



QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE GAUGE ANÔMALAS

Eletrodinâmica Quântica Escalar Quiral

e

Gravitação Quântica Induzida em Duas Dimensões

Ayrton Zadra

São Paulo, 04/06/90

J.A. Abelayel - Nto.
MCB Abdalla

MCB Abdalla

A.H. Finner
Vice President
M.B.H.

Meeseberry

Mark

*Tese de Doutorado realizada sob a orientação
dos Professores Maria Cristina Batoni Abdalla
e Elcio Abdalla no Instituto de Física Teórica
da UNESP*



São Paulo

1990

Resumo

Usando técnicas operatoriais e funcionais, quantizamos duas teorias de gauge bidimensionais anômalas: a Eletrodinâmica Escalar Quiral, que constitui uma versão bosonizada do modelo de Schwinger quiral; e a (Super)Gravitação Induzida proposta por Polyakov, que surge como teoria efetiva de modelos conformes em geral. Em ambos os casos, a anomalia transforma graus de liberdade de gauge clássicos em campos quânticos não-triviais, modificando e enriquecendo o conjunto dos observáveis da teoria quântica resultante.

Abstract

Applying operator and functional methods, we quantize two anomalous gauge field theories in two dimensions: the so called Chiral Scalar Electrodynamics, which is a bosonized version of the chiral Schwinger model; and the Induced (Super)Gravity proposed by Polyakov, which emerges as an effective theory from conformal models in general. Within both systems, the anomaly turns classical gauge degrees of freedom into non-trivial quantum fields, modifying and improving the set of observables for the arising quantum theory.

Quero agradecer aos Professores Elcio e Cristina Abdalla, pela orientação segura, pela confiança depositada e pela especial amizade que fizeram destes anos de trabalho e convívio um grande prazer. Também agradeço ao Pablo pelo bom humor e pela cumplicidade. Devo também agradecer à FAPESP, pelo apoio financeiro que permitiu uma dedicação integral ao projeto de pesquisa; a todos os amigos do IFT, pelo convívio saudável e estimulante; e, em especial, aos meus pais e família, pela fé e paciência ilimitadas.

Índice

Introdução	7
Capítulo 1 - SIMETRIAS EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	11
(I) Formulação Lagrangeana	11
(II) Formulação Hamiltoniana	19
(II.A) Sistemas Regulares	20
(II.B) Sistemas Singulares	24
(III) Vínculos Externos	38
(III.A) Variações sobre o problema de Lagrange	38
(III.B) Campos Auxiliares Vinculados	41
Capítulo 2 - SIMETRIAS E ANOMALIAS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	45
(I) Técnicas Operatoriais	45
(II) Técnicas Funcionais	53
Capítulo 3 - ELETRODINÂMICA QUÂNTICA ESCALAR QUIRAL EM DUAS DIMENSÕES	67
(I) Modelo de Schwinger Quiral	67
(II) Eletrodinâmica Escalar com Acoplamento Quiral	72
(III) Eletrodinâmica Escalar Quiral	79
(III.A) Vínculo Quiral via Multiplicador de Lagrange	79
(III.B) Versão não-anômala	85
Capítulo 4 - GRAVITAÇÃO QUÂNTICA INDUZIDA EM DUAS DIMENSÕES	89
(I) Análise Clássica da Ação Efetiva	90
(I.A) Equações de Movimento e Simetrias	90
(I.B) No Gauge do Cone-de-Luz	94
(II) Quantização da Ação Gravitacional Induzida	102
(II.A) Funções de Correlação	102
(II.B) Acoplamento com Campos de Matéria	103
(III) Extensão Supersimétrica: Supergravidade Quântica Induzida	107
(IV) Sobre o Interesse da Gravitação Induzida para Outras Teorias	111
Conclusão	115
Apêndice A - CONVENÇÕES	117
Apêndice B - VARIAÇÕES DE FORMA NO TEOREMA DE NOETHER	119
Apêndice C - SIMETRIAS DE NOETHER DA EQUAÇÃO KdV	121
Referências	125

dizemos que uma propriedade é anômala se a dinâmica do sistema não a exhibe no nível quântico, mas apenas classicamente.

Ocorre que, a despeito de um notável avanço nas técnicas formais de detecção e caracterização matemática das anomalias (sobre o que discutimos também no segundo capítulo), ainda não compreendemos completamente a sua origem física. O fato de que anomalias são fenômenos experimentalmente observados nos convence do interesse mais do que acadêmico no estudo desse intrigante problema.

Em virtude da importância das teorias de gauge, é particularmente relevante a análise das simetrias de gauge anômalas. E, por isso, é nesta direção que estão voltados os esforços deste trabalho: estudamos duas expressivas teorias de gauge anômalas (a Eletrodinâmica Escalar Quiral e a Gravitação Quântica Induzida, nos capítulos 3 e 4 respectivamente), procurando detalhar suas propriedades de simetria e os efeitos da quebra da invariância de gauge sobre os observáveis de cada modelo. A idéia de se trabalhar em duas dimensões se deve não só às aplicações em teorias físicas bidimensionais (teorias de cordas, por exemplo), mas principalmente porque, graças à grande 'tecnologia' matemática que dispomos para as teorias nesta dimensão, nos é possível aproximar de uma solução exata para estes modelos, aprender não pouco sobre sua física e traçar, possivelmente, um inspirado roteiro para o estudo de teorias em dimensões superiores.

Capítulo 1

SIMETRIAS EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Desde a hipótese de invariância galileana na mecânica de Newton até as propriedades supersimétricas de modernas teorias quânticas de campos, o conceito de simetria vem desempenhando um papel de crescente importância na criação, desenvolvimento e teste de modelos teóricos na Física. Mesmo certos conceitos básicos como o de *observável* ou o princípio de *reprodutibilidade* das experiências estão ligados à idéia de invariância/simetria.

No caso específico das teorias de campos, o princípio relativístico e a invariância de gauge fundamentam os modelos mais bem sucedidos (como a Relatividade Geral, a Eletrodinâmica ou o Modelo Padrão), assim como todos os demais modelos ainda sob investigação (como as teorias de Grande Unificação em geral).

Este primeiro capítulo pretende ser uma revisão de como as simetrias se manifestam em teorias de campo clássicas, apresentando uma versão geral e sucinta do teorema de Noether (nas formulações lagrangeana e hamiltoniana) e descrevendo técnicas que serão empregadas nos capítulos seguintes.

(I) Formulação Lagrangeana

Numa teoria clássica de campos, a dinâmica, que rege a evolução espaço-temporal do sistema, é usualmente descrita por um conjunto de equações de campos que, por herança da terminologia usada em mecânica, chamamos de equações de movimento.

Dado então um conjunto de M campos independentes, simbolizados por $\{\varphi_a(x)$, $a = 1, \dots, M\}$ e definidos sobre um espaço-tempo $(D+1)$ -dimensional de coordenadas genéricas $\{x^\mu$, $\mu = 0, \dots, D\}$, convencionamos

$$x^0 = t = \text{coordenada temporal}$$

$$\{x^i, i = 1, \dots, D\} = \text{coordenadas espaciais}$$

$$\partial_\mu \varphi_a \equiv \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\mu}$$

$$\dot{\varphi}_a \equiv \partial_0 \varphi_a = \text{'velocidade' do campo } \varphi_a .$$

Representamos as equações de movimento pelo conjunto

$$L^k(\varphi) = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, l \quad . \quad (1.1)$$

Elas podem ser, por exemplo, equações diferenciais ou integrais, envolvendo os campos, suas derivadas ou mesmo as coordenadas do espaço-tempo explicitamente. Dentre todas as configurações possíveis $\{\varphi_a(x)\}$ (chamadas de *histórias*), procuramos por aquelas que obedeçam às equações (1.1) (chamadas *configurações físicas*¹⁾ ou *trajetórias*), dadas as condições iniciais e de contorno necessárias.

Em geral, as equações de movimento não têm uma forma única. De fato podemos trocar o conjunto (1.1) por outro $\{\tilde{L}^k(\varphi) = 0, k = 1, \dots, \tilde{l}\}$ e mesmo introduzir novos campos (por exemplo, adicionar campos auxiliares ou descrever os campos originais $\{\varphi_a\}$ em termos de outros campos $\{\chi_b\}$, i.e. $\varphi_a = \varphi_a(\chi_b)$), desde que para os M campos originais as soluções das equações de movimento sejam as mesmas.

Suponhamos que, entre todas essas descrições equivalentes, exista uma que consista de N campos, $\{\varphi_a(x), a = 1, \dots, N\}$, e N equações de movimento $\{L^a(\varphi) = 0, a = 1, \dots, N\}$ que possam ser obtidas via princípio de mínima ação: isto é, que haja um funcional ação

$$S[\varphi] = \int_V dV \mathcal{L}(\varphi) \quad ; \quad dV \equiv d^{D+1}x, \quad (1.2)$$

que satisfaça

$$\begin{aligned} \delta S[\varphi] &\equiv S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int_V dV \delta\mathcal{L}(\varphi) = \\ &= \int_V dV L^a(\varphi) \delta\varphi_a + (\text{valores no contorno}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

e que por isso seja extremizado pelas configurações que obedeçam $L^a(\varphi) = 0$. Neste caso, a função $\mathcal{L}(\varphi)$ em (1.2) é chamada de densidade lagrangeana ou simplesmente **lagrangeana**, e dizemos que o modelo admite uma formulação lagrangeana^[1]. Assim, o funcional ação (1.2) concentra, de maneira resumida, informações sobre a dinâmica do sistema.

Mas o interesse em encontrarmos uma ação vai além desse seu poder de síntese: classicamente é possível relacionar de modo sistemático (através do teorema de Noether^[2]) propriedades de simetria da ação com certas quantidades conservadas ('constantes do movimento') das trajetórias; além disso, para as teorias quânticas na formulação funcional^[3], a ação é quem desempenha o papel fundamental no lugar das equações de campo.

Para examinarmos a mencionada relação entre simetrias e quantidades conservadas, vamos supor – para simplificar os cálculos mas sem restringir a validade dos resultados – que todos os N campos $\{\varphi_a\}$ sejam bosônicos, que as coordenadas do espaço-tempo sejam comutantes (não-grassmanianas) e que a densidade lagrangeana dependa no máximo de derivadas primeiras nos campos $\{\partial_\mu \varphi_a\}$ – a menos de termos de superfície –, o que representamos por

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L}_o + \partial_\mu K^\mu, \quad (1.4.a)$$

¹⁾ Esta distinção entre configuração 'física' e 'não-física' de campos perde o sentido no nível quântico.

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_o(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) , \quad (1.4.b)$$

onde K^μ é um vetor que depende localmente dos campos e coordenadas.

As equações de movimento são obtidas impondo-se que a ação $S = \int dV \mathcal{L}_K$ seja estacionária. Seja $\{\hat{\varphi}_a\}$ uma solução dessas equações para certas condições de contorno; e seja $\{\hat{\varphi}_a + \delta\hat{\varphi}_a\}$ uma configuração que difira de $\{\hat{\varphi}_a\}$ por um infinitésimo qualquer $\{\delta\varphi_a\}$ que se anule no contorno. Dizer que $\{\hat{\varphi}_a\}$ é o ‘ponto’ estacionário de S significa que, em primeira ordem em $\delta\varphi_a$, vale

$$\begin{aligned} S[\hat{\varphi} + \delta\varphi] - S[\hat{\varphi}] &= 0 \implies \\ \implies \int_V dV \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) \right\} \Big|_{\hat{\varphi}} \delta\varphi_a + \\ + \int_V dV \partial_\mu \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} + \frac{\delta K^\mu}{\delta \varphi_a} \right) \delta\varphi_a \right\} \Big|_{\hat{\varphi}} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Usando o teorema de Stokes e a hipótese de que $\delta\varphi$ se anula no contorno, conclui-se que a segunda integral em (1.5) é nula. Definindo então a *derivada lagrangeana*^[4] em relação ao campo φ_a

$$L^a(\varphi(x), x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) , \quad (1.6)$$

concluimos que

$$\delta S[\hat{\varphi}] = \int_V dV L^a(\hat{\varphi}) \delta\varphi_a = 0 . \quad (1.7)$$

Como as variações $\delta\varphi_a$ são arbitrárias e independentes, é necessário que

$$L^a(\hat{\varphi}) = 0 , \quad a = 1, \dots, N . \quad (1.8)$$

Estas são as N equações de movimento da formulação lagrangeana — chamadas equações de Euler-Lagrange. Note que elas são dadas em termos de derivadas lagrangeanas de $\mathcal{L}_o$, mas não dependem de K^μ : duas lagrangenas que difiram por um divergente $\partial_\mu K^\mu$ gerarão as mesmas equações de movimento –, e neste sentido são equivalentes. Quanto ao funcional ação, se duas ações diferirem por um termo de superfície, então elas serão extremizadas pelas mesmas trajetórias:

$$S'[\varphi] = S[\varphi] + \int_V dV \partial_\mu K^\mu \implies \text{extremo de } S \text{ e' extremo de } S' . \quad (1.9)$$

Este é um bom lugar para definirmos o conceito de **simetria da ação**. Para tanto, dadas as coordenadas e campos originais, $\{x^\mu\}$ e $\{\varphi_a(x)\}$, construímos um novo sistema de coordenadas $\{x^{\mu'}\}$ e campos $\{\varphi'_a(x')\}$ através de uma relação (T) de transformação

$$x^\mu \xrightarrow{T} x^{\mu'} = F^\mu(x) , \quad (1.10.a)$$

$$\varphi_a(x) \xrightarrow{T} \varphi'_a(x') = \Phi_a(\varphi(x); x) . \quad (1.10.b)$$

Podemos então tomar o funcional ação original, $S[\varphi(x)]$, e 'calculá-lo' para as novas coordenadas e campos: $S[\varphi'_a(x')]$. Isto define, através das relações (1.10), um novo funcional $S'[\varphi(x)]$ para as coordenadas e campos originais,

$$S'[\varphi(x)] \equiv S[\Phi(\varphi(x); x)] \quad \left(= S[\varphi'(x')] \right) , \quad (1.11)$$

o qual podemos comparar com a ação original. Se os dois funcionais diferirem por um termo de superfície, isto é, se existir um vetor local Λ^μ tal que

$$S'[\varphi(x)] = S[\varphi(x)] + \int_V dV \partial_\mu \Lambda^\mu , \quad (1.12)$$

então diremos que as relações (1.10) definem uma *transformação de simetria da ação* original. A condição de simetria (1.12) é chamada de condição de *quase-invariância* para a ação. Esta definição é conveniente por pelo menos dois bons motivos:

O primeiro diz respeito às equações de movimento: usando a propriedade (1.9), a definição (1.11) e a condição (1.12), deduz-se que uma configuração $\{\varphi'_a(x')\}$, obtida por uma transformação de simetria a partir de uma trajetória $\{\varphi_a(x)\}$, também deve satisfazer as equações de movimento (embora, possivelmente, com outras condições de contorno). Em outras palavras, as transformações de simetria mapeiam trajetórias em trajetórias; dizemos, por isso, que são também simetrias das equações de movimento¹⁾.

