





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.005/03

TELEPARALELISMO E AS TEORIAS DE KALUZA-KLEIN

Luis Carlos Torres Guillen

Orientador

José Geraldo Pereira

23000000 3731



Julho de 2003

Agradecimentos

Aos meus pais, meu irmão e todos os meus demais parentes (avós, tios, primos,...).

Ao meu orientador pelo aprendizado que tem me proporcionado.

À Juliana pelos momentos que temos passado juntos.

Aos meus amigos “malacos” Abel, Adriano Doff, Alexandre Gadelha, Alexandre Schmidt, André Guzzo, Brenno Vallilo, Cristiano, Daniel Nedel, Felipe Arretche, Iõn Vasile, João Pacheco, José Tadeu, Leonardo, Marcos Calçada, Randall Guedes, Ricardo Farias, Rodolfo Casana e Wagner Paniago.

Aos demais colegas do IFT, em especial ao Teófilo, Vanessa e Ana Lúcia.

Aos meus amigos do “fundão” Thales, Mário, Pedro, Wallace e Ricardo.

À Rita e a Rosa pela amizade.

Ao Manifesto Bar, Alcatraz, Café Aurora, Morrison Bar, Nias, Cosesp, Objetivo, Bar do Jorge, “Ponto Telúrico”.

À Ambev, Stock, Ypioca, Orloff ...

Aos funcionários do IFT.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Na primeira parte da tese é feito um estudo dos fundamentos do equivalente teleparalelo da Relatividade Geral. Usando o fato que esse modelo corresponde a uma teoria de gauge para o grupo das translações, obtemos primeiramente a *corrente de gauge* representando a densidade de energia-momento do campo gravitacional, a qual se verifica ser um *tensor verdadeiro*. Sua relação com a expressão de Møller para o pseudo-tensor energia-momento canônico é também obtida. Então, para que resulte completamente equivalente com a Relatividade Geral, uma nova expressão para a conexão de spin teleparalela é proposta.

Na segunda parte da tese, adotando-se a estrutura de gauge do Teleparalelismo como paradigma, desenvolvemos a versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana. Nessa teoria, apenas o espaço interno (fibra) adquire dimensões extras, sendo o espaço-tempo mantido sempre quadri-dimensional. O processo de unificação neste formalismo resulta bem mais simples e natural do que nos modelos de Kaluza-Klein ordinários.

Palavras Chaves: Teleparalelismo, Energia-Momento, Conexão de Spin, Kaluza-Klein

Áreas do conhecimento: 1.05.03.01-3: Teoria Geral de Partículas e Campos
1.05.01.03-7: Relatividade e Gravitação

Abstract

In the first part of the thesis, a study on the foundations of the teleparallel equivalent of General Relativity is made. Using the fact that it corresponds to a gauge theory for the translation group, we obtain first the energy-momentum *gauge current* of the gravitational field, which is shown to be a *true tensor*. Its relation to the usual expression obtained by Møller for the canonical energy-momentum pseudo-tensor is also obtained. Then, in order to be fully equivalent with General Relativity, a new expression for the teleparallel spin connection is proposed.

In the second part of the thesis, by adopting the gauge construction of teleparallel gravity as paradigm, a teleparallel version of the non-Abelian Kaluza-Klein theory is developed. In this theory, only the internal (fiber) space acquires extra dimensions, spacetime being kept always four-dimensional. The unification in this approach results to be much simpler and more natural than in ordinary Kaluza-Klein models.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Introdução Histórica	1
1.2	Notação	5
2	Teleparalelismo	7
2.1	Teleparalelismo e sua Equivalência com a Relatividade Geral	7
2.2	Densidade de Energia-Momento do Campo Gravitacional	13
2.3	A Conexão de Spin	16
2.4	As Identidades de Bianchi	20
2.4.1	O Tensor Energia-Momento do Campo de Dirac	22
2.5	Densidade de Energia-Momento Simétrica do Campo Gravitacional	25
3	Equivalente Teleparalelo de Kaluza-Klein Abeliana	27
3.1	A Teoria Original de Kaluza-Klein	27
3.2	A Teoria de Kaluza-Klein Teleparalela	30
3.3	Campos de Matéria	35
4	Equivalente Teleparalelo de Kaluza-Klein Não-Abeliana	37
4.1	A Teoria de Kaluza-Klein Não-Abeliana	37
4.2	Potenciais de Gauge Unificados	41
4.3	Transformações de Gauge Generalizadas	42
4.4	Lagrangeana de Gauge e Equações de Campo	45
4.5	Campos de Matéria	47
5	Conclusões	51
	Referências	59

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução Histórica

A unificação da gravitação com o eletromagnetismo é uma questão tão ou mais velha que a própria teoria da Relatividade Geral. Antes de Einstein formular a sua teoria da gravitação, Nordström [1] propôs uma teoria relativística na qual a gravitação era descrita por um campo escalar acoplado ao traço do tensor energia-momento. Ele adicionou uma dimensão a mais ao espaço-tempo quadri-dimensional de Minkowski, obtendo assim um espaço-tempo plano penta-dimensional. Introduziu então um potencial de gauge neste espaço, e escreveu equações semelhantes às equações de Maxwell, só que em cinco dimensões. Identificando a quinta componente deste penta-vetor com o campo escalar da sua teoria gravitacional — enquanto que as quatro primeiras componentes são identificadas com o quadri-vetor potencial de Maxwell — e assumindo a condição cilíndrica — segundo a qual os campos não dependem da quinta coordenada — ele obteve que a sua teoria de “Maxwell penta-dimensional” se reduzia a teoria eletromagnética usual de Maxwell mais a sua teoria escalar da gravitação [2]. Podemos então dizer que a idéia de unificação em dimensões maiores começou com Nordström.

Após o aparecimento da Relatividade Geral, Weyl [3] fez a primeira tentativa de estender a Relatividade Geral de modo a descrever a gravitação e o eletromagnetismo dentro de uma estrutura geométrica unificada. O ponto inicial de Weyl foi puramente matemático. A sua intenção era construir o que ele chamou de geometria infinitesimal “verdadeira”, e usar esta geometria para construir uma teoria unificada da gravitação com o eletromagnetismo. Weyl achava que a geometria Riemanniana era um pouco imperfeita por que, embora pretendesse ser infinitesimal,

ela continha resíduos da geometria Euclidiana, no sentido de que as magnitudes de vetores, ao contrário das suas direções, são independentes do caminho quando transportados paralelamente. Embora sua tentativa tivesse deficiências como teoria física, ela preparou o caminho para o entendimento correto da invariância de gauge. Sua proposta contém as sementes de todos os aspectos matemáticos de uma teoria de gauge não-abeliana.

O passo seguinte foi dado pelo matemático Theodor Kaluza em 1919, o qual baseou-se no trabalho de Weyl [3] e na teoria da Relatividade Geral de Einstein. Kaluza [4] propôs passar para uma teoria do tipo da Relatividade Geral de Einstein em cinco dimensões, de onde a teoria de Einstein quadri-dimensional e o eletromagnetismo de Maxwell podiam ser obtidos após a imposição de um vínculo cilíndrico. Desta maneira, a teoria de Maxwell do eletromagnetismo seria uma consequência inevitável da teoria da Relatividade Geral de Einstein, desde que estejamos dispostos a aceitar a idéia de uma quinta dimensão.

Em 1926 Oskar Klein [5] e o físico russo H. Mandel [6] redescobriram independentemente a teoria de Kaluza. Klein resolveu dois problemas que a idéia de Kaluza tinha:

1. Embora os índices assumissem os valores 0, 1, 2, 3, 5, não havia uma boa razão para a dependência na coordenada extra x^5 ser suprimida.
2. Se existe uma quinta dimensão, por que não a vemos?

Klein assumiu que a quinta dimensão tinha topologia circular, de modo que x^5 seria periódica. Desta forma, o espaço teria topologia $R^4 \otimes S^1$. Klein notou também a quantização da carga elétrica [7], e esperava que a teoria de Kaluza pudesse sustentar a mecânica quântica. A quinta dimensão era vista como um truque matemático sem qualquer significado físico. Klein chegou perto do ponto de vista atual: ele discutiu os harmônicos maiores que 0 e o tamanho do círculo S^1 . Depois, Einstein e Bergmann também adotaram tal ponto de vista [8].

É interessante notar que em todo este trabalho inicial, e em particular nas três descobertas independentes da teoria penta-dimensional por Kaluza, Klein e Mandel, o campo escalar ϕ é sempre igualado a um. Jordan [9] parece ter sido o primeiro a perceber a importância de se incluir um campo escalar ϕ . Anos mais tarde, Thiry [10]

também notou, independentemente, o efeito de se incluir um campo escalar.

A quinta dimensão continuou a chamar a atenção dos físicos. Einstein voltou a esta idéia várias vezes [11]. A primeira tentativa de ir além da gravitação e do eletromagnetismo e aplicar o princípio de gauge de Weyl às forças nucleares ocorreu em um trabalho notável de Klein em 1938 [12]. Assumindo que os mésons propostos por Yukawa eram vetoriais, Klein procedeu a construir um tipo de teoria de Kaluza-Klein que os incorporaria, introduzindo apenas mais uma dimensão extra. Klein chegou perto de descobrir os campos de gauge não-Abelianos em 1939, mas seu significado nunca foi totalmente esclarecido [13].

Em 1954, Yang e Mills [14] propuseram uma teoria de gauge para o grupo $SU(2)$. Depois, Utiyama [15] generalizou o trabalho de Yang e Mills para qualquer grupo não-Abeliano. Neste trabalho de Utiyama, a gravitação apareceu pela primeira vez descrita como uma teoria de gauge, neste caso como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz. Até o aparecimento das teorias de gauge não-Abelianas, não havia motivo real para se estender a idéia de Kaluza-Klein além de cinco dimensões. Em 1963, DeWitt sugeriu que uma unificação das teorias de Yang-Mills com a gravitação poderia ser conseguida em um modelo de Kaluza-Klein em dimensões maiores [16].

Uma discussão detalhada da unificação tipo Kaluza-Klein da gravitação com as teorias de Yang-Mills, incluindo a forma correta da métrica $(4 + D)$ -dimensional, apareceu primeiro no trabalho de Kerner [17]. Trautman [18] também estava independentemente ciente desta possibilidade, assim como outros. A primeira derivação completa da teoria gravitacional com campos de Yang-Mills e escalares quadridimensional de uma ação de Einstein-Hilbert $(4 + D)$ -dimensional foi finalmente dada por Cho e Freund em 1975 [19, 20]. Para uma revisão de tais teorias ver [21, 22, 23, 24, 25].

A noção de paralelismo absoluto (ou teleparalelismo), foi introduzida por Einstein na década de 1920 na sua tentativa de unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Mais ou menos três décadas depois, trabalhos de Møller [26], Pellegrini e Plebanski [27] e Hayashi e Nakano [28] produziram uma renovação no interesse daquelas idéias, que desde então tem recebido uma considerável atenção, principalmente no contexto de teorias de gauge para o grupo de Poincaré e para o grupo das translações [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

No final da década de 70, Hayashi e Shirafuji [29] mostraram que a Relatividade Geral é equivalente a uma teoria de gauge para o grupo das translações. Esta equivalência abre uma nova possibilidade para um melhor entendimento da densidade de energia-momento do campo gravitacional, e para o estudo das teorias unificadas. Estes vão ser os objetivos principais deste trabalho, onde utilizaremos uma teoria de gauge para o grupo das translações [36, 37], conhecida como equivalente teleparalelo da Relatividade Geral, ou simplesmente Teleparalelismo, a fim de descrever a gravitação.

Dentro do contexto descrito acima, os principais resultados desta tese são os seguintes. Primeiro, obtivemos uma corrente de gauge de energia-momento para o campo gravitacional [38, 39], a qual é um tensor de gauge, bem como um tensor de espaço-tempo. Quando reescrevemos as equações de campo gravitacional com todos os índices de espaço-tempo, vemos que a corrente de gauge se transforma na densidade de energia-momento canônica obtida por Møller para o campo gravitacional, a qual é um pseudo-tensor. Um outro resultado obtido refere-se à proposta de uma nova expressão para a conexão de spin teleparalela, a qual é dada por *menos* o tensor de contorção mais uma conexão *nula* [40]. O acoplamento minimal correspondente é covariante sob transformações locais de Lorentz, e equivalente à prescrição de acoplamento minimal da Relatividade Geral. Com esta prescrição, a gravitação teleparalela torna-se totalmente equivalente à Relatividade Geral, mesmo na presença de campos espinoriais. Fizemos ainda um estudo da consistência das leis de conservação da densidade de energia-momento com as identidades de Bianchi teleparalelas. Para o caso de campos de matéria, mostramos que o tensor energia-momento correspondente deve ser necessariamente conservado com a derivada covariante teleparalela. Para o caso do campo gravitacional, usamos o método de Belinfante para obter uma versão simetrizada do pseudo-tensor energia-momento canônico de Møller. Além de ser simétrica, a densidade resultante torna-se um tensor verdadeiro que coincide com o lado esquerdo da equação de campo gravitacional. Para ser consistente com uma das identidades de Bianchi, ele deve satisfazer a mesma lei de conservação covariante satisfeita pelo tensor energia-momento de matéria. No entanto, de acordo com esta construção, a densidade de energia-momento total de qualquer sistema resulta ser zero.

Usando o formalismo teleparalelo, desenvolvemos inicialmente uma versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein Abelianiana [41, 42]. Neste modelo, apenas o espaço interno (fibra) torna-se penta-dimensional, sendo o espaço-tempo sempre quadridimensional. Obtivemos uma teoria de gauge translacional de dimensão cinco que unifica, no sentido das teorias de Kaluza-Klein, as interações eletromagnética e gravitacional. Então, dando continuidade a esta linha de pesquisa, generalizamos o modelo acima para o caso de uma teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana [43]. Semelhantemente ao caso Abelianiano, apenas o espaço interno (fibra) adquire dimensões maiores, o espaço-tempo sendo sempre quadridimensional. O modelo resultante é uma teoria de gauge translacional de dimensão $(4 + D)$, que unifica no sentido de Kaluza-Klein os campos de gauge e gravitacional. Ao contrário das teorias de Kaluza-Klein usuais, esta teoria define uma escala de comprimento natural para a subvariedade compacta do espaço fibrado, que mostramos ser da ordem do comprimento de Planck.

1.2 Notação

Neste trabalho, vamos descrever a gravitação como sendo uma teoria de gauge para o grupo das translações. De acordo com este formalismo, o espaço-tempo é considerado como sendo o espaço base da teoria. Vamos utilizar o alfabeto grego $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, \dots, 3$ para denotar índices relacionados a este espaço. Em cada ponto do espaço-tempo existe um espaço tangente ligado a ele, que vai ser a fibra do *fibrado tangente* correspondente. Inicialmente vamos assumir este espaço como sendo o espaço quadridimensional de Minkowski M^4 . Utilizaremos a primeira parte do alfabeto latino $a, b, c, \dots = 0, \dots, 3$ para denotar índices relacionados ao espaço tangente de Minkowski. Como a dimensão do grupo das translações é a mesma do espaço de Minkowski, vamos usar também a primeira parte do alfabeto latino $a, b, c, \dots = 0, \dots, 3$ para denotar índices relacionados ao grupo das translações.

Especificamente no capítulo 3, onde descreveremos a versão teleparalela de Kaluza-Klein Abelianiana, vamos assumir o espaço fibrado como sendo dado pelo produto $M^4 \otimes S^1$, onde S^1 é a variedade associada ao grupo $U(1)$. O índice 5 vai ser usado para denotar o índice relacionado ao espaço S^1 . Vamos usar a primeira parte do alfabeto latino maiúsculo para denotar os índices relacionados ao espaço interno

$M^4 \otimes S^1$, $A, B, C, \dots = 0, \dots, 3, 5$. Como a dimensão do espaço S^1 é a mesma que a dimensão do grupo $U(1)$, vamos usar também o índice 5 para denotar o índice relacionado ao grupo $U(1)$. Consequentemente, vamos usar também a primeira parte do alfabeto latino maiúsculo $A, B, C, \dots = 0, \dots, 3, 5$ para denotar todos os índices relacionados ao grupo de gauge unificado.

Quando construirmos a versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana, no capítulo 4, vamos assumir o espaço fibrado como sendo dado pelo produto $M^4 \otimes B^D$, onde B^D é a variedade do grupo associada a simetria de Yang-Mills. Neste caso, a segunda parte do alfabeto latino $m, n, \dots = 5, \dots, 4 + D$ vai ser utilizada para denotar índices relacionados à parte de Yang-Mills (interna) da fibra. A segunda parte do alfabeto latino maiúsculo vai ser utilizada para denotar todos os índices relacionados ao espaço interno $M^4 \otimes B^D$, os quais assumem os valores $M, N, \dots = 0, \dots, 3, 5, \dots, 4 + D$. Utilizaremos o alfabeto latino intermediário $i, j, k = 5, \dots, 4 + I$ para denotar índices relacionados ao grupo de gauge de Yang-Mills, onde I denota o número de geradores da álgebra de Lie associada. O índice latino maiúsculo $A, B, C, \dots = 0, \dots, 3, 5, \dots, 4 + I$ vai ser usado para denotar todos os índices relacionados aos geradores do grupo. Notemos que, nesse caso, a dimensão $4 + D$ da fibra não precisa coincidir com a dimensão $4 + I$ do grupo de gauge.

Capítulo 2

Teleparalelismo

2.1 Teleparalelismo e sua Equivalência com a Relatividade Geral

O Teleparalelismo é considerado como sendo uma teoria de gauge para o grupo das translações. Neste caso, a transformação de gauge é definida como sendo uma translação local no espaço interno (tangente),

$$x'^a = x^a + \alpha^a(x^\mu), \quad (2.1)$$

onde estamos assumindo que o espaço interno é um espaço de Minkowski com a métrica

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.2)$$

Infinitesimalmente, a transformação de gauge (2.1) pode ser escrita como

$$\delta x^a = \delta \alpha^b P_b x^a, \quad (2.3)$$

com $P_a = \partial/\partial x^a$ sendo os geradores da transformação (translação) infinitesimal, e $\delta \alpha^a$ os parâmetros infinitesimais da transformação. O gerador das translações satisfaz a seguinte relação de comutação,

$$[P_a, P_b] = 0, \quad (2.4)$$

sendo portanto um grupo Abelian.

