



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.003/05

Os Formalismos da Supercorda

Carlos Roberto Mafra

Orientador

Prof. Dr. Nathan J. Berkovits



Março de 2005

Agradecimentos

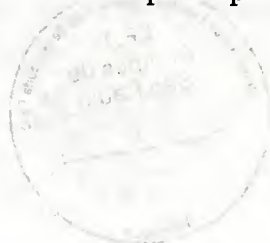
Primeiramente gostaria de agradecer a minha família pelo constante apoio ao longo dos anos, sem o qual nada disso seria possível. Ao *mano diço* pelas inúmeras horas que compartilhamos no futebol, no ciclismo, nas adoráveis discussões sobre nossos gibis, nos incontáveis episódios de *Arquivos-X* e *Highlander* e, mais recentemente, nas várias horas jogando *Counter-Strike*.

Gostaria especialmente de agradecer ao melhor professor que já tive, Eliezer Batista, por ter me ensinado matemática da melhor maneira possível durante a graduação e principalmente por ter me motivado a continuar sempre aprendendo mais. Sem ele eu não estaria aqui.

Aos meus colegas do IFT, Clóvis, Evandro (Ev), Júlio (Julius), Carioca, Douglas, William, Wanderson, Geová, Anderson, Marcelo, Fernando, Cabelo e especialmente a Dáfni, que sempre conversou comigo e me ajudou de diversas maneiras, e ao Oscar, meu companheiro explorador das intrincadas páginas do Polchinski. Além disso, sou agradecido ao Nathan por ter sido meu orientador e pela explicação que me deu no dia 9 de Julho de 2004.

Não menos importante é o agradecimento que eu tenho aos inúmeros desenvolvedores dos softwares livres que usei durante a confecção dessa dissertação, e.g., kernel linux, emacs, xjed, xdvi, aterm, Window Maker, $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, etc, sem os quais os custos para o país teriam sido muito mais altos e a qualidade gráfica dessa dissertação muito pior.

Finalmente, à FAPESP pelo apoio financeiro nos últimos 2 anos.



Resumo

Neste trabalho nós revisamos o formalismo de Green-Schwarz (GS) da supercorda e discutimos os seus problemas e vantagens com relação ao formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS). Nós demonstramos, entre outras coisas, que o formalismo de Green-Schwarz possui supersimetria manifesta no espaço-tempo, mas que não pode ser quantizado covariantemente, exatamente o oposto do que ocorre em RNS. Então nós finalmente estudamos o formalismo recém criado de espiniores puros, que incorpora as boas propriedades dos formalismos anteriores sem incluir seus defeitos.

Palavras Chaves: Supercordas; Supersimetria; Formalismo de Green-Schwarz; Espiniores Puros

Áreas do conhecimento: Supersimetria; Teoria de Campos

Abstract

In this work we review the Green-Schwarz (GS) formalism of the superstring and discuss its problems and advantages with respect to the Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) formalism. We show, among other things, that the GS formalism has manifest spacetime supersymmetry, but at the same time it cannot be covariantly quantized, exactly the opposite of what happens in the RNS formalism. Then we finally study the recently-developed pure spinor formalism, which has the good properties of the previous two without having their problems.

Contenido

Hac sententia existimationem meam patefacio ut argumentis invenire maximas naturæ æquationes naturaliter sine experimento quicumque fieri posse:

*... noli foras ire, in te ipsum redi, in interiore homine habitat veritas:
et si tuam naturam mutabilem inveneris, transcede et te ipsum.*

Sanctus Augustinus, *De Vera Religione*, cap. XXXIX

Conteúdo

1	Introdução	2
2	O Formalismo de Green-Schwarz	4
2.1	A Superpartícula de Brink-Schwarz	5
2.1.1	Quantização no gauge $(\gamma^+\theta) = 0$	9
2.2	A ação de Green-Schwarz	11
2.3	O problema da quantização covariante	16
2.4	Quantização no gauge do cone de luz	19
2.4.1	Espectro das supercordas	22
2.4.2	Supersimetria	29
2.4.3	Transformações de Lorentz e $D=10$	34
3	O Formalismo de Espinores Puros	39
3.1	Abordagem de Siegel para o formalismo de Green-Schwarz	39
3.2	Formalismo de Berkovits para a abordagem de Siegel	41
3.2.1	Correntes de Lorentz dos fantasmas	44
3.2.2	Operador BRST e espinores puros	44
3.2.3	A ação dos fantasmas	48
3.3	Ação dos fantasmas, novamente	55
3.4	Operadores de vértice e amplitudes de espalhamento	59
4	Conclusões	63
A	Convenções	65
A.1	Espinores de $SO(10)$	65
A.2	Espinores de $SO(8)$	69

B	Decomposição de $SO(10)$ em $SU(5) \otimes U(1)$	70
B.1	Vetor	70
B.2	Tensor antissimétrico de rank 2	71
B.3	Espinor	76

Capítulo 1

Introdução

A teoria das supercordas é a mais promissora candidata a realizar o sonho de Einstein, a dedução matemática da teoria final das interações elementares, que ele chamava de teoria do campo unificado.

Até recentemente havia dois formalismos básicos para se estudar as propriedades das supercordas, o criado por Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) na década de 70 e o de Green-Schwarz (GS), que tomou forma em meados da década de 80. Nenhum deles é completamente satisfatório devido aos problemas que sofrem. No formalismo RNS a ação é supersimétrica na folha-mundo, e os aspectos supersimétricos no espaço-tempo são difíceis de se estudar. A grande vantagem dessa formulação da supercorda é a facilidade de quantização através de métodos covariantes. Porém, o espectro obtido inicialmente não contém o mesmo número de excitações fermiônicas e bosônicas em cada nível de massa. Para tornar a teoria supersimétrica no espaço-tempo é preciso truncar o espectro via um procedimento chamado projeção GSO. As dificuldades resultantes dessa projeção impossibilitam o cálculo de amplitudes de espalhamento em níveis maiores que 1-loop.

Por outro lado, o formalismo de Green-Schwarz é manifestamente supersimétrico no espaço-tempo. O espectro físico é equivalente ao espectro truncado em RNS. Porém, até hoje não foi possível quantizar covariantemente a ação de Green-Schwarz da supercorda. A quantização é factível somente no gauge do cone de luz, onde a invariância de Lorentz não é mais manifesta. As amplitudes de espalhamento, devido à falta de covariância, tornam-se extremamente complicadas e ninguém foi capaz de calcular amplitudes multiloop. Muito embora o formalismo de Green-Schwarz apresente esse problema, o interesse por ele cresceu nos últimos anos devido à conjectura AdS/CFT. A teoria de super Yang-Mills $N=4$

em quatro dimensões seria dual à teoria de supercordas tipo IIB no espaço $AdS_5 \otimes S^5$ com um *background* Ramond-Ramond, uma 5-forma fermiônica. No formalismo de GS a teoria pode facilmente ser descrita em tal *background*, enquanto que em RNS isso não pode ser feito. Entretanto, novamente o problema da quantização covariante surge para impedir progressos maiores no entendimento dessa dualidade.

Em Janeiro de 2000 Nathan Berkovits apresentou ao mundo um novo formalismo da supercorda, batizado de espinores puros. Nesse formalismo a supersimetria do espaço-tempo é manifesta e a quantização covariante é possível mediante a introdução de uma carga BRST. Portanto esse novo formalismo incorpora as vantagens dos anteriores, e não possui suas desvantagens. Em 2004 uma prescrição para o cálculo de amplitudes multiloop foi apresentada [16] e o futuro parece promissor. Com esse formalismo é possível quantizar a supercorda tipo IIB em $AdS_5 \otimes S^5$ covariantemente, o que é importante para verificar a conjectura AdS/CFT.

Nessa dissertação nós estudamos os formalismos de Green-Schwarz e de espinores puros em nível introdutório. Os aspectos básicos são apresentados com vários detalhes e expressões como “pode-se mostrar que...” foram reduzidas a um mínimo possível.

No segundo capítulo, depois de uma pequena revisão da superpartícula, as principais propriedades do formalismo de Green-Schwarz são apresentadas e demonstradas. A ação é quantizada no gauge do cone de luz e o espectro das supercordas tipo I e tipo IIB é calculado. Na última seção são feitos alguns comentários a respeito da demonstração de que a dimensão do espaço-tempo deve ser igual a 10. O terceiro capítulo trata do formalismo de espinores puros. Especial atenção é dada à introdução dos fantasmas através das correntes de Lorentz escritas em termos do grupo $U(5)$ e ao cancelamento da carga central da teoria. O capítulo termina com uma breve discussão das amplitudes de espalhamento. O apêndice A contém as convenções utilizadas no texto e algumas propriedades das matrizes gamma em 10 dimensões. O apêndice B contém várias contas detalhadas, que foram omitidas do capítulo 2 para facilitar a leitura. Nos artigos sobre espinores puros a decomposição de $SO(10)$ para $U(5)$ é utilizada para construir as correntes de Lorentz dos fantasmas, porém não há qualquer menção de como fazer essas contas. Esse apêndice mostra com vários detalhes como isso é feito.

Capítulo 2

O Formalismo de Green-Schwarz

Nesse capítulo estudaremos a supercorda de Green-Schwarz (GS). A motivação fundamental para iniciarmos o estudo desse formalismo é a propriedade de supersimetria manifesta no espaço-tempo, isto é, o parâmetro ε^α ($\alpha = 1, \dots, 16$) da transformação supersimétrica é um espinor no espaço-tempo, ao contrário do que acontece na outra formulação da supercorda, conhecida como Ramond-Neveu-Schwarz (RNS), onde ε^a ($a = 1, 2$) é um espinor na folha-mundo bidimensional.

Para entendermos a importância dessa propriedade devemos lembrar das dificuldades inerentes ao formalismo RNS¹. O primeiro inconveniente aparece após o cálculo do espectro, quando percebemos que o primeiro estado no setor Neveu-Schwarz (NS) é um táquion. Para lidar com esse problema existe uma solução *ad hoc*, o truncamento do espectro através da chamada projeção GSO[11]. Vários estados são projetados fora, inclusive o táquion, e o restante possui igual número de bósons e férmions em cada nível de massa, que formam multipletos completos de supersimetria.

Nos cálculos de amplitudes de espalhamento o formalismo RNS apresenta sérios problemas². Um deles está relacionado à inexistência manifesta de supersimetria no espaço-tempo. Ao calcularmos amplitudes em 1-loop, vários estados intermediários são formados e podem se propagar, inclusive aqueles estados removidos com a projeção GSO. Para que nenhum estado fora do espectro permitido se propague, é necessário um somatório sobre as chamadas estruturas de spin, que introduzem dificuldades intransponíveis para cálculos

¹Não discutiremos em detalhes o formalismo RNS nessa dissertação, apenas mencionaremos suas principais características.

²Discutiremos aqui o problema relacionado à supersimetria, porém há vários outros cujo entendimento requer mais tempo.

em nível maior que 1-loop.

Como vimos no parágrafo anterior, a falta de supersimetria espaço-temporal manifesta e a consequente necessidade de um truncamento artificial do espectro levam a sérios problemas computacionais relativos a amplitudes de espalhamento. A idéia mais natural então é procurar uma ação para a supercorda onde a supersimetria no espaço-tempo seja manifesta. Portanto nenhuma projeção seria necessária e conseqüentemente o cálculo de amplitudes de espalhamento se tornaria mais simples, sem somas sobre estruturas de spin. Essa foi a motivação para a criação do formalismo a ser estudado nesse capítulo.

Porém, como veremos nas próximas páginas, a remoção do ponto fraco do formalismo RNS tem seu preço. A quantização covariante do formalismo de Green-Schwarz é um assunto extremamente complicado, fato esse que deve ser contrastado com a relativa facilidade com a qual a supercorda RNS é quantizada, onde é possível usar o método de quantização conhecido como BRST[7]. Não sendo factível a quantização covariante, veremos na seção 2.4 como podemos quebrar a invaiância de Lorentz manifesta a fim de tornar possível a quantização da supercorda. No chamado gauge do cone de luz, a quantização é trivial e o espectro é facilmente obtido, e concorda com o espectro truncado do formalismo RNS. Porém, a quebra da invariância de Lorentz manifesta se torna um grande problema técnico nas amplitudes de espalhamento, onde é necessário introduzir operadores não-triviais nos pontos de interação, impossibilitando na prática o cálculo de amplitudes com mais de 1 loop, exatamente como no formalismo RNS.

Aparentemente, pelo que vimos nos parágrafos anteriores, parece que existe algum tipo de *conservação de dificuldades* nos formalismos da supercorda, porém isso não é verdade. Como veremos no próximo capítulo, existe um formalismo manifestamente supersimétrico cuja quantização covariante é possível.

2.1 A Superpartícula de Brink-Schwarz

A origem do formalismo de Green-Schwarz da supercorda será melhor compreendida se estudarmos primeiro a superpartícula, que é o análogo da supercorda, e cuja lagrangiana depende de um único parâmetro τ . A supercorda será a generalização dessa lagrangiana e será definida na folha-mundo, parametrizada pelos parâmetros (τ, σ) . Além disso, a quantização covariante da superpartícula enfrenta o mesmo problema da supercorda GS e é contornado de maneira completamente análoga. Portanto o estudo dessa seção servirá

de aquecimento para o trabalho posterior³.

A superpartícula é descrita pela ação de Brink-Schwarz[1],

$$S = \int d\tau (\Pi^m P_m + e P^m P_m), \quad (2.1)$$

onde $\Pi^m = \dot{X}^m - \frac{1}{2}\dot{\theta}\gamma^m\theta$. As equações de movimento são facilmente obtidas,

$$P^2 = 0, \quad \dot{P}^m = 0, \quad (\gamma^m\dot{\theta})_\alpha P_m = 0. \quad (2.2)$$

Assim como a supercorda, veremos que essa ação é manifestamente supersimétrica no espaço-tempo:

Proposição 1 (Supersimetria). *A ação de Brink-Schwarz é invariante pelas transformações supersimétricas,*

$$\delta\theta^\alpha = \varepsilon^\alpha, \quad (2.3)$$

$$\delta X^m = \frac{1}{2}\theta\gamma^m\varepsilon, \quad (2.4)$$

$$\delta P^m = \delta e = 0, \quad (2.5)$$

onde ε é um parâmetro fermiônico global.

Demonstração. Basta mostrar que $\delta\Pi^m = 0$, o que é feito facilmente

$$\begin{aligned} \delta\Pi^m &= \delta\dot{X}^m - \frac{1}{2}\delta\dot{\theta}\gamma^m\theta - \frac{1}{2}\dot{\theta}\gamma^m\delta\theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}\gamma^m\varepsilon - \frac{1}{2}\dot{\theta}\gamma^m\varepsilon, \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $\dot{\varepsilon} = 0$. ■

Para quantizarmos a ação (2.1) precisamos dos momentos conjugados das variáveis X^m e θ^α ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta\dot{X}^m} &= P_m \\ \frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}^\alpha} &= -\frac{1}{2}P_m (\gamma^m\theta)_\alpha \equiv p_\alpha \end{aligned}$$

Note que o momento conjugado p_α depende de θ^α , e portanto temos os seguintes vínculos fermiônicos

$$d_\alpha = p_\alpha + \frac{1}{2}P_m (\gamma^m\theta)_\alpha. \quad (2.6)$$

³As convenções relativas aos espinores de SO(10) e SO(8) podem ser encontradas no Apêndice A.

A quantização da uma teoria vinculada pode ser feita com o procedimento descoberto por Dirac[3], descrito muito brevemente a seguir.

O método de Dirac introduz um novo parênteses, chamado de parênteses de Dirac, em substituição ao de Poisson,

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_P - \{A, d_\alpha\}_P (c^{-1})^{\alpha\beta} \{d_\beta, B\}_P \quad \forall A, B$$

onde $c_{\alpha\beta} = \{d_\alpha, d_\beta\}_P$ denota a matriz dos vínculos. Note que o parênteses de Dirac tem a propriedade de que os vínculos comutam com qualquer outro operador, e que é necessário saber a inversa da matriz de vínculos. Vejamos o que acontece quando tentamos aplicar esse método para quantizar covariantemente a superpartícula.

Impondo os seguintes parênteses de Poisson

$$\{p_\alpha, \theta^\beta\}_P = -i\delta_\alpha^\beta, \quad \{\theta^\alpha, \theta^\beta\}_P = \{p_\alpha, p_\beta\}_P = 0,$$

concluimos que os vínculos satisfazem,

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} &= \{d_\alpha, d_\beta\}_P \\ &= \frac{1}{2}P_m \{p_\alpha, (\gamma^m \theta)_\beta\}_P + \frac{1}{2}P_n \{(\gamma^n \theta)_\alpha, p_\beta\}_P \\ &= P_m \gamma_{\alpha\delta}^m \{p_\beta, \theta^\delta\}_P \\ &= -iP_m \gamma_{\alpha\beta}^m. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para encontrarmos os parênteses de Dirac das variáveis seria necessário inverter a matriz dos vínculos (2.7). Porém, note que $P^2 = 0$ indica que a matriz $c_{\alpha\beta}$ tem metade de seus autovalores iguais zero⁴ o que indica que $c_{\alpha\beta}$ não possui inversa. Logo o método de Dirac falha e somos incapazes de quantizar a teoria covariantemente.

Entretanto, a existência de 8 autovalores iguais a zero nos indica que há 8 vínculos de primeira e 8 de segunda classe. Os vínculos de primeira classe geram simetrias de gauge, que permitirão fixar 8 componentes de θ^α , reduzindo assim os graus de liberdade fermiônicos. Para encontrarmos os vínculos de primeira classe definimos novos vínculos D^α por

$$D^\alpha = iP^m \gamma_m^{\alpha\beta} d_\beta$$

⁴Para provarmos isso note que $P^2 = 0$ permite que escolhamos um referencial onde $P = (p^0, \dots, p^0)$, e portanto a matriz $c_{\alpha\beta}$ fica proporcional a $\gamma_{\alpha\beta}^-$, cujo rank é 8.

e observamos que a seguinte álgebra é satisfeita $\{D^\alpha, D^\beta\}_P = 0$, pois $P^2 = 0$. Esses vínculos de primeira classe D^α geram uma simetria da ação que foi descoberta por Warren Siegel [2], cujas transformações resumimos na seguinte definição.

Definição 1 (Transformações Kappa).

$$\delta\theta^\alpha = P^m (\gamma_m \kappa)^\alpha \quad (2.8)$$

$$\delta X^m = -\frac{1}{2} (\theta \gamma^m \delta\theta) \quad (2.9)$$

$$\delta P^m = 0, \quad (2.10)$$

$$\delta e = \dot{\theta}^\alpha \kappa_\alpha \quad (2.11)$$

Proposição 2. A ação de Brink-Schwarz (2.1) é invariante pelas transformações kappa.

Demonstração. A variação da ação é dada por $\int (\delta\Pi^m P_m + \delta e P^m P_m)$. Mas

$$\begin{aligned} \delta\Pi^m &= -\frac{1}{2} (\dot{\theta} \gamma^m \delta\theta) - \frac{1}{2} (\theta \gamma^m \dot{\delta}\theta) - \frac{1}{2} (\delta\dot{\theta} \gamma^m \theta) - \frac{1}{2} (\dot{\theta} \gamma^m \delta\theta) \\ &= -(\dot{\theta} \gamma^m \delta\theta) \end{aligned}$$

portanto $\delta\Pi^m P_m = -\dot{\theta}^\alpha \gamma_m{}_{\alpha\beta} \gamma_n^{\beta\gamma} \kappa_\gamma P^n P^m = -(\dot{\theta} \kappa) P^m P_m$. Logo, como $\delta e = (\dot{\theta} \kappa)$, obtemos que $\delta S = 0$. ■

A invariância da ação frente a essas transformações locais permite fixar 8 componentes de θ^α iguais a zero, como veremos a seguir.

Proposição 3. Sempre é possível escolher um gauge para a ação (2.1) onde $(\gamma^+ \theta) = 0$. Nesse gauge a ação se torna

$$S = \int d\tau \left(\dot{X}^m P_m - \frac{1}{2} \dot{S}_a S_a + e P^m P_m \right). \quad (2.12)$$

Demonstração. Dado qualquer θ^α mostraremos que existe uma transformação kappa $\theta' = \theta + \delta\theta$ tal que $\gamma^+ \theta' = 0$. Como a teoria é invariante por transformações kappa isso demonstrará a primeira parte da proposição.

Sempre podemos passar para um referencial onde $P^m = (P, 0, 0, \dots, P)$, pois $P^2 = 0$. Em seguida fazemos a seguinte mudança de coordenadas,

$$P^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (P^0 \pm P^9)$$

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^9)$$

$$\gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^9),$$

de onde concluímos que $(\gamma^+)_{\alpha\beta} (\gamma^+)^\beta = 0$ e $P^- = 0$.

A transformação kappa (2.8), visto que $P^i = P^- = 0$, é dada por $\delta\theta^\alpha = -P^+ (\gamma^- \kappa)^\alpha$, portanto se escolhermos $\kappa_\beta = -\frac{1}{2P^+} (\gamma^+ \theta)_\beta$ obtemos

$$\delta\theta^\alpha = +\frac{1}{2} (\gamma^- \gamma^+ \theta)^\alpha.$$

Note que podemos escrever θ^α em termos de seus componentes de $SO(8)$ como $\theta^\alpha = -\frac{1}{2} (\gamma^+ \gamma^- \theta)^\alpha - \frac{1}{2} (\gamma^- \gamma^+ \theta)^\alpha$ e conseqüentemente

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha + \delta\theta^\alpha = -\frac{1}{2} (\gamma^+ \gamma^- \theta)^\alpha,$$

de onde $(\gamma^+ \theta') = 0$ segue naturalmente.

Para escrevermos a ação (2.1) nesse gauge note que o termo $\dot{\theta} \gamma^m \theta P_m$ é escrito, visto que $\eta_{-+} = -1 = -\eta^{ii}$, como

$$\dot{\theta} \gamma^m \theta P_m = -\dot{\theta} \gamma^+ \theta P^- - \dot{\theta} \gamma^- \theta P^+ + \dot{\theta} \gamma^i \theta P^i = -\dot{\theta} \gamma^- \theta P^+$$

onde usamos que $\dot{\theta} \gamma^i \theta = 0$ e $P^- = 0$. Portanto, a ação de Brink-Schwarz se torna

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left(\dot{X}^m P_m + \frac{1}{2} P^+ (\dot{\theta} \gamma^- \theta) + e P^m P_m \right) \\ &= \int d\tau \left(\dot{X}^m P_m - \frac{1}{2} \dot{S}_a S_a + e P^m P_m \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde definimos⁵ o espinor quiral de $SO(8)$ por $S^a = 2^{1/4} \sqrt{P^+} \theta^a$. ■

2.1.1 Quantização no gauge $(\gamma^+ \theta) = 0$

A quantização de (2.12) não apresenta problemas, pois a matriz dos vínculos pode ser facilmente invertida. Para vermos isso note que o momento conjugado de S^a , que chamaremos de p^a , é dado por

$$p^a = \frac{\delta L}{\delta \dot{S}^a} = -\frac{1}{2} S^a.$$

Portanto, impondo o parênteses de Poisson $\{p^a, S^b\}_P = -\delta^{ab}$ a matriz dos vínculos $d^a = p^a + \frac{1}{2} S^a$, dada por

$$\{d^a, d^b\}_P = -\delta^{ab}$$

⁵Veja o apêndice A.

pode facilmente ser invertida. Dessa maneira, o método de Dirac implica na seguinte álgebra,

$$\begin{aligned} \{S^a, S^b\}_D &= \{S^a, S^b\}_P - \sum_{e,f} \{S^a, d^e\}_P (c^{-1})_{ef} \{d^f, S^b\}_P \\ &= 0 - \sum_{e,f} (-\delta^{ae})(-\delta_{ef})(-\delta^{fb}) \\ &= \delta^{ab}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Podemos construir representações dessa álgebra, que é o modo zero da álgebra da supercorda de Green-Schwarz, recordando que as matrizes de Pauli de SO(8) satisfazem à relação

$$\sigma_{a\dot{a}}^i \sigma_{\dot{a}b}^j + \sigma_{b\dot{a}}^i \sigma_{\dot{a}a}^j = 2\delta_{ab} \delta^{ij},$$

que pode ser verificada com as convenções dadas no apêndice A. Os índices i, j são da representação vetorial de SO(8), enquanto que b, \dot{a} são índices quirais e anti-quirais, respectivamente. Portanto, é possível definir a atuação de S^a sobre um espaço vetorial (índice j) e um anti-quiral (índice \dot{b}) que representa a álgebra (2.14),

$$S^a |\dot{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j^{\dot{a}a} |j\rangle, \tag{2.15}$$

$$S^b |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j^{bc} |\dot{c}\rangle, \tag{2.16}$$

como podemos verificar,

$$\begin{aligned} (S^a S^b + S^b S^a) |j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S^a \sigma_j^{bc} |\dot{c}\rangle + S^b \sigma_j^{ac} |\dot{c}\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_j^{bc} \sigma_{\dot{c}a}^{\dot{c}a} + \sigma_j^{ac} \sigma_{\dot{c}b}^{\dot{c}b}) |l\rangle \\ &= \delta^{ab} |j\rangle. \end{aligned}$$

É fácil ver que o mesmo resultado é obtido atuando sobre $|\dot{b}\rangle$, se usarmos a relação (A.5). Logo obtivemos um espectro composto pelos estados $|j\rangle$ e $|\dot{b}\rangle$. Além disso a equação de movimento (2.2) implica que esses estados são não-massivos. Esse é o mesmo espectro da teoria de Super Yang-Mills pura $N = 1$ em $D = 10$, representada por 8 estados do glúon ($|j\rangle$) e por 8 estados do gluíno ($|\dot{a}\rangle$).

Agora veremos a generalização dos conceitos da superpartícula, que resultará na ação de Green-Schwarz da supercorda.

2.2 A ação de Green-Schwarz

O formalismo de Green-Schwarz da supercorda é baseado em um espaço-tempo com $D = 10$ dimensões⁶. A ação com supersimetria *manifesta* no espaço-tempo é dada por[4]

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta \quad (2.17)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int d^2\sigma \left[-i\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^m (\theta_L \gamma_m \partial_\beta \theta_L - \theta_R \gamma_m \partial_\beta \theta_R) + \epsilon^{\alpha\beta} \theta_L \gamma^m \partial_\alpha \theta_L \theta_R \gamma_m \partial_\beta \theta_R \right]$$

onde as variáveis supersimétricas Π_α^m são a generalização imediata das variáveis correspondentes para a superpartícula,

$$\Pi_\alpha^m = \partial_\alpha X^m - i\theta_L \gamma^m \partial_\alpha \theta_L - i\theta_R \gamma^m \partial_\alpha \theta_R,$$

e θ_L, θ_R são dois espinores Majorana-Weyl de $SO(9,1)$, que podem ser quirais (Weyl) ou anti-quirais (anti-Weyl).

Como na ação (2.17) os espinores θ_L, θ_R podem ter quiralidades distintas é conveniente nomear as diferentes possibilidades, o que motiva a seguinte definição

Definição 2. *A supercorda fechada cujas variáveis espinoriais possuem quiralidades opostas (iguais) é dita ser do tipo IIA (IIB). A supercorda aberta com espinores de quiralidades iguais⁷ é dita ser do tipo I.*

Note que os índices L (left) e R (right) não dizem respeito à quiralidade dos espinores, mas se referem à dependência de θ com respeito às variáveis σ^\pm , como poderá ser visto na solução das equações de movimento. Diz-se que θ_L se desloca para a “esquerda” e θ_R para a “direita”.

