UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MATEUS HENRIQUE DE ALMEIDA

Mecânica quântica com comprimento mínimo

Guaratinguetá
2021

Mateus Henrique de Almeida

Mecânica quântica com comprimento mínimo :

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá
2021

Almeida, Mateus Henrique de
A447m Mecânica quântica com comprimento mínimo / Mateus Henrique de Almeida – Guaratinguetá, 2021
51 f .: il.
Bibliografia: f. 49-51

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra

1. Teoria quântica. 2. Heinsenberg, Princípio de incerteza de.
3. Osciladores harmônicos. I. Título.

CDU 530.145(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária-CRB-8/3595

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MATEUS HENRIQUE DE ALMEIDA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTOR EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

PROF. DR. ALVARO DE SOUZA DUTRA
Orientador / UNESP/FEG
participou por videoconferência

PROF. DR. MÁRCIO EDUARDO DA SILVA ALVES
UNESP/FEG
participou por videoconferência

PROF. DR. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG
participou por videoconferência

PROF. DR. FABRÍCIO AUGUSTO BARONE RANGEL
UNIFEI
participou por videoconferência

PROF. DR. ALESSANDRO LUIZ RIBEIRO DOS SANTOS
ITA
participou por videoconferência

Julho de 2021

DADOS CURRICULARES

MATEUS HENRIQUE DE ALMEIDA

NASCIMENTO	08/07/1987 - Guaratinguetá / SP
FILIAÇÃO	Benedito Antônio Siqueira de Almeida Regina Célia de Paula Leite
2008 / 2012	Formação acadêmica ou Complementar (Bacharel em Física) Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
2013 / 2015	Formação acadêmica ou Complementar (Mestrado em Física) Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Para a "bonequinha de pano", que mudou a história da minha vida.

“O sonho do careta é a realidade do maluco.“

(Raul Seixas)

RESUMO

Supor a existência de um comprimento mínimo para medidas de posição, a qual denotaremos por q, implica que as derivadas espaciais não poderão ser realizadas conforme o habitual, pois o limite de Δx tendendo a zero, deixa de fazer sentido. A partir desta ideia, levantamos a hipótese que a existência do comprimento mínimo q, no espaço das posições x, perturba a natureza do momento canonicamente conjugado p, de modo que ele seja transformado em um novo momento $\wp$. E a relação de comutação entre $\hat{\wp}$ e o operador de posição $\hat{x}$, seja dada por $[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{M}_q(\hat{\wp})$, onde $\hat{M}_q(\hat{\wp})$ é o operador de translações mínimas, que está intimamente ligado ao comprimento mínimo do espaço q. Contudo, podemos definir, um operador $\hat{K}(\hat{\wp})$, tal que, $[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar$, e mostrar que para cada escolha de $\hat{M}_q(\hat{\wp})$, existe um $\hat{K}(\hat{\wp})$ diferente, onde identificamos $\hat{K}$, como o operador de momento canônico na presença do comprimento mínimo. Mostraremos, que a mecânica quântica com comprimento mínimo, pode ser vista como uma transformação canônica, vamos visitar a literatura para ilustrar alguns modelos de mecânica quântica com comprimento mínimo. Faremos uma discussão sobre o oscilador harmônico, e por fim faremos uma estimativa para o valor de comprimento mínimo q, introduzido na hipótese.

PALAVRAS-CHAVE: Mecânica quântica com comprimento mínimo. Principio de incerteza generalizado. Transformação canônica.

ABSTRACT

Assuming the existence of a minimum length for position measurements, which we will denote by q, implies that the spatial derivatives cannot be performed as per usual, since the limit of Δx tending to zero no longer makes sense. From this idea we hypothesize that the existence of the minimum length q in the space of positions x disturbs the nature of the canonically conjugated momentum p, so that it is transformed into a new momentum $\wp$, and the commutation relation between $\hat{\wp}$ and the position operator $\hat{x}$, is given by $[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hat{M}_q(\hat{\wp})$, where $\hat{M}_q(\wp)$ is the minimum translation operator, which is closely related to the minimum length of the space q. However, we can define an operator $\hat{K}(\hat{\wp})$ such that $[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar$ and show that for each choice of $\hat{M}_q(\hat{\wp})$ there is a different $\hat{K}(\hat{\wp})$, where we identify $\hat{K}$ as the canonical momentum operator in the presence of the minimum length. We will show that quantum mechanics, with minimum length, can be seen as a canonical transformation, and we will visit the literature to illustrate some models of quantum mechanics with minimum length. We discuss the harmonic oscillator, and finally we will calculate the minimum length value q, introduced in the hypothesis.

KEYWORDS: Quantum mechanics with minimum length. Generalized uncertainty principle (GUP). Heisenbeg uncertainty principle (HUP). Canonical transformation.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
DSR	Doubly special relativity.
GUP	Generalized uncertainty principle.
HUP	Heisenbeg uncertainty principle.
MDR	Modified dispersion relation.

LISTA DE SÍMBOLOS

h	Constante de Planck.
c	Velocidade da luz.
q	Comprimento mínimo no contexto de mecânica quântica.
β	Constante associada ao comprimento mínimo com dimensão do inverso do momento ao quadrado.
l_s	Comprimento mínimo no contexto de teoria de cordas.
l_p	Comprimento de Planck.
m_p	Massa de Planck.
m	Massa.
T, t	Tempo.
ω	Frequência angular.
E	Energia.
i	Número imaginário.
$\hat{1}$	Operador identidade.
$\star$	Complexo conjugado.
n, j, N	Contadores, números inteiros.
F, F_1, F_2	Funções geradoras.
γ_n, C	Constantes arbitrárias.
$\delta(\wp - \wp')$	Delta de Dirac entre $\wp$ e $\wp'$.
δ	Variação funcional.
$\prod$	Produtório.
$\sum$	Somatório.
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{O}$	Operadores arbitrários.
a, b, o	Autovalores arbitrários.
$\|a\rangle, \|b\rangle, \|o\rangle$	Autovetores arbitrários, Kets.

$\langle a\|, \langle b\|, \langle o\|$	Autovetores arbitrários, Bras.
$\langle \hat{A} \rangle, \langle \hat{B} \rangle, \langle \hat{O} \rangle$	Valores esperados dos operadores, sobre um determinado estado físico arbitrário.
$\hat{A}^{-1}$	Operador inverso de $\hat{A}$.
$\Delta\hat{A}$	Operador desvio aplicado ao operador $\hat{A}$.
Δa	Variação do autovalor a.
$\mathcal{O}(n)$	Ordem de potencias superiores a n.
$\|\Psi\rangle, \|\Phi\rangle$	Estado físico arbitrário.
$\langle \Psi\|x\rangle, \Psi(x)$	Função de onda no espaço das posições.
$\langle \Psi\|\wp\rangle, \Psi(\wp)$	Função de onda no espaço dos momentos.
$\hat{x}$	Operador de Posição.
$\hat{p}$	Operador de Momento na ausência do comprimento mínimo $q = 0$.
$\hat{\wp}$	Operador de Momento modificado pela presença de um comprimento mínimo q.
$\hat{\kappa}$	Operador de número de onda.
$\hat{K}$	Operador de Momento canonicamente conjugado a $\hat{x}$, na presença de um comprimento mínimo q.
$\hat{\Xi}$	Operador de diferenças finitas.
∇	Derivada parcial em relação ao espaço de posições $\frac{\partial}{\partial x}$.
$\nabla_{\wp}$	Derivada parcial em relação ao espaço de momento $\frac{\partial}{\partial \wp}$.
$\hat{\zeta}$	Operador de translação espacial.
$\hat{M}_q(\hat{\wp})$	Operador de translações mínimas.
$\mathcal{A}$	Propagador.
H	Hamiltoniano.
$\mathcal{H}$	Hamiltoniano modificado.
$\mathcal{L}$	Lagrangeano.
$\mathcal{S}$	Ação.
x	Coordenada generalizada de posição, autovalor do operador $\hat{x}$.
χ	Coordenada generalizada de posição após uma transformação canônica.

k	Coordenada generalizada de momento, no contexto da mecânica clássica.
K	Coordenada generalizada de momento, no contexto da mecânica quântica com comprimento mínimo, autovalor do operador $\hat{K}$.
$\wp$	Coordenada generalizada de momento após uma transformação canônica, autovalor do momento $\wp$.
K_{max}	Momento máximo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A introdução de um comprimento mínimo em sistemas quânticos dá origem a importantes consequências que ainda estão sendo exploradas. Dentre elas, é importante ressaltar que o comprimento mínimo ganha cada vez mais espaço no contexto da gravitação quântica, (Amelino-Camelia; Ahluwalia, 2002) mostra que é possível formular os postulados da Relatividade com um comprimento mínimo independente do observador, (Garay, 1995) argumenta que a existência de uma escala fundamental, um limite inferior para a existência de um comprimento mínimo, parece ser uma característica independente do modelo da gravidade quântica. Na verdade, diferentes abordagens dessa teoria levam a esse resultado. Os ingredientes chave para o surgimento desse comprimento mínimo, é a união da mecânica quântica com a relatividade. Como consequência, não se pode esperar que noções clássicas como causalidade ou distância entre eventos sejam aplicáveis nesta escala. Eles devem ser substituídos por alguma outra estrutura, ainda desconhecida.

Também podemos destacar que, o comprimento mínimo possui muita importância em teoria de cordas, pois uma característica das Teorias de Cordas é o fato de possuírem apenas dois parâmetros livres (VENEZIANO, 1986), a velocidade da luz c, e o comprimento característico da corda l_s. Isso significa que apenas os valores de c e l_s, não resultam do formalismo da teoria, e precisam ser a ela impostos, devendo ser obtidos de alguma outra forma, por exemplo experimentalmente, onde o parâmetro l_s exerce o papel de comprimento mínimo (Giddings, 2013). Outro ramo da física onde o comprimento mínimo tem bastante destaque, é em cosmologia de buracos negros, como por exemplo em (Ökcü; Corda; Aydiner, 2020) o autor considera a relação entropia área modificada de DSR-GUP (Doubly special relativity-Generalized uncertainty principle), e obtém as equações de Friedmann modificadas. Uma vez que GUP implica em um comprimento mínimo, o autor encontra um horizonte aparente mínimo, que tem potencial para remover a singularidade do Big Bang, outros trabalhos de cosmologia de buracos negros podem ser vistos em (Xiang; Wen, 2009), (Saghafi; Nozari; Kamali, 2019).

Para uma leitura mais profunda sobre o tema, comprimento mínimo, indicamos (Hossenfelder, 2013) onde a autora revisa se as leis fundamentais da natureza, limitam nossa capacidade de observar distâncias arbitrariamente curtas. Primeiramente, examinando quais percepções podem ser obtidas a partir de experimentos mentais, para medidas de comprimento mínimo. Resume o que pode ser aprendido a partir de diferentes abordagens de uma teoria da gravidade quântica. Em seguida, discute alguns modelos que foram desenvolvidos para implementar uma escala de comprimento mínimo em mecânica quântica e teoria quântica de campos. Esses modelos entraram na literatura como o princípio da incerteza generalizada (GUP), ou como relação de dispersão modificada (MDR), e permitiram o estudo dos efeitos de uma escala de comprimento mínimo em mecânica quântica, eletrodinâmica quântica, termodinâmica, física de buracos negros e cosmologia.

Uma outra fonte de revisão do tema é (Tawfik; Diab, 2014), onde o autor revisa a teoria de cordas, física do buraco negro, relatividade duplamente especial (DSR), e alguns experimentos mentais que foram sugeridos para observar comprimentos mínimos e/ou momento máximo. Os modelos que são projetados para implementar a escala de comprimento mínimo e/ou o momento máximo, em diferentes sistemas físicos, são analisados e inseridos na literatura como o Princípio da Incerteza Generalizada (GUP). A existência de um comprimento mínimo e um momento máximo é preferida por várias observações físicas. Além disso, assumindo que a relação de dispersão modificada (MDR) permite uma ampla gama de aplicações na estimativa, por exemplo, dos parâmetros inflacionários, violação de invariância de Lorentz, termodinâmica de buraco negro, desigualdades de Saleker-Wigner, natureza entrópica das leis gravitacionais, Equações de Friedmann, medição de tempo mínimo e termodinâmica das colisões de alta energia. Uma das abordagens GUP de ordem superior fornece previsões para a incerteza de comprimento mínimo. Outro prevê um momento máximo e uma incerteza de comprimento mínimo, simultaneamente. Uma extensa comparação entre as diferentes abordagens do GUP é resumida neste trabalho.

