



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

DINÂMICA DE MANIPULADOR ROBÓTICO COM 4 GRAUS DE LIBERDADE

ALUNO: Rafael Thiago Dias RA: 132055074
ORIENTADOR: Márcio Antônio Bazani

Ilha Solteira – SP

Abril de 2022



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RAFAEL THIAGO DIAS

**DINÂMICA DE MANIPULADOR ROBÓTICO COM 4 GRAUS DE
LIBERDADE**

Trabalho de Graduação a ser apresentado à banca examinadora da Faculdade de Engenharia, campus de Ilha Solteira como parte dos requisitos necessários para a formação em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Márcio Antônio Bazani

Orientador

ILHA SOLTEIRA

Abril de 2022

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

D541d Dias, Rafael Thiago.
Dinâmica de manipulador robótico com 4 graus de liberdade / Rafael Thiago
Dias. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
61 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2022

Orientador: Márcio Antônio Bazani
Inclui bibliografia

1. Dinâmica. 2. Cinemática. 3. Manipulador robótico. 4. Robótica. 5. Torque.


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

MODELO DE ATA

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ATA DA DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO: Dinâmica de Manipulador Robótico com 4 Graus de Liberdade

ALUNO: Rafael Thiago Dias

RA: 132055074

ORIENTADOR: Marcio Antônio Bazani

Aprovado (X) - Reprovado () pela Comissão Examinadora

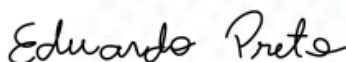
Comissão Examinadora:



Prof. Marcio Antônio Bazani
Presidente (Orientador)



Prof. Victor Hugo Candido Borges



Prof. Eduardo Preto

Ilha Solteira(SP) 05 de abril de 2022.

DEDICATÓRIA

À minha mãe e ao meu pai, que sempre estiveram ao meu lado, se dedicaram e batalharam em buscar fazer de mim a pessoa que me tornei, enfrentando comigo minhas dificuldades e se alegrando comigo em minhas conquistas. E à minha noiva, que está sempre me dando força, me apoiando, me acompanhando em nossos desafios e me incentivando a buscar sempre o meu melhor e novas conquistas com garra e sabedoria. E hoje, onde quer que minha mãe esteja, sei que ela, assim como meu pai e minha noiva, está feliz com mais esta conquista em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeira e principalmente, a Deus pela oportunidade que me foi dada de chegar até aqui, me dar forças e conhecimentos para concluir mais uma conquista em minha vida.

Agradeço minha mãe, Ninfa, por toda força, dedicação e alegria que sempre apresentou independente do momento e da situação, para que eu me tornasse alguém íntegro, respeitoso, inteligente e dedicado a buscar meus sonhos e construir uma família sólida.

Agradeço a meu pai, Nilceu, que sempre esteve ao meu lado e sempre batalhou para que eu pudesse ter um futuro promissor e conquistasse o máximo do que eu buscar com trabalho duro e dedicação.

Agradeço minha noiva, Amanda, que acompanhou minha trajetória sem hesitar, sempre me apoia em minha busca por conhecimentos, me dá forças em momentos difíceis e se alegra com minhas conquistas e felicidades, me incentiva no meu autodesenvolvimento e, independente do empecilho trazido pela vida, está sempre ao meu lado.

Agradeço aos professores, em especial prof. Dr. Marcio Antônio Bazani, que acreditou em minha capacidade e me instruiu e orientou em meu trabalho de Iniciação Científica e em meu trabalho de Graduação.

E agradeço meu amigo, Victor Borges, que, além de nos dedicarmos às disciplinas e projetos da faculdade e do Grupo de Robótica T.E.R.A., idealizamos este projeto e abraçamos a ideia de desenvolver os estudos sobre o manipulador, que chamamos de braço impressora 3D e CNC.

Agradeço ao Grupo de Robótica T.E.R.A., uma equipe excepcional na Universidade, da qual me possibilitou desenvolver habilidades técnicas e analíticas de processos mecânicos, estruturais, eletrônicos e de desenvolvimento no que tange a robótica. Além das amizades e momentos únicos que a equipe trouxe para meu período de graduação.

Agradeço às amizades adquiridas na faculdade, em especial o Paulo Eduardo Galvez, Matheus Peliciari Simon, Rubens Otero Neto, Murilo Barone Goemeri,

Gustavo Barone Goemer e Matheus Marcoto. Dos quais foram importantes por garantir momentos memoráveis e possibilitaram que os estudos fossem um pouco menos difíceis.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi feito acerca da Dinâmica de um Manipulador Robótico com 4 Graus de liberdade, definido por 3 juntas rotacionais paralelas e uma translacional. O espaço de trabalho do robô é limitado pelos tipos de juntas e tamanho de seus elos. A dinâmica do manipulador é o estudo baseado na obtenção de velocidades, energias e torques necessários para provocar o movimento e a capacidade de trabalho de um braço robótico. A dinâmica depende basicamente das imposições dimensionais, estruturais do robô e pela inercia de cada sistema isoladamente, que possibilitam calcular, a partir de dos ângulos obtidos pelas equações da cinemática direta e da cinemática inversa, as velocidades, acelerações e posteriormente o torque. Como citado, com os dados obtidos, é possível gerar o torque mínimo necessário para o movimento do robô, conforme resultado da equação de energia de Lagrange que, aliás, é a soma das derivadas das energias potencial e cinética nas posições do robô, em função do intervalo de tempo. Todos os cálculos e dados foram processados utilizando ferramentas de desenvolvimento como Python, Matlab, Octave e Excel, o que significa que foi possível obter resultados rápidos e a geração de diagramas e imagens que identificam os ângulos, velocidades, intervalos de torques dos elementos do manipulador robótico e seu movimento.

Palavras Chave: Manipulador, Dinâmica, Cinemática, Graus de Liberdade, Lagrange, Velocidades, Torque.

ABSTRACT

This Final Work Project was made above the Dynamics of a Robotic Manipulator with 4 Degrees of freedom, defined by 3 parallel rotational joints and a translational one. The robot's working space is limited by the types of joints and the size of their links. The manipulator dynamics is the study based on obtaining the speeds, energies and torques necessary to provoke the movement and the work capacity of a robotic arm. The dynamics basically depends on the dimensional and structural impositions of the robot and on the inertia of each system separately, which make it possible to calculate, from the angles obtained by the equations of forward kinematics and inverse kinematics, the speeds, accelerations and later the torque. As mentioned, with the data obtained, it is possible to generate the minimum torque necessary for the movement of the robot, as a result of the Lagrange energy equation, which, by the way, is the sum of the derivatives of the potential and kinetic energies in the positions of the robot, as a function of of the time interval. All the calculus and data were processed using development tools such as Python, Matlab, Octave and Excel, which means that it was possible to obtain fast results and enable the generation of diagrams and images that identify the angles, velocity and interval torques for the robotic manipulator elements.

Keywords: Manipulator, Dynamic, kinematics, Degree of freedom, Lagrange, Speeds, Torque.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação física do Braço Robótico a ser analisado. -----	13
Figura 2 – Juntas de um efetuator. -----	16
Figura 3 – Tipos de juntas possíveis para um manipulador. -----	17
Figura 4 – Configuração LRRR. -----	18
Figura 5 – Manipulador de cadeia fechada. -----	19
Figura 6 – Manipulador de cadeia parcialmente fechada. -----	19
Figura 7 – Manipulador de cadeia aberta. -----	20
Figura 8 – Manipulador SCARA. -----	23
Figura 9 – Representação do Volume de Trabalho do Robô em Estudo. -----	24
Figura 10 – Representação de parâmetros cinemáticos de manipulador. -----	26
Figura 11 – Representação de vetores de velocidade. -----	30
Figura 12 – Representação das coordenadas do braço. -----	35
Figura 13 – Formulação final para cálculo de Tau. -----	39
Figura 14 – Definições de massa e dimensionamento utilizados para os cálculos de Tau na forma utilizada pelo programa MatLab. -----	39
Figura 15 - Variação de Theta 2 conforme o movimento do Braço robótico. -	40
Figura 16 – Variação de Theta 3 conforme o movimento do Braço robótico. -	41
Figura 17 – Variação de Theta 4 conforme o movimento do Braço robótico. -	41
Figura 18 – Variação de Theta 5 conforme o movimento do Braço robótico. -	42
Figura 19 – Diagrama dos torques pelo tempo de movimento, conforme o movimento total do Braço robótico e a somatória do torque de cada junta. -----	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Configurações padrão de corpo de manipuladores. -----	21
Tabela 2 – Configurações padrão de punho de manipuladores. -----	22
Tabela 3 – Parâmetros DH do manipulador estudado. -----	35

SUMARIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 PRINCÍPIOS DA ROBÓTICA	14
2.1 ANATOMIA	14
2.2 GRAUS DE LIBERDADE	15
2.3 JUNTAS	16
2.4 CADEIAS CINEMÁTICAS	19
2.5 CONFIGURAÇÃO E VOLUME DE TRABALHO	20
3 CINEMÁTICA DE MANIPULADORES	25
3.1 CINEMÁTICA DIRETA	25
3.2 CINEMATICA INVERSA	28
4 DINÂMICA DE MANIPULADORES	29
5 RESULTADOS	35
6 CONCLUSÃO	44
REFERÊNCIAS	46
Anexo 1	47
Anexo 2	49
Anexo 3	53

1 INTRODUÇÃO

O trabalho consiste em projetar cinematicamente e dinamicamente um manipulador com objetivo de ser utilizado com impressora 3D que possui cinco graus de liberdade (5 GDL), de modo a se utilizar dados dimensionais propostos em projeto do braço robótico e analisar os resultados alcançados. Para que os resultados sejam avaliados corretamente, antes serão definidos parâmetros importantes para a robótica.

Desde a revolução industrial tem ocorrido o constante aumento na demanda de melhorar a qualidade e reduzir o custo de produção. No princípio a maioria dos produtos eram feitos por artesãos, a qualidade desses produtos dependia altamente das habilidades desses artesãos e os custos eram elevadíssimos. Conhecido assim como Trabalho manual. (TSAI, 2008)

Buscando produções maiores, com qualidade aceitável e menores custos foram sendo desenvolvidos maquinários que fossem capazes de realizar produção em massa. A palavra automação foi introduzida pela *Ford Motor Company* na década de 1940. Sendo, do inglês, *Automation*, uma aglutinação para *Automatic motivation*, tem-se duas ideias: a noção de máquinas robóticas especiais desenvolvidas para realizar tarefas mecanicamente e a noção de sistemas de controle automáticos para direcioná-las. (LEWIS, 2003)

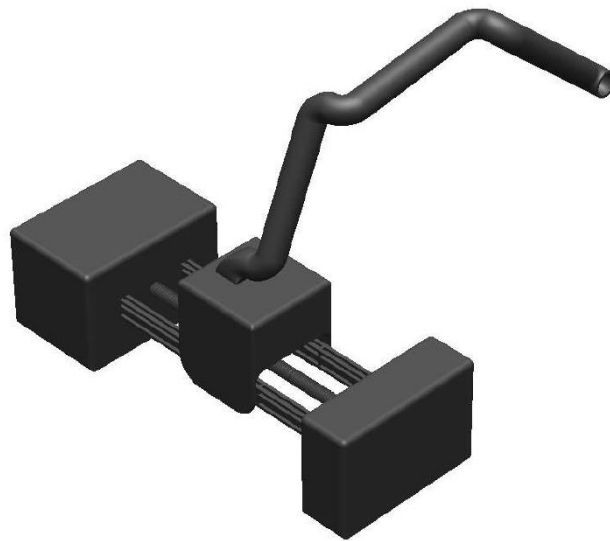
Atualmente tem-se como grandes motivos para o aumento do uso de robôs industriais seu custo que vem declinando e sua eficiência aumentado, trabalhando com mais rapidez, precisão e flexibilidade em operações, além de a mão de obra humana estar se tornando cada vez mais cara. (CRAIG, 2012) O desenvolvimento e evolução de robôs tem os tornado cada vez mais aptos a assumirem tarefas que demandam de repetições, cargas elevadas e atuação em locais que podem gerar algum risco ou condição de risco para pessoas direta e indiretamente envolvidas na atividade.

A tecnologia que fez com que fosse possível se desenvolver a robótica tendo como base amplos estudos matemáticos, lógicos, mecânicos e eletrônicos, se utilizando de ferramentas de trigonometria, cinematica, dinâmica, mecânica de materiais, eletrônica e programação. Da engenharia mecânica tem-se as metodologias para o estudo de máquinas em situações estáticas e dinâmicas. A

matemática provê ferramentas para a descrição de movimentos espaciais e outros atributos dos manipuladores. As teorias de controle contribuem com ferramentas para projetar e avaliar algoritmos que realizam os movimentos ou a aplicação de força desejados. As técnicas da engenharia elétrica são aplicadas no projeto de sensores e interfaces para robôs industriais e a ciência da computação contribuiu com a base para a programação desses dispositivos a fim de que desempenhem a tarefa desejada. (CRAIG, 2012)

O robô de estudo no trabalho, como dito anteriormente, possui cinco graus de liberdade, porém, por questões de operação a ponta onde se situa a extrusora é o quinto GDL. Assim, como será analisado apenas o movimento do braço, o mesmo será trabalhado como tendo quatro graus de liberdade. Na Figura 1 tem-se uma representação do manipulador.

Figura 1: Representação física do Braço Robótico a ser analisado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2 PRINCÍPIOS DA ROBÓTICA

De forma geral, o termo robô atualmente carrega consigo o entendimento de que tudo o que opera com certo grau de autonomia, sob controle computadorizado, pode ser chamado de robô (SPONG, 2004).

Para desenvolver as análises buscadas para o manipulador deste trabalho é necessário que seja estabelecido quais são os componentes gerais que equipamentos relativos ao mesmo podem possuir e o que significam em sua estrutura. Além de sua anatomia, deve-se deixar claro questões sobre referências, cadeias cinemáticas, graus de liberdade, volume de trabalho e configurações de manipuladores.

