

HADAMEZ KUZMINSKAS

**CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES
DE ORDEM FRACIONÁRIA**

Ilha Solteira
2018



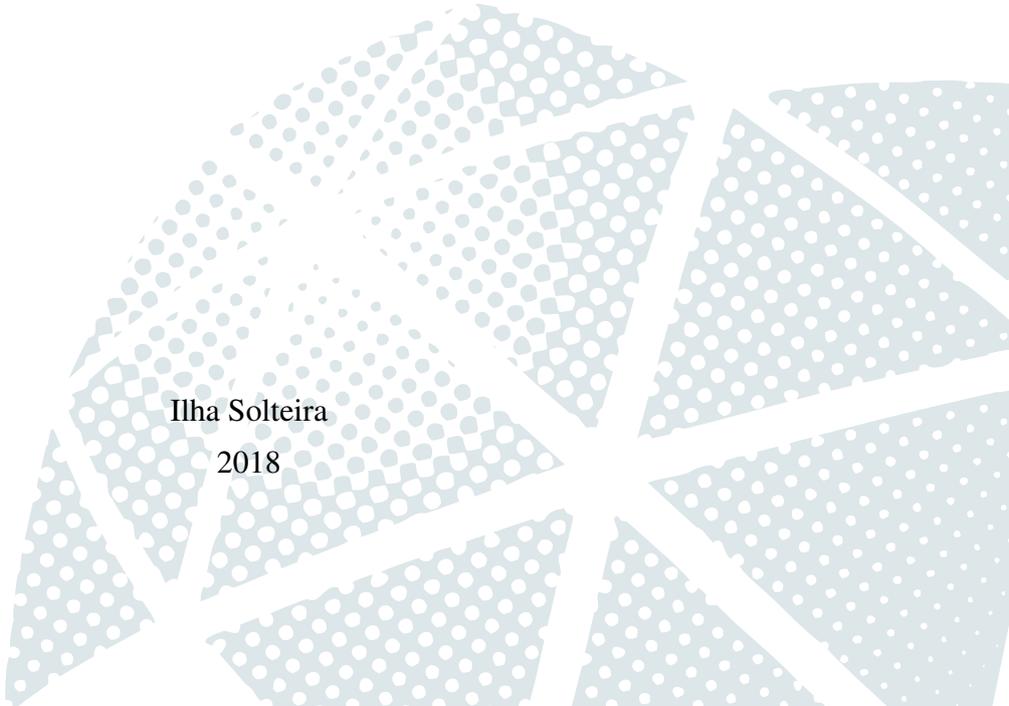
HADAMEZ KUZMINSKAS

**CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES
DE ORDEM FRACIONÁRIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2018



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

K978c Kuzminskas, Hadamez.
Controle robusto chaveado de sistemas lineares e não lineares de ordem fracionária. / Hadamez Kuzminskas. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
109 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Controle e Instrumentação Eletrônica, 2018

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Sistemas de ordem fracionária. 2. Método direto de Lyapunov fracionário.
3. Desigualdades matriciais lineares. 4. Controle robusto. 5. Controle chaveado.
6. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Raiane da Silva Santos
Raiane da Silva Santos



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Controle Robusto Chaveado de Sistemas Lineares e Não Lineares de Ordem Fracionária

AUTOR: HADAMEZ KUZMINSKAS

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Divisão de Engenharia Eletrônica, Departamento de Sistemas e Controle / Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Ilha Solteira, 04 de maio de 2018

AGRADECIMENTOS

Gratidão:

- A Deus, a minha família e aos meus amigos, pelo cuidado, atenção e compreensão;
- Aos colaboradores do Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP de Ilha Solteira, por me acolher com respeito, cooperação e união;
- A todos os colaboradores da pós graduação da UNESP de Ilha Solteira, que são solícitos em ajudar;
- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela orientação, confiança e incentivo;
- A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade de crescimento e apoio financeiro.

“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano. ”

Isaac Newton

“A palavra é prata, o silêncio é ouro. ”

Provérbio Árabe

RESUMO

Neste trabalho apresentam-se condições descritas por desigualdades matriciais lineares, LMIs (do inglês: Linear Matrix Inequalities), para o projeto de controladores robustos para sistemas dinâmicos de ordem $\alpha \in (0, 1]$. Os controladores propostos utilizam a realimentação da derivada de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do vetor de estado, a chamada realimentação α -derivativa, e também a realimentação do vetor de estado. A literatura clássica apresenta resultados que utilizam o método direto de Lyapunov e a estabilização quadrática no projeto de controladores para sistemas de ordem inteira. Os teoremas propostos neste trabalho para sistemas fracionários são condições suficientes análogas a estes resultados. Esta analogia é possível através da extensão fracionária, recentemente disponível na literatura, do método direto de Lyapunov e de um limitante superior para a derivada de ordem $\alpha \in (0, 1]$ da função de Lyapunov do tipo quadrática, ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. Nesse sentido, as LMIs propostas para estabilização quadrática são análogas aos casos clássicos, pois não dependem da ordem $\alpha \in (0, 1]$ do sistema. Em particular, o foco deste trabalho recai no controle do tipo chaveado, que trata da minimização do limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. O controle chaveado dispensa o conhecimento das funções de pertinência quando da utilização de modelos fuzzy Takagi-Sugeno, permitindo trabalhar com plantas lineares e não lineares, ambas incluindo parâmetros incertos. Dessa forma, a estabilização quadrática possibilitou a obtenção de novos resultados para o problema de controle robusto de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1]$, contemplando os principais resultados análogos, com o projeto da realimentação α -derivativa em sistemas lineares e com o projeto de controladores chaveados, utilizando a realimentação do vetor de estado, em sistemas lineares e não lineares.

Palavras-chave: Sistemas de ordem fracionária. Método direto de Lyapunov fracionário. Desigualdades matriciais lineares. Controle robusto. Controle chaveado. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

ABSTRACT

This work proposes linear matrix inequalities (LMIs) conditions for the design of robust controllers for dynamic systems of order $\alpha \in (0, 1]$. The proposed controllers use the feedback of the state vector derivative of order $\alpha \in (0, 1]$, the so-called α -derivative feedback, and also the feedback of the state vector. The classical literature presents results that use the Lyapunov direct method and the quadratic stabilization in the design of the controllers for integer order systems. The theorems proposed in this work for fractional systems are sufficient conditions analogous to these results. This analogy is possible through the fractional extension, recently available in the literature, of the direct Lyapunov method and an upper bound for the $\alpha \in (0, 1]$ order derivative of the quadratic Lyapunov function, ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. In this sense, the proposed LMIs for quadratic stabilization are analogous to the classical ones, since they do not depend on the order $\alpha \in (0, 1]$ of the system. In particular, the focus of this work lies in the switched control, which deals with the minimization of the upper bound of ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. The switched control dispenses the knowledge of the membership functions when using the Takagi-Sugeno fuzzy models, allowing to work with linear and nonlinear plants, both of them with uncertain parameters. Therefore, the quadratic stabilization allowed to obtain new results for the robust control problem of $\alpha \in (0, 1]$ order systems, considering the main analogous results, with the α -derivative feedback design in linear systems and with the design of switching controllers, using state vector feedback, for linear and nonlinear systems.

Keywords: Fractional order systems. Fractional Lyapunov direct method. Linear matrix inequalities. Robust control. Control switch. Takagi-Sugeno fuzzy models.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Domínio de estabilidade do sistema fracionário em (46), destacado em cinza.	35
Figura 2	Evolução das variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema de ordem $\alpha = 0,8$ em (81), para condições iniciais $x_0 = [3 \ 6]$	51
Figura 3	Plano de fase do sistema linear, variante no tempo e de ordem 0,8, em (81).	52
Figura 4	Evolução das variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema de ordem $\alpha = 0,8$ em (84), para condições iniciais $x_0 = [2 \ -0,3]$	53
Figura 5	Evolução das variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema de ordem $\alpha = 0,9$ em (85), para condições iniciais $x_0 = [0,2 \ 0,5]$	54
Figura 6	Regiões de factibilidade utilizando o Teorema 19, denotada por (.) e o Corolário 2, denotada por (o).	70
Figura 7	Comportamento do sistema de ordem $\alpha = 0,95$ incerto submetido à lei de controle chaveada em (124).	72
Figura 8	Entradas de controle da realimentação com a lei de controle chaveada em (124).	72
Figura 9	Comportamento do sistema de ordem $\alpha = 0,75$ incerto submetido à lei de controle chaveada em (130).	74
Figura 10	Entradas de controle da realimentação com a lei de controle chaveada em (130).	75
Figura 11	Plano de fase do sistema de Lorenz de ordem $\alpha = 0,995$, em malha aberta.	88
Figura 12	Evolução das variáveis de estado do sistema de Lorenz de ordem $\alpha = 0,995$, em malha aberta.	88
Figura 13	Plano de fase do sistema de malha aberta para $d = 0,2$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 30,8$ e $\lambda_3 = 2,4$	89
Figura 14	Sistema de ordem $\alpha = 0,995$ incerto submetido a lei de controle chaveada em (124).	91

Figura 15	Comportamento do sistema linear de ordem $\alpha = 0,9$ em (193) submetido à lei de controle α -derivativa em (184).	97
Figura 16	Localizações dos autovalores para $\gamma = 0,5$, representados por (*) em azul e para $\gamma = 5$, representados por (o) em vermelho.	97
Figura 17	Comportamento do sistema linear incerto de ordem $\alpha = 0,9$ em (195) submetido à lei de controle α -derivativa em (184).	98
Figura 18	Localizações dos autovalores para $\gamma = 0,2$, representados por (*) em azul e para $\gamma = 2$, representados por (o) em vermelho.	99
Figura 19	Função Gama.	103

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais positivos.
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
\mathbb{N}	Conjunto dos elementos naturais.
\mathbb{N}^*	Conjunto dos elementos naturais, com exceção do elemento nulo.
M^T	Transposta da matriz real M .
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) positiva.
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (semidefinida) negativa.
I	Matriz identidade.
$ z $	Valor absoluto de um número real z .
$\ x\ $	Norma euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}^n$; $\ x\ = \sqrt{x^T x}$.
$\lceil \alpha \rceil$	Menor inteiro maior do que $\alpha > 0$.
$\lfloor \alpha \rfloor$	Maior inteiro menor do que $\alpha > 0$.
$spec(A)$	Conjunto de autovalores da matriz A .
${}^{RL}D_t^\alpha$	Operador linear derivada temporal de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in (0, 1]$.
${}^cD_t^\alpha$	Operador linear derivada temporal de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$.
$\vec{0}$	Vetor nulo pertencente ao \mathbb{R}^n .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	BREVE HISTÓRICO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO	17
3	BASE TEÓRICA DO CÁLCULO FRACIONÁRIO	20
3.1	A INTEGRAL FRACIONÁRIA DE RIEMANN-LIOUVILLE	20
3.1.1	A integral iterada de Cauchy	20
3.1.2	Propriedades da integral de Riemann-Liouville	22
3.2	A DERIVADA FRACIONÁRIA SEGUNDO RIEMANN-LIOUVILLE	24
3.2.1	Propriedades da derivada de Riemann-Liouville	24
3.3	A DERIVADA FRACIONÁRIA SEGUNDO CAPUTO	28
3.3.1	Propriedades da derivada de Caputo e teoremas relacionados	28
3.4	A DERIVADA FRACIONÁRIA DE GRÜNWARD-LETNIKOV	32
4	EXTENSÃO DO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA	34
4.1	SISTEMAS DINÂMICOS DE ORDEM FRACIONÁRIA	36
4.1.1	Sistemas dinâmicos Riemann-Liouville	36
4.1.2	Sistemas dinâmicos Caputo	37
4.2	MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV FRACIONÁRIO	38
4.3	LEMAS RECENTES RELACIONADOS AO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV FRACIONÁRIO PARA SISTEMAS CAPUTO	41
4.4	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA CAPUTO	47
4.4.1	Solução numérica fundamentada na equação integral de Volterra - método de Adams-Bashforth fracionário	47

4.4.2	Solução numérica fundamentada nos operadores de Grünwald-Letnikov e Riemann-Liouville.	48
4.5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	49
4.6	CONCLUSÕES PARCIAIS	55
5	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADO VIA LMI	56
5.1	TAXA DE DECAIMENTO MITTAG-LEFFLER PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA	56
5.2	PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS VIA LMIs	58
5.2.1	Realimentação do vetor de estado com ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$	58
5.2.2	Realimentação do vetor de estado com ganho $K(\beta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$	61
5.3	CONTROLE CHAVEADO EM SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA	64
5.3.1	Caso 1: matriz $B(\beta) = B$	65
5.3.2	Caso 2: matriz incerta $B(\beta)$	66
5.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	69
5.5	CONCLUSÕES PARCIAIS	75
6	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI - SUGENO DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADO VIA LMI	76
6.1	MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA	76
6.2	ESTABILIDADE E TAXA DE DECAIMENTO DE SISTEMAS FRACIONÁRIOS FUZZY TAKAGI-SUGENO VIA LMIs	78
6.3	ESTABILIDADE DE SISTEMAS FRACIONÁRIAS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS LIMITADAS EM NORMA VIA LMIs	80

6.4	CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS TAKAGI-SUGENO DE ORDEM FRACIONÁRIA	85
6.4.1	Caso 1: sistemas fuzzy com matriz conhecida $B(h(z(t), \beta)) = B$	85
6.4.2	Caso 2: sistemas fuzzy com a matriz $B(h(z(t), \beta))$, contendo não linearidades e parâmetros incertos	86
6.5	EXEMPLO NUMÉRICO	87
6.6	CONCLUSÕES PARCIAIS	92
7	CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO α-DERIVATIVA VIA LMI	93
7.1	EXEMPLOS NUMÉRICOS	96
8	CONCLUSÕES GERAIS	100
8.1	TRABALHOS FUTUROS	101
8.2	PUBLICAÇÃO	101
9	APÊNDICE A - FUNÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO	102
9.1	FUNÇÃO GAMA	102
9.2	FUNÇÃO BETA	103
9.3	FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER	103
	REFERÊNCIAS	104

1 INTRODUÇÃO

A origem do questionamento acerca do cálculo de ordem arbitrária remonta ao final do século *XVII*. Por mais de três séculos a teoria permaneceu vinculada ao campo da matemática pura. Apenas nas últimas décadas surgiram aplicações nos campos da física, engenharia de controle, processamento de sinais, probabilidade e estatística, viscoelasticidade, redes neurais, entre outras (CAMARGO, 2009). Apresentamos a seguir alguns dos desenvolvimentos e aplicações do cálculo fracionário.

Em Charef (2006) é apresentado um método de aproximação dos operadores de ordem fracionária por funções racionais, para uma determinada faixa de frequências, incluindo uma realização através de circuitos analógicos. Em Rana (2016) encontra-se um procedimento sistemático para a implementação em *hardware* com circuitos integrados em FPGA (do inglês: *Field Programmable Gate Array*) dos operadores básicos do cálculo fracionário, utilizando a definição de derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov. Simulações e resultados da implementação para a integral e derivada fracionárias de sinais senoidais e de onda quadrada são apresentados para determinadas ordens dos operadores. Os modelos de ordem fracionária fornecem precisão e são capazes de representar perfeitamente qualquer ordem real do sistema. Um modelo de alta ordem contendo integradores e diferenciadores de ordem inteira pode ser aproximado por módulos de ordem fracionária, os quais são mais simplificados. Assim, o crescente interesse da indústria em sistemas de ordem fracionária reside no fato de que os módulos funcionais podem ter sua estrutura simplificada significativamente (EFE, 2011).

No contexto da teoria de circuitos, encontra-se definida a impedância elétrica generalizada no domínio da frequência, proporcional a s^α , ($s = j\omega$), conhecida como fractância (NAKAGAWA; SORIMACHI, 1992). A impedância elétrica dos elementos clássicos de circuito são casos particulares de fractância. Por exemplo, quando a ordem α é igual a -1 , 0 e 1 , obtém-se a impedância do capacitor, resistor e indutor, respectivamente. Um capacitor de ordem fracionária, também conhecido como elemento de fase constante, é caracterizado pela impedância $Z = (1/C^\alpha)s^\alpha$, com C^α a capacitância de ordem α . Um método para a construção de um elemento de fase constante, adequado para aplicações em circuitos, foi proposto em Biswas, Sen e Dutta (2006). A incorporação de um capacitor de ordem fracionária em um circuito resulta em um sistema de ordem fracionária que encontra aplicações, por exemplo, em processamento de sinais e sistemas de controle (CHEN; VINAGRE, 2003; SILVA; MACHADO; LOPES, 2004). Em Freeborn, Maundy e Elwakil (2015) são examinados modelos de circuitos elétricos fracionários vigentes na literatura, os quais tem o objetivo de proporcionar um melhor ajuste aos dados de impedância coletados experimentalmente a partir de elementos de armazenamento e

geração de energia, como supercondensadores, baterias e células combustíveis. Em todos os modelos pesquisados, o emprego de capacitores de ordem fracionária é imperativo não apenas para a precisão do modelo, mas para refletir as propriedades eletroquímicas e físicas do dispositivo.

As equações de Maxwell constituem o formalismo para a descrição de fenômenos eletromagnéticos. Segundo Machado et al. (2006), um olhar mais atento para o fenômeno de efeito pelicular, presente em linhas de transmissão, motores elétricos e transformadores, motivou uma nova perspectiva para a substituição de modelos clássicos por modelos de ordem fracionária, introduzindo o conceito de potencial elétrico fracionário estático. Em Zheng (2016) é proposta uma modelagem de ordem fracionária para um servo sistema de velocidade de um motor síncrono de ímã permanente, PMSM (do inglês: *Permanent Magnet Synchronous Motor*), combinando a modelagem de peças eletromagnéticas e de peças mecânicas. Com base no modelo de ordem fracionária proposto e no esquema de identificação utilizado, as experiências de identificação são realizadas na parte eletromagnética e na parte mecânica. Verificou-se que a resposta em frequência do modelo de ordem fracionária é mais próxima da resposta em frequência real do PMSM, em comparação com o modelo de ordem inteira.

Em geral, sistemas físicos podem ser caracterizados pela derivada e integral fracionárias, como, por exemplo, sistemas viscoelásticos (LORENZO et al., 2017), osciladores (SAID et al., 2017) e baterias de lítio (MU et al., 2017). Inúmeras pesquisas consideram operadores fracionários na descrição de circuitos RLC, (RADWAN; SALAMA, 2012; GÓMEZ-AGUILAR et al., 2016, 2017).

Em Jacyntho (2015) são apresentados métodos de identificação de sistemas lineares invariantes no tempo, descritos através de funções de transferência, estáveis ou instáveis, de ordem fracionária, utilizando como entrada um degrau.

Novos resultados surgem em controle fracionário por modos deslizantes (BAYRAMOGLU; KOMURCUGIL, 2014; YIN; CHEN; ZHONG, 2014), controle fracionário com a técnica backstepping (SHUKLA; SHARMA, 2017; SHENG et al., 2017) e controle fracionário adaptativo (ODIBAT, 2010; LUO; LI; TAJADDODIANFAR, 2017).

Mediante o exposto, certos fenômenos físicos, que não eram bem explicados por modelos baseados no cálculo tradicional, têm sido melhor modelados por derivadas e integrais de ordem não inteira. Uma definição unificada para o cálculo de ordem não inteira ainda é discutida na literatura. A escolha da definição depende do tipo de aplicação. Para modelos que utilizam equações diferenciais ordinárias, as definições de Riemann-Liouville e de Caputo são as mais utilizadas. Para os modelos com equações diferenciais parciais, a definição de Riesz é a mais adequada. Na maioria dos casos não é possível obter soluções analíticas dos modelos que utilizam sistemas de ordem fracionária, assim como não o é na maioria dos casos para modelos que utilizam sistemas de ordem inteira. Em vista disto, métodos numéricos são utilizados para a obtenção de soluções aproximadas. Entretanto, ainda são poucos os métodos de solução

encontrados na literatura para sistemas de ordem fracionária, pois estes sistemas dependem da definição utilizada para o operador fracionário e, além disso, a sua implementação requer uma computação intensiva dada sua característica intrínseca de memória hereditária (SALGADO, 2015).

A necessidade de consolidar uma teoria de estabilidade para sistemas dinâmicos fracionários culmina em produções relevantes. Em Petrás (2011), por exemplo, estão reunidos alguns dos principais teoremas de estabilidade relacionados aos autovalores e polos de sistemas fracionários lineares, envolvendo equações no espaço de estados e função de transferência. A análise da estabilidade de sistemas fracionários tem o seu maior êxito com a extensão fracionária do método direto de Lyapunov, que se encontra estabelecida em Li, Chen e Podlubny (2009, 2010). A princípio, a utilização deste método é onerosa para determinados sistemas, dadas as dificuldades associadas à derivada de ordem fracionária do produto e composição de funções. Entretanto, novos lemas relacionados à derivada de Caputo trouxeram fluidez ao método direto de Lyapunov fracionário (AGUILA-CAMACHO; DUARTE-MERMOUD; GALLEGOS, 2014; DUARTE-MERMOUD et al., 2015; ANAYA et al., 2017).

A perspectiva desse trabalho consiste na busca por condições de estabilização da planta fracionária utilizando o vetor de estado ou a derivada de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do vetor de estado. Inicialmente é apresentado o estado atual da análise de estabilidade de sistemas lineares e não lineares de ordem fracionária. Em Matignon (1994) foi estabelecido o primeiro teorema relacionado à estabilidade de sistemas lineares fracionários. Desde então, como mencionado em Liu et al. (2016), a estabilidade a tempo finito, a estabilidade assintótica, a estabilidade Mittag-Leffler e a BIBO estabilidade de sistemas fracionários lineares e não lineares têm sido investigadas pela comunidade científica. Em seguida são apresentados alguns lemas recentes relacionados à derivada de Caputo, utilizados na extensão fracionária do método direto de Lyapunov, como, por exemplo, o lema proposto em Duarte-Mermoud et al. (2015), o qual estende a regra da cadeia para a derivada de Caputo de $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com $P^T = P$. Esta teoria é então aplicada na proposta do controle de sistemas lineares incertos via realimentação α -derivativa e na extensão da teoria de controle robusto chaveado, com realimentação do vetor de estado, para sistemas fracionários lineares e sistemas fracionários não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Segue a organização deste trabalho:

- O Capítulo 2 traz uma breve abordagem dos fatos históricos mais conhecidos e considerados acerca do desenvolvimento do cálculo de ordem fracionária e apresenta, ao final, uma referência contendo informações técnicas para introduzir o leitor na história mais recente do cálculo fracionário;
- O Capítulo 3 traz uma base teórica do cálculo fracionário para utilização ao longo deste

trabalho, com as definições e desenvolvimentos pertinentes;

- O Capítulo 4 descreve a extensão do método direto de Lyapunov para sistemas de ordem fracionária, bem como alguns lemas recentes relacionados à derivada de Caputo, os quais serão úteis no desenvolvimento desse trabalho;
- O Capítulo 5 propõe a extensão de alguns resultados teóricos sobre o controle chaveado de sistemas lineares de ordem inteira, para uma classe de sistemas lineares de ordem fracionária com incertezas politópicas. Exemplos numéricos validam a teoria;
- O Capítulo 6 propõe a extensão de alguns resultados teóricos sobre o controle chaveado de sistemas não lineares de ordem inteira, para uma classe de sistemas não lineares de ordem fracionária com incertezas politópicas, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, contendo exemplos que validam a teoria;
- O Capítulo 7 propõe a extensão de alguns resultados teóricos sobre o controle robusto de sistemas lineares de ordem inteira com realimentação da derivada do vetor de estado, para uma classe de sistemas lineares de ordem fracionária, via realimentação α -derivativa. Exemplos numéricos validam a teoria;
- Por fim, o Capítulo 8 traz as conclusões desse trabalho, perspectivas futuras e a referência bibliográfica do artigo publicado em congresso nacional, intitulado ‘Condições em LMIs para estabilidade Mittag-Leffler e taxa de decaimento de sistemas de ordem fracionária com realimentação de estados α - derivativa’.

2 BREVE HISTÓRICO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

O cálculo de ordem arbitrária, historicamente referido como cálculo de ordem fracionária, tem o seu ponto de partida em uma sucessão de cartas trocadas entre Leibniz e L'Hopital, em 1695. Leibniz, o autor da notação moderna $d^n x(t)/dt^n$ para o cálculo diferencial, é questionado por L'Hopital acerca do significado de $d^{1/2}x(t)/dt^{1/2}$. Sem muito rigor, Leibniz afirma: 'A igualdade $d^{1/2}x = x\sqrt{dx} : x$ é um aparente paradoxo do qual importantes aplicações serão um dia obtidas'. Ainda em 1695, em uma carta a Johann Bernoulli, Leibniz fez menção às derivadas de 'ordens mais gerais'. Em 1697, em uma carta a Wallis, Leibniz destacou o uso do cálculo diferencial na determinação de resultados relacionados ao produto infinito para π . O interessante é que ele utiliza a notação $d^{1/2}x(t)$ nessa correspondência.

Só em 1819 surge a primeira menção ao cálculo fracionário em um texto científico. Em '*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*', S. F. Lacroix substituiu o fatorial da equação $d^n y(t)/dx^n = [m!/(m-n)!]x^{m-n}$ (correspondente à n-ésima derivada da função $y(t) = x^m(t)$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $(m-n) \geq 0$) pela função gama, Γ , obtendo:

$$\frac{d^n y(t)}{dx^n} = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-n)} x^{m-n}. \quad (1)$$

Por exemplo, para $m = 1$ e $n = 1/2$ tem-se $d^{1/2}y(t)/dx^{1/2} = 2\sqrt{x}/\sqrt{\pi}$. Este resultado coincide com o obtido através da derivada de Riemann-Liouville ou através da derivada de Caputo, que são as definições mais aceitas para a derivada fracionária.

O início das aplicações do cálculo de ordem não inteira conta com a contribuição do matemático Abel, o qual buscava obter uma solução para o problema da tautócrona. Tautócrona é a curva plana tal que o tempo de descida de um corpo abandonado sobre ela e sujeito à ação da gravidade é o mesmo independente do ponto onde o corpo é abandonado. Através da lei da conservação da energia mecânica, Abel chegou a seguinte formulação para o tempo de descida τ (CAMARGO, 2009):

$$\tau = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt,$$

em que f , definida no intervalo $[0, x]$, é a curva plana tautócrona. Conforme será apresentado no Capítulo 3, esta integral corresponde à integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 1/2$, multiplicada por $\Gamma(1/2)$ e com o limite inferior igual a 0:

$$\tau = \Gamma(1/2) I_x^{1/2} f(x). \quad (2)$$

Abel não estava interessado em solucionar o problema utilizando o cálculo fracionário, contudo, a solução obtida corresponde à integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 1/2$, exceto pela constante $1/\Gamma(1/2)$. Aplicando a derivada de Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 1/2$, denotada por ${}^{RL}D_x^{1/2}$, a qual é um operador inverso da integral de Riemann-Liouville, em ambos os lados de (2), obtém-se:

$${}^{RL}D_x^{1/2} \tau = \sqrt{\pi} f(x).$$

Assim, a expressão para a curva tautócrona $f(x)$ decorre de ${}^{RL}D_x^{1/2} \tau$ da seguinte forma:

$$f(x) = 0,564 \left[{}^{RL}D_x^{1/2} \tau \right].$$

Em 1832, Liouville parte de $\mathcal{D}_t^m e^{\mu t} = \mu^m e^{\mu t}$, com $m \in \mathbb{N}$ e conclui que $\mathcal{D}_t^\alpha e^{\mu t} = \mu^\alpha e^{\mu t}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Com essa premissa, para a soma de exponenciais $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\mu_n t}$, tem-se:

$$\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_n^\alpha e^{\mu_n t}. \quad (3)$$

Esta é a chamada primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária, aplicada a uma classe restrita de funções, em que α pode ser real ou complexo. Liouville perseguiu essa ideia, considerando agora a integral $\int_0^\infty \mu^{\lambda-1} e^{-t\mu} d\mu$, com $\lambda > 0$. Introduzindo a mudança de variável $\tau = t\mu$, utilizando a definição da função Gama, descrita no Apêndice A, equação (197), e isolando $t^{-\lambda}$, respectivamente, tem-se:

$$\int_0^\infty \mu^{\lambda-1} e^{-t\mu} d\mu = t^{-\lambda} \int_0^\infty \tau^{\lambda-1} e^{-\tau} d\tau = t^{-\lambda} \Gamma(\lambda),$$

$$t^{-\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \mu^{\lambda-1} e^{-t\mu} d\mu.$$

Aplicando o operador \mathcal{D}_t^α em ambos os lados e substituindo a primeira fórmula de Liouville dada em (3), obtém-se:

$$\mathcal{D}_t^\alpha t^{-\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \mu^{\lambda-1} [(-\mu)^\alpha e^{-t\mu}] d\mu = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\lambda)} \left[\int_0^\infty \mu^{\lambda+\alpha-1} e^{-t\mu} d\mu \right].$$

A integral entre colchetes é igual a $\Gamma(\lambda + \alpha)t^{-(\lambda+\alpha)}$. Logo:

$$\mathcal{D}_t^\alpha t^{-\lambda} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\lambda)} \Gamma(\lambda + \alpha) t^{-(\lambda+\alpha)}.$$

Esta é a chamada segunda fórmula de Liouville para a derivada fracionária e, como a primeira, continua restrita a uma classe pequena de funções do tipo $t^{-\lambda}$, com $\lambda > 0$.

O desenvolvimento do cálculo fracionário permanecia vinculado ao campo da matemática pura, sem aplicações substanciais em outras áreas. Contudo, em 1969, M. Caputo propôs uma nova definição para a derivada fracionária e munido desta resolveu problemas no campo da viscoelasticidade, como consta em seu livro *Elasticità e Dissipazione* (CAMARGO, 2009).

As condições iniciais em equações diferenciais fracionárias descritas com a derivada de Riemann-Liouville são dadas em termos de derivadas de ordem não inteira. Em contrapartida, essas condições iniciais são dadas em termos de derivadas de ordem inteira quando as equações diferenciais fracionárias são descritas com a derivada de Caputo. Por este motivo, a derivada de Caputo é amplamente utilizada na modelagem de sistemas físicos. Além disso, a derivada de Riemann-Liouville de uma constante pode ser diferente de zero, fato este cujo significado permanece em aberto no contexto de um problema físico, ao passo que a derivada de Caputo de uma constante é igual a zero.

Em Machado, Kiryakova e Mainardi (2011) encontra-se um histórico mais recente do desenvolvimento do cálculo fracionário, contendo um levantamento de livros publicados, conferências, tutoriais, periódicos, ferramentas computacionais e patentes na área.

3 BASE TEÓRICA DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Este capítulo apresenta a teoria do cálculo fracionário que seja fundamental ou pertinente à proposta deste trabalho. Para um aprofundamento desse estudo pode-se recorrer, por exemplo, as seguintes referências com significativo enfoque em cálculo: Podlubny (1998), Oliveira (2010), Camargo (2009), Oliveira (2014) e Salgado (2015).

3.1 A INTEGRAL FRACIONÁRIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

A integral fracionária surge como uma generalização nos reais da integral de Cauchy. Considere a sequência apresentada até a definição da integral segundo Riemann-Liouville:

3.1.1 A integral iterada de Cauchy

Seja uma função $f(t)$ integrável segundo Riemann num intervalo de $t \in [0, b]$. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}^*$ de $f(t)$, $I_t^n f(t)$, é calculada de forma recorrente através do operador I_t :

$$I_t^n f(t) = I_t^1 (I_t^{n-1} f(t)), \quad (4)$$

com $I_t^0 f(t) = f(t)$. Contudo, existe uma forma fechada para $I_t^n f(t)$, proposta por A. L. Cauchy, apresentada no lema a seguir.

Lema 1. *Seja uma função $f(t)$ integrável segundo Riemann num intervalo de $t \in [0, b]$, então:*

$$I_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (5)$$

com $n \in \mathbb{N}^*$ e $I_t^0 f(t) = f(t)$.

Demonstração. Para $n = 1$:

$$I_t^1 f(t) = \frac{1}{(1-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Admita que a integral de Cauchy em (5) seja válida para $p = n - 1$. Então, utilizando (4):

$$\begin{aligned} I_t^n f(t) &= I_t^1 \{I_t^{n-1} f(t)\} = \int_0^t \left[\frac{1}{[(n-1)-1]!} \int_0^\tau (\tau-\rho)^{(n-1)-1} f(\rho) d\rho \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{(n-2)!} \int_0^\tau (\tau-\rho)^{(n-2)} f(\rho) d\rho \right] d\tau. \end{aligned}$$

Do teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} I_t^n f(t) &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t \int_\rho^t (\tau - \rho)^{n-2} f(\rho) d\tau d\rho = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t f(\rho) \left[\int_\rho^t (\tau - \rho)^{n-2} d\tau \right] d\rho \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t f(\rho) \left[\frac{(\tau - \rho)^{n-1}}{n-1} \right]_\rho^t d\rho = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \rho)^{n-1} f(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

que corresponde à integral de Cauchy em (5). Assim, a integral de Cauchy é válida para $n \in \mathbb{N}^*$. \square

O operador integral fracionária de Riemann-Liouville é definido a seguir:

Definição 1. *Seja $f(t)$ uma função diferenciável no intervalo $t \in [0, b]$. O operador integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{R}_+$ é definido como:*

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (6)$$

com $I_t^0 f(t) = f(t)$.