Enfim, teorias que envolvem comprimentos mínimos permanecem como um quebra-cabeça a ser montado, portanto este trabalho tem o intuito de contribuir nesta montagem, e está organizado da seguinte maneira.

Capítulo 1: INTRODUÇÃO, uma breve revisão do tema.

Capítulo 2: CONCEITOS FUNDAMENTAIS, é apresentada de forma sucinta alguns conceitos fundamentais que serão essenciais para uma boa compreensão da tese.

Capítulo 3: MECÂNICA QUÂNTICA COM COMPRIMENTO MÍNIMO, é deduzida de maneira heurística como deve ser o comportamento do operador momento num contexto de comprimento mínimo, o que nos dará uma dica sobre o que procurar. Assim, postularemos uma hipótese para o comprimento mínimo, buscando suas representações no espaço dos momentos e mostrar que existe um novo momento conjugado ao operador de posição.

Capítulo 4: O COMPRIMENTO MÍNIMO, vamos mostrar que a mecânica quântica com comprimento mínimo pode ser pensada como uma transformação canônica, visitaremos a literatura para ilustrar alguns modelos de GUP, discutiremos o oscilador harmônico e por fim calcularemos o comprimento mínimo introduzido na hipótese.

Capítulo 5: CONCLUSÃO, conclusões e perspectivas futuras.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo 2, apresentaremos de forma sucinta alguns conceitos fundamentais, que serão essenciais para uma boa compreensão da tese. São conceitos básicos sobre mecânica quântica, como a não comutatividade entre o operador de posição $\hat{x}$, e o operador de momento $\hat{p}$, uma definição básica sobre o espaço dos bras e dos kets, o operador de translações espaciais e o momento como gerador de tais transformações, que serão a base para nossa proposta, assim como a representação de momento no espaço de posições, a qual nos fornecerá uma dica de como deverá funcionar a mecânica quântica com comprimento mínimo. Todos estes conceitos, serão utilizados para as demonstrações presentes nos capítulos posteriores. E por fim, encerramos nossa breve revisão, com a demonstração do princípio de incerteza, para o leitor familiarizado com tais conceitos sugiro ir diretamente para o Capítulo 3.

2.1 POSIÇÃO E VELOCIDADE EM FÍSICA

Classicamente, quando medimos de maneira simultânea a posição e a velocidade de um sistema, determinamos completamente o seu estado de movimento. Portanto, a descrição completa de um sistema físico se dá medindo em um determinado instante de tempo, todas as suas coordenadas e velocidades, ou seja, determinando suas equações de movimento (LANDAU, 1960). Porém, quanticamente temos que uma medida, exerce uma "ação" sobre o sistema submetido a medição, "ação" esta que não pode ser tomada o tão pequeno quanto se queira, pois, quanto mais precisa for a medição, mais forte será a "ação" por ela exercida. Portanto, somente em medidas com pouca precisão, a "ação" é baixa. Assim temos que classicamente, um sistema possui velocidade e posição bem definidas, porém quanticamente ocorre algo distinto, por exemplo, quando o resultado de uma medida, determinar completamente a posição de uma partícula, a mesma não poderá dizer nada a respeito de sua velocidade, porém se a medida determinar completamente a velocidade de uma partícula, a mesma não dirá nada a respeito de sua posição (LANDAU, 1958). Contudo, esta "imprecisão" na determinação instantânea de posição e velocidade, forma o alicerce da Mecânica Quântica, o princípio da incerteza. Mas antes de prosseguir, precisamos definir algumas quantidades.

2.2 BRAS, KETS E OPERADORES

Quanticamente, um estado físico, é representado por um vetor de estado, que é definido num espaço de Hilbert. Vamos chamar de kets $|a\rangle$ tais vetores, e como postulado, vamos considerar que os vetores de estado, contenham toda informação a respeito do estado físico do sistema, ou seja, ele é capaz de predizer qualquer questão a respeito do estado do sistema físico. Analogamente ao espaço dos kets, podemos construir um espaço vetorial dual, que denotaremos por espaço dos bras, dados por vetores do tipo $\langle a|$, que a grosso modo podem ser entendidos como uma espécie de imagem espectral do espaço dos kets (SAKURAI, 1994). Dizemos que um operador é observável, quando o conjunto de seus autovalores são reais, ou seja, o operador é hermitiano. Operadores observáveis, tais como posição $\hat{x}$, ou momento $\hat{p}$, podem ser representados por um operador do tipo $\hat{A}$, que atua tanto sobre um bra quanto num ket:

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

$$\langle a|\hat{A} = \langle a|a.$$

O ket $|a\rangle$, é autovetor do operador $\hat{A}$, com autovalor "a", onde o conjunto de todos os autovalores, forma o que chamamos de espectro (SAKURAI, 1994). Formalmente, temos que qualquer autovetor $|\alpha\rangle$, pode ser expandido em termos de autovetores, de um conjunto de observáveis:

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da|a\rangle\langle a|\alpha\rangle. \tag{1}$$

Pois, os autovetores $|a\rangle$, do observável $\hat{A}$, correspondentes aos diferentes autovalores a, são todos ortogonais. Portanto, os autovetores do observável $\hat{A}$, podem ser usados como kets de base, semelhantemente como os vetores unitários ortogonais, são utilizados no espaço Euclideano. (SAKURAI, 1994).

Dentre a infinidade de operadores existentes na mecânica quântica, um operador especial encontra se no cerne da nossa teoria, o operador de evolução espacial. Vejamos agora algumas de suas propriedades. Por simplicidade de cálculos, faremos nossas análises em uma dimensão.

2.3 OPERADOR DE TRANSLAÇÕES

Suponha que temos um estado bem localizado, em torno de uma posição x, considere agora um operador $\hat{\zeta}$, que mude este estado, para um outro estado bem localizado em torno de um outro ponto, por exemplo $x + dx$, sem que isso modifique qualquer outra propriedade do sistema (que não a posição). O operador que executa este trabalho, é chamado operador de translação infinitesimal (SAKURAI, 1994):

$$\hat{\zeta}(dx)|x\rangle = |x + dx\rangle. \tag{2}$$

Observe que, $|x\rangle$ não é autovetor de $\hat{\zeta}(dx)$. Devemos impor que o operador de translação $\hat{\zeta}(dx)$, seja unitário, devido a conservação da probabilidade:

$$\hat{\zeta}^{\dagger}(dx).\hat{\zeta}(dx) = \hat{1}. \tag{3}$$

Também exigiremos, que duas translações sucessivas, sejam iguais a uma única translação, cujo valor seja a superposição das últimas duas:

$$\hat{\zeta}(dx).\hat{\zeta}(dy) = \hat{\zeta}(dx + dy). \tag{4}$$

Esperamos também, que uma translação no sentido oposto, seja o mesmo que o inverso da translação original:

$$\hat{\zeta}(-dx) = \hat{\zeta}^{\dagger}(dx). \tag{5}$$

E é plausível acreditarmos que, quando $dx \longrightarrow 0$, a translação se reduza ao operador identidade:

$$\lim_{dx \to 0} \hat{\zeta}(dx) = \hat{1}. \tag{6}$$

E por fim, gostaríamos que a diferença entre o operador $\hat{\zeta}(dx)$, e o operador identidade $\hat{1}$, fosse de primeira ordem em dx. Tomando como ansatz, o operador translação $\hat{\zeta}(dx)$ como sendo:

$$\hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa}) = 1 - i\hat{\kappa}.dx. \tag{7}$$

Onde, $\hat{\kappa}$ é um operador hermitiano, vemos facilmente que todas as exigências acima são satisfeitas. Note que:

$$\hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa})\hat{x}|x\rangle = x\hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa})|x\rangle = x|x + dx\rangle, \tag{8}$$

e,

$$\hat{x}\hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa})|x\rangle = \hat{x}|x + dx\rangle = (x + dx)|x + dx\rangle. \tag{9}$$

Subtraindo a equação (8), da equação (9), obtemos:

$$[\hat{x}, \hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa})]|x\rangle = dx|x + dx\rangle \approx dx|x\rangle. \tag{10}$$

Onde, o erro cometido na última aproximação da equação (10), é de segunda ordem em dx. Como $|x\rangle$ pode ser qualquer ket de posição, e considerando que eles formam uma base completa no espaço, podemos ver na equação (10), que:

$$[\hat{x}, \hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa})] = dx. \tag{11}$$

Substituindo a equação (7), na equação (11), temos:

$$[\hat{x}, 1 - i\hat{\kappa}.dx] = dx,$$

$$-idx(\hat{x}\hat{\kappa} - \hat{\kappa}\hat{x}) = dx,$$

$$[\hat{x}, \hat{\kappa}] = i. \tag{12}$$

Onde, o lado direito da equação (12), deve ser entendido como i, multiplicado pelo operador identidade. Mas qual será a natureza do operador $\hat{\kappa}$?

2.4 MOMENTO COMO GERADOR DE TRANSLAÇÃO

J. Schwinger dizia que "... para propriedades fundamentais, nos apenas emprestamos nomes da física clássica"(SAKURAI, 1994), assim da mecânica clássica, temos que uma translação infinitesimal pode ser vista como uma transformação canônica, tal que:

$$\chi = x + dx, \tag{13}$$

e,

$$\wp = p. \tag{14}$$

Onde, (x , p) são as posições e os momentos antigos, e (χ, $\wp$) são novas posições e novos momentos. Note que as transformações (13) e (14), são obtidas a partir da função geratriz (GOLDSTEIN, 2002):

$$F(x, \wp) = x.\wp + p.dx. \tag{15}$$

Mas perceba a semelhança entre a equação (15), e o operador de evolução espacial:

$$\hat{\zeta}(dx, \hat{\kappa}) = 1 - i\hat{\kappa}.dx. \tag{16}$$

Note que, ($x.\wp$) na equação (15), é exatamente a função geratriz para a transformação identidade:

$$\chi = x, \tag{17}$$

$$\wp = p. \tag{18}$$

Assim, comparando a equação (15), com a equação (16), esperamos que κ dependa de alguma forma de p, e pela equação (18), concluímos que:

$$\kappa = \kappa(p) = \kappa(\wp). \tag{19}$$

Mas note que, κ deve ter dimensão do inverso da distância, portanto a relação mais simples possível entre κ e p, vem dada por:

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{p}}{constante}. \tag{20}$$

Onde, a constante na equação (20), deve ter dimensão de ação e é a mesma constante que aparece na relação de L. de Broglie:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}. \tag{21}$$

Onde, λ é o comprimento de onda de uma "onda de partícula"e $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π, ou seja, $\hat{\kappa}$ é o operador de número de onda, retornando este resultado na equação (16), obtemos:

$$\hat{\zeta} = 1 - i\frac{\hat{p}}{\hbar}.dx. \tag{22}$$

E a relação de comutação equação (12), fica dada por:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{23}$$

A equação (23), nos diz que $\hat{x}$ e $\hat{p}$ são observáveis incompatíveis, portanto, não podemos medi-los simultaneamente. Podemos também fazer uma translação espacial finita, tal que:

$$\hat{\zeta}(\Delta x)|x\rangle = |x + \Delta x\rangle. \tag{24}$$

E pensá-la como uma sucessão de N translações infinitesimais, com deslocamentos $\Delta x/N$, com N tendendo ao infinito, ou seja:

$$\hat{\zeta}(\Delta x) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - i\frac{p}{\hbar}.\frac{\Delta x}{N}\right)^N. \tag{25}$$

Mas como sabemos do cálculo, a equação (25), é a definição da função exponencial, portanto:

$$\hat{\zeta}(\Delta x) = e^{-i\frac{p.\Delta x}{\hbar}}. \tag{26}$$

Que é o operador de evolução espacial para um deslocamento finito Δx. Agora estamos em posição de deduzir outro resultado importantíssimo.