Definindo o potencial de gauge das translações como $A_\mu = A^a{}_\mu P_a$, vamos escrever o operador derivada covariante de gauge como:

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} A^a{}_\mu P_a, \quad (2.5)$$

onde c , a velocidade da luz, foi introduzida por razões dimensionais. Da imposição de covariância de D_μ sob as transformações infinitesimais (2.3), obtemos a lei de transformação infinitesimal do potencial de gauge,

$$A'^a{}_\mu = A^a{}_\mu - c^2 \partial_\mu \delta \alpha^a . \quad (2.6)$$

O operador derivada covariante (2.5) satisfaz a relação de comutação

$$[D_\mu, D_\nu] = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu} P_a , \quad (2.7)$$

com

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu \quad (2.8)$$

o campo de gauge das translações. Podemos ver que este campo é invariante sob as transformações de gauge (2.6).

O operador derivada covariante (2.5) pode também ser escrito na forma,

$$D_\mu = h^a{}_\mu \partial_a , \quad (2.9)$$

onde

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + c^{-2} A^a{}_\mu \equiv D_\mu x^a , \quad (2.10)$$

é uma tetrada não trivial, sendo o potencial de gauge gravitacional a parte não trivial da tetrada. Podemos ver que a tetrada é invariante sob as transformações de gauge (2.3) e (2.6). As tetradas satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade,

$$h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu; \quad h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a{}_b . \quad (2.11)$$

Dada uma tetrada não trivial, podemos definir a conexão de Weitzenböck,

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu . \quad (2.12)$$

Com esta conexão podemos definir a derivada covariante de Weitzenböck de um vetor V^ρ como

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} V^\nu . \quad (2.13)$$

Da definição (2.12), e usando as relações de ortogonalidade (2.11), podemos ver que a conexão de Weitzenböck transporta paralelamente a tetrada, ou seja,

$$\nabla_\mu h^a{}_\nu = \partial_\mu h^a{}_\nu - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} h^a{}_\rho = 0 . \quad (2.14)$$

Portanto, a existência de uma tetrada não trivial induz no espaço-tempo uma estrutura teleparalela que vai estar diretamente relacionada com a presença do campo gravitacional. De fato, dada a tetrada (2.10), o campo de gauge gravitacional (2.8) pode ser escrito como:

$$F^a{}_{\mu\nu} = c^2 h^a{}_{\rho} T^{\rho}{}_{\mu\nu} , \quad (2.15)$$

onde

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

é a torção da conexão de Weitzenböck. Desta forma, vemos que a presença do campo gravitacional (de gauge) $F^a{}_{\mu\nu}$ induz uma torção $T^{\rho}{}_{\mu\nu}$ no espaço-tempo. A curvatura da conexão de Weitzenböck é nula, ou seja,

$$R^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\theta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\theta\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\theta\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\theta\mu} = 0 . \quad (2.17)$$

Estamos, portanto, em um espaço-tempo de Weitzenböck, um espaço-tempo com torção diferente de zero, porém com curvatura nula. É fácil então ver que o operador derivada covariante de Weitzenböck satisfaz a seguinte relação de comutação:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\theta} = -T^{\rho}{}_{\mu\nu}\nabla_{\rho}V^{\theta} . \quad (2.18)$$

A Lagrangeana do campo de gauge gravitacional é escrita como [36]

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu} F^b{}_{\theta\rho} g^{\mu\theta} N_{ab}{}^{\nu\rho} \right) , \quad (2.19)$$

onde $h = \det(h^a{}_{\mu})$. No entanto, como os índices do espaço-tempo e do espaço tangente podem ser intercambiados devido a presença das tetradas, o tensor $N_{ab}{}^{\nu\rho}$, além do termo usual

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}g^{\nu\rho} = \eta_{ab}h_c{}^{\nu}h^{c\rho} , \quad (2.20)$$

deve incluir também todas as permutações cíclicas de a, b e c . Portanto, devemos ter

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}h_c{}^{\nu}h^{c\rho} + 2h_a{}^{\rho}h_b{}^{\nu} - 4h_a{}^{\nu}h_b{}^{\rho} . \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.19), e utilizando a Eq. (2.15), podemos reescrever a Lagrangeana gravitacional como

$$\mathcal{L}_G \equiv hL = \frac{c^4 h}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} , \quad (2.22)$$

onde,

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} = \frac{1}{4} (T^{\rho\mu\nu} + T^{\mu\rho\nu} - T^{\nu\rho\mu}) - \frac{1}{2} (g^{\rho\nu} T^{\theta\mu}{}_{\theta} - g^{\rho\mu} T^{\theta\nu}{}_{\theta}) . \quad (2.23)$$

Fazendo, agora, a variação de \mathcal{L}_G em relação a $A^a{}_{\tau}$ obtemos,

$$\partial_{\sigma}(hS_a{}^{\tau\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} h j^{\tau}{}_a = 0 , \quad (2.24)$$

onde $S_a{}^{\tau\sigma} = h_a{}^{\nu} S_{\nu}{}^{\tau\sigma}$ e, em analogia com as teorias de Yang-Mills [44],

$$h j^{\tau}{}_a \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial h^a{}_{\tau}} = \frac{c^4}{4\pi G} h h_a{}^{\mu} S_{\nu}{}^{\sigma\tau} T^{\nu}{}_{\sigma\mu} - h_a{}^{\tau} \mathcal{L}_G , \quad (2.25)$$

representa a corrente de gauge do campo gravitacional. Multiplicando (2.24) por $h^a{}_{\lambda}$ obtemos

$$\partial_{\sigma}(hS_{\lambda}{}^{\tau\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} h t^{\tau}{}_{\lambda} = 0 , \quad (2.26)$$

com

$$h t^{\tau}{}_{\lambda} = \frac{c^4}{4\pi G} h S_{\nu}{}^{\tau\sigma} \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\lambda} - \delta^{\tau}{}_{\lambda} \mathcal{L}_G \quad (2.27)$$

sendo o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional.

Vamos agora mostrar a equivalência entre a teoria de gauge para o grupo das translações e a Relatividade Geral. Notemos inicialmente que, enquanto no espaço interno a métrica usada é a métrica de Minkowski (2.2), no espaço-tempo a métrica usada é

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_{\mu} h^b{}_{\nu} . \quad (2.28)$$

Com esta métrica podemos introduzir a conexão de Levi-Civita,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\theta} (\partial_{\mu} g_{\theta\nu} + \partial_{\nu} g_{\theta\mu} - \partial_{\theta} g_{\mu\nu}) , \quad (2.29)$$

e definir a derivada covariante de Levi-Civita atuando num vetor V^{ρ} como,

$$\overset{\circ}{\nabla}{}_{\mu} V^{\rho} = \partial_{\mu} V^{\rho} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} V^{\nu} . \quad (2.30)$$

Pode-se mostrar que tanto a conexão de Levi-Civita, como também a conexão de Weitzenböck, preservam a métrica, isto é,

$$\overset{\circ}{\nabla}{}_{\rho} g_{\mu\nu} = \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.31)$$

A curvatura da conexão de Levi-Civita, dada por

$$\overset{\circ}{R}{}^{\rho}{}_{\theta\mu\nu} = \partial_{\mu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\theta\nu} - \partial_{\nu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\theta\mu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\sigma\mu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta\mu} , \quad (2.32)$$

representa a curvatura induzida no espaço-tempo devido a presença do campo gravitacional. A torção da conexão de Levi-Civita é nula. Portanto, estamos no espaço-tempo de Riemann, um espaço-tempo com curvatura diferente de zero e torção nula.

Como sabemos, o comutador da derivada covariante de Levi-Civita é

$$[\overset{\circ}{\nabla}_\mu, \overset{\circ}{\nabla}_\nu]V^\rho = \overset{\circ}{R}{}^\rho{}_{\theta\mu\nu}V^\theta. \quad (2.33)$$

Substituindo, agora, (2.28) em (2.29) obtemos uma relação entre as conexões de Levi-Civita e de Weitzenböck,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - K^\rho{}_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

onde

$$K^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu}{}^\rho{}_\nu + T_{\nu}{}^\rho{}_\mu - T^\rho{}_{\mu\nu}) \quad (2.35)$$

é o tensor de contorsão. Substituindo (2.34) em (2.32), obtemos

$$\overset{\circ}{R}{}^\rho{}_{\theta\mu\nu} = R^\rho{}_{\theta\mu\nu} - Q^\rho{}_{\theta\mu\nu} = -Q^\rho{}_{\theta\mu\nu}, \quad (2.36)$$

uma vez que $R^\rho{}_{\theta\mu\nu} = 0$, e

$$Q^\rho{}_{\theta\mu\nu} = \overset{\circ}{D}_\mu K^\rho{}_{\theta\nu} - \overset{\circ}{D}_\nu K^\rho{}_{\theta\mu} + K^\rho{}_{\sigma\mu}K^\sigma{}_{\theta\nu} - K^\rho{}_{\sigma\nu}K^\sigma{}_{\theta\mu}, \quad (2.37)$$

com $\overset{\circ}{D}_\mu$ a versão teleparalela do operador derivada covariante de Levi-Civita. Ou seja, ela é a derivada covariante de Levi-Civita reescrita em termos de magnitudes relacionadas a estrutura teleparalela [45]. Em outras palavras, $\overset{\circ}{D}_\mu$ é uma derivada covariante na qual a conexão de Levi-Civita $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho{}_{\nu\mu}$ foi substituída por $\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - K^\rho{}_{\nu\mu}$, de acordo com a expressão (2.34). Atuando num vetor V^ρ , por exemplo, ela se escreve como

$$\overset{\circ}{D}_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + (\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - K^\rho{}_{\nu\mu})V^\nu. \quad (2.38)$$

Analogamente a (2.33), vamos ter que,

$$[\overset{\circ}{D}_\mu, \overset{\circ}{D}_\nu]V^\rho = -Q^\rho{}_{\theta\mu\nu}V^\theta. \quad (2.39)$$

Pode-se mostrar que o tensor $Q^\rho{}_{\theta\mu\nu}$ possui relações de anti-simetria iguais ao do tensor $\overset{\circ}{R}{}^\rho{}_{\theta\mu\nu}$:

$$Q_{\rho\theta\mu\nu} = -Q_{\rho\theta\nu\mu}; \quad Q_{\rho\theta\mu\nu} = -Q_{\theta\rho\mu\nu}. \quad (2.40)$$

A Lagrangeana de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral é

$$\mathcal{L}_G = -\frac{c^4 \sqrt{-g}}{16\pi G} \overset{\circ}{R}, \quad (2.41)$$

com $g = \det(g_{\mu\nu})$. Fazendo as contrações adequadas em (2.36) e (2.37), obtemos

$$\overset{\circ}{R} = -Q = -(K^{\mu\rho\nu} K_{\nu\rho\mu} - K^{\mu\rho}{}_{\mu} K^{\nu}{}_{\rho\nu} - 2\overset{\circ}{D}_{\mu} K^{\nu\mu}{}_{\nu}). \quad (2.42)$$

No entanto, usando as Eqs. (2.35) e (2.23), a Lagrangeana (2.22) do Teleparalelismo pode também ser escrita como

$$\mathcal{L}_G = \frac{c^4 h}{16\pi G} (K^{\mu\nu\rho} K_{\rho\nu\mu} - K^{\mu\rho}{}_{\mu} K^{\nu}{}_{\rho\nu}). \quad (2.43)$$

Portanto, vemos que

$$-\sqrt{-g} \overset{\circ}{R} = hQ = hS^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \partial_{\mu} (2hT^{\nu\mu}{}_{\nu}), \quad (2.44)$$

onde fizemos a identificação $h = \sqrt{-g}$. Ou seja, as Lagrangeanas do Teleparalelismo e da Relatividade Geral são totalmente equivalentes, a menos de uma divergência total. Tendo em vista esta equivalência entre as Lagrangeanas, podemos mostrar que as equações de campo correspondentes também são equivalentes. Ou seja, de (2.36) e (2.37) podemos mostrar que

$$\frac{h}{2} \left(\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \overset{\circ}{R} \right) = \frac{h}{2} \left(-Q_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} Q \right) \equiv \partial_{\sigma} (hS_{\nu\mu}{}^{\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} h t_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Embora não seja trivial, podemos mostrar que a equação de campo (2.26) é simétrica. Com isto, demonstramos a equivalência entre as duas teorias. Podemos então dizer que a Relatividade Geral é na verdade equivalente a uma teoria de gauge para o grupo das translações.

À primeira vista, pode parecer que a equação de campo (2.26) não tem um caráter tensorial. No entanto, podemos escrevê-la como

$$h\overset{\circ}{D}_{\sigma} S_{\lambda}{}^{\tau\sigma} - hS_{\nu}{}^{\tau\sigma} K^{\nu}{}_{\sigma\lambda} + \frac{4\pi G}{c^4} \delta^{\tau}{}_{\lambda} \mathcal{L}_G = 0, \quad (2.46)$$

o que nos mostra que o lado esquerdo como um todo é um tensor verdadeiro.

2.2 Densidade de Energia-Momento do Campo Gravitacional

A definição de uma densidade de energia-momento para o campo gravitacional é um dos problemas mais antigos e controversos da gravitação. Sendo um campo verdadeiro, seria natural esperar que a gravitação tivesse sua própria densidade de energia-momento local. No entanto, geralmente se afirma que tal densidade não pode ser localmente definida por causa do princípio da equivalência [46]. Consequentemente, qualquer tentativa de identificar uma densidade de energia-momento para o campo gravitacional leva a grandezas que não são tensores verdadeiros. A primeira de tais tentativas foi feita por Einstein, que propôs uma expressão para a densidade de energia-momento do campo gravitacional que nada mais é do que a expressão canônica obtida pelo teorema de Noether [47]. De fato, esta quantidade é um pseudo-tensor, um objeto que depende do sistema de coordenadas. Várias outras tentativas foram feitas, levando a diferentes expressões para o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional [48, 49].

Apesar da existência de alguns pontos controversos relacionados à formulação do princípio da equivalência [50], parece verdade que, dentro do contexto da Relatividade Geral, não pode existir nenhuma expressão tensorial para a densidade de energia-momento canônica gravitacional. No entanto, como vamos mostrar, no contexto de gauge é possível a existência de uma expressão para a densidade de energia-momento gravitacional, que é um tensor verdadeiro. Por conseguinte, a ausência de tal expressão deve ser atribuída à descrição da Relatividade Geral da gravitação, que não parece ser o contexto apropriado para lidar com este problema [51].

Apesar de algum ceticismo [46], tem havido um interesse contínuo neste problema [52]. Em particular, um formalismo *quasilocal* foi proposto recentemente que é altamente esclarecedor [53]. De acordo com este formalismo, para cada pseudo-tensor energia-momento gravitacional, existe um *superpotencial* associado que é um termo Hamiltoniano de superfície. A densidade de energia-momento definida por tal pseudo-tensor não depende realmente no valor local do sistema de referência, mas apenas no valor do sistema de referência na superfície de uma região — daí seu caráter *quasilocal*. Como as condições de contorno nas superfícies relevantes são fisicamente aceitáveis, este formalismo de certa forma valida o formalismo pseudo-

tensorial para o problema da densidade de energia-momento gravitacional. Devemos mencionar que estes resultados foram obtidos dentro do contexto da Relatividade Geral.

No presente trabalho, vamos usar um formalismo diferente para reexaminar o problema da densidade de energia-momento gravitacional [38]. Por causa do caráter fundamental das estruturas geométricas que sustentam as teorias de gauge, o conceito de corrente, e em particular o conceito de energia e momento, são mais transparentes quando considerados do ponto de vista das teorias de gauge [54].

Como vimos, analogamente às teorias de Yang-Mills [44], a corrente de gauge gravitacional (2.25),

$$hj^{\tau}_{\ a} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial h^{\alpha}_{\ \tau}} = \frac{c^4}{4\pi G} hh_{\alpha}^{\ \mu} S_{\nu}^{\ \sigma\tau} T^{\nu}_{\ \sigma\mu} - h_{\alpha}^{\ \tau} \mathcal{L}_G, \quad (2.47)$$

representa a energia e o momento do campo gravitacional. Esta corrente se transforma covariantemente sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo, é invariante sob translações locais (de gauge) nas coordenadas do espaço tangente, e covariante sob transformações locais de Lorentz no espaço tangente. Consequentemente, $j^{\tau}_{\ a}$ é um tensor verdadeiro.

O termo $hS_{\alpha}^{\ \tau\sigma}$ em (2.24) é chamado de *superpotencial*, no sentido de que a sua derivada nos fornece a corrente de gauge $hj^{\tau}_{\ a}$. Devido a sua anti-simetria nos dois últimos índices, podemos ver que $hj^{\tau}_{\ a}$ é conservado como consequência das equações de campo,

$$\partial_{\tau}(hj^{\tau}_{\ a}) = 0. \quad (2.48)$$

Fazendo uso da identidade

$$\partial_{\tau}h = h\Gamma^{\nu}_{\ \nu\tau} = h(\Gamma^{\nu}_{\ \tau\nu} - K^{\nu}_{\ \tau\nu}), \quad (2.49)$$

a lei de conservação acima pode ser escrita como

$$\overset{\circ}{D}_{\tau}j^{\tau}_{\ a} = \partial_{\tau}j^{\tau}_{\ a} + (\Gamma^{\tau}_{\ \nu\tau} - K^{\tau}_{\ \nu\tau})j^{\nu}_{\ a} = 0, \quad (2.50)$$

onde, como já vimos, $\overset{\circ}{D}_{\tau}$ é a derivada covariante teleparalela, que nada mais é do que a derivada covariante de Levi-Civita da Relatividade Geral reescrita em termos da conexão de Weitzenböck [45].