Este operador é entendido como uma generalização nos reais da integral de Cauchy de ordem $n \in \mathbb{N}$, $I_t^n f(t)$. Essa extensão requer:

- Utilizar a função Gama de Euler $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, a qual generaliza a função fatorial de um número natural;
- Investigar a convergência da integral $\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$.

O Apêndice A apresenta a definição e convergência da função Gama, bem como algumas de suas propriedades. Do segundo requisito, o lema a seguir é uma condição suficiente para a convergência da referida integral.

Proposição 1. (SALGADO, 2015) *Se $f(t)$ é diferenciável em $t \in [0, b]$, então:*

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (7)$$

com $\alpha > 0$, é limitada neste intervalo.

Demonstração. Da integração por partes:

$$\int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \left[-\frac{f(\tau)(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \right]_0^t + \int_0^t \frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \dot{f}(\tau) d\tau = \frac{f(0)t^\alpha}{\alpha} + \int_0^t \frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \dot{f}(\tau) d\tau.$$

A função $(t - \tau)^\alpha$ é contínua em $t \in [0, b]$. Assim $(t - \tau)^\alpha \dot{f}(\tau)$ é integrável e (7) é limitada nessas condições. \square

3.1.2 Propriedades da integral de Riemann-Liouville

Demonstra-se a seguir a propriedade de concatenação na ordem do operador integral de Riemann-Liouville.

Teorema 1. *Sejam $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $f(t)$ uma função integrável no intervalo $[0, b]$, então:*

$$I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t). \quad (8)$$

Demonstração. Da Definição 1, segue a integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha_1 > 0$ de $I_t^{\alpha_2} f(t)$:

$$\begin{aligned} I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\tau (\tau - \rho)^{\alpha_2 - 1} f(\rho) d\rho \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \int_0^\tau (t - \tau)^{\alpha_1 - 1} (\tau - \rho)^{\alpha_2 - 1} f(\rho) d\rho d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini:

$$I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t f(\rho) \left(\int_\rho^t (t - \tau)^{\alpha_1 - 1} (\tau - \rho)^{\alpha_2 - 1} d\tau \right) d\rho.$$

Da mudança de variáveis:

$$\mu = \frac{\tau - \rho}{t - \rho}, \text{ com } \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{(t - \rho)}, \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{(\tau - \rho)}{(t - \rho)} = 1 \text{ e } \lim_{\tau \rightarrow \rho} \frac{(\tau - \rho)}{(t - \rho)} = 0,$$

$$\begin{aligned} I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t f(\rho) \left(\int_0^1 [(1 - \mu)(t - \rho)]^{\alpha_1 - 1} [\mu(t - \rho)]^{\alpha_2 - 1} (t - \rho) d\mu \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t f(\rho) \left(\int_0^1 (t - \rho)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} (1 - \mu)^{\alpha_1 - 1} \mu^{\alpha_2 - 1} d\mu \right) d\rho. \end{aligned}$$

Das propriedades da função beta, apresentadas no Apêndice A:

$$\begin{aligned} I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} (t - \rho)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} f(\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^t (t - \rho)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} f(\rho) d\rho = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t). \end{aligned}$$

Logo:

$$I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t).$$

□

Em decorrência da propriedade anterior, obtém-se, de forma imediata, $I_t^{\alpha_1} I_t^{\alpha_2} f(t) = I_t^{\alpha_2} I_t^{\alpha_1} f(t)$.

O exemplo a seguir apresenta a expressão fechada para a integral de Riemann-Liouville de uma função polinomial $f(t) = c(t-a)^\beta$, com a e c constantes reais e $\beta > -1$.

Exemplo 1. Cálculo de $I_t^\alpha c(t-a)^\beta$, com $\alpha > 0$ e $t \in [a, b]$:

Para $\alpha > 0$, segundo a Definição 1:

$$I_t^\alpha c(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} c(\tau-a)^\beta d\tau.$$

Da mudança de variáveis:

$$\mu = \frac{\tau-a}{t-a}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{t-a}, \quad \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\tau-a}{t-a} = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow a} \frac{\tau-a}{t-a} = 0, \quad 1-\mu = \frac{t-\tau}{t-a},$$

$$\begin{aligned} I_t^\alpha c(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(1-\mu)(t-a)]^{\alpha-1} c[\mu(t-a)]^\beta [(t-a)d\mu] \\ &= \frac{c(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^\beta d\mu \right\}. \end{aligned}$$

Da definição e propriedades da função beta apresentadas no Apêndice A:

$$I_t^\alpha c(t-a)^\beta = \frac{c(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) = \frac{c(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \quad \beta > -1.$$

Logo, a integral de ordem $\alpha > 0$ de $f(t) = c(t-a)^\beta$ é:

$$I_t^\alpha c(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} c(t-a)^{\alpha+\beta}, \quad \beta > -1, \quad (9)$$

e não converge para $\beta \leq -1$.

Observação 1. Note que a integral de Riemann-Liouville de uma constante é diferente de zero. Quando $\beta = 0$ em (9), obtém-se:

$$I_t^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} c(t-a)^\alpha. \quad (10)$$

Entretanto, quando $f(t)$ é uma função geral nem sempre é possível obter uma expressão fechada para $I_t^\alpha f(t)$. Diante disso, o teorema a seguir possibilita escrever a integral de Riemann-Liouville em termos de uma série convergente, para a classe das funções analíticas.

Teorema 2. (SALGADO, 2015) Seja $\alpha > 0$ e $f(t)$ uma função analítica em $(a-h, a+h)$, com $h > 0$. Então:

$$I_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (t-a)^{k+\alpha}, \quad (11)$$

para $a \leq t < a+h$, em que $f^{(k)}(a) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=a}$. Em particular, $I_t^\alpha f(t)$ é analítica em $(a, a+h)$.

Demonstração. A demonstração desse teorema é encontrada em Salgado (2015). \square

Na sequência consideramos a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo. Ambas as definições incorporam a integral fracionária de Riemann-Liouville.

3.2 A DERIVADA FRACIONÁRIA SEGUNDO RIEMANN-LIOUVILLE

Definição 2. *Seja $f(t)$ uma função diferenciável no intervalo $[0, b]$. O operador derivada de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$, é definido como:*

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_t^{n-\alpha} f(t)), \quad (12)$$

sendo n o menor inteiro maior do que α (ou $n = \alpha$, se α é natural), representado por $n = \lceil \alpha \rceil$.

De forma equivalente:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ($n = \alpha$), então a derivação fracionária de Riemann-Liouville é equivalente a uma derivação inteira, a saber, $\frac{d^n}{dt^n} I_t^{n-\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} I_t^0 f(t)$.

3.2.1 Propriedades da derivada de Riemann-Liouville

Conforme o teorema a seguir, a derivada de Riemann-Liouville é um operador linear:

Teorema 3. *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ definidas no intervalo $t \in [0, b]$. Suponha que ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ e ${}^{RL}D_t^\alpha g(t)$ existam nesse intervalo. Então a derivada ${}^{RL}D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)]$ existe em $[0, b]$, para constantes c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$, e:*

$${}^{RL}D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 {}^{RL}D_t^\alpha f(t) + c_2 {}^{RL}D_t^\alpha g(t). \quad (14)$$

Demonstração. Seja a derivada de Riemann-Liouville de $h(t) = c_1 f(t) + c_2 g(t)$:

$${}^{RL}D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = \frac{d^n}{dt^n} \{ I_t^{n-\alpha} [c_1 f(t) + c_2 g(t)] \}.$$

Da linearidade do operador integral de Riemann-Liouville:

$${}^{RL}D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = \frac{d^n}{dt^n} \{ c_1 I_t^{n-\alpha} f(t) + c_2 I_t^{n-\alpha} g(t) \}.$$

Da linearidade do operador derivada de ordem inteira e da definição da derivada de Riemann-Liouville:

$${}^{RL}D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 {}^{RL}D_t^\alpha f(t) + c_2 {}^{RL}D_t^\alpha g(t).$$

□

A derivação fracionária é a operação inversa da integração fracionária quando é utilizada a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, como apresentado no teorema a seguir:

Teorema 4. Para $f(x)$ contínua e $\alpha > 0$:

$${}^{RL}D_t^\alpha [I_t^\alpha f(t)] = f(t). \quad (15)$$

Demonstração. A derivada de Riemann-Liouville de $g(t) = I_t^\alpha f(t)$ é:

$${}^{RL}D_t^\alpha g(t) = \frac{d^n}{dt^n} [I_t^{n-\alpha} g(t)] = \frac{d^n}{dt^n} \{I_t^{n-\alpha} [I_t^\alpha f(t)]\}.$$

Da propriedade de concatenação na ordem do operador integral de Riemann-Liouville:

$${}^{RL}D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [I_t^n f(t)] = f(t).$$

□

A concatenação na ordem do operador derivada de Riemann-Liouville não é válida em todos os casos. Esta propriedade é válida se a função $f(t)$ satisfaz determinada condição:

Teorema 5. Sejam $f(t) = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} g(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ e $g(t)$ integrável no intervalo $t \in [0, b]$. Então:

$${}^{RL}D_t^{\alpha_1} ({}^{RL}D_t^{\alpha_2} f(t)) = {}^{RL}D_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t). \quad (16)$$

Demonstração. Desenvolvendo o lado direito da igualdade, considerando $f(t) = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} g(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^{\alpha_1} ({}^{RL}D_t^{\alpha_2} f(t)) &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_t^{n_1 - \alpha_1} \left[\frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} (I_t^{n_2 - \alpha_2} f(t)) \right] \right\} \\ &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_t^{n_1 - \alpha_1} \left[\frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} (I_t^{n_2 - \alpha_2} I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} g(t)) \right] \right\}, \quad n_1 = [\alpha_1] \quad \text{e} \quad n_2 = [\alpha_2]. \end{aligned}$$

Da propriedade de concatenação da integral de Riemann-Liouville:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^{\alpha_1} ({}^{RL}D_t^{\alpha_2} f(t)) &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_t^{n_1 - \alpha_1} \left[\frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} (I_t^{n_2 + \alpha_1} g(t)) \right] \right\} = \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_t^{n_1 - \alpha_1} \left[\frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} (I_t^{n_2} I_t^{\alpha_1} g(t)) \right] \right\} \\ &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \{ I_t^{n_1 - \alpha_1} I_t^{\alpha_1} g(t) \} = g(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (16), considerando $f(t) = I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} g(t)$, tem-se:

$${}^{RL}D_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t) = \frac{d^{n_3}}{dt^{n_3}} \left\{ I_t^{n_3 - \alpha_1 - \alpha_2} f(t) \right\} = \frac{d^{n_3}}{dt^{n_3}} \left\{ I_t^{n_3 - \alpha_1 - \alpha_2} I_t^{\alpha_1 + \alpha_2} g(t) \right\}, \quad n_3 = \lceil \alpha_1 + \alpha_2 \rceil.$$

Da propriedade de concatenação da integral de Riemann-Liouville:

$${}^{RL}D_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t) = g(t). \quad (18)$$

Das equações (17) e (18):

$${}^{RL}D_t^{\alpha_1} [{}^{RL}D_t^{\alpha_2} f(t)] = {}^{RL}D_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t).$$

□

Considere a regra de Leibniz no contexto da derivada inteira do produto de duas funções:

$$\frac{d^n}{dt^n} [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} f(t) \right\} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} g(t) \right\}, \quad \text{com } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Para a classe das funções analíticas, essa regra pode ser generalizada para a derivada de Riemann-Liouville:

Teorema 6. (PODLUBNY, 1998) *Sejam as funções $f(t)$ e $g(t)$ analíticas em $t \in [0, b]$ e $\alpha > 0$. Então:*

$${}^{RL}D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^m \binom{\alpha}{k} \left\{ {}^{RL}D_t^{\alpha-k} f(t) \right\} \left\{ {}^{RL}D_t^k g(t) \right\} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left\{ I_t^{k-\alpha} f(t) \right\} \left\{ {}^{RL}D_t^k g(t) \right\}, \quad (19)$$

com $m \in \mathbb{N}$, $m \leq \alpha < m+1$, ($m = \lfloor \alpha \rfloor$) e o coeficiente binomial generalizado:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}, \quad (20)$$

com $k \in \mathbb{N}$. Em particular, se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha < k$, então esse binomial se anula.

Demonstração. A demonstração desse teorema é encontrada em Podlubny (1998). □

Dado que a derivada de Riemann-Liouville é o operador inverso da integral de Riemann-Liouville, a expressão em (19) pode ser escrita de como:

$${}^{RL}D_t^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left\{ {}^{RL}D_t^{\alpha-k} f(t) \right\} \left\{ {}^{RL}D_t^k g(t) \right\}. \quad (21)$$

O exemplo a seguir apresenta a expressão fechada para a derivada de Riemann-Liouville de uma função polinomial $f(t) = c(t-a)^\beta$, com a e c constantes reais e $\beta > -1$.

Exemplo 2. Cálculo de ${}^{RL}D_t^\alpha c(t-a)^\beta$, com $\alpha > 0$ e $t \in [a, b]$:

Para $\alpha > 0$, segundo a Definição 2:

$${}^{RL}D_t^\alpha c(t-a)^\beta = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_t^{n-\alpha} c(t-a)^\beta \right\}. \quad (22)$$

Do Exemplo 2, para $\tilde{\alpha} = n - \alpha$, tem-se:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha c(t-a)^\beta &= \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} c(t-a)^{n-\alpha+\beta} \right\} \\ &= \frac{c\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-(\alpha-\beta)+1)} \frac{d^n}{dt^n} \left\{ (t-a)^{n-(\alpha-\beta)} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Considere a expressão para a derivada de ordem inteira n de $(t-a)^m$:

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^m = \frac{m!}{(m-n)!} (t-a)^{m-n},$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $(m-n) \in \mathbb{N}$. Verifica-se na Seção 9.1, entretanto, que $m!$ e $(m-n)!$ correspondem a $\Gamma(m+1)$ e $\Gamma(m-n+1)$, respectivamente. Então, para $m \in \mathbb{R}$ e $(m-n) \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} (t-a)^{m-n}. \quad (24)$$

Utilizando (24):

- Se $(\alpha - \beta) \in \mathbb{N}^*$ então $\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-(\alpha-\beta)} = 0$ em (23) e:

$${}^{RL}D_t^\alpha c(t-a)^\beta = 0.$$

- Se $(\alpha - \beta) \notin \mathbb{N}^*$ então $\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-(\alpha-\beta)} = \frac{\Gamma(n-(\alpha-\beta)+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{-(\alpha-\beta)}$ em (23) e:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha c(t-a)^\beta &= \frac{c\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-(\alpha-\beta)+1)} \frac{\Gamma(n-(\alpha-\beta)+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{-(\alpha-\beta)} \\ &= \frac{c\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{-(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Logo, para $\beta > -1$:

$${}^{RL}D_t^\alpha c(t-a)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } (\alpha - \beta) \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{c\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{-(\alpha-\beta)} & \text{se } (\alpha - \beta) \notin \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (25)$$

Observação 2. Note que a derivada de Riemann-Liouville de uma constante é diferente de zero. Quando $\beta = 0$, tem-se:

$${}^{RL}D_t^\alpha c = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} & \text{se } \alpha \notin \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (26)$$

3.3 A DERIVADA FRACIONÁRIA SEGUNDO CAPUTO

Segue a definição da derivada fracionária segundo Caputo:

Definição 3. Seja $f(t)$ uma função diferenciável no intervalo $t \in [0, b]$. O operador derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha > 0$ é definido como:

$${}^cD_t^\alpha f(t) = I_t^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right], \quad n = \lceil \alpha \rceil. \quad (27)$$

Desenvolvendo a integral de Riemann-Liouville:

$${}^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left[\frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) \right] d\tau. \quad (28)$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}$, então $n = \alpha$ e a derivada de Caputo corresponde a derivada inteira, a saber, $I_t^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = I_t^0 \frac{d^n}{dt^n} f(t)$. Observe que a diferença entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville está na ordem em que os operadores de integração fracionária e de derivação inteira são aplicados. Essa mudança na ordenação dos operadores permite a aplicação da derivada fracionária na modelagem de fenômenos físicos, dado que a derivada de uma constante passa a ser zero e as condições iniciais em equações diferenciais de ordem fracionária são calculadas sobre derivadas de ordem inteira.

3.3.1 Propriedades da derivada de Caputo e teoremas relacionados

A derivada de Caputo é um operador linear:

Teorema 7. Sejam $f(t)$ e $g(t)$ definidas no intervalo $t \in [0, b]$. Suponha que ${}^cD_t^\alpha f(t)$ e ${}^cD_t^\alpha g(t)$ existam nesse intervalo. Então, para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, a derivada ${}^cD_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)]$ existe em $[0, b]$ e:

$${}^cD_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 [{}^cD_t^\alpha f(t)] + c_2 [{}^cD_t^\alpha g(t)]. \quad (29)$$

Demonstração. Seja a derivada de Caputo de $h(t) = c_1 f(t) + c_2 g(t)$:

$${}^cD_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = I_t^{n-\alpha} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} [c_1 f(t) + c_2 g(t)] \right\}.$$

Da linearidade do operador derivada de ordem inteira:

$${}^c D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = I_t^{n-\alpha} \left\{ c_1 \frac{d^n}{dt^n} f(t) + c_2 \frac{d^n}{dt^n} g(t) \right\}.$$

Da linearidade do operador integral de Riemann-Liouville e da definição da derivada de Caputo:

$${}^c D_t^\alpha [c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 [{}^c D_t^\alpha f(t)] + c_2 [{}^c D_t^\alpha g(t)].$$

□

O operador de diferenciação de ordem inteira D^n não é uma operação inversa à direita do operador de integração de ordem inteira I_t^n , mas:

$$I_t^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad (30)$$

para $t \in (a, b)$. Conforme o teorema a seguir, o cálculo de $I_t^\alpha [{}^c D_t^\alpha f(t)]$ se resume a $I_t^n [D^n f(t)]$, $n = \lceil \alpha \rceil$:

Teorema 8. *Seja $\alpha > 0$. Se ${}^c D_t^\alpha f(t)$ existe, então:*

$$I_t^\alpha [{}^c D_t^\alpha f(t)] = I_t^n \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right]. \quad (31)$$

Demonstração. Da definição de derivada de Caputo:

$$I_t^\alpha [{}^c D_t^\alpha f(t)] = I_t^\alpha I_t^{n-\alpha} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right].$$

Da propriedade de concatenação na ordem do operador integral de Riemann-Liouville e da expressão em (30):

$$I_t^\alpha [{}^c D_t^\alpha f(t)] = I_t^n \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k. \quad (32)$$

□

É apresentada agora a relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville:

Teorema 9. (OLIVEIRA, 2014) *A derivada de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo estão relacionadas pela equação:*

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad (33)$$

com $t \in (a, b)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n = \lceil \alpha \rceil$.

Demonstração. Da definição de derivada de Riemann-Liouville e de (32), pode-se escrever ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha f(t) &= D^n I_t^{n-\alpha} \left\{ \underbrace{I_t^n D^n f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k}_{=f(t)} \right\} \\ &= D^n I_t^{n-\alpha} I_t^n D^n f(t) + D^n I_t^{n-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (t-a)^k \right\}. \end{aligned}$$

Da concatenação na ordem do operador integral de Riemann-Liouville e de $D^n I_t^n = I$, obtém-se:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \underbrace{I_t^{n-\alpha} \{D^n f(t)\}}_{= {}^c D_t^\alpha f(t)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} D^n I_t^{n-\alpha} (t-a)^k.$$

Do Exemplo 1, $I_t^{n-\alpha} (t-a)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} (t-a)^{n-\alpha+k}$. Então:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} D^n (t-a)^{n-\alpha+k}.$$

De (24), tem-se $D^n (t-a)^{n-\alpha+k} = \frac{\Gamma(n-\alpha+k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}$. Logo:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}.$$

□

Observação 3. De (33), observe que ${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha f(t)$ se e somente se $f^{(k)}(a) = 0$, para todo $k = 0, \dots, (n-1)$.

A derivada de Caputo é o operador inverso da integral de Riemann-Liouville, como é apresentado a seguir:

Teorema 10. Para $f(x)$ contínua e $\alpha > 0$:

$${}^c D_t^\alpha \{I_t^\alpha f(t)\} = f(t). \quad (34)$$

Demonstração. Da relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville em (33):

$${}^{RL}D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) = {}^c D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left[\frac{d^k}{dt^k} I_t^\alpha f(t) \right] \Big|_{t=a} (t-a)^{k-\alpha}.$$

Mas $\left[\frac{d^k}{dt^k} I_t^\alpha f(t) \right] \Big|_{t=a} = \left[\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \right] \Big|_{t=a} = 0$ para $k = 0, \dots, n-1$, $n = \lceil \alpha \rceil$, isto é, $\left[\frac{d^k}{dt^k} I_t^\alpha f(t) \right]$ possui as $(n-1)$ derivadas nulas em $t = a$. Logo:

$${}^c D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) = {}^{RL} D_t^\alpha I_t^\alpha f(t).$$

De (15), tem-se ${}^{RL} D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) = f(t)$. Então:

$${}^c D_t^\alpha I_t^\alpha f(t) = f(t). \quad (35)$$

□

É apresentada a seguir a propriedade de concatenação na ordem do operador derivada de Caputo, que é válida sob determinadas condições:

Teorema 11. (SALGADO, 2015) *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $f(t)$ contínua até a ordem n no intervalo $[0, b]$. Então, para $\beta \in (0, 1)$, com $\alpha + \beta \in [n-1, n]$:*

$${}^c D_t^\beta \{ {}^c D_t^\alpha f(t) \} = {}^c D_t^{\alpha+\beta} f(t). \quad (36)$$

Demonstração. A demonstração é encontrada em Salgado (2015). □

A fórmula de Leibniz para a derivada de ordem inteira do produto das funções $f(t)$ e $g(t)$ tem a sua correspondente para a derivada de Caputo:

Teorema 12. (SALGADO, 2015) *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ analíticas e $\alpha \in (0, 1]$, então:*

$${}^c D_t^\alpha [f(t)g(t)] = [{}^c D_t^\alpha f(t)]g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} I_t^{k-\alpha} f(t) {}^c D_t^k g(t) + \frac{f(a)[g(t) - g(a)]}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \quad (37)$$

Demonstração. A demonstração é encontrada em Salgado (2015). □

O exemplo a seguir apresenta a expressão fechada para a derivada de Caputo de uma função polinomial $f(t) = c(t-a)^\beta$, com a e c constantes reais.

Exemplo 3. *Cálculo de ${}^c D_t^\alpha c(t-a)^\beta$, com $\alpha > 0$ e $t \in [a, b]$:*

Para $\alpha > 0$, segundo a Definição 3:

$${}^c D_t^\alpha c(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \left[\frac{d^n}{d\tau^n} c(\tau-a)^\beta \right] d\tau. \quad (38)$$

Esta expressão pode ser avaliada da seguinte forma:

- Para $\beta \leq n - 1$, com $\beta \in \mathbb{N}$, tem-se, de (24), que $\frac{d^n}{d\tau^n}c(\tau - a)^\beta = 0$. Assim:

$${}^c D_t^\alpha c(t - a)^\beta = 0. \quad (39)$$

- Para $\beta > n - 1$, com $\beta \in \mathbb{R}$, tem-se, de (24), que $\frac{d^n}{d\tau^n}c(\tau - a)^\beta = \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)}(\tau - a)^{\beta - n}$.

Assim:

$${}^c D_t^\alpha c(t - a)^\beta = \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t \frac{(\tau - a)^{\beta - n}}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau.$$

Da mudança de variáveis:

$$\mu = \frac{\tau - a}{t - a}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{t - a}, \quad \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\tau - a}{t - a} = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow a} \frac{\tau - a}{t - a} = 0,$$

$${}^c D_t^\alpha c(t - a)^\beta = \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 \mu^{\beta - n} (1 - \mu)^{n - \alpha - 1} d\mu.$$

Da definição e propriedades da função Beta apresentadas no Apêndice A:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha c(t - a)^\beta &= \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} B(\beta - n + 1, n - \alpha) \\ &= \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (40)$$

Logo, de (39) e (40), a derivada de Caputo de ordem $\alpha > 0$ de $f(t) = c(t - a)^\beta$ em $t \in [a, b]$ é:

$${}^c D_t^\alpha c(t - a)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \leq n - 1, \beta \in \mathbb{N}, \\ \frac{c\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} & \text{se } \beta > n - 1, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (41)$$

Observação 4. Note que a derivada de Caputo de uma constante é igual a zero. Quando $\beta = 0$ em (38), tem-se que $\frac{d^n}{d\tau^n}c = 0$ e, conseqüentemente, ${}^c D_t^\alpha c = 0$. A derivada de Riemann-Liouville de uma constante, entretanto, é diferente de zero, como visto na Observação 2.

3.4 A DERIVADA FRACIONÁRIA DE GRÜNWARD-LETNIKOV

A derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov é definida como a generalização do limite concernente às derivadas inteiras, dado por:

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - hk), \quad (42)$$

em que $f(t)$ é n -diferenciável num intervalo $[0, b]$. Esta equação equivale à relação de recorrência $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t)$. O coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ se anula para $k > n$. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - hk). \quad (43)$$

Generalizando essa expressão para $\alpha > 0$, segue a definição:

Teorema 13. *Sejam $f(t)$ definida no intervalo $(0, b]$. O operador de diferenciação de ordem $\alpha > 0$ de Grünwald-Letnikov é definido por:*

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - hk), \quad (44)$$

em que $h = t/N$, no caso em que o limite exista.

O coeficiente binomial generalizado $\binom{\alpha}{k}$ não se anula para $k > \alpha$.

Conforme o teorema a seguir, a derivada de Grünwald-Letnikov e de Riemann-Liouville são iguais para a classe das funções com derivadas contínuas até a ordem n :

Teorema 14. (PODLUBNY, 1998) *Seja $\alpha > 0$ e $f(t)$ com derivadas contínuas até a ordem n no intervalo $[0, b]$. Então:*

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^\alpha f(t). \quad (45)$$

De forma equivalente, se $f(t)$ é contínua até a ordem n , então todas as propriedades válidas para a derivada de Riemann-Liouville são válidas para a derivada de Grünwald-Letnikov. Além disso, nessas condições, a derivada de Caputo está relacionada com a derivada de Grünwald-Letnikov através do Teorema 9. Por se tratar de uma série convergente, esse operador de derivação fracionária permite a obtenção facilitada de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais fracionárias, segundo a derivada de Riemann-Liouville e de Caputo.

Munidos desta base teórica fundamental, consideremos na sequência a extensão do método direto de Lyapunov para sistemas de ordem fracionária.

4 EXTENSÃO DO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA

A literatura contém resultados de estabilidade para sistemas de ordem fracionária que não utilizam a extensão fracionária do método direto de Lyapunov. Por exemplo, o primeiro resultado de estabilidade para sistemas fracionários foi estabelecido por D. Matignon e é apresentado a seguir:

Teorema 15. (MATIGNON, 1996) *O sistema autônomo:*

$$D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad (46)$$

com $x(0) = x_0$ e $\alpha \in (0, 1]$, é assintoticamente estável se, e somente se:

$$|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (47)$$

em que $\text{spec}(A)$ é o conjunto dos autovalores da matriz A . Nesse caso, as trajetórias do vetor de estado $x(t)$ tendem a zero conforme a seguinte condição:

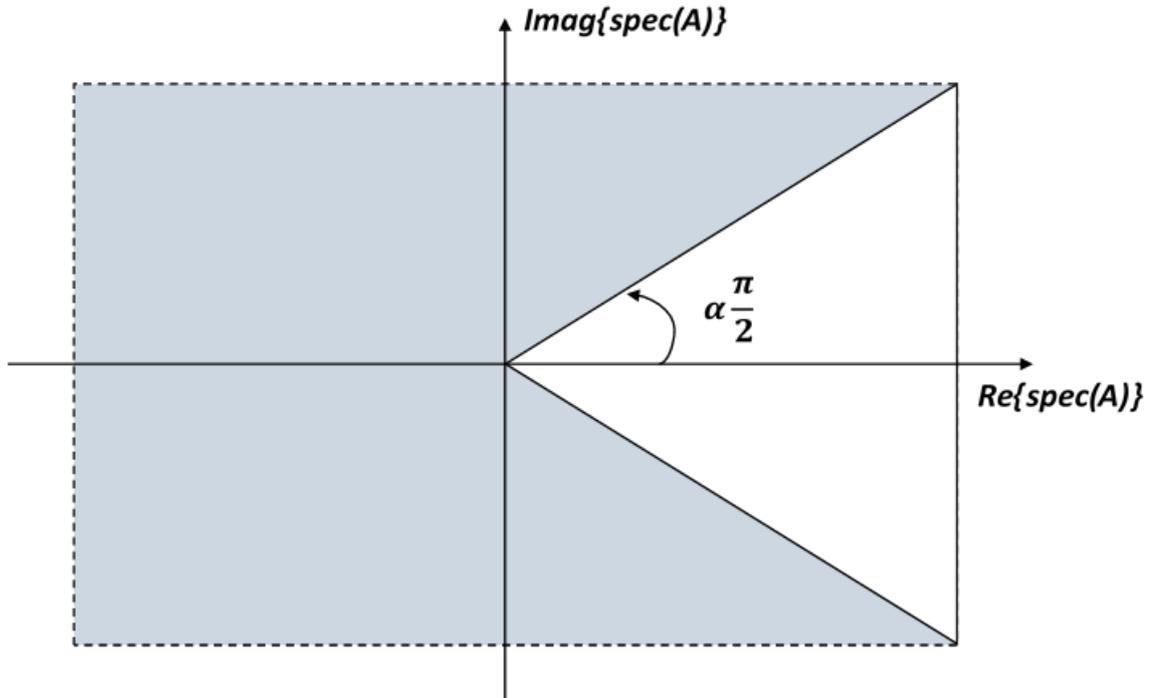
$$\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}, \quad \forall t > 0.$$

A demonstração desse teorema é baseada no cálculo da resposta do sistema em (46) às condições iniciais não nulas, utilizando a derivada de Caputo. No entanto, este resultado permanece válido para qualquer definição vigente, dado que um sistema autônomo, linear, sem atraso e com condições iniciais diferentes de zero pode ser transformado em um sistema não autônomo com condições iniciais nulas (SABATIER; MOZE; FARGES, 2010). A Figura 1 ilustra o domínio de estabilidade contido na condição em (47) do sistema fracionário em (46). Observe que quando $\alpha = 1$ tem-se o domínio de estabilidade de sistemas de ordem inteira e quando $\alpha \rightarrow 0$ a região de estabilidade tende a incluir todo o plano complexo pois o sistema tende a condição estática.

Em Wen, Wu e Lu (2008) e Lenka e Banerjee (2016) os autores utilizaram a transformada de Laplace, a função Mittag-Leffler e a inequação generalizada de Gronwall para obter condições suficientes para a estabilidade assintótica local e global de uma classe de sistemas fracionários não autônomos de ordem $\alpha \in (1, 2)$.

Em Lenka e Banerjee (2018) é discutida a estabilidade assintótica de sistemas autônomos de ordem fracionária, lineares e não lineares, nos quais as equações de estado contêm ordens fracionárias iguais ou diferentes, situando-se entre 0 e 2. É utilizada a transformada de Laplace

Figura 1 - Domínio de estabilidade do sistema fracionário em (46), destacado em cinza.



Fonte: Próprio Autor

para obter condições suficientes que asseguram a estabilidade assintótica de sistemas lineares. Em seguida, utilizando os primeiros resultados e a técnica de linearização, um teorema de estabilidade é apresentado para sistemas autônomos de ordem fracionária não lineares.

Este trabalho se desenvolve a partir da extensão do método direto de Lyapunov para sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1]$. Em muitas pesquisas essa direção se combina com as direções apontadas nos parágrafos anteriores, como, por exemplo, em Guo e Ma (2016), que estabelece o método direto de Lyapunov para sistemas de ordem $\alpha \in (1, 2)$, utilizando a inequação de Gronwall. A propósito, a filosofia do método direto de Lyapunov surge de uma observação fundamental da física, a de que a energia de um sistema físico estável (como, por exemplo, um determinado sistema mecânico) linear ou não linear é continuamente dissipada, de modo que o sistema tende a um ponto de equilíbrio em um dado intervalo de tempo. Assim, a estabilidade do sistema pode ser examinada através de uma função energia escalar. Pode-se discorrer qualitativamente acerca da associação entre a energia e a estabilidade de um sistema mecânico:

- O sistema mecânico descrito pelo vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ contém energia mecânica nula no ponto de equilíbrio $x^*(t)$, também chamado de ponto estacionário, no qual $\dot{x}(t) = 0$ e também ${}^c D_t^\alpha x^*(t) = 0$, conforme será visto;
- Estabilidade assintótica implica na convergência da energia mecânica para zero;

- Instabilidade está relacionada a um fornecimento crescente de energia mecânica, podendo em pouco tempo produzir danos ao sistema.

Estas observações indicam que o valor de uma função escalar que represente a energia do sistema mecânico reflete a magnitude do vetor de estado. Logo, a propriedade de estabilidade pode ser exibida através da variação da energia mecânica do sistema (SLOTINE; LI et al., 1991). Mediante o exposto, a função energia $V(x(t))$, associada ao sistema descrito pelo vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, deve ter duas propriedades:

- É estritamente positiva para todo $x(t)$, com $V(0) = 0$;
- É monotonicamente decrescente com a variação de $x(t)$.