2.5 OPERADOR MOMENTO NA BASE DE AUTOVETORES DE POSIÇÃO

Vamos deduzir como fica a atuação do operador de momento $\hat{p}$, no espaço das posições $|x\rangle$, para isso, vamos fazer atuar o operador de evolução espacial $\hat{\zeta}$, num ket arbitrário $|a\rangle$, tal que:

$$\left(1 - i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta x\right)|a\rangle = \int dx\hat{\zeta}(\Delta x)|x\rangle\langle x|a\rangle. \tag{27}$$

Atuando o operador $\hat{\zeta}$, no ket $|x\rangle$, temos:

$$\left(1 - i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta x\right)|a\rangle = \int dx|x + \Delta x\rangle\langle x|a\rangle. \tag{28}$$

Pela equação (5), das propriedades de operador de evolução espacial, vemos que:

$$\left(1 - i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta x\right)|a\rangle = \int dx|x\rangle\langle x - \Delta x|a\rangle. \tag{29}$$

Fazendo uma expansão em primeira ordem do último termo da equação (29), obtemos:

$$\left(1 - i\frac{\hat{p}}{\hbar}\Delta x\right)|a\rangle = \int dx|x\rangle\left(\langle x|a\rangle - \Delta x\frac{\partial}{\partial x}\langle x|a\rangle\right). \tag{30}$$

Comparando o lado esquerdo e direito da equação (30), vemos que:

$$\hat{p}|a\rangle = -i\hbar\int dx|x\rangle\frac{\partial}{\partial x}\langle x|a\rangle. \tag{31}$$

Multiplicando a equação (31), por $\langle x|$ pela esquerda, obtemos:

$$\langle x|\hat{p}|a\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|a\rangle. \tag{32}$$

Como queríamos demonstrar (SAKURAI, 1994). A equação (32), será muito importante no capítulo 3, pois ela nos dará uma dica de como deve ser a mecânica quântica com comprimento mínimo. Por fim vamos demonstrar o princípio da incerteza, que será fundamental em nossas análises finais.

2.6 O PRINCÍPIO DA INCERTEZA

Sejam dois observáveis quaisquer $\hat{A}$ e $\hat{B}$, então para um estado arbitrário $|\Psi\rangle$, a desigualdade abaixo é valida:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2. \tag{33}$$

Onde, $\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\hat{A}\rangle$. Para demonstramos a relação de incerteza (33), primeiramente devemos definir o operador desvio Δ, como sendo:

$$\Delta\hat{O} = \hat{O} - \langle\hat{O}\rangle. \tag{34}$$

Onde, $\hat{O}$ é um operador, cujo valor esperado é tomado sobre um determinado estado físico $|\Psi\rangle$ arbitrário. Considere os seguintes lemas:

Lema 1: A desigualdade de Schwarz $\langle a|a\rangle.\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$.
Lema 2: O valor esperado de um operador hermitiano é real puro.
Lema 3: O valor esperado de um operador anti hermitiano é imaginário puro.

De posse destes lemas juntamente com o operador de desvio, é possível mostrar a relação de incerteza (33). Considere dois kets quaisquer $|a\rangle$ e $|b\rangle$, que podem ser expressos como:

$$|a\rangle = \Delta\hat{A}|\Psi\rangle,$$

$$|b\rangle = \Delta\hat{B}|\Psi\rangle.$$

Onde, $|\Psi\rangle$ é um estado arbitrário. Então pelo lema 1:

$$\begin{aligned}\langle a|a\rangle.\langle b|b\rangle &= \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle,\\ &\geq |\langle\Delta A.\Delta B\rangle|^2,\\ \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle &\geq |\langle\Delta A.\Delta B\rangle|^2.\end{aligned} \tag{35}$$

Agora, note que:

$$\Delta\hat{A}.\Delta\hat{B} = \frac{1}{2}[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}] + \frac{1}{2}\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}.$$

Porém, o comutador é anti-hermitiano, enquanto o anti-comutador, é hermitiano. Portanto pelo lema 2 e lema 3, seus valores esperados são:

$$\langle\Delta\hat{A}.\Delta\hat{B}\rangle = \frac{1}{2}\langle[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle.$$

Respectivamente, imaginário puro $\langle[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]\rangle$, e real puro $\langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle$. Portanto, retornando para equação (35), notando que $[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}] = [\hat{A},\hat{B}]$, temos:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle^2 + \frac{1}{4}\langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle^2.$$

Contudo, podemos omitir o segundo termo $\langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle$, que só deixa a desigualdade mais forte:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2. \tag{36}$$

Assim como queríamos demonstrar (SAKURAI, 1994). Lembrando que a relação de comutação entre $\hat{x}$ e $\hat{p}$, vem dada por:

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar. \tag{37}$$

Podemos tomar os observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$, na equação (36), como sendo respectivamente $\hat{x}$ e $\hat{p}$, ou seja:

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle|^2. \tag{38}$$

Substituindo a equação (37), na equação (38), concluímos que:

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{39}$$

Que é a relação de incerteza posição momento de W. Heisenberg. A equação (39), indica que fazer medidas de posição com incerteza tendendo a zero:

$$\lim\langle(\Delta\hat{x})\rangle \to 0. \tag{40}$$

Implica numa incerteza da medida de momento tendendo ao infinito:

$$\lim\langle(\Delta\hat{p})\rangle \to \infty. \tag{41}$$

Mas da Relatividade Geral, temos que a variação do momento, gera alterações da geometria do espaço-tempo. Assim, podemos pensar que, incertezas altas na medida do momento, tem como consequência flutuações quânticas na geometria espaço-temporal. Logo, ao se tentar medir a posição de uma partícula com grande precisão, produz-se uma perturbação no campo gravitacional, que tem como consequência, um efeito de "comprimento mínimo". É como se a relação de incerteza fosse da forma:

$$\langle\Delta\hat{x}\rangle.\langle\Delta\hat{p}\rangle \geq \frac{\hbar}{2}\Big(1+\mathcal{O}(\langle\Delta p\rangle)\Big). \tag{42}$$

Onde o primeiro termo do lado direito, corresponde a escalas de energia baixas, enquanto o segundo, está associado ao efeito gravitacional acima descrito, e torna-se relevante quando as energias são muito altas. Com essas ideias em mente, vamos buscar uma formulação consistente para uma mecânica quântica não relativística com comprimento mínimo, obter uma equação do tipo (42), mostrar que ela leva um comprimento mínimo e estimar este valor.

3 MECÂNICA QUÂNTICA COM COMPRIMENTO MÍNIMO

W. Heisenberg (HEISENBERG, 1938), argumenta que a unificação da Relatividade Restrita com a Mecânica Quântica, daria origem necessariamente a uma nova constante fundamental, que exerceria o papel de comprimento mínimo. A grosso modo, quando observamos um "objeto", emitimos fótons em sua direção, de modo que, para melhorar nossas medidas, fótons com comprimento de onda cada vez menores deverão ser emitidos. Portanto, em determinado instante, estes fótons, passarão a ter energias suficientes para criar pares elétron-pósitron, ou seja, a tentativa de medir um comprimento mínimo, resultará em não se fazer medida alguma. Em (Adler, 2010) é apresentado seis argumentos de que a escala de Planck deve ser vista como um mínimo fundamental ou limite para o conceito clássico de espaço-tempo. Além do qual os efeitos quânticos não podem ser negligenciados e a natureza básica do espaço-tempo deve ser reconsiderada. Outros argumentos neste sentido, podem ser vistos em (Karolyhazy, 1966), (VENEZIANO, 1986), (Amelino-Camelia; Ahluwalia, 2002), (Bojowald; Kempf, 2012), (Hossenfelder, 2013), (Tawfik; Diab, 2014).
Neste Capítulo deduziremos de maneira heurística como deve ser o comportamento do operador momento num contexto de comprimento mínimo, o que nos dará uma dica sobre o que procurar. Assim, postularemos uma hipótese para o comprimento mínimo, buscando suas representações no espaço dos momentos e mostrar que existe um novo momento conjugado ao operador de posição.

3.1 UMA DEDUÇÃO ALTERNATIVA

Considere que exista um comprimento mínimo para medidas de posição, de modo que as derivadas espaciais devam ser modificadas. Por definição, a derivada espacial de uma função de onda arbitrária no espaço de posição $\Psi(x)$, vem dada por:

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Porém estamos supondo que existe um comprimento mínimo para medidas de posição, ou seja, o valor de Δx, não pode ser arbitrariamente pequeno, mas sim tendendo a um valor finito, que denotaremos por q, de modo que as derivadas espaciais sejam dadas por:

$$\lim_{\Delta x \to q} \frac{\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)}{\Delta x} = \frac{\Psi(x+q) - \Psi(x)}{q}. \tag{2}$$

Agora, lembrado da seção 2.5, onde deduzimos que o operador $\hat{p}$, atuando no espaço das posições, vem dado por:

$$\langle x|\hat{p}|\Psi\rangle = p\langle x|\Psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\Psi\rangle. \tag{3}$$

Onde, $\langle x|\Psi\rangle = \Psi(x)$, é a função de onda no espaço das posições, e da equação (3), temos que:

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4}$$

ou,

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla. \tag{5}$$

Onde, ∇ é o operador $\frac{\partial}{\partial x}$. Mas por hipótese, existe um comprimento mínimo para medidas de posição, ou seja, a equação (2), deve ser levada em conta, quando efetuamos derivadas espaciais. Assim observando que na equação (4), existe derivada espacial, vamos propor que o efeito da existência de um comprimento mínimo para medidas de posição, gere um operador de momento modificado $\hat{\wp}$, tal que:

$$\hat{\wp} = -i\hbar\hat{\Xi}_q. \tag{6}$$

Onde, $\hat{\Xi}_q$ é o operador de diferenças finitas, definido por:

$$\hat{\Xi}_q\Psi(x) = \frac{\Psi(x+q) - \Psi(x)}{q}. \tag{7}$$

Agora calculando o comutador de $\hat{x}$ com $\hat{\wp}$, vemos que:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = \hat{x}.\hat{\wp} - \hat{\wp}.\hat{x}. \tag{8}$$

E aplicando a equação (6), na equação (8), temos:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = -i\hbar(\hat{x}.\hat{\Xi}_q - \hat{\Xi}_q.\hat{x}). \tag{9}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (9), por uma função de onda $\Psi(x)$ arbitrária, no espaço das posições, obtemos:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = -i\hbar(\hat{x}.\hat{\Xi}_q - \hat{\Xi}_q.\hat{x})\Psi(x). \tag{10}$$

Fazendo a distributiva da função de onda $\Psi(x)$ na equação (10):

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = -i\hbar\{\hat{x}.(\hat{\Xi}_q\Psi(x)) - \hat{\Xi}_q.(\hat{x}\Psi(x))\}. \tag{11}$$

E aplicado a definição do operador de diferenças mínimas Ξ_q, equação (7), na equação (11), temos que:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = -i\hbar\left\{\hat{x}\frac{\Psi(x+q) - \Psi(x)}{q} - \frac{(\hat{x}+q).\Psi(x+q) - \hat{x}\Psi(x)}{q}\right\}. \tag{12}$$

Unindo os termos semelhantes, obtemos:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = i\hbar\Psi(x+q). \tag{13}$$

Note que, na equação (13), aparece um operador que translada a função de $\Psi(x)$ para $\Psi(x+q)$, é como se existisse uma perturbação no espectro do espaço de posições, aparentemente a equação (13), não distingue as funções de onda num intervalo q, entre x e $x+q$. Mas vamos considerar que esse operador de translação, seja um operador de translação mínima $\hat{M}$, e como discutimos na seção 2.4, esperamos que o operador de translações mínimas $\hat{M}_q$, seja uma função do novo momento $\hat{\wp}$ e do comprimento mínimo q, tal que:

$$\hat{M}_q(\hat{\wp})\Psi(x) = \Psi(x+q). \tag{14}$$

Substituindo a equação (14), na equação (13), obtemos:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp}). \tag{15}$$

Note que a mecânica quântica é recuperada, quando consideramos que medidas na posição, podem ser feitas arbitrariamente pequenas, pois neste regime temos:

$$\lim_{q\to 0} \hat{M}_q(\hat{\wp}) = \hat{1}, \tag{16}$$

$$\lim_{q\to 0} \hat{\wp} = \hat{p}. \tag{17}$$

E a equação (15), fica dada por:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{18}$$

Conforme o esperado.

Como vimos a existência de um comprimento mínimo q, para medidas de posição, implica que x e $\wp$, só serão canonicamente conjugados, quando o parâmetro de comprimento mínimo q, tender a zero. Isso traz serias consequências, pois se x e $\wp$, não são canonicamente conjugadas, as equações de Lagrange e Hamilton devem ser descritas em termos de novas quantidades, ou seja, devemos buscar um novo operador que seja canonicamente conjugado ao operador de posição $\hat{x}$. E como veremos adiante, existe uma família de operadores $\hat{K}(\hat{\wp})$, que satisfaz esta condição.

