção 3.4.2. Dessa forma, o problema apresentado anteriormente foi reformulado incluindo a barreira logarítmica:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(x, y) = & -[x \sin(9\pi y) + y \cos(25\pi x) + 20] + \\ & -\mu [\ln(81 - x^2 - y^2) + \ln(-x_{\min} + x) + \ln(-x + x_{\max}) + \ln(-y_{\min} + y) + \ln(-y + y_{\max})] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Posteriormente, o método proposto (SDAEGR) é aplicado, associando inicialmente o problema (5.2) a um sistema dinâmico por meio da Equação (3.22). Na Figura 5.12, é apresentado o comportamento dinâmico do sistema gradiente, onde são identificados os pontos de equilíbrio estáveis nos mínimos locais, destacados pelas áreas azuis, e os pontos de decomposição, marcados pelas áreas em laranja.

Nos testes realizados, foram utilizados diversos tipos de calibrações dos parâmetros a fim de encontrar o melhor desempenho do método. Assim, como teste final foi definido o passo de integração do método de Euler em $h = 0,0002$, o passo nas direções dos autovetores foi configurado em $\Delta = 0,0002$, a contagem de mínimos locais encontrados foi limitado a $\aleph = 3000$, $cont_{\max} = 100$ e $erro_{\max} = 0,02$. Além disso, a cada descida ao

Figura 5.12 – Curvas de nível do problema adaptado por Tavazoei e Haeri (2006)



Fonte: Autor.

mínimo e subida ao ponto de sela, foi empregado o parâmetro de barreira μ igual a 10, sendo $\tau = 0,5$. Essas configurações desempenharam um papel fundamental na eficácia e nas soluções do método utilizado durante a resolução do problema em questão.

Utilizando os pontos iniciais $P_0(1,5789; -7,5146)$ e $(-1,5814; 7,5122)$, o sistema gradiente foi integrado numericamente, resultando em valores mínimos locais de -32,7179 e -32,5068, respectivamente. Para a primeira solução, $x^2 + y^2 = 80,8869 (< 81)$, e para a segunda solução, $x^2 + y^2 = 80,6778 (< 81)$. Os pontos de mínimo estão descritos na Tabela 5.22.

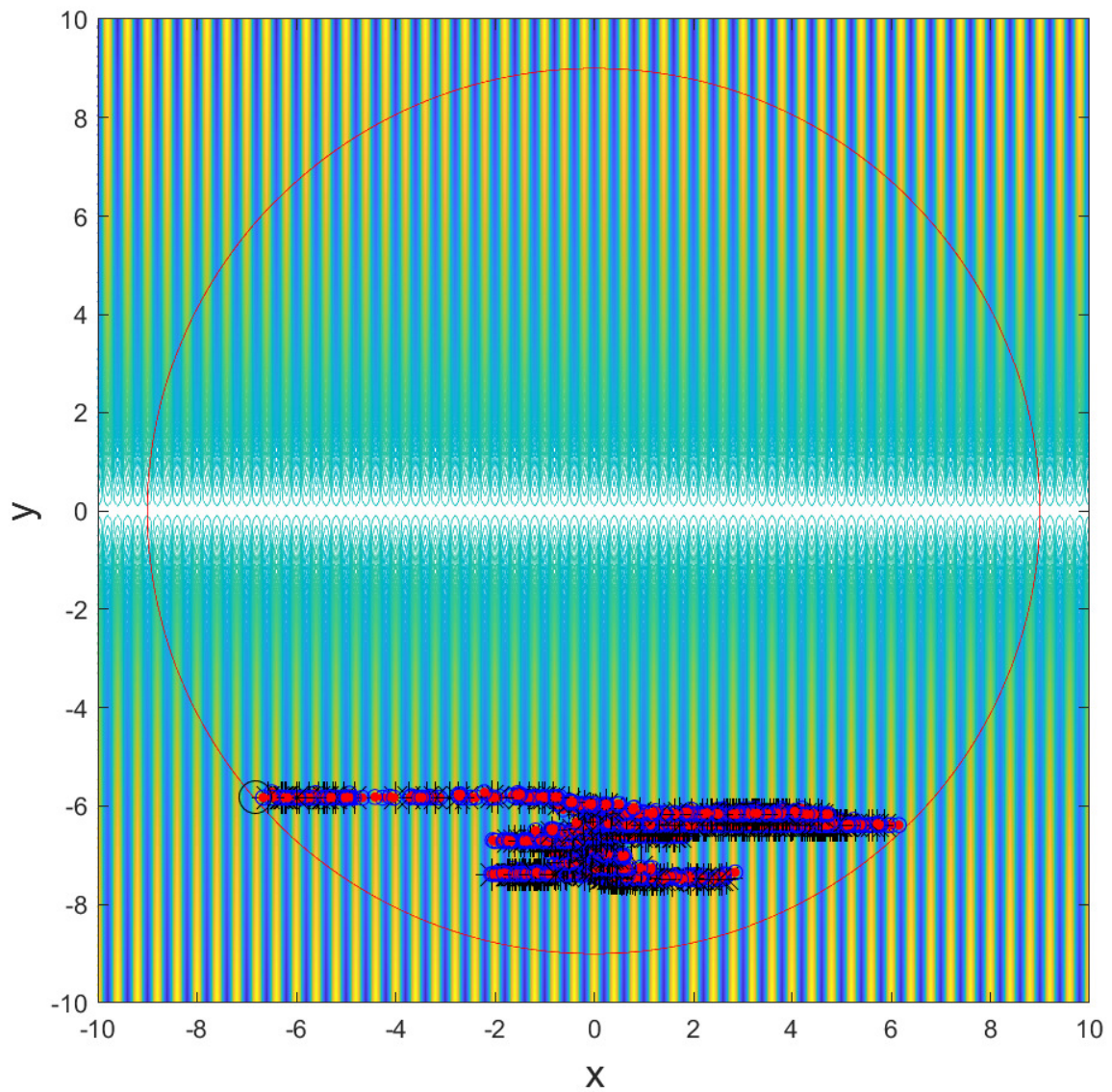
Tabela 5.22 – Resultados encontrados a partir de P_0 para o método SDAEGR

P_0	$P^*(x, y)$	Melhor solução
(1,5789; -7,5146)	(-6,4400; -6,2780)	-32,7179
(-1,5814; 7,5122)	(-6,3171; 6,3853)	-32,5068

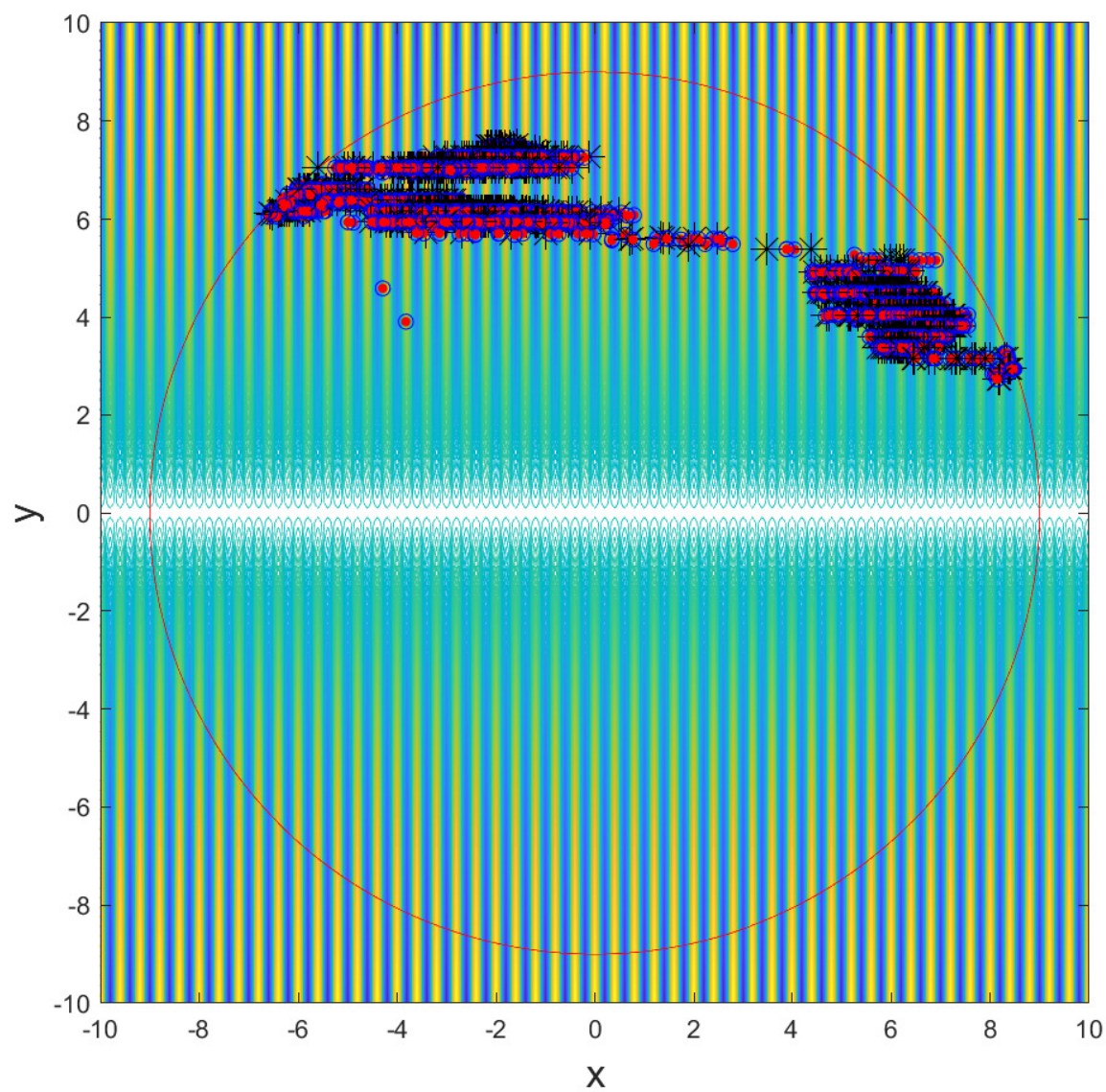
Nas Figuras 5.13 e 5.14, é possível observar a trajetória dos pontos a partir desses dois pontos iniciais P_0 . Os asteriscos pretos representam os pontos de mínimo, os pontos em vermelho indicam os pontos de sela e os círculos azuis representam os novos mínimos encontrados por meio dos pontos de sela.

Segundo o trabalho de Tavazoei e Haeri (2006) o valor de mínimo local desse problema é equivalente a -32,7179, porém os autores não indicam quais seriam os pontos de mínimo para essa solução. Para o problema de otimização em questão, o método SDAEGR conseguiu encontrar a mesma solução dos autores citados. No entanto, dada a complexidade inerente à resolução de problemas, que frequentemente apresentam mínimos e máximos locais distribuídos por uma vasta gama de regiões próximas, o método SDAEGR, concebido para explorar múltiplos pontos de ótimo local e, idealmente, alcançar o ponto de mínimo global, enfrenta desafios significativos. Embora tenha demonstrado resultados promissores, ainda há margem para aprimoramento, especialmente na resolução de problemas multimodais e na busca da solução ótima global. Nesse sentido, uma abordagem de melhoria do método pode envolver a incorporação de novas estratégias, como a inclusão do método de Euler Modificado na implementação, a adoção de métodos de gradientes mais avançados, como o *primal-dual* de pontos interiores, e a consideração das sugestões propostas por Chiang et al. (2022). Tais refinamentos têm o potencial de aprimorar o desempenho do método, tornando-o mais eficaz na resolução do problema em questão e em problemas similares.

Figura 5.13 – Trajetória para o mínimo partindo do ponto inicial $P_0(1,5789; -7,5146)$



Fonte: Autor.

Figura 5.14 – Trajetória para o mínimo partindo do ponto inicial $P_0(-1,5814; 7,5122)$ 

Fonte: Autor.

6 CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Pode-se observar diversos métodos na literatura já propostos para a resolução do PDE, sendo o PDE-PV, uma de suas variantes com maiores dificuldades para soluções a partir de métodos determinísticos. O problema de PDE-PV é modelado como um problema de otimização não-linear, não-convexo e não-diferenciável, com restrições de igualdade e desigualdade. Por tais motivos, sua resolução na literatura é usualmente feita mediante métodos heurísticos, pois, além dos métodos determinísticos encontrarem dificuldades em sua resolução devido à sua não diferenciabilidade, os mesmos, para problemas não convexos como este, tendem a encontrar ótimos locais, sem garantia de ótimo global.

Assim, neste trabalho foi proposta uma nova abordagem de solução capaz de encontrar múltiplos ótimos locais e, possivelmente, a solução ótima global do problema, nomeada SDAEGR. Esta proposta é uma extensão do método de Chiang e Chu (1996) para problemas irrestritos de otimização, e foi testada para problemas envolvendo 3, 6, 10, 13, 19 e 40 unidades geradoras, bem como em um problema multimodal apresentado por Tavazoei e Haeri (2006).

Para a aplicação do método à resolução dos problemas citados, foram empregadas diversas estratégias para aprimoramento do método. A primeira delas consistiu na aproximação da função objetivo do PDE-PV original através da suavização hiperbólica. Além disso, foi necessário tratar a restrição de igualdade relativa à equação de balanço de potência ativa. Para isso, optou-se por reescrever uma das potências geradas como combinação linear da demanda e das demais potências geradas. Outra estratégia adotada foi a utilização da barreira logarítmica para representar as restrições de desigualdade. Essa técnica permitiu operar com pontos interiores à região viável do problema, contribuindo para a busca por soluções. Essas estratégias foram fundamentais para viabilizar a resolução dos problemas e garantir resultados, especialmente considerando que o método apresentado por Chiang e Chu (1996) não apresentava uma estratégia para lidar com problemas restritos.

Por meio do sistema dinâmico auxiliar, os pontos de mínimo foram explorados, perturbando-os tanto positiva quanto negativamente, seguindo as direções indicadas pelos autovetores da matriz Hessiana da função objetivo suavizada. Este procedimento visa obter todos os pontos de sela de interesse ao problema. A identificação completa dos pontos de sela é crucial, pois possibilita encontrar múltiplos mínimos locais do problema utilizando o método de Euler. Optou-se pelo método de Euler devido à sua capacidade de oferecer uma abordagem simples para lidar com Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e para

aproximar suas soluções.

Com relação aos testes realizados, foram identificadas a pior, a intermediária e a melhor solução, e os resultados foram comparados com outras abordagens encontradas na literatura. Pode-se concluir que os resultados obtidos foram diretamente influenciados pelas características do método de integração numérica escolhido, bem como pelos seus parâmetros. Para cada problema específico, diferentes conjuntos de parâmetros foram utilizados, levando em consideração suas particularidades e complexidades. Isso envolveu a seleção de condições iniciais para iniciar o processo iterativo, para encontrar tanto pontos mínimos locais quanto pontos de sela. É importante ressaltar que, na proposta original de Chiang e Chu (1996), os autores não forneceram orientações sobre como iniciar o processo iterativo a partir desses pontos. Isso exigiu a implementação de estratégias e testes durante o desenvolvimento deste trabalho, a fim de determinar as abordagens mais eficazes para a escolha das condições iniciais nos processos de integração numérica. Além disso, é possível observar que a seleção das soluções iniciais para a execução do método influenciou a sequência das trajetórias. No entanto, mesmo com diferentes sequências de trajetórias, os mesmos pontos de mínimos locais foram encontrados para o caso de 3 geradores, indicando que o método conseguiu explorar todas as regiões para problemas de dimensões menores.