Os elementos de um sistema robótico se encaixam em quatro categorias:

1. o manipulador, inclusive seus sensores internos ou proprioceptivos;
2. o efetuator, ou ferramenta de trabalho na ponta do braço;
3. sensores externos e efetutores, tais como sistemas de visão e alimentadores de peças; e
4. o controlador. (CRAIG, 2012)

2.1 ANATOMIA

Um braço robótico, similar a um braço humano, contém limitações em alguns graus de movimentação, possui componentes rígidos conectados por componentes móveis, o que garante resistência e ao mesmo tempo capacidade de movimentação ao braço. Ou seja, um manipulador possui capacidade de suportar forças e torques ao mesmo tempo que é capaz de se movimentar em direções, sentidos e graus delimitados pelo projeto.

Os corpos que dão dimensão aos braços são denominados elos e são unidos por juntas que garantem movimento relativo à estrutura. Nos elos e juntas são acoplados acionadores, sensores ou ferramentas, de acordo com a necessidade de uso e operação do braço, que são controlados por sistemas de controle.

Os elos têm diversos atributos que podem ser definidos por projetos, porém, em questões de análises cinemáticas, com o intuito de se obter relações e expressões, os elos são considerados como corpos rígidos que definem a relação entre os eixos de duas juntas vizinhas. De forma mais genérica para representação podem ser definidos como linhas ou vetores no espaço entre as juntas.

2.2 GRAUS DE LIBERDADE

Os graus de liberdade de um manipulador devem atender a demanda da tarefa principal empregada pelo manipulador. Existem tarefas que podem ser satisfeitas com 2 graus de liberdade enquanto outras podem exigir 6 GDL.

Alguns manipuladores podem conter graus em maior número que o necessário e, para casos onde se tem um eixo de simetria, ocorre a redundância de posições para as atividades. Ao se usar robôs com os graus de liberdade limitados de acordo com a necessidade, se obtém comumente um número finito de soluções possíveis para realizar tarefas.

Normalmente na indústria são utilizados robôs com cinco GDL, que na maioria dos casos atende com sobra de graus de liberdade, ou seja, em muitos casos robôs com 3 Graus de liberdade poderiam ser suficientes. Isso ocorre principalmente por, na prática ser necessário evitar colisões entre a ferramenta e a peça de trabalho. (CRAIG, 2012)

Os braços e punhos possuem três possíveis movimentos para cada um deles, ou seja, são três diferentes para os punhos e três diferentes para os elos, o que confere três graus de liberdade para cada componente.

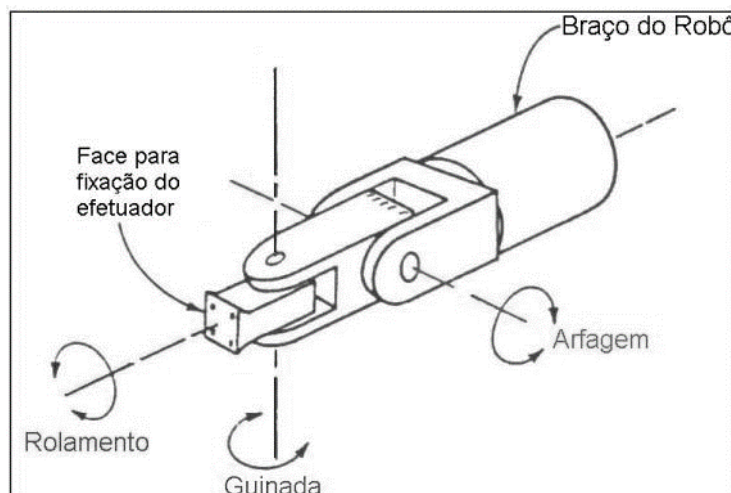
Para os braços, objeto de estudo do trabalho, os movimentos possíveis são: vertical transversal, onde o movimento se dá verticalmente para cima ou para baixo; rotacional transversal: com movimento na horizontal para esquerda ou direita; e radial transversal, ao longo do eixo do elo, ou seja, de afastar ou se aproximar.

Os punhos, dependendo da atuação, podem possuir movimento nos três graus de liberdade, que conferem os seguintes movimentos ao efetuador: Rolamento (Roll) que é rolamento do punho em torno do eixo do braço, Arfagem (Pitch) que é o

movimento no sentido vertical do punho e Guinada (Yaw) que é o movimento no sentido Horizontal do punho, como mostrado na Figura 2.

Como citado anteriormente, para este trabalho, como se busca realizar a análise do movimento apenas do braço, o punho terá seu estudo deixado em segundo plano. os objetivos de estudo são obter os ângulos relativos em cada elo, já determinados pelo trabalho do Victor Borges, e realizar a análise dinâmica do manipulador para se obter as forças e torques atuantes no manipulador. Pela configuração ao qual o braço foi projetado e entendendo que o único requisito da extrusora é que esteja sempre na vertical, o punho só precisa do movimento de arfagem (pitch) para atender a necessidade de trabalho.

Figura 2: Juntas de um efetuado.



Fonte: Tecnologia e Programação (GROOVER, 1998)

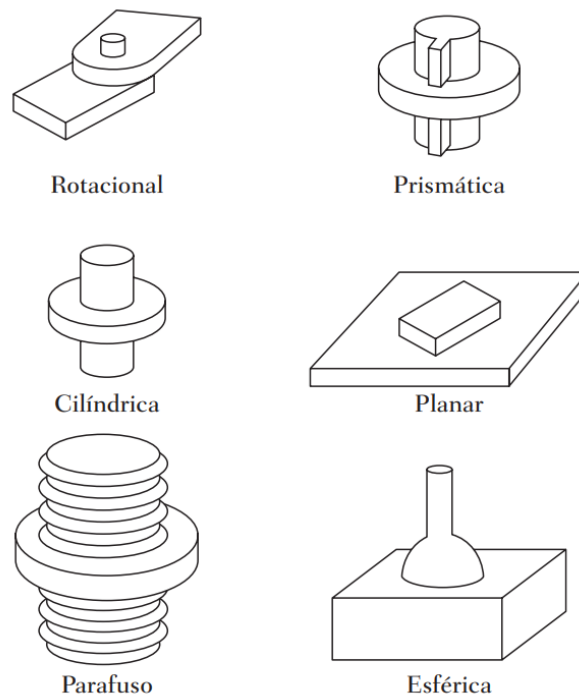
2.3 JUNTAS

Como citado anteriormente, as juntas ou articulações são os componentes que garantem mobilidade ao manipulador, ou seja, permitem os graus de liberdade aos mecanismos. Por questões mecânicas, é favorecido o uso de juntas com apenas um grau de liberdade, sendo as mais comuns as juntas prismáticas, que assumem a movimentação de deslizamento, e as juntas rotacionais, que assumem o movimento de rotação em torno do eixo. Nos raros casos em que um mecanismo é construído com uma junta com n graus de liberdade, ele poderá ser modelado como n juntas com

um grau de liberdade cada uma delas conectadas com $n - 1$ elos de comprimento zero. Portanto, sem perder a generalidade, consideramos apenas manipuladores que têm juntas com apenas um grau de liberdade. (CRAIG, 2012) Para se determinar e enumerar os elos, deve-se considerar a numeração da base, denominada elo 0, ao punho.

As Juntas foram desenvolvidas de seis maneiras diferentes, sendo elas lineares, também conhecidas como prismáticas, rotativas, esféricas, cilíndricas, planares e fusos. De forma geral, essas juntas são separas pelas juntas básicas, linear, rotativa e esférica, e juntas híbridas, ou seja, que são compostas de mais de um tipo de juntas em seu modo de movimento, sendo elas as juntas cilíndricas, planares e fuso, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 - Tipos de juntas possíveis para um manipulador.



Fonte: Robótica (Craig, 2012)

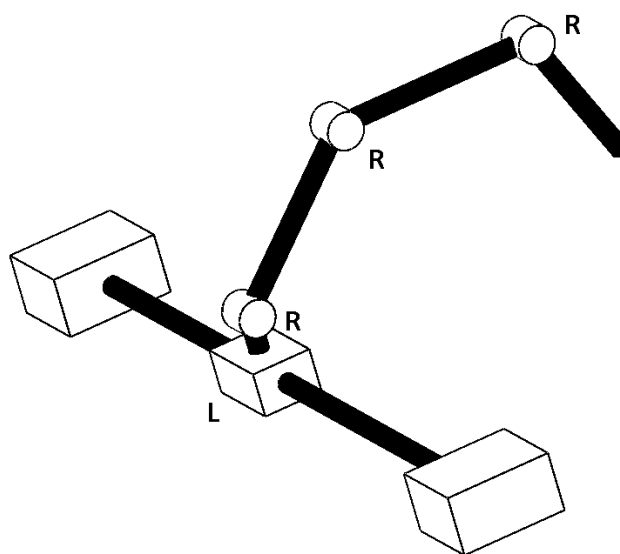
- Junta linear/prismática (L): Junta com movimento linear de duas hastes deslizando entre si;
- Junta rotativa: junta com movimento de rotação através de seu eixo de rotação;

- Junta esférica: equivalente a três juntas rotativas simultâneas, tendo rotação em torno dos três eixos de rotação.
- Junta cilíndrica: Criada pela fusão de uma junta rotacional e uma prismática;
- Junta planar: Criada a partir de duas juntas prismáticas, possui movimento linear em duas direções perpendiculares;
- Junta fuso: Composição parafuso porca que executa movimento semelhante ao da junta prismática, porém com movimento rotacional ao longo do eixo central.

As juntas rotacionais possuem também uma classificação própria, de forma que podem ser: torcional onde os elos de entrada e de saída têm a mesma direção de eixo de rotação da junta; rotacional, cujos elos de entrada e saída são perpendiculares ao eixo de rotação da junta; e revolvente, em que elo de entrada está na mesma direção do eixo de rotação e elo de saída está perpendicular ao eixo de rotação.

As juntas utilizadas no trabalho são, em sua maioria, do tipo rotativa rotacional, possuindo apenas uma junta linear. Assim, de forma classificativa, seguindo da base até o punho temos uma junta linear e três juntas rotacionais rotativas, assim, o robô em questão é definido como LRRR como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Configuração LRRR

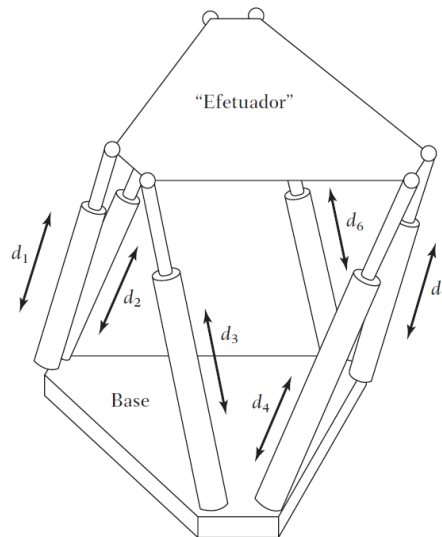


Fonte: Cinemática Inversa Do Manipulador Robótico De Impressora 3D Com 4 Graus De Liberdade (BORGES, 2019).

2.4 CADEIAS CINEMÁTICAS

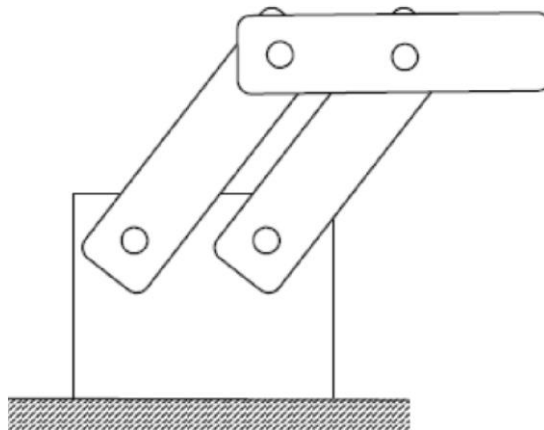
Um manipulador pode possuir um dos três tipos de cadeias cinemáticas existentes, podendo ser completamente fechada, parcialmente fechada ou aberta, como mostrados respectivamente na Figura 5, Figura 6 e Figura 7. Para manipuladores como o estudado, onde as terminações dos elos superiores não coincidem com a base ou o início de nenhum elo anterior, tem-se a cadeia cinemática aberta.

Figura 5 – Manipulador de cadeia fechada



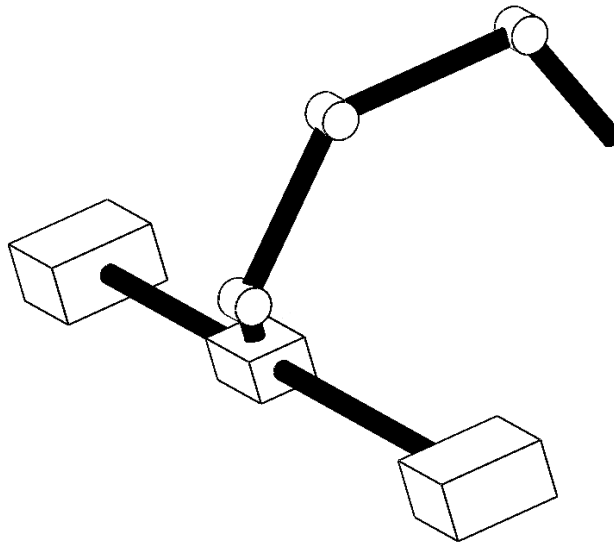
Fonte: Robótica (CRAIG, 2012).

Figura 6 - Manipulador de cadeia parcialmente fechada.



Fonte: Robótica: Teoria e Prática (DUMBÁ, 1998).

Figura 7 – Manipulador de cadeia aberta.



Fonte: Próprio autor.

O tipo de cadeia cinemática utilizada interfere diretamente no peso máximo suportado pelo manipulador sem que sua movimentação e precisão sejam afetadas. Assim, os modelos com melhor divisão de carga ao longo da estrutura são os de cinemática fechada. O peso fica dividido entre os elos ao longo da base até o punho, de forma que há um alívio de peso e tensões na estrutura.

2.5 CONFIGURAÇÃO E VOLUME DE TRABALHO DE MANIPULADORES

Como mencionado anteriormente, o manipulador robótico com quatro GDL estudado no trabalho possui uma base com movimento em um plano perpendicular ao eixo direcionado à próxima junta onde inicia o braço do robô e possui uma junta rotacional. O braço possui mais duas juntas rotacionais importantes para o estudo. Como citado anteriormente o punho e seus graus não serão considerados na análise, de forma que as juntas citadas compõem quatro graus de liberdade.