Em 10 dimensões⁸ podemos diferenciar entre espinores quirais e anti-quirais escrevendo índices contravariantes e covariantes, respectivamente. As matrizes gamma são denotadas por Γ^m e na representação de Weyl elas são escritas em termos das matrizes 16×16 $\gamma_{\alpha\beta}^m$ e $\gamma_m^{\alpha\beta}$ fora da diagonal.

Mostraremos a seguir que essa ação é supersimétrica, e além disso é invariante por uma generalização das transformações kappa da superpartícula. De fato, essa ação foi construída para satisfazer a esses dois requisitos, logo depois de a simetria kappa da

⁶Veja a seção 2.4.3 para compreender o motivo dessa escolha.

⁷A supercorda aberta com espinores de quiralidades opostas não preserva a supersimetria do espaço-tempo. Veja também a definição 4 na pag. 20.

⁸Veja o Apêndice A para mais detalhes.

superpartícula ser descoberta[2]. Como veremos mais adiante, a simetria kappa é fundamental para que a teoria possa ser quantizada, pois sem ela não seria possível eliminar alguns graus de liberdade de θ^α e passar para o gauge do cone de luz.

A ação de Green-Schwarz (2.17) é invariante por reparametrizações arbitrárias das coordenadas da folha-mundo, e podemos usar essa propriedade para fixarmos a métrica,

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Essa escolha é conhecida como *gauge conforme*, pois pode-se mostrar[6] que as reparametrizações não são completamente fixadas por (2.18), e a invariância residual é composta pelas transformações conformes⁹. Fazendo também a seguinte mudança de variáveis $z = \sigma - t$, $\bar{z} = \sigma + t$ a ação da supercorda de Green-Schwarz é escrita como,

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m - i \partial X^m \theta_L \gamma_m \bar{\partial} \theta_L - i \bar{\partial} X^m \theta_R \gamma_m \partial \theta_R \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\theta_L \gamma^m \bar{\partial} \theta_L) (\theta_L \gamma_m \partial \theta_L + \theta_R \gamma_m \partial \theta_R) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R) (\theta_L \gamma_m \bar{\partial} \theta_L + \theta_R \gamma_m \bar{\partial} \theta_R) \right], \quad (2.19) \end{aligned}$$

onde definimos as derivadas quirais,

$$\begin{aligned} \partial &= \frac{1}{2} (\partial_1 - \partial_0), \\ \bar{\partial} &= \frac{1}{2} (\partial_1 + \partial_0). \end{aligned}$$

Como a ação escrita no gauge conforme não contém mais a métrica devemos impor suas equações de movimento, dadas por

$$T = \Pi^m \Pi_m = \bar{\Pi}^m \bar{\Pi}_m = 0 \quad (2.20)$$

e conhecidas, por razões históricas, como os **vínculos de Virasoro**. Note que a equação de movimento para X^m , dada por

$$\partial \bar{\partial} X^m = i \partial \theta_L \gamma^m \bar{\partial} \theta_L + i \theta_L \gamma^m \partial \bar{\partial} \theta_L + i \bar{\partial} \theta_R \gamma^m \partial \theta_R + i \theta_R \gamma^m \partial \bar{\partial} \theta_R, \quad (2.21)$$

não é linear e é difícil de ser resolvida. Felizmente, como mostraremos na continuação, a ação de Green-Schwarz possui algumas propriedades interessantes. Em particular nós

⁹Estamos omitindo certas complicações topológicas nesse ponto, para maiores detalhes veja o capítulo 5 de [6].

provaremos na proposição 5 que a simetria kappa está presente, o que nos permitirá fixar um gauge no qual a ação simplifica consideravelmente. Nesse gauge a equação de movimento (2.21) se reduzirá à bem-conhecida equação de onda.

Proposição 4 (Supersimetria). *A ação da supercorda de Green-Schwarz(2.19) em 10 dimensões é invariante sob as seguintes transformações supersimétricas,*

$$\delta\theta_{L,R}^\alpha = \varepsilon_{L,R}^\alpha, \quad (2.22)$$

$$\delta X^m = i\varepsilon_L \gamma^m \theta_L + i\varepsilon_R \gamma^m \theta_R \quad (2.23)$$

Demonstração. Variando a ação obtemos, depois de agrupar e cancelar alguns termos,

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^2\sigma & \left[\frac{i}{2} \partial X_m (\varepsilon_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R - \varepsilon_L \gamma^m \bar{\partial} \theta_L) - \frac{i}{2} \bar{\partial} X_m (\varepsilon_R \gamma^m \partial \theta_R - \varepsilon_L \gamma^m \partial \theta_L) \right. \\ & + \frac{1}{2} (\varepsilon_L \gamma^m \partial \theta_L) (\theta_L \gamma_m \bar{\partial} \theta_L) + \frac{1}{2} (\varepsilon_R \gamma_m \bar{\partial} \theta_R) (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R) \\ & \left. - \frac{1}{2} (\varepsilon_L \gamma^m \bar{\partial} \theta_L) (\theta_L \gamma_m \partial \theta_L) - \frac{1}{2} (\varepsilon_R \gamma_m \partial \theta_R) (\theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R) \right] \end{aligned}$$

Os termos que contém X_m podem ser combinados em uma derivada total,

$$\frac{i}{2} \bar{\partial} (\partial X_m \varepsilon_R \gamma^m \theta_R - \partial X_m \varepsilon_L \gamma^m \theta_L) - \frac{i}{2} \partial (\bar{\partial} X_m \varepsilon_R \gamma^m \theta_R - \bar{\partial} X_m \varepsilon_L \gamma^m \theta_L)$$

e portanto não contribuem para a variação. Na continuação mostraremos que os termos restantes podem ser separados em uma parte que é uma derivada total e outra que se anula devido à identidade (A.11) do Lema 7.

Escreveremos somente a parte com as variáveis de índices R, pois os cálculos são idênticos para as variáveis L. Note que

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_R \gamma_m \bar{\partial} \theta_R) (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R) - \frac{1}{2} (\varepsilon_R \gamma_m \partial \theta_R) (\theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R) = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2,$$

onde

$$A_1 = \frac{2}{3} [(\varepsilon_R \gamma_m \bar{\partial} \theta_R) (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R) - (\varepsilon_R \gamma_m \partial \theta_R) (\theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R) + (\varepsilon_R \gamma_m \theta_R) (\partial \theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R)]$$

$$A_2 = \frac{1}{3} [(\varepsilon_R \gamma_m \bar{\partial} \theta_R) (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R) - (\varepsilon_R \gamma_m \partial \theta_R) (\theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R) - 2(\varepsilon_R \gamma_m \theta_R) (\partial \theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R)]$$

Mas A_2 é uma derivada total e não contribui,

$$A_2 = \frac{1}{3} \bar{\partial} [(\varepsilon_R \gamma_m \theta_R) (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R)] - \frac{1}{3} \partial [(\varepsilon_R \gamma_m \theta_R) (\theta_R \gamma^m \bar{\partial} \theta_R)].$$

Para mostrar que $A_1 = 0$ vamos escrever os índices explicitamente,

$$A_1 = \frac{2}{3} \varepsilon^\alpha \bar{\partial}^\beta \theta^\gamma \partial \theta^\sigma \eta_{nm} (\gamma_{\alpha\beta}^n \gamma_\gamma^m + \gamma_{\alpha\sigma}^n \gamma_\beta^m + \gamma_{\alpha\gamma}^n \gamma_\sigma^m) = 0$$

onde usamos a identidade (A.11), que é válida em 3,4,6 e 10 dimensões. Como supomos $D = 10$ desde o início, a proposição está demonstrada. ■

Proposição 5 (Simetria kappa). A ação de Green-Schwarz da supercorda (2.19) é invariante sob as transformações kappa,

$$\delta\theta_L^\alpha = \Pi^m \gamma_m^{\alpha\beta} \kappa_\beta^L \quad (2.24)$$

$$\delta\theta_R^\alpha = \bar{\Pi}^m \gamma_m^{\alpha\beta} \bar{\kappa}_\beta^R \quad (2.25)$$

$$\delta X^m = i\theta_L \gamma^m \delta\theta_L + i\theta_R \gamma^m \delta\theta_R, \quad (2.26)$$

se os vínculos de Virasoro $\Pi^2 = \bar{\Pi}^2 = 0$ forem obedecidos.

Demonstração. Note que não colocaremos o índice m em X^m e γ^m nas contas abaixo, pois eles podem facilmente ser restituídos. Primeiro trataremos somente da variação dos termos que contém X^m na ação (2.19). A variação desses termos resulta nas expressões (2.27), (2.28) e (2.29):

$$-\frac{3i}{2} \partial X \delta\theta_L \gamma \bar{\partial}\theta_L - \frac{i}{2} \partial X \theta_L \gamma \bar{\partial}\delta\theta_L + \frac{i}{2} \partial X \bar{\partial}\theta_R \gamma \delta\theta_R + \frac{i}{2} \partial X \theta_R \gamma \bar{\partial}\delta\theta_R \quad (2.27)$$

$$+\frac{3i}{2} \bar{\partial} X \theta_R \gamma \delta\theta_R - \frac{i}{2} \bar{\partial} X \theta_R \gamma \partial(\delta\theta_R) + \frac{i}{2} \bar{\partial} X \partial\theta_L \gamma \delta\theta_L + \frac{i}{2} \bar{\partial} X \theta_L \gamma \partial(\delta\theta_L) \quad (2.28)$$

$$\partial(\theta_L \gamma \delta\theta_L + \theta_R \gamma \delta\theta_R) (\theta_L \gamma \bar{\partial}\theta_L) + \bar{\partial}(\theta_L \gamma \delta\theta_L + \theta_R \gamma \delta\theta_R) (\theta_R \gamma \bar{\partial}\theta_R) \quad (2.29)$$

Podemos reescrever (2.27) de uma maneira mais conveniente,

$$-\frac{i}{2} \bar{\partial}(\partial X \theta_L \gamma \delta\theta_L) + \frac{i}{2} \bar{\partial} \partial X \theta_L \gamma \delta\theta_L - 2i \partial X \delta\theta_L \gamma \bar{\partial}\theta_L + \frac{i}{2} \bar{\partial}(\partial X \theta_R \gamma \delta\theta_R) - \frac{i}{2} \bar{\partial} \partial X \theta_R \gamma \delta\theta_R,$$

bem como (2.28),

$$\frac{i}{2} \partial(\bar{\partial} X \theta_L \gamma \delta\theta_L) - \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} X \theta_L \gamma \delta\theta_L + 2i \bar{\partial} X (\partial\theta_R \gamma \delta\theta_R) - \frac{i}{2} \partial(\bar{\partial} X \theta_R \gamma \delta\theta_R) + \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} X \theta_R \gamma \delta\theta_R.$$

Após a eliminação dos termos de superfície, a soma de (2.27) e (2.28) é dada por

$$2i \bar{\partial} X (\partial\theta_R \gamma \delta\theta_R) + 2i \partial X (\bar{\partial}\theta_L \gamma \delta\theta_L),$$

e pode ser reescrita como

$$+ 2i \Pi (\bar{\partial}\theta_L \gamma \delta\theta_L) + 2i \bar{\Pi} (\partial\theta_R \gamma \delta\theta_R) \quad (2.30)$$

$$- 2(\theta_L \gamma \partial\theta_L) (\bar{\partial}\theta_L \gamma \delta\theta_L) - 2(\theta_R \gamma \partial\theta_R) (\bar{\partial}\theta_L \gamma \delta\theta_L) \quad (2.31)$$

$$- 2(\theta_L \gamma \bar{\partial}\theta_L) (\partial\theta_R \gamma \delta\theta_R) - 2(\theta_R \gamma \bar{\partial}\theta_R) (\partial\theta_R \gamma \delta\theta_R) \quad (2.32)$$

onde somamos e subtraímos os termos adequados para escrever o resultado usando as variáveis Π e $\bar{\Pi}$. Note que os termos em (2.30) se anulam devido aos vínculos de Virasoro, por exemplo

$$\begin{aligned} \Pi (\bar{\partial}\theta_L \gamma \delta\theta_L) &= \Pi_m \Pi_n \bar{\partial}\theta_L^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \gamma^{n\beta\gamma} \kappa_\gamma \\ &= \Pi^2 \bar{\partial}\theta_L^\alpha \kappa_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Portanto o resultado da variação dos 3 primeiros termos da ação (2.19) são dados por (2.29), (2.31) e (2.32).

A variação dos termos restantes, quando somada às expressões (2.29), (2.31) e (2.32), pode ser escrita em 3 grupos distintos, denotados por (LLLL), (LLRR) e (RRRR). Podemos ver que o grupo (LLLL) é dado por

$$\begin{aligned} (LLL) = & -\frac{3}{2}(\theta_L\gamma\partial\theta_L)(\bar{\partial}\theta_L\gamma\delta\theta_L) + (\partial\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L) \\ & + \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\partial\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L) - \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\bar{\partial}\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\partial\theta_L) \\ & - \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)(\delta\theta_L\gamma\partial\theta_L). \end{aligned}$$

Escrevendo $\frac{3}{2}$ como $\frac{1}{2} + 1$ e combinando alguns termos resulta em

$$\begin{aligned} (LLLL) = & -\frac{1}{2}\bar{\partial}(\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\partial\theta_L) + \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)\partial(\theta_L\gamma\delta\theta_L) \\ & - (\theta_L\gamma\partial\theta_L)(\bar{\partial}\theta_L\gamma\delta\theta_L) + (\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)(\partial\theta_L\gamma\delta\theta_L). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Mas os dois primeiros termos em (2.33) resultam em

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\bar{\partial}(\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\partial\theta_L) + \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)\partial(\theta_L\gamma\delta\theta_L) = \\ & -\frac{1}{2}\bar{\partial}\left[(\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\partial\theta_L)\right] + \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\bar{\partial}\theta_L\gamma\partial\theta_L) + \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\bar{\partial}\partial\theta_L) \\ & + \frac{1}{2}\partial\left[(\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)\right] - \frac{1}{2}(\partial\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)(\theta_L\gamma\delta\theta_L) - \frac{1}{2}(\theta_L\gamma\partial\bar{\partial}\theta_L)(\theta_L\gamma\delta\theta_L) \\ & = (\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\bar{\partial}\theta_L\gamma\partial\theta_L), \end{aligned}$$

onde eliminamos os termos de superfície. Portanto, a expressão (2.33) se torna,

$$+(\partial\theta_L\gamma\theta_L)(\bar{\partial}\theta_L\gamma\delta\theta_L) + (\theta_L\gamma\bar{\partial}\theta_L)(\partial\theta_L\gamma\delta\theta_L) + (\theta_L\gamma\delta\theta_L)(\bar{\partial}\theta_L\gamma\partial\theta_L) = 0$$

devido à identidade (A.11).

De maneira análoga verificamos que os termos (LLRR) e (RRRR) também se anulam, e provamos a proposição. ■

A grande vantagem do formalismo de Green-Schwarz da supercorda é que, devido às variáveis fermiônicas $\theta^\alpha(\sigma, \tau)$ se transformarem como espinores do espaço-tempo, a supersimetria é manifesta, ao contrário do que acontece no formalismo RNS. Essa propriedade possibilitará que os aspectos supersimétricos da teoria sejam analisados muito mais facilmente, e a demonstração de que o espectro é supersimétrico no espaço-tempo torna-se

trivial. Não é necessário impormos projeções ou invocar a “æquatio identica satis abstrusa”¹⁰. Porém, no formalismo RNS a quantização da teoria é imediata e não apresenta qualquer problema, enquanto que no formalismo de Green-Schwarz a quantização covariante da ação não é possível. Veremos na continuação que a origem desse problema está ligada ao fato de que há vínculos fermiônicos de primeira e segunda classe, que não podem ser separados covariantemente. Em seguida analisaremos como a simetria kappa permitirá a existência de um gauge no qual a teoria possa ser quantizada facilmente. Porém, esse método de quantização introduzirá dificuldades inerentes no processo do cálculo de amplitudes de espalhamento. Por esse motivo, o cálculo de amplitudes em nível de árvore e 1-loop é bastante complicado, enquanto que amplitudes com mais de 4 pontos em nível superior a 1-loop nunca foram calculadas com sucesso, apesar de várias tentativas.

2.3 O problema da quantização covariante

Para quantizarmos a ação de Green-Schwarz (2.19) seguiremos o mesmo procedimento já usado para a superpartícula. Calcularemos os momentos conjugados das variáveis fermiônicas $\theta_{L,R}$, para depois impormos os anti-comutadores canônicos entre $p_{L,R}$ e $\theta_{L,R}$.

O momento conjugado de θ_L é dado por,

$$\begin{aligned} p_\alpha^L &= \pi \frac{\delta S}{\delta \partial_0 \theta_L^\alpha} \\ &= \frac{i}{2} (\gamma_m \theta_L)_\alpha \left[\Pi^m + \frac{i}{2} (\theta_L \gamma^m \partial_1 \theta_L) \right]. \end{aligned}$$

Impondo o anti-comutador canônico,

$$p_\alpha^L(z) \theta_L^\beta(w) \rightarrow \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w},$$

e com a seguinte definição,

$$d_\alpha^L = p_\alpha^L - \frac{i}{2} (\theta_L \gamma^m)_\alpha \Pi_m + \frac{1}{4} (\theta_L \gamma^m)_\alpha (\theta_L \gamma_m \partial_1 \theta_L),$$

obtemos a matriz dos vínculos dos vínculos fermiônicos

$$d_\alpha^L(z) d_\beta^L(w) \rightarrow -i \frac{\gamma_{\alpha\beta}^m \Pi_m}{z-w}.$$

¹⁰Estamos nos referindo a uma famosa identidade provada em 1829 por Jacobi, necessária para confirmar a supersimetria espaço-temporal do espectro no formalismo RNS. Naqueles bons tempos em que os artigos científicos eram escritos em latim, foi com essa expressão que Jacobi anunciou sua descoberta.

Como $\Pi^m \Pi_m = 0$, a metade dos vínculos é de primeira classe e a outra metade é de segunda classe, exatamente como no caso da superpartícula. E da mesma maneira, não podemos usar o método de Dirac para remover os vínculos de segunda classe, pois teríamos de inverter uma matriz de operadores. Como uma separação covariante entre os dois tipos de vínculo não é conhecida, somos obrigados a usar algum método não-covariante para quantizar a teoria. Novamente, como na superpartícula, usaremos o método da quantização no gauge do cone de luz.

Definição 3 (Gauge do Cone de Luz). *O gauge do cone de luz será definido por*

$$X^+ = x^+ + p^+ t = x^+ + \frac{1}{2} p^+ (\bar{z} - z), \quad (2.34)$$

$$\gamma^+ \theta_L = \gamma^+ \theta_R = 0, \quad (2.35)$$

onde¹¹ $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^9)$ e $\gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^9)$.

Proposição 6. *Sempre é possível colocar a ação de Green-Schwarz (2.19) no gauge do cone de luz.*

Demonstração. Por uma argumentação semelhante a usada na demonstração da proposição 3, podemos mostrar que é possível escolher as variáveis θ tais que $\gamma^+ \theta_L = \gamma^+ \theta_R = 0$. Com essa condição, a equação de movimento (2.21) se torna a equação de onda $\partial \bar{\partial} X^m = 0$, para $m = -, +, i$. Ademais, ao fixarmos o gauge conforme $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ não eliminamos completamente a redundância na escolha de coordenadas, e ainda é possível fazer reparametrizações arbitrárias

$$z' = 2f(z), \quad \bar{z}' = 2g(\bar{z})$$

sem destruirmos o gauge conforme. Essa liberdade remanescente transforma $t = \frac{1}{2}(\bar{z} - z)$ e $\sigma = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ em

$$t' = g(\bar{z}) - f(z)$$

$$\sigma' = g(\bar{z}) + f(z).$$

Note que a equação para t' é a solução geral da equação de onda. Portanto, como X^+ também é uma solução da equação de onda, podemos escolher as funções f e g de maneira que $t' = X^+ / p^+ - x^+ / p^+$, onde p^+ e x^+ são constantes. Assim, justificamos (2.34) e provamos a proposição. ■

¹¹Note que o coeficiente $1/\sqrt{2}$ deve ser igual em X^\pm e γ^\pm para que a definição seja consistente com a propriedade (A.10):

Lema 1. No gauge do cone de luz $(\theta\gamma^m\bar{\partial}\theta) = 0$ exceto quando $m = -$.

Demonstração. Para $m = +$ é óbvio. Para $m = i$ podemos inserir $1 = -\frac{1}{2}(\gamma^+\gamma^- + \gamma^-\gamma^+)$ para obtermos,

$$(\theta\gamma^i\bar{\partial}\theta) = -\frac{1}{2}\theta\gamma^i\gamma^+\gamma^-\bar{\partial}\theta - \frac{1}{2}\theta\gamma^i\gamma^-\gamma^+\bar{\partial}\theta.$$

O segundo termo evidentemente é zero. O primeiro termo é zero porque γ^+ anticomuta com γ^i e $(\theta\gamma^+) = 0$ devido à simetria de γ^+ . ■

Proposição 7. A ação de Green-Schwarz (2.19) para a supercorda tipo IIB é dada no gauge do cone de luz por

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z (2\partial X^i \bar{\partial} X^i + S_L^a \bar{\partial} S_L^a + S_R^b \partial S_R^b), \quad (2.36)$$

onde

$$S_L^a \equiv \frac{2}{2^{1/4}} \sqrt{ip^+ \theta_L^a} \quad e \quad S_R^a \equiv \frac{2}{2^{1/4}} i \sqrt{ip^+ \theta_R^a}. \quad (2.37)$$

Demonstração. Nas coordenadas do cone de luz os componentes da métrica são dados por $-\eta^{+-} = \eta^{ii} = 1$, logo os termos em (2.19) com 4 θ 's são zero devido ao Lema 1, por exemplo,

$$\begin{aligned} (\theta_L \gamma^m \bar{\partial} \theta_L)(\theta_L \gamma_m \partial \theta_L) &= (\theta_L \gamma^i \bar{\partial} \theta_L)(\theta_L \gamma^i \partial \theta_L) - (\theta_L \gamma^+ \bar{\partial} \theta_L)(\theta_L \gamma^- \partial \theta_L) - (\theta_L \gamma^- \bar{\partial} \theta_L)(\theta_L \gamma^+ \partial \theta_L) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como, na expansão do cilindro, $-\partial X^+ = \bar{\partial} X^+ = p^+/2$ a ação (2.19) se torna,

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z \left(\frac{1}{2} \partial X^i \bar{\partial} X^i - \frac{1}{4} p^+ \partial X^- + \frac{1}{4} p^+ \bar{\partial} X^- - \frac{i}{2} p^+ \theta_L \gamma^- \bar{\partial} \theta_L + \frac{i}{2} p^+ \theta_R \gamma^- \partial \theta_R \right). \quad (2.38)$$

O segundo e terceiro termos são derivadas totais e não contribuem. Se θ for Weyl, que é o caso para a supercorda tipo IIB, então $\theta\gamma^-\bar{\partial}\theta = -\sqrt{2}\theta^a\bar{\partial}\theta^a$. Assim podemos escrever a ação como,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi} \int d^2z \left(\frac{1}{2} \partial X^i \bar{\partial} X^i + i \frac{p^+}{\sqrt{2}} \theta_L^a \bar{\partial} \theta_L^a - i \frac{p^+}{\sqrt{2}} \theta_R^b \partial \theta_R^b \right), \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2z (2\partial X^i \bar{\partial} X^i + S_L^a \bar{\partial} S_L^a + S_R^b \partial S_R^b), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde definimos¹² $S_L^a = \frac{2}{2^{1/4}} \sqrt{ip^+ \theta_L^a}$ e $S_R^a = \frac{2}{2^{1/4}} i \sqrt{ip^+ \theta_R^a}$. ■

¹²Essas convenções foram usadas para combinar com as normalizações da ação RNS do livro do Polchinski.[7]

Observe que a quiralidade dos espinores de $SO(8)$ $S_{L,R}$ dependerá de $\theta_{L,R}$ ser Weyl ou anti-Weyl em 10 dimensões. A convenção usual é que para a supercorda tipo IIB os dois espinores são Weyl, θ_L^α e θ_R^α , e portanto os espinores de $SO(8)$ são dados por

$$(S_L^a, S_R^b) \in (8_s, 8_s) \quad (\text{Tipo IIB}).$$

Para a supercorda tipo IIA definimos θ_L^α e θ_R^β em 10 dimensões, e portanto,

$$(S_L^a, S_R^b) \in (8_s, 8_c) \quad (\text{Tipo IIA}).$$

Por motivos de completeza, escrevemos abaixo a ação para a supercorda tipo IIA,

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(2\partial X^i \bar{\partial} X^i + S_L^a \bar{\partial} S_L^a + S_R^b \partial S_R^b \right),$$

onde S_L^a é definido como (2.37) e $S_R^b \equiv \frac{2}{2^{1/4}} \sqrt{i p^+} \theta_R^b$.

2.4 Quantização no gauge do cone de luz

Primeiramente note que a ação (2.39) define uma CFT se os pesos conformes de $\partial X^i(z)$, $\bar{\partial} X^i(\bar{z})$, $S_L^a(z)$ e $S_R^a(\bar{z})$ forem $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ respectivamente. Portanto poderemos usar todas as poderosas ferramentas da teoria conforme a nossa disposição para quantizarmos a supercorda. Para tornar isso possível devemos aplicar uma rotação de Wick ($t \rightarrow -i\sigma^2$) e definir a coordenada “no cilindro” $w = \sigma^1 + i\sigma^2$. As novas derivadas são dadas por

$$\partial \rightarrow \partial = \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} \rightarrow \bar{\partial} = \frac{1}{2} (\partial_1 + i\partial_2).$$

Para a corda fechada indentificaremos $\sigma^1 \sim \sigma^1 + 2\pi$ e o *tempo euclidiano* está definido no intervalo $\sigma^2 \in (-\infty, \infty)$. Definiremos também a coordenada z através de uma transformação conforme

$$z = e^{-iw} = e^{(\sigma^2 - i\sigma^1)},$$

e portanto vemos que no plano z as coordenadas com o mesmo tempo euclidiano formam circunferências, com $\sigma^2 \rightarrow -\infty$ sendo mapeado em $z = 0$.

As equações de movimento para X^i , S_L^a e S_R^a segundo a ação (2.39) são dadas por

$$\partial \bar{\partial} X^i(z, \bar{z}) = 0, \quad (\text{Equação de onda}) \quad (2.40)$$

$$\bar{\partial} S_L^a(z) = 0, \quad (2.41)$$

$$\partial S_R^a(\bar{z}) = 0. \quad (2.42)$$

Além disso, temos as equações para as coordenadas X^+ e X^- . A equação de movimento para X^- é encontrada resolvendo os vínculos de Virasoro $\Pi^m \Pi_m = \bar{\Pi}^m \bar{\Pi}_m = 0$, e obtemos para a supercorda tipo IIB

$$2\partial X^+ \partial X^- = \partial X^i \partial X^i + \frac{1}{2} S_L^a \partial S_L^a - \frac{1}{2} S_R^a \partial S_R^a, \quad (2.43)$$

$$2\bar{\partial} X^+ \bar{\partial} X^- = \bar{\partial} X^i \bar{\partial} X^i - \frac{1}{2} S_L^a \bar{\partial} S_L^a + \frac{1}{2} S_R^a \bar{\partial} S_R^a, \quad (2.44)$$

onde usamos a definição (2.37). Também temos $\partial \bar{\partial} X^+ = 0$, como pode ser concluído facilmente tanto a partir de (2.21) quanto da condição do gauge do cone de luz.