Outro ponto relevante a destacar é que, nos testes conduzidos com o PDE-PV, observou-se que, a partir dos testes de 13 geradores e conforme o sistema se expandia, aumentava a dificuldade do método em identificar todos os pontos de mínimo local. Isso leva à conclusão de que a abordagem de Ching e Chu (1996), que consiste em buscar todos os mínimos locais e, em seguida, determinar o mínimo global, necessita de um melhor aperfeiçoamento para solucionar e determinar múltiplos pontos de ótimo para sistemas com dimensões maiores. No entanto, é importante ressaltar que o método proposto, juntamente com as estratégias implementadas, tem esse objetivo, ou seja, priorizar a busca por múltiplos pontos de ótimo local.

Portanto, o método SDAEGR se difere dos métodos determinísticos encontrados na literatura e utilizados na resolução do PDE-PV, para os quais somente é possível determinar um mínimo local desse problema, mostrando-se capaz de resolver os problemas testados e apresentando-se potencial promissor em relação ao espaço de busca. Com isso, pode ser estendido e aplicado em problemas multimodais, explorando não só uma solução, mas sim várias soluções de mínimos locais em diferentes trajetórias.

Em trabalhos futuros, propõe-se a modificação do método SDAEGR, incorporando os conceitos desenvolvidos por Chiang et al. (2022), os quais introduzem o método da trajetória unificada (TJU) e o método TRUST-TECH. Além disso, visando aprimorar a eficácia do método e reduzir o tempo computacional, sugere-se a utilização de diferentes métodos de descida, como o método de Newton, para descobrir novos mínimos. Também é proposta a integração da função de Lyapunov para restringir os espaços de busca e focar

em soluções mais promissoras. Outra proposta é a utilização das estratégias *Primal-Dual*. Essas modificações têm o potencial de aperfeiçoar o desempenho e a versatilidade do método, abrindo caminho para a resolução de uma gama mais ampla de problemas e a obtenção de soluções de maior qualidade.

7 TRABALHOS DIVULGADOS E APRESENTADOS EM CONGRESSOS

MASSAMBANI, N; MARTINS, A. C. P; BALBO, A. R; NEPOMUCENO, L; SOLER, E. M. Investigação de Múltiplos Pontos de Ótimo do Problema de Despacho Econômico com Efeito de Carregamento de Pontos de Válvula Através de um Método Baseado em Sistemas Dinâmicos. CLAGTEE, Rio de Janeiro. 2022.

MASSAMBANI, N; MARTINS, A. C. P; BALBO, A. R; NEPOMUCENO, L; SOLER, E. M. Método Baseado em Sistemas Dinâmicos para a Solução do Problema de Despacho Econômico Multimodal com Representação do Efeito de Carregamento de Ponto de Válvula. Anais do IV CoBICET. Evento online, 2023.

REFERÊNCIAS

- ABIDO, M. A. Multiobjective Evolutionary Algorithms for Electric Power Dispatch Problem. IEEE transactions on power systems, vol. 10, no. 3, June, 2006.
- AHMED, T. A. et al. Solving combined economic and emission dispatch problem using the slime mould algorithm. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Aswan, Egito. 2021.
- AL-BAHRANI, L. et al. Solving the Real Power Limitations in the Dynamic Economic Dispatch of Large-Scale Thermal Power Units under the Effects of Valve-Point Loading and Ramp-Rate Limitations. Deakin University, Australia. 2021
- AL-BETAR, M. A et al. Economic load dispatch problems with valve-point loading using natural updated harmony search. Neural Computing and Applications, vol. 29, no. 10, 2018.
- ALSUMAIT, J. S.; SYKULSKI, J. K.; AL-OTHMAN, A. K. A hybrid GA-PS-SQP method to solve power system valve-point economic dispatch problems. Applied Energy, Volume 87, Issue 5, 2009.
- ANGELO, M. M. Método Prima-Dual de pontos interiores e de programação por metas ponderadas aplicados ao problema multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. Dissertação Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. 2019.
- ARUL, R. et al. Non-convex economic dispatch with heuristic load pattern using harmony search algorithm. International Journal of Computer Applications, 16(1), 26–33. Published by Foundation of Computer Science. 2011.
- BALAMURUGAN, K.; MURALISACHITHNNDAM, R.; KRISHNAN, S. R. Differential evolution based solution for combined economic and emission power dispatch with valve loading effect. International Journal on Electrical Engineering and Informatics, 2014.
- BALBO, A. R.; PINHEIRO, R. B. N.; BAPTISTA, E.; NEPOMUCENO, L. Um Método Prima-Dual de Pontos Interiores e Exteriores Barreira Logarítmica Modificada com Estratégias de Extrapolação Cúbica e Convergência Global. In: 10th World Congress on Computational Mechanics (WCCM 2012), São Paulo - SP. Computation Mechanics Proceedings, 2012. p. 1-19.
- BARAVIERA, A. T. e BRANCO, F. M. Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão. Campinas - SP: UNICAMP/IMECC, 2012.
- BARREIRA, L e VALLS, C. Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Qualitativa. Editora

Livraria da Física, 1º edição. 2012.

BASETTI, V. et al. Economic Emission Load Dispatch Problem with Valve-Point Loading Using a Novel Quasi-Oppositional-Based Political Optimizer. *Eletrônica* 2021 , 10 , 2596. <https://doi.org/10.3390/electronics10212596>.

BASTOS, E. A. Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

BASU, M. Economic environmental dispatch using multi-objective differential evolution. *Applied Soft Computing*, 11(2), 2845 - 2853. 2011.

BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. Nonlinear programming: theory and algorithms. [S.l.]: New York: John Wiley & Sons, 1979.

BENYEKHLEF, L. et al. Cuckoo search algorithm to solve the problem of economic emission dispatch with the incorporation of facts devices under the valve-point loading effect. *FACTA UNIVERSITATIS: Electronics and Energetics* Vol. 34, No 4, December 2021, pp. 569-588.

BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear I. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 3º edição, 1980.

BORCKMANS, P. B.; SELVAN, S. E.; BOUMAI, N.; ABSIL, P. A. A riemannian subgradient algorithm for economic dispatch with valve-point effect. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 10(2), 2014.

BUENO, F. Métodos Heurísticos: Teoria e Implementações. IFSC - Araranguá, 2009.

CARPENTIER, J. Contributions to the economic dispatch problem. *Bulletin de la Societe Francoise des Electriciens*, vol. 3, n. 8, 1962.

CHIANG, H. D. e CHU, C. C. A systematic search method for obtaining multiple local optimal solutions of nonlinear programming problems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 43, nº 2, fev. 1996, doi: 10.1109/81.486432.

CHIANG, H-D. Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems. Theoretical Foundation, BCU Methodologies, and Applications. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2011.

CHIANG, H. D.; ZHANG, Y. F.; WANG T. A Novel TRUST-TECH-Enabled Trajectory-Unified Methodology for Computing Multiple Optimal Solutions of Constrained Nonlinear Optimization: Theory and Computation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 52, nº 1, jan. 2022, doi: 10.1109/TSMC.2020.3002566.

CHIANG, C.-L.; WANG, C.-A. Hybrid differential evolution for cogeneration economic dispatch problem. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, IEEE,

v. 3, 2010.

CHIOU, J.-P. Variable scaling hybrid differential evolution for large-scale economic dispatch problems. *Electric Power Systems Research*, Elsevier, v. 77, n. 4, 2007.

COELHO, L. S.; BORA, T. C.; MARIANI, V. C. Differential evolution based on truncated Lévy-type flights and population diversity measure to solve economic load dispatch problems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 57(0), 2014.

COELHO, L. S.; Mariani, V. C. Particle swarm approach based on quantum mechanics and harmonic oscillator potential well for economic load dispatch with valvepoint effects. *Energy Conversion and Management*, 49(11), 3080–3085. Special Issue 3rd International Conference on Thermal Engineering: Theory and Applications. 2008.

DANTZIG, G. B.; THAPA, M. N. *Linear Programming: 2: Theory and Extensions*. Nova York: [s.n.].

DEB, S. et al. Performance of Turbulent Flow of Water Optimization on Economic Load Dispatch Problem. 2021.

DIAS, J. V. Evolução diferencial híbrida com o método BFGS para a resolução do problema de despacho econômico com o efeito de ponto de carregamento de válvula. 2021.

DORIGO, M. *Optimization, Learning and Natural Algorithms*. Ph.D. Thesis, Politecnico di Milano, Italia. 1992.

DORIGO, M; STUTZLE, T. *Otimização de colônias de formigas*. The MIT Press, Cambridge, 305 p. 2004.

DUMAN, S.; YORUKEREN, N.; ALTAS, I. H. A novel modified hybrid psogsa based on fuzzy logic for non-convex economic dispatch problem with valve-point effect. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 64. ISSN 0142-0615.

DUVVURU, N.; SWARUP, K. A hybrid interior point assisted differential evolution algorithm for economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 26, n. 2, 2011.

EL-SAYED, W. T. et al. Deterministic-like solution to the non-convex economic dispatch problem. *Geração, Transmissão e Distribuição de IET*. 2020.

FANG, S. C.; PUTHENPURA, S., (1993). *Linear optimization and extensions: theory and algorithms*. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

FERNANDES, T. C. C. Aplicação de técnicas de estimação modal para análise da estabilidade a pequenas perturbações de sistemas de distribuição com geração distribuída. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

FIACCO, A. V.; McCORMICK, G. P. *Nonlinear programming: sequential unconstrained*

- minimization techniques. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- FIACCO, A. V.; McCORMICK, G. P. Nonlinear programming: sequential unconstrained optimization techniques, Philadelphia, SIAM. (Classic in Applied Mathematics, v.4), 1990.
- FRISCH, K. R. The logarithmic potential method of convex programming. Technical report, University Institute of Economics, Oslo, Norway. 1955.
- GASPAR-CUNHA, A.; TAKAHASHI, R.; ANTUNES, C. H. Manual de computação evolutiva e metaheurística. [S.l.]: Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2012.
- GLOVER, F.-Tabu Search, Part I – ORSA Journal on Computing 1. 1989.
- GOLDBERG, D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Reading, MA: Addison-Wesley. 1989.
- GONÇALVES, R. et al. Improved cultural immune systems to solve the economic load dispatch problems. In IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2013.
- GONÇALVES, E. Uma Metodologia Determinística à Resolução de Problemas Multiobjetivo de Despacho e de Fluxo de Potência. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica)– Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Unesp, Bauru, 2019.
- GRIVA, I.; NASH, S. G.; SOFER, A. Linear and Nonlinear Optimization. SIAM. 2009.
- HAFTKA, R. T.; GURDAL, Z. Elements of Structural Optimization. 3rd. rev. and expanded ed., with corrections. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993.
- HAPP, H. H. Optimal power dispatch – A comprehensive survey. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 96(3), 1977.
- HE, D.; WANG, F.; ZHIZHONG, M. A hybrid genetic algorithm approach based on differential evolution for economic dispatch with valve-point effect. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, Elsevier, v. 30, n. 1, 2008.
- HEMAMALINI, S.; SIMON, S. P. Dynamic economic dispatch with valve-point effect using Maclaurin series based lagrangian method. International Journal of Computer Applications, 1(17). Published By Foundation of Computer Science. 2010.
- HEMAMALINI, S.; SIMON, S. P. Dynamic economic dispatch using artificial bee colony algorithm for units with valve-point effect. European Transactions on Electrical Power, 21(1). 2011.
- HOLTZ, G. C. C. Traçado automático de envoltórias de esforços em estruturas planas utilizando algoritmo evolucionário. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2005.

- HOOREBEECK, L. V. et al. Global Solution of Economic Dispatch with Valve Point Effects and Transmission Constraints. Power Systems Computation Conference (PSCC), Porto, Portugal, 2020.
- HOMBO, E. L. Método de Otimização Determinística E Fractais Aplicado À Determinação De Múltiplos Pontos De Mínimo Em Problemas De Otimização Não Linear. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Faculdade de Engenharia de Presidente Prudente, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Unesp, Presidente Prudente, 2023.
- IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. Otimização: Métodos Computacionais. Volume 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- JONGER, H. T. et al. Nonlinear Optimization. in Rn. Volume I and II. Peter Lang Verlag; New York, 1983.
- KANG, L.; KANG, Z.; LI, Y.; LIU, P.; CHEN, Y. Asynchronous parallelization of Gue's algorithm for function optimization, in: Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, vol. 1, 2000.
- KARMARKAR, N. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica* 4, 1984.
- KARREM, C. R. TRUST-TECH based methods for optimization and learning. Universidade de Cornell, 2007.
- KHALIL, H. K. Nonlinear Systems. Estados Unidos: Michigan State University, Michigan, 3ª edição, 2002.
- KHESHTI, M. et al. An effective Lightning Flash Algorithm solution to large scale non-convex economic dispatch with valve-point and multiple fuel options on generation units. 2017. *Energy*, 129.
- KIM, J. O.; SHIN, J. D.; PARK, J. N.; SINGH, C. Atavistic Genetic algorithm for economic dispatch with valve point effect, *Electric Power Systems Research*, 62, 2002.
- KIRKPATRICK et al. Optimization by simulated annealing. *Science*, v. 220, n. 4598, Maio 1983.
- KRAGEKUND, L. Solving a timetabling problem using hybrid genetic algorithms. *Software - Practice and Experience*, v. 27, 1997.
- KOJIMA, M.; MIZUNO, S.; YOSHISE, A. A primal-dual interior point method for linear programming. In: *Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods*, Ed. N. Megiddo, Springer-Verlag, New York, 1989.
- KUNDUR, P. Power System Stability and Control. Estados Unidos: Electric Power Research Institute, Inc, 1994.

- LIMA, J. P. Um Método de Busca Tabu Direcionada a Pontos Singulares e o Problema de Despacho Econômico com Pontos de Válvula. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Unesp, Bauru, 2019.
- LIN, W. et al. An improved tabu search for economic dispatch with multiple minima. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, no. 1, Feb. 2002.
- LING. S. H.; LAM. H. K.; LEUNG. F. H. F; LEE. Y. S. Improved genetic algorithm for economic load dispatch with valve-point loadings, IECON'03. 29th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IEEE Cat. No.03CH37468), Roanoke, VA, USA, 2003, vol.1.
- MACHOWSKI, J.; BIALEK, J. W; BUMBY, J. R. Power system dynamics: Stability and Control. Reino Unido: John Wiley & Sons, Ltd, 2º edição, 2008.
- MAIOLI, G. Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Rio Claro. 2015.
- MARTINS, A. C. S. Métodos de otimização multiobjetivo em problemas de despacho econômico e ambiental de sistemas termo-eólico. Dissertação (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Unesp, Bauru, 2020.
- MENG, K et al. Quantum-Inspired Particle Swarm Optimization for Valve-Point Economic Load Dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 25, no. 1, Feb. 2010.
- MONTEIRO, R. D. C.; ADLER, I. Interior path-following primal-dual algorithms. Part I: Linear Programming, Part II: Convex Quadratic Programming. *Mathematical Programming*, 44, 1989.
- MURKHEJEE, N.; PORIA, S. Preliminary Concepts of Dynamical Systems. *International Journal of Applied Mathematical Research*: v.1, n.4, 2012.
- NEPOMUCENO, L.; BAPTISTA, E. C.; BALBO, A. R.; SOLER, E. M. Coevolutionary Genetic Algorithm Based on the Augmented Lagrangian Function for Solving the Economic Dispatch Problem. *Revista IEEE Latin America Transactions*. , v.13, 2015.
- NIKNAM, T. A new fuzzy adaptive hybrid particle swarm optimization algorithm for non-linear, non-smooth and non-convex economic dispatch problem. *Applied Energy*, 87(1). 2010.
- NOBEL, B., DANIEL, J. W. Applied Linear Algebra. (3rd Edition). Publisher: Prentice Hall. 1987.
- OLIVIERI, B. P. Otimização do Projeto de Pontes Protendidas Pré-moldadas pelo método dos Algoritmos Genéticos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de

Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

OLIVEIRA, K. W. R. C. B.; NASCIMENTO, N. T.; SAAVEDRA, O. R. Uma abordagem via estratégias evolutivas para o despacho econômico considerando restrições de geração. *IEEE Latin America Transactions*. 2008.

