

UNESP  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá  
1983



UM ESTUDO FENOMENOLÓGICO DA INTERAÇÃO ENTRE QUARKS  
E SEUS ESTADOS LIGADOS

AUGUSTO BRANDÃO d'OLIVEIRA

TESE DE LIVRE-DOCÊNCIA

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

1983

00078

T539.1(043)

048e

78



1110000078



T. 539.4 (0.5)

AGOSTO BRANDÃO B. OLIVEIRA

TRABALHO DE FUNDAMENTAÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

1983

T. 539.4 (0.5)

0.5

BIBLIOTECA



## R E S U M O

Fazemos um estudo numérico do espectro dos estados ligados de quark-antiquark (mesons) e quark-quark-quark (barions), numa aproximação não relativística usando potenciais efetivos confinantes de vários tipos, entre eles

$$V(r) = k r^n + C - 4/3 (\alpha_s/r)$$

$$\text{e } V(r) = k \log (r/r_0) - 4/3 (\alpha_s/r)$$

Discutimos aspectos ligados à natureza escalar e vetorial do potencial confinante, bem como termos dependentes do spin, no contexto da Cromodinâmica Quântica (QCD).

Comparamos os resultados obtidos com o estado atual das medidas experimentais relativas as famílias  $J/\psi$  e  $T$  e prevemos a massa de barions pesados do tipo (ccc) e (bbb). Comenta-se também sobre a relação entre as forças quark-quark e as forças fortes entre nucleons.

Em Apêndices, apresentamos um novo algoritmo para a determinação numérica de autovalores de matrizes tri diagonais e um novo método para a solução da equação radial de Schroedinger, capaz de fornecer expressões fechadas para autovalores e autofunções correspondentes a potenciais para os quais uma solução analítica não é conhecida.

# I N D I C E

INTRODUÇÃO	1
1. Partículas Elementares e Interações Fundamentais	3
2. Teorias de Gauge	8
2.1. Eletrodinâmica Quântica	8
2.2. Interações fracas	11
2.3. Teorias de gauge	11
2.4. Teoria Eletrofraca de Weinberg-Salam	15
2.5. Cromodinâmica Quântica	17
3. Espectroscopia de Sistemas ligados de quarks	20
4. Mesons - estados ligados de quark e antiquark	25
5. Barions - estados ligados de três quarks	44
6. A Cromodinâmica Quântica e as forças nucleares	60
7. Conclusão	64
Apêndices - Métodos Numéricos	
A - Um algoritmo novo para calcular autovalores de matrizes tridiagonais	78
B - Um novo método de solução da Equação de Schroedinger	82
C - Alguns resultados esparsos	101



## A G R A D E C I M E N T O S

Nossos agradecimentos ao CNPq, a FINEP, ao CTA e a CNEN, que financiaram parcialmente as pesquisas que levaram a esta tese.

Nossos agradecimentos ao Prof. Nicim Zagury e S. Mckee por sugestões, e aos Professores R. Chanda e J. C. Gallas, coautores de alguns dos resultados apresentados.

Ao Prof. Hélio Freitas de Carvalho por uma colaboração desde 1976 e demonstração de amizade que muito contribuíram para manter durante todos esses anos estas atividades de pesquisa.

Ao Dr. Edgardo Gerck, o qual, como meu aluno, desenvolveu os resultados apresentados no Apêndice, que são métodos inteiramente novos e de grande aplicabilidade para resolução de certo tipo de equações diferenciais.

Aos Professores A. Washington e E. Schall, com os quais trabalhei em outras áreas, amigos das horas difíceis, sem cujo incentivo talvez este trabalho não tivesse sido escrito.

E finalmente a Waldete, Roger, Vânia, Carolina e Augusto, que participaram de maneira indireta de tudo isto.



## INTRODUÇÃO

Da mesma maneira que há alguns anos atrás poderíamos considerar o conhecimento da estrutura atômica da matéria como sendo talvez a maior contribuição filosófica da Física, hoje em dia poderíamos sugerir que o conhecimento de que a estrutura do Universo seja organizada em camadas, cada uma delas caracterizada por um nível espectroscópico, quase que um Universo à parte, seja uma das conclusões mais sintéticas da ciência moderna.

Dos aglomerados de galáxias, passando pela estrutura molecular que é o nível espectroscópico do homem, até a espectroscopia nuclear e mais ainda a espectroscopia de hadrons e leptons, a sugestão permanece de que o Universo seja organizado em camadas.

A busca pela compreensão da natureza da matéria tem sido repetidas vezes influenciada pela idéia de que a complexidade de um sistema é evidência para uma subestrutura dos constituintes que entram na estrutura composta do sistema complexo.

Assim a física foi da matéria para os átomos; destes para os eletrons e núcleos; dos núcleos para os nucleons; e dos nucleons para os quarks. Isto sugere a pergunta: De que são compostos os quarks e leptons, ou seriam eles realmente pontuais? Não existe atualmente nenhuma evidência experimental que indique uma subestrutura para leptons e quarks, mas o terreno está aberto a especulação e novas descobertas.

Da mesma maneira que a descoberta que a terra não era o centro do universo influenciou todo o pensamento filosófico do homem, dando uma dimensão nova à sua vida, como é visível na História da Humanidade nos últimos cinco séculos, é possível que os temas que hoje a Física aborda venham a influenciar a evolução



da Humanidade através de conceitos de ordem, harmonia e simetria, organização em camadas hierárquicas, e das implicações desses conceitos para com a Cosmologia e a Biologia (Relatividade e Física de Partículas, e Química Quântica).

O progresso da Física de Partículas seguiu duas linhas mais ou menos paralelas. De um lado os avanços em Teoria Quântica dos Campos. De outro lado grandes avanços qualitativos e quantitativos relativos ao correlacionamento dos fatos experimentais, como por exemplo a descoberta de um número imenso de partículas e a aplicação do modelo de quarks para explicá-las.

Este trabalho consiste na reunião de vários resultados originais por nós publicados sobre o estudo de hadrões como estados ligados de quarks, e algumas considerações sobre as interações quark-quark e sua relação com as interações fortes, que fazem parte de projeto de pesquisa ainda em andamento. Os Capítulos 2 e 3 apresentam um resumo de Teoria de Gauge e da Cromodinâmica Quântica (QCD), para por assim dizer montar o cenário teórico no qual se inserem esses resultados de caráter mais fenomenológicos.

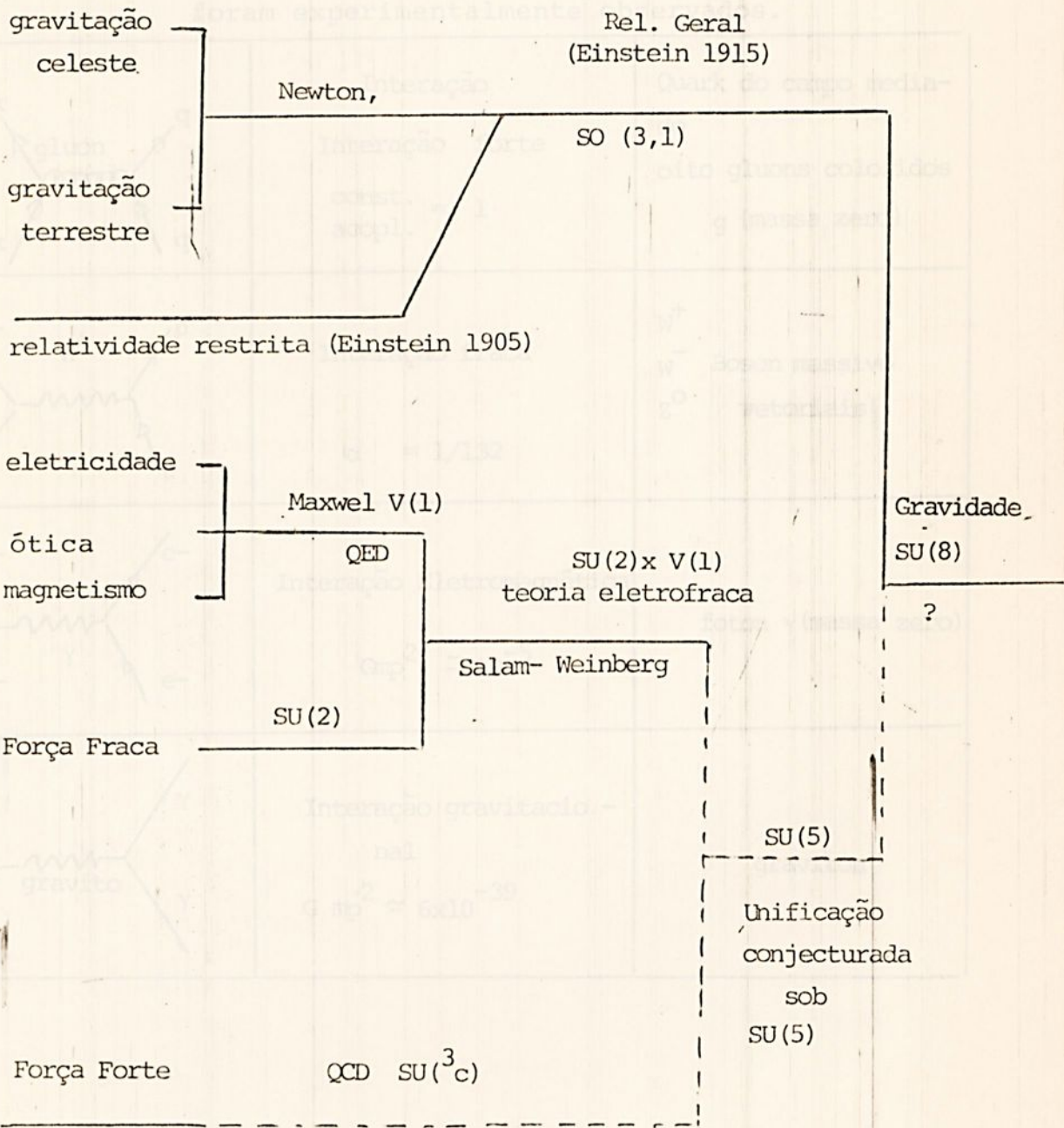
Em Apêndices reunimos alguns resultados originais sobre a parte matemática, em particular um algoritmo novo para resolução de autovalores de matrizes tridiagonais, e um método novo de larga aplicabilidade em várias áreas da Física para a solução da equação de Schrödinger de maneira semi-analítica.





FIG. 1.1.

A FÍSICA E AS INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS  
A GRANDE SÍNTESE



A busca de uma teoria unificada é um dos sonhos que permeiam quase toda atividade em física teórica.

A teoria quântica dos campos é um quadro teórico capaz de descrever as interações através de troca de quanta. A tabela 1.1. mostra as interações, suas intensidades relativas e os quanta trocados associados a cada interação.

Tabela 1.1 As Interações e os quanta a ele associados. Os fótons e os Bósons vetoriais já foram experimentalmente observados.

<p>quark gluon quark</p>	<p>Interação Interação forte const. = 1 acopl.</p>	<p>Quark do campo mediado oito gluons coloridos g (massa zero)</p>
<p>e- ν W+ p μ</p>	<p>Interação fraca <math>\alpha = 1/132</math></p>	<p>W+ W- Z0 Boson massivo vetoriais</p>
<p>e- e- γ e- e-</p>	<p>Interação Eletromagnética <math>G_{mp}^2 \approx 10^{-5}</math></p>	<p>foton γ (massa zero)</p>
<p>γ gravito γ</p>	<p>Interação gravitacional <math>G_{mp}^2 \approx 6 \times 10^{-39}</math></p>	<p>graviton</p>

Com exceção das partículas que são quanta dos campos mediadores, todas as partículas podem ser classificadas em dois tipos: hadrons e leptons.

Os hadrons são supostos serem compostos de terminais elementares, chamados quarks.

As tabelas 1.2 e 1.3 mostram os fermions conhecidos e os quarks que se supõem existirem.

Conhece-se atualmente quase 400 hadrons.

A figura 1.2 mostra uma classificação dos hadrons.

Fig. 1.2 Classificação dos hadrons  
números entre parênteses indicam massas em MeV

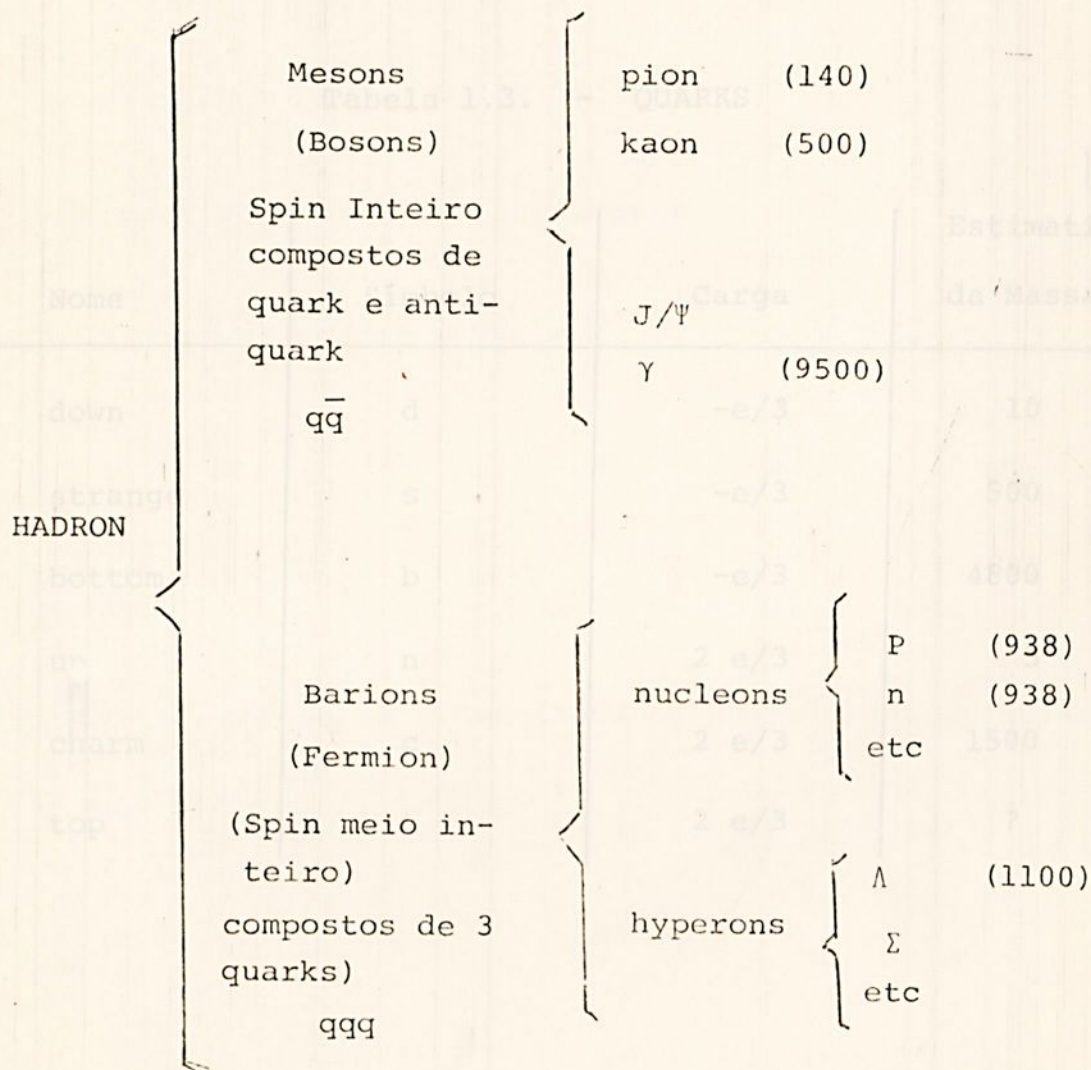


Tabela 1.2. - LEPTONS

Nome do lepton	Símbolo	Massa
eletron	$e$	0,5
muon	$\mu$	106
tau	$\tau$	1782 $\neq$ 4
neutrino do eletron	$\nu_e$	$< 6 \times 10^{-5}$
neutrino do muon	$\nu_\mu$	$< 0,57$
neutrino do tau	$\nu_\tau$	$< 250$

Tabela 1.3. - QUARKS

Nome	Símbolo	Carga	Estimativa da Massa
down	$d$	$-e/3$	10
strange	$s$	$-e/3$	500
bottom	$b$	$-e/3$	4800
up	$u$	$2 e/3$	5
charm	$c$	$2 e/3$	1500
top	$t$	$2 e/3$	?

## 2. TEORIAS DE GAUGE

### 2.1. Eletrodinâmica Quântica

A única maneira conhecida de descrever interações locais invariantes de Lorentz é construir uma teoria de campos que descrevem os leptons e os ftons.

O campo livre leptônico,  $\Psi_\alpha$  obedece a equação de Dirac

$$i (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi_\beta(x)}{\partial x^\mu} - m_0 \Psi_\alpha(x) = 0 \quad (2.1)$$

$\Psi_\alpha(x)$  é um spinor de quatro componentes

$$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

são matrizes 4 x 4 que satisfazem

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -(\gamma^0)^2 = -1 \quad (2.2)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad \mu \neq \nu \quad (2.3)$$

Fazendo  $\bar{\Psi}_\alpha(x) = \Psi_\beta^+ (\gamma^0)_{\beta\alpha}$

podemos escrever uma densidade de Lagrangiana invariante

$$\mathcal{L}_0 = i \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi(x) - m_0 \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (2.4)$$

A partir da qual a eq. de Dirac pode ser deduzida como uma equação de movimento.

Esta densidade de Lagrangiana é invariante sob as transformações

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\lambda} \Psi(x) \quad (2.5)$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-i\lambda} \quad (2.6)$$

que é chamada transformação global U(1). Como consequência (Teorema de Noether existe uma corrente

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \quad (2.7)$$

que é conservada:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu(x) = 0 \quad (2.8)$$

e da origem a conservação de carga

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (2.9)$$

A densidade de Lagrangiana livre não é invariante sob transformações locais U(1) onde  $\lambda(x)$  depende de  $x$ . A invariância é entretanto mantida se a Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_e(x) = i \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i e_0 A_\mu(x) \right) \Psi(x) - m_0 \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (2.10)$$

e as transformações forem

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\lambda(x)} \Psi(x) \quad (2.11)$$

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{-i\lambda(x)} \quad (2.12)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e_0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lambda(x) \quad (2.13)$$

a substituição de  $\vec{\nabla}$  por  $\vec{\nabla} - ieA_\mu$  é familiar da mecânica quântica não relativística e é o que se chama de acoplamento mínimo. A transformação global é chamada de transformação de gauge (mais propriamente local de gauge ou de 2a. espécie).  $A_\mu$  é o campo de gauge (ou potencial vetor). Se este campo deve ter um papel dinâmico, isto é, deve obedecer a equações de movimento (equações de Maxwell), devemos acrescentar o termo

$$\mathcal{L}_\mu = - \frac{1}{4} \left| F_{\mu\nu}(x) \right|^2 \quad (2.14)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu(x) \quad (2.15)$$

à Lagrangiana.