O segundo motivo é que esta definição conduz a uma versão sucinta do teorema de Noether. Para tanto, consideremos uma transformação contínua de coordenadas e campos que seja obtida integrando-se uma seqüência de transformações infinitesimais a partir da transformação identidade (quer dizer, das coordenadas e campos originais). Tomemos um elemento dessa seqüência infinitesimal:

$$x^\mu \xrightarrow{T} x'^\mu = x^\mu + f^\mu(x) , \quad (1.13.a)$$

$$\varphi_a(x) \xrightarrow{T} \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \chi_a(x) . \quad (1.13.b)$$

onde $f^\mu(x)$ e $\chi_a(x)$ são infinitésimos. Com é mostrado e discutido no Apêndice B, a verificação da quase-invariância da ação depende essencialmente da *variação de forma* dos campos, definida por

$$\delta\varphi_a \equiv \chi_a - f^\mu \partial_\mu \varphi_a . \quad (1.14)$$

¹⁾ Uma simetria das equações de movimento transforma, por definição, soluções em soluções. Em geral, as equações de movimento possuem mais simetrias que a ação, devido às várias alternativas possíveis de como representar o conjunto de equações, como discutido no início do capítulo.

Encontramos

$$S'[\varphi(x)] - S[\varphi(x)] = \delta S[\varphi(x)] = \int_V dV \left\{ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a + f^\mu \mathcal{L}_o \right) + L^a \delta \varphi_a \right\} . \quad (1.15)$$

Comparando (1.15) com (1.12), conclui-se que, para que (1.13)/(1.14) seja uma transformação de simetria, é suficiente que haja um vetor local J^μ tal que

$$L^a \delta \varphi_a = \partial_\mu J^\mu . \quad (1.16)$$

Esta condição local, que implica na quase-invariância da ação, deve ser satisfeita por *todas* as configurações (i.e., (1.16) deve ser uma identidade funcional). Neste caso, o vetor J^μ encontrado (que, em geral, é um funcional dos campos, coordenadas e dos parâmetros da transformação infinitesimal) é chamado de **corrente de Noether**. Uma vez então encontrado tal vetor, podemos ‘calculá-lo’ para alguma trajetória $\{\hat{\varphi}_a\}$, que satisfaça as equações de movimento $\{L^a(\hat{\varphi}) = 0\}$; e assim, como segue imediatamente de (1.16), obteremos

$$\partial_\mu J^\mu(\hat{\varphi}) = 0 \quad , \quad \text{se } L^a(\hat{\varphi}) = 0 . \quad (1.17)$$

O resultado acima é usualmente lido como: “a corrente de Noether é conservada para as soluções das equações de movimento”. De fato, toda esta argumentação, desde (1.13) até (1.17), compõe o conteúdo do teorema de Noether, segundo o qual, para toda transformação de simetria (quase-invariância) contínua da ação, corresponde uma corrente que é conservada para as soluções das equações de campo.

Finalizemos a exposição desta versão do teorema de Noether com alguns comentários:

(i) Vimos que, para as transformações contínuas, a condição de simetria pode ser sintetizada pela condição de existência (1.16). Se definirmos

$$\delta \mathcal{L}_o = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\mu \delta \varphi_a , \quad (1.18)$$

que nada mais é do que a variação de forma da lagrangeana $\mathcal{L}_o$ induzida pela variação de forma $\{\varphi_a\}$ dos campos, então (1.16) poderá ser substituída pela condição de que haja um vetor Ω^μ tal que

$$\delta \mathcal{L}_o = \partial_\mu \Omega^\mu . \quad (1.19.a)$$

A equivalência entre as condições (1.16) e (1.19) é facilmente verificada usando-se a definição (1.6) e identificando-se

$$\Omega^\mu = J^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a . \quad (1.19.b)$$

A condição (1.19.a) é a utilizada, por exemplo, nas referências [2], [5] e [6].

(ii) Quando o estudo das transformações contínuas é reduzido a uma análise infinitesimal, é preciso *garantir* que as transformações finitas possam ser reconstruídas a partir de uma integração bem definida das transformações infinitesimais. E impôr esta integrabilidade implica na seguinte restrição algébrica (chamada de **condição de integrabilidade** de Sophus-Lie) sobre as transformações infinitesimais

$$[\delta_1, \delta_2]\varphi_a \equiv \delta_1(\delta_2\varphi_a) - \delta_2(\delta_1\varphi_a) = \delta_3\varphi_a, \quad (1.20)$$

onde $\delta_i\varphi_a$, $i = 1, 2, 3$, satisfazem (1.16). Esta restrição significa que se realizarmos duas transformações infinitesimais de simetria em sequência mas em ordem invertida, as duas configurações finais vão diferir no máximo por alguma outra transformação de simetria — o que então vai nos permitir construir transformações finitas sem ambigüidades.

Na verdade a condição (1.20) tem por trás algo de mais fundamental, ligado ao próprio conceito de simetria: como vimos em (1.12), as transformações de simetria agem sobre a ação adicionando apenas um termo de superfície; e já que o conjunto das ações que diferem por tais termos formam uma classe de equivalência, conclui-se que as relações de simetria são relações de equivalência. Em especial, as propriedades das relações de equivalência,

$$S \equiv S$$

$$S_1 \equiv S_2 \iff S_2 \equiv S_1$$

$$(S_1 \equiv S_2) + (S_2 \equiv S_3) \implies S_1 \equiv S_3$$

se traduzem naturalmente em propriedades de grupos para as transformações de simetria

$$\exists T = I = \text{identidade}$$

$$\exists T^{-1} \text{ tal que } TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

$$\exists T_3 \text{ tal que } T_1T_2 = T_3$$

$$T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$$

e essa estrutura de grupo (o grupo de simetria) implica, por sua vez, na estrutura de álgebra (1.20) das transformações infinitesimais.

Se estivermos interessados apenas nas configurações que satisfaçam as equações de movimento, poderemos relaxar a condição (1.20) para

$$[\delta_1, \delta_2]\varphi_a = \delta_3\varphi_a + w_a(\varphi) \quad (1.21)$$

onde $w_a(\varphi)$ é um funcional que se anule quando $L^a(\varphi) = 0$. Neste caso dizemos que há somente uma simetria para as equações de movimento (dita também simetria “on-shell”), ou que o modelo não é explicitamente invariante.

(iii) As transformações infinitesimais (1.13)/(1.14) são geralmente expressas em termos de parâmetros infinitesimais (como $f^\mu(x)$ em (1.13.a)). Seja $\epsilon(x)$ um desses parâmetros, que a princípio é uma função das coordenadas e campos. Eles se dividem em duas categorias quanto a esta dependência funcional:

– quando $\epsilon(x)$ é uma função arbitrária¹⁾ das coordenadas, com valores realmente independentes para pontos distintos do espaço-tempo, dizemos que $\epsilon(x)$ é um parâmetro local, e que se trata de uma **transformação de simetria local**;

– se $\epsilon(x)$ sofre alguma restrição (como ter que satisfazer uma equação diferencial, por exemplo, $\partial_\mu \epsilon(x) = 0$) que acabe correlacionando valores de $\epsilon(x)$ em pontos distintos do espaço-tempo, teremos uma **transformação de simetria rígida**²⁾.

No caso das simetrias locais, pode-se mostrar^{[7],[9]} que a própria corrente de Noether (e não apenas seu divergente) se anula para as trajetórias. Por isso o teorema de Noether é às vezes apresentado em duas partes^[7], uma para simetrias locais e outra para simetrias rígidas. Para uso futuro neste trabalho, tal separação merecerá destaque especial na formulação hamiltoniana; na formulação lagrangeana, a versão aqui apresentada para o teorema de Noether é suficientemente geral e atraentemente compacta.

(iv) Outra classificação interessante é feita^[6] considerando-se a variação de forma (1.18) das lagrangeanas. Quando a lagrangeana é invariante de forma, $\delta \mathcal{L}_o = 0$, diz-se que se trata de uma *simetria interna*. Neste caso, como mostra (1.19), podemos tomar $\Omega^\mu = 0$ e $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a$. E quando $\delta \mathcal{L}_o \neq 0$ (e portanto $\Omega^\mu \neq 0$), dizemos que há uma *simetria do espaço-tempo*.

Esta terminologia é herdada do estudo da invariância (em lugar da quase-invariância) da ação: usando-se a definição (1.18), podemos reescrever a igualdade (1.15) como

$$\delta S = \int_V dV \{ \delta \mathcal{L}_o + \partial_\mu (f^\mu \mathcal{L}_o) \} . \quad (1.22)$$

Se quisermos que a ação seja invariante ($\delta S = 0$) para *qualquer* volume de integração, é necessário que

$$\delta \mathcal{L}_o = -\partial_\mu (f^\mu \mathcal{L}_o) ,$$

¹⁾ Normalmente exige-se que seja diferenciável.

²⁾ Quando ϵ é constante ($\partial_\mu \epsilon = 0$), chamamos de simetria global.

e assim, lembrando que f^μ representa as transformações nas coordenadas, ficará clara a associação

$$\text{há transformações no espaço - tempo : } f^\mu \neq 0 \iff \delta \mathcal{L}_o = 0 ,$$

$$\text{só há transformações internas dos campos : } f^\mu = 0 \iff \delta \mathcal{L}_o = 0 .$$

(v) Quanto à unicidade da corrente de Noether, há dois aspectos a considerar.

Primeiro, a condição de existência (1.16) determina apenas o divergente da corrente; isto implica que, dado um J^μ que satisfaça (1.16), podemos sempre adicionar o divergente de um tensor anti-simétrico, $\partial_\nu \chi^{\mu\nu}$. pois

$$\partial_\mu J^\mu \equiv \partial_\mu (J^\mu + \partial_\nu \chi^{\mu\nu}) , \quad \text{se } \chi^{\mu\nu} = -\chi^{\nu\mu} . \quad (1.23)$$

Chamamos $\partial_\nu \chi^{\mu\nu}$ de *superpotencial*. Mas antes que um problema, esta indefinição da corrente de Noether pode ser um proveito: através da soma de superpotenciais, podemos acabar encontrando uma particular corrente que se destaque por suas propriedades e assim mereça ser 'a eleita'.

O segundo aspecto diz respeito não à ambigüidade mas à multiplicidade da corrente de Noether. Lembremos que as transformações infinitesimais são tipicamente parametrizadas por funções $\epsilon(x)$, de modo que a corrente definida por (1.16) *depende* dessas funções. Se tomarmos $\epsilon(x) = \epsilon f(x)$, onde ϵ é uma constante infinitesimal e $f(x)$ uma função que obedece às mesmas restrições funcionais que $\epsilon(x)$, teremos, para cada $f(x)$ possível, uma corrente conservada sobre as trajetórias. Esta liberdade de escolha de $f(x)$, somada à possibilidade de se adicionarem superpotenciais, pode e deve ser usada para extrair-se um máximo de informações do teorema de Noether.

(vi) No momento em que decidimos fazer uso de sistemas de coordenadas, campos e toda a matemática inerente para compôr um teoria física, temos que saber como manipular tais 'instrumentos' para calcularmos quantidades físicas e extrairmos informações que possam ser verificadas experimentalmente; em resumo, temos que definir quem são os **observáveis** da teoria.

No contexto da teoria das transformações, considera-se observável toda quantidade invariante por **transformações de gauge** - que são os assim chamados invariantes de gauge. As transformações de gauge são um subconjunto escolhido entre as transformações de simetria do modelo; especificar se uma simetria é de gauge ou não faz parte desse processo de 'dar significado físico à teoria'.

Por razões que se tornarão naturais na formulação hamiltoniana (próxima seção), consideraremos neste texto que todas as transformações de simetria locais são transformações de gauge.

(II) Formulação Hamiltoniana

Como uma alternativa à descrição lagrangeana para a dinâmica de uma teoria de campos, a formulação hamiltoniana merece destaque pelos seguintes motivos: para as teorias quânticas de campos, ela representa um caminho para a quantização operatorial (a chamada quantização canônica, revisada no capítulo 2); mas ainda a nível clássico, o espaço de fase e toda a estrutura que acompanha a descrição hamiltoniana constituem um poderoso instrumento para a teoria das transformações de simetria e suas propriedades.