A ferramenta de trabalho do manipulador será uma extrusora de impressão 3D, podendo ser substituída por uma ferramenta CNC. Para que essa ferramenta realize a tarefa de acordo com o esperado, é necessário que a mesma seja orientada corretamente pelo punho, pelo braço e suficientemente sustentada pela base e

estrutura empregada. Comumente se utiliza entre 2 a 4 juntas ao longo do braço e o punho em torno de 3 juntas.

O método de desacoplar o punho do braço para análise é fácil e amplamente empregado, uma vez que é possível reacoplar ao sistema com poucas correções necessárias, pois, enquanto os elos do braço são longos e com juntas distantes umas das outras, os elos do punho são curtos, ou até nulos, com distância entre as juntas do efetuados sendo unidas ou vinculadas, para garantir movimentos curtos e precisos.

Para se classificar o braço, como citado anteriormente, deve-se levar em conta os tipos de juntas utilizadas, assim, o braço do estudo é classificado como LRRR. Porém, existem configurações padrão para manipuladores, de forma que são configurações que são nomeadas de acordo com seu modelo, como segue na Quadro 1.

Tabela 1 – Configurações padrão de corpo de manipuladores.

Configuração do robô – braço e corpo	Símbolo
Configuração cartesiana	LLL
Configuração cilíndrica	LVL
Configuração articulada ou revoluta	TRR
Configuração esférica	TRL
Configuração SCARA	VRL

Fonte: Robótica: Teoria e Prática (DUMBÁ, 1998).

De forma semelhante, os punhos têm configurações padrão segundo as juntas que os compõem, como indicado na Tabela 2, onde temos dois duas configurações com juntas rotativas e torcionais.

Tabela 2 – Configurações padrão de punho de manipuladores

Configuração do robô – (pulso)	Símbolo
Configuração Pulso de 2 eixos	RT
Configuração Pulso de 3 eixos	TRT

Fonte: Robótica: Teoria e Prática (DUMBÁ, 1998).

Não será discutido os tipos de efetadores, porém detalharemos a seguir os tipos de robôs.

Robô cartesiano com juntas do tipo LLL, possui deslocamento relativo de 3 juntas lineares. O robô de coordenadas cartesianas é a configuração mais simples para robôs.

Robô cilíndrico, com juntas LVL, possui uma junta rotativa revolvente ou torcional e duas juntas prismáticas, de forma que o volume de trabalho do robô tem formato cilíndrico. Para essa configuração uma junta prismática está na base e sobre ela tem uma junta rotativa. Uma segunda junta prismática é atrelada nesta junta rotativa.

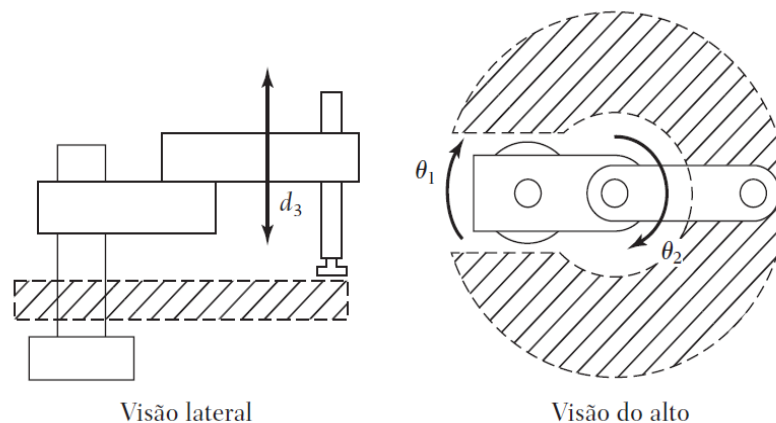
O robô articulado ou revoluto, também conhecido como manipulador antropomórfico, consiste de duas juntas no ombro, uma junta no cotovelo e duas ou três juntas no punho. As juntas no ombro possibilitam a movimentação em torno do eixo vertical e a movimentação de elevação em relação ao plano horizontal.

Robôs de configuração TRR diminuem a interferência da estrutura do manipulador no espaço de trabalho, o que os torna capazes de alcançar espaços confinados e requerem uma estrutura geralmente menor que a dos robôs cartesianos. Manipuladores com junta tendem a ser mais baratos para aplicações que requerem espaços de trabalho menores. (CRAIG, 2012)

Robôs de configuração esférica, de símbolo TRL, são semelhantes aos manipuladores articulados, entretanto a junta do cotovelo não é uma rotativa e sim uma prismática. O elo que se move a partir da junta prismática pode se utilizar do movimento de esticar para frente e para trás em relação à estrutura do robô.

A configuração SCARA, exemplificada na Figura 8, possui três juntas rotacionais paralelas com uma junta prismática para movimentação do efetuador na direção perpendicular ao plano horizontal. principal vantagem é que as primeiras três juntas não precisam suportar qualquer peso do manipulador ou da carga. Além disso, o elo 0 pode facilmente abrigar os atuadores para as primeiras duas juntas. Os atuadores podem ser bastante grandes para que o robô se movimente com muita rapidez. (CRAIG, 2012)

Figura 8 - Manipulador SCARA.

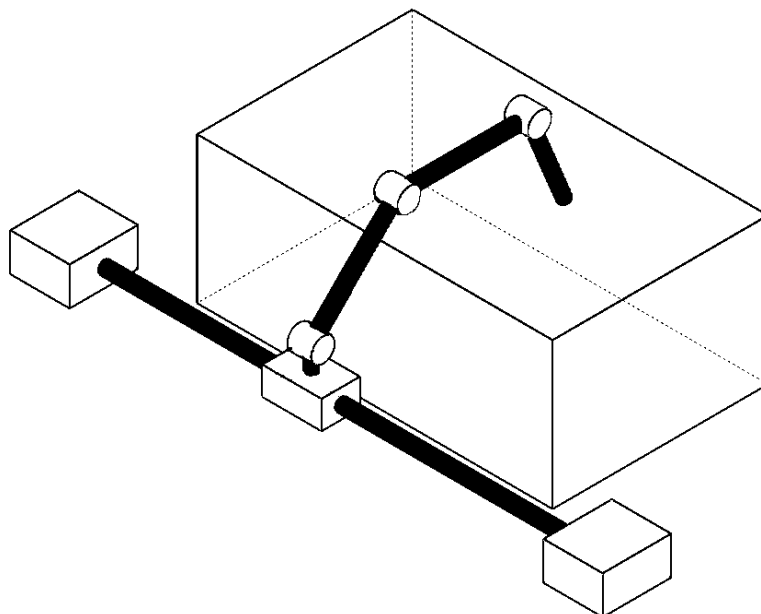


Fonte: Robótica (CRAIG, 2012).

De acordo com a configuração e dimensão do projeto do braço robótico é definido seu volume de trabalho, sendo assim, o volume de trabalho é o espaço que o robô consegue posicionar seu punho e utilizar seu efetuador (GROOVER, 1988). Para evitar conflitos de análises e estudos com diferentes tamanhos de robôs, convencionou-se o uso do punho como referência.

Para o braço robótico estudado, o volume de trabalho é cúbico, devido a configuração e dimensão onde o mesmo tem faces laterais delimitadas pela junta da base e faces frontal e superior definidas pelas dimensões dos elos, como mostrado na Figura 9.

Figura 9 – Representação do Volume de Trabalho do Robô em Estudo.



Fonte: Cinemática Inversa Do Manipulador Robótico De Impressora 3D Com 4 Graus De Liberdade (BORGES, 2019).

3 CINEMÁTICA DE MANIPULADORES

3.1 CINEMÁTICA DIRETA

A Cinemática é a ciência que trata do movimento sem considerar as forças que o causam (CRAIG, 2012). De tal forma estuda-se posicionamentos, ângulos, velocidades e acelerações dos componentes em relação a qualquer variável definível.

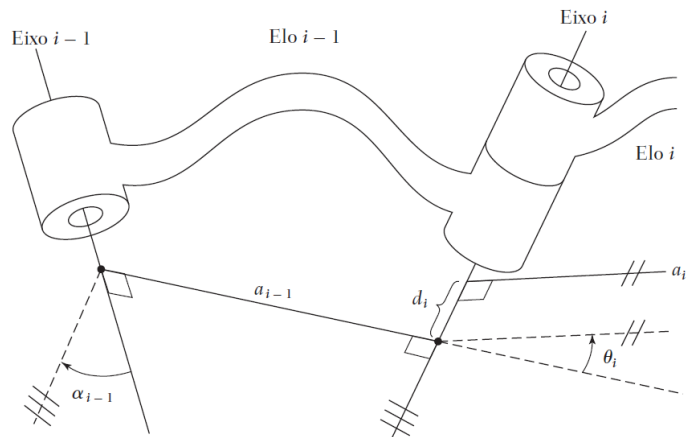
Para o estudo da cinemática deve-se definir um sistema de referência denominado inercial fixo na base do robô e referenciar por letras e números, sequencialmente da base ao punho, os demais elos e juntas. A partir da notação Denavit-Hartenberg, cada elo é referenciado por um sistema de coordenadas próprio de forma que um dos eixos desses sistemas seja fixo em uma junta e direcionado à junta seguinte, tornando-se solidário ao movimento do elo percorrido pelo eixo.

Para o referenciamento segundo a convenção de D-H tem-se os seguintes parâmetros:

- a_i : Distância de Z_i a Z_{i+1} medida ao longo do eixo X_i do elo;
- α_i : Ângulo de Z_i a Z_{i+1} medido em torno de X_i (para o projeto, $\alpha=0^\circ$);
- d_i : Distância de X_{i-1} a X_i medida ao longo de Z_i ;
- θ_i : Ângulo de X_{i-1} a X_i medido em torno de Z_i ;

Como mostrado na Figura 10, pode-se observar cada um dos parâmetros referidos.

Figura 10 –Representação de parâmetros cinemáticos de manipulador.



Fonte: Robótica (CRAIG, 2012).

A solução matricial do problema da análise cinemática é linear e dita momentânea, ao se analisar os ângulos, velocidades, acelerações e posições de um dado momento do movimento. Assim, definidos os parâmetros básicos para um sistema de referência de D-H, para um mecanismo novo deve ser analisado e definido conforme os passos

1. Identificar os eixos das juntas e definir linhas infinitas ao longo deles. Para as etapas de 2 a 5 considerar duas dessas linhas vizinhas (eixos i e $i + 1$).
2. Identificar a perpendicular comum, ou o ponto de intersecção, entre eles. Atribuir a origem do sistema de referência do elo ao ponto de intersecção, ou ao ponto onde a perpendicular comum encontrar com o i -ésimo eixo.
3. Definir o eixo Z_i apontado ao longo do i -ésimo eixo de junta.
4. Definir o eixo X_i apontado ao longo da perpendicular comum ou, se os eixos se cruzam, determinar que X_i é normal ao plano que contém os dois eixos.
5. Definir o eixo Y_i para completar o sistema de coordenadas usando a regra da mão direita.
6. Atribuir $\{0\}$ para que se equipare a $\{1\}$ quando a primeira variável de junta for zero. Para $\{N\}$, escolher uma localização para a origem e direção X_N livremente, mas em geral de forma que o máximo possível de parâmetros de acoplamento seja zero. (CRAIG, 2012)

Ao todo tem-se cinco sistemas de referência principais a serem trabalhados, denominados como: a referência da base ou “base frame”, localizado na base do robô; a referência da estação *station frame*, ao qual é o sistema de referência do espaço de trabalho do manipulador, localizado geralmente em um canto extremo desse espaço; a referência do punho *wrist frame*, fixado no último elo do manipulador; a referência da ferramenta *tool frame*, fixado na ponta da ferramenta a ser usada pelo robô, independente de qual for essa ferramenta; e a referência meta *goal frame*, referência dada pelo ponto de trabalho objetivo do robô.

Para que os cálculos de cinemática, principalmente para a cinemática inversa, do manipulador sejam possíveis, serão necessários utilizar matrizes de transformação, como mostrado na formulação 1 e formulação 2, implicando em uma conclusão matemática e calculando a posição do braço manipulador.

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Os termos das matrizes transformação são definidos por seus efeitos, ou seja, temos os 9 termos internos que compõem o rotacional função 1.1, explicado posteriormente, que indica o movimento possível do elemento em relação ao referencial adotado de i-1 a i. E os termos referentes ao posicional, do qual indica a posição da ponta do elo no volume, função 1.2, definido pelas coordenadas e o referencial utilizado.

$$\begin{matrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{matrix} \quad (1.1)$$

$$\begin{matrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \sin\theta_i \\ d_i \\ 1 \end{matrix} \quad (1.2)$$

3.2 CINEMÁTICA INVERSA

Devido ao foco do trabalho ser a análise dinâmica do manipulador e o processo de análise cinemática já ter sido abordado pelo meu colega Victor Borges em seu trabalho sobre o manipulador, irei apenas descrever de forma generalizada sobre o processo de análise da cinemática inversa.

A cinemática inversa consiste em se analisar os possíveis conjuntos de ângulos de junta para se obter um posicionamento e orientação desejada. Para sistemas robóticos dependentes de algoritmos que façam os cálculos, pode se tornar o elemento mais importante no sistema de automação do manipulador.

O problema da cinemática inversa é mais complexo em relação à cinemática direta uma vez que, além de apresentar o caminho oposto, trabalha com um problema não linear. Por sua complexidade consegue suprir a deficiência de momentaneidade apresentada pela cinemática direta e traz os possíveis ângulos de cada junta analisada que o mecanismo terá.

Devido à complexidade, mecanismos trabalhados pelo problema da cinemática inversa podem ou não apresentar solução exata e manipuladores com menos graus de liberdade, normalmente com menos de 6 GDL, podem não alcançar posições ou orientações genéricas no espaço. além da possibilidade de não se ter solução, pode ocorrer de um sistema possuir múltiplas soluções, ou seja, depara-se com um conflito de o sistema optar ou ser direcionado a uma solução para realizar dada tarefa, sendo necessário também a adoção de critérios para se basear na tomada de tal decisão.