Quando multiplicamos a Eq. (2.24) por uma tetrad, obtemos a Eq. (2.26), onde agora

$$ht^\tau{}_\lambda = \frac{c^4}{4\pi G} h S_\nu{}^{\tau\sigma} \Gamma^\nu{}_{\sigma\lambda} - \delta^\tau{}_\lambda \mathcal{L}_G, \quad (2.51)$$

representa a versão teleparalela do pseudo-tensor energia-momento canônico do campo gravitacional. Notemos que o pseudo-tensor $t^\tau{}_\lambda$ não é simplesmente a corrente de gauge $j^\tau{}_a$ multiplicado por uma tetrad. Ele incorpora um termo vindo do termo de derivada da Eq. (2.24):

$$ht^\tau{}_\lambda = h h^a{}_\lambda j^\tau{}_a + \frac{c^4}{4\pi G} h S_\nu{}^{\tau\sigma} \Gamma^\nu{}_{\lambda\sigma}. \quad (2.52)$$

Portanto, vemos claramente a origem do termo envolvendo a conexão, o qual transforma a corrente de gauge $j^\tau{}_a$ no pseudo-tensor energia-momento $t^\tau{}_\lambda$. Por esse mesmo mecanismo, podemos trocar outros termos entre o termo de derivada e de corrente em (2.26), fornecendo-nos diferentes definições para o pseudo-tensor energia-momento, cada um deles ligado a um superpotencial $h S_\lambda{}^{\tau\sigma}$ diferente. Assim como a corrente de gauge $h j^\tau{}_a$, o pseudo-tensor $ht^\tau{}_\lambda$ também é conservado como consequência das equações de campo:

$$\partial_\tau(ht^\tau{}_\lambda) = 0. \quad (2.53)$$

No entanto, ao contrário do que acontece com $j^\tau{}_a$, devido ao caráter pseudo-tensorial de $t^\tau{}_\lambda$, esta lei de conservação não pode ser escrita como uma derivada covariante.

Por causa da sua simplicidade e transparência, o formalismo teleparalelo da gravitação parece ser mais apropriado que o da Relatividade Geral para lidar com o problema da energia do campo gravitacional. De fato, Møller [26] notou tempos atrás que uma solução satisfatória para o problema da distribuição de energia em um campo gravitacional poderia ser obtido dentro do contexto de uma teoria de tetradas. Sua expressão para a densidade de energia-momento gravitacional, na nossa notação é

$$ht^\tau{}_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau h^a{}_\sigma)} \partial_\lambda h^a{}_\sigma - \delta^\tau{}_\lambda \mathcal{L}, \quad (2.54)$$

que nada mais é do que o pseudo-tensor energia-momento canônico usual obtido pelo teorema de Noether. Substituindo \mathcal{L} pela Lagrangeana de gauge (2.22), é fácil verificar que a expressão de Møller coincide exatamente com a densidade de energia-momento teleparalela que aparece nas equações de campo (2.26) e (2.27). Como $j^\tau{}_a$

é um tensor verdadeiro, enquanto que t^τ_λ não é, podemos dizer que a corrente de gauge j^τ_a é uma versão melhorada da densidade de energia-momento de Møller t^τ_λ . Matematicamente, eles podem ser obtidos um do outro através da Eq. (2.52).

2.3 A Conexão de Spin

Na ausência de campos espinoriais, a equivalência da gravitação teleparalela [35] com a Relatividade Geral é um assunto bem estabelecido [36]. No entanto, na presença de campos espinoriais acredita-se que esta equivalência seja quebrada [29]. O motivo para isto é que, na gravitação teleparalela, acredita-se que a conexão de spin se anule. Vamos, então, mostrar que esta conclusão não é apropriada, e que ela vem de uma escolha particular da conexão de spin teleparalela. Propomos uma nova expressão para a conexão de spin, segundo a qual a gravitação teleparalela se torna mais consistente e totalmente equivalente a Relatividade Geral, mesmo na presença de campos espinoriais.

A interação de um campo de matéria geral com a gravitação, pode ser obtido através da aplicação da prescrição de acoplamento minimal, de acordo com a qual todas as derivadas ordinárias devem ser substituídas por derivadas covariantes. Como as conexões de gauge (ou potenciais) são usados na construção de derivadas covariantes, eles são os objetos mais importantes na descrição de uma interação. No caso específico da gravitação (Relatividade Geral), a conexão importante é a conexão de spin

$$\overset{\circ}{\omega}_\mu = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\omega}^{ab}{}_\mu S_{ab} , \quad (2.55)$$

que é uma conexão que assume valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz, com S_{ab} o gerador de spin do grupo de Lorentz em uma representação apropriada. Neste caso, a prescrição de acoplamento minimal da gravitação transforma as derivadas ordinárias na derivada covariante de Fock-Ivanenko [55]

$$\overset{\circ}{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \overset{\circ}{\omega}^{ab}{}_\mu S_{ab} . \quad (2.56)$$

Além da prescrição do acoplamento minimal, o campo gravitacional requer também a substituição da métrica de Minkowski η_{ab} pela métrica de Riemann $g_{\mu\nu}$ dada por (2.28). Esta é uma propriedade particular apresentada apenas pela interação gravitacional.

A conexão de spin da Relatividade Geral é [56]

$$\hat{\omega}^a{}_{b\mu} = h^a{}_\rho h_b{}^\nu \hat{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} + h^a{}_\rho \partial_\mu h_b{}^\rho \equiv h^a{}_\rho \hat{\nabla}_\mu h_b{}^\rho . \quad (2.57)$$

Agora, vem uma questão importante. Como é bem conhecido, a tetrada pode ser usada para transformar tensores de Lorentz em tensores de espaço-tempo, e vice-versa [57]. Por exemplo, o vetor de Lorentz V^a está relacionado com o vetor de espaço-tempo correspondente V^μ por

$$V^a = h^a{}_\mu V^\mu . \quad (2.58)$$

No entanto, conexões não se transformam covariantemente sob esta transformação. Eles ganham um termo não homogêneo (de vácuo) na sua transformação, como podemos ver de (2.57).

A derivada covariante (2.56) de um tensor de Lorentz se reduz a derivada covariante de Levi-Civita do tensor correspondente de espaço-tempo. Por exemplo, tomemos um vetor V^a com a representação apropriada para o gerador de spin [44],

$$(S_{ab})^c{}_d = i(\delta^c{}_a \eta_{bd} - \delta^c{}_b \eta_{ad}) . \quad (2.59)$$

Podemos, então, ver que

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu V^a = h^a{}_\nu \hat{\nabla}_\mu V^\nu . \quad (2.60)$$

Por outro lado, não existe representação de espaço-tempo para campos com spin semi-inteiro [58]. Consequentemente não podemos definir uma derivada covariante de Levi-Civita para esses campos. Portanto, a única forma de definir uma derivada covariante para um spinor de Dirac, por exemplo, é aquele dado em termos da conexão de spin,

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \hat{\omega}^{ab}{}_\mu S_{ab} \psi , \quad (2.61)$$

onde

$$S_{ab} = -\frac{1}{2} \sigma_{ab} = \frac{i}{4} [\gamma_a, \gamma_b] , \quad (2.62)$$

é o gerador de spin para campos de spin 1/2, σ_{ab} é o gerador das transformações de Lorentz e γ_a são as matrizes de Dirac. Podemos, então, dizer que a derivada covariante de Fock-Ivanenko (2.56) é mais fundamental do que a derivada covariante de Levi-Civita, pois é capaz de descrever, através da prescrição de acoplamento minimal, a interação gravitacional tanto de campos tensoriais como espinoriais.

De forma a obtermos a versão teleparalela da prescrição de acoplamento minimal, precisamos encontrar primeiro a conexão de spin teleparalela correta [40]. Baseados na definição (2.57), que nos fornece a conexão de spin na Relatividade Geral, podemos começar fazendo a seguinte tentativa,

$$\omega^a{}_{b\mu} = h^a{}_\rho h_b{}^\nu \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} + h^a{}_\rho \partial_\mu h_b{}^\rho \equiv h^a{}_\rho \nabla_\mu h_b{}^\rho . \quad (2.63)$$

No entanto, como consequência da condição de paralelismo absoluto (2.14), vemos que $\omega^a{}_{b\mu} = 0$. Porém, isto não quer dizer que no Teleparalelismo a conexão de spin seja nula. Significa apenas que nos não fizemos uma escolha apropriada.

Vamos então, adotar um procedimento diferente para procurar pela conexão de spin teleparalela. Vamos a procurar uma prescrição de acoplamento que resulte ser equivalente a prescrição de acoplamento da Relatividade Geral. Isto pode ser feito usando a Eq. (2.34) e reescrevendo-a na base de tetradas. Usando a lei de transformação das conexões (2.57) e (2.63) obtemos

$$\tilde{\omega}^a{}_{b\mu} = -K^a{}_{b\mu} + 0 , \quad (2.64)$$

onde

$$K^a{}_{b\mu} = h^a{}_\rho h_b{}^\nu K^\rho{}_{\nu\mu} , \quad (2.65)$$

e onde usamos o fato que $\omega^a{}_{b\mu} = 0$. Notemos que a *conexão nula* aparecendo em (2.64) é crucial no sentido de que ela é a responsável por tornar o lado direito desta equação uma conexão verdadeira. Portanto, baseados nestas considerações, podemos dizer que a conexão de spin teleparalela é dada por *menos* o tensor de contorção mais uma conexão *nula*:

$$\Gamma^a{}_{b\mu} = -K^a{}_{b\mu} + 0 . \quad (2.66)$$

É importante observar que, diferentemente de $\tilde{\omega}^a{}_{b\mu}$, a qual depende apenas na conexão de Levi-Civita (ver a Eq. (2.57)), $\Gamma^a{}_{b\mu}$ depende apenas na conexão de Weitzenböck.

Como qualquer conexão que assume valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz, $\Gamma^a{}_{b\mu}$ é anti-simétrico nos dois primeiros índices. Além disso, sob transformações locais de Lorentz ele se transforma como

$$\delta\Gamma^a{}_{b\mu} = -\mathcal{D}_\mu \epsilon^a{}_b , \quad (2.67)$$

onde

$$\mathcal{D}_\mu \epsilon^a_b = \partial_\mu \epsilon^a_b + \Gamma^a_{c\mu} \epsilon^c_b - \Gamma^c_{b\mu} \epsilon^a_c, \quad (2.68)$$

é a derivada covariante de ϵ^a_b com $\Gamma^a_{b\mu}$ sendo a conexão. A Eq. (2.67) é a lei de transformação usual dos potenciais de gauge nas teorias de gauge não-Abelianas [44]. Vemos assim que $\Gamma^a_{b\mu}$ faz o papel de uma conexão de Lorentz no Teleparalelismo. Em outras palavras, $\Gamma^a_{b\mu}$ é a conexão de spin da gravitação teleparalela. Desta forma, a derivada covariante de Fock-Ivanenko teleparalela é escrita como

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \Gamma^ab_{\ \mu} S_{ab}. \quad (2.69)$$

A Eq. (2.68) é um caso particular desta derivada covariante, obtida tomando a representação de spin-2 do gerador S_{ab} [44].

A derivada covariante (2.69) apresenta todas as propriedades necessárias para ser considerada a prescrição de acoplamento fundamental na gravitação teleparalela. Por exemplo, ela se transforma covariantemente sob transformações locais de Lorentz,

$$\mathcal{D}'_\mu = U \mathcal{D}_\mu U^{-1}. \quad (2.70)$$

Outra propriedade importante é que a prescrição de acoplamento teleparalela definida pela derivada covariante (2.69) torna-se completamente equivalente à prescrição de acoplamento minimal usual da Relatividade Geral. De fato, ela é a prescrição de acoplamento minimal da Relatividade Geral reescrita em termos de magnitudes relacionadas à estrutura teleparalela. Analogamente à Relatividade Geral, a derivada covariante de Fock-Ivanenko (2.69) é a única que descreve campos espinoriais na gravitação teleparalela, ou seja,

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \Gamma^ab_{\ \mu} S_{ab} \psi, \quad (2.71)$$

com S_{ab} dada por (2.62). Por outro lado, para campos tensoriais existe também uma derivada covariante de espaço-tempo que atua no tensor de espaço-tempo correspondente. Como um exemplo, vamos a considerar de novo um vetor de Lorentz V^a . Usando o gerador (2.59), podemos ver que

$$\mathcal{D}_\mu V^a = h^a_{\ \nu} \overset{\circ}{D}_\mu V^\nu, \quad (2.72)$$

onde $\overset{\circ}{D}_\mu V^\nu$ é dado por (2.38). Notemos que esta derivada covariante fornece o análogo gravitacional da equação de força de Lorentz, a qual se reduz à equação

da geodésica da Relatividade Geral quando reescrita em termos de magnitudes da estrutura Riemanniana [36].

2.4 As Identidades de Bianchi

Como é bem conhecido, as leis *dinâmicas* que governam a conservação da densidade de energia-momento de qualquer sistema físico pode ser obtido do teorema de Noether [59]. Por outro lado, a gravitação assim como os campos de gauge apresentam algumas identidades puramente *geométricas*, chamadas de identidades de Bianchi. Embora estas identidades não determinem as leis de conservação *dinâmicas*, eles devem ser necessariamente consistentes com as leis de conservação. Um exemplo simples desta consistência é fornecido pela Relatividade Geral. De fato, a forma contraída da segunda identidade de Bianchi nos diz que a derivada covariante do tensor de Einstein — isto é, o lado esquerdo das equações de Einstein — se anula identicamente. Esta identidade é consistente com o teorema de Noether, de acordo com o qual o tensor energia-momento da fonte — isto é, o lado direito das equações de Einstein — é conservado com a mesma derivada covariante.

Analogamente à teoria de Maxwell, a primeira identidade de Bianchi para a teoria de gauge para o grupo das translações é

$$\partial_\rho F^a_{\mu\nu} + \partial_\nu F^a_{\rho\mu} + \partial_\mu F^a_{\nu\rho} = 0. \quad (2.73)$$

Utilizando as Eqs. (2.15) e (2.37), esta identidade pode ser escrita como

$$Q^\rho_{\theta\mu\nu} + Q^\rho_{\nu\theta\mu} + Q^\rho_{\mu\nu\theta} = 0. \quad (2.74)$$

Contraíndo esta identidade com δ^θ_ρ obtemos

$$Q_{\nu\mu} - Q_{\mu\nu} = 0. \quad (2.75)$$

Ou seja, o tensor $Q_{\mu\nu}$ é simétrico. Fazendo uso da Eq. (2.36), podemos ver que as identidades acima coincidem com a primeira identidade de Bianchi da Relatividade Geral,

$$\mathring{R}^\rho_{\theta\mu\nu} + \mathring{R}^\rho_{\nu\theta\mu} + \mathring{R}^\rho_{\mu\nu\theta} = 0. \quad (2.76)$$

Assim, a identidade de Bianchi (2.73) do Teleparalelismo é totalmente equivalente à primeira identidade de Bianchi (2.76) da Relatividade Geral. No entanto, ao

contrário das teorias de gauge *internas* usuais, a gravitação teleparalela não apresenta a simetria de dualidade. De fato, quando escrito para o dual [57] $\tilde{F}^a{}_{\mu\nu} = (h/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{a\rho\sigma}$, a identidade de Bianchi (2.73) se torna

$$\partial_\rho(hF^{a\mu\rho}) = 0, \quad (2.77)$$

que não é a equação de campo (2.26).

Analogamente à Relatividade Geral, a gravitação teleparalela apresenta também uma segunda identidade de Bianchi,

$$\mathring{D}_\sigma Q_{\rho\theta\mu\nu} + \mathring{D}_\nu Q_{\rho\theta\sigma\mu} + \mathring{D}_\mu Q_{\rho\theta\nu\sigma} = 0. \quad (2.78)$$

Esta identidade é equivalente à segunda identidade de Bianchi da Relatividade Geral,

$$\mathring{\nabla}_\sigma \mathring{R}_{\rho\theta\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\nu \mathring{R}_{\rho\theta\sigma\mu} + \mathring{\nabla}_\mu \mathring{R}_{\rho\theta\nu\sigma} = 0, \quad (2.79)$$

cuja forma contraída é:

$$\mathring{\nabla}_\mu \left[\mathring{R}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu \mathring{R} \right] = 0. \quad (2.80)$$

Por um procedimento similar, a forma contraída da identidade de Bianchi (2.78) resulta

$$\mathring{D}_\mu \left[\partial_\sigma (hS_\nu{}^{\mu\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} ht^\mu{}_\nu \right] = 0. \quad (2.81)$$

Isto significa simplesmente que a derivada covariante teleparalela da equação de campo (2.26) se anula identicamente.

Até agora, consideramos apenas a equação de campo sem fonte. De modo a obtermos a equação de campo na presença de campos de matéria, devemos tomar a Lagrangeana total

$$\mathcal{L}_T = \frac{c^4 h}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \mathcal{L}_M, \quad (2.82)$$

onde \mathcal{L}_M é a Lagrangeana de um campo de matéria qualquer. A variação desta Lagrangeana total em relação a tetrada é

$$\partial_\sigma (hS_\lambda{}^{\tau\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} ht^\tau{}_\lambda = \frac{4\pi G}{c^4} h\mathcal{T}^\tau{}_\lambda, \quad (2.83)$$

onde

$$h\mathcal{T}^\tau{}_\lambda = -h^a{}_\lambda \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta h^a{}_\tau} = h^a{}_\lambda \left[\partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\sigma h^a{}_\tau)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial h^a{}_\tau} \right], \quad (2.84)$$

é o tensor energia-momento *dinâmico* do campo de matéria. Denotamos por tensor energia-momento dinâmico a fonte da gravitação, isto é, o tensor que aparece no lado direito da equação de campo gravitacional. Devemos mencionar que, como consequência da invariância local de Lorentz da Lagrangeana de matéria, o tensor energia-momento dinâmico (2.84) é sempre simétrico, mesmo para um campo espinorial.

De modo a ser consistente com a segunda identidade de Bianchi (2.81), e levando em conta que $\overset{\circ}{D}_\tau h = 0$, vemos da equação de campo (2.83) que o tensor energia-momento de matéria deve satisfazer a lei de conservação

$$\overset{\circ}{D}_\tau \mathcal{T}^\tau{}_\lambda = 0. \quad (2.85)$$

Consequentemente, vemos que no Teleparalelismo não é a derivada covariante de Weitzenböck ∇_τ , definida em (2.13), que dá a lei de conservação correta para os tensores energia-momento dos campos de matéria, mas sim a derivada covariante teleparalela $\overset{\circ}{D}_\tau$, definida em (2.38). É importante observar que esta lei de conservação também poderia ter sido obtida diretamente do teorema de Noether, e que ela é uma lei de conservação forte, no sentido de que ela é satisfeita independentemente das equações de campo. Além disso, ela é equivalente à lei de conservação da Relatividade Geral,

$$\overset{\circ}{\nabla}_\tau \mathcal{T}^\tau{}_\lambda \equiv \partial_\tau \mathcal{T}^\tau{}_\lambda + \overset{\circ}{\Gamma}^\tau{}_{\nu\tau} \mathcal{T}^\nu{}_\lambda - \overset{\circ}{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\tau} \mathcal{T}^\tau{}_\nu = 0, \quad (2.86)$$

como pode ser verificado usando a relação (2.34).