Para compararmos as duas descrições, vamos supor que seja dada uma lagrangeana $\mathcal{L}$ a partir da qual se construirá a estrutura hamiltoniana correspondente.

Admitimos então uma lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) , \quad (1.24)$$

que, como em (1.4.b), depende de N campos $\{\varphi_a\}$, seus gradientes $\{\partial_\mu \varphi_a\}$ e, possivelmente, de forma explícita, do sistema de coordenadas que descreve o espaço-tempo em que tais campos estão definidos. Seleccionamos, entre as coordenadas, aquela que representa o tempo, $x^0 = t$, em relação à qual se definem velocidades $\dot{\varphi}_a \equiv \partial_0 \varphi_a$. Com o intuito de se fazer uma transformação de Legendre sobre a lagrangeana (1.24) em relação a estas velocidades, definimos os campos

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}(\varphi_b, \dot{\varphi}_b, \partial_i \varphi_b; x^\mu) , \quad a = 1, \dots, N , \quad (1.25)$$

chamando $\Pi^a(x)$ de momento conjugado ao campo $\varphi_a(x)$.

A transformação de Legendre que pretendemos exige que se invertam as N equações (1.25) para expressarmos as velocidades em termos dos campos, momentos e suas derivadas espaciais; mas isto só é possível se^{[8],[9]}

$$\det \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a \partial \dot{\varphi}_b} \right| \neq 0 . \quad (1.26)$$

Neste sentido, a matriz $W_{ab} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a \partial \dot{\varphi}_b}$ (chamada de *matriz Hessiana*) permite-nos distinguir dois tipos de sistemas: aqueles em que $\det|W| \neq 0$, para os quais a transformada de Legendre é bem definida, são chamados de sistemas **regulares**; se $\det|W| = 0$, temos um sistema **singular** que exige, como veremos, uma generalização da transformada de Legendre.

(II.A) Sistemas Regulares

Para tais sistemas segue-se o procedimento canônico: invertemos primeiro as relações (1.25) para as velocidades,

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}(\varphi_b, \dot{\varphi}_b, \partial_i \varphi_b; x^\mu) \iff \dot{\varphi}_a = \Phi_a(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) , \quad (1.27)$$

onde

$$\Phi_a(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) = \frac{\delta}{\delta \Pi^a(x)} H[\varphi_b, \Pi^b](t) , \quad (1.28)$$

$$H[\varphi_b, \Pi^b](t) \equiv \int dx \mathcal{H}(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) , \quad (1.29.a)$$

$$\mathcal{H}(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) = \left[\Pi^a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L}(\varphi_b, \partial_\mu \varphi_b; x^\mu) \right]_{\dot{\varphi}_a = \Phi_a(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu)} . \quad (1.29.b)$$

A função (1.29), chamada de **hamiltoniana**, é construída de modo a não depender – nem implícita nem explicitamente – das velocidades $\{\dot{\varphi}_a\}$ (vide, por exemplo, ref.[8] ou [9]). Por isso nesta formulação as variáveis naturais são os campos $\{\varphi_a\}$ e momentos $\{\Pi^a\}$ ¹⁾, o que sugere considerar o espaço dos $2N$ campos independentes, $\{\varphi_a(x), \Pi^a(x) , a = 1, \dots, N\}$, chamado de **espaço de fase**, e definir a hamiltoniana sobre todo esse espaço através de (1.29). Além da propriedade (1.28), a hamiltoniana assim definida satisfaz

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_a(x)} H[\varphi_b, \Pi^b](t) = \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi_a)} \right) \right]_{\dot{\varphi}_a = \Phi_a(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu)} . \quad (1.30)$$

Se encontrarmos no espaço de fase uma configuração $\{\hat{\varphi}_a(x), \hat{\Pi}^a(x)\}$ que satisfaça o seguinte conjunto de equações acopladas

$$\frac{d}{dt} \hat{\varphi}_a(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \Pi^a(t, \mathbf{x})} H[\hat{\varphi}_b, \Pi^b](t) , \quad (1.31.a)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\Pi}^a(t, \mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \varphi_a(t, \mathbf{x})} H[\hat{\varphi}_b, \Pi^b](t) , \quad (1.31.b)$$

para $a = 1, \dots, N$, então:

(a) as relações (1.27), (1.28) e (1.31) implicarão que os campos $\{\hat{\Pi}^a(x)\}$ podem ser expressos em termos dos campos $\{\hat{\varphi}_a(x)\}$ de acordo com a definição lagrangeana (1.25) — portanto, esta última passa a ser uma relação dinâmica;

¹⁾ Consideraremos implícita a dependência sobre as derivadas espaciais, $\partial_i \varphi$ e $\partial_i \Pi^a$, e, para compensar, usaremos derivadas funcionais, $\frac{\delta}{\delta \varphi_a}$ e $\frac{\delta}{\delta \Pi^a}$.

(b) usando tal relação, as equações (1.31.b) se transformam nas equações de Euler-Lagrange para os campos $\{\dot{\varphi}_a\}$,

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \right] (\dot{\varphi}) = \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_a} \right] (\dot{\varphi}) = 0 . \quad (1.32)$$

Isto nos induz a tomar (1.31) como as equações de movimento no espaço de fase – chamadas então de *equações de Hamilton* – e a dinâmica do modelo passa a ser regida pela sua hamiltoniana. As configurações de campos e momentos que satisfizerem tais equações serão chamadas de trajetórias no espaço de fase.

Dado um funcional qualquer $F[\varphi_a, \Pi^a](t)$ definido no espaço de fase, vale a equação

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial}{\partial t} F + \int dx \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi_a(t, x)} \frac{d}{dt} \varphi_a(t, x) + \frac{\delta F}{\delta \Pi^a(t, x)} \frac{d}{dt} \Pi^a(t, x) \right) . \quad (1.33)$$

Quando calculada sobre as trajetórias, a equação anterior se reescreve como

$$\frac{d}{dt} \hat{F} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{F} + \int dx \left(\frac{\delta \hat{F}}{\delta \varphi_a(t, x)} \frac{\delta H}{\delta \Pi^a(t, x)} - \frac{\delta \hat{F}}{\delta \Pi^a(t, x)} \frac{\delta H}{\delta \varphi_a(t, x)} \right) . \quad (1.34)$$

Se definirmos os chamados **Parênteses de Poisson** canônicos entre funcionais a tempos iguais¹⁾ como

$$\{F(t), G(t)\}_{PB} \equiv \int dx \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi_a(t, x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi^a(t, x)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi^a(t, x)} \frac{\delta G}{\delta \varphi_a(t, x)} \right) , \quad (1.35)$$

toda a dinâmica, na formulação hamiltoniana, ficará sintetizada pela equação

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial}{\partial t} F + \{F, H\}_{PB} . \quad (1.36)$$

Mas o interesse nos parênteses de Poisson vai além de sua participação nas equações de movimento; por isso, é interessante conhecer os parênteses fundamentais,

$$\{\varphi_a(t, x), \varphi_b(t, y)\}_{PB} = \{\Pi^a(t, x), \Pi^b(t, y)\}_{PB} = 0 , \quad (1.37.a)$$

¹⁾ Tais parênteses obedecem às seguintes propriedades algébricas:

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad (\text{anti-simetria})$$

$$\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\} \quad a, b \text{ ctes} \quad (\text{linearidade})$$

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G \quad (\text{regra do produto})$$

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} \equiv 0 \quad (\text{identidade de Jacobi})$$

$$\{\varphi_a(t, \mathbf{x}), \Pi^b(t, \mathbf{y})\}_{PB} = \delta_a^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (1.37.b)$$

em termos dos quais todos os demais parênteses podem ser construídos.

Para a análise das propriedades de simetria na formulação hamiltoniana, é útil saber que as equações de Hamilton (1.31) também podem ser obtidas através de um princípio de mínima ação: de fato, se tomarmos o seguinte funcional,

$$S[\varphi, \Pi] = \int d^{D+1}x \, \bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \Pi^a, \dot{\varphi}_a; x^\mu) , \quad (1.38.a)$$

$$\bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \Pi^a, \dot{\varphi}_a; x^\mu) \equiv \Pi^a \dot{\varphi}_a - \mathcal{H}(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) , \quad (1.38.b)$$

teremos

$$\begin{aligned} \delta S[\varphi, \Pi] &= S[\varphi + \delta\varphi, \Pi + \delta\Pi] - S[\varphi, \Pi] = \int d^{D+1}x \, \delta\bar{\mathcal{L}} = \\ &= \int d^{D+1}x \left[\left(-\dot{\Pi}^a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\varphi_a)} \right) \right) \delta\varphi_a + \left(\dot{\varphi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Pi^a} + \partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\Pi^a)} \right) \right) \delta\Pi^a \right] + \\ &\quad + (\text{valores no contorno}) , \end{aligned} \quad (1.39)$$

e a condição de extremo levará às equações desejadas

$$L_{\varphi_a} \equiv -\dot{\Pi}^a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\varphi_a)} \right) = -\dot{\Pi}^a + \{\Pi^a, H\}_{PB} = 0 , \quad (1.40.a)$$

$$L_{\Pi^a} \equiv \dot{\varphi}_a - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Pi^a} + \partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial_i\Pi^a)} \right) = \dot{\varphi}_a - \{\varphi_a, H\}_{PB} = 0 . \quad (1.40.b)$$

De posse da lagrangeana (1.38.b), chamada de lagrangeana de 1a. ordem¹⁾, podemos então fazer uso do que já vimos na seção (I) sobre transformações de simetria. Em particular, considerando uma transformação infinitesimal na forma dos campos e momentos,

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi_a(x) + \bar{\delta}\varphi_a(x) , \quad (1.41.a)$$

$$\Pi^a(x) \longrightarrow \Pi^a(x) + \bar{\delta}\Pi^a(x) , \quad (1.41.b)$$

para $a = 1, \dots, N$, podemos usar o critério (1.16) para verificar se tal transformação é uma quase-invariância da ação (1.38). Se fôr o caso, então deve existir uma corrente J^μ local, tal que

$$L_{\varphi_a} \bar{\delta}\varphi_a + L_{\Pi^a} \bar{\delta}\Pi^a = \partial_\mu J^\mu , \quad (1.42)$$

¹⁾ Trata-se do assim chamado formalismo lagrangeano de 1a. ordem, no qual as velocidades dos campos, $\{\dot{\varphi}_a\}$, sempre comparecem linearmente na lagrangeana, como em (1.38.b).

e esta corrente será conservada para as trajetórias. Há um interesse especial nas transformações infinitesimais (1.41) do tipo

$$\delta_Q \varphi_a = \{Q, \varphi_a\}_{PB} = -\frac{\delta Q}{\delta \Pi^a} , \quad (1.43.a)$$

$$\delta_Q \Pi^a = \{Q, \Pi^a\}_{PB} = \frac{\delta Q}{\delta \varphi_a} , \quad (1.43.b)$$

onde

$$Q \equiv Q[\varphi, \Pi](t) \equiv \int dx \mathcal{J}^0(\varphi_a, \Pi^a; x^\mu) \quad (1.44)$$

é um funcional infinitesimal, chamado **gerador**, definido no espaço de fase. Tais transformações deixam invariantes os parênteses de Poisson fundamentais (1.37), o que as caracteriza como *canônicas*^[8]. E neste caso, a condição de simetria (1.42) se traduz numa condição sobre o gerador Q : por um lado temos

$$\begin{aligned} & \int dx (L_{\varphi_a} \delta_Q \varphi_a + L_{\Pi^a} \delta_Q \Pi^a) = \\ &= \int dx \left(\frac{\delta Q}{\delta \varphi_a} \dot{\varphi}_a + \frac{\delta Q}{\delta \Pi^a} \dot{\Pi}^a \right) - \int dx \left(\frac{\delta Q}{\delta \varphi_a} \frac{\delta H}{\delta \Pi^a} - \frac{\delta Q}{\delta \Pi^a} \frac{\delta H}{\delta \varphi_a} \right) = \\ &= \left(\frac{d}{dt} Q - \frac{\partial}{\partial t} Q \right) - \{Q, H\}_{PB} = \frac{d}{dt} \int dx \mathcal{J}^0 - \int dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}^0 + \{\mathcal{J}^0, H\}_{PB} \right) , \end{aligned} \quad (1.45)$$

e portanto, para que (1.42) seja satisfeita, basta que a densidade $\mathcal{J}^0(\varphi_a, \Pi^a; x^\mu)$ cumpra

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}^0 + \{\mathcal{J}^0, H\}_{PB} = -\partial_i \mathcal{J}^i , \quad (1.46)$$

para algum vetor $\mathcal{J}^i$ local, resultando na corrente de Noether $J^\mu = (\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^i)$. Quando calculado para as trajetórias, o lado direito da equação (1.46) é igual a $\partial_0 \mathcal{J}^0$, transformando-a numa lei de conservação $\partial_\mu J^\mu = 0$. Logo, podemos interpretar (1.46) como a versão hamiltoniana da condição de simetria do teorema de Noether.