Para encontrarmos as equações de movimento foi necessário eliminarmos alguns termos de superfície, o que pode ser feito de maneiras distintas, dando origem às seguintes definições.

Definição 4 (Supercorda Aberta Tipo I). *Definimos a supercorda aberta como sendo a solução das equações de movimento (2.40), (2.41) e (2.42) obedecendo às seguintes condições de contorno,*

$$\partial X^i = \bar{\partial} X^i \quad \text{quando } z = \bar{z} \quad (2.45)$$

$$S_L^a(z) = S_R^a(\bar{z}), \quad \text{quando } z = \bar{z}. \quad (2.46)$$

Note que devido ao fato de essa condição de contorno igualar os espinores na fronteira, a teoria somente pode ser consistente se as quiralidades dos espinores forem iguais. Isso reduz a supersimetria¹³ de $N = 2$ para $N = 1$. É por esse motivo que a supercorda aberta é conhecida como tipo I.

Definição 5 (Supercorda Fechada Tipo IIA/IIB). *Definimos a supercorda fechada do tipo IIA/IIB como sendo a solução das equações de movimento (2.40), (2.41) e (2.42) obedecendo às seguintes condições de contorno,*

$$X^i(\sigma + 2\pi, t) = X^i(\sigma, t), \quad i = 1 \dots 8 \quad \forall t$$

$$S_L^a(\sigma + 2\pi, t) = S_L^a(\sigma, t), \quad \forall t$$

$$S_R^b(\sigma + 2\pi, t) = S_R^b(\sigma, t), \quad \text{tipo IIA}$$

$$S_R^b(\sigma + 2\pi, t) = S_R^b(\sigma, t), \quad \text{tipo IIB}$$

¹³É comum a notação $N = (1, 1)$ para a supercorda tipo IIA, $N = (2, 0)$ para a tipo IIB e $N = (1, 0)$ para a supercorda aberta, para diferenciar as quiralidades das cargas supersimétricas.

A ação (2.39) é livre e portanto podemos calcular os OPE's facilmente,

$$X^i(z, \bar{z})X^j(y, \bar{y}) \rightarrow -\frac{1}{2}\delta^{ij} \ln|z-y|^2 \quad (2.47)$$

$$S_L^a(z)S_L^b(y) \rightarrow \frac{\delta^{ab}}{z-y} \quad (2.48)$$

$$S_R^a(\bar{z})S_R^b(\bar{y}) \rightarrow \frac{\delta^{ab}}{\bar{z}-\bar{y}} \quad (2.49)$$

$$S_L^a(z)S_R^b(\bar{y}) \rightarrow \text{regular.} \quad (2.50)$$

A quantização das variáveis X^i da ação (2.39) é a mesma do caso da supercorda RNS, e por ser bem conhecida não será repetida aqui. O resultado pode ser resumido com as seguintes equações,

$$\begin{aligned} [x^i, p^j] &= i\delta^{ij} \\ [\alpha_m^i, \alpha_n^j] &= m\delta^{ij}\delta_{m,-n}. \end{aligned}$$

onde as expansões são dadas por,

$$\partial X^i(w) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^i e^{inw} \quad \bar{\partial} X^i(\bar{w}) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}_n^i e^{-in\bar{w}} \quad (2.51)$$

$$\partial X^i(z) = -i\sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_n^i}{z^{n+1}} \quad \bar{\partial} X^i(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^i}{\bar{z}^{n+1}}. \quad (2.52)$$

Para a corda aberta com as condições de contorno dadas por (2.46), podemos expandir no cilindro e no plano z ,

$$S_L^a(w) = \frac{1}{\sqrt{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{inw} \quad S_R^a(\bar{w}) = \sqrt{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in\bar{w}} \quad (2.53)$$

$$S_L^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_n^a}{z^{n+1/2}} \quad S_R^a(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_n^a}{\bar{z}^{n+1/2}}. \quad (2.54)$$

Note que as condições de contorno da supercorda aberta implicam na igualdade dos osciladores, $\alpha_n^i = \tilde{\alpha}_n^i$ e $S_n^a = \tilde{S}_n^a$. Além disso os OPE's (2.48) e (2.49) implicam em uma álgebra para os modos S_n^a e \tilde{S}_m^a ,

$$\{S_m^a, S_n^b\} = \delta^{ab}\delta_{m,-n} \quad (2.55)$$

$$\{\tilde{S}_m^a, \tilde{S}_n^b\} = \delta^{ab}\delta_{m,-n}. \quad (2.56)$$

Para a supercorda fechada [6], o cálculo do momento linear exige somente que $\alpha_0^i = \tilde{\alpha}_0^i$.

2.4.1 Espectro das supercordas

Primeiramente provaremos alguns resultados importantes.

Definição 6. A densidade de momento linear da supercorda é definida pela variação da ação (2.17),

$$\delta S = -\frac{i}{2\pi} \int d^2z (\partial\epsilon_m \bar{J}^m + \bar{\partial}\epsilon_m J^m),$$

onde $\delta X_m(z, \bar{z}) = \epsilon(z, \bar{z})$, segundo o método de Noether¹⁴.

Proposição 8. Os momentos lineares da supercorda fechada tipo IIB são dados por

$$p^+ = \sqrt{2}\alpha^+ = p^+ \quad (2.57)$$

$$p^i = \sqrt{2}\alpha_0^i \quad (2.58)$$

$$p^- = \frac{1}{2p^+} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a \right) \quad (2.59)$$

Demonstração. Da definição 6 obtemos as densidades de momento após um simples cálculo,

$$\bar{J}^m = i\bar{\partial}X^m + 2\theta_L \gamma^m \bar{\partial}\theta_L, \quad J^m = i\partial X^m + 2\theta_R \gamma^m \partial\theta_R, \quad (2.60)$$

e o momento linear é definido da mesma maneira que em [6],

$$p^m = \oint \frac{dz}{2\pi i} J^m - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{J}^m. \quad (2.61)$$

No plano complexo temos as seguintes expansões

$$\partial X^+(z) = -\frac{i p^+}{2 z}, \quad \bar{\partial} X^+(\bar{z}) = -\frac{i p^+}{2 \bar{z}}$$

e portanto o momento na direção (+) segundo a equação (2.61) é dado por

$$\begin{aligned} p^+ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1 p^+}{2 z} - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \frac{1 p^+}{2 \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} p^+ + \frac{1}{2} p^+ = p^+ \end{aligned}$$

como deveria ser. Do mesmo modo obtemos os momentos p^i ,

$$\begin{aligned} p^i &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\alpha_n^i}{z^{n+1}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \frac{\tilde{\alpha}_n^i}{\bar{z}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_0^i + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\alpha}_0^i = \sqrt{2} \alpha_0^i \end{aligned}$$

¹⁴Veja a pag. 68 de [8].

onde usamos as expansões (2.52) e a igualdade $\alpha_0^i = \tilde{\alpha}_0^i$. O cálculo de p^- é um pouco mais longo, pois os vínculos de Virasoro (2.43) e (2.44) precisam ser considerados. As densidades de momento (2.60) são dadas por

$$J^- = i\partial X^- - 2\sqrt{2}\theta_R^a \partial\theta_R^a$$

$$J^- = \frac{i}{2\partial X^+} \partial X^i \partial X^i + \frac{i}{4\partial X^+} S_L^a \partial S_L^a - \frac{i}{4\partial X^+} S_R^a \partial S_R^a - \frac{i}{2\partial X^+} S_R^a \partial S_R^a.$$

Portanto obtemos, depois de inserir as expansões no plano complexo e usar as equações de movimento para eliminar ∂S_R^a ,

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} P^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \frac{1}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a. \quad (2.62)$$

É conveniente que façamos um comentário sobre a expansão de $\partial S_L(z)$ usada para chegar ao resultado (2.62). Devemos primeiro calcular $\partial_w S_L(w)$ usando (2.53),

$$\partial_w S_L(w) = \sqrt{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S_n e^{inw},$$

e depois encontramos $\partial S_L(z)$, considerando seu peso conforme $+3/2$,

$$\partial S_L(z) = \partial S(w) \left(\frac{i}{z}\right)^{3/2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{S_n}{z^{n+3/2}}.$$

Analogamente,

$$\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{J}^- = -\frac{1}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - \frac{1}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a,$$

e portanto obtemos a última relação que faltava provar,

$$p^- = \oint \frac{dz}{2\pi i} J^- - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{J}^-$$

$$= \frac{1}{2p^+} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a \right). \quad (2.63)$$

Corolário 1. A massa ao quadrado dos estados da supercorda tipo IIB é dada pelo autovalor do operador

$$M^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n S_{-n}^a S_n^a + n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a)$$

Demonstração. A massa é encontrada através da relação

$$p^m p_m = p^i p^i - 2p^- p^+ = -M^2. \quad (2.64)$$

Note que na expressão (2.63) as constantes advindas do ordenamento normal dos osciladores α^i , $\tilde{\alpha}^i$, S^a e \tilde{S}^a se cancelam exatamente, e portanto podemos escrever

$$2p^+ p^- = 2\alpha_0^i \alpha_0^i + 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i) + \sum_{n=1}^{\infty} (n S_{-n}^a S_n^a + n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a) \right], \quad (2.65)$$

onde novamente usamos que $\alpha_0^i = \tilde{\alpha}_0^i$. O término da demonstração segue-se facilmente das expressões (2.64), (2.65) e (2.58). ■

Evidentemente, o espectro de massas dos estados das supercordas tipo IIA e IIB são idênticos.

Corolário 2. A massa ao quadrado dos estados da supercorda tipo I é dada pelo autovalor do operador

$$M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a \quad (2.66)$$

Demonstração. A demonstração se baseia no fato que a corda aberta está definida somente no plano complexo superior (σ entre 0 e π), portanto todas os resultados calculados para a corda fechada ficam reduzidos pela metade, ou seja¹⁵,

$$p_v^+ = \frac{1}{2} p^+ \quad (2.67)$$

$$p^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_0^i \quad (2.68)$$

$$p^- = \frac{1}{4p^+} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \tilde{S}_{-n}^a \tilde{S}_n^a \right) \quad (2.69)$$

Além disso note que não é o verdadeiro momento p_v^+ que está no denominador de p^- , mas a constante p^+ usada na definição da coordenada X^+ no cone de luz. Portanto, substituindo a expressão (2.67) em (2.69) e usando que $\alpha_n^i = \tilde{\alpha}_n^i$, $S_n^a = \tilde{S}_n^a$ para a corda aberta obtemos,

$$p^- = \frac{1}{4p_v^+} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a \right)$$

¹⁵Denotamos o momento na direção (+) com um subscrito "v" para diferenciá-lo da constante p^+ .

Espectro da Supercorda tipo I			
Massa	Estados	bósons	férmions
$M^2 = 0,$	$ 0\rangle^{\dot{a}j}$	8	8
$M^2 = 1,$	$\alpha_{-1}^i 0\rangle^{\dot{a}j}, S_{-1}^a 0\rangle^{\dot{a}j}$	128	128
$M^2 = 2,$	$\alpha_{-2}^i 0\rangle^{\dot{a}j}, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j 0\rangle^{\dot{a}j}, S_{-2}^a 0\rangle^{\dot{a}j}, S_{-1}^a S_{-1}^b 0\rangle^{\dot{a}j}, S_{-1}^a \alpha_{-1}^i 0\rangle^{\dot{a}j}$	1152	1152

Tabela 2.1: Espectro da Supercorda tipo I

Novamente as constantes originárias do ordenamento normal se cancelam entre os osciladores bosônicos e fermiônicos, logo

$$\begin{aligned}
 p^- &= \frac{1}{4p_v^+} \alpha_0^i \alpha_0^i + \frac{1}{2p_v^+} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a \right) \\
 &= \frac{1}{2p_v^+} p^i p^i + \frac{1}{2p_v^+} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{n=1}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a \right)
 \end{aligned}$$

da onde segue-se o resultado usando-se a relação (2.64). ■

Supercorda tipo I

Note que os modos zero S_0^a da álgebra (2.55) obedecem à mesma álgebra de $SO(8)$ encontrada durante o estudo da superpartícula, como pode ser visto comparando (2.14) e (2.55). Portanto, podemos representar a álgebra dos modos zero da supercorda tipo I em um espaço vetorial $8_v \oplus 8_c$ da seguinte maneira¹⁶

$$\begin{aligned}
 S_0^a |\dot{a}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j^{\dot{a}a} |j\rangle, \\
 S_0^b |j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_j^{bc} |c\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

exatamente como foi visto na página 10. No que se segue denotaremos os estados fundamentais $|\dot{a}\rangle$ e $|j\rangle$ compactamente como $|0\rangle^{\dot{a}j}$. Os estados excitados da supercorda tipo I serão formados pela atuação dos modos de criação S_{-n}^a e α_{-n}^i sobre os estados fundamentais $|0\rangle^{\dot{a}j}$ de todas as maneiras possíveis. Por exemplo, em $M^2 = 1$ temos os seguintes estados bosônicos: $\alpha_{-1}^i |j\rangle$ (64) e $S_{-1}^a |\dot{a}\rangle$ (64), onde o número entre parênteses indica o

¹⁶Poderíamos também ter escolhido a representação 8_s , ao invés de 8_c , entretanto essa é a convenção usual[8].

número de estados, e os estados fermiônicos: $\alpha_{-1}^i |a\rangle$ (64) e $S_{-1}^a |j\rangle$ (64). Veja a tabela 2.1 para uma listagem dos 3 primeiros níveis.

É fácil nos convenceremos de que o espectro contém igual número de bósons e férmions em todos os níveis. Vemos portanto que no formalismo de Green-Schwarz esse resultado é consequência direta da ação e do gauge do cone de luz. Não é necessário qualquer tipo de projeção *ad hoc*, como no caso do formalismo RNS, cujo espectro somente é supersimétrico depois da projeção GSO [11]. Além disso, os estados formam multipletos supersimétricos completos. Com isso queremos dizer que a quantidade de estados é a mesma da representação da álgebra de super-Poincaré $N=1$ em 10 dimensões. Esse resultado já era esperado, pois como vimos anteriormente a ação de Green-Schwarz é invariante por transformações supersimétricas.

Degenerescência dos estados

Como podemos perceber na tabela acima o número de estados em cada nível tende a crescer muito rapidamente. Gostaríamos de encontrar uma fórmula que quantificasse esse crescimento precisamente.

Felizmente a questão do parágrafo anterior está relacionada com o famoso problema matemático da partição dos números naturais, resolvido por Leonhard Euler em 1753, num belo trabalho [10] onde questões mais gerais também são abordadas e resolvidas. A formulação mais simples do problema se resume em saber de quantas maneiras possíveis $P(N)$ um dado número natural pode ser escrito como uma soma dos números menores ou iguais que ele mesmo. Por exemplo, o número 5 pode ser escrito como 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1, logo $P(5) = 7$. No caso da corda bosônica, desconsiderando o índice μ em α_{-n}^μ vemos claramente na tabela 2.2 que no nível N há $P(N)$ estados.

No trabalho de 1753, Euler (*c'est notre maître à tous!*) descobriu uma função geradora para os números $P(N)$, dada por

$$\sum_{N=0}^{\infty} P(N)x^N = \prod_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^N} \right),$$

que nos permitirá entender a solução do problema em questão.

Para o caso da supercorda aberta a aplicação da fórmula de Euler não é imediata. Os estados são obtidos atuando com S_{-n}^a e α_{-n}^i no estado fundamental $|0\rangle^{j\dot{a}} \equiv |0\rangle$, cuja degenerescência é 16. Além disso, é preciso considerar que a contagem de estados fermiônicos

Nível	Estados	Degenerescência
0	$ 0\rangle$	$1 \equiv P(0)$
1	$\alpha_{-1} 0\rangle$	$1 = P(1)$
2	$\alpha_{-2} 0\rangle, \alpha_{-1}\alpha_{-1} 0\rangle$	2
3	$\alpha_{-3} 0\rangle, \alpha_{-2}\alpha_{-1} 0\rangle, \alpha_{-1}\alpha_{-1}\alpha_{-1} 0\rangle$	3
\vdots		
N	$\alpha_{-N} 0\rangle, \dots$	$P(N)$

Tabela 2.2: Degenerescência de estados.

é diferente e podemos ainda misturar os operadores α_{-n}^i e S_{-n}^a . Todos esses detalhes são resolvidos com a seguinte fórmula, cuja demonstração não será dada, para o número de estados d_n no nível n (N é a soma dos operadores que contam os modos de α^i e S^a),

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n = \text{tr } w^N = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+w^n}{1-w^n} \right)^8$$

$$= 16 + 256w + 2304w^2 + \dots$$

onde o fator 16 leva em consideração o estado fundamental e o fator 8 é devido ao fato de os índices (i, a) tomarem 8 valores diferentes. Estimativas podem ser feitas para encontrarmos o comportamento assintótico de d_n , dando-nos o resultado de que o crescimento do número de estados é exponencial[8], $d_n \sim n^{-11/4} \exp(\pi\sqrt{8n})$.

Supercorda tipo II

Para a supercorda fechada, os modos L e R são independentes, e novamente o estado fundamental, com $m^2 = 0$, forma uma representação das álgebras (2.55) e (2.56). Portanto temos $16 \times 16 = 256$ modos diferentes no estado fundamental, dados por $(8_v \oplus 8_c) \otimes (8_v \oplus 8_s)$ para a supercorda tipo IIA e por $(8_v \oplus 8_c) \otimes (8_v \oplus 8_c)$ para a supercorda tipo IIB. Uma notação conveniente para o estado fundamental é a seguinte,

$$|0\rangle^{jk}, |0\rangle^{jc}, |0\rangle^{bk}, |0\rangle^{bc} \quad (\text{Tipo IIA})$$

$$|0\rangle^{jk}, |0\rangle^{j\dot{c}}, |0\rangle^{bk}, |0\rangle^{b\dot{c}} \quad (\text{Tipo IIB})$$

onde o primeiro índice se refere ao vácuo “da esquerda” e o segundo ao vácuo “da direita” dos respectivos produtos tensoriais dos estados fundamentais.

Note que a única diferença entre as supercordas tipo IIA e IIB é a quiralidade das cargas supersimétricas. Como a quiralidade do estado fundamental é bem definida, já que $m^2 = 0$, não é de se estranhar que o conteúdo de partículas no modo fundamental seja diferente. Nos próximos níveis, todos massivos, a quiralidade não é invariante e o espectro das supercordas IIA e IIB é idêntico.

As representações do estado fundamental dadas pelo produto tensorial são redutíveis, e as decomposições irredutíveis são apresentadas no seguinte Lema.

Lema 2. *Para as supercordas tipo IIA e IIB as decomposições irredutíveis do estado fundamental são dadas respectivamente por*

$$(8_v \oplus 8_c) \otimes (8_v \oplus 8_s) = (1 \oplus 28_v \oplus 35_v \oplus 8_v \oplus 56_v)_B + (8_s \oplus 8_c \oplus 56_s \oplus 56_c)_F, \quad (2.71)$$

$$(8_v \oplus 8_c) \otimes (8_v \oplus 8_c) = (1 \oplus 28_v \oplus 35_v \oplus 1 \oplus 28_v \oplus 35_c)_B + (8_s \oplus 8_s \oplus 56_s \oplus 56_s)_F, \quad (2.72)$$

onde o índice B denota os estados bosônicos e F os fermiônicos.

Demonstração. Provaremos somente a decomposição para a supercorda tipo IIA, pois para a supercorda tipo IIB as decomposições são análogas. A única diferença é que a 4-forma A_{mnpq} obtida no espectro do tipo IIB é auto dual, consequência da relação obedecida pelas matrizes sigma,

$$\sigma^{ijkl} = \frac{1}{4!} \epsilon^{ijklmnop} \sigma_{mnop}.$$

A demonstração se baseará na estrutura de índices dos objetos conhecidos que se transformam por $SO(8)$, a saber δ_{ab} , $\delta_{\dot{a}\dot{b}}$, $\sigma_{\dot{a}\dot{a}}^j$, $\bar{\sigma}_{\dot{a}\dot{a}}^j$ e $\epsilon_{ijklmnop}$. Decomporemos um objeto com uma determinada quantidade de índices formando todas as possíveis combinações dos supra-citados elementos, de modo a preservar a estrutura de índices. Assim, é fácil ver que o produto $8_c \otimes 8_s \rightarrow A_{\dot{a}\dot{a}}$ pode ser escrito da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} A_{\dot{a}\dot{a}} &= A_j \bar{\sigma}_{\dot{a}\dot{a}}^j + A_{jkl} \bar{\sigma}_{\dot{a}\dot{b}}^j \sigma_{bc}^j \bar{\sigma}_{\dot{c}\dot{a}}^j \\ &= (8_v \oplus 56_v)_B. \end{aligned}$$

Note que não é necessário considerar objetos com 5 índices, pois o tensor $\epsilon_{ijklmnop}$ relaciona em uma combinação linear tensores com 5 índices e 3, 7 e 1, etc. Observe que obtivemos um bóson com um índice vetorial de $SO(8)$ e um tensor antisimétrico com 3 índices, cujas respectivas dimensões são dadas por 8_v e 56_v . A decomposição para $8_s \otimes 8_v \rightarrow \psi_a^i$ é um pouco diferente

$$\begin{aligned} \psi_a^i &= (\psi^t)_a^i + \frac{1}{8} \sigma_{ab}^i \chi_b \\ &= (56_s \oplus 8_c)_F \end{aligned}$$

onde a notação “t” em $(\psi^t)_a^i$ significa que o traço é zero $\bar{\sigma}_{aa}^i (\psi^t)_a^i = 0$, o que por sua vez implica que $\chi_a^i = \bar{\sigma}_{aa}^i \psi_a^i$. Portanto as representações resultantes da decomposição tem dimensão $8_c = \chi_a^i$ e $56_s = (\psi^t)_a^i$, e ambos os estados são fermiônicos. Semelhantemente para $8_v \otimes 8_c$,

$$\begin{aligned} \psi_a^i &= (\psi^t)_a^i + \frac{1}{8} \sigma_{ab}^i \chi_b \\ &= (56_c \oplus 8_s)_F. \end{aligned}$$

Além disso temos $8_v \otimes 8_v$, que é dado pelas partes antissimétrica, simétrica sem traço e o traço,

$$\begin{aligned} A_i \otimes B_j &= \frac{1}{2} (A_i B_j - A_j B_i) + \frac{1}{2} \left(A_i B_j + A_j B_i - \frac{1}{4} \delta_{ij} A \cdot B \right) + \frac{1}{4} \delta_{ij} A \cdot B \\ &= (28_v \oplus 35_v \oplus 1)_B. \end{aligned}$$

■

Os estados dos primeiros níveis da supercorda tipo IIB podem ser conferidos na tabela 2.3, onde denotamos compactamente os estados fundamentais por $|\phi_0\rangle$. Note que o número de estados em cada nível é o quadrado do número de estados da supercorda tipo I, como deveria ser, já que podemos pensar que a supercorda tipo IIB é o produto de duas supercordas tipo I.

2.4.2 Supersimetria

Quando passamos para o gauge do cone de luz, onde exigimos que $\gamma_{\alpha\beta}^+ \theta^\beta = 0$, devemos verificar se a supersimetria da teoria é preservada. Claramente vemos que a transformação $\delta\theta^\beta = \varepsilon^\beta$ pode destruir a condição do gauge do cone de luz. Para vermos isso basta escolher o parâmetro da supersimetria tal que $\gamma_{\alpha\beta}^+ \varepsilon^\beta \neq 0$. Entretanto, veremos que é possível compensar essa “violação” da condição de gauge com uma transformação da simetria kappa. Podemos então redefinir as transformações de supersimetria de modo que essas novas transformações preservem a escolha do gauge, prevendo então que o formalismo de Green-Schwarz no cone de luz continua sendo uma teoria supersimétrica. A demonstração de que a teoria ainda preserva a invariância de Lorentz, de maneira não manifesta, será dada na próxima seção.