OLIVEIRA, C. P. Métodos Metaheurísticos aplicados a um modelo de planejamento de culturas. Dissertação Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. 2013.

PAVAN, R. Método Híbrido de Enxame de Partículas de Aprendizagem Abrangente com Branch-and-Bound e Programação Quadrática Sequencial para Resolução de Problemas do Fluxo de Potência Ótimo com Variáveis Discretas. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Unesp, Bauru, 2023.

PINHEIRO, R. B. N.; NEPOMUCENO, L.; BALBO, A. R. Solving large-scale reactive optimal power flow problems by a primal-dual M2BF approach. *Optimization and Engineering*, v. online, 2019.

POLAK, E. *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*. Academic Press, New York, 1971.

POTHIYA, S.; NGAMROO, I.; KONGPRAWECHNON, W. Ant colony optimisation for economic dispatch problem with non-smooth cost functions. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 32(5). 2010.

RAMLI, N. F. et al. A Non-Convex Economic Dispatch Problem with Point-Valve Effect Using a Wind-Driven Optimisation Approach. 2022.

RAVI, G. et al. Nonconvex economic dispatch with heuristic load patterns using improved fast evolutionary program. *Electric Power Components and Systems*, 34(1). 2006.

SAKTHIVEL, V. P. et al. Squirrel search algorithm for economic dispatch with valve-point effects and multiple fuels. 2020.

SAMED, M. M. A. Um Algoritmo Genético Híbrido Co-Evolutivo para Resolver Problemas de Despacho. PhD thesis, Departamento de Engenharia Química – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2004.

SANTRA, D. et al. Hybrid pso-aco technique to solve multi-constraint economic load dispatch problems for 6-generator system. *International Journal of Computers and Applications*, Taylor & Francis, v. 38, n. 2-3, 2016.

SARAMAGO, S. P.; STEFFEN, V. Técnicas heurísticas de otimização aplicada em engenharia. 2003.

SELVAKUMAR, A.; THANUSHKODI, K. Optimization using civilized swarm: Solution to economic dispatch with multiple minima. *Electric Power Systems Research*. 79. 8-16.

10.1016/j.epsr.2008.05.001. 2009.

SILVA, D. N. ; BALBO, A. R.; PINHEIRO, R. B. N. Um Método Primal-Dual de Pontos Interiores Barreira Logarítmica Modificada com Aproximantes Spline aplicado ao Problema de Despacho Econômico com Ponto de Válvula. II CMAC-SE, Bauru - SP. Anais do II CMAC-SE. 2013.

SILVA, D. N. Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula e representação da transmissão. 261 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Unesp, Bauru, 2014.

SINHA, N.; CHAKRABARTI, R.; CHATOPADHYAY, R. Evolutionary programming techniques for economic load dispatch. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 7(1), 2003.

SOARES, G. L. Algoritmos Genéticos: Estudo, Novas Técnicas e Aplicações. Dissertação de mestrado apresentada à Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte (MG), 1997.

SONMEZ, Y. Multi-objective environmental/economic dispatch solution with penalty factor using artificial bee colony algorithm, Scientific Research and Essays Vol. 6(13), 4 July, 2011.

STANZANI, A. L. Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, SP. 2012.

STANZANI, A. L.; BALBO, A. R.; BAPTISTA, E. C.; NEPOMUCENO, L. Solving the Multiobjective Environmental/Economic Dispatch Problem using Weighted Sum and ϵ -Constraint Strategies and a Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Method. International Journal of Control Automation and Systems, 2014.

STEINBERG, M. J.; SMITH, T. H. Economy Loading of Power Plants and Electric Systems. John Wiley & Sons. 1943.

SUM-IM, T. Na enhanced diffecial evolution algorithm application to economic dispatch with valve-point effects na system losses considerations. In: IEEE. Power Engineering Conference (UPEC), 2015 50th International Universities [S.I], 2015.

TAVAZOEI, M; HAERI, M. S. An optimization algorithm based on chaotic behavior and fractal nature. Journal of Computational and Applied Mathematics 206, 2006.

TORRES, D. F. M. Programação Matemática. UA, 2021.

VALLE, K. N. F. Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta. UFMG - Beleo Horizonte.

2012.

VICTOIRE, T. A. A.; JEYAKUMAR, A. E. HYBRID PSO–SQP for economic dispatch with valve-point effect. *Electr Power Syst Res*, 71 (1), 2004.

VIDARDE, J. H. L. Linearização suave de pontos fixos hiperbólico. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

XAVIER, A.; OLIVEIRA, A. Optimal covering of plane domains by circles via hyperbolic smoothing. *Journal of Global Optimization*, 31(3), 2005.

WANG, S.; CHIOU, J.; LIU, C. Non-smooth/non-convex economic dispatch by a novel hybrid differential evolution algorithm. *IET Generation, Transmission and Distribution*, IET, v. 1, n. 5, 2007.

WRIGHT, S. J. Primal-dual interior point methods, *SIAM journal*, 1997.

YANG, X. et al. Fire fly algorithm for solving non convex economic dispatch problems with valve loading effect. *Applied Soft Computing*, 12(3), 2012.

YUAN, X. et al. A hybrid differential evolution method for dynamic economic dispatch with valve-point effects. *Expert Systems with Applications*, 36(2, Part 2), 2009.

YURYEVICH, J.; WONG, K. P. Evolutionary programming based optimal power flow algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 4, 1999.

APÊNDICE A – SISTEMAS DINÂMICOS

Neste apêndice serão abordados os conteúdos básicos de Sistemas Dinâmicos e foi baseado no livro *Nonlinear Systems* de Khalil (2002). Além disso, outras referências foram usadas e citadas como: Boldrini (1980), Vidarde (2002), Machowski; Bialek; Bumby (2008), Chiang (2011), Barreira e Valls (2012), Murkhejee e Poria (2012) e Fernandes (2012).

A teoria de sistemas dinâmicos teve suas raízes na física nos estudos conduzidos por Newton no século XVII. Assim, Newton contribuiu significativamente para o desenvolvimento da matemática, fornecendo ferramentas fundamentais para descrever o comportamento dinâmico de sistemas por meio de equações diferenciais. Estas equações descrevem como as variáveis de estado de um sistema evoluem no tempo e tornaram-se uma parte essencial da teoria dos sistemas dinâmicos. Utilizando equações diferenciais, Newton concebeu as leis do movimento e da gravitação universal, aplicando-as para esclarecer as leis de Kepler referentes ao movimento dos corpos celestes. Essa contribuição foi fundamental para o surgimento dos fundamentos dos sistemas dinâmicos, que têm suas raízes na análise de processos temporais. Segundo Khalil (2002), as equações diferenciais foram criadas com o objetivo de imitar o comportamento dos sistemas dinâmicos reais e são determinadas a partir de algumas suposições sobre o comportamento dos sistemas físicos. Assim, quanto mais refinado for esse modelo, mais precisas serão as previsões do comportamento físico. Atualmente, os sistemas dinâmicos são de interesse para diversas áreas, como matemática, física, biologia, economia, engenharia, entre outras. Embora a variável independente mais comum em sistemas dinâmicos seja o tempo, é possível considerar outras grandezas, como posição, ou mesmo alguma variável sem uma interpretação física. Essas variáveis são descritas de maneira abrangente, com uma variável independente, frequentemente representada por t , que simboliza o tempo ou alguma outra das grandezas citadas.

Em vários problemas de engenharia, um sistema dinâmico é representado por um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem em um espaço $\mathbb{R}^n$, utilizadas para determinar o comportamento do processo evolutivo de um objeto ou evento específico. O sistema em questão pode apresentar propriedades determinísticas ou não, possuir dimensões finitas ou infinitas e ter diferenciabilidade. Um sistema é considerado determinístico quando, seu estado futuro ou passado, é unicamente determinado pelo seu estado presente. Um exemplo disso é a mecânica clássica, onde o movimento de um corpo tem seu futuro e passado exclusivamente determinados por sua posição e velocidades iniciais. Por outro lado, sistemas dinâmicos não-determinísticos, também conhecidos como estocásticos, incorporam

a incerteza ou aleatoriedade nas equações, ou regras que regem seu comportamento. Exemplos notáveis incluem os modelos probabilísticos utilizados em finanças para prever os preços das ações, modelos na biologia que lidam com populações sujeitas a flutuações aleatórias, e a mecânica quântica, uma teoria física que descreve o comportamento das partículas subatômicas, como elétrons e fótons.

Diante disso, conforme mencionado por Khalil (2002), compreender um sistema implica na capacidade de quantificar grandezas que possibilitem descrever qualquer aspecto desse sistema, ou, pelo menos, aqueles que são de interesse particular. Essas grandezas, então, definem o estado do sistema e podem ser selecionadas como variáveis de estado, como, por exemplo, posição e velocidade em um sistema de partículas, ou tensão e corrente em um circuito elétrico, entre outros exemplos. É importante ressaltar que essa escolha não é única, uma vez que algumas grandezas físicas podem ser derivadas de outras. Por exemplo, optar por trabalhar com tensão e potência em um circuito elétrico em vez de tensão e corrente.

Toda equação diferencial de ordem n pode ser decomposta em n equações diferenciais de primeira ordem, facilitando a sua análise teórica e a utilização de métodos numéricos para a solução. Assim, trata-se os sistemas dinâmicos como uma modelagem de um número finito de EDOs, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}\tag{A.1}$$

em que $\dot{x}_i$ denota a derivada da variável de estado x_i com respeito a variável independente t e $u_1, u_2, \dots, u_p$ são as variáveis de entrada. Já as variáveis de estado $x_1, x_2, \dots, x_n$, geralmente são grandezas físicas como velocidade, aceleração, ângulo, tensão, entre outras.

De forma compacta, indica-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem pela notação vetorial:

$$\dot{x} = f(t, x, u)\tag{A.2}$$

Chama-se (A.2) de uma representação de um sistema dinâmico, e refere-se x como variável de estado e u como entrada ou parâmetro de controle. Quando não há a entrada u presente no sistema, chama-se de equação de estado não-forçada, a qual é escrita na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(t, x)\tag{A.3}$$

Um sistema dinâmico pode ser categorizado como autônomo (invariante no tempo) ou não-autônomo (variante no tempo), estabelecido com base na dependência do campo vetorial (parte direita da Equação (A.3)) em relação à variável independente t . Em outras palavras, pode-se considerar um sistema dinâmico autônomo ou invariante no tempo quando a função $f(t, x)$ que compõe a parte direita da equação não depende explicitamente da variável t , resultando na Equação (A.4).

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.4}$$

Embora a maioria dos problemas de engenharia esteja sujeita as variações ao longo do tempo, seja por alterações em sua configuração ou envelhecimento natural de seus componentes físicos, em diversas situações a análise desses problemas pode ser simplificada considerando intervalos de tempo específicos, durante os quais o campo vetorial pode ser considerado invariante no tempo. Assim, este texto se restringe, sem perda de generalidade, a sistemas dinâmicos autônomos representados pela Equação (A.4).

Como mencionado anteriormente, um sistema dinâmico pode ser descrito por meio de equações diferenciais, podendo estas serem lineares ou não lineares. No caso de sistemas não lineares, como o encontrado no contexto do sistema elétrico de potência, enfrentam-se desafios consideravelmente mais complexos do que os apresentados pelos sistemas lineares. Devido à natureza não linear desses sistemas, há a necessidade de se trabalhar com abordagens analíticas e computacionais mais sofisticadas para uma melhor compreensão e a modelagem mais fidedigna.

Segundo Khalil (2002), em razão do conhecimento vasto das ferramentas de análise para sistema linear, o primeiro passo para analisar um sistema não linear é linearizar esse sistema em torno da vizinhança de um ponto de operação e, uma vez linearizado, estudar seu comportamento. Essa técnica, chamada linearização, é explicada mais à frente na seção A.3. Contudo, Khalil (2002) destaca duas limitações intrínsecas à linearização. A primeira delas reside no fato de que a linearização, por sua natureza, é uma aproximação válida apenas em uma vizinhança próxima a um ponto de operação. Portanto, essa abordagem se restringe a prever o comportamento local de um sistema não linear apenas nas proximidades desse ponto, incapaz de antecipar comportamentos “não locais” ou distantes do ponto de operação. A segunda limitação identificada pelo autor é relacionada à presença de fenômenos específicos a sistemas não lineares. Estes fenômenos, por sua própria natureza não linear, não podem ser adequadamente descritos e analisados por meio de sistemas linearizados. De acordo com Khalil (2002), alguns exemplos de fenômenos não lineares são:

- Tempo finito de fuga: um sistema linear instável tende ao infinito quando o tempo tende ao infinito; um sistema não linear pode tender ao infinito em um tempo finito.
- Múltiplos equilíbrios isolados: um sistema linear pode ter somente um ponto

isolado de equilíbrio; um sistema não linear pode ter vários pontos isolados de equilíbrio, podendo convergir para diferentes pontos de operação no seu regime permanente.

- Ciclos limite: para um sistema linear invariante no tempo oscilar é necessário um par de autovalores no eixo imaginário, o que é uma condição quase impossível de se manter na presença de perturbações. Ainda que fosse viável, a amplitude da oscilação dependerá do estado inicial do sistema. Na prática, oscilações estáveis só são produzidas por sistemas não lineares. Existem sistemas não lineares que podem oscilar em valores fixos de amplitude e frequência, independentemente do estado inicial. Esse tipo de oscilação é denominado Ciclo Limite.

- Sub harmônico, harmônico e oscilações quase periódicas: um sistema linear alimentado por uma fonte periódica, produz uma saída com a mesma frequência. Um sistema não linear com uma alimentação periódica pode ter uma saída com frequências que são submúltiplos ou múltiplas da frequência de entrada. Isso pode gerar uma oscilação quase periódica. Um exemplo dessa saída é a soma de oscilações periódicas com frequências que não são múltiplas uma das outras.

- Caos: trata-se de um sistema não linear que pode ter um comportamento no seu regime permanente que não seja equilíbrio, oscilação periódica ou oscilação quase periódica. Esse comportamento é normalmente chamado de Caos. Alguns desses sistemas caóticos demonstram comportamentos aleatórios, independentemente da natureza do sistema.