A condição de integrabilidade (1.20) também se traduz numa restrição (algébrica) sobre os geradores Q de simetria; basta usarmos a identidade de Jacobi para verificarmos que

$$\left. \begin{aligned} \delta_{Q_1} F &= \{Q_1, F\}_{PB} \\ \delta_{Q_2} F &= \{Q_2, F\}_{PB} \end{aligned} \right\} \implies [\delta_{Q_1}, \delta_{Q_2}] F = \{ \{Q_1, Q_2\}_{PB}, F \}_{PB} = \delta_{\{Q_1, Q_2\}_{PB}} F , \quad (1.47)$$

e portanto, se Q_1 e Q_2 forem geradores de simetria, $\{Q_1, Q_2\}_{PB}$ também tem que sê-lo — dizemos, por isso, que os geradores de simetria devem se fechar em álgebra sob os parênteses de Poisson.

Embora as transformações de campos (1.14) e (1.43) atuem em espaços diferentes (a primeira, no espaço de configurações e a segunda, no espaço de fase) é possível estabelecer certas relações entre ambas, que nos podem ser úteis.

Suponhamos que se encontre o gerador Q de uma simetria hamiltoniana, de modo que a equação

$$L_{\varphi_a} \{Q, \varphi_a\}_{PB} + L_{\Pi^a} \{Q, \Pi^a\}_{PB} = \partial_\mu J^\mu \quad (1.48)$$

seja satisfeita para todas as configurações $\{\varphi_a; \Pi^a\}$ do espaço de fase; em particular, para aquelas em que os momentos se relacionam com os campos através da relação

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} \quad , \quad \mathcal{L} = \text{lagrangeana no espaço de configurações} \quad .$$

Usando (1.27), (1.28) e (1.40.b), isto significa que estas configurações satisfarão $L_{\Pi^a} = 0$ e $L_{\varphi_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) \equiv L^a$, e (1.48) assumirá a forma

$$L^a (\{Q, \varphi_a\}_{PB}) \Big|_{\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}} = \partial_\mu (J^\mu) \Big|_{\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}} \quad , \quad (1.49)$$

o que, segundo o critério (1.16), significa que $\delta \varphi_a = (\{Q, \varphi_a\}_{PB}) \Big|_{\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}}$ será uma simetria lagrangeana, relacionada à corrente $(J^\mu) \Big|_{\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}}$.

Inversamente, se fôr dada uma simetria lagrangeana infinitesimal,

$$L^a \delta \varphi_a = \partial_\mu J^\mu \quad ,$$

tal que a corrente J^μ , na transição do formalismo lagrangeano para o hamiltoniano, possa ser expressa como uma autêntica função do espaço de fase (isto é, independente de velocidades), então $Q = \int dx J^0$ será o gerador da correspondente simetria hamiltoniana.

(II.B) Sistemas Singulares

Consideremos agora um sistema lagrangeano singular: o fato de sua matriz Hessiana (W_{ab}) ter determinante nulo implica que o conjunto de N equações

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a} (\varphi_b, \dot{\varphi}_b, \partial_i \varphi_b; x^\mu) \quad , \quad a = 1, \dots, N \quad , \quad (1.50)$$

quando tratado como um sistema de equações para as velocidades $\{\dot{\varphi}_a\}$, pode ser resolvido a menos de P ¹⁾ parâmetros locais arbitrários, $\{u_m(x) \quad , \quad m = 1, \dots, P\}$ — ou seja, trata-se

¹⁾ $(N - P)$, $P \leq N$, é o posto da respectiva matriz Hessiana.

de um sistema indeterminado, e P é seu grau de indeterminação —, o que representamos por

$$\dot{\varphi}_a = \Phi_a(\varphi_b, \Pi^b, u_m; x^\mu) . \quad (1.51)$$

Vista por um outro ângulo, essa indeterminação do sistema (1.50) significa que há P combinações — independentes e não-triviais — dessas equações que não envolvem as velocidades, o que indicamos por

$$\chi^m(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) = 0 \quad , \quad m = 1, \dots, P . \quad (1.52)$$

Do ponto de vista do espaço de fase, estas últimas relações são **vínculos** que, a princípio, impedem que os campos e momentos sejam tratados como variáveis independentes. Na medida em que as quantidades indeterminadas $\{u_m\}$ e os vínculos $\{\chi^m\}$ são manifestações da mesma singularidade do modelo, pode-se entender porque os sistemas singulares são também sistemas vinculados.

Sobre o tratamento de sistemas vinculados há uma vasta literatura (onde destacamos as referências [8], [9], [10], [11] e [12]) que compreendem revisões, discussões e generalizações da técnica originalmente proposta por P.M.Dirac^[13]. Segue aqui um breve resumo do método de Dirac, com destaque para o aspecto das simetrias em sistemas vinculados.

Uma vez encontrada uma solução para as velocidades como em (1.45)¹⁾, construímos a hamiltoniana

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad , \quad (1.53.a)$$

$$\mathcal{H}(\varphi_a, \Pi^a, u_m; x^\mu) = \left[\Pi^a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) \right]_{\dot{\varphi}_a = \Phi_a(\varphi_b, \Pi^b, u_m; x^\mu)} , \quad (1.53.b)$$

definida assim em todo o espaço de fase $\{\varphi_a, \Pi^a, a = 1, \dots, N\}$, mas dependente dos parâmetros $\{u_m\}$. Tal hamiltoniana tem as seguintes propriedades funcionais:

$$\left(\frac{\delta}{\delta \Pi^a} H \right)_{u_m \text{ fixo}} = \Phi_a \quad , \quad (1.54.a)$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta \varphi_a} H \right)_{u_m \text{ fixo}} = \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi_a)} \right) \right)_{\dot{\varphi}_a = \Phi_a} , \quad (1.54.b)$$

que, como no caso regular, sugerem que tomemos como equações de movimento

$$\dot{\varphi}_a = \left(\frac{\delta}{\delta \Pi^a} H \right)_{u_m \text{ fixo}} , \quad (1.55.a)$$

¹⁾ Devido à presença dos vínculos (1.46), a forma das funções Φ_a em (1.45) não é única; mas a diferença entre duas escolhas corresponde a uma reparametrização das funções arbitrárias $\{u_m\}$.

$$\dot{\Pi}^a = - \left(\frac{\delta}{\delta \varphi_a} H \right)_{u_m \text{ fixo}} , \quad (1.55.b)$$

pois elas reproduzirão as equações lagrangeanas desejadas, (1.8). Se agora usarmos a liberdade que temos na escolha dos parâmetros $\{u_m\}$ e dos vínculos $\{\chi^m\}$ — graças à arbitrariedade na forma do conjunto (1.51) e (1.52) —, será sempre possível escrever a hamiltoniana (1.53) dependendo linearmente dos parâmetros $\{u_m\}$,

$$\mathcal{H}_t(\varphi_a, \Pi^a, u_m; x^\mu) = \mathcal{H}_c(\varphi_a, \Pi^a; x^\mu) + u_m \Omega^m(\varphi_a, \Pi^a; x^\mu) . \quad (1.56)$$

A parcela $\mathcal{H}_c$ é chamada de **hamiltoniana canônica**; ela é independente dos parâmetros $\{u_m\}$ e, por isso, é uma grandeza estritamente definida no espaço de fase. Já o conjunto $\{\Omega^m\}$ é constituído de certas combinações homogêneas de vínculos, compondo um conjunto equivalente a (1.52), quer dizer, ambos definem a mesma superfície vincular:

$$\{\chi^m = 0\} \iff \{\Omega^m = 0\} . \quad (1.57)$$

A soma da hamiltoniana canônica à combinação linear de vínculos forma a chamada **hamiltoniana total**^[13], $\mathcal{H}_t$.

Em termos da hamiltoniana total, as equações de movimento se escrevem

$$\dot{\varphi}_a(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} \left[\{\varphi_a(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} + u_m(t, \mathbf{y}) \{\varphi_a(t, \mathbf{x}), \Omega^m(t, \mathbf{y})\}_{PB} \right] , \quad (1.58.a)$$

$$\dot{\Pi}^a(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} \left[\{\Pi^a(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} + u_m(t, \mathbf{y}) \{\Pi^a(t, \mathbf{x}), \Omega^m(t, \mathbf{y})\}_{PB} \right] , \quad (1.58.b)$$

e foi considerando a forma sugestiva dessas equações que Dirac introduziu a noção de **igualdades fracas**^[13] ($\approx$): os P vínculos devem ser expressos como

$$\Omega^m(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) \approx 0 \quad , \quad m = 1, \dots, P , \quad (1.59)$$

(que se lê: “o vínculo Ω^m é fracamente zero”), e uma grandeza qualquer será fracamente nula se ela puder ser expressa como uma combinação linear de vínculos,

$$W \approx 0 \iff W = \mathcal{P}_m \Omega^m \quad \text{para algum operador } \mathcal{P}_m . \quad (1.60)$$

Por exemplo, de acordo com (1.56), temos $\mathcal{H}_t \approx \mathcal{H}_c$. Mais importante, as equações (1.58) assumem a forma simplificada

$$\dot{\varphi}_a(t, \mathbf{x}) \approx \int d\mathbf{y} \{\varphi_a(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_t(t, \mathbf{y})\}_{PB} \approx \{\varphi_a(t, \mathbf{x}), H_t\}_{PB} , \quad (1.61.a)$$

$$\dot{\Pi}^a(t, \mathbf{x}) \approx \int d\mathbf{y} \{\Pi^a(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_t(t, \mathbf{y})\}_{PB} \approx \{\Pi^a(t, \mathbf{x}), H_t\}_{PB} , \quad (1.61.b)$$

e, para um funcional $F[\varphi_a, \Pi^a]$ qualquer, definido no espaço de fase, teremos enfim

$$\frac{d}{dt}F \approx \frac{\partial}{\partial t}F + \{F, H_t\}_{PB} \quad , \quad (1.62)$$

que é uma generalização da equação (1.36) para sistemas singulares. Resolver uma 'equação fraca' significa que se devem calcular os parênteses de Poisson antes de se reconhecerem os vínculos, ou seja, fazemos variações independentes nos campos e momentos ao longo do cálculo e, só no final, usamos o fato de que algumas dessas variáveis são vinculadas. Isto permite que continuemos a usar os parênteses de Poisson (1.35)/(1.37) — que, como vimos, são estruturas que distinguem o formalismo hamiltoniano —, mesmo na presença de vínculos.

Também a dinâmica dos sistemas singulares, ditada pelas equações (1.58) e vínculos (1.59), pode ser extraída de um princípio de mínima ação: basta definirmos como ação do sistema o seguinte funcional

$$S[\varphi, \Pi, u] = \int d^{D+1}x \bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \Pi^a, \dot{\varphi}_a, u_m; x^\mu) \quad , \quad (1.63.a)$$

$$\bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \Pi^a, \dot{\varphi}_a; x^\mu) = \Pi^a \dot{\varphi}_a - \mathcal{H}_c(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) - u_m \Omega^m(\varphi_b, \Pi^b; x^\mu) \quad , \quad (1.63.b)$$

onde as funções $\{u_m\}$ são tratadas como multiplicadores de Lagrange¹⁾. A condição de extremo

$$\delta S = \int d^{D+1}x [L_{\varphi_a} \delta \varphi_a + L_{\Pi^a} \delta \Pi^a + L_{u_m} \delta u_m] + (\text{valores no contorno}) = 0 \quad , \quad (1.64)$$

onde

$$L_{\varphi_a} = -\dot{\Pi}^a + \int dy [\{\Pi^a, \mathcal{H}_c(y)\}_{PB} + u_m \{\Pi^a, \Omega^m(y)\}_{PB}] \quad (1.65.a)$$

$$L_{\Pi^a} = \dot{\varphi}_a - \int dy [\{\varphi_a, \mathcal{H}_c(y)\}_{PB} + u_m \{\varphi_a, \Omega^m(y)\}_{PB}] \quad (1.65.b)$$

$$L_{u_m} = -\Omega^m \quad (1.65.c)$$

leva às equações desejadas. Podemos assim procurar por transformações (nos campos, momentos e multiplicadores !) que sejam simetrias da ação (1.63); no caso das transformações infinitesimais geradas por uma carga $Q = \int dx J^0(\varphi_a, \Pi^a; x^\mu)$, através de

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi_a + \{Q, \varphi_a\}_{PB} \quad , \quad (1.66.a)$$

$$\Pi^a \longrightarrow \Pi^a + \{Q, \Pi^a\}_{PB} \quad , \quad (1.66.b)$$

¹⁾ Por isso é comum chamá-las de multiplicadores de Lagrange mesmo no formalismo hamiltoniano.

$$u_m \longrightarrow u_m + \delta u_m^{1)} , \quad (1.66.c)$$

a condição de simetria (1.46) se converte em

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}^0 + \int dy [\{\mathcal{J}^0, \mathcal{H}_c(y)\}_{PB} + u_m(y) \{\mathcal{J}^0, \Omega^m(y)\}_{PB}] - \delta u_m \Omega^m = -\partial_i \mathcal{J}^i , \quad (1.67.a)$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}^0 + \{\mathcal{J}^0, H_t\}_{PB} \approx -\partial_i \mathcal{J}^i . \quad (1.67.b)$$

De fato, satisfeita a condição (1.67.b), pode-se usar a equação (1.67.a) para determinar qual a transformação nos multiplicadores necessária para garantir a quase-invariância.

O método de Dirac vai mais além da simples introdução da hamiltoniana total e das igualdades fracas: ele explora propriedades dos vínculos e a real indeterminação dos multiplicadores. Lembremos que os P vínculos (1.57) foram encontrados durante nossa tentativa de fazer a transformada de Legendre sobre um sistema singular; eles surgiram da definição dos momentos, e por isso são denominados **vínculos primários**^[13]. Também do ponto de vista da transformação de Legendre, os multiplicadores $\{u_m\}$ eram indeterminados — uma indeterminação primária. Mas se usarmos as equações de movimento, ou seja, para as trajetórias no espaço de fase, este panorama de vínculos e multiplicadores pode mudar.