Observe que um termo da forma

$$- \frac{1}{2} \frac{m^2}{c} \left[ A_\mu(x) \right]^2$$

representaria uma massa do foton, e violaria a invariância de gauge. Campo de gauge representam partículas sem massa no caso do foton

## 2.2 Interações fracas

Para todas as interações fracas estudadas até 1970, a lagrangiana fenomenológica

$$\mathcal{L}_w = \frac{1}{\sqrt{2}} G J_\alpha^+ (x) J^\alpha (x) \quad (2.16)$$

onde

$$J^\alpha (x) = J_{\text{leptons}}^\alpha + J_{\text{hadrons}}^\alpha \quad (2.17)$$

$$J_{\text{lepton}}^\alpha = \sum_{\text{lepton}} \bar{\Psi}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi(x) \quad (2.18)$$

$$J_{\text{hadrons}}^\alpha = \bar{\Psi} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \left[ \cos \theta \eta(x) + \sin \theta \lambda(x) \right] \quad (2.19)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de Cabibbo, reproduzida bem os resultados experimentais, mas não era teoricamente satisfatória. Entre outras coisas era não renormalizável. Hoje sabemos que para que uma Lagrangiana fraca seja renormalizável, ela deve ser invariante sob uma transformação de gauge generalizada. Isto pode ser apresentado como uma generalização do caso da eletrodinâmica quântica, QED.

## 2.3. Teorias de Gauge

A generalização das transformações  $U(1)$  envolvem transformações unitárias que atuam misturando um conjunto de campos fermiônicos



$$\Psi_A(x) \rightarrow U_{AB} \Psi_B(x) \quad (2.20)$$

$$\bar{\Psi}_A(x) \rightarrow \bar{\Psi}_B(x) U_{BA}^+ \quad (2.21)$$

$$UU^+ = U^+U = 1 \quad (2.22)$$

nos campos fermiônicos implicam em matrizes  $n \times n$  de determinante  $+1$ , as quais formam um grupo  $SU(n)$ . As matrizes que formam um grupo podem ser parametrizadas em  $(n^2-1)$  fases de forma

$$U_{AB} = (e^{iT_i \alpha_i})_{AB} \quad (2.23)$$

onde as matrizes  $(T_i)_{AB}$  formam elementos de uma álgebra, e satisfazem

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k \quad (2.24)$$

onde os  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura quando os parâmetros dependem de  $x$ ,  $\alpha(x)$ , as transformações são ditas locais de gauge.

A imposição de invariância sob transformações locais de gauge  $SU(n)$  requer a introdução de um análogo do potencial vetor  $A_\mu(x)$ ,  $W_\mu(x)$ .

$[W_\mu(x)]_{AB}$  é uma matriz Hermitiana.

Ela aparece numa relação análoga ao acoplamento mínimo.

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}_A(x)\gamma^\mu \left( \delta_{AB} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - igW_\mu(x)_{AB} \right) \Psi_B(x) \quad (2.25)$$

e a lei da transformação de  $W_\mu(x)$  é:

$$W_\mu(x) \rightarrow U(x) W_\mu(x) U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} U^\dagger(x) \quad (2.26)$$

existem  $(n^2-1)$  campo de Gauge  $W_\mu^i(x)$   $i = 1, 2, \dots, (n^2-1)$  que formam os elementos da matriz  $W_\mu(x)$  definido por

$$W_\mu(x)_{AB} = W_\mu^i(x) (T_i)_{AB}$$

a combinação  $[\partial/\partial x^\mu - igW_\mu(x)]$  é a derivada covariante

O análogo do campo eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  é

$$G_{\mu\nu}^i(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^i - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^i + g f_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.27)$$

os  $F_{\mu\nu}^i(x)$  se transformam de acordo com

$$G_{\mu\nu}^i T_i \rightarrow U G_{\mu\nu} T_i U^\dagger \quad (2.28)$$

Assim o termo de energia cinética do campo vetorial

$$\mathcal{L}_w = - \frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^i)^2$$

é invariante.

2.4. Teoria Eletrofraca

A prova que tais teorias de gauge podem ter relevância para a física requer uma solução para o problema de massa vetorial. A invariância de gauge (que garante a renormalizabilidade de teoria) necessita de massas nulas, ao passo que a fenomenologia das interações fraca, por exemplo, necessita de um boson W massivo. A descoberta de um mecanismo que gera uma massa para o boson W, ou perda de renormalizabilidade [2-1] é um dos maiores desenvolvimentos da moderna teoria quântica dos campos.

( $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ ).  $W^+$  acopla as correntes carregadas que induzem interações entre neutrino e elétron, ou neutrino e muon, por exemplo. O  $Z^0$  está associado às famosas correntes fracas neutras, descobertas no CERN em 1973.

A Lagrangiana no modelo de Salam-Weinberg, também chamado de modelo padrão é dada por

$$L = L_{\text{gauge}} + L' \tag{2.29}$$

$$L_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} \tag{2.30}$$

$$-\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

$$\text{de } G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g F^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \tag{2.31}$$

## 2.4. Teoria Eletrofraca

Weinberg e Salam, fizeram uso deste desenvolvimento para construir uma teoria unificada das interações eletromagnéticas e fracas, com base na estrutura de grupo  $SU(2) \times U(1)$ . Nesta teoria, o grupo  $U(1)$  está associado a 1 potencial vetor  $\vec{A} = (A, ij)$  associado ao campo eletromagnético, e o grupo  $SU(2)$  está associado a 3 potências que recebem massa, e estão associados as interações fracas ( $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ ).  $W^+$  acopla as correntes carregadas que induzem interações entre neutrino e eletron, ou neutrino e muon, por exemplo. Já o  $Z^0$  está associado as famosas correntes fracas neutras, descobertas no CERN em 1973.

A Lagrangiana no modelo de Salam-Weinberg, também chamado de modelo padrão é dado por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}' \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} \cdot \vec{A}_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{onde } G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g F^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
e \mathcal{L}' = & \bar{L} i \gamma^\mu \left[ \partial_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu - ig \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right] R \\
& + \bar{R} i \gamma^\mu \left[ \partial_\mu - ig' \left( \frac{1}{2} - \tau_3 \right) B_\mu \right] R \\
& - \sqrt{2} \left[ \phi G R - \sqrt{2} \bar{R} G \phi^+ L \right] \\
& + \frac{1}{2} \text{Tr} \left| \left[ \partial_\mu \phi - ig' \phi \tau_3 B_\mu - ig \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \phi \right] \right|^2 \\
& - \frac{1}{2} \mu^2 \text{Tr} (\phi \phi^*) - \frac{\lambda}{4} \text{Tr} (\phi \phi^*)^2 \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$\vec{A}_\mu$  e  $B_\mu$  são os bosons de gauge vetoriais para os grupos SU(2) e U(1) e G é uma matriz 2 x 2 real diagonal da forma

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (2.33)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.34)$$

$$\text{tg } \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (2.35)$$

## 2.5. Resumo da Cromodinâmica Quântica (QCD)

A cromodinâmica quântica descreve a interação entre quarks e gluons coloridos. Um quark pode se manifestar em três estados de cor diferentes  $q_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Podemos fazer rotações no espaço de cores. Supondo que os quarks pertencem a representação de  $SU(3)_{\text{cor}}$ , temos

$$q'(x) = U[\theta(x)] q(x) = \exp\left[-ig \frac{\lambda^a}{2} \theta_a(x)\right] q(x) \quad (2.36)$$

onde os oito parâmetros  $\theta_a(x)$  caracterizam a rotação no espaço de cores  $[\lambda^a \theta_a = \sum_{a=1}^8 \lambda^a \theta_a]$  onde são as matrizes  $3 \times 3$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) de Gellmann e satisfazem

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f_{abc} \lambda^c \quad (2.37)$$

onde  $f_{abc}$  são as constantes de estrutura do grupo

A corrente

$$\bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\mu q(x)$$

é um octeto de cor

Obtemos uma interação invariante de cor, acoplando esta corrente a um octeto de gluons  $B_a^\mu(x)$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \bar{q} \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\mu q B_\mu^a \quad (2.38)$$

A Lagrangiana completa de QCD se escreve como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = - \frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + i \bar{q} \not{\partial} q - m \bar{q} q \quad (2.39)$$

+ termos que fixam o gauge

+ contra termos

+ termos de Fadeev-Popov

onde

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} B_\mu^a \right) \quad (2.40)$$

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu + gf_{abc} B_b^\mu B_c^\nu \quad (2.41)$$

Liberdade assintótica

Além do confinamento (ainda não demonstrado) uma das propriedades mais conspícuas da QCD é a liberdade assintótica, que diz que a constante de acoplamento efetiva

$$g \left( \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \rightarrow 0 \quad (2.42)$$

## 3. ESPECTROSCOPIA DE SISTEMAS LIGADOS DE QUARKS

quando

$$Q^2 \rightarrow \infty$$

pode-se mostrar que

$$g(t) = \frac{g_{\mu}^2}{1 + \frac{g_{\mu}^2}{16\pi^2} (11 - \frac{3}{2} N_f) t} \quad (2.43)$$

A diferença de comportamento entre as interações fortes e eletromagnéticas é visível do comportamento da constante  $e(t)$  da QED, que obedece

$$e(t) = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$V = p, \omega, \psi, J/\psi, T, \text{ etc}$$

Segundo o modelo de quarks, mesons são estados ligados de quark e antiquark, e bariões são estados ligados de três quarks.

Os mesons  $J/\psi$ ,  $\psi'$  etc, e  $T$ ,  $T'$ , etc, foram interpretados como estados ligados de novos quarks (quark  $c$  e quark  $b$ , respectivamente).

### 3. ESPECTROSCOPIA DE SISTEMAS LIGADOS DE QUARKS

Hadrons são claramente objetos compostos. Eles aparecem em grandes famílias de barions e mesons. Um modelo bastante satisfatório para os hadrons é considerá-los como objetos constituídos de quarks. As propriedades das interações entre os quarks, e as interações entre os hadrons são esperadas serem entendidas a partir da QCD. Enquanto isto não acontece, uma análise fenomenológica, nos permite, descrever modelos para os hadrons onde suas propriedades podem ser entendidas de forma mais simples.

Através de colisões entre elétrons e pósitrons a altas energias, podemos criar partículas por meio da aniquilação dos elétrons e pósitrons. Desta maneira podemos produzir mesons vetoriais com os mesmos números quânticos do foton. Este fenômeno pode ser ilustrado da seguinte maneira:

onde

$$V = \rho, \omega, \phi, J/\Psi, T \text{ etc}$$

Segundo o modelo de quarks, mesons são estados ligados de quark e antiquark, e barions são estados ligados de três quarks.

Os mesons  $J/\Psi$ ,  $\Psi'$  etc, e  $T$ ,  $T'$ , etc, foram interpretados como estados ligados de novos quarks (quark c e quark b, respectivamente).

Tornou-se interessante o estudo desses sistemas pois neles os efeitos relativísticos não eram predominantes.

O estudo do espectro de massa desses sistemas  $c\bar{c}$  e  $b\bar{b}$ , através de um potencial efetivo confinante, usando-se a equação de Schroedinger permitiu o desenvolvimento de vários modelos e parametrizações da interação quark-antiquark. Para uma revisão consulte Jackson [3-8].

Da análise dos espectros de massa para as famílias  $J/\psi$  e  $T$ , podemos extrair potenciais efetivos fenomenológicos para a descrição das interações quark-antiquark no caso dos quarks pesados  $c$  e  $b$ .

Após a descoberta das partículas  $J/\psi$  [3-1] e posteriormente as partículas  $T$  [3-2], esforço teórico tem sido dispendido no sentido de se determinar modelos de potenciais, bem como, a aplicação de métodos rigorosos derivados da Mecânica Quântica não relativística. Como resultado desse trabalho, vários potenciais fenomenológicos são usados para descrever a interação entre quarks e gerar os estados ligados. Teoricamente, baseado na QCD [3-3], esperamos que o potencial estático ( $Q\bar{Q}$ ), em pequena distância seja do tipo coulombiano, e a grande distância, leve ao confinamento dos quarks. Um potencial obtido da simples superposição de ambos os limites tem sido estudado extensivamente por nós [3-4] e vários autores [3-5]. Estas mesmas idéias podem ser usadas para determinar o espectro de barions ( $QQQ$ ), onde consideramos a interação entre os quarks independente dos sabores.

Usando-se o fato que  $V_{q\bar{q}} = \frac{1}{2} V_{\bar{q}q}$ , podemos usar o potencial  $V_{q\bar{q}}$  num tratamento não relativístico para o problema de três corpos com o objetivo de investigar as massas de barions superpesados do tipo  $ccc$  e  $bbb$ , conside-

rando-se apenas as interações de dois corpos entre os pares de quarks.

Os dados experimentais sobre as partículas  $J/\psi^{(1)}$  e  $T^{(2)}$ , tais como: decaimento leptônico e hadrônico, transições radiativas, separações hiperfina e spin-órbita, nos permitem discutir as aplicações perturbativas da QCD, no limite de pequena distância (liberdade assintótica) e QCD não perturbativa no limite de grande distância (confinamento). O cálculo perturbativo em QCD é guiado por tratamento análogo em QED para o positrônio.

Não há, até a presente data, estados ligados em Cromodinâmica Quântica, nem mesmo no limite não relativístico, que seria aplicável aos sistemas quarks-antiquarks pesados. Isto no entanto não impede de que analisemos o espectro hadrônico, usando modelos fenomenológicos que simulem o comportamento da QCD nas regiões assintóticas. Para isto consideramos o seguinte:

1. as massas dos estados ligados de quarks pesados têm a forma:

$$M(\text{hadrons}) = \sum_i m_{Q_i} + E_n(m_{Q_i}, V) \quad (3.1)$$

onde  $m_{Q_i}$  é a massa do quark e  $E_n(m_{Q_i}, V)$  é o autovalor da equação não relativística de Schrödinger.

2. Os limites assintóticos do potencial  $V(r)$  (aproximação estática) satisfazem às condições:

$$V(r) \rightarrow Kr^n \quad (n > 0) \\ r \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

$$V(r) \rightarrow -\frac{4\alpha_s}{3r}$$

$$r \rightarrow 0$$

3. A Hamiltoniana efetiva para descrever o espectro hadrônico é da forma:

$$H = H_0 + H'$$

$$\text{onde } H_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_{Q_i}} + \sum_{i \neq j} V(r_{ij}) \quad (3.2)$$

$H'$  = (termos dependentes de spin e correções relativísticas).

Um modelo que mais se aproxima da condição 2 é que está mais estreitamente relacionado à teoria, foi proposto por Richardson [3-6]. Ele considera o potencial no espaço dos momentos na forma:

$$V(q) = -\frac{16\pi}{3} \frac{\alpha_s(q^2)}{q^2} \quad (3.3)$$

onde  $q$  é o momento transferido. Esta forma é conveniente porque o potencial estático, devido à troca de um glúon, é justamente eq. (3) com  $\alpha_s(q^2)$  substituído por  $g^2/4$ , onde  $g$  é a constante de acoplamento, análoga a  $e$  na QED. No entanto, em teoria assintoticamente livre  $\alpha_s$  não é constante, sua forma é dada pela expressão:

$$\alpha_s(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{12\pi}{33 - 2n_f} \frac{1}{\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)} \quad (3.4)$$

onde  $\Lambda$  é um parâmetro de escala em QCD, e  $n_f$  é o número de sabores. Richardson propôs para  $V(q^2)$  uma forma que satisfaz a condição 2 (para  $n = 1$ ). O potencial é dado por:

$$V(q^2) = -\frac{4}{3} \frac{12\pi}{33 - 2n_f} \frac{1}{q^2} \frac{1}{\ln(1 + \frac{q^2}{\Lambda^2})} \quad (3.5)$$

e  $V(r)$  é a transformada de Fourier de  $V(q^2)$ .

Nos nossos cálculos usamos um modelo fenomenológico do tipo [3-4]

$$V(r) = Kr^n - \frac{4\alpha_s}{3r} + C \quad (n > 0) \quad (3.6)$$

O valor de  $E_n(m_Q, V)$  da equação (1) é obtido resolvendo-se numericamente a equação de autovalor:

$$H_0 \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (3.7)$$

O método de solução numérica foi descrito anteriormente [3-7].

#### 4.1. Modelo de potencial independente de spin

Como ponto de partida, consideramos as massas, em GeV dos quatro primeiros estados de spin 3 do charmônio ( $\chi$ )

#### 4. MESONS COMO ESTADOS LIGADOS DE QUARK E ANTIQUARK

O espectro das partículas  $\Psi$  experimentalmente estudado motivou interpretar essas partículas como estados ligados do quark  $c$  e seu antiquark  $\bar{c}$  (charmônio). Além da família  $\Psi$  temos uma outra de mesons bem mais pesados, os quais são denominados de partículas  $T$ . Estas são interpretadas como estados ligados do quark  $b$  e seu antiquark  $\bar{b}$ . Possivelmente, poderemos ter estados ligados de  $t\bar{t}$ . As grandes massas dos quarks  $c$ ,  $b$  e  $t$  nos proporcionam estudar seus estados ligados  $c\bar{c}$ ,  $b\bar{b}$  e  $t\bar{t}$  numa aproximação não relativística. Denominamos estes sistemas  $q\bar{q}$  de quarkonium.

Embora uma teoria de estados estacionários não esteja ainda construída de princípios fundamentais, consideráveis sucessos são obtidos de uma mistura de considerações fenomenológicas e teóricas; estas baseadas na cromodinâmica quântica (QCD). O primeiro passo nessa direção foi construir um modelo de potencial confinante independente de spin. No limite não relativístico este potencial não depende das propriedades de transformações de Lorentz das forças efetivas dos quarks. Entretanto, isso torna-se relevante quando correções dependentes de spin são consideradas. Visando proporcionar essas correções, são construídos modelos de interações de quarks dependentes de spin, os quais tem permitido um entendimento qualitativo de sistemas do tipo quarkonium.

##### 4.1. Modelo de Potencial confinante independente de spin

Como ponto de partida, consideremos as massas, em GeV dos quatro primeiros estados de onda  $S$  do charmônio ( $c\bar{c}$ )



e do upsilon ( $b\bar{b}$ ) Refs. [4-1] a [4-6]

$\Psi$  (3,095);  $\Psi'$  (3,684);  $\Psi''$  (4,100);  $\Psi'''$  (4,414);

$T$  (9,434);  $T'$  (9,994);  $T''$  (10,324);  $T'''$  (10,548)

Essas famílias podem ser reproduzidas através de um cálculo não relativístico [4-7], usando-se um potencial fenomenológico.

$$V(r) = K r^{1/2} - \frac{4 \alpha_s}{3r} + C \quad (4.1)$$

Para mesons ( $Q\bar{Q}$ ), a parte radial da equação de Schrödinger é

$$u_\ell''(r) + \{m_Q [E - V(r)] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\} u_\ell(r) = 0 \quad (4.2)$$

onde a função de onda radial é  $R(r) = u(r)/r$ .

Estados ligados do tipo  $Q_c \bar{Q}_b$ ,  $\bar{Q}_c Q_b$ , também podem ser calculados usando a eq. (4.2), mudando a massa  $m_Q$  pela correspondente massa reduzida do sistema  $Q_b \bar{Q}_c$ .

Ajustando-se os parâmetros  $K$  e  $C$  do potencial fenomenológico podemos reproduzir os valores para a massa dos mesons pesados das famílias  $J/\Psi$  e  $T$ , como mostrado na tabela 4-1.