2.4.1 O Tensor Energia-Momento do Campo de Dirac

Como exemplo da definição (2.84), calcularemos o tensor energia-momento do campo de Dirac. Antes, porém, daremos uma breve revisão das propriedades fundamentais do campo de Dirac no espaço-tempo de Minkowski. A Lagrangeana de Dirac é:*

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \partial_a \psi - \partial_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi, \quad (2.87)$$

onde, como já vimos, γ^a são as matrizes de Dirac. Do teorema de Noether obtemos que o tensor energia-momento canônico e de spin são respectivamente,

$$\theta^a{}_b = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \partial_b \psi - \partial_b \bar{\psi} \gamma^a \psi), \quad (2.88)$$

*Usaremos nesta parte unidades nas quais $\hbar = c = 1$

e

$$S^a{}_{bc} = \frac{1}{4} \left(\bar{\psi} \gamma^a \sigma_{bc} \psi + \bar{\psi} \sigma_{bc} \gamma^a \psi \right) . \quad (2.89)$$

Notemos que $\theta^a{}_b$ não é simétrico. Usando o método de Belinfante podemos definir o tensor energia-momento simétrico como,

$$\Theta^{ab} = \theta^{ab} - \frac{1}{2} \partial_c \varphi^{cab} , \quad (2.90)$$

onde

$$\varphi^{cab} = -\varphi^{acb} = S^{cab} + S^{abc} - S^{bca} . \quad (2.91)$$

Pode-se mostrar que

$$\partial_c \varphi^{cab} = \theta^{ab} - \theta^{ba} , \quad (2.92)$$

o qual, quando substituído em (2.90), mostra que Θ^{ab} é de fato simétrico.

Agora, passemos para o caso gravitacional. Neste caso, a Lagrangeana de Dirac é

$$\mathcal{L}_D = h \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^a h_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}_\mu^* \bar{\psi} h_a{}^\mu \gamma^a \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \right] , \quad (2.93)$$

onde a derivada covariante de Fock-Ivanenko teleparalela \mathcal{D}_μ é dada por (2.71), ou equivalentemente,

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} K^{bc}{}_\mu \sigma_{bc} \psi; \quad \mathcal{D}_\mu^* \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{4} K^{bc}{}_\mu \bar{\psi} \sigma_{bc} , \quad (2.94)$$

onde não colocamos o termo de conexão nula por simplicidade. As equações de Dirac teleparalelas correspondentes são:

$$i \gamma^a h_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m \psi = 0; \quad i h_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu^* \bar{\psi} \gamma^a + m \bar{\psi} = 0 . \quad (2.95)$$

Multiplicando estas equações por $\bar{\psi}$ e ψ respectivamente e somando-as, podemos ver que

$$h_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu (\bar{\psi} \gamma^a \psi) = \overset{\circ}{D}_\mu (h_a{}^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi) = 0 . \quad (2.96)$$

Ou seja, a corrente $J^\mu = h_a{}^\mu \bar{\psi} \gamma^a \psi$ é conservada.

Usando a Lagrangeana (2.93), o tensor energia-momento (2.84) resulta ser

$$\mathcal{T}^\tau{}_a = h_a{}^\mu h_b{}^\tau \tilde{\theta}^b{}_\mu - \frac{1}{2} h^{b\tau} h^{c\mu} \mathcal{D}_\mu \varphi_{cba} , \quad (2.97)$$

onde

$$\tilde{\theta}^b{}_\mu = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^b \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}_\mu^* \bar{\psi} \gamma^b \psi \right) , \quad (2.98)$$

é o tensor energia-momento canônico modificado pela presença da gravitação, e φ_{cba} é ainda dado por (2.91). Multiplicando (2.97) por $h^{a\lambda}$ obtemos

$$\mathcal{T}^{\tau\lambda} = \tilde{\theta}^{\tau\lambda} - \frac{1}{2} \mathring{D}_\mu \varphi^{\mu\tau\lambda}, \quad (2.99)$$

onde $\gamma^\tau = \gamma^b h_b^\tau$, e onde usamos a identidade

$$\mathring{D}_\mu \varphi^{\mu\tau\lambda} = h^{a\lambda} h^{b\tau} h^{c\mu} \mathcal{D}_\mu \varphi_{cba}. \quad (2.100)$$

Da conservação do tensor energia-momento dos campos de matéria temos,

$$\mathring{D}_\tau \mathcal{T}^{\tau\lambda} \equiv \mathring{D}_\tau \tilde{\theta}^{\tau\lambda} - \frac{1}{2} \mathring{D}_\tau \mathring{D}_\mu \varphi^{\mu\tau\lambda} = 0, \quad (2.101)$$

e consequentemente,

$$\mathring{D}_\tau \tilde{\theta}^{\tau\lambda} = \frac{1}{2} \mathring{D}_\tau \mathring{D}_\mu \varphi^{\mu\tau\lambda} = -\frac{1}{4} [\mathring{D}_\mu, \mathring{D}_\tau] \varphi^{\mu\tau\lambda} = \frac{1}{4} Q^\lambda{}_{\nu\mu\tau} \mathcal{S}^{\mu\tau\nu}. \quad (2.102)$$

Notemos que, embora o tensor energia-momento gravitacional $\mathcal{T}^{\tau\lambda}$ seja conservado, o tensor energia-momento canônico $\tilde{\theta}^{\tau\lambda}$ não é. Sua derivada covariante nos dá o produto do tensor $Q^\lambda{}_{\nu\mu\rho}$ com o tensor de spin, que é a versão teleparalela do acoplamento de Papapetrou.

A equação (2.99) é uma generalização do processo de Belinfante na presença da gravitação. De fato, podemos mostrar que

$$\mathring{D}_\mu \varphi^{\mu\tau\lambda} = g^{\mu\lambda} \tilde{\theta}^\tau{}_\mu - g^{\mu\tau} \tilde{\theta}^\lambda{}_\mu, \quad (2.103)$$

o que junto com (2.99) mostra que o tensor energia-momento gravitacional $\mathcal{T}^{\tau\lambda}$ do campo de Dirac, ou seja, a derivada funcional de Euler-Lagrange da Lagrangeana de Dirac (2.93) com relação a tetrada, é sempre simétrica. Embora não seja óbvio, a definição (2.84) nos fornece um tensor energia-momento simétrico. Este mesmo resultado pode ser obtido pela invariância local de Lorentz da Lagrangeana de Dirac [65].

De acordo com a prescrição de acoplamento teleparalela, a Lagrangeana do campo espinorial pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_D = h \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \frac{1}{2} K^{bc}{}_\mu \mathcal{S}^\mu{}_{bc} - m \bar{\psi} \psi \right]. \quad (2.104)$$

Vemos desta forma que o tensor de spin do campo de Dirac se acopla ao tensor de contorção. Devemos notar que o primeiro termo de (2.104) não representa uma

Lagrangeana livre, mas uma Lagrangeana da qual apenas o acoplamento de spin com a gravitação foi removido. Além do mais, vemos que o tensor de spin, analogamente ao tensor de energia-momento, tem a seguinte definição,

$$S^{\mu}_{bc} = \frac{2}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta K^{\prime bc}_{\mu}}. \quad (2.105)$$

2.5 Densidade de Energia-Momento Simétrica do Campo Gravitacional

Como o pseudo-tensor energia-momento canônico do campo gravitacional t^{τ}_{λ} não é simétrico, vamos usar o método de Belinfante para obter sua versão simétrica. No entanto, para fazermos isso precisamos primeiro obter o tensor de spin gravitacional S^{τ}_{ab} . Usaremos, então, a definição [60]

$$hS^{\tau}_{ab} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta K^{\prime ab}_{\tau}}, \quad (2.106)$$

onde $K^{\prime ab}_{\tau}$ é o tensor de contorção. Assim, fazendo esta variação na Lagrangeana (2.43) obtemos,

$$hS^{\tau}_{ab} = \frac{c^4 h}{8\pi G} h_a^{\mu} h_b^{\nu} (K^{\tau}_{\nu\mu} - K^{\tau}_{\mu\nu} + \delta^{\tau}_{\nu} K^{\theta}_{\mu\theta} - \delta^{\tau}_{\mu} K^{\theta}_{\nu\theta}). \quad (2.107)$$

Contraindo esta equação com $h^{a\lambda} h^{b\sigma}$, e utilizando (2.23), chegamos à seguinte expressão para o tensor de spin do campo gravitacional:

$$hS^{\tau\lambda\sigma} = \frac{c^4 h}{4\pi G} (S^{\lambda\tau\sigma} - S^{\sigma\tau\lambda}). \quad (2.108)$$

Derivando o tensor de spin em relação a x^{τ} e usando a equação de campo (2.26) obtemos,

$$\partial_{\tau}(hS^{\tau\lambda\sigma}) = ht^{\lambda\sigma} - ht^{\sigma\lambda}. \quad (2.109)$$

Ou seja, a parte anti-simétrica do pseudo-tensor energia-momento canônico do campo gravitacional nos dá a divergência do tensor de spin. Portanto, de acordo com o método de Belinfante, a versão simétrica de $t^{\tau\lambda}$, denotada por $\tau^{\tau\lambda}$, é dada por [61],

$$h\tau^{\tau\lambda} = ht^{\tau\lambda} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma}(h\varphi^{\sigma\tau\lambda}). \quad (2.110)$$

Usando (2.91) e (2.108) obtemos,

$$h\tau^{\tau\lambda} = -\frac{c^4}{4\pi G} \left[\partial_{\sigma}(hS^{\lambda\tau\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} ht^{\tau\lambda} \right]. \quad (2.111)$$

Comparando com a Eq. (2.26), vemos que a densidade de energia-momento simétrica coincide com o lado esquerdo da equação de campo gravitacional, e é portanto um tensor verdadeiro. Além disso, como consequência da identidade de Bianchi (2.81), vemos que, analogamente ao tensor energia-momento de matéria, $\tau^{\tau\lambda}$ é covariantemente conservado:

$$\overset{\circ}{D}_\tau \tau^{\tau\lambda} = 0. \quad (2.112)$$

Como o tensor energia-momento de matéria $\mathcal{T}^{\tau\lambda}$ é também conservado covariantemente, nos temos que

$$\overset{\circ}{D}_\tau (\tau^{\tau\lambda} + \mathcal{T}^{\tau\lambda}) = 0. \quad (2.113)$$

No entanto, de acordo com esta construção, o tensor energia-momento total de qualquer sistema físico se anula identicamente: $\tau^{\tau\lambda} + \mathcal{T}^{\tau\lambda} = 0$. Por outro lado, como consequência da equação de campo, a soma do pseudo-tensor energia-momento canônico e do tensor energia-momento de matéria é conservado com a derivada ordinária,

$$\partial_\tau [h(t^{\tau\lambda} + \mathcal{T}^{\tau\lambda})] = 0. \quad (2.114)$$

Capítulo 3

Equivalente Teleparalelo de Kaluza-Klein Abeliana

3.1 A Teoria Original de Kaluza-Klein

A idéia original de Kaluza foi estender a Relatividade Geral de Einstein a um espaço-tempo de cinco dimensões. Em linguagem moderna, assume-se uma variedade (pseudo) Riemanniana penta-dimensional R^5 , dado pelo produto entre o espaço-tempo quadri-dimensional R^4 e o círculo S^1 , isto é: $R^5 = R^4 \otimes S^1$. Um ponto neste espaço é denotado pelas coordenadas* $x^M = (x^\mu, x^5)$, onde x^μ é a coordenada de R^4 e x^5 é a coordenada de S^1 . A métrica γ_{MN} de R^5 é, em princípio, uma função das coordenadas x^μ e x^5 : $\gamma_{MN} = \gamma_{MN}(x^\mu, x^5)$. No entanto, Kaluza impôs a “condição cilíndrica”, isto é, ele impôs que

$$\frac{\partial \gamma_{MN}}{\partial x^5} = 0 . \quad (3.1)$$

Sob uma translação no espaço-tempo,

$$x'^M = x^M + \xi^M(x^\mu, x^5) , \quad (3.2)$$

vemos que a variação na forma da métrica é dada por

$$\delta \gamma_{MN} = -\xi^L \partial_L \gamma_{MN} - \gamma_{ML} \partial_N \xi^L - \gamma_{NL} \partial_M \xi^L . \quad (3.3)$$

Se fizermos uma translação apenas nas coordenadas do espaço-tempo quadri-dimensional, isto é, $\xi^M = (\xi^\mu(x^\nu), 0)$, vemos que as componentes $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu 5}$ e γ_{55} mudam

*Nesta seção usaremos a seguinte notação: a segunda parte do alfabeto latino maiúsculo $L, M, N, \dots = 0, \dots, 3, 5$ vai ser usada para denotar índices relacionados ao espaço-tempo penta-dimensional, enquanto que o alfabeto grego $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, \dots, 3$ vai ser usado para denotar índices relacionados ao espaço-tempo quadri-dimensional.

como

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_{\mu\nu} &= -\xi^\rho \partial_\rho \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho - \gamma_{\nu\rho} \partial_\mu \xi^\rho, \\
\delta\gamma_{\mu 5} &= -\xi^\rho \partial_\rho \gamma_{\mu 5} - \gamma_{5\rho} \partial_\mu \xi^\rho, \\
\delta\gamma_{55} &= -\xi^\rho \partial_\rho \gamma_{55}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ou seja, as componentes $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu 5}$ e γ_{55} se transformam respectivamente como um tensor, um vetor e um escalar. No entanto, se fizermos uma translação apenas na quinta coordenada, isto é, $\xi^M = (0, \xi^5(x^\mu))$, vemos que as componentes $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu 5}$ e γ_{55} mudam como

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_{\mu\nu} &= -\gamma_{\mu 5} \partial_\nu \xi^5 - \gamma_{\nu 5} \partial_\mu \xi^5, \\
\delta\gamma_{\mu 5} &= -\gamma_{55} \partial_\mu \xi^5, \\
\delta\gamma_{55} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, vemos que uma translação na coordenada da variedade compacta induz na componente $\gamma_{\mu 5}$ uma “transformação de gauge Abeliana”: $\delta(\gamma_{\mu 5}/\gamma_{55}) = -\partial_\mu \xi^5$. Isto significa que a variedade compacta fornece a simetria interna para o grupo de gauge (Abeliano). A simetria interna deve ser, agora, interpretada como apenas uma outra simetria do espaço-tempo, mas associada com a dimensão espacial extra compacta. Contudo, a componente $\gamma_{\mu\nu}$ não é “invariante de gauge”. No entanto, se definirmos um tensor $g_{\mu\nu}$ da seguinte forma,

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{\gamma_{\mu 5} \gamma_{\nu 5}}{\gamma_{55}}, \tag{3.6}$$

podemos ver que $\delta g_{\mu\nu} = 0$. Desta forma, identificamos $g_{\mu\nu}$ como sendo a métrica do espaço-tempo quadri-dimensional.

Usando as definições dadas acima, podemos escrever a métrica penta-dimensional γ_{MN} como

$$\gamma_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} - k^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & -k\phi^2 A_\mu \\ \hline -k\phi^2 A_\nu & -\phi^2 \end{array} \right), \tag{3.7}$$

onde introduzimos o parâmetro k de modo a obtermos os fatores multiplicativos corretos na ação. A idéia de Kaluza foi simplesmente estender a Relatividade Geral de Einstein a um espaço-tempo de cinco dimensões. Assim sendo, definiremos uma

conexão de Levi-Civita e um tensor de curvatura, respectivamente, de forma análoga à suas definições em quatro dimensões:

$$\Gamma^L_{MN} = \frac{1}{2}\gamma^{LP}(\partial_M\gamma_{PN} + \partial_N\gamma_{PM} - \partial_P\gamma_{MN}), \quad (3.8)$$

$$R^L_{PMN} = \partial_M\Gamma^L_{PN} - \partial_N\Gamma^L_{PM} + \Gamma^L_{QM}\Gamma^Q_{PN} - \Gamma^L_{QN}\Gamma^Q_{PM}. \quad (3.9)$$

A ação de Einstein-Hilbert penta-dimensional é escrita como

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-\gamma_5} R_5, \quad (3.10)$$

onde G_5 é a constante gravitacional de Newton penta-dimensional, $\gamma_5 = \det(\gamma_{MN})$, e R_5 é a curvatura escalar penta-dimensional. Esta ação nos fornece equações de campo semelhantes as de Einstein,

$$R_{MN} - \frac{1}{2}\gamma_{MN}R = 0. \quad (3.11)$$

Quando substituimos a métrica (3.7) na ação (3.10) obtemos

$$S_5 = - \int d^4x \sqrt{-g}\phi \left(\frac{1}{16\pi G} \overset{\circ}{R} + \frac{1}{4}\phi^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G}\phi^{-1}g^{\mu\nu}\overset{\circ}{\nabla}_\mu\partial_\nu\phi \right), \quad (3.12)$$

onde $\overset{\circ}{R}$ é a curvatura escalar quadri-dimensional, e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.13)$$

é o tensor intensidade do campo eletromagnético. Definimos a constante gravitacional de Newton quadri-dimensional como sendo

$$G \equiv \frac{G_5}{\int d^5x}, \quad (3.14)$$

e identificamos o parâmetro k em termos da constante gravitacional G como

$$k \equiv \sqrt{16\pi G}. \quad (3.15)$$

Portanto, vemos que a ação (3.10), invariante por transformações gerais de coordenadas penta-dimensionais, se reduz a ação (3.12), invariante por transformações gerais de coordenadas quadri-dimensionais e por transformações de gauge Abelianas. Substituindo a métrica (3.7) nas equações de campo penta-dimensionais (3.11) obtemos

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\overset{\circ}{R} &= 8\pi G\phi^2\mathcal{T}_{\mu\nu} + \phi^{-1}(\overset{\circ}{\nabla}_\mu\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\overset{\circ}{\nabla}_\rho\partial_\sigma\phi), \\ \overset{\circ}{\nabla}_\nu F^\nu_\mu &= -3\phi^{-1}F^\nu_\mu\partial_\nu\phi, \\ g^{\mu\nu}\overset{\circ}{\nabla}_\mu\partial_\nu\phi &= -4\pi G\phi^3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \quad (3.17)$$

é o tensor energia-momento do campo eletromagnético. Assim, vemos que das equações de campo penta-dimensionais sem fonte (3.11), obtemos as equações de campo quadri-dimensionais com fonte (3.16). Isto constitui o “milagre” central das teorias de Kaluza-Klein: matéria quadri-dimensional aparece da geometria de um espaço-tempo vazio penta-dimensional.