Os P vínculos primários,

$$\Omega_{(1)}^m \approx 0 , \quad m = 1, \dots, P , \quad (1.68)$$

são condições sobre o espaço de fase que devem ser obedecidas em todos os instantes, isto é,

$$\dot{\Omega}_{(1)}^m \approx 0 , \quad m = 1, \dots, P , \quad (1.69)$$

o que, para as trajetórias, implica em P equações

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega_{(1)}^m + \{\Omega_{(1)}, H_t\}_{PB} \approx 0 , \quad m = 1, \dots, P . \quad (1.70)$$

Supondo que este sistema de P equações seja compatível, sua solução pode gerar condições sobre os multiplicadores (de modo que algumas das funções u_m podem ser determinadas) e/ou pode levar a novos vínculos, chamados de **vínculos secundários**^[13], que indicamos por $\{\Omega_{(2)}^m \approx 0 , \quad m = 1, \dots, S\}$. Estes, por sua vez, terão que satisfazer a condição de consistência $\dot{\Omega}_{(2)}^m \approx 0$, o que poderá gerar mais condições sobre multiplicadores e mais vínculos . . . e assim, iterativamente e até que nenhuma condição nova surja desse

¹⁾ A variação δu_m não é expressa como $\{Q, u_m\}_{PB}$ porque os multiplicadores não são quantidades estritamente definidas no espaço de fase.

processo de consistência, descobre-se quão indeterminados são os multiplicadores no espaço das trajetórias, e quão vinculado é esse espaço.

Para simplificarmos a exposição, vamos considerar o caso em que nem a hamiltoniana canônica nem os vínculos dependam explicitamente do tempo¹⁾. O conjunto total de vínculos será representado por

$$\{\Omega_{(i)}^m \approx 0, \quad m = 1, \dots, P_i; \quad i = 1, \dots, g\}, \quad (1.71)$$

onde o índice i representa a *geração* do vínculo — $i = 1 \rightarrow$ primário; $i = 2 \rightarrow$ secundário; $i = 3 \rightarrow$ terciário; etc. — num total de g gerações, e P_i é o número de vínculos da i -ésima geração. Por hipótese, tais vínculos satisfazem a condição de consistência (1.70), que neste caso se escreve simplesmente como

$$\int dy [\{\Omega_{(i)}^m(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} + u_n(\mathbf{y})\{\Omega_{(i)}^m(t, \mathbf{x}), \Omega_{(1)}^n(t, \mathbf{y})\}_{PB}] = 0, \quad m = 1, \dots, P_i, \quad i = 1, \dots, g. \quad (1.72)$$

Conhecidos os vínculos do sistema, podemos fazer uma classificação^{[9],[13]} de todas as quantidades/funcionais definidas no espaço de fase, de acordo com a maneira com que tais funcionais 'enxergam' os vínculos: um funcional F é dito de **1a. classe** se e somente se

$$\{F, \Omega_{(i)}^m\}_{PB} \approx 0, \quad \forall m, \forall i. \quad (1.73)$$

Se, por outro lado, houver algum vínculo $\Omega_{(j)}^n$ tal que $\{F, \Omega_{(j)}^n\}_{PB} \not\approx 0$, F será considerado de **2a. classe**.

Este critério pode ser usado para classificar os próprios vínculos em 1a. ou 2a. classe, e a discussão que se segue será baseada nesta classificação.

Tomemos um modelo em que todos os vínculos sejam de 2a. classe²⁾: reunindo todos eles — de todas as gerações —, num conjunto único indicado por

$$\chi^A \approx 0, \quad A = 1, \dots, \sum_i^g P_i, \quad (1.74)$$

pode-se mostrar^{[9],[13]} que a matriz

$$Q^{AB}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\chi^A(t, \mathbf{x}), \chi^B(t, \mathbf{y})\}_{PB} \quad (1.75)$$

¹⁾ O caso em que há dependência explícita no tempo é discutido na ref.[9].

²⁾ E que não haja nenhum outro conjunto equivalente de vínculos, que seja combinação linear dos originais, e que contenha vínculos de 1a. classe; dizemos que se tem um sistema de 2a. classe irreduzível.

é inversível, quer dizer, existe uma matriz $(Q^{-1})_{AB}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que

$$\int d\mathbf{z} Q^{AC}(t; \mathbf{x}, \mathbf{z})(Q^{-1})_{CB}(t; \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int d\mathbf{z} (Q^{-1})_{BC}(t; \mathbf{x}, \mathbf{z}) Q^{CA}(t; \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (1.76)$$

e que, por isso, os multiplicadores $\{u_m\}$ são todos determinados pelas equações de consistência (1.72). Esta é uma característica dos sistemas de 2a. classe: a indeterminação na transformada de Legendre é removida pela dinâmica do sistema. Se então usarmos a solução assim encontrada para os multiplicadores, as equações de movimento (1.58) passarão a ser^{[9],[13]}

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_a(t, \mathbf{x}) = & \int d\mathbf{y} \left[\{\varphi_a(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} + \right. \\ & \left. - \int d\mathbf{w} d\mathbf{z} \left(\{\varphi_a(t, \mathbf{x}), \chi^A(t, \mathbf{w})\}_{PB} \cdot (Q^{-1})_{AB}(t; \mathbf{w}, \mathbf{z}) \cdot \{\chi^B(t, \mathbf{w}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} \right) \right] , \quad (1.77.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^a(t, \mathbf{x}) = & \int d\mathbf{y} \left[\{\Pi^a(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} + \right. \\ & \left. - \int d\mathbf{w} d\mathbf{z} \left(\{\Pi^a(t, \mathbf{x}), \chi^A(t, \mathbf{w})\}_{PB} \cdot (Q^{-1})_{AB}(t; \mathbf{w}, \mathbf{z}) \cdot \{\chi^B(t, \mathbf{w}), \mathcal{H}_c(t, \mathbf{y})\}_{PB} \right) \right] . \quad (1.77.b) \end{aligned}$$

A forma dessas equações sugere a definição dos chamados **parênteses de Dirac (DB)**:

$$\begin{aligned} \{F(t), G(t)\}_{DB} \equiv & \{F(t), G(t)\}_{PB} + \\ & - \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \{F(t), \chi^A(t, \mathbf{x})\}_{PB} \cdot (Q^{-1})_{AB}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \{\chi^B(t, \mathbf{y}), G(t)\}_{PB} , \quad (1.78) \end{aligned}$$

que possuem as mesmas propriedades algébricas^[8] que os parênteses de Poisson. Em termos desses novos parênteses, as equações (1.77) se simplificam para

$$\dot{\varphi}_a = \{\varphi_a, H_c\}_{DB} , \quad (1.79.a)$$

$$\dot{\Pi}^a = \{\Pi^a, H_c\}_{DB} , \quad (1.79.b)$$

onde $H_c = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_c$; e para um funcional $F(t)$ qualquer, teremos

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial}{\partial t} F + \{F, H_c\}_{DB} . \quad (1.80)$$

Isto tudo, e mais a propriedade

$$\{F(t), \chi^A(t, \mathbf{x})\}_{DB} \equiv 0 , \quad \forall \chi^A , \quad \forall F , \quad (1.81)$$

indicam que os parênteses de Dirac são os parênteses naturais para os sistemas de 2a. classe; os de Poisson seriam um caso particular, na ausência de vínculos. A propriedade

(1.81) garante que os vínculos $\chi^A = 0$ podem ser usados como identidades, antes ou depois de se calcularem parênteses de Dirac; não é mais preciso falar em igualdades fracas. De fato, os parênteses de Dirac têm hoje uma interpretação geométrica bem definida — vide, por exemplo, as refs. [8] e [9] — para o espaço de fase reduzido.

De posse dos novos parênteses, podemos então generalizar os resultados de nosso estudo de simetrias contínuas feito com os sistemas regulares: as condições de simetria (1.46) e (1.47) para transformações infinitesimais (1.43) permanecem as mesmas, bastando substituir os parênteses de Poisson pelos de Dirac. Veja no Apêndice C, como exemplo, o estudo de um sistema de 2a. classe a partir do qual são obtidas as leis de conservação da equação KdV.

Examinemos agora o que se passa com um sistema cujos vínculos são todos de 1a. classe: chamaremos esses vínculos de

$$\Gamma_{(i)}^m \approx 0 \quad , \quad m = 1, \dots, P_i \quad , \quad i = 1, \dots, g \quad . \quad (1.82)$$

Suponhamos, novamente por simplicidade, que nem estes vínculos nem a hamiltoniana canônica dependam explicitamente do tempo. O fato dos vínculos serem de 1a. classe se exprime pela álgebra fechada que eles formam através dos parênteses de Poisson,

$$\{\Gamma_{(i)}^m, \Gamma_{(j)}^n\}_{PB} = \mathcal{P}_{(ij)l}^{mn(k)} \Gamma_{(k)}^l \approx 0 \quad , \quad (1.83)$$

e o fato de que temos um conjunto consistente de vínculos,

$$\dot{\Gamma}_{(i)}^m \approx 0 \quad , \quad (1.84)$$

implica que a hamiltoniana canônica também é de 1a. classe,

$$\{\Gamma_{(i)}^m, H_c\}_{PB} = \mathcal{R}_{(i)n}^{m(j)} \Gamma_{(j)}^n \quad . \quad (1.85)$$

Disto resulta que as equações de consistência não determinam nenhum multiplicador: ao contrário do que ocorria com os sistemas de 2a. classe, a dinâmica do sistema de 1a. classe não fixa as funções $\{u_n\}$; elas permanecem arbitrárias, isto é, podemos ‘escolhê-las’! Esta liberdade de escolha está relacionada, como veremos, a simetrias de gauge do sistema.

Examinemos a evolução temporal de um funcional $F(t)$ definido no espaço de fase: para isso, selecionamos *uma* hamiltoniana total, fazendo uma certa escolha de multiplicadores, o que indicamos por

$$u_m = v_m(\varphi_a, \Pi^a; x^\mu)$$

$$H_t(v) = \int dx [\mathcal{H}_c(\varphi_a, \Pi^a) + v_m \Gamma_{(1)}^m(\varphi_a, \Pi^a)]$$

A evolução de $F(t)$ é dada pela equação (1.62), que reescrevemos simbolicamente como

$$\frac{d}{dt}F(t) \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} - \{H_t(v), \quad \}_{PB} \right) F(t) \quad , \quad (1.86.a)$$

que pode ser formalmente integrada, resultando,

$$F_v(t) = \exp \left[(t - t_o) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \{H_t(v_o), \quad \}_{PB} \right) \right] F(t_o) \quad . \quad (1.86.b)$$

Assim, dadas as condições iniciais, $F(t_o)$, a solução (1.86.b) permite determinar F num instante t qualquer; mas o valor assim obtido dependerá das funções v_m escolhidas, através de $H_t(v)$ — por isso o sub-índice em $F_v(t)$. Seguindo a argumentação original de Dirac^[13], o estado físico da grandeza representada por F deveria ser determinado pela dinâmica a partir apenas das condições iniciais $F(t_o)$; assim, se há duas configurações distintas $F_v(t)$ e $F_{\bar{v}}(t)$ para a mesma condição inicial, elas devem representar o mesmo estado físico. As diferenças entre $F_v(t)$ e $F_{\bar{v}}(t)$ são vistas como **gauges** distintos: escolher os multiplicadores é escolher um gauge, e $F_v(t)$ e $F_{\bar{v}}(t)$ devem estar ligadas por uma transformação de gauge.

Comparemos então duas escolhas infinitesimalmente próximas, $\{v_m\}$ e $\{v_m + \varepsilon_m\}$: em primeira ordem no parâmetro ε_m , obtemos

$$F_{v+\varepsilon}(t) \approx F_v(t) + \{G_\varepsilon, F_v(t)\}_{PB} \quad , \quad (1.87.a)$$

$$G_\varepsilon = \int dx \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_m^{[-k]} g_k^m \quad , \quad (1.87.b)$$

$$g_o^m = \Gamma_{(1)}^m \quad ; \quad g_k^m = -\{g_{k-1}^m, H_t\}_{PB} \quad , \quad (1.87.c)$$

$$\varepsilon_m^{[0]} = \varepsilon_m(t) \quad ; \quad \varepsilon_m^{[-k]} = \int_{t_o}^t dt \varepsilon_m^{[-k+1]}(t) \quad . \quad (1.87.d)$$

Por isso interpretamos (1.87.b) como o gerador da transformação de gauge no espaço de trajetórias. Lembrando-se do processo de geração de vínculos, e então reconhecendo-se que os g_k^m definidos em (1.87.c) nada mais são do que combinações das várias gerações de vínculos de nossa teoria de 1a. classe, conclui-se que o gerador G_ε é uma combinação de vínculos de 1a. classe ! É neste sentido que podemos afirmar que vínculos de 1a. classe são geradores de transformações de gauge. Note que o gerador G_ε é uma constante das trajetórias (de fato $G_\varepsilon = 0$), e forma uma álgebra fechada (pois os vínculos de 1a. classe satisfazem, por hipótese a álgebra (1.83)).