Essa distinção é particularmente crucial ao investigar a estabilidade de sistemas dinâmicos, a qual será abordada a seguir.

A.1 Ponto de equilíbrio, região de estabilidade e região de atração

Como foi visto anteriormente, um sistema dinâmico pode ser descrito usando equações diferenciais autônomas de ordem n , conforme a Equação (A.4). A resposta de tais sistemas está relacionada com a solução de EDOs, dada uma condição inicial do vetor de estado no instante $t_0 = 0$:

$$x(0) = x_0 \tag{A.5}$$

Esta condição inicial juntamente com a EDO (A.4) constituem o PVI. Obter uma solução deste PVI consiste em encontrar uma função $\phi(t, t_0, x_0)$ que satisfaz a EDO (A.4) e a condição inicial (A.5). A solução do PVI ($\phi(t, t_0, x_0)$) pode ser entendida como uma curva no espaço de estados parametrizada por t e que passa em x_0 quando $t = t_0$. Essa curva é chamada de trajetória do sistema passando pelo ponto x_0 . Em sistemas dinâmicos,

um ponto de equilíbrio, também conhecido como ponto fixo ou ponto crítico, é um estado no qual o sistema permanece inalterado ao longo do tempo. Em outras palavras, é um conjunto de condições em que as derivadas das variáveis do sistema são zero, indicando que o sistema não experimenta mudanças nesse ponto específico.

Definição A1.1: Suponha que $x^* \in D$ seja um ponto de equilíbrio de (A.4), então:

$$f(x^*) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são as raízes ou soluções do sistema de equações não lineares (A.6). Ao contrário dos sistemas dinâmicos lineares, nos não lineares pode-se ter nenhum, apenas um ou múltiplos pontos de equilíbrio isolados. Note que $\phi(t, t_0, x^*) = x^*$, $\forall t > t_0$.

Por conveniência, é comum apresentar as definições e teoremas para o caso em que o ponto de equilíbrio está na origem de $\mathbb{R}^n$, isto é, $x^* = 0$. É importante salientar que não há perda de generalidade em fazer isso, pois qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem por meio de uma mudança de variáveis. Suponha que $x^* \neq 0$ e considere a mudança de variáveis $y = x - x^*$. Com essa mudança de variáveis a EDO que rege y é dada por:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x^*) \stackrel{\text{def}}{=} g(y) \quad (\text{A.7})$$

Na nova variável y , o sistema tem um ponto de equilíbrio na origem, pois $g(0) = f(0 + x^*) = 0$.

Definição A1.2: O ponto de equilíbrio x^* de (A.6) é:

- estável se para cada $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe $\sigma = \sigma(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x_0 - x^*\| < \sigma \Rightarrow \|\phi(t, t_0, x_0) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{A.8})$$

- instável se não verificar a condição anterior, ou seja, se não for estável.
- assintoticamente estável se for estável e σ pode ser escolhido de modo que:

$$\|x_0 - x^*\| < \sigma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, t_0, x_0) = 0 \quad (\text{A.9})$$

A exigência $\epsilon - \sigma$ para estabilidade assume a forma de um desafio-resposta. Para demonstrar que o ponto denominado origem $x^* = 0$ é estável, é assumido que para qualquer valor de ϵ , deve-se produzir um valor de σ , possivelmente dependente de ϵ , tal que uma trajetória começando em uma vizinhança σ da origem nunca saia da vizinhança ϵ . Segundo Khalil (2002) a estabilidade assintótica, para qualquer condição inicial perturbada

suficientemente pequena, as soluções do sistema convergem para o ponto de equilíbrio à medida que o tempo avança.

Assim, a estabilidade está relacionada ao ponto de equilíbrio e é uma propriedade local. Ao se analisar as soluções da Equação (A.6) nota-se que todas as trajetórias iniciadas em uma determinada região tendem para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Define-se então esta região como Região de Atração deste ponto de equilíbrio. Em outras palavras, é a região da qual o sistema evolui para o ponto de equilíbrio ao longo do tempo.

Definição A1.3: A Região de Atração do ponto de equilíbrio x^* , $A(x^*)$, é o maior subconjunto do espaço de estado que satisfaz:

$$x_0 \in A(x^*) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, t_0, x_0) = x^* \quad (\text{A.10})$$

A região de atração é um conceito de muita importância para a engenharia, sistemas dinâmicos reais estão sujeitos corriqueiramente às perturbações, então é preciso garantir que eles operem sempre dentro da área de atração de um ponto de operação estável. A compreensão dessas propriedades é crucial para a análise e o controle de sistemas dinâmicos em uma ampla gama de aplicações, as quais serão apresentadas a seguir.

A.2 Espaço de fase e retrato de fase

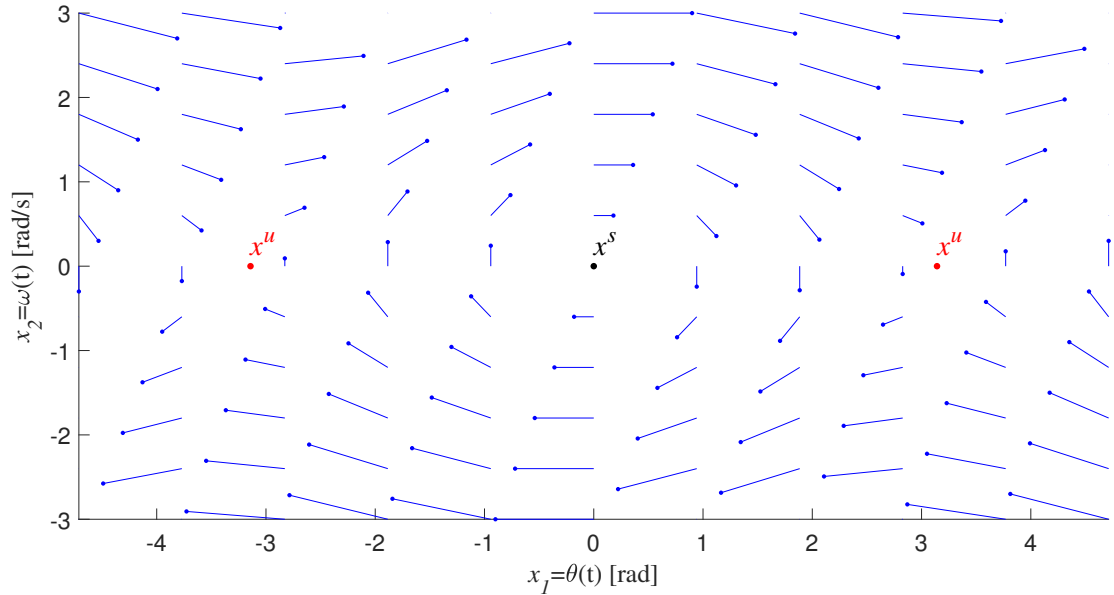
Segundo Khalil (2002), o conjunto de variáveis do espaço de fase de um sistema compõe o conjunto mínimo de variáveis que oferecem uma descrição completa do estado do sistema. Com isso, pode-se referir a espaço de fase ao espaço que surge a partir dessas variáveis de fase, ou seja, o estado de um sistema em qualquer momento específico é representado como um ponto dentro desse espaço de fase. Assim, as mudanças no estado do sistema ao longo da variável independente t são visualizadas como trajetórias no espaço de fase. Essas trajetórias são, essencialmente, os caminhos que um objeto percorre nesse espaço em relação a t , que normalmente é o tempo. O Retrato de Fase é uma representação que abrange um conjunto suficiente de trajetórias que permitem a compreensão do comportamento dinâmico do sistema.

Em um diagrama de campo vetorial, as setas nos pontos do espaço de fase representam as direções para onde as variáveis de estado estão evoluindo. Os pontos críticos ou pontos de equilíbrio, onde as derivadas em relação ao tempo são nulas, são muitas vezes destacados no diagrama de campo vetorial. Ao observar o diagrama de campo vetorial no espaço de fase, é possível visualizar as tendências e padrões de comportamento do sistema ao longo da variável independente t .

Como o campo vetorial em um ponto é tangente à trajetória através deste ponto, pode-se, essencialmente, construir a trajetória a partir do diagrama do campo vetorial,

começando em um conjunto suficientemente grande de condições iniciais x_0 , como representado na Figura A.1.

Figura A.1 – Diagrama de Campo Vetorial.



Fonte: Autor.

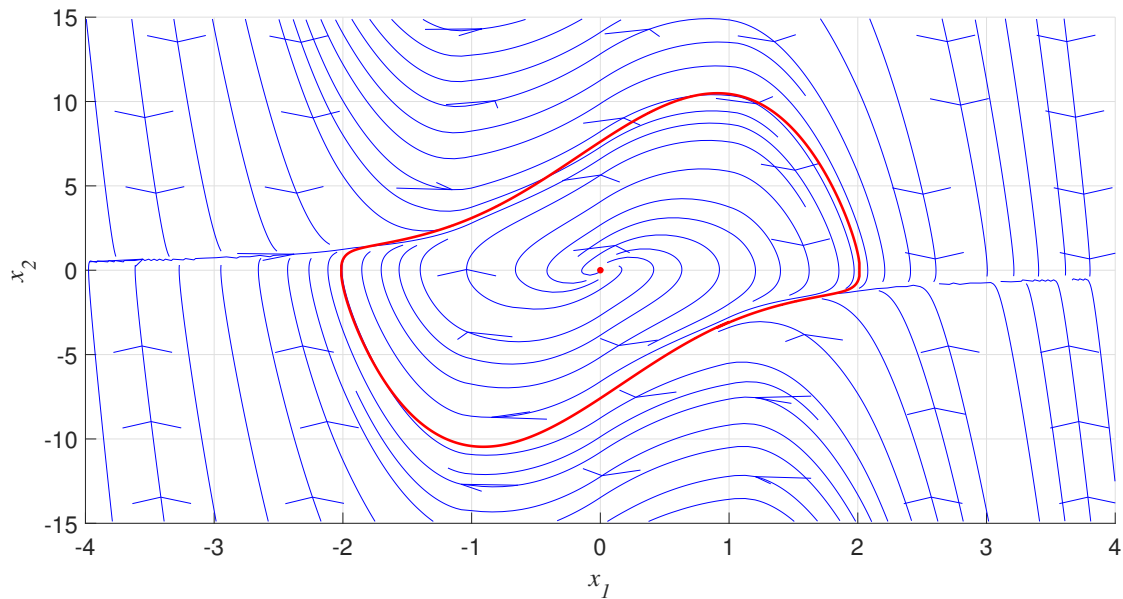
Com relação às Figuras A.1 e A.2 pode-se destacar algumas características importantes dos retratos de fase, sendo:

- Pontos de equilíbrios: também chamados de pontos fixos, são os pontos que satisfazem $f(x^*) = 0$. Tem-se como exemplo os pontos x^u e x^s da Figura A.1 e a origem na Figura A.2.
- Órbita fechada: corresponde a soluções periódicas, isto é, soluções em que $x(t + T) = x(t)$ para todo t para algum $T > 0$. Nota-se a órbita em vermelho na Figura A.2 correspondente a um ciclo limite, na qual é uma órbita fechada.
- O arranjo das trajetórias perto dos pontos fixos ou das órbitas fechadas. Como exemplo, o padrão de fluxo nos pontos x_u da Figura A.1 são semelhantes.
- A instabilidade ou estabilidade dos pontos fixos, ou a limitação das trajetórias das órbitas. Por exemplo, a órbita periódica na Figura A.2 é de trajetória limitada e todas as órbitas dentro (exceto a origem) e fora do ciclo limite tendem para o ponto fixo quando t aumenta. Enquanto os pontos x^u na Figura A.1 e a origem na Figura A.2 são instáveis porque as trajetórias nas proximidades desse ponto tendem a se afastar.

Além disso, é relevante destacar a importância de ϵ da Definição A1.2 ser arbitrariamente pequeno. Na Figura A.2, se ϵ for escolhido suficientemente grande, então pode-se encontrar um σ tal que a origem seja classificada como ponto de equilíbrio estável.

Pois toda trajetória iniciando fora do ciclo limite tende para ele quando t aumenta, as trajetórias iniciadas longe do ciclo limite e da origem não se afastam do ciclo limite e da origem. Porém, se a vizinhança ϵ for suficientemente pequena para estar contida dentro da área delimitada pelo ciclo limite, então, pela definição A1.2, classifica-se a origem como instável.

Figura A.2 – Exemplo de retrato de fase.



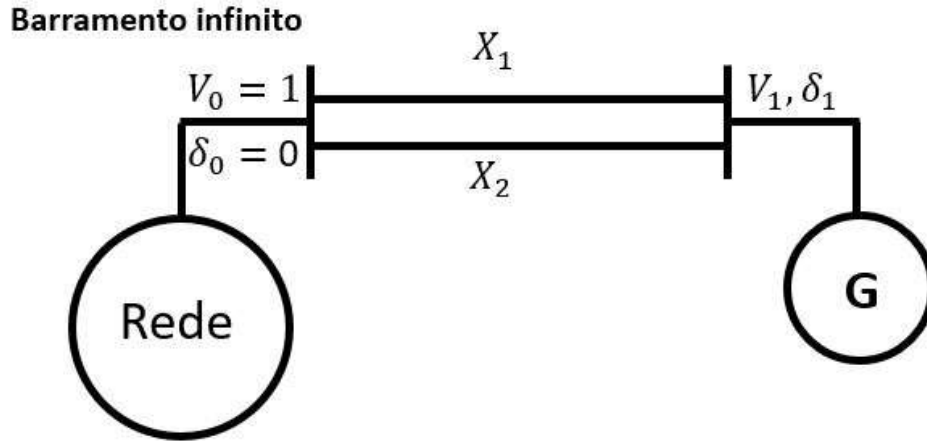
Fonte: Autor.

O exemplo a seguir será utilizado para ilustrar alguns conceitos já definidos, maiores detalhes sobre o exemplo podem ser encontrados em Kundur (1994).

Exemplo A2.1: Nos sistemas elétricos de potência, os geradores síncronos são responsáveis pela geração e fornecimento de grande parte da alimentação da rede. Eles são acionados por turbinas a vapor, hidráulicas e, em menor proporção, eólicas. Em países com frequência elétrica de 60Hz, caso do Brasil, a velocidade de rotação do rotor dos geradores dependerá do número de pólos do gerador (pequeno nas termelétricas, que giram em 3600 ou 1800 rpm, e grande nas hidrelétricas, que giram em torno de 100 rpm). Geralmente, os geradores estão conectados aos centros consumidores por linhas de transmissão que formam uma rede complexa de interligações. Na análise de estabilidade transitória é comum modelar um único gerador por vez e representar o restante do sistema como um barramento infinito (SMIB - *Single Machine Infinite Bus*), como na Figura A.3.

Durante a operação normal a velocidade de rotação é basicamente constante, o problema de estabilidade transitória consiste em analisar a estabilidade do sistema após a ocorrência de uma grande perturbação, como um curto-circuito em uma linha de transmissão. Para este fim pode-se representar o sistema SMIB por sua equação de *swing*,

Figura A.3 – Máquina síncrona conectada ao barramento infinito.



Fonte: Autor.

