

Andrea Cristina Berti

Polinômios Ortogonais em Espaços
de Sobolev





1910000754



**POLINÔMIOS ORTOGONAIS EM
ESPAÇOS DE SOBOLEV**

Andrea Cristina Berti

**Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional**

MAC-023

Polinômios Ortogonais em Espaços de Sobolev

Andrea Cristina Berti

sob orientação do Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas (IBILCE)

- UNESP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ciências

Matemáticas, Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional.



754/98

3

[1997]

À minha mãe, Aparecida,
e ao meu pai, Dorival,
dedico.



A todas as pessoas que estão
colaborando para que o
mundo seja mais justo,
ofereço.



Agradecimentos

Aos meus pais, pela confiança e apoio constante.

Ao Prof. A. Sri Ranga. pela orientação segura deste trabalho.

À Profa. Eliana Xavier Linhares de Andrade, pela atenção constante e pela contribuição na correção deste trabalho.

Aos companheiros do curso de mestrado, pela amizade tão importante.

À CAPES-PROEX, pelo apoio financeiro.

A todos os trabalhadores que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é dar uma visão geral sobre polinômios ortogonais em relação ao produto interno $\langle p, q \rangle_s = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbf{R}} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k$, especialmente quando $N = 1$. Em particular, foram estudados os polinômios de Gegenbauer-Sobolev, Laguerre-Sobolev e uma classe especial de polinômios ortogonais de Sobolev cujas medidas associadas possuem uma característica especial.



Abstract

The purpose of this work is to consider a survey about orthogonal polynomials with respect to the inner product $\langle p, q \rangle_s = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbf{R}} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k$, especially when $N=1$. In particular, have been considered the Gegenbauer-Sobolev, Laguerre-Sobolev polynomials and, a special class of polynomials with their measures having a special characteristic.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Integral de Stieltjes	4
1.2 Funcionais de Momentos e Polinômios Ortogonais	5
1.3 Relação de Recorrência de três Termos e Propriedades dos Polinômios Ortogonais	7
1.4 Polinômios quasi-ortogonais	9
1.5 Polinômios Ortogonais Clássicos	9
2 Polinômios Ortogonais de Gegenbauer-Sobolev	12
2.1 Polinômios de Gegenbauer-Sobolev e Polinômios de Gegenbauer Clássicos	12
2.2 O operador linear F	18
3 Polinômios Ortogonais de Laguerre-Sobolev	22
3.1 Polinômios de Laguerre-Sobolev e Polinômios de Laguerre	22
3.2 O operador linear F	32
4 Pares Coerentes	34
4.1 Pares Coerentes	34
4.2 Pares Coerentes e Polinômios Ortogonais Clássicos	42



4.3 Pares simetricamente coerentes	46
--	----

Bibliografia	58
---------------------	-----------



Introdução

Sejam $d\mu_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, medidas positivas na reta real $\mathbb{R}$, tendo suporte limitado ou não.

Consideremos o espaço de Sobolev

$$H_N(\mathbb{R}) = \{f : \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}]^2 d\mu_k < \infty\}$$

onde f possui derivadas até ordem N e essas derivadas ao quadrado são integráveis em relação às medidas $d\mu_k$. Suponhamos que essas medidas sejam tais que o espaço dos polinômios, $\mathcal{P}$, é um subespaço de $H_N(\mathbb{R})$. Munimos $\mathcal{P}$ com o produto interno:

$$\langle p, q \rangle_S = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} p^{(k)}(x) q^{(k)}(x) d\mu_k, \quad p, q \in \mathcal{P} \quad (0.1)$$

e norma associada $\|p\|_S^2 = \langle p, p \rangle_S$. Vamos supor, também, que μ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, têm infinitos pontos de aumento. Muitos autores têm estudado, principalmente na última década, polinômios ortogonais associados ao produto interno (0.1). Tais polinômios são chamados polinômios ortogonais do tipo Sobolev. O caso mais encontrado na literatura é quando $N=1$, ou seja, o caso dos polinômios ortogonais associados ao produto interno:

$$\langle p, q \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} p(x) q(x) d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} p'(x) q'(x) d\mu_1(x), \quad \lambda \geq 0. \quad (0.2)$$

A motivação inicial para o estudo de polinômios ortogonais desse tipo e de outros semelhantes foi o problema de aproximação por mínimos quadrados. Aqui, uma dada função f e sua derivada f' são aproximadas simultaneamente por um polinômio $Q(x) = \hat{Q}(x)$ de grau n , minimizando:



$$\|Q - f\|_S^2 = \int_{\mathbf{R}} [Q(x) - f(x)]^2 d\mu_0(x) + \lambda \int_{\mathbf{R}} [Q'(x) - f'(x)]^2 d\mu_1(x), \text{ para todo } Q(x) \in \mathcal{P}_n.$$

onde $\mathcal{P}_n$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n .

Expandindo $Q(x)$ em termos de polinômios ortogonais do tipo Sobolev, obtemos a aproximação de Fourier, $\hat{Q}(x)$, de $f(x)$ e $f'(x)$.

Neste trabalho, apresentaremos resultados de diversos artigos de vários autores relacionados a polinômios ortogonais do tipo Sobolev associados ao produto interno (0.2) dando uma visão geral sobre o assunto.

No primeiro capítulo, apresentamos uma série de definições e resultados conhecidos que serão utilizados no decorrer do trabalho: definição da Integral de Riemman-Stieltjes; definição de um funcional de momentos e algumas de suas propriedades; definição de polinômios ortogonais e algumas de suas propriedades, como relação de recorrência de três termos e propriedade de entrelaçamento dos zeros, além de um apanhado sobre polinômios ortogonais clássicos.

Nos dois capítulos seguintes, apresentaremos dois casos de polinômios ortogonais do tipo Sobolev associados às medidas clássicas. O primeiro deles, são os polinômios ortogonais de Gegenbauer-Sobolev estudados em [8] e em [14]. Nesse caso, os polinômios estão associados ao produto interno (0.2), onde $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dx$. Mostraremos algumas relações existentes entre tais polinômios do tipo Sobolev e os polinômios de Gegenbauer e algumas propriedades decorrentes dessas relações.

O mesmo será feito no próximo capítulo com os polinômios ortogonais de Laguerre-Sobolev, (estudados em [10] e [14]), cujo produto interno (0.2) utiliza as medidas $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = x^\alpha e^{-x} dx$.



No capítulo 4, consideramos o produto interno (0.2) de modo que $d\mu_0$ e $d\mu_1$ formam um par coerente. Veremos que, de acordo com Iserles et al. em [5], os polinômios ortogonais, $Q_n(x)$, do tipo Sobolev associados a tal produto interno podem ser escritos como combinação linear de polinômios ortogonais em relação à medida $d\mu_0$, cujos coeficientes, exceto o último, não dependem do grau n do polinômio $Q_n(x)$. Ainda, relacionado a pares coerentes, exporemos o resultado apresentado por Meijer em [13] que consiste em: se $\{K_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{H_n\}_{n=0}^\infty$ são sequências de polinômios ortogonais em relação a $d\mu_0$ e $d\mu_1$, respectivamente, tais que $d\mu_0$ e $d\mu_1$ formam um par coerente então, para λ suficientemente grande, $Q_n(x)$ tem n zeros reais e distintos entrelaçados aos zeros de $K_{n-1}(x)$ e $H_{n-1}(x)$. Se $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par simetricamente coerente, a situação é bem mais complicada e $Q_n(x)$ pode ter um par de zeros complexos.



Capítulo 1

Preliminares

Introdução

Neste capítulo, citaremos algumas propriedades e alguns resultados já conhecidos sobre polinômios ortogonais, que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Esses resultados estão enunciados e demonstrados em [19] e [2].

1.1 Integral de Stieltjes

Consideremos duas funções $f(x)$ e $\phi(x)$ definidas em um intervalo (a, b) . Suponhamos que a função $f(x)$ é contínua e que $\phi(x)$ é não decrescente. Seja uma partição do intervalo $[a, b]$, dividido nos seguintes pontos:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m < x_{m+1} = b.$$

Sejam $M_1, M_2, \dots, M_m$, os valores máximos e $m_1, m_2, \dots, m_m$, os valores mínimos da função $f(x)$ dentro dos sub-intervalos $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_m, x_{m+1})$, respectivamente, e construamos as somas:

$$S_\phi = \sum_{k=1}^m M_k [\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)] \text{ e } s_\phi = \sum_{k=1}^m m_k [\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)],$$



que chamamos somas de Stieltjes superior e inferior, respectivamente, da função $f(x)$ em relação à função $\phi(x)$ no intervalo (a, b) . Seja δ a amplitude do maior subintervalo, ou seja, $\delta = \max_{1 \leq k \leq m} |x_{k+1} - x_k|$, e sejam os limites L_M e L_m definidos por:

$$L_M = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m M_k[\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)] \text{ e } L_m = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m m_k[\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)].$$

Se tais limites existem, definimos a integral de Stieltjes de $f(x)$ em relação à função $\phi(x)$ da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x) d\phi(x) := L_M = L_m. \quad (1.1)$$

1.2 Funcionais de Momentos e Polinômios Ortogonais

Seja $\mathcal{P}$ o espaço dos polinômios de uma variável com coeficientes complexos e $\mathcal{P}_n$ o subespaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n .

Definição 1.1 : *Seja $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de números complexos e*

$I : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ (isto é, $p \in \mathcal{P} \Rightarrow I[p] \in \mathbb{C}$) um funcional linear sobre $\mathcal{P}$ tal que

$$I[t^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Então $I[\cdot]$ é chamado "funcional de momentos" associado à sequência $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$. Para cada n , μ_n é chamado momento de ordem n de $I[\cdot]$.

Definição 1.2 : *Seja $I[\cdot]$ um funcional de momentos. Sejam os polinômios $Q_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, tais que:*

i) $Q_n(t)$ é um polinômio de grau exatamente n ,

$$ii) I[t^s Q_n(t)] = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } s = n. \end{cases}$$

Então, $\{Q_n(t)\}_{n=0}^\infty$ é chamada uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) associados a $I[\cdot]$.

Definição 1.3 : Denominamos determinantes de Hankel, os determinantes $H_n^{(m)}$ dados por:

$$H_0^{(m)} = 1,$$

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1$$

onde m é um inteiro positivo qualquer.

Tomando $Q_n(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_n t^n$, da definição (1.2) ii) obtemos:

$$I[t^s(q_0 + q_1 t + \dots + q_n t^n)] = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n, & \text{se } s = n. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q_0 \mu_s + q_1 \mu_{s+1} + \dots + q_n \mu_{s+n} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n, & \text{se } s = n. \end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_n \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Usando a regra de Cramer, chegamos que

$$q_n = \frac{1}{H_{n+1}^{(0)}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} & 0 \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & \rho_n \end{vmatrix} = \rho_n \frac{H_n^{(0)}}{H_{n+1}^{(0)}}.$$

Se escolhermos $q_n = 1$, temos que

$$\rho_n = \frac{H_{n+1}^{(0)}}{H_n^{(0)}}.$$

Substituindo a última linha do sistema linear (1.2) por $q_0 + q_1 t + \dots + q_n t^n = Q_n(t)$, obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_n(t) \end{bmatrix}.$$

Daí, como $q_n = 1$, temos

$$Q_n(t) = \frac{1}{H_n^{(0)}} \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^n \end{bmatrix}.$$

Definição 1.4 : Um funcional $I[.]$ é regular se $H_n^{(0)} \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Podemos, portanto, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.5 (Existência dos polinômios ortogonais $Q_n(t)$) : Os polinômios $Q_n(t)$, $n \geq 0$, existem se, e somente se, $I[.]$ é regular.

Definição 1.6 : Seja $E \subset \mathbb{R}$. Um funcional $I[.]$ é dito definido positivo se, e somente se, $I[p(x)] > 0$, para qualquer polinômio $p(x)$ real não identicamente nulo em E . (Ao conjunto E chamamos suporte de $I[.]$).

1.3 Relação de Recorrência de três Termos e Propriedades dos Polinômios Ortogonais

Teorema 1.7 : Seja $I[.]$ um funcional de momentos regular e $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos (SPOM) associados a $I[.]$. Então $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte



relação de recorrência:

$$P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1,$$

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), n \geq 0, \quad (1.3)$$

onde γ_0 é arbitrário, e

$$\beta_n = \frac{I[xP_n^2(x)]}{I[P_n^2]}, n \geq 0, \quad \gamma_n = \frac{I[P_n^2(x)]}{I[P_{n-1}^2(x)]} \neq 0, n \geq 1.$$

Além disso, se $I[.]$ é definido positivo, γ_n é real e positivo para $n \geq 1$.

Teorema 1.8 (Teorema de Favard) : Sejam $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ e $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ duas sucessões arbitrárias de números complexos, e seja $\{P_n\}_{n \geq 0}$ a família de polinômios definida pela relação de recorrência (1.3). Então, existe um único funcional de momentos $I[.]$ tal que $I[1] = \gamma_0$ e $I[P_n P_m] = 0$, para $n \neq m$, $n, m = 0, 1, \dots$. Além disso, $I[.]$ é regular e $\{P_n\}_{n \geq 0}$ é a SPO associada a $I[.]$ se, e somente se, $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$ e $I[.]$ é definido positivo se, e somente se, $\gamma_n > 0$, $n \geq 1$.

Definição 1.9 : Ao polinômio em duas variáveis

$$K_n(x, y) = \sum_{i=0}^n \frac{P_i(x)P_i(y)}{I[P_i^2]}$$

damos o nome de n -ésimo núcleo associado à SPOM $\{P_n\}_{n \geq 0}$.

Teorema 1.10 : Seja o suporte E de $I[.]$ um intervalo. Então os zeros de $P_n(x)$ são todos reais, simples e estão localizados no interior de E .