Espectro da Supercorda tipo IIB			
Massa	Estados	bósons	férmions
$M^2 = 0,$	$ \phi_0\rangle \otimes \phi_0\rangle$	128	128
$M^2 = 4$	$\alpha_{-1}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^j \phi_0\rangle, S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^b \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^a \phi_0\rangle, S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \phi_0\rangle$	32728	32728
$M^2 = 8$	$\alpha_{-2}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-2}^j \phi_0\rangle, \alpha_{-2}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-2}^k \phi_0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^l \phi_0\rangle$ $\alpha_{-2}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-2}^a \phi_0\rangle, \alpha_{-2}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^a \tilde{S}_{-1}^b \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-2}^a \phi_0\rangle, \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^a \tilde{S}_{-1}^b \phi_0\rangle$ $S_{-2}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-2}^i \phi_0\rangle, S_{-2}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \phi_0\rangle$ $S_{-1}^a S_{-1}^b \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-2}^i \phi_0\rangle, S_{-1}^a S_{-1}^b \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \phi_0\rangle$ $S_{-2}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-2}^b \phi_0\rangle, S_{-2}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^b \tilde{S}_{-1}^c \phi_0\rangle$ $S_{-1}^a S_{-1}^b \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-2}^c \phi_0\rangle, S_{-1}^a S_{-1}^b \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^c \tilde{S}_{-1}^d \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-2}^j \phi_0\rangle, \alpha_{-1}^i S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{S}_{-1}^b \phi_0\rangle, \alpha_{-1}^i S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-2}^b \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i S_{-1}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{S}_{-1}^b \tilde{S}_{-1}^c \phi_0\rangle, \alpha_{-2}^i \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{S}_{-1}^a \phi_0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{S}_{-1}^a \phi_0\rangle, S_{-2}^a \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{S}_{-1}^b \phi_0\rangle$ $S_{-1}^a S_{-1}^b \phi_0\rangle \otimes \tilde{\alpha}_{-1}^i \tilde{S}_{-1}^c \phi_0\rangle$	2654208	2654208

Tabela 2.3: Espectro da Supercorda tipo IIB

Proposição 9. *As transformações de supersimetria do formalismo de Green-Schwarz no cone de luz geradas por Q_a são dadas por,*

$$\delta S_L^a = \sqrt{2p^+} \eta_L^a, \quad (2.73)$$

$$\delta S_R^a = \sqrt{2p^+} \eta_R^a, \quad (2.74)$$

$$\delta X^i = 0. \quad (2.75)$$

As transformações supesimétricas geradas por Q_a são,

$$\delta S_L^a = -i \sqrt{\frac{1}{p^+}} \partial X^i \sigma_i^{aa} \epsilon_L^a, \quad (2.76)$$

$$\delta S_R^a = -i \sqrt{\frac{1}{p^+}} \bar{\partial} X^i \sigma_i^{aa} \epsilon_R^a, \quad (2.77)$$

$$\delta X^i = -i \sqrt{\frac{1}{p^+}} (S_L \sigma^i \epsilon_L) - i \sqrt{\frac{1}{p^+}} (S_R \sigma^i \epsilon_R). \quad (2.78)$$

Demonstração. A decomposição do espinor ϵ^β em termos de $SO(8)$ é dada por

$$\epsilon^\beta = \begin{pmatrix} \epsilon^a \\ \epsilon^{\dot{a}} \end{pmatrix},$$

então as transformações supersimétricas tais que $\epsilon^{\dot{a}} = 0$ claramente preservam o gauge do cone de luz. Portanto, como nesse caso temos que $(\epsilon\gamma^m\theta) = 0$ para $m = i, -, +$, as equações (2.22) e (2.23) resultam em

$$\delta S_L^a = \frac{2}{2^{1/4}} \sqrt{ip^+} \epsilon^a \equiv \sqrt{2p^+} \eta_L^a \quad (2.79)$$

$$\delta S_R^a = \frac{2}{2^{1/4}} i \sqrt{ip^+} \epsilon^a \equiv \sqrt{2p^+} \eta_R^a \quad (2.80)$$

$$\delta X^i = 0. \quad (2.81)$$

Para o caso onde $\gamma_{\alpha\beta}^+ \epsilon^\beta \neq 0$ podemos escolher os parâmetros tais que $\epsilon^a = 0$ e $\epsilon^{\dot{a}} \neq 0$. Suponhamos então que estamos no gauge onde $\gamma_{\alpha\beta}^+ \theta_L^\beta = 0$, logo $\theta_L^{\dot{a}} = 0$, e que queremos variar θ_L^β de modo a preservar essa condição. Mostraremos que a combinação da transformação de supersimetria (2.22) com a transformação kappa (2.24), isto é,

$$\delta\theta_L^\alpha = \epsilon^\alpha + \Pi^m \gamma_m^{\alpha\beta} \kappa_\beta, \quad (2.82)$$

tal que

$$\kappa_a = 0, \quad \kappa_{\dot{a}} = -\frac{\sqrt{2}}{p^+} \epsilon_{\dot{a}} \quad (2.83)$$

é uma simetria com a propriedade desejada para a supercorda tipo IIB. Se fosse a supercorda tipo IIA então deveríamos escolher $\kappa^{\dot{a}} = \frac{\sqrt{2}}{p^+} \epsilon_{\dot{a}}$. O fato de ser uma simetria é óbvio, pois a originalmente a teoria era invariante por essas transformações, o que precisa ser mostrado é que essa transformação não estragará a condição do gauge do cone de luz. Para vermos isso escrevemos explicitamente a variação (2.82),

$$\delta\theta_L^\alpha = \begin{pmatrix} \Pi^i \sigma_i^{a\dot{a}} \kappa_{\dot{a}} - \sqrt{2} \Pi^- \kappa_a \\ \epsilon^{\dot{a}} + \Pi^i \sigma_i^{\dot{a}a} \kappa_a - \sqrt{2} \Pi^+ \kappa_{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

mas como a coordenada original era tal que $\gamma_{\alpha\beta}^+ \theta_L^\beta = 0$, então $\Pi^i = \partial X^i$. Portanto, lembrando que $\Pi^+ = -p^+/2$ e usando (2.83) e (2.34) obtemos,

$$\delta\theta_L^\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{p^+} \partial X^i \sigma_i^{a\dot{a}} \epsilon_{\dot{a}}, \quad \delta\theta_L^{\dot{a}} = 0,$$

que claramente preserva a condição do gauge do cone de luz. Conseqüentemente, de (2.37) segue-se que

$$\delta S_L^a = -2^{1/4} 2 \sqrt{\frac{i}{p^+}} \partial X^i \sigma_i^{a\dot{a}} \epsilon_{\dot{a}}^L \equiv i \sqrt{\frac{1}{p^+}} \partial X^i \sigma_i^{a\dot{a}} \epsilon_{\dot{a}}^L.$$

Para a variação de θ_R^a cálculos semelhantes resultam em

$$\delta S_R^a = \left(i \frac{2}{2^{1/4}} \sqrt{ip^+} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{p^+} \bar{\delta} X^i \sigma_i^{a\dot{a}} \epsilon_{\dot{a}}^R \right) \equiv i \sqrt{\frac{1}{p^+}} \bar{\delta} X^i \sigma_i^{a\dot{a}} \epsilon_{\dot{a}}^R.$$

Para encontrarmos a variação (2.78) devemos adicionar as variações da transformação kappa (2.26) e de supersimetria (2.23). Um simples cálculo nos mostra que as duas contribuições são iguais, e portanto usando a transformação (2.23) multiplicada por 2, lembrando que $\theta^{\dot{a}} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta X^i &= -2i\theta_L^a \sigma_{a\dot{a}}^i \epsilon_{\dot{a}}^L - 2i\theta_R^a \sigma_{a\dot{a}}^i \epsilon_{\dot{a}}^R \\ &= -2^{1/4} \sqrt{\frac{i}{p^+}} (S_L \sigma^i \epsilon_L) - 2^{1/4} \sqrt{\frac{1}{ip^+}} (S_R \sigma^i \epsilon_R) \\ &\equiv -i \sqrt{\frac{1}{p^+}} (S_L \sigma^i \epsilon_L) - i \sqrt{\frac{1}{p^+}} (S_R \sigma^i \epsilon_R). \end{aligned}$$

Note que é facilmente verificável que as transformações (2.73)-(2.75) e (2.76)-(2.78) deixam a ação (2.39) invariante. ■

As normalizações nas transformações acima foram escolhidas para que os geradores Q_a e $Q_{\dot{a}}$ obedecessem às relações de anticomutação das cargas supersimétricas no gauge do cone de luz,

$$\{Q_a, Q_b\} = 2p^+ \delta_{ab} \quad (2.85)$$

$$\{Q_a, Q_{\dot{b}}\} = \sqrt{2} p^i \sigma_{ab}^i \quad (2.86)$$

$$\{Q_{\dot{a}}, Q_{\dot{b}}\} = 2p^- \delta_{\dot{a}\dot{b}} \quad (2.87)$$

que são derivadas da expressão covariante em 10 dimensões, $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sqrt{2} P_m \gamma_{\alpha\beta}^m$, dadas as convenções do Apêndice A. Verificaremos esse fato depois de provarmos o seguinte lema.

Lema 3. *Os geradores das transformações de supersimetria para a supercorda tipo I são dados por*

$$Q_a = \oint \frac{dz}{2\pi i} \sqrt{2p^+}(z) S^a(z) = \sqrt{2p^+} S_0^a \quad (2.88)$$

$$Q_{\dot{a}} = i\sqrt{2} \sigma_{a\dot{a}}^i \oint \frac{dz}{2\pi i} \sqrt{\frac{1}{2p^+}} S^a(z) \partial X^i(z)$$

$$Q_{\dot{a}} = \sqrt{\frac{1}{2p^+}} \sigma_{a\dot{a}}^i \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{-n}^a \partial \alpha_n^i. \quad (2.89)$$

Demonstração. Note que em princípio essas cargas poderiam ser deduzidas a partir do método de Noether. Porém escolhemos somente verificar que essas cargas geram as transformações desejadas, e assim provar o lema.

Para a supercorda tipo I podemos descartar S_R^a da transformação (2.78), e tratar somente com $S_L^a \equiv S^a$. Note que $\sqrt{2p^+}(z)$ possui peso conforme 1/2 e portanto no plano z ele é escrito como $\frac{\sqrt{2p^+}}{z^{1/2}}$, portanto usando (2.88) e a expansão (2.54) obtemos para as transformações geradas por Q_a ,

$$\begin{aligned}\delta S^b(y) &= \eta^a \{Q_a, S^b(y)\} = \eta^a \oint \frac{dz}{2\pi i} \sqrt{2p^+}(z) S^a(z) S^b(y) \\ &= \sqrt{2p^+}(y) \eta^a \\ \delta X^i(y) &= \eta^a \{Q_a, X^i(y)\} = 0.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\delta S^b(y) &= \eta^{\dot{a}} \{Q_{\dot{a}}, S^b(y)\} = i\sqrt{2}\sigma_{\dot{a}\dot{a}}^i \eta^{\dot{a}} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2p^+}} \partial X^i(z) S^a(z) S^b(y) \\ &= \frac{i}{\sqrt{p^+}} \partial X^i(y) \sigma_{\dot{b}\dot{a}}^i \eta^{\dot{a}} \\ \delta X^j(y, \bar{y}) &= \varepsilon^{\dot{a}} \{Q_{\dot{a}}, X^i(y, \bar{y})\} = i\sqrt{2}\sigma_{\dot{a}\dot{a}}^i \varepsilon^{\dot{a}} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{2p^+}} S^a(z) \partial X^i(z) X^j(y, \bar{y}) \\ &= -i\sqrt{\frac{1}{p^+}} S^a(y) \sigma_{\dot{a}\dot{a}}^j \varepsilon^{\dot{a}}.\end{aligned}$$

O que termina a demonstração. ■

Podemos verificar facilmente que os geradores de supersimetria satisfazem à álgebra (2.88)-(2.89), por exemplo,

$$\begin{aligned}\{Q_a, Q_b\} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \sqrt{2p^+}(z) \sqrt{2p^+}(w) S^a(z) S^b(w) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} 2p^+(w) \delta^{ab} = 2p^+ \delta^{ab},\end{aligned}$$

onde usamos que p^+ tem peso conforme 1. Além disso,

$$\begin{aligned}\{Q_a, Q_b\} &= i\sqrt{2}\sigma_{\dot{b}\dot{b}}^i \oint \frac{dz}{2\pi i} \oint \frac{dw}{2\pi i} \sqrt{2p^+}(z) \frac{1}{\sqrt{2p^+}(w)} S^a(z) S^b(w) \partial X^i(w) \\ &= i\sqrt{2}\sigma_{\dot{a}\dot{b}}^i \oint \frac{dw}{2\pi i} \partial X^i(w) = \sigma_{\dot{a}\dot{b}}^i \alpha_0^i \\ &= \sqrt{2}\sigma_{\dot{a}\dot{b}}^i p^i.\end{aligned}$$

Para verificarmos o último comutador é mais fácil usar diretamente a álgebra dos modos,

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\} &= \frac{1}{2p^+} \sigma_{aa}^i \sigma_{bb}^j \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \{S_{-n}^a \alpha_n^i, S_{-m}^b \alpha_m^j\} \\ &= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta^{ab} \alpha_{-m}^i \alpha_m^j + \sum_{m=-\infty}^{\infty} m S_{-m}^b S_m^a \delta^{ij} \right) \frac{1}{2p^+} \sigma_{aa}^i \sigma_{bb}^j. \end{aligned} \quad (2.90)$$

O primeiro somatório é dado por

$$\left(\alpha_0^i \alpha_0^j + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^j + \alpha_{-n}^j \alpha_n^i) + \sum_{n=1}^{\infty} m \delta^{ij} \right) \frac{1}{2p^+} \sigma_{aa}^i \sigma_{ab}^j$$

como o termo entre parênteses é simétrico em (ij) a contribuição das matrizes sigma é devido somente à parte simétrica $\frac{1}{2} \sigma_{aa}^i \sigma_{ab}^j = \delta^{ij} \delta_{ab}$, portanto obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta_{ab}}{2p^+} \left(\alpha_0^i \alpha_0^i + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + 8 \sum_{n=1}^{\infty} n \right) \\ &= \frac{\delta_{ab}}{p^+} \left(p^i p^i + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \right) + \frac{4}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} n \delta_{ab} \end{aligned}$$

onde usamos que $\alpha_0^i = \sqrt{2} p^i$. Semelhantemente, o segundo somatório em (2.90) é dado por

$$-\frac{4}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} n \delta_{ab} + \frac{\delta_{ab}}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} n S_{-n}^a S_n^a,$$

e finalmente concluimos, como queríamos, que

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\} &= \frac{1}{p^+} \left[p^i p^i + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + n S_{-n}^a S_n^a) \right] \delta_{ab} \\ &= 2p^- \delta_{ab}, \end{aligned}$$

onde usamos as relações (2.64) e (2.66).

2.4.3 Transformações de Lorentz e D=10

Há mais um requerimento a ser checado quando quantizamos a supercorda de Green-Schwarz no gauge do cone de luz. Precisamos verificar se as transformações de Lorentz preservam a escolha do gauge $\gamma_{\alpha\beta}^+ \theta^\beta = 0$. Mostraremos que para não violarmos a condição de gauge é necessário compensar a transformação de lorentz com uma transformação

kappa. Essa modificação nos permitirá, mediante a exigência de que a álgebra do grupo de Lorentz seja satisfeita, *deduzir* que a dimensão do espaço-tempo é $D=10$, um fato que vinha sendo utilizado até aqui sem maiores explicações.

A transformação de Lorentz de um espinor do espaço-tempo é dada por,

$$\begin{aligned} \delta_L \theta^\alpha &= \frac{1}{2} \varepsilon_{mn} (M^{mn})^\alpha_\beta \theta^\beta = \frac{1}{4} \varepsilon_{mn} (\gamma^{mn})^\alpha_\beta \theta^\beta \\ &= \frac{1}{2} [\varepsilon_{ij} (\gamma^{ij})^\alpha_\beta + \varepsilon_{i-} (\gamma^{i-})^\alpha_\beta + \varepsilon_{+i} (\gamma^{+i})^\alpha_\beta + \varepsilon_{+-} (\gamma^{+-})^\alpha_\beta] \theta^\beta \end{aligned} \quad (2.91)$$

Porém, note que a condição do gauge do cone de luz não é preservada pelo gerador de Lorentz γ^{i-} , pois

$$\gamma_{\alpha\beta}^+ \delta\theta^\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_{i-} \sigma_{\dot{a}a}^i \theta^a \end{pmatrix} \neq 0 \quad (2.92)$$

onde $\delta\theta^\beta = \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} (\gamma^{i-})^\alpha_\beta \theta^\beta$. Entretanto, é possível compensar essa violação se utilizarmos a invariância kappa, como veremos na seguinte proposição.

Proposição 10. *A condição do gauge do cone de luz é preservada se a transformação de Lorentz gerada por γ^{i-} for compensada com uma transformação kappa com os seguintes parâmetros:*

$$\kappa_a = 0, \quad \kappa_{\dot{a}} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{i-}}{\Pi^+} \sigma_{\dot{a}a}^i \theta^a. \quad (2.93)$$

Demonstração. A prova é simples, basta mostrarmos que o componente anti-quiral da soma das transformações de Lorentz e kappa é zero. A transformação kappa no gauge do cone de luz é dada por,

$$\delta\theta_L^\alpha = \begin{pmatrix} \Pi^i \sigma_{i\dot{a}a} \kappa_{\dot{a}} - \sqrt{2} \Pi^- \kappa_a \\ \Pi^i \sigma_{i\dot{a}a} \kappa_a - \sqrt{2} \Pi^+ \kappa_{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

que com as escolhas dadas em (2.93) se reduz a

$$\delta\theta_L^\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{\dot{a}a}^j \sigma_{\dot{a}b}^i \theta^b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_{i-} \sigma_{\dot{a}b}^i \theta^b \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Da soma de (2.92) e (2.94) obtemos o resultado desejado

$$\delta\theta^a = -\frac{\varepsilon_{i-}}{2} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{\dot{a}a}^j \sigma_{\dot{a}b}^i \theta^b \quad (2.95)$$

$$\delta\theta^{\dot{a}} = 0, \quad (2.96)$$

que obviamente não viola o gauge do cone de luz. ■

A variação (2.95), necessária para restaurar a quebra da condição do gauge $\gamma_{\alpha\beta}^+\theta^\beta = 0$ por uma transformação de Lorentz, implicará que deveremos modificar o gerador J^{i-} . Veremos qual deve ser essa mudança analisando a transformação de Lorentz “total” (Lorentz+kappa) da variável

$$S_L^a = i \frac{2\sqrt{2}}{2^{1/4}} \sqrt{i\partial X^+} \theta^a.$$

Proposição 11. *A variação de S_L^a pela transformação de Lorentz modificada é dada por*

$$\delta_T S_L^a = -\frac{1}{2} \varepsilon_{+-} S^a + \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^i}{\partial X^+} S^a - \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{aa}^j \sigma_{ab}^i S^b \quad (2.97)$$

Demonstração. A prova é simples, pois das expressões (2.91) e (2.94) vemos que,

$$\delta_T \theta^a = \delta_L \theta^a + \delta_\kappa \theta^a = -\varepsilon_{+-} \theta^a - \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{aa}^j \sigma_{ab}^i \theta^b.$$

e portanto a variação de S_L^a pela transformação de Lorentz modificada é dada por

$$\begin{aligned} \delta S_L^a &= i \frac{\sqrt{2}}{2^{1/4}} \sqrt{i\partial X^+} (i\varepsilon_{+-} \partial X^+ + i\varepsilon_{i-} \partial X^i) \theta^a + i \frac{2\sqrt{2}}{2^{1/4}} \sqrt{i\partial X^+} \delta_T \theta^a \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{+-} S^a + \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^i}{\partial X^+} S^a - \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{aa}^j \sigma_{ab}^i S^b \end{aligned}$$

onde usamos que $\delta \partial X^+ = \varepsilon_{+-} \partial X^+ + \varepsilon_{i-} \partial X^i$. ■

Os últimos dois termos de (2.97) são devido ao gerador total J^{i-} , que encontraremos na continuação.

Para verificarmos a álgebra de Lorentz, em particular o comutador potencialmente problemático $[J^{i-}, J^{j-}]$, precisamos conhecer explicitamente a forma dos geradores. Isso será feito através do conhecimento da expressão covariante para os geradores, que serão decompostos nas coordenadas do cone de luz. Por completeza escreveremos a expressão completa, muito embora vários termos não serão necessários para o que desejamos mostrar.

Proposição 12. *Os geradores de Lorentz da ação de Green-Schwarz (2.19) são dados*

por

$$\begin{aligned}\bar{M}^{mn}(\bar{z}) &= \frac{i}{2} (X^m \bar{\partial} X^n - X^n \bar{\partial} X^m) + (X^m (\theta_L \gamma^n \bar{\partial} \theta_L) - X^n (\theta_L \gamma^m \bar{\partial} \theta_L)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\partial} X^p (\theta_R \gamma_p \gamma^{mn} \theta_R) + \frac{i}{4} (\theta_L \gamma^p \bar{\partial} \theta_L) (\theta_L \gamma_p \gamma^{mn} \theta_L) \\ &\quad + \frac{i}{4} (\theta_R \gamma^p \bar{\partial} \theta_R) (\theta_R \gamma_p \gamma^{mn} \theta_R) + \frac{i}{2} (\theta_L \gamma^p \bar{\partial} \theta_L) (\theta_R \gamma_p \gamma^{mn} \theta_R), \\ M^{mn}(z) &= \frac{i}{2} (X^m \partial X^n - X^n \partial X^m) + (X^m (\theta_R \gamma^n \partial \theta_R) - X^n (\theta_R \gamma^m \partial \theta_R)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial X^p (\theta_L \gamma_p \gamma^{mn} \theta_L) + \frac{i}{4} (\theta_L \gamma^p \partial \theta_L) (\theta_L \gamma_p \gamma^{mn} \theta_L) \\ &\quad + \frac{i}{4} (\theta_R \gamma^p \partial \theta_R) (\theta_R \gamma_p \gamma^{mn} \theta_R) + \frac{i}{2} (\theta_R \gamma^p \partial \theta_R) (\theta_L \gamma_p \gamma^{mn} \theta_L).\end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração segue-se da aplicação do método de Noether, onde a variação sob as transformações de Lorentz

$$\delta\theta_{L,R} = \frac{1}{4} \varepsilon_{mn} \gamma^{mn} \theta_{L,R}, \quad \delta X^m = \varepsilon^m_n X^n,$$

é definida por $\delta S = \int d^2z \frac{i}{2\pi} (\partial \varepsilon_{mn} \bar{M}^{mn} + \bar{\partial} \varepsilon_{mn} M^{mn})$. O cálculo é simples mas um pouco tedioso e será omitido. ■

A carga conservada, o verdadeiro gerador, é dada por

$$J^{mn} = \oint \frac{dz}{2\pi i} M^{mn} - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{M}^{mn}$$

Para facilitar as contas consideraremos apenas a corda aberta daqui para a frente, e para não carregar na notação denotaremos S_L^a por S^a .

No gauge do cone de luz os geradores, exceto J^{i-} , são obtidos inserindo nas expressões acima as escolhas relativas a esse gauge. É fácil ver que todos os termos quárticos em θ se anulam. Será conveniente separarmos os geradores em duas partes, uma envolvendo coordenadas fermiônicas, dada por N^{mn} , e o resto,

$$J^{mn} = E^{mn} + N^{mn}$$

onde, lembrando que $\alpha_0^i = \sqrt{2}p^i$,

$$\begin{aligned}E^{mn} &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{i}{2} (X^m \partial X^n - X^n \partial X^m) - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \frac{i}{2} (X^m \bar{\partial} X^n - X^n \bar{\partial} X^m) \\ &= x^m p^n - x^n p^m - \frac{i}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} (\alpha_{-p}^m \alpha_p^n - \alpha_{-p}^n \alpha_p^m)\end{aligned}$$

e, desprezando termos proporcionais às equações de movimento,

$$N^{+n} = 0$$

$$N^{ij} = -\frac{i}{4} \sum_m S_{-m}^a \sigma_{ab}^{ij} S_m^b$$

Note que $N^{i-} = 0$, se usarmos somente as densidades da corrente de Lorentz dadas acima. Porém esse não pode ser o resultado correto, pois devemos considerar que a transformação kappa (2.94) atua efetivamente como se fosse um gerador N^{i-} . Além disso devemos nos lembrar que ∂X^- é dado pela equação (2.43).

Proposição 13. *O gerador N^{i-} da transformação de Lorentz é exclusivamente devido à contribuição da transformação kappa (2.94) e é dado por*

$$N^{i-} = \frac{1}{8} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} S^a \sigma_{ab}^{ji} S^b = -\frac{i}{4\sqrt{2}p^+} \sum_{m,n} S_{-n-m}^a \sigma_{ab}^{ij} S_m^b \alpha_n^j. \quad (2.98)$$

Demonstração. Podemos facilmente verificar que o gerador (2.98) é responsável pela correspondente variação na transformação (2.97). Para vermos isso usamos o OPE (2.48)

$$\begin{aligned} \delta S^c(z) &= \frac{\varepsilon_{i-}}{8} \oint \frac{dy}{2\pi i} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} : S^a(y) \sigma_{ab}^{ji} S^b(y) : S^c \\ &= \frac{\varepsilon_{i-}}{8} \oint \frac{dy}{2\pi i} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \left(\frac{S^a(y) \sigma_{ac}^{ji} - \sigma_{cb}^{ji} S^b(y)}{y-z} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon_{i-}}{4} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{cb}^{ji} S^b(z) \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^j}{\partial X^+} \sigma_{ca}^j \sigma_{ab}^i S^b(z) + \frac{1}{2} \varepsilon_{i-} \frac{\partial X^i}{\partial X^+} S^c(z) \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade (A.2) e $\sigma_{ab}^{ij} = -\sigma_{ba}^{ij}$. Para encontrarmos o gerador em termos dos osciladores basta substituir as expressões para S^a e ∂X^i pelas definições (2.52) e (2.53). ■

Agora estamos em condições de calcular o comutador $[J^{i-}, J^{j-}]$, que deveria ser zero se a invariância de Lorentz fosse preservada no gauge do cone de luz. Porém, a modificação de J^{i-} devido à transformação kappa impede que assim seja, a menos que a dimensão do espaço-tempo seja $D = 10$. Muito embora o que foi apresentado até agora seja suficiente para provarmos a seguinte proposição, a demonstração será omitida devido à natureza intrincada e pouco iluminadora dos cálculos[8].

Proposição 14. $[J^{i-}, J^{j-}] = 0$ se e somente se $D = 10$.

Capítulo 3

O Formalismo de Espinores Puros

Como vimos no capítulo anterior, o formalismo de Green-Schwarz apresenta sérias complicações no que diz respeito a quantização da supercorda. Aparentemente não é possível uma quantização covariante. Somos obrigados a introduzir o gauge não-covariante do cone de luz para quantizar a teoria e obter seu espectro. Por ser manifestamente supersimétrico no espaço-tempo, a não-existência de táquions e o igual número de férmions e bósons em cada nível de massa foram resultados triviais que não requereram quaisquer hipóteses adicionais. Porém, apesar de não termos estudado como calcular amplitudes de espalhamento, com muito mais trabalho pode-se mostrar que a quebra da invariância de Lorentz complica muito esses cálculos.

Nesse capítulo estudaremos o formalismo de espinores puros da supercorda. Nele a supersimetria do espaço-tempo é manifesta e a quantização covariante é possível. Por possuir essas características esse formalismo é promissor, e seu estudo se torna indispensável.

3.1 Abordagem de Siegel para o formalismo de Green-Schwarz

A dificuldade da quantização covariante no formalismo GS é devido à natureza complicada dos vínculos fermiônicos d_α , que mistura vínculos de primeira e segunda classes de uma maneira difícil de separar covariantemente. Em 1986, Warren Siegel[12] tentou abordar esse problema criando um formalismo baseado em GS no qual o momento conjugado de θ^α fosse uma variável independente. Para isso ele conjecturou a seguinte ação para as

variáveis *left-moving*¹,

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha \right] \quad (3.1)$$

a qual deveria ser adicionado um conjunto apropriado de vínculos de primeira classe. Dentro desse conjunto deveriam estar os vínculos de Virasoro, $T = -\frac{1}{2} \Pi^m \Pi_m - d_\alpha \partial \theta^\alpha$ e os geradores da simetria kappa do formalismo GS, dados por $G^\alpha = \Pi^m (\gamma_m d)^\alpha$, onde

$$\Pi^m = \partial X^m + \frac{1}{2} \theta \gamma^m \partial \theta.$$

Nessa abordagem a variável

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2} \left(\partial X^m + \frac{1}{4} \theta \gamma^m \partial \theta \right) (\gamma_m \theta)_\alpha$$

não precisa ser vinculada para ser zero. Porém, nunca foi encontrado o conjunto completo de vínculos que reproduzisse o espectro da supercorda, apesar do sucesso com a superpartícula. Mas, como veremos na continuação, a idéia de Siegel foi explorada por Berkovits em 2000[14], para dar origem a um outro formalismo da supercorda.

Note que a ação (3.1) é invariante conforme se os pesos conformes das variáveis ∂X^m , $\bar{\partial} X^m$, p_α e θ^β forem (1,0), (0,1), (1,0) e (0,0), respectivamente. Além disso, os OPE's são facilmente calculáveis, e são dados por

$$X^m(w) X^n(z) \rightarrow -\eta^{mn} \ln |w - z|, \quad (3.2)$$

$$p_\alpha(w) \theta^\beta(z) \rightarrow \frac{\delta_\alpha^\beta}{(w - z)} \quad (3.3)$$

$$d_\alpha(w) d_\beta(z) \rightarrow -\frac{1}{w - z} \gamma_{\alpha\beta}^m \Pi_m(z), \quad (3.4)$$

$$d_\alpha(w) \Pi^m(z) \rightarrow \frac{1}{w - z} \gamma_{\alpha\beta}^m \partial \theta^\beta(z). \quad (3.5)$$

O formalismo de espinores puros propõe certos campos fantasmas, que veremos a seguir, cuja contribuição é anular a carga central da teoria. Para verificarmos esse fato precisamos encontrar o tensor energia momento da ação de Siegel (3.1), que será feito a seguir.