Equação (A.11), uma EDO que utiliza o modelo clássico para representar o gerador, a qual descreve a dinâmica da posição angular do rotor em relação ao campo girante e as potências de entrada e saída do gerador. Note que a equação de *swing* é o desenvolvimento das leis de Newton para o movimento rotativo:

$$M\ddot{\delta} = P_m - P_e \sin(\delta) - D\dot{\delta} \quad (\text{A.11})$$

em que δ é a posição angular do rotor do gerador em relação a um referencial rotativo síncrono, M é constante de inércia do gerador e P_m e P_e são a potência mecânica líquida de entrada e a potência elétrica máxima de saída do gerador e D é a constante de amortecimento viscoso. A equação $P_e \sin(\delta)$ expressa a relação entre a potência elétrica e a posição angular do rotor. A potência máxima é $P_e = \frac{V_0 V_1}{X}$, em que V_0 , V_1 , e X são a magnitude de tensão no barramento infinito, tensão induzida de eixo direto e a reatância de conexão, $X = X_1 X_2 / (X_1 + X_2) + X'_d$, sendo o último termo a reatância transitória de eixo direto do gerador síncrono. Quando o sistema está em estado estacionário, a potência mecânica de entrada é igual à potência elétrica de saída do gerador, logo $\ddot{\delta} = 0$, $\dot{\delta} = \omega = 0$ (velocidade de rotação é igual à velocidade mecânica síncrona) e $\delta = \arcsin(P_m/P_e)$ (KUNDUR, 1994).

Assim pode-se escrever o sistema de equações diferenciais relacionado a este problema denotando $x_1 = \delta$ e $x_2 = \dot{\delta} = \omega$ como as variáveis de estado:

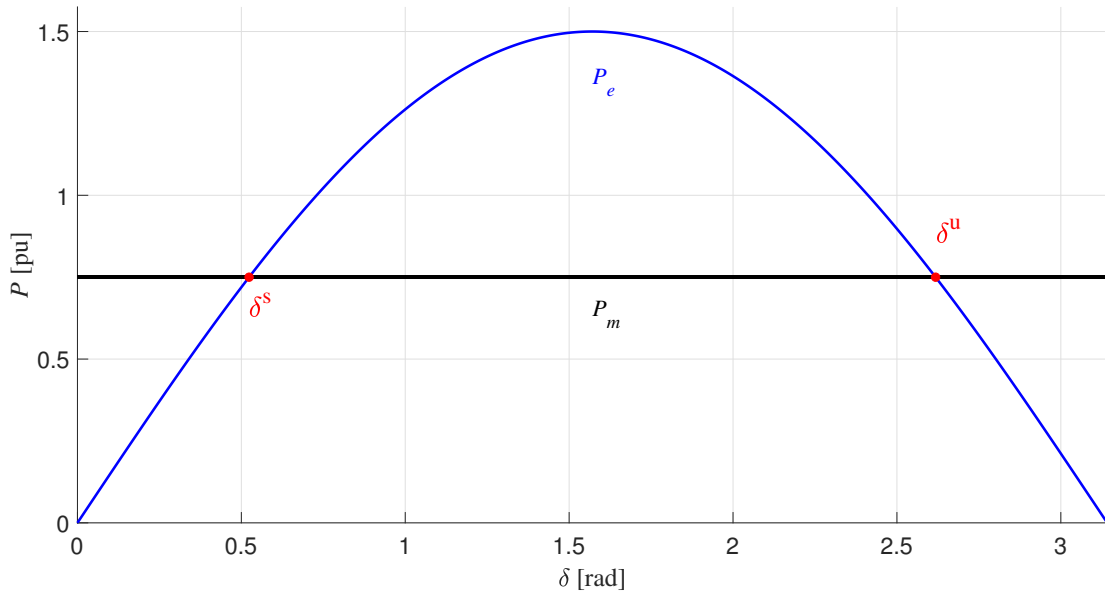
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (P_m - P_e \sin(x_1) - D x_2) / M \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Igualando o campo vetorial da Equação (A.12) a zero podem-se calcular dois pontos

de equilíbrio: $[\arcsin(P_m/P_e); 0]$ e $[\pi - \arcsin(P_m/P_e); 0]$. Matematicamente existem infinitos pontos de equilíbrio, já que o campo vetorial é senoidal, mas empiricamente sabe-se que os demais pontos não podem ser atingidos sem que ocorram sobretensões e perda de passo, o que acarretaria o acionamento dos sistemas de proteção e o desligamento da máquina.

A Figura A.4 apresenta os ângulos nos quais o balanço de potência é nulo, nestes pontos a aceleração angular é nula e a frequência permanece constante, caracterizando assim o que se espera de um ponto de equilíbrio. Os pontos de operação estável e instável podem ser identificados empiricamente nesse gráfico, no qual o ponto de operação estável ocorre quando o sistema retorna a uma condição de repouso após uma perturbação. Enquanto o ponto de operação instável resulta em movimentos crescente ou decrescente, indicando uma resposta dinâmica mais sensível às perturbações. Quando uma perturbação reduz (ou aumenta) δ^s então P_m fica maior (ou menor) que P_e , isso dá origem a uma aceleração angular positiva (ou negativa) que desloca a velocidade para valores positivos (ou negativos), que tende a aumentar (diminuir) o δ restaurando o equilíbrio, mesmo mediante alguma oscilação. No ângulo de operação δ^u ocorre exatamente o oposto, qualificando-o como instável. Portanto, empiricamente verifica-se a Definição A1.2. Na Seção A.3 será feita uma abordagem mais rigorosa.

Figura A.4 – Pontos de operação estável e instável do sistema SMIB.

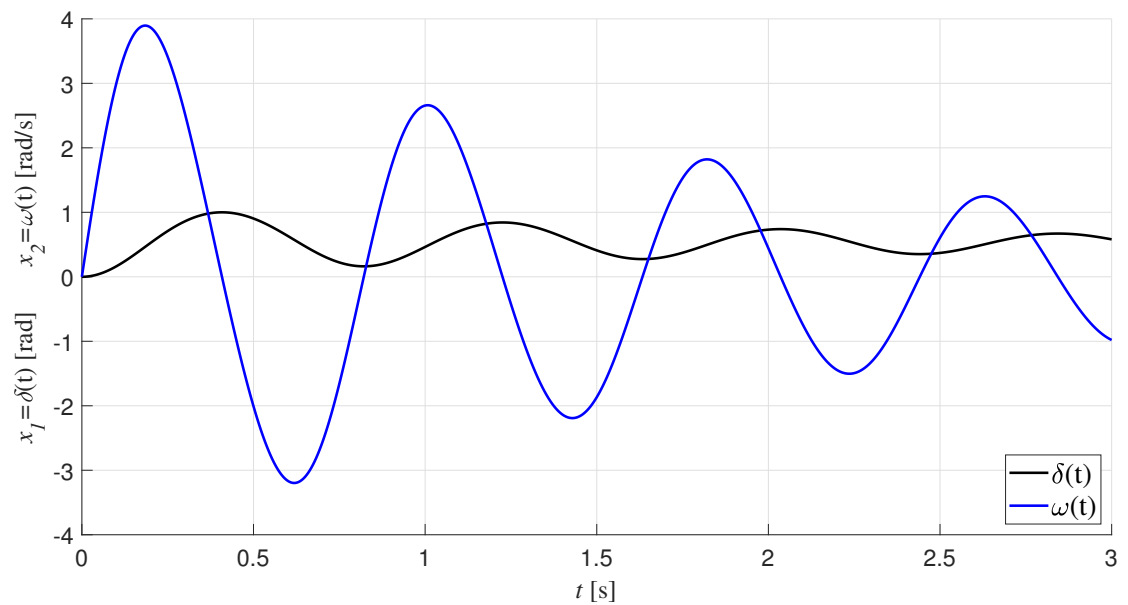


Fonte: Autor.

A Figura A.5 apresenta o gráfico correspondente de uma trajetória do sistema, $\phi(t, 0, [0, 0])$. A solução foi obtida numericamente, visto que a Equação (A.11) não tem solução analítica. Note que os dois estados foram projetados no mesmo eixo, essa é uma estratégia comum para sistemas com $n > 2$, mas também é útil para comparar o

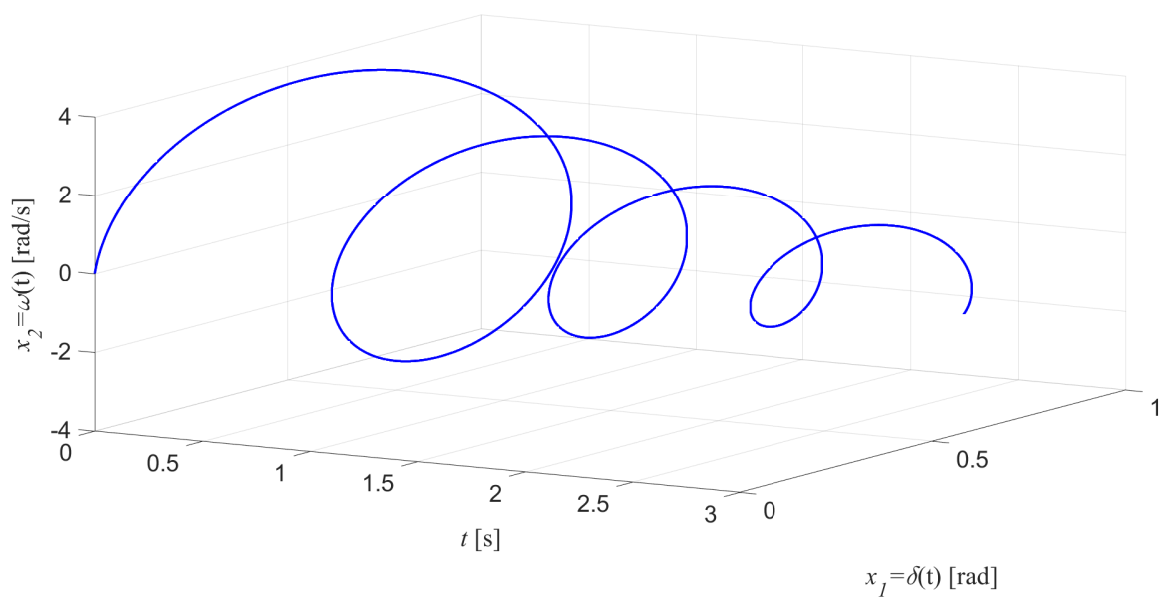
comportamento dos estados a cada instante de tempo. A Figura A.6 mostra a trajetória no espaço de estado para o sistema SMIB. Percebe-se que a oscilação amortecida em cada estado resulta em uma trajetória espiral decrescente que tende ao ponto de equilíbrio estável.

Figura A.5 – Trajetória projetada no eixo do sistema SMIB.



Fonte: Autor.

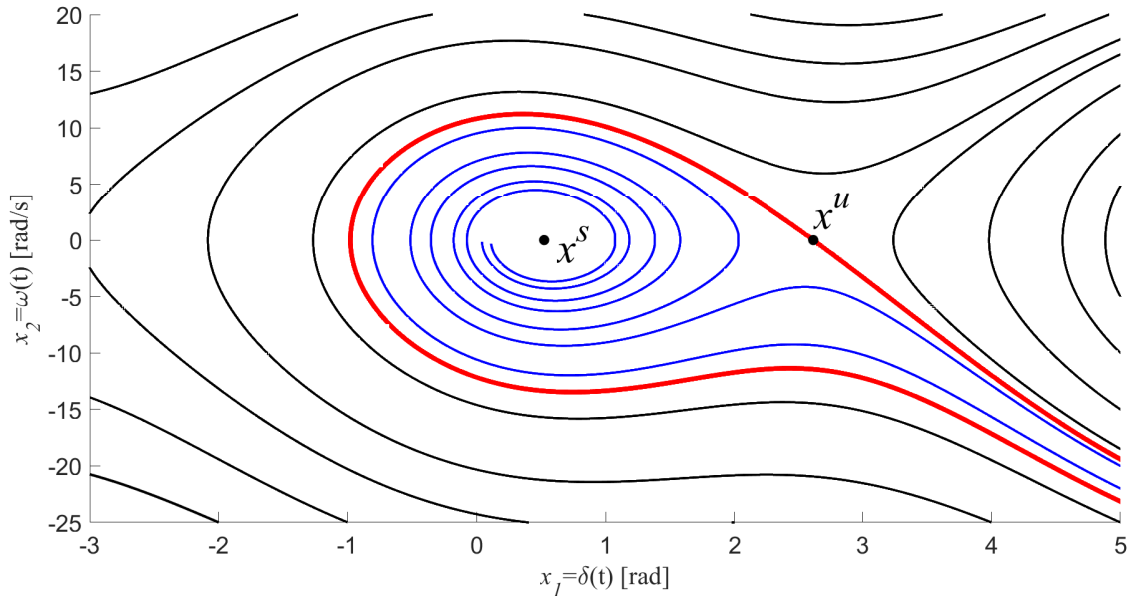
Figura A.6 – Trajetória no espaço de estado.



Fonte: Autor.

A análise empírica da estabilidade dos pontos de equilíbrio feita anteriormente não considerou nenhum aspecto sobre a ordem de grandeza das perturbações. A Figura A.7 apresenta o retrato de fase do sistema SMIB que permite uma avaliação deste aspecto. As trajetórias vermelhas correspondem às duas trajetórias que tendem ao ponto de equilíbrio instável x^u . Essas duas trajetórias, juntamente com o ponto de equilíbrio instável, delimitam a fronteira da região de atração do ponto de equilíbrio estável. Portanto, o ponto de equilíbrio instável pode ser considerado um ponto de decomposição. Já as trajetórias em azul convergem para o ponto de equilíbrio estável, pois se encontram dentro da área de atração desse ponto. Por outro lado, as trajetórias em preto convergem para outros pontos de equilíbrio, pois estão fora da região de atração do ponto de equilíbrio estável de interesse.

Figura A.7 – Órbitas do sistema SMIB



Fonte: Autor.

A.3 Análise espectral do sistema dinâmico

Para analisar o comportamento de um sistema não linear, a determinação dos pontos de equilíbrio e a verificação de sua estabilidade é crucial. A linearização das equações em torno de um ponto de equilíbrio é utilizada para investigar a estabilidade destes pontos através dos autovalores da matriz jacobiana do sistema. Assim, a partir do sistema não linear autônomo definido em (A.4), é realizada uma mudança de variável visando linearizar esse sistema em torno de um ponto de equilíbrio x^* , de maneira que uma pequena perturbação seja analisada em torno deste:

$$x = x^* + \Delta x \quad (\text{A.13})$$

Substituindo na Equação (A.4), tem-se:

$$\dot{x} = \dot{x}^* + \Delta \dot{x} = 0 + \Delta \dot{x} = f(x^* + \Delta x) \quad (\text{A.14})$$

A Equação (A.4) pode ser aproximada expandindo o campo vetorial em uma série de Taylor e desprezando as derivadas de alta ordem:

$$\dot{x}_i = \Delta \dot{x}_i = f_i(x^* + \Delta x) \approx f_i(x^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (\text{A.15})$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Como $f_i(x^*) = 0$, tem-se que:

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (\text{A.16})$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Desta maneira, a equação linearizada resultante da Equação (A.4) pode ser escrita, considerando-se a Equação (A.16) como:

$$\Delta \dot{x} = J(x^*) \Delta x \quad (\text{A.17})$$

sendo:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

A matriz $J(x^*)$ é chamada de matriz Jacobiana. Observe que a origem é um ponto de equilíbrio do sistema linearizado, os autovalores da matriz $J(x^*)$ determinam a estabilidade desse ponto. Para facilitar a compreensão, será analisado um sistema de dimensão $n = 2$. O parâmetro λ é denominado autovalor de $J(x^*)$, se existe um vetor não nulo v , conhecido como autovetor à direita de $J(x^*)$, tal que:

$$J(x^*)v = \lambda v \quad (\text{A.19})$$

em que, neste caso, $J(x^*) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $v \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Os autovalores da matriz $J(x^*)$ podem ser obtidos resolvendo a equação característica:

$$\det(J(x^*) - \lambda I) = 0 \quad (\text{A.20})$$

sendo I uma matriz identidade de ordem igual à da matriz $J(x^*)$. A Equação (A.20) dá origem a um polinômio de grau n na variável λ . Este polinômio é conhecido como polinômio característico.