Contudo, as hipóteses adotadas nesta seção, possuem algumas dificuldades, pois, alterar a definição da derivada espacial modifica completamente a interpretação sobre o espectro no espaço de posições. Uma discussão mais profunda sobre o espaço de Hilbert, para a mecânica quântica com comprimento mínimo, pode ser vista em (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995). Adicionalmente, nossos resultados só foram possíveis devido ao problema de ordenamento dos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Portanto, a fim de fugir de possíveis inconsistências matemáticas, tomaremos essas ideias preliminares apenas como uma guia, sobre o que buscar.

3.2 A HIPÓTESE DO COMPRIMENTO MÍNIMO

Considere que exista um comprimento mínimo q, para medidas de posição x, e adicionalmente vamos supor que a existência do comprimento mínimo q, perturbe a natureza do momento canonicamente conjugado p, de modo que ele seja transformado em um novo momento $\wp$, onde a relação de comutação entre ele e o operador de posição $\hat{x}$, seja dada por:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}). \tag{19}$$

Onde, $\hat{M}_q(\hat{\wp})$ é o operador de translações mínimas, o qual está intimamente ligado ao comprimento mínimo do espaço q, de forma que:

$$\lim_{q\to 0} \hat{M}_q(\hat{\wp}) = 1. \tag{20}$$

Ou seja, quando medidas de posição puderem ser realizadas de maneira exata, recuperaremos a mecânica quântica:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{21}$$

Considere agora, que exista um operador $\hat{K} = \hat{K}(\hat{\wp})$, tal que:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar. \tag{22}$$

E vamos supor que $\hat{K}$, seja um observável. Note que este operador $\hat{K}$, é canonicamente conjugado ao operador posição $\hat{x}$, ou seja, esperamos que ele seja o momento canônico:

$$K = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t). \tag{23}$$

Numa nova formulação Lagrangiana, conforme veremos na seção 3.5. E esperamos que no limite de q tendendo a zero, o operador $\hat{K}(\hat{\wp})$, seja identificado como o operador de momento $\hat{p}$.
Agora, vamos buscar uma forma para o operador $\hat{K}$, suponha que $\hat{K}$, seja uma função que possa ser expandida como uma série de potência de $\hat{\wp}$, tal que:

$$\hat{K}(\hat{\wp}) = \sum_n \gamma_n \hat{\wp}^n. \tag{24}$$

Onde, os γ_n são constantes, calculando o comutador de $\hat{K}$ com $\hat{x}$, temos:

$$[\hat{x}, \hat{K}] = [\hat{x}, \sum_n \gamma_n \hat{\wp}^n] = \sum_n \gamma_n [\hat{x}, \hat{\wp}^n]. \tag{25}$$

Vamos nos concentrar no último temo da equação (25), note que:

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{\wp}^n] &= [\hat{x}, \hat{\wp}.\hat{\wp}^{n-1}], \\
&= [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + \hat{\wp}[\hat{x}, \hat{\wp}^{n-1}], \\
&= [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + \hat{\wp}[\hat{x}, \hat{\wp}.\hat{\wp}^{n-2}], \\
&= [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + [\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1} + \hat{\wp}^2[\hat{x}, \hat{\wp}^{n-2}], \\
&\vdots \\
&= n[\hat{x}, \hat{\wp}]\hat{\wp}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Mas por hipótese, a relação de comutação entre $\hat{x}$ e $\hat{\wp}$, equação (19), vem dada por:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}).$$

Portanto:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}^n] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}) n \hat{\wp}^{n-1}. \tag{26}$$

Retornando o resultado da equação (26), na equação (25), obtemos:

$$[\hat{x}, \hat{K}] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}) \sum_n \gamma_n n \hat{\wp}^{n-1}. \tag{27}$$

Agora, note que o termo dentro do somatório pode ser visto como uma derivada parcial, em relação ao momento modificado:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}) \frac{\partial}{\partial \hat{\wp}} \sum_n \gamma_n \hat{\wp}^n(\hat{\wp}). \tag{28}$$

Mas por definição, temos que $\hat{K} = \sum_n \gamma_n \hat{\wp}^n$, portanto:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}) \frac{\partial}{\partial \hat{\wp}} \hat{K}(\hat{\wp}). \tag{29}$$

E como $\hat{K}$ só depende de $\hat{\wp}$, podemos escrever a derivada parcial, como uma derivada total:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}) \frac{d}{d\hat{\wp}} \hat{K}(\hat{\wp}). \tag{30}$$

Lembrando que:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar. \tag{31}$$

Contudo, as equações (30) e (31), só serão satisfeitas simultaneamente se:

$$\frac{d\hat{K}(\hat{\wp})}{d\hat{\wp}} = \hat{M}_q^{-1}(\hat{\wp}). \tag{32}$$

Ou seja, existe uma família de operadores $\hat{K}(\hat{\wp})$, tal que:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar. \tag{33}$$

Desde que a equação:

$$\frac{d\hat{K}(\hat{\wp})}{d\hat{\wp}} = \hat{M}_q^{-1}(\hat{\wp}). \tag{34}$$

Seja satisfeita. Contudo, infinitas álgebras deformadas podem ser obtidas, a partir da equação:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}). \tag{35}$$

Em (Petruzziello, 2020) (Kempf, 1997), (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), (Pedram, 2012), (Nouicer, 2007) podemos ver alguns modelos para equação (35), na seção (4.2) discutiremos melhor estes modelos. Mas não existe um consenso na comunidade científica sobre a forma da deformação na álgebra de Heisenberg, equação (35), para cada operador $\hat{M}_q$, teremos uma álgebra diferente. Contudo, alguns resultados são comuns a todas as álgebras, vamos deduzir alguns destes na próxima seção.

3.3 REPRESENTAÇÕES NO ESPAÇO DOS MOMENTOS

Considerar a existência de um comprimento mínimo para medidas de posição, gera dificuldades matemáticas para a construção de um espaço das posições, de acordo com (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), espaços generalizados de Bargmann-Fock discretos devem ser utilizados. No entanto usar a base de Bargmann Fock discreta nos cálculos, normalmente envolvem equações de diferenças finitas e somas infinitas, em vez de equações diferenciais e integrais. Contudo estamos considerando a existência de medidas de momento com precisão absoluta, portanto existe uma representação do espaço de momento contínuo onde poderemos trabalhar tranquilamente. Mas antes de construir estas representações, vamos fazer uma pequena recapitulação do que vimos, e que será importante nesta seção.

Até o presente momento deduzimos que, por traz da mecânica quântica com comprimento mínimo existe a equação:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}]\Psi(x) = i\hbar\Psi(x+q). \tag{36}$$

E fazendo uso do operador de translações espaciais, que vem dado por:

$$\Psi(x+q) = \hat{M}_q(\hat{\wp})\Psi(x). \tag{37}$$

Substituindo a equação (37), na equação (36), obtemos a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp}). \tag{38}$$

Contudo, podemos forçar que exista um operador $\hat{K}(\hat{\wp})$, tal que:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar. \tag{39}$$

E demonstrar que pra cada escolha de $\hat{K}(\hat{\wp})$, existe um operador $\hat{M}$, tal que:

$$\frac{\partial\hat{K}(\hat{\wp})}{\partial\hat{\wp}} = \hat{M}_q^{-1}(\hat{\wp}). \tag{40}$$

Contudo, a forma do operador mínimo $\hat{M}_q$, na equação (38), não é única. Portanto, infinitas álgebras deformadas podem ser obtidas a partir de diferentes operadores $\hat{M}_q$. Note que a mecânica quântica, é um caso particular onde $\lim q \to 0$, de modo que:

$$\hat{K} = \hat{p}. \tag{41}$$

Tendo isso em mente, vamos construir uma representação no espaço dos momentos, baseando nos resultados da mecânica quântica, temos que:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{42}$$

Onde, $\hat{x}$ pode ser escrito como:

$$\hat{x} = i\hbar \bigtriangledown_p . \tag{43}$$

E $\bigtriangledown_p$, é a derivada parcial em relação ao momento$\frac{\partial}{\partial p}$. Substituindo a equação (43), na equação (42), obtemos:

$$[\bigtriangledown_p, \hat{p}] = \hat{1}. \tag{44}$$

Agora, vamos forçar que exista a mesma relação para a nova relação de comutação, $[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp})$. Vamos tomar, como ansatz, que o operador posição no espaço dos momentos, seja dado por:

$$\hat{x} = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp}) \bigtriangledown_\wp . \tag{45}$$

Então:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = \hat{x}\hat{\wp} - \hat{\wp}\hat{x}. \tag{46}$$

Aplicando o ansatz (45), na equação (46), vemos que:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp})(\bigtriangledown_\wp\hat{\wp} - \hat{\wp}\bigtriangledown_\wp). \tag{47}$$

Note, que o último termo é o um comutador, assim podemos escrever:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp})[\bigtriangledown_\wp, \hat{\wp}]. \tag{48}$$

Mas, por definição $[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp})$, portanto:

$$[\bigtriangledown_\wp, \hat{\wp}] = 1. \tag{49}$$

Conforme queríamos demonstrar. E relações similares a equação (45) podem ser vistas em (Petruzziello, 2020) (Kempf, 1997), (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), (Pedram, 2012), (Nouicer, 2007). Assim, podemos escrever que a atuação do operador $\hat{x}$, numa função de onda no espaço dos momentos $\langle\Psi|\wp\rangle$, pode ser escrita como:

$$\hat{x}\langle\Psi|\wp\rangle = i\hbar M_q(\wp) \bigtriangledown_\wp \langle\Psi|\wp\rangle. \tag{50}$$

E por definição, temos que a atuação do operado de momento $\hat{\wp}$, numa função de onda no espaço dos momentos $\langle\Psi|\wp\rangle$, vem dada por:

$$\hat{\wp}\langle\Psi|\wp\rangle = \wp\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{51}$$

Contudo queremos que o operador de posição $\hat{x}$ hermitiano, ou seja:

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = \langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star}. \tag{52}$$

Para isso, vamos supor que exista um elemento infinitesimal $d\wp$, tal que:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp). \tag{53}$$

E buscar um $F(\wp)$, que satisfaça (52). Substituindo a relação (53), na equação (52), temos que:

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star} = \langle\Phi|\hat{x}\hat{1}|\Psi\rangle^{\star} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Phi|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp)\hat{x}|\Psi\rangle\right\}^{\star}. \tag{54}$$

Mas, a atuação do operador de posição no espaço dos momentos, equação (50), substituída na equação (54), nos fornece:

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star} = \hbar\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp F(\wp)M_q(\wp)\langle\Phi|\wp\rangle\langle\wp|\bigtriangledown_{\wp}|\Psi\rangle\right\}^{\star}. \tag{55}$$

Mas, podemos integrar por partes a equação (55), obtendo:

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star} = \hbar\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp \bigtriangledown_{\wp}[F(\wp)M_q(\wp)\langle\Phi|\wp\rangle\langle\wp|\Psi\rangle]\right\}^{\star} - \hbar\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\wp|\Psi\rangle\bigtriangledown_{\wp}[\langle\Phi|\wp\rangle F(\wp)M_q(\wp)]\right\}^{\star}. \tag{56}$$

Agora, vamos supor que as funções de onda vão a zero quando $\wp$ vai a mais ou menos infinito, portanto, a primeira integral da equação (56), é identicamente nula, assim:

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star} = -\hbar\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\wp|\Psi\rangle\bigtriangledown_{\wp}[\langle\Phi|\wp\rangle F(\wp)M_q(\wp)]\right\}^{\star}. \tag{57}$$

Tomando o complexo conjugado do lado direito da equação (57), temos:

$$\langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star} = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Psi|\wp\rangle\bigtriangledown_{\wp}[\langle\wp|\Phi\rangle F^{\star}(\wp)M_q^{\star}(\wp)]. \tag{58}$$

Agora, vamos guardar o resultado dado pela equação (58), e analisar o seguinte cálculo:

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = \langle\Psi|\hat{1}\hat{x}|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Psi|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp)\hat{x}|\Phi\rangle. \tag{59}$$

Lembrando que $\hat{x} = i\hbar\hat{M}_q(\hat{\wp})\bigtriangledown_{\wp}$, substituindo-o na equação (59), obtemos:

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\Psi|\wp\rangle F(\wp)M_q(\wp)\bigtriangledown_{\wp}[\langle\wp|\Phi\rangle]. \tag{60}$$

Contudo estamos interessados que $\hat{x}$, seja hermitiano, ou seja, $\hat{x} = \hat{x}^{\dagger}$, que é equivalente a:

$$\langle\Psi|\hat{x}|\Phi\rangle = \langle\Phi|\hat{x}|\Psi\rangle^{\star}. \tag{61}$$

