I)

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-T.002/93

TEORIA DE GAUGE GENERALIZADA PARA O GRUPO DAS TRANSLAÇÕES

Pedro Zambianchi Junior

Orientador

Prof.Dr. José Geraldo Pereira

Janeiro 1993

Aos meus pais

Pedro Zambianchi

Therezinha Pavan Zambianchi

e à

Lilian.

AGRADECIMENTOS

Gostaria aqui de expressar meus agradecimentos às pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esse trabalho fosse realizado.

- Em primeiro lugar, sou muito grato ao Prof. José Geraldo Pereira por ter me aceito como seu aluno no pouco tempo que nos restava para iniciar uma tese, por tudo o que aprendi com ele e pela paciência demonstrada nos momentos difíceis.

- A todos os usuários da sala de cálculo, em especial à Profa. Cristina, ao Prof. Lauro, à Hatsumi, ao Ricardo, ao Airton Eiras, ao Fernando Mori e ao Prof. Frank, sem os quais as dificuldades para a confecção dessa tese seriam multiplicadas.

- Ao Prof. Ariel Caticha, pela sua amizade e sabedoria que me marcaram profundamente. Mesmo longe, sua presença se faz sentir.

- À Karen R. Paiva, pelos momentos que passamos juntos.

- À CAPES, pelo apoio financeiro.

- Enfim, a todos que, à seu jeito, contribuíram para esse trabalho.

" Pode-se afirmar que o eterno mistério
do mundo é sua compreensibilidade ".
Albert Einstein.

ÍNDICE

Resumo

Após um breve estudo das teorias de gauge, introduzimos um modelo de gauge para a gravitação baseado no grupo das translações. Esse modelo, no limite de campos fracos, leva ao potencial gravitacional clássico de Newton. A generalização dessa teoria vem a seguir, no estilo feito por Podolsky para a eletrodinâmica. O modelo de gauge generalizado para as translações dá origem a um potencial gravitacional que, além de conter um termo newtoniano, apresenta também um termo do tipo de Yukawa. Tal generalização necessita de um parâmetro livre que, conjectura-se, pode ter origem numa teoria mais completa, baseada no grupo de de Sitter, que também apresenta um parâmetro livre.

Finalmente, analisamos o uso desse potencial como uma possível explicação alternativa para o problema da massa faltante em galáxias e em aglomerados de galáxias.

Abstract

After a brief study of gauge theories, we introduce a gauge model for gravitation based on the translation group. By taking the weak field approximation, it is shown that this model leads to a newtonian potential. The generalized version of this theory follows, in analogy with the generalization proposed by Podolsky for the electrodynamics. This generalized gauge model gives raise, besides to the newtonian potential, to a Yukawa term. Such a generalization requires a free parameter, and it is conjectured that its origin may be related to a more complete theory based on the de Sitter group, which also presents a free parameter. Finally, the application of the resulting potential as an alternative explanation for the missing mass problem in spiral galaxies, as well as in clusters of galaxies, is provided.

INTRODUÇÃO

Das quatro interações fundamentais da Natureza, três delas (eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca) são descritas com sucesso em termos de teorias de gauge. A única interação que, até agora, não pode ser desenvolvida satisfatoriamente dentro desse contexto é a gravitação. Sendo assim, o esforço para se formular uma teoria de gauge para a gravitação, e dessa forma descrever todas as interações fundamentais do Universo dentro de um único formalismo tem sido um sonho de muitos pesquisadores nas últimas décadas [22].

A descrição mais satisfatória da gravitação, até o momento, é feita pela teoria da relatividade geral (TRG), formulada por A. Einstein em 1915. Essa teoria situa a gravitação num contexto geométrico, não sendo uma teoria de gauge. Existe um diferença fundamental entre a TRG e as teorias de gauge para a gravitação, quanto à interpretação da interação gravitacional. Enquanto na TRG um corpo de massa M (e portanto seu campo gravitacional associado) *curva* o espaço-tempo ao seu redor fazendo com que corpos ao redor sigam trajetórias "naturais" (geodésicas) nesse "background" curvo, nas teorias de gauge para a gravitação o espaço-tempo é sempre plano e as interações entre as massas ocorrem através da ação à distância do *campo* gravitacional (ou através da troca de grávitons, no caso quântico). Em outras palavras, o campo é o mediador das interações entre os corpos.

Adotando o ponto de vista das teorias de gauge, o objetivo desse trabalho será a construção de um modelo alternativo para a gravitação baseado numa teoria de gauge para o grupo das translações. Com essa finalidade, dividiremos a apresentação do trabalho em quatro partes: na primeira, faremos um breve estudo dos fundamentos básicos das teorias de Yang-Mills [1,2]. Na segunda, utilizando o grupo das translações, construiremos um modelo de gauge para a gravitação [16,17]. Na terceira, desenvolveremos uma teoria de gauge generalizada para o grupo das translações, em analogia com a generalização da eletrodinâmica clássica introduzida por Podolsky [7]. A razão principal de tal constrição é que, como veremos, no limite de campo fraco essa teoria leva a um potencial gravitacional dado por um potencial newtoniano mais um termo de Yukawa, o qual pode ter implicações astrofísicas e cosmológicas importantes. Finalmente, na quarta parte, discutiremos a aplicação desse potencial aos problemas do espectro de rotações de galáxias [19], e do movimento de aglomerados de galáxias [20]. Esses dois problemas são usualmente explicados mediante a suposição da existência de matéria escura nesses objetos. Entretanto, considerando-se a ausência, até agora, de evidências diretas (detecção) de sua existência, e levando-se em conta as dificuldades crescentes que o conceito de matéria escura vem sofrendo ultimamente [10], pretendemos através do nosso modelo apresentar uma explicação alternativa para o problema da massa faltante do Universo, pelo menos no que diz respeito à galáxias e aglomerados de galáxias.

A motivação principal desse trabalho reside no fato da generalização introduzida por Podolsky exigir a presença de um parâmetro livre com dimensão de comprimento . Todos os modelos que descrevem a interação gravitacional já trazem em seu bojo o comprimento de Planck, um parâmetro relacionado à constante gravitacional de Newton, e que por essa razão não poderia ser utilizado para o propósito acima. Entretanto, o grupo de de Sitter possui um outro parâmetro disponível, um comprimento relacionado à curvatura (constante) do espaço de de Sitter [18], o qual denominaremos comprimento de de Sitter. Considerando-se que uma teoria de gauge para as translações se aproxima, no caso do comprimento de de Sitter ser muito grande, com o setor não-Lorentz de uma teoria de gauge para o grupo de de Sitter, podemos considerar o nosso modelo originado do setor não-Lorentz de uma teoria de gauge *generalizada* para o grupo de de Sitter, tomada no mesmo limite anterior, com o comprimento de de Sitter desempenhando o papel de parâmetro da generalização de Podolsky. É dentro desse espírito que deve ser encarado o modelo a ser desenvolvido nesse trabalho, pois uma teoria de gauge para a gravitação deve, naturalmente, incluir outras simetrias além da translação .

CAPÍTULO I

ESTUDO GERAL DAS TEORIAS DE GAUGE

1- Teoria dos Fibrados

As teorias de gauge possuem uma história interessante, no que diz respeito ao seu surgimento e desenvolvimento. Inicialmente elas foram propostas e utilizadas pelos físicos, que se basearam no tipo de invariância que aparece na teoria eletromagnética. Posteriormente os matemáticos criaram o conceito de conexões em espaços fibrados,cuja teoria foi somente formalizada por volta de 1950 [3]. Essa era uma construção puramente matemática, não havendo por parte dos matemáticos a preocupação de uma possível relação entre os espaços fibrados (ou simplesmente, fibrados) e o mundo físico. Para surpresa de todos, entretanto, no início da década de 70, descobriu-se que a teoria matemática das conexões em feixes fibrados era idêntica à teoria dos campos de gauge, passando assim a teoria dos matemáticos a ser de grande interesse para os físicos.

Apresentamos, no que se segue, uma breve descrição da teoria dos espaços fibrados [21].

Definição 1: Feixe fibrado principal.

Seja M uma variedade e G um grupo de Lie. Um feixe fibrado principal sobre M com grupo G, consiste de uma variedade P e uma ação de G sobre P, satisfazendo as seguintes condições:

a) G age em P à direita, ou seja, existe R tal que

$$R : P \times \mathrm{G} \to P$$

$$(p, g) \to R(p, g)$$

com $R(p,g) \equiv pg = R_g p$

b) M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência induzida por G isto é:

$$M = P/\mathrm{G}.$$

c) P é localmente trivial, isto é, qualquer $x \in M$ possui uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo a $U \times \mathrm{G}$

$$\pi^{-1} \approx U \times \mathrm{G}.$$

O difeomorfismo, chamado de trivialização local, é dado por

$$f_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{G}$$

$$p \to f_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p))$$

onde φ é uma aplicação de $\pi^{-1}(U)$ em G, satisfazendo

$$\varphi(p,g) = \varphi(p)g\,,\; p \in \pi^{-1}(U)\, e\, g \in \mathrm{G}$$

O espaço F_x definido por $\pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade de P, chamada fibra *sobre* x, e para qualquer $x \in M$, F_x é homeomorfa ao espaço F, chamado fibra típica. Pictoricamente,