Os autovalores de $J(x^*)$ são essenciais para avaliar a estabilidade do ponto de equilíbrio e compreender o comportamento do sistema frente a pequenas perturbações. A análise se baseia na observação se os autovalores são reais, complexos, múltiplos ou diferentes de zero, podendo um ou ambos serem zero, o que será caracterizado pela Definição A3.1.

Definição A3.1: Considere o sistema linear invariante no tempo:

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{A.21})$$

em que A é uma matriz real de 2×2 . A solução de A.21 para um estado inicial dado x_0 é dada por:

$$x(t) = Me^{(J_r t)} M^{-1} x_0 \quad (\text{A.22})$$

em que J_r é a forma de Jordan real de A e M é uma matriz real não singular tal que $M^{-1}AM = J_r$. Dependendo dos autovalores de A , a forma de Jordan real pode assumir uma das três formas a seguir:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

em que k é igual a 0 ou 1 e $\beta \in [0, +\infty)$. A primeira forma corresponde ao caso em que os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e distintos, a segunda forma corresponde ao caso em que os autovalores são reais e iguais, e a terceira forma corresponde ao caso de autovalores complexos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Além disso, no caso de autovalores reais, deve-se isolar o caso em que pelo menos um dos autovalores é zero. Nesse caso, a origem não é um ponto de equilíbrio isolado e o comportamento qualitativo do sistema é bastante diferente dos outros casos.

Caso 1: Ambos os autovalores são reais, em que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$.

Neste caso, $M = [v_1, v_2]$, em que v_1 e v_2 são os autovetores à direita reais associados a λ_1 e λ_2 . A mudança de coordenadas $z = M^{-1}x$ transforma o sistema em duas equações diferenciais de primeira ordem desacopladas:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2\end{aligned}\tag{A.24}$$

A solução, para o estado inicial (z_{10}, z_{20}) , é dada por:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_{10}e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\tag{A.25}$$

Eliminando t entre as duas equações, obtém-se:

$$z_2(t) = cz_1^{\lambda_1/\lambda_2}\tag{A.26}$$

em que $c = z_{20}/(z_{10})^{\lambda_1/\lambda_2}$ e o retrato de fase do sistema é dado pela família de curvas geradas a partir de A.26 ao permitir que a constante c tome valores arbitrários em $\mathbb{R}$.

A forma do retrato de fase depende dos sinais de λ_1 e λ_2 . Considere primeiro o caso em que ambos os autovalores são negativos. Sem perda de generalidade, tem-se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Neste caso, ambos os termos exponenciais $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ tendem a zero conforme $t \rightarrow \infty$. Além disso, como $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, o termo $e^{\lambda_2 t}$ tenderá a zero mais rapidamente do que o termo $e^{\lambda_1 t}$. Portanto, chama-se λ_2 de autovalor rápido e λ_1 de autovalor lento. A trajetória tende para a origem do plano $z_1 - z_2$ ao longo da curva (A.26), que agora tem uma razão λ_2/λ_1 maior do que um. A inclinação da curva é dada por:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{[(\lambda_2/\lambda_1)-1]}\tag{A.27}$$

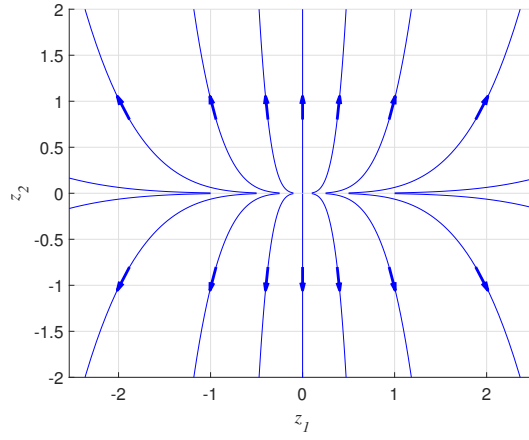
Como $[(\lambda_2/\lambda_1) - 1]$ é positivo, a inclinação da curva se aproxima de zero conforme $|z_1| \rightarrow 0$ e se aproxima de ∞ conforme $|z_1| \rightarrow \infty$. Portanto, à medida que a trajetória se aproxima da origem, ela se torna tangente ao eixo z_1 ; à medida que se aproxima de ∞ , ela se torna paralela ao eixo z_2 . Essas observações permitem esboçar as órbitas apresentadas nas Figuras A.8a e A.8b.

Quando transformadas de volta para as coordenadas x , a família de trajetórias terá o retrato típico apresentado na Figura A.9a. Note que no plano $x_1 - x_2$, as trajetórias se tornam tangentes ao autovetor lento v_1 à medida que se aproximam da origem e paralelas ao autovetor rápido v_2 longe da origem. Neste caso, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é chamado de nó estável.

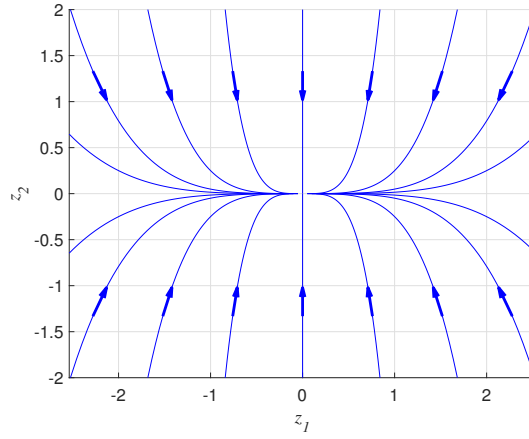
Quando λ_1 e λ_2 são positivos, o retrato de fase manterá a característica da Figura A.9a, mas com as direções das trajetórias invertidas, uma vez que os termos exponenciais

Figura A.8 – Retrato de fase de:

(a) um nó instável



(b) um nó estável



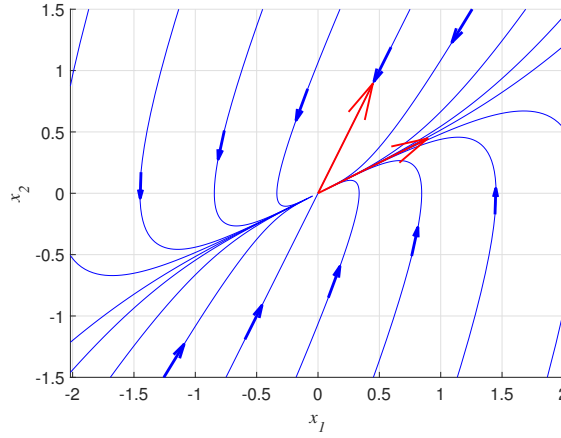
Fonte: Autor.

$e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ cresce exponencialmente conforme t aumenta. A Figura A.9b mostra o retrato de fase para o caso $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. O ponto de equilíbrio x^* é referido, neste caso, como um nó instável.

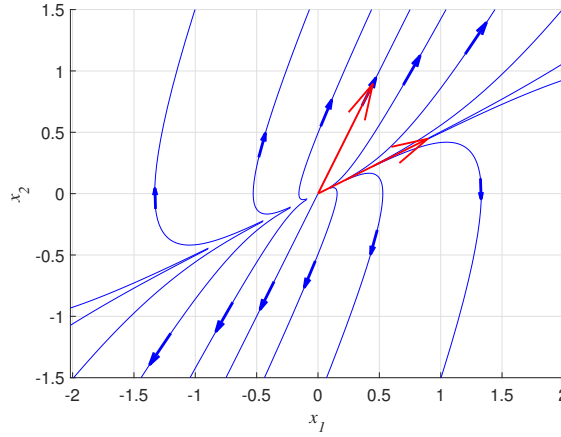
Suponha agora que os autovalores tenham sinais opostos. Em particular, deixe $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Neste caso, $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$ enquanto $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Portanto, chama-se λ_2 de autovalor estável e λ_1 de autovalor instável. Correspondentemente, v_2 e v_1 são chamados de autovetores estável e instável, respectivamente. A equação da trajetória (A.26) terá um expoente negativo (λ_2/λ_1). Assim, a família de trajetórias no plano $z_1 - z_2$ terá a forma típica apresentada na Figura A.10a. As trajetórias têm formas hiperbólicas. Elas se tornam tangentes ao eixo z_1 conforme $|z_1| \rightarrow \infty$ e tangentes ao eixo z_2 conforme $|z_1| \rightarrow 0$. A única exceção a essas formas hiperbólicas são as quatro trajetórias ao longo dos eixos. As duas trajetórias ao longo do eixo z_2 são chamadas de trajetórias estáveis, pois se aproximam da origem conforme $t \rightarrow \infty$, enquanto as duas trajetórias ao longo do eixo z_1 são chamadas de trajetórias instáveis, pois se aproximam do infinito conforme $t \rightarrow \infty$.

Figura A.9 – Retrato de fase para:

(a) um nó estável



(b) um nó instável



Fonte: Autor.

O retrato de fase no plano $x_1 - x_2$ é apresentado na Figura A.10b, na qual as trajetórias estáveis estão ao longo do autovetor estável v_2 e as trajetórias instáveis estão ao longo do autovetor instável v_1 . Neste caso, o ponto de equilíbrio é chamado de ponto de sela.

Caso 2: Autovalores complexos, em que $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

A mudança de coordenadas $z = M^{-1}x$ transforma o sistema (A.26) na forma:

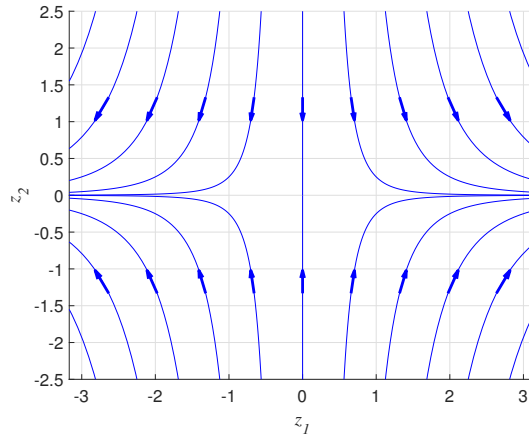
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= \alpha z_1 + \beta z_2\end{aligned}\tag{A.28}$$

A solução desta equação é oscilatória e pode ser expressa de forma mais conveniente em coordenadas polares:

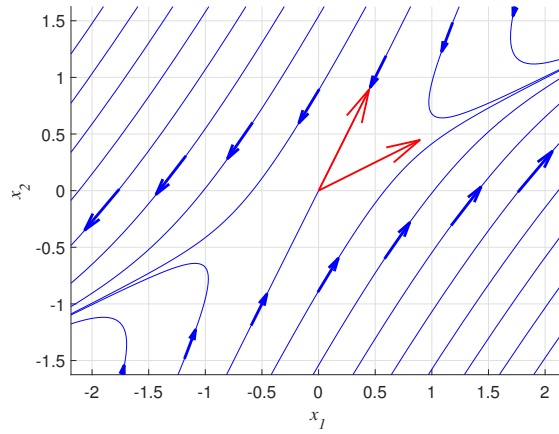
$$\begin{aligned}r &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\end{aligned}\tag{A.29}$$

Figura A.10 – Retrato de fase de um ponto de sela:

(a) em coordenadas modais



(b) em coordenadas originais



Fonte: Autor.

em que se tem duas equações diferenciais de primeira ordem desacopladas:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta\end{aligned}\tag{A.30}$$

A solução para um estado inicial dado (r_0, θ_0) é dada por:

$$\begin{aligned}r(t) &= r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \beta t\end{aligned}\tag{A.31}$$

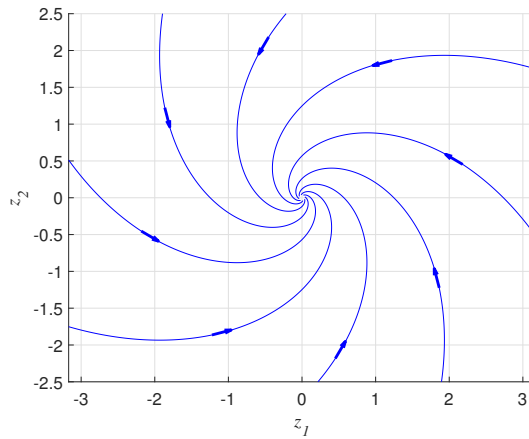
$$\begin{aligned}z_1 &= r_0 e^{\alpha t} \cos(\theta_0 + \beta t) \\ z_2 &= r_0 e^{\alpha t} \sin(\theta_0 + \beta t)\end{aligned}\tag{A.32}$$

Isso define uma espiral logarítmica no plano $z_1 - z_2$. Dependendo do valor de α , a trajetória assumirá uma das três formas apresentadas nas Figuras A.11a, A.11b e A.11c.

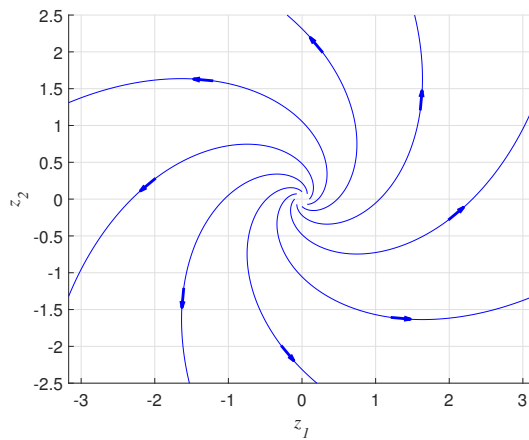
Quando $\alpha < 0$, a espiral converge para a origem; quando $\alpha > 0$, ela se afasta da origem. Já quando $\alpha = 0$, a trajetória é um círculo de raio r_0 . As Figuras A.12a, A.12b e A.12c apresentam as trajetórias no plano $x_1 - x_2$. O ponto de equilíbrio x^* é referido como um foco estável se $\alpha < 0$, foco instável se $\alpha > 0$, e centro se $\alpha = 0$.

Figura A.11 – Trajetórias típicas no caso de autovalores complexos.