Tabela 4-1 - Resultados numéricos para as partículas  $J/\psi$ , com  $m_c = 1,5$  GeV e partículas  $T$ , com  $m_b = 4,5$  GeV

Charmônio ( $J/\psi$ ) $c\bar{c}$ [4-8]					
$\alpha_s$	0,187	0,187	0,15	0,0	Resultados [4-1] experimentais (GeV)
$K(\text{GeV}^{3/2})$	0,749	0,767	0,790	0,855	
$C(\text{GeV})$	-1,082	-1,110	-1,176	-1,393	
1S	3,097	3,093	3,092	3,098	$3,095 \pm 0,004$
2S	3,689	3,695	3,693	3,682	$3,684 \pm 0,005$
3S	4,080	4,093	4,095	4,089	$4,100 \pm 0,200$
4S	4,385	4,405	4,412	4,416	$4,414 \pm 0,007$
1P	3,512	3,515	3,508	3,478	
1D	3,799	3,807	3,801	3,769	
Botônio ( $T$ ) $b\bar{b}$ [4-8]					
$\alpha_s$	0,187	0,187	0,15	0,0	[4-1] [4-2]
$K(\text{GeV}^{3/2})$	0,749	0,767	0,819	1,018	
$C(\text{GeV})$	-0,366	-0,385	-0,502	-0,924	
1S	9,441	9,440	9,438	9,452	$9,434 \pm 0,023$
2S	9,979	9,986	9,982	9,991	$9,994 \pm 0,003$
3S	10,312	10,325	10,329	10,366	$10,323 \pm 0,004$
4S	10,569	10,587	10,600	10,667	$10,548 \pm 0,005$
1P	9,843	9,848	9,832	9,803	
1D	10,094	10,104	10,092	10,071	

## Separação Hiperfina

O cálculo da separação entre os níveis  $1^3S_1$  e  $1^1S_0$  é feito em analogia ao cálculo em QED para o positrônio. A força dependente de spin, que é responsável pela separação hiperfina, é de curto alcance. Devido a este fato, podemos esperar que o cálculo perturbativo em QCD seja aplicável para determinação da separação hiperfina. Para fazer este cálculo devemos determinar a Hamiltoniana efetiva de interação, que permita obter a interação spin-spin do par quark - antiquark. Em ordem mais baixa, troca de um glúon, Figura 4-1(a), no limite estático, temos [4-9]

$$H'_{(SH)} = \frac{2}{3m_Q^2} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \nabla^2 V(r) \quad (4.3)$$

Para o potencial da forma eq. (4-1)

$$H'_{(SH)} = \frac{2}{3m_Q} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 (n)(n-1) K r^{n-2} + \frac{32\pi\alpha_S}{9m_Q} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Contribuições em ordem mais alta, contribuição de um "loop" (Figura 4-1 b...), foram calculadas por Buchmüller, Tye [4-10] e também por Barbieri e col. [4-11]. Esta contribuição deve afetar a região de curto alcance da força spin-spin, permanecendo inalterada a região de longo alcance. A constante de acoplamento efetivo  $\alpha_S(q^2)$ , usando o resultado de Buchmüller [4-10]; torna-se:

$$\alpha_s(q^2) \rightarrow \alpha_s^{(0)}(q^2) \left[ 1 + \frac{\alpha_s^{(0)}}{\pi} k^{(0)} \right] \quad (4.5)$$

O cálculo da separação hiperfina  $\Delta E$ , cálculo perturbativo, usando essas correções é dada por

$$\Delta E = \frac{2n(n+1)}{3m_Q^2} K \int \Psi_0^* r^{n-2} \Psi_0 d^3r +$$

$$+ \frac{32\pi}{9m_Q^2} \alpha_{\overline{MS}}(\mu) \left[ 1 + \frac{\alpha_{\overline{MS}}(\mu)}{\pi} \epsilon(\mu, \xi) \right] |\Psi_0(0)|^2 \quad (4.6)$$

onde

$$\xi = \frac{\langle \ln \left( \frac{Q^2}{m_Q^2} \right) \rangle}{|\Psi_0(0)|^2} \quad (4.7)$$

$$\epsilon(\mu, \xi) = 0,563 + 2,25 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_Q^2} \right) + 0,375 \xi \quad (4.8)$$

com  $n_f = 3$  (número de sabores).

O valor do módulo quadrado da função de onda na origem é calculado para um dado modelo de potencial. No caso de  $\mu = m_Q$ , obtemos

$$\epsilon(\mu = m_Q, \xi) = 0,563 \text{ e } \xi = 0$$

Os resultados experimentais mais recentes são consistentes com a contribuição só do segundo termo do lado direito da eq. (4-4) [4-10]. O que assegura, desta forma, que o

termo de longo alcance do potencial não contribui para a interação hiperfina. Sua contribuição vem dada na função de onda na origem. Assim,

$$\Delta E \approx \frac{32 \pi}{9m^2 Q} \alpha_{\frac{MS}{MS}} \left[ 1 + \frac{\epsilon(\mu, \xi)}{\pi} \alpha_{\frac{MS}{MS}} \right] |\Psi_0(0)|^2 \quad (4.9)$$

Para um potencial com  $n = 1$ , Buchmüller e Tye calcularam, para  $n_f = 3$ ,  $\epsilon(\mu, \xi) = 0,77$ , para  $n_f = 4$ ,  $\epsilon(\mu, \xi) = 0,15$ .

#### Decaimento Leptônico

No modelo de potencial, a largura leptônica dos estados de onda S é dada por

$$\Gamma_{e^+e^-}(n^3S_1) = \frac{16\pi e^2 \alpha^2}{M^2 (Q\bar{Q})} |\Psi_n(0)|^2 = \Gamma_{e^+e^-}^{(0)}(n^3S_1) \quad (4.10)$$

Esta equação é modificada quando se introduz correções relativísticas e radiativas, levando à forma [4-12]

$$\Gamma_{e^+e^-} \approx \Gamma_{e^+e^-}^{(0)} \left[ 1 - \frac{16}{3\pi} \alpha_s \pm \Delta + \dots \right] \quad (4.11)$$

$\Delta$  sendo de ordem  $\alpha_s^2$ .

### Decaimento Hadrônico

A interpretação de que os estados  $1^3S_1$  podem se converter em hadrons, pela conversão dos gluons em que estes estados decaem, nos permite calcular as larguras dos decaimentos hadrônicos. Em ordem mais baixa o estado  $1^3S_1$  decai em 3 gluons, figura (4.2a) e o estado  $1^1S_0$  em dois gluons, figura (4-3a). Os cálculos mais recentes, envolvendo correções perturbativas em QCD, foram feitos por Lepage e Mackenzie [4-13], para o decaimento do estado  $1^3S_1$ , figura (4-ab...), e por Barbieri e col [4-14] para o estado  $1^1S_0$ , figura (4-3b...); os resultados são:

#### a) Família J/Ψ

$$\Gamma_g(\Psi) = \Gamma_g^{(0)} \left[ 1 + (4,9 \pm 0,5) \frac{\alpha_S}{\pi} + \dots \right] \quad (4.12)$$

$$\Gamma_g(\eta) = \Gamma_g^{(0)} \left[ 1 + 5,27 \frac{\alpha_S}{\pi} + \dots \right] \quad (4.13)$$

#### b) Família T

$$\Gamma_g(T) = \Gamma^{(0)} \left[ 1 + (3,8 \pm 0,5) \frac{\alpha_S}{\pi} + \dots \right] \quad (4.14)$$

com 
$$\Gamma_g^{(0)}(1^3S_1) = \frac{160(\pi^2 - 9)\alpha_S^3}{81 M_n^2} |\Psi_0(0)|^2 \quad (4.15)$$

$$\Gamma_g^{(0)}(1^1S_0) = \frac{32\pi}{3} \frac{\alpha_S^2}{M_n^2} |\Psi_0(0)|^2 \quad (4.16)$$

Na tabela 3 explicitamos alguns valores para o decaimento leptônico, usando a eq. (4.11), decaimento hadrônico, usando a eq. (4.15) e a separação hiperfina, usando a eq. (4.4).

Teste de QCD

Os cálculos para o decaimento leptônico, decaimento hadrônico e separação hiperfina para as partículas  $J/\psi$  e  $T$  são obtidos utilizando cálculo perturbativo em QCD. Uma forma de se analisar se estes cálculos são consistentes, é utilizar os valores experimentais dessas quantidades e determinar a constante de acoplamento efetivo, associada as fórmulas teóricas, que determinam aquelas quantidades. Explicitamos os valores experimentais [4-1] para as partículas  $J/\psi$  e  $T$ .



Tabela 4-2 Larguras leptônicas e hadrônicas, separação hiperfina para as partículas  $J/\psi$  e  $T$ .  
 $(e_{Q_c} = +2/2, e_{Q_c} = -1/3)$ .  
 Para a largura hadrônica usamos  $\alpha_s = 0,187$

		Charmônio $J/\psi$					
$\alpha_s$		0,187	0,187	0,150	0,0		
$K(\text{GeV}^{3/2})$		0,749	0,767	0,790	0,855	Resultados experimentais [4-1]	
$C(\text{GeV})$		-1,082	-1,110	-1,176	-1,393		
$\Gamma(\Psi) \rightarrow e^+e^-$		5,14	5,27	5,29	4,88	4,8 $\pm$ 0,6	(KeV)
$\Gamma(\Psi')/\Gamma(\Psi)$		0,45	0,45	0,46	0,53	0,45 $\pm$ 0,06	
$\Gamma(\Psi) \rightarrow \text{had}$		71,12	72,96	67,05	46,08	44 $\pm$ 6	(KeV)
$\eta(\Psi)$		2,926	2,916	2,931	2,983	2,979 $\pm$ 0,009	(GeV)
$\eta'(\Psi')$		3,593	3,597	3,603	3,617	3,592 $\pm$ 0,005	(GeV)
		Botônio $T$					
$K(\text{GeV}^{2/3})$		0,749	0,767	0,819	1,018	1,08 $\pm$ 0,06	(KeV)
$C(\text{GeV})$		-0,366	-0,385	-0,502	-0,924	0,45 $\pm$ 0,03	
$\Gamma(T) \rightarrow e^+e^-$		0,87	0,89	0,83	0,61	27 $\pm$ 7	(KeV)
$\Gamma(T')/\Gamma(T)$		0,49	0,49	0,53	0,67		
$\Gamma(T) \rightarrow \text{had}$		48,28	49,20	42,30	23,02		
$\eta(T)$		9,372	9,369	9,378	9,420		
$\eta'(T')$		9,943	9,950	9,950	9,972		

a)  $J/\psi$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi \rightarrow e^+e^-} &= 4,8 \pm 0,6 \text{ KeV} \\ \Gamma_{\Psi \rightarrow \text{had}} &= 44 \pm 6 \text{ KeV} \\ \Gamma_{\Psi \rightarrow \text{had}} &= 20 \pm 16 \text{ MeV} \\ &- 11 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\Delta E(1^3S_1 - 1^1S_0) = 116 \pm 9 \text{ MeV}$$



b) T

$$\Gamma_T \rightarrow e^+e^- = 1,08 \pm 0,06 \text{ KeV} \quad (4.18)$$

$$\Gamma_T \rightarrow \text{had} = 27 \pm 7 \text{ KeV}$$

Com estas quantidades podemos definir as razões:

$$R(1) = \frac{\Delta E}{\Gamma(\Psi \rightarrow e^+e^-)} = \frac{\text{eq. (16)}}{\text{eq. (18)}}$$

$$R(2) = \frac{\Gamma(\Psi \rightarrow \text{had})}{\Gamma(\Psi \rightarrow e^+e^-)} = \frac{\text{eq. (19)}}{\text{eq. (18)}} \text{ e } \frac{\text{eq. (21)}}{\text{eq. (18)}} \quad (T) \quad (4.19)$$

$$R(3) = \frac{\Gamma(\Psi \rightarrow \text{had})}{\Delta E} = \frac{\text{eq. (19)}}{\text{eq. (16)}}$$

$$R(4) = \frac{\Gamma(\eta \rightarrow \text{had})}{\Delta E} = \frac{\text{eq. (20)}}{\text{eq. (16)}}$$

$$R(5) = \frac{\Gamma(\eta \rightarrow \text{had})}{\Gamma(\Psi \rightarrow e^+e^-)} = \frac{\text{eq. (20)}}{\text{eq. (18)}}$$

$$R(6) = \frac{\Gamma(\Psi \rightarrow \text{had})}{\Gamma(\eta \rightarrow \text{had})} = \frac{\text{eq. (19)}}{\text{eq. (20)}}$$

Na tabela 4 mostramos os valores da constante de acoplamento efetivo  $\alpha_s(q^2)$  associada a cada uma dessas razões. Ao se fazer a razão entre duas quantidades acima mencionadas, elimina-se o efeito de contribuição da região de grande alcance (região do confinamento), o qual está descrito pela função de onda.

Isto nos permite discutir o comportamento à pequena distância (liberdade assintótica), onde esperamos que cálculos perturbativos sejam permitidos em QCD.

Tabela 4-3 Determinação da constante de acoplamento efetivo  $\alpha_s(q^2)$  usando as razões entre os dados experimentais, eq. (4.17) e (4.18), e as correspondentes fórmulas teóricas. Para as partículas J/Ψ usamos  $\epsilon(\mu, \beta) = 0,77$ .

	J/Ψ 0,140 GeV					
	R(1)	R(2)	R(3)	R(4)	R(5)	R(6)
$\alpha_s$	0,373	0,161	0,093	0,182	0,209	0,043
		T				
$\alpha_s$	-	0,145	-	-	-	-

Podemos estimar os valores dos parâmetros de escala, usando os valores de  $\alpha_s(q^2)$  associados à R(2) das partículas J/Ψ e T. Para isto, ao invés de usarmos a eq.

$$\alpha_s(q^2) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{12 \pi}{32-2n_f} \frac{1}{\ln(\frac{q^2}{\Lambda^2})}, \text{ vamos utilizar a equação para}$$

o  $\alpha_s(q^2)$  com correção em ordem mais alta [4-13].

$$\alpha_s(M^2) = \frac{4 \pi}{\beta_0 \ln(\frac{M^2}{\Lambda^2})} \frac{4\pi \beta_1 \ln \ln(\frac{M^2}{\Lambda^2})}{\beta_0^3 \ln^2(\frac{M^2}{\Lambda^2})}$$

Para  $J/\psi$  temos:  $\beta_0 = \frac{27}{3}$  ;  $\beta_1 = \frac{192}{3}$

e para  $\gamma$   $\beta_0 = \frac{25}{3}$  ;  $\beta_1 = \frac{154}{3}$

usando estes valores na eq, (4.20) e os valores de  $\alpha_s(q^2)$  corresponde à  $R(2)$ , obtemos:

$$J/\psi \rightarrow \Lambda \cong 0,189 \text{ GeV}$$

$$T \rightarrow \Lambda \cong 0,140 \text{ GeV}$$

#### 4.2. Modelo de potencial confinante dependente do spin

Fazemos uma análise dos dados experimentais do charmônio ( $c\bar{c}$ ), em termos de interações spin-órbita, spin-spin e forças tensoriais. Para isso, definimos a hamiltoniana para o sistema  $c\bar{c}$  dependente de spin, até a ordem em  $(V/C)^2$  como:

$$H = H_0 + A(r) \vec{L} \cdot \vec{S} + B(r) S_{12} + C(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (4.21)$$

onde H representa a parte independente de spin da hamiltoniana;

$$S_{12} = (3\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2; \vec{S}_i = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i; \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \quad (4.22)$$

A(r), B(r) e C(r)

são dependentes radialmente da função potencial para interações spin-órbita, tensorial e spin-spin.

As correções relativísticas são obtidas em analogia com as correções relativísticas baseadas na QED para o positrônio, encontrando assim, uma hamiltoniana do tipo de Breit-Fermi. Em QCD, a parte de curto alcance do potencial (troca de um gluon) tem correções dependentes de spin de caráter completamente análogo ao da QED, ou seja, a interação fundamental é do tipo vetorial. Para grandes distâncias, o potencial efetivo confinante apresenta um comportamento mais complicado, devido à natureza não perturbativa de interações do tipo de Yang-Mills [4-15] [4-16] [4-17] [4-18]

Na tabela 4.4, esquematizamos as interações estática e quase estática

Tabela 4.4 - Esquematisação dos tipos de interações estáticas e quase estática

TIPO DE INTERAÇÃO	PROPRIEDADES DE LORENTZ	
	4 - VETOR $\gamma_\mu \times \gamma_\mu$	4 - ESCALAR $1 \times 1$
POTENCIAL ESTÁTICO	$V(r)$	$\mathcal{V}(r)$
SPIN-ÓRBITA	$\frac{3}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}$	$-\frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{V}}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}$
FORÇA TENSORIAL	$\frac{1}{12m^2} S_{12} \left\{ \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \frac{d^2V}{dr^2} \right\}$	0
SPIN-SPIN	$-\frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{6m^2} \nabla^2 V$	0

Baseando no que já foi discutido, na literatura admitimos que o kernel de interação efetiva  $q\bar{q}$  é descrito por uma combinação de interação do tipo coulombica + interação escalar de longo alcance + interação vetorial de longo alcance acoplada com uma interação do tipo momento anômalo quark-gluon. Isto pode ser expresso do seguinte modo: [ 4-15 ]

$$K = V_{\text{coul}} \gamma_1^\mu \gamma_2^\mu + fV_{\text{conf}} \Gamma_1^\mu \Gamma_{2\mu} + (1-f)V_{\text{conf}} I_1^Q I_2 \quad (4.23)$$

onde o vértice vetorial efetivo  $\Gamma_\mu$  é dado por

$$\Gamma_\mu(q) = \gamma_\mu - \frac{ik}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (4.24)$$

$f$  representa a fração do potencial confinante que contribui para o vértice vetorial efetivo, e  $k$  é o momento cromomagnético anômalo quark-gluon [ 4-16 ]. Esse kernel é usado na equação de

Bethe-Salpeter, e na aproximação estática obtemos uma equação do tipo Breit-Fermi (até ordem  $(v/c)^2$ ). Na aproximação instantânea a transformação de Fourier dá a função potencial no espaçamento das coordenadas, a qual é admitida ser da forma

$$V_{\text{coul}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \quad (4.25)$$

$$V_{\text{conf.}}(r) = kr^n + C \quad (4.26)$$

$V_{\text{coul}}(r)$  é um potencial estático, aplicável em pequenas distâncias, neste caso o comportamento da QCD é muito semelhante ao da QED, o potencial estático é do tipo coulombico.

$V_{\text{conf.}}(r)$  é um potencial confinante, cuja forma não é teoricamente estabelecida [4-15] [4-17]. Entendemos que o potencial estático para o par  $q\bar{q}$  seja a superposição de  $V_{\text{coul}}(r)$  e  $V_{\text{conf.}}(r)$ .

A hamiltoniana obtida através desse processo para o sistema do tipo quarkonium é escrita a seguir [4-15] [4-18].

$$\begin{aligned} H = & 2m_q + \frac{p^2}{2\mu} + Kr^n + C - \frac{\alpha_s'}{r} + \text{correções ind. de spin} \\ & + \frac{1}{2m_q^2} \{ [4f_q(1+k_q) - 1] \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V_{\text{conf}} \right) + \frac{3\alpha_s'}{r^3} \} L.S \\ & - \frac{1}{12m_q^2} \{ [f_q(1+k_q)^2] \left( \frac{d^2}{dr^2} V_{\text{conf}} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V_{\text{conf}} \right) - \frac{3\alpha_s'}{r^3} \} S_{12} \\ & + \frac{1}{6m_q^2} \{ [f_q(1+k_q)^2] (V^2 V_{\text{conf.}}) + 4\pi\alpha_s' \delta^3(\vec{r}) \} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (4.27) \end{aligned}$$

onde  $\alpha'_s = (4/3) \alpha_s$  e  $\mu =$  massa reduzida

Numa aproximação não relativística, mostramos na Fig. 4.4 espectro dos níveis de energia para o charmônio [4-19]. Fazemos uma comparação entre alguns potenciais fenomenologicamente aceitáveis [4-20]. Notamos que a melhor concordância com os dados experimentais, nessa análise, é obtida para o potencial confinante do tipo  $V_{\text{conf}}(r) = k^{1/2} + C$  (raiz quadrada).