4 DINÂMICA DE MANIPULADORES

A dinâmica consiste no estudo dos movimentos e como eles ocorrem, em contrapartida da cinemática onde foram analisados parâmetros estáticos de posições e deslocamentos (SPONG, 2004). Para o problema da dinâmica têm-se dois fatores a serem solucionados. Para o primeiro tem-se um ponto de trajetória com ângulo, velocidade angular e aceleração angular e busca-se obter o vetor necessário para os torques de junta. O segundo é calcular como o mecanismo se moverá em relação a essas forças e torques. (CRAIG, 2012)

Dada a introdução do que é o estudo da dinâmica, têm-se dois métodos conhecidos para análise dinâmica de manipuladores, o método de Newton e o Método Euler-Lagrange. Sendo o último o centro de estudo do braço robótico em questão.

4.1 VELOCIDADES LINEAR E ANGULAR

Considerando um manipulador uma composição de corpos unidos, cada um dos corpos pode independentemente se mover em relação a seus vizinhos. Assim, pode ser calculada a velocidade de cada elo de forma ordenada a partir da base até a ponta do efetuador. Em resumo, a velocidade do elo $i+1$ será a velocidade do elo i mais os novos componentes de velocidade acrescentados pelo elo $i+1$ (CRAIG, 2012).

Tudo que foi citado sendo levado em consideração tem-se que as velocidades linear e angular, respectivamente, são as equações (2) e (3) a seguir.

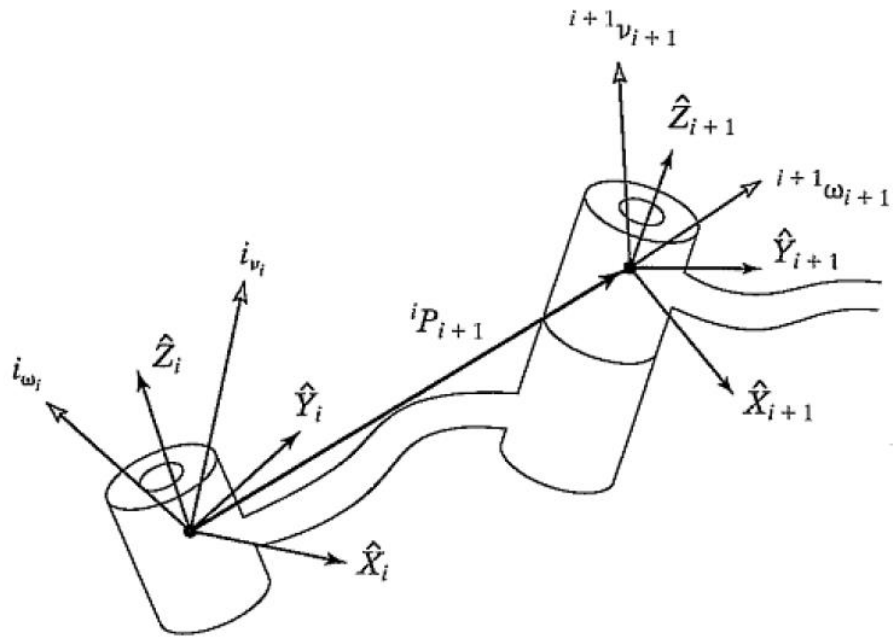
$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_i R ({}^i v_i + {}^i W_i x {}^i P_{i+1}) \quad (2)$$

$${}^{i+1}W_{i+1} = {}^{i+1}_i R {}^i W_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \hat{Z}_{i+1} \quad (3)$$

Para Θ sendo definido pela equação (4).

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Figura 11 – Representação de vetores de velocidade.



Fonte: Robótica (CRAIG, 2012).

4.2 MOMENTO DE INÉRCIA

Para sistemas de um grau de liberdade é comumente falado de massa de corpo rígido. Para movimentos rotacionais é constantemente trabalhado o momento de inércia. Já em corpos livres com liberdade de movimento tridimensional, têm-se infinitos eixos de rotação possíveis. Em resumo, considerando rotação para eixos arbitrários, a distribuição de massa é dada pelo tensor de inércia, que é uma generalização do momento escalar de inércia de um objeto (CRAIG, 2012).

Conhecido também como tensor de inércia é dado como a dificuldade de se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação e está vinculada a distribuição

de massa em torno do eixo de rotação do corpo. Quanto maior o momento de inércia, mais difícil de se alterar seu estado inicial.

A matriz de inércia expressa para o corpo rígido é uma matriz constante independente do movimento do objeto e facilmente calculada (SPONG, 2004). Considerando a densidade de massa do corpo como sendo uma função da posição, $\rho(x, y, z)$, então o tensor de inércia do corpo rígido será calculada como:

$${}^A I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sendo cada tensor escalar definido como:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) * \rho * dv$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) * \rho * dv$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) * \rho * dv$$

$$I_{xy} = \iiint_V x * y * \rho * dv \quad (6)$$

$$I_{xz} = \iiint_V x * z * \rho * dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V y * z * \rho * dv$$

O tensor de inércia é dado como uma função da posição e orientação do sistema de referência. Para verificar como ocorrem as alterações do tensor com as translações do sistema de coordenadas aplica-se o teorema dos eixos paralelos. O teorema é a relação do tensor de inércia do sistema de referência, com origem no centro de massa, com o tensor de inércia em outro sistema. Assim, para o sistema de referência localizado no centro de massa {C} relacionado ao sistema arbitrário {A},

proveniente de translado em relação a {C}, o sistema pode ser expresso como sendo (CRAIG, 2012):

$${}^A I_{zz} = {}^C I_{zz} + m * (x_c^2 + y_c^2) \quad (7)$$

$${}^A I_{xy} = {}^C I_{xy} - m * x_c * y_c \quad (8)$$

O ponto $P_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ é o centro de massa de {A}. Demais momentos de inércia podem ser calculados com as alternâncias entre os termos x, y e z nas equações (7) e (8) (CRAIG, 2012).

Muitos manipuladores possuem geometrias complexas que causam a inviabilidade no uso do grupo de equações descrito em (6). Para que possa ser utilizado um modelo simplificado e suficientemente aproximado a geometria final utilizada nos cálculos viabilizaram o uso das equações sem dificuldade.

4.3 MÉTODO DE LAGRANGE

O método de análise de Lagrange consiste em considerar a conservação de energia no sistema de conservação de momento linear. Assim é possível modelar sistemas mecânicos ao se analisar a energia e trabalho realizado com o intuito de se utilizar grandezas vetoriais a um único tipo de sistemas de coordenadas que, para o caso das equações de Lagrange, é utilizado as coordenadas generalizadas [8].

As coordenadas generalizadas são um conjunto de coordenadas que descrevem um sistema em relação a uma referência sendo o número de coordenadas generalizadas, de forma geral, igual ao número de graus de liberdade de um corpo [8].

Como referida, a formulação de Lagrange se baseia nos cálculos de energia, ou seja, considera a energia potencial (U) e a energia cinética (K) do sistema analisado, como mostrado na equação 9. Para a energia cinética, tem-se a equação 10 a seguir.

$$L = K - U \quad (9)$$

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i W_i^T C_i I_i {}^i W_i \quad (10)$$

Sendo a energia cinética do elo obtida a partir da soma dos componentes definidos, para o primeiro termo, como a energia cinética devido a velocidade linear no centro de massa do corpo analisado e, para segundo termo, como a energia cinética angular desse mesmo corpo. A energia cinética total do manipulador é dada a partir da soma das energias cinéticas de cada componente do mesmo.

Os termos de velocidade linear e angular são definidos em função do ângulo θ e sua velocidade angular de rotação, ou seja, em resumo pode-se descrever que a energia cinética é definida por uma função da posição e da velocidade da junta, $k(\theta, \dot{\theta})$.

A energia potencial do sistema é definida pela equação 11 a seguir:

$$u_i = m_i {}^0 g^T {}^0 P_{C_i} \quad (11)$$

Sendo g e P , respectivamente, o vetor de aceleração da gravidade e o vetor localização do centro de massa do elo i . De mesma forma para a energia cinética, a energia potencial total do manipulador é dada pela soma das energias potenciais e, o componente vetor P , é definido como função do ângulo de junta θ , ou seja, também é definido na forma escalar em função da posição da junta, $P(\theta)$.

Determinadas as energias, tem-se que a equação da energia total define a formulação de Lagrange pela equação 12.

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = k(\theta, \dot{\theta}) - u(\theta) \quad (12)$$

De forma que as equações de movimento para o manipulador são da forma 13 a seguir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \tau \quad (13)$$

Para τ definido com o torque a equação na forma final fica definida pela equação 14.

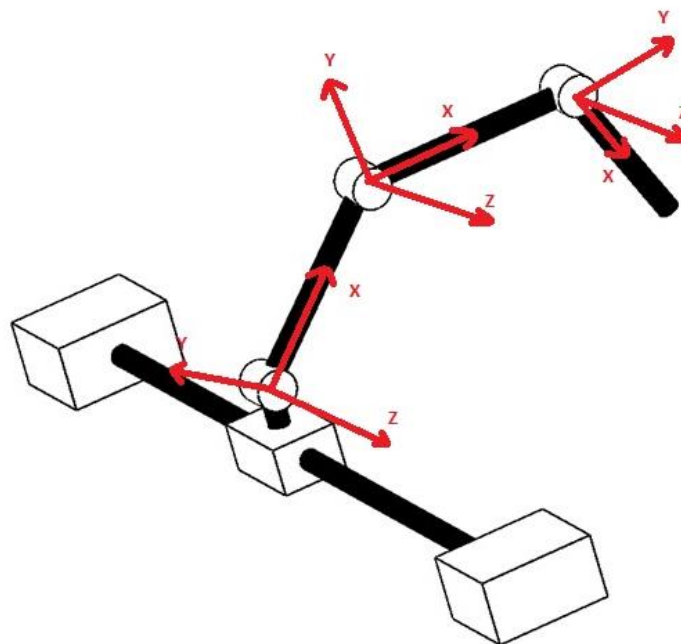
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial k}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = \tau \quad (14)$$

5 RESULTADOS

A partir das formulações expressas tem-se o estudo definitivo ao longo deste capítulo. São buscados os valores para os torques de junta do manipulador de 4 graus de liberdade cuja estrutura já foi definida anteriormente. As análises, estudos, verificações e devidos cálculos foram realizados via softwares de manipulação de dados e programação como o Excel, Matlab, Python e WolframAlpha.

A primeira etapa dos cálculos é a determinação das coordenadas de juntas do manipulador, conforme a Figura 12, para que sejam determinados os parâmetros de DH, apresentados na Tabela 3.

Figura 12 – Representação das coordenadas do braço.



Fonte: Próprio autor.

Tabela 3 – Parâmetros DH do manipulador estudado.

I	α_i	a_i	d_i	Θ_i
1	0	$l_1 = 50 \text{ mm}$	$d_1 = 0$	Θ_1
2	0	$l_2 = 300 \text{ mm}$	$d_2 = 50 \text{ mm}$	Θ_2
3	0	$l_3 = 200 \text{ mm}$	$d_3 = 50 \text{ mm}$	Θ_3
4	0	$l_4 = 200 \text{ mm}$	$d_4 = 50 \text{ mm}$	Θ_4

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com as coordenadas e parâmetros definidos tem-se as matrizes transformação para cada junta, equações 15 a 18. Para reduzir a complexidade de escrita e entendimento, utilizou-se para os termos $\cos\theta_i$, $\sin\theta_i$, $\cos^2\theta_i$ e $\sin^2\theta_i$, indicadores expressos como C_i , S_i , C_i^2 e S_i^2 respectivamente sem o ângulo θ , para i de 1 até 4.

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & l_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & l_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & l_4C_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & l_4S_4 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

As rotacionais transpostas das juntas estão expressas nas equações 19 a 22.

$${}^1_0R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$${}^2_1R^T = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$${}^3_2R^T = \begin{bmatrix} C_3 & S_3 & 0 \\ -S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$${}^4_3R^T = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ -S_4 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Os vetores 0P , 1P , 2P e 3P são retirados da última coluna das matrizes de transformação e são expressos na forma transposta nas equações 23, 24, 25 e 26.

$${}^0P^T = [0 \quad l_1 \quad d_1] \quad (23)$$

$${}^1P^T = [l_2 * C_2 \quad l_2 * S_2 \quad d_2] \quad (24)$$

$${}^2P^T = [l_3 * C_3 \quad l_3 * S_3 \quad d_3] \quad (25)$$

$${}^3P^T = [l_4 * C_4 \quad l_4 * S_4 \quad d_4] \quad (26)$$

Os termos de referência de velocidade linear e angular para os primeiros elementos são respectivamente representados pelas equações 27, 28, e 29.

$${}^0V^T = [0 \quad 0 \quad 0] \quad (27)$$

$${}^0W^T = [0 \quad 0 \quad 0] \quad (28)$$

$${}^1W^T = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_2] \quad (29)$$

A partir das equações de velocidade linear e velocidade angular, respectivamente equações 2 e 3, tem-se os vetores calculados para as velocidades angulares, equações 30 a 34 e os vetores de velocidades lineares, nas equações 35 a 39.

$${}^0W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$${}^1W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$${}^2W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$${}^3W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$${}^4W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$${}^0V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$${}^1V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$${}^2V = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 * \dot{\theta}_2 (S_2^2 + C_2^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$${}^3V = \begin{bmatrix} l_2 * \dot{\theta}_2 * S_3 (S_2^2 + C_2^2) \\ l_3 * (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (S_3^2 + C_3^2) + l_2 * \dot{\theta}_2 * C_3 (S_2^2 + C_2^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$${}^4V = \begin{bmatrix} l_2 * \dot{\theta}_2 * S_3 * C_4 (S_2^2 + C_2^2) + l_3 * S_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (S_3^2 + C_3^2) + l_2 * \dot{\theta}_2 * C_3 * S_4 (S_2^2 + C_2^2) \\ l_3 * C_4 * (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (S_3^2 + C_3^2) - l_2 * \dot{\theta}_2 * S_3 * S_4 (S_2^2 + C_2^2) + l_2 * \dot{\theta}_2 * C_3 * C_4 (S_2^2 + C_2^2) + l_4 * (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) (S_4^2 + C_4^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Com as equações definidas, parte-se para o uso da programação para definir os termos da equação de Lagrange, que de forma simbólica, nos gera as equações derivadas indicadas no anexo 1. Para não gerar conflitos de cálculos com o símbolo de parênteses, substituiu-se os termos (j,i), (i,j) e (j) por X, Y e Z, que sendo considerados constantes nos cálculos, não sofrem alteração na ordem e não interferem nos demais cálculos ainda que ocultados.