Proposição 15. *O tensor energia momento da ação (3.1) é dado por*

$$T(z) = -\frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m - p_\alpha \partial \theta^\alpha$$

e possui carga central $c = -22$.

¹Nesse capítulo nos preocuparemos somente com a supercorda aberta.

Demonstração. O tensor energia momento das variáveis (p_α, θ^β) pode ser encontrado comparando-o com um sistema bc com $\lambda = 1$, através da identificação $b \rightarrow p$ e $c \rightarrow \theta$. Como o tensor energia momento para qualquer sistema bc (qualquer λ) é dado por [6] $T(z) = -\partial bc - \lambda \partial(bc)$, obtemos para $\lambda = 1$ que $T(z) = -p_\alpha \partial \theta^\alpha$, tendo sido observadas as identificações mencionadas acima. A contribuição de cada par (p_α, θ^β) para carga central é dada por $c = -3(2\lambda - 1)^2 + 1 = -2$. Como há 16 pares a carga central fermiônica é $c = -32$.

O tensor para as variáveis X^m é facilmente calculável, e o resultado é dado por $T(z) = -\frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m$, e o cálculo do OPE $T(z)T(w)$ nos fornece uma carga central +10 (cada X^m contribui +1). Então mostramos que a ação (3.1) possui tensor energia momento dado por

$$T(z) = -\frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m - p_\alpha \partial \theta^\alpha,$$

e carga central total igual a $c = 10 - 32 = -22$. ■

3.2 Formalismo de Berkovits para a abordagem de Siegel

A carga central não-nula na tentativa de Siegel de criar um formalismo da supercorda baseado em GS é uma fonte de inconsistência da teoria. A modificação da abordagem de Siegel, descoberta por Berkovits, está baseada na introdução de um conjunto de variáveis fantasmas com carga central $c_g = +22$, de modo a anular a carga central total da teoria. Na continuação veremos como é feita essa modificação, que resultou no formalismo de espinores puros.

A primeira condição sobre a modificação da abordagem de Siegel virá da análise do OPE da parte de spin das correntes de Lorentz, onde a parte de spin quer dizer que somente a contribuição das variáveis fermiônicas será considerada.

A seguinte proposição (e uma hipótese adicional) tornará possível descobrir a contribuição necessária das variáveis fantasma para os geradores de Lorentz.

Proposição 16. *A contribuição de spin para as correntes de Lorentz na abordagem de Siegel é dada por $\Sigma^{mn} = \frac{1}{2} p \gamma^{mn} \theta$, que satisfaz ao seguinte OPE*

$$\Sigma^{mn}(w) \Sigma^{pq}(z) \rightarrow \frac{\eta^{p[n \Sigma^m]q} - \eta^{q[n \Sigma^m]p}}{w - z} + 4 \frac{\eta^{m[q} \eta^{p]n}}{(w - z)^2}. \quad (3.6)$$

Demonstração. De acordo com o procedimento de Noether suporemos que os parâmetros ε_{mn} das transformações de Lorentz dependam das coordenadas, e definiremos a variação da ação por $\delta S = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2} \bar{\partial} \varepsilon_{mn} \Sigma^{mn}$. As variações das variáveis fermiônicas por uma transformação de Lorentz são dadas por (A.8),

$$\delta p_\alpha = \frac{1}{4} \varepsilon_{mn} (\gamma^{mn})_\alpha^\beta p_\beta, \quad \delta \theta^\alpha = \frac{1}{4} \varepsilon_{mn} (\gamma^{mn})^\alpha_\beta \theta^\beta.$$

Portanto, a variação do termo fermiônico da ação é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int \delta(p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{mn} (\gamma^{mn})_\alpha^\beta p_\beta \bar{\partial} \theta^\alpha + \frac{1}{4} p_\alpha \bar{\partial} (\varepsilon_{mn} (\gamma^{mn})^\alpha_\beta \theta^\beta) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{4} \left[-\varepsilon_{mn} p_\beta (\gamma^{mn})^\beta_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \varepsilon_{mn} p_\beta (\gamma^{mn})^\beta_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \bar{\partial} \varepsilon_{mn} p_\alpha (\gamma^{mn})^\alpha_\beta \theta^\beta \right] \end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos que $(\gamma^{mn})_\alpha^\beta = -(\gamma^{mn})^\beta_\alpha$. Portanto a variação da ação (3.1) devido às variáveis fermiônicas é dada por

$$\delta S = \frac{1}{2\pi} \int \left[+\frac{1}{4} \bar{\partial} \varepsilon_{mn} p_\alpha (\gamma^{mn})^\alpha_\beta \theta^\beta \right],$$

e conseqüentemente obtemos que

$$\Sigma^{mn} = \frac{1}{2} (p \gamma^{mn} \theta)$$

é a contribuição de spin à corrente de Lorentz.

Usando o OPE (3.3) vemos que o OPE das correntes é dado por

$$\begin{aligned} \Sigma^{mn}(w) \Sigma^{pq}(z) &= \frac{1}{4} \left(\frac{p_\alpha (\gamma^{mn})^\alpha_\sigma (\gamma^{pq})^\sigma_\kappa \theta^\kappa + (\gamma^{mn})^\kappa_\beta (\gamma^{pq})^\sigma_\kappa \theta^\beta p_\sigma}{w-z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\text{tr}(\gamma^{mn} \gamma^{pq})}{(w-z)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{p(\gamma^{mn} \gamma^{pq} - \gamma^{pq} \gamma^{mn}) \theta}{w-z} + \frac{1}{4} \left(\frac{\text{tr}(\gamma^{mn} \gamma^{pq})}{(w-z)^2} \right), \end{aligned}$$

onde na segunda linha anticomutamos p e θ no segundo termo do coeficiente do pólo simples. Expandindo as matrizes gamma obtemos que o coeficiente do pólo simples é dado por $\frac{1}{16} p A \theta$, onde

$$\begin{aligned} A &= +\gamma^m \gamma^n \gamma^p \gamma^q - \gamma^m \gamma^n \gamma^q \gamma^p - \gamma^n \gamma^m \gamma^p \gamma^q + \gamma^n \gamma^m \gamma^q \gamma^p \\ &\quad - \gamma^p \gamma^q \gamma^m \gamma^n + \gamma^p \gamma^q \gamma^n \gamma^m + \gamma^q \gamma^p \gamma^m \gamma^n - \gamma^q \gamma^p \gamma^n \gamma^m \end{aligned}$$

Anti-comutando as segunda e terceira matrizes gamma de cada termo obtemos,

$$\begin{aligned} A &= +4\eta^{np} \gamma^{mq} - 4\eta^{nq} \gamma^{mp} - 4\eta^{mp} \gamma^{nq} + 4\eta^{mq} \gamma^{np} \\ &\quad - \gamma^m \gamma^p \gamma^n \gamma^q + \gamma^m \gamma^q \gamma^n \gamma^p + \gamma^n \gamma^p \gamma^m \gamma^q - \gamma^n \gamma^q \gamma^m \gamma^p \\ &\quad - \gamma^p \gamma^n \gamma^q \gamma^m + \gamma^p \gamma^m \gamma^q \gamma^n + \gamma^q \gamma^n \gamma^p \gamma^m - \gamma^q \gamma^m \gamma^p \gamma^n \end{aligned}$$

Os termos da segunda linha são cancelados pelos correspondentes termos da terceira linha (escritos logo abaixo) se anticomutarmos as matrizes gamma dos termos da terceira linha de modo a obtermos a mesma ordem dos índices. Por exemplo, o primeiro termo da terceira linha cancelará o primeiro termo da segunda linha se anticomutarmos γ^m de modo que fique na esquerda,

$$-\gamma^p \gamma^n \gamma^q \gamma^m = \gamma^m \gamma^p \gamma^n \gamma^q - 2\eta^{qm} \gamma^p \gamma^n + 2\eta^{nm} \gamma^p \gamma^q - 2\eta^{pm} \gamma^n \gamma^q$$

do mesmo modo cancelamos os outros termos,

$$\begin{aligned} +\gamma^p \gamma^m \gamma^q \gamma^n &= -\gamma^m \gamma^q \gamma^n \gamma^p + 2\eta^{pm} \gamma^q \gamma^n - 2\eta^{pq} \gamma^m \gamma^n + 2\eta^{pn} \gamma^m \gamma^q \\ +\gamma^q \gamma^n \gamma^p \gamma^m &= -\gamma^n \gamma^p \gamma^m \gamma^q + 2\eta^{qn} \gamma^p \gamma^m - 2\eta^{qp} \gamma^n \gamma^m + 2\eta^{qm} \gamma^n \gamma^p \\ -\gamma^q \gamma^m \gamma^p \gamma^n &= +\gamma^n \gamma^q \gamma^m \gamma^p - 2\eta^{pn} \gamma^q \gamma^m + 2\eta^{mn} \gamma^q \gamma^p - 2\eta^{qn} \gamma^m \gamma^p. \end{aligned}$$

Somando tudo obtemos como resultado final

$$A = 8(\eta^{np} \gamma^{mq} - \eta^{nq} \gamma^{mp} + \eta^{mp} \gamma^{nq} - \eta^{mq} \gamma^{np}).$$

Portanto o coeficiente do pólo simples é dado por

$$\frac{8}{16} p(\eta^{np} \gamma^{mq} - \eta^{nq} \gamma^{mp} + \eta^{mp} \gamma^{nq} - \eta^{mq} \gamma^{np}) \theta = \eta^{p[n} M^{m]q} - \eta^{q[n} M^{m]p}.$$

Para calcularmos o pólo duplo basta usar repetidas vezes a identidade²

$$\text{tr} \gamma^m \gamma^n \gamma^p \gamma^q = 16(\eta^{mn} \eta^{pq} - \eta^{mp} \eta^{nq} + \eta^{mq} \eta^{np})$$

para obtermos o coeficiente $4\eta^{m[q} \eta^{p]n}$, o que termina nossa prova. ■

Nessa proposição o resultado mais importante a ser lembrado é que o coeficiente do pólo duplo no OPE dos geradores de Lorentz na abordagem de Siegel é +4. Esse número serve de guia para encontrarmos uma modificação adequada da ação (3.1).

Primeiramente precisamos saber que no formalismo RNS a parte de spin dos geradores de Lorentz, dada por $\Sigma_{RNS}^{mn} = \psi^m \psi^n$, satisfaz ao seguinte OPE [13],

$$\Sigma_{RNS}^{mn}(w) \Sigma_{RNS}^{pq}(z) \rightarrow \frac{\eta^{p[n} \Sigma_{RNS}^{m]q} - \eta^{q[n} \Sigma_{RNS}^{m]p}}{w - z} + \frac{\eta^{m[q} \eta^{p]n}}{(w - z)^2}. \quad (3.7)$$

Berkovits [14] sugeriu então que seria necessário modificar a abordagem de Siegel de maneira tal que as correntes de Lorentz obedecessem o mesmo OPE do formalismo RNS. Ou seja,

²O fator 16 vem de $\text{tr}(I) = 16$, pois as matrizes gamma são 16×16 .

Hipótese 1. Deve existir uma modificação da ação (3.1) tal que as novas correntes de Lorentz M^{mn} satisfaçam o mesmo OPE (3.7) do formalismo RNS.

Veremos na continuação como ele conseguiu fazer isso.

3.2.1 Correntes de Lorentz dos fantasmas

Para que o OPE da corrente de Lorentz no formalismo de espinores puros seja equivalente ao OPE no formalismo RNS (3.7) deveremos modificar a corrente de Lorentz para

$$M^{mn} = \Sigma^{mn} + N^{mn},$$

onde Σ^{mn} é a corrente de Lorentz na abordagem de Siegel e satisfaz (3.6), enquanto que é postulada a existência de correntes N^{mn} (vindas dos fantasmas) satisfazendo

$$N^{mn}(w)N^{pq}(z) \rightarrow \frac{\eta^{p[n}N^{m]q} - \eta^{q[n}N^{m]p}}{w-z} - 3\frac{\eta^{m[q}\eta^{p]n}}{(w-z)^2}, \quad (3.8)$$

$$\Sigma^{mn}(w)N^{pq}(z) \rightarrow \text{regular}. \quad (3.9)$$

Dessa forma as novas correntes M^{mn} terão um OPE equivalente ao do formalismo RNS

$$\begin{aligned} M^{mn}(w)M^{pq}(z) &= (\Sigma^{mn}(w) + N^{mn}(w))(\Sigma^{pq}(z) + N^{pq}(z)) \\ &\rightarrow \Sigma^{mn}(w)\Sigma^{pq}(z) + N^{mn}(w)N^{pq}(z) \\ &\rightarrow \frac{\eta^{p[n}M^{m]q} - \eta^{q[n}M^{m]p}}{w-z} + \frac{\eta^{m[q}\eta^{p]n}}{(w-z)^2}. \end{aligned}$$

Observe que a soma dos coeficientes do pólo duplo resulta em $+4 - 3 = +1$, como deveria ser. A tarefa agora é conseguir modificar a ação (3.1) de maneira consistente, e obter a nova contribuição N^{mn} que satisfaça as relações (3.8) e (3.9). Felizmente isso é possível, e será feito depois de alguns preparativos.

3.2.2 Operador BRST e espinores puros

O próximo elemento do formalismo de espinores puros é a construção de um operador³ BRST, dado por uma combinação linear dos vínculos d_α com coeficientes bosônicos λ^α

$$Q_{BRST} = \oint \lambda^\alpha(z) d_\alpha(z), \quad (3.10)$$

³Para simplificar a notação escrevemos \oint para denotar $\oint \frac{dz}{2\pi i}$.

com

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}^m \theta^\beta \partial X^m - \frac{1}{8} \gamma_{\alpha\beta}^m \gamma_{m\delta\eta} \theta^\beta \theta^\delta \partial \theta^\eta.$$

Porém, a quantização de uma teoria segundo o formalismo BRST, onde os estados físicos são definidos como classes de equivalência na cohomologia do operador Q_{BRST} , requer que a condição $Q_{BRST}^2 = 0$ seja satisfeita, caso contrário a carga BRST não seria invariante por uma variação do vínculo de gauge. No formalismo de espinores puros, a definição (3.10) implica que

$$Q_{BRST}^2 = \frac{1}{2} \{Q_{BRST}, Q_{BRST}\} = -\frac{1}{2} \oint dz (\lambda \gamma^m \lambda) \Pi_m.$$

Portanto os coeficientes bosônicos λ^α devem satisfazer o vínculo

$$\lambda \gamma^m \lambda = 0. \quad (3.11)$$

Definição 7 (Espinor Puro). *Um espinor λ^α em 10 dimensões é dito ser um espinor puro se (3.11) for satisfeita para $m = 0 \dots 9$.*

O formalismo de espinores puros, como o próprio nome já diz, está baseado nos graus de liberdade de um espinor puro λ^α . Para resolvermos a equação (3.11) será conveniente, depois de uma rotação de Wick, quebrar $SO(10)$ em $U(5)$. No apêndice B é mostrado como um espinor de Weyl se decompõe nas representações de $U(5)$,

$$16 \rightarrow (1_{\frac{5}{2}}, 10_{\frac{1}{2}}, \bar{5}_{-\frac{3}{2}}),$$

onde o subscrito denota a carga $U(1)$ de cada representação. Nessa descrição podemos resolver o vínculo (3.11) e encontrar o número de graus de liberdade de λ^α , como veremos na seguinte proposição[5].

Proposição 17. *Um espinor puro λ^α tem 11 graus de liberdade complexos e pode ser escrito em termos de variáveis $U(5)$ da seguinte maneira,*

$$\lambda_+ = e^s, \quad (3.12)$$

$$\lambda_{ab} = u_{ab}, \quad (3.13)$$

$$\lambda^a = -\frac{1}{8} e^{-s} \epsilon^{abcde} u_{bc} u_{de}, \quad (3.14)$$

para s qualquer e u_{ab} antissimétrico.

Demonstração. Note que $\lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \lambda^\beta$ é o primeiro componente (16 dimensões) da expressão⁴ $\lambda^T (C\Gamma^m)\lambda$, onde C é a matriz de conjugação que satisfaz $C\Gamma^m = -\Gamma^{m,T}C$ e é dada por $C = \prod_{i=1}^5 (a_i - a^i)$. Decompondo $SO(10)$ para $U(5)$ obtemos duas equações independentes,

$$\langle \lambda | Ca^i | \lambda \rangle = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (3.15)$$

$$\langle \lambda | C\bar{a}_i | \lambda \rangle = 0. \quad (3.16)$$

Nas expressões acima, somente serão diferentes de zero termos da forma⁵

$$\langle 0 | Ca^i a^j a^k a^l a^m | 0 \rangle = \epsilon^{ijklm}.$$

Portanto, usando a expressão do apêndice B para um espinor de Weyl⁶

$$|\lambda\rangle = \lambda_+ |0\rangle + \frac{1}{2} \lambda_{ij} a^j a^i |0\rangle + \frac{1}{24} \lambda^i \epsilon_{ijklm} a^m a^l a^k a^j |0\rangle$$

obtemos

$$\langle \lambda | Ca^p | \lambda \rangle = \lambda_+ \langle 0 | Ca^p | 0 \rangle + \frac{1}{2} \lambda_{ij} \langle 0 | a_i a_j Ca^p | 0 \rangle + \frac{1}{24} \lambda^i \epsilon_{ijklm} \langle 0 | a_j a_k a_l a_m Ca^p | 0 \rangle. \quad (3.17)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lambda_+ \langle 0 | Ca^p | 0 \rangle &= \frac{1}{24} \lambda_+ \lambda^i \epsilon_{ijklm} \langle 0 | Ca^p a^m a^l a^k a^j | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{24} \lambda_+ \lambda^i \epsilon_{ijklm} \epsilon^{pmkjl} \\ &= \lambda_+ \lambda^p \end{aligned}$$

Analogamente, notando que $a_i C = -Ca^i$ e $a^i C = -Ca_i$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{ij} \langle 0 | a_i a_j Ca^p | 0 \rangle &= \frac{1}{4} \epsilon^{pijkl} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \\ \frac{1}{24} \lambda^i \epsilon_{ijklm} \langle 0 | a_j a_k a_l a_m Ca^p | 0 \rangle &= \lambda_+ \lambda^p. \end{aligned}$$

Portanto, como (3.17) deve ser zero, obtemos $2\lambda_+ \lambda^a + \frac{1}{4} \epsilon^{abcde} \lambda_{bc} \lambda_{de} = 0$ que é facilmente resolvido para λ^a em termos das 11 variáveis independentes $\lambda_+ \equiv e^s$ e $\lambda_{ab} \equiv u_{ab}$,

$$\lambda^a = -\frac{1}{8} e^{-s} \epsilon^{abcde} u_{bc} u_{de}.$$

Ademais, não é difícil mostrar que (3.16) é automaticamente satisfeita com essa parametrização. ■

⁴Usaremos a mesma notação para o espinor com 32 e 16 componentes, porém isso não trará confusão.

⁵Para provar basta calcular $\langle 0 | Ca^1 a^2 a^3 a^4 a^5 | 0 \rangle = 1$ e observar que a expressão é totalmente anti-simétrica na troca dos índices.

⁶Note a ordem dos índices (ij) no termo com λ_{ij} ! Essa definição com a “ordem trocada” serve para deixar os índices na ordem “esperada” na expressão $\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \langle 0 | a^i a^j | 0 \rangle$.

Para descrever os 11 graus de liberdade do espinor puro foi necessário quebrar a simetria da descrição de $SO(10)$ para $U(5)=SU(5)\otimes U(1)$. As variáveis não vinculadas s e u_{ab} (e seus momentos conjugados) serão utilizadas para provar que existe uma maneira de introduzir fantasmas na teoria, que contribuem com uma corrente de Lorentz exatamente da maneira especificada pelo OPE (3.8). Porém esse OPE está escrito em termos do grupo $SO(9,1)$, e os graus de liberdade a nossa disposição estão escritos em termos de $U(5)$. Dessa maneira, trabalhando com essas variáveis poderemos somente construir correntes de Lorentz com simetria $U(5)$.

Para verificar se as correntes de Lorentz assim construídas reproduzem o OPE (3.8) prosseguiremos da seguinte maneira. Vamos quebrar a simetria do OPE (3.8) para $U(5)$ a fim de descobrir os OPE's das correntes de Lorentz $(N, N_b^a, N_{ab}, N^{ab})$. O resultado está escrito na forma do Teorema 3, provado no Apêndice B. Finalmente, verificaremos que é possível construir essas correntes de $U(5)$ em termos das variáveis não-vinculadas que formam o espinor puro λ^α .

Além disso, há mais um requisito a ser obedecido. A variável λ^α deve se transformar como um espinor sob uma transformação de Lorentz, de acordo com (A.8). Se definirmos⁷ que

$$\delta\lambda^\alpha = \frac{1}{2} \left[\oint dz \Lambda_{mn} M^{mn}, \lambda^\alpha \right]$$

e sabendo que os OPE's de λ^α com Σ^{mn} são regulares concluímos que λ^α deve satisfazer,

$$N^{mn}(y)\lambda^\alpha(z) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(\gamma^{mn})^\alpha_\beta \lambda^\beta(z)}{(y-z)}. \quad (3.18)$$

O OPE (3.18) também deverá ser quebrado para $U(5)$ a fim de verificarmos se ele pode ser reproduzido a partir das variáveis que temos a disposição. As contas referentes a essa decomposição são feitas na demonstração do Teorema 4, também no Apêndice B. Se (3.8) ou (3.18) não pudessem ser reproduzidos na descrição de espinores puros esse formalismo não teria justificativa. Porém, veremos na continuação que Berkovits descobriu uma maneira de construir $n, n_{ab}, n^{ab}, n_b^a, \lambda_+, \lambda_{ab}, \lambda^\alpha$ em termos dos fantasmas s, u_{ab} (e seus momentos conjugados) de tal forma que todos os 28 OPE's (descritos em termos de $U(5)$) deduzidos a partir de (3.8) e (3.18) são obedecidos!

⁷Essa definição foi usada para concordar com [14].

3.2.3 A ação dos fantasmas

Nas seções anteriores discutimos alguns aspectos do formalismo de espinores puros. Vimos que esse formalismo foi inspirado na abordagem de Siegel para o problema da quantização covariante da ação de Green-Schwarz da supercorda. Esse novo formalismo modifica a abordagem de Siegel na tentativa de anular a carga central, condição que toda boa teoria quântica deve satisfazer.

A idéia é adicionar variáveis fantasmas de uma maneira que suas contribuições à carga central seja $c_g = +22$. Além disso, as correntes de Lorentz dessas variáveis (N^{mn}) devem obedecer certas condições, expressas por (3.8) e (3.18), de modo que as correntes de Lorentz da teoria ($\Sigma^{mn} + N^{mn}$) obedeam ao mesmo OPE do formalismo RNS. Em seguida vimos que a definição dos estados físicos seria feita em termos de um operador BRST construído a partir de uma combinação linear de d_α , que por sua vez deu origem a condição de espinores puros para os coeficientes λ^α . Por sua vez, a condição de espinores puros é mais facilmente resolvida se o grupo $SO(10)$ for quebrado para $U(5)$, o que resultou em 11 variáveis não-vinculadas s e u_{ab} . A quebra para $U(5)$ exige que saibamos os OPE's (3.8) e (3.18) em termos desse grupo, o que está feito no apêndice B. Essa é a linha de raciocínio. Será possível construir explicitamente um formalismo que satisfaça a essas condições? A resposta é afirmativa, como veremos nos próximos parágrafos.

Uma ação para as variáveis fantasma no formalismo de espinores puros que torna possível modificar com sucesso a abordagem de Siegel foi descoberta por Berkovits, e é dada por

$$S_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\partial t \bar{\partial} s + \frac{1}{2} v^{ab} \bar{\partial} u_{ab} \right) \quad (3.19)$$

onde $t(z)$ e $v^{ab}(z)$ são os momentos conjugados de $s(z)$ e $u_{ab}(z)$. Além disso requeremos que $s(z)$ e $t(z)$ sejam bósons quirais, e portanto devemos impor as equações de movimento $\bar{\partial} s = \bar{\partial} t = 0$, que não podem ser deduzidas da ação. Os OPE's são dados por,

$$t(y)s(z) \rightarrow \ln(y-z) \quad (3.20)$$

$$v^{ab}(y)u_{cd}(z) \rightarrow \frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]}}{y-z} \quad (3.21)$$

Um dos resultados mais importantes na construção do formalismo de espinores puros será resumido no seguinte teorema.

Teorema 1. *Se definirmos as correntes de Lorentz com simetria $U(5)$ da seguinte maneira*

$$n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} u_{ab} v^{ab} + \frac{5}{2} \partial t - \frac{5}{2} \partial s \right) \quad (3.22)$$

$$n_b^a = u_{bc} v^{ac} - \frac{1}{5} \delta_b^a u_{cd} v^{cd} \quad (3.23)$$

$$n^{ab} = -e^s v^{ab} \quad (3.24)$$

$$n_{ab} = e^{-s} \left(2\partial u_{ab} - u_{ab} \partial t - 2u_{ab} \partial s + u_{ac} u_{bd} v^{cd} - \frac{1}{2} u_{ab} u_{cd} v^{cd} \right) \quad (3.25)$$

então seus OPE's entre si e com λ_+ , λ_{ab} e λ^a reproduzem as relações (3.8) e (3.18), se s , t , v^{ab} e u_{ab} satisfizerem os OPE's (3.20) e (3.21).

Demonstração. Demonstraremos que os OPE's dessas correntes de Lorentz satisfazem os resultados listados nos teoremas 3 e 4, e conseqüentemente reproduzem (3.8) e (3.18). Calcularemos explicitamente somente alguns OPE's, pois o resto pode ser calculado facilmente.

Primeiramente verificaremos (B.24),

$$\begin{aligned} n(y) \lambda_{cd}(z) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} u_{ab} v^{ab} + \frac{5}{2} \partial t - \frac{5}{2} \partial s \right) u_{cd}(z) \\ &\rightarrow -\frac{1}{4\sqrt{5}} u_{ab}(y) \left(\frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]}}{y-z} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{\lambda_{cd}(z)}{y-z}. \end{aligned}$$

Em seguida podemos facilmente verificar que (B.32) é satisfeita, pois

$$n^{ab}(y) \lambda_+(z) = -(e^s v^{ab}) e^s \rightarrow \text{regular}$$

e do mesmo modo verificamos (B.33),

$$n^{ab}(y) \lambda_{cd}(z) = -(e^s v^{ab}) u_{cd} \rightarrow -\frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]}}{y-z} \lambda_+.$$

Com um pouco mais de conta reproduzimos (B.11),

$$\begin{aligned} n(y) n(z) &\rightarrow \frac{1}{80} (: u_{ab} v^{cd} :: v^{ab} u_{cd} : + u_{ab} : v^{ab} u_{cd} : v^{cd} + : u_{ab} v^{cd} : v^{ab} u_{cd}) \\ &\quad - \frac{5}{4} (: \partial t \partial s : + : \partial s \partial t :) \end{aligned}$$

as contrações simples se cancelam e restam

$$\begin{aligned} &\rightarrow -\frac{1}{80} \frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]} \delta_a^{[c} \delta_b^{d]}}{(y-z)^2} - \frac{10}{4} \frac{1}{(y-z)^2} \\ &\rightarrow -\frac{3}{(y-z)^2}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Por último verificaremos (B.30),

$$\begin{aligned} n_{ab}(y)\lambda_{cd}(z) &\rightarrow e^{-s} \left(u_{ae}u_{bf} : v^{ef}u_{cd} : -\frac{1}{2}u_{ab}u_{ef} : v^{ef}u_{cd} : \right) \\ &\rightarrow e^{-s} \left(u_{ae}u_{bf} - \frac{1}{2}u_{ab}u_{ef} \right) \frac{\delta_c^{[e}\delta_d^{f]}}{y-z} \\ &\rightarrow e^{-s} (u_{ac}u_{bd} - u_{ad}u_{bc} - u_{ab}u_{cd}) = \epsilon_{abcde}\lambda^e, \end{aligned}$$

onde na última linha usamos a expressão (3.14). A demonstração para os demais casos é análoga e será omitida. \blacksquare

Mostraremos na continuação que a carga central da ação dos fantasmas (3.19) é +22. O tensor energia momento pode ser encontrado usando o prosseguimento padrão⁸, observando que a invariância conforme de (3.19) exige que as variáveis v^{ab} , u_{ab} , ∂s e $\bar{\partial}t$ tenham pesos conformes dados por (1,0), (0,0), (1,0) e (0,1), respectivamente.