As chamadas funções de Lyapunov satisfazem estas duas propriedades. O método direto de Lyapunov permite estudar a propriedade de estabilidade de sistemas dinâmicos, lineares ou não lineares, sem a necessidade de resolver as equações diferenciais do modelo. Através de uma candidata a função de Lyapunov é possível exibir a propriedade de estabilidade do sistema. Dessa forma, o método direto de Lyapunov permite que a estabilidade de um determinado sistema seja verificada. Isso significa que o sistema pode ser estável independente do fato de eventualmente não ser encontrada uma candidata a função de Lyapunov para concluir a sua estabilidade.

A seguir é desenvolvida a teoria para a extensão do método direto de Lyapunov para sistemas dinâmicos fracionários, lineares ou não lineares, a qual inclui o conceito de estabilidade Mittag-Leffler.

4.1 SISTEMAS DINÂMICOS DE ORDEM FRACIONÁRIA

Sejam ${}^{RL}D_t^\alpha$ e ${}^cD_t^\alpha$ os operadores de ordem fracionária $\alpha \in (0, 1]$, aplicados no intervalo $[0, t]$, segundo a definição de Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente. Este estudo se desenvolverá com o operador ${}^cD_t^\alpha$, pois a derivada de Caputo de uma constante é nula, as condições iniciais de um problema de valor inicial com a derivada de Caputo estão definidas em derivadas inteiras e os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico Caputo são os mesmos de um sistema em derivadas inteiras, conforme será visto.

4.1.1 Sistemas dinâmicos Riemann-Liouville

Definição 4. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) *O sistema dinâmico de ordem fracionária não autônomo Riemann-Liouville é definido por:*

$${}^{RL}D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (48)$$

com $\alpha \in (0, 1]$, $t \in [0, \infty]$, $x(t) \in \Omega$ é o vetor de estado do sistema, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem $x = 0$, $x(0)$ o vetor que contém os valores iniciais das variáveis de estado e $f(t, x(t)) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não-autônoma contínua por partes em t e localmente Lipschitz em $x(t) \in \Omega$.

A existência e unicidade da solução desse sistema está garantida, dado que $f(t, x(t))$ é localmente Lipschitz em $x(t) \in \Omega$ (PODLUBNY, 1998).

Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico de ordem arbitrária, em particular de ordem inteira. Se $x(t_1) = 0$ então $x(t) = 0$ para $t > t_1$. Nesse sentido, o ponto de equilíbrio é um ponto estacionário do sistema. A definição a seguir apresenta a caracterização de ponto de equilíbrio do sistema Riemann-Liouville.

Definição 5. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) *A constante x_0 é um ponto de equilíbrio do sistema Riemann-Liouville em (48) se, e somente se, ${}^{RL}D_t^\alpha x_0 = f(t, x_0)$.*

Conforme essa definição, o sistema pode estar em estado dinâmico apesar de estar no ponto de equilíbrio. Isto não ocorre para sistemas definidos com a derivada de Caputo, conforme será visto a seguir.

4.1.2 Sistemas dinâmicos Caputo

Considere a definição a seguir, apontada no decorrer do texto:

Definição 6. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) *O sistema dinâmico de ordem fracionária não autônomo Caputo é definido por:*

$${}^cD_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (49)$$

com $\alpha \in (0, 1]$, $t \in [0, \infty]$, $x(t) \in \Omega$ é o vetor de estado do sistema, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem $x = 0$, $x(0)$ o vetor que contém os valores iniciais das variáveis de estado e $f(t, x(t)) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não-autônoma contínua por partes em t e localmente Lipschitz em $x(t) \in \Omega$.

A existência e unicidade da solução deste sistema está garantida, dado que $f(t, x(t))$ é localmente Lipschitz em $x(t) \in \Omega$ (PODLUBNY, 1998).

Observação 5. *Ao longo deste trabalho será considerado o ponto de equilíbrio em $x = 0$ do sistema fracionário Caputo, o que não representa perda de generalidade, pois qualquer ponto pode ser deslocado para a origem através de uma mudança de variáveis. Suponha que o ponto de equilíbrio em (49) seja $\bar{x} \neq 0$ e considere a mudança de variáveis $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$. A*

derivada de ordem $\alpha \in (0, 1]$ de $y(t)$ é dada por:

$${}^c D_t^\alpha y(t) = {}^c D_t^\alpha [x(t) - \bar{x}(t)] = f(t, x(t)) = f(t, y(t) + \bar{x}(t)) = g(t, y(t)), \quad (50)$$

com $g(t, 0) = 0$. Assim, o sistema na nova variável $y(t)$ passa a ter o ponto de equilíbrio na origem.

A definição a seguir apresenta a caracterização de ponto de equilíbrio do sistema Caputo.

Definição 7. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) *A constante x_0 é um ponto de equilíbrio do sistema Caputo em (49) se, e somente se, $f(t, x_0) = 0$.*

A partir dessa definição, tem-se a seguinte proposição:

Teorema 16. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) *O sistema Caputo dado em (49), com $\alpha \in (0, 1]$, possui os mesmos pontos de equilíbrio do sistema de ordem inteira $\dot{x} = f(t, x)$.*

4.2 MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV FRACIONÁRIO

Através do método direto de Lyapunov é possível estudar a estabilidade de determinado sistema utilizando funções de Lyapunov. Suponha que não seja possível encontrar uma candidata a função de Lyapunov para discorrer sobre a estabilidade do sistema, isso não significa que o sistema é instável, como já mencionado. O resultado a seguir estende o método direto de Lyapunov para o caso de sistemas de ordem fracionária, o qual conduz ao conceito de estabilidade Mittag-Leffler.

Definição 8. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) *Seja o operador \mathcal{D}_t^α para denotar a derivada de ordem fracionária, em particular a derivada de Caputo ou a de Riemann-Liouville, e o seguinte sistema dinâmico de ordem fracionária não autônomo:*

$$\mathcal{D}_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (51)$$

com $\alpha \in (0, 1]$, $t \in [0, \infty]$, $x(t) \in \Omega$ é o vetor de estado do sistema, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem $x = 0$, $x(0)$ o vetor que contém os estados iniciais e $f(t, x(t)) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não-autônoma contínua por partes em t e localmente Lipschitz em $x(t) \in \Omega$.

A estabilidade Mittag-Leffler é definida da seguinte forma:

Definição 9. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2009) *Seja a função $m(x) \geq 0$ localmente Lipschitz em $x \in \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$, com $m(0) = 0$ e constante Lipschitz m_0 . A solução do sistema em (51) é dita Mittag-Leffler estável se:*

$$\|x(t)\| \leq [m(x(0))E_\alpha(-\lambda t^\alpha)]^b, \quad (52)$$

com $\alpha \in (0, 1]$, $x(0)$ o vetor das condições iniciais, $\lambda, b > 0$ e $E_\alpha(\cdot)$ a função Mittag-Leffler com $\beta = 1$, descrita no Apêndice A, equação (200).

Observação 6. Para $\alpha = 1$, tem-se $E_1(-\lambda t) = e^{-\lambda t}$ e a estabilidade Mittag-Leffler se reduz à estabilidade exponencial. Conforme a equação (52), as trajetórias de estado do sistema Mittag-Leffler estável permanecem confinadas à envoltória Mittag-leffler decrescente, para todo instante de tempo, e tendem para a origem do sistema quando $t \rightarrow \infty$.

Considere ainda a seguinte definição para estabilidade assintótica de sistemas fracionários:

Definição 10. (LIU et al., 2016) A solução do sistema fracionário em (51) é estável se, para algum $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para alguma condição inicial $\|x(0)\| < \delta$, a solução $x(t)$ satisfaz $\|x(t)\| < \varepsilon$, para todo $t > 0$. A solução é dita assintoticamente estável se é estável e se, além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Observação 7. A Definição 10 é idêntica à definição de estabilidade assintótica para sistemas de ordem inteira. Diante da Definição 10 e da equação (52), a estabilidade Mittag-Leffler implica em estabilidade assintótica.

A estabilidade Mittag-Leffler do sistema em (51) pode ser investigada através de uma candidata a função de Lyapunov $V(x)$ e de sua derivada de Caputo ${}^c D_t^\alpha V(x)$, conforme mostra o teorema a seguir.

Teorema 17. (LI; CHEN; PODLUBNY, 2009) Seja $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema de ordem fracionária em (51) e $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável em t e localmente Lipschitz com respeito a $x(t)$ tal que:

$$\lambda_1 \|x(t)\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \lambda_2 \|x(t)\|^{ab}, \quad (53)$$

$${}^c D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\lambda_3 \|x(t)\|^{ab}, \quad (54)$$

com $\alpha \in (0, 1]$, $t \in [0, \infty)$, $x(t) \in \Omega$ o vetor de estado do sistema, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio que contém a origem $x = 0$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a$ e b constantes positivas arbitrárias. Então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é Mittag-Leffler estável. Se esta suposição é válida para toda condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente Mittag-Leffler estável.

Demonstração. Multiplicando a inequação (53) por $-\lambda_3/\lambda_2$:

$$-\frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2} \|x(t)\|^a \geq -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(t, x(t)) \geq -\lambda_3 \|x(t)\|^{ab}.$$

Incluindo a inequação (54):

$$-\frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2} \|x(t)\|^a \geq -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(t, x(t)) \geq -\lambda_3 \|x(t)\|^{ab} \geq {}^c D_t^\alpha V(t, x(t)),$$

$${}^c D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(t, x(t)).$$

Assim, existe uma função não negativa $m(t)$ tal que:

$${}^c D_t^\alpha V(t, x(t)) + m(t) = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(t, x(t)). \quad (55)$$

Aplicando a transformada de Laplace, com $V(s) = \mathcal{L}\{V(t, x(t))\}$, tendo em vista que $\alpha \in (0, 1]$ (PODLUBNY, 1998), tem-se:

$$s^\alpha V(s) - V(0, x(0))s^{\alpha-1} + M(s) = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(s),$$

$$V(s) = V(0, x(0)) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}} - M(s) \frac{1}{s^\alpha + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}}.$$

Dado que $V(t, x(t))$ é localmente Lipschitz com respeito a $x(t)$, a solução única da equação em (55), obtida com a transformada de Laplace inversa, é:

$$V(t, x(t)) = V(0, x(0)) E_\alpha \left[-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t^\alpha \right] - M(t) * \left\{ t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t^\alpha \right] \right\},$$

em que o símbolo ‘*’ designa a integral de convolução.

Os termos $t^{\alpha-1}$ e $E_\alpha \left[-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t^\alpha \right]$ são funções não negativas, logo:

$$V(t) \leq V(0, x(0)) E_\alpha \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t^\alpha \right).$$

A inequação em (53), substituindo-a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \|x(t)\|^a &\leq V(t) \leq V(0, x(0)) E_\alpha \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t^\alpha \right), \\ \|x(t)\| &\leq \left[\frac{V(0, x(0))}{\lambda_1} E_\alpha \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t^\alpha \right) \right]^{\frac{1}{a}}. \end{aligned} \quad (56)$$

Observe que $V(0, x(0))/\lambda_1 > 0$ para $x(0) \neq 0$. Define-se:

$$m(x(0)) = \begin{cases} \frac{V(0, x(0))}{\lambda_1} & \text{se } x(0) > 0, \\ 0 & \text{se } x(0) = 0. \end{cases}$$

A função $V(t, x(t))$ é localmente Lipschitz com respeito a $x(t)$ e $V(0, x(0)) = 0$ se e somente se $x(0) = 0$, então $m(x(0))$ é localmente Lipschitz com respeito a $x(0)$, com $m(0) = 0$. Logo, a inequação (56) equivale à estabilidade Mittag-Leffler. \square

4.3 LEMAS RECENTES RELACIONADOS AO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV FRA- CIONÁRIO PARA SISTEMAS CAPUTO

Os lemas apresentados a seguir permitem uma avaliação mais simplificada da estabilidade de sistemas de ordem fracionária descritos com a derivada de Caputo, no contexto da extensão fracionária do método direto de Lyapunov, considerada na seção anterior.

Lema 2. (AGUILA-CAMACHO; DUARTE-MERMOUD; GALLEGOS, 2014) *Seja uma função $x(t) \in \mathbb{R}$ diferenciável em $t \in [0, \infty]$. Então, para $\alpha \in (0, 1)$:*

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x^2(t) \leq x(t) [{}^c D_t^\alpha x(t)]. \quad (57)$$

Demonstração. Deve-se demonstrar a seguinte desigualdade:

$$x(t) [{}^c D_t^\alpha x(t)] - \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x^2(t) \geq 0. \quad (58)$$

Seja a derivada de Caputo de ${}^c D_t^\alpha x(t)$ e ${}^c D_t^\alpha x^2(t)$, respectivamente:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = I_t^{1-\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha x^2(t) &= I_t^{1-\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} x^2(t) \right\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \left[\frac{d}{d\tau} x^2(\tau) \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} [2x(\tau)\dot{x}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (60)$$

As equações em (59) e (60), substituindo-as em (58), obtém-se:

$$x(t) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} [2x(\tau)\dot{x}(\tau)] d\tau \right\} \geq 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^\alpha} x(t)\dot{x}(\tau) - \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} x(\tau)\dot{x}(\tau) \right] d\tau \geq 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} [x(t) - x(\tau)] \dot{x}(\tau) d\tau \geq 0.$$

Da mudança de variáveis $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$, $\frac{dy(\tau)}{d\tau} = -\frac{dx(\tau)}{d\tau}$, obtém-se:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} [y(\tau)\dot{y}(\tau)] d\tau \leq 0. \quad (61)$$

Para uma integração por partes considere:

$$\mu(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha}, \quad \frac{d\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha+1}},$$

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = y(\tau)\dot{y}(\tau), \quad v(\tau) = \frac{1}{2}y(\tau)^2.$$

Realizando a integração por partes em (61):

$$\left\{ \lim_{\tau \rightarrow t} \left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] - \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] \right\} - \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \leq 0. \quad (62)$$

Do limite à esquerda, tem-se:

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \left\{ \frac{[x(t) - x(\tau)]^2}{(t-\tau)^\alpha} \right\},$$

que consiste em uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t} \left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \left[\frac{-2x(t)\dot{x}(\tau) + 2x(\tau)\dot{x}(\tau)}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \left[\frac{[2x(t)\dot{x}(\tau) - 2x(\tau)\dot{x}(\tau)](t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha} \right] = 0. \end{aligned}$$

Do termo $(t-\tau)^{1-\alpha}$ fica evidente que a validade deste lema implica em $\alpha \in (0, 1)$. Voltando a equação (62), tem-se:

$$\frac{y^2(0)}{2\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \geq 0. \quad (63)$$

Esta desigualdade é verdadeira para $\tau \in (0, \infty)$. Portanto, a desigualdade em (57) é válida. \square

Observação 1. Para $\alpha = 1$, da regra da cadeia, tem-se $\frac{d}{dt}x^2(t) = 2x(t)\frac{d}{dt}x(t)$. De fato, de (57):

$$\begin{aligned} 2x(t)[{}^c D_t^\alpha x(t)] - {}^c D_t^\alpha x^2(t) &\geq 0, \\ 2x(t) \left[I_t^{1-\alpha} \left\{ \frac{d}{dt}x(t) \right\} \right] - \left[I_t^{1-\alpha} \left\{ \frac{d}{dt}x^2(t) \right\} \right] &\geq 0, \\ 2x(t)\frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}x^2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Corolário 1. (AGUILA-CAMACHO; DUARTE-MERMOUD; GALLEGOS, 2014) *Seja o sistema de ordem fracionária:*

$${}^c D_t^\alpha x(t) = f(x(t)),$$

com $\alpha \in (0, 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}$ e $x = 0$ o ponto de equilíbrio. Se $x(t)f(x(t)) \leq 0$, $\forall x$ então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável. Se $x(t)f(x(t)) < 0$, $\forall x \neq 0$, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Demonstração. Em Aguila-Camacho, Duarte-Mermoud e Gallegos (2014) é encontrada a demonstração desse corolário, a qual utiliza o Lema 2. \square

O lema a seguir generaliza o Lema 2, considerando $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Lema 3. (DUARTE-MERMOUD et al., 2015) *Seja $x(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$, com funções diferenciáveis $x_1(t), \dots, x_n(t)$ em $t \in [0, \infty]$. Então, para $\alpha \in (0, 1)$:*

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{x^T(t)x(t)\} \leq x^T(t) {}^c D_t^\alpha x(t). \quad (64)$$

Demonstração. Utilizando o Lema 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_1^2(t) &\leq x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t), \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_n^2(t) &\leq x_n(t) {}^c D_t^\alpha x_n(t). \end{aligned}$$

Somando as inequações anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_1^2(t) + \cdots + \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_n^2(t) &\leq x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + \cdots + x_n(t) {}^c D_t^\alpha x_n(t), \\ \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \left\{ \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \right\} &\leq \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix} {}^c D_t^\alpha \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, o Lema 2 tem o seu equivalente para o vetor de funções diferenciáveis $x(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{x^T(t)x(t)\} \leq x^T(t) {}^c D_t^\alpha x(t). \quad (65)$$

Observe que a importância desse lema está relacionada com a abordagem da derivada de Caputo da função quadrática $V(x) = x^T(t)x(t)$. Nesse sentido, o lema a seguir, o qual fornece um limitante superior para a derivada de Caputo de $V(x) = x^T(t)Px(t)$, com $P = P^T$, será a ferramenta que permitirá os desenvolvimentos propostos neste trabalho. \square

Lema 4. (DUARTE-MERMOUD et al., 2015) *Sejam $x(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$, com $x_1(t), \dots, x_n(t)$ funções diferenciáveis em $t \in [0, \infty]$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz constante, simétrica e positiva definida. Para $\alpha \in (0, 1]$:*

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{x^T(t)Px(t)\} \leq x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)]. \quad (66)$$

Demonstração. Se $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, então existe uma matriz ortogonal $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $P = B\Lambda B^T$. Logo:

$$\frac{1}{2}x^T(t)Px(t) = \frac{1}{2}x^T(t) \{B\Lambda B^T\}x(t) = \frac{1}{2} [B^T x(t)]^T \Lambda [B^T x(t)].$$

Adotando a variável auxiliar $y(t) = B^T x(t)$, com $y(t) = [y_1(t) \ \cdots \ y_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^T(t)\Lambda y(t) &= \frac{1}{2} [y_1(t) \ \cdots \ y_n(t)] \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [\lambda_{11}y_1^2(t) + \cdots + \lambda_{nn}y_n^2(t)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_{ii}y_i^2(t). \end{aligned}$$

Aplicando o operador linear derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$:

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{y^T(t)\Lambda y(t)\} = \frac{1}{2} [\lambda_{11} {}^c D_t^\alpha y_1^2(t) + \cdots + \lambda_{nn} {}^c D_t^\alpha y_n^2(t)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} {}^c D_t^\alpha y_i^2(t). \quad (67)$$

As funções $y_1(t), \dots, y_n(t)$, que constituem o vetor $y(t)$, são diferenciáveis em $t \in [0, \infty]$. Assim, em decorrência do Lema 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha y_1^2(t) &\leq y_1(t) {}^c D_t^\alpha y_1(t), \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha y_n^2(t) &\leq y_n(t) {}^c D_t^\alpha y_n(t). \end{aligned}$$

Dado que $\lambda_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{11}}{2} [{}^c D_t^\alpha y_1^2(t)] &\leq \lambda_{11} y_1(t) {}^c D_t^\alpha y_1(t), \\ &\vdots \\ \frac{\lambda_{nn}}{2} [{}^c D_t^\alpha y_n^2(t)] &\leq \lambda_{nn} y_n(t) {}^c D_t^\alpha y_n(t). \end{aligned}$$

Somando as inequações anteriores:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} [{}^c D_t^\alpha y_i^2(t)] \leq \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} y_i(t) [{}^c D_t^\alpha y_i(t)]. \quad (68)$$

Substituindo (68) em (67):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{y^T(t) \Lambda y(t)\} &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} y_i(t) [{}^c D_t^\alpha y_i(t)], \\ &\leq \begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^c D_t^\alpha y_1(t) \\ \vdots \\ {}^c D_t^\alpha y_n(t) \end{bmatrix}, \\ &\leq y^T(t) \Lambda [{}^c D_t^\alpha y(t)]. \end{aligned}$$

Retornando para a variável $x(t)$, com $P = B \Lambda B^T$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{ [B^T x(t)]^T \Lambda [B^T x(t)] \} &\leq [B^T x(t)]^T \Lambda [{}^c D_t^\alpha \{ B^T x(t) \}], \\ \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{ x^T(t) P x(t) \} &\leq x^T(t) P [{}^c D_t^\alpha x(t)]. \end{aligned}$$

□

É proposta a seguir uma prova mais direta para o Lema 4.

Demonstração. Se $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positiva definida então existe uma matriz não singular $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $P = L^T L$. Assim, $\frac{1}{2} x^T(t) P x(t) = \frac{1}{2} x^T(t) [L^T L] x(t) = \frac{1}{2} [Lx(t)]^T [Lx(t)]$. Adotando a variável auxiliar $z(t) = Lx(t)$, com $z(t) = [z_1(t) \cdots z_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ e $z_1(t), \dots, z_n(t)$ funções diferenciáveis no intervalo $t \in [0, \infty]$, aplicando o operador derivada de Caputo e utilizando o Lema 3, obtém-se:

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{ z^T(t) z(t) \} \leq z^T(t) [{}^c D_t^\alpha z(t)].$$

Retornando a variável $x(t)$:

$$\frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{ [Lx(t)]^T [Lx(t)] \} = \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha \{ x^T(t) P x(t) \} \leq x^T(t) P [{}^c D_t^\alpha x(t)].$$

□

Observação 2. Para $\alpha = 1$, tem-se: $\frac{d}{dt} \{ x^T(t) P x(t) \} = 2x^T(t) P \frac{d}{dt} x(t)$. De fato, de (66):

$$\begin{aligned} 2x^T(t) P [{}^c D_t^\alpha x(t)] - {}^c D_t^\alpha \{ x^T(t) P x(t) \} &\geq 0, \\ 2x^T(t) P \left[I_t^{1-\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} \right] - \left[I_t^{1-\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) \right\} \right] &\geq 0, \\ 2x^T(t) P \frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} \{ x^T(t) P x(t) \} &= 0. \end{aligned}$$

O lema a seguir fornece um limitante superior para a derivada de Caputo do traço do produto de uma matriz variante no tempo e de sua transposta.

Lema 5. (DUARTE-MERMOUD et al., 2015) *Seja $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz variante em $t \in [0, \infty]$, formada por funções diferenciáveis $a_{ij}(t)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Então, para $\alpha \in (0, 1]$:*

$${}^c D_t^\alpha \{tr [A^T(t)A(t)]\} \leq 2 tr \{A^T(t) [{}^c D_t^\alpha A(t)]\}, \quad (69)$$

Demonstração. Omitindo os termos fora da diagonal principal, para um instante $t \in [0, \infty]$, tem-se:

$$A^T(t)A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}^2(t) + \dots + a_{m1}^2(t) & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & a_{1n}^2(t) + \dots + a_{mn}^2(t) \end{bmatrix},$$

$$tr \{A^T(t)A(t)\} = \sum_{j=1}^n [a_{1j}^2(t) + \dots + a_{mj}^2(t)] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}^2(t). \quad (70)$$

Aplicando o operador derivada de Caputo e utilizando o Lema 2:

$${}^c D_t^\alpha \{tr [A^T(t)A(t)]\} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m {}^c D_t^\alpha a_{ij}^2(t) \leq 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}(t) [{}^c D_t^\alpha a_{ij}(t)]. \quad (71)$$

Similar a relação em (70), pode-se concluir que $tr \{A^T(t)B(t)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}(t)b_{ij}(t)$, com $B^{n \times m}$ variante em $t \in [0, \infty]$, formada por funções diferenciáveis $b_{ij}(t)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Se $B(t) = {}^c D_t^\alpha A(t)$, então $b_{ij}(t) = {}^c D_t^\alpha a_{ij}(t)$ e:

$$2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}(t) [{}^c D_t^\alpha a_{ij}(t)] = 2 tr \{A^T [{}^c D_t^\alpha A(t)]\}. \quad (72)$$

Logo, de (71) e (72) obtém-se:

$${}^c D_t^\alpha [tr \{A^T(t)A(t)\}] \leq 2 tr \{A^T [{}^c D_t^\alpha A(t)]\}. \quad (73)$$

□

O lema apresentado a seguir é mais recente e possibilita analisar a estabilidade via método direto de Lyapunov fracionário de sistemas que possuem uma dinâmica não linear polinomial, permitindo também utilizar funções de Lyapunov polinomiais.

Lema 6. (ANAYA et al., 2017) *Seja $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo $t \in (t_0, b)$. Então, para $\alpha \in (0, 1]$:*

$$\frac{1}{n} {}^c D_t^\alpha x^n(t) \leq x^{n-1}(t) {}^c D_t^\alpha x^{n-1}(t), \quad \text{com } n \in \{2k, k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}\}. \quad (74)$$

Demonstração. A demonstração é encontrada em Anaya et al. (2017). \square

Observação 8. Em Anaya et al. (2017) é demonstrado que o Lema 6 é válido para n ímpar se $x(t)$ é uma função não negativa.

4.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE ORDEM FRAÇÃO- NÁRIA CAPUTO

Considere o seguinte problema de valor inicial de ordem não inteira (PVINI), segundo a derivada de Caputo, correspondente ao sistema dinâmico em (49):

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x(t) = F(t, x(t)), \\ \left. \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right|_{t=0^+} = x_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (75)$$

com $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $x_0^{(k)}$ o vetor das condições iniciais. Se $F(t, x(t))$ é contínua em t e Lipschitz com respeito a $x(t)$, com constante Lipschitz L num conjunto adequado G , então o problema de valor inicial determina uma solução única em um intervalo $[0, b]$. Da integral de Riemann-Liouville sobre as equações do sistema em (75), chega-se a conhecida equação integral de Volterra:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_0^{(k)}}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad (76)$$

utilizada na implementação numérica da solução do sistema Caputo, através do algoritmo de Adams-Bashforth.

4.4.1 Solução numérica fundamentada na equação integral de Volterra - método de Adams-Bashforth fracionário

O método de Adams-Bashforth fracionário foi primeiramente formulado por Diethelm (DIETHELM; FORD; FREED, 2002, 2004) e é uma discretização do tipo uniforme da equação em (76), com número de pontos igual a $N + 1$, tempo de simulação T , passo de integração $h = T/N$, malha uniforme $t_n = nh$, ($n = 0, 1, \dots, N$) e estimativa da resposta sob o passo de integração h denotada por $x_h(t_{n+1})$. O método calcula $x_h(t_{n+1})$ através de uma quadratura trapezoidal, gerando uma discretização implícita em $x_h(t_{n+1})$. Uma estimativa inicial, o preditor $x_h^p(t_{n+1})$, é calculada através de uma quadratura retangular. Com o valor de $x_h^p(t_{n+1})$ é então estimada a resposta $x_h(t_{n+1})$ na equação implícita, a cada passo de integração. De modo geral, o algoritmo

consiste na implementação das seguintes equações:

$$\begin{cases} x_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} F(t_{n+1}, x_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} F(t_j, x_h(t_j)), \\ x_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} x_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} F(t_j, x_h(t_j)), \end{cases} \quad (77)$$

com:

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & \text{se } j=0, \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} & \text{se } 1 \leq j \leq n, \\ 1 & \text{se } j=n+1, \end{cases}$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} [(n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha].$$

Um estudo detalhado acerca deste método pode ser encontrado em Diethelm, Ford e Freed (2002) e Li e Tao (2009).

4.4.2 Solução numérica fundamentada nos operadores de Grünwald-Letnikov e Riemann-Liouville.

O método numérico apresentado nessa seção é fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e de Riemann-Liouville e na relação entre a derivada de Riemann-Liouville e de Grünwald-Letnikov. Seja a derivada fracionária de $x(t) \in \mathbb{R}^n$ segundo a definição de Grünwald-Letnikov, dada em (44). Uma aproximação para essa derivada em $t > 0$ pode ser obtida dividindo o intervalo $[0, t]$ em uma malha de N pontos:

$${}^{GL}D_t^\alpha x(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N c_k^\alpha x(t-hk),$$

com $h = t/N$, em que $c_k^\alpha = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$, cujo cálculo pode ser feito de forma recursiva:

$$\begin{cases} c_0^\alpha = 1, \\ c_k^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) c_{k-1}^\alpha, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Conforme o Teorema 14, ${}^{RL}D_t^\alpha x(t) = {}^{GL}D_t^\alpha x(t)$ para a classe das funções contínuas até a ordem $n = [\alpha]$. Então é válida a seguinte aproximação para a equação diferencial fracionária

segundo a derivada de Riemann-Liouville:

$${}^{RL}D_t^\alpha x(t) = F(t, x(t)) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N c_k^\alpha x(t-hk) = \frac{1}{h^\alpha} \left(x(t) + \sum_{k=1}^N c_k^\alpha x(t-hk) \right), \quad (78)$$

cujas aproximação para a solução é, pois, calculada por:

$$x(t) \approx h^\alpha F(t, x(t)) - \sum_{k=1}^N c_k^\alpha x(t-hk),$$

a qual é implícita em $x(t)$. Este problema pode ser contornado utilizando o valor da função no ponto imediatamente anterior ao ponto que se deseja estimar. Denotemos x_i a aproximação para $x(t_i)$ na malha $t = ih, i = 1, \dots, N$. Assim, é apresentado o algoritmo para determinar a solução $x(t)$ da equação diferencial segundo Riemann-Liouville com condições iniciais $x(0) = x_0$:

$$x_i = h^\alpha F(t_{i-1}, x_{i-1}) - \sum_{k=1}^i c_k^\alpha x_{i-k}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (79)$$

Este algoritmo pode ser utilizado para calcular a solução do problema de valor inicial Caputo em (75), mediante a relação em (33) entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville. Esta relação está contemplada no teorema a seguir:

Teorema 18. (SALGADO, 2015) *Sejam $\alpha > 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se $x(t)$ é solução do problema de valor inicial Caputo em (75), então $x(t)$ satisfaz a equação:*

$${}^{RL}D_t^\alpha x(t) = F(t, x(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (80)$$

Assim, as equações em (80) são discretizadas de forma análoga às equações em (78), obtendo-se:

$$x_{i+1} = h^\alpha \left[F(t_i, x(t_i)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_0^{(k)} t_{i+1}^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \right] - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha x_{i-k+1},$$

em que x_{i+1} representa a aproximação de $x(t_{i+1})$ na malha $t = ih, i = 1, \dots, N$. Um estudo detalhado acerca deste método pode ser encontrado em Salgado (2015).

4.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 4. (DUARTE-MERMOUD et al., 2015) *Seja o sistema linear fracionário variante no tempo, com $\alpha \in (0, 1]$ e $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ o vetor de estado:*

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x_1(t) = -\sin^2(t)x_1(t) - \sin(t)\cos(t)x_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_2(t) = -\sin(t)\cos(t)x_1(t) - \cos^2(t)x_2(t). \end{cases} \quad (81)$$

A estabilidade deste sistema é investigada utilizando a princípio o método direto de Lyapunov clássico. Seja $V(x(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)$ a candidata a função de Lyapunov do tipo quadrática, cuja taxa de variação é:

$$\dot{V}(x(t)) = x_1(t)\dot{x}_1(t) + x_2(t)\dot{x}_2(t). \quad (82)$$

Aplicando o operador derivada de Caputo de ordem $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, no sistema em (81), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -{}^c D_t^{1-\alpha} \{ \sin^2(t)x_1(t) \} + {}^c D_t^{1-\alpha} \{ \sin(t)\cos(t)x_2(t) \}, \\ \dot{x}_2(t) = -{}^c D_t^{1-\alpha} \{ \sin(t)\cos(t)x_1(t) \} + {}^c D_t^{1-\alpha} \{ \cos^2(t)x_2(t) \}. \end{cases}$$

Substituindo essas equações em (82), a taxa de variação da função de Lyapunov é:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & -x_1(t){}^c D_t^{1-\alpha} \{ \sin^2(t)x_1(t) \} - x_1(t){}^c D_t^{1-\alpha} \{ \sin(t)\cos(t)x_2(t) \} \\ & - x_2(t){}^c D_t^{1-\alpha} \{ \sin(t)\cos(t)x_1(t) \} - x_2(t){}^c D_t^{1-\alpha} \{ \cos^2(t)x_2(t) \}. \end{aligned}$$

Note que não é possível obter sistematicamente um sinal para $\dot{V}(x(t))$ e assim concluir sobre a estabilidade do sistema. Entretanto, a extensão do método direto de Lyapunov contemplada no Teorema 17 permite investigar a estabilidade do sistema fracionário através de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, com $\alpha \in (0, 1]$. Para o cálculo de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, considere a regra de Leibniz para a derivada de Caputo, em (37):

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t)) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x_1^{(k)}(t) \left[{}^c D_t^{\alpha-k} x_1(t) \right] + \frac{x_1(0) [x_1(t) - x_1(0)]}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x_2^{(k)}(t) \left[{}^c D_t^{\alpha-k} x_2(t) \right] + \frac{x_2(0) [x_2(t) - x_2(0)]}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (83)$$

em que $\binom{\alpha}{k}$ é o coeficiente binomial generalizado.