#### COMPARAÇÃO COM DADOS EXPERIMENTAIS (CHARMÔNIO)

As correções spin-spin permitem calcular as separações entre os estados  $\Psi$  (3095 MeV) e  $\eta$  (2830 MeV), e entre os  $\Psi'$  (3684 MeV) e  $\eta'$  (3600 ou 3450 MeV).

As correções spin-órbita e forças tensoriais permitem calcular as separações entre os estados

$\chi$  ( $1^3P_2$  (3551 MeV),  $1^3P_1$  (3505 MeV) e  $1^3P_0$  (3415 MeV))

Observamos que a razão entre as diferenças entre os estados  $\chi$  tem valor 1/2.

$$\Delta = \frac{1^3P_2 - 1^3P_1}{1^3P_1 - 1^3P_0} \approx 0,5$$

Considerando  $V(r) = kr^{1/2} + C - \frac{4\alpha_s}{3r} e^{-\gamma(r)}$

obtemos os resultados:

$$\Delta M = \Psi - \eta \approx 0,180 \text{ GeV} \quad \approx 0,270 \text{ GeV}$$

$$\Delta M' = \Psi' - \eta' \approx 0,100 \text{ GeV} \quad \approx \begin{cases} 0,090 & \text{ou} \\ 0,230 & \text{GeV} \end{cases}$$

$$1^3 P_2 = 3,636 \text{ GeV} \quad 3,551 \text{ GeV}$$

$$1^3 P_1 = 3,417 \text{ GeV} \quad 3,505 \text{ GeV}$$

$$1^3 P_0 = 3,321 \text{ GeV} \quad 3,415 \text{ GeV}$$

Considerando  $V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$  e  $\mathcal{G}(r) = kr^{1/2} + C$

obtemos os resultados:

$$\Delta M = 0,058 \text{ GeV}$$

$$\Delta M' = 0,037 \text{ GeV}$$

$$1^3 P_2 = 3,494 \text{ GeV}$$

$$1^3 P_1 = 3,549 \text{ GeV}$$

$$1^3 P_0 = 3,629 \text{ GeV}$$

Obs.: para os cálculos em  
1 e 2 usamos:

$$(\alpha_r = 0,187; m_c = 1,5 \text{ GeV};$$

$$K=0,780 \text{ e } C = 1,120)$$

Da análise desses dois resultados observamos que é razoável admitir que o potencial confinante deve ter parte vetorial e parte escalar. Usamos um modelo proposto por Schnitzer [4-15] onde o Kernel da interação efetiva  $c\bar{c}$  é expressão do seguinte modo:

$$K = V_{\text{coul}} \gamma_1^\mu \gamma_{2\mu} + f V_{\text{conf}} \Gamma_1^\mu \Gamma_{2\mu} + (1-f) V_{\text{conf}} \mathbf{I} \times \mathbf{I}$$

onde o vértice vetorial efetivo  $\Gamma_\mu$  é descrito por

$$\Gamma_\mu(q) = \gamma_\mu - \frac{ik}{2m} \Gamma_{\mu\nu} q^\nu$$

$f$  - representa a tração do potencial confinante que contribui para o vértice vetorial efetivo

$k$  - é o momento cromomagnético anômalo quark-gluon

Esse kernel é usado na equação de Bethe-Salpeter, e na aproximação estática obtemos uma equação do tipo de Breit-Fermi (até ordem  $(v/c)^2$ ) [4-15] [4-18].

Obtemos os seguintes resultados:

Spin-Órbita

$$\frac{1}{2m_c^2} \{ [4 f (1+k) - 1] \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V_{\text{conf}} \right) + \frac{3\alpha'_s}{r^3} \} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (4.28)$$

Força Tensorial

$$-\frac{1}{12m_c^2} \{ [f (1+k)^2] \left( \frac{d^2}{dr^2} V_{\text{conf}} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V_{\text{conf}} \right) - \frac{3\alpha'_s}{r^3} \} S_{12} \quad (4.29)$$

Spin-Spin

$$\frac{1}{6m_c^2} \{ [f (1+k)^2] (V^2 V_{\text{conf}}) + 4\pi \alpha'_s \delta^3(r) \} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (4.30)$$

onde  $\alpha'_s = \frac{4\alpha_s}{3}$ ;  $V_{\text{conf}} = kr^{1/2} + C$

Os parâmetros  $f$  e  $k$  podem ser ajustados para que as separações spin-órbita e as separações hiperfinas (spin-spin) sejam compatíveis com os resultados experimentais. Apresentamos alguns resultados:

Tabela 5.5 - Resultados numéricos com a inclusão das forças entre spins

$\alpha'_s$	$f_c$	$k_c$	$1^3P_2$	$1^3P_1$	$1^3P_0$	$\Delta$	$\Delta M$	$\Delta M'$
0,25	1,0	0,0	3,636	3,417	3,321	2,2	0,180	0,100
0,20	1,0	0,0	3,620	3,422	3,324	2,0	0,164	0,092
0,25	0,0	5,26	3,494	3,549	3,629	-	0,058	0,037
0,25	0,1	3,5	3,555	3,506	3,457	1,0	0,306	0,164
0,25	0,059	5,26	3,543	3,520	3,474	0,5	0,340	0,182

As massas e diferenças de massas estão em GeV.

Da análise da tabela 5.5 constatamos resultados bastante satisfatório para as separações hiperfinas e separações spin-órbita. Análises semelhantes já foram feitas usando um potencial confinante do tipo linear. Nesta análise dois pontos desfavoráveis, o primeiro é com relação ao valor de  $\alpha'_s$  da ordem de 0,45, bastante grande comparado com 0,187. O segundo é com relação aos estados  $\Psi''$  e  $\Psi'''$  que ficam bem afastados dos valores experimentais.

## 5. Barions como estados ligados de três quarks

### 5.1. O Problema de Três Corpos em Mecânica Quântica

Para o tratamento do problema de três corpos em mecânica quântica, introduz-se um sistema externo e um interno de coordenadas ao invés do sistema vetorial em relação ao CM, usual.

O sistema interno descreve a forma do triângulo formado pelas partículas e as coordenadas externas a sua orientação no espaço. Os operadores de momento angular orbital dependem do sistema externo apenas, o qual pode ser separado para um sistema de três corpos isolados, reduzindo a equação de Schrödinger, a um sistema de equações acopladas nas coordenadas internas [5-1].

Para os estados s, p, e d, um sistema de coordenadas internas formulado por Zickendraht [5-1] será apresentado a seguir, que permite transformar o problema matemático tridimensional em um unidimensional.

Escolhendo para sistema externo os três ângulos de Euler definidos pelos três principais eixos do momento de inércia, o sistema interno ( $\gamma, \alpha, \beta$ ) estará relacionado com as distâncias  $r_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) da massa  $m_i$  por:

$$r_{12} = \left[ \frac{(m_1 + m_2)m}{4m_1 m_2} \right]^{1/2} \gamma (1 - \sin \alpha \sin \beta) \quad (5.1)$$

$$r_{23} = \left[ \frac{(m_2 + m_3)m}{4m_2 m_3} \right]^{1/2} \gamma (1 - \sin \alpha \sin(\beta - \delta_1)) \quad (5.1a)$$

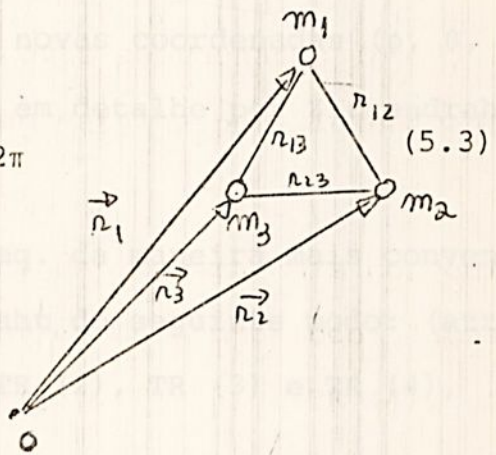
$$r_{31} = \left[ \frac{(m_3 + m_1) m}{4m_3 m_1} \right] y (1 - \text{sen } \alpha \text{ sen } (\beta - \delta_2))^{1/2} \quad (5.1c)$$

$$\text{onde } m = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\delta_1 = \text{arcos} \frac{m_1 (m_3 - m_2) - m_2 (m_3 + m_2)}{(m_1 + m_2) (m_2 + m_3)} \quad (5.2a)$$

$$\delta_2 = - \text{arcos} \frac{m_2 (m_3 - m_1) - m_1 (m_3 + m_1)}{(m_1 + m_2) (m_3 + m_1)} \quad (5.2b)$$

$$0 \leq \delta \leq \pi ; \pi \leq \delta_2 \leq 2\pi$$



Para  $m_1 = m_2 = m_3$  temos

$$r_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} y (1 - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta)^{1/2} \quad (5.4a)$$

$$r_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} y (1 - \text{sen } \alpha \text{ sen } (\beta - 2\pi/3))^{1/2} \quad (5.4b)$$

$$r_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} y (1 - \text{sen } \alpha \text{ sen } (\beta - 4\pi/3))^{1/2} \quad (5.4c)$$

A equação de Schrödinger no centro de massa das três partículas tem a forma:

$$\left( \frac{\hbar^2}{m} (\Delta_1 + \Delta_2) + E - V \Psi \right) = 0$$

$\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são os operadores  $\nabla^2$  para os vetores

$\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ , dados por:

$$\vec{x}_1 = \left[ \frac{2m_1 m}{(m_1 + m_2)m} \right]^{1/2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{x}_2 = \left[ \frac{2m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1} \right]^{1/2} \left( \vec{r}_3 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (5.5)$$

A transformação para as novas coordenadas  $(\phi, \theta, \Psi, \gamma, \alpha, \beta)$  é tediosa, e foi feita em detalhe por Zickendraht [5-2].

Podemos expressar essa eq. da maneira mais conveniente, segundo Flügge e Zickendraht do seguinte modo: (através das transformações TR (1), TR (2), TR (3) e TR (4), abaixo

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \xrightarrow{\text{TR}(1)} (x_1, x_2, \delta, \phi_0, \theta_0, \Psi_0)$$

$$\text{onde } x_1 = |\vec{x}_1|$$

$$x_2 = |\vec{x}_2|$$

$\Psi_0$  são os ângulos de Euler do sistema  $x', y', z'$  no qual  $z'$  tem a direção de  $\vec{x}_2$  e  $y'$  tem a direção de  $(\vec{x}_1 \times \vec{x}_2)$ .

$$\cos \delta = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2}{x_1 x_2}$$

$$(x_1 \ x_2 \ \delta \ \phi_0, \ \theta_0, \ \psi_0) \xrightarrow{\text{TR}(2)} (x_1 \ x_2 \ \delta \ \phi \ \theta \ \psi_1)$$

Rodou-se  $x', y', z'$  para  $x'', y'', z''$

$$(x_1 \ x_2 \ \delta \ \phi \ \theta \ \psi_1) \xrightarrow{\text{TR}(3)} (y, \alpha, \beta, \phi, \theta, \psi_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y (1 - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta)^{1/2} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y (1 + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta)^{1/2} \\ 2 x_1 x_2 \cos \delta = -y \text{ sen } \alpha \cos \beta \end{array} \right.$$

$$(y, \alpha, \beta, \phi, \theta, \psi_1) \xrightarrow{\text{TR}(4)} (y, \alpha, \beta, \phi, \theta, \psi)$$

Assim, segundo o cálculo de Zieckendraht, [5-1], chega-se a eq.

$$H\bar{\Psi} = E\bar{\Psi}$$

$$\bar{\Psi} = \sum_{k=-L}^L F_k^L (y, \alpha, \beta) D_{MK}^L (\phi, \theta, \psi)$$

$$D_{MK}^L (\phi, \theta, \psi) = e^{iM\phi} d_{MK}^L (\theta) e^{iK\psi}$$

(Matrizes D bem co

$$F_k^L (y, \alpha, \beta) = h_\lambda(y) e^{i\mu\beta} f_{k\mu}^{L\lambda} (\alpha) \quad \text{nhecidas}$$

sistema para  $f_{k\mu}^{L\lambda} (\alpha)$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\mu^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{L(L+1) - K^2}{\cos^2 \alpha} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \frac{K^2}{\sin^2 \alpha} + \mu k \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \lambda(\lambda+2) \right\} f_{k,\mu}^{L\lambda} =$$

$$= - \frac{1}{4} \frac{\sin}{\cos} \left\{ C_{k+1}^L f_{k+2,\mu}^{L\lambda} + C_{k-1}^L f_{k-2,\mu}^{L\lambda} \right\}$$

O problema quântico das três partículas pode ser em termos das três distâncias  $r_{ij}$ , ( $i, j, = 1, 2, 3$ ) entre as partículas, ou equivalentemente das três coordenadas internas  $y, \alpha, \beta$ .

Para um estado ligado fundamental, a equação de Schrödinger pode ser escrita como:

$$\left[ \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{5\partial}{\partial y} + \frac{4}{y^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + E - V(y, \alpha, \beta) \right] \Psi_S = 0 \quad (5.8)$$

A função de onda  $\Psi_S$  pode ser expandida em termos de um conjunto ortonormal completo de funções  $g_{\lambda\mu}(\alpha, \beta)$  definidas pela parte angular do operador na equação acima, de maneira análoga em que obtemos os harmônios esféricos com a parte angular do Hamiltoniano de uma partícula.

$$\Psi_S = \sum_{\lambda\mu} h_{\lambda\mu}(y) g_{\lambda\mu}(\alpha, \beta) \quad (5.9)$$

Na notação usada aqui, os  $\lambda$  são inteiros positivos e  $\mu = \lambda - 2n$  com  $\lambda \geq n \geq 0$ . O primeiro termo  $h_{\infty}(y)$

é a solução da equação obtida de (8).

Substituindo-se o potencial  $V(y, \alpha, \beta)$  por uma média  $V_0(y)$  no espaço  $(\alpha, \beta)$ :

$$V_0(y) = \langle V(r_{12}, r_{23}, r_{31}) \rangle_{\alpha, \beta} = \langle V(y, \alpha, \beta) \rangle_{\alpha, \beta} \quad (5.10)$$

Dado este potencial médio nosso problema consiste em resolver a seguinte equação:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{5}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m}{\hbar^2} [E - V_0(y)] - \frac{4\lambda(\lambda+2)}{y^2} \right\} h_\lambda(y) = 0 \quad (5.11)$$

Para uma interação puramente coulombiana isto foi feito em [5-1]. A seguir calcularemos  $V_0(y)$  para o potencial de nosso interesse

## 5.2. Cálculo de $V_0(y)$ para $V(r) = r^{2\nu}$

Para  $V(r) = r^{2\nu}$  temos que

$$(5.12)$$

$$V_0(y) = B r^{2\nu}$$

Neste caso, interessa-nos determinar  $B$  que é a média do potencial tridimensional no espaço de  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\langle V(y, \alpha, \beta) \rangle_{\alpha, \beta} = B V_0(y) \quad (5.13)$$

Designando por:

$$B_1 = \frac{1}{2^v 2\pi^v} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4\pi} (1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)^v d\alpha d\beta \quad (5.14)$$

$$B_2 = \frac{1}{2^v 2\pi^v} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4\pi} (1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\beta - 2\pi/3))^v d\alpha d\beta \quad (5.15)$$

$$B_3 = \frac{1}{2^v 2\pi^v} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4\pi} (1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\beta - 4\pi/3))^v d\alpha d\beta \quad (5.16)$$

cada uma das três parcelas de B,

$$B = B_1 + B_2 + B_3 \quad (5.17)$$

Procederemos ao cálculo em separado de cada um deles, contudo como veremos a seguir  $B_1 = B_2 = B_3$ .

Designando

$$x = \operatorname{sen} \alpha \quad y = \operatorname{sen} \beta \quad z = \operatorname{sen}(\beta - 2\pi/3) \quad (5.18)$$

$$w = \operatorname{sen}(\beta - 4\pi/3)$$

temos para cálculo de  $B_1$ :

$$(1 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)^v = (1 - xy)^v \quad (5.19)$$

e neste caso (14) se escreve como

$$B_1 = \frac{1}{2^v} \langle (1 - xy)^v \rangle_{\alpha, \beta} \quad (5.20)$$



Utilizando-se da expansão binomial generalizada

temos:

$$(1 - xy)^{\nu} = 1 - \binom{\nu}{1} (xy) + \binom{\nu}{2} (xy)^2 - \binom{\nu}{3} (xy)^3 + \dots$$

logo:

$$\langle (1-xy)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta} = 1 - \binom{\nu}{1} \langle xy \rangle_{\alpha, \beta} + \binom{\nu}{2} \langle (xy)^2 \rangle_{\alpha, \beta} - \dots$$

$$\langle (-xy)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta} = 1 - \binom{\nu}{1} \langle x \rangle_{\alpha} \langle y \rangle_{\beta} + \binom{\nu}{2} \langle x^2 \rangle_{\alpha} \langle y^2 \rangle_{\beta} - \dots$$

pois  $x$  é definido apenas no espaço de  $\alpha$  e  $y$  apenas no de  $\beta$  de acordo com [5-18].

De [18] concluímos que

$$a) \langle y^{(n = \text{impar})} \rangle_{\beta} = 0$$

$$b) \langle y^{(n = \text{par})} \rangle_{\beta} \neq 0 \quad (5.21)$$

$$c) \langle x^n \rangle_{\alpha} = \langle y^n \rangle_{\beta}$$

Portanto, será necessário calcular apenas

$$\langle y^{(n = \text{par})} \rangle_{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \alpha)^n d\alpha$$

Para  $n = 2$  temos o conhecido resultado

$$\langle y^2 \rangle_{\beta} = \frac{1}{2}$$

Para  $n = \text{par}$ ,  $n > 2$  vamos usar a fórmula de

Wallis:

$$\int (\text{sen } x)^n dx = \frac{(\text{sen } x)^{n-1} \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int (\text{sen } x)^{n-2} dx$$

e obteremos

$$\langle y^4 \rangle = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \quad \langle y^8 \rangle = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\langle y^6 \rangle = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \quad \langle y^{10} \rangle = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \quad (5.22)$$

Logo, substituindo em [20], as relações [21]:

$$\langle (1-xy)^v \rangle_{\alpha, \beta} = 1 + \binom{v}{2} \langle y^2 \rangle_{\beta} + \binom{v}{4} \langle y^4 \rangle_{\beta} + \dots$$

e utilizando-se de [22] e [23]:

$$\langle (1-xy)^v \rangle_{\alpha, \beta} = 1 + \binom{v}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{v}{4} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

Para o cálculo de  $B_2$  e  $B_3$  basta notar que

$$\langle z^n \rangle_{\beta} = \langle y^n \rangle_{\beta}$$

e portanto como

$$\langle (1 - xz)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta} = 1 - \binom{\nu}{1} \langle x \rangle_{\alpha} \langle z \rangle_{\beta} + \binom{\nu}{2} \langle x^2 \rangle_{\alpha} \langle z^2 \rangle_{\beta} - \dots$$

$$\langle (1 - xy)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta} = \langle (1 - xz)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta}$$

e, por conseguinte,  $\langle (1 - xw)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta} = \langle (1 - xy)^{\nu} \rangle_{\alpha, \beta}$  e assim

$$B_1 = B_2 = B_3.$$

Portanto, chegamos à fórmula final

$$B = \frac{3}{2^{\nu}} \left[ 1 + \binom{\nu}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{\nu}{4} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{2}\right)^2 + \binom{\nu}{6} \left(\frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right] \quad (5.22)$$

Esta série é convergente para qualquer  $\nu$  pois é denominada termo a termo pela expansão de  $(1+x)^{\nu} \Big|_{x=1}$  que converge para  $2^{\nu}$ .