Concluiremos esta seção com alguns comentários:

(i) Chamando $\Delta t = t - t_o$ e usando o teorema do valor médio para funções contínuas, podemos reescrever (1.87.d) como

$$\varepsilon_m^{[0]} = \varepsilon_m(t) \quad , \quad (1.88.a)$$

$$\varepsilon_m^{[k]} = (\Delta t)^k \frac{1}{k!} \varepsilon_m(\bar{t}) \quad , \quad \bar{t} \in [t_o, t] \quad , \quad k > 0 \quad , \quad (1.88.b)$$

e podemos examinar o gerador G_ε como uma série de potências em Δt :

$$G_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Delta t)^k}{k!} \mathcal{G}_k \quad , \quad (1.88.c)$$

$$\mathcal{G}_0 = \int dx \varepsilon_m(t) g_o^m \quad ; \quad \mathcal{G}_k = \int dx \varepsilon_m(\bar{t}) g_k^m \quad . \quad (1.88.b)$$

Em primeira ordem em Δt comparece apenas $g_o^m = \Gamma_{(1)}^m$, ou seja, somente vínculos primários; em segunda ordem, $(\Delta t)^2$, o termo $g_1^m = -\{\Gamma_{(1)}^m, H_t\}_{PB}$ indica que vínculos secundários passam a contribuir; em terceira ordem, $(\Delta t)^3$, os vínculos de terceira geração começam a participar; e assim por diante. Neste sentido, o nome *geração do vínculo* parece bastante apropriado: a transformação de gauge é encabeçada pelos vínculos de primeira geração (vínculos primários de 1a. classe), e, 'com o passar do tempo', as gerações seguintes vão somando suas contribuições de modo proporcional à sua 'idade'.

(ii) A idéia de geradores de transformações de gauge compostos por vínculos primários e sua cadeia de gerações foi explorada por J.A.Anderson e P.G.Bergmann^[14] no estudo das simetrias de gauge: suponha que, num rearranjo de termos, o gerador (1.87.b) possa ser reescrito como uma soma finita

$$G = \int dx J^o \quad ; \quad J^o = \sum_{k=0}^K \varepsilon_m^{[-k]} g_k^m \quad , \quad (1.89)$$

onde

$$g_o^m = \mathcal{P}_{(o)n}^m \Gamma_{(1)}^n = \text{combinação de vínculos primários} \quad , \quad (1.90.a)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x) = \text{função local das coordenadas} \quad . \quad (1.90.b)$$

Como candidato a gerador de uma simetria da ação, vejamos sob quais circunstâncias (1.89) satisfaz a condição de quase-invariância (1.67.a): calculando-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} J^o + \int dy [\{J^o, \mathcal{H}_c(y)\}_{PB} + u_l(y) \{J^o, \Gamma_{(1)}^l(y)\}_{PB}] = \\ & = \dot{\varepsilon}_m g_o^m + \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon_m^{[-k]} (g_{k+1}^m + \{g_k^m, H_c\}_{PB}) + \varepsilon_n^{[-K]} \{g_K^m, H_c\}_{PB} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^K \epsilon_m^{[-k]} \int dy \, u_l(y) \{g_k^m, \Gamma_{(1)}^l(y)\}_{PB} \, , \quad (1.91)$$

vemos que, se os geradores g_k^m satisfizerem

$$g_o^m = \mathcal{P}_{(o)n}^m \Gamma_{(1)}^n \, , \quad (1.92.a)$$

$$g_{k+1}^m = -\{g_k^m, H_c\}_{PB} + \mathcal{P}_{(k+1)n}^m \Gamma_{(1)}^n \, , \quad k = 0, \dots, K-1 \, , \quad (1.92.b)$$

$$\{g_K^m, H_c\}_{PB} = \mathcal{P}_{(K+1)n}^m \Gamma_{(1)}^n \, , \quad (1.92.c)$$

e se δu_m for escolhido de modo que

$$\delta u_m \Gamma_{(1)}^m = \sum_{k=0}^{K+1} \epsilon_m^{[-k+1]} \mathcal{P}_{(k)n}^m \Gamma_{(1)}^n + \sum_{k=0}^K \epsilon_m^{[-k]} \int dy \, u_l(y) \{g_k^m, \Gamma_{(1)}^l(y)\}_{PB} + \partial_i J^i \, , \quad (1.92.d)$$

a condição (1.67.a) será satisfeita. Rebatizando os parâmetros e geradores como

$$g_k^m = g_{K-k}^m \iff g_k^n = g_{K-k}^n \quad (1.93.a)$$

$$\epsilon_m = \epsilon_m^{[-K]} \iff \epsilon_m^{[-k]} = \frac{d^{K-k}}{dt^{K-k}} \epsilon_m \quad (1.93.b)$$

$$\mathcal{C}_{(k)n}^m = \mathcal{P}_{(K-k+1)n}^m \iff \mathcal{P}_{(k+1)n}^m = \mathcal{C}_{(K-k)n}^m \, , \quad (1.93.c)$$

chegamos ao algoritmo de Anderson-Bergmann^[14]: se existirem $\mathcal{C}_{(k)n}^m$ tais que

$$g_K^m = \mathcal{C}_{(K+1)n}^M \Gamma_{(1)}^n \, , \quad (1.94.a)$$

$$g_{k-1}^m = -\{g_k^m, H_c\}_{PB} + \mathcal{C}_{(k)n}^m \Gamma_{(1)}^n \, , \quad k = 2, \dots, K \, , \quad (1.94.b)$$

$$\{g_o^m, H_c\}_{PB} = \mathcal{C}_{(1)n}^m \Gamma_{(1)}^n \, , \quad (1.94.c)$$

e

$$\Gamma_{(1)}^m \delta u_m = \sum_{k=1}^{K+1} \frac{d^k}{dt^k} \epsilon_m \mathcal{C}_{(k)n}^m \Gamma_{(1)}^n + \sum_{k=0}^K \frac{d^k}{dt^k} \epsilon_m \int dy \, u_l(y) \{g_k^m, \Gamma_{(1)}^l(y)\}_{PB} + \partial_i J^i \, , \quad (1.94.d)$$

então a transformação infinitesimal gerada por

$$G_\epsilon = \int dx \sum_{k=0}^K \frac{d^k \epsilon_m}{dt^k} g_k^m \, , \quad (1.95)$$

deixará a ação quase-invariante; e se $\{G_\epsilon, G_{\epsilon'}\}_{PB}$ também tiver essa propriedade, então teremos uma simetria. Como os parâmetros $\epsilon_m(x)$, $m = 1, \dots, P$, são funções locais,

arbitrárias e independentes. o gerador (1.95) resume na verdade P transformações de gauge. Mas P é o número de funções g_o^m e, se através de (1.92.a), o conjunto $\{g_o^m \approx 0\}$ for equivalente ao de vínculos primários $\{\Gamma_{(1)}^m \approx 0\}$, concluiremos que o número de simetrias de gauge é igual ao número de vínculos primários de 1a. classe.

(iii) A respeito do papel dos vínculos de 1a. classe nas transformações de gauge, sugerimos fortemente as referências [15], [16] e [17], onde se discutem o efeito sobre as equações de movimento, as diferentes maneiras de se construírem os geradores, o papel de vínculos quadráticos e de potências superiores, teoremas de existência e outros detalhes importantes. Vale ressaltar, contudo, um aspecto sobre os vínculos quadráticos que nos será útil ao longo deste trabalho: se na construção da cadeia de Anderson-Bergmann (1.92) surgir um termo $g_{k'}^m$ para o qual

$$\{g_{k'}^m, H_c\}_{PB} = (\chi^m)^p + \mathcal{P}_n^m \Gamma_{(1)}^n, \quad (1.96)$$

onde $p \geq 2$, então a cadeia poderá ser interrompida nesta geração (ou seja, poderemos tomar $k' = K$), desde que estejamos à procura de simetrias das equações de movimento. Isto porque os vínculos quadráticos (ou de potências superiores) não geram transformações sobre trajetórias ($\{(\chi)^p, F\}_{PB} = p(\chi)^{p-1}\{\chi, F\}_{PB} \approx 0$, $p \geq 2$). Mas se nosso interesse recair sobre simetrias da ação, os vínculos (secundários) quadráticos não poderão ser ignorados.

(iv) Caso o sistema possua vínculos de 1a. e 2a. classes, pode-se proceder da seguinte maneira: eliminam-se os vínculos de 2a. classe pela construção dos parênteses de Dirac; resta então uma estrutura de 1a. classe, que pode ser tratada do mesmo modo que os sistemas de 1a. classe canônicos, bastando substituir os parênteses de Poisson pelos de Dirac correspondentes (vide ref.[16]). Esta propriedade faz com que alguns autores não considerem os vínculos de 2a. classe como vínculos reais (principalmente porque é possível construir os parênteses de Dirac sem falar em tais vínculos, como é discutido na ref.[18]).

(v) De acordo com o resultado (1.86), uma grandeza física, representada por um funcional $\mathcal{F}$, é invariante pela transformação de gauge gerada por G_ϵ se

$$\{G_\epsilon, \mathcal{F}\}_{PB} \approx 0, \quad (1.97)$$

e, neste caso, — seguindo a nomenclatura sugerida na ref.[14] — $\mathcal{F}$ é considerado um observável. Mas como G_ϵ é uma combinação de vínculos de 1a. classe, parametrizada por funções ϵ locais e arbitrárias, a condição (1.97) implica que

$$\{\Gamma, \mathcal{F}\}_{PB} \approx 0, \quad \forall \Gamma \approx 0 \text{ de 1a. classe}, \quad (1.98)$$

isto é, *os observáveis são quantidades de 1a. classe*. Se $\mathcal{F}$ depender dos multiplicadores u_m — não sendo, portanto, uma grandeza estritamente definida no espaço de fase —, a condição (1.97) se generalizará em

$$\{G_\epsilon, \mathcal{F}\}_{PB}|_{u \text{ fixo}} + \delta u_m \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u_m} \approx 0 \quad , \quad (1.99)$$

onde δu_m é dado por (1.92.d).

(vi) Analisando o papel dos vínculos (primários e gerações seguintes) de 1a. classe nas teorias de gauge, P.M.Dirac propôs^[13] que, em lugar da hamiltoniana total (1.86.b), usássemos a chamada **hamiltoniana estendida**

$$H_\epsilon = \int dx \mathcal{H}_\epsilon \quad , \quad (1.100.a)$$

$$\mathcal{H}_\epsilon = \mathcal{H}_c(\varphi_a, \Pi^a) + w_m \Gamma^m(\varphi_a, \Pi^a) \quad , \quad (1.100.b)$$

$$\{\Gamma^m \approx 0, m = 1, \dots, P\} = \text{conjunto de todos os vínculos de 1a. classe} \quad , \quad (1.100.c)$$

para reger a dinâmica do sistema através de equações do tipo

$$\frac{d}{dt} F \approx \frac{\partial}{\partial t} F + \{F, H_\epsilon\}_{PB} \quad . \quad (1.101)$$

Rigorosamente, as equações de movimento (1.101) **não** equivalem mais às equações de Euler-Lagrange derivadas da lagrangeana de origem, **a menos que F seja um observável**: usando a definição (1.98), H.O.Girotti e M.E.V.Costa^[19] mostraram que a formulação hamiltoniana estendida é equivalente à formulação hamiltoniana total no que se refere aos invariantes de gauge.

A formulação estendida eleva todos os vínculos de 1a. classe a uma categoria a que antes só os primários pertenciam: todos os P vínculos comparecem na hamiltoniana, com seus P multiplicadores w_m , e graças às propriedades de 1a. classe,

$$\{\Gamma^m, \Gamma^n\}_{PB} = C_l^{mn} \Gamma^l \quad , \quad (1.102.a)$$

$$\{\Gamma^m, H_c\}_{PB} = D_n^m \Gamma^n \quad , \quad (1.102.b)$$

o algoritmo de Anderson-Bergmann se simplifica consideravelmente; de fato, é fácil verificar que o gerador

$$G_\epsilon = \int dx \epsilon_m \Gamma^m \quad , \quad (1.103.a)$$

com

$$\Gamma^m \delta u_m = \dot{\epsilon}_m D_n^m \Gamma^n + \epsilon_m \int dy (u_l C_n^{ml} \Gamma^n) + \partial_i J^i \quad , \quad (1.103.b)$$

satisfaz as condições (1.94), bem como o fechamento da álgebra

$$\{G_\varepsilon, G_{\varepsilon'}\} = \int dx \left[\varepsilon_m(x) \int dy \varepsilon'_n(y) C_l^{mn} \Gamma^l(y) \right] . \quad (1.104)$$

Há também um número maior (ou igual) de simetrias de gauge, uma para cada parâmetro ε_m , e portanto, uma para cada vínculo de primeira classe.

A formulação hamiltoniana estendida é particularmente interessante para técnicas modernas (por exemplo, BRST e BFV)^{[9],[20]} de quantização operatorial.

(vii) A liberdade de gauge em uma teoria significa que podemos fazer certas escolhas — escolhas de gauge — sobre a descrição teórica do modelo. Em geral, essa escolha é feita fixando-se relações entre as variáveis do sistema: por exemplo, equações do tipo

$$\Theta(\varphi_a; x^\mu) = 0 , \quad (1.105)$$

na formulação lagrangeana, ou do tipo

$$\Xi(\varphi_a, \Pi^a, u_m; x^\mu) = 0 , \quad (1.106)$$

na descrição hamiltoniana. Tais relações, chamadas de **condições de gauge**, impostas sobre os campos e coordenadas devem ser não-invariantes de gauge (justamente para fixar a simetria), e sua forma tem que ser compatível com a liberdade de escolha disponível.