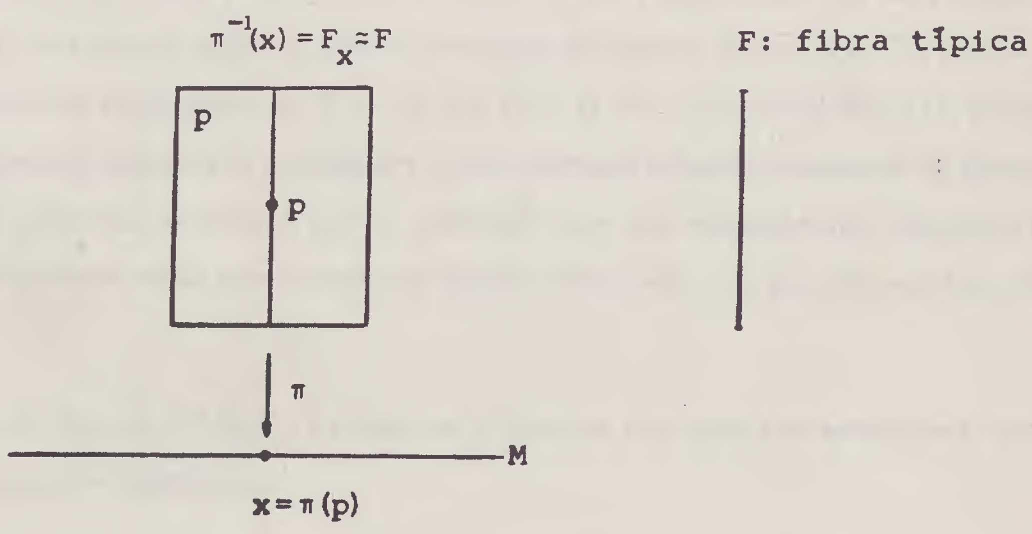

figura 1

Reciprocamente, dado $p \in \pi^{-1}(x)$, então $\pi^{-1}(x) = \{pg/g \in G\}$ é a fibra *por* p; a fibra é difeomorfa ao grupo, uma vez que

$$f_U : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times G$$

é um difeomorfismo. No caso em que a fibra é difeomorfa a um grupo de Lie, o fibrado é chamado de ***fibrado principal*** .

Definição 2 - Fibrado Associado.

Seja M uma variedade com uma vizinhança U em torno do ponto x ($x \in M$), com grupo de simetria G e tendo P como fibrado principal. As funções de transição T (ver pág. 10) atuam nas fibras de P.

O fibrado associado $\hat{P}$ ao fibrado principal P é o espaço sobre M, com a mesma vizinhança U em torno do ponto x , mesmo conjunto de funções de transição T e mesmo grupo G mas trocando-se as fibras de P por G (ou seja, G são as próprias fibras) e permitindo que G opere nele mesmo por translações (como veremos adiante, os campos de gauge estão associados ao fibrado principal, onde a variedade base é o espaço-tempo, enquanto que os campos de matéria estão relacionados ao fibrado associado, que por sua vez é um fibrado vetorial).

Um feixe fibrado P (M, G) é trivial, se e somente se o grupo de estrutura G tiver um único elemento (a identidade).

A aplicação R, introduzida na definição 1, permite a passagem de um ponto a outro sobre a fibra, isto é, ela preserva a fibra. Graficamente,

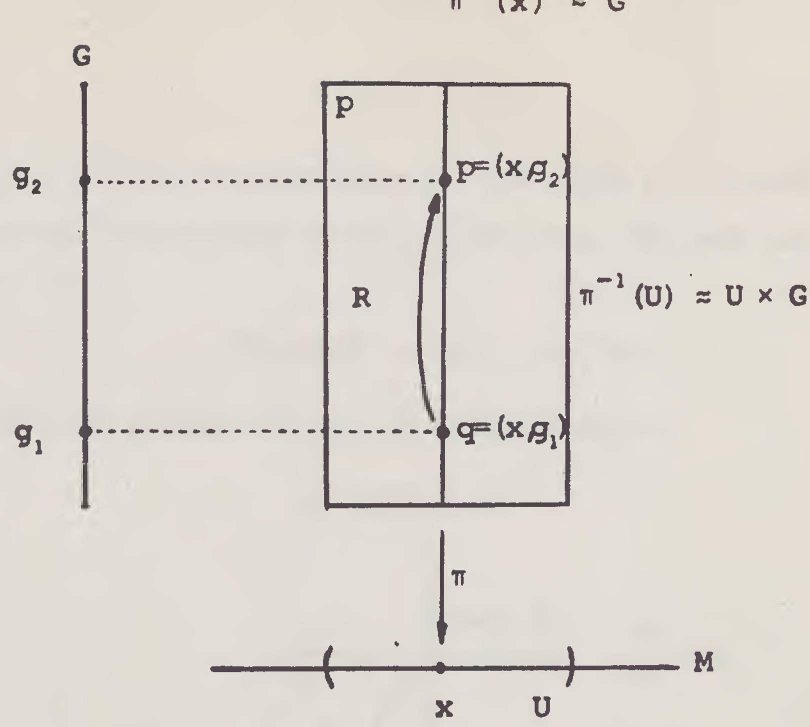

figura 2

A aplicação R é tal que

$$R_g q = (x, g_1)g = (x, g_1 g) = p$$

isto é, $g_2 = g_1 g$

Definição 3 - Secção local

Uma secção local de um fibrado P (M, G) é uma aplicação diferenciável

$$s_U : U \to \pi^{-1}(U)$$

$$x \to f_U^{-1}(x, g) \qquad (I.1)$$

tal que

$$\pi . s_U(x) = X$$

sendo U um aberto de M.

Como já vimos, num fibrado qualquer P, pode-se definir uma secção local, dada pela equação (I.1), a qual é chamada de secção por g, e que denotaremos por s_U^g. No caso em que $g = e$, onde e é o elemento identidade de G, a secção é dita trivial. A aplicação R, então, nada mais faz do que passar de uma secção por g_1, $s_U^{g_1}$, para uma outra secção por g_2, $s_U^{g_2}$, isto é,

$$s_U^{g_2} = R s_U^{g_1} \quad onde \quad g = g_1^{-1} g_2$$

Graficamente esta passagem é ilustrada na figura abaixo

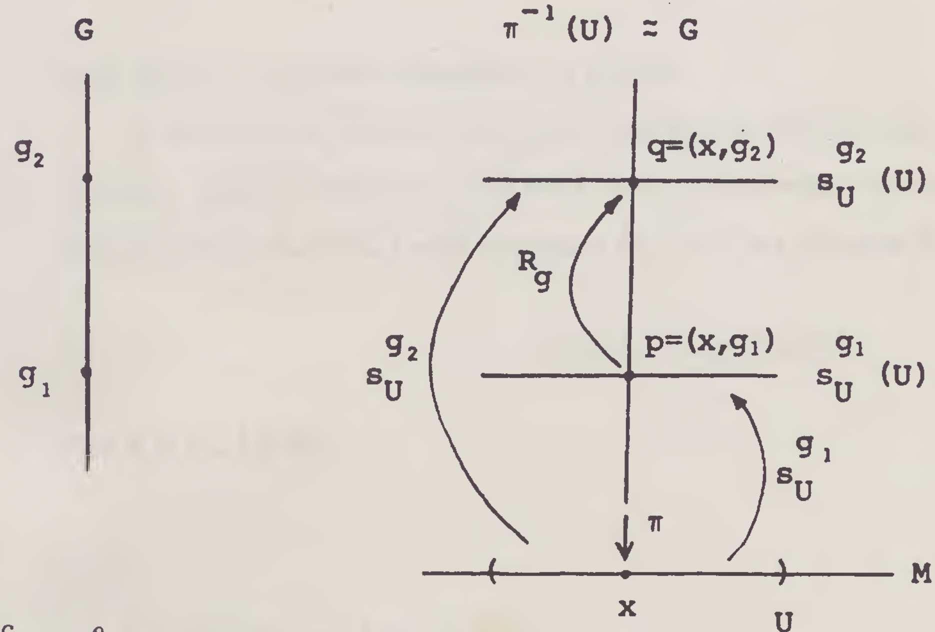

figura 3

Discutiremos agora os efeitos de uma mudança de sistema local de coordenadas (SLC) sobre uma fibra. Uma secção $s_a^e(x)$, tomada numa carta U_a , pode ser escrita como

$$s_a^e = p' = (x, e). \tag{I.2}$$

Como o grupo age sobre a fibra, vamos aplicar o elemento $g = \varphi_a(p)$ *em* s_a^e, obtendo-se s_a^g, isto é

$$p \equiv s_a^g(x) = s_a^e g = [s_a^e \varphi_a(p)](x). \tag{I.3}$$

Em outra carta U_b, com $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, temos

$$p \equiv s_b^g(x) = s_b^e g = [s_b^e \varphi_b(p)](x). \tag{I.4}$$

Comparando-se as expressões (I.3) e (I.4), obtemos

$$s_b^e \varphi_b(p) = s_a^e \varphi_a(p),$$

ou equivalentemente,

$$s_b^c = s_a^c \varphi_a(p)\varphi_b^{-1}(p) \equiv s_a^c T_{ab}(x).$$

A aplicação $T_{ab}(x)$ é chamada de *função de transição.* Ela descreve o efeito de uma mudança de SLC sobre a fibra. Notamos que $T_{ab}(x)$ é um elemento do grupo, pois

$$T_{ab} = \varphi_a(p)\varphi_b^{-1}(p)$$

onde $\varphi_a(p)$ e $\varphi_b(p)$ são elementos do grupo.

O conjunto de cartas $\{U_a\}$ forma um espaço de recobrimento de M, e as funções de transição $T_{ab}(x)$ fornecem a maneira como uma secção se transforma quando se realiza uma mudança da carta (uma mudança de SLC). As funções $T_{ab}(x)$ satisfazem a condição:

$$T_{ab}(x) = T_{ac}(x)T_{cb}(x)$$

com $x \in U_a, U_b, U_c$.