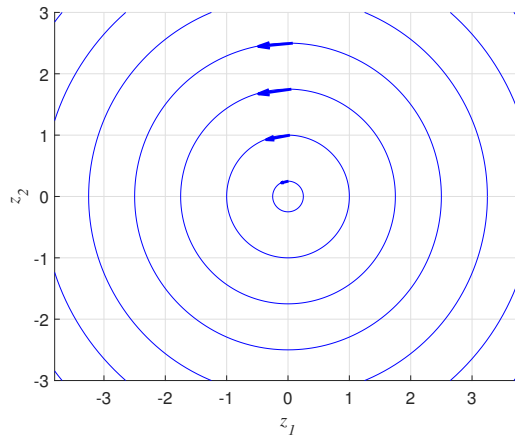
(a) $\alpha < 0$



(b) $\alpha > 0$



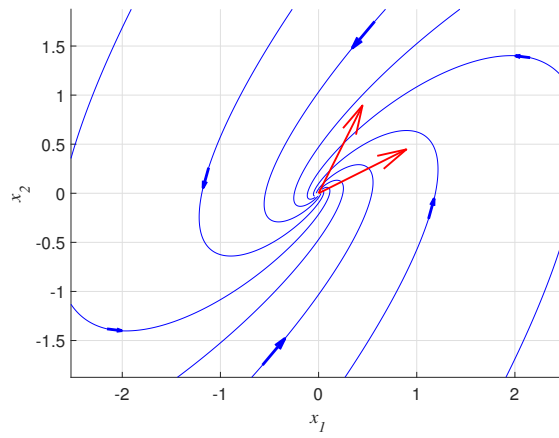
(c) $\alpha = 0$



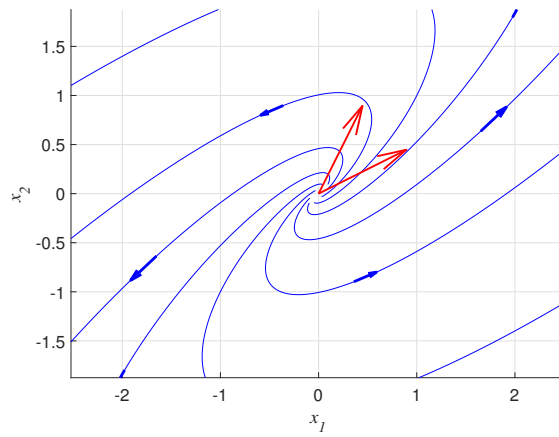
Fonte: Autor.

Figura A.12 – Retratos de fase para:

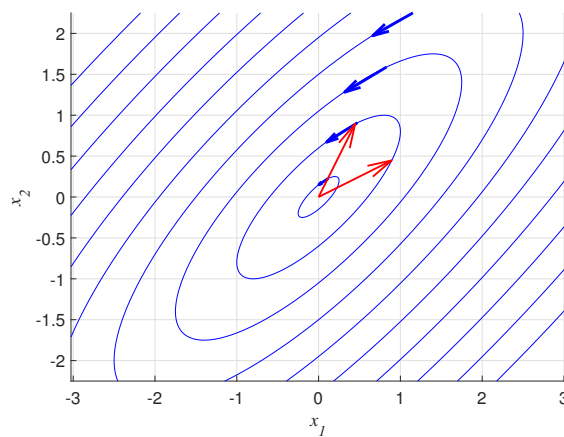
(a) um foco estável



(b) um foco instável



(c) um centro



Fonte: Autor.

Caso 3: Autovalores múltiplos não nulos, em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

A mudança de coordenadas $z = M^{-1}x$ transforma o sistema (A.26) na forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \lambda z_1 + k z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2\end{aligned}\tag{A.33}$$

cuja solução, para um estado inicial dado (z_{10}, z_{20}) , é dada por:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= e^{\lambda t}(z_{10} + k z_{20} t) \\ z_2(t) &= e^{\lambda t} z_{20}\end{aligned}\tag{A.34}$$

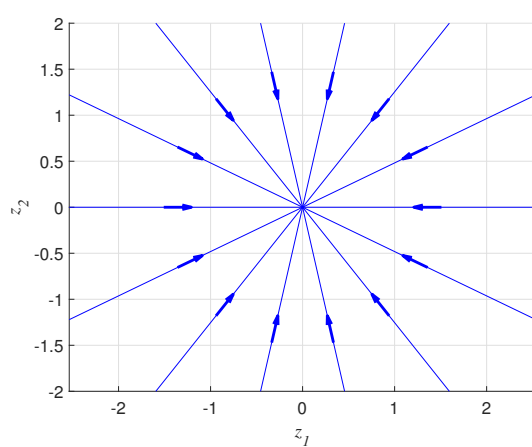
Eliminando t , obtém-se a equação da trajetória:

$$z_1 = z_2 \left[\frac{z_{10}}{z_{20}} + \frac{k}{\lambda} \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right) \right]\tag{A.35}$$

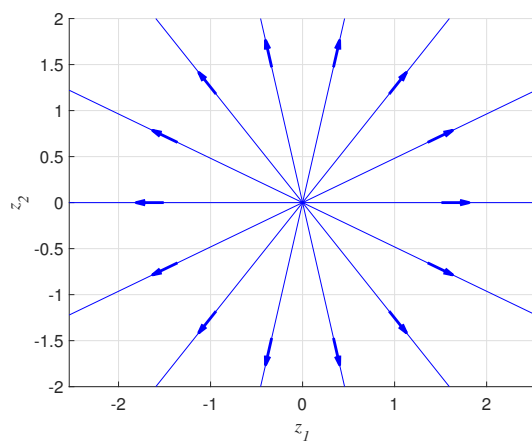
As Figuras A.13a e A.13b apresentam a forma das trajetórias quando $k = 0$, enquanto as Figuras A.14a e A.14b mostram a forma delas quando $k = 1$. O retrato de fase tem alguma semelhança com o retrato de um nó. Portanto, o ponto de equilíbrio x^* é geralmente referido como um nó estável se $\lambda < 0$ e nó instável se $\lambda > 0$. No entanto, observe que os retratos de fase das Figuras A.13a, A.13b, A.14a e A.14b não têm o comportamento assintótico lento-rápido que foi visto nas Figuras A.8a, A.8b, A.9a e A.9b, uma vez que a taxa de decaimento é a mesma nos dois eixos.

Figura A.13 – Retratos de fase para o caso de autovalores múltiplos não nulos quando $k = 0$:

(a) $\lambda < 0$



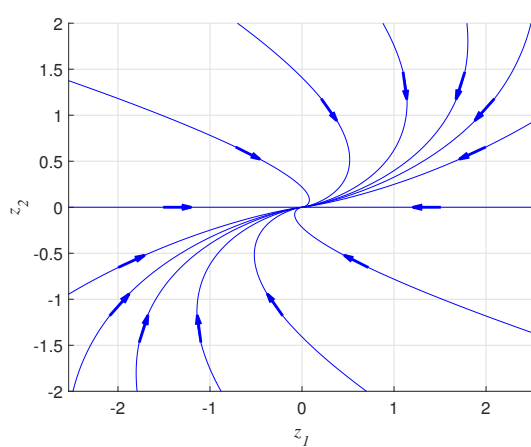
(b) $\lambda > 0$



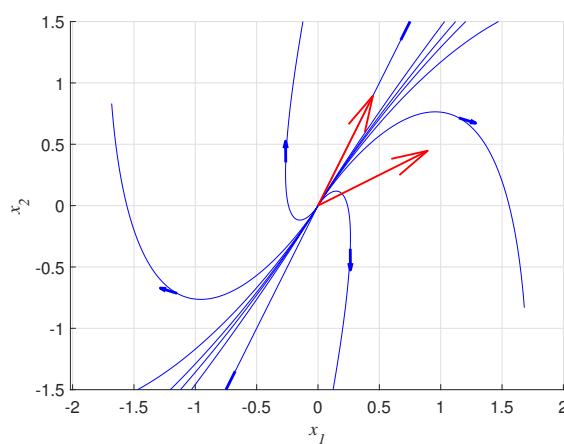
Fonte: Autor.

Figura A.14 – Retratos de fase para o caso de autovalores múltiplos não nulos quando $k = 1$:

(a) $\lambda < 0$



(b) $\lambda > 0$



Fonte: Autor.

Resumidamente, quando o ponto de equilíbrio x^* é isolado, o sistema pode exibir seis retratos de fase qualitativamente diferentes, que estão associados a diferentes tipos de equilíbrios: nó estável, nó instável, ponto de sela, foco estável, foco instável e centro. O tipo de ponto de equilíbrio é completamente especificado pela localização no plano complexo dos autovalores de A . Note que o comportamento qualitativo global (em todo o plano de fase) do sistema é determinado pelo tipo do ponto de equilíbrio. Isso é uma característica dos sistemas lineares ou linearizados.

Caso 4: Um ou ambos os autovalores são zero.

Quando um ou ambos os autovalores de A são zero, o retrato de fase é, de certa forma, degenerado. Nesse caso, a matriz A possui um espaço nulo não trivial. Qualquer vetor no espaço nulo de A é um ponto de equilíbrio para o sistema, ou seja, o sistema possui um subespaço de equilíbrio em vez de um ponto de equilíbrio. A dimensão do espaço nulo pode ser um ou dois; se for dois, a matriz A será a matriz nula. Este é um caso trivial em que todo ponto no plano é um ponto de equilíbrio. Quando a dimensão do espaço nulo é um, a forma de Jordan de A dependerá da multiplicidade do autovalor zero. Quando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, a matriz M é dada por $M = [v_1, v_2]$, em que v_1 e v_2 são os autovetores associados. Note que v_1 abrange o espaço nulo de A .

A mudança de variáveis $z = M^{-1}x$ resulta em:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 0 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2\end{aligned}\tag{A.36}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_{10} \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda_2 t}\end{aligned}\tag{A.37}$$

O termo exponencial irá crescer ou decair, dependendo do sinal de λ_2 . As Figuras [A.15a](#) e [A.15b](#) apresentam o retrato de fase no plano $x_1 - x_2$. Todas as trajetórias convergem para o subespaço de equilíbrio quando $\lambda_2 < 0$, e divergem dele quando $\lambda_2 > 0$.

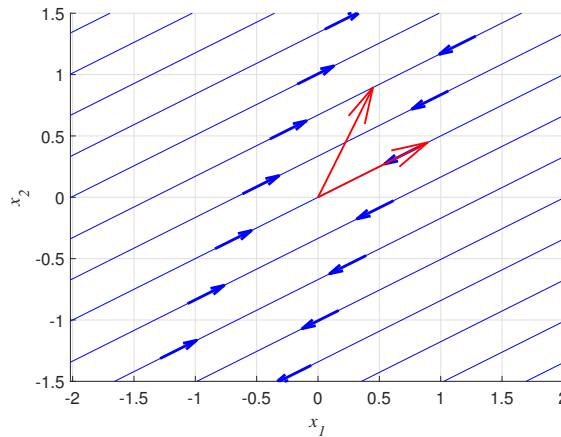
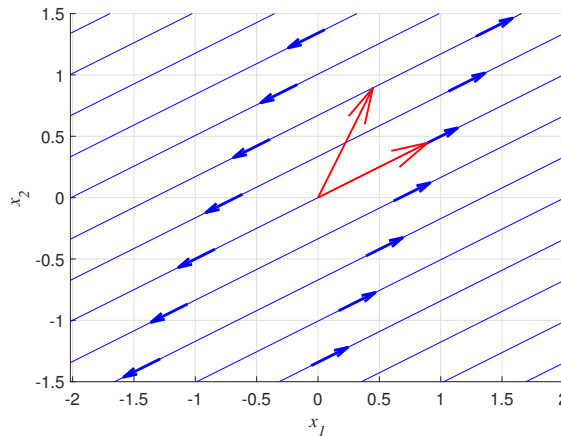
Quando ambos os autovalores estão na origem, a mudança de variáveis $z = M^{-1}x$ resulta em:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= 0\end{aligned}\tag{A.38}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned}z_1(t) &= z_{10} + z_{20}t \\ z_2(t) &= z_{20}\end{aligned}\tag{A.39}$$

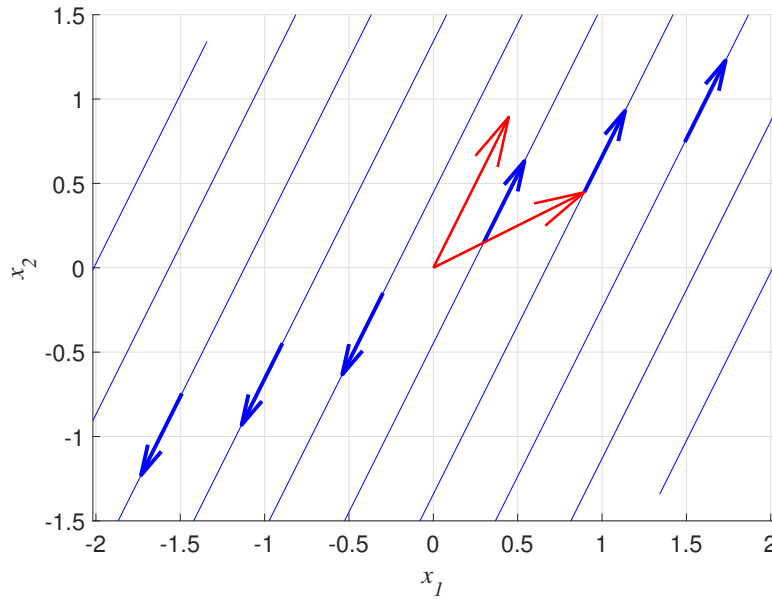
Figura A.15 – Retratos de fase para:

(a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ (b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ 

Fonte: Autor.

O termo $z_{20}t$ aumentará ou diminuirá, dependendo do sinal de z_{20} de modo que as trajetórias se deslocam para a esquerda quando z_{20} é negativo, quadrantes 3 e 4, e as trajetórias se deslocam para a direita quando z_{20} é positivo, quadrantes 1 e 2. O eixo z_1 é o subespaço de equilíbrio. A Figura A.16 apresenta o retrato de fase no plano $x_1 - x_2$. O retrato de fase na Figura A.16 é bastante diferente do das Figuras A.15a e A.15b. Trajetórias que começam fora do subespaço de equilíbrio movem-se paralelamente a ele.