Quanto ao número de condições de gauge: se há N parâmetros de gauge locais, então são necessárias N condições de gauge, no mínimo. Feita esta escolha, podem sobreviver algumas simetrias residuais (não mais locais, porém rígidas) que se considerem ainda simetrias de gauge; então mais condições serão necessárias para fixá-las. No formalismo hamiltoniano, por exemplo, é comum introduzir-se uma condição de gauge para cada vínculo de 1a. classe (primário ou secundário) — o que se mostra bem natural no formalismo estendido. Costuma-se, de fato, introduzir P vínculos, $\{\psi^n \approx 0, n = 1, \dots, P\}$, que formem com os P vínculos de 1a. classe originais um novo sistema de 2a. classe, o que, por um lado caracteriza o fim da simetria e, por outro, permite construir os parênteses de Dirac do sistema no gauge fixado. Há exemplos esclarecedores sobre esse tipo de fixação de gauge nas refs. [9] e [10], e os modelos que estudaremos no capítulo 3 podem também ilustrar a técnica.

(III) Vínculos Externos

Chamaremos de **vínculo externo** uma condição imposta sobre os campos da teoria, como

$$\Omega(\varphi_a(x); x^\mu) = 0 \quad , \quad (1.107)$$

usada para restringir os graus de liberdade do sistema, seja porque tal sistema tem graus de liberdade em excesso (como no caso das teorias de gauge, para as quais as condições de gauge (1.105) ou (1.106) são, portanto, vínculos externos), ou porque há um interesse especial nas configurações que satisfaçam a restrição (1.107).

Examinaremos a seguir alguns aspectos do uso de vínculos externos, e suas consequências para as simetrias do sistema, que serão aplicados nos capítulos seguintes.

(III.A) Variações sobre o problema de Lagrange

Vamos considerar a questão de como impôr vínculos externos do tipo (1.107) sobre um sistema que era descrito originalmente por uma lagrangeana $\mathcal{L}_o(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu)$. Seguindo a idéia básica de Lagrange^{[21],[22]}, podemos extrair um conjunto de V vínculos,

$$\Omega^m(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) = 0 \quad , \quad m = 1, \dots, V \quad , \quad (1.108)$$

como equações de movimento de uma nova lagrangeana,

$$\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, \lambda_m; x^\mu) = \mathcal{L}_o(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) + \lambda_m \Omega^m(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) \quad , \quad (1.109)$$

tratando os multiplicadores λ_m como novos campos da teoria; suas equações de Euler-Lagrange ($L_{\lambda_m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = 0$), implicam em (1.108). Mas o restante da dinâmica do sistema (simetrias e demais equações de movimento) depende da 'forma' adotada para as funções Ω^m , o que, por isso, merece ser discutido.

Para examinar o papel da forma dos vínculos sem ambigüidades, suponhamos que as V condições de vínculo (1.108) satisfaçam as seguintes restrições:

Definida a *superfície vincular* Σ como o conjunto de configurações que obedecem aos vínculos,

$$\Sigma = \{ \varphi_a(x) / \Omega^m(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) = 0 \} \quad , \quad (1.110)$$

exigimos que

$$\text{se } \frac{\partial \Omega^m}{\partial \varphi_a} \neq 0 \implies \frac{\partial \Omega^m}{\partial \varphi_a} \Big|_\Sigma \neq 0 \quad , \quad (1.111.a)$$

$$\text{se } \frac{\partial \Omega^m}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \neq 0 \implies \frac{\partial \Omega^m}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \Big|_\Sigma \neq 0 \quad . \quad (1.111.b)$$

Tais restrições evitam que as funções Ω^m sejam potências quadráticas (ou de ordem superior), mas que ainda sejam diferenciáveis sobre a superfície vincular. Uma vez escolhida a forma final desse vínculos, vamos examinar a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, \lambda_m; x^\mu) = \mathcal{L}_o(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu) + \lambda_m \frac{1}{I} [\Omega^m(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu)]^I, \quad (1.112)$$

onde I é um inteiro positivo; trata-se de uma primeira generalização de (1.109), reproduzida quando $I = 1$. As equações de Euler-Lagrange para (1.112) são

$$\begin{aligned} L^a \equiv L_{(o)}^a + [\Omega^m]^{I-1} \left[\lambda_m \frac{\partial \Omega^m}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\lambda_m \frac{\partial \Omega^m}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) \right] + \\ -(I-1) [\Omega^m]^{I-2} \cdot \partial_\mu \Omega^m \cdot \lambda_m \frac{\partial \Omega^m}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} = 0, \end{aligned} \quad (1.113.a)$$

onde $L_{(o)}^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right)$ é a derivada lagrangeana do sistema não vinculado, e

$$L^m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{I} [\Omega^m(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a; x^\mu)]^I = 0. \quad (1.113.b)$$

Usando então o fato de que

$$[\Omega^m]^I = 0, \quad I \geq 1 \iff \Omega^m = 0, \quad (1.114)$$

as equações (1.113) se reduzirão a

(a) para $I = 1$ (caso linear)

$$L_{(o)}^a = -\lambda_m \frac{\partial \Omega^m}{\partial \varphi_a} + \partial_\mu \left(\lambda_m \frac{\partial \Omega^m}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) \quad (1.115.a)$$

$$\Omega^m = 0 \quad (1.115.b)$$

(b) para $I \geq 2$ (caso não-linear)

$$L_{(o)}^a = 0 \quad (1.116.a)$$

$$\Omega^m = 0 \quad (1.116.b)$$

Vemos que, no caso linear, em geral as equações de movimento originais ($L_{(o)}^a = 0$) serão modificadas: os multiplicadores de Lagrange participarão da dinâmica através do segundo termo da equação (1.115.a); este termo representa as chamadas *forças de vínculo*, ou seja, interações que se acrescentam à dinâmica do sistema para forçar todas as trajetórias

à superfície vincular. As equações de movimento (1.115) podem eventualmente *determinar* os multiplicadores λ_m .

Já no caso não linear, as equações (1.116) mostram que o efeito final é simplesmente adicionar os vínculos externos às equações de movimento originais: a dinâmica do sistema de partida é a mesma, os vínculos apenas selecionam as trajetórias que pertencem à superfície vincular. Os multiplicadores estão ausentes dessas equações: são completamente indeterminados pela dinâmica (1.116), já que tais equações possuem a seguinte simetria de gauge

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi_a , \quad (1.117.a)$$

$$\lambda_m \longrightarrow \lambda_m + \Lambda_m , \quad \forall \Lambda_m(x) . \quad (1.117.b)$$

permitindo-nos interpretar os multiplicadores como autênticos campos de gauge.

A conclusão é: nas situações em que se desejam impôr certas condições seletivas — vínculos — sobre as trajetórias de um dado sistema, é **suficiente** introduzi-las de forma não linear, via multiplicadores de Lagrange, os quais, neste caso, serão graus de liberdade de gauge.

A transformação (1.117) é uma simetria de gauge óbvia para as equações (1.116), mas não necessariamente para a ação

$$S = \int d^{D+1}x (\mathcal{L}_o + \lambda_m \mathcal{F}^m) , \quad (1.118.a)$$

$$\mathcal{F}^m = \frac{1}{I} [\Omega^m]^I , \quad I \geq 2 . \quad (1.118.b)$$

Isto fica um tanto mais nítido através da análise hamiltoniana: a partir da definição dos momentos

$$\Pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \dot{\varphi}_a} + \lambda_m \frac{\partial \mathcal{F}^m}{\partial \dot{\varphi}_a} , \quad (1.119.a)$$

$$p^m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_m} = 0 , \quad (1.119.b)$$

determinamos os vínculos primários do sistema.

$$p^m \approx 0 , \quad (1.120.a)$$

$$\phi^\alpha \approx 0 . \quad (1.120.b)$$

Os primeiros saem diretamente de (1.119.b), e os demais, (1.120.b), são possíveis vínculos originados por (1.113.a). Construímos a hamiltoniana total

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_c(\varphi_a, \Pi^a, \lambda_m) + u_m p^m + v_\alpha \phi^\alpha , \quad (1.121)$$

onde u_m e v_a são multiplicadores. A existência da simetria de gauge “on-shell” (1.117) é prova de que os vínculos $p^m \approx 0$ são de 1a. classe. Podemos então tentar construir um gerador de simetria de gauge para a ação, usando o algoritmo de Anderson-Bergmann (1.94); o sucesso nessa empreitada depende essencialmente da forma dos vínculos externos Ω^m e de suas relações algébricas com $\mathcal{H}_c$ e p^m . O modelo de Siegel^[23] para bósons quirais é um exemplo de sistema com vínculo externo (um vínculo quiral), introduzido de forma quadrática, cuja ação exibe uma simetria de gauge (chamada simetria de Siegel); o gerador dessa simetria foi obtido na ref.[12]. Teremos oportunidade de examinar, no capítulo 3, um modelo com características semelhantes. O que merece ser destacado — e que estes dois modelos deixam claro — é que, ao analisarmos as simetrias da ação, os vínculos secundários não-lineares *não* devem ser desprezados, pois eles acabam fazendo parte do gerador da transformação. Somente para o estudo das simetrias “on-shell” é que vínculos não-lineares são dispensáveis, como é consenso^{[15][17]}.

(III.B) Campos Auxiliares Vinculados

Por vezes ocorre que a dinâmica de um sistema de campos $\{\varphi_a\}$ seja descrita por uma densidade lagrangeana $\mathcal{L}(\varphi_a)$ que possui características por algum motivo indesejadas (por exemplo, $\mathcal{L}$ pode depender de n -ésimas derivadas nos campos; ou apresentar operadores não-locais; etc.). Nos casos em que isso fôr um problema, pode-se tentar resolvê-lo adicionando-se novos campos, $\{\psi_\alpha\}$, que chamaremos de **campos auxiliares**, da seguinte maneira:

Dada a lagrangeana original, $\mathcal{L}(\varphi_a)$, que satisfaz

$$\delta\mathcal{L}(\varphi_a) = \mathcal{L}(\varphi_a + \delta\varphi_a) - \mathcal{L}(\varphi_a) = L^a(\varphi_b)\delta\varphi_a + (\text{termos de superfície}) , \quad (1.122)$$

extraímos as equações de movimento do sistema.

$$L^a(\varphi_b) = 0 , \quad a = 1, \dots, N . \quad (1.123)$$

Introduzimos então A campos auxiliares, definidos por

$$\psi_\alpha = f_\alpha(\varphi_a) , \quad \alpha = 1, \dots, A , \quad (1.124.a)$$

ou por algum outro conjunto de A equações,

$$\Phi_\alpha(\varphi_a, \psi_\beta) = 0 , \quad \alpha = 1, \dots, A , \quad (1.124.b)$$

que se supõe equivalente a (1.124.a). Em seguida, procuramos por alguma lagrangeana $\bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \psi_\alpha)$ que, por um lado, coincida com $\mathcal{L}(\varphi_a)$ quando se usarem as relações (1.124),

$$[\bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \psi_\alpha)]_{\psi_\alpha = f_\alpha(\varphi_a)} = \mathcal{L}(\varphi_a) \quad , \quad (1.125)$$

mas que, por outro lado, quando vista como um funcional definido no espaço estendido dos campos, $\{\varphi_a, \psi_\alpha\}$, ela não sofra dos problemas que comprometiam a lagrangeana original.

Encontrada $\bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \psi_\alpha)$, podemos então considerar variações independentes de φ_a e ψ_α ,

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathcal{L}} &= \bar{\mathcal{L}}(\varphi_a + \delta \varphi_a, \psi_\alpha + \delta \psi_\alpha) - \bar{\mathcal{L}}(\varphi_a, \psi_\alpha) = \\ &= \bar{L}^a \delta \varphi_a + \bar{L}^\alpha \delta \psi_\alpha + (\text{termos de superfície}) \quad , \end{aligned} \quad (1.126)$$

obtendo-se assim as equações de movimento no espaço estendido

$$\bar{L}^a(\varphi_b, \psi_\beta) = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, N \quad , \quad (1.127.a)$$

$$\bar{L}^\alpha(\varphi_b, \psi_\beta) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, A \quad . \quad (1.127.b)$$

Se o conjunto de equações (1.127) implicar nas equações originais (1.123) e relações de dependência (1.124), então diremos que as lagrangeanas $\mathcal{L}$ e $\bar{\mathcal{L}}$ são equivalentes. Entretanto, é interessante notar que, para a análise de simetrias, essa equivalência completa não é necessária: basta a relação (1.125) ! Vejamos em que sentido isso é verdadeiro.