Como resultado da formulação do torque temos a Figura 13, a seguir.

Figura 13 – Formulação final para cálculo de Tau.

```
#Torque
tau1 = du1t1;
tau2 = (dk2tp2/tempoY)-dk2t2+du2t2;
tau3 = ((dk3tp2+dk3tp3)/tempoY)-dk3t3+du3t3;
tau4 = ((dk4tp2+dk4tp3+dk4tp4)/tempoY)-(dk4t3+dk4t4)+du4t4;
tau_s = tau1+tau2+tau3+tau4;
tau    =    (dk2tp2+dk3tp2+dk3tp3+dk4tp2+dk4tp3+dk4tp4)/tempoY-
(dk2t2+dk3t3+dk4t3+dk4t4)+(du1t1+du2t2+du3t3+du4t4)
```

Fonte: Próprio autor.

Para que sejam realizados os cálculos, foram determinadas as dimensões do braço, massas definidas e considerações globais adotadas, cujos dados estão informados na Figura 14.

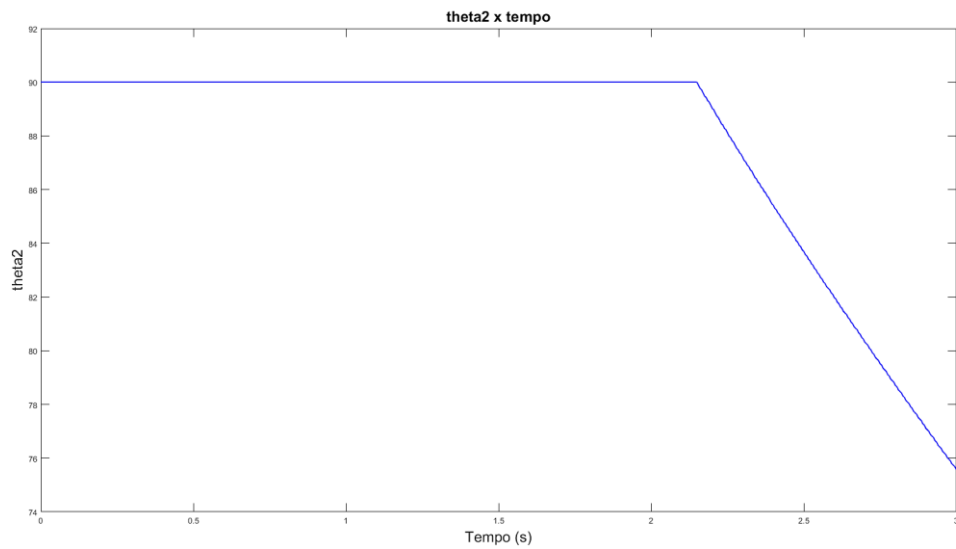
Figura 14 – Definições de massa e dimensionamento utilizados para os cálculos de Tau na forma utilizada pelo programa MATLAB.

```
l1=5/100; %cm
l2=30/100;a=30/100; %cm
l3=20/100;b=20/100; %cm
l4=20/100;c=20/100; %cm
m=130/1000; %kg
r1=5/100; %cm
r2=5.5/100; %cm
m1=62.5/1000; %kg
m2=195/1000; %kg utilizando aproximação do peso do PVC(kg/m)x0.3(m)
m3=m;
m4=m; %g
theta2=pi/2;
Px1=a*cos(theta2);
Py1=a*sin(theta2);
Px2(1)=5/100;%valor do ponto final em x = SOMA O OFFSET DA EXTRUSORA
Py2=0;%valor do ponto final em y = TROCA PELO OFFSET DA EXTRUSORA
l2=0.5*m2*(r1^2+r2^2);
l3=0.5*m3*(r1^2+r2^2);
l4=0.5*m4*(r1^2+r2^2);
```

Fonte: Próprio autor.

Seguindo os cálculos realizados, conforme programa escrito no Anexo 2, obteve-se os resultados dos ângulos de cada junta ao longo do movimento, de forma que os resultados de Θ_2 , Θ_3 , Θ_4 e Θ_5 estão expressos nos diagramas das figuras 15 a 19 respectivamente.

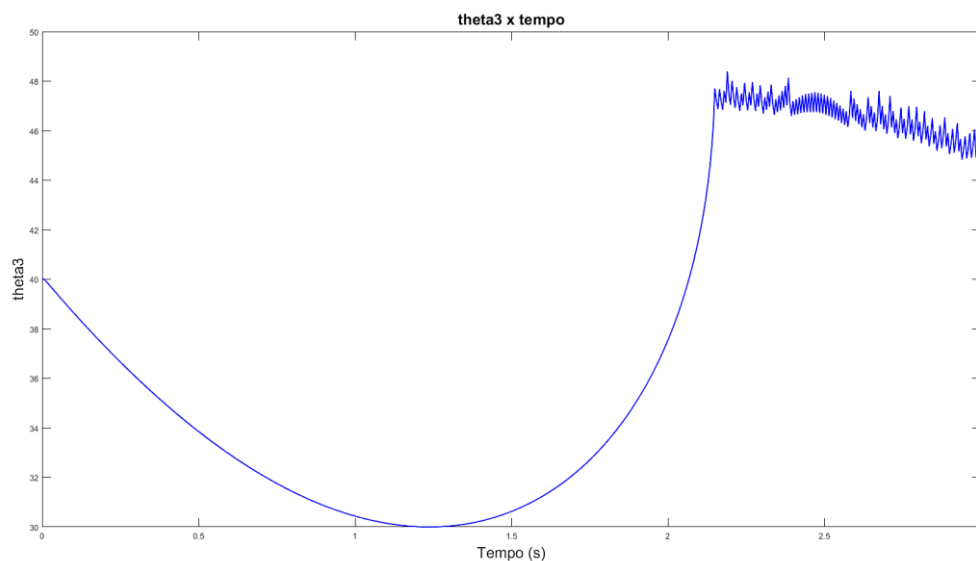
Figura 15 – Variação de Theta 2 conforme o movimento do Braço robótico.



Fonte: Próprio autor.

Para o ângulo θ_2 é possível notar que o mesmo segue constante até pouco depois de 2 segundos, onde começa a decrescer para atender as necessidades de alcance demandadas pelo manipulador para alcançar os pontos finais de seu trabalho.

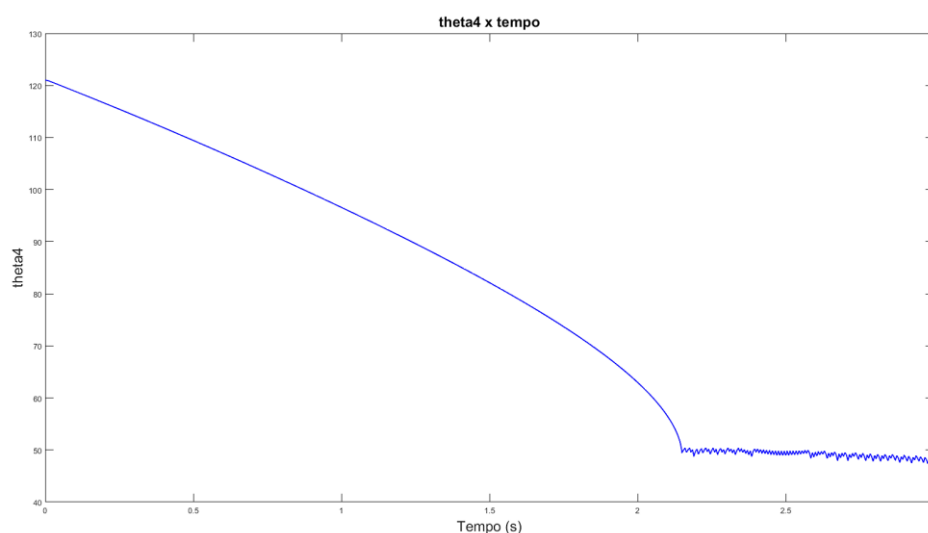
Figura 16 – Variação de Theta 3 conforme o movimento do Braço robótico.



Fonte: Próprio autor.

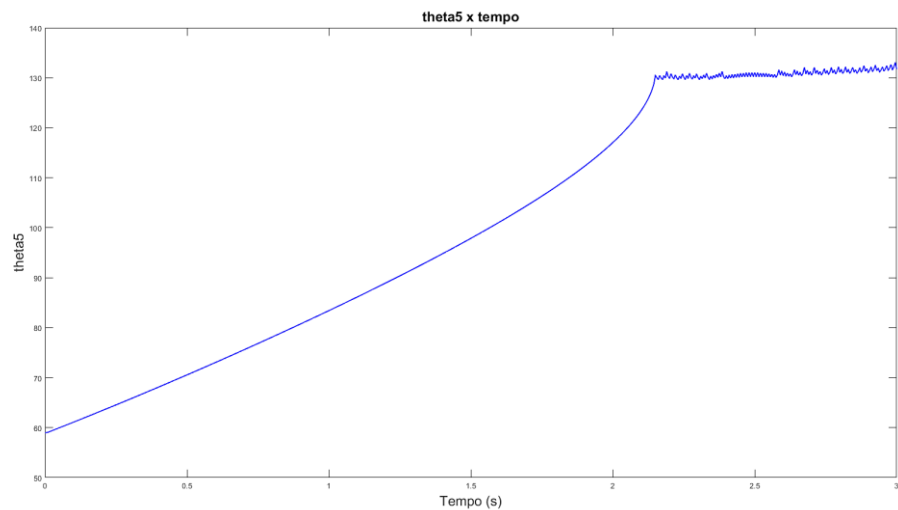
No ângulo Θ_3 é possível observar o decrescimento do ângulo, até aproximadamente 1,2 segundos, de onde começa a crescer novamente até apresentar as oscilações a partir de 2,15 segundos, devido ao movimento do ângulo Θ_2 . De forma clara, o valor de Θ_3 pode ser visto pelo seu oposto, assumindo a forma de um crescimento seguido de um decrescimento, caso a posição e referencial sejam alterados.

Figura 17 – Variação de Theta 4 conforme o movimento do Braço robótico.



Fonte: Próprio autor.

Figura 18 – Variação de Theta 5 conforme o movimento do Braço robótico.

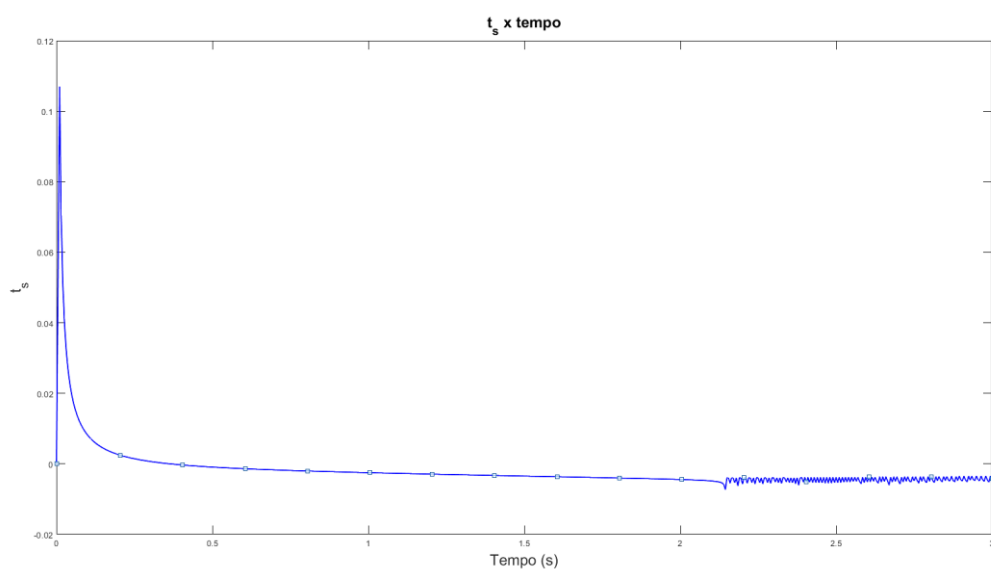


Fonte: Próprio autor.

Para os ângulos Θ_4 e Θ_5 , os ângulos decrescem e crescem, respectivamente, um de forma oposta ao outro, causado pelos efeitos do movimento e referenciais utilizados.

Partindo dos ângulos e conforme as equações que trabalham os ângulos e dimensões, obteve-se os valores para τ , expressos no anexo 3, e o diagrama do τ pelo tempo de movimento registrado na figura 17, a seguir.

Figura 19 – Diagrama dos torques pelo tempo de movimento, conforme o movimento total do Braço robótico e a somatória do torque de cada junta.



Fonte: Próprio autor.

Segundo os dados obtidos, o valor máximo de τ obtido foi de 107,0204 N.mm, considerando o segundo movimento do braço, ou seja, o movimento que não considera termos iniciais que podem conter “ruídos” ou “sujeiras” de geração de dados ao se definir termos, vetores ou matrizes, de modo que não apresentem valores fora dos esperados, como observados no gráfico da figura.

O primeiro pico do braço se dá pelo primeiro movimento do manipulador, onde a somatória dos efeitos da variação angular se somam. Após aproximadamente 2,15 segundos, percebe-se uma oscilação nos valores de torque devido o início da movimentação do ângulo Θ_2 que faz com que os demais ângulos se reajustam e precisam se deslocar para manter o movimento, de forma que compete na alteração inconstante no torque do manipulador.

A partir dos dados obtidos e analisados, é possível definir o motor específico para cada junta ou realizar modificações no dimensionamento para que o projeto seja adequado para braços robóticos com outros objetivos de trabalho, de forma que possuam dimensões específicas para a operação desejada.

O dado final ao qual foi apresentado, ou seja, o τ da somatória dos torques, foi escolhido para expressar exatamente o valor máximo de torque total do sistema, ou seja, o torque ao qual o braço está sujeito ao longo da operação. Desta forma é possível observar que o pico do torque se encontra no início do movimento, caracterizado pela saída do braço do estado de repouso, onde todo o peso do braço está sendo movimentado pelas juntas responsáveis pela mudança de estado.