Teorema 1.11 : Sejam $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ e $x_{n+1,i}$, $i = 1, \dots, n+1$ as raízes de $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$, respectivamente, de modo que $x_{k,i} < x_{k,i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, para $k = n$ e $k = n+1$. Os zeros de $P_n(x)$ se entrelaçam aos zeros de $P_{n+1}(x)$ da seguinte forma:

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < x_{n+1,3} < \dots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

1.4 Polinômios quasi-ortogonais

Definição 1.12 : Um polinômio $q(x)$, não identicamente nulo, é chamado quasi-ortogonal de ordem $n + 1$ se, e somente se, é de grau no máximo $n + 1$ e

$$I[x^k q(x)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Teorema 1.13 : Um polinômio $q(x)$ é quasi-ortogonal de ordem $n+1$ se, e somente se, existem constantes A e B , ($A \neq 0$ ou $B \neq 0$), tais que:

$$q(x) = AP_{n+1}(x) + BP_n(x).$$

Teorema 1.14 : Seja $I[.]$ um funcional definido positivo. As raízes de um polinômio quasi-ortogonal real são todas reais e simples. No máximo uma das raízes se localiza fora do suporte de $I[.]$.

1.5 Polinômios Ortogonais Clássicos

Às famílias de polinômios ortogonais mais estudadas na literatura, chamamos de polinômios ortogonais clássicos. Os funcionais de momentos associados a esses polinômios são da seguinte forma:

$$I[f] = \int_a^b f(x) d\phi(x) \quad (1.4)$$

onde (a, b) é o intervalo suporte do funcional $I[.]$, $\phi(x)$ é contínua e derivável e $d\phi(x)/dx$ tem uma forma simples para cada caso. Podemos classificar os polinômios ortogonais clássicos em: Jacobi, Laguerre e Hermite. A seguir, comentaremos sobre cada um desses polinômios.

Polinômios de Jacobi

São os polinômios ortogonais associados ao funcional de momentos (1.4) onde

$$d\phi(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta dx, \quad \alpha > -1, \beta > -1.$$



O intervalo suporte deste funcional é $[-1, 1]$. Denotamos os polinômios de Jacobi de grau n por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Eles satisfazem à seguinte fórmula de recorrência de três termos:

$$(2n + \alpha + \beta)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(2n + \alpha + \beta + 2)} + (2n + \alpha + \beta)x \right] P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n - 1)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

$$\text{onde } P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1 \text{ e } P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = x + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 2}.$$

Satisfazem, também, à seguinte equação:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\binom{\alpha + \beta + 2n}{n}} \frac{(-1)^n}{n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}$$

conhecida como Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi. Quando $\alpha = \beta = 0$, ou seja, $d\phi(x) = dx$ chamamos esses polinômios de polinômios de Legendre.

Se $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ($d\phi(x) = (1-x^2)^{-1/2}dx$), temos os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie.

Se $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ($d\phi(x) = (1-x^2)^{1/2}dx$), temos os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie.

E, finalmente, quando $\alpha = \beta = \mu - \frac{1}{2}$, $\mu > -\frac{1}{2}$, $\mu \neq 0$, são conhecidos por polinômios de Gegenbauer.

Polinômios de Laguerre

Denotados por $L_n^{(\alpha)}$, os polinômios de Laguerre são polinômios ortogonais associados ao funcional de momentos (1.4) onde $d\phi(x) = x^\alpha e^{-x}dx$, $\alpha > -1$, cujo intervalo suporte é $[0, \infty)$.



A fórmula de recorrência de três termos satisfeita por esses polinômios é:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \beta_n)L_n^{(\alpha)}(x) - \gamma_n L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

onde $\beta_n = (2n + \alpha + 1)$, $\gamma_n = n(n + \alpha)$ e com

$$L_0(\alpha) = 1 \text{ e } L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1.$$

Satisfazem, ainda, à seguinte fórmula de Rodrigues:

$$x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}.$$

Polinômios de Hermite

São polinômios ortogonais associados ao funcional (1.4) onde $d\phi(x) = e^{-x^2} dx$, cujo intervalo suporte é toda a reta $\mathbb{R}$. Denotamos por $H_n(x)$ o polinômio de grau n . Os polinômios de Hermite obedecem à relação de recorrência de três termos:

$$H_{n+1}(x) = xH_n - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x,$$

e satisfazem à fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais de Gegenbauer-Sobolev

Introdução

Consideremos o produto interno (0.2) com $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$, ou seja, o produto interno:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx + \lambda \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx \quad (2.1)$$

onde $\alpha > 0$ e $\lambda \geq 0$. Aos polinômios mônicos $Q_n^{(\alpha)}(x)$ ortogonais em relação a tal produto interno, chamamos polinômios de Gegenbauer-Sobolev. Nosso objetivo, neste capítulo, é apresentar o estudo dessa sequência de polinômios, estudo esse foi feito por Marcellán et al em [8] e por Pérez em [14].

2.1 Polinômios de Gegenbauer-Sobolev e Polinômios de Gegenbauer Clássicos

Usaremos a notação $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1 - x^2)^{\alpha-1/2}dx$. Denotemos por $\{Q_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais de Gegenbauer-Sobolev mônicos e por $\{C_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais de Gegenbauer mônicos. Da simetria do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$,



deduzimos a simetria dos polinômios $Q_n^{(\alpha)}(x)$, isto é,

$$Q_n^{(\alpha)}(-x) = (-1)^n Q_n^{(\alpha)}(x).$$

Teorema 2.1 : Se denotarmos por

$$E_n^{(\alpha)} = \frac{(n+2)(n+1)}{4(n+\alpha+1)(n+\alpha)},$$

então temos:

$$C_n^{(\alpha)}(x) - E_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}(x) = Q_n^{(\alpha)}(x) - d_{n-2}(\lambda) Q_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad (2.2)$$

onde

$$d_n(\lambda) = E_n^{(\alpha)} \frac{\langle C_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x) \rangle}{\langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x) \rangle_s} = E_n^{(\alpha)} \frac{K_n^{(\alpha)}}{\tilde{K}_n^{(\alpha)}},$$

$$\text{com } K_n^{(\alpha)} = \langle C_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x) \rangle \quad e \quad \tilde{K}_n^{(\alpha)} = \langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x) \rangle_s, \quad n \geq 0.$$

Demonstração: Em primeiro lugar, daremos duas relações satisfeitas pelos polinômios $C_n^{(\alpha)}(x)$, que usaremos diversas vezes e que podem ser encontradas em Szegő [19]:

$$C_n^{(\alpha-1)}(x) = C_n^{(\alpha)}(x) - E_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad (2.3)$$

$$(C_n^{(\alpha)})'(x) = n C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (2.4)$$

Seja $R_n^{(\alpha)}(x) = C_n^{(\alpha)}(x) - E_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}(x)$ um polinômio de grau n .

Podemos escrever o polinômio $R_n^{(\alpha)}(x)$ como combinação linear dos polinômios de Gegenbauer-Sobolev do seguinte modo:

$$R_n^{(\alpha)}(x) = Q_n^{(\alpha)}(x) - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n-2k}(\lambda) Q_{n-2k}^{(\alpha)}(x)$$

pois, se n é par, $R_n^{(\alpha)}(x)$ é um polinômio par e se n é ímpar, $R_n^{(\alpha)}(x)$ é ímpar.

Temos

$$\begin{aligned} \langle R_n^{(\alpha)}, Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x) \rangle_S &= \langle Q_n^{(\alpha)}(x) - \sum_{k=1}^{[n/2]} d_{n-2k}(\lambda) Q_{n-2k}^{(\alpha)}(x), Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x) \rangle_S \\ &= -d_{n-2m}(\lambda) \langle Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x), Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x) \rangle_S, \quad 1 \leq m \leq [n/2]. \end{aligned}$$

Logo,

$$d_{n-2m}(\lambda) = - \frac{\langle R_n^{(\alpha)}(x), Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x) \rangle_S}{\langle Q_{n-2m}^{(\alpha)}, Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x) \rangle_S}.$$

Usando (0.2), (2.3) e (2.4), obtemos:

$$d_{n-2m}(\lambda) = - \frac{\langle C_n^{(\alpha)}(x) - E_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}(x), Q_{n-2m}^{(\alpha)}(x) \rangle}{\tilde{K}_{n-2m}^{(\alpha)}}.$$

Dai, $d_{n-2m}(\lambda) = 0$, $2 \leq m \leq [n/2]$.

Para $m = 1$,

$$d_{n-2}(\lambda) = - \frac{\langle C_n^{(\alpha)}(x) - E_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)}(x), Q_{n-2}^{(\alpha)}(x) \rangle}{\tilde{K}_{n-2}^{(\alpha)}} = \frac{E_{n-2}^{(\alpha)} \langle C_{n-2}^{(\alpha)}(x), Q_{n-2}^{(\alpha)}(x) \rangle}{\tilde{K}_{n-2}^{(\alpha)}}$$

e, como $\langle C_{n-2}^{(\alpha)}(x), Q_{n-2}^{(\alpha)}(x) \rangle = \langle C_{n-2}^{(\alpha)}(x), C_{n-2}^{(\alpha)}(x) \rangle$, temos

$$R_n^{(\alpha)}(x) = Q_n^{(\alpha)}(x) - d_{n-2}(\lambda) Q_{n-2}^{(\alpha)}(x).$$

□

Teorema 2.2 : A sequência $d_n(\lambda)$ satisfaz à seguinte relação de recorrência:

$$d_n(\lambda) = \frac{E_n^{(\alpha)} \gamma_n^{(\alpha)} \gamma_{n-1}^{(\alpha)}}{\gamma_{n-1}^{(\alpha)} (\lambda n^2 + \gamma_n^{(\alpha)}) + E_{n-2}^{(\alpha)} (E_{n-2}^{(\alpha)} - d_{n-2}(\lambda))}$$

com as condições iniciais,

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) &= \frac{3}{2(\alpha+2)(\alpha+1)[1+2(\alpha+1)\lambda]}, \\ d_2(\lambda) &= \frac{3}{(\alpha+3)(\alpha+2) \left[1 + \frac{8(\alpha+2)(\alpha+1)}{2\alpha+1} \lambda \right]}, \end{aligned}$$

e $\gamma_n^{(\alpha)} = \frac{n(n+2\alpha-1)}{4(n+\alpha)(n+\alpha-1)}$ é o coeficiente da relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer:

$$C_{n+1}^{(\alpha)}(x) = xC_n^{(\alpha)}(x) - \gamma_n^{(\alpha)}C_{n-1}^{(\alpha)}(x). \quad (2.5)$$

Demonstração: Consideremos o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle R_{n+2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S &= \langle Q_{n+2}^{(\alpha)} - d_n(\lambda)Q_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S \\ &= \langle -d_n(\lambda)(R_n^{(\alpha)}(x) + d_{n-2}(\lambda)Q_{n-2}^{(\alpha)}(x)), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S \\ &= -d_n(\lambda)[\langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S + \langle d_{n-2}(\lambda)Q_{n-2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S] \\ &= -d_n(\lambda)[\langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S + d_{n-2}(\lambda) \langle R_{n-2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S] \\ &= -d_n(\lambda)[\langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S + d_{n-2}(\lambda) \langle R_{n-2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S]. \end{aligned}$$

Logo,

$$d_n(\lambda) = \frac{-\langle R_{n+2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S}{\langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S + d_{n-2}(\lambda) \langle R_{n-2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S}.$$

Usando (0.2), (2.3) e (2.4), obtemos,

$$\begin{aligned} \langle R_{n+2}^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S &= -E_n^{(\alpha)}K_n^{(\alpha)}, \\ \langle R_n^{(\alpha)}(x), R_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S &= K_n^{(\alpha)} + (E_{n-1}^{(\alpha)})^2 K_{n-2}^{(\alpha)} - \lambda n^2 K_{n-2}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Desde que $\gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)} = K_n^{(\alpha)}/K_{n-2}^{(\alpha)}$ o, resultado segue. $\square$

Teorema 2.3 : Para todo valor de $n \geq 0$, temos

$$\tilde{K}_n^{(\alpha)} = \langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S = K_n^{(\alpha)}(1 + 2(n+\alpha)\lambda A_n),$$

onde a sequência $\{A_n\}_{n \geq 0}$ é definida por:

$$A_n = \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)}.$$

Demonstração: Pela proposição 2.1 e pela igualdade (2.4), temos:

$$\begin{aligned}
 \langle Q_n^{(\alpha)}(x), Q_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S &= \langle Q_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)} - E_{n-2}^{(\alpha)} C_{n-2}^{(\alpha)} + d_{n-2}(\lambda) Q_{n-2}^{(\alpha)}(x) \rangle_S \\
 &= \langle Q_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x) \rangle_S \\
 &= \langle Q_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x) \rangle + \lambda \langle (Q_n^{(\alpha)})', (C_n^{(\alpha)})' \rangle \\
 &= K_n^{(\alpha)} + n\lambda \langle (Q_n^{(\alpha)})', C_{n-1}^{(\alpha+1)} \rangle.
 \end{aligned}$$

Seja

$$K_n^{(\alpha)}(x, y) = \frac{C_{n+1}^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y) - C_n^{(\alpha)}(x)C_{n+1}^{(\alpha)}(y)}{x - y}.$$

Utilizando a relação de recorrência dos polinômios de Gegenbauer 2.5 concluímos que

$$\begin{aligned}
 C_{n+1}^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y) - C_n^{(\alpha)}(x)C_{n+1}^{(\alpha)}(y) &= (x - y)C_n^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}[C_n^{(\alpha)}(x)C_{n-1}^{(\alpha)}(y) \\
 &\quad - C_{n-1}^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y)].
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 K_n^{(\alpha)}(x, y) &= C_n^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}C_{n-1}^{(\alpha)}(x)C_{n-1}^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}C_{n-2}^{(\alpha)}(x)C_{n-2}^{(\alpha)}(y) + \dots \\
 &\quad + \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}\dots\gamma_2^{(\alpha)}C_1^{(\alpha)}(x)C_1^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}\dots\gamma_1^{(\alpha)}K_0^{(\alpha)}(x, y).
 \end{aligned}$$

Temos que

$$K_0^{(\alpha)}(x, y) = 1.$$

Logo,

$$\int_{-1}^1 K_n^{(\alpha)}(x, y)(1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx = \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}\dots\gamma_1^{(\alpha)}\mu_0 = \langle C_n^{(\alpha)}(x), C_n^{(\alpha)}(x) \rangle = K_n^{(\alpha)}.$$