Portanto, podemos igualar a equação (60) com a equação (58), mas como estamos integrando em $\wp$. e os limites de integração são idênticos, podemos igualar os integrandos, obtendo:

$$F(\wp)M_q(\wp) \bigtriangledown_\wp [\langle\wp|\Phi\rangle] = \bigtriangledown_\wp[\langle\wp|\Phi\rangle F^\star(\wp)M_q^\star(\wp)]. \tag{62}$$

Agora, utilizando a regra da cadeia na derivação do segundo membro da equação (62), e unindo os termos semelhantes, temos que:

$$\{F(\wp)M_q(\wp) - F^\star(\wp)M_q^\star(\wp)\} \bigtriangledown_\wp \langle\wp|\Phi\rangle \ = \langle\wp|\Phi\rangle \ \bigtriangledown_\wp \{F^\star(\wp)M_q^\star(\wp)\}. \tag{63}$$

Observando a equação (63), vemos que:

$$F(\wp) = M_q^{-1}(\wp), \tag{64}$$

e,

$$F^\star(\wp) = \{M_q^{-1}(\wp)\}^\star, \tag{65}$$

satisfazem a equação (63). Portanto:

$$F(\wp) = M_q^{-1}(\wp), \tag{66}$$

é a solução desejada. Lembrando que $F(\wp)$ satisfaz a equação:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|F(\wp). \tag{67}$$

Enfim, obtemos uma relação de fechamento para a mecânica quântica com comprimento mínimo dada por:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|M_q^{-1}(\wp). \tag{68}$$

Agora, note que:

$$\langle\hat{\wp}'|\alpha\rangle = \langle\hat{\wp}'|\hat{1}|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp\langle\hat{\wp}'|\wp\rangle\langle\wp|M_q^{-1}(\wp)|\alpha\rangle. \tag{69}$$

Mas, a equação (69), só é verdade se:

$$\langle\wp'|\wp\rangle = M_q(\wp)\delta(\wp - \wp'). \tag{70}$$

Que é a condição de ortogonalidade para a base $|\wp\rangle$, em resumo temos:

A relação de fechamento para o operador de momento $\hat{\wp}$:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|M_q^{-1}(\wp). \tag{71}$$

A relação de ortogonalidade para o operador de momento $\hat{\wp}$:

$$\langle \wp' | \wp \rangle = M_q(\wp)\delta(\wp - \wp'). \tag{72}$$

A atuação do operador de posição no espaço dos momentos $\wp$:

$$\hat{x}\langle \Psi | \wp \rangle = i\hbar M_q(\wp) \bigtriangledown_\wp \langle \Psi | \wp \rangle. \tag{73}$$

A atuação do operador de momento no espaço dos momentos $\wp$:

$$\hat{\wp}\langle \Psi | \wp \rangle = \wp \langle \Psi | \wp \rangle. \tag{74}$$

Resultados análogos aos utilizados em (Petruzziello, 2020), (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), (Pedram, 2012), (Nouicer, 2007).

3.4 DAS POSIÇÕES PARA OS MOMENTOS

Agora, estamos em posição de calcular $\langle x | \wp \rangle$, que será importante para construirmos o propagador da nossa teoria, suponha que:

$$\langle x | \wp \rangle = Ce^{-i\wp x F(\wp)}. \tag{75}$$

Onde, C é uma constante, e $F(\wp)$ a função que buscamos. Lembrando da equação (73), temos que:

$$x\langle x | \wp \rangle = i\hbar M_q(\wp) \bigtriangledown_\wp \langle x | \wp \rangle. \tag{76}$$

Agora desenvolvendo o termo, $\bigtriangledown_\wp$ da equação (76), com o auxílio da equação (75), vemos que:

$$\bigtriangledown_\wp \langle x | \wp \rangle = \bigtriangledown_\wp \{Ce^{-i\wp x F(\wp)}\}. \tag{77}$$

Aplicado a regra da cadeia no segundo termo da equação (77), obtemos:

$$\bigtriangledown_\wp \langle x | \wp \rangle = -ix\langle x | \wp \rangle \{F(\wp) + \wp \bigtriangledown_\wp F(\wp)\}. \tag{78}$$

Voltando o resultado (78), na equação (76), e unindo os termos semelhantes, temos:

$$1 = \hbar M_q(\wp)\{F(\wp) + \wp \bigtriangledown_\wp F(\wp)\}. \tag{79}$$

Mas, note que podemos escrever a equação (79), como:

$$1 = \hbar M_q(\wp) \bigtriangledown_\wp \{\wp F(\wp)\}. \tag{80}$$

Portanto:

$$\bigtriangledown_\wp \{\hbar \wp F(\wp)\} = M_q^{-1}(\wp). \tag{81}$$

Integrando a equação (81), obtemos:

$$\hbar\wp F(\wp) = \int d\wp M_q^{-1}(\wp). \tag{82}$$

Mas, lembrando da relação entre K e $\wp$, equação (34), temos:

$$\frac{dK}{d\wp} = M_q^{-1}(\wp). \tag{83}$$

Substituindo a equação (83), na equação (82), obtemos:

$$F(\wp) = \frac{1}{\hbar\wp}\int dK. \tag{84}$$

Portanto:

$$\langle x|\wp\rangle = Ce^{-i\frac{xK}{\hbar}}. \tag{85}$$

Agora, precisamos normalizar a equação (85), contudo a constante de normalização C, depende da forma funcional da transformação $K = K(\wp)$, mais especificamente do jacobiano da transformação, pois a existência de um comprimento mínimo para medidas de posição, implica num momento $K(\wp)$ máximo, ou seja, quando $\wp$ vai para infinito, esperamos que $K(\wp)$ seja finito. Esta discussão ficará mais clara na seção (4.4). Enfim, a relação funcional procurada nesta seção, vem dada por:

$$\langle x|\wp\rangle = Ce^{-i\frac{xK}{\hbar}}. \tag{86}$$

Que pode ser escrita em função de p, no limite para q indo a zero, ou seja, considerando a existência de um comprimento mínimo:

$$\lim_{q\to 0}\langle x|\wp\rangle = \langle x|p\rangle = C.e^{-i\frac{xp}{\hbar}}. \tag{87}$$

Ou seja, recuperamos o resultado da mecânica quântica. E a equação (86). será de fundamental importância para o desenvolvimento da seção 3.5. Onde mostraremos que para a mecânica quântica com comprimento mínimo, o operador $\hat{K}$, é o momento canonicamente conjugado.

3.5 O MOMENTO CANONICAMENTE CONJUGADO

A mecânica quântica com comprimento mínimo, traz a ideia da existência de comprimento mínimo mensurável, o que leva a modificações no formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano, que podem ser analisados via integral de caminho (Das; Pramanik, 2012), em (Valtancoli, 2015) são discutidas essas propriedades usando o formalismo integral de caminho, para sistemas não relativísticos. Aplicados ao oscilador harmônico com comprimento mínimo. Contudo em nosso desenvolvimento, não vamos particularizar o operador $\hat{M}_q$, e nem explicitar a forma do operador hamiltoniano, obteremos apenas uma relação entre Lagrangiana e o Hamiltoniano, para a mecânica quântica com comprimento mínimo. Considere a seguinte operação:

$$\mathcal{A} = \langle\wp_f|\left(e^{-i\hat{H}T}\right)|\wp_i\rangle. \tag{88}$$

Onde, o operador $e^{-i\hat{H}T}$ é chamado de operador de evolução temporal, $\langle \wp_f|$ é o autovetor de momento final, $\langle \wp_i|$ é o autovetor de momento inicial, $\hat{H}$ a Hamiltoniana do sistema e T é o tempo, perceba que podemos escrever:

$$\mathcal{A} = \langle \wp_f| \left(e^{\frac{-i\hat{H}T}{N}}\right)^N |\wp_i\rangle. \tag{89}$$

Tomando $T = N\epsilon$, vemos que:

$$A = \langle \wp_f| \left(e^{-i\epsilon\hat{H}}\right) ... \left(e^{-i\epsilon\hat{H}}\right) |\wp_i\rangle. \tag{90}$$

Mas, lembrando da relação de completude deduzidas na seção 3.3:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} d\wp|\wp\rangle\langle\wp|M_q^{-1}(\wp). \tag{91}$$

Podemos completar a equação (90), com $N-1$ relações (91), obtendo:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} d\wp_j M_q^{-1}(\wp_j)\right) \prod_{j=1}^{N} \langle\wp_j|e^{-i\epsilon\hat{H}}|\wp_{j-1}\rangle. \tag{92}$$

Onde $\wp_0 = p_i$, $\wp_N = p_f$ e $T = N\epsilon$. Contudo podemos supor que o comprimento mínimo q, seja tão pequeno ao ponto que possamos imaginar a existência de um elemento infinitesimal dx, tal que:

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x|. \tag{93}$$

Completando agora, N vezes a equação (92), com a equação (93), vemos que:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} dp_j M_q^{-1}(\wp_j)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{N} dx_j\right) \prod_{j=1}^{N} \langle\wp_j|x_j\rangle\langle x_j|\wp_{j-1}\rangle e^{-i\epsilon H}. \tag{94}$$

Considere agora apenas a expressão:

$$\langle\wp_j|x_j\rangle\langle x_j|\wp_{j-1}\rangle e^{-i\epsilon H}. \tag{95}$$

Lembrando do resultado obtido na seção 3.4, que:

$$\langle x|\wp\rangle = C.e^{-i\frac{xK}{\hbar}}. \tag{96}$$

Assim, tomando a equação (95), na equação (96), obtemos:

$$\langle\wp_j|x_j\rangle\langle x_j|\wp_{j-1}\rangle e^{-i\epsilon H} = C.e^{-i\epsilon H} exp\left[-i\epsilon\frac{x_j}{\hbar}\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{\epsilon}\right)\right]. \tag{97}$$

Tomando ϵ pequeno na equação (97), podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{\epsilon}\right) = \frac{d}{dt}K_j. \tag{98}$$

Assim, substituindo o resultado (98), na equação (97), obtemos:

$$\langle \wp_j | x_j \rangle \langle x_j | \wp_{j-1} \rangle e^{-i\epsilon H} = C.e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(x_j \frac{d}{dt} K_j + H\right)}. \tag{99}$$

Retornando os resultados (99), na equação (94), temos que:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{N-1} d\wp_j M_q^{-1}(\wp_j) \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{N} dx_j \right) \prod_{j=1}^{N} C^N.e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\dot{K}_j x_j + H\right)}. \tag{100}$$

Definindo Dx e DK, tais que:

$$Dx = \prod_{j=1}^{N} C^N.dx_j, \tag{101}$$

$$DK = \prod_{j=1}^{N-1} M_q^{-1}(\wp_j) d\wp_j. \tag{102}$$

Podemos reescrever a equação (100), como:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} DK.Dx. \prod_{j=1}^{N} e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\dot{K}_j x_j + H\right)}. \tag{103}$$

Mas, o produtório pode ser escrito como uma soma das exponenciais, assim a equação (103), fica:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} DK.Dx.e^{\sum_{j=1}^{N} -iN\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\dot{K}_j x_j + H\right)}. \tag{104}$$

Agora, tomando o limite de ϵ muito pequeno, N muito grande e lembrando que $N\epsilon = T$, obtemos:

$$N d\epsilon = dT. \tag{105}$$

Assim, podemos escrever a equação (104) na forma:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} DK.Dx.e^{\frac{-i}{\hbar}\int_0^T dt\left(\dot{K}_j x_j + H\right)}. \tag{106}$$

Que é o propagador para mecânica quântica com comprimento mínimo, mas por definição:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} DK.Dx.e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}}. \tag{107}$$

Onde, S é a ação do sistema, portanto a ação fica dada por:

$$\mathcal{S} = \int_0^T dt \left(-\dot{K}_j x_j - H \right). \tag{108}$$

Mas da mecânica clássica, temos que:

$$\mathcal{S} = \int_0^T dt\mathcal{L}. \tag{109}$$

Portanto:

$$\mathcal{L} = -\dot{K}_j x_j - H. \tag{110}$$

Mas, note que podemos reescrever o primeiro termo do lado direito, da equação (110), como

$$\dot{K}_j x_j = \frac{d}{dt}(K_j x_j) - K\dot{x}. \tag{111}$$

Portanto, a Lagrangiana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = K\dot{x}_j - H - \frac{d}{dt}(K_j x_j). \tag{112}$$

Mas, a função de Lagrange é definida a menos de uma derivada total no tempo, de uma função que depende das coordenadas, assim temos que:

$$\mathcal{L} = K_j\dot{x}_j - H. \tag{113}$$

Mas do formalismo Lagrangiano, temos que o momento canonicamente conjugado, vem dado pela derivada de $\mathcal{L}$, em relação a $\dot{x}$, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = K. \tag{114}$$

Que nos indica, que para mecânica quântica com comprimento mínimo, K deve ser visto como o momento canonicamente conjugado, e não mais o $\wp$. É como se fizéssemos uma transformação canônica, em nossa teoria. Vamos explorar um pouco mais a fundo esta ideia no próximo seção.