6 CONCLUSÃO

Com os gráficos e resultados obtidos, é claramente observável que a análise dinâmica da robótica possui inúmeras formas e etapas para ser calculada, passando desde a matemática básica a cálculos avançados de dinâmica de mecanismos. Os cálculos se interagem em uma construção sólida na utilização das ferramentas de lei dos senos, lei dos cossenos, teorema de Pitágoras, equações de velocidades angulares, equações de acelerações angulares e equação de energia de Lagrange.

Como citado, para o cálculo da dinâmica de manipuladores pode-se realizar de diversas maneiras, de forma que, no trabalho em questão, a dinâmica foi calculada pelo método de energia, ao qual utilizando as equações de energia potencial e energia cinética é possível se obter o resultado esperado para o torque. De forma geral, os métodos de energia são capazes de solucionar problemas dinâmicos de diversas naturezas como o caso de mecanismos de barras, manipuladores e pêndulos. De modo geral, a utilização de métodos de energia pode trazer resultados de forma mais rápida e com menor quantidade de cálculos simultâneos, ao passo que se utiliza de cálculos individuais conforme os elos e eixos.

De forma geral, com os resultados obtidos, é possível observar um pico de torque no início do movimento do braço, que pode ser justificado pela saída do braço de sua posição de repouso, onde seus elos estão “guardados” em posição de torre, na altura do primeiro elo. Com este pico pode-se definir o torque mínimo necessário dos motores a serem utilizados em uma possível extensão do projeto.

Este trabalho, tem seu objetivo alcançado. Levando-se em conta que definições iniciais precisaram ser feitas para não se obter os, ditos anteriormente, resultados infinitos, foi possível mostrar a capacidade de se calcular a dinâmica de um manipulador complexo por meio de programação de forma rápida e mista com a utilização de Python para obtenção de termos derivados e MatLAB para os cálculos dos ângulos, velocidades, acelerações e o valor do torque.

Assim fica como indicação, a partir deste trabalho, a possibilidade de estudo a construção do braço, por elementos de máquinas, sistemas elétricos e eletrônicos de controle, programação para movimentação e controle e ainda a possibilidade de emprego de sistemas hidráulicos ou pneumáticos para a movimentação do

manipulador, que, a princípio foi idealizado com o intuito de ser uma impressora 3D e intercambiável para um braço CNC.

REFERÊNCIAS

TSAI, Lung-Wen. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators, John Wiley & Sons Inc, 2008.

LEWIS, Frank L., Dawson, Darren M., Abdallah, Chaouki T. Robot Manipulator Control Theory and Practice, 2ª edição, CRC Press, 2003

CRAIG, John J., Robótica / John J. Craig; tradução Heloísa Coimbra de Souza; revisão técnica Reinaldo Augusto da Costa Bianchi. – 3. ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012

SPONG, M. W e VIDYASAGAR, M. Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons, Second Edition, New York, 2004;

GROOVER, Mikell P. Robótica: Tecnologia e Programação. McGraw-Hill, 1998;

DUMBÁ, R., Robótica: Teoria e Prática, disponível em <<https://www.passeidireto.com/arquivo/46266746/robotica-teoria-pratica>>, acesso em 18 jul. 2019;

BORGES, Victor H. C., Cinemática Inversa Do Manipulador Robótico De Impressora 3D com 4 Graus De Liberdade, Ilha Solteira, 2019.

<https://www.aerodinamica.com/pt/tubos-e-conexoes-pvc-u-schedule-80/tubo-pvc-u-schedule-80>, acessado pela última vez em 15/03/2022 às 21:39.

Anexo 1 – Programa desenvolvido para gerar as derivadas dos Torques

```
@author: Rafael  
"""
```

```
from sympy import *  
import numpy as np
```

```
var('theta1X,AX,theta3X,theta4X,tp2Z,tp3Z,tp4Z,I1,I2,I3,I4,m1,m2,m3,m4,l1,l2,l3,l4,tempoY')
```

```
#Energia Cinética  
k1 = 0  
k2 = 0.5*(m2*AX**2*l2**2 + I2*(tp2Z**2))  
k3 = 0.5*m3*(2*tp2Z*l2**2 + 2*l2**2*tp2Z**2*cos(theta3X) +  
2*l2**2*tp2Z*tp3Z*cos(theta3X) + 2*l2**2*tp2Z*tp3Z + l2**2*tp3Z**2) +  
0.5*I3*(tp2Z**2 + 2*tp2Z*tp3Z + tp3Z**2)  
k4 = 0.5*m4*(tp2Z*l2*cos(theta4X) - AX*l2*sin(theta3X)*sin(theta4X)  
+ l3*(tp2Z+tp3Z)*cos(theta4X) + l2*(tp2Z+tp3Z+tp4Z)**2 +  
(tp2Z*l2*sin(theta3X)*cos(theta4X) + tp2Z*l2*cos(theta3X) +  
l3*(tp2Z+tp3Z)*sin(theta4X) + sin(theta4X)**2 +  
0.5*I4*(tp2Z+tp3Z+tp4Z)**2
```

```
#Energia Potencial  
u1 = m1*l1*9.81*theta1X  
u2 = 2*9.81*m2*sin(AX)*cos(AX)  
u3 = 2*9.81*m3*l3*sin(theta3X)*cos(theta3X)  
u4 = 2*9.81*m4*l4*sin(theta4X)*cos(theta4X)
```

```
#Derivada de K2 por theta ponto 2 e Theta 2'  
dk2tp2 = diff(k2,tp2Z)  
dk2t2 = diff(k2,AX)
```

```
#Derivada de K3 por theta ponto 2 e 3 e Theta 3  
dk3tp2 = diff(k3,tp2Z)  
dk3tp3 = diff(k3,tp3Z)  
dk3t3 = diff(k3,theta3X)
```

```
#Derivada de K4 por theta ponto 2, 3 e 4 e Theta 3 e 4  
dk4tp2 = diff(k4,tp2Z)  
dk4tp3 = diff(k4,tp3Z)  
dk4tp4 = diff(k4,tp4Z)  
dk4t3 = diff(k4,theta3X)  
dk4t4 = diff(k4,theta4X)
```

```
#Derivada de U n por theta n  
du1t1 = diff(u1,theta1X)  
du2t2 = diff(u2,AX)  
du3t3 = diff(u3,theta3X)  
du4t4 = diff(u4,theta4X)
```

```
#Torque  
tau1 = du1t1;  
tau2 = (dk2tp2/tempoY)-dk2t2+du2t2;  
tau3 = ((dk3tp2+dk3tp3)/tempoY)-dk3t3+du3t3;  
tau4 = ((dk4tp2+dk4tp3+dk4tp4)/tempoY)-(dk4t3+dk4t4)+du4t4;  
tau_s = tau1+tau2+tau3+tau4;
```



```

tau      =      (dk2tp2+dk3tp2+dk3tp3+dk4tp2+dk4tp3+dk4tp4) / tempoY-
(dk2t2+dk3t3+dk4t3+dk4t4) + (du1t1+du2t2+du3t3+du4t4)
print ('tau1 =', tau1)
print ('tau2 =', tau2)
print ('tau3 =', tau3)
print ('tau4 =', tau4)

if (tau==tau_s):
    print("verdade");
else:
    print("falso");

```

Anexo 2 – Programa desenvolvido para realizar os cálculos e geração de dados referentes ao movimento do Braço robótico.

```
clc;
```

```
clear all;
```

```
tic;
```

```
u=300/0.5; %Pontos por passada
```

```
v=3; %Passadas pelo plano
```

```
l1=5/100; %cm
```

```
l2=30/100;a=30/100; %cm
```

```
l3=20/100;b=20/100; %cm
```

```
l4=20/100;c=20/100; %cm
```

```
m=130/1000; %kg
```

```
r1=5/100; %cm
```

```
r2=5.5/100; %cm
```

```
m1=62.5/1000; %kg
```

```
m2=195/1000; %kg utilizando aproximação do peso do PVC(kg/m)x0.3(m)
```

```
m3=m;
```

```
m4=m; %g
```

```
theta2=pi/2;
```

```
Px1=a*cos(theta2);
```

```
Py1=a*sin(theta2);
```

```
Px2(1)=5/100;%valor do ponto final em x = SOMA O OFFSET DA  
EXTRUSORA
```

```

Py2=0;%valor do ponto final em y = TROCA PELO OFFSET DA EXTRUSORA

l2=0.5*m2*(r1^2+r2^2);

l3=0.5*m3*(r1^2+r2^2);

l4=0.5*m4*(r1^2+r2^2);


tempo_desl=1; %deslocamento inicial pra começar a impressao no 50mm
(60mm/s em impressão e 100mm/s de retorno)

fati=3/(u);

fatm=.999/(u);

tempo=
zeros(u,v);tau=zeros(u,v);tp2=zeros(u,v);tp3=zeros(u,v);tp4=zeros(u,v);tp5=zeros(u,v
); %alocação de memória

for i=1:1:v

    Py2(i)=Py2(1);

    theta2=pi/2;

    Px1=a*cos(theta2);

    Py1=a*sin(theta2);

    for j=1:1:u

        %Calculo de alpha

        distP1P2(j,i)=((Px1-Px2(j))^2+(Py1-Py2(i))^2)^0.5;

        while(distP1P2(j,i)>40/100 && theta2>pi/4)

            theta2=theta2-0.001;

            Px1=a*cos(theta2);

            Py1=a*sin(theta2);

            distP1P2(j,i)=((Px1-Px2(j))^2+(Py1-Py2(i))^2)^0.5;

```

end

$c^2 = b^2 + \text{distP1P2}^2 - 2*b*\text{distP1P2}*\cos(\alpha)$

$\alpha = \arccos((b^2 + \text{distP1P2}(j,i)^2 - c^2)/(2*b*\text{distP1P2}(j,i)))$;

$\alpha_{\text{mem}}(j,i) = \alpha$;

%Calculo de beta

$\text{distX}(j) = P_{x2}(j) - P_{x1}$;

$\text{distY}(i) = P_{y1} - P_{y2}(i)$;

$\tan(\beta) = \text{distX}/\text{distY}$

if($\text{distY}(i) == 0$)

$\beta = \pi/2$;

else

$\beta = \arctan(\text{distY}(i)/\text{distX}(j))$;

end

%Calculo theta3

$\alpha = \beta + \theta_3$

$\theta_3(j,i) = \alpha - \beta$;

$t_3(j,i) = \theta_3(j,i)$;

%Calculo gamma

$\gamma = \arccos((b^2 + c^2 - \text{distP1P2}(j,i)^2)/(2*b*c))$;

%Calculo theta5

$\theta_5(j,i) = \theta_3(j,i) + \gamma$;

$t_5(j,i) = \theta_5(j,i)$;

$\theta_4(j,i) = 2*\pi - (\theta_5(j,i) + \pi)$;

$t_4(j,i) = \theta_4(j,i)$;

```

if(Px2(j)==0 && Py2(i)==300/1000)

    theta5(j,i)=-pi/2;

    t5(j,i)=theta5(j,i);

end

Px2(j+1)=Px2(j)+(0.5/1000);

t2(j,i)=theta2;

end

end

for i=1:1:v

    for j=1:1:u

        %Calculo do tempo ponto a ponto em cada linha

        if (j<2)

            tempo(j,i)=tempo_desl;

        else

            tempo(j,i)=tempo_desl+j*fati;

        end

        if (j>2)

            tp2(j-1,i)=(t2(j,i)-t2(j-1,i))/(tempo(j,i)-tempo(j-1,i));

            tp3(j-1,i)=(t3(j,i)-t3(j-1,i))/(tempo(j,i)-tempo(j-1,i));

            tp4(j-1,i)=(t4(j,i)-t4(j-1,i))/(tempo(j,i)-tempo(j-1,i));

            tp5(j-1,i)=(t5(j,i)-t5(j-1,i))/(tempo(j,i)-tempo(j-1,i));

        end

        tau1(1,i)=0;tau2(1,i)=0;tau3(1,i)=0;tau4(1,i)=0;tau_s(1,i)=0;tau(1,i)=0;

        tau1(j,i) = 9.81*l1*m1;

```

$$\tau_{2(j,i)} = -1.0 \cdot t_{2(j,i)} \cdot l_2^2 \cdot m_2 + 1.0 \cdot l_2^2 \cdot tp_2(j) / (\text{tempo}(j,i) - 1) - 19.62 \cdot m_2 \cdot \sin(t_{2(j,i)})^2 + 19.62 \cdot m_2 \cdot \cos(t_{2(j,i)})^2;$$

$$\begin{aligned} \tau_{3(j,i)} = & -19.62 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)})^2 + 19.62 \cdot l_3 \cdot m_3 \cdot \cos(\theta_{3(j,i)})^2 - \\ & 0.5 \cdot m_3 \cdot (-2 \cdot l_2^2 \cdot tp_2(j)^2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) - 2 \cdot l_2^2 \cdot tp_2(j) \cdot tp_3(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)})) + \\ & (1.0 \cdot l_3 \cdot (2 \cdot tp_2(j) + 2 \cdot tp_3(j)) + 0.5 \cdot m_3 \cdot (2 \cdot l_2^2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + 2 \cdot l_2^2 \cdot tp_2(j) + \\ & 2 \cdot l_2^2 \cdot tp_3(j)) + 0.5 \cdot m_3 \cdot (4 \cdot l_2^2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + 2 \cdot l_2^2 \cdot tp_3(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + \\ & 2 \cdot l_2^2 \cdot tp_3(j) + 2 \cdot l_2^2)) / (\text{tempo}(j,i) - 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{4(j,i)} = & 1.0 \cdot t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot m_4 \cdot (-t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + \\ & l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j) + tp_4(j)) + l_3 \cdot (tp_2(j) + \\ & tp_3(j)) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) - 19.62 \cdot l_4 \cdot m_4 \cdot \sin(\theta_{4(j,i)})^2 + \\ & 19.62 \cdot l_4 \cdot m_4 \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})^2 - 0.5 \cdot m_4 \cdot (-2 \cdot t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) - \\ & 2 \cdot l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) - 2 \cdot l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)})) \cdot (- \\ & t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j) + \\ & tp_4(j)) + l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) - (-2 \cdot l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) + \\ & 2 \cdot l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) \cdot (l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + \\ & l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + \sin(\theta_{4(j,i)})) - (- \\ & 2 \cdot l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + 2 \cdot l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + \\ & 2 \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) \cdot (l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + \\ & l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + \sin(\theta_{4(j,i)})) + (1.5 \cdot l_4 \cdot (2 \cdot tp_2(j) + 2 \cdot tp_3(j) + \\ & 2 \cdot tp_4(j)) + 1.0 \cdot l_2 \cdot m_4 \cdot (-t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) \\ & + l_2 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j) + tp_4(j)) + l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) + \\ & 2 \cdot l_3 \cdot (l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + l_3 \cdot (tp_2(j) + \\ & tp_3(j)) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + \sin(\theta_{4(j,i)})) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + 0.5 \cdot m_4 \cdot (2 \cdot l_2 + \\ & 2 \cdot l_3 \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) \cdot (-t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) \\ & + l_2 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j) + tp_4(j)) + l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) + \\ & 0.5 \cdot m_4 \cdot (2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) \cdot (- \\ & t_{2(j,i)} \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + l_2 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j) + \\ & tp_4(j)) + l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)})) + (2 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + \\ & 2 \cdot l_2 \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + 2 \cdot l_3 \cdot \sin(\theta_{4(j,i)})) \cdot (l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \sin(\theta_{3(j,i)}) \cdot \cos(\theta_{4(j,i)}) + \\ & l_2 \cdot tp_2(j) \cdot \cos(\theta_{3(j,i)}) + l_3 \cdot (tp_2(j) + tp_3(j)) \cdot \sin(\theta_{4(j,i)}) + \sin(\theta_{4(j,i)})) / (\text{tempo}(j,i) - 1); \end{aligned}$$