2 - Teorias de Gauge [1]

2.1 Simetrias de gauge

A idéia por trás das teorias de gauge é preservar a invariância da lagrangeana associada a um campo (e consequentemente a covariância das equações de campo) mesmo quando os parâmetros do grupo de simetria da teoria de gauge em questão possam variar localmente no espaço-tempo. Nesse procedimento, somos obrigados a introduzir um novo campo - os potenciais de gauge, que através da lagrangeana do sistema , nos dizem como se dá a interação (acoplamento) dos campos em questão; tal acoplamento é chamado de *acoplamento minimal.*

Começaremos o estudo das teorias de gauge pela teoria mais simples, que é o Eletromagnetismo. O termo cinético da lagrangeana que descreve um campo com spin 1/2 é dado por:

$$L_0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma \overleftrightarrow{\partial} \psi = \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \textit{termo de superfície}.$$

Notamos que L_0 é invariante pela transformação de fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \tag{I.5}$$

onde α é uma constante. Se fizermos, agora, α variar arbitrariamente ponto a ponto no espaço-tempo, $\alpha = \alpha(x)$, veremos que a lagrangeana L_0 transforma-se de acordo com

$$L_0 \rightarrow L_0 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) \tag{I.6}$$

e que o segundo termo do lado direito de (I.6) está destruindo a invariância de L_0. Entretanto, se definirmos o novo operador D_μ, chamado de operador ***derivada covariante***, com a propriedade de transformação

$$D_\mu \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \tag{I.7}$$

ou equivalentemente, em linguagem de operadores,

$$D_\mu \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu e^{-i\alpha(x)},$$

então a nova lagrangeana

$$L = \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$$

obtida de L_0 trocando-se ∂_μ por D_μ, fica invariante pela transformação local de fase (I.5). Tal procedimento significa preservar a covariância das equações sob a ação de um grupo de simetria. O grupo responsável pela covariância das equações do eletromagnetismo é o U(1), que é um grupo abeliano. Para que possamos desenvolver todos os cálculos necessários, devemos descobrir a forma explícita de D_μ . Tentemos:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x). \tag{I.8}$$

Então, da condição de covariância

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = \partial_\mu + iA'_\mu(x) = e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + iA_\mu(x))e^{-i\alpha(x)}$$

deduzimos que o potencial $A_\mu(x)$ introduzido em $(I.8)$ deve se transformar de acordo com

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x). \tag{I.9}$$

Portanto, a nova lagrangeana

$$L = \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu(x))\psi = L_0 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(x)$$

fica invariante pelas transformações locais (I.7) e (I.9). Em outras palavras, uma transformação local na fase do campo $\psi(x)$, que pode ser considerada como uma mudança na fibra, equivale ao aparecimento de um campo eletromagnético adicional $A_\mu(x)$. Vemos aqui uma completa analogia com o princípio fraco da equivalência da TRG, onde uma mudança local do sistema de coordenadas resulta no aparecimento de um campo gravitacional extra.

Como as transformações de simetria ocorrem no espaço interno (e não no espaço tempo) as configurações dos campos $\{\psi(x), A_\mu(x)\}$ e $\{e^{i\alpha(x)}\psi(x), A_\mu(x) - i\partial_\mu\alpha(x)\}$ descrevem a mesma situação física, como foi proposto por H. Weyl em 1929. Se a construção da teoria é baseada nesse princípio, então a maneira de construir as equações descritas acima em termos da derivada covariante é a única possível. As transformações (I.5) e (I.9) são as transformações de gauge para o eletromagnetismo. Notamos que a interação entre o campo A_μ e a corrente conservada é da forma $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$.

Precisamos agora de um termo cinético que envolva A_μ e que seja invariante sob a transformação (I.9). É fácil perceber que, definindo

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \qquad ,$$

então a lagrangeana

$$L = -\frac{1}{4}g^{-2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

onde g é uma constante adimensional, satisfaz essa condição . Portanto, a lagrangeana total que descreve a interação do campo eletromagnético (spin 1) com a matéria (spin 1/2) é dada por

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}g^{-2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi \\ &= -\frac{1}{4}g^{-2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \end{aligned} \qquad (I.10)$$

onde a primeira, segunda e terceira parcelas respondem, respectivamente, pelo campo eletromagnético, a matéria e a interação entre estes dois últimos.

Consideremos, a seguir, a lagrangeana de um sistema formado por N campos reais escalares, $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N$:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi.$$

Notamos que ela é invariante por rotações em N dimensões, cuja simetria é dada pelo grupo SO(N). Se Φ for um vetor coluna, então ele se trasnforma de acordo com

$$\Phi \rightarrow \Phi' = R\Phi \quad ,$$

onde R é a matriz de rotação e como $\Phi^T\Phi$ (módulo de Φ) é invariante por SO(N), temos que

$$\Phi'^T\Phi' = \Phi^T\Phi \quad ,$$

ou seja

$$R^T R = RR^T = 1.$$

Procuremos uma representação para R. Sabemos que rotações próprias podem ser escritas como:

$$R = e^{\frac{i}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}},$$

onde ω^{ij} são os parâmetros reais do grupo de rotação e Σ_{ij} são os geradores desse grupo. Para rotações infinitesimais próprias, a transformação de ϕ é dada por

$$\delta\phi = \frac{i}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\phi$$

onde os geradores Σ_{ij} satisfazem a álgebra de Lie

$$[\Sigma_{ij}, \Sigma_{kl}] = i\delta_{ik}\Sigma_{jl} + i\delta_{jl}\Sigma_{ik} - i\delta_{il}\Sigma_{jk} - i\delta_{jk}\Sigma_{il}.$$

Cabe aqui um comentário. Nós derivamos a álgebra de Lie para o grupo SO(N) utilizando as matrizes Σ_{ij}, que agem no vetor Φ N-dimensional. Tais matrizes são reais e antissimétricas. Entretanto, a álgebra de Lie que as matrizas Σ_{ij} satisfazem não as define univocamente, pois existem muitas representações possíveis para o grupo SO(N). A escolhida foi a representação N-dimensional mas poderíamos ter escolhido, por exemplo, a representação adjunta, cuja dimensão coincide com o número de parâmetros do grupo. Neste caso, SO(N) pode ser representado por um tensor de segunda ordem A_{ij} ($A_{ij} = -A_{ji}$). Sendo assim, as transformações ficarão:

$$A \rightarrow A' = RAR^T$$

onde R é a matriz $n \times n$ dada anteriormente. Podemos assim construir uma lagrangeana invariante com os campos escalares A

$$L_F = \frac{1}{4}Tr(\partial_\mu A^T \partial^\mu A).$$

Analisemos agora a lagrangeana para N campos espinoriais com duas componentes

$$L = \frac{1}{2}\psi_L^{\dagger a}\sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_{La} \equiv \frac{1}{2}\psi_L^{\dagger a}\sigma^\mu\partial_\mu\psi_{La} - \frac{1}{2}\partial_\mu\psi_L^{\dagger a}\sigma^\mu\psi_{La}$$

onde ψ_L é a representação espinorial do grupo de Lorentz e σ^i são as matrizes de Pauli e está implícita uma soma em a ($a = 1, 2, ..., N$). Para $a = 1$, já mostramos que a lagrangeana acima é invariante por uma transformação de fase (onde tínhamos ψ e $\bar{\psi}$ ao invés de $\psi_L^\dagger$ e ψ_L , e γ^μ ao invés de σ^μ). Entretanto, para $a \geq 2$, L é invariante por uma simetria muito mais abrangente, dada por

$$\psi_L \rightarrow U\psi_L$$

Se U for uma matriz unitária e independente dos pontos do espaço-tempo, então L permanace invariante pela transformação acima. Neste caso, podemos expressá-la por meio de uma matriz H hermiteana

$$U = e^{iH} \quad ; \quad H = \sum_{A=1}^{N^2-1} \omega^A T^A$$

onde ω^A são os parâmetros reais e T^A são matrizes hermiteanas $n \times n$ com traço nulo que geram o grupo SU(N), e satisfazem a álgebra de Lie [11]

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C,$$

e onde as constantes de estruturs f^{ABC} são reais e totalmente antissimétricas.

2.2 - A Teoria de Yang-Mills

Na seção 2.1 foi mostrado como construir lagrangeanas invariantes quando os parâmetros do grupo de simetria variam localmente. Agora faremos o mesmo, só que para simetrias de Lie não abelianas (campos de Yang-Mills), que representam uma generalização do estudo anterior.

Consideremos a lagrangeana de campos constituídos por N espinores de Dirac

$$L = \bar{\psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a \qquad (I.11)$$

com $a = 1, 2, ..., N$ (somado). Percebemos que esta lagrangeana fica invariante pela transformação

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x),$$

onde

$$U = e^{i\alpha} e^{i\omega^A T^A}$$

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1,$$

e T^A são as $(N^2 - 1)$ matrizes hermiteanas com traço nulo que geram o grupo SU(N). Novamente desejamos generalizar a lagrangeana (I.11) para que ela possua uma invariância local, ou seja, que ela permaneça invariante pelas transformações

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$$

com

$$U(x) = e^{i\alpha(x)} e^{i\omega^A(x)T^A}.$$

Temos que

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial U(x)\psi(x) = [\partial_\mu U(x)]\psi(x) + U(x)\partial_\mu \psi(x) \neq U\partial_\mu \psi,$$

isto é, $\partial_\mu \psi(x)$ não se transforma covariantemente. Portanto, devemos definir um novo operador derivada, que preserve a invariância da lagrangeana. A idéia é a mesma usada na secção 2.1 . Definimos o operador derivada covariante D_μ exigindo que

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow U(x) D_\mu(x)$$

o que equivale a

$$D_\mu \to D'_\mu = U(x) D_\mu U^\dagger(x). \qquad (I.12)$$

Devemos notar que nesse caso D_μ é uma matriz $n \times n$ que, escrita explicitamente, tem a forma

$$[D_\mu]^e_a[\psi(x)]_e \to [U(x)]^b_a[D_\mu]^c_b[\psi(x)]_c.$$

Assim, a lagrangeana

$$L' = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi$$

fica invariante pela ação do grupo SU(N). Devemos descobrir a forma explícita de D_μ. Como antes, tentemos:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x).$$