Proposição 18. *Se definirmos o tensor energia momento $T_\lambda(z)$ ($e \bar{T}_\lambda(\bar{z})$) de (3.19) por*

$$\delta S_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d^2z [\partial \epsilon T_\lambda(z) + \partial \bar{\epsilon} \bar{T}_\lambda(\bar{z})],$$

onde a variação da ação é devida às transformações conformes

$$\delta v^{ab} = \partial \epsilon v^{ab} + \epsilon \partial v^{ab} + \bar{\epsilon} \bar{\partial} v^{ab} \quad (3.26)$$

$$\delta u_{ab} = \epsilon \partial u_{ab} + \bar{\epsilon} \bar{\partial} u_{ab} \quad (3.27)$$

$$\delta \partial s = \partial \epsilon \partial s + \epsilon \partial^2 s + \partial \bar{\epsilon} \bar{\partial} s + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \partial s \quad (3.28)$$

$$\delta \bar{\partial} t = \epsilon \partial \bar{\partial} t + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \partial t + \bar{\partial} \bar{\epsilon} \bar{\partial} t + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \bar{\partial} t \quad (3.29)$$

e exigirmos que as correntes de Lorentz sejam campos primários então

$$T_\lambda(z) = \frac{1}{2} v^{ab} \partial u_{ab} + \partial t \partial s + \partial^2 s.$$

Demonstração. Primeiro vamos explicar melhor as transformações (3.26) a (3.29). Para usarmos o procedimento de Noether nós supusemos que as variáveis $s(z)$ e $t(z)$ dependem também de \bar{z} . Portanto expandindo $\partial s(z, \bar{z})$ e $\bar{\partial} t(z, \bar{z})$ em série de Taylor obtemos as transformações (3.28) e (3.29). As transformações (3.26) e (3.27) são as transformações conforme⁹ de variáveis com pesos (1,0) e (0,0) respectivamente. Note que

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\partial} t \partial s) &= (\epsilon \partial \bar{\partial} t + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \partial t + \bar{\partial} \bar{\epsilon} \bar{\partial} t + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \bar{\partial} t) \partial s + \bar{\partial} t (\partial \epsilon \partial s + \epsilon \partial^2 s + \partial \bar{\epsilon} \bar{\partial} s + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \partial s) \\ &= \partial(\epsilon \bar{\partial} t \partial s) + \bar{\partial}(\bar{\epsilon} \bar{\partial} t \partial s) + \bar{\partial} \bar{\epsilon} \bar{\partial} t \partial s + \partial \bar{\epsilon} \bar{\partial} s \bar{\partial} t, \end{aligned}$$

⁸A saber, $\delta z = \epsilon(z)$ e $\delta \bar{z} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$.

⁹Um campo conforme ϕ com peso (h, \bar{h}) se transforma como $\delta \phi = h \partial \epsilon \phi + \epsilon \partial \phi + \bar{h} \bar{\partial} \bar{\epsilon} \phi + \bar{\epsilon} \bar{\partial} \phi$.

portanto, a menos de termos de superfície, $T(z) = \partial t \partial s$ é a contribuição das variáveis s, t . Além disso, podemos identificar a parte da ação envolvendo as variáveis v^{ab} e u_{ab} como um sistema $\beta\gamma$ com $\lambda = 1$, através de $\beta \rightarrow -1/2v^{ab}$ e $\gamma \rightarrow u_{ab}$. Como o tensor energia momento do sistema $\beta\gamma$ é dado por $T(z) = \partial\beta\gamma - \lambda\partial(\beta\gamma) = \frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab}$, então

$$T(z) = \frac{1}{2}v^{ab}u_{ab} + \partial t \partial s$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = \bar{\partial} t \bar{\partial} s.$$

Para justificarmos a adição do termo $\partial^2 s$ em $T(z)$ calcularemos o OPE de $T(y)$ com a corrente $n(z)$ do teorema 1. É relativamente fácil ver que

$$T(y)n(z) \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{(y-z)^3} + \frac{n(z)}{(y-z)^2} + \frac{\partial n(z)}{(y-z)}$$

onde o pólo cúbico vem da contração total de

$$\left(\frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab}\right) \left(\frac{1}{4\sqrt{5}}u_{cd}v^{cd}\right) \rightarrow \frac{1}{8\sqrt{5}} \frac{\delta_c^{[a}\delta_d^{b]}\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}}{(y-z)^3} = \frac{\sqrt{5}}{(y-z)^3}.$$

Assim a corrente de Lorentz não seria um campo primário, o que pode ser contornado com a adição de $\partial^2 s$ ao tensor energia momento, pois

$$\partial^2 s(y)n(z) \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} : \partial^2 s(y)\partial t(z) := -\frac{\sqrt{5}}{(y-z)^3}.$$

Não precisamos mostrar que $\partial^2 s$ corrige o OPE das outras correntes de Lorentz, porque todas elas são o resultado da decomposição de $SO(10)$ para $U(5)$, e não seria possível que somente algumas delas fossem campos primários. Portanto concluímos que o tensor energia momento dos fantasmas com as propriedades corretas é dado por

$$T_\lambda(z) = \frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab} + \partial t \partial s + \partial^2 s, \quad (3.30)$$

quod erat demonstrandum. ■

Corolário 3. A carga central do tensor energia momento dos fantasmas (3.30) é $c_g = +22$.

Demonstração. A carga central ($c/2$) é encontrada calculando o pólo de ordem 4 do OPE $T_\lambda(y)T_\lambda(z)$. Podemos ver que as contrações que contribuem nesse cálculo são dadas pela soma de

$$\frac{1}{4} : v^{ab}(y)\partial u_{cd}(z) :: \partial u_{ab}(z)v^{cd}(y) : = \frac{1}{4} \frac{\delta_c^{[a}\delta_d^{b]}\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}}{(y-z)^4} = \frac{10}{(y-z)^4},$$

e

$$: \partial t(y) \partial s(z) :: \partial s(z) \partial t(y) : = \frac{1}{(y-z)^4},$$

onde usamos os OPE's (3.20) e (3.21). Os resultados acima implicam que $c = 22$. ■

Portanto,

Corolário 4. *A carga central do tensor energia momento no formalismo de espinores puros,*

$$T(z) = -\frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m - p_\alpha \partial \theta^\alpha + \frac{1}{2} v^{ab} \partial u_{ab} + \partial t \partial s + \partial^2 s, \quad (3.31)$$

é zero.

Demonstração. Como não há singularidades entre $(X^m, p_\alpha, \theta^\alpha)$ e as variáveis fantasmas, a carga central de (3.31) é a soma das cargas centrais dos fantasmas (+22) e da matéria (-22), e portanto é zero. ■

A ação do formalismo de espinores puros, que pode ser quantizada com a carga BRST (3.10), é também manifestamente supersimétrica, como veremos a seguir.

Proposição 19. *A ação do formalismo de espinores puros (corda aberta)*

$$S = \frac{1}{2\pi} \int dz \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \partial t \bar{\partial} s + \frac{1}{2} v^{ab} u_{ab} \right] \quad (3.32)$$

é invariante pelas seguintes transformações de supersimetria,

$$\delta X^m = \frac{1}{2} (\varepsilon \gamma^m \theta),$$

$$\delta \theta^\alpha = \varepsilon^\alpha,$$

$$\delta p_\beta = -\frac{1}{2} \varepsilon^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \partial X_m + \frac{1}{8} \varepsilon^\alpha \theta^\gamma \partial \theta^\delta \gamma_{\beta\delta}^m \gamma_m \gamma_\alpha$$

$$\delta(\text{fantasmas}) = 0,$$

que por sua vez são geradas por

$$Q_\alpha = - \oint \left(p_\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}^m \theta^\beta \partial X_m + \frac{1}{24} \gamma_{\alpha\beta}^m \gamma_m \gamma_\delta \theta^\beta \theta^\gamma \partial \theta^\delta \right),$$

que obedecem à álgebra de supersimetria

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}^m \oint \partial X_m.$$

Demonstração. A variação da ação é dada por,

$$\delta S = \int dz \left[\frac{1}{4} (\varepsilon \gamma^m \partial \theta) \bar{\partial} X_m + \frac{1}{4} (\varepsilon \gamma^m \bar{\partial} \theta) \partial X_m - \frac{1}{2} (\varepsilon \gamma^m \bar{\partial} \theta) \partial X_m - \frac{1}{8} (\bar{\partial} \theta \gamma^m \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \theta) \right]. \quad (3.33)$$

Integrando por partes o primeiro termo resulta em $-1/4 \int (\varepsilon \gamma^m \bar{\partial} \partial \theta) X_m$, que pode ser integrado por partes novamente para obtermos $+1/4 \int (\varepsilon \gamma^m \bar{\partial} \theta) \partial X_m$. Logo, a soma desse termo com o segundo cancela o terceiro termo em (3.33). Logo, para mostrarmos a invariância da ação é necessário que o termo $\int (\bar{\partial} \theta \gamma^m \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \theta)$ se anule.

Para vermos isso integramos por partes e obtemos,

$$\begin{aligned} \int (\bar{\partial} \theta \gamma^m \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \theta) &= - \int (\theta \gamma^m \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \bar{\partial} \theta) - \int (\theta \gamma^m \bar{\partial} \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \theta) \\ &= - \int (\theta \gamma^m \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \bar{\partial} \theta) + \int (\partial \theta \gamma^m \bar{\partial} \theta) (\varepsilon \gamma_m \theta) + \int (\theta \gamma^m \bar{\partial} \theta) (\varepsilon \gamma_m \partial \theta) \\ &= - \int \theta^\alpha \partial \theta^\beta \varepsilon^\gamma \bar{\partial} \theta^\sigma (\gamma_{\alpha\beta}^m \gamma_{m\gamma\sigma} - \gamma_{\beta\sigma}^m \gamma_{m\gamma\alpha} + \gamma_{\alpha\sigma}^m \gamma_{m\gamma\beta}) \\ &= +2 \int \theta^\alpha \partial \theta^\beta \varepsilon^\gamma \bar{\partial} \theta^\sigma (\gamma_{\beta\sigma}^m \gamma_{m\gamma\alpha}) \\ &= -2 \int (\bar{\partial} \theta \gamma^m \partial \theta) (\varepsilon \gamma_m \theta), \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade (A.11). Portanto mostramos que esse termo se anula. O resto da demonstração requer alguns cálculos simples e será omitido. ■

Para construirmos operadores de vértice precisaremos definir o que entendemos por *número de fantasma* de um estado, o que será feito a seguir.

Definição 8. O número de fantasma n_g de um estado qualquer $\Psi(y)$ é dado por

$$\left[\oint dz J(z), \Psi(y) \right] = n_g \Psi(y),$$

onde a corrente fantasma $J(z)$ é definida por [15]

$$J(z) = \frac{1}{2} u_{ab} v^{ab} + \partial t + 3\partial s. \quad (3.34)$$

Proposição 20. *A corrente fantasma satisfaz aos seguintes OPE's[16],*

$$J(y)\lambda^\alpha(z) \rightarrow \frac{\lambda^\alpha}{y-z} \quad (3.35)$$

$$J(y)J(z) \rightarrow -\frac{4}{(y-z)^2} \quad (3.36)$$

$$J(y)T(z) \rightarrow -\frac{8}{(y-z)^3} + \frac{J(z)}{(y-z)^2} \quad (3.37)$$

$$J(y)N^{mn}(z) \rightarrow \text{regular} \quad (3.38)$$

$$T(y)J(z) \rightarrow \frac{8}{(y-z)^3} + \frac{J(z)}{(y-z)^2} + \frac{\partial J(z)}{y-z}. \quad (3.39)$$

Demonstração. Para mostrarmos (3.35) devemos calcular os OPE's de $J(y)$ com os componentes $U(5)$ de λ^α e verificarmos que os resultados são compatíveis. Por exemplo:

$$\begin{aligned} J(y)\lambda_+(z) &\rightarrow : \partial t(y)e^s(z) : \\ &\rightarrow \frac{\lambda_+}{y-z} \\ J(y)\lambda_{cd} &\rightarrow \frac{1}{2}u_{ab}(y) : v^{ab}(y)u_{cd}(z) : = \frac{1}{2}u_{ab} \frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]}}{y-z} \\ &\rightarrow \frac{\lambda_{cd}}{y-z} \end{aligned}$$

O pólo cúbico de (3.37), por exemplo, vem da soma das seguintes contrações,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} : u_{cd}(y)v^{ab}(z) :: v^{cd}(y)\partial u_{ab}(z) : &\rightarrow -\frac{1}{4} \frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]} \delta_a^{[c} \delta_b^{d]}}{(y-z)^3} \\ &\rightarrow -\frac{10}{(y-z)^3} \\ : \partial t(y)\partial^2 s(z) : &\rightarrow \frac{2}{(y-z)^3} \end{aligned}$$

que nos dá o coeficiente -8 . A prova dos outros OPE's é trivial e não será discutida aqui. ■

Note portanto que de (3.35) concluímos que o número fantasma do espinor λ^α é $+1$. Além disso podemos concluir que $J(z)$ é um escalar de Lorentz (como deveria ser), e que há uma anomalia de $+8$ na transformação da corrente fantasma, que possui peso conforme $h = 1$.

3.3 Ação dos fantasmas, novamente

Se definirmos um ordenamento normal por

$$: A(y)B(z) := \oint \frac{dy}{2\pi i} \frac{: A(y) :: B(z) :}{y-z},$$

onde (a notação de valor esperado significa contração de OPE)

$$: A(y) :: B(z) := A(y)B(z) - \langle A(y)B(z) \rangle,$$

então poderemos provar o seguinte teorema.

Teorema 2. *Se a ação dos fantasmas for escrita como*

$$S_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \omega_\alpha \bar{\partial} \lambda^\alpha \quad (3.40)$$

com os componentes $U(5)$ de ω_α dados por

$$\omega_+ = \partial t e^{-s}, \quad \omega^{ab} = v^{ab}, \quad \omega_\alpha = 0,$$

então as correntes de Lorentz deduzidas de (3.40),

$$N^{mn}(z) =: \frac{1}{2} \omega \gamma^{mn} \lambda :$$

reproduzem as relações (3.25).

Demonstração. A corrente de Lorentz é deduzida da mesma maneira que encontramos a corrente de Lorentz da ação de Siegel, na Proposição 16. Para provarmos a afirmação note que podemos tratar $(\gamma^{mn})_\beta^\alpha \lambda^\beta \equiv (\Psi^{mn})^\alpha$ como um espinor de Weyl. Usando as decomposições dadas no apêndice B encontramos, por exemplo:

$$\begin{aligned} \Psi^+ &= \langle 0 | \Psi \rangle = \frac{i}{\sqrt{5}} \sum_a \langle 0 | \gamma^{(a+5)a} | \lambda \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{5}} \langle 0 | \left(5i - 2i \sum_a b^a b_a \right) | \lambda \rangle \\ &= -\sqrt{5} \langle 0 | \lambda \rangle = -\sqrt{5} \lambda^+ \end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos (B.22). Podemos também calcular Ψ_{ab} :

$$\begin{aligned} \Psi_{ab} &= \langle 0 | b_a b_b | \Psi \rangle = \frac{i}{\sqrt{5}} \sum_c \langle 0 | b_a b_b \gamma^{(c+5)c} | \lambda \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_{ab} \end{aligned}$$

Não precisamos encontrar Ψ_a porque esse componente não vai contribuir. De acordo com o produto escalar definido em (B.35) obtemos,

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{1}{2} : \omega_+ \Psi^+ : + \frac{1}{4} : \omega^{ab} \Psi_{ab} : \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2} : (\partial t(y) e^{-s(y)}) e^{s(z)} : - \frac{1}{4\sqrt{5}} : v^{ab}(y) u_{ab}(z) : \end{aligned} \quad (3.41)$$

O primeiro ordenamento normal requer algumas contas,

$$\begin{aligned} : \partial t(y) e^{-s(y)} e^{s(z)} : &= \oint \frac{dy}{2\pi i} \left[\frac{\partial t(y)}{y-z} (e^{-s(z)} - (y-z) \partial s(z) e^{-s(z)}) e^{s(z)} \right] \\ &\quad - \oint \frac{dy}{2\pi i} \left[\frac{e^{-s(y)}}{y-z} \langle \partial t(y) s(z) \rangle e^{s(z)} \right] \\ &= \partial t(z) + \oint \frac{dy}{2\pi i} \frac{1}{(y-z)^2} (e^{-s(z)} - (y-z) \partial s(z) e^{-s(z)}) e^{s(z)} \\ &= \partial t(z) - \partial s(z). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Além disso é fácil verificarmos a trivialidade do ordenamento normal entre v^{ab} e u_{ab} ,

$$: v^{ab}(y) u_{ab}(z) : = v^{ab}(z) u_{ab}(z). \quad (3.43)$$

Portanto, da relação (3.41) e dos ordenamentos normais (3.42) e (3.43) obtemos o componente $U(1)$ da corrente de Lorentz,

$$N(z) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} u_{ab} v^{ab} + \frac{5}{2} \partial t - \frac{5}{2} \partial s \right),$$

que reproduz a relação (3.22), como queríamos. Da mesma maneira verificamos N^{ab} , usando a definição 12 na página 71,

$$\begin{aligned} N^{ab} &= \frac{1}{4} \omega (\gamma^{ab} + i\gamma^{a(b+5)} + i\gamma^{(a+5)b} - \gamma^{(a+5)(b+5)}) \lambda, \\ &= \frac{1}{4} : \omega_+ (\Psi^{ab})^+ : + \frac{1}{8} : \omega^{cd} (\Psi^{ab})_{cd} : \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando a relação (B.20) obtemos,

$$(\Psi^{ab})^+ = 4 \langle 0 | b^a b^b | \lambda \rangle = 0 \quad (3.45)$$

$$(\Psi^{ab})_{cd} = 4 \langle 0 | b_c b_d b^a b^b | \lambda \rangle = 4 (\delta_d^a \delta_c^b - \delta_c^a \delta_d^b) \lambda^+ \quad (3.46)$$

Substituindo os resultados (3.45) e (3.46) em (3.44) recuperamos a expressão (3.24),

$$N^{ab}(z) = -e^s v^{ab},$$

pois o ordenamento normal é trivial nesse caso. Os outros casos são análogos e serão omitidos. ■

Note que para demonstrarmos o Teorema 2 foi necessário supor que o componente ω_a fosse zero. Esse fato pode ser justificado com as seguintes proposições.

Proposição 21. *A ação (3.40) é invariante por $\delta\omega_\alpha = \Lambda_m(\gamma^m\lambda)_\alpha$, se λ for um espinor puro.*

Demonstração. A variação da ação é dada por

$$\begin{aligned}\delta S_\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z \Lambda_m \gamma_{\alpha\beta}^m \lambda^\beta \bar{\partial} \lambda^\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2z (\bar{\partial} \Lambda_m) (\lambda \gamma^m \lambda) - \frac{1}{2\pi} \int d^2z \Lambda_m \gamma_{\beta\alpha}^m \bar{\partial} \lambda^\beta \lambda^\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2z \Lambda_m \gamma_{\alpha\beta}^m \lambda^\beta \bar{\partial} \lambda^\alpha \\ &= -\delta S_\lambda\end{aligned}$$

onde usamos uma integração por partes, a condição de espinor puro e $\gamma_{\alpha\beta}^m = \gamma_{\beta\alpha}^m$. Portanto $\delta S_\lambda = 0$. ■

Proposição 22. *Sempre é possível escolher um gauge onde $\omega_a = 0$.*

Demonstração. Provaremos que sempre podemos escolher os parâmetros $\Lambda^m(z)$ de modo que $\omega'_\alpha = \omega_\alpha + \delta\omega_\alpha$ seja tal que $\omega'_\alpha = 0$. Do Lema 8 obtemos¹⁰,

$$\delta\omega_\alpha = \tilde{\Lambda}_1(b^1\lambda)_\alpha + \tilde{\Lambda}^1(b_1\lambda)_\alpha + \dots + \tilde{\Lambda}_5(b^5\lambda)_\alpha + \tilde{\Lambda}^5(b_5\lambda)_\alpha$$

mas do Lema 10 temos que $\delta\omega_a = \langle 0 | b_a | \delta\omega \rangle$, e portanto uns poucos cálculos resultam em

$$\delta\omega_a = \tilde{\Lambda}_a \lambda^+ + \lambda_{ab} \tilde{\Lambda}^b. \quad (3.47)$$

Para anularmos os componentes $\omega_a = \bar{5}$ basta escolher $\Lambda^m(z)$ tal que

$$\Lambda^a = -i\Lambda^{(a+5)}, \quad \Lambda^a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_a}{\lambda^+},$$

o que sempre pode ser feito. Note que as escolhas acima resultam em uma simplificação da equação (3.47), pois implicam no anulamento do segundo termo,

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^a + i\Lambda^{(a+5)}) \equiv 0 \\ \tilde{\Lambda}_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^a - i\Lambda^{(a+5)}) = \sqrt{2}\Lambda^a = -\frac{\omega_a}{\lambda^+}.\end{aligned}$$

¹⁰Denotamos os componentes U(5) de Λ^m por $\tilde{\Lambda}^a$ e $\tilde{\Lambda}_a$ para não causar confusão.

Assim obtemos o resultado desejado,

$$\begin{aligned}\omega'_a &= \omega_a + \tilde{\Lambda}_a \lambda^+ \\ &= \omega_a - \omega_a \equiv 0,\end{aligned}$$

o que termina a demonstração. ■

Assim justificamos nossa escolha na hipótese do Teorema 2. As variáveis ω_α são os momentos conjugados dos espinores puros λ^α , e assim como eles, tem somente 11 graus de liberdade (complexos).

Observe também que a corrente de Lorentz é invariante pela transformação $\delta\omega_\alpha$, devido à condição de espinor puro. Além disso, podemos ver explicitamente que o termo $\omega_\alpha \bar{\partial}\lambda^\alpha$ reproduz a ação dos fantasmas (3.19),

$$\begin{aligned}\omega_\alpha \bar{\partial}\lambda^\alpha &= \omega_+ \bar{\partial}\lambda^+ + \frac{1}{2} \omega^{ab} \bar{\partial}\lambda_{ab} \\ &= \partial t \bar{\partial} s + \frac{1}{2} v^{ab} \bar{\partial} u_{ab}.\end{aligned}$$

O OPE entre ω_α e λ^α deduzido da ação (3.40) é dado por

$$\omega_\beta(y) \lambda^\alpha(z) \rightarrow \frac{\delta_\beta^\alpha}{y-z}, \quad (3.48)$$

porém esse OPE não é correto, pois não leva em consideração a condição de espinor puro $(\lambda\gamma^m\lambda) = 0$. Podemos ver isso claramente com o seguinte exemplo. Se usássemos (3.48) para calcular o OPE entre $(\lambda\gamma^m\lambda)$ e ω_β obteríamos,

$$(\lambda\gamma^m\lambda)(y) \omega_\beta(z) \rightarrow \frac{2\lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m}{y-z},$$

o que obviamente está errado. Para calcularmos OPE's entre ω_β e λ^α é necessário usar os componentes $U(5)$.

Corrente fantasma revisitada

A corrente fantasma também pode ser obtida mais facilmente se a ação dos fantasmas for escrita na forma (3.40). Para vermos isso notamos que a ação (3.40) possui uma invariância $U(1)$ global dada por

$$\delta\omega_\alpha = \varepsilon\omega_\alpha, \quad \delta\lambda^\alpha = -\varepsilon\lambda^\alpha.$$

Se usarmos o método de Noether, definindo a corrente U(1) por $\delta S = -\frac{1}{2\pi} \int dz(\bar{\partial}\epsilon)J$, obtemos facilmente a densidade de corrente fantasma:

$$J(z) =: \omega_\alpha \lambda^\alpha : \quad (3.49)$$

Lema 4. *A corrente fantasma (3.49) reproduz a expressão (3.34) se exigirmos que $J(z)$ seja um escalar de Lorentz.*

Demonstração. O produto escalar é dado por

$$J =: (\partial t e^{-s}) e^s : + \frac{1}{2} : v^{ab} u_{ab} :,$$

onde já escrevemos os componentes dos espinores em termos das variáveis fantasmas. Os ordenamentos normais já foram calculados em (3.42) e (3.43), portanto obtemos

$$J = \frac{1}{2} v^{ab} u_{ab} + \partial t - \partial s. \quad (3.50)$$

Porém, é fácil verificarmos que o resultado obtido não é um escalar de Lorentz, a menos que o coeficiente de ∂s seja +3. Para vermos isso calcularemos o OPE de (3.50), modificado para conter o termo $+a\partial s$, com a corrente de Lorentz $N(z)$. Os pólos simples se cancelam, e o resultado é dado por,

$$N(y)J(z) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-5 + \frac{5}{2}(a-1)}{y-z} \right).$$

O anulamento do pólo duplo implica que $a = +3$, como queríamos mostrar. ■

3.4 Operadores de vértice e amplitudes de espalhamento

Para finalizarmos essa pequena introdução ao formalismo de espinores puros vamos descrever a prescrição para calcular amplitudes de espalhamento. A discussão será breve e informativa, pois a verificação das contas nos levaria longe demais. Apenas a prescrição para o nível de árvore será dada.

Para calcularmos amplitudes de espalhamento dos estados da supercorda é preciso construir operadores de vértice, que serão definidos como estados de número fantasma +1 na cohomologia do operador Q . Para o estado sem massa da supercorda aberta o operador de vértice que satisfaz a essa condição é dado por

$$U = \lambda^\alpha A_\alpha(x, \theta) \quad (3.51)$$

onde $A_\alpha(x, \theta)$ é o supercampo espinorial na representação adjunta que descreve a teoria de super Yang-Mills $N=1$ em $D=10$. Nessa descrição a equação de movimento é dada por

$$\gamma_{mnpqr}^{\alpha\beta} (D_\alpha A_\beta + ig A_\alpha A_\beta) = 0, \quad (3.52)$$

e a teoria é invariante pela transformação de gauge

$$\delta A_\alpha = D_\alpha \Lambda + ig [A_\alpha, \Lambda],$$

onde a derivada supersimétrica é dada por

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \frac{1}{2} (\gamma^m \theta^\alpha) \partial_m.$$

Na descrição via espinores puros, a equação de movimento (3.52) é deduzida impondo-se a condição de que o operador de vértice (3.51) esteja na cohomologia de Q , isto é, $QU(x, \theta) = 0$. A invariância de gauge é reproduzida mediante a equivalência BRST entre estados, $U \sim U + Q\Omega$.