Em Szegő [19] encontramos

$$(n + 2\alpha)x C_n^{(\alpha)}(x) - 2(n + \alpha)C_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (1 - x^2)n C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

que pode ser escrita da forma

$$\frac{2}{x^2 - 1} \left[C_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \frac{(n + 2\alpha)}{2(n + \alpha)} x C_n^{(\alpha)}(x) \right] = \frac{n}{(n + \alpha)} C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (2.6)$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{K_n^{(\alpha)}(x, 1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} - \frac{K_n^{(\alpha)}(x, -1)}{C_n^{(\alpha)}(-1)} &= C_{n+1}^{(\alpha)}(x) \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - C_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{C_{n+1}^{(\alpha)}(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)(x-1)} - \frac{C_{n+1}^{(\alpha)}(-1)}{C_n^{(\alpha)}(-1)(x+1)} \right) \\ &= \frac{2}{(x^2 - 1)} \left[C_{n+1}^{(\alpha)}(x) - \frac{C_{n+1}^{(\alpha)}(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} x C_n^{(\alpha)}(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Prova-se facilmente, por indução sobre n , que:

$$C_{n+1}^{(\alpha)}(1) = \frac{1}{2^n} \frac{(1 + 2\alpha) \dots (n + 2\alpha)}{(1 + \alpha) \dots (n + \alpha)}.$$

Conseqüentemente, vale:

$$\frac{C_{n+1}^{(\alpha)}(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} = \frac{n + 2\alpha}{2(n + \alpha)}.$$

Por (2.6) e (2.7), temos:

$$\frac{K_n^{(\alpha)}(x, 1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} - \frac{K_n^{(\alpha)}(x, -1)}{C_n^{(\alpha)}(-1)} = \frac{n}{(n + \alpha)} C_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Portanto,

$$\tilde{K}_n^{(\alpha)} = K_n^{(\alpha)} + (n + \alpha) \lambda \left\langle (Q_n^{(\alpha)})', \frac{K_n^{(\alpha)}(x, 1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} - \frac{K_n^{(\alpha)}(x, -1)}{C_n^{(\alpha)}(-1)} \right\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 (Q_n^{(\alpha)})'(x) K_n^{(\alpha)}(x, 1) (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(x)}{x-1} [C_{n+1}^{(\alpha)}(x) C_n^{(\alpha)}(1) - C_n^{(\alpha)}(x) C_{n+1}^{(\alpha)}(1)] (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ P_{n-2}(x) + \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(1)}{x-1} \right\} [C_{n+1}^{(\alpha)}(x) C_n^{(\alpha)}(1) - C_n^{(\alpha)}(x) C_{n+1}^{(\alpha)}(1)] (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx \\ &= (Q_n^{(\alpha)})'(1) \int_{-1}^1 K_n^{(\alpha)}(x, 1) (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx = (Q_n^{(\alpha)})'(1) K_n^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo concluímos que:

$$I_2 = \int_{-1}^1 (Q_n^{(\alpha)})'(x) K_n^{(\alpha)}(x, -1) (1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx = K_n^{(\alpha)} (Q_n^{(\alpha)})'(-1).$$

Podemos observar que

$$(Q_n^{(\alpha)})'(-x) = \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(x)}{(-1)^{n+1}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n^{(\alpha)} &= K_n^{(\alpha)} + (n + \alpha)\lambda \left(\frac{I_1}{C_n^{(\alpha)}(1)} - \frac{I_2}{C_n^{(\alpha)}(-1)} \right) \\ &= K_n^{(\alpha)} + (n + \alpha)\lambda K_n^{(\alpha)} \left(\frac{(Q_n^{(\alpha)})'(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} - \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(1)}{(-1)^{n+1}(-1)^n C_n^{(\alpha)}(1)} \right) \\ &= K_n^{(\alpha)} \left[1 + 2(n + \alpha)\lambda \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(1)}{C_n^{(\alpha)}(1)} \right]. \end{aligned}$$

□

2.2 O operador linear F

Definimos um operador linear F no espaço linear $\mathcal{P}$ dos polinômios reais, pela expressão:

$$F = (1 - x^2)I + \lambda(2\alpha - 1)x D - \lambda(1 - x^2)D^2,$$

onde I denota o operador identidade e D o operador derivada usual. Vejamos algumas propriedades desse operador e sua relação com os polinômios de Gegenbauer-Sobolev.

Teorema 2.4 : *Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios reais arbitrários. Então*

$$\langle (1 - x^2)p(x), q(x) \rangle_S = \langle p(x), Fq(x) \rangle.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle (1-x^2)p(x), q(x) \rangle_S &= \int_{-1}^1 (1-x^2)p(x)q(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \\ &+ \lambda \int_{-1}^1 (-2)xp(x)q'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \\ &+ \lambda \int_{-1}^1 (1-x^2)p'(x)q'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes a terceira integral acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)p'(x)q'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx &= \int_{-1}^1 (2\alpha+1)xp(x)q'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \\ &- \int_{-1}^1 (1-x^2)q''(x)p(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle (1-x^2)p(x), q(x) \rangle_S &= \int_{-1}^1 (1-x^2)p(x)q(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \\ &+ \lambda \int_{-1}^1 (2\alpha-1)xp(x)q'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx \\ &- \lambda \int_{-1}^1 (1-x^2)p(x)q''(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle (1-x^2)p(x), q(x) \rangle_S = \langle p(x), [(1-x^2)I + \lambda(2\alpha-1)xD - \lambda(1-x^2)D^2]q(x) \rangle.$$

□

Teorema 2.5 : *O operador F é auto-adjunto em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, isto é:*

$$\langle Fp(x), q(x) \rangle_S = \langle p(x), Fq(x) \rangle_S, \forall p, q \in \mathcal{P}.$$

Demonstração:

Temos que,

$$Fp(x) = (1-x^2)p(x) + \lambda(2\alpha-1)xp'(x) - \lambda(1-x^2)p''(x).$$

Logo,

$$(Fp(x))' = -2xp(x) + (1 - x^2)p'(x) + \lambda(2\alpha - 1)p'(x) + \lambda(2\alpha + 1)xp''(x) - \lambda(1 - x^2)p'''(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle Fp, q \rangle_s &= \int_{-1}^1 [(1 - x^2)p(x)q(x) + \lambda(2\alpha - 1)xp'(x)q(x) - \lambda(1 - x^2)p''(x)q(x) \\ &\quad - 2\lambda xp(x)q'(x) + \lambda(1 - x^2)p'(x)q'(x) + \lambda^2(2\alpha - 1)p'(x)q'(x) \\ &\quad + \lambda^2(2\alpha + 1)xp''(x)q'(x) - \lambda^2(1 - x^2)p'''(x)q'(x)](1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes em alguns dos termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle Fp, q \rangle_s &= \int_{-1}^1 [(1 - x^2)p(x)q(x) + 2\lambda\alpha xp'(x)q(x) - \lambda xp'(x)q(x) \\ &\quad + (2\alpha + 1)\lambda xp(x)q'(x) - \lambda(1 - x^2)p'(x)q'(x) - 2\lambda xp(x)q'(x) \\ &\quad + \lambda(1 - x^2)p'(x)q'(x) + \lambda^2(2\alpha - 1)p'(x)q'(x) + \lambda^2(2\alpha + 1)xp''(x)q'(x) \\ &\quad - \lambda^2(1 - x^2)p''(x)q''(x) - \lambda^2(2\alpha + 1)xq'(x)p''(x)](1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx. \end{aligned}$$

Novamente integrando por partes o quarto termo, temos:

$$\begin{aligned} \langle Fp, q \rangle_s &= \int_{-1}^1 [(1 - x^2)p(x)q(x) + 2\lambda\alpha xp'(x)q(x) - \lambda xp'(x)q(x) - 2\lambda xp(x)q'(x) \\ &\quad + 2\alpha\lambda p(x)q'(x)x + \lambda xp(x)q'(x) + (2\alpha + 1)\lambda p(x)q(x) \\ &\quad - (2\alpha + 1)(2\alpha - 1)\lambda x^2 q(x)p(x)(1 - x^2)^{-1} + \lambda(1 - x^2)p'(x)q'(x) \\ &\quad + \lambda(1 - x^2)p'(x)q'(x) + \lambda^2(2\alpha - 1)p'(x)q'(x) \\ &\quad - \lambda^2 p''(x)q''(x)(1 - x^2)](1 - x^2)^{\alpha-1/2} dx. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\langle Fp, q \rangle_s &= \int_{-1}^1 [(1-x^2)p(x)q(x) + \lambda(2\alpha-1)xp'(x)q(x) + \lambda(2\alpha-1)xq'(x)p(x) \\
&\quad + (2\alpha+1)\lambda p(x)q(x) - (2\alpha+1)(2\alpha-1)\lambda x^2(1-x^2)^{-1} + \lambda(1-x^2)p'(x)q'(x) \\
&\quad + \lambda(1-x^2)p'(x)q'(x) + \lambda^2(2\alpha-1)p'(x)q'(x) \\
&\quad - \lambda^2 p''(x)q''(x)(1-x^2)](1-x^2)^{\alpha-1/2} dx \\
&= \langle p(x), Fq(x) \rangle_s .
\end{aligned}$$

□



Capítulo 3

Polinômios Ortogonais de Laguerre-Sobolev

Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o estudo feito por Marcellán em [10] e por Pérez em [14]. Consideremos os polinômios ortogonais em relação ao produto interno (0.2) onde $d\mu_0(x) = d\mu_1(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > -1$, $\lambda \geq 0$. Tais polinômios são chamados de polinômios de Laguerre-Sobolev.

3.1 Polinômios de Laguerre-Sobolev e Polinômios de Laguerre

Denotaremos por $\{Q_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais de Laguerre-Sobolev mônicos e por $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais de Laguerre mônicos. Pela expressão usual de polinômios ortogonais como uma razão de determinantes (como visto no capítulo 1), podemos deduzir que os primeiros polinômios da sequência $\{Q_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ são:

$$\begin{aligned} Q_0^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{1} = 1, \\ Q_1^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{|\mu_0|} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \frac{x\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} = x - \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)} = x - (\alpha + 1) \end{aligned}$$



e, portanto, $Q_0^{(\alpha)}(x) = L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $Q_1^{(\alpha)}(x) = L_1^{(\alpha)}(x) = x - (\alpha + 1)$. Denotemos os momentos associados à função peso $d\phi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$ da seguinte forma:

$$u_{i,j} = u_{i+j} = \langle x^i, x^j \rangle = \int_0^\infty x^{i+j} \phi(x) dx.$$

Para o produto escalar de Sobolev, temos:

$$c_{i,0} = c_{0,i} = \langle x^i, 1 \rangle_S = \int_0^\infty x^i \phi(x) dx + 0 = u_i,$$

$$c_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle_S = \int_0^\infty x^{i+j} \phi(x) dx + \lambda \int_0^\infty i x^{i-1} j x^{j-1} \phi(x) dx = u_{i+j} + \lambda i j u_{i+j-2}.$$

Assim, podemos escrever os polinômios de Laguerre-Sobolev como quocientes de determinantes da seguinte forma:

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{U} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 + \lambda u_0 & \cdots & u_{n+1} + \lambda n u_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n - \lambda(n-1)u_{n-2} & \cdots & u_{2n-1} + \lambda n(n-1)u_{2n-3} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

onde,

$$C = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \quad e$$

$$U = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ u_1 & u_2 + \lambda u_0 & \cdots & u_n + \lambda n u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n + \lambda(n-1)u_{n-2} & \cdots & u_{2n-2} + \lambda(n-1)^2 u_{2n-4} \end{vmatrix}.$$

Observamos que $\mathcal{C} = \mathcal{U}$ e que cada coeficiente de $Q_n^{(\alpha)}(x)$ é uma função racional de λ , cujos numerador e denominador têm grau $n - 1$. Desta forma, tem sentido definir o polinômio limite em relação a λ :

$$R_0^{(\alpha)}(x) = Q_0^{(\alpha)}(x) = L_0^{(\alpha)}(x) = 1,$$

$$R_1^{(\alpha)}(x) = Q_1^{(\alpha)}(x) = L_1^{(\alpha)}(x) = x - (\alpha + 1),$$

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{B} \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ 0 & u_0 & \cdots & nu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)u_{n-2} & \cdots & n(n-1)u_{n-3} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix},$$

onde,

$$B = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{n-1} \\ 0 & u_0 & \cdots & (n-1)u_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)u_{n-2} & \cdots & (n-1)^2 u_{n-4} \end{vmatrix}$$

Vemos que $R_n^{(\alpha)}(x)$ é um polinômio mônico de grau n independente de λ .