A simetria apresentada pelos campos de Yang - Mills pode ser associada a qualquer grupo de Lie compacto semisimples, e o campo vetorial $A_\mu(x)$ assume valores na álgebra de Lie deste grupo. Mais especificamente, $A_\mu(x)$ assume valores na representação adjunta desta álgebra. Neste caso,

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x) T^a \qquad (I.13)$$

onde $A^a_\mu(x)$ são os coeficientes que definem $A_\mu(x)$ em relação à base de geradores T^a . Da transformação (I.12) deduzimos que o campo $A_\mu(x)$ se transforma de acordo com

$$A'_\mu(x) = -iU(x)\partial_\mu U^\dagger(x) + U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x). \qquad (I.14)$$

Calculemos, agora, a variação das componentes A^c_μ para uma transformação infinitesimal. Nesse caso

$$U(x) = e^{i\omega^A(x)T^A} \cong 1 + i\omega^A(x) T^A,$$

e substituindo-se na expressão (L.14), encontramos

$$A'_\mu - A_\mu = \delta A_\mu(x) = -T^B \partial_\mu \omega^B + i\omega^B [T^B, A_\mu] + o(\omega^2). \qquad (I.15)$$

Usando-se as propriedades

$$Tr(T^A) = 0, \qquad (I.16)$$

$$Tr(T^A T^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB},$$

que é a condição de normalização e que também define a métrica de Cartan-Killing, e

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C,$$

podemos reescrever (I.15) como

$$\delta A_\mu^C(x) = -\partial_\mu \omega^C(x) - \omega^B(x) A_\mu^D(x) f^{BDC} + o(\omega^2). \qquad (I.17)$$

Percebe-se que a transformação (I.17) independe da representação dos campos de férmions com os quais iniciamos os cálculos, uma vez que $\psi(x)$ não aparece na expressão acima.

A variação (I.17) também pode ser escrita em termos da derivada covariante, cuja forma geral é

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu^B \frac{\delta}{\delta\omega_B}$$

onde $T^B = \delta/\delta\omega_B$ são os geradores infinitesimais das transformações. Usando que

$$\omega^A T^A \equiv \omega \qquad (I.18)$$

e que ω transforma-se covariantemente,

$$\omega \to U\omega U^\dagger,$$

ou seja , $\delta\omega^C = -\omega^B\omega^D f^{BDC}$, obtemos

$$D_\mu\omega = \partial_\mu\omega + i[A_\mu, \omega]. \qquad (I.19)$$

Comparando-se a equação (I.19) com a equação (I.15), concluimos que

$$\delta A_\mu(x) = -D_\mu\omega. \qquad (I.20)$$

Ou seja, uma transformação *infinitesimal* no campo $A_\mu(x)$ se transforma covariantemente, uma vez que ela pode ser escrita em termos da derivada covariante (o mesmo não acontece com a transformação do campo $A_\mu(x)$, onde aparece o termo extra $-iU\partial_\mu U^\dagger$ na sua transformação - equação (I.14)).

A generalização da derivada covariante para uma representação qualquer do grupo G é dada por [2]

$$D_\mu = \partial\mu - \Gamma(A_\mu),$$

onde $\Gamma(A_\mu)$ é uma representação da matriz A_μ que depende do campo sobre o qual age a derivada covariante.

A transformação para os campos $\psi(x)$, em analogia à transformação de fase local na eletrodinâmica, adquire a forma:

$$\psi(x) \to \psi^\zeta(x) = \Gamma[\zeta(x)]\psi(x)$$

onde $\zeta(x)$ é uma função que assume valores no grupo G. A transformação infinitesimal correspondente será:

$$\delta\psi = \Gamma(\zeta)\psi.$$

As configurações $\{\psi(x), A_\mu(x)\}$ e $\{\Gamma[\zeta(x)]\psi(x), A'_\mu(x)\}$ descrevem a mesma situação física; logo, não apenas um conjunto de campos descreve uma situação física, mas toda uma classe de configuração equivalente por transformações de gauge. Em outras palavras, isto implica que no espaço interno não há uma base fixa para a descrição dos campos de matéria ψ. Tal base pode ser introduzida localmente em cada ponto do espaço-tempo, e não há uma razão física para fixar sua posição: a mudança local de base é interpretada como uma mudança dos campos de gauge, como no eletromagnetismo e na gravitação . Com a finalidade de trabalharmos com classes de configurações equivalentes, devemos de alguma maneira parametrizá-la . Na prática isto é obtido impondo-se uma condição extra que elimina certos graus de liberdade. Esta condição adicional é chamada de condição de gauge, ou simplesmente gauge. Os gauges mais comuns são:

$$\Phi_L \equiv \partial_\mu A_\mu = 0 \qquad (I.21a)$$

$$\Phi_C \equiv \partial_k A_k = 0 \qquad (I.21b)$$

$$\Phi_H \equiv A_0 = 0 \qquad (I.21c)$$

$$\Phi_A \equiv A_3 = 0 \qquad (I.21d)$$

conhecidos por gauge de Lorentz, Coulomb, Hamilton e axial, respectivamente. Em geral, o gauge $\Phi(A,\psi;x)$ é uma família de funcionais de A_μ e ψ, para cada x. Dado um x fixo, $\Phi(A,\psi;x)$ é um elemento da álgebra de Lie do grupo G e, assim, o número de gauges independentes coincide com a dimensão do grupo (como nos exemplos (I.21)); além disso, nesses exemplos os gauges são locais, i.e., $\Phi(A,\psi;x)$ depende dos valores de A_μ e ψ nas vizinhanças de x.

Há dois requisitos básicos que devem ser satisfeitos pelas condições de gauge. São eles:

i) o sistema de equações

$$\Phi(A',\psi^\zeta;x)=0 \qquad (I.22)$$

deve apresentar solução única para $\zeta(x)$, fixados A_μ e ψ. Isto significa que em cada conjunto de campos equivalentes, existe de fato um único conjunto $\{A_\mu,\psi\}$ que satisfaz a equação acima. Este conjunto caracteriza a verdadeira situação física.

i i) A equação (I.22) não deve ser muito complicada e deve apresentar uma solução explícita para $\zeta(x)$, pelo menos no contexto da teoria de pertubação. Esta condição, embora menos fundamental, faz com que o gauge tenha uma importância prática.

A equação (I.22), na verdade, é um sistema de equações não lineares para $\zeta(x)$. Para gauges locais, ela é um sistema não linear de equações diferencias parciais, e uma condição necessária para a resolução deste sistema é a não degenerescência do seu jacobiano associado (o sistema deve apresentar solução única).

Para que a lagrangeana permanecesse com uma simetria local pelo grupo SU(N), tivemos que introduzir N^2 campos vetoriais a fim de construir a derivada covariante. Com o objetivo de dar uma maior realidade a esses novos campos, devemos incluir termos cinéticos relativos a eles, sem que a simetria local seja quebrada (trabalharemos com os (N^2-1) campos que surgem da invariância local de SU(N)).

Definindo o operador hermiteano

$$F_{\mu\nu}\equiv -i[D_\mu,D_\nu], \qquad (I.23)$$

vemos que sua lei de transformação é dada por

$$F_{\mu\nu}(x)\rightarrow U(x)F_{\mu\nu}U^\dagger(x),$$

uma vez que D_μ se transforma covariantemente. Substituindo-se a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x)$$

na definição (I.23), obtemos:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]. \qquad (I.24)$$

Assim como A_μ , $F_{\mu\nu}$ também assume valores na álgebra de Lie do grupo :

$$F_{\mu\nu}(x) = F^B_{\mu\nu}(x)T^B \qquad (I.25)$$

onde $F^B_{\mu\nu}$ é dado por

$$F^C_{\mu\nu} = \partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - f^{CEF}A^E A^F. \qquad (I.26)$$

Portanto, o tensor $F_{\mu\nu}$ é a generalização (não abeliana) do tensor do campo eletromagnético. Eles não são todos independentes, pois obedecem a identidade de Bianchi

$$D_\mu F_{\rho\sigma} + D_\rho F_{\sigma\mu} + D_\sigma F_{\mu\rho} = 0,$$

que é uma consequência da identidaade de Jacobi para a derivada covariante. Essas identidades são vínculos puramente cinemáticos, que são trivialmente satisfeitas pelo tensor intensidade de campo.

Finalmente podemos construir a lagrangeana invariante:

$$\begin{aligned} L_{YM} &= -\frac{1}{2g^2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4g^2}F^B_{\mu\nu}F^{\mu\nu B} \qquad (I.27) \end{aligned}$$

que representa uma generalização da lagrangeana de Maxwell. Ressaltamos que L_{YM} não depende da representação de férmions; além disso, para cada função de estrutura f^{ABC} de um grupo de Lie, teremos uma teoria de Yang - Mills associada a esse grupo de Lie.

A partir de (I.27) montamos a ação de Yang - Mills

$$S^{YM} = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \qquad (I.28)$$

a qual pode também ser escrita, em termos dos potenciais, na forma :

$$S^{YM} = -\frac{1}{g^2}\int d^4x[-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^B \partial^\mu A^{\nu B} + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^B \partial^\nu A^{\mu B} \\ + f^{BCD} A_\mu^C A_\nu^D \partial^\mu A^{\nu B} - \frac{1}{4} f^{BCD} f^{BEF} A_\mu^C A_\nu^D A^{\mu E} A^{\nu F}] \tag{I.29}$$

Notamos que os dois primeiros termos de (I.29) são do mesmo tipo que aparecem na lagrangeana de Maxwell, enquanto que os dois últimos mostram que os campos vetoriais A_μ interagem de maneira não trivial, uma vez que esses termos são de terceira e quarta ordem.