Como a quinta dimensão tem uma topologia circular (S^1), qualquer função $f(x^\mu, x^5)$ se torna periódica em x^5 , isto é, $f(x^\mu, x^5) = f(x^\mu, x^5 + 2\pi r)$, onde r é o “raio” da quinta dimensão. Consequentemente, todos os campos podem ser expandidos em uma série de Fourier,

$$\gamma_{MN}(x^\mu, x^5) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{MN}^{(n)}(x^\mu) \exp[inx^5/r]. \quad (3.18)$$

Uma consequência natural dessa teoria é que ela fornece um espectro infinito de partículas.

As equações de campo gravitacionais penta-dimensionais têm uma solução compactificada da forma

$$\gamma_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right), \quad (3.19)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski. Esta é métrica do estado fundamental, que é topologicamente do tipo $M^4 \otimes S^1$, com a quinta dimensão sempre do tipo espacial.

3.2 A Teoria de Kaluza-Klein Teleparalela

Na teoria original de Kaluza-Klein, os campos eletromagnético e gravitacional são descritos por uma Lagrangeana de Einstein-Hilbert em um espaço-tempo penta-dimensional. Por outro lado, a Relatividade Geral é equivalente a uma teoria de gauge para o grupo das translações. Esta equivalência abre novas perspectivas para o estudo de teorias unificadas. De fato, ao invés de usar a descrição geométrica da Relatividade Geral, podemos adotar a descrição de gauge como paradigma, e construir o que chamaremos de *equivalente teleparalelo da teoria de Kaluza-Klein* [41].

De acordo com este formalismo, tanto o campo eletromagnético como o gravitacional são descritos por uma Lagrangeana do tipo de gauge.

Dentro deste contexto, em analogia com o caso eletromagnético [49], a ação que descreve uma partícula de massa m e carga e submetida a um campo eletromagnético A_μ e a um campo gravitacional $A^a{}_\mu$ é [36, 37]

$$S = \int_a^b \left[-m c d\sigma - \frac{1}{c} (m A^a{}_\mu u_a + e A_\mu) dx^\mu \right], \quad (3.20)$$

onde $d\sigma = (\eta_{ab} dx^a dx^b)^{1/2}$ é o intervalo invariante do espaço tangente, e $u_a = dx_a/d\sigma$. A equação de movimento correspondente é

$$c^2 \hbar^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = F^a{}_{\mu\nu} u_a u^\nu + \frac{e}{m} F_{\mu\nu} u^\nu, \quad (3.21)$$

onde $ds = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ é o intervalo invariante do espaço-tempo, $u^\mu = dx^\mu/ds$ é a quadri-velocidade, $F^a{}_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo gravitacional, dado por (2.8), e $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo eletromagnético, dado por (3.13).

Agora, devido à semelhança entre as interações eletromagnética e gravitacional, escolheremos o índice de gauge do grupo $U(1)$ da teoria eletromagnética como sendo “5”, o que nos permite definir um potencial de gauge unificado através de

$$\mathcal{A}^A{}_\mu = (A^a{}_\mu, A^5{}_\mu) = (A^a{}_\mu, \kappa^{-1} e A_\mu), \quad (3.22)$$

onde κ é um parâmetro a ser determinado. Consequentemente, podemos definir um tensor intensidade dos campos unificado como,

$$\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} = (F^a{}_{\mu\nu}, F^5{}_{\mu\nu}) = (F^a{}_{\mu\nu}, \kappa^{-1} e F_{\mu\nu}). \quad (3.23)$$

Em termos do potencial $\mathcal{A}^A{}_\mu$, o tensor intensidade dos campos é

$$\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}^A{}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^A{}_\mu. \quad (3.24)$$

Nas definições acima, está implícito a introdução de um espaço interno penta-dimensional M^5 , dado pelo produto entre o espaço de Minkowski M^4 e o círculo S^1 : $M^5 = M^4 \otimes S^1$. Um ponto neste espaço é determinado pelas coordenadas $x^A = (x^a, x^5)$, onde x^a são as coordenadas de M^4 , e x^5 é a coordenada de S^1 .

Com as definições acima, e denotando por η_{55} a quinta componente da métrica do espaço interno, se as condições $u^5 = -\kappa/m$ e $\eta_{55} = -1$ forem satisfeitas, a ação (3.20) pode ser reescrita na forma

$$S = \int_a^b \left[-m c d\sigma - \frac{m}{c} \mathcal{A}^A{}_\mu u^B \eta_{AB} dx^\mu \right]. \quad (3.25)$$

Consequentemente, a equação de movimento (3.21) se torna

$$c^2 h^a{}_{\mu} \frac{du_a}{ds} = \mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} u^B u^\nu \eta_{AB} . \quad (3.26)$$

Portanto, a trajetória de uma partícula carregada submetida a um campo eletromagnético e gravitacional é descrita por uma equação de força do tipo de Lorentz. Além disso, vemos que, diferentemente da curvatura, a torção atua em partículas da mesma forma que o campo eletromagnético atua em cargas, isto é, como uma força.

Alternativamente, é importante notar que poderíamos ter escolhido $u^5 = \kappa/m$ e $\eta_{55} = 1$, o que nos levaria à mesma integral de ação, e consequentemente à mesma equação de movimento. Como veremos, esta escolha corresponde a uma outra convenção da métrica para o espaço interno. Em princípio, ambas convenções são possíveis. No entanto, como veremos, o processo de unificação vai introduzir um vínculo de acordo com o qual a escolha de η_{55} vai depender na convenção da métrica escolhida para o espaço tangente de Minkowski.

Em uma teoria de gauge para o grupo das translações, as transformações de gauge são definidas como uma translação local nas coordenadas do espaço tangente,

$$\delta x^a = \delta\alpha^b P_b x^a . \quad (3.27)$$

Em um modelo teleparalelo unificado de Kaluza-Klein, uma transformação de gauge geral vai ser representada por uma translação nas coordenadas do espaço interno penta-dimensional x^A ,

$$\delta x^A = \delta\alpha^B P_B x^A , \quad (3.28)$$

onde $P_B = \partial/\partial x^B$ são os geradores do grupo, e

$$\delta\alpha^B(x^\mu) \equiv \delta\alpha^B = (\delta\alpha^a, \delta\alpha^5) ,$$

são os parâmetros da transformação. Analogamente aos potenciais de gauge, escolheremos $\delta\alpha^5 = \kappa^{-1}(e/c^2)\delta\alpha$. Os geradores generalizados P_A satisfazem a seguinte relação de comutação,

$$[P_A, P_B] = 0 . \quad (3.29)$$

A derivada covariante generalizada, covariante sob as transformações (3.28) é

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} \mathcal{A}^A{}_\mu P_A , \quad (3.30)$$

com a lei de transformação infinitesimal do potencial de gauge generalizado \mathcal{A}^A_μ sendo

$$\delta \mathcal{A}^A_\mu = -c^2 \partial_\mu \delta \alpha^A . \quad (3.31)$$

Sob uma translação apenas nas coordenadas x^a , $\delta \alpha^A = (\delta \alpha^a, 0)$, vemos que

$$\delta A^a_\mu = -c^2 \partial_\mu \delta \alpha^a , \quad (3.32)$$

o que corresponde a uma transformação de gauge relacionada ao grupo T_4 . No entanto, sob uma translação apenas na coordenada x^5 , $\delta \alpha^A = (0, \delta \alpha^5)$, vemos que

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu \delta \alpha . \quad (3.33)$$

Assim, analogamente à teoria de Kaluza-Klein usual, concluímos que uma translação na quinta coordenada é equivalente a uma transformação de gauge relacionada ao grupo $U(1)$. No entanto, devemos notar que neste caso a translação é feita no espaço tangente (fibra) e não no espaço-tempo como na teoria usual de Kaluza-Klein.

Como vimos, a Lagrangeana de gauge do campo gravitacional é

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} F^a{}_{\mu\nu} F^b{}_{\theta\rho} g^{\mu\theta} N_{ab}{}^{\nu\rho} \right) , \quad (3.34)$$

onde devido à presença de um campo de tetradas, $N_{ab}{}^{\nu\rho}$ é dado por (2.21). Portanto, a Lagrangeana unificada pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{h}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} \mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} \mathcal{F}^B{}_{\theta\rho} g^{\mu\theta} N_{AB}{}^{\nu\rho} \right) . \quad (3.35)$$

Como não existem tetradas no setor eletromagnético,

$$N_{55}{}^{\nu\rho} = \eta_{55} h_c{}^\nu h^{c\rho} . \quad (3.36)$$

Assim, a Lagrangeana (3.35) torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{hc^4}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \eta_{55} \frac{\kappa^{-2} e^2}{16\pi G} \left[\frac{h}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] . \quad (3.37)$$

O primeiro termo de \mathcal{L} é a Lagrangeana de gauge gravitacional, que como vimos é equivalente à Lagrangeana de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral. De modo a obtermos a Lagrangeana de Maxwell do segundo termo, duas condições devem ser satisfeitas. Primeiro, é necessário que

$$\kappa^2 = \frac{e^2}{16\pi G} . \quad (3.38)$$

Segundo, de modo a termos uma energia positiva para o campo eletromagnético, e obtermos o sinal relativo apropriado entre as Lagrangeanas eletromagnéticas e gravitacional, é necessário que $\eta_{55} = -1$. Com estas condições, a Lagrangeana (3.37) torna-se

$$\mathcal{L} \equiv h(L_G + L_{EM}) = \frac{hc^4}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} - \frac{h}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} .$$

Que a Lagrangeana de Maxwell em quatro dimensões apareça da Lagrangeana de Einstein-Hilbert em cinco dimensões, é considerado como sendo um milagre das teorias de Kaluza-Klein usuais [62]. Que a Lagrangeana de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral apareça de uma Lagrangeana do tipo de Maxwell para uma teoria de gauge para o grupo das translações em cinco dimensões, pode ser considerado como a outra face do mesmo milagre.

A variação funcional de \mathcal{L} com relação a $A^a{}_\tau$ fornece a equação de campo

$$\partial_\sigma(hS_\lambda{}^{\tau\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} ht^\tau{}_\lambda = \frac{4\pi G}{c^4} h\mathcal{T}^\tau{}_\lambda , \quad (3.39)$$

onde $ht^\tau{}_\lambda$ é o pseudo-tensor energia-momento do campo gravitacional, e

$$\mathcal{T}^\tau{}_\lambda \equiv h^a{}_\lambda \left[-\frac{1}{h} \frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta h^a{}_\tau} \right] = -F^{\tau\nu} F_{\lambda\nu} - \delta^\tau{}_\lambda L_{EM} , \quad (3.40)$$

é o tensor energia-momento do campo eletromagnético. Por outro lado, a variação funcional de \mathcal{L} em relação a A_τ nos fornece a versão teleparalela das equações de Maxwell [45].

Um ponto interessante que merece ser mencionado é que, como escolhemos (2.2) como sendo a métrica do espaço de Minkowski, a métrica resultante do espaço interno penta-dimensional vai ser

$$\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1) . \quad (3.41)$$

Isto significa que a quinta dimensão deve necessariamente ser do tipo espaço, e as métricas com signatura (3, 2) estão excluídas. Por outro lado, se tivéssemos escolhido $\tilde{\eta}_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ para o espaço de Minkowski, é fácil verificar que deveríamos ter $\eta_{55} = +1$. A métrica resultante para o espaço interno penta-dimensional seria

$$\tilde{\eta}_{AB} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1, +1) , \quad (3.42)$$

e obteríamos a mesma conclusão: a quinta dimensão deve necessariamente ser do tipo espaço, e as métricas com assinatura (3, 2) estão excluídas. Consequentemente, a unificação das Lagrangeanas eletromagnética e gravitacional impõe um vínculo na convenção da métrica para o espaço de Minkowski e para a variedade eletromagnética interna S^1 . De fato, a escolha entre $\eta_{55} = +1$ e $\eta_{55} = -1$ para a métrica de Killing do grupo $U(1)$ depende da convenção da métrica escolhida para o espaço de Minkowski. Como consequência, a métrica do espaço interno penta-dimensional se restringe às Eqs. (3.41) ou (3.42). Métricas com assinatura (3, 2), que implicariam em uma quinta dimensão do tipo tempo, estão excluídas.

3.3 Campos de Matéria

Consideremos agora um campo de matéria Ψ . Ao contrário dos campos de gauge, ele vai depender da coordenada x^5 :

$$\Psi = \Psi(x^\mu, x^5).$$

Sob uma translação de gauge generalizada, ele se transforma como

$$\delta\Psi = \delta\alpha^A P_A \Psi. \quad (3.43)$$

Consequentemente, sua derivada covariante é

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + c^{-2} \mathcal{A}^A_\mu P_A \Psi. \quad (3.44)$$

Separando as componentes eletromagnética e gravitacional, obtemos

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + c^{-2} A^a_\mu P_a \Psi + \kappa^{-1} \frac{e}{c^2} A_\mu P_5 \Psi. \quad (3.45)$$

Agora, como x^5 é a coordenada da variedade interna S^1 , vamos assumir que

$$\Psi(x^\mu, x^5) = \exp\left[i\kappa \frac{c}{\hbar} x^5\right] \psi(x^\mu). \quad (3.46)$$

Consequentemente, uma translação na coordenada x^5 torna-se uma transformação de gauge $U(1)$, enquanto que uma translação nas coordenadas x^a tornam-se uma transformação de gauge relacionada ao grupo das translações T^4 . Para uma translação simultânea nas cinco coordenadas x^A , vemos da Eq. (3.43) que

$$\delta\Psi = \delta\alpha^a \partial_a \Psi + \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) \delta\alpha \Psi. \quad (3.47)$$

O acoplamento minimal correspondente é dado pela derivada covariante

$$D_\mu \Psi = h^a{}_\mu \partial_a \Psi + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \Psi . \quad (3.48)$$

Definindo $A_a = h_a{}^\mu A_\mu$, podemos reescrever a Eq. (3.48) na forma

$$D_\mu \Psi = h^a{}_\mu D_a \Psi , \quad (3.49)$$

com $D_a \Psi$ a derivada covariante eletromagnética no espaço de Minkowski. Como é usual, o comutador da derivada covariante nos fornece o tensor intensidade dos campos,

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = c^{-2} \mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} P_A \Psi = c^{-2} F^a{}_{\mu\nu} P_a \Psi + \frac{ie}{\hbar c} F_{\mu\nu} \Psi ,$$

que neste caso inclui os campos eletromagnético e gravitacional.

Capítulo 4

Equivalente Teleparalelo de Kaluza-Klein Não-Abeliana

4.1 A Teoria de Kaluza-Klein Não-Abeliana

Após o aparecimento das teorias de gauge não-Abelianas, a possibilidade de unificá-las com a gravitação foi levantada pela primeira vez nos anos 60 [16]. Esta unificação foi conseguida estendendo o espaço-tempo de 4 dimensões para um espaço-tempo de $(4 + D)$ dimensões [17, 18, 19, 20], com D a dimensão da parte compacta do espaço-tempo. De acordo com este modelo, das isometrias da subvariedade compacta D -dimensional obtemos transformações de gauge não-Abelianas.

Inicialmente, vamos assumir uma variedade $(4 + D)$ -dimensional, denotada por R^{4+D} , e dada pelo produto entre o espaço-tempo quadri-dimensional R^4 e a variedade compacta B^D : $R^{4+D} = R^4 \otimes B^D$. Vamos denotar as coordenadas* deste espaço-tempo $(4 + D)$ -dimensional por $x^M = (x^\mu, x^m)$, onde x^μ são as coordenadas de R^4 , e x^m são as coordenadas de B^D . A métrica deste espaço-tempo é $\gamma_{MN} = \gamma_{MN}(x^\mu, x^m)$. Analogamente ao caso Abeliano, sob translações no espaço-tempo,

$$x'^M = x^M + \xi^M(x^\mu, x^m), \quad (4.1)$$

*Nesta seção usaremos a seguinte notação: a segunda parte dos índices latinos maiúsculos vão ser usados para denotar índices relacionados ao espaço-tempo $(4 + D)$ -dimensional, $L, M, N, \dots = 0, \dots, 3, 5, \dots, 4 + D$. O alfabeto grego $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, \dots, 3$ vai ser usado para denotar índices relacionados ao espaço-tempo quadri-dimensional, enquanto que a segunda parte do alfabeto latino $l, m, n, \dots = 5, \dots, 4 + D$ vai ser usado para denotar índices relacionados às demais coordenadas. Os índices $i, j, k = 1, \dots, I$ vão ser usados para denotar índices do grupo de gauge, onde I é a dimensão do grupo.

veimos que a variação na forma da métrica é dada por

$$\delta\gamma_{MN} = -\xi^L \partial_L \gamma_{MN} - \gamma_{ML} \partial_N \xi^L - \gamma_{NL} \partial_M \xi^L . \quad (4.2)$$

Assim, se fizermos uma translação apenas nas coordenadas do espaço-tempo quadri-dimensional, isto é, $\xi^M = (\xi^\mu(x^\nu), 0)$, vemos que as componentes $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu n}$ e γ_{mn} se transformam respectivamente como um tensor, um vetor e um escalar. No entanto, se fizermos uma translação apenas nas coordenadas do espaço interno, isto é, $\xi^M = (0, \xi^m(x^\mu, x^n))$, vemos que as componentes $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu n}$ e γ_{mn} se transformam como

$$\delta\gamma_{\mu\nu} = -\xi^l \partial_l \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu l} \partial_\nu \xi^l - \gamma_{\nu l} \partial_\mu \xi^l , \quad (4.3)$$

$$\delta\gamma_{\mu n} = -\xi^l \partial_l \gamma_{\mu n} - \gamma_{\mu l} \partial_n \xi^l - \gamma_{nl} \partial_\mu \xi^l , \quad (4.4)$$

$$\delta\gamma_{mn} = -\xi^l \partial_l \gamma_{mn} - \gamma_{ml} \partial_n \xi^l - \gamma_{nl} \partial_m \xi^l . \quad (4.5)$$