Podemos, agora, deduzir algumas propriedades dos polinômios $R_n^{(\alpha)}$ e, a partir daí, encontrar algumas relações entre os polinômios $Q_n^{(\alpha)}(x)$ e $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Teorema 3.1 : *Seja $n \geq 2$. Então,*

$$\int_0^\infty R_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_0^\infty (R_n^{(\alpha)})'(x) x^m x^\alpha e^{-x} dx = 0, \quad 0 \leq m \leq n-2. \quad (3.2)$$

Demonstração: Da definição de $R_n^{(\alpha)}(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx &= \int_0^\infty \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle Q_n^{(\alpha)}, 1 \rangle_s = 0 \quad e, \\ \int_0^\infty (R_n^{(\alpha)})'(x) x^m x^\alpha e^{-x} dx &= \int_0^\infty \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (Q_n^{(\alpha)})'(x) x^m x^\alpha e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Para $m \leq n - 2$, temos

$$0 = \langle Q_n^{(\alpha)}(x), x^{m+1} \rangle_S = \int_0^\infty Q_n^{(\alpha)}(x) x^{m+1} x^\alpha e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty (Q_n^{(\alpha)})'(x) (m+1) x^m x^\alpha e^{-x} dx.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty (Q_n^{(\alpha)})'(x) x^m x^\alpha e^{-x} dx = -\frac{1}{\lambda(m+1)} \int_0^\infty Q_n^{(\alpha)}(x) x^{m+1} x^\alpha e^{-x} dx.$$

Logo,

$$\int_0^\infty (R_n^{(\alpha)})'(x) x^m x^\alpha e^{-x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} -\frac{1}{\lambda(m+1)} \int_0^\infty Q_n^{(\alpha)}(x) x^{m+1} x^\alpha e^{-x} dx = 0, \quad 0 \leq m \leq n-2.$$

□

Pela relação (3.2) temos

$$(R_n^{(\alpha)})'(x) = nL_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2, \quad (3.3)$$

Em [19] temos a seguinte relação

$$L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{n+1}(L_{n+1}^{(\alpha)})'(x) + (L_n^{(\alpha)})'(x).$$

Daí,

$$(R_n^{(\alpha)})'(x) = nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = (L_n^{(\alpha)})'(x) + n(L_{n-1}^{(\alpha)})'(x).$$

Portanto, podemos concluir que

$$R_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha)}(x). \quad (3.4)$$

Teorema 3.2 : A seguinte relação é válida:

$$R_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = Q_n^{(\alpha)}(x) + d_{n-1}(\lambda)Q_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (3.5)$$

onde,

$$d_{n-1}(\lambda) = \frac{n \langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle}{\langle Q_{n-1}^{(\alpha)}, Q_{n-1}^{(\alpha)} \rangle_S} = n \frac{K_{n-1}^{(\alpha)}}{\tilde{K}_{n-1}^{(\alpha)}}.$$

Demonstração: Como os polinômios de Laguerre-Sobolev, $Q_i^{(\alpha)}(x)$, $i = 0, \dots, n$, formam uma base para $\mathcal{P}_n$ podemos escrever os polinômios $R_n^{(\alpha)}(x)$ como:

$$R_n^{(\alpha)}(x) = Q_n^{(\alpha)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(\lambda) Q_i^{(\alpha)}(x).$$

Assim,

$$\langle R_n^{(\alpha)}, Q_i^{(\alpha)} \rangle_S = \langle Q_n^{(\alpha)} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(\lambda) Q_i^{(\alpha)}, Q_i^{(\alpha)} \rangle_S = d_i(\lambda) \langle Q_i^{(\alpha)}, Q_i^{(\alpha)} \rangle_S,$$

e, então:

$$d_i(\lambda) = \frac{\langle R_n^{(\alpha)}, Q_i^{(\alpha)} \rangle_S}{\langle Q_i^{(\alpha)}, Q_i^{(\alpha)} \rangle_S} = \frac{\langle L_n^{(\alpha)} + nL_{n-1}^{(\alpha)}, Q_i^{(\alpha)} \rangle + \lambda \langle nL_{n-1}^{(\alpha)}, (Q_i^{(\alpha)})' \rangle}{K_i^{(\alpha)}}.$$

Logo, $d_i(\lambda) = 0$, $0 \leq i \leq n-2$.

Portanto,

$$d_{n-1} = \frac{\langle L_n^{(\alpha)} + nL_{n-1}^{(\alpha)}, Q_{n-1}^{(\alpha)} \rangle}{\tilde{K}_{n-1}^{(\alpha)}} = \frac{nK_{n-1}^{(\alpha)}}{\tilde{K}_{n-1}^{(\alpha)}}.$$

□

Teorema 3.3 :

$$d_n(\lambda) = \frac{(n-1)(n+\alpha)}{n(2+\lambda) + \alpha - d_{n-1}(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

com a condição inicial

$$d_1(\lambda) = \frac{2(\alpha+1)}{\lambda + \alpha + 1}.$$

Demonstração: Tendo em vista a relação (3.5), consideremos o produto interno

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q_{n+1}^{(\alpha)}, Q_n^{(\alpha)} \rangle_S \\ &= \langle Q_{n+1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} - d_{n-1}(\lambda) Q_{n-1}^{(\alpha)} \rangle_S \\ &= \langle R_{n+1}^{(\alpha)} - d_n(\lambda) Q_n^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S \\ &= \langle R_{n+1}^{(\alpha)} - d_n(\lambda) [R_n^{(\alpha)} - d_{n-1}(\lambda) Q_{n-1}^{(\alpha)}], R_n^{(\alpha)} \rangle_S \\ &= \langle R_{n+1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S - d_n(\lambda) \langle R_n^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S + d_n(\lambda) d_{n-1}(\lambda) \langle R_{n-1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S \\ &= \langle R_{n+1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S + d_n(\lambda) [-\langle R_n^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S + d_{n-1}(\lambda) \langle R_{n-1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S]. \end{aligned}$$

Portanto, usando (3.3) e (3.4), temos

$$\begin{aligned} d_n(\lambda) &= \frac{\langle R_{n+1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S}{\langle R_n^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S - d_{n-1}(\lambda) \langle R_{n-1}^{(\alpha)}, R_n^{(\alpha)} \rangle_S} \\ &= \frac{(n+1) \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle}{\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle + n^2 \langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle + \lambda n^2 \langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle - d_{n-1}(\lambda) n \langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle}. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle = n(n + \alpha) \langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle,$$

temos,

$$d_n(\lambda) = \frac{(n + \alpha)(n + 1)}{n(2 + \lambda) + \alpha - d_{n-1}(\lambda)}.$$

□

Teorema 3.4 : O coeficiente $d_n(\lambda)$ pode ser escrito como:

$$d_n(\lambda) = \frac{(n + 1)(n + \alpha)q_{n-1}(\lambda)}{q_n(\lambda)}$$

onde os polinômios $\{q_n(\lambda)\}_{n \geq 0}$ verificam a relação de recorrência de três termos:

$$q_0(\lambda) = 1,$$

$$q_1(\lambda) = \lambda + \alpha + 1,$$

$$q_n(\lambda) = (n\lambda + 2n + \alpha)q_{n-1}(\lambda) - n(n + \alpha - 1)q_{n-2}(\lambda), \quad n \geq 2.$$

Demonstração: Para $n = 1$, temos:

$$d_1(\lambda) = \frac{2(\alpha + 1)}{(\lambda + \alpha + 1)} = \frac{2(1 + \alpha)q_0(\lambda)}{q_1(\lambda)}.$$

Suponhamos verdadeiro para todo $n \leq k$ e provemos para $n = k + 1$. Sabemos que

$$d_{k+1}(\lambda) = \frac{(k + 2)(k + 1 + \alpha)}{(k + 1)(2 + \lambda) + \alpha - d_k(\lambda)}.$$

Usando a hipótese de indução para $d_k(\lambda)$, obtemos:

$$\begin{aligned} d_{k+1}(\lambda) &= \frac{(k+2)(k+\alpha+1)q_k(\lambda)}{(2(k+1) + (k+1)\lambda + \alpha)q_k(\lambda) - (k+1)(k+\alpha)q_{k-1}(\lambda)} \\ &= \frac{[(k+1)+1][(k+1)+\alpha]q_k(\lambda)}{q_{k+1}(\lambda)}. \end{aligned}$$

□

Algumas observações interessantes sobre os polinômios $q_k^{(\lambda)}$ seguem abaixo:

Com a substituição $\hat{q}_n^{(\alpha)}(\lambda) = (-1)^n q_n(-\lambda)/n!$, chegamos à relação de recorrência:

$$\hat{q}_n^{(\alpha)}(\lambda) = \left\{ \lambda - \left(2 + \frac{\alpha}{n} \right) \right\} \hat{q}_{n-1}^{(\alpha)}(\lambda) - \frac{n+\alpha-1}{n-1} \hat{q}_{n-2}^{(\alpha)}(\lambda),$$

com $\hat{q}_0^{(\alpha)}(\lambda) = 1$ e $\hat{q}_1^{(\alpha)}(\lambda) = \lambda - (\alpha + 1)$.

Observações:

- 1) Pelo teorema de Favard, $\{\hat{q}_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais em relação a alguma medida.
- 2) Pelo teorema de Blumenthal (veja Chihara [2]), como $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$ e $\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, temos o intervalo $[0, 4]$ como provável intervalo de ortogonalidade.

Para $\alpha = 0$, temos

$$\hat{q}_n^{(0)}(\lambda) = (\lambda - 2)\hat{q}_{n-1}^{(0)}(\lambda) - \hat{q}_{n-2}^{(0)}(\lambda), n \geq 2$$

com $\hat{q}_0^{(0)}(\lambda) = 1$, $\hat{q}_1^{(0)}(\lambda) = \lambda - 1$.

Fazendo, $Q_n(t) = \hat{q}_n^{(0)}(2t + 2)$, obtemos

$$Q_n(t) = 2tQ_{n-1}(t) - Q_{n-2}(t), n \geq 2$$

com $Q_0(t) = 1$ e $Q_1(t) = 2t - 1$.

Percebemos que os polinômios $Q_n(t)$ são os polinômios ortogonais de Jacobi (veja Szeğő [19]) com relação à função peso $w(t) = \frac{(1-t)^{1/2}}{(1+t)^{1/2}} dt$ no intervalo $[-1, 1]$.

Isso quer dizer que,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q_n(t) Q_m(t) \frac{(1-t)^{1/2}}{(1+t)^{1/2}} dt &= 0, n \neq m \\ \int_{-1}^1 \hat{q}_n^{(0)}(2t+2) \hat{q}_m^{(0)}(2t+2) \frac{(1-t)^{1/2}}{(1+t)^{1/2}} dt &= 0, n \neq m \\ \int_0^4 \hat{q}_n^{(0)}(\lambda) \hat{q}_m^{(0)}(\lambda) c \frac{4-x^{1/2}}{x} dx &= 0, n \neq m. \end{aligned}$$

É interessante observar que $\hat{q}_n^{(0)}$ é mônico e que podemos escolher c de forma que os polinômios $\hat{q}_n^{(0)}$ sejam ortonormais. Além disso, $\hat{q}_n^{(0)}(0) = (-1)^n$, o que significa que os zeros, $x_1, x_2, \dots, x_n$, de $\hat{q}_n^{(0)}$ satisfazem à equação $\prod_{i=1}^n x_i = 1$.

Os autores de [10] fazem a substituição:

$$q_n^*(\lambda) = q_n(2\lambda - 2) \frac{2^{-n}}{n!}$$

e obtêm a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} q_0^*(\lambda) &= 1, \\ q_1^*(\lambda) &= \lambda + (\alpha - 1)/2, \\ q_n^*(\lambda) &= \left[\lambda + \frac{\alpha}{2n} \right] q_{n-1}^*(\lambda) - \frac{n + \alpha - 1}{4(n-1)} q_{n-2}^*(\lambda), \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se compararmos (3.6) com a fórmula de recorrência para os polinômios generalizados de Polaczek mônicos, (ver [2]), deduzimos que os polinômios $\{q_n^*(\lambda)\}$ são os polinômios co-recursivos com parâmetro $\frac{1}{2}$ (ver [5]).

Teorema 3.5 : Para todo valor de $n \geq 0$, temos

$$\tilde{K}_n^{(\alpha)} = \langle Q_n^{(\alpha)}, Q_n^{(\alpha)} \rangle_s = K_n^{(\alpha)} (1 - \lambda A_n),$$

onde $\{A_n\}_{n \geq 0}$ é a sequência dada por:

$$A_n = \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(0)}{L_n^{(\alpha)}(0)}.$$

Demonstração: Sabemos que $L_n^{(\alpha)}(x) = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$.

Então, usando a relação (3.5), temos:

$$\begin{aligned} \langle Q_n^{(\alpha)}, Q_n^{(\alpha)} \rangle_s &= \langle Q_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} + nL_{n-1}^{(\alpha)} - d_{n-1}(\lambda)Q_{n-1}^{(\alpha)} \rangle_s \\ &= \langle Q_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle_s \\ &= \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle + \lambda \langle (Q_n^{(\alpha)})', (L_n^{(\alpha)})' \rangle \\ &= K_n^{(\alpha)} + \lambda \langle (Q_n^{(\alpha)})', nL_{n-1}^{(\alpha+1)} \rangle \\ &= K_n^{(\alpha)} + \lambda n \langle (Q_n^{(\alpha)})', L_{n-1}^{(\alpha+1)} \rangle \end{aligned}$$

Seja

$$K_n^{(\alpha)}(x, y) = \frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) - L_n^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(y)}{x - y}$$

Usando a relação de recorrência (1.5) para os polinômios de Laguerre, concluímos que:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) - L_n^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(y) = (x-y)L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}[L_n^{(\alpha)}(x)L_{n-1}^{(\alpha)}(y) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y)]$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K_n^{(\alpha)}(x, y) &= L_n^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}L_{n-1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) + \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}L_{n-2}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y) + \dots \\ &\quad + \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}\dots\gamma_1^{(\alpha)}K_0^{(\alpha)}(x, y). \end{aligned}$$

Temos que

$$K_0^{(\alpha)}(x, y) = 1$$

Logo,

$$\int_0^\infty K_n^{(\alpha)}(x, y) x^\alpha e^{-x} dx = \gamma_n^{(\alpha)}\gamma_{n-1}^{(\alpha)}\dots\gamma_1^{(\alpha)}\mu_0 = \langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle = K_n^{(\alpha)}.$$

Em Szegő [19] encontramos

$$-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{x}[nL_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]$$

e

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n + \alpha}{n}.$$

Temos, portanto,

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{(\alpha)}(x, 0) &= \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)}{n} \frac{1}{x}[nL_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] \\ &= -\frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)}{n} L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -\frac{n}{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)} K_{n-1}^{(\alpha)}(x, 0).$$