A variação da ação nos fornece a equação de movimento para os campos de gauge:

$$\delta S^{YM} = -\frac{1}{g^2}\int d^4x Tr(F_{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}) = 0$$

onde $\delta F^{\mu\nu} = \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}^\nu - \mathcal{A}^\nu \mathcal{A}^\mu$, com $\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}^\nu = \partial^\mu \delta A^\nu + i(\delta A^\mu)A^\nu + iA^\mu \delta A^\nu$. Como $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, obtemos

$$F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu}\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}^\nu.$$

Logo,

$$\delta S^{YM} = -\frac{2}{g^2}\int d^4x Tr[F_{\mu\nu}(\partial^\mu \delta A^\nu + i\delta A^\mu A^\nu + iA^\mu \delta A^\nu)]. \tag{I.30}$$

Integrando-se (I.30) por partes e reagrupando-se os termos de maneira conveniente, obtemos

$$\delta S^{YM} = \frac{2}{g^2}\int d^4x Tr[(\partial^\mu F_{\mu\nu} + i[A^\nu, F_{\mu\nu}])\delta A^\nu] = 0. \tag{I.31}$$

Como δA^ν é arbitrário e o integrando é contínuo, chegamos à equação de movimento para os campos de Yang - Mills:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + i[A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0, \tag{I.32}$$

ou

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{I.33}$$

Podemos definir, a partir da equação de movimento, a auto-corrente conservada j_ν

$$j_\nu = -\partial^\mu F_{\mu\nu} = i[A^\mu, F_{\mu\nu}], \tag{I.34}$$

a qual, pode-se mostrar, corresponde à corrente de Noether obtida canonicamente [1].

A equação (I.33) é a equação de movimento sem fontes externas. Se tivermos uma corrente (fonte) externa J_μ, então a ação adquire o termo

$$\frac{2}{g} \int d^4x Tr(A^\mu J_\mu) \tag{I.35}$$

e a equação de movimento com fontes externas fica

$$D^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu. \tag{I.36}$$

A fim de preservar a covariância da equação acima, impomos que J^μ deve se transformar de acordo com

$$J^\mu \to U J^\mu U^\dagger.$$

Ela também deve ser conservada covariantemente, como consequência da equação de movimento (I.36),

$$D^\mu J_\mu = \partial^\mu J_\mu + i[A^\mu, J_\mu] = 0.$$

A corrente de Noether total, portanto, é dada por

$$\mathcal{J}_\mu = -\partial^\rho F_{\rho\mu} + J_\mu$$

que não é covariante *por uma transformação de gauge*. A lagrangeana de interação (I.35) também não é invariante de gauge. Como J_μ se transforma covariantemente,

$$\delta J^\mu = i[\omega, J^\mu],$$

obtemos, usando (I.20), que sob por uma transformação de gauge

$$\delta \int d^4x Tr(A_\mu J^\mu) = -\int d^4x Tr \partial_\mu \omega J^\mu.$$

Integrando-se por partes, obtemos

$$\delta \int d^4x Tr(A^\mu J_\mu) = \int d^4x Tr(\partial^\mu J_\mu)\omega = 0 \quad se \quad \partial^\mu J_\mu = 0.$$

Ou seja, podemos preservar a invariância se a fonte externa se conservar. No eletromagnetismo, J^μ não se altera por uma transformação de gauge, mas na teoria de Yang-Mills a condição $\partial_\mu J^\mu = 0$ não é covariante (J^μ se transforma covariantemente mas ∂_μ não). Portanto, incluir fontes externas de maneira arbitrária quebra a invariância de gauge. O procedimento a ser seguido é partir de uma lagrangeana para os campos fonte, pois assim estaremos introduzindo um termo dinâmico, ao contrário de simplesmente um termo de acoplamento. Esse procedimento será adotado no próximo capítulo, quando formos tratar de um modelo de gauge para o grupo das translações.

3 - Interpretação Geométrica dos campos de Yang - Mills.[2]

A teoria desenvolvida até aqui possui uma interpretação geométrica muito interessante, quando fazemos uma analogia entre os potenciais de gauge e o símbolo de Christoffel, que aparece no estudo da gravitação. Analogamente à esta grandeza que aparece na TRG, os potenciais de gauge descrevem o transporte paralelo no espaço interno e determinam a curvatura deste espaço

A teoria dos espaços fibrados é a linguagem natural para a descrição desta analogia. Nesta teoria, o conceito de conexão no fibrado principal corresponde ao potencial de gauge.

Os potenciais de gauge determinam um transporte paralelo no seguinte sentido. Seja $\gamma(s)$ uma curva no espaço-tempo, definida pela equação paramétrica:

$$x_\mu = x_\mu(s).$$

O campo vetorial com componentes

$$X_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$$

é tangente à curva $\gamma(s)$ em cada ponto. Dizemos que o campo $\psi(x)$ sofre um transporte paralelo ao longo de $\psi(x)$, se em cada ponto dessa curva

$$D_\mu \psi(x) \mid_{x=x(s)} X_\mu = 0,$$

i.e., a derivada covariante na direção tangencial é nula.

Em geral, o transporte paralelo ao longo de um contorno fechado muda o campo $\psi(x)$. Dado um contorno (paralelogramo) infinitesimal fechado, com vértices nos pontos $(x, x + \Delta_1 x, x + \Delta_1 x + \Delta_2 x, x + \Delta_2 x)$, se a derivada covariante for nula ao longo dessa curva fechada, então a variação total de $\psi(x)$ será

$$\Delta\psi(x) = \Gamma(F_{\mu\nu})\psi(\Delta_1 x_\mu \Delta_2 x_\nu - \Delta_1 x_\nu \Delta_2 x_\mu) \qquad (I.37)$$

com $F_{\mu\nu}$ definido em (I.24).

A relação (I.37) mostra que é natural definir $F_{\mu\nu}$ como sendo a curvatura do espaço interno. Por transformações de gauge, $\Delta\psi(x)$ se altera do mesmo modo que $\psi(x)$. Isto decorre do fato de termos lançado mão somente de derivadas covariantes na construção de $\Delta\psi(x)$. Então, a partir da expressão (I.37) segue que $\Gamma(F_{\mu\nu}(x))$ deve se transformar de acordo com

$$\Gamma(F_{\mu\nu}(x)) \rightarrow \Gamma(\zeta(x))\Gamma(F_{\mu\nu}(x))\Gamma(\zeta^{-1}(x)).$$

Portanto, $F_{\mu\nu}$ deve se transformar da forma

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow \zeta(x)F_{\mu\nu}(x)\zeta^{-1}(x).$$

Se adotarmos a convenção de que $\psi(x)$ é um vetor em relação às transformações de gauge, então $\Gamma(F_{\mu\nu}(x))$ é um tensor de ordem dois, e é conveniente considerar $F_{\mu\nu}(x)$ como um vetor na representação adjunta. Vemos aqui uma perfeita correspondência entre a teoria de Yang-Mills e a TRG: os potenciais $A_\mu(x)$, análogos aos símbolos de Christoffel, e $F_{\mu\nu}(x)$ sendo semelhante ao tensor de curvatura do espaço-tempo. E ainda mais, usando a identidade de Jacobi

$$[[D_\mu, D_\nu], D_\sigma] + permutações\ cíclicas = 0,$$

chegamos à conclusão que

$$D_\sigma F_{\mu\nu}(x) + permutações\ cíclicas = 0$$

onde $D_\sigma F_{\mu\nu}(x) = \partial_\sigma F_{\mu\nu}(x) - [A_\sigma(x), F_{\mu\nu}(x)]$, em analogia com as identidades de Bianchi para a Gravitação. A interpretação de $F_{\mu\nu}(x)$ como sendo a curvatura do espaço interno, sugerida por Fock e Weyl é a maneira mais natural para se efetuar a geometrização do campo eletromagnético. Não obstante, várias tentativas para se relacionar este campo com as propriedades geométricas do espaço-tempo fracassaram.

CAPÍTULO II

UMA TEORIA DE GAUGE PARA O GRUPO DAS TRANSLAÇÕES

Neste capítulo, desenvolveremos uma teoria de gauge para a Gravitação, no estilo seguido por Kibble [16]. Entretanto, adotaremos em nosso modelo o grupo das translações. Dado que uma translação local é, na verdade, uma transformação geral de coordenadas, uma teoria de gauge para as translações, portanto, deve descrever os resultados usuais da TRG [17]. Em seguida, estudaremos o limite de campo fraco desse modelo, o qual como veremos, resulta num potencial newtoniano usual.

Com base no que foi apresentado no capítulo I, iniciaremos nosso estudo introduzindo os potenciais de gauge do modelo

$$B_\mu = B^\alpha_\mu(x)P_\alpha$$

com $P_\alpha = \partial_\alpha$ os geradores infinitesimais do grupo das translações. Esses geradores satisfazem a álgebra de Lie

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0.$$

onde os índices gregos assumem valores de 0 a 3 .