No caso $(4 + D)$ -dimensional, vamos procurar por simetrias da variedade compacta B^D . As transformações apropriadas para se estudar são as isometrias da variedade. Uma isometria de B^D é uma transformação de coordenadas que deixa a forma da métrica invariante. Assim, ao impormos que γ_{mn} seja invariante sob esta transformação, ou seja, $\delta\gamma_{mn} = 0$, vemos que $\xi^m(x^\mu, x^n)$ é o vetor de Killing deste espaço interno. Como a equação de Killing é uma equação que leva em conta apenas as coordenadas internas, vamos separar a dependência de $\xi^m(x^\mu, x^n)$ em x^μ e x^n da seguinte forma,

$$\xi^m(x^\mu, x^n) = \alpha^i(x^\mu) K^m{}_i(x^n) , \quad (4.6)$$

onde $K^m{}_i$ é um conjunto de vetores de Killing linearmente independentes para este espaço. Portanto,

$$\delta\gamma_{mn} = \alpha^i (-K^l{}_i \partial_l \gamma_{mn} - \gamma_{ml} \partial_n K^l{}_i - \gamma_{nl} \partial_m K^l{}_i) = 0 . \quad (4.7)$$

Em analogia com o caso Abeliano, vamos assumir que a componente $\gamma_{\mu n}$ é proporcional ao potencial de gauge $A^i{}_\mu$ da seguinte forma:

$$\gamma_{\mu n}(x^\nu, x^m) = \gamma_{nl}(x^m) K^l{}_i(x^m) A^i{}_\mu(x^\nu) . \quad (4.8)$$

Assim,

$$\delta\gamma_{\mu n} = \gamma_{nl} K^l{}_i \delta A^i{}_\mu . \quad (4.9)$$

Substituindo estes dois resultados acima em (4.4) e usando o fato que

$$K^m{}_i \partial_m K^n{}_j - K^m{}_j \partial_m K^n{}_i = f^k{}_{ij} K^n{}_k, \quad (4.10)$$

ou seja, que os geradores $K_i = K^m{}_i \partial_m$ satisfazem a álgebra de Lie do grupo G associado à variedade B^D , com $f^k{}_{ij}$ as constantes de estrutura, obtemos que

$$\delta A^i{}_\mu = -\partial_\mu \alpha^i + f^i{}_{jk} A^j{}_\mu \alpha^k. \quad (4.11)$$

Conseqüentemente, vemos que transformações de gauge não-Abelianas são geradas pelas isometrias infinitesimais da variedade compacta B^D , cujos parâmetros dependem de x^μ . Assim, G é um subgrupo do grupo geral de coordenadas D -dimensional, e o que parece ser uma simetria interna em quatro dimensões é na verdade uma simetria do espaço-tempo nas dimensões extras.

No entanto, $\gamma_{\mu\nu}$ não é invariante sob “transformações de gauge”, isto é, sob translações no espaço interno. Definindo, então, um tensor que dependa somente das coordenadas do espaço-tempo x^μ através de

$$g_{\mu\nu}(x^\rho) = \gamma_{\mu\nu}(x^\rho, x^l) - \gamma^{mn}(x^l) \gamma_{\mu m}(x^\rho, x^l) \gamma_{\nu n}(x^\rho, x^l), \quad (4.12)$$

pode-se mostrar que

$$\delta g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.13)$$

Assim, identificamos $g_{\mu\nu}$ como sendo a métrica do espaço-tempo quadri-dimensional. Usando as definições de $\gamma_{\mu m}$ e $\gamma_{\mu\nu}$, vemos que a forma da métrica $(4+D)$ -dimensional γ_{MN} é

$$\gamma_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{g_{\mu\nu} + \gamma_{mn} K^m{}_i K^n{}_j A^i{}_\mu A^j{}_\nu}{\gamma_{ml} K^l{}_i A^i{}_\nu} & \frac{\gamma_{nl} K^l{}_i A^i{}_\mu}{\gamma_{mn}} \end{array} \right). \quad (4.14)$$

A ação de Einstein-Hilbert $(4+D)$ -dimensional é

$$S_{4+D} = -\frac{1}{16\pi G_{4+D}} \int d^{4+D} x \sqrt{-\gamma_{4+D}} R_{4+D}, \quad (4.15)$$

onde G_{4+D} é a constante gravitacional de Newton $(4+D)$ -dimensional, $\gamma_{4+D} = \det(\gamma_{MN})$, e R_{4+D} é a curvatura escalar em $4+D$ dimensões. Quando substituímos (4.14), obtemos

$$S_{4+D} = -\frac{1}{16\pi G_{4+D}} \int d^4 x d^D x \sqrt{-g} \sqrt{-\gamma_D} \left(R_4 + R_D + \frac{1}{4} \gamma_{mn} K^m{}_i K^n{}_j F^i{}_{\mu\nu} F^{j\mu\nu} \right), \quad (4.16)$$

onde R_4 e R_D são as curvaturas escalares quadri-dimensional e D -dimensional respectivamente, e

$$F^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i{}_\nu - \partial_\nu A^i{}_\mu + f^i{}_{jk} A^j{}_\mu A^k{}_\nu. \quad (4.17)$$

A constante de Newton quadri-dimensional é definida como

$$\frac{1}{16\pi G} = \frac{1}{16\pi G_{4+D}} \int d^D x \sqrt{-\gamma_D} \equiv \frac{1}{16\pi G_{4+D}} \Omega_D. \quad (4.18)$$

O último termo em (4.16) pode ser identificado com a Lagrangeana de Yang-Mills desde que a integração em x^m seja efetuada. Definindo

$$\int d^D x \sqrt{-\gamma_D} \gamma_{mn} K^m{}_i K^n{}_j \equiv \frac{16\pi G}{g^2} \Omega_D \delta_{ij}, \quad (4.19)$$

a Lagrangeana de Yang-Mills é obtida, com g^2 a constante de acoplamento de gauge.

No entanto, uma diferença fundamental entre a teoria de Kaluza-Klein penta-dimensional e a teoria $(4 + D)$ -dimensional é que, enquanto a teoria penta-dimensional admite uma solução da forma (3.19), a teoria $(4 + D)$ -dimensional *não* tem uma solução clássica da forma

$$\gamma_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{mn} \end{array} \right). \quad (4.20)$$

Isto porque, das equações de Einstein $(4 + D)$ -dimensionais

$$R_{MN} - \frac{1}{2} \gamma_{MN} R = 0, \quad (4.21)$$

vemos que, como $\eta_{\mu\nu}$ é plano, então $R_{MN} = 0$ para os índices $\mu\nu$ do espaço-tempo. Consequentemente, das equações de campo, R deve se anular: $R = 0$. Mas então, R_{MN} deve se anular para os índices internos mn também, e isto implica que γ_{mn} deve ser plana também, ou seja, o espaço interno não pode ser curvo. Portanto, na teoria $(4 + D)$ -dimensional, a compactificação das D -dimensões espaciais extras requer tanto que se introduza campos de matéria adicionais de modo a providenciar um tensor energia-momento que induza uma “compactificação espontânea” impondo curvatura constante na variedade compacta, ou então modificando a teoria de forma a incluir torção ou termos de derivadas superiores (por exemplo R^2).

4.2 Potenciais de Gauge Unificados

Nas teorias usuais de Kaluza-Klein, o formalismo geométrico da Relatividade Geral é adotado como paradigma para a descrição de todas as outras interações da natureza. Isto é conseguido estendendo o espaço-tempo quadri-dimensional usual para um espaço-tempo de dimensões maiores. Por outro lado, como vimos, a Relatividade Geral é equivalente a uma teoria de gauge para o grupo das translações. Adotando a descrição de gauge como paradigma fundamental, vamos usar esta equivalência para construir o *equivalente teleparalelo da teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana* [43]. Em outras palavras, ao invés de estendermos o espaço-tempo para dimensões maiores, o espaço interno (fibra) é que vai ser estendido para $(4 + D)$ dimensões, enquanto que manteremos o espaço-tempo sempre quadri-dimensional. Semelhantemente à teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana usual, as transformações de gauge vão ser obtidas das isometrias do espaço compacto.

Denotando por A^a_μ o potencial de gauge relacionado às translações, e por A^i_μ o potencial de gauge de Yang-Mills, a ação que descreve uma partícula de massa m na presença de campos de gauge e gravitacional é

$$S = \int_a^b \left[-m c d\sigma - \frac{1}{c} \left(m A^a_\mu u_a + g A^i_\mu q_i \right) dx^\mu \right], \quad (4.22)$$

com q_i a carga de Noether relacionada as transformações de gauge internas [63]. Podemos ver que a massa m aparece como a constante de acoplamento gravitacional, enquanto que a constante de acoplamento de gauge é denotada por g .

A equação de movimento correspondente a ação (4.22) é

$$h^a_\mu \frac{du_a}{ds} = \frac{1}{c^2} F^a_{\mu\nu} u_a u^\nu + \frac{g}{mc^2} (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu) q_i u^\nu - \frac{g}{mc^2} A^i_\mu \frac{dq_i}{ds}, \quad (4.23)$$

onde $F^a_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo gravitacional, dado por (2.8). No entanto, como a carga de gauge q_i satisfaz a equação de Wong [64]

$$\frac{dq_i}{ds} + \frac{g}{\hbar c} f_{ijk} A^j_\mu q^k u^\mu = 0, \quad (4.24)$$

com f_{ijk} a constante de estrutura do grupo de gauge, a equação de movimento (4.23) pode ser reescrita na seguinte forma,

$$h^a_\mu \frac{du_a}{ds} = \frac{1}{c^2} F^a_{\mu\nu} u_a u^\nu + \frac{g}{mc^2} F^i_{\mu\nu} q_i u^\nu, \quad (4.25)$$

onde

$$F^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i{}_\nu - \partial_\nu A^i{}_\mu + \frac{g}{\hbar c} f^i{}_{jk} A^j{}_\mu A^k{}_\nu, \quad (4.26)$$

é o tensor intensidade do campo de gauge.

A estrutura de gauge da gravitação teleparalela permite definir um potencial de gauge *unificado* $\mathcal{A}^A{}_\mu$, que vamos assumir como tendo a mesma dimensão do potencial gravitacional $A^a{}_\mu$. Consequentemente, o potencial de gauge interno $A^i{}_\mu$ deve aparecer multiplicado por um fator dimensional apropriado, que vamos escrever na forma

$$\mathcal{A}^A{}_\mu \equiv (A^a{}_\mu, \tilde{A}^i{}_\mu) = \left(A^a{}_\mu, \frac{g}{\kappa} A^i{}_\mu \right), \quad (4.27)$$

onde κ é um parâmetro a ser determinado. Portanto, se definirmos uma carga de Noether generalizada $p_A = m c u_A$, onde

$$u_A \equiv (u_a, \tilde{u}_i) = \left(u_a, \frac{\kappa}{m} q_i \right), \quad (4.28)$$

é uma “velocidade” generalizada, a ação (4.22) pode ser reescrita na forma

$$S = \int_a^b \left[-m c d\sigma - \frac{1}{c^2} \mathcal{A}^A{}_\mu p_A dx^\mu \right]. \quad (4.29)$$

De forma análoga, podemos definir um tensor intensidade generalizado dos campos como

$$\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} \equiv (F^a{}_{\mu\nu}, \tilde{F}^i{}_{\mu\nu}) = \left(F^a{}_{\mu\nu}, \frac{g}{\kappa} F^i{}_{\mu\nu} \right). \quad (4.30)$$

Com estas definições, a equação de movimento (4.25) pode ser escrita como

$$h^a{}_\mu \frac{du_a}{ds} = c^{-2} \mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} u_A u^\nu. \quad (4.31)$$

Esta é a versão *unificada* — gravitacional mais Yang-Mills — da equação de força análoga à força de Lorentz eletromagnética. Suas soluções determinam a trajetória da partícula na presença de campos gravitacional e de Yang-Mills.

4.3 Transformações de Gauge Generalizadas

De acordo com a estrutura de gauge da teoria, em cada ponto do espaço-tempo associamos uma fibra, que neste caso vai ser um espaço $(4 + D)$ -dimensional, dado localmente pelo produto $M^4 \otimes B^D$, onde M^4 é o espaço tangente de Minkowski, e B^D é a variedade do grupo associada à simetria de Yang-Mills. Um ponto neste espaço

interno vai ser denotado por $x^M = (x^a, x^m)$, onde x^a são as coordenadas de M^4 , e x^m são as coordenadas de B^D . A métrica deste espaço interno $(4 + D)$ -dimensional é

$$\gamma_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{ab} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{mn} \end{array} \right), \quad (4.32)$$

onde η_{ab} é a métrica de M^4 , dada por (2.2), e γ_{mn} é métrica do espaço D -dimensional B^D . Em geral, B^D é um espaço Riemanniano curvo (compacto), com $\gamma_{mn} = \gamma_{mn}(x^m)$ uma função das coordenadas x^m de B^D .

Uma transformação local destas coordenadas, que deixa a métrica γ_{MN} invariante, pode ser escrita na forma

$$\delta x^M = \delta \alpha^A K_A x^M, \quad (4.33)$$

onde $\delta \alpha^A = \delta \alpha^A(x^\mu)$ são os parâmetros infinitesimais, cujas componentes podem ser escritas como

$$\delta \alpha^A(x^\mu) \equiv (\delta \alpha^a, \delta \tilde{\alpha}^i) = \left(\delta \alpha^a, \frac{g}{\kappa c^2} \delta \alpha^i \right), \quad (4.34)$$

e K_A representam os geradores da transformação. Estes geradores tem a forma

$$K_A = K^N{}_A \partial_N, \quad (4.35)$$

onde os coeficientes $K^N{}_A$ são os vetores de Killing [65] associados com as isometrias infinitesimais do espaço interno $M^4 \otimes B^D$. Eles formam um conjunto de $4 + I$ vetores linearmente independentes para este espaço [21, 22, 23], e são dados por

$$K^N{}_A = \left(\begin{array}{c|c} \delta^b{}_a & 0 \\ \hline 0 & K^n{}_i \end{array} \right), \quad (4.36)$$

onde $\delta^b{}_a$ são os vetores de Killing de M^4 , e $K^n{}_i$ os vetores de Killing de B^D . Os geradores são, portanto,

$$K_a = \delta^b{}_a \partial_b = P_a, \quad (4.37)$$

que são os geradores isométricos de M^4 , e

$$K_i = K^n{}_i \partial_n, \quad (4.38)$$

que são os geradores isométricos de B^D . Consequentemente, as transformações de coordenadas são dadas por

$$\delta x^a = \delta \alpha^a, \quad (4.39)$$

e

$$\delta x^n = \frac{g}{\kappa c^2} \delta \alpha^i K^n_i \equiv \frac{g}{\kappa c^2} \delta \xi^n, \quad (4.40)$$

onde $\delta \xi^n = \delta \alpha^i K^n_i$ são os parâmetros da transformação na base de Killing.

Os geradores K_A obedecem a álgebra

$$[K_A, K_B] = f^C_{AB} K_C, \quad (4.41)$$

onde f^A_{BC} são as constantes de estrutura (dimensionais), cujas componentes são

$$f^A_{BC} = \begin{cases} f^a_{bc} = 0, & \text{para } A, B, C = a, b, c \\ \tilde{f}^i_{jk} \equiv \chi f^i_{jk}, & \text{para } A, B, C = i, j, k. \end{cases} \quad (4.42)$$

A constante

$$\chi = \kappa \frac{c}{\hbar}, \quad (4.43)$$

foi introduzida por razões dimensionais, e de tal forma a dar as formas corretas para os tensores de intensidade dos campos e para as transformações de gauge. Desta forma, temos as seguintes relações de comutação:

$$[K_a, K_b] = 0, \quad (4.44)$$

e

$$[K_i, K_j] = \chi f^k_{ij} K_k. \quad (4.45)$$

A derivada covariante generalizada, covariante sob as transformações (4.33) é

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + c^{-2} \mathcal{A}^A_\mu K_A. \quad (4.46)$$

Um cálculo simples mostra que o seu comutador nos dá o tensor intensidade generalizado dos campos,

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = c^{-2} \mathcal{F}^A_{\mu\nu} K_A, \quad (4.47)$$

onde

$$\mathcal{F}^A_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}^A_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}^A_\mu + c^{-2} f^A_{BC} \mathcal{A}^B_\mu \mathcal{A}^C_\nu. \quad (4.48)$$

Usando as definições (4.27) e (4.42), esta expressão nos fornece as definições corretas dos tensores intensidade dos campos gravitacional (Eq. (2.8)) e de Yang-Mills (Eq. (4.26)). Podemos notar que a tetrada é dada pela derivada covariante de x^a , a coordenada da parte não-compacta M^4 do espaço fibrado:

$$h^a_\mu = \mathcal{D}_\mu x^a.$$

Isto significa que apenas esta parte do espaço fibrado apresenta a propriedade de *soldering* [57].

Da covariância de \mathcal{D}_μ sob as transformações isométricas (4.33), obtemos as transformações de gauge do potencial generalizado:

$$\delta A^A{}_\mu = -c^2 \mathcal{D}_\mu \delta \alpha^A \equiv -c^2 \partial_\mu \delta \alpha^A - f^A{}_{BC} A^B{}_\mu \delta \alpha^C. \quad (4.49)$$

Para $A = a$, obtemos a lei de transformação usual para o potencial de gauge (Abeliano) gravitacional,

$$\delta A^a{}_\mu = -c^2 \partial_\mu \delta \alpha^a. \quad (4.50)$$

Para $A = i$, obtemos

$$\delta A^i{}_\mu = -\mathcal{D}_\mu \delta \alpha^i \equiv -\partial_\mu \delta \alpha^i - \frac{g}{\hbar c} f^i{}_{jk} A^j{}_\mu \delta \alpha^k, \quad (4.51)$$

que tem a forma usual de uma transformação de gauge não-Abeliana. Assim, quando $\delta \alpha^a = 0$, a transformação de coordenadas (4.33) nos fornece uma transformação de gauge verdadeira.