Daí,

$$\langle Q_n^{(\alpha)}, Q_n^{(\alpha)} \rangle_S = K_n^{(\alpha)} - \frac{\lambda n^2}{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)} \langle (Q_n^{(\alpha)})', K_{n-1}^{(\alpha)}(x, 0) \rangle.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle (Q_n^{(\alpha)})', K_{n-1}^{(\alpha)}(x, 0) \rangle &= \int_0^\infty (Q_n^{(\alpha)})'(x) K_{n-1}^{(\alpha)}(x, 0) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(Q_n^{(\alpha)})'}{x} [L_n^{(\alpha)}(x) L_{n-1}^{(\alpha)}(0) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(0)] x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \left\{ P_{n-2}(x) + \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(0)}{x} \right\} [L_n^{(\alpha)}(x) L_{n-1}^{(\alpha)}(0) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(0)] x^\alpha e^{-x} dx \\ &= (Q_n^{(\alpha)})'(0) \int_0^\infty K_{n-1}^{(\alpha)}(x, 0) x^\alpha e^{-x} dx = (Q_n^{(\alpha)})'(0) K_{n-1}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\langle Q_n^{(\alpha)}, Q_n^{(\alpha)} \rangle_S = K_n^{(\alpha)} - \frac{\lambda n^2}{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)} (Q_n^{(\alpha)})'(0) K_{n-1}^{(\alpha)}.$$

Sabemos que

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)} \rangle = n(n + \alpha) \langle L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)} \rangle,$$

ou seja,

$$K_{n-1}^{(\alpha)} = \frac{K_n^{(\alpha)}}{n(n+\alpha)}.$$

Além disso,

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(0)}{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)} = \frac{(n+\alpha)}{n}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_n^{(\alpha)} &= K_n^{(\alpha)} - \frac{\lambda n^2}{L_{n-1}^{(\alpha)}(0)} \frac{(n+\alpha)}{n} (Q_n^{(\alpha)})'(0) \frac{K_n^{(\alpha)}}{n(n+\alpha)} \\ &= K_n^{(\alpha)} \left(1 - \lambda \frac{(Q_n^{(\alpha)})'(0)}{L_n^{(\alpha)}(0)} \right).\end{aligned}$$

□

3.2 O operador linear F

A função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ satisfaz, no intervalo $[0, \infty)$, à seguinte equação diferencial de primeira ordem com coeficientes polinomiais:

$$xw'(x) + (x - \alpha)w(x) = 0.$$

Podemos definir um operador linear F no espaço dos polinômios reais $\mathbb{P}$ da seguinte forma:

$$F = xI - \lambda(\alpha - x)D - \lambda xD^2,$$

onde I é o operador identidade, D é o operador derivada primeira e D^2 o operador derivada segunda. Vemos que o operador F transforma polinômios de grau n em polinômios de grau $n + 1$.

Teorema 3.6 : *Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios arbitrários em $\mathbb{P}$. Então:*

$$\langle xp(x), q(x) \rangle_S = \int_0^\infty p(x) Fq(x) x^\alpha e^{-x} dx = \langle p(x), Fq(x) \rangle$$



Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \langle xp(x), q(x) \rangle_S &= \int_0^\infty xp(x)q(x) + \lambda \int_0^\infty (p(x) + xp'(x))q'(x)x^\alpha e^{-x} dx \\
 &= \int_0^\infty p(x)[xq(x) - \lambda xq''(x) - \lambda \alpha q'(x) + \lambda xq'(x)]x^\alpha e^{-x} dx = \\
 &= \int_0^\infty p(x)[xq(x) - \lambda(\alpha - x)q'(x) - \lambda xq''(x)]x^\alpha e^{-x} dx = \\
 &= \langle p(x), Fq(x) \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.7 : O operador linear F é simétrico em relação ao produto interno de Sobolev, isto é:

$$\langle Fp, q \rangle_S = \langle p, Fq \rangle_S, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}.$$

Demonstração: Aqui provaremos somente para $\alpha > 0$. Para $-1 < \alpha \leq 0$, a prova é um pouco mais extensa. Tomemos,

$$\langle Fp, q \rangle_S = \int_0^\infty Fp(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty (Fp(x))'q'(x)x^\alpha e^{-x} dx.$$

Usando integração por partes na segunda integral do lado direito, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle Fp(x), q(x) \rangle_S &= \int_0^\infty Fp(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx - \lambda \int_0^\infty Fp(x)q''(x)x^\alpha e^{-x} dx \\
 &\quad - \lambda \int_0^\infty Fp(x)q'(x)\alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty Fp(x)q'(x)x^\alpha e^{-x} dx \\
 &= \int_0^\infty Fp(x) \left[q(x) - \lambda q''(x) - \lambda q'(x)\frac{\alpha}{x} + \lambda q'(x) \right] x^\alpha e^{-x} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{Fp(x)}{x} [xq(x) - \lambda xq''(x) - \lambda q'(x)\alpha + \lambda xq'(x)] x^\alpha e^{-x} dx \\
 &= \int_0^\infty Fp(x) \frac{1}{x} [xq(x) - \lambda(\alpha - x)q'(x) - \lambda xq''(x)] x^\alpha e^{-x} dx \\
 &= \langle Fp(x), \frac{1}{x} Fq(x) \rangle.
 \end{aligned}$$

Pela proposição anterior, concluímos:

$$\langle Fp(x), q(x) \rangle_S = \langle p(x), Fq(x) \rangle_S.$$

□

Capítulo 4

Pares Coerentes

Introdução

Neste capítulo, veremos algumas propriedades de uma classe especial de polinômios ortogonais do tipo Sobolev. Esta classe especial é caracterizada por uma relação existente entre as medidas do produto interno de Sobolev (0.2) chamada coerência. Alguns autores abordaram esse assunto. Destacaremos aqui os trabalhos de Iserles et al. [5] e Meijer [13].

4.1 Pares Coerentes

Assim como Iserles et al. em [5], consideremos os polinômios $\{p_n^{(\lambda)}\}_{n=0}^{\infty}$, ortogonais em relação ao produto interno de Sobolev do tipo (0.2) visto no capítulo 1, ou seja:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbf{R}} fg d\mu_0 + \lambda \int_{\mathbf{R}} f'g' d\mu_1$$

onde $\lambda \geq 0$ e o suporte das medidas $d\mu_0$ e $d\mu_1$ é o intervalo (a, b) . Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO associada ao funcional linear definido por:

$$I_1[f] = \int_a^b f(x) d\mu_0.$$

Tomemos $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma SPO associada ao funcional:

$$I_2[f] = \int_a^b f(x) d\mu_1.$$



Definimos os números $d_{n,m} = d_{m,n}$ por:

$$d_{n,m} = \int_a^b p'_m(x) p'_n(x) d\mu_1, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

Sabemos que existem constantes $r_0^{(n)}(\lambda), r_1^{(n)}(\lambda), \dots, r_n^{(n)}(\lambda)$ tais que:

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^n r_k^{(n)}(\lambda) p_k(x) \quad (4.1)$$

e que

$$0 = \langle x^k, p_n^{(\lambda)} \rangle_S = \int_a^b x^k p_n^{(\lambda)}(x) d\mu_0(x) + \lambda \int_a^b k x^{k-1} (p_n^{(\lambda)})'(x) d\mu_1(x),$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$. Logo, para $k = 0$.

$$\int_a^b p_n^{(\lambda)}(x) d\mu_0(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Ou seja,

$$\int_a^b r_0^{(n)}(\lambda) p_0(x) d\mu_0 = 0 \text{ o que implica que } r_0^{(n)}(\lambda) = 0, \text{ para } n \geq 1.$$

Utilizamos (4.1) para obter $n-1$ equações lineares homogêneas:

$$\begin{aligned} \langle p_n^{(\lambda)}, p_m \rangle_S &= \left\langle \sum_{k=1}^n r_k^{(n)}(\lambda) p_k(x), p_m(x) \right\rangle_S = \sum_{k=1}^n r_k^{(n)}(\lambda) \langle p_k(x), p_m(x) \rangle_S \\ &= \sum_{k=1}^n r_k^{(n)}(\lambda) \left[\int_a^b p_k(x) p_m(x) d\mu_0(x) + \lambda \int_a^b p'_k(x) p'_m(x) d\mu_1(x) \right] \\ &= c_m r_m^{(n)}(\lambda) + \lambda \sum_{k=1}^n d_{k,m} r_k^{(n)}(\lambda) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

onde $c_m = \int_a^b (p_m(x))^2 d\mu_0(x) \neq 0$. Completamos esse sistema com a equação:

$$c_n r_n^{(n)}(\lambda) + \lambda \sum_{k=1}^n d_{k,n} r_k^{(n)}(\lambda) = w(\lambda),$$

onde $w(\lambda) = \langle p_n^{(\lambda)}, p_n \rangle_S$. Temos, portanto, o sistema linear:

$$(C + \lambda D) r^{(n)}(\lambda) = w(\lambda) e_n,$$

com,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1,n} & \dots & d_{n,n} \end{bmatrix}, \quad r^{(n)}(\lambda) = \begin{bmatrix} r_1^{(n)}(\lambda) \\ r_2^{(n)}(\lambda) \\ \vdots \\ r_n^{(n)}(\lambda) \end{bmatrix}$$

e e_n é o n -ésimo vetor unitário.

A solução formal do sistema pela regra de Cramer é:

$$r^{(n)}(\lambda) = w(\lambda)(C + \lambda D)^{-1}e_n = w(\lambda) \frac{\text{adj}(C + \lambda D)}{\det(C + \lambda D)}e_n.$$

Até então nada se tinha dito sobre a normalização dos polinômios $p_n(x)$ e $p_n^{(\lambda)}$. A expressão acima motiva a escolha desses polinômios de modo que

$$w(\lambda) = \frac{\det(C + \lambda D)}{\prod_{k=1}^{n-1} c_k}.$$

Temos, então

$$\begin{aligned} p_n^{(\lambda)}(x) &= [r_1^{(n)}(\lambda), r_2^{(n)}, \dots, r_n^{(n)}(\lambda)] \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} c_k} [\text{adj}(C + \lambda D)e_n]^T \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} c_k} \det \begin{bmatrix} c_1 + \lambda d_{1,1} & \lambda d_{1,2} & \dots & \lambda d_{1,n-1} & p_1(x) \\ \lambda d_{2,1} & c_2 + \lambda d_{2,2} & \dots & \lambda d_{2,n-1} & p_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda d_{n-1,1} & \lambda d_{n-1,2} & \dots & c_{n-1} + \lambda d_{n-1,n-1} & p_{n-1} \\ \lambda d_{n,1} & \lambda d_{n,2} & \dots & \lambda d_{n,n-1} & p_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A fórmula acima se torna interessante quando voltamos nossa atenção a um subconjunto de medidas que possuem uma característica especial, ou seja, $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par coerente.

Definição 4.1 : Dizemos que o par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é coerente se existem constantes não nulas $C_1, C_2, \dots$, tais que, para todo $k, m = 1, 2, \dots$; $C_k C_m d_{k,m}$ é uma função só de $\min\{k, m\}$. Ou seja,

$$d_{k,m} = \frac{d_{\min\{k,m\}}}{C_k C_m}.$$

Consideremos, então, que estejamos trabalhando com medidas que formam par coerente.

Temos, portanto:

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} c_k} \begin{vmatrix} c_1 + \frac{\lambda d_1}{C_1 C_1} & \frac{\lambda d_1}{C_1 C_2} & \cdots & \frac{\lambda d_1}{C_1 C_{n-1}} & p_1(x) \\ \frac{\lambda d_1}{C_2 C_1} & c_2 + \frac{\lambda d_2}{C_2 C_2} & \cdots & \frac{\lambda d_2}{C_2 C_{n-1}} & p_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\lambda d_1}{C_1 C_{n-1}} & \frac{\lambda d_2}{C_2 C_{n-1}} & \cdots & c_{n-1} + \frac{\lambda d_{n-1}}{C_{n-1} C_{n-1}} & p_{n-1}(x) \\ \frac{\lambda d_1}{C_1 C_n} & \frac{\lambda d_2}{C_2 C_n} & \cdots & \frac{\lambda d_{n-1}}{C_{n-1} C_n} & p_n(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{n-1} c_k C_k^2\right) C_n} \begin{vmatrix} C_1^2 c_1 + \lambda d_1 & \lambda d_1 & \cdots & \lambda d_1 & C_1 p_1(x) \\ \lambda d_1 & C_2^2 c_2 + \lambda d_2 & \cdots & \lambda d_2 & C_2 p_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda d_1 & \lambda d_2 & \cdots & C_{n-1}^2 c_{n-1} + \lambda d_{n-1} & C_{n-1} p_{n-1}(x) \\ \lambda d_1 & \lambda d_2 & \cdots & \lambda d_{n-1} & C_n p_n(x) \end{vmatrix}$$

Se normalizarmos novamente os polinômios $p_n(x)$ e $p_n^{(\lambda)}(x)$ de maneira que $C_m p_m \mapsto p_m$,

$C_m p_m^{(\lambda)} \mapsto p_m^{(\lambda)}$ e $C_m^2 c_m \mapsto c_m$, obtemos

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} c_k} \det \begin{bmatrix} c_1 + \lambda d_1 & \lambda d_1 & \cdots & \lambda d_1 & p_1(x) \\ \lambda d_1 & c_2 + \lambda d_2 & \cdots & \lambda d_2 & p_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda d_1 & \lambda d_2 & \cdots & c_{n-1} + \lambda d_{n-1} & p_{n-1}(x) \\ \lambda d_1 & \lambda d_2 & \cdots & \lambda d_{n-1} & p_n(x) \end{bmatrix}.$$

Subtraindo a última linha das demais, obtemos

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} c_k} \det \begin{bmatrix} c_1 & \lambda(d_1 - d_2) & \lambda(d_1 - d_3) & \cdots & \lambda(d_1 - d_{n-1}) & p_1(x) - p_2(x) \\ 0 & c_2 & \lambda(d_2 - d_3) & \cdots & \lambda(d_2 - d_{n-1}) & p_1(x) - p_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & p_{n-1}(x) - p_n(x) \\ \lambda d_1 & \lambda d_2 & \lambda d_3 & \cdots & \lambda d_{n-1} & p_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Exceto pela última linha, temos uma matriz triangular superior. Procuremos os coeficientes da eliminação de Gauss para a última linha a fim de que esta matriz se torne triangular. Estes coeficientes são funções $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \dots, \alpha_{n-1}(\lambda)$, tais que:

$$\begin{aligned}
\lambda d_1 + c_1 \alpha_1(\lambda) &= 0 \\
\lambda d_2 + \lambda(d_1 - d_2) \alpha_1(\lambda) + c_2 \alpha_2(\lambda) &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda d_{n-1} + \lambda(d_1 - d_{n-1}) \alpha_1(\lambda) + \lambda(d_2 - d_{n-1}) \alpha_2(\lambda) + \dots + \lambda(d_{n-2} - d_{n-1}) \alpha_{n-2}(\lambda) + c_{n-1} \alpha_{n-1}(\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lambda d_m + \lambda \sum_{k=1}^{m-1} (d_k - d_m) \alpha_k(\lambda) + c_m \alpha_m(\lambda) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.3)$$