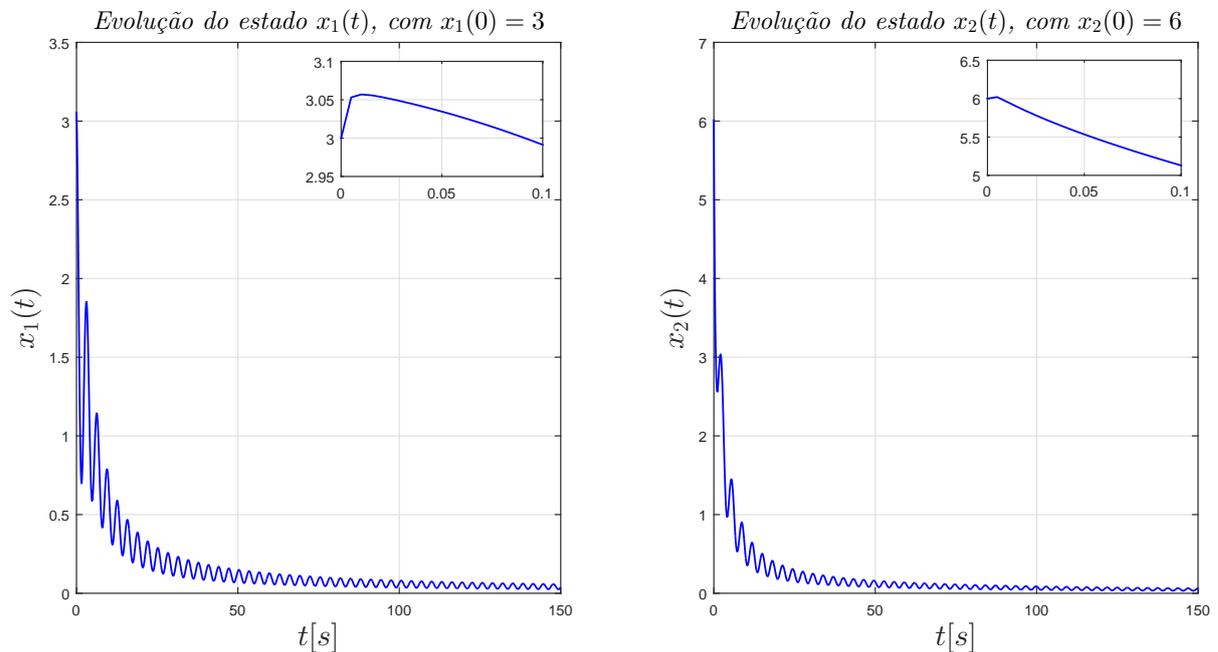
Perceba que o cálculo de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$ inclui uma soma infinita e a problemática se agrava com a necessidade de considerar as sucessivas derivadas fracionárias dos estados do sistema. Assim, calcular de forma exata a derivada fracionária de uma função energia do tipo quadrática através da extensão da regra de Leibniz é inviável. No entanto, esta dificuldade é contornada utilizando o Lema 2:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t)) = & \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_2^2(t) \leq x_1(t){}^c D_t^\alpha x_1(t) + x_2(t){}^c D_t^\alpha x_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq & -x_1(t) \{ \sin^2(t)x_1(t) + \sin(t)\cos(t)x_2(t) \} \\ & - x_2(t) \{ \sin(t)\cos(t)x_1(t) + \cos^2(t)x_2(t) \}, \\ {}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq & -[x_1(t)\sin(t) + x_2(t)\cos(t)]^2 \leq 0, \quad \forall x(t). \end{aligned}$$

Do Corolário 1, tem-se que a origem do sistema em (81) é um ponto de equilíbrio estável.

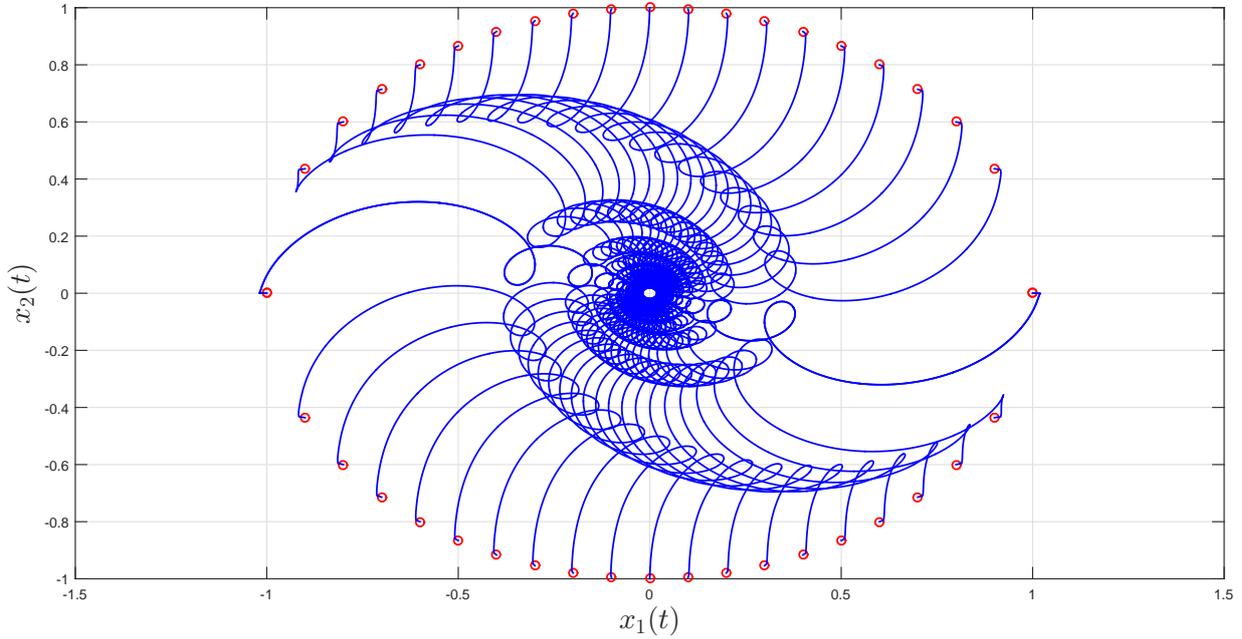
A Figura 2 apresenta a evolução dos estados do sistema fracionário para a ordem $\alpha = 0,8$ e condições iniciais $x_1(0) = 3$ e $x_2(0) = 6$, os quais são estáveis, como constatado na análise analítica. A simulação utiliza o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, apresentado na Seção 4.4.2, com passo de integração $p = 0,005$ e tempo de simulação de 150 segundos. Através da função de Lyapunov considerada não foi possível concluir se o sistema apresenta estabilidade assintótica, uma vez que ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq 0$, $\forall x(t)$. Suponha que o sistema seja assintoticamente estável, neste caso é necessário encontrar uma candidata a função de Lyapunov que exiba essa propriedade, com $V(x(t)) < 0$, $x \neq 0$. A Figura 3 apresenta o plano de fase do sistema em (81), para condições iniciais separadas por um passo de 0,1 em relação ao eixo de $x_1(t)$ e localizadas sobre uma circunferência de raio unitário centrada na origem. A simulação novamente utiliza o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, com passo de integração $p = 0,01$ e tempo de simulação de 50 segundos.

Figura 2 - Evolução das variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema de ordem $\alpha = 0,8$ em (81), para condições iniciais $x_0 = [3 \ 6]$.



Fonte: Próprio Autor

Figura 3 - Plano de fase do sistema linear, variante no tempo e de ordem 0,8, em (81).



Fonte: Próprio Autor

Exemplo 5. (DUARTE-MERMOUD et al., 2015) *Seja o seguinte sistema não linear de ordem fracionária, com $\alpha \in (0, 1]$ e $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ o vetor de estado:*

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \quad (84)$$

Seja a candidata a função de Lyapunov do tipo quadrática $V(x(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t)$. Aplicando duas vezes o Lema 2:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t)) &= \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{4} {}^c D_t^\alpha x_2^4(t) \leq x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) {}^c D_t^\alpha x_2^2(t), \\ {}^c D_t^\alpha V(x(t)) &\leq x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + x_2^3(t) {}^c D_t^\alpha x_2(t). \end{aligned}$$

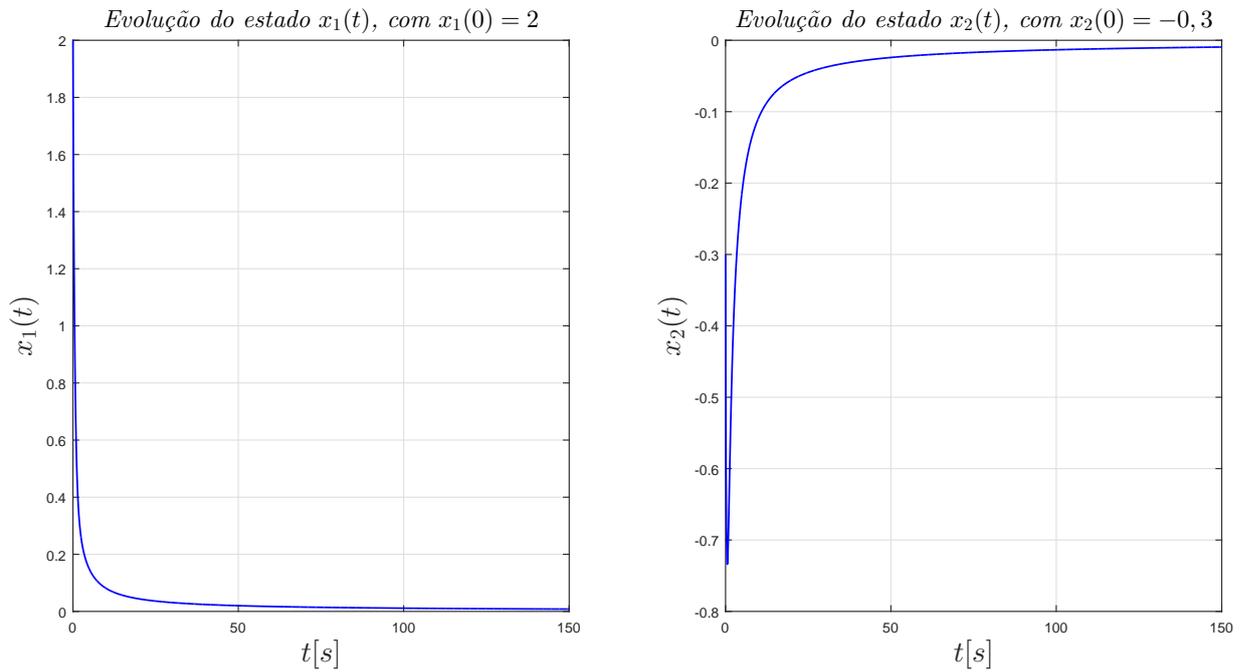
As equações do sistema em (84), substituindo-as, obtém-se:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq -(x_1^2 + x_2^4) < 0, \text{ para } x \neq \vec{0}.$$

Do Teorema 17, tem-se que a origem do sistema em (84) é, pois, um ponto de equilíbrio Mittag-Leffler estável.

A Figura 4 apresenta a evolução dos estados do sistema fracionário para a ordem $\alpha = 0,8$ e condições iniciais $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = -0,3$, os quais são assintoticamente estáveis, como constatado na análise analítica. A simulação utiliza o algoritmo preditor-corretor de Adams-Bashforth fracionário, abordado na Seção 4.4.1, com passo de integração $p = 0,05$ e tempo de simulação de 150 segundos.

Figura 4 - Evolução das variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema de ordem $\alpha = 0,8$ em (84), para condições iniciais $x_0 = [2 \ -0,3]$.



Fonte: Próprio Autor

Exemplo 6. (ANAYA et al., 2017) Seja o sistema não linear de ordem fracionária, com $\alpha \in (0, 1]$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ o vetor de estado e $x_2(t) \geq 0$:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2^{15}(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_2(t) = -x_2(t) - \frac{2}{6!} x_1(t). \end{cases} \quad (85)$$

Seja a candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x_1^2(t) + x_2^6(t)$. Do Lema 2:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) = {}^c D_t^\alpha x_1^2(t) + {}^c D_t^\alpha x_2^6(t) \leq 2x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + {}^c D_t^\alpha x_2^6(t).$$

Aplicando o Lema 6 por sucessivas cinco vezes, mediante a Observação 8, tem-se:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq 2x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + 6! x_2^{15}(t) {}^c D_t^\alpha x_2(t).$$

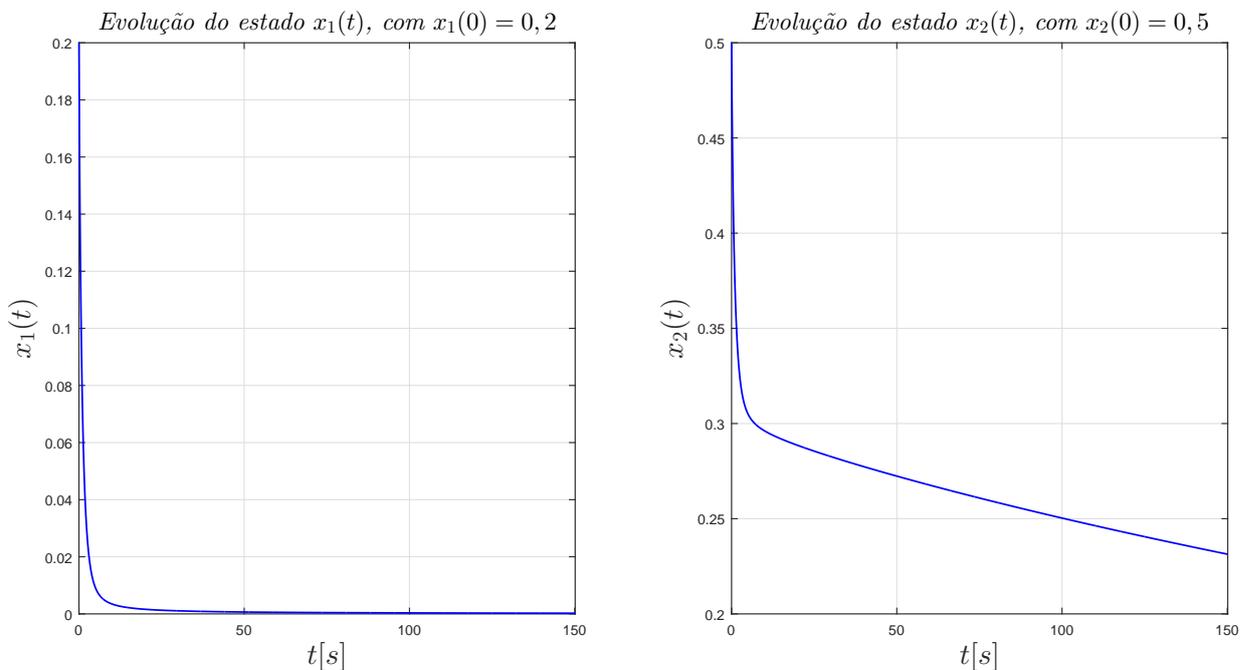
As equações do sistema em (85), substituindo-as:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t)) &\leq 2x_1(t) \left\{ -x_1(t) + x_2^{15}(t) \right\} + 6!x_2^{15}(t) \left\{ -x_2(t) - \frac{2}{6!}x_1(t) \right\}, \\ &\leq - \left(2x_1^2 + 6!x_2^{16} \right) < 0, \text{ para } x \neq \vec{0}. \end{aligned} \quad (86)$$

Do Teorema 17, tem-se que a origem do sistema em (85) é, pois, um ponto de equilíbrio Mittag-Leffler estável. A Figura 5 apresenta a evolução dos estados do sistema fracionário para a ordem $\alpha = 0,9$ e condições iniciais $x_1(0) = 0,2$ e $x_2(0) = 0,5$, os quais são assintoticamente estáveis, como constatado na análise analítica. A simulação utiliza o algoritmo preditor-corretor de Adams-Bashforth fracionário, abordado na Seção 4.4.1, com passo de integração $p = 0,05$ e tempo de simulação de 150 segundos.

O algoritmo de Adams-Bashforth fracionário oriundo da discretização da integral de Volterra representa a resposta do sistema fracionário Caputo com melhor exatidão. Entretanto, nas demais simulações da resposta do sistema fracionário Caputo presentes nesse trabalho será utilizado o algoritmo baseado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, pois este apresenta menor esforço computacional em relação ao algoritmo de Adams-Bashforth.

Figura 5 - Evolução das variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema de ordem $\alpha = 0,9$ em (85), para condições iniciais $x_0 = [0,2 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio Autor

4.6 CONCLUSÕES PARCIAIS

Este capítulo apresentou o método direto de Lyapunov para sistemas de ordem fracionária. Foi considerado o conceito de estabilidade Mittag-Leffler, a qual implica em estabilidade assintótica. Verificou-se que, se existe uma candidata a função de Lyapunov $V(x(t))$ tal que ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < 0$ para todo $x \neq 0$, com $x(t)$ o vetor de estado do sistema, então o sistema é Mittag-Leffler estável. Posteriormente, foram apresentados lemas recentes relacionados a sistemas fracionários descritos com a derivada de Caputo. Por exemplo, mediante o Lema 4 tem-se que ${}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t)) = 2x^T(t) {}^c D_t^\alpha x(t)$, em que ${}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))$ é o limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. Por fim, foram utilizados alguns sistemas não lineares para verificar a efetividade da metodologia. A simulação utiliza o algoritmo de Adams-Bashforth, o qual discretiza a equação integral de Volterra, correspondente à solução de sistemas dinâmicos Caputo, ou o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville.

5 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADO VIA LMI

O desenvolvimento da teoria do controle fracionário considera problemas de otimização convexa envolvendo LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*). Em Moze, Sabatier e Oustaloup (2005) são propostas LMIs na caracterização da estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 2)$, baseadas na análise geométrica do domínio de estabilidade desses sistemas. Entre outros resultados, são fornecidas LMIs para a caracterização do domínio de instabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$, considerando que o domínio de instabilidade e estabilidade desses sistemas é uma região convexa e não convexa, respectivamente, como já verificado na Figura 1. Estes resultados são reunidos e aperfeiçoados em Sabatier, Moze e Farges (2010) e Li e Zhang (2011). A literatura contém condições em LMIs para a estabilidade robusta e estabilização robusta de sistemas dinâmicos de ordem fracionária, via realimentação do vetor de estado, para $\alpha \in (0, 2)$ com a planta contendo incertezas reais positivas (MA; LU; CHEN, 2014); para $\alpha \in (1, 2)$ com a planta contendo incertezas intervalares (LU; CHEN, 2009), politópicas (FARGES; SABATIER; MOZE, 2011) e incertezas limitadas em norma (NDOYE et al., 2013) e para $\alpha \in (0, 1)$ com a planta contendo incertezas intervalares (LU; CHEN, 2010), politópicas (FARGES; SABATIER; MOZE, 2011), intervalares e politópicas (ADELIPOUR; ABOOEE; HAERI, 2015) e incertezas limitadas em norma (ZHANG; LI, 2016).

Este capítulo propõe o projeto de controladores chaveados para sistemas lineares Caputo incertos utilizando LMIs. O controle é realizado através da realimentação do vetor de estado, com o ganho de realimentação projetado. Algumas notações serão utilizadas ao longo deste capítulo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \text{ com } r \in \mathbb{N}, \quad (A, B, K)(\beta) = \sum_{i=1}^r \beta_i (A_i, B_i, K_i), \\ \beta &= [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r], \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \beta_i = 1, \end{aligned} \quad (87)$$

sendo $r = 2^s$ e s o número de parâmetros incertos distintos do sistema fracionário linear.

5.1 TAXA DE DECAIMENTO MITTAG-LEFFLER PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA

Definição 11. *Seja o sistema linear Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$:*

$${}^c D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (88)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

A taxa de decaimento para sistemas de ordem inteira é definida como a maior constante real $\gamma > 0$, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0$, com $x(t)$ o vetor de estado do sistema, (BOYD et al., 1994). É definida a seguir a taxa de decaimento Mittag-Leffler, para o sistema fracionário em (88).

Definição 12. (KUZMINSKAS et al., 2017) *A taxa de decaimento Mittag-Leffler é a maior constante real $\gamma > 0$, tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{E_\alpha(2\gamma t^\alpha)} \|x(t)\| = 0. \quad (89)$$

Note que o decrescimento de $\|x(t)\|$ deve superar o crescimento de $\sqrt{E_\alpha(2\gamma t^\alpha)}$ e o escalar γ corresponde então ao máximo decaimento da função Mittag-Leffler capaz de configurar o limite em (89), para toda condição inicial do sistema fracionário. Esta informação da taxa de decaimento para sistemas fracionários pode ser interpretada no contexto da estabilidade quadrática. Antes, considere o lema a seguir:

Lema 7. (LIU et al., 2016) *Seja $x(t) \in \mathbb{R}^n$ um vetor de funções diferenciáveis. Se uma função contínua $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz ${}^c D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\lambda V(t, x(t))$, com $\alpha \in (0, 1]$ e $\lambda > 0$, então:*

$$V(t, x(t)) \leq V(0, x(0)) E_\alpha(-\lambda t^\alpha).$$

Mediante à Definição 12 e ao Lema 7, o lema seguinte é proposto:

Lema 8. (KUZMINSKAS et al., 2017) *Seja $V(x) = x(t)^T P x(t)$, com $P = P^T$, a candidata a função de Lyapunov aplicada no sistema em (88) e $\gamma \in \mathbb{R}$ um escalar positivo. Então a condição:*

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < -2\gamma V(x(t)), \quad (90)$$

se satisfeita para todo $x \neq 0$, garante que:

$$\|x(t)\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| \sqrt{E_\alpha(-2\gamma t^\alpha)}. \quad (91)$$

Assim, o sistema é Mittag-Leffler estável e considera taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Demonstração. Para $P = P^T > 0$, tem-se:

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(t)\|^2, \quad (92)$$

sendo $\lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_{\max}(P)$ o menor e o maior autovalor de P , respectivamente. Do Lema 7, se $V(x) = x(t)^T P x(t)$, satisfaz a condição ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < -2\gamma V(x(t))$, então, de (92):

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) < V(x(0)) E_\alpha(-2\gamma t^\alpha). \quad (93)$$

Ainda de (92), para $t = 0$, $V(x(0)) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|^2$. Do fato de que $E_\alpha(-2\gamma t^\alpha) > 0$, $\forall t > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$, tem-se:

$$V(x(0))E_\alpha(-2\gamma t^\alpha) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|^2 E_\alpha(-2\gamma t^\alpha). \quad (94)$$

De (93) e de (94), obtém-se:

$$\lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) < V(x(0))E_\alpha(-2\gamma t^\alpha) \leq \lambda_{\max}(P) \|x(0)\|^2 E_\alpha(-2\gamma t^\alpha),$$

$$\|x(t)\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x(0)\| \sqrt{E_\alpha(-2\gamma t^\alpha)}.$$

Essa desigualdade implica em $V(x) > 0$ e ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < -2\gamma V(x(t)) < 0$, para todo $x \neq 0$, de modo que o sistema fracionário é Mittag-Leffler estável como requerido pelo Teorema 17 e considera taxa de decaimento maior ou igual a γ , dada pela Definição 12. Observe que, para a dinâmica expressa em derivada inteira ($\alpha = 1$), a envoltória Mittag-Leffler se reduz à exponencial com taxa de decaimento maior ou igual a γ . \square

5.2 PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS VIA LMIs

Tendo em vista as notações adotadas no começo deste capítulo, considere a definição a seguir, apontada no decorrer do texto:

Definição 13. *Seja o sistema linear Caputo incerto:*

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t), \quad (95)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes incertas, cujos vértices são $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i \in \mathbb{K}_r$, respectivamente.

5.2.1 Realimentação do vetor de estado com ganho $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Considere que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Será utilizada a seguinte lei de controle com realimentação do vetor de estado e ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (BOYD et al., 1994):

$$u(t) = -Kx(t). \quad (96)$$

Substituindo (96) em (95) obtêm-se as equações do sistema realimentado:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) - B(\beta)Kx(t) = [A(\beta) - B(\beta)K]x(t). \quad (97)$$

Conforme Zhang, Yu e Yu (2017), o ponto de equilíbrio do sistema ${}^c D_t^\alpha x(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz constante, $\alpha \in (0, 1)$, com condições iniciais $x(0) = x_0$, é Mittag-Leffler estável se existe uma matriz $P > 0$ tal que $A^T P + PA < 0$. A prova deste resultado utiliza o Lema 4. Com relação à estabilização de sistemas lineares Caputo incertos, o teorema a seguir é uma extensão em sistemas de ordem fracionária do resultado aplicado aos sistemas de ordem inteira estabelecido em Bernussou, Peres e Geromel (1989).

Teorema 19. *O sistema linear Caputo incerto em (97) é Mittag-Leffler estabilizável se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que as LMIs:*

$$X > 0, \quad (98)$$

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_i X - B_i M - M^T B_i^T &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (99)$$

são factíveis. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza o sistema em (97) para qualquer valor da ordem $\alpha \in (0, 1]$ é dado por $K = MX^{-1}$.

Demonstração. Suponha que as LMIs em (98) e (99) são factíveis. Multiplicando ambos os lados de (99) por β_i , segue de (87) que:

$$\begin{aligned} X \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i X - \sum_{i=1}^r \beta_i B_i M - M^T \sum_{i=1}^r \beta_i B_i^T \\ = XA(\beta)^T + A(\beta)X - B(\beta)M - M^T B(\beta)^T < 0. \end{aligned}$$

Dado que X é uma matriz simétrica e $M = KX$, tem-se:

$$\begin{aligned} XA(\beta)^T + A(\beta)X - B(\beta)KX - XK^T B(\beta)^T \\ = X[A(\beta) - B(\beta)K]^T + [A(\beta) - B(\beta)K]X < 0. \end{aligned}$$

Multiplicando à direita pela matriz não singular $P = X^{-1}$ e à esquerda por $P^T = P = X^{-1}$:

$$[A(\beta) - B(\beta)K]^T P + P[A(\beta) - B(\beta)K] < 0. \quad (100)$$

Note que X^{-1} é simétrica e positiva definida, pois X é suposta simétrica e positiva definida. Seja a candidata a função de Lyapunov a função quadrática $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com $P^T = P > 0$. Do Lema 4, ${}^c D_t^\alpha \{x^T(t)Px(t)\} \leq 2x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)]$. Como $2x^T(t)P\{{}^c D_t^\alpha x(t)\}$ é um escalar, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)] &= \{x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)]\}^T + x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)] \\ &= [{}^c D_t^\alpha x(t)]^T Px(t) + x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)]. \end{aligned}$$

Logo:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq [{}^c D_t^\alpha x(t)]^T P x(t) + x^T(t) P [{}^c D_t^\alpha x(t)]. \quad (101)$$

As equações em (97) do sistema realimentado, substituindo-as em (101), obtém-se:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t)) &\leq \{[A(\beta) - B(\beta)K]x(t)\}^T P x(t) + x^T(t) P [A(\beta) - B(\beta)K]x(t), \\ &\leq x^T(t) \left\{ [A(\beta) - B(\beta)K]^T P + P [A(\beta) - B(\beta)K] \right\} x(t). \end{aligned} \quad (102)$$

Se $\lambda_1 \|x(t)\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \lambda_2 \|x(t)\|^{ab}$ e ${}^c D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\lambda_3 \|x(t)\|^{ab}$, conforme o Teorema 17, então o sistema é Mittag-Leffler estável. Para $V(x) = x^T(t) P x(t)$, $P > 0$, tem-se $a = 2$, $b = 1$, $\lambda_1 = \lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_2 = \lambda_{\max}(P)$, sendo $\lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_{\max}(P)$ os autovalores mínimo e máximo de P , respectivamente. Além disso, como $\lambda_3 > 0$ tem-se ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < 0$, para todo $x(t) \neq 0$. De (102), uma condição suficiente para a negatividade de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, através de seu limitante superior, é dada pela desigualdade em (100). \square

Segue o teorema correspondente, para inclusão de taxa de decaimento maior ou igual a γ :

Teorema 20. *O sistema linear Caputo incerto em (97) é Mittag-Leffler estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a γ , se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que as LMIs:*

$$X > 0, \quad (103)$$

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X - B_i M - M^T B_i^T + 2\gamma X &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (104)$$

são factíveis. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza o sistema Caputo incerto em (97) para qualquer valor da ordem $\alpha \in (0, 1]$ é $K = M X^{-1}$.

Demonstração. Suponha que as LMIs em (103) e (104) são factíveis. Multiplicando ambos os lados de (104) por β_i , segue de (87) a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} X \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i X - \sum_{i=1}^r \beta_i B_i M - M^T \sum_{i=1}^r \beta_i B_i^T + 2\gamma X \\ = X A(\beta)^T + A(\beta) X - B(\beta) M - M^T B(\beta)^T + 2\gamma X < 0, \end{aligned}$$

satisfeita para o sistema em qualquer localização do politopo. Dado que X é uma matriz simétrica e $M = KX$, tem-se:

$$X A(\beta)^T + A(\beta) X - B(\beta) K X - X K^T B(\beta)^T = X [A(\beta) - B(\beta)K]^T + [A(\beta) - B(\beta)K] X < -2\gamma X.$$

Multiplicando à direita pela matriz não singular $P = X^{-1}$ e à esquerda por $P^T = P = X^{-1}$:

$$[A(\beta) - B(\beta)K]^T P + P [A(\beta) - B(\beta)K] < -2\gamma P. \quad (105)$$

Note que X^{-1} é simétrica e positiva definida, pois X é suposta simétrica e positiva definida. A candidata a função de Lyapunov é a quadrática $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com $P = P^T > 0$. A inequação em (102) contém o limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. Conforme o Lema 8, o sistema é Mittag-Leffler estável e considera taxa de decaimento maior ou igual a γ se a inequação em (90) é satisfeita para todo $x(t) \neq 0$. Logo, substituindo (102) em (90), obtém-se a desigualdade:

$$x^T(t) \left\{ [A(\beta) - B(\beta)K]^T P + P[A(\beta) - B(\beta)K] \right\} x(t) < -2\gamma x^T(t)Px(t), \quad (106)$$

satisfeita para o sistema em qualquer localização do politopo. De (106), uma condição suficiente para a negatividade de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, através de seu limitante superior, incluindo taxa de decaimento maior ou igual a γ , é dada pela desigualdade em (105). \square

5.2.2 Realimentação do vetor de estado com ganho $K(\beta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Considere que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Será utilizada agora a seguinte lei de controle com realimentação do vetor de estado e ganho de realimentação $K(\beta) \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$u_\beta(t) = - \sum_{i=1}^r \beta_i K_i x(t) = -K(\beta)x(t). \quad (107)$$

Esta lei de controle é um artifício para a projeto do controlador chaveado que será proposto, pois os parâmetros β_i , $i \in \mathbb{K}_r$, são incertos e podem ser indisponíveis para a medição. Substituindo (107) em (95) obtém-se as equações do sistema realimentado:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) - B(\beta)K(\beta)x(t) = [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]x(t). \quad (108)$$

Com relação à estabilização, o teorema abaixo é uma extensão em sistemas Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do Teorema 2 aplicado aos sistemas de ordem inteira, estabelecido em Souza (2013).

Teorema 21. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear Caputo com incertezas politópicas em (108) é Mittag-Leffler estabilizável se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as LMIs:*

$$X > 0, \quad (109)$$

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad (110)$$

$$i = 1, \dots, r,$$

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_j - M_j^T B_i^T + XA_j^T + A_j X - B_j M_i - M_i^T B_j^T \leq 0, \quad (111)$$

$$i = 1, \dots, r-1, j = i+1, \dots, r,$$

são factíveis. Nesse caso, os ganhos do controlador que estabiliza o sistema Caputo incerto em (108) para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$ são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Suponha que as LMIs em (109), (110) e (111) são factíveis. Multiplicando ambos os lados de (110) por β_i^2 , de (111) por $\beta_i\beta_j$ e somando todas as LMIs, segue de (87) que:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \beta_i (XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T) \\ & + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1+i}^r \beta_i\beta_j (XA_i^T + A_iX - B_iM_j - M_j^T B_i^T + XA_j^T + A_jX - B_jM_i - M_i^T B_j^T) \\ & = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \beta_i\beta_j (XA_i^T + A_iX - B_iM_j - M_j^T B_i^T) \\ & = X \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i X - \sum_{i=1}^r \beta_i B_i \sum_{i=1}^r \beta_i M_i - \sum_{i=1}^r \beta_i M_i^T \sum_{i=1}^r \beta_i B_i^T < 0. \end{aligned}$$

Dado que X é uma matriz simétrica e $\sum_{i=1}^r \beta_i M_i = \sum_{i=1}^r \beta_i K_i X = K(\beta)X$, tem-se:

$$\begin{aligned} & XA(\beta)^T + A(\beta)X - B(\beta)K(\beta)X - XK(\beta)^T B(\beta)^T \\ & = X[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]^T + [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]X < 0. \end{aligned}$$

Multiplicando à direita pela matriz não singular $P = X^{-1}$ e à esquerda por $P^T = P = X^{-1}$:

$$[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]^T P + P[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)] < 0. \quad (112)$$

Note que X^{-1} é simétrica e positiva definida, pois X é suposta simétrica e positiva definida. A candidata a função de Lyapunov é a quadrática $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com $P^T = P > 0$. Como já verificado, para a derivada de Caputo é válida a desigualdade:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq \{ {}^c D_t^\alpha x(t) \}^T P x(t) + x^T(t) P \{ {}^c D_t^\alpha x(t) \}.$$

A equação em (108) do sistema realimentado com a lei de controle $u_\beta(t)$, substituindo-a, obtém-se:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t)) & \leq \{ [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]x(t) \}^T P x(t) + x^T(t) P [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]x(t), \\ & \leq x^T(t) \left\{ [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]^T P + P [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)] \right\} x(t). \end{aligned} \quad (113)$$

Se $\lambda_1 \|x(t)\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \lambda_2 \|x(t)\|^{ab}$ e ${}^c D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\lambda_3 \|x(t)\|^{ab}$, conforme o Teorema 17, então o sistema é Mittag-Leffler estável. Para $V(x) = x^T(t)Px(t)$, $P > 0$, tem-se $a = 2$, $b = 1$, $\lambda_1 = \lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_2 = \lambda_{\max}(P)$, sendo $\lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_{\max}(P)$ os autovalores mínimo e máximo de P , respectivamente. Além disso, como $\lambda_3 > 0$ tem-se ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < 0$, para todo $x(t) \neq 0$. De (113), uma condição suficiente para a negatividade de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, através de seu limitante superior, é dada pela desigualdade em (112). \square

Corolário 2. *Seja $B_1 = B_2 = \dots = B_r = B$. Nesse caso, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear Caputo com incertezas politópicas dado em (108) é Mittag-Leffler estabilizável se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, as LMIs:*

$$X > 0, \quad (114)$$

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - BM_i - M_i^T B^T &\leq 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (115)$$

são factíveis. Os ganhos do controlador que estabilizam o sistema Caputo incerto em (108) para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$ são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Segue do Teorema 21, considerando $B_i = B$, $i \in \mathbb{K}_r$. □

Com relação à taxa de decaimento, o teorema proposto a seguir é uma extensão em sistemas Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do Teorema 5 aplicado aos sistemas de ordem inteira, estabelecido em Souza (2013).