### 5.3. Cálculo de B para $V(r) = r^{2\nu}$

$$a) \quad V(r) = \frac{1}{r}$$

$$V(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{31}}$$

$$V_0(y) = B \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$B = 5,0901 \text{ para } 9 \text{ termos de } [24]$$

Este resultado compara favoravelmente com o de [5.4] que é 5,0930 através de um cálculo analítico exato.

$$b) V(r) = r^2 \text{ (oscilador harmônico)}$$

$$V_0(y) = By^2$$

$B = 1,5$  (resultado exato pois [24] é finita para  $v$  inteiro).

$$c) V(r) = r \text{ (potencial linear)}$$

$$V_0(y) = By$$

$B = 2,0391$  até o nono termo de [24].

$$d) V(r) = \sqrt{r} \text{ (potencial raiz quadrada)}$$

$$V_0(y) = B\sqrt{y}$$

$B = 2,4418$  até o nono termo de [24].

#### 5.4. A Equação de três corpos e sua solução

Utilizando [11] e os resultados anteriores temos a equação a ser resolvida para  $h_\lambda(y)$  no caso  $n = 1/2$  em [1]:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{5}{y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{m}{\hbar^2} \left[ E - V_0(y) \right] - \frac{4\lambda(\lambda+2)}{y^2} \right\} h_\lambda(y) = 0 \quad (5.23)$$

com

$$V_0(y) = 2,4418 k_1 \sqrt{y} + 5,0930 \frac{k^2}{y} + 3C$$

Podemos resolver esta equação pelo método WKB ou por diferenças finitas. Como  $h_\lambda(0) = h_\lambda(\infty) = 0$  no caso de diferenças finitas substituímos infinito por um número  $b$  suficientemente afastado da origem tal que  $h_\lambda(b) = 0$ .

Para diferenças finitas obtemos a seguinte equação matricial de autovalor:

$$\left[ \frac{1}{k^2} - \frac{5}{2k^2 n} \right] f_{n-1} - \left[ \frac{2}{k^2} + \frac{m}{\hbar^2} (2,4418k_1 \sqrt{nk} + \frac{5,0930k_2}{nk} + 3C) + \frac{4\lambda(\lambda+2)}{(nk)^2} \right] f_n + \left[ \frac{1}{k^2} + \frac{5}{2k^2 n} \right] f_{n+1} = \left( \frac{mE}{\hbar^2} \right) f_n \quad (5.24)$$

onde para um número total  $N+2$  de pontos, como matriz  $N \times N$ , temos  $k = b/(N+1)$ ,  $f_n = h_\lambda(nk)$  e  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Devido à condição matricial tridiagonal pode ser resolvida por métodos algébricos usuais, fornecendo valores aproximados dos autovalores e das autofunções correspondentes.

Uma maneira mais conveniente de se resolver a equação (1) é dada a seguir. Eq. para  $h_\lambda / y$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{5}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m}{\hbar^2} \left[ E - V(y) \right] - \frac{4(\lambda+2)\lambda}{y^2} \right\} h_\lambda(y) = 0 \quad (5.25)$$

podemos substituir

$$h_\lambda(y) = y^{-5/2} f_\lambda(y)$$

e assim podemos

$$f''(y) + \left\{ m [E - V(y)] + \frac{\left[ -\frac{15}{4} - 4(\lambda + 2)\lambda \right]}{y^2} \right\} f(y) = 0 \quad (5.26)$$

Substituindo nesta expressão os valores de  $y$  e  $f''(y)$  como definidos anteriormente obtemos

$$-\frac{1}{K^2} f_{n+1} - \frac{1}{K^2} f_{n-1} + \left[ \frac{2}{K^2} + mV(nK) + \frac{\frac{15}{4} + 4(\lambda + 2)\lambda}{(nk)^2} \right] f_n = mE f_m$$

que pode ser resolvida aplicando-se o método descrito em [5-11].

Nas tabelas 5-1 e 5-2, apresentamos os espectros das massas para o charmônio ( $c\bar{c}$ ) e botônio ( $b\bar{b}$ ) [5-9] e estimativas de massas para barions formados de três charmes ( $ccc$ ) e três belezas ( $bbb$ ) respectivamente. Usamos para mesons  $n = 1/2$  na expressão do potencial eq. (6) e  $n = 1/2, 1$  e  $2$  para os barions [5-10].

Tabela 5-1: Resultados numéricos para barions: sistema (ccc), com  $m_c = 1,5 G$  e  $V$  e sistema (bbb), com  $m_b = 4,5 G$  e  $V$  [5-10]

Sistema (ccc), massas em G e V

Forma do potencial	1S	2S	3S	4S	5S	K	C
$Kr^{1/2} + C$	4,784	5,264	5,650	5,979	6,269	0,843	-1,362
$Kr + C$	4,771	5,261	5,694	6,089	6,457	0,237	-0,681
$Kr^2 + C$	4,740	5,250	5,760	6,270	6,780	0,0325	-0,347

Sistema (bbb), massas em G e V

$kr^{1/2} + C$	14,376	14,756	15,063	15,324	15,554	0,843	-0,672
-	-	-	-	-	-	-	-
$Kr^2 + C$	14,248	14,732	15,217	15,701	16,185	0,088	-0,0

$$V_{cc} = \frac{1}{2} V_{c\bar{c}} \tag{5.27}$$

$$V_{bb} = \frac{1}{2} V_{b\bar{b}} \tag{5.28}$$

podemos fazer uma previsão das massas dos barions ccc e bbb.

Com o objetivo de comparar nossos resultados com os resultados obtidos por (H. Coelho, A.B. Guimarães e R. Chanda), usando o formalismo de Simonov, fizemos tabelas comparativas, onde além das duas abordagens diferentes, comparamos os resultados obtidos usando vários tipos de potenciais.

Tabela 5-2 Resultados numéricos para o sistema (ccc) obtidos por H. Coelho e colaboradores  $m_c = 1.5 \text{ GeV}$

Forma do potencial	Estado Fund.	1ºEst. Exc.	2ºEst. Exc.	3ºEst. Exc.	4ºEst. Exc.	$K_1$	C
$k_1 \sqrt{r} + C$	4,77	5,09	5,47	-	-	0,843	-1.362
$k_1 r + C$	4,77	5,08	5,48	-	-	0,237	-0,681
$k_1 r^2 + C$	4,81	5,68	6,04	-	-	0,0325	-0,347

A.B.D'Oliveira e H.F. de Carvalho

$k_1 \sqrt{r} + C$	4,784	5,264	5,650	5,979	6,269	0,843	-1,362
$k_1 r + C$	4,771	5,261	5,694	6,089	6,457	0,237	-0,681
$k_1 r^2 + C$	4,740	5,250	5,760	6,27	6,78	0,0325	-0,347

Para o sistema bbb usando os parâmetros  $k_1 = 0,843$  e  $c = -0,672$  e  $m_b = 4,5$  encontramos  $m_{bbb} = 14.376 \text{ GeV}$ .

$$(K_1 \sqrt{r} + c) \quad [5-5].$$

Valores exatos pelo matriz-variacional (semi-analítico)

$$m_{ccc} = 4,80 \text{ GeV}$$

$$m_{bbb} = 14,38 \text{ GeV}$$

Os resultados por nós estão de acordo com os valores de H. Coelho e Col. para o estado fundamental para o potencial raiz quadrada e linear. Para os demais estados observamos uma discrepância. Os resultados dos referidos autores também não apresentam o espaçamento constante para os au

tovalores do potencial oscilador harmônico como é esperado. Nosso resultado é a primeira estimativa da massa do barião ( $\Lambda$ ) de que temos conhecimento.

Historicamente um dos objetivos centrais da pesquisa em física foi a determinação da teoria fundamental das forças nucleares.

A teoria da troca de mesons foi originalmente desenvolvida para isto, mas foi bem sucedida apenas na descrição da parte de longo alcance, denominada pela troca de um único meson. Um potencial descritivo desta interação devido a troca de um meson foi desenvolvido (one pion exchange potential - OPEP). Posteriormente modificações foram feitas, incluindo trocas de mais de um pion e de outros mesons.

De um ponto de vista moderno [1-1] mais indicado, tentamos abordar o problema considerando a força como oriunda da troca de glúons entre os quarks que compõem os hadrons, dentro do contexto das teorias de gauge, e particularmente da Cromodinâmica Quântica (QCD), que é a teoria de gauge não-abeliana, baseada em SU(3) que é atualmente um forte candidato para uma teoria definitiva das interações fortes. QCD é nesse sentido o análogo da Eletrodinâmica Quântica para as interações fortes.

Se a QCD deve poder descrever o mundo das interações fortes, então necessariamente seu regime de longas distâncias não pode ser descrito apenas em termos de graus de liberdade de quarks e glúons.

Estados hadrônicos reais (mesons e bariões) incluem graus de liberdade, embora espere-se que quarks dando alguma memória da estrutura interna de quarks e glúons.

## 6. QCD E AS FORÇAS NUCLEARES

Historicamente um dos objetivos centrais da pesquisa em física foi a determinação da teoria fundamental das forças nucleares.

A teoria da troca de mesons foi originalmente desenvolvida para isto, mas foi bem sucedida apenas na descrição da parte de longo alcance, denominada pela troca de um único meson. Um potencial descritivo desta interação devida a troca de um meson foi desenvolvido (one pion exchange potential = OPEP). Posteriormente modificações foram feitas, incluindo trocas de mais de um pion e de outros mesons.

De um ponto de vista moderno [6-1] é mais indicado tentarmos abordar o problema considerando a força como oriunda da troca de gluons entre os quarks que compoem os hadrons, dentro do contexto das teorias de gauge, em particular da Cromodinâmica Quântica (QCD), que é a teoria de gauge não abeliana, baseada em SU (3) que é atualmente um forte candidato para uma teoria definitiva das interações fortes. QCD é neste sentido o análogo da Eletrodinâmica Quântica para as interações fortes.

Se a QCD deve poder descrever o mundo das interações fortes, então necessariamente seu regime de longas distâncias não pode ser descrito apenas em termos de graus de liberdade de quarks e gluons.

Estados hadrônicos reais (mesons e barions) introduzem novos graus de liberdade, embora espera-se que guardando alguma memória da estrutura interna de quarks e gluons.

Este é o famoso problema, ainda em aberto do confinamento de quarks (mais geralmente de cor). Embora nenhuma conclusão definitiva tenha sido estabelecida ainda, duas abordagens distintas convidam a um otimismo (cauteloso).

A primeira é a sugestão de t'Hooft que numa expansão  $1/N_c$  de QCD, o termo em 1.<sup>a</sup> aproximação apresenta características em concordância com a fenomenologia dos modelos duais (ressonâncias estreitas, regra de Zweig, etc).

A segunda linha de ataque é a definição da QCD numa rede, e o uso de técnica de Monte Carlo, que indicam evidência de confinamento para teorias  $SU_{2,c}$  e possivelmente  $SU_{3,c}$ , com comportamento de acordo com a fenomenologia dual.

Embora ainda existam muitas lacunas a serem preenchidas, a evidência a favor da QCD está aumentando, e não temos nenhum argumento contra esta teoria. Isto sugere a perspectiva de muito em breve poderemos calcular as interações hadrônicas, a partir do que seriam mais ou menos princípios fundamentais (ou pelo menos explicar a fenomenologia de hadrons e as interações hadrônicas em termos de uma fenomenologia mais básica de quarks e gluons).

Estudos mais recentes [6-2] mostraram que do espectro dos mesons podemos sugerir uma forma mais adequada para o potencial confinante. Um ajuste do espectro de massas e da largura de decaimento nos leva a seguinte expressão para  $v(r_{ij})$ .

$$v(r_{ij}) = Kr^{1/2} + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + C$$

Usando esta interação, as funções de onda para uma hamiltoniana não relativística descrevendo os três quarks podem ser determinadas de acordo com as linhas gerais

descrita por Feynman [6-3].

Tentativas foram feitas dentro do contexto do modelo da sacola do MIT, para deduzir a parte de curto alcance das interações fortes a partir da interação de quarks e das forças que confinam eles nos núcleos. Entretanto o modelo da sacola do MIT não é especialmente adequado para o problema de dois centros, e uma alternativa foi proposta por Liberman [6-4].

Usando uma descrição fenomenológica proposta por Schnitzer [6-5] a partir do estudo das partículas  $\Psi$ , incorporando as idéias de confinamento como dada pela hipótese da cor.

Usando um potencial para a interação entre quarks da forma

$$V_{ij} = -\lambda_i \lambda_j \left[ v(r_{ij}) + \frac{1}{6} \left( \frac{\hbar}{M_Q c} \right)^2 \sigma_i \cdot \sigma_j v^2(r_{ij}) \right] \quad (1)$$

onde o potencial confinante

$$v(r) = kr^2/2 \quad (2)$$

$\lambda_i$  e  $\lambda_j$  são as oito matrizes de Gellmann de SU(3)

$M_Q$  é a massa do quark.

Liberman [6-4] mostrou que a parte repulsiva da interação nucleon-nucleon pode ter origem na parte dependente de spin das forças quark-quark.

C.E. de Tar [6-6] conseguiu com uma abordagem baseado no MIT bag model resultados qualitativos de acordo com os potenciais de Yale e Hamada-Johnston para a força nucleon-nucleon a partir da força quark-quark.

7. CONCLUSÃO

É nosso objetivo futuro dar prosseguimento a essas pesquisas fazendo uso dos nossos resultados para a força  $q\bar{q}$ .

Analisando os resultados obtidos, vemos que, para o espectro de massa da família J/Y temos uma excelente concordância com os dados experimentais. Admitimos que o estado  $4^3S_1$  é o de massa 4,414 GeV. Nossos resultados também estão em boa concordância com a família T. No entanto, para a família upsilon, um potencial com  $n \sim 1/2$  ( $n = 0,1$  ou  $(n/r/r_0)$ ), leva a uma concordância com os dados experimentais até melhor do que com  $n = 1/2$ . Entretanto, o estado 4,414 GeV da J/Y não poderia ser interpretado como o estado  $4^3S_1$ . Uma melhor determinação do potencial condizante deverá ocorrer com a espectroscopia da próxima geração de mesons pesados, os esperados estados  $\psi'$ , até que isto aconteça, consideramos o potencial com  $n = 1/2$  como o mais adequado para descrever a universalidade do potencial para as famílias J/Y e T.

Na espectroscopia de bárions nossos resultados estão de acordo com os valores de A. Guimarães e Col. [7] para o estado fundamental, nos demais estados observamos uma discrepância. Uma observação que podemos fazer é a de que os espaçamentos entre os nossos estados, radicalmente diferentes, são tão consistentes com o esperado teoricamente, e mesmo não acontecendo com os valores obtidos no trabalho citado anteriormente.

No cálculo da largura leptônica, a correção devido ao QCD, está totalmente consistente com os dados experimentais. O mesmo não pode ser dito no respeito da correção para o decaimento hadrônico, o cálculo perturbativo aumenta o valor da largura do decaimento em aproximadamente 20%, o que le-

## 7. CONCLUSÃO

Analisando os resultados obtidos, vemos que, para o espectro de massa da família  $J/\psi$  temos uma excelente concordância com os dados experimentais. Admitimos que o estado  $4^3S_1$  é o de massa 4,414 GeV. Nossos resultados também estão em boa concordância com a família  $T$ . No entanto, para a família upsilon, um potencial com  $n < 1/2$  ( $n = 0, 1$  ou  $\ell \ln(r/r_0)$ ), leva a uma concordância com os dados experimentais até melhor do que com  $n = 1/2$ . Entretanto, o estado 4,414 GeV da  $J/\psi$  não poderia ser interpretado como o estado  $4^3S_1$ . Uma melhor determinação do potencial condinante deverá ocorrer com a espectroscopia da próxima geração de mesons pesados, os esperados estados  $t\bar{t}$ , até que isto aconteça, consideramos o potencial com  $n = 1/2$ , como o mais adequado para descrever a universalidade do potencial para as famílias  $J/\psi$  e  $T$ .

Na espectroscopia de barions nossos resultados estão de acordo com os valores de A. Guimarães e Col. [7-17] para o estado fundamental, nos demais estados observamos uma discrepância. Uma observação que podemos fazer é a de que os espaçamentos entre os nossos estados, radialmente excitados, são tão consistentes com o esperado teoricamente, o mesmo não acontecendo com os valores obtidos no trabalho citado anteriormente.

No cálculo da largura leptônica, a correção devida à QCD, está totalmente consistente com os dados experimentais. O mesmo não pode ser dito Pa respeito da correção para o decaimento hadrônico, o cálculo perturbativo aumenta o valor da largura do decaimento em aproximadamente 20%, o que le-

va a um fator aproximadamente 2, em relação ao valor experimental para a  $J/\Psi$ .

A separação hiperfina, em cálculos recentes [7-2], está compatível com a contribuição de curto alcance, sendo que a contribuição de longo alcance é atribuída à função de onda. Não entramos em maiores detalhes sobre isto, abordamos apenas para a análise da constante de acoplamento e fetivo.

A análise da tabela 5-3 nos mostra que há uma variação acentuada entre os valores de  $\alpha_s$ . Os valores as sociados aos decaimentos hadrônicos são compatíveis, levando-se em conta os erros experimentais. O valor associado à  $R(1)$  é bastante grande, comparado aos demais. Como na determinação de  $\alpha_s$  de  $R(1)$  não levamos em consideração a influência da função de onda, isto de certa forma, pode explicar este comportamento de  $\alpha_s$ . No momento, não podemos avaliar  $\alpha_s$  para a família  $T$ , a menos do valor associado a  $R(2)$ . Esperamos que os dados experimentais sobre a família upsilon esclareçam melhor a aplicação de cálculos perturbativos para a determinação das quantidades discutidas.

Vemos que  $\Lambda$  associado aos estados ligados tem valor inferior ao estimado no espalhamento profundamente inelástico.