Lema 4.2 : A solução de (4.3), obedece à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$\begin{aligned}
c_{m+1}(d_m - d_{m-1}) \alpha_{m+1}(\lambda) &= [c_m(d_{m+1} - d_{m-1}) + \lambda(d_{m+1} - d_m)(d_m - d_{m-1})] \alpha_m(\lambda) \\
&\quad - c_{m-1}(d_{m+1} - d_m) \alpha_{m-1}(\lambda)
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Demonstração: Tomemos,

$$\begin{aligned}
\Phi : &= c_{m+1}(d_m - d_{m+1}) \alpha_{m+1}(\lambda) - \{c_m(d_{m+1} - d_{m-1}) + \lambda(d_{m+1} - d_m)(d_m - d_{m-1})\} \alpha_m(\lambda) \\
&\quad - c_{m-1}(d_{m+1} - d_m) \alpha_{m-1}(\lambda).
\end{aligned}$$

De (4.3), temos

$$c_m \alpha_m(\lambda) = \lambda \left(\sum_{k=1}^{m-1} (d_m - d_k) \alpha_k(\lambda) - d_m \right).$$

Substituindo $c_i \alpha_i(\lambda)$ para $i \in \{m-1, m, m+1\}$ na primeira expressão, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \lambda \sum_{k=1}^m (d_{m+1} - d_k)(d_m - d_{m-1}) \alpha_k(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{m-1} (d_m - d_k)(d_{m+1} - d_{m-1}) \alpha_k(\lambda) \\
&\quad + \lambda \sum_{k=1}^{m-2} (d_{m-1} - d_k)(d_{m+1} - d_m) + \lambda[-d_{m+1}d_m + d_{m+1}d_{m-1} + d_md_m - d_md_{m-1}] \alpha_m(\lambda).
\end{aligned}$$

Desenvolvendo as somas, concluímos que $\Phi = 0$. □

A relação de recorrência de três termos (4.4) é acompanhada das condições iniciais

$$\alpha_1(\lambda) = -\frac{d_1}{c_1}\lambda; \quad (4.5)$$

$$\alpha_2(\lambda) = -\frac{d_2}{c_2}\lambda - \frac{d_1(d_2 - d_1)}{c_1 c_2}\lambda^2. \quad (4.6)$$

Uma vez que os coeficientes α_i já foram determinados em (4.4), (4.5) e (4.6), calculamos o determinante em (4.2) como o produto dos elementos da diagonal, lembrando que o elemento (n, n) é

$$p_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(p_k(x) - p_n(x)).$$

O resultado deste determinante é o seguinte:

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_m(\lambda) p_m(x) + \left(1 - \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_m(\lambda)\right) p_n(x).$$

Comparando com (4.1) podemos identificar $r_m^{(n)}(\lambda)$ com $\alpha_m(\lambda)$ para $m = 1, 2, \dots, n-1$. Podemos, portanto, concluir que $r_m^{(n)}(\lambda)$ não depende de n , para $m = 1, \dots, n-1$. Antes de formular os resultados do próximo teorema, façamos algumas considerações sobre os coeficientes de $p_n(x)$. A identidade (4.3) implica que

$$\lambda \sum_{k=1}^{m-1} d_k \alpha_k(\lambda) = -c_m \alpha_m(\lambda) - \lambda d_m + \lambda d_m \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k(\lambda). \quad (4.7)$$

Fazendo $m = m-1$ e somando $\lambda d_{m-1} \alpha_{m-1}(\lambda)$ em ambos os lados da expressão acima, temos

$$\lambda \sum_{k=1}^{m-1} d_k \alpha_k(\lambda) = -c_{m-1} \alpha_{m-1}(\lambda) - \lambda d_{m-1} + \lambda d_{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k(\lambda). \quad (4.8)$$

A seguir, resolvemos as equações (4.7) e (4.8) nas variáveis $\sum_{k=1}^{m-1} d_k \alpha_k(\lambda)$ e $\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k(\lambda)$ e obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k(\lambda) &= 1 + \frac{c_m \alpha_m(\lambda) - c_{m-1} \alpha_{m-1}(\lambda)}{\lambda(d_m - d_{m-1})} e, \\ \sum_{k=1}^{m-1} d_k \alpha_k(\lambda) &= \frac{c_m d_{m-1} \alpha_m(\lambda) - c_{m-1} d_m \alpha_{m-1}(\lambda)}{\lambda(d_m - d_{m-1})}. \end{aligned}$$

Chegamos, portanto, à seguinte expansão:

Teorema 4.3 : Se $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ formam um par coerente então:

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\lambda) p_k(x) - \frac{c_n \alpha_n(\lambda) - c_{n-1} \alpha_{n-1}(\lambda)}{\lambda(d_n - d_{n-1})} p_n(x), \quad (4.9).$$

onde os coeficientes $\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_{n-1}(\lambda), \alpha_n(\lambda)$ obedecem à relação de recorrência (4.4).

Corolário 4.4 : Se o par de medidas associadas ao produto interno de Sobolev é um par coerente, então vale:

$$p_{n+1}^{(\lambda)}(x) - p_n^{(\lambda)}(x) = -\frac{c_{n+1} \alpha_{n+1}(\lambda) - c_n \alpha_n(\lambda)}{\lambda(d_{n+1} - d_n)} (p_{n+1}(x) - p_n(x)).$$

Demonstração: Usando (4.9), temos

$$p_{n+1}^{(\lambda)}(x) - p_n^{(\lambda)}(x) = \alpha_n(\lambda) p_n(x) - \frac{(c_{n+1} \alpha_{n+1}(\lambda) - c_n \alpha_n(\lambda))}{\lambda(d_{n+1} - d_n)} p_{n+1}(x) + \frac{c_n \alpha_n(\lambda) - c_{n-1} \alpha_{n-1}(\lambda)}{\lambda(d_n - d_{n-1})} p_n(x). \quad (4.10)$$

De (4.3), temos que:

$$\frac{c_n \alpha_n(\lambda) - c_{n-1} \alpha_{n-1}(\lambda)}{\lambda(d_n - d_{n-1})} = \frac{c_{n+1} \alpha_{n+1}(\lambda) - c_n \alpha_n(\lambda)}{\lambda(d_{n+1} - d_n)} - \alpha_n(\lambda).$$

Substituindo em (4.10), concluímos

$$p_{n+1}^{(\lambda)}(x) - p_n^{(\lambda)}(x) = \frac{c_{n+1} \alpha_{n+1}(\lambda) - c_n \alpha_n(\lambda)}{\lambda(d_{n+1} - d_n)} (p_n(x) - p_{n+1}(x)).$$

□

A partir desses resultados apresentados por Iserles et al. em [5] podemos concluir que, normalmente, a geração de polinômios no Espaço de Sobolev é bem difícil. Mas quando tratamos de medidas que formam pares coerentes, se conhecermos os polinômios $p_n(x)$, $n \geq 0$, associados à medida $d\mu_0$ a geração dos polinômios $p_n^{(\lambda)}(x)$, $n \geq 1$, se torna bem mais fácil.

Pela definição, pode parecer difícil de se verificar se duas medidas formam, ou não, um par coerente. Vejamos um resultado mais simples para se verificar a coerência apresentado em [5]:

Teorema 4.5 : O par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é coerente se, e somente se, existem constantes não nulas $C_1, C_2, \dots$ tais que

$$q_n(x) = C_{n+1}p'_{n+1}(x) - C_n p'_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Demonstração: Seja $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ um par coerente. Portanto, existem constantes $C_1, C_2, \dots$ tais que

$$\int_a^b p'_m(x)p'_k(x)d\mu_1(x) = \frac{d_{\min\{m,k\}}}{C_m C_k}, \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b p'_m(x)p'_{n+1}(x)d\mu_1 &= \frac{d_m}{C_m C_{n+1}}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \\ \int_a^b p'_m p'_n(x)d\mu_1 &= \frac{d_m}{C_m C_n}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Subtraindo as duas últimas equações:

$$\int_a^b p'_m(x)(C_{n+1}p'_{n+1}(x) - C_n p'_n(x))d\mu_1 = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Pela unicidade de polinômios ortogonais, (4.11) vale. Por outro lado, suponhamos que

$$0 = \int_a^b p'_m(x)q_n(x)d\mu_1(x) = \int_a^b p'_m(x)(C_{n+1}p'_{n+1}(x) - C_n p'_n(x))d\mu_1(x), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto,

$$d_{m,n+1} = \frac{C_n}{C_{n+1}}d_{m,n}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, $C_n C_m d_{m,n} = C_{n+1} C_m d_{n+1,m}$ e, portanto, $C_n C_m d_{n,m}$ não depende de n para $m \leq n$.

□

4.2 Pares Coerentes e Polinômios Ortogonais Clássicos

Apresentaremos, agora, alguns exemplos de medidas clássicas que formam pares coerentes apresentados por Iserles et al. em [5].

Dadas duas medidas $d\mu_0$ e $d\mu_1$, dizemos que $d\mu_1$ é companheira de $d\mu_0$ se $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ forma um par coerente.

Considerando $d\mu_0$ uma medida que produz polinômios ortogonais clássicos (Laguerre, Jacobi e Hermite), determinaremos suas companheiras. De acordo com o teorema de Hahn em [4], polinômios ortogonais clássicos são todos os polinômios ortogonais cujas derivadas também são ortogonais em relação a alguma medida dv . Representemos os polinômios ortogonais mônicos associados a dv por $\pi_0, \pi_1, \dots$. Assim,

$$\pi_n(x) = \frac{1}{n+1} p'_{n+1}(x), n = 0, 1, \dots,$$

onde supomos que os polinômios $p_n(x)$ são mônicos. A principal ferramenta utilizada nessa análise é a identidade (4.11). Suponhamos que os polinômios $\pi_n(x)$, $n \geq 1$ obedecem à seguinte relação de recorrência

$$\pi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\pi_n(x) - \beta_n\pi_{n-1}(x). \quad (4.12)$$

Tomemos os polinômios $q_n(x)$ de modo que

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1, \\ q_n(x) &= \pi_n(x) - \sigma_n\pi_{n-1}(x), n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Sabemos que os polinômios $q_n(x)$ são quasi-ortogonais em relação à dv . Procuremos constantes reais $\sigma_1, \sigma_2, \dots \neq 0$ tais que $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais. De acordo

com o Teorema de Favard (1.8), este é o caso se, e somente se, os polinômios $q_n(x)$, $n \geq 1$ obedecem a uma relação de recorrência de três termos da forma

$$q_{n+1}(x) = (x - \gamma_n)q_n(x) - \delta_n q_{n-1}(x).$$

Substituindo (4.13) na equação acima, temos

$$\pi_{n+1}(x) = (x - \gamma_n + \sigma_{n+1})\pi_n(x) - [\delta_n + x\sigma_n - \sigma_n\gamma_n]\pi_{n-1}(x) - \delta_n\sigma_{n-1}\pi_{n-2}(x).$$

Utilizando (4.12) para eliminar $\pi_{n+1}(x)$ e $\pi_{n-2}(x)$, obtemos:

$$\left(\alpha_n + \sigma_{n+1} - \gamma_n - \frac{\sigma_{n-1}\delta_n}{\beta_{n-1}}\right)\pi_n(x) = \left[\left(\delta_n - \beta_n - \sigma_n\gamma_n + \frac{\sigma_{n-1}\delta_n\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}\right) + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{n-1}\delta_n}{\beta_{n-1}}\right)x\right]\pi_{n-1}(x).$$

Como $\pi_{n-1}(x)$ e $\pi_n(x)$ não têm zeros em comum, então

$$\alpha_n + \sigma_{n+1} - \gamma_n - \frac{\sigma_{n-1}\delta_n}{\beta_{n-1}} = 0, \quad (4.14)$$

$$\delta_n - \beta_n - \sigma_n\gamma_n + \frac{\sigma_{n-1}\delta_n\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = 0, \quad (4.15)$$

$$\sigma_n - \frac{\sigma_{n-1}\delta_n}{\beta_{n-1}} = 0. \quad (4.16)$$

De (4.16), temos que

$$\delta_n = \frac{\sigma_n\beta_{n-1}}{\sigma_{n-1}}.$$

Das equações (4.14) e (4.15), chegamos que

$$\alpha_n + \sigma_{n+1} - \gamma_n - \sigma_n = 0, \quad (4.17)$$

$$\gamma_n = \frac{\beta_{n-1}}{\sigma_{n-1}} + \alpha_{n-1} - \frac{\beta_n}{\sigma_n}. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.18) em (4.17), obtemos

$$\sigma_{n+1} + \alpha_n - \frac{\beta_n}{\sigma_n} = \sigma_n + \alpha_{n-1} - \frac{\beta_{n-1}}{\sigma_{n-1}}.$$

Consequentemente $\sigma_{n+1} + \alpha_n - \frac{\beta_n}{\sigma_n}$ não depende de n . Logo, existe um número real ξ tal que

$$\sigma_{n+1} + \alpha_n - \frac{\beta_n}{\sigma_n} = \xi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Seja a sequência $\{A_n\}_{n \geq 0}$ dada por

$$A_0 = 1,$$

$$A_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Assim, } \sigma_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Substituindo em (4.19)

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} + \alpha_n + \frac{\beta_n A_{n-1}}{A_n} = \xi$$

o que implica que

$$A_{n+1} = A_n(\xi - \alpha_n) - \beta_n A_{n-1} \quad (4.20)$$

Conclui-se que A_n é um polinômio em ξ de grau n que obedece à relação de recorrência (4.20).