Teorema 22. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear Caputo com incertezas politópicas em (108) é Mittag-Leffler estabilizável, com taxa de decaimento maior ou igual a γ , se existem uma matriz simétrica X e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as LMIs:*

$$X > 0, \quad (116)$$

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T + 2\gamma X &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - B_iM_j - M_j^T B_i^T + XA_j^T + A_jX - B_jM_i - M_i^T B_j^T + 4\gamma X &\leq 0, \\ i &= 1, \dots, r-1, j = i+1, \dots, r. \end{aligned} \quad (118)$$

são factíveis. Nesse caso, os ganhos do controlador que estabiliza o sistema Caputo incerto em (108) para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$ são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Suponha que as LMIs em (116), (117) e (118) são factíveis. Multiplicando ambos os lados de (117) por β_i^2 , de (118) por $\beta_i\beta_j$ e somando todas as LMIs, segue de (87) que:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \beta_i (XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T + 2\gamma X) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \beta_i\beta_j (XA_i^T + A_iX - B_iM_j - M_j^T B_i^T + XA_j^T + A_jX - B_jM_i - M_i^T B_j^T + 4\gamma X) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \beta_i\beta_j (XA_i^T + A_iX - B_iM_j - M_j^T B_i^T + 2\gamma X) \\ &= X \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i X - \sum_{i=1}^r \beta_i B_i \sum_{i=1}^r \beta_i M_i - \sum_{i=1}^r \beta_i M_i^T \sum_{i=1}^r \beta_i B_i^T + 2\gamma X < 0. \end{aligned}$$

Dado que X é uma matriz simétrica e $\sum_{i=1}^r \beta_i M_i = \sum_{i=1}^r \beta_i K_i X = K(\beta)X$, tem-se:

$$\begin{aligned} & XA(\beta)^T + A(\beta)X - B(\beta)K(\beta)X - XK(\beta)^T B(\beta)^T + 2\gamma X \\ & = X[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]^T + [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]X + 2\gamma X < 0. \end{aligned}$$

Multiplicando à direita pela matriz não singular $P = X^{-1}$ e à esquerda por $P^T = P = X^{-1}$:

$$[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]^T P + P[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)] + 2\gamma X < 0. \quad (119)$$

Note que X^{-1} é simétrica e positiva definida, pois X é suposta simétrica e positiva definida. A candidata a função de Lyapunov é a quadrática $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com $P = P^T > 0$. A inequação em (113) contém o limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$. Conforme o Lema 8, o sistema é Mittag-Leffler estável e considera taxa de decaimento maior ou igual a γ se a inequação em (90) é satisfeita para todo $x(t) \neq 0$. Logo, substituindo (113) em (90), obtém-se a desigualdade:

$$x^T(t) \left\{ [A(\beta) - B(\beta)K(\beta)]^T P + P[A(\beta) - B(\beta)K(\beta)] \right\} x(t) < -2\gamma x^T(t)Px(t), \quad (120)$$

satisfeita para o sistema em qualquer localização do politopo. De (120), uma condição suficiente para a negatividade de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, através de seu limitante superior, incluindo taxa de decaimento maior ou igual a γ , é dada pela desigualdade em (119). \square

5.3 CONTROLE CHAVEADO EM SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA

Considere o lema a seguir, o qual será útil para o desenvolvimento da proposta:

Lema 9. *Seja \mathbb{V} o conjunto formado pelos escalares $V_i \in \mathbb{R}$, com $i \in \mathbb{K}_r$. Nesse caso, tem-se:*

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} V_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i V_i, \quad \sum_{i=1}^r \beta_i = 1 \quad \beta_i > 0. \quad (121)$$

Demonstração. Seja V_m o valor mínimo da sequência $\{V_1, \dots, V_m, \dots, V_r\}$, então:

$$(\beta_1 V_m + \dots + \beta_m V_m + \dots + \beta_r V_m) \leq (\beta_1 V_1 + \dots + \beta_m V_m + \dots + \beta_r V_r),$$

$$\left[\sum_{i=1}^r \beta_i \right] V_m \leq \sum_{i=1}^r \beta_i V_i \Rightarrow V_m = \min_{i \in \mathbb{K}_r} V_i \leq \sum_{i=1}^r \beta_i V_i.$$

O mínimo elemento do conjunto é menor do que a combinação convexa entre os elementos do conjunto ou igual se essa combinação convexa resultar no próprio mínimo. \square

5.3.1 Caso 1: matriz $B(\beta) = B$

Um controlador chaveado será proposto para o sistema em (95), com $B(\beta) = B$ uma matriz conhecida:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) + Bu(t). \quad (122)$$

Antes, considere a seguinte definição:

Definição 14. Para $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ seja o conjunto de índices, variante no tempo:

$$\Omega_H(t) = \left\{ j \in \mathbb{K}_r : [x^T(t)H_jx(t)] = \min_{i \in \mathbb{K}_r} [x^T(t)H_ix(t)] \right\} = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x(t)^T H_ix(t)\}.$$

O menor elemento de $\Omega_H(t)$ será denotado por:

$$\min_{j \in \Omega_H(t)} j = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{x^T(t)H_ix(t)\}. \quad (123)$$

Segue a lei de controle chaveada, com realimentação do vetor de estado e ganho de realimentação $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\begin{aligned} u_\sigma(t) &= -K_\sigma x(t), \\ \sigma &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{-x^T(t)H_ix(t)\}, \quad H_i = PBK_i, \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \end{aligned} \quad (124)$$

com $P = P^T > 0$ decorrente da candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, adotada na dedução das LMIs do Corolário 2 para a estabilização do sistema em (122) sob a lei de controle em (107). Note que pode haver multiplicidade no valor do mínimo. Neste caso, o chaveamento do K_i ocorre conforme a Definição 14, escolhendo, pois, o menor valor do índice i dentre aqueles que promovem o mínimo. Substituindo (124) em (122) obtém-se as equações do sistema realimentado:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) + Bu_\sigma(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i (A_i - BK_\sigma)x(t). \quad (125)$$

Teorema 23. *Sejam as LMIs do Corolário 2 factíveis. O Corolário 2 trata do sistema Caputo em (95), com $B_1 = B_2 = \dots = B_r = B$ e realimentado com a lei de controle em (107). Neste caso, foram obtidos os ganhos $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$. Então a lei de controle chaveada em (124) torna a origem do sistema Caputo em (122) Mittag-Leffler estável, para qualquer $\alpha \in (0, 1]$.*

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, $P^T = P > 0$. Sejam ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta}$ e ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma}$ as derivadas de Caputo de $V(x(t))$ para o sistema (122) realimentado com a lei de controle (107) e (124), respectivamente. Sejam ${}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta(t)}$ e ${}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma(t)}$ os limitantes superiores de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta}$ e ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma}$, respectivamente.

Então:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma} &\leq 2x^T(t)P[{}^c D_t^\alpha x(t)] = 2x^T(t)P[A(\beta)x(t) + Bu_\sigma(t)] = {}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma(t)}, \\ \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma(t)} &= 2x^T(t)PA(\beta)x(t) + [2x^T(t)PB(-K_\sigma)x(t)]. \end{aligned} \quad (126)$$

Da lei de controle chaveada em (124), do Lema 9 e da Definição 14 pode-se relacionar o termo entre colchetes da seguinte forma:

$$x^T(t)PB(-K_\sigma)x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t)PB(-K_i)x(t)\} \leq x^T(t)PB \left[-\sum_{i=1}^r \beta_i K_i \right] x(t).$$

Assim, retornando à inequação (126), obtém-se:

$$\begin{aligned} {}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma(t)} &= 2x^T(t)PA(\beta)x(t) + \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{2x^T(t)PB(-K_i)x(t)\} \\ &\leq 2x^T(t)PA(\beta)x(t) + 2x^T(t)PB \left[-\sum_{i=1}^r \beta_i K_i \right] x(t) = 2x^T(t)P[A(\beta) - BK(\beta)]x(t) \\ &= 2x^T(t)P[A(\beta)x(t) + Bu_\beta(t)] = {}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta(t)}. \end{aligned}$$

Logo:

$${}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma(t)} \leq {}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta(t)}. \quad (127)$$

As condições do Corolário 2 asseguram que ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma(t)} \leq {}^c \bar{D}_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta(t)} < 0$, para todo $x \neq 0$, o que conclui a demonstração. \square

Note que a técnica do controle chaveado não necessita dos parâmetros incertos β_i , $i \in \mathbb{K}_r$.

Observação 9. É enfatizado que através do Corolário 2 são projetados os ganhos K_i , $i \in \mathbb{K}_r$ e a matriz $P = X^{-1}$, envolvidos na lei de chaveamento em (124), com ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta} < 0$, para todo $x \neq 0$. Do teorema anterior, ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta} < 0$ implica em ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma} < 0$, para todo $x \neq 0$. Logo, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em (125) é Mittag-Leffler estável.

5.3.2 Caso 2: matriz incerta $B(\beta)$

Considere o sistema linear com incertezas em (95):

$${}^c D_t^\alpha \hat{x}(t) = \hat{A}(\beta)\hat{x}(t) + \hat{B}(\beta)u(t), \quad \hat{A}(\beta) = \sum_{i=1}^r \beta_i \hat{A}_i, \quad \hat{B}(\beta) = \sum_{i=1}^r \beta_i \hat{B}_i. \quad (128)$$

Seja $v(t) \in \mathbb{R}^m$ a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do vetor de entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Define-se $x_{n+l}(t)$ e $v_l(t)$, $l = 1, \dots, m$, tais que ${}^c D_t^\alpha x_{n+l}(t) = {}^c D_t^\alpha u_l(t) = v_l(t)$, de maneira análoga ao que é verificado em Barmish (1983) para sistemas de ordem inteira. Mediante o

Teorema 8, tem-se $x_{n+l}(t) = u_l(t) = I_t^\alpha v_l(t)$, para $v_l(0) = 0$, $l = 1, \dots, m$. Nessas variáveis obtém-se o novo sistema:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha \widehat{x}(t) = \widehat{A}(\beta)\widehat{x}(t) + \widehat{B}(\beta)u(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_{n+1}(t) = v_1(t), \\ \vdots \\ {}^c D_t^\alpha x_{n+m}(t) = v_m(t). \end{cases} \equiv {}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) + Bv(t), \quad (129)$$

$$\text{com } x(t) = [\widehat{x}^T \ x_{n+1} \ \dots \ x_{n+m}]^T, A(\beta) = \begin{bmatrix} \widehat{A}(\beta) & \widehat{B}(\beta) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Retorna-se, pois, ao Caso 1 e é possível adotar o mesmo procedimento para projetar a lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$. Entretanto, pode-se considerar uma outra lei de chaveamento quando o sistema contém a matriz incerta $B(\beta)$. Esta lei inclui matrizes auxiliares $\overline{Q}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \mathbb{K}_r$, definidas posteriormente, através das quais é definido o índice $\widehat{\sigma}$ do chaveamento. Segue a referida lei de controle chaveada, com realimentação do vetor de estado e ganho de realimentação $K_{\widehat{\sigma}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que, assim como a anterior, está fundamentada na redução do limitante superior da derivada de Caputo da função de Lyapunov:

$$\begin{aligned} u_{\widehat{\sigma}}(t) &= -K_{\widehat{\sigma}}x(t), \\ \widehat{\sigma} &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r}^* \{-x^T(t)H_i x(t)\}, \quad H_i = \overline{Q}_i, \quad \widehat{\sigma} \in \mathbb{K}_r. \end{aligned} \quad (130)$$

Note que pode haver multiplicidade no valor do mínimo. Neste caso, o chaveamento do K_i ocorre conforme a Definição 14, escolhendo, pois, o menor valor do índice i dentre os que promovem o mínimo.

O teorema a seguir é uma extensão em sistemas Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$, baseado em Souza et al. (2014) e Buzetti (2017).

Teorema 24. *Para o sistema em (95), realimentado com a lei de controle chaveada em (130), suponha a existência de matrizes simétricas $X, Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i, j \in \mathbb{K}_r$, e um escalar $\gamma \geq 0$, tais que as LMIs:*

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ -B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j &< 0, \\ X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\gamma X &< 0, \end{aligned} \quad (131)$$

são factíveis. Então a lei de controle chaveada em (130) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em (95) Mittag-Leffler estável, incluindo taxa de decaimento maior ou igual a γ , com $\overline{Q}_j = X^{-1} Q_j X^{-1}$ e os ganhos do controlador dados por $K_j = M_j X^{-1}$.

Demonstração. A candidata a função de Lyapunov é a função quadrática $V(x(t)) = x^T(t)P x(t)$, com $P = P^T > 0$. Do desenvolvimento de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_{\widehat{\sigma}}} < -2\gamma V(x(t))$, utilizando o limitante

superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_{\widehat{\sigma}}}$, obtém-se:

$$a + x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (-PB_i K_{\widehat{\sigma}} - K_{\widehat{\sigma}}^T B_i^T P) x(t) < 0, \quad (132)$$

com $a = x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (A_i^T P + PA_i + 2\gamma P) x(t)$. Suponha a existência de matrizes simétricas $\bar{Z}_i, \bar{Q}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que:

$$-PB_i K_j - K_j^T B_i^T P < \bar{Z}_i + \bar{Q}_j, \quad i, j \in \mathbb{K}_r. \quad (133)$$

Multiplicando ambos os lados por β_i , à esquerda por $x^T(t)$, à direita por $x(t)$, realizando a soma $\sum_{i=1}^r$ e adotando $j = \widehat{\sigma}$, obtém-se:

$$-x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (PB_i K_{\widehat{\sigma}} + K_{\widehat{\sigma}}^T B_i^T P) x(t) < x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i \bar{Z}_i x(t) + x^T(t) \bar{Q}_{\widehat{\sigma}} x(t).$$

Utilizando o Lema 9 tem-se $x^T(t) \bar{Q}_{\widehat{\sigma}} x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} (x^T(t) \bar{Q}_i x(t)) \leq x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i \bar{Q}_i x(t)$. Então:

$$-x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (PB_i K_{\widehat{\sigma}} + K_{\widehat{\sigma}}^T B_i^T P) x(t) < x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (\bar{Z}_i + \bar{Q}_i) x(t). \quad (134)$$

De (134) e (132), tem-se:

$$a + x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (-PB_i K_{\widehat{\sigma}} - K_{\widehat{\sigma}}^T B_i^T P) x(t) < a + x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (\bar{Z}_i + \bar{Q}_i) x(t),$$

$$a + x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (-PB_i K_{\widehat{\sigma}} - K_{\widehat{\sigma}}^T B_i^T P) x(t) < x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (A_i^T P + PA_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\gamma P) x(t). \quad (135)$$

Logo, se a desigualdade $x^T(t) \sum_{i=1}^r \beta_i (A_i^T P + PA_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\gamma P) x(t) < 0$ é satisfeita, então ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_{\widehat{\sigma}}} < -2\gamma V(x(t))$. Como $\beta_i \geq 0, i \in \mathbb{K}_r$, uma condição suficiente para satisfazer essa desigualdade é $A_i^T P + PA_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\gamma P < 0, i \in \mathbb{K}_r$. Conclui-se que, se as condições:

$$P > 0, \quad (136)$$

$$-PB_i K_j - K_j^T B_i^T P - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (137)$$

$$A_i^T P + PA_i + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\gamma P < 0, \quad (138)$$

são satisfeitas, $i, j = 1, \dots, r$, então ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_{\widehat{\sigma}}} < -2\gamma V(x(t)) < 0$, para todo $x(t) \neq 0$. Essas inequações são pré multiplicadas pela matriz não singular P^{-1} , pós multiplicadas por $[P^{-1}]^T = P^{-1}$ e em seguida é adotada a mudança de variáveis $X = P^{-1}$, $Z_i = X \bar{Z}_i X$, $Q_i = X \bar{Q}_i X$ e $M_j = K_j X$, o que resulta nas LMIs em (131). \square

O teorema a seguir é uma extensão em sistemas Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do Teorema 4 aplicado a sistemas de ordem inteira estabelecido em Buzetti (2017) e mostra que se o sistema fracionário pode ser controlado com um ganho constante, então o mesmo pode ser controlado com o ganho chaveado.

Teorema 25. *Para o sistema realimentado em (97), suponha a existência de matrizes $P = P^T > 0$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que as desigualdades:*

$$P(A_i - B_i K) + (A_i - B_i K)^T P + 2\gamma P < 0, \quad (139)$$

são satisfeitas, o que significa que seu ponto de equilíbrio $x = 0$ é Mittag-Leffler estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ . Então existem matrizes K_j tais que, para $M_j = K_j P$ e $X = P^{-1}$, $j \in \mathbb{K}_r$, as LMIs em (131) são satisfeitas.

Demonstração. Na demonstração do Teorema 24 foi verificado que, se as desigualdades em (136), (137) e (138) são satisfeitas, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema ${}^c D_t^\alpha x(t) = (A(\beta) - B(\beta)K)x(t)$ é Mittag-Leffler estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ . Considere que existe um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que:

$$A_i^T P + P A_i + (-P B_i K - K^T B_i^T P + \varepsilon I) + 2\gamma P < 0. \quad (140)$$

Dado que $P > 0$, para mostrar que (139) implica em (137) e (138), pode-se impor que $K_j = K$, $\bar{Q}_j = \bar{Q}_i$ e $\bar{Z}_i = 0$. Definindo $\bar{Q}_i = -P B_i K - K^T B_i^T P + \varepsilon I$, então a factibilidade de (140) corresponde à factibilidade de (138). A LMI em (137) também é satisfeita, pois:

$$-P B_i K - K^T B_i^T P - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j = -P B_i K - K^T B_i^T P - 0 - (-P B_i K - K^T B_i^T P + \varepsilon I) = -\varepsilon I < 0.$$

□

Mediante esse teorema, se existir factibilidade para as LMIs em (98) e (99), correspondentes à realimentação com a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, então existe factibilidade para as LMIs em (131), correspondentes à realimentação com a lei de controle $u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t)$.

5.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para a solução das restrições em LMIs, foi utilizado o solver SeDuMi (STURM, 1999) no ambiente do software MatLab[®].

Exemplo 7. *(Estabilidade) - Considere o sistema linear incerto de ordem $\alpha \in (0, 1]$ e invariante no tempo:*

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) + Bu(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T, \quad A(\beta) = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -2 & 33 & b \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (141)$$

com $\underline{a} < a < 16$ e $\underline{b} < b < -40$.

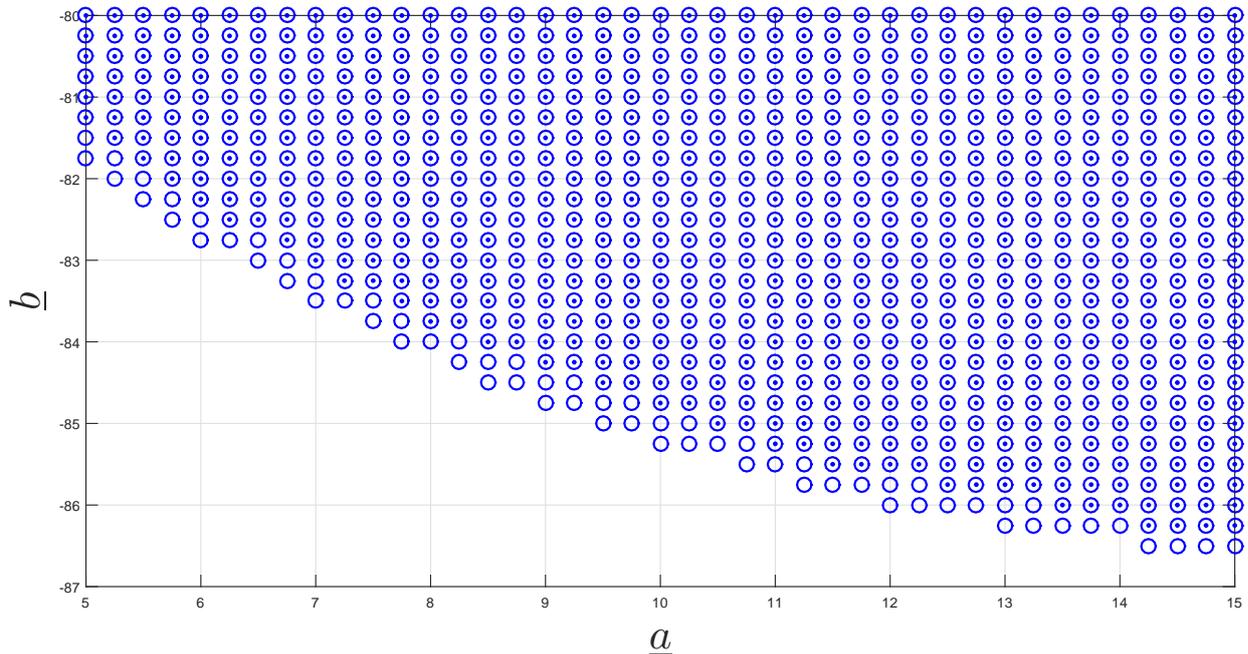
A matriz incerta $A(\beta)$ pertence ao politopo de vértices:

$$\left[A_1 | A_2 | A_3 | A_4 \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \underline{a} & 1 & 1 & \underline{a} & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 \\ -2 & 33 & \underline{b} & -2 & 33 & -40 & -2 & 33 & \underline{b} & -2 & 33 & -40 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

com os parâmetros $5 < \underline{a} < 15$ e $-87 < \underline{b} < -80$.

É considerada apenas a estabilidade, sem a taxa de decaimento. Para o intervalo das incertezas variando conforme especificado, a região de factibilidade do sistema em (141), utilizando o Corolário 2, é maior do que a região obtida através do Teorema 19, como mostra a Figura 6. Logo, nesse exemplo, a estabilização mediante as LMIs do Corolário 2 mostrou-se mais eficiente do que a estabilização com ganho K único mediante as LMIs do Teorema 19.

Figura 6 - Regiões de factibilidade utilizando o Teorema 19, denotada por (\cdot) e o Corolário 2, denotada por (o) .



Fonte: Próprio Autor

Exemplo 8. (Controle Chaveado, matriz constante B) - Considere o sistema linear de ordem $\alpha = 0,95$, invariante no tempo, com a matriz incerta $A(\beta)$:

$${}^c D_t^{0,95} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & -7 & b \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

com $-1 < a < 1$ e $-1 < b < 1$.

A matriz incerta $A(\beta)$ pertence ao politopo de vértices:

$$\left[A_1 | A_2 | A_3 | A_4 \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -7 & 1 & 2 & -7 & -1 & 2 & -7 & 1 & 2 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Do Corolário 2, para taxa de decaimento $\gamma = 0,1$, obtém-se a matriz X e os ganhos do controlador K_i , $i = 1, \dots, r$, respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} 0,8405 & -0,2454 & 0,1865 \\ -0,2454 & 0,7155 & 0,2584 \\ 0,1865 & 0,2584 & 0,7906 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5,4772 & 8,1126 & -3,9447 \\ -4,9961 & -10,3350 & 5,8785 \\ 2,7497 & 6,2126 & -2,6798 \\ -3,3845 & -9,4556 & 5,3255 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 4,7910 & 6,5795 & -3,2815 \\ -5,0387 & -11,2569 & 6,0928 \\ 2,0635 & 4,6795 & -2,0167 \\ -3,4271 & -10,3774 & 5,5398 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 5,4772 & 8,1126 & -3,9447 \\ -4,9961 & -10,3350 & 5,8785 \\ 2,7497 & 6,2126 & -2,6798 \\ -3,3845 & -9,4556 & 5,3255 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 4,7910 & 6,5795 & -3,2815 \\ -5,0387 & -11,2569 & 6,0928 \\ 2,0635 & 4,6795 & -2,0167 \\ -3,4271 & -10,3774 & 5,5398 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, para taxa de decaimento $\gamma = 1$, obtém-se a matriz X e os ganhos do controlador K_i , $i = 1, \dots, r$, respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} 0,8230 & -0,2130 & 0,1972 \\ -0,2130 & 0,7617 & 0,2284 \\ 0,1972 & 0,2284 & 0,7851 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5,6386 & 6,5977 & -3,3362 \\ -4,7026 & -8,6635 & 5,9071 \\ 3,0990 & 5,0821 & -2,2572 \\ -3,2380 & -8,0002 & 5,4629 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 5,0569 & 5,2296 & -2,7920 \\ -4,6129 & -9,3672 & 5,9875 \\ 2,5173 & 3,7140 & -1,7130 \\ -3,1483 & -8,7039 & 5,5434 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 5,6386 & 6,5977 & -3,3362 \\ -4,7026 & -8,6635 & 5,9071 \\ 3,0990 & 5,0821 & -2,2572 \\ -3,2380 & -8,0002 & 5,4629 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 5,0569 & 5,2296 & -2,7920 \\ -4,6129 & -9,3672 & 5,9875 \\ 2,5173 & 3,7140 & -1,7130 \\ -3,1483 & -8,7039 & 5,5434 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7 apresenta as trajetórias do sistema instável em malha aberta e do sistema realimentado com a lei de controle chaveada em (124), bem como o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, para condições iniciais $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$, taxas de decaimento $\gamma = 0,1$ e $\gamma = 1$ e utilizando o vértice A_1 , o qual contém $a = 1$ e $b = 1$. As simulações utilizam o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, apresentado na Seção 4.4.2, com passo de integração $p = 0,001$ e tempo de simulação de 5 segundos. Os sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$, para as referidas taxas de decaimento, são apresentados na Figura 8.

Figura 7 - Comportamento do sistema de ordem $\alpha = 0,95$ incerto submetido à lei de controle chaveada em (124).

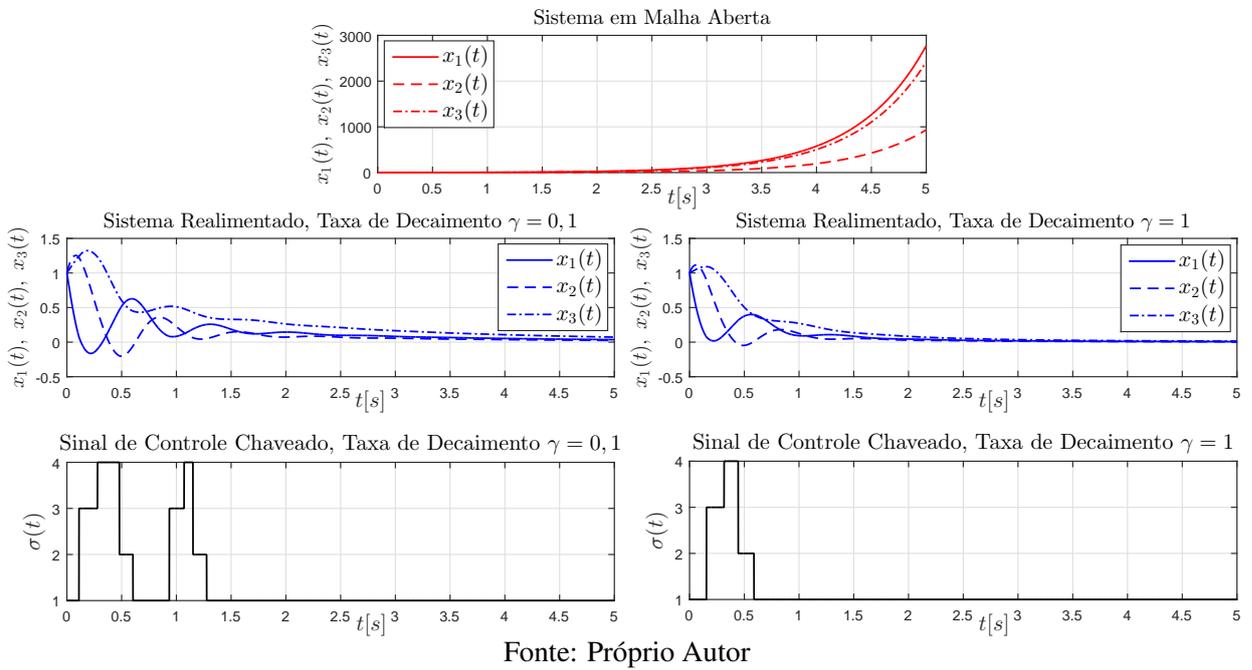
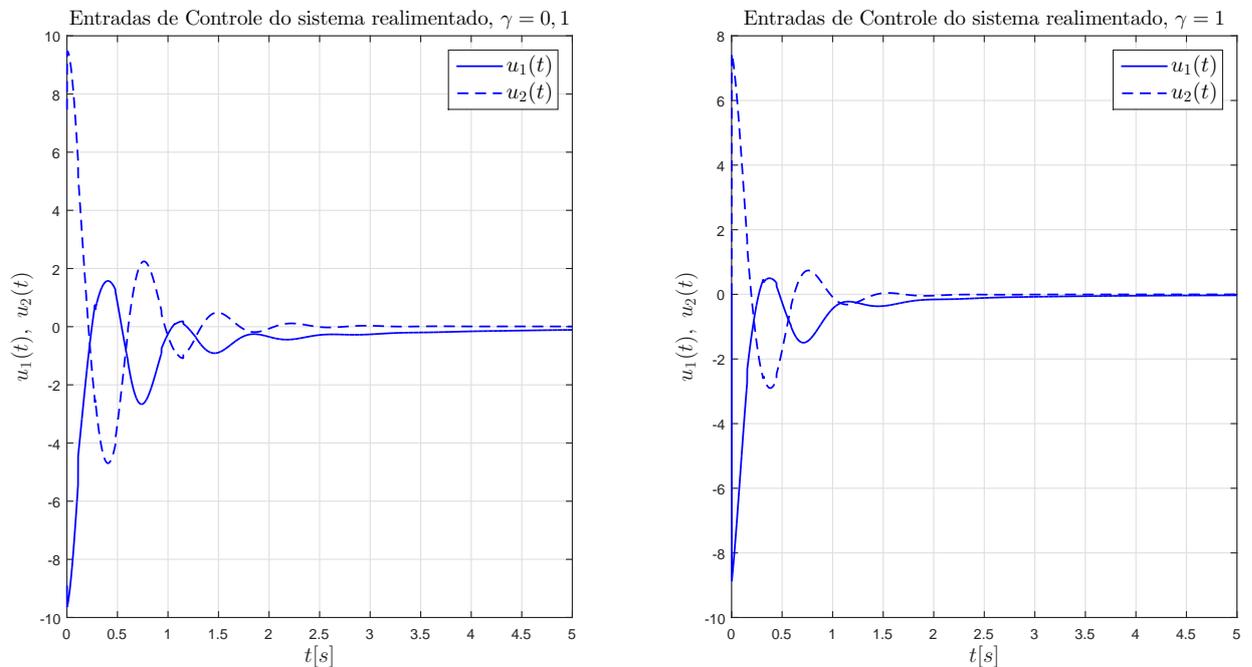


Figura 8 - Entradas de controle da realimentação com a lei de controle chaveada em (124).



Exemplo 9. (Controle Chaveado, matriz incerta $B(\beta)$) - Considere o sistema linear de ordem $\alpha = 0,75$, invariante no tempo, com matrizes incertas $A(\beta)$ e $B(\beta)$:

$${}^c D_t^{0,75} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (142)$$

com $-1 < a < 2$ e $9 < b < 10$.