4 O COMPRIMENTO MÍNIMO

O problema de conciliar a Mecânica Quântica, com a Relatividade Geral, é uma das tarefas da física teórica moderna que, até agora, ainda não encontrou uma solução consistente e satisfatória. A dificuldade surge porque, a relatividade geral lida com eventos que definem as linhas-mundo das partículas, enquanto a mecânica quântica não permite a definição de trajetória; na verdade, a determinação da posição de uma partícula quântica, envolve uma medição que introduz uma incerteza em seu momento (Capozziello; Lambiase; Scarpetta, 1999). Neste capítulo vamos mostrar que a mecânica quântica com comprimento mínimo, pode ser pensada como uma transformação canônica. Visitaremos a literatura para ilustrar alguns modelos de GUP. Discutiremos o oscilador harmônico e por fim faremos uma estimativa sobre tamanho do comprimento mínimo q introduzido na hipótese.

4.1 TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Será que podemos pensar a mecânica quântica com comprimento mínimo, a partir da mecânica clássica? Nesta seção, faremos uma pequena revisão sobre as transformações canônicas, e buscaremos alguma transformação canônica para nossa mecânica com comprimento mínimo. Onde, trocaremos nossas coordenadas no espaço de fase $\{x, k\}$, por novas coordenadas $\{\chi, \wp\}$. Buscaremos por transformações que preservem as equações de Hamilton, onde x e k são respectivamente, coordenadas de posição e momento de uma partícula, e, χ e $\wp$ são as novas coordenadas generalizadas (DERIGLAZOV, 2009), (LANDAU, 1960). De modo geral, podemos definir que uma transformação é canônica se existem $2n$ funções invertíveis:

$$\chi_j = \chi_j(x, k, t), \tag{1}$$

$$\wp = \wp_j(x, k, t). \tag{2}$$

Onde, $j = 1, \cdots, n$. E, que a partir destas transformações, dadas pelas equações (1) e (2), seja possível encontrar uma função $\mathcal{H}$, tal que:

$$\dot{\chi}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \wp_j}, \tag{3}$$

$$\dot{\wp}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \chi_j}. \tag{4}$$

Onde, a função $\mathcal{H}$, é chamada de Hamiltoniana modificada do sistema. Além disso, tanto as variáveis $\{x, k\}$, como as variáveis $\{\chi, \wp\}$ devem respeitar o princípio de Hamilton, por simplicidade de notação, vamos considerar nosso sistema em uma dimensão:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{k.\dot{x} - H(x, k, t)\} .dt = 0, \tag{5}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \wp.\dot{\chi} - \mathcal{H}(\chi, \wp, t) \right\} .dt = 0. \tag{6}$$

Lembrando que nos extremos, devemos ter:

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = \delta \chi(t_1) = \delta \chi(t_2) = 0, \tag{7}$$

$$\delta k(t_1) = \delta k(t_2) = \delta \wp(t_1) = \delta \wp(t_2) = 0. \tag{8}$$

Os integrandos das equações (5) e (6), não necessariamente são iguais, e uma solução é quando os integrandos diferem por uma derivada temporal total, de uma função $F(x, \chi, k, \wp, t)$, tal que:

$$\left\{ k.\dot{x} - H(x, k, t) \right\} = \left\{ \wp.\dot{\chi} - \mathcal{H}(\chi, \wp, t) \right\} + \frac{d}{dt} F(x, \chi, k, \wp, t). \tag{9}$$

Podemos reescrever a equação (9), como:

$$\left\{ k.dx - \wp.d\chi \right\} + \left\{ \mathcal{H}(\chi, \wp, t) - H(x, k, t) \right\} .dt = dF(x, \chi, k, \wp, t). \tag{10}$$

Onde, $F(x, \chi, k, \wp, t)$ é conhecida como função geradora, vamos iniciar nossa análise tomando a função geradora como $F_1 = F(x, \chi, t)$, mas da equação (10), temos:

$$k = \frac{\partial F_1}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\wp = -\frac{\partial F_1}{\partial \chi}, \tag{12}$$

$$\mathcal{H}(\chi, \wp, t) = H(x, k, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{13}$$

Contudo, nem sempre a escolha de $F_1(x, \chi, t)$ é a melhor opção, podemos pensar em funções geradoras que dependam de outras variáveis, por exemplo, podemos tomar uma função geradora dependente de $(x, \wp, t)$, tal que:

$$F = F_1 = F_2(x, \wp, t) - \wp.\chi. \tag{14}$$

Lembrando da equação (10), temos:

$$\left\{ k.dx - \wp.d\chi \right\} + \left\{ \mathcal{H} - H \right\} .dt = dF = -\wp.d\chi - \chi.d\wp + \frac{\partial F_2}{\partial x}.dx + \frac{\partial F_2}{\partial \wp}.d\wp + \frac{\partial F_2}{\partial t}.dt. \tag{15}$$

De onde podemos concluir que:

$$k.dx + \left\{ \mathcal{H} - H \right\} .dt = -\chi.d\wp + \frac{\partial F_2}{\partial x}.dx + \frac{\partial F_2}{\partial \wp}.d\wp + \frac{\partial F_2}{\partial t}.dt. \tag{16}$$

Portanto, temos:

$$k = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \tag{17}$$

$$\chi = \frac{\partial F_2}{\partial \wp}, \tag{18}$$

$$\mathcal{H}(\chi, \wp, t) = H(x, k, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{19}$$

E a partir das equações (17), (18) e (19) podemos pensar numa mecânica com comprimento mínimo, como uma transformação canônica. Mas antes, vamos resgatar alguns resultados, tínhamos da mecânica quântica com comprimento mínimo, que:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}). \tag{20}$$

E a partir da equação (20), mostramos que era possível fazer uma mudança de variáveis $\hat{K} = \hat{K}(\hat{\wp})$, tal que:

$$\frac{\partial \hat{K}(\hat{\wp})}{\partial \hat{\wp}} = \frac{d\hat{K}(\hat{\wp})}{d\hat{\wp}} = \hat{M}_q^{-1}(\hat{\wp}). \tag{21}$$

Que nos levava a uma relação de comutação canônica, do tipo:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar. \tag{22}$$

Agora, vamos nos basear neste conjunto de resultados para desenvolvermos nossa teoria. A partir da equação (21), podemos supor uma transformação de coordenadas de $k = k(\wp)$, invertível, tal que $\wp = \wp(k)$, onde usaremos k minúsculo para o caso clássico, ou seja:

$$\frac{\partial k(\wp)}{\partial \wp} = M_q^{-1}(\wp). \tag{23}$$

Mas da equação (17), temos que:

$$k = k(\wp) = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{24}$$

Podemos resolver a equação (24), para F_2, obtendo:

$$F_2 = F_2(x, \wp, t) = k(\wp).x + F(\wp, t). \tag{25}$$

Que é a função geradora da nossa transformação canônica, agora a partir da equação (18), podemos calcular a nova coordenada generaliza χ, assim temos:

$$\chi = \frac{\partial F_2}{\partial \wp} = \frac{\partial}{\partial \wp}\left\{k(\wp).x + F(\wp, t)\right\}, \tag{26}$$

$$\chi = \frac{\partial k(\wp)}{\partial \wp}.x + \frac{\partial}{\partial \wp}.\left\{F(\wp, t)\right\}. \tag{27}$$

Mas, lembrando da equação (21), temos que:

$$\frac{\partial k(\wp)}{\partial \wp} = M_q^{-1}(\wp).$$

Portanto em resumo, a função geradora e as transformações canônicas mais gerais são, respectivamente:

$$F_2 = k(\wp).x + F(\wp,t), \tag{28}$$

$$k = k(\wp), \tag{29}$$

$$\chi = M_q^{-1}(\wp).x + \frac{\partial}{\partial \wp}\left\{F(\wp,t)\right\}. \tag{30}$$

E como as transformações são canônicas, devemos ter:

$$\mathcal{H}(\chi,\wp,t) = H(x,k,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{31}$$

Vamos ver alguns exemplos encontrados na literatura, e mostrar as transformações efetuadas.

4.2 ALGUNS MODELOS

Agora, estamos em posição de apresentar alguns modelos para a mecânica quântica com comprimento mínimo, em (Nouicer, 2007), o autor investigou efeitos da álgebra deformada, dada por:

$$[\hat{x},\hat{\wp}] = i\hbar e^{\beta.\wp^2}. \tag{32}$$

Onde, β é uma constante associada ao comprimento mínimo q, (Nouicer, 2007) aplica este modelo à termodinâmica de buracos negros, calculando uma correção para a Temperatura Hawking, entropia e faz uma análise detalhada do processo de evaporação Hawking. Contudo, este modelo é equivalente a fazer a seguinte transformação:

$$\hat{M}_q = \frac{d\hat{\wp}(K)}{d\hat{k}} = e^{\beta.\wp^2}. \tag{33}$$

Podemos resolver a equação (33), para $\hat{K}$, obtendo a função erro dada por:

$$\hat{K}(\wp) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}} erf\left(\sqrt{\beta}.\wp\right). \tag{34}$$

Em (Pedram, 2012), é apresentado o seguinte modelo:

$$[\hat{x},\hat{\wp}] = i\hbar\frac{1}{1-\beta\wp^2}. \tag{35}$$

Segundo o autor, esta forma de álgebra generalizada é consistente com várias propostas de gravidade quântica, como teoria de cordas, gravidade quântica em loop, relatividade duplamente especial. Ela ainda prevê uma incerteza de comprimento mínimo, e um momento máximo observável. E é mostrado que a presença do momento máximo, resulta em um limite superior no espectro de energia dos estados de momento do oscilador harmônico. Contudo, este modelo é equivalente a fazer a seguinte transformação:

$$\hat{M}_q = \frac{d\hat{\wp}(K)}{d\hat{K}} = \frac{1}{1 - \beta\wp^2}. \tag{36}$$

E podemos resolver a equação (36), para $\hat{K}$, obtendo:

$$\hat{K} = \wp - \frac{\sqrt{\beta}}{3}\wp^2. \tag{37}$$

Outro modelo interessante é o de (Petruzziello, 2020), onde:

$$[x, \wp] = i\hbar\sqrt{1 - 2\beta\wp^2}. \tag{38}$$

O autor, apresenta esta generalização para o princípio da incerteza de Heisenberg (HUP), que introduz a existência de um momento máximo observável, e ao mesmo tempo não acarreta numa incerteza mínima para medidas de posição. O resultado acima, é um princípio de incerteza generalizada exato (GUP), válido em todas as escalas de energia. Para pequenos valores do parâmetro de deformação β, o ansatz é consistente com a expressão usual para GUP da teoria das cordas, relatividade duplamente especial (DSR) e outros candidatos à gravidade quântica. Contudo, este modelo é equivalente a fazer a seguinte transformação:

$$\hat{M}_q = \frac{d\hat{\wp}(K)}{d\hat{K}} = \sqrt{1 - 2\beta\wp^2}. \tag{39}$$

E podemos resolver a equação (39), para $\hat{K}$, obtendo:

$$\hat{K} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} arcsen(\sqrt{2\beta}\wp). \tag{40}$$

Como uma análise preliminar (Petruzziello, 2020), estudou as implicações deste modelo em algumas aplicações da mecânica quântica e na termodinâmica de buracos negros.
Outro modelo é o de (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), que é amplamente abordado pela literatura, (Adler; Chen; Santiago, 2001), (Das; Vagenas, 2008), (Jizba; Kleinert; Scardigli, 2010), (Ong, 2018), (Kanazawa et al., 2019), (Buoninfante et al., 2020), (Scardigli; Lambiase; Vagenas, 2017), (Luciano; Petruzziello, 2019), (Scardigli, 2019), dado por:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{\wp}^2). \tag{41}$$