Note que as relações (4.12) e (4.20) são idênticas, embora sujeitas a condições iniciais diferentes.

A solução geral de (4.20) pode ser expressa por $\{a\pi_n(x) + (1-a)\pi_n^{(1)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ onde os polinômios $\pi_n^{(1)}(x)$ são os polinômios numeradores correspondentes à medida dv (ver [2]).

Segue, de (4.13), que, para $n = 1, 2, \dots$,

$$q_n(x) = \frac{1}{A_{n-1}(\xi)} (A_{n-1}(\xi)\pi_n(x) - A_n(\xi)\pi_{n-1}(x)). \quad (4.21)$$

Polinômios deste tipo já foram estudados em [3, 4, 6, 7, 12, 16]. Em particular, Maroni [12] provou que, para ξ fora do intervalo (a, b) , se dv corresponder a um polinômio ortogonal clássico,

os polinômios $q_n(x)$ são ortogonais em relação à medida

$$(1-c)\delta(x-\xi)dx + c\frac{dv(x)}{|x-\xi|}, \quad (4.22)$$

onde $0 < c \leq 1$.

No caso da medida de Jacobi,

$$d\mu_0 = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad x \in (-1, 1),$$

onde $\alpha, \beta > -1$, é bem sabido que (veja Rainville[18])

$$dv(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{1+\beta}dx, \quad x \in (-1, 1).$$

Assim, fazendo $\xi = -1$ e $c = 1$ em (4.22) obtemos

$$d\mu_1(x) = \frac{dv(x)}{|x+1|} = \frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{1+\beta}}{(1+x)} = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\beta$$

como um exemplo particular de companheira de $d\mu_0$.

Do mesmo modo, a medida de Laguerre

$$d\mu_0(x) = x^\alpha e^{-x} dx, \quad x > 0,$$

onde $\alpha > -1$, produz

$$dv(x) = x^{\alpha+1} e^{-x} dx, \quad x > 0.$$

Assim, um exemplo de medida que resulta num par coerente segue quando escolhemos $\xi = 0$ e $c = 1$ em (4.22)

$$d\mu_1(x) = \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x} = x^\alpha e^{-x} = d\mu_0(x).$$

Finalmente, é fácil ver que a medida de Hermite

$$d\mu_0 = e^{-x^2} dx, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

não possui medida companheira, já que o intervalo suporte de $d\mu_0$ (e portanto suporte de dv) é toda reta real, e portanto, não podemos escolher ξ real fora deste intervalo em (4.22).

4.3 Pares simetricamente coerentes

Se as medidas $d\mu_0$ e $d\mu_1$ são ambas simétricas (isto é, invariantes sob a transformação $x \mapsto -x$) então os graus dos polinômios $p_n^{(\lambda)}(x)$, $p_n(x)$ e $q_n(x)$ têm a mesma paridade. Portanto, a expansão de $p_n^{(\lambda)}(x)$ em termos dos polinômios $p_m(x)$ possui somente coeficientes que dependem da paridade n . Consequentemente, o par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ não pode ser coerente. Para este caso, Iserles et al. introduziram, em [5], a definição de pares simetricamente coerentes.

Definição 4.6 : Dadas $d\mu_0$ e $d\mu_1$ medidas simétricas, dizemos que $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par simetricamente coerente se

$$d_{k,m} = \begin{cases} C_k C_m d_{\min\{k,m\}} & , \text{ se } k \text{ e } m \text{ são de mesma paridade,} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A medida $d\mu_1$ é denominada companheira simétrica de $d\mu_0$ se o par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é simetricamente coerente.

Todos os resultados da seção anterior valem para esta estrutura com visíveis melhoras.

Teorema 4.7 : (a) O par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ de medidas simétricas é simetricamente coerente se, e somente se, existem constantes $C_1, C_2, \dots$ tais que

$$q_n(x) = C_{n+1} p'_{n+1}(x) - C_{n-1} p'_{n-1}(x).$$

(b) Se o par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é simetricamente coerente e se supormos, sem perda de generalidade, que $C_n = 1$, a seguinte expressão é verdadeira:

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=1}^{[n/2]-1} \alpha_{n-2k}(\lambda) p_{n-2k}(x) - \frac{c_n \alpha_n(\lambda) - c_{n-2} \alpha_{n-2}(\lambda)}{\lambda(d_n - d_{n-2})} p_n(x),$$



onde os coeficientes $\alpha_k(\lambda)$ obedecem à relação de recorrência de três termos:

$$c_{m+2}e_{m-2}\alpha_{m+2}(\lambda) = (c_m(e_m + e_{m-2}) + \lambda e_{m-2}e_m)\alpha_m(\lambda) - c_{m-2}e_m\alpha_{m-2}(\lambda).$$

(c) Se $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par coerente, então valem:

$$p_{n+1}^{(\lambda)}(x) - p_{n-1}^{(\lambda)}(x) = \frac{-(c_{n+1}\alpha_{n+1}(\lambda) - c_{n-1}\alpha_{n-1}(\lambda))}{\lambda(d_{n+1} - d_{n-1})}(p_{n+1}(x) - p_{n-1}(x))$$

e

$$\frac{d}{dx}(p_{n+1}^{(\lambda)}(x) - p_{n-1}^{(\lambda)}(x)) = -\frac{c_{n+1}\alpha_{n+1}(\lambda) - c_{n-1}\alpha_{n-1}(\lambda)}{\lambda(d_{n+1} - d_{n-1})}q_n(x).$$

Vejamos um exemplo de medidas simétricas que satisfazem esta condição. Consideremos o caso da medida de Hermite $d\mu_0(x) = e^{-x^2}dx$, $-\infty < x < \infty$, já discutido no contexto de pares coerentes.

Assim, temos

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (4.23)$$

e os polinômios $q_n(x)$, ortogonais em relação a uma medida simétrica, obedecem a uma relação de recorrência de três termos da forma:

$$q_{n+1}(x) = a_n x q_n(x) - f_n q_{n-1}(x).$$

Como $q_n(x) = C_{n+1}H'_{n+1}(x) - C_{n-1}H'_{n-1}(x)$ e $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ (ver [2]), substituindo na relação acima, obtemos

$$\begin{aligned} (n+2)C_{n+2}H_{n+1}(x) - nC_nH_{n-1}(x) &= a_n x [(n+1)C_{n+1}H_n(x) - (n-1)C_{n-1}H_{n-2}(x)] \\ &\quad - f_n [nC_nH_{n-1}(x) - (n-2)C_{n-2}H_{n-3}(x)]. \end{aligned}$$

Por (4.23), temos que

$$H_{n-3}(x) = \frac{xH_{n-2}(x) - 1/2H_{n-1}(x)}{n-2}. \quad (4.24)$$

Usando (4.23) e (4.24), temos

$$\begin{aligned} & 2[2(n+2)C_{n+2} - (n+1)a_nC_{n+1}]H_n(x) \\ & + [-nC_n + nf_nC_n + \frac{1}{2}f_nC_{n-2} - 2n(n+1)C_{n+2}]H_{n-1}(x) \\ & + x[(n-1)a_nC_{n-1} - f_nC_{n-2}]H_{n-2}(x) = 0 \end{aligned}$$

Como

$$H_{n-2}(x) = \frac{xH_{n-1}(x) - 1/2H_n(x)}{n-1},$$

então

$$A_n^*xH_n(x) + (B_n^* + C_n^*x^2)H_{n-1}(x) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} A_n^* &= 2(n+2)C_{n+2} - (n+1)a_nC_{n+1} - \frac{1}{2}a_nC_{n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}f_nC_{n-2}; \\ B_n^* &= -nC_n + nf_nC_n + \frac{1}{2}f_nC_{n-2} - 2n(n+2)C_{n+2}; \\ C_n^* &= a_nC_{n-1} - \frac{1}{n-1}f_nC_{n-2}. \end{aligned}$$

Como $H_n(x)$ e $H_{n-1}(x)$ não têm zeros em comum, $A_n^* = B_n^* = C_n^* = 0$. Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n-1} \frac{C_{n-2}}{C_{n-1}} \frac{2(n+2)C_{n+2} + C_n}{C_n + 1/2C_{n-2}} e, \\ f_n &= n \frac{2(n+2)C_{n+2} + C_n}{nC_n + 1/2C_{n-2}}, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

onde

$$\rho_n = (n+1) \frac{C_{n+1}}{C_{n-1}}$$

obedece à fórmula de recorrência

$$(n-1)(2\rho_{n-1} + 1)\rho_{n+1} = \rho_n. \quad (4.25)$$

É fácil ver que qualquer condição inicial $\rho_1, \rho_2 > 0$ produz, em (4.25), uma sequência positiva. Neste caso $f_n > 0$ e a medida que gera $\{q_n\}_{n \geq 0}$ é positiva definida. Assim, temos um exemplo de medida que tem um número infinito de companheiras simétricas.

Apresentaremos, agora, o trabalho de Meijer([13]), também relacionado a pares coerentes.

Definimos $p_n^{(\lambda)}(x)$ tal que,

$$p_0^{(\lambda)}(x) = 1,$$

$$p_n^{(\lambda)}(x) = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,n} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1,$$

onde $c_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle_S = u_{i,j} + \lambda i j v_{i-1,j-1}$, $i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, n$, com

$$u_{i,j} = \int_a^b x^{i+j} d\mu_0(x) \quad e \quad v_{i,j} = \int_a^b x^{i+j} d\mu_1(x).$$

Observemos que o primeiro coeficiente de $p_n^{(\lambda)}(x)$ é positivo.

Para $n=1$,

$$p_1(x)^{(\lambda)}(x) = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} \\ 1 & x \end{vmatrix} = p_1(x).$$

Para $n \geq 2$, $p_n^{(\lambda)}(x)$ é um polinômio em λ de grau no máximo $n-1$.

Definimos

$$Q_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{n-1}} p_n^{(\lambda)}(x), \quad \text{para } n \geq 2.$$

Para λ grande, os zeros de $p_n^{(\lambda)}(x)$ são determinados pelo zeros de $Q_n(x)$. Temos,

$$\begin{aligned}
 Q_n(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,n} \\ u_{1,0} & u_{1,1} + \lambda v_{0,0} & \dots & u_{1,n} + \lambda n v_{0,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1,0} & u_{n-1,1} + \lambda v_{n-2,0} & \dots & u_{n-1,n} + \lambda(n-1)n v_{n-2,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,n} \\ \frac{u_{1,0}}{\lambda} & \frac{u_{1,1}}{\lambda} + v_{0,0} & \dots & \frac{u_{1,n}}{\lambda} + n v_{0,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{u_{n-1,0}}{\lambda} & \frac{u_{n-1,1}}{\lambda} + v_{n-2,0} & \dots & \frac{u_{n-1,n}}{\lambda} + (n-1)n v_{n-2,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,n} \\ 0 & v_{0,0} & \dots & n v_{0,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & v_{n-2,0} & \dots & (n-1)n v_{n-2,n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}. \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Observemos que o primeiro coeficiente de $Q_n(x)$ é positivo.

Podemos observar também que

$$\int_a^b Q_n(x) d\mu_0(x) = 0, \quad e \tag{4.27}$$

$$\int_a^b Q'_n(x) x^i d\mu_1(x) = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-2\}. \tag{4.28}$$

A última igualdade implica que existe uma constante $A_n \neq 0$, tal que

$$A_n Q'_n(x) = q_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \tag{4.29}$$

Esta última equação pode ser resolvida de modo trivial se supusermos que $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par coerente. Neste caso, (4.29) e o teorema 4.5 implicam que

$$q_{n-1}(x) = A_n Q'_n(x) = C_n p'_n(x) - C_{n-1} p'_{n-1}(x).$$

E, portanto

$$A_n Q_n(x) = C_n p_n(x) - C_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \tag{4.30}$$



Teorema 4.8 : *Suponhamos que $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par coerente e $n \geq 2$. Se λ é suficientemente grande (dependendo de n), então $p_n^{(\lambda)}(x)$ tem n zeros reais distintos que se entrelaçam com os zeros de $q_{n-1}(x)$ e com os de $p_{n-1}(x)$ e, no máximo um deles está fora de (a, b) .*

Demonstração: Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ os zeros distintos de $Q_n(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Seja $h(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)$. Então, $Q_n(x)h(x)$ não muda de sinal em (a, b) .

Portanto,

$$\int_a^b Q_n(x)h(x)d\mu_0(x) \neq 0.$$

Se $k \leq n - 2$, então (4.30) implica que

$$\int_a^b Q_n(x)h(x)d\mu_0(x) = 0$$

o que é uma contradição. Logo $k \geq n - 1$.

Se $k = n - 1$, então o último zero de $Q_n(x)$ é também real e não pode coincidir com $x_1, \dots, x_k$.

Então este zero está fora de (a, b) .

Sejam $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$ os zeros de $q_{n-1}(x)$. Por (4.29), $Q_n(x)$ é monótona nos n intervalos $(-\infty, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{n-2}, y_{n-1}), (y_{n-1}, \infty)$. Então, cada um desses n intervalos contém no máximo um e, portanto, exatamente um zero de $Q_n(x)$.

Finalmente, sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1}$ os zeros que $p_{n-1}(x)$. Como os primeiros coeficientes de $Q_n(x)$ e $p_n(x)$ são positivos e as constantes A_n e C_n têm o mesmo sinal, temos que

$$\text{senal}(Q_n(z_i)) = \text{senal}(p_n(z_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Como os zeros de $p_n(x)$ se entrelaçam com os de $p_{n-1}(x)$, o mesmo acontece com os zeros de $Q_n(x)$. □



Meijer, em [13], tratou também de pares simetricamente coerentes. Apresentaremos, agora, sua abordagem.