Slaske and Lepage, NP 353A, 247c (1981)

(Proc. of the Int. Conf. on Few Body Problems,  
Eugene, Oregon, August 1980)

M. Ito, Quarks in Nuclei NP A354, 36 (1981)

[5] Supergravidade

H. Nieuwenhuizen, Supergravity, Phys. Rep. 61C  
189 (1981)

## REFERÊNCIAS BÁSICAS

- [ 1a ] Experimental QED  
Lautrup, Peterman and de Rafael  
Phys Rep 3c, 193 (1972)
- [ 1b ] Weak Interactions  
Theory of weak interactions in particle Physics  
D. Bailin, Rep. Progr. Phys. 34, 491 (1972)
- [ 2 ] Gauge theories  
Abers & Lee, Gauge theories, Physics Letters 9C,  
1 (1973)
- [ 3 ] QCD  
H.D. Politzer, Physics Reports 14C, 129 (1974)  
Marciano and Pagels, Physics Reports 36C , 137 (1978)  
Müller, Pertubative QCD at high energias  
PLC 73, 237 (1981)  
Reya, Pertubative QCD PLC 69, 197 (1981)
- [ 4 ] Nuclear force and QCD  
The synthesis of QCD and Nuclear Physics  
Brodsky and Lepage, NP 353A, 247c(1981)  
(Proc. 9<sup>th</sup> Int. conf. ou Few Body Problem  
Engene, Oregon, August 1980  
M. Rho, Quarks in Nuclei NP A354, 3 c (1981)
- [ 5 ] Supergravidade  
P. Nieuwenhuizen , Supergravity, Phys. Rep. 68C ,  
189 (1981)

## REFERÊNCIAS

- [2-1] G.t'Hooft NP B33, 173 (1971)
- [3-2] D. Andrews et B35, 167 (1971)
- [1-3] T. Appelquist and H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett.,  
G.t'Hooft and Veltman NP B44, 189 (1972)
- [3-4] B.W. Lee and J.Zinn. Justin, PR D5, 3121,3137,  
H.F. de Carvalho e R. Chanda, Phys. Lett. (1978)  
3155 (1972)  
H.F. de Carvalho, R. Chanda e A.B. d'Oliveira, Lett  
B. Cim. 22, 679 (1978)
- [3-5] E.ichten e tal, Phys. Rev. D 17, 2090 (1978) e  
D 2, 203 (1978)
- [3-6] C. Quigg and J.C. Rosner Phys. Rev. 58, 167 (1979)
- [3-7] A. Martin, Phys. Lett. 93B, 330 (1980)
- [3-8] D.L. Richardson, Phys. Lett 82 B, 272 (1978)
- [3-9] E. Gerk and A.B. d'Oliveira, J. Comp. and Appl.  
Math. 6, 31 (1980)
- [3-10] E. Gerk and A.B. d'Oliveira Phys. Rev. A25 662 (1982)
- [1-8] J.D. Jackson, Summer Institute of Particle  
Physics SLAC August 1976

## REFERÊNCIAS

- [3-1] G.L. Feldman and M. Perl, Phys. Rep. 33c, 285 (1977)
- [3-2] D. Andrews et al, Phys. Rev. Lett. 44, 1108 (1980)
- [3-3] T. Appelquist and H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett, 34, 43 (1975)
- [3-4] H.F. de Carvalho e R. Chanda, Rev. Bras. Fís. (1978)  
H.F. de Carvalho, R. Chanda e A.B. d'Oliveira, Lett N. Cim. 22, 679 (1978)
- [3-5] E. Eichten e tal, Phys. Rev. D 17, 3090 (1978) e D 21, 203 (1978)  
C. Quigg and J.C. Rosner Phys. Rev. 56, 167 (1979)  
A. Mastin, Phys. Lett. 93B, 338 (1980)
- [3-6] D.L. Richardson, Phys. Lett 82 B, 272 (1979)
- [3-7] E. Gerk and A.B. d'Oliveira, J. Comp. and Appl. Math, 6, 81 (1980)  
E. Gerk and A.B.d'Oliveira Phys. Rev. A25 662 (1982)
- [3-8] J.D. Jackson, Summer Institute of Particle Physics SLAC August 1976
- [4-4] E. Konigsmann, Crystal Ball Collaboration, report SLAC-PUB - 2394 (1980).

## REFERÊNCIAS

- [4-1] CLEO Collaboration, Cornell report 80/464, contributions to XXth International Conferences on High Energy Physics, Madison, Wisconsin, July 1980.
- [4-2] D.L. Kreinick, contribution to the Vanderbilt Conference, May 1980, CLNS 80/460.
- [4-3] D. Andrews, K. Berkelman, M. Billing, R. Cabenda, D.G. Cassel, J.W. de Wire, R. Ehrlich, T. Ferguson, T. Gentile, B.G. Gibbard, M.G.D. Gilchriese, B. Gittelman, D.L. Hartill, D. Herrup, M. Herlinger, D.L. Kreinick, D. Larson, N.B. Mistry, E. Nordberg, S. Peggs, R. Pechonok, R.K. Plunkett, J. Seeman, K.A. Shinsky, R.H. Siemann, A. Silverman, P.C. Stein, S. Stone, R. Talman, H.G. Thonemann, D. Weber, C. Bebek, J. Haggerty, J.M. Tzen, R. Kline, W.A. Loomis, F.M. Pipkin, W. Tanenbaum, Richard Wilson, A.J. Sadaff, D.L. Bridges, K. Chadwick, P. Ganci, H. Kagan, F. Lobkowitz, W. Metcalf, S.L. Olsen, R. Poling, C. Rosenfeld, G. Rucinski, E.H. Thorndike, G. Warren, D. Bechis, G.H. Chang, R. Imlay, J.J. Mueller, D. Potter, F. Sannes, P. Skubic, R. Stone, A. Brody, A. Chen, M. Goldberg, N. Horwitz, J. Kandaswamy, H. Kooy, P. Lariccia, G.C. Moneti, R. Whiteman, M.S. Alan, S.E. Csorna, R.S. Panvini and J.S. Poucher, Phys. Rev.Lett. 44 1108 (1980).
- [4-4] K. Konigsmann, Crystal Ball Collaboration, report SLAC-PUB - 2594 (1980).

- [ 4-5 ] D. Sharre - International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies - Bonn -1981
- [ 4-6 ] G.L. Feldman and M. Perl - Phys. Rep. 33C, 285 (1971)
- [ 4-7 ] H.F. de Carvalho, R. Chanda and A.B. d'Oliveira - Lettere al Nuovo Cimento, 22, 679 (1978).
- [ 4-8 ] H.F. de Carvalho and A.B. d'Oliveira, Lett. Nuovo Cim. 33, 572 (1982).
- [ 4-9 ] J.D. Jackson - Proceedings of the Institute on Particle Physics, SLAC Report n<sup>o</sup> 198 (Ed. M.C. Zipt.) 1976
- [ 4-10 ] W. Buchmüller e col. Cornell CLNS 81/497 (1981); W. Buchmüller and S.H.H. Tye, Phys. Rev. D24, 132 (1981).
- [ 4-11 ] R. Barbieri e col. TH 3144-CERN (1981).
- [ 4-12 ] R. Barbieri e col. Phys. Lett. 57 B, 455 (1975).
- [ 4-13 ] P.B. Mackenzie and G.P. Lepage - Phys. Rev. Lett. 47, 1244 (1981).
- [ 4-14 ] R. Barbieri e col. Nucl. Phys. B154, 535 (1979); R. Barbieri e col. Phys. Lett. 95B, 93 (1980).
- [ 4-15 ] H.J. Schnitzer, Phys. Rev. D, 18, 3482 (1978)
- [ 4-16 ] H.J. Schnitzer, Phys. Lett. 65 B, 239 (1976)
- [ 4-17 ] A.B. Henriques, B. H. Kellett and R. G. Moorhouse, Phys. Lett. 64 B, 85 (1976)
- [ 4-18 ] W. Celmaster and F.S. Heneyey, Phys. Rev. D, 17, 3268 (1978)
- [ 4-19 ] H.F. de Carvalho, R. Chanda and A. B. d'Oliveira, Lett. Nuovo Cimento, 22, 679 (1978)
- [ 4-20 ] C. Quigg and J.L. Rosner, Phys. Lett. 71B, 153 (1977).

## REFERÊNCIAS:

- [ 5-1 ] Zickendraht, W., *Annals of Phys.*, 35, 18-41 (1965)
- [ 5-2 ] Zickendraht, W., *Proc. Natl. Acad. Sci. V.S.* 52, 1565 (1964)
- [ 5-3 ] H.Diehl, S. Flügge, U. Schröder, A. Völkel, and A. Weiguny, *J. Physik* 162,1 (1961)
- [ 5-4 ] H.F. de Carvalho, R. Chanda and A.B. d'Oliveira, *Lett. Nuovo Cim.* 22, 679 (1968)
- [ 5-5 ] H.F. de Carvalho e A. B. d'Oliveira - II Encontro Part. e Campos - Cambuquira, 1980.
- [ 5-6 ] E.Gerck e A.B. d'OLiveira - *Physical Review* 26 A, 662 (1982)
- [ 5-7 ] A.B. Guimarães, H.Coelho and R. Chanda (Tese de Mestrado de A.B. Guimarães) e *Phys. Rev. D*(1981).
- [ 5-8 ] E.Gerck e A.B.d'Oliveira, *Rev. Bras. Física*, 10 405 (1980).
- [ 5-9 ] J.D.Jackson, *Summer Institute of Particle Physics*, SLAC, August 1976
- [ 5-10 ] M.Bohm e H. Joos, *Eichtheorien der Schwachen, Elektromagnetischen und Starcken Wechselwirkung*, Notas de Aula, Maria Leach Setembro 1977.  
DESY Report 78/27 (1978)
- [ 5-11 ] E.Gerck and A.B. d'Oliveira, *J. Comp. Appl. Math*, 6 , 81, (1980)

## REFERÊNCIAS

- [ 6-1 ] S.J. Brodsky, T. Huang and G Peter Lepage Hadronic and Nuclear Interactions in QCD.SLAC - PUB 2868 January (1982)
- [ 6-2 ] H.F. de Carvalho e A.B. d'Oliveira, Lett. N. Cim. 33, 572 (1982)
- [ 6-3 ] R.P. Feynman, M. Kissilinger and F. Randal, Phys. Rev. D3, 2709 (1971)
- [ 6-4 ] Liberman, D.A. (1977), Phys. Rev. D16 , 1542
- [ 6-5 ] Schnizer, H.J. (1975) Phys. Rev. Lett. 35, 1540
- [ 6-6 ] C.E. De Tar, Quark Models of the nucleon em Prov. VIII Int. Conf. on Few Body Systems and Nuclear Forces, Graz, Austria (1978).

## REFERÊNCIAS

- [7-1] A. Guimarães et al Phys. Rev. D24 1343 (1981)
- [7-2] W. Buchmüller et al Cornell CLNS 81/497 (1981)  
W. Buchmüller and S.H.H. Tye, Phys. Rev. D24, 132  
(1981)

Fig. 4-2 - Diagramas representativos cuja parte imaginária contribui para  $\Gamma(^3S_1) + \text{hadrons}$  [4-13]

Fig. 4-3 - Diagramas representativos cuja parte imaginária contribui para  $\Gamma(^1S_0) + \text{hadrons}$  [4-14]

## LEGENAS DAS FIGURAS

Fig. 4-1 - Diagramas de Feynman que contribuem para a separação hiperfina até 4.<sup>a</sup> ordem na constante de acoplamento forte [4-10]

Fig. 4-2 - Diagramas representativos cuja parte imaginária contribui para  $\Gamma(^3S_1) \rightarrow$  hadrons [4-13]

Fig. 4-3 - Diagramas representativos cuja parte imaginária contribui para  $\Gamma(^1S_0) \rightarrow$  hadrons [4-14]

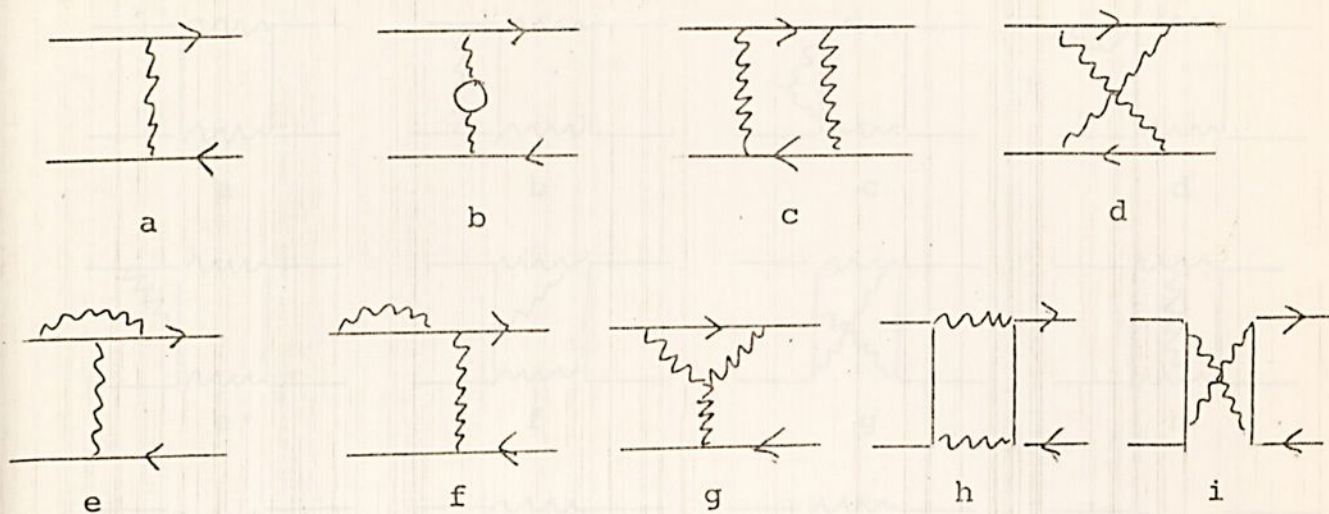


Fig. 4-1

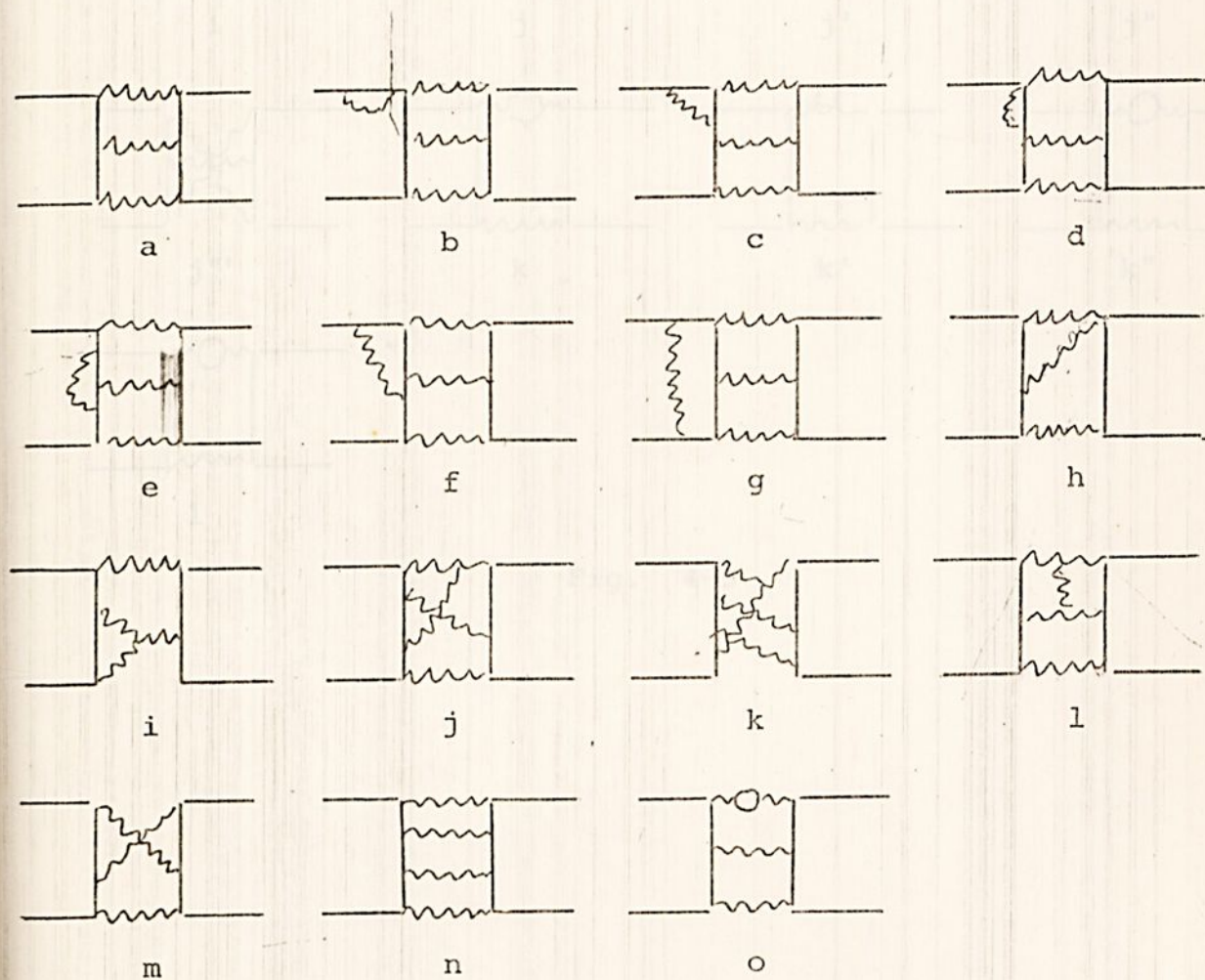


Fig. 4-2

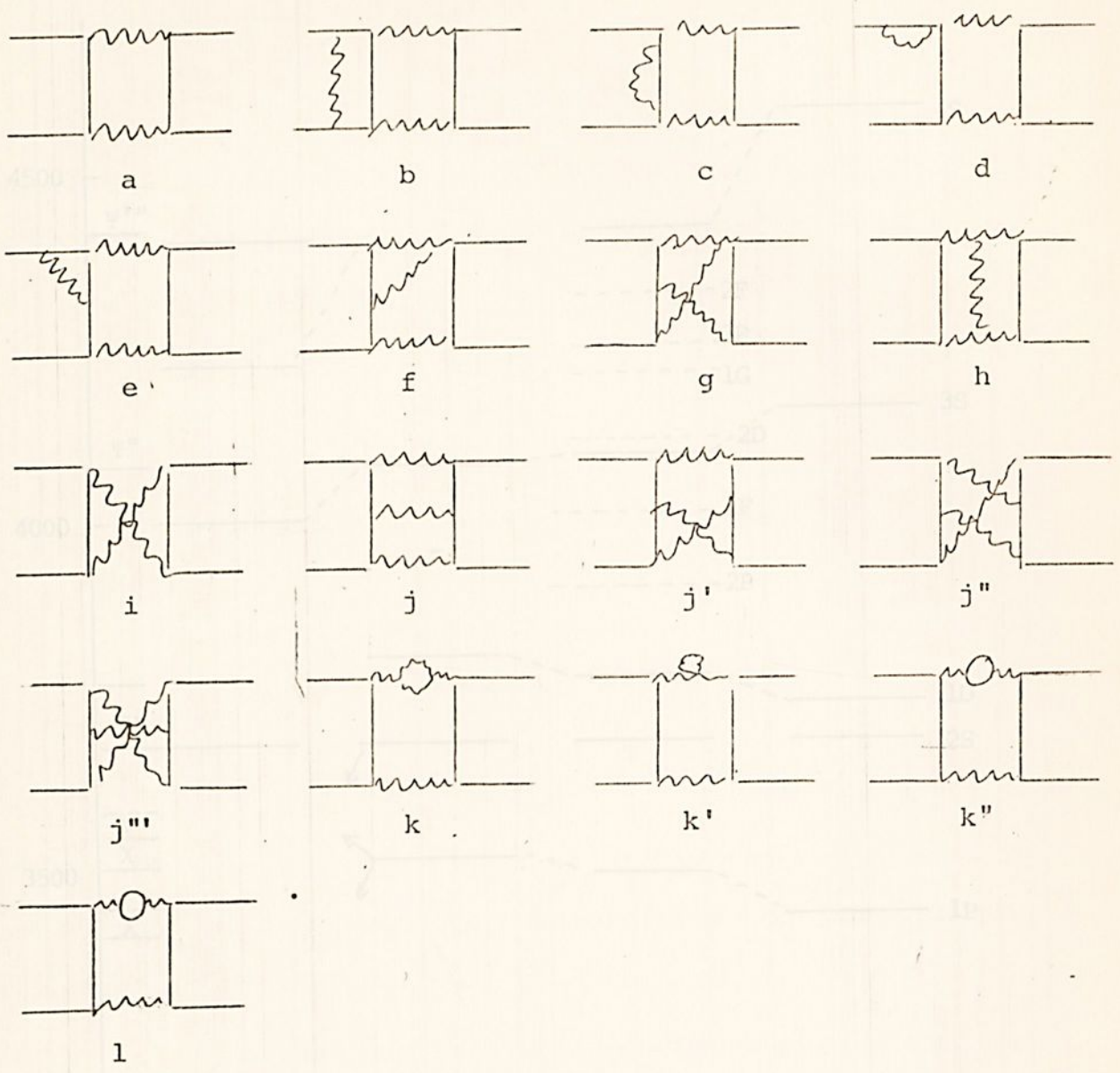


Fig. 4-3

Fig. 4-4 - Aspecto geral dos níveis de energia para vários potenciais ( $m_c = 1,5 \text{ GeV}$ )