Este modelo é equivalente a fazer a seguinte transformação:

$$\hat{M} = \frac{d\hat{\wp}(K)}{d\hat{K}} = (1 + \beta\hat{\wp}^2). \tag{42}$$

E podemos resolver a equação (42), para $\hat{K}$, obtendo:

$$\hat{K} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} arctan(\sqrt{\beta}\hat{\wp}). \tag{43}$$

Contudo, é importante que exista consistência entre nossa hipótese de comprimento mínimo e os resultados obtidos até então. Portanto, como forma de exemplo, vamos calcular qual é o comprimento mínimo por traz do modelo de (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), dado por:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \left(1 + \beta\hat{\wp}^2\right). \tag{44}$$

Lembrando, que a relação de incerteza é:

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{x}, \hat{\wp}]\rangle|^2. \tag{45}$$

Substituindo a equação (44), na equação (45), vemos que:

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle \geq \frac{1}{2}|\langle i\hbar(1 + \beta\hat{\wp}^2)\rangle|, \tag{46}$$

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle \geq \frac{\hbar}{2}\left(1 + \beta\langle\hat{\wp}^2\rangle\right). \tag{47}$$

Que pode ser resolvida para $\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle$, lembrado que:

$$\langle\hat{\wp}^2\rangle = \langle(\Delta\hat{\wp})^2\rangle + \langle\hat{\wp}\rangle^2. \tag{48}$$

Substituindo a equação (48), na equação (47) e unindo os termos semelhantes, obtemos:

$$0 \geq \frac{\beta\hbar}{2}\langle(\Delta\wp^2)\rangle - \langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle + \frac{\hbar}{2}(1 + \beta\langle\wp\rangle^2), \tag{49}$$

$$0 \geq \langle(\Delta\wp^2)\rangle - \frac{2}{\beta\hbar}\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle + \frac{1}{\beta}(1 + \beta\langle\wp\rangle^2). \tag{50}$$

Podemos igualar a zero a equação (50), a fim de obter uma solução para $\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle$, ou seja:

$$\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle = \frac{1}{\hbar\beta}\langle(\Delta\hat{x})\rangle \pm \left[\frac{1}{\hbar^2\beta^2}\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2 - \left(\frac{1}{\beta}\right)(1 + \beta\langle\wp\rangle^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{51}$$

$$\langle(\Delta\hat{\wp})\rangle = \frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle}{\hbar\beta} \pm \left[\frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2}{\hbar^2\beta^2} - \frac{1}{\beta} - \langle\wp\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{52}$$

Note, que o termo dentro da raiz quadrada, deve ser maior ou igual a zero, portanto o menor valor que este pode assumir é zero, assim temos:

$$\frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2}{\hbar^2\beta^2} - \frac{1}{\beta} - \langle\wp\rangle^2 = 0, \tag{53}$$

$$\frac{\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2}{\hbar^2\beta^2} = \frac{1}{\beta} + \langle\wp\rangle^2, \tag{54}$$

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle^2 = \beta\hbar^2\left(1 + \beta\langle\wp\rangle^2\right). \tag{55}$$

Que é mínima se $\langle\wp\rangle = 0$, ou seja:

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{56}$$

Note, que tomado $\lim \sqrt{\beta} \to 0$, na equação (46), obtemos:

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle.\langle(\Delta\hat{p})\rangle \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{57}$$

Conforme a mecânica quântica prevê. Precisamos agora, buscar uma forma de estimar o valor de β, na equação (56). Pois, assim obteremos um valor para $\langle(\Delta\hat{x})\rangle$, note que β tem dimensão do inverso de momento ao quadrado, assim um possível valor para β é:

$$\beta = \frac{q^2}{\hbar^2}. \tag{58}$$

O que nos levaria a interpretação da incerteza mínima para posição no modelo de (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), exatamente igual ao comprimento mínimo que postulamos para o espaço:

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle = q. \tag{59}$$

Contudo, supor a existência de um comprimento mínimo q, não necessariamente implica na existência de uma incerteza mínima em medidas de posição $\langle(\Delta\hat{x})\rangle$, em (Petruzziello, 2020) o autor faz uma comparação entre os modelos (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), (Nouicer, 2007), (Pedram, 2012), (Hassanabadi; Maghsoodi; Chung, 2019) e (Shababi; Chung, 2020). Levando em conta a previsão da existência de incerteza mínima na posição, e/ou momento máximo, conforme a tabela:

Tabela 1 – Comparação entre os modelos

Modelo	Incerteza mínima na posição	Momento máximo
Heisenberg	não possui	não possui
(KEMPF; MANGANO; MANN, 1995)	possui	não possui
(Nouicer, 2007)	possui	não possui
(Pedram, 2012)	possui	possui
(Hassanabadi; Maghsoodi; Chung, 2019)	possui	possui
(Shababi; Chung, 2020)	possui	possui
(Petruzziello, 2020)	não possui	possui

fonte: Petruzziello (2020).

Contudo, independente da existir ou não uma incerteza mínima para medidas de posição $\langle(\Delta\hat{x})\rangle$, podemos calcular um valor do comprimento mínimo q, para os vetores de posição formarem uma base ortogonal, mas antes vamos analisar o oscilador harmônico.

4.3 OSCILADOR HARMÔNICO

Como uma aplicação, é construtivo analisar o oscilador harmônico unidimensional, seja o Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\wp}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}. \tag{60}$$

Onde, m é a massa da partícula e ω é a frequência angular do oscilador. A equação Schrödinger independente do tempo, para uma função de onda no espaço dos momentos, em uma dimensão é:

$$\hat{H}\langle\Psi|\wp\rangle = E\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{61}$$

Substituindo a equação (60), na equação (61), temos:

$$\left(\frac{\hat{\wp}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}\right)\langle\Psi|\wp\rangle = E\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{62}$$

Lembrando que:

$$\hat{\wp}\langle\Psi|\wp\rangle = \wp\langle\Psi|\wp\rangle, \tag{63}$$

$$\hat{x}\langle\Psi|\wp\rangle = i\hbar M_q(\wp)\bigtriangledown_\wp \langle\Psi|\wp\rangle. \tag{64}$$

aplicando as equações (63) e (64), na equação (62), temos que:

$$\frac{\wp^2}{2m}\langle\Psi|\wp\rangle - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}M_q(\wp)\bigtriangledown_\wp (M_q(\wp)\bigtriangledown_\wp \langle\Psi|\wp\rangle) = E\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{65}$$

Note, que podemos escrever $\bigtriangledown_\wp$, como uma derivada total:

$$\frac{\wp^2}{2m}\langle\Psi|\wp\rangle - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}M_q(\wp)\frac{d}{d\wp}\left(M_q(\wp)\frac{d}{d\wp}\langle\Psi|\wp\rangle\right) = E\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{66}$$

Unindo termos semelhantes, temos:

$$M_q(\wp)\frac{d}{d\wp}\left(M_q(\wp)\frac{d}{d\wp}\langle\Psi|\wp\rangle\right) = \frac{2}{m\omega^2\hbar^2}\left(\frac{\wp^2}{2m} - E\right)\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{67}$$

Mas, lembrando que $\wp = \wp(K)$, de onde deduzimos que:

$$\frac{dK(\wp)}{d\wp} = M_q^{-1}(\wp). \tag{68}$$

Portanto, podemos propor a seguinte mudança de coordenadas:

$$d\wp = M_q(\wp)dK. \tag{69}$$

Tomando a equação (69), na equação (67), temos que:

$$\frac{d}{dK}\left(\frac{d}{dK}\langle\Psi|\wp\rangle\right)=\frac{2}{m\omega^2\hbar^2}\left(\frac{\wp^2(K)}{2m}-E\right)\langle\Psi|\wp\rangle. \tag{70}$$

Portanto:

$$\frac{d^2}{dK^2}\langle\Psi|\wp\rangle-\frac{2}{m\omega^2\hbar^2}\left(\frac{\wp^2(K)}{2m}-E\right)\langle\Psi|\wp\rangle=0. \tag{71}$$

Mas, temos que:

$$\frac{d^2}{dK^2}\langle\Psi|\wp\rangle+V\langle\Psi|\wp\rangle=0. \tag{72}$$

Onde, V é o potencial efetivo, dado por:

$$V=\frac{2}{m\omega^2\hbar^2}\left(E-\frac{\wp^2(K)}{2m}\right). \tag{73}$$

A equação (72), é conhecida na literatura como pendulo quântico, e possui aplicação em dinâmica molecular, este resultado é análogo ao apresentado por (Petruzziello, 2020). É importante perceber que para cada transformação $\wp(K)$, existirá um potencial efetivo diferente. A solução mais geral do pêndulo quântico, pode ser escrita como uma superposição de funções de Mathieu não periódicas (GRADSHTEYN; RYZHIK, 1980). Mas, os valores dos níveis de energia discretos, que surgem de tal estudo, não podem ser encontrados analiticamente (CIFTCI; KISOGLU, 2015). Apesar disso, o problema pode ser resolvido numericamente, mais detalhes podem ser vistos em (BAKER, 2002).

4.4 O COMPRIMENTO MÍNIMO E O MOMENTO MÁXIMO

Fisicamente, esperamos que a existência de um comprimento mínimo para medidas de posição, nos leve a um momento máximo K_{max}, ou seja, deve existir uma relação não linear entre $\hat{\wp}$ e $\hat{K}$ (Nouicer, 2007), (Hossenfelder, 2006), tal que para energias da ordem da energia de Planck, exista um corte:

$$\lim_{\wp\to\pm\infty} K(\wp)=\pm K_{max}. \tag{74}$$

E para baixas energias, devemos recuperar a mecânica quântica:

$$\lim_{q\to 0}\hat{K}(\wp)=K(p)=p. \tag{75}$$

Considere agora o seguinte cálculo:

$$\langle x|x'\rangle=\langle x|\hat{1}|x'\rangle. \tag{76}$$

Mas, temos que:

$$\hat{1}=\int_{-\infty}^{\infty}d\wp|\wp\rangle\langle\wp|M_q^{-1}(\wp). \tag{77}$$

Substituindo a equação (77), na equação (76), temos que:

$$\langle x|x'\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}d\wp M_q^{-1}(\wp)\langle x|\wp\rangle\langle\wp|x'\rangle. \tag{78}$$

Lembrando das relações:

$$d\wp = M_q(\wp)dK, \tag{79}$$

$$\langle x|\wp\rangle = Ce^{-i\frac{xK}{\hbar}}. \tag{80}$$

Substituindo as equações (79) e (80), na equação (78), e utilizando o limite dado pela equação (74), vemos que:

$$\langle x|x'\rangle = |C|^2 \int_{-K_{max}}^{K_{max}} dKe^{-i\frac{K}{\hbar}(x-x')}. \tag{81}$$

Assim, resolvendo a integral, temos que:

$$\langle x|x'\rangle = \frac{2|C|^2\hbar}{(x-x')} sen\left[\frac{K_{max}}{\hbar}(x-x')\right]. \tag{82}$$

Onde, a constante de normalização pode ser calculada impondo que:

$$\langle x|x\rangle = |C|^2 \int_{-K_{max}}^{K_{max}} dK = 1. \tag{83}$$

Portanto, a constante de normalização é:

$$|C|^2 = \frac{1}{2K_{max}}. \tag{84}$$

Ou seja, temos que o produto entre vetores de posição na mecânica quântica com comprimento mínimo, será dado por:

$$\langle x|x'\rangle = \frac{1}{\left[\frac{K_{max}}{\hbar}(x-x')\right]} sen\left[\frac{K_{max}}{\hbar}(x-x')\right]. \tag{85}$$

Note, que no limite de x tendendo a x', temos:

$$\lim_{x\to x'} \langle x|x'\rangle = \langle x|x\rangle = \lim_{x\to x'} \frac{sen\left[\frac{K_{max}}{\hbar}(x-x')\right]}{\left[\frac{K_{max}}{\hbar}(x-x')\right]} = 1. \tag{86}$$

Mas, da equação (85), vemos que os vetores do espaço só são ortogonais numa rede dada por:

$$\frac{K_{max}}{\hbar}(x-x') = n\pi. \tag{87}$$

Mas, por hipótese o comprimento mínimo entre duas medidas consecutivas de posição é:

$$x - x' = q. \tag{88}$$

Portanto, a partir da equação (88) e da equação (87), concluímos que:

$$q = n\pi\frac{\hbar}{K_{max}}. \tag{89}$$

Onde, n é um numero inteiro e, K_{max} é o momento máximo. Contudo, podemos fazer uma superestimativa para o momento máximo de uma partícula, e dizer que este vem por $K_{max} = m.c$. Uma solução interessante para a equação (89), é quando o comprimento de onda Compton, é igual ao seu raio de Schwarzschild:

$$\frac{h}{m.c} = \frac{2Gm}{c^2}. \tag{90}$$

Que é um limite teórico, onde esperamos que efeitos quânticos se misturem aos efeitos relativísticos, da equação (90), vemos que $m = \sqrt{\pi} m_p$. Onde m_p, é a massa de Planck, lembrando que $K_{max} = m.c$, vemos que a equação (89), fica dada por:

$$q = n\sqrt{\pi} l_p. \tag{91}$$

Ou seja, existe uma quantização para que os vetores de estado no espaço de posição sejam ortogonais e formem uma base, que vem dada pela equação (91), onde n é um inteiro. Assim vemos que o comprimento mínimo para medidas de distancia se dá quando tomamos dois $n's$ consecutivos, ou seja:

$$q = \sqrt{\pi} l_p. \tag{92}$$

Devemos observar, que para chegarmos a este resultado. postulamos que o comprimento de Compton é igual ao raio de Schwarzschild, contudo a solução mais geral vem dada pela equação (89).