É possível mostrar[17] que existe uma escolha de gauge onde

$$\lambda^\alpha A_\alpha(x, \theta) = \frac{1}{2} a_m(x) (\lambda \gamma^m \theta) - \frac{1}{3} (\lambda \gamma^m \theta) (\xi(x) \gamma_m \theta) + \frac{1}{4} \partial_{[m} a_{n]} (\lambda \gamma_p \theta) (\theta \gamma^{pmn} \theta) \dots$$

onde $a_m(x)$ e $\xi^\gamma(x)$ são os campos on-shell de SYM linearizados do glúon e gluíno, respectivamente.

Além disso, como na corda bosônica, o cálculo de amplitudes de espalhamento requer operadores de vértice integrados V , que serão definidos indiretamente pela relação $[Q, V] = \partial U$. Como não precisaremos da forma explícita do operador V para o simples exemplo que desejamos mostrar, vamos omitir a expressão de V em termos do supercampo $A_\alpha(x, \theta)$.

Definição 9. *A amplitude de espalhamento de N -pontos é definida pela seguinte função de correlação,*

$$\mathcal{A} = \left\langle U_1(z_1) U_2(z_2) U_3(z_3) \int dz_4 V(z_4) \dots \int dz_N V_N(z_N) \right\rangle, \quad (3.53)$$

que é diferente de zero somente quando houver três λ 's e cinco θ 's na seguinte combinação

$$\langle (\lambda \gamma^m \theta) (\lambda \gamma^n \theta) (\lambda \gamma^p \theta) (\theta \gamma_{mnp} \theta) \rangle = 1. \quad (3.54)$$

Para ilustrarmos as idéias é bom considerar um exemplo, pois como escreveu Sêneca, "Longum est iter per praecepta; breve et efficax per exempla".

Exemplo: 3 glúons em nível de árvore

Nesse exemplo calcularemos a amplitude de espalhamento de 3 glúons em nível de árvore. Esse é o caso mais simples, pois segundo a equação (3.53) não é necessário qualquer operador na forma integrada. A amplitude é dada por

$$\mathcal{A} = \langle U_1(z_1)U_2(z_2)U_3(z_3) \rangle,$$

onde (e_m é o vetor de polarização)

$$U(z) = \frac{1}{2}e_m(\lambda\gamma^m\theta)e^{ik\cdot X} + \frac{1}{4}k_m e_n(\lambda\gamma_p\theta)(\theta\gamma^{pmn}\theta)e^{ik\cdot X}.$$

Pela definição dada acima, será diferente de zero o termo que contiver cinco θ 's. Portanto temos três possibilidades para a distribuição dos thetas, a saber: (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1).

A primeira possibilidade é dada por

$$\mathcal{A}_1 = e_{1r}e_{2s}k_{3m}e_{3n} \langle (\lambda\gamma^r\theta)(\lambda\gamma^s\theta)(\lambda\gamma_p\theta)(\theta\gamma^{pmn}\theta) \rangle \langle : e^{ik_1\cdot X_1} :: e^{ik_2\cdot X_2} :: e^{ik_3\cdot X_3} : \rangle.$$

A função de correlação das exponenciais é [6]

$$\langle : e^{ik_1\cdot X_1} :: e^{ik_2\cdot X_2} :: e^{ik_3\cdot X_3} : \rangle \propto z_{12}^{k_1\cdot k_2} z_{13}^{k_1\cdot k_3} z_{23}^{k_2\cdot k_3}$$

e nesse caso é trivial, pois como os glúons não tem massa ($k_i^2 = 0$) a conservação de momento implica que $k_i \cdot k_j = 0$. A menos de um fator multiplicativo podemos inferir que,

$$\langle (\lambda\gamma^r\theta)(\lambda\gamma^s\theta)(\lambda\gamma_p\theta)(\theta\gamma^{pmn}\theta) \rangle \propto \eta^{rm}\eta^{sn} - \eta^{rn}\eta^{sm}.$$

O cálculo do coeficiente dessa expressão é extremamente longo para ser feito sem o auxílio de computadores, porém todos os passos são simples, como comentaremos na continuação. Portanto a contribuição de (1,1,3) é dada por

$$\mathcal{A}_1 = (e_1 \cdot k_3)(e_2 \cdot e_3) - (e_2 \cdot k_3)(e_1 \cdot e_3).$$

Analogamente obtemos,

$$\mathcal{A}_2 = -(e_1 \cdot k_2)(e_2 \cdot e_3) + (e_3 \cdot k_2)(e_1 \cdot e_2)$$

$$\mathcal{A}_3 = (e_2 \cdot k_1)(e_1 \cdot e_3) - (e_3 \cdot k_1)(e_1 \cdot e_2).$$

A amplitude final é a soma das três contribuições,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= + (e_1 \cdot e_2) [(e_3 \cdot k_2) - (e_3 \cdot k_1)] - (e_1 \cdot e_3) [(e_2 \cdot k_3) - (e_2 \cdot k_1)] \\ &\quad + (e_2 \cdot e_3) [(e_1 \cdot k_3) - (e_1 \cdot k_2)] \\ &= + 2(e_1 \cdot e_2)(e_3 \cdot k_2) + 2(e_1 \cdot e_3)(e_2 \cdot k_1) + 2(e_2 \cdot e_3)(e_1 \cdot k_3) \end{aligned}$$

onde usamos a conservação de momento $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ e a transversalidade dos glúons $e_i \cdot k_i = 0$. A menos de um fator multiplicativo que não determinamos, esse é o resultado (7.4.30) em [8].

Um comentário sobre o cálculo do fator numérico é pertinente. Em [16] está a prescrição completa para o cálculo que acabamos de fazer, que descreveremos agora. Suponha que $\mathcal{A} = \langle \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma f_{\alpha\beta\gamma} \rangle$ é a expressão obtida depois de integrarmos os modos não-zero em (3.53). Então a amplitude será dada por

$$\mathcal{A} = (T^{-1})^{(\alpha\beta\gamma)[\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5]} \frac{\partial}{\partial\theta^{\delta_1}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\delta_2}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\delta_3}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\delta_4}} \frac{\partial}{\partial\theta^{\delta_5}} f_{\alpha\beta\gamma}(\theta),$$

onde o tensor $(T^{-1})^{(\alpha\beta\gamma)[\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5]}$ é definido pela combinação simétrica sem traço dos índices $(\alpha\beta\gamma)$ e antissimétrica em $[\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5]$, com o primeiro termo dado por

$$(\gamma^m)^{\alpha_1\delta_1} (\gamma^n)^{\alpha_2\delta_2} (\gamma^p)^{\alpha_3\delta_3} (\gamma_{mnp})^{\delta_4\delta_5}.$$

Essa prescrição, mesmo nesse exemplo simples, requer o cálculo de *muitos* traços de matrizes gamma para determinar o coeficiente numérico da amplitude em questão. Essas contas, por serem longas e cansativas, são melhor executadas em computadores.

Capítulo 4

Conclusões

Nessa dissertação nós apresentamos de forma didática as propriedades básicas de dois formalismos da supercorda, o de Green-Schwarz no capítulo 2 e o de espinores puros no capítulo 3. Vimos que o formalismo de Green-Schwarz só pode ser quantizado no gauge do cone de luz, pois a separação covariante dos vínculos de primeira e segunda classe nunca foi feita até os dias de hoje. E comentamos que apesar de possuir supersimetria manifesta no espaço-tempo, sua utilidade é severamente reduzida devido às dificuldades encontradas no cálculo de amplitudes de espalhamento. No final delineamos a demonstração de que a dimensão do espaço-tempo deve ser igual a 10 para que a invariância de Lorentz seja preservada.¹ Com os detalhes apresentados aqui é possível iniciar um estudo mais avançado do formalismo de Green-Schwarz, em particular do cálculo de amplitudes de espalhamento em nível de árvore e 1-loop, com a subsequente compreensão da necessidade de se introduzir termos de contato e operadores não-triviais nos pontos de interação.

Os aspectos básicos do recém criado[14] formalismo de espinores puros foram estudados no capítulo 3. Foi dada bastante ênfase à demonstração que de é possível introduzir fantasmas de modo que a contribuição às correntes de Lorentz seja a desejada. Os OPE's dessas correntes na abordagem de Siegel tornam-se equivalentes aos do formalismo RNS. Além de tornar possível essa equivalência, os fantasmas contribuem com uma carga central exatamente na quantidade exigida para que a teoria total, matéria mais fantasmas, tenha carga central igual a zero. Como seria de se esperar em uma introdução ao formalismo, várias contas que são omitidas nos artigos originais são feitas explicitamente. Desse modo a compreensão das idéias subjacentes é facilitada, pois não é preciso se preocupar com

¹A mesma dimensão 10 é deduzida no formalismo RNS impondo-se a condição que a carga central da teoria seja zero.

os fatos matemáticos não provados. No final desse capítulo um breve exemplo ilustra o processo de cálculo de amplitudes de espalhamento nesse formalismo, cujo resultado concorda com os obtidos pelos formalismos de Green-Schwarz e RNS[8]. O estudo nesse capítulo é um bom início para perseguir objetivos maiores. Um possível estudo mais avançado seria utilizar o formalismo de espinores puros em backgrounds curvos, para compreender melhor o lado da supercorda em $AdS_5 \otimes S^5$ na conjectura AdS/CFT. Os elementos aqui abordados com certeza constituem um bom início nessa longa jornada rumo ao conhecimento das leis fundamentais da natureza.

Apêndice A

Convenções

A.1 Espinores de SO(10)

A métrica que usamos no texto é dada por $\eta_{mn} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1)$. Nas coordenadas do cone de luz,

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^0 \pm X^9),$$

os únicos componentes da métrica diferentes de zero são $\eta_{ii} = +1$ e $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$.

As matrizes de Dirac em 10 dimensões, de dimensão¹ 32×32 , serão denotadas por Γ^m , onde $m = 0, \dots, 9$ no espaço de Minkowski e $m = 1, \dots, 10$ no espaço euclidiano (obtido através de uma rotação de Wick). A álgebra que elas satisfazem, denominada *álgebra de Clifford*, é dada por

$$\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2\eta^{mn}. \quad (\text{A.1})$$

Na representação de Weyl das matrizes gamma, somente os blocos 16×16 fora da diagonal são diferentes de zero,

$$\Gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^m)^{\alpha\beta} \\ (\gamma^m)_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

¹É possível mostrar[8] que em D dimensões um espinor de Dirac possui $2^{D/2}$ componentes complexos, se D for par. Para D ímpar a dimensão é dada por $2^{(D-1)/2}$.

cujas formas explícitas são dadas por²

$$\begin{aligned}
 (\gamma^0)^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & 1_{8 \times 8} \end{pmatrix} & (\gamma^0)_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} -1_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -1_{8 \times 8} \end{pmatrix} \\
 (\gamma^9)^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -1_{8 \times 8} \end{pmatrix} & (\gamma^9)_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 1_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -1_{8 \times 8} \end{pmatrix} \\
 (\gamma^i)^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{aa}^i \\ \sigma_{bb}^i & 0 \end{pmatrix} & (\gamma^i)_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{aa}^i \\ \sigma_{bb}^i & 0 \end{pmatrix} \\
 (\gamma^+)^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (\gamma^+)_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}_{8 \times 8} \end{pmatrix} \\
 (\gamma^-)^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}_{8 \times 8} \end{pmatrix} & (\gamma^-)_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

onde definimos para ambas as quiralidades

$$\gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^9).$$

As matrizes sigma satisfazem $\sigma_{aa}^i = (\sigma_{aa}^i)^T$ e podem ser expressas como o produto direto de matrizes 2x2,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{aa}^1 &= \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon & \sigma_{aa}^2 &= 1 \otimes \tau^1 \otimes \varepsilon \\
 \sigma_{aa}^3 &= 1 \otimes \tau^3 \otimes \varepsilon & \sigma_{aa}^4 &= \tau^1 \otimes \varepsilon \otimes 1 \\
 \sigma_{aa}^5 &= \tau^3 \otimes \varepsilon \otimes 1 & \sigma_{aa}^6 &= \varepsilon \otimes 1 \otimes \tau^1 \\
 \sigma_{aa}^7 &= \varepsilon \otimes 1 \otimes \tau^3 & \sigma_{aa}^8 &= 1 \otimes 1 \otimes 1
 \end{aligned}$$

onde τ^i são as matrizes de Pauli e $\varepsilon = i\tau^2$. Além disso, as seguintes relações são satisfeitas,

$$\sigma_{aa}^i \sigma_{ab}^j + \sigma_{aa}^j \sigma_{ab}^i = 2\delta^{ij} \delta_{ab}, \quad i, j = 1, \dots, 8 \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{aa}^i \sigma_{ab}^j + \sigma_{aa}^j \sigma_{ab}^i = 2\delta^{ij} \delta_{ab} \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{aa}^i \sigma_{ab}^j + \sigma_{ba}^i \sigma_{aa}^j = 2\delta^{ij} \delta_{ab} \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_{ab}^i \sigma_{ac}^i + \sigma_{aa}^i \sigma_{bc}^j = 2\delta^{ij} \delta_{ab} \quad (\text{A.5})$$

A matriz de quiralidade em $D = 8$ dimensões é dada por $\gamma^9 = \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^8$, enquanto que em $D = 10$ temos

$$\Gamma = \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9 = \begin{pmatrix} 1_{16 \times 16} & 0 \\ 0 & -1_{16 \times 16} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

²Agradeço a Dafni Z. Marchioro por ter me fornecido essas convenções.

como pode ser facilmente verificado.

Com essa representação das matrizes gamma, a quiralidade em 10 dimensões fica manifesta, e podemos decompor os espinores de $2^5 = 32$ componentes em dois espinores com quiralidades opostas,

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^\alpha \\ \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Definição 10. O espinor λ^α (λ_α), $\alpha = 1, \dots, 16$ é dito ser um espinor de Weyl (anti-Weyl).

Lema 5. Se $\Gamma\Psi_+ = +\Psi_+$ e $\Gamma\Psi_- = -\Psi_-$ são espinores de quiralidades positiva (ou L) e negativa (ou R) respectivamente, então

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \lambda^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_\alpha \end{pmatrix}.$$

Definição 11. A matriz de conjugação de cargas C é definida por

$$C\Gamma^m C^{-1} = -(\Gamma^m)^T. \quad (\text{A.7})$$

Não é difícil se convencer que $C = \Gamma^0$ e a estrutura de índices é dada por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_\alpha^\beta \\ c^\alpha_\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Os geradores de Lorentz da representação espinorial são dados por $\Gamma^{mn} = \frac{1}{2}[\Gamma^m, \Gamma^n]$,

$$\Gamma^{mn} = \begin{pmatrix} (\gamma^{mn})^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & (\gamma^{mn})_\alpha\beta \end{pmatrix},$$

e a transformação de um espinor é dada por,

$$\delta\Psi = \frac{1}{4}\omega_{mn}\Gamma^{mn}\Psi. \quad (\text{A.8})$$

Portanto podemos ver que os espinores de Weyl e anti-Weyl formam representações separadas do grupo de Lorentz, denotadas por $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ respectivamente.

Lema 6. Os geradores Γ^{mn} satisfazem

$$(\Gamma^{mn})^T C = -C\Gamma^{mn}. \quad (\text{A.9})$$

Demonstração. É só usar a definição 11. ■

Corolário 5. O produto $\Psi^T C \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha - \psi_\alpha \chi^\alpha$ é um escalar de Lorentz.

Demonstração. A prova é imediata,

$$\begin{aligned} \delta(\Psi^T C \chi) &= \frac{1}{4} w_{mn} \left[\Psi^T (\Gamma^{mn})^T C \chi + \Psi^T C \Gamma^{mn} \chi \right] \\ &= \frac{1}{4} w_{mn} \left[-\Psi^T C \Gamma^{mn} \chi + \Psi^T C \Gamma^{mn} \chi \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos (A.9). ■

Note que nesse ponto podemos interpretar a matriz de quiralidade, em analogia com a relatividade, como uma “métrica” dos espinores, e assim definir o abaixamento e levantamento de índices. Porém, como em 10 dimensões a matriz C não é diagonal isso não pode ser feito. Vejamos por quê. Suponhamos que queremos definir o abaixamento do índice do espinor de Weyl λ^α de maneira tal que $\lambda^\alpha \lambda_\alpha$ seja escalar. A maneira de se fazer isso seria considerar o escalar $\Psi_+^T C \Psi_+$, mas note que

$$\Psi_+^T C \Psi_+ = \begin{pmatrix} \lambda^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

e portanto essa definição não funciona em 10 dimensões. Entretanto, em 4 dimensões não há problema, pois a matriz C é diagonal, $C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}$, da onde segue-se as bem-conhecidas relações $\lambda_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \lambda^\beta$ e $\lambda^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \lambda^{\dot{\beta}}$.

Além disso, é possível mostrar[5] que se definirmos um espinor κ_α de maneira tal que $\kappa_\alpha \lambda^\alpha$ seja um escalar, onde λ^α se transforma como $(1/2, 0)$ então κ_α se transforma como $(0, 1/2)$. Concluimos então que a posição do índice α em 10 dimensões é suficiente para distinguir entre as duas diferentes representações do grupo de Lorentz, ao contrário do que acontece em $D = 4$, por exemplo, onde é necessário introduzir índices “com ponto” $\dot{\alpha}$. Pois temos somente duas representações diferentes para quatro possíveis posições dos índices, λ^α e $\lambda_\alpha \sim (1/2, 0)$ e $\lambda^{\dot{\alpha}}$ e $\lambda_{\dot{\alpha}} \sim (0, 1/2)$.

Lema 7. As matrizes γ^m em 10 dimensões satisfazem as seguintes propriedades:

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(m} \gamma^{n)\beta\sigma} = 2\eta^{mn} \delta_\alpha^\sigma \quad (\text{A.10})$$

$$\eta_{mn} \gamma_{\alpha(\beta}^n \gamma_{\sigma\gamma)}^m = 0. \quad (\text{A.11})$$

A.2 Espinores de SO(8)

A decomposição espinorial de SO(10) em SO(8) é dada por

$$\lambda^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda^a \\ \lambda_{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad \lambda_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad a = 1, \dots, 8$$

e vemos claramente que os componentes com índices “a” e “ \dot{a} ” tem quiralidade positiva e negativa, respectivamente. Note que as 8 matrizes 16×16 γ^i são simétricas ($\gamma^{iT} = \gamma^i$), e portanto a matriz de conjugação de cargas C é dada por

$$C = \gamma^9 = \begin{pmatrix} 1_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -1_{8 \times 8} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_{cb} & 0 \\ 0 & c_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$$

pois ela obedece à definição A.7. Conseqüentemente, como C é diagonal podemos definir o abaixamento e levantamento de índices, $\lambda_a = c_{ab}\lambda^b = \delta_{ab}\lambda^b$ e $\lambda_{\dot{a}} = -c_{\dot{a}\dot{b}}\lambda^{\dot{b}} = \delta_{\dot{a}\dot{b}}\lambda^{\dot{b}}$, e vice-versa. Como é a matriz δ_{ab} quem faz esse trabalho, não precisamos nos preocupar com as posições dos índices.

Apêndice B

Decomposição de $SO(10)$ em $SU(5) \otimes U(1)$

O formalismo de espinores puros está intimamente relacionado com a decomposição do grupo $SO(10)$ nos seus subgrupos $SU(5)$ e $U(1)$, para demonstrar a existência das correntes de Lorentz dos fantasmas com as propriedades corretas. Conseqüentemente, é de fundamental importância que saibamos como vetores e espinores de $SO(10)$ são descritos em termos de $SU(5) \otimes U(1)$. O objetivo desse apêndice é mostrar como são feitas as contas que foram omitidas no capítulo 2. As decomposições dos espinores foram retiradas da referência¹[5].

B.1 Vetor

Um vetor de $SO(10)$ tem 10 componentes \tilde{A}^m , que podem ser decompostos nas representações $A^a \equiv 5$ (fundamental) e $A_a \equiv \bar{5}$ (anti-fundamental) de $U(5)$ da seguinte maneira,

$$A^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{A}^a + i\tilde{A}^{a+5} \right), \quad a = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (\text{B.1})$$

$$A_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{A}^a - i\tilde{A}^{a+5} \right). \quad (\text{B.2})$$

Em termos das dimensões das representações, denotamos essa decomposição por $10 = 5 \oplus \bar{5}$.

¹Nessa referência os autores consideram que os espinores de Weyl tem quiralidade positiva, ao contrário da convenção usada por Berkovits. Essa diferença nas definições resultam em pequenos inconvenientes nas checagens dos cálculos, e alguns fatores de -1 podem surgir onde não deveriam.

Lema 8. O produto escalar $\tilde{A}^m \tilde{A}_m$, depois de uma rotação de Wick, é dado em termos das variáveis $U(5)$ por

$$\tilde{A}^m \tilde{A}_m = A^1 A_1 + A_1 A^1 + \dots + A^5 A_5 + A_5 A^5.$$

Demonstração. A prova é simples e será omitida. ■

B.2 Tensor antissimétrico de rank 2

Para estudarmos a decomposição de um tensor antissimétrico de segunda ordem N^{mn} notamos que qualquer tensor de rank 2 pode ser escrito como o produto tensorial de vetores. Como N^{mn} é antissimétrico podemos construí-lo tomando a parte antissimétrica de $10 \otimes 10$ (em termos de $SO(10)$), ou equivalentemente de $(5 \oplus \bar{5}) \otimes (5 \oplus \bar{5})$ (em termos de $U(5)$)

$$\begin{aligned} N^{mn} &\rightarrow (A^a \oplus A_a) \otimes (B^b \oplus B_b) \\ &\rightarrow (N^{ab} \oplus N_b^a \oplus N_{ab} \oplus N) \\ 45 &\rightarrow 10 \oplus 24 \oplus \bar{10} \oplus 1 \end{aligned}$$

onde N é o traço removido de N_b^a , de modo a tornar o próprio N_b^a um tensor sem traço. É por isso que a dimensão de N_b^a é 24, e não 25.

Explicitamente, como sabemos a decomposição de um vetor de $SO(10)$ somos capazes de decompor o tensor antissimétrico N^{mn} nas suas partes $U(5)$. Por exemplo

$$\begin{aligned} n^{ab} &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (A^a + iA^{a+5}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (B^b + iB^{b+5}) \right]_{\text{antiss.}} \\ &= \frac{1}{2} (N^{ab} + iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}) \end{aligned}$$

Os outros casos são tratados de maneira análoga, cujos resultados vamos resumir com as seguintes definições:

Definição 12. A decomposição das correntes de Lorentz N^{mn} de $SO(10)$ em termos das

correntes $(n, n_b^a, n^{ab}, n_{ab})$ de $U(5)$ é dada por,

$$n^{ab} = \frac{1}{2} (N^{ab} + iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}) \quad (B.3)$$

$$n_{ab} = \frac{1}{2} (N^{ab} - iN^{a(b+5)} - iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}) \quad (B.4)$$

$$n_b^a = \frac{1}{2} (N^{ab} - iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} + N^{(a+5)(b+5)}) - i\frac{\delta_b^a}{5} \sum_a N^{(a+5)a} \quad (B.5)$$

$$n = \frac{i}{\sqrt{5}} \sum_a N^{(a+5)a} \quad (B.6)$$

Note que o tensor n_b^a em (B.5) tem traço igual a zero, e que n é construído como o traço do termo entre parênteses na expressão de n_b^a .

Com essa definição podemos agora provar o seguinte teorema, que é de fundamental importância para entendermos como os fantasmas são introduzidos no capítulo 3.