$$\tau_{s(j,i)} = \tau_{1(j,i)} + \tau_{2(j,i)} + \tau_{3(j,i)} + \tau_{4(j,i)};$$

$$\begin{aligned} \tau(j,i) = & -1.0*t2(j,i)*l2^2*m2 + 1.0*t2(j,i)*l2*m4*(-t2(j,i)*l2*\sin(t3(j,i))*\sin(t4(j,i)) \\ & + l2*tp2(j,i)*\cos(t4(j,i)) + l2*(tp2(j,i) + tp3(j,i) + tp4(j,i)) + l3*(tp2(j,i) + \\ & tp3(j,i))*\cos(t4(j,i)))*\sin(t4(j,i))*\cos(t3(j,i)) + 9.81*l1*m1 - 19.62*l3*m3*\sin(t3(j,i))^2 + \\ & 19.62*l3*m3*\cos(t3(j,i))^2 - 19.62*l4*m4*\sin(t4(j,i))^2 + 19.62*l4*m4*\cos(t4(j,i))^2 - \\ & 19.62*m2*\sin(t2(j,i))^2 + 19.62*m2*\cos(t2(j,i))^2 - 0.5*m3*(-2*l2^2*tp2(j,i)^2*\sin(t3(j,i)) \\ & - 2*l2^2*tp2(j,i)*tp3(j,i)*\sin(t3(j,i))) - 0.5*m4*(-2*t2(j,i)*l2*\sin(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)) - \\ & 2*l2*tp2(j,i)*\sin(t4(j,i)) - 2*l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\sin(t4(j,i)))*(- \\ & t2(j,i)*l2*\sin(t3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + l2*tp2(j,i)*\cos(t4(j,i)) + l2*(tp2(j,i) + tp3(j,i) + tp4(j,i)) + \\ & l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\cos(t4(j,i)) - (-2*l2*tp2(j,i)*\sin(t3(j,i)) + \\ & 2*l2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)))*(l2*tp2(j,i)*\sin(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)) + \\ & l2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i)) + l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + \sin(t4(j,i))) - (- \\ & 2*l2*tp2(j,i)*\sin(t3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + 2*l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\cos(t4(j,i)) + \\ & 2*\cos(t4(j,i)))*(l2*tp2(j,i)*\sin(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)) + l2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i)) + l3*(tp2(j,i) + \\ & tp3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + \sin(t4(j,i))) + (1.0*l2*tp2(j,i) + 1.0*l3*(2*tp2(j,i) + 2*tp3(j,i)) + \\ & 1.5*l4*(2*tp2(j,i) + 2*tp3(j,i) + 2*tp4(j,i)) + 1.0*l2*m4*(-t2(j,i)*l2*\sin(t3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + \\ & l2*tp2(j,i)*\cos(t4(j,i)) + l2*(tp2(j,i) + tp3(j,i) + tp4(j,i)) + l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\cos(t4(j,i))) + \\ & 2*l3*(l2*tp2(j,i)*\sin(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)) + l2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i)) + l3*(tp2(j,i) + \\ & tp3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + \sin(t4(j,i)))*\sin(t4(j,i)) + 0.5*m3*(2*l2^2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i)) + \\ & 2*l2^2*tp2(j,i) + 2*l2^2*tp3(j,i)) + 0.5*m3*(4*l2^2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i)) + \\ & 2*l2^2*tp3(j,i)*\cos(t3(j,i)) + 2*l2^2*tp3(j,i) + 2*l2^2) + 0.5*m4*(2*l2 + 2*l3*\cos(t4(j,i)))*(- \\ & t2(j,i)*l2*\sin(t3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + l2*tp2(j,i)*\cos(t4(j,i)) + l2*(tp2(j,i) + tp3(j,i) + tp4(j,i)) + \\ & l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\cos(t4(j,i))) + 0.5*m4*(2*l2*\cos(t4(j,i)) + 2*l2 + 2*l3*\cos(t4(j,i)))*(- \\ & t2(j,i)*l2*\sin(t3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + l2*tp2(j,i)*\cos(t4(j,i)) + l2*(tp2(j,i) + tp3(j,i) + tp4(j,i)) + \\ & l3*(tp2(j,i) + tp3(j,i))*\cos(t4(j,i))) + (2*l2*\sin(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)) + 2*l2*\cos(t3(j,i)) + \\ & 2*l3*\sin(t4(j,i)))*(l2*tp2(j,i)*\sin(t3(j,i))*\cos(t4(j,i)) + l2*tp2(j,i)*\cos(t3(j,i)) + l3*(tp2(j,i) + \\ & tp3(j,i))*\sin(t4(j,i)) + \sin(t4(j,i))))/(tempo(j,i)-1); \end{aligned}$$

end

end

tau_max=max(tau)

taus_max=max(tau_s)

tau_min=min(tau)

```
taus_min=min(tau_s)

theta2deg = t2 * 57.2958;

theta3deg = t3 * 57.2958;

theta4deg = t4 * 57.2958;

theta5deg = t5 * 57.2958;
```

```
toc;
```

```
set(0, "defaultaxesfontname", "Helvetica")
```

```
figure();
```

```
plot(tempo(:,2),tau_s(:,2)/1000);
```

```
title('t_s x tempo');
```

```
xlabel('Tempo (s)');
```

```
ylabel('t_s');
```

```
figure();
```

```
plot(tempo(:,2),theta2deg(:,2));
```

```
title('theta2 x tempo');
```

```
xlabel('Tempo (s)');
```

```
ylabel('theta2');
```

```
figure();
```

```
plot(tempo(:,2),-theta3deg(:,2));
```

```
title('theta3 x tempo');
```

```
xlabel('Tempo (s)');
```

```
ylabel('theta3');
```



```
figure();  
  
plot(tempo(:,2),theta4deg(:,2));  
  
title('theta4 x tempo');  
  
xlabel('Tempo (s)');  
  
ylabel('theta4');  
  
figure();  
  
plot(tempo(:,2),theta5deg(:,2));  
  
title('theta5 x tempo');  
  
xlabel('Tempo (s)');  
  
ylabel('theta5');
```

Anexo 3 – Dados obtidos a partir dos cálculos de Tau

Conforme observado na figura 19, os dados expressos são dados pela função do torque pelo tempo, onde tem-se o primeiro movimento, afetado por possíveis influências das definições iniciais realizadas na programação, mas que nos demais movimentos apresentam resultados esperados condizente com os efeitos esperados do movimento do manipulador.

Tempo (s)	Movimento 1 (N.mm)	Movimento 2 (N.mm)	Tempo (s)	Movimento 1 (N.mm)	Movimento 2 (N.mm)	Tempo (s)	Movimento 1 (N.mm)	Movimento 2 (N.mm)
0	0,000	0,000	1,005	-2,467	-2,517	2,005	-4,321	-4,456
0,01	115,219	107,020	1,01	-2,479	-2,528	2,01	-4,330	-4,470
0,015	75,897	70,404	1,015	-2,490	-2,539	2,015	-4,338	-4,484
0,02	56,234	52,095	1,02	-2,502	-2,550	2,02	-4,347	-4,499
0,025	44,435	41,109	1,025	-2,513	-2,560	2,025	-4,356	-4,514
0,03	36,568	33,784	1,03	-2,525	-2,571	2,03	-4,365	-4,529
0,035	30,948	28,551	1,035	-2,536	-2,582	2,035	-4,374	-4,545
0,04	26,732	24,626	1,04	-2,548	-2,592	2,04	-4,383	-4,561
0,045	23,453	21,572	1,045	-2,559	-2,603	2,045	-4,392	-4,578
0,05	20,829	19,129	1,05	-2,570	-2,614	2,05	-4,401	-4,596
0,055	18,681	17,130	1,055	-2,582	-2,624	2,055	-4,410	-4,615
0,06	16,891	15,463	1,06	-2,593	-2,635	2,06	-4,419	-4,634
0,065	15,376	14,053	1,065	-2,604	-2,645	2,065	-4,429	-4,655
0,07	14,076	12,843	1,07	-2,615	-2,656	2,07	-4,438	-4,677
0,075	12,950	11,795	1,075	-2,626	-2,666	2,075	-4,448	-4,700
0,08	11,964	10,877	1,08	-2,637	-2,677	2,08	-4,458	-4,725
0,085	11,094	10,067	1,085	-2,648	-2,687	2,085	-4,468	-4,752
0,09	10,319	9,346	1,09	-2,659	-2,697	2,09	-4,478	-4,781
0,095	9,627	8,702	1,095	-2,670	-2,708	2,095	-4,488	-4,813
0,1	9,003	8,121	1,1	-2,681	-2,718	2,1	-4,499	-4,849
0,105	8,438	7,595	1,105	-2,692	-2,728	2,105	-4,509	-4,890
0,11	7,924	7,117	1,11	-2,703	-2,738	2,11	-4,521	-4,938
0,115	7,455	6,681	1,115	-2,714	-2,749	2,115	-4,532	-4,995
0,12	7,024	6,280	1,12	-2,724	-2,759	2,12	-4,544	-5,065
0,125	6,628	5,911	1,125	-2,735	-2,769	2,125	-4,557	-5,155
0,13	6,261	5,571	1,13	-2,746	-2,779	2,13	-4,571	-5,279
0,135	5,922	5,255	1,135	-2,756	-2,789	2,135	-4,585	-5,473
0,14	5,607	4,962	1,14	-2,767	-2,799	2,14	-4,602	-5,845
0,145	5,313	4,689	1,145	-2,778	-2,809	2,145	-4,622	-7,337
0,15	5,039	4,434	1,15	-2,788	-2,819	2,15	-4,655	-3,996
0,155	4,782	4,195	1,155	-2,799	-2,829	2,155	-4,646	-4,038
0,16	4,540	3,970	1,16	-2,809	-2,839	2,16	-4,640	-5,424
0,165	4,314	3,760	1,165	-2,820	-2,849	2,165	-4,656	-3,995
0,17	4,100	3,561	1,17	-2,830	-2,859	2,17	-4,647	-4,036

0,175	3,898	3,374	1,175	-2,840	-2,869	2,175	-4,640	-5,365
0,18	3,708	3,197	1,18	-2,851	-2,878	2,18	-4,656	-3,998
0,185	3,527	3,029	1,185	-2,861	-2,888	2,185	-4,647	-6,283
0,19	3,356	2,870	1,19	-2,871	-2,898	2,19	-4,671	-3,937
0,195	3,193	2,719	1,195	-2,882	-2,908	2,195	-4,654	-4,003
0,2	3,038	2,575	1,2	-2,892	-2,918	2,2	-4,646	-5,745
0,205	2,891	2,438	1,205	-2,902	-2,927	2,205	-4,665	-3,949
0,21	2,751	2,308	1,21	-2,912	-2,937	2,21	-4,652	-4,010
0,215	2,616	2,183	1,215	-2,922	-2,947	2,215	-4,644	-5,475
0,22	2,488	2,064	1,22	-2,933	-2,956	2,22	-4,660	-3,969
0,225	2,365	1,950	1,225	-2,943	-2,966	2,225	-4,649	-4,018
0,23	2,248	1,841	1,23	-2,953	-2,976	2,23	-4,641	-5,289
0,235	2,135	1,736	1,235	-2,963	-2,985	2,235	-4,655	-3,987
0,24	2,027	1,636	1,24	-2,973	-2,995	2,24	-4,646	-5,653
0,245	1,923	1,539	1,245	-2,983	-3,005	2,245	-4,663	-3,943
0,25	1,823	1,447	1,25	-2,993	-3,014	2,25	-4,650	-4,001
0,255	1,727	1,357	1,255	-3,003	-3,024	2,255	-4,641	-5,327
0,26	1,634	1,271	1,26	-3,013	-3,033	2,26	-4,655	-3,971
0,265	1,544	1,189	1,265	-3,022	-3,043	2,265	-4,645	-5,701
0,27	1,458	1,109	1,27	-3,032	-3,052	2,27	-4,662	-3,931
0,275	1,375	1,031	1,275	-3,042	-3,062	2,275	-4,648	-3,991
0,28	1,295	0,957	1,28	-3,052	-3,071	2,28	-4,639	-5,291
0,285	1,217	0,885	1,285	-3,062	-3,080	2,285	-4,652	-3,964
0,29	1,142	0,815	1,29	-3,072	-3,090	2,29	-4,641	-5,557
0,295	1,069	0,748	1,295	-3,081	-3,099	2,295	-4,657	-3,931
0,3	0,998	0,682	1,3	-3,091	-3,109	2,3	-4,644	-3,987
0,305	0,930	0,619	1,305	-3,101	-3,118	2,305	-4,634	-5,196
0,31	0,864	0,558	1,31	-3,110	-3,127	2,31	-4,646	-3,965
0,315	0,799	0,498	1,315	-3,120	-3,137	2,315	-4,635	-5,345
0,32	0,737	0,440	1,32	-3,130	-3,146	2,32	-4,649	-3,940
0,325	0,676	0,384	1,325	-3,139	-3,155	2,325	-4,637	-5,607
0,33	0,617	0,330	1,33	-3,149	-3,165	2,33	-4,653	-3,913
0,335	0,560	0,276	1,335	-3,158	-3,174	2,335	-4,638	-3,970
0,34	0,504	0,225	1,34	-3,168	-3,183	2,34	-4,627	-5,155
0,345	0,450	0,175	1,345	-3,178	-3,193	2,345	-4,639	-3,951
0,35	0,397	0,126	1,35	-3,187	-3,202	2,35	-4,627	-5,252
0,355	0,345	0,078	1,355	-3,197	-3,211	2,355	-4,640	-3,932
0,36	0,295	0,032	1,36	-3,206	-3,220	2,36	-4,627	-5,384
0,365	0,246	-0,014	1,365	-3,215	-3,229	2,365	-4,641	-3,912
0,37	0,198	-0,058	1,37	-3,225	-3,239	2,37	-4,627	-5,585
0,375	0,151	-0,101	1,375	-3,234	-3,248	2,375	-4,642	-3,894
0,38	0,106	-0,143	1,38	-3,244	-3,257	2,38	-4,626	-6,011
0,385	0,061	-0,184	1,385	-3,253	-3,266	2,385	-4,645	-3,896
0,39	0,018	-0,225	1,39	-3,262	-3,275	2,39	-4,625	-3,935
0,395	-0,025	-0,264	1,395	-3,272	-3,285	2,395	-4,614	-5,128