4.4 Lagrangeana de Gauge e Equações de Campo

Levando em conta o tensor intensidade generalizado dos campos $\mathcal{F}^A{}_{\mu\nu}$, podemos escrever a Lagrangeana unificada como

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{16\pi G} \left(\frac{1}{4} \mathcal{F}^A{}_{\mu\nu} \mathcal{F}^B{}_{\theta\rho} g^{\mu\theta} N_{AB}{}^{\nu\rho} \right). \quad (4.52)$$

Os índices algébricos A, B, C, \dots são levantados e abaixados com a métrica de Cartan-Killing

$$\eta_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{ab} & 0 \\ \hline 0 & \eta_{ij} \end{array} \right), \quad (4.53)$$

cujas componentes relacionadas com o grupo das translações coincidem com a métrica η_{ab} do espaço tangente de Minkowski. A forma explícita das componentes de $N_{AB}{}^{\nu\rho}$ são

$$N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab} h_c{}^\nu h^{c\rho} + 2h_a{}^\rho h_b{}^\nu - 4h_a{}^\nu h_b{}^\rho, \quad (4.54)$$

que nos fornece a Lagrangeana do setor gravitacional [36, 37], e

$$N_{ij}{}^{\nu\rho} = \eta_{ij} h_c{}^\nu h^{c\rho}, \quad (4.55)$$

que nos fornece a Lagrangeana do setor de Yang-Mills. A diferença na forma de $N_{AB}{}^{\nu\rho}$ para os diferentes setores da teoria esta diretamente relacionada com o fato que, devido à presença de um campo de tetradas no setor gravitacional, os índices algébricos e de espaço-tempo deste setor são do mesmo tipo, e conseqüentemente há formas adicionais de contrair estes índices. Como não há tetradas relacionando os índices algébricos e de espaço-tempo no setor de Yang-Mills, apenas a contração usual é possível. Substituindo as componentes de $N_{AB}{}^{\nu\rho}$ na Lagrangeana (4.52), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{c^4 h}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{\kappa^{-2} g^2}{16\pi G} \eta_{ij} \left[\frac{h}{4} F^i{}_{\mu\nu} F^{j\mu\nu} \right]. \quad (4.56)$$

Para obtermos a forma correta da Lagrangeana de Yang-Mills, devemos impor duas condições no segundo termo da Eq. (4.56). O primeiro é que [19]

$$\kappa^2 = \frac{g^2}{16\pi G} \equiv \frac{g^2}{\mathcal{G}^2}. \quad (4.57)$$

Assim, a constante κ é apenas a relação entre a constante de acoplamento de gauge g e a constante de acoplamento gravitacional \mathcal{G} . A segunda condição esta relacionada com o sinal relativo entre as Lagrangeanas gravitacional e de Yang-Mills. De forma a obter o sinal apropriado, devemos ter

$$\eta_{ij} = -\delta_{ij}. \quad (4.58)$$

Desta forma, a métrica de Cartan-Killing (4.53) do grupo de gauge unificado se torna

$$\eta_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \eta_{ab} & 0 \\ \hline 0 & -\delta_{ij} \end{array} \right). \quad (4.59)$$

Com estas condições, obtemos

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{YM} = \frac{c^4 h}{16\pi G} S^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} - \frac{h}{4} F^i{}_{\mu\nu} F^{i\mu\nu}. \quad (4.60)$$

É importante notar que, quando escolhemos a métrica de Cartan-Killing relacionada ao grupo das translações T_4 como sendo $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, a métrica de Cartan-Killing relacionada ao grupo (interno) de Yang-Mills (G_{YM}) tem necessariamente a forma $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$. Se tivéssemos escolhido a outra convenção possível para η_{ab} , isto é, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, deveríamos ter então que $\eta_{ij} = +\delta_{ij}$. Portanto, a versão teleparalela de Kaluza-Klein impõe um vínculo entre

a convenção usada para a métrica de Cartan-Killing do grupo das translações, e consequentemente para o espaço tangente de Minkowski — veja o comentário abaixo da Eq. (4.53) — e a usada para o grupo de gauge de Yang-Mills.

Fazendo a variação funcional de \mathcal{L} em relação a A^a_τ , obtemos as equações de campo gravitacional

$$\partial_\sigma(hS_\lambda^{\tau\sigma}) - \frac{4\pi G}{c^4} h t^\tau{}_\lambda = \frac{4\pi G}{c^4} h \mathcal{T}^\tau{}_\lambda, \quad (4.61)$$

onde $h t^\tau{}_\lambda$, dado por (2.27), é o pseudo-tensor energia-momento canônico do campo gravitacional [38]. A fonte da equação de campo (4.61) é o tensor energia-momento do campo de Yang-Mills na presença da gravitação, definido por

$$h \mathcal{T}^\tau{}_\lambda \equiv -c^{-2} h^a{}_\lambda \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\delta A^a_\tau} = -h^a{}_\lambda \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\delta h^a{}_\tau}. \quad (4.62)$$

Finalmente, a variação de \mathcal{L} em relação a A^i_μ fornece a equação de Yang-Mills na presença da gravitação,

$$\partial_\mu(hF^{i\mu\nu}) - \frac{g}{\hbar c} h j^{i\nu} = 0, \quad (4.63)$$

onde

$$j^{i\nu} = -f^i{}_{jk} A^j{}_\mu F^{k\mu\nu}, \quad (4.64)$$

é a (pseudo) corrente do campo de Yang-Mills [44]. A equação de campo teleparalela (4.61) tem a vantagem de apresentar a mesma estrutura formal da equação de Yang-Mills (4.63).

4.5 Campos de Matéria

A estrutura geométrica subjacente a qualquer teoria de gauge existe independentemente da presença ou não de campos de gauge. Por exemplo, na teoria de Kaluza-Klein teleparalela, a parte quadri-dimensional não-compacta da fibra, que é dada pelo espaço tangente de Minkowski, é uma estrutura geométrica que esta sempre presente, independente da presença ou não de um campo de gauge gravitacional. O mesmo acontece com a parte D -dimensional compacta da fibra em relação aos campos de Yang-Mills. Devemos notar que o espaço fibrado das teorias de Kaluza-Klein teleparalelas corresponde ao estado fundamental das teorias de Kaluza-Klein usuais. Nestas teorias, a transição de uma teoria em dimensões maiores para uma

teoria quadri-dimensional efetiva é feita através de uma expansão harmônica ao redor do estado fundamental, cujas excitações representam os campos do modelo. Como consequência, obtém-se um espectro infinito de partículas. Em particular, os estados de mais baixa excitação tem massa nula, fornecendo o estado sem massa da teoria de gauge.

Por outro lado, nas teorias de Kaluza-Klein teleparalelas, todas as variáveis dinâmicas são funções das coordenadas do espaço-tempo quadri-dimensional. Além disso, a ação e as equações de campo são escritas no espaço-tempo quadri-dimensional, e não no espaço fibrado de maiores dimensões. Isto significa que não precisamos fazer nenhuma redução dimensional, não precisamos fazer nenhuma expansão harmônica ao redor do estado fundamental, e consequentemente os campos deste modelo não são interpretados como excitações. De fato, como em qualquer outra teoria de gauge, os campos são representados por potenciais de gauge dados *a priori*, que são os ingredientes básicos para a construção de teorias de gauge.

Agora vem a questão de como as variáveis dinâmicas da teoria dependem das coordenadas x^M do espaço fibrado. Com relação às coordenadas x^a da parte quadri-dimensional não-compacta (M^4) da fibra, como este espaço está soldado ao espaço-tempo, e como todas as variáveis dinâmicas são funções das coordenadas do espaço-tempo x^μ , a dependência destas variáveis em x^a tem necessariamente que ser através do argumento das variáveis dinâmicas. Agora, com relação às coordenadas x^m da parte D -dimensional compacta (B^D) da fibra, como uma mudança em x^m deve corresponder a uma mudança, não no argumento, mas nas componentes dos campos, a dependência de qualquer variável dinâmica em x^m vai ser semelhante à dependência no parâmetro de gauge numa teoria de gauge usual. Isto é uma consequência direta do fato de que as transformações isométricas de B^D são basicamente equivalentes à transformações de gauge internas. De acordo com isto, a dependência do campo de matéria Ψ nas coordenadas x^m pode ser escrita na forma

$$\Psi(x^\mu, x^m) = \exp [i \chi \beta_m x^m] \psi(x^\mu) , \quad (4.65)$$

onde χ esta definida na Eq. (4.43), e β_n são parâmetros relacionados à geometria da variedade compacta B^D . Além disso, como uma mudança em x^m esta relacionada a uma transformação de gauge, β_n deve necessariamente assumir valores na álgebra de Lie do grupo de gauge. Em outras palavras, $\beta_n = \beta_n^j \mathbf{T}_j$, com \mathbf{T}_j sendo uma

representação matricial dos geradores da álgebra de Lie. De fato, de acordo com a Eq. (4.65), a ação do gerador isométrico (diferencial) $K^n_i \partial_n$ é equivalente a ação do gerador matricial (multiplicativo) $i\chi K^n_i \beta_n$. Isto significa que é possível relacionar $i\chi K^n_i \beta_n$ com outra realização dos geradores do grupo de gauge. Como dito antes, esta possibilidade é uma consequência direta do fato de que as transformações de gauge (internas) são obtidas das isometrias de B^D .

Vamos explorar melhor este ponto. Sob as transformações de coordenadas (4.33), o campo de matéria Ψ se transforma como

$$\delta\Psi = \delta\alpha^A K_A \Psi \equiv \delta\alpha^a \partial_a \Psi + \frac{g}{\kappa c^2} \delta\alpha^i K^n_i \partial_n \Psi . \quad (4.66)$$

Usando a Eq. (4.65), vemos que

$$\partial_n \Psi = i\chi \beta_n \Psi = i \frac{\kappa c}{\hbar} \beta_n \Psi , \quad (4.67)$$

onde usamos a Eq. (4.43). Substituindo este resultado na transformação (4.66), obtemos que

$$\delta\Psi = \delta\alpha^a \partial_a \Psi + \frac{ig}{\hbar c} \delta\alpha^i K^n_i \beta_n \Psi . \quad (4.68)$$

Por outro lado, já vimos que $K_i = K^n_i \partial_n$ satisfaz a relação de comutação dada por (4.45), isto é,

$$[K^n_i \partial_n, K^m_j \partial_m] \Psi = \chi f^k_{ij} K^n_k \partial_n \Psi .$$

Como os vetores de Killing K^n_i dependem nas coordenadas x^m da mesma forma que Ψ , é fácil verificar que

$$[iK^n_i \beta_n, iK^m_j \beta_m] \Psi = f^k_{ij} iK^n_k \beta_n \Psi . \quad (4.69)$$

Isto significa que

$$T_i = iK^n_i \beta_n \equiv iK^n_i \beta_n^j \mathbf{T}_j \quad (4.70)$$

pode ser identificado como outra realização dos geradores (anti-hermitianos) da álgebra de Lie. Com esta identificação, a transformação (4.68) adquire a forma

$$\delta\Psi = \delta\alpha^a P_a \Psi + \frac{g}{\hbar c} \delta\alpha^i T_i \Psi , \quad (4.71)$$

que é de fato uma transformação de gauge dos campos de matéria.

A derivada covariante de Ψ é definida como

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + c^{-2} \mathcal{A}^A{}_\mu \frac{\delta \Psi}{\delta \alpha^A} . \quad (4.72)$$

Usando as definições apropriadas, ela se torna

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = h^a{}_\mu \partial_a \Psi + \frac{g}{\hbar c} A^i{}_\mu T_i \Psi , \quad (4.73)$$

que é a expressão usual da derivada covariante de gauge na presença da gravitação. Definindo $A^i{}_\mu = h^a{}_\mu A^i{}_a$, ela pode ainda ser reescrita na forma

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = h^a{}_\mu \mathcal{D}_a \Psi , \quad (4.74)$$

onde $\mathcal{D}_a \Psi$ é a derivada covariante de gauge no espaço-tempo de Minkowski.

Capítulo 5

Conclusões

Sumarizaremos neste capítulo final os principais resultados obtidos nesta tese. Primeiramente, no contexto de uma teoria de gauge para o grupo das translações [37], obtivemos uma corrente de gauge j^{τ}_a que representa a densidade de energia-momento do campo gravitacional. Esta corrente se transforma covariantemente sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo, é invariante sob translações locais (transformações de gauge) das coordenadas no espaço tangente, e se transforma covariantemente sob transformações locais de Lorentz no espaço tangente. Isto significa, essencialmente, que j^{τ}_a é um tensor verdadeiro [38, 39]. Reescrevendo as equações de campo com todos os índices de espaço-tempo, elas se tornam equivalentes às equações de Einstein da Relatividade Geral, e a corrente de gauge j^{τ}_a se transforma no pseudo-tensor energia-momento canônico do campo gravitacional, que coincide com a expressão bem conhecida de Møller. Conseqüentemente, no contexto usual da Relatividade Geral, a densidade de energia-momento canônica para o campo gravitacional vai ser sempre representada por um pseudo-tensor. No equivalente teleparalelo da Relatividade Geral, entretanto, ela pode ser representada por um tensor verdadeiro.

É importante mencionar que o tratamento descrito acima está de acordo com o formalismo *quasilocal*, segundo o qual para qualquer pseudo-tensor energia-momento existe associado um *superpotencial*, que é um termo hamiltoniano de superfície [53]. Por outro lado, as equações de campo teleparalelas, ao contrário das equações de Einstein, mostram explicitamente o *superpotencial* e a densidade de energia-momento gravitacional. Podemos então ver que se trocarmos apropriadamente termos entre o *superpotencial* e o termo de corrente da equação de campo (2.26), é possível obter

diferentes pseudo-tensores energia-momento gravitacionais com seus *superpotenciais* associados. Neste contexto, nossos resultados podem ser reescritos de acordo com o seguinte esquema. Primeiro, notemos que o lado esquerdo da equação de campo (2.26) como um todo é um tensor verdadeiro, embora cada um dos seus dois termos não o seja. Então, se extraírmos a parte espúria do primeiro termo, de tal forma que ele vire um tensor verdadeiro, e o colocarmos no segundo termo, que representa a densidade de energia-momento, ela também se torna um tensor verdadeiro.

Um outro resultado refere-se à conexão de spin teleparalela. Devido ao fato que a conexão de Weitzenböck se anula ($\omega^a{}_{b\mu} = 0$) quando escrita na base das tetradas, geralmente se afirma que [29], para campos espinoriais a derivada covariante teleparalela

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \omega^a{}_{b\mu} S_{ab} , \quad (5.1)$$

coincide com a derivada parcial: $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu$. No entanto, existem alguns problemas associados com esta prescrição de acoplamento. Primeiro, ela não é compatível com a prescrição de acoplamento da Relatividade Geral, o que de algum modo esta em desacordo com a equivalência entre as Lagrangeanas gravitacionais correspondentes. Segundo, obtemos resultados diferentes ao aplicar esta prescrição de acoplamento na Lagrangeana ou na equação de campo, o que é um resultado estranho. Resumindo, podemos dizer que não existem argumentos convincentes que sustentem a escolha de $\omega^a{}_{b\mu}$ como a conexão de spin no Teleparalelismo.

Por outro lado, vários argumentos nos levam a concluir de que a conexão de spin no Teleparalelismo é de fato dada por [40]

$$\Gamma^a{}_{b\mu} = -K^a{}_{b\mu} + 0 , \quad (5.2)$$

que leva à prescrição de acoplamento (2.69), ou equivalentemente a

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} K^a{}_{b\mu} S_{ab} . \quad (5.3)$$

Primeiro, \mathcal{D}_μ é covariante sob transformações locais de Lorentz. Segundo, ao contrário da prescrição de acoplamento (5.1), obtemos resultados completamente equivalentes ao aplicarmos a prescrição de acoplamento minimal na Lagrangeana ou na equação de campo. Terceiro, ele fornece resultados que são auto-consistentes, e que concordam com aqueles da Relatividade Geral. Por exemplo, é um resultado bem

conhecido que na Relatividade Geral a derivada covariante *total* da tetrada se anula,

$$\partial_\mu h_b^\rho + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho_{\nu\mu} h_b^\nu - \overset{\circ}{\omega}{}^a_{b\mu} h_a^\rho = 0, \quad (5.4)$$

que nada mais é do que a Eq. (2.57). A versão teleparalela desta equação pode ser obtida substituindo $\overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho_{\nu\mu}$ e $\overset{\circ}{\omega}{}^a_{b\mu}$ pelos seus equivalentes teleparalelos. Usando as Eqs. (2.34) e (2.64), obtemos

$$\partial_\mu h_b^\rho + (\Gamma^\rho_{\nu\mu} - K^\rho_{\nu\mu}) h_b^\nu + K^a_{b\mu} h_a^\rho = 0, \quad (5.5)$$

onde não escrevemos a *conexão nula* por simplicidade de notação. No entanto, os termos de contorção se cancelam, fornecendo-nos a condição de paralelismo absoluto,

$$\partial_\mu h_b^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\mu} h_b^\nu = 0, \quad (5.6)$$

que é a equação fundamental no Teleparalelismo. Isto demonstra a consistência em identificar a conexão de spin teleparalela como sendo *menos* o tensor de contorção mais uma *conexão nula*. Finalmente, como a prescrição de acoplamento (5.3) é covariante sob transformações locais de Lorentz, e equivalente à prescrição de acoplamento minimal da Relatividade Geral, a teoria teleparalela com esta prescrição de acoplamento torna-se completamente equivalente à Relatividade Geral, mesmo na presença de campos espinooriais. Por último, fizemos estudo da consistência das leis de conservação das densidades de energia-momento dos campos de matéria. Como um primeiro passo, as identidades de Bianchi gravitacional do equivalente teleparalelo da Relatividade Geral foram obtidas. Então, de modo a serem consistentes com estas identidades, concluímos que o tensor energia-momento de um campo qualquer de matéria deve ser conservado com a derivada covariante teleparalela, isto é, com a derivada covariante (5.3), o que mostra mais uma vez a consistência deste acoplamento minimal. Além disso, como esta derivada covariante é a derivada covariante de Levi-Civita reescrita em termos de grandezas teleparalelas, esta lei de conservação torna-se equivalente à lei de conservação da Relatividade Geral.