5 CONCLUSÃO

No século 5 antes de Cristo, Demócrito postulou que a matéria era constituída por entes indivisíveis, os átomos. Atualmente, sabemos que a matéria é constituída por átomos, porém estes quando observados mais de perto se subdividem em prótons e nêutrons, que por sua vez se subdividem em quarks e glúons. Mas será que existe um limite além do qual não poderemos mais experimentar! E se existir, seria este limite um princípio fundamental, ou uma limitação do próprio experimento? Talvez a resposta desta pergunta esteja associada a própria estrutura do espaço, a existência de um "átomo" de espaço, um comprimento mínimo para medidas de posição. Como vimos, supor a existência de um comprimento mínimo para medidas de posição q, implica que as derivadas espaciais não poderão ser realizadas conforme o habitual, pois o limite de Δx tendendo a zero, deixa de fazer sentido. A partir deste argumento postulamos que a existência do comprimento mínimo q, no espaço das posições x, perturba a natureza do momento canonicamente conjugado p, de modo que ele seja transformado em um novo momento $\wp$, e a relação de comutação entre $\hat{\wp}$ e o operador de posição $\hat{x}$, seja dada por:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \hat{M}_q(\hat{\wp}).$$

Onde, $\hat{M}_q(\wp)$ é o operador de translações mínimas, que está intimamente ligado ao comprimento mínimo do espaço q. Contudo, podemos definir, um operador $\hat{K}(\hat{\wp})$, tal que:

$$[\hat{x}, \hat{K}(\hat{\wp})] = i\hbar.$$

E mostrar que para cada escolha de $\hat{M}_q(\hat{\wp})$, existe um $\hat{K}(\hat{\wp})$ diferente, desde que:

$$\frac{\partial K(\wp)}{\partial \wp} = M_q^{-1}(\wp).$$

Onde, identificamos $\hat{K}$ como o operador de momento canônico na presença do comprimento mínimo. Mostramos que a mecânica quântica com comprimento mínimo, pode ser vista como uma transformação canônica dada por:

$$F_2 = k(\wp).x + F(\wp, t),$$

$$k = k(\wp),$$

$$\chi = M_q^{-1}(\wp).x + \frac{\partial}{\partial \wp}\{F(\wp, t)\}.$$

Ilustramos alguns modelos de mecânica quântica com comprimento mínimo, como o modelo de (Nouicer, 2007), dado por:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar e^{\beta.\wp^2}.$$

O modelo de (Pedram, 2012), dado por:

$$[\hat{x}, \hat{\wp}] = i\hbar \frac{1}{1 - \beta\wp^2}.$$

O modelo de (Petruzziello, 2020), dado por:

$$[x, \wp] = i\hbar\sqrt{1 - 2\beta\wp^2}.$$

E por fim o modelo de (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), dado por:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{\wp}^2).$$

Calculamos a incerteza mínima para medidas de posição para o modelo de (KEMPF; MANGANO; MANN, 1995), obtendo o valor:

$$\langle(\Delta\hat{x})\rangle = q.$$

Que é compatível com nossa hipótese inicial. Discutimos brevemente o oscilador harmônico. E por fim, vimos que os vetores de estado no espaço de posição, só são ortogonais numa rede dada por:

$$q = n\pi \frac{\hbar}{K_{max}}.$$

Onde, n é um número inteiro, e o momento máximo K_{max} vai depender do modelo adotado e será dado em função de $\beta(q)$, ou seja, cada modelo de álgebra deformada por $\hat{M}_q$, apresentará um momento máximo teórico diferente. Porém, consideramos como uma superestimativa, quando a relatividade se mistura à quântica, o caso em que o comprimento de Compton é igual ao raio de Schwarzschild, mostramos que:

$$q = \sqrt{\pi} l_p.$$

Onde, l_p é o comprimento de Planck. Contudo, a introdução de um comprimento mínimo universal, é conflitante até mesmo com a Teoria de Relatividade Restrita. Imagine um objeto, em repouso em relação a um referencial S, apresente um comprimento próprio mínimo q, e seja S' um referencial que se move uniformemente em relação a S. Assim, quando observamos o objeto a partir de S', devido ao efeito da contração de Lorentz, mediremos um comprimento menor que q. Contudo, como pode ser visto em (Amelino-Camelia; Ahluwalia, 2002), podemos acrescentar um terceiro postulado para a relatividade restrita, o de que existe um comprimento mínimo, para o qual todos os observadores inerciais medem o mesmo valor q, esta teoria é conhecida como Relatividade Duplamente Especial, pois além da velocidade da luz c, ela contém um comprimento mínimo q universal. Portanto a perspectiva para o futuro desta pesquisa é elaborar um modelo consistente com a teoria da relatividade restrita.

REFERÊNCIAS

Adler, R. J. Six easy roads to the Planck scale. **American Journal of Physics**, v. 78, n. 9, p. 925–932, set. 2010.

Adler, R. J.; Chen, P.; Santiago, D. I. The Generalized Uncertainty Principle and Black Hole Remnants. **General Relativity and Gravitation**, v. 33, n. 12, p. 2101–2108, dez. 2001.

Amelino-Camelia, G.; Ahluwalia, D. V. Relativity in Spacetimes with Short-Distance Structure Governed by an Observer-Independent (Planckian) Length Scale. **International Journal of Modern Physics D**, v. 11, n. 1, p. 35–59, jan. 2002.

BAKER, G. L. The quantum pendulum: Small and large. **American Journal of Physics**, v. 70, p. 525–531, 2002.

Bojowald, M.; Kempf, A. Generalized uncertainty principles and localization of a particle in discrete space. **Physical Review D**, v. 86, n. 8, p. 085017, out. 2012.

Buoninfante, L. et al. Phenomenology of GUP stars. **European Physical Journal C**, v. 80, n. 9, p. 853, set. 2020.

Capozziello, S.; Lambiase, G.; Scarpetta, G. Generalized Uncertainty Principle from Quantum Geometry. **arXiv e-prints**, p. gr–qc/9910017, out. 1999.

CIFTCI, H.; KISOGLU, H. F. **Application of Asymptotic Iteration Method (AIM) to a Deformed Well Problem**. 2015.

Das, S.; Pramanik, S. Path integral for nonrelativistic generalized uncertainty principle corrected Hamiltonian. **Physical Review D**, v. 86, n. 8, p. 085004, out. 2012.

Das, S.; Vagenas, E. C. Universality of Quantum Gravity Corrections. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 22, p. 221301, nov. 2008.

DERIGLAZOV, A. **Formalismo Hamiltoniano**. São Paulo, SP - Brasil: livraria da Física, 2009.

Garay, L. J. Quantum Gravity and Minimum Length. **International Journal of Modern Physics A**, v. 10, n. 2, p. 145–165, jan. 1995.

Giddings, S. B. Is String Theory a Theory of Quantum Gravity? **Foundations of Physics**, v. 43, n. 1, p. 115–139, jan. 2013.

GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. Hoboken: Prentice Hall, 2002.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. New York: Academic, 1980.

Hassanabadi, H.; Maghsoodi, E.; Chung, W. S. Analysis of black hole thermodynamics with a new higher order generalized uncertainty principle. **European Physical Journal C**, v. 79, n. 4, p. 358, abr. 2019.

HEISENBERG, W. The universal length appearing in the theory of elementary particles. **Annals Phys.**, v. 32, p. 20–33, 1938.

Hossenfelder, S. Interpretation of quantum field theories with a minimal length scale. **Physical Review D**, v. 73, n. 10, p. 105013, maio 2006.

Hossenfelder, S. Minimal Length Scale Scenarios for Quantum Gravity. **Living Reviews in Relativity**, v. 16, n. 1, p. 2, jan. 2013.

Jizba, P.; Kleinert, H.; Scardigli, F. Uncertainty relation on a world crystal and its applications to micro black holes. **Physical Review D**, v. 81, n. 8, p. 084030, abr. 2010.

Kanazawa, T. et al. Noncommutative Schwarzschild geometry and generalized uncertainty principle. **European Physical Journal C**, v. 79, n. 2, p. 95, fev. 2019.

Karolyhazy, F. Gravitation and quantum mechanics of macroscopic objects. **Nuovo Cimento A Serie**, v. 42, n. 2, p. 390–402, mar. 1966.

Kempf, A. Non-pointlike particles in harmonic oscillators. **Journal of Physics A Mathematical General**, v. 30, n. 6, p. 2093–2101, mar. 1997.

KEMPF, A.; MANGANO, G.; MANN, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 52, p. 1108–1118, Jul 1995. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1108>.

LANDAU, E. L. L. **Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Vol. 3**. Oxford, Oxfordshire - Inglaterra: Pergamon Press, 1958.

LANDAU, E. L. L. **Mechanics. Vol. 1**. Oxford, Oxfordshire - Inglaterra: Pergamon Press, 1960.

Luciano, G. G.; Petruzziello, L. GUP parameter from maximal acceleration. **European Physical Journal C**, v. 79, n. 3, p. 283, mar. 2019.

Nouicer, K. Quantum-corrected black hole thermodynamics to all orders in the Planck length. **Physics Letters B**, v. 646, n. 2-3, p. 63–71, mar. 2007.

Ökcü, Ö.; Corda, C.; Aydiner, E. Modified Friedmann equations from DSR-GUP. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 129, n. 5, p. 50002, mar. 2020.

Ong, Y. C. Generalized uncertainty principle, black holes, and white dwarfs: a tale of two infinities. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2018, n. 9, p. 015, set. 2018.

Pedram, P. A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum. **Physics Letters B**, v. 714, n. 2-5, p. 317–323, ago. 2012.

Petruzziello, L. Generalized uncertainty principle with maximal observable momentum and no minimal length indeterminacy. **arXiv e-prints**, p. arXiv:2010.05896, out. 2020.

Saghafi, S.; Nozari, K.; Kamali, A. D. Black hole production in the presence of a maximal momentum in horizon wave function formalism. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, v. 16, n. 12, p. 1950183–268, jan. 2019.

SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Londres: Pearson Education, 1994.

Scardigli, F. The deformation parameter of the generalized uncertainty principle. In: **Journal of Physics Conference Series**. [S.l.: s.n.], 2019. (Journal of Physics Conference Series, v. 1275), p. 012004.

Scardigli, F.; Lambiase, G.; Vagenas, E. C. GUP parameter from quantum corrections to the Newtonian potential. **Physics Letters B**, v. 767, p. 242–246, abr. 2017.

Shababi, H.; Chung, W. S. A new type of GUP with commuting coordinates. **Modern Physics Letters A**, v. 35, n. 6, p. 2050018, fev. 2020.

Tawfik, A.; Diab, A. Generalized uncertainty principle: Approaches and applications. **International Journal of Modern Physics D**, v. 23, n. 12, p. 1430025–173, nov. 2014.

Valtancoli, P. Path integral and noncommutative Poisson brackets. **Journal of Mathematical Physics**, v. 56, n. 6, p. 063501, jun. 2015.

VENEZIANO, G. A stringy nature needs just two constants. **Europhysics Letters (EPL)**, IOP Publishing, v. 2, n. 3, p. 199–204, aug 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/2/3/006>.

Xiang, L.; Wen, X. Q. A heuristic analysis of black hole thermodynamics with generalized uncertainty principle. **Journal of High Energy Physics**, v. 2009, n. 10, p. 046, out. 2009.