Seja $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ um par simetricamente coerente como definido por Iserles et al. em [5]. Como tratamos de medidas simétricas, denotaremos o intervalo suporte do produto interno de Sobolev por $(-a, a)$. Por (4.29) e pelo teorema 4.7(a), temos

$$A_n Q_n(x) = C_n p_n(x) - C_{n-2} p_{n-2}(x), \quad n \geq 3. \quad (4.31)$$

Lema 4.9 : *Suponhamos que $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par simetricamente coerente e $n \geq 3$. Então, $Q_n(x)$ tem pelo menos $n - 2$ zeros distintos em $(-a, a)$.*

Demonstração: Como no teorema 4.8, sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ os zeros distintos de $Q_n(x)$ de multiplicidade ímpar em $(-a, a)$.

Analogamente ao teorema anterior, provamos que $k \geq n - 2$.

Se $x = 0$ é um dos zeros $x_1, x_2, \dots, x_k$, então $x = 0$ não pode ser um zero de multiplicidade 3 pois, por (4.29), $A_n Q'_n(x) = q_{n-1}(x)$ e $q_{n-1}(x)$ não pode ter raiz de multiplicidade 2. Suponhamos que $x_i \neq 0$ é um zero de multiplicidade 3. Então, $-x_i$ também é um zero de multiplicidade 3, o que contradiz o fato de $k \geq n - 2$.

Portanto, $Q_n(x)$ tem, pelo menos, $n - 2$ raízes simples. □

Teorema 4.10 : *Suponhamos que $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par simetricamente coerente e que $n = 2m + 1$ é ímpar, $n \geq 3$.*

- i) *Se λ é suficientemente grande (dependendo de m), então $p_{2m+1}^{(\lambda)}(x)$ tem $2m + 1$ zeros distintos entrelaçados com os zeros de $q_{2m}(x)$.*
- ii) *Além disso, os m zeros positivos de $p_{2m+1}^{(\lambda)}(x)$, para λ suficientemente grande, se entrelaçam com os $m - 1$ zeros positivos de $p_{2m-1}(x)$.*

iii) No máximo dois zeros de $p_{2m+1}^{(\lambda)}(x)$ estão fora do intervalo $(-a, a)$, se λ é suficientemente grande.

Demonstração: i) Sejam $y_1 < y_2 < \dots < y_m$ as raízes positivas de $q_{2m}(x)$. Por (4.29) $Q_{2m+1}(x)$ é monótona em cada um dos $2m + 1$ intervalos $I_1 = (-\infty, -y_m), I_2 = (-y_m, -y_{m-1}), \dots, I_{m+1} = (-y_1, y_1), I_{m+2} = (y_1, y_2), \dots, I_{2m} = (y_{m-1}, y_m), I_{2m+1} = (y_m, \infty)$.

Obviamente $0 \in I_{m+1}$ é zero de $p_{2m+1}^{(\lambda)}(x)$ e de $Q_{2m+1}(x)$. Nos outros $2m$ intervalos $Q_{2m+1}(x)$ tem pelos menos um zero em cada.

Suponhamos que Q_{2m+1} não possui zeros no intervalo I_j , $j \geq m + 2$. Mostraremos então que Q_{2m+1} também não tem zeros em pelo menos um dos intervalos I_{j-1} ou I_{j+1} .

Suponhamos que $Q_{2m+1}(x)$ é positivo decrescente em I_j . Então, $j \neq 2m + 1$ e $Q_{2m+1}(x)$ é positivo e crescente em I_{j+1} , o que implica que $Q_{2m+1}(x)$ não tem zeros em I_{j+1} .

Se $Q_{2m+1}(x)$ é positivo e crescente em I_j , então $Q_{2m+1}(x)$ é positivo e decrescente em I_{j-1} e I_{j-1} , $j \neq m + 2$ não pode conter zeros.

Do mesmo modo, se $Q_{2m+1}(x)$ é negativo em I_j , não tem zeros em um intervalo anterior ou posterior a I_j .

Assim, se $Q_{2m+1}(x)$ não tem zeros em algum intervalo I_j no eixo positivo, existem pelo menos dois intervalos no eixo positivo onde $Q_{2m+1}(x)$ não tem zeros. Como $Q_{2m+1}(x)$ é simétrico, também existem pelo menos dois intervalos no eixo real negativo, onde $Q_{2m+1}(x)$ não tem zeros. Mas, então, $Q_{2m+1}(x)$ pode ter no máximo $2m - 3$ zeros, o que contradiz o lema anterior. Portanto, cada um dos intervalos I_j , $i = 1, \dots, 2m + 1$ contém exatamente um zero de $Q_{2m+1}(x)$.

ii) Sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1}$ os $m - 1$ zeros positivos de $p_{2m-1}(x)$. Como os primeiros coeficientes dos polinômios $Q_{2m+1}(x)$ e $p_{2m+1}(x)$ são positivos, segue, de (4.31), que

$$\text{sign}(Q_{2m+1}(z_i)) = \text{sign}(p_{2m+1}(z_i)), \quad i = 1, \dots, m - 1.$$



Em dois zeros positivos consecutivos z_i e z_{i+1} de $p_{2m-1}(x)$, o polinômio $p_{2m+1}(x)$ tem sinais contrários, de modo que todo intervalo (z_i, z_{i+1}) , $i = 1, \dots, m-2$ contém pelo menos um zero de $Q_{2m+1}(x)$.

Além disso, $\text{signal}(p_{2m+1}(z_{m-1})) = -1$, de modo que $Q_{2m+1}(x)$ tem pelo menos um zero em (z_{m-1}, ∞) . Temos, agora, que encontrar a posição dos $m-1$ zeros positivos de $Q_{2m+1}(x)$.

Como $Q_{2m+1}(x)$ muda de sinal em (z_i, z_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, m-2$, cada um desses intervalos tem um número ímpar de zeros. Também, (z_{m-1}, ∞) tem um número ímpar de zeros de $Q_{2m+1}(x)$. Isto implica que $Q_{2m+1}(x)$ deve ter um zero positivo em $(0, z_1)$.

iii) Consequência direta do Lema anterior. □

Teorema 4.11 : Suponhamos que $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par simetricamente coerente e $n = 2m$, $n \geq 4$.

i) Sejam $y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1}$ os zeros positivos de $q_{2m-1}(x)$. Se λ é suficientemente grande (dependendo de m), então $p_{2m}^{(\lambda)}(x)$ tem exatamente um zero em cada um dos intervalos $(y_1, y_2), \dots, (y_{m-2}, y_{m-1}), (y_{m-1}, \infty)$ e no máximo um zero em $(0, y_1)$;

ii) Sejam $z_1 < z_2 < \dots < z_{m-1}$ os zeros positivos de $p_{2m-2}(x)$. Se λ é suficientemente grande, então $p_{2m}^{(\lambda)}(x)$ tem exatamente um zero em cada um dos $m-1$ intervalos $(z_1, z_2), \dots, (z_{m-2}, z_{m-1}), (z_{m-1}, \infty)$ e no máximo um zero em $(0, z_1)$;

iii) Se λ é suficientemente grande, então $p_{2m}^{(\lambda)}(x)$ tem pelo menos $m-1$ zeros positivos em $(0, a)$.

Demonstração: Análoga ao teorema anterior. □



Observação 1.

Se supusermos que $Q_{2m}(x)$ não tem zeros nos intervalos consecutivos $(-y_1, 0), (0, y_1)$, então não temos uma contradição ao lema. Veremos, através de um exemplo, que $Q_{2m}(x)$ pode ter um par de zeros complexos $\pm is (s \in \mathbb{R})$. Também é possível que $Q_{2m}(x)$ tenha um zero de multiplicidade 2 em $x = 0$.

Observação 2.

Se $Q_{2m}(x)$ tem 2 zeros complexos e $2m - 2$ zeros reais distintos, então o teorema 4.11 iii) implica que todos os zeros reais estão em $(-a, a)$.

Se $Q_{2m}(x)$ tem $2m$ zeros reais diferentes, então no máximo um par de zeros pode estar fora de $(-a, a)$.

Observação 3.

Lembremos que o primeiro coeficiente de $Q_{2m}(x)$ é positivo. Então, se $Q_{2m}(x)$ tem m zeros positivos distintos, temos $\text{sign}(Q_{2m}(0)) = (-1)^m$. Se, por outro lado, $Q_{2m}(x)$ tem $m - 1$ zeros positivos distintos e um par de zeros complexos, então $\text{sign}(Q_{2m}(0)) = (-1)^{m-1}$. Então, para determinar se $Q_{2m}(x)$ tem zeros complexos, só temos que calcular $Q_{2m}(0)$.



EXEMPLO

Sabemos que os polinômios de Chebyshev de segunda espécie satisfazem à relação de recorrência

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

O primeiro coeficiente de $U_n(x)$ é 2^n . Fazendo $\tilde{U}_n(x) = 2^{-n}U_n(x)$, então $\tilde{U}_n(x)$ é mônico e

$$\tilde{U}_n(x) = x\tilde{U}_{n-1}(x) - 1/4\tilde{U}_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

$$\tilde{U}_0(x) = 1, \quad \tilde{U}_1(x) = x.$$

Definimos o conjunto de polinômios $\{H_n\}_{n \geq 0}$ por

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = x,$$

$$H_n(x) = \tilde{U}_n(x) + \tau\tilde{U}_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (4.32)$$

onde τ é uma constante tal que $\frac{1}{8} < \tau < \frac{1}{4}$. Prova-se facilmente que $\{H_n\}_{n \geq 0}$ satisfaz à relação de recorrência

$$H_2(x) = xH_1(x) - \left(\frac{1}{4} - \tau\right)H_0(x),$$

$$H_n(x) = xH_{n-1}(x) - \frac{1}{4}H_{n-2}(x) \text{ se } n \geq 3.$$

Então, existe uma medida $d\mu_1$ com relação a qual $\{H_n\}_{n \geq 0}$ forma uma SPO (ver [2]). De fato,

$$d\mu_1(x) = \frac{(1-x^2)^{1/2}}{p(x)}, \text{ com } p(x) = (1-4\tau)^2 + 16\tau x^2,$$

e $\{H_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios de Bernstein (ver [19]).

A relação (4.32) pode ser reescrita por

$$H_n(x) = \frac{2^{-n}}{n+1} \frac{d}{dx} T_{n+1}(x) + \tau \frac{2^{-n+2}}{n-1} T_{n-1}(x).$$



Com $d\mu_0(x) = (1 - x^2)^{-1/2}dx$ o par $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ é um par simetricamente coerente. Agora,

$$A_{n+1}Q_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}T_{n+1}(x) + \frac{4\tau}{n-1}T_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

O primeiro coeficiente de $T_{n+1}(x)$ é positivo, assim $A_{n+1} > 0$.

Como $T_{2m}(0) = (-1)^m$ obtemos

$$A_{2m}Q_{2m}(0) = (-1)^m \left\{ \frac{1}{2m} - \frac{4\tau}{2m-2} \right\}, \quad m \geq 2.$$

Se $4\tau > 1 - 1/m$, temos que $\text{sign}(Q_{2m}(0)) = (-1)^{m-1}$ e, usando a observação 3 concluímos que $Q_{2m}(x)$ tem zeros complexos. Observe que para $4\tau = 1 - 1/m$ o polinômio $Q_{2m}(x)$ tem um zero duplo em $x = 0$.

Bibliografia

- [1] Alfaro, M., Marcellán, F., Rezola, M.L., Ronveaux A., *On orthogonal polynomials of Sobolev Type: Algebraic properties and zeros*, SIAM Journal Mathematical Analysis 23(3), 737-757, 1992.
- [2] Chihara, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [3] Gautschi W., *Minimal Solutions of Three-term Recurrence Relations and Orthogonal Polynomials*, Math. Comp. 36, 547-554, 1981 .
- [4] Hahn, W., *Über Orthogonalpolynome mit Besonderen Eigenschaften*, in "E.B.Christoffel" (P.L. Butzer and F. Fehér. Eds.), Birkhäuser-Verlag, Basel, 1981.
- [5] Iserles, A., Koch, P.E., Norsett S.P., Sanz-Serna, J.M., *On Polynomials Orthogonal with respect to certain Sobolev Inner Products*, J. Approx. Theory 65, 151-175, 1991.
- [6] Kumar, R., *A Class of Quadrature Formulas*, Math. Comp. 28, 769-778, 1974.
- [7] Kumar, R., *Certain Gaussian Quadratures*, J. IMA 14, 175-182, 1974.
- [8] Marcellám, F., Pérez, T.E. and Piñar, M.A., *Gegenbauer-Sobolev Orthogonal Polynomials*. In: Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II (Cuyt, A., Ed.), Kluwer, Dordrecht, 71-82, 1994.



- [9] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *On zeros of Sobolev type orthogonal polynomials*, Rendiconti di Matematica (Roma) Serie VII 12, 455-473, 1992.
- [10] Marcellán, F., Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Laguerre-Sobolev Orthogonal Polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics 71 (2), 245-265, 1996.
- [11] Marcellán, F., Alfaro, M., Rezola, M.L., *Orthogonal polynomials on Sobolev: Old and New directions*, Journal of Computational and Applied Mathematics 48 (1-2), 113-131, 1993.
- [12] Maroni, P., *Sur La suite des polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta c + \lambda(x - c)^{-1}L$* , in "Actas V Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicacion Vigo" (A. Cachafeiro and E. Godoy, Eds.), 1988.
- [13] Meijer, H.J., *Coherent Pairs and Zeros for Sobolev-type Orthogonal Polinômios*, Indag. Math. (N.S.) 4, 163-176, 1993.
- [14] Pérez, T. E., *Polinomios Ortogonales respecto a productos de Sobolev: El caso continuo*, Doctoral Dissertation. Universidad de Granada. 1994.
- [15] Pérez, T.E., Piñar, M.A., *Global properties of Sobolev-type Orthogonal Polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics 49(1-2-3), 225-232, 1993.
- [16] Price, T.E. Jr., *Orthogonal Polynomials for Nonclassical Weight functions*, SIAM J. Numer. Anal. 16, 999-1006, 1979.
- [17] Piñar, M.A., *Polinomios Ortogonales de tipo Sobolev: Aplicaciones*, Doctoral Dissertation. Universidad de Granada. 1992.
- [18] Rainville, E.D., *Special Functions*, Macmillan, New York, 1960.



- [19] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23, Providence, R.I., 1975 (4th edition)