Por outro lado, voltando ao pseudo-tensor energia-momento canônico $t^{\tau\lambda}$ do campo gravitacional, obtivemos, através do método de Belinfante, sua versão simetrizada $\tau^{\tau\lambda}$. Além dele ser simétrico, ele coincide com o lado esquerdo da equação de campo gravitacional, e é consequentemente um tensor verdadeiro. Se assumirmos que $\tau^{\tau\lambda}$ representa a densidade de energia-momento do campo gravitacional, a

equação de campo (2.83) adquire a forma

$$\tau^{\tau\lambda} + \mathcal{T}^{\tau\lambda} = 0 . \quad (5.7)$$

Esta equação pode ser interpretada da seguinte forma: toda fonte de gravitação na natureza cria um campo gravitacional de tal forma a equilibrar a densidade de energia-momento da fonte. Este equilíbrio nos lembra o princípio de d'Alembert [66], que trata essencialmente do equilíbrio de forças em um dado sistema físico. É claro que, o equilíbrio definido pela Eq. (5.7) é mais geral do que o princípio de d'Alembert no sentido de que não apenas a força total aplicada a um dado sistema se anula, mas também a pressão, o fluxo de momento e a densidade de energia tornam-se zero, levando a um princípio de d'Alembert generalizado [67]. Notemos que esta interpretação não muda a descrição usual da interação gravitacional. Apenas os conceitos relacionados à conservação da densidade de energia-momento são mudados. Em particular, como a densidade de energia-momento total de qualquer sistema vai ser sempre zero, podemos dizer que a densidade de energia-momento do universo vai ser sempre zero. Uma consequência imediata deste ponto é que mesmo durante a criação do universo — isto é, durante o Big-Bang — o postulado da conservação da densidade de energia-momento não é violado.

Uma propriedade notável adicional do tensor de energia-momento gravitacional $\tau^{\tau\lambda}$ é que, em uma região sem fontes, ele se anula identicamente. Esta situação tem uma forte analogia com a teoria de Yang-Mills, cujas equações de campo são [68]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = -J^\nu , \quad (5.8)$$

onde J^ν é a corrente da fonte. A auto-corrente de gauge é geralmente assumida como sendo

$$j^\nu = -[A_\mu, F^{\mu\nu}] , \quad (5.9)$$

que claramente não é covariante de gauge, em analogia com o pseudo-tensor energia-momento gravitacional $t^{\tau\lambda}$. No entanto, se adicionarmos a esta corrente a divergência de um tensor anti-simétrico (em analogia com o método de Belinfante), obtemos uma nova corrente

$$\vartheta^\nu = j^\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu} , \quad (5.10)$$

que é covariante de gauge, e apresenta a mesma carga conservada que j^ν . Esta corrente é o análogo de Yang-Mills do tensor energia-momento simétrico $\tau_{\mu\nu}$, no

sentido de que ambos coincidem com o lado esquerdo das equações de campo correspondentes. De fato, neste caso as equações de Yang-Mills podem ser escritas em uma forma similar à Eq. (5.7), isto é,

$$\vartheta^\nu + J^\nu = 0 . \quad (5.11)$$

Assim, analogamente ao caso gravitacional, podemos interpretar esta equação dizendo que toda fonte de *cor* na natureza cria um campo de gluons de tal forma a balançar a cor da fonte. Além disso, em uma região distante da fonte, a corrente de gauge covariante se anula identicamente, $\vartheta^\nu = 0$, o que significa que o fluxo e a densidade de cor devem se anular nesta região. Finalmente, devemos notar que, embora tenhamos obtido este resultado no contexto da gravitação teleparalela, os mesmos resultados seriam obtidos, e são conseqüentemente válidos, para a Relatividade Geral [69].

Finalmente, no contexto das teorias de Kaluza-Klein, trocamos o paradigma da Relatividade Geral pelo paradigma de gauge, e construímos dessa forma uma teoria de gauge para o grupo translacional penta-dimensional, em um espaço-tempo quadri-dimensional. Nesta teoria, a gravitação é atribuída à torção, e o tensor intensidade do campo eletromagnético aparece como a quinta componente do tensor de torção. Uma característica importante desses modelos é que nenhum campo escalar é gerado no processo de unificação. Portanto, não aparece nenhum vínculo não físico, e a ação gravitacional pode ser naturalmente truncada no modo zero. Além disso, podemos manter apenas o modo $n = 1$ na expansão de Fourier de campos de matéria. Conseqüentemente, eliminamos o espectro infinito de partículas massivas, reduzindo fortemente a redundância presente nas teorias ordinárias de Kaluza-Klein. Recentemente, um resultado semelhante foi obtido através de uma teoria de Kaluza-Klein modificada, no qual as coordenadas internas são substituídos por geradores de uma álgebra não-comutativa [70]. Neste modelo, não é necessário nenhum truncamento para eliminar modos estranhos, uma vez que apenas um número finito de modos está presente. Quanto a isto, a versão teleparalela de Kaluza-Klein parece ser a mais apropriada para lidar com modelos envolvendo geometria não-comutativa. De fato, como o espaço-tempo fundamental de tal modelo é um espaço-tempo que apresenta torção, mas não curvatura, a dificuldade usual para definir curvatura [71], e conseqüentemente para escrever a ação do campo gravitacional [72] é evitada.

Um outro ponto importante se refere à relação entre geometria e teorias de gauge.

De acordo com os modelos usuais de Kaluza-Klein, as teorias de gauge aparecem de teorias geométricas em dimensões maiores como consequência do processo de redução dimensional. Entretanto, de acordo com o nosso formalismo, as teorias de gauge são a estrutura natural a ser introduzida, com a geometria quadri-dimensional (gravitação) aparecendo do setor não compacto do espaço interno. De fato, apenas este setor apresenta a propriedade de *soldering* [57], e pode conseqüentemente fornecer um campo de tetradas, que é o responsável pela estrutura geométrica (tanto métrica como teleparalela) induzida no espaço-tempo. Além disso, como as teorias de gauge são introduzidas na sua forma original — elas não vêm da geometria — a unificação, embora não seja trivial, torna-se mais natural e fácil de ser feita. Devemos mencionar que vários modelos de Kaluza-Klein em espaços-tempos com torção já foram considerados [73]. No entanto, a maioria deles são construídos em espaços-tempos penta-dimensionais, e são conseqüentemente completamente diferentes do modelo aqui proposto.

Generalizando o caso Abelian [41, 42], conseguimos construir uma versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana. Em outras palavras, conseguimos unificar, no sentido de Kaluza-Klein, a gravitação teleparalela com as teorias de Yang-Mills. O modelo obtido é uma teoria de gauge para o grupo $T_4 \otimes G_{YM}$, com a fibra dada por $M^4 \otimes B^D$, onde M^4 é o espaço-tempo tangente de Minkowski, e B^D é variedade associada ao grupo de gauge G_{YM} de Yang-Mills. Neste modelo, as transformações de gauge translacionais se originam das isometrias da parte quadri-dimensional não-compacta da fibra, que vai ser sempre um espaço-tempo de Minkowski M^4 , enquanto que as transformações de gauge não-Abelianas se originam das isometrias da parte D -dimensional compacta da fibra, que é a parte relacionada às simetrias de gauge internas.

Como no caso Abelian [41, 42], a versão teleparalela da teoria de Kaluza-Klein não-Abeliana parece ser mais natural que a teoria de Kaluza-Klein usual. De fato, no modelo teleparalelo tanto o campo gravitacional como o campo de Yang-Mills são descritos por uma teoria de gauge, com o tensor intensidade de Yang-Mills aparecendo como componentes extras da torção, que é o tensor intensidade da gravitação teleparalela. Isto significa que os tensores intensidade gravitacionais e de Yang-Mills são diferentes componentes de um único tensor.

Uma característica importante das teorias de Kaluza-Klein não-Abelianas ordinárias, é que a métrica (4.32) não é solução das equações de Einstein em dimensões maiores, uma vez que estas equações não admitem soluções da forma $M^4 \otimes B^D$. Isto está relacionado com o fato de que o espaço interno D -dimensional em geral é curvo, levando à dificuldades para definir o estado fundamental (vácuo) do campo gravitacional em dimensões maiores. Consequentemente, estes modelos requerem inicialmente um espaço-tempo $(4 + D)$ -dimensional não-compacto, e subsequentemente um esquema de compactificação para as D dimensões extras. Uma maneira de resolver este problema é introduzindo campos de matéria extra na forma de um tensor de energia-momento de dimensões maiores, e assim conseguir uma compactificação espontânea para as dimensões extras [74]. Outra solução foi dada por Freund e Rubin [75] no contexto da supergravidade em 11 dimensões, onde não apenas ocorria a compactificação, como o espaço naturalmente se separava em $(4 + 7)$ dimensões. Por outro lado, como no modelo de Kaluza-Klein teleparalelo as teorias de gauge não são obtidas da geometria, mas introduzidas na sua forma original, podemos assumir que o espaço fibrado desta teoria apresenta uma sub-variedade compacta B^D desde o início. Em outras palavras, o problema da compactificação não existe para esta teoria. Além disso, devido ao fato de que tanto a ação como as equações de campo são sempre escritas no espaço-tempo quadri-dimensional, e não no espaço de dimensões maiores, nenhuma redução dimensional é necessária, e consequentemente não temos que fazer nenhuma expansão das variáveis dinâmicas em torno do conjunto completo de harmônicos de B^D . Como consequência, não temos um espectro infinito de novas partículas, reduzindo substancialmente a redundância destes modelos.

Finalmente, como um último comentário, vamos tomar as transformações de coordenadas internas (4.40), e substituir o valor de κ dado pela Eq. (4.57). Como B^D é compacto, esta transformação pode ser escrita na forma

$$\delta x^n = \rho \delta \theta^n, \quad (5.12)$$

onde

$$\rho = l_P \equiv \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

é a escala de comprimento associada a sub-variedade interna compacta, que nada

mais é do que o comprimento de Planck, e

$$\delta\theta^n = \left(\frac{16\pi}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}} \delta\xi^n \quad (5.14)$$

é a coordenada angular associada à x^m . Desta forma, vemos que o modelo de Kaluza-Klein teleparalelo define uma escala de comprimento natural para a parte compacta do espaço fibrado, dado pelo comprimento de Planck. No caso específico da teoria de Kaluza-Klein Abelian ordinária, o raio da quinta dimensão pode apenas ser estimada através do valor da carga elétrica elementar. Como o modelo teleparalelo fornece uma escala de comprimento natural, podemos reverter o argumento e usar esta escala para *calcular* a carga elétrica elementar. Além disso, como é bem conhecido, um comprimento da ordem do comprimento de Planck, como o ρ acima, através da aplicação da regra de quantização de Bohr-Sommerfeld ao movimento periódico na quinta dimensão, fornece o valor correto para a carga elétrica elementar.

Referências

- [1] G. Nordström, *Phys. Zeitsch.* **13**, 1126 (1912); *Ann. d. Physik* **40**, 872 (1913); **42**, 533 (1913).
- [2] G. Nordström, *Phys. Zeitsch.* **15**, 504 (1914).
- [3] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 465-480 (1918).
- [4] Th. Kaluza, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse* 966 (1921).
- [5] O. Klein, *Z. F. Physik* **37**, 895 (1926).
- [6] H. Mandel, *Z. F. Physik* **39**, 136 (1926).
- [7] O. Klein, *Nature* **118**, 516 (1926).
- [8] A. Einstein and P. Bergmann, *Ann. Math.* **39**, 683 (1938).
- [9] P. Jordan, *Ann. d. Physik* **1**, 219 (1947).
- [10] Y. Thiry, *Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris)* **226**, 216 (1948).
- [11] A. Pais, *Subtle is the Lord... The Science and the Life of Albert Einstein*, (Clarendon, Oxford, 1982).
- [12] O. Klein, *Conference on New Theories in Physics*, held in Kasimierz, Poland (1938).
- [13] O. Klein, *New Theories in Physics*, (International Institute of Intellectual Cooperation, Scientific Collection, Paris, 1939).
- [14] C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).

- [15] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [16] B. DeWitt, *Relativity, Groups, Topology*, (Gordon and Breach, NY, 1964) p. 725
- [17] R. Kerner, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **9**, 143 (1968).
- [18] A. Trautman, *Rep. Math. Phys.* **1**, 29 (1970).
- [19] Y. M. Cho and P. G. O. Freund, *Phys. Rev. D* **12**, 1711 (1975).
- [20] Y. M. Cho, *J. Math. Phys.* **16**, 2029 (1975).
- [21] D. Bailin and A. Love, *Rep. Prog. Phys.* **50**, 1087 (1987)
- [22] T. Appelquist, A. Chodos and P. G. O. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, (Addison-Wesley, Reading, 1987).
- [23] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Phys. Rep.* **283**, 303 (1997).
- [24] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, (Princeton University Press, 1997).
- [25] L. O’Raifeartaigh and N. Straumann, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 1 (2000).
- [26] C. Møller, *Mat. Fys. Skr. Dan. Vidensk. Selsk.* **1**, No. 10 (1961).
- [27] C. Pellegrini and J. Plebanski, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr.* **2**, No. 2 (1962).
- [28] K. Hayashi and T. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **38**, 491 (1967).
- [29] K. Hayashi and T. Shirafuji, *Phys. Rev. D* **19**, 3524 (1979).
- [30] F. W. Hehl, in *Cosmology and Gravitation*, ed. by P. G. Bergmann and V. de Sabbata (Plenum, New York, 1980).
- [31] W. Kopczyński, *J. Phys. A* **15**, 493 (1982).
- [32] R. de Azeredo Campos and C. G. Oliveira, *Nuovo Cimento B* **74**, 83 (1983).
- [33] F. Müller-Hoissen and J. Nitsch, *Gen. Rel. Grav.* **17**, 747 (1985).

- [34] E. W. Mielke, *Ann. Phys. (NY)* **219**, 78 (1992).
- [35] Para uma revisão geral do formalismo de gauge para a gravitação, ver F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, *Phys. Rep.* **258**, 1 (1995).
- [36] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, *Phys. Rev. D* **56**, 4689 (1997).
- [37] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Overview*, in *Proceedings of the IX Marcel Grossmann Meeting*, Rome, Italy, 2000 (gr-qc/0011087).
- [38] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4533 (2000).
- [39] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity and the Gravitational Energy-Momentum Density*, in *Proceedings of the IX Marcel Grossmann Meeting*, Rome, Italy, 2000 (gr-qc/0011079).
- [40] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira, *Phys. Rev. D* **64**, 027502 (2001).
- [41] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen, and J. G. Pereira, *Phys. Rev. D* **61**, 084031 (2000).
- [42] L. C. T. Guillen, *Equivalente Teleparalelo de Kaluza-Klein*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica, UNESP, Agosto de 1999.
- [43] A. L. Barbosa, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Phys. Rev. D* **66**, 064028 (2002).
- [44] Ver, por exemplo, P. Ramond, *Field Theory: a Modern Primer* (Benjamin & Cummings, Reading, 1981).
- [45] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, *Int. J. Mod. Phys. D* **8**, 141 (1999).
- [46] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, New York, 1973).
- [47] Ver, por exemplo, A. Trautman, in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

- [48] A. Papapetrou, Proc. Roy. Irish Acad. A **52**, 11 (1948); P. G. Bergmann and R. Thompson, Phys. Rev. **89**, 400 (1953); C. Møller, Ann. Phys. **4**, 347 (1958).
- [49] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [50] Para uma discussão crítica do princípio da equivalência, veja o prefácio de J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1960).
- [51] J. W. Maluf, J. Math. Phys. **36**, 4242 (1995).
- [52] M. Dubois-Violette and J. Madore, Comm. Math. Phys. **108**, 213 (1987); L. B. Szabados, Class. Quant. Grav. **9**, 2521 (1992); J. M. Aguirregabiria, A. Chamorro and K. S. Virbhadra, Gen. Rel. Grav. **28**, 1393 (1996); T. Shirafuji and G. L. Nashed, Prog. Theor. Phys. **98**, 1355 (1997); S. Deser, J. S. Franklin and D. Seminara, Class. Quant. Grav. **16**, 2815 (1999); S. V. Babak and L. P. Grishchuck, Phys. Rev. D **61**, 024038 (2000).
- [53] C. C. Chang and J. M. Nester, Phys. Rev. Lett. **83**, 1897 (1999), e referências dentro.
- [54] F. Gronwald and F. W. Hehl, *On the Gauge Aspects of Gravity*, in *Proceedings of the 14th School of Cosmology and Gravitation*, Erice, Italy, ed. by P. G. Bergmann, V. de Sabbata and H.-J. Treder (World Scientific, Singapore, 1996).
- [55] V. A. Fock and D. Ivanenko, Z. Phys. **54**, 798 (1929); V. A. Fock, Z. Phys. **57**, 261 (1929).
- [56] P. A. M. Dirac, in: *Planck Festschrift*, ed. W. Frank (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958).
- [57] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World, Singapore, 1995).
- [58] M. J. G. Veltman, *Quantum Theory of Gravitation*, in *Methods in Field Theory*, Les Houches 1975, Ed. by R. Balian and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1976).

- [59] N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Gauge Fields* (Harwood, Chur, 1981).
- [60] V. de Sabbata and C. Sivaram, *Spin and Torsion in Gravitation* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [61] F. J. Belinfante, *Physica* **6**, 687 (1939).
- [62] A. Chodos, *Comments Nucl. Part. Phys.* **13**, 171 (1984).
- [63] W. Drechsler, *Phys. Lett. B* **90**, 258 (1980).
- [64] S. K. Wong, *Nuov. Cim.* **65**, 689 (1970).
- [65] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [66] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (Univ. of Toronto Press, Toronto, 1970).
- [67] Tullio Levi-Civita, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* **26**, 381 (1917); para uma tradução para o inglês, ver S. Antocci and A. Loinger, physics/9906004
- [68] Veja, por exemplo, C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [69] L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, *Some Remarks on the Gravitational Energy-Momentum Density*, submetido para publicação.
- [70] J. Madore and J. Mourad, *Non-commutative Kaluza-Klein Theory*, Lecture given at the 5th Hellenic School and Workshop on Elementary Particle Physics (hep-th/9601169).
- [71] M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson and J. Mourad, *J. Math. Phys.* **37**, 4089 (1996).
- [72] A. Connes, *Commun. Math. Phys.* **117**, 673 (1988).
- [73] C. Kohler, *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 1235 (2000), e referências dentro; M. Toussaint, *Gen. Rel. Grav.* **32**, 885 (2000).

[74] E. Cremmer, Z. Horvath, L. Palla and J. Scherk, Nucl. Phys. B **127**, 57 (1977).

[75] P. G. O. Freund and M. A. Rubin, Phys. Lett. B **97** 233 (1980).