O estudo do comportamento de sistemas lineares em torno do ponto de equilíbrio x^* é importante, pois em muitos casos, o comportamento local de um sistema não linear perto de um ponto de equilíbrio pode ser deduzido linearizando o sistema em torno desse ponto e estudando o comportamento do sistema linear resultante. A análise espectral do sistema dinâmico depende em grande parte de como os diversos retratos de fase qualitativos de um sistema linear persistem sob perturbações. Pode-se ganhar percepções sobre o comportamento de um sistema linear sob perturbações examinando o caso especial de perturbações lineares. Suponha que A tenha autovalores distintos e considere $A + \Delta A$,

Figura A.16 – Retratos de fase quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Fonte: Autor.

onde ΔA é uma matriz real de 2×2 cujos elementos têm magnitudes arbitrariamente pequenas. Pela teoria de perturbação de matrizes, sabe-se que os autovalores de uma matriz dependem continuamente de seus parâmetros. Isso significa que, dado qualquer número positivo ϵ , existe um número positivo correspondente δ tal que se a magnitude da perturbação em cada elemento de A for menor que δ , os autovalores da matriz perturbada $A + \Delta A$ estarão contidos em bolas abertas de raio ϵ centradas nos autovalores de A . Consequentemente, qualquer autovalor de A que esteja no semiplano direito aberto (parte real positiva) ou no semiplano esquerdo aberto (parte real negativa) permanecerá em seu respectivo semiplano após perturbações arbitrariamente pequenas. Por outro lado, os autovalores no eixo imaginário, quando perturbados, podem ir para o semiplano direito ou esquerdo do plano, já que uma bola centrada no eixo imaginário se estenderá em ambos os semiplanos, não importa o quão pequeno ϵ seja. Consequentemente, conclui-se que se o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ de $\dot{x} = Ax$ for um nó, foco ou ponto de sela, então o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ de $\dot{x} = (A + \Delta A)x$ será do mesmo tipo para perturbações suficientemente pequenas. A situação é bastante diferente se o ponto de equilíbrio for um centro. Considere a seguinte perturbação da forma de Jordan real no caso de um centro:

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

em que μ é um parâmetro de perturbação. Quando μ é positivo, o ponto de equilíbrio do sistema perturbado é um foco instável; quando μ é negativo, é um foco estável. Isso é

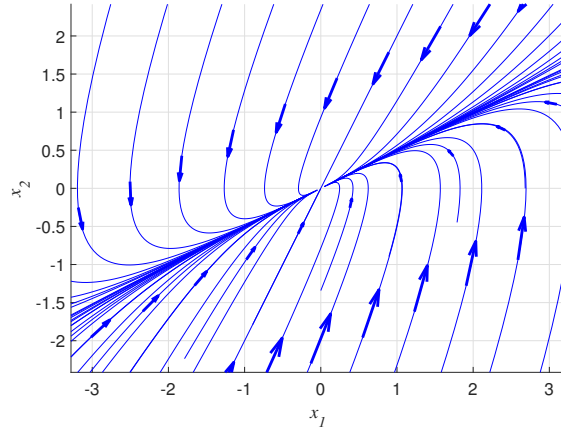
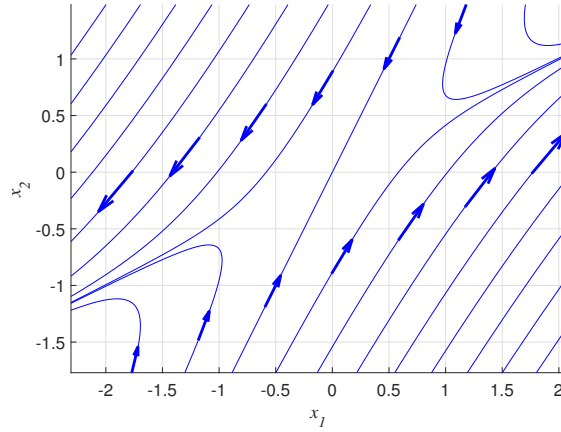
verdade, não importa quão pequeno μ seja, desde que seja diferente de zero. Os retratos de fase de um foco estável e um foco instável são qualitativamente diferentes do retrato de fase de um centro, com isso um ponto de equilíbrio central não persistirá sob perturbações. Os pontos de equilíbrio de nó, foco e sela são ditos estruturalmente estáveis porque mantêm seu comportamento qualitativo sob perturbações infinitesimalmente pequenas, enquanto o ponto de equilíbrio central não é estruturalmente estável. A distinção entre os dois casos é devido à localização dos autovalores de A , com os autovalores no eixo imaginário sendo vulneráveis a perturbações. Isso traz a definição de um ponto de equilíbrio hiperbólico. A origem $x^* = 0$ é dita um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\dot{x} = Ax$ se A não tiver autovalores com parte real zero.

Quando A tem múltiplos autovalores reais não nulos, perturbações infinitesimalmente pequenas podem resultar em um par de autovalores complexos. Portanto, um nó estável (respectivamente, instável) permanecerá um nó estável (respectivamente, instável) ou se tornará um foco estável (respectivamente, instável).

Quando A tem autovalores em zero, espera-se que perturbações movessem esses autovalores para longe de zero, resultando em uma grande mudança no retrato de fase. No entanto, acontece que há uma diferença importante entre o caso em que há apenas um autovalor em zero e o caso em que ambos os autovalores estão em zero ($A \neq 0$). No primeiro caso, a perturbação do autovalor zero resulta em um autovalor real $\lambda_1 = \mu$ onde μ pode ser positivo ou negativo. Como o outro autovalor λ_2 é diferente de zero, sua perturbação o manterá longe de zero. Além disso, já que as perturbações são arbitrariamente pequenas, $|\lambda_1| = |\mu|$ será muito menor que $|\lambda_2|$. Assim, tem-se dois autovalores reais distintos, o que significa que o ponto de equilíbrio do sistema perturbado será um nó ou um ponto de sela, dependendo dos sinais de λ_2 e μ . Isso já é uma mudança importante no retrato de fase. No entanto, um exame cuidadoso do retrato de fase fornece mais *insights* sobre o comportamento qualitativo do sistema. Como $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$, o termo exponencial $e^{\lambda_2 t}$ mudará com t muito mais rápido do que o termo exponencial $e^{\lambda_1 t}$. Isso resulta nos retratos de fase típicos de um nó e um ponto de sela mostrados nas Figuras A.17a e A.17b, para o caso $\lambda_2 < 0$. A comparação desses retratos de fase com a Figura A.15a apresenta alguma semelhança. Em particular, semelhante às Figuras A.15a e A.15b, trajetórias que começam fora do autovetor v_1 convergem para esse vetor ao longo de linhas (quase) paralelas ao autovetor v_2 . Conforme se aproximam do vetor v_1 , tornam-se tangentes a ele e movem-se ao longo dele.

Quando $\mu < 0$, o movimento ao longo de v_1 converge para a origem (nó estável), enquanto quando $\mu > 0$, o movimento ao longo de v_1 tende ao infinito (ponto de sela). Esse comportamento qualitativo é característico de sistemas singularmente perturbados.

Quando ambos os autovalores de A são zeros, o efeito das perturbações é mais dramático. Considere as quatro possíveis perturbações da forma de Jordan:

Figura A.17 – Retratos de fase de um sistema perturbado quando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$:(a) $\mu < 0$ (b) $\mu > 0$ 

Fonte: Autor.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

em que μ é um parâmetro de perturbação que pode ser positivo ou negativo. Pode ser facilmente visto que os pontos de equilíbrio nesses quatro casos são um centro, um foco, um nó e um ponto de sela, respectivamente. Em outras palavras, todos os possíveis retratos de fase de um equilíbrio isolado poderiam resultar de perturbações.

Além disso, o método de estabilidade de Lyapunov é uma ferramenta crucial para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos mais complexos e não lineares. O primeiro método de Lyapunov, também conhecido como o Método Indireto de Lyapunov, fornece condições sob as quais é possível afirmar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear.

Teorema A3.1: Dado o sistema dinâmico da Equação (A.4), suponha que x^* é um ponto

de equilíbrio e $J(x^*)$ a matriz jacobiana do campo vetorial, Equação (A.18), calculada no ponto de equilíbrio de interesse. Então:

- O ponto de equilíbrio x^* é assintoticamente estável se a parte real de todos os autovalores de $J(x^*)$ for menor que 0.
- O ponto de equilíbrio x^* é instável se a parte real de um ou mais dos autovalores de $J(x^*)$ for maior que 0.
- Se um autovalor tiver parte real nula, então não se pode inferir nada sobre a estabilidade, pois as derivadas de alta ordem desconsideradas na linearização podem resultar em um comportamento completamente diferente para o ponto de equilíbrio do sistema não linear em comparação com o linearizado.

Por exemplo, considere o sistema dinâmico dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^3\end{aligned}\tag{A.42}$$

com ponto de equilíbrio $x^* = (0, 0)$ e a matriz jacobiana avaliada em x^* dada por:

$$J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\tag{A.43}$$

Os autovalores de $J(0)$ são $\lambda = +j$ e $\lambda = -j$. Portanto, a origem é um centro, sugerindo a possibilidade de se tornar um foco instável ou estável do sistema não linear quando os termos de ordem mais elevada da Série de Taylor forem considerados. No entanto, a origem é uma sela no sistema não linear.

Em suma, os autovalores podem revelar informações importantes sobre a estabilidade e o comportamento qualitativo de sistemas dinâmicos. Através do cálculo dos autovalores e autovetores da matriz J , a resposta do sistema nessas condições pode ser caracterizada. Além disso, a estabilidade de um ponto de equilíbrio ou ponto de operação específico pode ser estudada.

O Teorema de Hartman-Grobman é um resultado importante na teoria dos sistemas dinâmicos que estabelece uma conexão entre a estabilidade de um ponto de equilíbrio em um sistema dinâmico não linear e a estabilidade de seu equivalente linearizado próximo a esse ponto. Em termos simples, o teorema afirma que, sob certas condições, o comportamento qualitativo próximo a um ponto de equilíbrio em um sistema dinâmico não linear é essencialmente o mesmo que o comportamento de seu equivalente linearizado próximo a esse ponto. Mais precisamente:

- Se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é assintoticamente estável, então seu equivalente linearizado próximo a esse ponto também é assintoticamente

estável.

- Se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é instável, então seu equivalente linearizado próximo a esse ponto também é instável.

- Se um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é marginalmente estável, isso implica que seu equivalente linearizado próximo a esse ponto também exibe a mesma característica de margem de estabilidade. Em suma, um ponto de equilíbrio é considerado marginalmente estável quando as trajetórias próximas a ele permanecem próximas ao longo do tempo, sem convergir nem divergir. Este estado indica que pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio resultam em movimentos oscilatórios ou periódicos.

A seguir, é apresentado um exemplo de análise de estabilidade para o sistema SMIB.

Exemplo A3.1: Dada a equação de *swing* (A.11) do Exemplo A2.1, a sua linearização pode ser realizada escrevendo o sistema de equações diferenciais linearizado em torno dos pontos de equilíbrios. Sendo assim, a Jacobiana do sistema linearizado é apresentada por:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_1} (x_2) \right|_{(x_1^*, x_2^*)} \\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_2} (x_2) \right|_{(x_1^*, x_2^*)} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{P_m - P_e \sin(x_1) - Dx_2}{M} \right) \right|_{(x_1^*, x_2^*)} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{P_m - P_e \sin(x_1) - Dx_2}{M} \right) \right|_{(x_1^*, x_2^*)} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Resultando em:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{P_e \cos(x_1^*)}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \Delta x \quad (\text{A.46})$$

em que x_1^* é o valor de x_1 nos pontos de equilíbrio, ie, δ^s e δ^u mostrados na Figura A.4. Note que a segunda derivada de x_1 em relação a x_1 é zero porque $\dot{x}_1$ não depende diretamente de x_1 .

Com isso, através da Equação (A.20) obtém-se então a equação característica associada à análise espectral do SMIB expressa por:

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{P_e \cos(x_1^*)}{M} & -\frac{D}{M} - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + \frac{D}{M}\lambda + \frac{P_e \cos(x_1^*)}{M} = 0 \quad (\text{A.47})$$

Portanto, para determinar a estabilidade do sistema é preciso calcular os autovalores da matriz $J(x^*)$ e verificar suas propriedades conforme descrito anteriormente. Para isso, resolvendo-se a equação quadrática (A.47) obtêm-se as seguintes soluções:

$$\lambda = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4MP_e \cos(x_1^*)}}{2M} \quad (\text{A.48})$$

Uma vez que a constante de amortecimento viscoso, D , é sempre positiva, pode-se concluir a análise de estabilidade do sistema SMIB com base no discriminante $\Delta = D^2 - 4M(P_e \cos(x_1^*))$. Para isso, é necessário calcular explicitamente os autovalores usando a Equação (A.48), em seguida, analisar seus sinais.

Da Figura A.4 pode-se ver que $\cos(x^*) > 0$ para $x^* = (\delta^s, 0)$ e $\cos(x^*) < 0$ para $x^* = [\delta^u, 0]$. Além disso, os valores típicos de D, H (constante de inércia tipicamente fornecida pelos fabricantes e da qual se calcula M) e P_e implicam que P_e e H têm a mesma ordem de grandeza, com P_e em geral valendo de 25 a 100% de H , sendo $M = H/(\pi 60)$, enquanto D tem valores típicos de 1 a 5% de P_e e $P_m < P_e$. Normalmente $\Delta > 0$ quando $\cos(x^*) < 0$, o que resulta em duas raízes reais de sinal trocado, ou seja, o ponto de equilíbrio $[\delta^u, 0]$ é uma sela, portanto instável. E $\Delta < 0$ quando $\cos(x^*) > 0$, o que resulta em raízes complexas conjugadas cuja taxa de decaimento é dada por $-D/(2M)$, ou seja, o ponto de equilíbrio $[\delta^s, 0]$ é um foco estável, isso confirma de modo rigoroso a análise empírica feita para o SMIB. Considerando variações na configuração do sistema, temos vários modos de operação: i) quando $P_m > P_e$ não existem pontos de equilíbrio para o sistema. Esse resultado ilustra uma característica específica dos sistemas dinâmicos não lineares, destacada anteriormente no texto; ii) quando $P_m = P_e$ então ocorre uma fusão entre os pontos de equilíbrio, ie, $[\delta^s, 0] = [\delta^u, 0] = [\pi/2, 0]$, e $\cos(x^*) = 0$, que implica que os autovalores da matriz jacobiana se tornam 0 e $-D/M$, cuja estabilidade não pode ser determinada apenas analisando a Jacobiana do sistema linearizado. Essa fusão, melhor conhecida na literatura como bifurcação, é uma característica comum em sistemas dinâmicos não lineares e ressalta a complexidade da análise de estabilidade nesses casos. Note que na iminência da fusão $D^2 > |4MP_e \cos(x^*)|$ o que implica que o foco estável se converte num nó estável enquanto a sela permanece uma sela, mas ambos com dinâmicas rápidas e lentas similares às de um sistema singularmente perturbado. Desse modo, a bifurcação que ocorre é do tipo sela-nó, Khalil(2002).

Portanto, o número de pontos de equilíbrio e suas características de estabilidade mudam com os parâmetros. Se os autovalores tiverem parte real negativa, o sistema será estável, se tiverem parte real positiva, o sistema será instável e se pelo menos um dos

autovalores tiver parte real igual a zero, será necessário realizar uma análise adicional para determinar a estabilidade do sistema.

A compreensão da estabilidade dos pontos de equilíbrio é fundamental para desvendar os intrincados comportamentos dinâmicos dos sistemas, sendo abordada de forma simplificada neste apêndice, com o intuito de incorporar apenas os conceitos mais relevantes a este trabalho. Reconhecendo que a análise de estabilidade desempenha um papel crucial na capacidade de prever e controlar sistemas dinâmicos, estabelecendo os fundamentos essenciais para explorar e compreender uma diversidade de fenômenos complexos. Esses conceitos foram aplicados no presente trabalho e, utilizados para uma compreensão mais aprofundada do trabalho de Chiang e Chu (1996), os quais foram explorados no Capítulo 4 no método SDAEGR. Destaca-se, sobretudo, as condições de estabilidade impostas para a perturbação e a obtenção de pontos de sela do sistema. Isso foi realizado através da análise espectral, iniciada a partir de um ponto de equilíbrio previamente determinado pelo método mencionado, cujos resultados foram analisados nas Seções A.2 e A.3.