A variedade base para o modelo é o espaço-tempo de Minkowski, com a métrica

$$(+1, -1, -1, -1,).$$

A cada ponto desse espaço, podemos construir um espaço tangente, que é também um espaço de Minkowski, com a métrica dada por

$$(+1, -1, -1, -1).$$

Cada um desses espaços tangentes será a fibra sobre x^μ , sendo o conjunto de todos esses espaços, o espaço fibrado. Note que reservamos a primeira metade do alfabeto grego para representar índices do espaço fibrado, enquanto a segunda metade representa índices do espaço-tempo. É importante observar que nesse formalismo as coordenadas do espaço interno são funções de ponto do espaço-tempo:

$$x^\alpha = x^\alpha(x^\mu).$$

Uma transformação de gauge, representada por uma translação local das coordenadas da fibra será:

$$x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha(x^\mu), \qquad (II.1)$$

onde $a^\alpha(x^\mu)$ é o parâmetro da transformação . Essa é, na verdade, uma *transformação geral de coordenadas*. A transformação infinitesimal correspondente é

$$x'^\alpha - x^\alpha \equiv \delta x^\alpha = \delta a^\alpha, \qquad (II.2)$$

a qual, em termos dos geradores, pode ser escrita na forma:

$$\delta x^\alpha = \delta a^\beta P_\beta x^\alpha. \qquad (II.3)$$

Seja $\phi(x^\mu)$ um campo qualquer. Os geradores P_α atuam nesse campo, uma vez que

$$\phi(x^\mu) = \phi[x^\alpha(x^\mu)].$$

e, por consequência, a transformação infinitesimal de gauge de $\phi(x^\mu)$ é dada por

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha = \delta a^\alpha P_\alpha \phi. \qquad (II.4)$$

Nessa parte chegamos ao ponto fundamental, que é o cálculo da expressão do operador derivada covariante. Na forma geral ele é escrito como:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + B^\alpha{}_\mu \frac{\delta\phi}{\delta a^\alpha}, \qquad (II.5)$$

e com o uso da expressão (II.4), obtemos

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + B_\alpha{}^\mu P_\alpha \phi, \qquad (II.6)$$

ou

$$D_\mu \phi = h^\alpha{}_\mu \partial_\alpha \phi \qquad (II.7)$$

onde $h^\alpha{}_\mu \equiv \partial_\mu x^\alpha + B^\alpha{}_\mu$ é a *tetrada*. Sua inversa é dada por $h_\alpha{}^\nu$, que possui as seguintes propriedades:

$$h^\alpha{}_\mu h_\alpha{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu \quad ; \quad h^\alpha{}_\mu h_\beta{}^\mu = \delta^\alpha{}_\beta .$$

Podemos interpretar a equação (II.7) como uma mudança da base holônoma ∂_α para a base não holônoma D_μ , sendo a tetrada a grandeza que efetua essa mudança.

O passo seguinte é dado pelo cálculo da transformação infinitesimal de gauge para os potenciais $B^\alpha{}_\mu$. Sabemos que

$$D'_\mu = U D_\mu U^\dagger .$$

Usando (II.6), obtemos a lei de transformação

$$B'_\mu = U B_\mu U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger ,$$

com U um elemento dos grupo das translações, dado por

$$U = \exp(a^\alpha P_\alpha).$$

Para uma transformação infinitesimal, $U \simeq 1 + a^\alpha P_\alpha$, e a transformação acima adquire a forma

$$B'^\alpha{}_\mu = B^\alpha{}_\mu - \partial_\mu \delta a^\alpha . \qquad (II.8)$$

Podemos obter agora como as tetradas se transformam por uma mudança de gauge. Da equação (II.8) e da definição da tetrada, concluimos que

$$h'^\alpha{}_\mu = \partial_\mu x'^\alpha + B'^\alpha{}_\mu = \partial_\mu (x^\alpha + \delta a^\alpha) + B^\alpha{}_\mu - \partial_\mu \delta a^\alpha$$

$$= \partial_\mu x^\alpha + B^\alpha{}_\mu = h^\alpha{}_\mu$$

$$\therefore \quad h'^\alpha{}_\mu = h^\alpha{}_\mu$$

ou seja , as tetradas são invariantes pela transformação de gauge.

Para iniciarmos o desenvolvimento da parte dinâmica da teoria, definimos o tensor intensidade do campo de gauge como sendo

$$F^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_\nu B^{\alpha}{}_{\mu}. \qquad (II.9)$$

Com esses ingredientes, podemos construir a lagrangeana dos campos de gauge:

$$L_B = -h\frac{a^{-2}}{4g^2}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F_{\alpha}{}^{\mu\nu} \qquad (II.10)$$

onde g é uma constante de acoplamento adimensional, $h = det\ h^{\alpha}{}_{\mu}$, e a é uma constante com dimensão de comprimento necessária para dar à lagrangeana a dimensão correta.

Vamos agora introduzir como fonte um campo escalar, através da lagrangeana:

$$L_\phi = \frac{h}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi \qquad (II.11)$$

a qual, pode ser reescrita na forma

$$L_\phi = \frac{h}{2}g^{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}h^{\beta}{}_{\nu}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \qquad (II.12).$$

Com isso , a lagrangeana total que descreve o sistema campo gravitacional mais campo de matéria é dada por

$$L = L_B + L_\phi = h(\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\phi) = h\mathcal{L} \qquad (II.13)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_\phi$. Agora estamos prontos para deduzir as equações de movimento para os potenciais $B^{\alpha}{}_{\mu}$. Substituindo-se a lagrangeana (II.13) na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial B^{\delta}{}_{\sigma}} - \partial_\rho\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho B^{\delta}{}_{\sigma})} = 0,$$

temos que

$$\frac{\partial L}{\partial B^{\delta}{}_{\sigma}} = h(D^\sigma\phi\partial_\delta\phi - h_\delta{}^\sigma\mathcal{L}),$$

e

$$-\partial_\rho\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho B^{\delta}{}_{\sigma})} = \frac{a^{-2}}{g^2}h(\partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} + h^{\gamma}{}_{\mu}\partial_\rho h_\gamma{}^\mu F_\delta{}^{\rho\sigma})$$

onde usamos a propriedade

$$\delta h = hh^{\gamma}{}_{\mu}\delta h_\gamma{}^\mu = -hh_\gamma{}^\mu\delta h^{\gamma}{}_{\mu} \qquad (II.14).$$

Além disso , devido ao fato de $\delta h^{\gamma}{}_{\mu}$ ser uma transformação *qualquer* e não uma transformação de gauge, decorre da expressão para a tetrada que

$$\delta h^{\gamma}{}_{\mu} = \delta B^{\gamma}{}_{\mu}. \qquad (II.15)$$

Assim, obtemos a equação

$$\frac{a^{-2}}{g^2}(\partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} + h^{\gamma}{}_{\mu}\partial_\rho h_\gamma{}^{\mu} F_\delta{}^{\rho\sigma}) + (D^\sigma\phi\partial_\delta\phi - h_\delta{}^{\sigma}\mathcal{L}) = 0. \qquad (II.16)$$

Definindo-se

$$D^\sigma\phi\partial_\delta\phi - h_\delta{}^{\sigma}\mathcal{L}_\phi \equiv T_\delta{}^{\sigma} \qquad (II.17)$$

como sendo o tensor momento-energia do campo fonte, ficamos com

$$\partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} + h^{\gamma}{}_{\mu}\partial_\rho h_\gamma{}^{\mu} F_\delta{}^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}h_\delta{}^{\sigma}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} = -a^2 g^2 T_\delta{}^{\sigma}. \qquad (II.18)$$

Definimos agora a grandeza

$$t_\delta{}^{\sigma} \equiv h^{\gamma}{}_{\mu}\partial_\rho h_\gamma{}^{\mu} F_\delta{}^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}h_\delta{}^{\sigma}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F_\alpha{}^{\mu\nu} \qquad (II.19)$$

como sendo o pseudo-tensor momento-energia do campo de gauge $B^{\alpha}{}_{\mu}$. Uma característica importante é que este pseudo-tensor não é simétrico e nem é simetrizável de uma forma simples pelo processo de Belinfante [5], como ocorre, por exemplo, com o tensor momento-energia do campo eletromagnético. Além disso, o fato de ser um pseudo-tensor, neste caso, trás à tona o papel duplo que ele desempenha pois essa é uma propriedade tanto do tensor momento-energia do campo gravitacional [4], como também das correntes dos campos de gauge [1].

A partir das definições acima , a equação dinâmica para os campos pode ser reescrita como

$$\partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} + t_\delta{}^{\sigma} = -a^2 g^2 T_\delta{}^{\sigma}. \qquad (II.20)$$

É interessante observar que, apesar do grupo das translações ser abeliano, a equação de campo (II.20) possui a forma de uma equação de Yang-Mills típica para grupos não-abelianos, com a pseudo-corrente $t_\delta{}^{\sigma}$ fornecendo os auto-acoplamentos.

Como um teste do modelo, consideremos a aproximação para campos fracos. Neste caso, vamos nos restringir apenas aos termos lineares em $B_\delta{}^\sigma$. Sendo assim, a equação de movimento se reduz a:

$$\partial_\mu F_\gamma{}^{\mu\nu} = -g^2 a^2 T_\gamma{}^\nu. \qquad (II.21)$$

Assumindo o gauge de Lorentz

$$\partial^\mu B^\gamma{}_\mu = 0, \qquad (II.22)$$

e redefinindo $B \rightarrow gB$, obtemos para a equação (II.21)

$$\partial_\mu \partial^\mu B^{\gamma\nu} = -a^2 g T^{\gamma\nu}. \qquad (II.23)$$

Considerando o caso em que o campo é gerado por uma massa puntual M em repouso na origem do sistema de coordenadas, $T^{\gamma\nu}$ pode ser escrito na forma [6]:

$$T^{\gamma\nu} = \delta^{\gamma 0}\delta^\nu_0 M\delta(\vec{r}). \qquad (II.24)$$

Assim, o problema torna-se estático, e adquire uma simetria esférica:

$$B^\gamma{}_\mu dx^\mu = B^\gamma{}_0 dx^0 + B^\gamma{}_r dr.$$

com $B^\alpha{}_r$ a componente radial. Consequentemente, temos que

$$\partial_i B^\gamma{}_j - \partial_j B^\gamma{}_i \equiv F^\gamma{}_{ij} = 0,$$

com i , j = 1, 2, 3 . Portanto, $B^\gamma{}_j$ são os potenciais de vácuo, dados por

$$B^\gamma{}_j = \partial_j a^\gamma.$$

Usando isso na equação (II.23), ficamos com

$$\partial_i \partial^i B^{\gamma 0} = -a^2 g \delta^{\gamma 0} M\delta(\vec{r}). \qquad (II.25)$$

Separamos agora a equação (II.25) em dois casos; para $\gamma = j$, obtemos

$$\nabla^2 B^{j0} = 0,$$

e para $\gamma = 0$, ficamos com

$$\nabla^2 B^{00} = a^2 g M \delta(\vec{r}). \qquad (II.29)$$

Comparando-se (II.29) com a equação de Poisson, que descreve o potencial gravitacional na mecânica clássica gerado por uma massa M em repouso,

$$\nabla^2 V(r) = 4\pi G M \delta(\vec{r}), \qquad (II.30)$$

concluímos que

$$a^2 g = 4\pi G$$

onde G é a constante de gravitação universal, e

$$B^{00} = V(r). \qquad (II.31)$$

Com essas identificações, a solução da equação (II.29) pode ser escrita na forma

$$V(r) = -G\frac{M}{r}. \qquad (II.32)$$

Vemos assim que essa teoria possui um limite newtoniano apropriado para campos fracos.