Teorema 3. *Se o OPE das correntes de Lorentz N^{mn} de $SO(10)$, depois de uma rotação de Wick, for dado por*

$$N^{kl}N^{mn} \rightarrow \frac{\delta^{m[l}N^{k]n}(z) - \delta^{n[l}N^{k]m}(z)}{y-z} - 3\frac{\delta^{kn}\delta^{lm} - \delta^{km}\delta^{ln}}{(y-z)^2}, \quad (B.7)$$

então as correntes $(n, n_a^b, n_{ab}, n^{ab})$ de $SU(5) \otimes U(1)$ satisfazem os seguintes OPE's:

$$n_{ab}(y)n^{cd}(z) \rightarrow \frac{-\delta_{[a}^{[c}n_{b]}^d](z) - \frac{2}{\sqrt{5}}\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}n(z)}{y-z} + 3\frac{\delta_a^{[c}\delta_b^{d]}}{(y-z)^2} \quad (B.8)$$

$$n_a^b(y)n_c^d(z) \rightarrow \frac{\delta_c^b n_a^d(z) - \delta_a^d n_c^b(z)}{y-z} - 3\frac{\delta_a^d \delta_c^b - \frac{1}{5}\delta_a^b \delta_c^d}{(y-z)^2} \quad (B.9)$$

$$n(y)n(z) \rightarrow -\frac{3}{(y-z)^2}, \quad (B.10)$$

$$n(y)n_{ab}(z) \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{n_{ab}}{y-z} \quad (B.11)$$

$$n(y)n^{ab}(z) \rightarrow +\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{n^{ab}}{y-z} \quad (B.12)$$

$$n(y)n_b^a(z) \rightarrow \text{regular} \quad (B.13)$$

Demonstração. A demonstração envolve vários cálculos simples envolvendo as correntes dadas na definição 12, porém como é difícil encontrar essas contas em outros lugares elas serão apresentadas em detalhes, na esperança de que isso seja útil para os “marinheiros de

primeira viagem". Primeiro provaremos (B.10). Usando a definição (B.6) obtemos que,

$$\begin{aligned}
 n(y)n(z) &\rightarrow -\frac{1}{5} \sum_{a,b} N^{(a+5)a} N^{(b+5)b} \\
 &= -\frac{1}{5} \left[\sum_{a,b} \frac{\delta^{(b+5)[a} N^{(a+5)]b}(z) - \delta^{b[a} N^{(a+5)](b+5)}(z)}{y-z} - 3 \frac{\delta^{(a+5)b} \delta^{a(b+5)} - \delta^{(a+5)(b+5)} \delta^{ab}}{(y-z)^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{5} \left[0 - 3 \frac{0 - \sum_a \delta^{(a+5)(a+5)} \delta^{aa}}{(y-z)^2} \right] \\
 &= -\frac{3}{(y-z)^2}
 \end{aligned}$$

onde usamos que δ^{ab} é diagonal e que N^{ab} é antissimétrico. A prova de (B.8) requer apenas um pouco de cálculo tedioso, e $n_{ab}(y)n^{cd}(z)$ é dado por

$$\frac{1}{4} (N^{ab} - iN^{a(b+5)} - iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}) (N^{cd} + iN^{c(d+5)} + iN^{(c+5)d} - N^{(c+5)(d+5)}),$$

multiplicando todos os termos obtemos,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \left[+ N^{ab} N^{cd} + iN^{ab} N^{c(d+5)} + iN^{ab} N^{(c+5)d} - N^{ab} N^{(c+5)(d+5)} \right. \\
 &\quad - iN^{a(b+5)} N^{cd} + N^{a(b+5)} N^{c(d+5)} + N^{a(b+5)} N^{(c+5)d} + iN^{a(b+5)} N^{(c+5)(d+5)} \\
 &\quad - iN^{(a+5)b} N^{cd} + N^{(a+5)b} N^{c(d+5)} + N^{(a+5)b} N^{(c+5)d} + iN^{(a+5)b} N^{(c+5)(d+5)} \\
 &\quad \left. - N^{(a+5)(b+5)} N^{cd} - iN^{(a+5)(b+5)} N^{c(d+5)} - iN^{(a+5)(b+5)} N^{(c+5)d} + N^{(a+5)(b+5)} N^{(c+5)(d+5)} \right]
 \end{aligned}$$

Usando (B.7) obtemos para o pólo duplo²,

$$+3 \frac{\delta_a^{[c} \delta_b^{d]}}{(y-z)^2} \tag{B.14}$$

Para o pólo simples mostraremos todos os termos que resultam da aplicação de (B.7). O

²Dos 16 termos somente contribuem para o pólo duplo os termos 1,6,7,8,9 e 10.

coeficiente do pólo simples é dado pelos seguintes termos,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[+ (\delta^{c[b} N^{a]d} - \delta^{d[b} N^{a]c}) + i (\delta^{c[b} N^{a](d+5)} - \delta^{(d+5)[b} N^{a]c}) \right. \\ & + i (\delta^{(c+5)[b} N^{a]d} - \delta^{d[b} N^{a](c+5)}) - (\delta^{(c+5)[b} N^{a](d+5)} - \delta^{(d+5)[b} N^{a](c+5)}) \\ & - i (\delta^{c[(b+5)} N^{a]d} - \delta^{d[(b+5)} N^{a]c}) + (\delta^{c[(b+5)} N^{a](d+5)} - \delta^{(d+5)[(b+5)} N^{a]c}) \\ & + (\delta^{(c+5)[(b+5)} N^{a]d} - \delta^{d[(b+5)} N^{a](c+5)}) + i (\delta^{(c+5)[(b+5)} N^{a](d+5)} - \delta^{(d+5)[(b+5)} N^{a](c+5)}) \\ & - i (\delta^{c[b} N^{(a+5)]d} - \delta^{d[b} N^{(a+5)]c}) + (\delta^{c[b} N^{(a+5)](d+5)} - \delta^{(d+5)[b} N^{(a+5)]c}) \\ & + (\delta^{(c+5)[b} N^{(a+5)]d} - \delta^{d[b} N^{(a+5)](c+5)}) + i (\delta^{(c+5)[b} N^{(a+5)](d+5)} - \delta^{(d+5)[b} N^{(a+5)](c+5)}) \\ & - (\delta^{c[(b+5)} N^{(a+5)]d} - \delta^{d[(b+5)} N^{(a+5)]c}) - i (\delta^{c[(b+5)} N^{(a+5)](d+5)} - \delta^{(d+5)[(b+5)} N^{(a+5)]c}) \\ & - i (\delta^{(c+5)[(b+5)} N^{(a+5)]d} - \delta^{d[(b+5)} N^{(a+5)](c+5)}) \\ & \left. + (\delta^{(c+5)[(b+5)} N^{(a+5)](d+5)} - \delta^{(d+5)[(b+5)} N^{(a+5)](c+5)}) \right] \end{aligned}$$

Considerando que os deltas da forma $\delta^{(a+5)b}$ são zero, uma manipulação cuidadosa resulta em

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \delta^{cb} (N^{ad} + iN^{a(d+5)} - iN^{(a+5)d} + N^{(a+5)(d+5)}) \mp \delta^{cb} \delta^{ad} \frac{n}{\sqrt{5}} \\ & - \frac{1}{2} \delta^{ca} (N^{bd} + iN^{b(d+5)} - iN^{(b+5)d} + N^{(b+5)(d+5)}) \pm \delta^{ca} \delta^{bd} \frac{n}{\sqrt{5}} \\ & - \frac{1}{2} \delta^{db} (N^{ac} + iN^{a(c+5)} - iN^{(a+5)c} + N^{(a+5)(c+5)}) \pm \delta^{db} \delta^{ac} \frac{n}{\sqrt{5}} \\ & + \frac{1}{2} \delta^{da} (N^{bc} + iN^{b(c+5)} - iN^{(b+5)c} + N^{(b+5)(c+5)}) \mp \delta^{da} \delta^{bc} \frac{n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

onde já somamos e subtraímos os termos necessários para escrever o resultado em termos do tensor sem traço n_b^a . Assim obtemos o coeficiente do pólo simples,

$$\begin{aligned} & = \delta_b^c n_a^d - \delta_a^c n_b^d - \delta_b^d n_a^c + \delta_a^d n_b^c + \frac{n}{\sqrt{5}} (\delta_b^c \delta_a^d - \delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^d \delta_a^c + \delta_a^d \delta_b^c) \\ & = -\delta_{[a}^{[c} n_{b]}^d] - \frac{2}{\sqrt{5}} \delta_a^{[c} \delta_b^{d]} n \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Os resultados (B.14) e (B.15) provam que

$$n_{ab} n^{cd} \rightarrow \frac{-\delta_{[a}^{[c} n_{b]}^d] - \frac{2}{\sqrt{5}} \delta_a^{[c} \delta_b^{d]} n}{y-z} + 3 \frac{\delta_a^{[c} \delta_b^{d]}}{(y-z)^2},$$

como queríamos. O OPE $n(y)n_{ab}(z)$ é dado por

$$\frac{i}{2\sqrt{5}} \sum_d (N^{(d+5)d} N^{ab} - iN^{(d+5)d} N^{a(b+5)} - iN^{(d+5)d} N^{(a+5)b} - N^{(d+5)d} N^{(a+5)(b+5)}),$$

e usando (B.7) obtemos os seguintes termos

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i}{2\sqrt{5}} \sum_d (\delta^{a[dN^{(d+5)]b} - \delta^{b[dN^{(d+5)]a}}) + \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_d (\delta^{a[dN^{(d+5)](b+5)} - \delta^{(b+5)[dN^{(d+5)]a}}) \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_d (\delta^{(a+5)[dN^{(d+5)]b} - \delta^{b[dN^{(d+5)](a+5)}}) \\
 & - \frac{i}{2\sqrt{5}} \sum_d (\delta^{(a+5)[dN^{(d+5)](b+5)} - \delta^{(b+5)[dN^{(d+5)](a+5)}).
 \end{aligned}$$

Após algumas manipulações obtemos o coeficiente do pólo simples,

$$\begin{aligned}
 n(y)n_{ab}(z) & \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(N^{ab} - iN^{(a+5)b} - iN^{a(b+5)} - N^{(a+5)(b+5)})}{y - z} \\
 & \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{n_{ab}}{y - z}.
 \end{aligned}$$

É fácil se convencer de que o pólo duplo se anula. Portanto provamos (B.11). A demonstração dos OPE's restantes é completamente análoga e será omitida. ■

Como $U(5) = SU(5) \otimes U(1)$ podemos calcular a carga $U(1)$ de cada representação. Para isso usaremos a seguinte definição,

Definição 13. Definimos a carga $U(1)$, denotada por q_A , de um operador qualquer $A(z)$ por

$$[\oint n(y), A(z)] = \frac{q_A}{\sqrt{5}} A(z). \tag{B.16}$$

Corolário 6. As cargas $U(1)$ das representações $(n, n_b^a, n_{ab}, n^{ab})$ são $(0, 0, -2, 2)$, respectivamente.

Demonstração. De acordo com a definição (B.16), para calcularmos a carga das diferentes representações basta sabermos os coeficientes dos pólos simples dos seus OPE's com $n(y)$. Dos OPE's (B.10), (B.11), (B.12) e (B.13) vemos que as cargas $U(1)$ de $(n, n_b^a, n_{ab}, n^{ab})$ são $(0, 0, -2, 2)$, como queríamos mostrar. ■

B.3 Espinor

Para encontrar a decomposição de um espinor λ^α de $SO(10)$ em componentes de $U(5)$ é preciso primeiro decompor as matrizes gamma³,

$$b_a = \frac{1}{2} (\Gamma^a - i\Gamma^{a+5}), \quad a = 1, \dots, 5 \quad (\text{B.17})$$

$$b^a = \frac{1}{2} (\Gamma^a + i\Gamma^{a+5}). \quad (\text{B.18})$$

Usando a álgebra de Clifford (A.1) obedecida pelas matrizes gamma concluímos que os componentes $U(5)$ em (B.18) satisfazem $\{b_a, b^c\} = \delta_a^c$. Dessa forma vemos facilmente que o anti-comutador é preservado se b_a e b^a pertencerem à representação anti-fundamental e fundamental de $U(5)$, respectivamente. Ou seja, definimos suas transformações por

$$\tilde{b}^a = U^a_c b^c,$$

$$\tilde{b}_a = b_c (U^\dagger)^c_a.$$

Pode-se mostrar[5] que um espinor de Weyl $\lambda^\alpha = |\lambda\rangle_+$ de $SO(10)$ é decomposto em termos de $U(5)$ por

$$\lambda^\alpha \rightarrow (\lambda^+, \lambda_{ab}, \lambda^a)$$

$$16 \rightarrow (1, \bar{10}, 5),$$

e um espinor de anti-Weyl $\omega_\alpha = |\omega\rangle_-$ por

$$\omega_\alpha \rightarrow (\omega_a, \omega^{ab}, \omega_+)$$

$$\bar{16} \rightarrow (\bar{5}, 10, \bar{1}).$$

Explicitamente, essas decomposições são dadas pelos seguintes lemas.

Lema 9. *Um espinor de Weyl (quiral) de $SO(10)$ pode ser escrito em termos de seus componentes de $U(5)$ como*

$$|\lambda\rangle_+ = \lambda^+ |0\rangle + \frac{1}{2} \lambda_{ab} b^b b^a |0\rangle + \frac{1}{24} \lambda^a \epsilon_{abcde} b^e b^d b^c b^b |0\rangle$$

e os componentes são dados por

$$\lambda^+ = \langle 0 | \lambda \rangle, \quad \lambda_{cd} = \langle 0 | b_c b_d | \lambda \rangle,$$

$$\lambda^a = \frac{1}{24} \epsilon^{abcde} \langle 0 | b_b b_c b_d b_e | \lambda \rangle.$$

³Aqui escolhemos uma normalização diferente da utilizada em (B.2).

Lema 10. *Um espinor de anti-Weyl (antiquiral) ω_α é decomposto em termos de componentes $U(5)$ como⁴*

$$|\omega\rangle_- = \omega_a b^a |0\rangle + \frac{1}{2 \cdot 3!} \omega^{ab} \varepsilon_{abcde} b^c b^d b^e |0\rangle + \frac{1}{5!} \omega_+ \varepsilon_{abcde} b^a b^b b^c b^d b^e |0\rangle$$

e os componentes são dados por

$$\omega_+ = \frac{1}{120} \varepsilon^{abcde} \langle 0 | b_e b_d b_c b_b b_a | \omega \rangle,$$

$$\omega^{ab} = \frac{1}{3!} \varepsilon^{abcde} \langle 0 | b_e b_d b_c | \omega \rangle, \quad \omega_a = \langle 0 | b_a | \omega \rangle.$$

Existe[15] outra notação comum quando trabalhamos com espinores. Os 32 componentes complexos são denotados por uma sequência de cinco sinais (+, -), por exemplo $\lambda = |++++\rangle$. A quiralidade é obtida multiplicando-se todos os sinais. Dessa maneira vemos que todas as cinco combinações possíveis com quatro sinais negativos representam o componente λ^a ,

$$\lambda^a = |+----\rangle + 4 \text{ permutações},$$

do mesmo modo

$$\lambda_{ab} = |+++--\rangle + 9 \text{ permutações}.$$

O componente λ_+ é representado por $|++++\rangle$, e assim por diante.

Os seguintes resultados são facilmente provados uma vez dadas as definições acima, e serão usados extensivamente na sequência.

Lema 11. *São válidas as seguintes relações*

$$4b_a b_b = \Gamma^{ab} - i\Gamma^{a(b+5)} - i\Gamma^{(a+5)b} - \Gamma^{(a+5)(b+5)}, \quad a \neq b, \quad (\text{B.19})$$

$$4b^a b^b = \Gamma^{ab} + i\Gamma^{a(b+5)} + i\Gamma^{(a+5)b} - \Gamma^{(a+5)(b+5)}, \quad a \neq b, \quad (\text{B.20})$$

$$2b^a b_b - 2b_b b^a = (\Gamma^{ab} - i\Gamma^{a(b+5)} + i\Gamma^{(a+5)b} + \Gamma^{(a+5)(b+5)}), \quad \forall a, b \quad (\text{B.21})$$

$$\sum_a \Gamma^{(a+5)a} = 5i - 2i \sum_a b^a b_a \quad (\text{B.22})$$

Demonstração. A prova é trivial e não será discutida aqui. ■

⁴Note que a ordem dos índices não foi trocada. Essa definição é boa para que todos os sinais do produto escalar $\omega_\alpha \lambda^\alpha$ sejam positivos. Veja a proposição 23.

Teorema 4. *Se o OPE em termos das variáveis de $SO(10)$ for dado por*

$$N^{mn}(y)\lambda^\alpha(z) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(\gamma^{mn})^\alpha_\beta \lambda^\beta(z)}{(y-z)},$$

então os OPE's em termos das variáveis de $U(5)$ (n, n_b^a, n_{ab}, n^{ab}) e $(\lambda_+, \lambda_{cd}, \lambda^c)$ são dados por

$$n(y)\lambda_+(z) \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\lambda_+(z)}{y-z} \quad (\text{B.23})$$

$$n(y)\lambda_{cd}(z) \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{\lambda_{cd}(z)}{y-z} \quad (\text{B.24})$$

$$n(y)\lambda^c(z) \rightarrow \frac{3}{2\sqrt{5}} \frac{\lambda^c(z)}{y-z} \quad (\text{B.25})$$

$$n_b^a(y)\lambda_+(z) \rightarrow \text{regular} \quad (\text{B.26})$$

$$n_b^a(y)\lambda_{cd}(z) \rightarrow \frac{\delta_d^a \lambda_{cb} - \delta_c^a \lambda_{db}}{(y-z)} - \frac{2}{5} \frac{\delta_b^a \lambda_{cd}}{(y-z)} \quad (\text{B.27})$$

$$n_b^a(y)\lambda^c(z) \rightarrow \frac{1}{5} \delta_b^a \lambda^c - \delta_b^c \lambda^a \quad (\text{B.28})$$

$$n_{ab}(y)\lambda_+(z) \rightarrow \frac{\lambda_{ab}(z)}{y-z} \quad (\text{B.29})$$

$$n_{ab}(y)\lambda_{cd}(z) \rightarrow \epsilon_{abcde} \lambda^e \quad (\text{B.30})$$

$$n_{ab}(y)\lambda^c(z) \rightarrow \text{regular} \quad (\text{B.31})$$

$$n^{ab}(y)\lambda_+(z) \rightarrow \text{regular} \quad (\text{B.32})$$

$$n^{ab}(y)\lambda_{cd}(z) \rightarrow -\frac{\delta_c^{[a} \delta_d^{b]} \lambda_+(z)}{y-z} \quad (\text{B.33})$$

$$n^{ab}(y)\lambda^c(z) \rightarrow -\frac{1}{2} \epsilon^{abcde} \lambda_{de} \quad (\text{B.34})$$

Demonstração. Convém fazer uma observação com respeito a manipulação dos espinores escritos em termos de ket's e bra's multiplicados por matrizes γ^{mn} . Nas contas subsequentes aparecerão termos da forma $(\gamma^{ab})^\alpha_\beta \lambda^\beta$ (que escreveremos como $(\gamma^{ab})^\alpha_\beta |\lambda\rangle$) e esses deverão ser entendidos como advindos de $(\Gamma^{ab})^\alpha_\beta |\lambda\rangle_+$

$$\Gamma^{ab} |\lambda\rangle_+ = \begin{pmatrix} (\gamma^{ab})^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & (\gamma^{ab})_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma^{ab})^\alpha_\beta \lambda^\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essa pequena inconveniência é causada pela notação, pois quando escrevemos λ^α estamos descrevendo um espaço de 16 dimensões diretamente, enquanto que quando escrevemos λ^α em termos de $|\lambda^\alpha\rangle$ estamos descrevendo o sub-espaço 16-dimensional de um espaço

de 32 dimensões. Porém essa pequena confusão não trará qualquer problema, pois ficará claro no contexto a descrição que deve ser usada. Por isso trataremos as identidades do lema 11 como se as matrizes Γ^a fossem γ^a , como poderemos observar no primeiro cálculo a seguir.

Primeiro provaremos (B.29),

$$\begin{aligned}
 n_{ab}(y)\lambda_+(z) &= \frac{1}{2} (N^{ab} - iN^{a(b+5)} - iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}) \langle 0|\lambda \rangle \\
 &= \frac{1}{4} \langle 0| (\gamma^{ab} - i\gamma^{a(b+5)} - i\gamma^{(a+5)b} - \gamma^{(a+5)(b+5)}) |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= \langle 0| b_a b_b |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= \frac{\lambda_{ab}}{(y-z)}.
 \end{aligned}$$

Em seguida mostraremos (B.24),

$$\begin{aligned}
 n(y)\lambda_{cd}(z) &= \frac{i}{\sqrt{5}} \sum_a \langle 0| b_c b_d N^{(a+5)a} |\lambda \rangle \\
 &= \frac{i}{2\sqrt{5}} \sum_a \langle 0| b_c b_d \gamma^{(a+5)a} |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= \frac{i}{2\sqrt{5}} \langle 0| b_c b_d (5i - 2i \sum_a b^a b_a) |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \langle 0| b_c b_d |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{\lambda_{cd}}{(y-z)},
 \end{aligned}$$

e (B.23),

$$\begin{aligned}
 n(y)\lambda_+(z) &= \frac{i}{\sqrt{5}} \sum_a \langle 0| N^{(a+5)a} |\lambda \rangle = \frac{i}{2\sqrt{5}} \sum_a \langle 0| \gamma^{(a+5)a} |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= \frac{i}{2\sqrt{5}} \langle 0| (5i - 2i \sum_a b^a b_a) |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
 &= -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\lambda_+}{(y-z)}
 \end{aligned}$$

O OPE (B.26) é dado por

$$\begin{aligned}
n_b^a(y)\lambda_+(z) &= \frac{1}{2} (N^{ab} - iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} + N^{(a+5)(b+5)}) \langle 0|\lambda \rangle - \frac{\delta_b^a n(y)}{\sqrt{5}} \langle 0|\lambda \rangle \\
&= \frac{1}{4(y-z)} \langle 0| (\gamma^{ab} - i\gamma^{a(b+5)} + i\gamma^{(a+5)b} + \gamma^{(a+5)(b+5)}) |\lambda \rangle + \frac{1}{2} \frac{\delta_b^a \lambda_+}{(y-z)} \\
&= \frac{1}{2(y-z)} \langle 0| (b^a b_b - b_b b^a) |\lambda \rangle + \frac{1}{2} \frac{\delta_b^a \lambda_+}{(y-z)} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\delta_b^a \lambda_+}{(y-z)} + \frac{1}{2} \frac{\delta_b^a \lambda_+}{(y-z)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos o resultado (B.23) e na terceira a relação (B.21). Podemos provar (B.33) facilmente,

$$\begin{aligned}
n^{ab}(y)\lambda_{cd}(z) &= \frac{1}{2} (N^{ab} + iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}) \langle 0| b_c b_d |\lambda \rangle \\
&= \frac{1}{4} \langle 0| b_c b_d (\gamma^{ab} + i\gamma^{a(b+5)} + i\gamma^{(a+5)b} - \gamma^{(a+5)(b+5)}) |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
&= \langle 0| b_c b_d b^a b^b |\lambda \rangle (y-z)^{-1} \\
&= -\frac{\delta_c^a \delta_d^b \lambda_+}{y-z},
\end{aligned}$$

onde na terceira linha usamos a relação (B.20).

Para provarmos (B.27) notamos que podemos ter o caso $a = b$ e portanto teremos de usar a relação (B.21) na segunda linha,

$$\begin{aligned}
n_b^a(y)\lambda_{cd}(z) &= \frac{1}{2} (N^{ab} - iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} + N^{(a+5)(b+5)}) \langle 0| b_c b_d |\lambda \rangle - \frac{\delta_b^a n(y)\lambda_{cd}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{4} \langle 0| b_c b_d (\gamma^{ab} - i\gamma^{a(b+5)} + i\gamma^{(a+5)b} + \gamma^{(a+5)(b+5)}) |\lambda \rangle (y-z)^{-1} + \frac{1}{10} \frac{\delta_b^a \lambda_{cd}}{(y-z)} \\
&= \frac{1}{2} \langle 0| b_c b_d b^a b_b - b_c b_d b_b b^a |\lambda \rangle (y-z)^{-1} + \frac{1}{10} \frac{\delta_b^a \lambda_{cd}}{(y-z)} \\
&= \left(\delta_d^a \lambda_{cb} - \delta_c^a \lambda_{db} - \frac{1}{2} \delta_b^a \lambda_{cd} + \frac{1}{10} \delta_b^a \lambda_{cd} \right) (y-z)^{-1} \\
&= \frac{\delta_d^a \lambda_{cb} - \delta_c^a \lambda_{db}}{(y-z)} - \frac{2}{5} \frac{\delta_b^a \lambda_{cd}}{(y-z)}
\end{aligned}$$

A prova de (B.31) pode ser feita de duas maneiras diferentes. A primeira é notar que não conseguimos formar combinações invariantes por $U(5)$ com dois índices em baixo e um

em cima. A outra maneira é através de cálculo direto,

$$\begin{aligned} n_{ab}(y)\lambda^c(z) &= \frac{1}{4} \frac{1}{4!} \epsilon^{pqrs} \langle 0 | b_p b_q b_r b_s (\gamma^{ab} - i\gamma^{a(b+5)} - i\gamma^{(a+5)b} - \gamma^{(a+5)(b+5)}) | \lambda \rangle \\ &= \frac{1}{4!} \epsilon^{pqrs} \langle 0 | b_p b_q b_r b_s b_a b_b | \lambda \rangle = 0, \end{aligned}$$

pois há 6 operadores de aniquilação e somente 5 índices disponíveis, o que implica que deve haver pelo menos uma repetição, resultando em zero. Os outros OPE's são provados analogamente e serão omitidos da nossa demonstração. ■

Corolário 7. *As cargas $U(1)$ das representações $(\lambda^+, \lambda_{ab}, \lambda^a)$ de um espinor de Weyl são dadas por $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, respectivamente.*

Demonstração. De acordo com a definição B.16, a carga $U(1)$ é dada pelo coeficiente do pólo simples multiplicado por $\sqrt{5}$. Dos OPE's (B.23), (B.24) e (B.25) facilmente obtemos o resultado enunciado. ■

Proposição 23 (Produto Escalar). *O produto escalar de um espinor anti-quiral ω_α e um quiral λ^α é dado por*

$$\omega_\alpha \lambda^\alpha = \omega_+ \lambda^+ + \frac{1}{2} \omega^{ab} \lambda_{ab} + \omega_a \lambda^a \quad (\text{B.35})$$

Demonstração. Note que $\omega_\alpha \lambda^\alpha$ é originário da seguinte expressão.

$$\langle \omega | C | \lambda \rangle = \begin{pmatrix} \omega^\alpha & \omega_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_\alpha^\beta \\ c^\alpha_\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^\beta \\ \lambda_\beta \end{pmatrix} = \omega^\alpha c_\alpha^\beta \lambda_\beta + \omega_\alpha c^\alpha_\beta \lambda^\beta$$

Portanto, se tomarmos $|\lambda\rangle_+$ e $|\omega\rangle_-$ obtemos

$$\omega_\alpha \lambda^\alpha = -\langle \omega | C | \lambda \rangle_+$$

Notando que $\langle 0 | C b^a b^b b^c b^d b^e | 0 \rangle = \epsilon^{abcde}$ é a única contribuição que não se anula, e que $b_a C = -C b^a$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \omega | C | \lambda \rangle_+ &= +\frac{1}{24} \omega_p \lambda^q \epsilon_{qrst} \langle 0 | b_p C b^u b^t b^s b^r | 0 \rangle + \frac{1}{24} \omega^{pq} \epsilon_{pqrst} \lambda_{uv} \langle 0 | b_t b_s b_r C b^v b^u | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{5!} \omega_+ \lambda^+ \epsilon_{abcde} \langle 0 | b_e b_d b_c b_b b_a C | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{24} \omega_p \lambda^q \epsilon_{qrst} \epsilon^{pust} - \frac{1}{24} \omega^{pq} \lambda_{uv} \epsilon_{pqrst} \epsilon^{tsrvu} - \frac{1}{5!} \omega_+ \lambda^+ \epsilon_{abcde} \epsilon^{edcba} \\ &= -\omega_a \lambda^a - \frac{1}{2} \omega^{ab} \lambda_{ab} - \omega_+ \lambda^+ \end{aligned}$$

e conseqüentemente provamos o que queríamos. ■

Scribendi nullus finis...

Bibliografia

- [1] Brink, L., Schwarz, J.H. *Quantum Superspace* Phys. Lett. 100B (1981), 310
- [2] Siegel, W. *Hidden local supersymmetry in the supersymmetric particle action*, Phys. Lett. 128B (1983), 397.
- [3] Dirac, P.A.M. *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ, New York, NY, 1964.
- [4] Green, M.B., Schwarz, J.H. *Covariant Description of Superstrings*, Phys. Lett. B136 (1984), 357
- [5] Grassi, P.A., Policastro, G., Nieuwenhuizen, P. van *An Introduction to the Covariant Quantization of Superstrings*, hep-th/0302147
- [6] Polchinski, J.G. *String Theory. Volume 1: An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, 1998.
- [7] Polchinski, J.G. *String Theory. Volume 2: Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press, 1998.
- [8] Green, M.B., Schwarz, J.H., Witten, E. *Superstring Theory. Volume 1: Introduction* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1987.
- [9] Green, M.B., Schwarz, J.H., Witten, E. *Superstring Theory. Volume 2: Loop Amplitudes, Anomalies & Phenomenology* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1987.
- [10] Euler, L. *De Partitione Numerorum*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 3, (1753), 125-169.

- [11] Gliozzi, F. Scherk, J., Olive, D. *Supersymmetry, supergravity theories, and the dual spinor model*. Nucl. Phys. B122 (1977), 253
- [12] Siegel, W. *Classical Superstrings Mechanics*, Nucl. Phys. B263 (1986) 93.
- [13] Friedan, D., Martinec, E., Shenker, S., *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*, Nucl. Phys B271 (1986) 93
- [14] Berkovits, N., *Super-Poincaré Covariant Quantization of the Superstring*, JHEP 0004 (2000) 018, hep-th/0001035.
- [15] Berkovits, N., *ICTP Lectures on Covariant Quantization of the Superstring* hep-th/0209059
- [16] Berkovits, N., *Multiloop Amplitudes and Vanishing Theorems using the Pure Spinor Formalism for the Superstring*, hep-th/0406055
- [17] Berkovits, N., Vallilo, B.C. *Consistency of Super-Poincaré Covariant Superstring Tree Amplitudes*, JHEP 0007 (2000) 015, hep-th/0004171