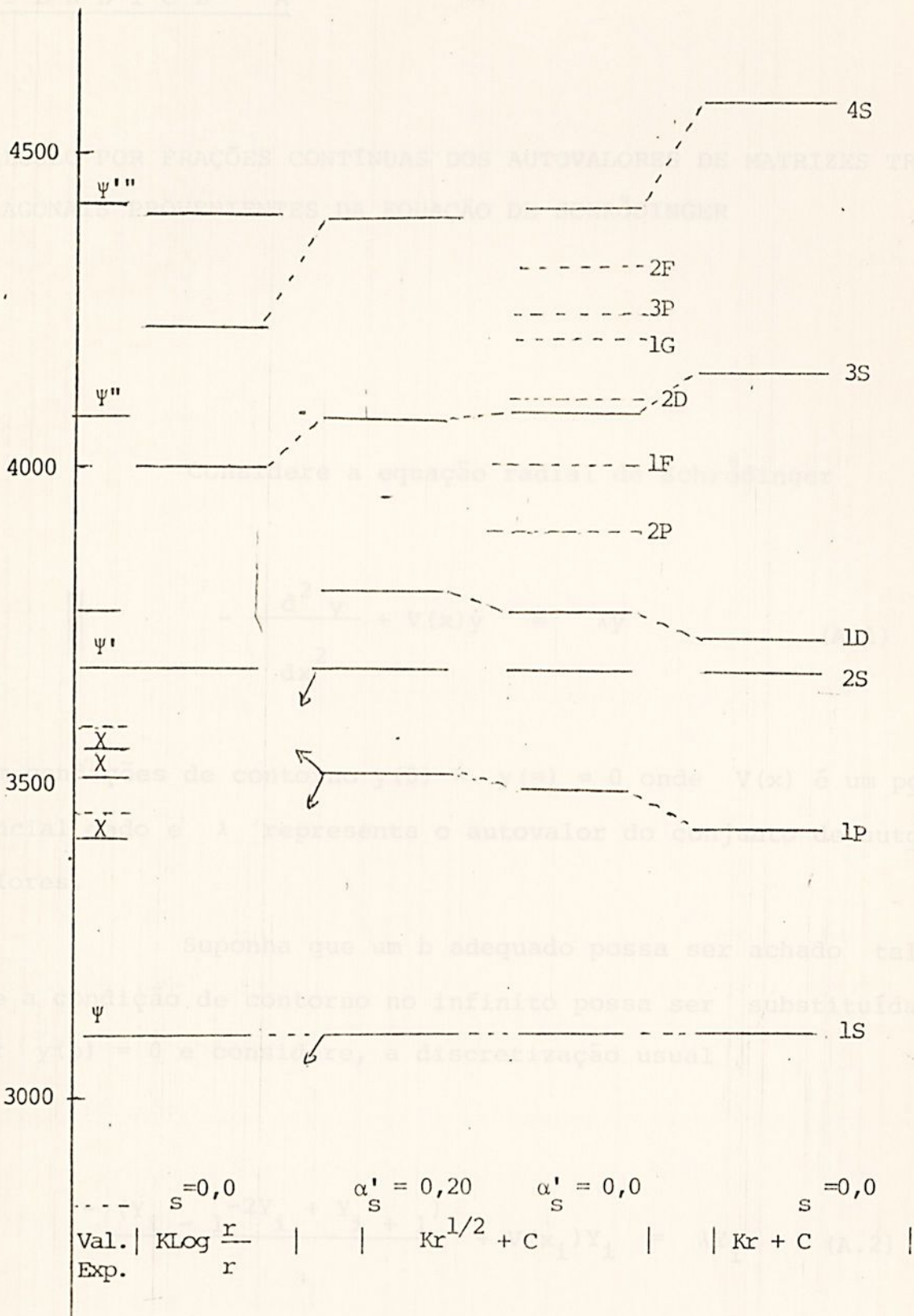


Fig. 4-4 - Aspecto geral dos níveis de energia para vários potenciais ( $m_c = 1,5 \text{ GeV}$ )

A P Ê N D I C E    A

CÁLCULO POR FRAÇÕES CONTÍNUAS DOS AUTOVALORES DE MATRIZES TRI  
DIAGONAIS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Considere a equação radial de Schrödinger

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + V(x)y = \lambda y \quad (\text{A.1})$$

com condições de contorno  $y(0) = y(\infty) = 0$  onde  $V(x)$  é um po  
tencial dado e  $\lambda$  representa o autovalor do conjunto de auto  
valores.

Suponha que um  $b$  adequado possa ser achado tal  
que a condição de contorno no infinito possa ser substituída  
por  $y(b) = 0$  e considere, a discretização usual

$$-\frac{(Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}))}{h^2} + V(x_i)Y_i = \lambda Y_i, \quad (\text{A.2})$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{com } Y_0 = Y_{N+1} = 0, \quad x_i = ih \quad \text{e} \quad h = b/(N+1).$$

em notação matricial temos

$$A_N y = \begin{pmatrix} a_1 & -b & & \\ -b & a_2 & -b & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{N-1} & -b \\ & & & -b & a_N \end{pmatrix} y = 0 \quad (A.3)$$

onde  $a_i = 2/h^2 + V(x_i) - \lambda$ ,  $b = 1/h^2$ , e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ .

Seja  $P_n = P_n(\lambda)$  o determinante do enésimo menor principal de  $A_N$ .

$$\text{Assim} \quad \begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= a_1, \end{aligned}$$

$$\text{e } P_n = a_n P_{n-1} - b^2 P_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, N \quad (A.4)$$

Para mais detalhes relativos à abordagem Sturmaniana para achar autovalores de matrizes tridiagonais, veja, por exemplo Wilkinson [3] ou Fox [1]

Escreva a eq. (4) como

$$\begin{pmatrix} P_n \\ P_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & -b^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} \\ P_{n-2} \end{pmatrix} \quad (A.5)$$

onde, uma vez que  $b^2 \gg 1$ ,

$$\det \begin{pmatrix} a_n & -b^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gg 1$$

Assim temos que a eq. (4) é um procedimento altamente instável. Para sanar esta dificuldade, reescrevamos a eq. (4) como

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n - b^2 \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$$

$$\text{ou } p'_n = a_n - b^2/p'_{n-1} \quad \text{onde } p'_n = p_n/p_{n-1} \quad (\text{A.5})$$

Observamos então que, desde que  $p'_n \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$  podemos obter  $p_N$  por meio de

$$p_N = \prod_{i=1}^N p'_i \quad (\text{A.6})$$

É claro que se  $p'_{n-1}$  então  $p'_n$  assume um valor infinito e em teoria esses dois fatores se cancelam na eq. (6). Isto nos leva a seguinte relação de recorrência que recomendamos:

$$\begin{aligned} p'_0 &= 1 \\ p'_1 &= \begin{cases} 1 & \text{if } a_1 = 0 \\ a_1 \end{cases} \\ p'_n &= \begin{cases} 1/p'_{n-1} & \text{if } a_n - b^2/p'_{n-1} = 0 \\ a_n - b^2/p'_{n-1} \end{cases} \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

para  $n = 2, 3, \dots, N$

Para calcular o sinal de  $p_N$  na eq. (6) nós usamos

$$q_n = q_{n-1} \text{sign}(p'_n), \quad n = 2, \dots, N \quad \text{onde} \quad q_{n-1} = \text{sign}(p'_{n-1}).$$

Esta última expressão pode ser calculada em aritmética de inteiros.

A sequência  $q_n$ , dá a informação de Sturm sobre a localização do autovalor, que pode ser usada como em [3] ou [1]. A sequência  $p'_n$  é auto estabilizadora uma vez que  $|p'_{n-1}|$  se torna grande quando  $p'_n \sim 0 (|a_n|)$ .

A relação de recorrência eq. (7) representa uma expansão em frações contínuas do determinante de  $A_N$ , isto é, uma expressão de frações contínuas para a equação indicial que provém da eq. (2).

Uma aplicação deste método pode ser achada na ref. (2).

Um algoritmo eficiente para calcular frações contínuas, pode ser usado com vantagens para implementar a eq. (7) (4).

## A P Ê N D I C E B

## UM MÉTODO NOVO PARA O CÁLCULO DE AUTO VALORES DE ESTADOS LIGADOS

## 1. Introdução

Seja a equação de Schrödinger

$$-\frac{d^2}{dr^2} \tilde{\Psi} + V(r) \tilde{\Psi} = E \tilde{\Psi} \quad (\text{B.1})$$

com as condições de contorno  $\tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}(\infty) = 0$ , onde  $V(r)$  pode incluir o termo centrífugo usual.

O método proposto baseia-se numa nova representação por partes do operador diferencial  $d^2/dr^2$  da eq. (1) por meio do conjunto

$$U_\alpha = \{ \exp(-\alpha r), r \cdot \exp(-\alpha r), r^2 \cdot \exp(-\alpha r) \} \quad (\text{B.2})$$

Usar esta representação por partes para  $d^2/dr^2$  no método proposto é equivalente a considerar uma aproximação por parte contínua e infinita  $\tilde{\Psi}(r) = \sum_k \Psi_k(r)$  para a autofunção  $\tilde{\Psi}(r)$  da eq. (1) onde em cada  $k$ :ésima parte a  $\Psi_k(r)$  é uma combinação linear do conjunto  $U_{\alpha_k}$  com  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\Psi_k(r) = (A_k + B_k r + C_k r^2) \exp(-\alpha_k r) ; r_{k-1} \leq r \leq r_k$$

Para qualquer  $\Psi(r)$  que é uma combinação linear sobre o conjunto  $U_\alpha$ , a única representação de dois pontos para o operador  $d^2/dr^2$  é dada por

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi(r) = \frac{2\alpha^2}{\exp(l)} \Psi(r-l/\alpha) - \alpha^2 \Psi(r) \quad (\text{B.3})$$

como mostrado na seção 2. A representação ideal para o operador  $d^2/dr^2$  isto é sua representação exata, seria dada pela sua expansão no conjunto completo de soluções da eq. (1). Este conjunto é claramente infinito e a priori desconhecido. Observamos que a base  $U_\alpha$  é claramente uma boa aproximação por partes para o conjunto ideal se o parâmetro  $\alpha$  for maior que zero. Isto se deve ao fato que a base  $U_\alpha$  satisfaz a condição de fronteira da eq. (1) no infinito.

A representação do operador de derivada segunda em  $U_\alpha$  dada pela eq. (3) tem várias propriedades únicas. A principal propriedade é que esta representação pode ser diagonalizada trivialmente. Uma outra característica é que  $U_\alpha$  (e portanto  $\Psi(r)$ ) depende do parâmetro livre  $\alpha$ . Este parâmetro variacional será determinado pelo próprio método através da condição estacionária para  $E_n$ . Este procedimento nos permite obter expressões analíticas para os autovalores da eq. (1) da forma  $E_n = E(an + b + c/n + \dots)$

## 2. O Método

O método proposto aqui é baseado na representação por partes de dois pontos para o operador derivado sobre o conjunto



$$U_{\alpha} = \{ \exp(-\alpha r), r \exp(-\alpha r), r^2 \exp(-\alpha r) \}$$

com  $\alpha > 0$ . As principais razões para se usar este conjunto particular são

(i) Qualquer elemento de  $U_{\alpha}$  satisfaz a condição de fronteira na eq. (1) no infinito.

(ii) O conjunto  $L(U_{\alpha})$  de todas as combinações lineares dos elementos de  $U_{\alpha}$  é fechado em relação a operação  $d^2/dr^2$ . Isto significa que a derivada segunda de qualquer combinação linear dos elementos de  $U_{\alpha}$  é ela própria uma combinação linear dos elementos de  $U_{\alpha}$ .

Para uma função  $\Psi$  em  $L(U_{\alpha})$  a representação de dois pontos de  $d^2/dr^2$  pode ser determinada como a única solução da identidade desejada por

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi(r) = p \Psi(r-q) + t \Psi(r) \quad (\text{B.4})$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $t$  são constantes. Estas constantes são unicamente calculadas exigindo-se que a eq. (4) seja válida para cada uma das três funções de  $U$ . As constantes são

$$p = 2 \alpha^2 \exp(-1) \quad (\text{B.5})$$

$$q = 1 / \alpha \quad (\text{B.6})$$

$$t = \alpha^2 \quad (\text{B.7})$$

A eq.(6) significa que a distância entre os dois pontos deve ser

$$\Delta r = 1/\alpha \quad (\text{B.8})$$

Esta representação de  $d^2/dr^2$  sobre  $U_\alpha$  é o ponto básico do método e é dada por

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) = \frac{2\alpha^2}{e} \psi(r - 1/\alpha) - \alpha^2 \psi(r) \quad (\text{B.9})$$

Neste caso, a eq. (9) significa que a derivada segunda de  $\psi \in L(U_\alpha)$  é dada exatamente em cada ponto  $r$  por uma combinação linear dos valores de  $\psi$  nos dois pontos  $r - 1/\alpha$  e  $r$ , correspondendo a propriedade (ii) acima. Veja no Apêndice C uma discussão mais detalhada deste ponto.

Introduzindo uma grade  $r_k$  no espaço de coordenadas  $0 \leq r < \infty$  podemos escrever  $r_{k-1} = r_k - 1/\alpha_k$ , onde  $r_k$  é dado por

$$r_k = f(k); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.10})$$

com  $f(0) \geq 0$  e com  $r_k > r_{k-1}$  para qualquer  $k$ . Note que  $f$  é uma função que preserva a ordem, isto é  $k > j$  implica que  $f(k) > f(j)$ . Esta grade será determinada pelo próprio método.

A largura de cada  $k$ -ésima parte dada por  $\Delta r_k = [f(k) - f(k-1)]$  satisfaz eq(8), isto é  $\Delta r_k \alpha_k = 1$  e pode variar com  $k$  uma

vez que a eq. (9) é uma fórmula de dois pontos.

Das eqs. (8) e (9) segue-se que

$$r_k = \frac{f(k)}{\Delta r_k \alpha_k} = \left[ \frac{f(k)}{f(k) - f(k-1)} \right] \frac{1}{\alpha_k} \quad (\text{B.11})$$

Uma vez que  $f(k) > f(k-1)$ , podemos mostrar facilmente que

$$\frac{f(k)}{f(k) - f(k-1)} = ak + b + c/k + \dots \quad (\text{B.12})$$

onde os vários  $a, b, c$ , etc, são constantes

A eq. (12) mostra que para qualquer função  $f(k)$  o seguinte é verdade:

- (i) a ordem mais alta de  $k$  que aparece na eq. (12) é 1
- (ii) a medida que o número  $k$  aumenta, eq. (12) é aproximadamente linear em  $k$ .

Por estas razões, podemos desprezar a contribuição de ordem 0 ( $1/k$ ) na equação (12) e escrever

$$r_k = \frac{a_k + b}{\alpha_k} \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{B.13})$$

Esta expressão desempenhará um papel importante na discussão que se segue. Devemos notar que, no que se segue, termos de ordem mais alta poderiam ter sido usados na eq. (13).

De posse das eqs. (9) e (13) voltamos agora para o problema de

calcular o enésimo autovalor de um dado potencial  $V(r)$  na eq. (1). Para isto usaremos a representação de dois pontos de  $d^2/dr^2$  da pela eq. (9) na eq. (9) para considerar a aproximação por partes

$$\psi^{(n)}(r) = \sum_k \psi_k^{(n)}(r) \quad \text{de} \quad \tilde{\psi}^{(n)}$$

$$\text{onde} \quad \psi_k^{(n)}(r) \in L(U_{\alpha_k})$$

e  $\alpha_k$  é ainda um parâmetro variacional, obtendo

$$-\frac{2\alpha_k^2}{c} \psi^{(n)}(r_{k-1}) + \left[ \alpha_k^2 + V(r_k) \right] \psi^{(n)}(r_k) = E_n \psi^{(n)}(r_k)$$

(B.14)

para  $k = 1, 2, \dots$  onde se  $r_0 = 0$  então  $\psi^{(n)}(r_0) = 0$  ou se  $r_0 \neq 0$   $\psi^{(n)}(r_0)$

está ligada com a origem pela eq. (C.5)

A eq. (14) pode também ser escrita em forma matricial  $M\Psi = E\Psi$   $\Psi = (\Psi(r_1), \Psi(r_2), \dots)^T$  e  $M$  uma matriz bidiagonal dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^2 + V(r_1) & 0 & 0 & \dots \\ -2\alpha_2^2/e & \alpha_2^2 + V(r_2) & 0 & \dots \\ 0 & -2\alpha_3^2/e & \alpha_3^2 + V(r_3) & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

aonde não há nenhum limite imposto na sua ordem. A matriz é a representação do operador Hamiltoniano da eq. (1) e depende dos parâmetros variacionais  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  com condições.

Observamos agora que devido a forma bidiagonal de M o enésimo autovalor de M tem a forma (2)

$$\psi^{(n)}(r_k) \begin{cases} = 0 & \text{if } k < n \\ \neq 0 & \text{if } k \geq n \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

e que todos os autovalores da eq. (14) são dados trivialmente pela diagonal principal de M, sem limite imposto a sua ordem.

Usando a forma da autofunção  $\psi^{(n)}(r_k)$  da eq. (16) para  $k = n$  na eq. (14) e recordando eq. (13) obtemos

$$E_r = \alpha_r^2 + v \left( \frac{an + b}{\alpha_n} \right); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.17})$$

Uma vez que  $\psi^{(n)}(r)$  é uma função do parâmetro variacional  $\alpha_r$  o princípio variacional para  $E_n$  é  $\frac{\partial E_n}{\partial \alpha_n} = 0$  e pode ser aplicado diretamente a eq. (17) dando

$$2 \alpha_r + \frac{\partial}{\partial \alpha_n} v \left( \frac{an + b}{\alpha_n} \right) = 0 \quad (\text{B.18})$$

A eq. acima também determina o parâmetro  $\alpha$  da base  $U_\alpha$  em qualquer k-ésima parte por meio da eq. (A.8) do Apêndice e portanto corresponde ao princípio variacional  $\partial E / \partial \alpha = 0$  aplicado a toda  $\psi^{(n)}(r)$ .

O procedimento geral proposto aqui para obtermos os estados ligados da eq. (1) começa pela solução da eq. (18) a fim de determinar a melhor  $\alpha_n$  como definido acima. Substituindo este  $\alpha_n$  na eq. (17) obtemos os autovalores como uma dada função das constantes a e b, explicitamente

$$E_n = E (an + b) \quad (\text{B.19})$$

A determinação de a e b é discutida em 4. Compararemos agora a eq. (19) para os potenciais tipo potência e logarítmicos com resultados conhecidos

### 3. Aplicação aos potenciais do tipo potência e logarítmico

Para exemplificar o método proposto iremos agora aplicá-lo a alguns problemas de autovalores bem conhecidos. Os resultados obtidos são comparados com os valores exatos, sempre que possível, ou com aproximações. Por simplicidade usaremos apenas estados s.