0,4	-0,066	-0,302	1,4	-3,281	-3,294	2,4	-4,624	-3,921
0,405	-0,107	-0,340	1,405	-3,290	-3,303	2,405	-4,612	-5,175
0,41	-0,147	-0,377	1,41	-3,300	-3,312	2,41	-4,623	-3,908
0,415	-0,186	-0,413	1,415	-3,309	-3,321	2,415	-4,610	-5,224
0,42	-0,224	-0,448	1,42	-3,318	-3,330	2,42	-4,621	-3,895
0,425	-0,262	-0,482	1,425	-3,327	-3,339	2,425	-4,608	-5,273
0,43	-0,298	-0,516	1,43	-3,336	-3,348	2,43	-4,619	-3,884
0,435	-0,334	-0,549	1,435	-3,346	-3,357	2,435	-4,605	-5,321
0,44	-0,369	-0,582	1,44	-3,355	-3,366	2,44	-4,617	-3,873
0,445	-0,404	-0,614	1,445	-3,364	-3,376	2,445	-4,602	-5,363
0,45	-0,438	-0,645	1,45	-3,373	-3,385	2,45	-4,614	-3,864
0,455	-0,471	-0,675	1,455	-3,382	-3,394	2,455	-4,599	-5,397
0,46	-0,504	-0,706	1,46	-3,391	-3,403	2,46	-4,611	-3,856
0,465	-0,536	-0,735	1,465	-3,400	-3,412	2,465	-4,595	-5,417
0,47	-0,567	-0,764	1,47	-3,409	-3,421	2,47	-4,608	-3,849
0,475	-0,598	-0,793	1,475	-3,418	-3,430	2,475	-4,591	-5,419
0,48	-0,629	-0,821	1,48	-3,428	-3,439	2,48	-4,604	-3,843
0,485	-0,658	-0,848	1,485	-3,437	-3,448	2,485	-4,587	-5,403
0,49	-0,688	-0,875	1,49	-3,446	-3,457	2,49	-4,599	-3,837
0,495	-0,717	-0,902	1,495	-3,454	-3,466	2,495	-4,582	-5,370
0,5	-0,745	-0,928	1,5	-3,463	-3,475	2,5	-4,594	-3,832
0,505	-0,773	-0,954	1,505	-3,472	-3,484	2,505	-4,577	-5,323
0,51	-0,801	-0,979	1,51	-3,481	-3,493	2,51	-4,589	-3,827
0,515	-0,828	-1,004	1,515	-3,490	-3,502	2,515	-4,572	-5,267
0,52	-0,854	-1,029	1,52	-3,499	-3,511	2,52	-4,583	-3,823
0,525	-0,881	-1,053	1,525	-3,508	-3,520	2,525	-4,566	-5,206
0,53	-0,907	-1,077	1,53	-3,517	-3,529	2,53	-4,577	-3,820
0,535	-0,932	-1,100	1,535	-3,526	-3,537	2,535	-4,561	-5,145
0,54	-0,957	-1,123	1,54	-3,535	-3,546	2,54	-4,570	-3,818
0,545	-0,982	-1,146	1,545	-3,543	-3,555	2,545	-4,554	-5,084
0,55	-1,007	-1,169	1,55	-3,552	-3,564	2,55	-4,563	-3,816
0,555	-1,031	-1,191	1,555	-3,561	-3,573	2,555	-4,548	-5,025
0,56	-1,054	-1,213	1,56	-3,570	-3,582	2,56	-4,556	-3,815
0,565	-1,078	-1,234	1,565	-3,579	-3,591	2,565	-4,542	-4,970
0,57	-1,101	-1,256	1,57	-3,587	-3,600	2,57	-4,549	-3,814
0,575	-1,124	-1,277	1,575	-3,596	-3,609	2,575	-4,535	-4,918
0,58	-1,146	-1,298	1,58	-3,605	-3,618	2,58	-4,542	-5,643
0,585	-1,169	-1,318	1,585	-3,614	-3,627	2,585	-4,555	-3,789
0,59	-1,191	-1,338	1,59	-3,622	-3,636	2,59	-4,534	-5,334
0,595	-1,212	-1,358	1,595	-3,631	-3,645	2,595	-4,545	-3,769
0,6	-1,234	-1,378	1,6	-3,640	-3,654	2,6	-4,526	-5,158
0,605	-1,255	-1,397	1,605	-3,648	-3,663	2,605	-4,536	-3,766
0,61	-1,276	-1,417	1,61	-3,657	-3,672	2,61	-4,518	-5,035
0,615	-1,297	-1,436	1,615	-3,666	-3,681	2,615	-4,526	-3,767
0,62	-1,317	-1,454	1,62	-3,674	-3,690	2,62	-4,510	-4,940

0,625	-1,337	-1,473	1,625	-3,683	-3,698	2,625	-4,517	-3,769
0,63	-1,357	-1,491	1,63	-3,692	-3,707	2,63	-4,502	-4,864
0,635	-1,377	-1,510	1,635	-3,700	-3,716	2,635	-4,508	-5,463
0,64	-1,397	-1,528	1,64	-3,709	-3,725	2,64	-4,520	-3,744
0,645	-1,416	-1,545	1,645	-3,717	-3,734	2,645	-4,499	-5,153
0,65	-1,435	-1,563	1,65	-3,726	-3,743	2,65	-4,508	-3,729
0,655	-1,454	-1,580	1,655	-3,734	-3,752	2,655	-4,490	-4,987
0,66	-1,473	-1,598	1,66	-3,743	-3,761	2,66	-4,497	-3,731
0,665	-1,491	-1,615	1,665	-3,752	-3,770	2,665	-4,481	-4,875
0,67	-1,510	-1,632	1,67	-3,760	-3,779	2,67	-4,487	-5,949
0,675	-1,528	-1,648	1,675	-3,769	-3,788	2,675	-4,502	-3,791
0,68	-1,546	-1,665	1,68	-3,777	-3,797	2,68	-4,477	-5,196
0,685	-1,564	-1,681	1,685	-3,786	-3,806	2,685	-4,486	-3,701
0,69	-1,581	-1,698	1,69	-3,794	-3,815	2,69	-4,466	-4,973
0,695	-1,599	-1,714	1,695	-3,803	-3,824	2,695	-4,474	-3,699
0,7	-1,616	-1,730	1,7	-3,811	-3,833	2,7	-4,456	-4,840
0,705	-1,633	-1,745	1,705	-3,819	-3,842	2,705	-4,462	-5,743
0,71	-1,650	-1,761	1,71	-3,828	-3,851	2,71	-4,475	-3,738
0,715	-1,667	-1,777	1,715	-3,836	-3,860	2,715	-4,451	-5,098
0,72	-1,684	-1,792	1,72	-3,845	-3,869	2,72	-4,459	-3,671
0,725	-1,700	-1,807	1,725	-3,853	-3,879	2,725	-4,440	-4,888
0,73	-1,717	-1,822	1,73	-3,862	-3,888	2,73	-4,446	-3,673
0,735	-1,733	-1,837	1,735	-3,870	-3,897	2,735	-4,429	-4,763
0,74	-1,749	-1,852	1,74	-3,878	-3,906	2,74	-4,434	-5,248
0,745	-1,765	-1,867	1,745	-3,887	-3,915	2,745	-4,443	-3,655
0,75	-1,781	-1,882	1,75	-3,895	-3,924	2,75	-4,422	-4,922
0,755	-1,797	-1,896	1,755	-3,903	-3,933	2,755	-4,429	-3,645
0,76	-1,813	-1,911	1,76	-3,912	-3,943	2,76	-4,411	-4,765
0,765	-1,828	-1,925	1,765	-3,920	-3,952	2,765	-4,416	-5,387
0,77	-1,843	-1,939	1,77	-3,929	-3,961	2,77	-4,426	-3,650
0,775	-1,859	-1,953	1,775	-3,937	-3,970	2,775	-4,403	-4,928
0,78	-1,874	-1,967	1,78	-3,945	-3,980	2,78	-4,409	-3,620
0,785	-1,889	-1,981	1,785	-3,954	-3,989	2,785	-4,391	-4,748
0,79	-1,904	-1,995	1,79	-3,962	-3,998	2,79	-4,396	-5,411
0,795	-1,919	-2,009	1,795	-3,970	-4,008	2,795	-4,406	-3,636
0,8	-1,933	-2,022	1,8	-3,978	-4,017	2,8	-4,383	-4,896
0,805	-1,948	-2,036	1,805	-3,987	-4,026	2,805	-4,389	-3,596
0,81	-1,963	-2,049	1,81	-3,995	-4,036	2,81	-4,370	-4,712
0,815	-1,977	-2,062	1,815	-4,003	-4,045	2,815	-4,374	-5,271
0,82	-1,991	-2,076	1,82	-4,012	-4,055	2,82	-4,383	-3,600
0,825	-2,006	-2,089	1,825	-4,020	-4,064	2,825	-4,361	-4,829
0,83	-2,020	-2,102	1,83	-4,028	-4,074	2,83	-4,366	-3,574
0,835	-2,034	-2,115	1,835	-4,037	-4,083	2,835	-4,348	-4,658
0,84	-2,048	-2,128	1,84	-4,045	-4,093	2,84	-4,351	-5,069
0,845	-2,062	-2,140	1,845	-4,053	-4,103	2,845	-4,358	-3,561

0,85	-2,075	-2,153	1,85	-4,061	-4,112	2,85	-4,337	-4,742
0,855	-2,089	-2,166	1,855	-4,070	-4,122	2,855	-4,342	-3,552
0,86	-2,103	-2,178	1,86	-4,078	-4,132	2,86	-4,324	-4,594
0,865	-2,116	-2,191	1,865	-4,086	-4,142	2,865	-4,327	-4,882
0,87	-2,130	-2,203	1,87	-4,095	-4,152	2,87	-4,333	-3,531
0,875	-2,143	-2,216	1,875	-4,103	-4,162	2,875	-4,313	-4,648
0,88	-2,156	-2,228	1,88	-4,111	-4,172	2,88	-4,316	-5,192
0,885	-2,169	-2,240	1,885	-4,119	-4,182	2,885	-4,324	-3,540
0,89	-2,183	-2,253	1,89	-4,128	-4,192	2,89	-4,302	-4,725
0,895	-2,196	-2,265	1,895	-4,136	-4,202	2,895	-4,306	-3,508
0,9	-2,209	-2,277	1,9	-4,144	-4,213	2,9	-4,287	-4,556
0,905	-2,222	-2,289	1,905	-4,153	-4,223	2,905	-4,290	-4,845
0,91	-2,234	-2,301	1,91	-4,161	-4,233	2,91	-4,295	-3,489
0,915	-2,247	-2,312	1,915	-4,169	-4,244	2,915	-4,275	-4,596
0,92	-2,260	-2,324	1,92	-4,177	-4,255	2,92	-4,278	-5,071
0,925	-2,273	-2,336	1,925	-4,186	-4,265	2,925	-4,285	-3,491
0,93	-2,285	-2,348	1,93	-4,194	-4,276	2,93	-4,263	-4,647
0,935	-2,298	-2,359	1,935	-4,202	-4,287	2,935	-4,266	-3,467
0,94	-2,310	-2,371	1,94	-4,211	-4,298	2,94	-4,248	-4,488
0,945	-2,323	-2,382	1,945	-4,219	-4,309	2,945	-4,250	-4,716
0,95	-2,335	-2,394	1,95	-4,228	-4,321	2,95	-4,254	-3,446
0,955	-2,347	-2,405	1,955	-4,236	-4,332	2,955	-4,234	-4,508
0,96	-2,359	-2,417	1,96	-4,244	-4,344	2,96	-4,237	-4,814
0,965	-2,372	-2,428	1,965	-4,253	-4,355	2,965	-4,241	-3,431
0,97	-2,384	-2,439	1,97	-4,261	-4,367	2,97	-4,221	-4,530
0,975	-2,396	-2,451	1,975	-4,270	-4,379	2,975	-4,223	-4,967
0,98	-2,408	-2,462	1,98	-4,278	-4,391	2,98	-4,229	-3,429
0,985	-2,420	-2,473	1,985	-4,287	-4,404	2,985	-4,207	-4,556
0,99	-2,431	-2,484	1,99	-4,295	-4,417	2,99	-4,209	-5,276
0,995	-2,443	-2,495	1,995	-4,304	-4,430	2,995	-4,217	-3,469
1	-2,455	-2,506	2	-4,312	-4,443	3	-4,192	-4,192