Tem-se os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (143)$$

Utilizando o Teorema 24, para taxa de decaimento $\gamma = 0,1$, obtém-se as matrizes \bar{Q}_j e os ganhos do controlador K_i , $i, j \in \mathbb{K}_r$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} -6,5065 & -2,1075 & -0,6896 \\ -2,1075 & -23,6669 & -54,3850 \\ -0,6896 & -54,3850 & -122,9948 \end{bmatrix}, \bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} -7,0209 & -0,7719 & 2,8347 \\ -0,7719 & -23,6672 & -54,3866 \\ 2,8347 & -54,3866 & -123,0010 \end{bmatrix}, \\ \bar{Q}_3 &= \begin{bmatrix} 1,1314 & -2,1081 & -0,6933 \\ -2,1081 & -23,6669 & -54,3851 \\ -0,6933 & -54,3851 & -122,9950 \end{bmatrix}, \bar{Q}_4 = \begin{bmatrix} 0,6172 & -0,7726 & 2,8308 \\ -0,7726 & -23,6672 & -54,3867 \\ 2,8308 & -54,3867 & -123,0011 \end{bmatrix}, \\ K_1 &= \begin{bmatrix} 0,3449 & -0,9915 & -2,6165 \\ 1,5024 & 2,3404 & 5,9921 \\ 0,0344 & -0,9926 & -2,6191 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0,3660 & -1,1008 & -2,9048 \\ 1,5024 & 2,3404 & 5,9921 \\ 0,0551 & -1,1006 & -2,9042 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 0,3449 & -0,9915 & -2,6165 \\ 1,5024 & 2,3404 & 5,9921 \\ 0,0344 & -0,9926 & -2,6191 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 0,3660 & -1,1008 & -2,9048 \\ 1,5024 & 2,3404 & 5,9921 \\ 0,0551 & -1,1006 & -2,9042 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora para taxa de decaimento $\gamma = 5$, obtém-se as matrizes \bar{Q}_j e os ganhos do controlador K_i , $i, j \in \mathbb{K}_r$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} -17,9951 & -3,6238 & -14,5127 \\ -3,6238 & -30,1725 & -280,8445 \\ -14,5127 & -280,8445 & -2507,0471 \end{bmatrix}, \bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} -19,8332 & -1,9848 & 5,3390 \\ -1,9848 & -30,1694 & -280,8298 \\ 5,3390 & -280,8298 & -2507,1566 \end{bmatrix}, \\ \bar{Q}_3 &= \begin{bmatrix} -10,2938 & -3,6202 & -14,5250 \\ -3,6202 & -30,1726 & -280,8455 \\ -14,5250 & -280,8455 & -2507,0597 \end{bmatrix}, \bar{Q}_4 = \begin{bmatrix} -12,1316 & -1,9814 & 5,3259 \\ -1,9814 & -30,1693 & -280,8292 \\ 5,3259 & -280,8292 & -2507,1487 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0,8318 & -1,2017 & -14,5480 \\ 5,5825 & 8,8564 & 94,7422 \\ 0,5219 & -1,2051 & -14,5843 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0,9068 & -1,3347 & -16,1579 \\ 5,5825 & 8,8564 & 94,7422 \\ 0,5952 & -1,3367 & -16,1777 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0,5219 & -1,2051 & -14,5843 \\ 5,5933 & 8,8564 & 94,7422 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 0,5952 & -1,3367 & -16,1777 \\ 5,5933 & 8,8564 & 94,7422 \end{bmatrix}.$$

A Figura 9 apresenta as trajetórias do sistema instável em malha aberta e do sistema realimentado com a lei de controle chaveada em (130), bem como o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, para condições iniciais $x(0) = [10 \ 10 \ 10]^T$, taxas de decaimento $\gamma = 0, 1$ e $\gamma = 5$ e utilizando os valores dos parâmetros $a = 2$ e $b = 10$. As simulações utilizam o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, apresentado na Seção 4.4.2, com passo de integração $p = 0,001$ e tempo de simulação de 5 segundos. Os sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$, para as referidas taxas de decaimento, são apresentados na Figura 10.

Figura 9 - Comportamento do sistema de ordem $\alpha = 0,75$ incerto submetido à lei de controle chaveada em (130).

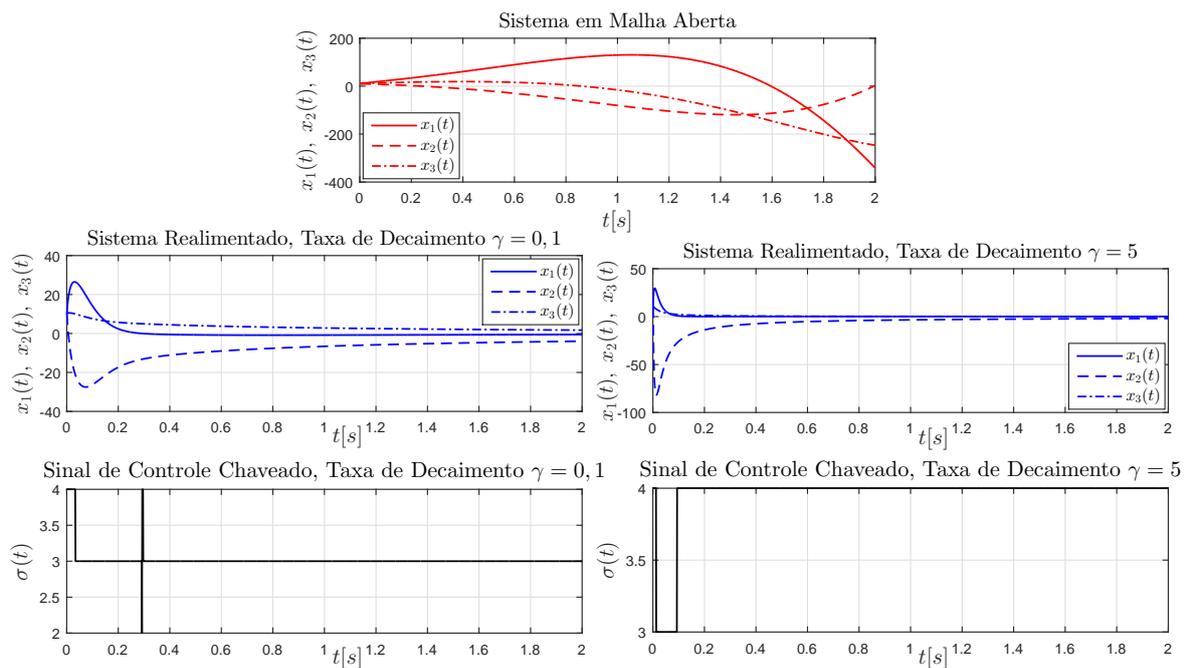
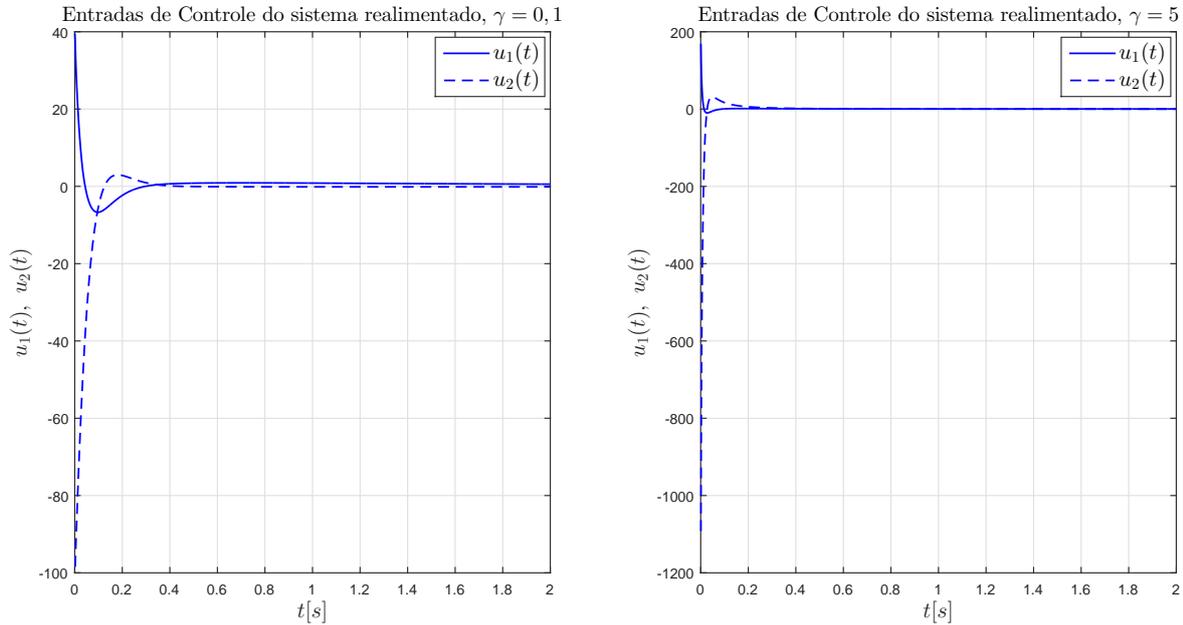


Figura 10 - Entradas de controle da realimentação com a lei de controle chaveada em (130).



Fonte: Próprio Autor

5.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Este capítulo propôs o projeto de controladores para sistemas fracionários lineares incertos definidos segundo a derivada de Caputo, utilizando desigualdades matriciais lineares, via realimentação do vetor de estado. Exemplos numéricos validam a teoria. O projeto inclui taxa de decaimento Mittag Leffler, a qual generaliza a taxa de decaimento da exponencial utilizada em sistemas de ordem inteira. Os autovalores do sistema controlado sob taxa de decaimento γ são posicionados no semi-plano complexo esquerdo, conforme o Lema 8, não contemplando, pois, a variedade em autovalores no setor do semi-plano complexo direito, possível no controle de sistemas fracionários de ordem $\alpha \in (0, 1]$, como mostra o Teorema 15 e Figura 1. Como perspectiva futura, a região de estabilização do plano complexo considerando taxa de decaimento pode ser ampliada e redefinida. A teoria desenvolvida garante o controle de sistemas Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ através das mesmas LMIs utilizadas no projeto de controladores em sistemas de ordem inteira. Como foco deste trabalho, é proposto o projeto de controladores chaveados, fundamentado na minimização do limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, através de compensação distribuída paralela.

6 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI - SUGENO DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADO VIA LMI

Este capítulo propõe o projeto de controladores através de condições em LMIs, os quais garantem a estabilidade Mittag-Leffler de sistemas não lineares Caputo incertos, descritos por modelos lineares fuzzy Takagi-Sugeno, via realimentação do vetor de estado.

6.1 MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA

O modelo T-S para sistemas de ordem fracionária é obtido através de uma extensão do modelo T-S convencional verificado em Takagi e Sugeno (1985). De maneira análoga, as dinâmicas locais em diferentes regiões do espaço de estados são representadas por modelos lineares de ordem fracionária. O modelo global do sistema é obtido através da composição fuzzy dos modelos lineares. O modelo T-S consiste de regras SE-ENTÃO que descrevem localmente as relações lineares entre a entrada e saída de um sistema não linear. Uma regra i pode ser estabelecida da seguinte forma (ZHENG; NIAN; WANG, 2010):

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: & \text{ Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } z_2(t) \text{ é } M_2^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ Então : } {}^c D_t^\alpha x(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \end{aligned}$$

com $\alpha \in (0, 1]$, M_j^i o conjunto *fuzzy* j da regra i , ($j = 1, \dots, p$) e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ as variáveis de premissa. A sentença “ $z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i$ ” é o antecedente da regra e as equações dinâmicas “ ${}^c D_t^\alpha x(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ ” são o consequente da regra, com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$. O modelo fuzzy T-S completo é obtido através de um processo de inferência. O primeiro passo desse processo é calcular o grau de ativação $\omega_i(z(t))$ da regra i a partir das variáveis de premissa:

$$\begin{aligned} \omega_i(z(t)) &= M_1^i(z_1(t)) \times M_2^i(z_2(t)) \times \dots \times M_p^i(z_p(t)), \\ \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) &> 0, \quad \omega_i(z(t)) \geq 0, \end{aligned} \tag{144}$$

com $M_j^i(z_j(t))$ o grau de associação de $z_j(t)$ ao conjunto fuzzy M_j^i . O modelo T-S é composto por r regras. A representação da dinâmica não linear do sistema é obtida em um vetor de saída, inferido como a soma ponderada de r modelos locais. A ponderação é realizada através do grau

de ativação de cada regra:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}. \quad (145)$$

Define-se o grau de pertinência normalizado ou função de pertinência da regra i :

$$h_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))},$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r.$$

Logo, as equações em (145) podem ser escritas como:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] = A(h(z(t))) x(t) + B(h(z(t))) u(t). \quad (146)$$

Uma lei de controle fuzzy é estabelecida com base em compensação distribuída paralela (LI; LI, 2014):

Regra i : Se $z_1(t)$ é M_1^i e $z_2(t)$ é M_2^i e \dots e $z_p(t)$ é M_p^i ,

Então $u(t) = -K_i x(t)$, $i = 1, \dots, r$.

Procedendo de forma análoga à obtenção de (146), tem-se:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t). \quad (147)$$

Substituindo essa lei de controle nas equações dinâmicas em (146) e considerando $z(t) = x(t)$, obtém-se as equações do sistema realimentado:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha x(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left[A_i x(t) - B_i \left(\sum_{j=1}^r h_j(x(t)) K_j x(t) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) B_i K_j x(t), \\ {}^c D_t^\alpha x(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) [A_i - B_i K_j] x(t). \end{aligned} \quad (148)$$

Observação 10. O sistema em (146) poderá incluir incertezas paramétricas agregadas às funções de pertinência. Esta abordagem será considerada na Seção 6.4.

É possível representar o modelo T-S fracionário na forma generalizada proposta em Taniguchi et al. (2001). Esse formato representa exatamente a dinâmica não linear do sistema dentro de uma determinada região de operação. Os modelos locais são obtidos através dos valores extremos das funções não lineares do sistema e é feita a escolha conveniente das funções

de pertinência que agregam esses modelos. Dessa forma, o número de modelos depende do número de funções não lineares do sistema. Esta técnica permite modelar vários sistemas que estejam dentro do intervalo de operação, pois a construção dos modelos leva em conta apenas os valores extremos das funções não lineares e não o seu comportamento. Considere a i -ésima equação de um sistema não linear fracionário:

$${}^c D_t^\alpha x_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m \tilde{g}_{ik}(x(t))u_k(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

sendo \tilde{f}_{ij} e \tilde{g}_{ik} funções de $x(t)$, n o número de estados e m o número de entradas. Como mencionado, para obter a forma generalizada do método proposto em Taniguchi et al. (2001), deve-se considerar as seguintes variáveis:

$$\bar{a}_{ij} = \max \{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \}, \quad \underline{a}_{ij} = \min \{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \}, \quad \bar{b}_{ik} = \max \{ \tilde{g}_{ik}(x(t)) \}, \quad \underline{b}_{ik} = \min \{ \tilde{g}_{ik}(x(t)) \}.$$

Note que representar o sistema original nessa forma generalizada requer 2^s modelos locais, sendo s o número de não linearidades distintas do sistema. O Exemplo 10 considerará esse método com mais detalhes.

6.2 ESTABILIDADE E TAXA DE DECAIMENTO DE SISTEMAS FRACIONÁRIOS FUZZY TAKAGI-SUGENO VIA LMIs

Com relação à estabilização, o teorema a seguir é uma extensão em sistemas de ordem fracionária do resultado aplicado aos sistemas de ordem inteira, estabelecido em Tanaka, Ikeda e Wang (1998).

Teorema 26. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fracionário fuzzy contínuo no tempo em (148) é Mittag-Leffler estável se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as LMIs:*

$$X > 0, \quad (149)$$

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad (150)$$

$$i = 1, \dots, r,$$

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_j - M_j^T B_i^T + XA_j^T + A_j X - B_j M_i - M_i^T B_j^T \leq 0, \quad (151)$$

$$i = 1, \dots, r-1, \quad j = i+1, \dots, r,$$

são factíveis, com exceção dos pares (i, j) , tais que $h_i(x(t))h_j(x(t)) = 0$, para todo $x(t)$. Nesse caso, os ganhos do controlador que estabiliza o sistema Caputo em (148), para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$, são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. É similar à demonstração do Teorema 21, considerando neste caso o modelo

fuzzy para o sistema não linear, com as funções de pertinência $h_i(x(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$. \square

Corolário 3. *Seja $B_1 = B_2 = \dots = B_r = B$. Nesse caso, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fracionário fuzzy contínuo no tempo em (148) é Mittag-Leffler estável se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, as LMIs:*

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ XA_i^T + A_iX - BM_i - M_i^T B^T &\leq 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (152)$$

são factíveis. Os ganhos do controlador que estabiliza o sistema Caputo em (148), para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$, são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Segue do Teorema 26, considerando $B_i = B$, $i \in \mathbb{K}_r$. \square

Com relação à taxa de decaimento, o teorema proposto a seguir é uma extensão em sistemas de ordem fracionária do resultado aplicado aos sistemas de ordem inteira, estabelecido em Tanaka, Ikeda e Wang (1998).

Teorema 27. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fracionário fuzzy contínuo no tempo em (148) é Mittag-Leffler estável, com taxa de decaimento maior ou igual a γ , se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, as LMIs:*

$$X > 0, \quad (153)$$

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T + 2\gamma X &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} XA_i^T + A_iX - B_iM_j - M_j^T B_i^T + XA_j^T + A_jX - B_jM_i - M_i^T B_j^T + 4\gamma X &\leq 0, \\ i &= 1, \dots, r-1, j = i+1, \dots, r, \end{aligned} \quad (155)$$

são factíveis, com exceção dos pares (i, j) tais que $h_i(x(t))h_j(x(t)) = 0$, para todo $x(t)$. Nesse caso, os ganhos do controlador que estabiliza o sistema Caputo em (148), para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$, são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. É similar à demonstração do Teorema 22, considerando neste caso o modelo fuzzy para o sistema não linear, com as funções de pertinência $h_i(x(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$. \square

6.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS FRACIONÁRIAS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS LIMITADAS EM NORMA VIA LMIs

Os lemas apresentados a seguir serão utilizados na demonstração do teorema subsequente proposto em Li e Li (2014) acerca da estabilidade de sistemas fracionários T-S com incertezas limitadas em norma. O conceito dessa abordagem difere da perspectiva central desse trabalho, a qual traz o foco para as incertezas politópicas. Essa abordagem é considerada, todavia, com o intuito de apresentar de que forma a teoria de sistemas de ordem fracionária novamente permeia a teoria clássica de sistemas de ordem inteira, através do Lema 11.

Lema 10. (DEMIRCI; OZALP, 2012) *Sejam os vetores $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ e $f(t, x(t)) = [f_1(t, x(t)), \dots, f_n(t, x(t))]^T$. Assuma que $f(t, x(t)) \in C[\Omega_1, \mathbb{R}^n]$, sendo:*

$$\Omega_1 = [(t, x(t)) : 0 \leq t \leq a \text{ e } \|x(t) - x(0)\| \leq b],$$

com $\|f(t, x(t))\| \leq M$ em Ω_1 . Então existe pelo menos uma solução do problema de valor inicial de ordem $\alpha \in (0, 1)$:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (156)$$

em $0 \leq t \leq \xi$, sendo $\xi = \min\left(a, \frac{b}{M} (\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}}\right)$.

Lema 11. (DEMIRCI; OZALP, 2012) *Assuma que as condições do Lema 10 sejam válidas. Seja $g(v, x^*(v)) = f\left(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha}}, x\left(t - [t^\alpha - v\Gamma(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)$. Então a solução do problema de valor inicial em (156) pode ser dada por $x(t) = x^*(t^\alpha/\Gamma(\alpha + 1))$, com $x^*(v)$ a solução do seguinte problema de valor inicial de ordem inteira:*

$$\begin{cases} \dot{x}^*(v) = g(v, x^*(v)), \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

Lema 12. (XIE, 1996) *Sejam as matrizes T , L , $N(t)$ e M de dimensões apropriadas, com M simétrica. Então a desigualdade $M + TN(t)L + L^T N^T(t)T^T < 0$ é válida para qualquer $N(t)$ que satisfaça $N^T(t)N(t) \leq I$ se, e somente se, existe um $\varepsilon > 0$, tal que:*

$$M + \varepsilon T T^T + \varepsilon^{-1} L^T L < 0.$$

Lema 13. (BOYD et al., 1994) *Do complemento de Schur, para uma matriz simétrica S , as seguintes desigualdades são equivalentes:*

$$\begin{aligned} (1) \quad & S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} < 0, \\ (2) \quad & S_{11} < 0, \quad S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0, \\ (3) \quad & S_{22} < 0, \quad S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0. \end{aligned}$$

Seja um sistema não linear com incertezas variantes no tempo, limitadas por norma. Suponha que o vetor de saída do modelo fuzzy T-S incerto de ordem fracionária seja formulado da seguinte forma:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (157)$$

com $\alpha \in (0, 1)$, x_0 o vetor de condições iniciais, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, enquanto que ΔA_i e ΔB_i são funções matriciais reais que representam os parâmetros incertos variantes no tempo e possuem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{A_i} F_{A_i}(t) E_{A_i} & D_{B_i} F_{B_i}(t) E_{B_i} \end{bmatrix},$$

com D_{A_i} , D_{B_i} , E_{A_i} , E_{B_i} matrizes constantes conhecidas e $F_{A_i}(t)$, $F_{B_i}(t)$ matrizes desconhecidas satisfazendo $F_{A_i}^T(t) F_{A_i}(t) \leq I$, $F_{B_i}^T(t) F_{B_i}(t) \leq I$. A lei de controle em (147), substituindo-a nas equações do sistema em (157), obtém-se:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha x(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left[(A_i + \Delta A_i)x(t) - (B_i + \Delta B_i) \left(\sum_{j=1}^r h_j(x(t)) K_j x(t) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i)x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (B_i K_j + \Delta B_i K_j) x(t), \\ {}^c D_t^\alpha x(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) x(t). \end{aligned} \quad (158)$$

O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do sistema fuzzy em (158):

Teorema 28. (LI; LI, 2014) *O sistema incerto fuzzy T-S em (158) é assintoticamente estabilizável se existem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, r$ e escalares reais ε_{ii} , η_{ii} , δ_{ii} , δ_{jj} , δ_{ij} e δ_{ji} , tais que as LMIs:*

$$X > 0, \quad (159)$$

$$\begin{bmatrix} L_{ii} & X E_{A_i}^T & M_i^T E_{B_i}^T \\ * & -\varepsilon_{ii} I & 0 \\ * & * & -\eta_{ii} I \end{bmatrix} < 0, \quad (160)$$

$$i = 1, \dots, r,$$

$$L_{ii} = A_i X - B_i M_i + (A_i X - B_i M_i)^T + \varepsilon_{ii} D_{A_i} D_{A_i}^T + \eta_{ii} D_{B_i} D_{B_i}^T,$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tilde{L}_{ii} & XE_{A_i}^T & M_j^T E_{B_i}^T & XE_{A_j}^T & M_i^T E_{B_j}^T \\ * & -\delta_{ii}I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta_{ij}I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta_{jj}I & 0 \\ * & * & * & * & -\delta_{ji}I \end{bmatrix} < 0, \\
& i = 1, \dots, r-1, j = i+1, \dots, r, \\
& \tilde{L}_{ij} = A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i + (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i)^T + \\
& \quad \delta_{ii} D_{A_i} D_{A_i}^T + \delta_{ij} D_{B_i} D_{B_i}^T + \delta_{jj} D_{A_j} D_{A_j}^T + \delta_{ji} D_{B_j} D_{B_j}^T,
\end{aligned} \tag{161}$$

são factíveis. Nesse caso, os ganhos do controlador que estabiliza o sistema Caputo em (158), para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1)$, são $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. Note que os elementos $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)$ do sistema realimentado em (158) são limitados, existindo, pois, uma constante $M > 0$ tal que $\left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) \right\| \leq M$. Então, para quaisquer $x(t_1)$ e $x(t_2)$:

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t_1)) h_j(x(t_1)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) x(t_1) \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t_2)) h_j(x(t_2)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) x(t_2) \right\| \leq M \|x(t_1) - x(t_2)\|.
\end{aligned}$$

Essa inequação implica que $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) x(t)$ é Lipschitz em $x(t)$. Assim, o sistema em (158) tem solução única (PODLUBNY, 1998). Seja $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) x(t)$ uma função contínua mapeada do conjunto $\Omega_1 = \{(t, x(t)) : 0 \leq t \leq a \text{ e } \|x(t) - x(0)\| \leq b\}$ para o \mathbb{R}^n . Então, de acordo com o Lema 10, a solução de (158) é dada por:

$$x(t) = x^*(t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)),$$

no intervalo $0 \leq t \leq \xi$, com $\xi = \min\left(a, \frac{b}{M} (\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, onde $x^*(v)$ é a solução do sistema de ordem inteira:

$$\begin{cases} x^*(v) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^* h_j^* [A_i - B_i K_j + D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i} - D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_j] x^*(v), \\ x^*(0) = x_0, \end{cases} \tag{162}$$

com

$$\begin{aligned} x^*(\mathbf{v}) &= x \left(t - (t^\alpha - \mathbf{v}\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}} \right), \\ h_i^* &= h_i \left(x \left(t - (t^\alpha - \mathbf{v}\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right), \\ F_{A_i}^* &= F_{A_i} \left(t - (t^\alpha - \mathbf{v}\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}} \right), \\ F_{B_i}^* &= F_{B_i} \left(t - (t^\alpha - \mathbf{v}\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{\alpha}} \right), \\ F_{A_i}^{*T} F_{A_i}^*(\mathbf{v}) &\leq I, \quad F_{B_i}^{*T} F_{B_i}^*(\mathbf{v}) \leq I. \end{aligned}$$

Pode-se escrever o sistema em (162) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(\mathbf{v}) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^{*2} G_{(i,i)} + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i^* h_j^* \left[\frac{G_{(i,j)} + G_{(j,i)}}{2} \right] \right\} x^*(\mathbf{v}), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (163)$$

com:

$$\begin{aligned} G_{(i,i)} &= A_i - B_i K_i + D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i} - D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_i, \\ G_{(i,j)} &= A_i - B_i K_j + D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i} - D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_j, \\ G_{(j,i)} &= A_j - B_j K_i + D_{A_j} F_{A_j}^* E_{A_j} - D_{B_j} F_{B_j}^* E_{B_j} K_i. \end{aligned}$$

Considere a candidata a função de Lyapunov $V(x^*(\mathbf{v})) = x^{*T}(\mathbf{v}) P x^*(\mathbf{v})$, com $P^T = P > 0$. As equações em (163), substituindo-as em $\dot{V}(x^*(\mathbf{v})) = x^{*T}(\mathbf{v}) P \dot{x}^*(\mathbf{v}) + x^{*T}(\mathbf{v}) P \dot{x}^*(\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x^*(\mathbf{v})) &= x^{*T}(\mathbf{v}) \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^{*2} \left(G_{(i,i)}^T P + P G_{(i,i)} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i^* h_j^* \left[\left(\frac{G_{(i,j)}^T + G_{(j,i)}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{(i,j)} + G_{(j,i)}}{2} \right) \right] \right\} x^*(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Logo, se as condições:

$$P > 0,$$

$$\begin{aligned} G_{(i,i)}^T P + P G_{(i,i)} &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} (G_{(i,j)} + G_{(j,i)})^T P + P (G_{(i,j)} + G_{(j,i)}) &\leq 0, \\ i &= 1, \dots, r-1, \quad j = i+1, \dots, r, \end{aligned} \quad (165)$$

são satisfeitas, então $V(x^*(\mathbf{v})) > 0$ e $\dot{V}(x^*(\mathbf{v})) < 0$, para todo $x^*(\mathbf{v}) \neq 0$, e está garantida a estabilidade assintótica do sistema em (163). Seja $Sym[X]$ para denotar a expressão $X^T + X$. As inequações em (164) e (165) podem ser representadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} &Sym \left[P (A_i - B_i K_i + D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i} - D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_i) \right] \\ &= Sym [P (A_i - B_i K_i)] + Sym [P (D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i})] + Sym [P (-D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_i)] < 0, \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sym} \left[P \left((A_i - B_i K_j + D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i} - D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_j) + (A_j - B_j K_i + D_{A_j} F_{A_j}^* E_{A_j} - D_{B_j} F_{B_j}^* E_{B_j} K_i) \right) \right] \\
&= \text{Sym} [P (A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)] \\
&\quad + \text{Sym} \left[P \left(D_{A_i} F_{A_i}^* E_{A_i} - D_{B_i} F_{B_i}^* E_{B_i} K_j + D_{A_j} F_{A_j}^* E_{A_j} - D_{B_j} F_{B_j}^* E_{B_j} K_i \right) \right] < 0.
\end{aligned} \tag{167}$$

Mediante o Lema 12, as inequações em (166) e (167) são válidas se e somente se existem escalares ε_{ii} , η_{ii} e escalares δ_{ii} , δ_{jj} , δ_{ij} , δ_{ji} , respectivamente, tais que:

$$\text{Sym} [P (A_i - B_i K_i)] + \varepsilon_{ii} P D_{A_i} D_{A_i}^T P + \varepsilon_{ii}^{-1} E_{A_i}^T E_{A_i} + \eta_{ii} P D_{B_i} D_{B_i}^T P + \eta_{ii}^{-1} (E_{B_i} K_i)^T E_{B_i} K_i < 0, \tag{168}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sym} [P (A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)] \\
&+ \delta_{ii} (P D_{A_i}) (P D_{A_i})^T + \delta_{ii}^{-1} E_{A_i}^T E_{A_i} + \delta_{ij} (P D_{B_i}) (P D_{B_i})^T + \delta_{ij}^{-1} (E_{B_i} K_j)^T (E_{B_i} K_j) \\
&+ \delta_{jj} (P D_{A_j}) (P D_{A_j})^T + \delta_{jj}^{-1} E_{A_j}^T E_{A_j} + \delta_{ji} (P D_{B_j}) (P D_{B_j})^T + \delta_{ji}^{-1} (E_{B_j} K_i)^T (E_{B_j} K_i) < 0.
\end{aligned} \tag{169}$$

Do Lema 13, referente ao complemento de Schur, as inequações (168) e (169) são equivalentes a, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} L_{ii} & E_{A_i}^T & (E_{B_i} K_i)^T \\ * & -\varepsilon_{ii} I & 0 \\ * & * & -\eta_{ii} I \end{bmatrix} < 0, \\
& L_{ii} = \text{Sym} [P (A_i - B_i K_i)] + \varepsilon_{ii} P D_{A_i} D_{A_i}^T P + \eta_{ii} P D_{B_i} D_{B_i}^T P,
\end{aligned} \tag{170}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ij} & E_{A_i}^T & (E_{B_i} K_j)^T & E_{A_j}^T & (E_{B_j} K_i)^T \\ * & -\delta_{ii} I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta_{ij} I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta_{jj} I & 0 \\ * & * & * & * & -\delta_{ji} I \end{bmatrix} < 0, \\
& \tilde{U}_{ij} = \text{Sym} [P (A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)] \\
&+ \delta_{ii} (P D_{A_i}) (P D_{A_i})^T + \delta_{ij} (P D_{B_i}) (P D_{B_i})^T + \delta_{jj} (P D_{A_j}) (P D_{A_j})^T + \delta_{ji} (P D_{B_j}) (P D_{B_j})^T.
\end{aligned} \tag{171}$$

Segue a realização de uma transformação de congruência em (170) com a matriz não singular $\text{diag} [P^{-1} I I]$. Denotando $X = P^{-1}$ e $M_i = K_i P^{-1}$, obtém-se as LMIs em (160). Segue a realização de uma transformação de congruência em (171) com a matriz não singular $\text{diag} [P^{-1} I I I I]$. Denotando $X = P^{-1}$ e $M_j = K_j P^{-1}$, com $\tilde{L}_{ij} = P^{-1} \tilde{U}_{ij} P^{-1}$, obtém-se as LMIs em (161).

De acordo com o método direto de Lyapunov, se $V(x^*(v)) > 0$ e $\dot{V}(x^*(v)) < 0$, para todo $x^*(v) \neq 0$, então o sistema em (158) é assintoticamente estável, isto é, $\lim_{v \rightarrow \infty} x^*(v) = 0$. Dado que $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)) = \lim_{v \rightarrow \infty} x^*(v) = 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. \square

Observação 11. Quando os sistemas em (146) e (157) estão isentos de incertezas ($\Delta A_i = 0$ e $\Delta B_i = 0$ para o último), as LMIs em (159), (160) e (161) se reduzem às LMIs do Teorema 26. Em perspectiva, pode-se considerar de que forma a abordagem com incertezas politópicas é capaz de sintetizar a abordagem apresentada nessa seção.