Capítulo III

A TEORIA DE GAUGE GENERALIZADA PARA O GRUPO DAS TRANSLAÇÕES

Apresentamos a seguir a generalização da teoria de gauge para o grupo das translações, introduzida no Capítulo II. Tal generalização é análoga à feita por Podolsky[7] para a eletrodinâmica. Entretanto, a motivação dessa generalização é completamente diferente. Enquanto Podolsky pretendia eliminar as divergências associadas a cargas puntuais, no nosso caso a motivação está relacionada ao comportamento do potencial gravitacional a grandes distâncias da fonte, como veremos depois.

Introduzimos a lagrangeana generalizada

$$L_B = h\mathcal{L}_B = -h\frac{a^{-2}}{4g^2}[F^{\alpha}{}_{\mu\nu}F_{\alpha}{}^{\mu\nu} - 2R^2(\mathcal{D}_{\rho}F_{\beta}{}^{\mu\rho})(\mathcal{D}^{\pi}F^{\beta}{}_{\mu\pi})] \qquad (III.1)$$

onde R é uma constante com dimensão de comprimento e

$$\mathcal{D}_{\rho}F_{\beta}{}^{\mu\rho} = \partial_{\rho}F_{\beta}{}^{\mu\rho} + t_{\beta}{}^{\mu} \qquad (III.2)$$

é a derivada covariante de $F_{\beta}{}^{\mu\rho}$. Explicitamente, essa derivada covariante pode ser escrita como

$$\mathcal{D}_{\mu}F_{\delta}{}^{\mu\sigma} = \partial_{\mu}F_{\delta}{}^{\mu\sigma} + (\Lambda_{\delta}{}^{\sigma})^{\alpha}{}_{\mu\nu}F_{\alpha}{}^{\mu\nu}$$

onde

$$(\Lambda_{\delta}{}^{\sigma})^{\alpha}{}_{\mu\nu} = h^{\gamma}{}_{\rho}\partial_{\mu}h_{\gamma}{}^{\rho}\delta^{\alpha}{}_{\delta}\delta^{\sigma}{}_{\nu} + \frac{1}{4}h_{\delta}{}^{\sigma}\partial_{\mu}h^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{4}h_{\delta}{}^{\sigma}\partial_{\nu}h^{\alpha}{}_{\mu}$$

é a conexão dessa derivada covariante.

Para obtermos a equação de movimento dos campos, devemos utilizar a equação de Euler-Lagrange de segunda ordem

$$\frac{\partial L}{\partial B^{\delta}{}_{\sigma}} - \partial_{\rho}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\rho}B^{\delta}{}_{\sigma})} + \partial_{\rho}\partial_{\theta}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\rho}\partial_{\theta}B^{\delta}{}_{\sigma})} = 0.$$

O termo de segunda ordem da equação acima atua somente na segunda parcela da lagrangeana generalizada (III.1), uma vez que somente este termo possui derivadas de segunda ordem dos potenciais. Assim, a única contribuição que surge devido ao novo termo de (III.1) é:

$$\partial_\rho \partial_\theta \frac{\partial L_B}{\partial(\partial_\rho \partial_\theta B^\delta{}_\sigma)} = hR^2 \frac{a^{-2}}{g^2} \{(\partial^\sigma \partial_\mu \partial_\tau F_\delta{}^{\mu\tau} - \partial_\rho \partial^\rho \partial_\tau F_\delta{}^{\sigma\tau}) +$$

$$+[h^\alpha{}_\nu h^\gamma{}_\mu \partial_\theta h_\gamma{}^\mu (\partial_\omega F_\delta{}^{\theta\omega} \partial^\sigma - \partial_\omega F_\delta{}^{\sigma\omega} \partial^\theta) h_\alpha{}^\nu + (\partial_\omega F_\delta{}^{\theta\omega} \partial^\sigma -$$

$$-\partial_\omega F_\delta{}^{\sigma\omega} \partial^\theta) h^\gamma{}_\mu \partial_\theta h_\gamma{}^\mu + h^\gamma{}_\mu (\partial_\omega F_\delta{}^{\theta\omega} \partial^\sigma - \partial_\omega F_\delta{}^{\sigma\omega} \partial^\theta) \partial_\theta h_\gamma{}^\mu]\} \qquad (III.3)$$

ficando os outros termos inalterados em relação à equação (II.20) . Como podemos notar facilmente, a primeira parcela de (III.3) é nula, pois $F_\delta{}^{\mu\tau}$ é antissimétrico nos índices μ e τ. Então, este termo fica:

$$\partial_\rho \partial_\theta \frac{\partial L_B}{\partial(\partial_\rho \partial_\theta B^\delta{}_\sigma)} = a^{-2} R^2 \frac{h}{g^2} \{\Box \partial_\tau F_\delta{}^{\sigma\tau} + [h^\alpha{}_\nu h^\gamma{}_\mu \partial_\theta h_\gamma{}^\mu (\partial_\omega F_\delta{}^{\theta\omega} \partial^\sigma -$$

$$-\partial_\omega F_\delta{}^{\sigma\omega} \partial^\theta) h_\alpha{}^\nu (\partial_\omega F_\delta{}^{\theta\omega} \partial^\sigma - \partial_\omega F_\delta{}^{\sigma\omega} \partial^\theta) h^\gamma{}_\mu \partial_\theta h_\gamma{}^\mu + h^\gamma{}_\mu (\partial_\omega F_\delta{}^{\theta\omega} \partial^\sigma - \partial_\omega F_\delta{}^{\sigma\omega} \partial^\theta) \partial_\theta h_\gamma{}^\mu]\}$$

$$(III.4)$$

onde $\Box \equiv -\partial_\rho \partial^\rho = -\partial_0^2 + \nabla^2$. Com isso, a equação de movimento que antes era dada por (II.20), na teoria de gauge generalizada assume a forma:

$$(1 - R^2 \Box) \partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} + t_\delta{}^\sigma = -a^2 g^2 T_\delta{}^\sigma \qquad (III.5)$$

onde $T_\delta{}^\sigma$ é o tensor momento-energia do campo fonte já definido em (II.17), e $t_\delta{}^\sigma$ é o pseudo-tensor momento-energia do campo gravitacional. Em virtude dele assumir uma forma bastante complicada e não ser relevante para os cálculos da tese, não escreveremos sua forma explícita.

A equação (III.5) é a equação de campo da teoria de gauge generalizada para o grupo das translações. Notamos que ela é uma equação diferencial parcial não linear que, para uma situação genérica, é muito difícil de ser resolvida. Entretanto, existe uma situação física de interesse na qual podemos resolvê-la facilmente: é o caso de campos fracos, que corresponde a estudar os campos a grandes distâncias da fonte que o produziu. Restringindo-se a termos lineares em $B_\delta{}^\sigma$, percebemos que $t_\delta{}^\sigma$ pode ser desprezado. Assim, a equação (III.5) se reduz a

$$(1 - R^2\Box)\partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} = -a^2 g^2 T_\delta{}^\sigma. \qquad (III.6)$$

Usando que $F_\delta{}^{\rho\sigma} = \partial^\rho B_\delta{}^\sigma - \partial^\sigma B_\delta{}^\rho$, vemos que o lado esquerdo da equação (III.6) é

$$(1 - R^2\Box)\partial_\rho F_\delta{}^{\rho\sigma} = -(1 - R^2\Box)\Box B_\delta{}^\sigma, \qquad (III.7)$$

onde adotamos o gauge generalizado [8]:

$$(1 - R^2\Box)\partial_\rho B_\delta{}^\rho = 0 \qquad (III.8).$$

Substituindo-se (III.7) em (III.6), e redefinindo $B \to gB$, obtemos a equação para os potenciais:

$$(1 - R^2\Box)\Box B_\delta{}^\sigma = a^2 g T_\delta{}^\sigma. \qquad (III.9)$$

Consideremos, novamente, o caso de uma massa puntual M em repouso na origem. O tensor momento-energia do campo fonte (ou de matéria) gerado por essa massa é:

$$T_\delta{}^\sigma = \delta_\delta^0 \delta_0^\sigma M \delta(\vec{r}).$$

Assim, a equação (III.9) fica, para $\delta \neq 0, \sigma \neq 0$

$$(1 - R^2\nabla^2)\nabla^2 B_i{}^j = 0.$$

e para $\delta = \sigma = 0$,

$$\nabla^2 B_0{}^0 - R^2\nabla^2\nabla^2 B_0{}^0 = a^2 g M \delta(\vec{r}). \qquad (III.10)$$

A solução da equação (III.10) nos fornece o potencial gravitacional

$$V(r) = -G\frac{M}{r}[1 - \alpha \exp(-r/R)], \qquad (III.11)$$

sendo α uma constante, e onde já usamos as identificações $(a^2 g/4\pi) = G$ e $B_0{}^0(r) = V(r)$. Para distâncias $r \gg R$, o potencial acima resulta em

$$V(r) = -G\frac{M}{r}, \qquad (III.12)$$

que coincide com o potencial (II.32) já obtido anteriormente. Entretanto, para distâncias $r \ll R$, o potencial (III.11) pode ser reescrito na forma

$$V(r) = -G\frac{M}{r}(1-\alpha). \qquad (III.13)$$

Definindo-se

$$G_0 \equiv G(1-\alpha), \qquad (III.14)$$

obtemos

$$V(r) = -G_0\frac{M}{r}, \qquad (III.15)$$

que coincide com o potencial newtoniano.