Para o potencial geral do tipo potência  $V(r) = kn^p$  com  $p > -2$  e  $p \neq 0$  a eq. (17) nos dá (eliminando-se o subscrito n de  $\alpha$ )

$$E_n = \alpha^2 + k(an + b)^p / \alpha^p \quad (\text{B.20})$$

Da condição estacionária,  $\partial E_n / \partial \alpha_n = 0$ , segue-se (compare com a eq. (18) que

$$\alpha = \left[ k_p (an + b)^{p/2} \right]^{1/(p+2)} \quad (\text{B.21})$$

Substituindo-se na eq. (20), obtemos

$$E_n = (kp/2)^{2/(p+2)} (1+2/p) (an+b)^{2p/(p+2)} \quad (\text{B.22})$$

como os autovalores de estados ligados do potencial tipo potên-  
cia ou

$$E_r = \alpha^2 (1 + 2/p) \quad (\text{B.23})$$

em função de  $\alpha$  da eq. (21)

Usando o mesmo procedimento para o potencial logarítmico

$V(r) = k \ln(r)$ , obtemos os autovalores

$$E_n = \frac{k}{2} \left[ \ln (2 e/k) \right] + k \ln (an + b)$$

Na tabela 1 nos apresentamos, em função de  $a$  e  $b$  as soluções para alguns potenciais que são de interesse atual para um mo-  
delo de confinamento de quarks, bem como o potencial tipo po-  
tência.

Os parâmetros  $a$  e  $b$  que aparecem nessa Tabela são calculados no item 4. Entretanto, como um exemplo, podemos nos lembrar que para  $a = 1$  e  $b = 0$ , os autovalores na Tabela 1 represen-  
tam o espectro correto de estados ligados para qualquer  $n$

Na Tabela 1 duas importantes relações funcionais para os auto-  
valores podem ser vistas: uma com o parâmetro  $K$  e outra com  
( $an + b$ ).

A parte restante desta Seção é devotada a uma comparação des-  
ses dois aspectos da função  $E_n = E(an + b)$  com os resultados

conhecidos usaremos o trabalho de Quigg e Rosner [1]

A dependência funcional dos autovalores com os números quânticos, como dado pela Tabela I é exata para os potenciais Coulomb, linear e harmônicos. Para os outros casos não são conhecidas soluções exatas. Entretanto, como pode ser visto das eqs. (4.33) e (4.59) da ref. [1], nossos resultados na verdade mostra a mesma dependência dos números quânticos que os resultados obtidos por WKB. Do que foi dito acima, concluímos que o método proposto reproduz a dependência funcional conhecida para os potenciais potência e logarítmico, em função de  $K$  e  $n$ .

#### 4. Cálculo de $a$ e $b$

O procedimento descrito acima nos permite estabelecer expressões fechada do tipo  $E_n = E(an + b)$  para os autovalores.

Para determinar  $a$  e  $b$  estudamos o comportamento das duas primeiras autofunções depois do ponto de inflexão externo. A fim de gerar funções precisas, usualmente precisamos de ter  $\Delta r \ll 1$ . Em geral entretanto esta condição entra em conflito com a exigência  $\Delta r = 1/\alpha$  na eq. (8). Em vez da eq. (9) portanto usaremos a fórmula completa de três pontos em  $U_\alpha$ , dada pela eq. (A.1).

A eq. (1) pode ser escrita em forma matricial como  $T\Psi = E\Psi$ , onde agora  $T$  é tridiagonal. Uma vez que já conhecemos a dependência funcional de  $\alpha_n = \alpha(an + b) \Rightarrow E_n = E(an + b)$ , a equação matricial  $T\Psi = E\Psi$  tem apenas duas incógnitas:  $a$  e  $b$ .

Esta equação pode ser resolvida por qualquer técnica matricial

conhecida, ou pelo método de expansão em frações contínuas [3]. Este último pode ser programado com eficiência em um calculador programável de bolso, ou então ser implementado num grande computador, com consideráveis vantagens de economia de tempo de máquina em relação aos outros métodos de que temos conhecimento.

Uma abordagem alternativa também pode ser sugerida. Calculados dois autovalores  $E_i$  e  $E_j$  através de um procedimento numérico qualquer, podemos escrever um sistema de duas equações para  $(ai + b)$  e  $(aj + b)$  para determinarmos  $a$  e  $b$ .

Em qualquer um dos dois modos sugeridos para se determinar  $a$  e  $b$ , uma outra vantagem do método proposto é clara: do estudo de apenas dois autovalores do espectro, ou de apenas duas autofunções pode se obter uma fórmula fechada que fornece todos os autovalores do espectro, numa excelente aproximação.

Para o potencial tipo potência, a Fig. 1 mostra um gráfico dos parâmetros  $a$  e  $b$ , em função da potência  $p$ . Este gráfico é ilustrativo da faixa geral de valores de  $a$  e  $b$ .

##### 5. Comparação numérica dos autovalores

Para exemplificar a precisão dos autovalores calculados pelo método proposto, esta seção apresenta uma comparação numérica dos estados ligados  $E_n$  para os mesmos potenciais anteriormente descritos na seção 3. As constantes  $a$  e  $b$  foram calculadas usando a formulação de três pontos a partir da eq. (C.1) e aplicando também o algoritmo baseado no método de expansão em frações contínuas da ref. [3]. O erro absoluto em  $a$  e  $b$  foi escolhido inferior a  $10^{-5}$ .

A Tabela 2 apresenta os valores calculados de  $a$  e  $b$  para alguns potenciais. Os autovalores são facilmente obtidos das Tabelas 1 e 2.

Os autovalores calculados para os potenciais Coulombico e Harmônico coincidem com os resultados conhecidos para todos os estados  $n$ . Para os potenciais  $r$ , e  $r^{1/2}$  não se conhece solução exata. Portanto nós comparamos na Tabela 3 os cinco primeiros autovalores com aqueles obtidos com a aproximação WKB e quando disponível, com resultados numéricos. Deve-se notar que o resultado WKB não é muito preciso para  $n$  pequeno, como se sabe.

Para mostrar o efeito da constante  $c$  da eq. (12) em  $E_n = E(an + b + c/n)$  nós calculamos esta expressão para o potencial linear. O resultado é

$$E_n = 1.88988 k^{2/3} (1.81425n - 0,45619 + 0,01803/n)^{2/3} \quad (\text{B.25})$$

Para comparação, o mesmo resultado para  $E(an + b)$  é

$$E_n = 1.88988 k^{2/3} (1.80523n - 0.42915)^{2/3} \quad (\text{B.26})$$

A primeira coluna da Tabela 4 dá os autovalores como calculados a partir da eq. (26), a segunda coluna aqueles oriundos da eq. (25) e as últimas duas colunas os resultados exatos e WKB respectivamente. Os valores exatos correspondem aos zeros da Função de Airy (1). Como podemos ver, a inclusão de  $c/n$  melhora um pouco os autovalores. A contribuição para  $E_n$  de termos de ordem mais alta, isto é  $d/n^2$ , pode ser estimada a partir

diferença relativa entre  $E(an + b)$  e  $E(an + b + c/n)$ . Este é um critério geral do tipo de Cauchy para avaliar a precisão intrínseca dos autovalores se se fazer uso de outros valores.

Para concluir, embora o resultado completo deste método seja dado por  $E_n = E(an + b + c/n + \dots)$ , obtivemos resultados muito bons, considerando apenas  $E_n = E(an + b)$

3. E. Garcia and A.B. d'Oliveira, J. Comp. Appl. Math. 81 (1984).

## REFERÊNCIAS

1. C. Quigg and J.L.Rosner, Phys. Rep., Vol.56, 169 (1979)
2.  $\psi^{(n)}(r_k) = 0$  se  $k < n$  corresponde aos  $n-1$  zeros da parte oscilatória de  $\psi^{(n)}(r)$  e  $\psi^{(n)}(r_k) \neq 0$  se  $k \geq n$  corresponde a parte decrescente.
3. E. Gerck and A.B. d'Oliveira, J. Comp. Appl. Math. 81 (1980).



Potencial	$V(r)$	$\alpha_n$	$E_n$
Coulômbico	$-K/r$	$K/ [2 (an + b) ]$	$- K^2/ [4 (an + b)^2 ]$
Harmônico	$K r^2$	$[ K (an + b)^2 ]^{1/4}$	$2 K^{1/2} (an + b)$
Linear	$K r$	$[ K (an + b)/2 ]^{1/3}$	$3 [ K (an + b)/2 ]^{2/3}$
Raiz-Quadrada	$K r^{1/2}$	$[ K (an + b)^{1/2}/4 ]^{2/5}$	$5 (K/4)^{4/5} (an + b)^{2/5}$
Potência	$K r^p$	$[ \frac{K p}{2} (an + b)^p ]^{1/(p+2)}$	$[ 1 + 2/p ] \alpha_n^2$
Logarítmico	$K \ln(r)$	$(K/2)^{1/2}$	$K [ \ln(2e/k) ]/2 + K \ln(an+b)$

Tabela B-1 - Resumo dos resultados obtidos usando o método proposto para algumas potências  $V(r)$ . En são os auto valores de estados ligados para  $n = 1, 2, \dots$



Tabela B-1 Comparação entre os primeiros cinco autovalores para os potenciais, raiz quadrada e logarítmico

Tabela B-2 Valores das constantes a e b em  $E_n = E (an + b)$  da Tabela B-1

	Resultados	Resultados	WKB (1)
1	1.0443	1.0443	.9778
2	1.8474	1.8474	1.8291
3	2.5913	2.5957	2.5873
4	3.2870	3.2897	3.2771
5	3.9343	3.9369	3.9217
Potencial	a	b	
Coulômbico	1.00000	.00000	
Raiz Quadrada	1.67120	-.36853	
Linear	1.80523	-.42915	
Harmônico	2.00000	-.50000	
Logarítmico	1.50198	-.28330	

Tabela B-3 Comparação entre os primeiros cinco autovalores para os potenciais, raiz quadrada e logarítmico

$V(r)$	$n$	Resultados obtidos	Resultados numéricos	WKB <sup>(1)</sup>
$1/n(r)$	1	1.0443	1.0443	.9778
	2	1.8474	1.8474	1.8251
	3	2.2870	2.2897	2.2771
	4	2.5913	2.5957	2.5873
	5	2.8243	2.8299	2.8237
$\sqrt{r}$	1	1.8334	-	1.8117
	2	2.5506	-	2.5426
	3	3.0487	-	3.0465
	4	3.4475	-	3.4488
	5	3.7869	-	3.7909

Tabela B-4 Comparação dos autovalores calculados pelo método proposto, em duas aproximações diferentes com os resultados exatos e os resultados WKB para o potencial linear  $V(r) = r$

n	$E(an + b)$ (1)	$E(an+b+c/n)$ (2)	Exato (3)	WKB (3)
1	2.3380	2.3381	2.3381	2.3203
2	4.0879	4.0880	4.0879	4.0802
3	5.5161	5.5206	5.5206	5.5161
4	6.7778	6.7868	6.7867	6.7838
5	7.9311	7.9444	7.9441	7.9422

(1) da eq. B(26)

(2) da eq. B(25)

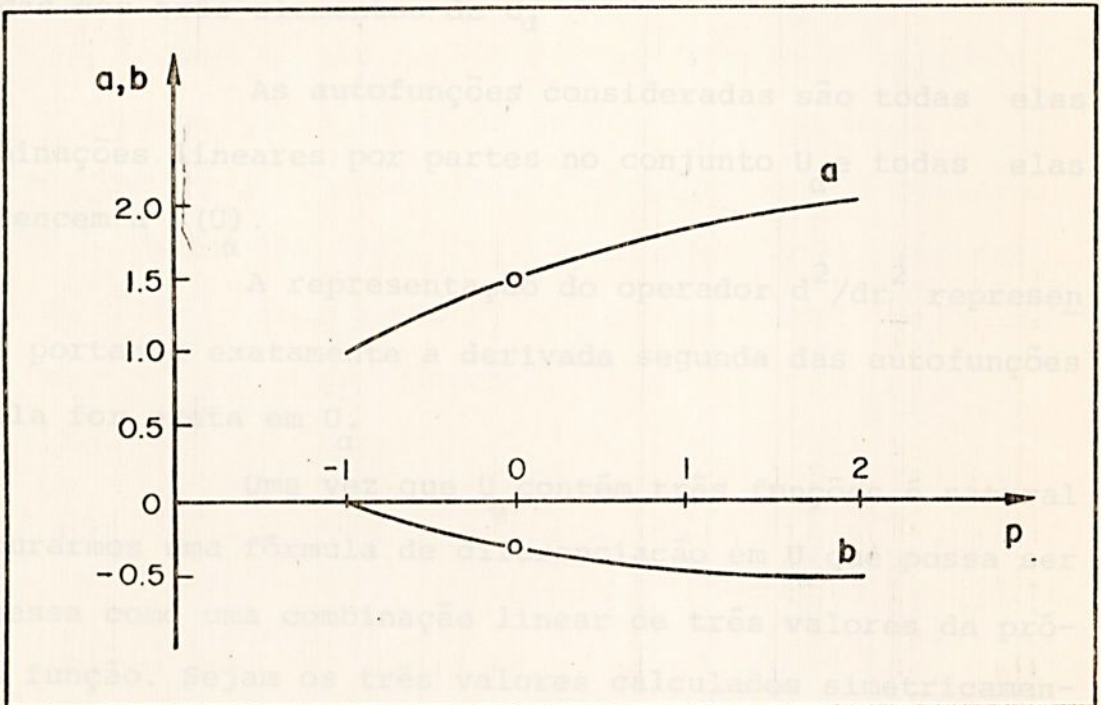
(3) da Ref. B(1)

BIBLIOTECA

00078

APÊNDICE C

Fig. B-1 Comportamento das constantes a e b em  $E_n = E(an + b)$  para o potencial tipo potência  $V(r) = K r^p$  em função de p.



Instituto de Física de São Carlos  
**BIBLIOTECA**

00078

## A P Ê N D I C E C

REPRESENTAÇÃO DE  $d^2/dr^2$  em  $U_\alpha$ 

O conjunto de todas as combinações lineares possíveis em  $U$  é definido por  $L(U_\alpha)$ . Como  $d^2/dr^2$  é um operador linear, a derivada segunda de qualquer função de  $L(U_\alpha)$  pode ser escrita como uma combinação linear das derivadas segundas dos três elementos de  $U_\alpha$ .

As autofunções consideradas são todas elas combinações lineares por partes no conjunto  $U_\alpha$  e todas elas pertencem a  $L(U_\alpha)$ .

A representação do operador  $d^2/dr^2$  representará portanto exatamente a derivada segunda das autofunções se ela for exata em  $U_\alpha$ .

Uma vez que  $U_\alpha$  contém três funções é natural procurarmos uma fórmula de diferenciação em  $U_\alpha$  que possa ser expressa como uma combinação linear de três valores da própria função. Sejam os três valores calculados simetricamente, em torno do ponto  $r$

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi(r) = u\Psi(r - \Delta r) + v\Psi(r) + w\Psi(r + \Delta r) \quad (C-1)$$

onde  $r$  tem o significado usual e  $u$ ,  $v$  e  $w$  são constantes que serão ainda determinadas.

Para calcularmos as três constantes  $u$ ,  $v$  e  $w$  precisamos três equações. Estas equações são obtidas simplesmente exigindo-se que a eq. (A.1) seja satisfeita para cada uma das três funções de  $U_\alpha$ . O sistema resultante de equações tem uma única solução dada por

$$u = (1 + \alpha \Delta r) / [(\Delta r)^2 \exp(\alpha \Delta r)] \quad (C-2)$$

$$v = \alpha^2 - 2/(\Delta r)^2 \quad (C-3)$$

$$w = (1 - \alpha \Delta r) / [(\Delta r)^2 \exp(-\alpha \Delta r)] \quad (C-4)$$

Para  $\alpha \Delta r = 1$ , a eq. (c-4) nos dá  $w=0$  e a eq. (c.1) coincide com a representação de dois pontos dada pela eq. (B-9).

Observe que  $\alpha$  pode ser uma constante complexa, e que o conjunto mais geral de funções para as quais (C.1) é válida inclui as funções trigonométricas seno e cosseno.

Para uso posterior calculamos agora a representação de  $d^2/dr^2$  no conjunto  $V_\alpha = \{\exp(\alpha r), r \exp(\alpha r)\}$  da mesma maneira que anteriormente.

O resultado é

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} = \frac{2\alpha}{(\Delta r) \exp(\alpha \Delta r)} \psi(r - \Delta r) + \left[ \alpha^2 - \frac{2\alpha}{\Delta r} \right] \psi(r) \quad (C.5)$$

Uma vez que esta equação é uma fórmula de dois pontos mesmo para  $\alpha \Delta r \neq 1$ , ela pode ser usada para poder ser usada para estabelecer uma ligação entre  $\psi^{(n)}(r_0)$  e  $\psi^{(n)}(0) = 0$  quando  $r_0 \neq 0$  como explicado no último item do apêndice.

Para  $\alpha \Delta r = 1$ , a eq. (A.5) coincide com a eq. (A.1).

EXPANSÃO DE  $f(k)/(f(k)-f(k-1))$

Seja  $f(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  uma seqüência dis -

creta de números representando uma malha nas coordenadas espaciais  $0 \leq r < \infty$  como considerado na seção II. A sequência  $f(k)$  é então dada por

$$0 \leq f(0) < f(1) < f(2) < \dots < \infty$$

O quociente

$$\theta(k) = \frac{f(k)}{f(k) - f(k-1)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.6})$$

Desempenha um papel importante na abordagem proposta. Primeiramente notemos que  $\theta(k)$  é bem definida; isto é não possui singularidades.

Para um inteiro arbitrário  $M$  considere o polinômio de grau  $N$  mínimo  $N \leq M-1$  tal que  $f(k) = P^N(k)$  para  $k = 1, 2, \dots, M$ . Este polinômio existe e é único. Note que  $f(k) - f(k-1) = Q^{N-1}(k)$ , isto é um polinômio de grau  $N-1$ . Segue-se que

$$\theta(k) = \frac{P^N(k)}{Q^{N-1}(k)} = ak + b + c/k + \dots \quad (\text{C.7})$$

para  $k = 1, 2, \dots, M$  e onde  $a, b, c$ , são constantes. O procedimento acima deve ser repetido para  $M' = M+1$  e assim por diante. Isto significa que não há um limite imposto para  $M$  e a eq. (C.12) para  $k = 1, 2, \dots$  é obtida

RELAÇÃO ENTRE  $\alpha_k$  e  $r_k$

Da eq. (C.8) e (C.13) segue-se que para  $\alpha_k$

$$\alpha_{k+1} = \left[ \frac{a(k+1) + b - 1}{ak + b} \right] \alpha_k ; k = 1, 2, \dots \quad (\text{C.8})$$

e para  $r_k$

$$r_{k+1} = \left[ \frac{a(k+1) + b}{a(k+1) + B - 1} \right] r_k ; k = 1, 2, \dots \quad (\text{C.9})$$

com

$$r_1 = \begin{cases} \left[ \frac{a + b}{a + b - 1} \right] r_0 , & \text{para } r_0 \neq 0, \text{ for } a + b \neq 1 \\ r_1 , & \text{para } r_0 = 0, \text{ for } a + b = 1 \end{cases}$$

Das eqs. (C-9) e (C-10) segue-se que

$$a + b \geq 1 \quad (\text{C-11})$$



unesp



.1 12 13 14 15 16 17 18