6.4 CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS TAKAGI-SUGENO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Considere o sistema fuzzy T-S em (146) com parâmetros incertos agregados às funções de pertinência, representados por β :

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t), \beta) [A_i x(t) + B_i u(t)] = A(h(z(t), \beta)) x(t) + B(h(z(t), \beta)) u(t). \quad (172)$$

6.4.1 Caso 1: sistemas fuzzy com matriz conhecida $B(h(z(t), \beta)) = B$

Um controlador chaveado será proposto para o sistema fuzzy T-S em (172). Considere a matriz isenta de funções não lineares e de parâmetros incertos $B(h(z(t), \beta)) = B$. Assim, tem-se as seguintes equações dinâmicas:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(h(z(t), \beta)) x(t) + B u(t). \quad (173)$$

Seja a lei de controle chaveada para sistemas fracionários lineares dada em (124). Adotando uma lei de controle chaveada análoga para o modelo fracionário fuzzy em (173), obtém-se as equações do sistema realimentado:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(h(z(t), \beta)) x(t) + B u_\sigma(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t), \beta) (A_i - B K_\sigma) x(t). \quad (174)$$

Teorema 29. *Sejam as LMIs do Corolário 3 factíveis. O Corolário 3 trata do sistema Caputo em (146), com $B_1 = B_2 = \dots = B_r = B$, realimentado com a lei de controle em (147). Neste caso, foram obtidos os ganhos $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$. Então a lei de controle chaveada em (124) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema Caputo em (173) Mittag-Leffler estável, para qualquer $\alpha \in (0, 1]$.*

Demonstração. É similar à demonstração do Teorema 23, considerando neste caso o modelo fuzzy para o sistema não linear, com as funções de pertinência $h_i(x(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$. \square

Note que a técnica do controle chaveado não necessita das funções de pertinência $h_i(z(t), \beta)$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Observação 12. É salientado que através do Corolário 3 são projetados os ganhos K_i , $i \in \mathbb{K}_r$ e a matriz $P = X^{-1}$, envolvidos na lei de chaveamento em (124), o que implica em ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta} < 0$, para todo $x \neq 0$. Do teorema anterior, ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\beta} < 0$ implica em ${}^c D_t^\alpha V(x(t))_{u_\sigma} < 0$, para todo $x \neq 0$. Logo, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy realimentado em (174) é Mittag-Leffler estável.

6.4.2 Caso 2: sistemas fuzzy com a matriz $B(h(z(t), \beta))$, contendo não linearidades e parâmetros incertos

Considere o sistema fuzzy com incertezas em (172):

$${}^c D_t^\alpha \hat{x}(t) = \hat{A}(h(z(t), \beta))\hat{x}(t) + \hat{B}(h(z(t), \beta))u(t),$$

$$\hat{A}(h(z(t), \beta)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t), \beta)\hat{A}_i, \quad \hat{B}(h(z(t), \beta)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t), \beta)\hat{B}_i.$$

Procedendo de maneira análoga a Seção 5.3.2, obtém-se o sistema equivalente:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(h(z(t), \beta))x(t) + Bv(t), \quad (175)$$

$$\text{com } x(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}^T \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \quad A(h(z(t), \beta)) = \begin{bmatrix} \hat{A}(h(z(t), \beta)) & \hat{B}(h(z(t), \beta)) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Retorna-se, pois, ao Caso 1 e é possível adotar o mesmo procedimento para projetar a lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$. Entretanto, novamente poderá ser adotada a lei de chaveamento em (130), a qual inclui matrizes auxiliares $Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \mathbb{K}_r$, através das quais define-se o índice $\hat{\sigma}$ do chaveamento. Esta lei está fundamentada na redução do limite superior da derivada de Caputo da função de Lyapunov.

Teorema 30. Para o sistema em (172), realimentado com a lei de controle chaveada em (130), suponha a existência de matrizes simétricas X , Z_i , $Q_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i, j \in \mathbb{K}_r$, e um escalar $\gamma \geq 0$, tais que as LMIs:

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ -B_i M_j - M_j^T B_i^T - Z_i - Q_j &< 0, \\ X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\gamma X &< 0, \end{aligned} \quad (176)$$

são factíveis. Então a lei de controle chaveada em (130) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em (172) Mittag-Leffler estável, com taxa de decaimento maior ou igual a γ , com $\bar{Q}_j = X^{-1} Q_j X^{-1}$ e $K_j = M_j X^{-1}$ os ganhos do controlador.

Demonstração. É similar à demonstração do Teorema 24, considerando neste caso o modelo

fuzzy para o sistema não linear, com as funções de pertinência $h_i(x(t), \beta) \geq 0$, $i = 1, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r h_i(x(t), \beta) = 1$. \square

6.5 EXEMPLO NUMÉRICO

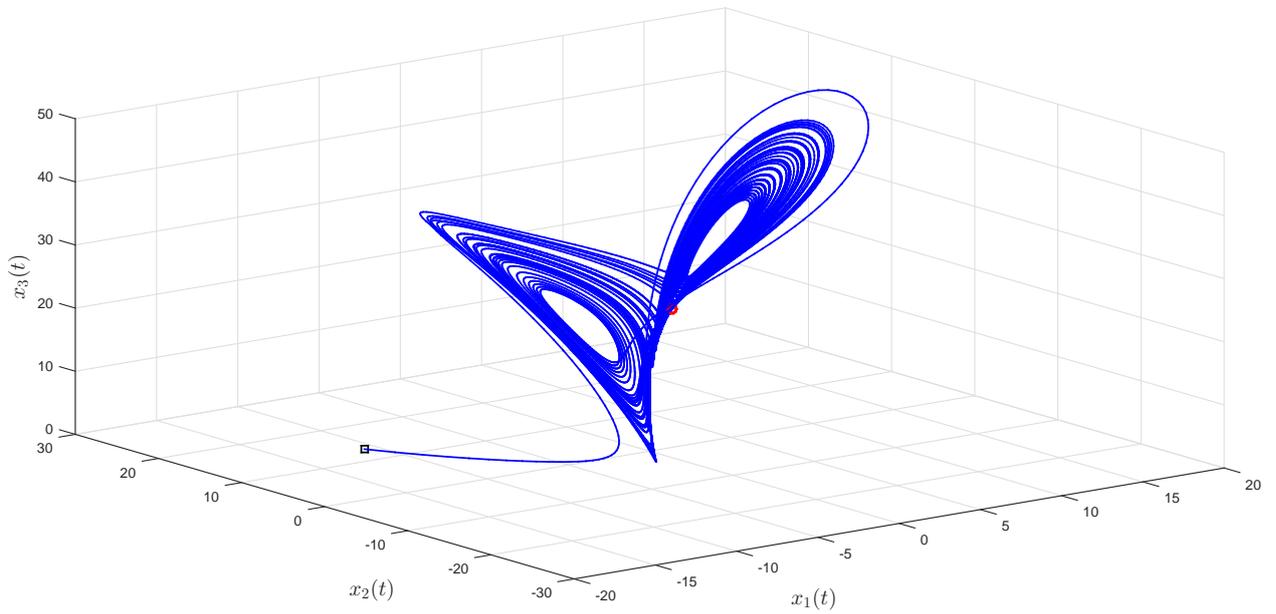
Para a solução das restrições em LMIs, foi utilizado o solver SeDuMi (STURM, 1999) no ambiente do software MatLab[®]. As simulações utilizam o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, apresentado na Seção 4.4.2.

Exemplo 10. (*Controle Chaveado, matriz constante B*) - Seja o sistema de Lorenz de ordem $\alpha \in (0, 1]$ (LI; YAN, 2007), acrescido de uma entrada de controle $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x_1(t) = -\lambda_1 x_1(t) + \lambda_1 x_2(t) + 3u_1(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_2(t) = \lambda_2 x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) + 3u_2(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_3(t) = x_1(t)x_2(t) - \lambda_3 x_3(t) + u_1(t) + u_2(t). \end{cases} \quad (177)$$

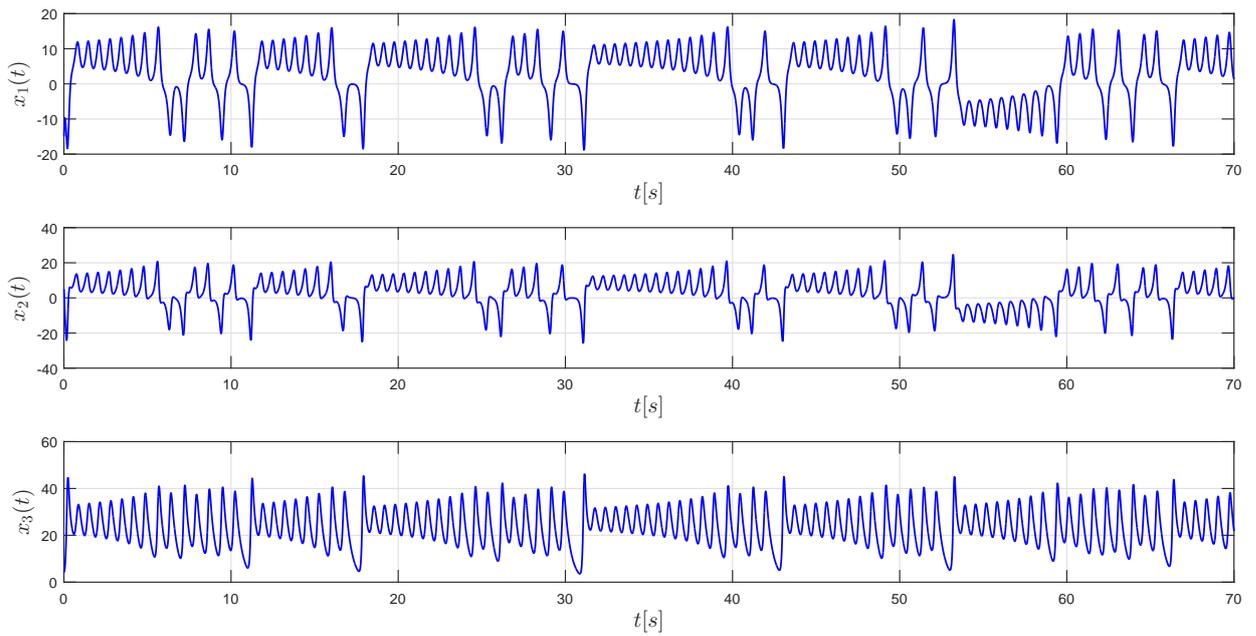
No sistema de Lorenz clássico, os valores nominais para o surgimento de caos são: $\lambda_{1n} = 10$, $\lambda_{2n} = 28$ e $\lambda_{3n} = 8/3$. Conforme Petrás (2011), no sistema de Lorenz fracionário, uma condição necessária para o surgimento de caos, com os referidos valores nominais dos parâmetros, é $\alpha > 0,9941$, sendo satisfatória a ordem $\alpha = 0,995$. A Figura 11 apresenta a trajetória caótica do sistema de Lorenz de ordem $\alpha = 0,995$, nos valores nominais, com passo de integração 0,005 e em 70 segundos de simulação. As condições iniciais $x_0 = [-15 \ 5 \ 5]^T$ e as condições finais $x_f = [1,3616 \ -0,0004 \ 21,9016]^T$ estão representadas por um quadrado preto e um círculo vermelho, respectivamente. A Figura 12 apresenta a evolução caótica dos estados.

Figura 11 - Plano de fase do sistema de Lorenz de ordem $\alpha = 0,995$, em malha aberta.



Fonte: Próprio Autor

Figura 12 - Evolução das variáveis de estado do sistema de Lorenz de ordem $\alpha = 0,995$, em malha aberta.



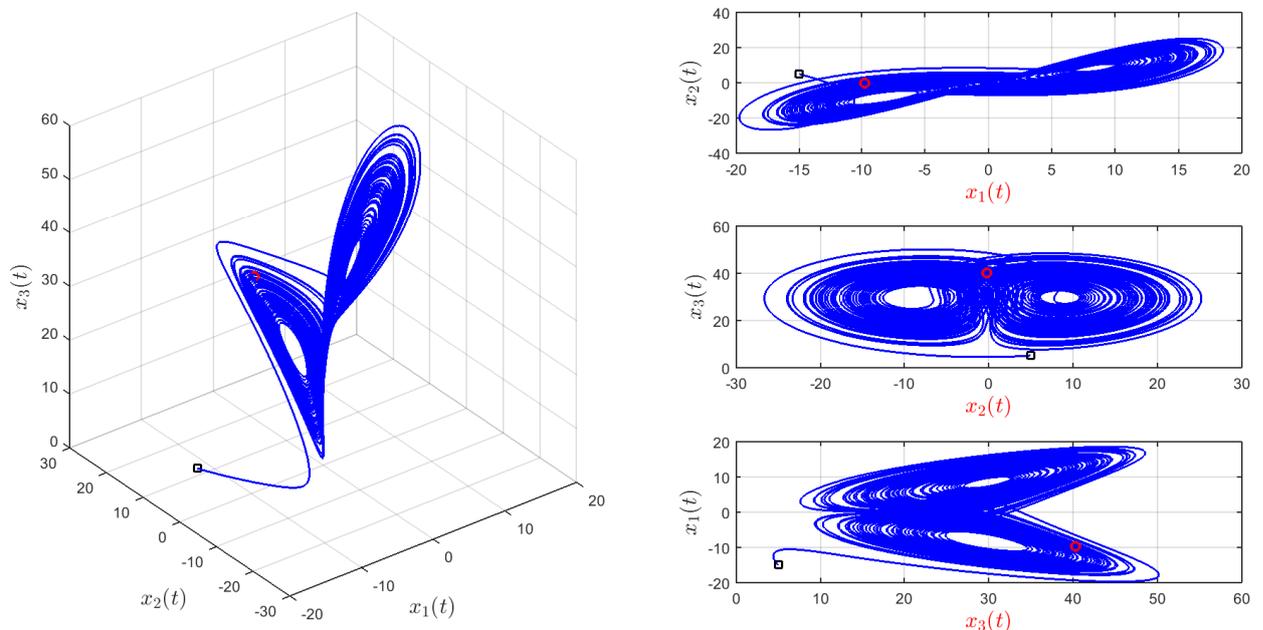
Fonte: Próprio Autor

O sistema de Lorenz será representado por modelos fuzzy T-S e submetido ao controle chaveado. Considere que os parâmetros λ_2 e λ_3 são incertos e podem assumir qualquer valor dentro de uma porcentagem dos seus respectivos valores nominais:

$$\begin{aligned}\lambda_{2n}(1-d) &\leq \lambda_2 \leq \lambda_{2n}(1+d), \\ \lambda_{3n}(1-d) &\leq \lambda_3 \leq \lambda_{3n}(1+d),\end{aligned}\tag{178}$$

com $0 < d < 1$. A região do sistema de malha aberta na qual os estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ excursionam quando $\lambda_2 \in [\lambda_{2n}(1-d), \lambda_{2n}(1+d)]$ e $\lambda_3 \in [\lambda_{3n}(1-d), \lambda_{3n}(1+d)]$ está contida na região do sistema de malha aberta na qual os estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ excursionam para $\lambda_2 = \lambda_{2n}(1+d)$ e $\lambda_3 = \lambda_{3n}(1+d)$, isto é, quanto maior o valor que os parâmetros λ_1 e λ_2 assumem, maior é a região em que os estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ excursionam. Será adotado no projeto do controlador chaveado o valor $d = 0,2$. A Figura 13 apresenta os perfis nos planos x_1x_2 , x_2x_3 e x_3x_1 do sistema em malha aberta para $\lambda_1 = \lambda_{1n} = 10$, $\lambda_2 = 28 \times 1,1 = 30,8$ e $\lambda_3 = (8/3) \times 0,9 = 2,4$, com passo de integração 0,001, tempo de simulação de 70 segundos e condição inicial $x_0 = [-15 \ 5 \ 5]^T$. Novamente, a condição inicial está representada por um quadrado preto e a condição final por um círculo vermelho.

Figura 13 - Plano de fase do sistema de malha aberta para $d = 0,2$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 30,8$ e $\lambda_3 = 2,4$.



Fonte: Próprio Autor

Logo, o intervalo de atração do sistema de Lorenz pode ser dado por: $-30 \leq x_1(t) \leq 30$, $-40 \leq x_2(t) \leq 40$, $0 \leq x_3(t) \leq 60$. Diante disso, o domínio de operação D das variáveis de

estado e das incertezas pode ser especificado:

$$D = \left\{ w = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^5 : -30 \leq x_1(t) \leq 30; -40 \leq x_2(t) \leq 40; \right. \\ \left. 0 \leq x_3(t) \leq 60; 22,4 \leq \lambda_2 \leq 33,6; 2,13 \leq \lambda_3 \leq 3,2 \right\}. \quad (179)$$

Para $\alpha = 0,995$ e $\lambda_1 = \lambda_{1n} = 10$, as equações em (177) podem ser escritas como:

$${}^c D_t^{0,995} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0, \\ f_{21} & -1 & 0, \\ f_{31} & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (180)$$

com $f_{21} = \lambda_2 - x_3(t)$, $f_{31} = x_2(t)$ e $f_{33} = -\lambda_3$. Para obter os modelos locais da representação exata do sistema não linear é necessário determinar os valores máximos e mínimos que as funções f_{21} , f_{31} e f_{33} assumem no domínio D . Esses valores são:

$$\bar{a}_{21} = \max\{f_{21}\} = 33,6, \quad \bar{a}_{31} = \max\{f_{31}\} = 40, \quad \bar{a}_{33} = \max\{f_{33}\} = -2,13, \\ \underline{a}_{21} = \min\{f_{21}\} = -37,6, \quad \underline{a}_{31} = \min\{f_{31}\} = -40, \quad \underline{a}_{33} = \min\{f_{33}\} = -3,2.$$

É omitido aqui o procedimento similar descrito em Taniguchi et al. (2001) para a obtenção da expressão das funções de pertinência h_1, \dots, h_8 . A saída final do sistema fuzzy é ${}^c D_t^{0,995} x(t) = \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i B_i u(t)$, cujos modelos locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -37,6 & -1 & 0 \\ -40 & 0 & -3,2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -37,6 & -1 & 0 \\ -40 & 0 & -2,13 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -37,6 & -1 & 0 \\ 40 & 0 & -3,2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -37,6 & -1 & 0 \\ 40 & 0 & -2,13 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_5 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -33,6 & -1 & 0 \\ -40 & 0 & -3,2 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -33,6 & -1 & 0 \\ -40 & 0 & -2,13 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 8. \\ A_7 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -33,6 & -1 & 0 \\ 40 & 0 & -3,2 \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -33,6 & -1 & 0 \\ 40 & 0 & -2,13 \end{bmatrix}, \quad (181)$$

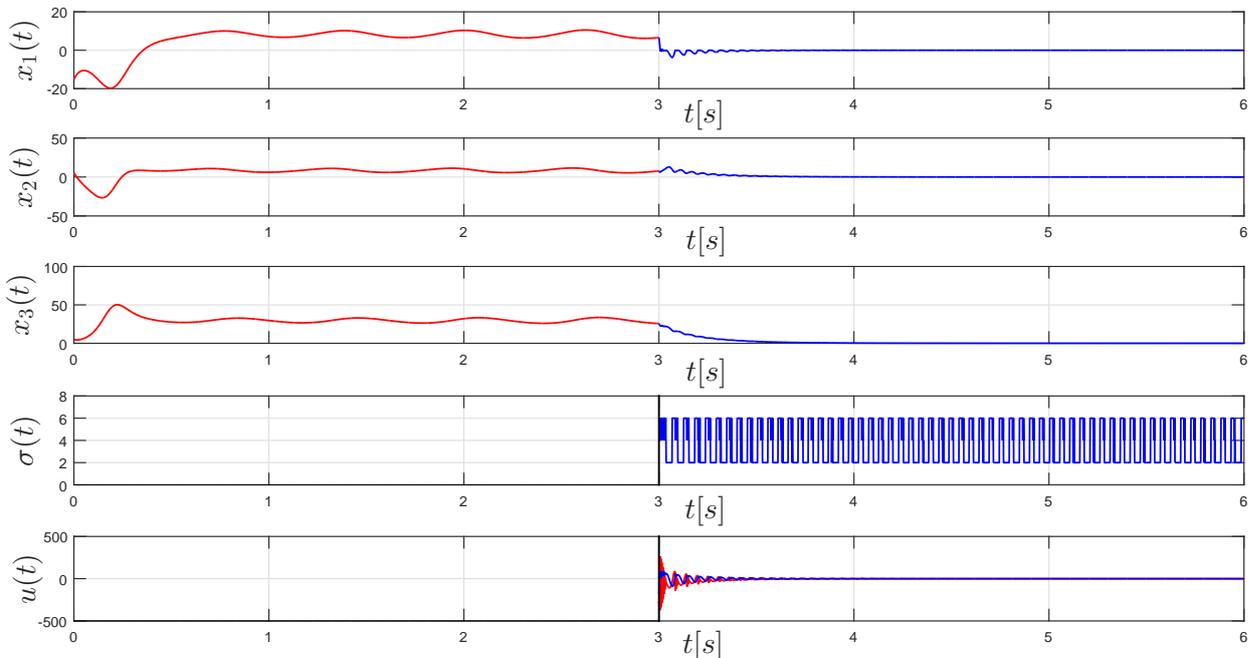
O sistema será controlado para um domínio de incertezas de 20% em torno do valor nominal dos parâmetros λ_2 e λ_3 . Sendo a matriz B constante, o Corolário 3 é utilizado para calcular os ganhos K_i , $i = 1, \dots, 8$ que compõe o chaveamento, bem como a matriz P que participa da lei

de chaveamento, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 4,3849 & 32,4787 & -14,8915 \\ -38,0809 & -2,3736 & -2,0039 \\ -19,3787 & -57,7521 & 32,7465 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} 4,2160 & 31,8827 & -14,5704 \\ -37,6927 & -2,4214 & -1,6260 \\ -19,5476 & -58,3482 & 33,0676 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 44,4356 & 7,1957 & -7,0495 \\ 11,4348 & 59,2472 & -29,0241 \\ -38,8275 & -5,2125 & -0,5070 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} 44,8238 & 7,1479 & -6,6716 \\ 11,2659 & 58,6512 & -28,7030 \\ -38,4393 & -5,2602 & -0,1291 \end{bmatrix}, \\
 K_5 &= \begin{bmatrix} -12,3288 & -30,9836 & 18,6139 \\ 43,6891 & 4,3568 & -5,5526 \end{bmatrix}, & K_6 &= \begin{bmatrix} -12,4977 & -31,5797 & 18,9350 \\ 44,0772 & 4,3090 & -5,1747 \end{bmatrix}, \\
 K_7 &= \begin{bmatrix} 1,4022 & 0,3279 & -0,8851 \\ 0,3279 & 1,2449 & -0,6572 \\ -0,8851 & -0,6572 & 2,7370 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

A Figura 14 apresenta a simulação da metodologia para o sistema em (177), com os parâmetros $\lambda_2 = 30,8$ e $\lambda_3 = 2,4$. O sistema inicialmente está em malha aberta a partir da condição inicial $x_0 = [-15 \ 5 \ 5]$ e o controle chaveado passa a atuar depois de 3 segundos a partir das condições $x = [6,6147 \ 7,7634 \ 25,7101]$.

Figura 14 - Sistema de ordem $\alpha = 0,995$ incerto submetido a lei de controle chaveada em (124).



Fonte: Próprio Autor

6.6 CONCLUSÕES PARCIAIS

Este capítulo propôs o projeto de controladores para sistemas fracionários não lineares incertos segundo a derivada de Caputo e descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O controle utiliza a realimentação do vetor de estado. Os ganhos são projetados através de desigualdades matriciais lineares, os quais podem incluir taxa de decaimento Mittag-Leffler. Como foco deste capítulo, é proposto o projeto de controladores chaveados, fundamentado na minimização do limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, através da compensação distribuída paralela, o qual dispensa o conhecimento das funções de pertinência do modelo fuzzy. O sistema de Lorenz fracionário foi utilizado para validar a teoria.

7 CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS LINEARES DE ORDEM FRACIONÁRIA COM REALIMENTAÇÃO α -DERIVATIVA VIA LMI

Este capítulo propõe o projeto de controladores para sistemas lineares Caputo incertos utilizando LMIs. O controle é realizado através da realimentação da derivada de Caputo do vetor de estado, com o ganho de realimentação projetado. Novamente, a respeito das incertezas poli-tópicas, as seguintes notações serão utilizadas ao longo deste capítulo:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad (A, B, K)(\beta) = \sum_{i=1}^r \beta_i (A_i, B_i, K_i), \\ \beta &= [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r], \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \beta_i = 1, \end{aligned} \quad (182)$$

sendo $r = 2^s$ e s o número de parâmetros incertos distintos do sistema fracionário linear. Considere a definição a seguir:

Definição 15. *Seja o sistema Caputo incerto de ordem $\alpha \in (0, 1]$, linear e invariante no tempo:*

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t), \quad (183)$$

em que $A(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem posto completo ($\det(A(\beta)) \neq 0$), $B(\beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada.

Suponha que apenas a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ das variáveis de estado esteja disponível para realimentação. Nesse caso, será utilizada a seguinte lei de controle com ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$u(t) = -K \{ {}^c D_t^\alpha x(t) \}. \quad (184)$$

Substituindo (184) em (183), obtém-se as equações do sistema realimentado:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(\beta)x(t) - B(\beta)K \{ {}^c D_t^\alpha x(t) \} \Rightarrow {}^c D_t^\alpha x(t) = (I + B(\beta)K)^{-1} A(\beta)x(t), \quad (185)$$

com a hipótese de que $(I + B(\beta)K) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possua posto completo. Diante disso, tem-se o problema:

Problema 1. *Encontrar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que as seguintes condições sejam válidas:*

- $(I + B(\beta)K) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tenha posto completo;
- O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema realimentado em (185) é Mittag-Leffler estável.

O teorema proposto a seguir é uma extensão em sistemas de ordem fracionária do Teorema 3, aplicado aos sistemas de ordem inteira, estabelecido em Assunção et al. (2007).

Teorema 31. *Uma condição suficiente para a solução do Problema 1 é a existência de matrizes $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que as LMIs:*

$$Q > 0, \quad (186)$$

$$\begin{aligned} QA_i^T + A_i Q + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T < 0, \\ i, j = 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (187)$$

são factíveis. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza o sistema Caputo em (183) para qualquer valor de $\alpha \in (0, 1]$ é dado por $K = YQ^{-1}$.

Demonstração. Suponha que as LMIs em (186) e (187) são factíveis. Multiplicando ambos os lados de (187) por $\beta_i \beta_j$, segue de (182) que:

$$\begin{aligned} Q \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i Q + \sum_{j=1}^r \beta_j B_j Y \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i Y^T \sum_{j=1}^r \beta_j B_j^T \\ = QA(\beta)^T + A(\beta)Q + B(\beta)YA(\beta)^T + A(\beta)Y^T B(\beta)^T < 0. \end{aligned}$$

Substituindo $Y = KQ$, obtém-se:

$$(I + B(\beta)K)QA(\beta)^T + A(\beta)Q(I + B(\beta)K)^T < 0. \quad (188)$$

Para toda matriz não simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se $M + M^T < 0$ então M tem posto completo. Logo, de (188), tem-se que $(I + B(\beta)K)QA(\beta)^T$ tem posto completo e $(I + B(\beta)K)$ também tem posto completo, o que é requerido no Problema 1. Mediante esse fato, multiplicando (188) à esquerda por $(I + B(\beta)K)^{-1}$ e à direita por $\left[(I + B(\beta)K)^{-1}\right]^T$, obtém-se:

$$QA(\beta)^T \left[(I + B(\beta)K)^{-1}\right]^T + (I + B(\beta)K)^{-1}A(\beta)Q < 0.$$

Multiplicando à direita pela matriz não singular $P = Q^{-1}$ e à esquerda por $P^T = P = Q^{-1}$:

$$A(\beta)^T \left[(I + B(\beta)K)^{-1}\right]^T P + P(I + B(\beta)K)^{-1}A(\beta) < 0. \quad (189)$$

Seja a candidata a função de Lyapunov a função quadrática $V(x) = x(t)^T P x(t)$, com $P^T = P > 0$. É reconsiderada, nesse ponto, a inequação em (101), mediante o Lema 4. As equações em (185), substituindo-as em (101), obtém-se:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ A(\beta)^T \left[(I + B(\beta)K)^{-1}\right]^T P + P(I + B(\beta)K)^{-1}A(\beta) \right\} x(t).$$

Conforme o Teorema 17, o sistema é Mittag-Leffler estável se ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq 0$, para todo $x(t) \neq 0$. Uma condição suficiente equivale a desigualdade em (189). \square

Com relação à taxa de decaimento, o teorema proposto a seguir é uma extensão em sistemas Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$ do Teorema 4 aplicado aos sistemas de ordem inteira, estabelecido em Assunção et al. (2007).

Teorema 32. *O sistema realimentado em (185) possui taxa de decaimento Mittag-Leffler maior ou igual a γ se existem matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que as LMIs:*

$$Q > 0, \quad (190)$$

$$\begin{bmatrix} QA_i^T + A_i Q + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T & Q + B_j Y \\ Q + Y^T B_j^T & -\frac{1}{2\gamma} Q \end{bmatrix} < 0, \quad (191)$$

$$i, j = 1, \dots, r,$$

são factíveis. Nesse caso, um ganho do controlador que estabiliza o sistema Caputo em (183) para qualquer valor da ordem $\alpha \in (0, 1]$ é dado por $K = YQ^{-1}$.

Demonstração. Suponha que as LMIs em (190) e (191) são factíveis. Considerando o complemento do Schur (BOYD et al., 1994), tem-se:

$$QA_i^T + A_i Q + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r,$$

que corresponde as LMIs em (187). Assim, de maneira similar a prova do Teorema 31, segue que a matriz $(I + B(\beta)K)$ tem posto completo. Ainda do complemento de Schur:

$$QA_i^T + A_i Q + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T + (Q + B_j Y) (2\gamma Q^{-1}) (Q + Y^T B_j^T) < 0 \quad i, j \in \mathbb{K}_r.$$

Multiplicando ambos os lados por $\beta_i \beta_j^2$, segue de (182) que:

$$\begin{aligned} & Q \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i Q + \sum_{j=1}^r \beta_j B_j Y \sum_{i=1}^r \beta_i A_i^T + \sum_{i=1}^r \beta_i A_i Y^T \sum_{j=1}^r \beta_j B_j^T \\ & + \left(Q + \sum_{j=1}^r \beta_j B_j Y \right) (2\gamma Q^{-1}) \left(Q + Y^T \sum_{j=1}^r \beta_j B_j^T \right) < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \end{aligned}$$

$$QA(\beta)^T + A(\beta)Q + B(\beta)YA(\beta)^T + A(\beta)Y^T B(\beta)^T + (Q + B(\beta)Y) (2\gamma Q^{-1}) (Q + Y^T B(\beta)^T) < 0.$$

Substituindo $Y = KQ$, obtém-se:

$$(I + B(\beta)K)QA(\beta)^T + A(\beta)Q(I + B(\beta)K)^T + (I + B(\beta)K) (2\gamma Q) (I + B(\beta)K)^T < 0.$$

Considerando $P = Q^{-1}$ e multiplicando à direita pela matriz não singular $\left[(I + B(\beta)K)^{-1} \right]^T P$

e à esquerda por $P(I + B(\beta)K)^{-1}$, chega-se a desigualdade:

$$A(\beta)^T \left[(I + B(\beta)K)^{-1} \right]^T P + P(I + B(\beta)K)^{-1} A(\beta) < -2\gamma P. \quad (192)$$

Seja a função de Lyapunov do tipo quadrática $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, com $P^T = P > 0$. Para o sistema realimentado em (185), satisfazendo aos Lemas 4 e 8, tem-se:

$${}^c D_t^\alpha V(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ A(\beta)^T \left[(I + B(\beta)K)^{-1} \right]^T P + P(I + B(\beta)K)^{-1} A(\beta) \right\} x(t) < -2\gamma x(t)^T P x(t).$$

Conforme o Lema 8, o sistema é Mittag-Leffler estável e considera taxa de decaimento maior ou igual a γ se ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < -2\gamma V(x(t))$, para todo $x(t) \neq 0$. Uma condição suficiente equivale a desigualdade em (192). \square

7.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para a solução das restrições em LMIs, foi utilizado o solver SeDuMi (STURM, 1999) no ambiente do software MatLab[®]. As simulações utilizam o algoritmo fundamentado na relação entre a derivada de Caputo e a de Riemann-Liouville, apresentado na Seção 4.4.2, com passo de integração $p = 0,0005$.