É importante notarmos o seguinte fato. De acordo com as discussões do próximo capítulo, baseadas em observações astronômicas, o parâmetro R será assumido possuir dimensões galácticas, e α será assumido positivo. Nesse caso, as experiências terrestres, ou mesmo dentro do sistema solar, para se determinar a constante gravitacional, nada mais são do que medidas de G_0 , que assim deve ser identificada com a constante gravitacional de Newton. Entretanto, de acordo com a equação (III.14), vemos que G_0 é simplesmente o resultado líquido da verdadeira constante gravitacional G, menos o efeito de anti-gravidade causado pelo termo de Yukawa.

CAPÍTULO IV

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Nesse capítulo, vamos analisar algumas consequências do potencial

$$V(r) = -G\frac{M}{r}[1 - \alpha\exp(-r/R)].$$

Primeiramente, notemos que o termo de Yukawa, assumindo α positivo, gera uma anti-gravidade, ou seja, a interação gravitacional é uma combinação do termo atrativo $-GM/r$, com o termo repulsivo $(G\alpha M/r)\exp(-r/R)$. Para distâncias $r \ll R$ à partir da fonte, temos que

$$V(r) = -G_0\frac{M}{r}$$

com $G_0 = G(1-\alpha)$, sendo G_0 a constante gravitacional "efetiva" nessa região (constante de Newton), e G a "verdadeira" constante gravitacional.

Mas, qual a importância de tudo isso ? Há alguns anos atrás, o estudo do espectro de rotação de galáxias espirais revelou que a massa luminosa desses objetos não concordava quantitativamente com a massa dinâmica [19], responsável pela observação de tal espectro, sendo a massa luminosa menor que a massa dinâmica. Esse problema foi resolvido supondo-se a existência de uma matéria não luminosa nas galáxias, que seria responsável pelo comportamento estranho das curvas de rotação . Essa *matéria escura*, por sua vez, deveria ter propriedades muito específicas para estar localizada apenas nos halos galáticos, e não ser detectada em nenhuma faixa do espectro.

Entretanto, com a recente descoberta de super-aglomerados e vazios no universo [10], o conceito de matéria escura fria (MEF) sofreu um duro golpe [9] pois a origem dessas super-estruturas não pode ser explicada com esse tipo de matéria escura. Em outras palavras, a distribuição de galáxias em escalas de 20 Mpc ou maiores, apresenta uma não-homogeneidade que não pode ser explicada pela MEF. Historicamente, o modelo de MEF foi introduzido para explicar estruturas a nível de galáxias e aglomerados de galáxias.

Por outro lado, sempre se acreditou que a matéria escura quente (MEQ) poderia desempenhar um papel importante apenas a nível cosmológico, pois devido ao fato de se mover com velocidades relativísticas, seria quase impossível ela se agregar a estruturas do nível de galáxias, ou mesmo de aglomerados de galáxias. Deste ponto de vista, os conceitos de matéria escura ainda poderiam ser salvos, imaginando-se que a nível de galáxias e de aglomerado de galáxias a matéria escura deveria ser preponderantemente MEF, enquanto que a nível de super-aglomerados em diante, ela seria preponderantemente MEQ. Entretanto, esse tipo de solução para o problema da massa faltante do universo tem gerado um certo ceticismo, pois quando se torna necessário lançar mão de diversos tipos de matéria escura para explicar diferentes observações astronômicas, uma comparação com os epiciclos de Ptolomeu é quase que inevitável. Assim como a lei do inverso do quadrado da distância substituiu satisfatoriamente o sistema solar de Ptolomeu, acreditamos que algum princípio semelhante possa substituir satisfatoriamente o modelo de matéria escura para o Universo. De qualquer forma, caso algum candidato à MEQ venha a ser detectado, como por exemplo a confirmação de uma massa não nula para o neutrino, e caso a natureza da MEF venha a ser esclarecida, esse modelo poderá ainda ser levado em consideração . Mas, sem esses ingredientes, o problema da massa faltante permanece aguardando uma solução mais convincente.

Recentemente diversas tentativas têm surgido para explicar o problema da massa faltante de tais objetos [13,14,15], todas elas propondo uma modificação do potencial gravitacional newtoniano. Essa modificação deveria funcionar no sentido de explicar a massa faltante das galáxias espirais sem a necessidade de se introduzir o conceito de matéria escura. É dentro desse contexto que propusemos, nesse trabalho, um modelo alternativo para a gravitação , fundamentado numa teoria de gauge generalizada para o grupo das translações. Como já vimos, esse modelo dá origem, no limite de campo fraco, a um potencial gravitacional da forma

$$V(r) = -G\frac{M}{r}[1 - \alpha \exp(-r/R)],$$

com α e R parâmetros a serem determinados através de observações astronômicas. Inicialmente, Sanders[13] obteve esses valores somente para explicar o espectro de rotação de galáxias espirais. Posteriormente, Gerbal e Sirousse-Zia [14] os ajustaram também para explicar o comportamento dos aglomerados de galáxias. Os resultados em ambos os casos foram concordantes, i.e., existe um *único valor* para α e R que explica, *simultaneamente*, o espectro de rotação de galáxias [19] e o movimento de aglomerados de galáxias [20]. Os valores encontrados foram [14]:

$$\alpha = 0.985 \pm 0.005 \qquad R = 24Kpc^{+26}_{-14},$$

o que nos mostra imediatamente que

$$G_0 = (0.01 \sim 0.02)G,$$

i.e., a constante gravitacional medida em experiências terrestres, ou mesmo dentro do sistema solar, cujas dimensões características são bem menores do que R, é apenas 1 % a 2 % do seu valor no infinito, devido ao efeito da antigravidade. É importante notar que este potencial (Newton + Yukawa) é *postulado* nos artigos de autores que o adotam como uma explicação alternativa para a questão da massa faltante do Universo. Entretanto, em nosso trabalho tal potencial surge naturalmente como solução das equações de campo de uma teoria de gauge generalizada para o grupo das translações.

Finalmente, vamos tecer alguns comentários sobre o parâmetro R que aparece nessa teoria. Como é sabido, o grupo de de Sitter também possui um parâmetro com dimensão de comprimento, e que está relacionado com a curvatura (constante) do espaço de de Sitter. No limite desse parâmetro indo para infinito, o grupo de de Sitter contrai-se [18] para o grupo de Poincaré, do qual o grupo das translações é um sub-grupo. Entretanto, para valores suficientemente grandes desse parâmetro, porém não infinito, o grupo de Poincaré pode ser interpretado como uma aproximação local do grupo de de Sitter. Da mesma forma, o grupo das translações pode ser encarado como uma aproximação local do setor não-lorentziano do grupo de de Sitter. É exatamente dentro desse espírito que deve ser encarado o modelo proposto nesse trabalho. Em outras palavras, uma teoria de gauge para as translações pode ser encarada como um limite do setor não-lorentziano de uma teoria de gauge para o grupo de de Sitter. Com isso, teríamos uma explicação para a origem do parâmetro R, o qual seria oriundo de uma simetria mais geral do espaço-tempo, representada aqui pelo grupo de de Sitter. Teríamos assim, além do comprimento de Planck, um novo parâmetro fundamental da Natureza: o "raio" de curvatura do espaço de de Sitter.

Para finalizar, achamos que a generalização para o grupo de de Sitter do modelo aqui proposto é um tópico que certamente merece um estudo mais aprofundado.

REFERÊNCIAS

[1] P. Ramond, "Field theory - A modern primer" (Benjamin/Cumings Publishing Co., Massachusetts, 1981).

[2] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov "Gauge Fields - Introduction to quantum theory" (Benjamin/Cumings publishing Co., Massachusetts, 1980).

[3] N.E. Steenrod, "The topology of fiber bundles" (Priceton University Press, Princeton, 1951).

[4] V.A. Fock, " The theory of spacetime and gravitation" (Pergamon Press, New York, 1964).

[5] E.M. Corson, "Introduction to tensors, spinors and relativistic wave-equatons" (Black & Son Limited, London, 1953).

[6] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology" (John Wiley & Sons, New York, 1972).

[7] B. Podolsky and P. Sched, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).

[8] B. M. Pimentel and C.A.P. Galvão, Can. J. **66**, 460 (1988).

[9] D. Lindley, Nature, **349**, 14 (1991).

[10] W. Saunders et al, Nature, **349**, 32 (1991).

[11] R. Gilmore, "Lie groups, Lie algebras, and some of their applications" (John Wiley & Sons, New York, 1974).

[12] D. Gerbal et H. Sirousse-Zia, Annales de Physique, colloque n.3, supplément au n.6, 13, 87 (1988).

[13] R.H. Sanders, Astron. Astrophys. **136**, 21 (1984).

[14] D. Gerbal, H. Sirousse-Zia, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, série II, 353 (1989).

[15] M. Kenmoku, Y. Okamoto, K. Shigemoto, Prepint SLAC-PUB-5963.

[16] T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[17] Y.M. Cho, Phys. Rev. D **14**, 2521 (1976).

[18] F. Gürsey "Introduction to the de Sitter group" in Lectures of the Istanbul Summer School of Theor. Phys., ed. F. Gürsey (Gordon and Breach, New York, 1962).

[19] V. Trimble, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **25**, 425 (1987).

[20] S.M. Faber and J.S. Gallagher, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **17**, 135 (1979).

[21] T.Eguchi, P.B.Gilkey and A.J.Hanson, Phys. Rep. **66**, 259 (1980).

[22] Para uma revisão, veja: D. Ivanenko and G.Sardanashvily, Phys. Rep. **94**, 1 (1983).