Exemplo 11. (*Taxa de Decaimento*) - Considere o sistema linear de ordem $\alpha = 0,9$ e invariante no tempo:

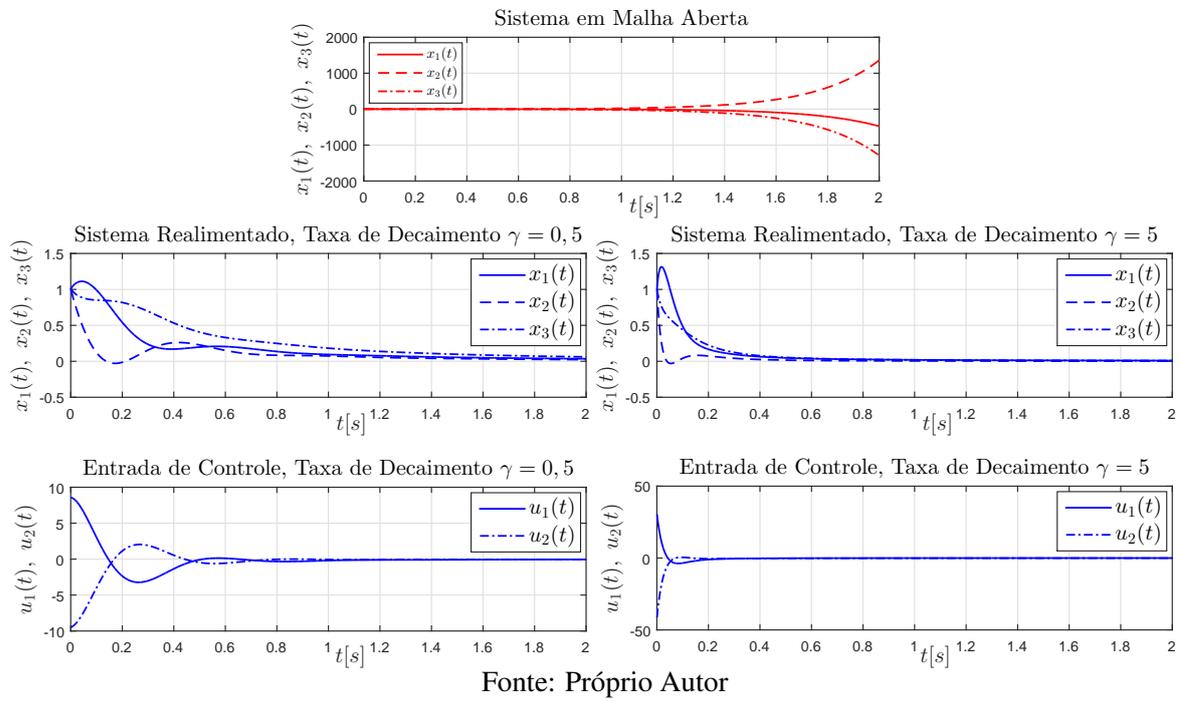
$$\begin{bmatrix} {}^c D_t^{0,9} x_1(t) \\ {}^c D_t^{0,9} x_2(t) \\ {}^c D_t^{0,9} x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (193)$$

O sistema é realimentado com a lei de controle α -derivativa em (184). Utilizando as LMIs em (190) e (191), para o sistema isento de incertezas, obtêm-se as seguintes matrizes de ganho, incluindo as taxas de decaimento $\gamma = 0,5$ e $\gamma = 5$, respectivamente:

$$K_{0,5} = \begin{bmatrix} -0,5165 & 1,0358 & -0,6948 \\ 0,2730 & -1,0693 & 0,1848 \end{bmatrix}, K_5 = \begin{bmatrix} -0,1816 & 0,9070 & -0,8347 \\ 0,0072 & -1,0509 & 0,0962 \end{bmatrix}. \quad (194)$$

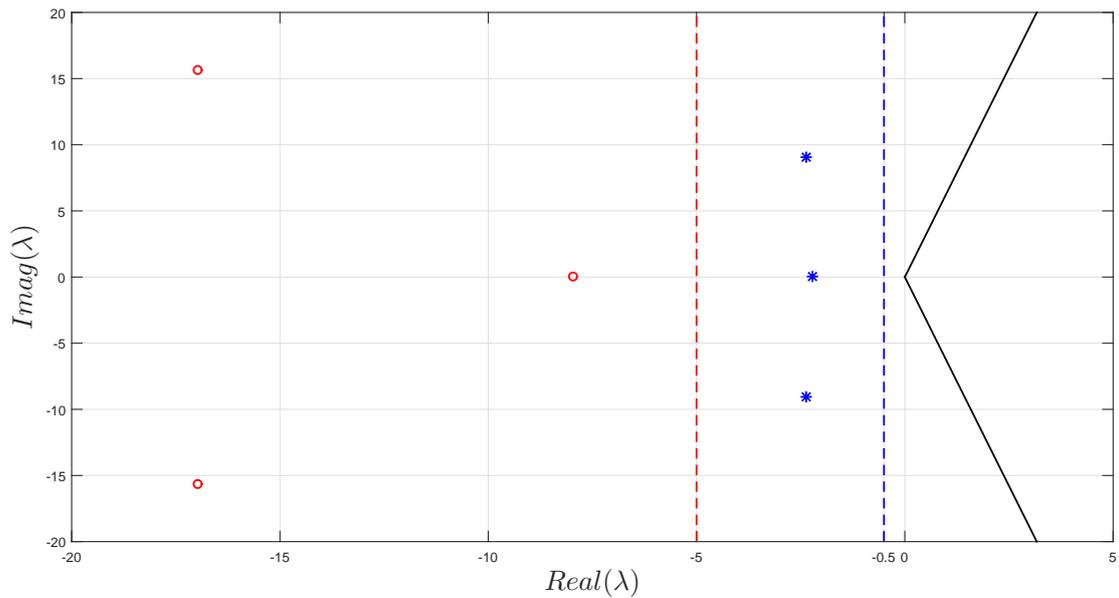
Conforme a Figura 15, o sistema em malha aberta evolui de forma instável a partir de uma condição inicial $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ e pode ser controlado sob as referidas taxas de decaimento. A Figura 16 mostra as localizações dos autovalores λ do sistema realimentado para as duas taxas de decaimento, os quais estão inseridos na região de estabilidade do sistema controlado dado por (184), (193) e (194). Essa região é definida pelo Teorema 15.

Figura 15 - Comportamento do sistema linear de ordem $\alpha = 0,9$ em (193) submetido à lei de controle α -derivativa em (184).



Fonte: Próprio Autor

Figura 16 - Localizações dos autovalores para $\gamma = 0,5$, representados por (*) em azul e para $\gamma = 5$, representados por (o) em vermelho.



Fonte: Próprio Autor

Exemplo 12. (*Taxa de Decaimento, Sistema Incerto*) - Considere o sistema baseado em (193), agora contendo os parâmetros incertos a e b :

$$\begin{bmatrix} {}^c D_t^{0,9} x_1(t) \\ {}^c D_t^{0,9} x_2(t) \\ {}^c D_t^{0,9} x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 5 \\ a & 2 & -2 \\ b & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (195)$$

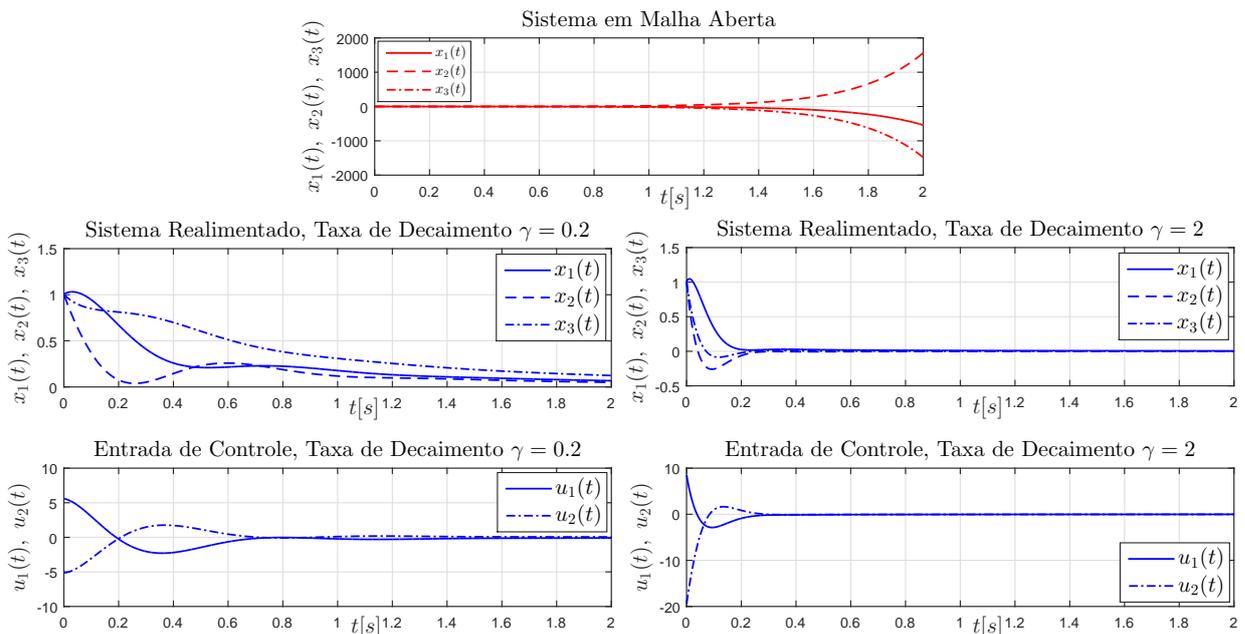
com $0,5 < a < 1,5$ e $0,5 < b < 1,5$.

O sistema é realimentado com a lei de controle α -derivativa em (184). Da factibilidade das LMIs em (190) e (191), obtém-se as seguintes matrizes de ganho, com taxas de decaimento $\gamma = 0,2$ e $\gamma = 2$, respectivamente:

$$K_{0,2} = \begin{bmatrix} -0,7337 & 1,2578 & -0,6096 \\ 0,5041 & -1,1432 & 0,4129 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -0,2488 & 0,9285 & -0,7996 \\ 0,0050 & -1,1069 & 0,1240 \end{bmatrix}. \quad (196)$$

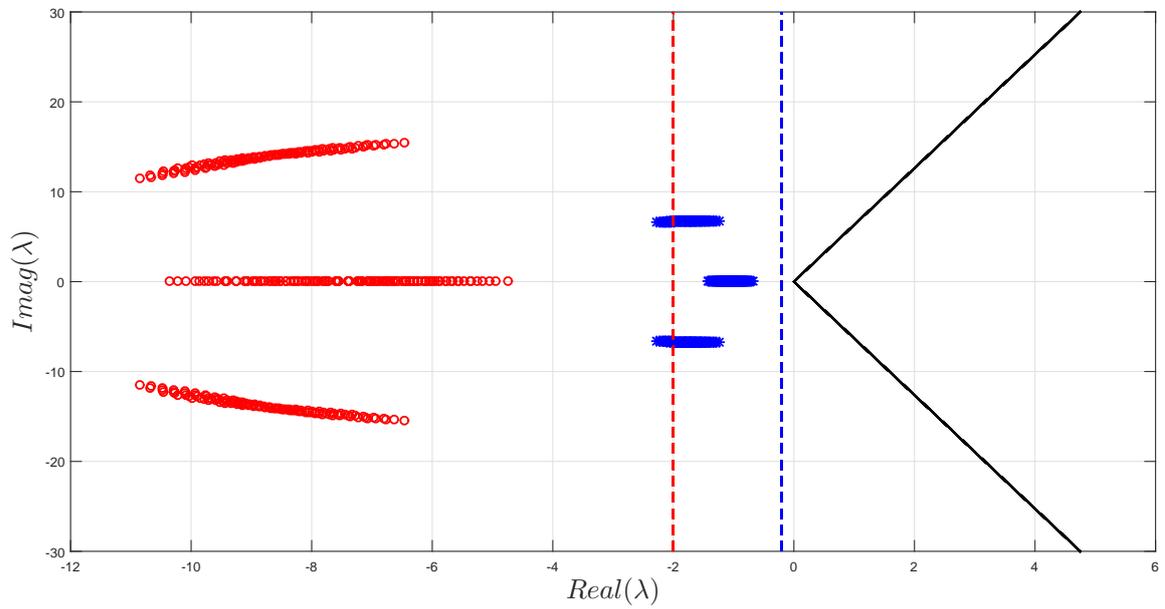
Conforme a Figura 17, o sistema em malha aberta evolui de forma instável a partir de uma condição inicial $x_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ e pode ser controlado sob as referidas taxas de decaimento. A simulação utiliza o vértice que contém $a = 0,5$ e $b = 0,5$. A Figura 18 mostra as localizações dos autovalores λ do sistema realimentado para as duas taxas de decaimento, os quais estão inseridos na região de estabilidade do sistema controlado dado por (184), (195) e (196). Essa região é definida pelo Teorema 15. A simulação utiliza os valores de a e b com um passo de 0,1 no seu respectivo intervalo especificado, incluindo todas os arranjos de valores.

Figura 17 - Comportamento do sistema linear incerto de ordem $\alpha = 0,9$ em (195) submetido à lei de controle α -derivativa em (184).



Fonte: Próprio Autor

Figura 18 - Localizações dos autovalores para $\gamma = 0, 2$, representados por (*) em azul e para $\gamma = 2$, representados por (o) em vermelho.



Fonte: Próprio Autor

8 CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho considera a dinâmica fracionária de sistemas lineares ou não lineares, autônomos ou não autônomos e fornece uma metodologia para o projeto de controladores robustos em sistemas fracionários Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$.

Conforme apresentado no Capítulo 4, é possível estender o método direto de Lyapunov para sistemas fracionários de ordem $\alpha \in (0, 1]$. Basicamente, se existe uma candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) > 0$, tal que ${}^c D_t^\alpha V(x(t)) < 0$, para todo $x \neq 0$, então a estabilidade do sistema é exibida. Este método é válido para uma definição arbitrária de derivada fracionária, em particular para a derivada de Caputo, Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov. Em sequência, são apresentados lemas inseridos no contexto do método direto de Lyapunov fracionário, quando utilizada a derivada segundo Caputo. Por exemplo, mediante o Lema 4, tem-se que ${}^c \overline{D}_t^\alpha V(x(t)) = 2x^T(t) {}^c D_t^\alpha x(t)$, em que ${}^c \overline{D}_t^\alpha V(x(t))$ denota o limitante superior de ${}^c D_t^\alpha V(x(t))$, resultado este utilizado em toda a sequência deste trabalho na dedução de condições em desigualdades matriciais lineares que garantem a estabilidade assintótica do sistema.

O Capítulo 5 propõe o projeto de controladores robustos chaveados para sistemas fracionários Caputo lineares de ordem $\alpha \in (0, 1]$, via realimentação do vetor de estado e compensação distribuída paralela. Os ganhos do controlador foram calculados através de condições suficientes em desigualdades matriciais lineares, fundamentadas na estabilização quadrática e podendo incluir taxa de decaimento maior ou igual a γ . A taxa de decaimento Mittag-Leffler, incorporada no projeto dos ganhos de realimentação, diminui o tempo de estabelecimento das respostas do sistema fracionário. Exemplos numéricos validam a teoria. O Capítulo 6 propõe o projeto de controladores robustos chaveados para sistemas fracionários Caputo não lineares de ordem $\alpha \in (0, 1]$ descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, via realimentação do vetor de estado e compensação distribuída paralela. Novamente, os ganhos do controlador foram calculados através de condições suficientes em desigualdades matriciais lineares, fundamentadas na estabilização quadrática, incluindo ou não a taxa de decaimento. O projeto para o sistema de Lorenz valida a teoria. O controle chaveado dispensa o conhecimento das funções de pertinência da descrição exata em sistemas Caputo fuzzy Takagi-Sugeno. O Capítulo 7 novamente trata do controle robusto de sistemas lineares, agora utilizando a realimentação da derivada de Caputo do vetor de estado. São calculados ganhos robustos do controlador através de desigualdades matriciais lineares, os quais também incorporam taxa de decaimento.

8.1 TRABALHOS FUTUROS

- Em Galvão et al. (2013), a planta de ordem fracionária representa com maior precisão o comportamento real do sistema físico em análise. Dessa forma, pretende-se aplicar a teoria deste trabalho em sistemas físicos de natureza fracionária ou em modelos de ordem fracionária que melhor descrevem sistemas físicos.
- Neste trabalho a taxa de decaimento considera apenas o semi-plano complexo esquerdo. Entretanto, conforme o Teorema 15, a região de estabilização do plano complexo considerando taxa de decaimento pode ser ampliada e redefinida.
- Na metodologia em Sabatier, Moze e Farges (2010), por exemplo, condições em LMIs necessárias e suficientes são propostas para verificar a estabilidade de sistemas de ordem $\alpha \in (0, 1)$. Pretende-se propor condições necessárias e suficientes de estabilização baseadas em LMIs.
- Para a utilização prática pretende-se considerar índices de desempenho, como a restrição da norma dos ganhos do controlador e/ou a saturação do sinal de controle, considerando uma região de operação do sistema, baseando-se na metodologia proposta nos trabalhos de Assunção et al. (2007), Alves et al. (2016) e Oliveira et al. (2018), aplicada a sistemas de ordem inteira.

8.2 PUBLICAÇÃO

Trabalho completo publicado em anais de congresso nacional:

KUZMINSKAS, H.; TEIXEIRA, M. C. M.; LIMA, A. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; JACYNTHO, L. A. Condições em LMIs para estabilidade Mittag - Leffler e taxa de decaimento de sistemas de ordem fracionária com realimentação de estados α - derivativa. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 2017, São José do Rio Preto. *Anais...* São José do Rio Preto: [s.n.], 2017. p. 1-7.

9 APÊNDICE A - FUNÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

9.1 FUNÇÃO GAMA

Para $\alpha \in [0, \infty]$, a função gama de Eüler $\Gamma(\alpha)$ é definida como (OLIVEIRA, 2014):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (197)$$

Pode-se demonstrar que:

- Para todo $\alpha > 0$ a função $\Gamma(\alpha)$ é convergente;
- Se $\Gamma(\alpha)$ é convergente para todo $\alpha > 0$, então $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;
- Da definição em (197) tem-se $\Gamma(1) = 1$. Se $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ então $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$ e $\Gamma(n + 1) = n!$. Isto significa que $\Gamma(\alpha)$ é o fatorial do número $(\alpha - 1) \in \mathbb{N}$. É, pois, aceitável considerar a função $\Gamma(\alpha)$ como o fatorial do número real positivo $(\alpha - 1)$. Esta generalização é utilizada na integral fracionária de Riemann-Liouville, a qual demanda o fatorial de um número real α .

Da série de McLaurin tem-se que $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Essa expressão é utilizada para explicitar todo o domínio da função $\Gamma(\alpha)$:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{\alpha-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} dt.$$

Da mudança de variável $\mu = \frac{t}{n}$, obtém-se:

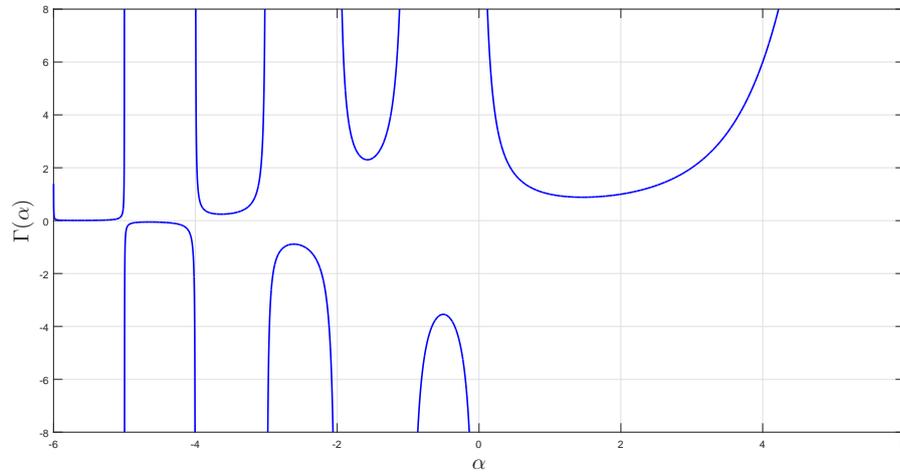
$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - \mu)^n (\mu n)^{\alpha-1} (n d\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \int_0^1 (1 - \mu)^n \mu^{\alpha-1} d\mu \quad (198)$$

Da n-ésima integração por partes:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{n}{\alpha} \int_0^1 (1 - \mu)^{n-1} \mu^{\alpha} d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{n(n-1)}{\alpha(\alpha+1)} \int_0^1 (1 - \mu)^{n-2} \mu^{\alpha+1} d\mu, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{n(n-1) \cdots [n - (n-1)]}{\alpha(\alpha+1) \cdots [\alpha + (n-1)]} \int_0^1 (1 - \mu)^{n-n} \mu^{\alpha+n-1} d\mu, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{n(n-1) \cdots [n - (n-1)]}{\alpha(\alpha+1) \cdots [\alpha + (n-1)]} \frac{1}{\alpha+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n)}. \end{aligned}$$

Assim, $\Gamma(\alpha)$ está definida para todo real α , exceto nos pontos $z = -n, \dots, -1, 0$. A Figura 19 mostra o gráfico de $\Gamma(\alpha)$, para $\alpha \in (-6, 6)$.

Figura 19 - Função Gama.



Fonte: Próprio Autor

9.2 FUNÇÃO BETA

A função beta é definida como a convolução entre as funções t^{α_1+1} e t^{α_2+1} , $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, avaliada em $t = 1$:

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = [(t^{\alpha_1+1}) * (t^{\alpha_2+1})]_{t=1} = \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt, \quad (199)$$

Em Oliveira (2014) encontra-se uma prova de que $B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

9.3 FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER

A função exponencial compõe a solução de sistemas de ordem inteira. As funções Mittag Leffler são uma generalização da função exponencial e compõe a solução de sistemas de ordem fracionária. A função Mittag-Leffler de dois parâmetros é definida da seguinte forma:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad (200)$$

com $\alpha, \beta > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. Para $\beta = 1$, denota-se $E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z)$. Quando $\alpha = \beta = 1$, a função Mittag-Leffler se reduz à função exponencial:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (201)$$

REFERÊNCIAS

- ADELIPOUR, S.; ABOOEE, A.; HAERI, M. LMI-based sufficient conditions for robust stability and stabilization of lti-fractional-order systems subjected to interval and polytopic uncertainties. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, London, v. 37, n. 10, p. 1207–1216, 2015.
- AGUILA-CAMACHO, N.; DUARTE-MERMOUD, M. A.; GALLEGOS, J. A. Lyapunov functions for fractional-order systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Marseille, v. 19, n. 9, p. 2951–2957, 2014.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Chichester, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- ANAYA, G. F.; NAVA-ANTONIO, G.; JAMOUS-GALANTE, J.; MUÑOZ-VEGA, R.; HERNÁNDEZ-MARTÍNEZ, E. Lyapunov functions for a class of nonlinear systems using Caputo derivative. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Marseille, v. 43, p. 91–99, 2017.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, London, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BARMISH, B. Stabilization of uncertain systems via linear control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983.
- BAYRAMOGLU, H.; KOMURCUGIL, H. Time-varying sliding-coefficient-based decoupled terminal sliding-mode control for a class of fourth-order systems. **ISA Transactions**, Pittsburg, v. 53, n. 4, p. 1044–1053, 2014.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.
- BISWAS, K.; SEN, S.; DUTTA, P. K. Realization of a constant phase element and its performance study in a differentiator circuit. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Piscataway, v. 53, n. 9, p. 802–806, 2006.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Book: Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994. 205 p.
- BUZETTI, A. S. **Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores**. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de

Mesquita Filho” - UNESP, Ilha Solteira, 2017.

CAMARGO, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**. 2009.135 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2009.

CHAREF, A. Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller. **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, London, v. 153, n. 6, p. 714–720, 2006.

CHEN, Y.; VINAGRE, B. M. A new IIR-type digital fractional-order differentiator. **Signal processing**, Amsterdam, v. 83, n. 11, p. 2359–2365, 2003.

DEMIRCI, E.; OZALP, N. A method for solving differential equations of fractional- order. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Antwerpen, v. 236, n. 11, p. 2754–2762, 2012.

DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 29, n. 1-4, p. 3–22, 2002.

DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. Detailed error analysis for a fractional adams method. **Numerical algorithms**, Basel, v. 36, n. 1, p. 31–52, 2004.

DUARTE-MERMOUD, M. A.; AGUILA-CAMACHO, N.; GALLEGOS, J. A.; CASTRO-LINARES, R. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional-order systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Marseille, v. 22, n. 1, p. 650–659, 2015.

EFE, M. Ö. Fractional-order systems in industrial automation-a survey. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, Piscataway, v. 7, n. 4, p. 582–591, 2011.

FARGES, C.; SABATIER, J.; MOZE, M. Fractional-order polytopic systems: robust stability and stabilisation. **Advances in Difference Equations**, Kingsville, v. 2011, n. 1, p. 1–10, 2011.

FREEBORN, T. J.; MAUNDY, B.; ELWAKIL, A. S. Fractional-order models of supercapacitors, batteries and fuel cells: a survey. **Materials for Renewable and Sustainable Energy**, Rome, v. 4, n. 3, p. 1–7, 2015.

GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S.; KIENITZ, K. H.; PAIVA, H. M.; AFONSO, R. J. M. Fractional-order modeling of large three-dimensional RC networks. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, Piscataway, v. 60, n. 3, p. 624–637, 2013.

GÓMEZ-AGUILAR, J.; CÓRDOVA-FRAGA, T.; ESCALANTE-MARTÍNEZ, J.; CALDERÓN-RAMÓN, C.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. Electrical circuits described by a fractional derivative with regular Kernel. **Revista Mexicana de Física**, Cidade do México, v. 62, n. 2, p. 144–154, 2016.

GÓMEZ-AGUILAR, J. F.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. F.; OLIVARES-PEREGRINO, V. H.; TANECO-HERNÁNDEZ, M. A.; GUERRERO-RAMÍREZ, G. V. Electrical circuits RC and RL involving fractional operators with bi-order. **Advances in Mechanical Engineering**,

London, v. 9, n. 6, p. 1–10, 2017.

GUO, Y.; MA, B. Extension of Lyapunov direct method about the fractional nonautonomous systems with order lying in $(1, 2)$. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 84, n. 3, p. 1353–1361, 2016.

JACYNTHO, L. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S. Identification of fractional-order transfer functions using a step excitation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Piscataway, v. 62, n. 9, p. 896–900, 2015.

KUZMINSKAS, H.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LIMA, A. A. de. Condições em LMIs para estabilidade Mittag-Leffler e taxa de decaimento de sistemas de ordem fracionária com realimentação de estados α -derivativa. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 41., 2017, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: SBMAC, 2017. p. 1–7.

LENKA, B. K.; BANERJEE, S. Asymptotic stability and stabilization of a class of nonautonomous fractional-order systems. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 85, n. 1, p. 167–177, 2016.

LENKA, B. K.; BANERJEE, S. Sufficient conditions for asymptotic stability and stabilization of autonomous fractional-order systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Marseille, v. 56, n. 1, p. 365–379, 2018.

LI, C.; TAO, C. On the fractional adams method. **Computers & Mathematics with Applications**, New York, v. 58, n. 8, p. 1573–1588, 2009.

LI, C.; YAN, J. The synchronization of three fractional differential systems. **Chaos, Solitons & Fractals**, Oxford, v. 32, n. 2, p. 751–757, 2007.

LI, C. P.; ZHANG, F. R. A survey on the stability of fractional differential equations. **The European Physical Journal Special Topics**, Les Ulis, v. 193, n. 1, p. 27–47, 2011.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Mittag-Leffler stability of fractional-order nonlinear dynamic systems. **Automatica**, Elmsford, v. 45, n. 8, p. 1965–1969, 2009.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. **Computers & Mathematics with Applications**, New York, v. 59, n. 5, p. 1810–1821, 2010.

LI, Y.; LI, J. Stability analysis of fractional-order systems based on T-S fuzzy model with the fractional-order α : $0 < \alpha < 1$. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 78, n. 4, p. 2909–2919, 2014.

LIU, S.; JIANG, W.; LI, X.; ZHOU, X.-F. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. **Applied Mathematics Letters**, Elmsford, v. 51, n. 1, p. 13–19, 2016.

LORENZO, S. D.; PAOLA, M. D.; MANTIA, F. P. L.; PIRROTTA, A. Non-linear viscoelastic behavior of polymer melts interpreted by fractional viscoelastic model. **Meccanica**, Torino, v. 52, n. 8, p. 1843–1850, 2017.

- LU, J.-G.; CHEN, G. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: an LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 54, n. 6, p. 1294–1299, 2009.
- LU, J.-G.; CHEN, Y.-Q. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional order α : The $0 < \alpha < 1$ case. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 55, n. 1, p. 152–158, 2010.
- LUO, S.; LI, S.; TAJADDODIANFAR, F. Chaos and adaptive control of the fractional-order magnetic-field electromechanical transducer. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Hong Kong, v. 27, n. 13, p. 1–9, 2017.
- MA, Y.; LU, J.; CHEN, W. Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with positive real uncertainty. **ISA transactions**, Pittsburgh, v. 53, n. 2, p. 199–209, 2014.
- MACHADO, J. A. T.; JESUS, I. S.; GALHANO, A.; CUNHA, J. B. Fractional-order electromagnetics. **Signal Processing**, Amsterdam, v. 86, n. 10, p. 2637–2644, 2006.
- MACHADO, J. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Marseille, v. 16, n. 3, p. 1140–1153, 2011.
- MATIGNON, D. **Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire**. 1994. 247 f. Tese (Doutorado) - Univ. Paris xi, 1994.
- MATIGNON, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: IMACS - IEEE-SMC. COMPUTACIONAL ENGINEERING IN SYSTEMS APPLICATIONS, 1996, Lille. **Proceedings...** [S.l.:s.n.], 1996. v. 2, p. 963–968.
- MOZE, M.; SABATIER, J.; OUSTALOUP, A. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In: INTERNATIONAL DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE. AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS - ASME, 5, 2005, Long Beach. **Proceedings...** [S.l.:s.n.], 2005. p. 1611–1619.
- MU, H.; XIONG, R.; ZHENG, H.; CHANG, Y.; CHEN, Z. A novel fractional-order model based state-of-charge estimation method for lithium-ion battery. **Applied Energy**, London, v. 207, n. 1, p. 384–393, 2017.
- NAKAGAWA, M.; SORIMACHI, K. Basic characteristics of a fractance device. **IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, Tokyo, v. 75, n. 12, p. 1814–1819, 1992.
- NDOYE, I.; DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; RADHY, N. E. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems. **Automatica**, Elmsford, v. 49, n. 6, p. 1907–1913, 2013.
- ODIBAT, Z. M. Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional-order systems. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 60, n. 4, p. 479–487, 2010.
- OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de;

ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local H_∞ switched controller design for uncertain TS fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, no prelo.

OLIVEIRA, D. S. de. **Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler**. 2014. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2014.

OLIVEIRA, H. S. **Introdução ao cálculo de ordem arbitrária**. 2010. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2010.

PETRÁŠ, I. **Book**: Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. 218 p.

PODLUBNY, I. **Book**: Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. [S.l.]: Academic, 1998. 341 p.

RADWAN, A. G.; SALAMA, K. N. Fractional-order RC and RL circuits. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Cambridge, v. 31, n. 6, p. 1901–1915, 2012.

RANA, K. P. S.; KUMAR, V.; MITTRA, N.; PRAMANIK, N. Implementation of fractional-order integrator/differentiator on field programmable gate array. **Alexandria Engineering Journal**, Alexandria, v. 55, n. 2, p. 1765–1773, 2016.

SABATIER, J.; MOZE, M.; FARGES, C. LMI stability conditions for fractional-order systems. **Computers & Mathematics with Applications**, New York, v. 59, n. 5, p. 1594–1609, 2010.

SAID, L. A.; RADWAN, A. G.; MADIAN, A. H.; SOLIMAN, A. M. Three fractional-order-capacitors-based oscillators with controllable phase and frequency. **Journal of Circuits, Systems and Computers**, Singapore, v. 26, n. 10, p. 1–22, 2017.

SALGADO, G. H. O. Métodos numéricos para solução de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo. 2015. 175 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, Belo Horizonte, 2015.

SHENG, D.; WEI, Y.; CHENG, S.; SHUAI, J. Adaptive backstepping control for fractional-order systems with input saturation. **Journal of the Franklin Institute**, Elmsford, v. 354, n. 5, p. 2245–2268, 2017.

SHUKLA, M. K.; SHARMA, B. B. Stabilization of a class of fractional-order chaotic systems via backstepping approach. **Chaos, Solitons & Fractals**, Oxford, v. 98, n. 1, p. 56–62, 2017.

SILVA, M. F.; MACHADO, J. A. T.; LOPES, A. M. Fractional-order control of a hexapod robot. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 38, n. 1-4, p. 417–433, 2004.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. **Book**: Applied nonlinear control. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. 259 p.

SOUZA, W. A. de. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares**

descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. 2013.93 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, Ilha Solteira, 2013.

SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using takagi–sugeno fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization methods and software**, New York, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.

WEN, X.-J.; WU, Z.-M.; LU, J.-G. Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems. **IEEE Transactions on circuits and systems II: Express Briefs**, Piscataway, v. 55, n. 11, p. 1178–1182, 2008.

XIE, L. Output feedback H^∞ control of systems with parameter uncertainty. **International Journal of control**, London, v. 63, n. 4, p. 741–750, 1996.

YIN, C.; CHEN, Y.; ZHONG, S. Fractional-order sliding mode based extremum seeking control of a class of nonlinear systems. **Automatica**, Elmsford, v. 50, n. 12, p. 3173–3181, 2014.

ZHANG, S.; YU, Y.; YU, J. LMI conditions for global stability of fractional-order neural networks. **IEEE transactions on neural networks and learning systems**, Piscataway, v. 28, n. 10, p. 2423–2433, 2017.

ZHANG, X.; LI, B. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems with the fractional-order α ($0 < \alpha < 1$). In: CONTROL AND DECISION CONFERENCE - CCDC. IEEE, 2016, Yinchuan. **Anais...** Chinese: IEEE, 2016. p. 560–563.

ZHENG, W.; LUO, Y.; CHEN, Y.; PI, Y. Fractional-order modeling of permanent magnet synchronous motor speed servo system. **Journal of Vibration and Control**, Thousand Oaks, v. 22, n. 9, p. 2255–2280, 2016.

ZHENG, Y.; NIAN, Y.; WANG, D. Controlling fractional order chaotic systems based on Takagi-Sugeno fuzzy model and adaptive adjustment mechanism. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 375, n. 2, p. 125–129, 2010.