A propriedade (1.125) mais as relações (1.122) e (1.126) implicam que, quando realizarmos uma transformação infinitesimal de forma nos campos φ_a ,

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi_a + \delta \varphi_a \quad , \quad (1.128)$$

valerá

$$\begin{aligned} L^a(\varphi_b) \delta \varphi_a &= \left[\bar{L}^a(\varphi_b, \psi_\beta) \delta \varphi_a + \bar{L}^\alpha(\varphi_b, \psi_\beta) \delta \psi_\alpha \right]_{\substack{\psi_\alpha = f_\alpha(\varphi_a) \\ \delta \psi_\alpha = \delta f_\alpha(\varphi_a)}} + \\ &+ (\text{termos de superfície}) \quad , \end{aligned} \quad (1.129)$$

de modo que (1.128) será uma transformação de simetria da ação $S = \int dV \mathcal{L}(\varphi_a)$ se existir um $J^\mu(\varphi_a)$ tal que

$$\left[\bar{L}^a(\varphi_b, \psi_\beta) \delta \varphi_a + \bar{L}^\alpha(\varphi_b, \psi_\beta) \delta \psi_\alpha \right]_{\substack{\psi_\alpha = f_\alpha(\varphi_a) \\ \delta \psi_\alpha = \delta f_\alpha(\varphi_a)}} = \partial_\mu J^\mu \quad . \quad (1.130)$$

Do ponto de vista do espaço estendido, $\{\varphi_a, \psi_\alpha\}$, a condição (1.124) é um vínculo externo, sendo portanto conveniente substituí-la por uma igualdade fraca,

$$\Phi_\alpha(\varphi_b, \psi_\beta) \approx 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, A \quad . \quad (1.131)$$

Já a condição $\delta\psi_\alpha = \delta(f_\alpha(\varphi_a))$ significa que estamos interessados somente nas transformações sobre o espaço estendido que respeitarem os vínculos externos, quer dizer, tais que

$$\delta\Phi_\alpha(\varphi_b, \psi_\beta) \approx 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, A \quad , \quad (1.132)$$

Assim, podemos reescrever a condição (1.130) como

$$\bar{L}^a(\varphi_b, \psi_\beta)\delta\varphi_a + \bar{L}^\alpha(\varphi_b, \psi_\beta)\delta\psi_\alpha \approx \partial_\mu J^\mu \quad . \quad (1.133)$$

A conclusão é que é possível usar o sistema {lagrangeana $\bar{\mathcal{L}}$ + vínculos externos $\Phi_\alpha \approx 0$ } para detectar simetrias da lagrangeana $\mathcal{L}$: se uma transformação no espaço estendido,

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi_a + \delta\varphi_a \quad , \quad (1.134.a)$$

$$\psi_\alpha \longrightarrow \psi_\alpha + \delta\psi_\alpha \quad , \quad (1.134.b)$$

satisfizer as condições

$$\bar{L}^a\delta\varphi_a + \bar{L}^\alpha\delta\psi_\alpha \approx \partial_\mu J^\mu \quad , \quad (1.135.a)$$

$$\delta\Phi_\alpha \approx 0 \quad , \quad (1.135.b)$$

então a transformação $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + (\delta\varphi_a)|_{\psi_\alpha=f_\alpha(\varphi_a)}$ será uma quase-invariância da ação original $S = \int dV \mathcal{L}(\varphi_a)$, restando apenas verificar-se a integrabilidade (1.20) dessa transformação. Esta técnica será utilizada no capítulo 4 para estudarmos as simetrias da gravidade bidimensional induzida.

Capítulo 2

SIMETRIAS E ANOMALIAS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Partindo de uma teoria clássica de campos, podemos escolher alguma das técnicas de quantização existentes na literatura para tentar construir uma teoria quântica de campos consistente. Cada uma dessas técnicas tem meios próprios para caracterizar as propriedades de simetria do sistema quântico, o que nos permite então compará-las com as da teoria clássica. É através dessa análise comparativa que se pode detectar uma **anomalia**: esta ocorre quando a dinâmica da teoria clássica exibe uma simetria que não é preservada a nível quântico.

As anomalias desempenham, por isso, um papel seletivo na construção de modelos: se a simetria em questão fôr imprescindível, a teoria anômala tem que ser descartada (ou, no mínimo, corrigida); mas pode ocorrer que o sistema físico de fato só possua a simetria no limite clássico (isto é, quando $\hbar \rightarrow 0$), e que esta seja efetivamente violada a nível quântico — uma anomalia real, como, por exemplo, a que explica o decaimento da partícula π^0 em dois fótons. Temos, portanto, que nos servir dos resultados obtidos experimentalmente para julgarmos uma teoria anômala de modo adequado.

Do ponto de vista teórico, embora saibamos calculá-las formalmente e apesar do progresso na sua caracterização matemática, a origem física das anomalias permanece obscura^{[24],[25]}. E é com o propósito de tentarmos entender um pouco mais sobre esse intrigante fenômeno que faremos, neste capítulo, um resumo das técnicas de quantização e de detecção de simetrias e anomalias, que serão usadas nos capítulos 3 e 4 para estudarmos dois (interessantes e expressivos) modelos anômalos.

(I) Técnicas Operatoriais

Também conhecida como quantização canônica, a formulação operatorial consiste em descrever os estados quânticos do sistema por meio de vetores normalizados, $|\psi\rangle$, pertencentes a um espaço de Hilbert H , com um produto interno $\langle \psi' | \psi \rangle$, e onde as quantidades mensuráveis (os observáveis quânticos) são representadas por operadores hermitianos lineares, $\{\hat{F}\}$, agindo sobre o espaço de Hilbert de tal modo que o resultado de uma medição corresponda a um autovalor do respectivo operador. Quando expandimos um

estado $|\psi\rangle$ em termos dos auto-estados de um operador $\hat{F}$,

$$\hat{F}|\psi_i\rangle = f_i|\psi_i\rangle, \quad (2.1)$$

$$|\psi\rangle = C_i|\psi_i\rangle, \quad (2.2)$$

interpretamos $p_i = C_i^* C_i$ como a probabilidade de f_i ser medido, de modo que, em média, o valor esperado para $\hat{F}$ será

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle. \quad (2.3)$$

Definimos os elementos de matriz de $\hat{F}$ como o conjunto de valores $\langle \psi' | \hat{F} | \psi \rangle$; os valores médios $\langle \hat{F} \rangle$ corresponderão, portanto, à diagonal dessa matriz.

A dinâmica do sistema¹⁾ é dada pela equação de Schrödinger para os estados,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle, \quad (2.4)$$

que envolve o operador hamiltoniano $\hat{H}$. Para um observável $\hat{F}$, essa equação implica em

$$\frac{d}{dt} \langle \psi' | \hat{F} | \psi \rangle = \langle \psi' | \frac{\partial}{\partial t} \hat{F} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}] | \psi \rangle, \quad (2.5.a)$$

$$[\hat{F}, \hat{H}] \equiv \hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}, \quad (2.5.b)$$

o que sugere que escrevamos

$$\dot{\hat{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{F} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}], \quad (2.5.c)$$

que deve ser vista não como uma equação de movimento, mas como uma definição para o operador $\hat{F}$. A semelhança formal entre (2.5) e as equações clássicas (1.36) do formalismo hamiltoniano sugere a seguinte prescrição para a quantização canônica: deve-se substituir os funcionais do espaço de fase por operadores correspondentes

$$F(\varphi, \Pi) \longrightarrow \hat{F}(\hat{\varphi}, \hat{\Pi}), \quad (2.6)$$

e os parênteses de Poisson por comutadores a tempos iguais, segundo

$$\{F, G\}_{PB} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}]. \quad (2.7)$$

Por exemplo, os comutadores canônicos fundamentais seriam

$$[\hat{\varphi}_a(\mathbf{x}), \hat{\Pi}^b(\mathbf{y})] = i\hbar \delta_a^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.8)$$

¹⁾ Vamos trabalhar na representação de Schrödinger.

Dada nesta forma resumida, a prescrição canônica apresenta ambigüidades ligadas à má definição (2.6) dos operadores: os funcionais, em geral, envolvem produtos de campos, cujas diferentes escolhas de ordenamento levam a diferentes observáveis quânticos associados a uma mesma grandeza clássica. Isto compromete inclusive a substituição simples (2.7).

Vamos supôr que, por meio de algum critério, selecionamos uma representação para a hamiltoniana, os demais operadores e suas relações de comutação. Resolvemos então a equação de Schrödinger (2.4), achando um conjunto de estados, $\{|\psi\rangle\}$. Se então fizermos uma transformação unitária sobre os operadores e estados, segundo

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle, \quad (2.9.a)$$

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{H}' = U\hat{H}U^\dagger - U i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger, \quad (2.9.b)$$

$$\hat{F} \longrightarrow \hat{F}' = U\hat{F}U^\dagger, \quad (2.9.c)$$

onde $UU^\dagger = U^\dagger U = I$, os novos estados obedecerão à equação de Schrödinger para a nova hamiltoniana (2.9.b), e os comutadores fundamentais (2.8) ficarão invariantes, bem como os elementos de matriz de $\hat{F}$. Deste modo, as transformações unitárias desempenham na teoria quântica um papel análogo ao das transformações canônicas na teoria hamiltoniana clássica, isto é, estão ligadas à covariância do formalismo.

Definimos então as transformações de simetria como o subconjunto das transformações unitárias que deixam o operador hamiltoniano invariante:

$$\hat{H}' = U\hat{H}U^\dagger - U i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger = \hat{H}. \quad (2.10)$$

Isto fará com que os novos estados $|\psi'\rangle$ satisfaçam a mesma equação de Schrödinger que os estados $|\psi\rangle$, e que os valores esperados $\langle \hat{F} \rangle$ obedeçam à mesma equação de movimento (2.5.a). Entre os operadores, diremos que $\hat{F}$ é um invariante pela transformação gerada por U se

$$\hat{F}' = U\hat{F}U^\dagger = \hat{F}. \quad (2.11)$$

Podemos examinar então as transformações contínuas infinitesimais, tomando

$$U = I - \frac{i}{\hbar} \hat{Q}. \quad (2.12)$$

onde $\hat{Q}$ é um operador hermitiano ($\hat{Q}^\dagger = \hat{Q}$) infinitesimal. Até primeira ordem em $\hat{Q}$, a condição de simetria (2.10) se transformará em

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{Q} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{Q}, \hat{H}] = 0, \quad (2.13)$$

e as transformações geradas por $\hat{Q}$ serão

$$\delta_Q |\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} \hat{Q} |\psi\rangle \quad , \quad (2.14.a)$$

$$\delta_Q \hat{F} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{Q}, \hat{F}] \quad . \quad (2.14.b)$$

E se expressarmos o gerador $\hat{Q}$ em termos de uma densidade $\hat{J}^0$, como $\hat{Q} = \int dx \hat{J}^0(t, \mathbf{x})$, a condição de simetria (2.13) se transformará numa condição sobre $\hat{J}^0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{J}^0 + \frac{1}{i\hbar} [\hat{J}^0, \hat{H}] = -\partial_i \hat{J}^i \quad , \quad (2.15)$$

o que, de acordo com (2.5.a), implica numa lei de conservação para elementos de matriz (e valores esperados) de $\hat{J}^\mu$

$$\partial_0 \langle \alpha | \hat{J}^0 | \beta \rangle + \langle \alpha | \partial_i \hat{J}^i | \beta \rangle \stackrel{def}{=} \langle \alpha | \partial_\mu \hat{J}^\mu | \beta \rangle \quad , \quad (2.16)$$

$$\langle \alpha | \partial_\mu \hat{J}^\mu | \beta \rangle = 0 \quad , \quad (2.17)$$

Esta é pois a versão quântica do teorema de Noether (compare com (1.46)): na procura de simetrias infinitesimais, somos levados à construção de correntes conservadas, cuja carga integrada, $\hat{Q}$, age como o gerador da transformação. Assim como na teoria clássica, é preciso garantir a integrabilidade das transformações infinitesimais, ou seja, se $\hat{Q}_1$ e $\hat{Q}_2$ forem geradores de simetria, então $[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2]$ também deve sê-lo; neste caso, poderemos reconstruir o operador unitário U , através de

$$U = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{Q} \right) \quad . \quad (2.18)$$

Podemos agora fazer comparações entre propriedades de simetria clássicas e quânticas: suponhamos que a nível clássico nossa teoria exibisse uma corrente conservada "on-shell",

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad , \quad (2.19)$$

mas que, na teoria quântica, operador $\hat{J}^\mu$ correspondente não satisfaça a equação de conservação (2.16), quer dizer,

$$\langle \alpha | \partial_\mu \hat{J}^\mu | \beta \rangle = \langle \alpha | \mathcal{A} | \beta \rangle \neq 0 \quad . \quad (2.20)$$

Diremos então que há uma **anomalia** ($\mathcal{A}$) no divergente da corrente.

Ao examinarmos a integrabilidade da simetria pode ocorrer que as cargas (geradores) formassem uma álgebra fechada através dos parênteses de Poisson,

$$\{Q_1, Q_2\}_{PB} = Q_{12} \quad , \quad (2.21)$$

mas que, no nível quântico, a álgebra de comutação correspondente exiba uma extensão ,

$$[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = i\hbar \hat{Q}_{12} + \mathcal{A}_{12} \quad . \quad (2.22)$$

Neste caso, nos referimos a $\mathcal{A}_{12}$ como uma **anomalia** na álgebra dos geradores.

Em geral as anomalias (2.20) e (2.22) estão interligadas, como manifestações simultâneas do mesmo fenômeno. Na referência [6], por exemplo, há uma esclarecedora discussão e ilustração da interdependência entre anomalias em álgebras e na conservação de correntes. Os modelos discutidos nos capítulos 3 e 4 servirão também como exemplo dessa interligação

Do modo como foi apresentada até aqui, a técnica de quantização canônica, via formalismo hamiltoniano, se presta para os sistemas regulares. Os modelos vinculados exigem algumas modificações e acréscimos^{[9][13]}.

Para sistemas vinculados de 1a. classe, podemos impôr os vínculos $\{\hat{\Gamma}^m \approx 0, m = 1, \dots, P\}$ como condições sobre estados, da seguinte maneira: resolvemos a equação de Schrödinger (2.4) usando a hamiltoniana total¹⁾ $\hat{H}_t = \hat{H}_c + \int dx \hat{u}_m \hat{\Gamma}_{(1)}^m$ para certos valores escolhidos dos multiplicadores $\{\hat{u}_m\}$ e ignorando, a princípio, os vínculos; entre os estados obtidos na solução dessa equação , dizemos que somente aqueles que satisfizerem

$$\hat{\Gamma}^m |\psi\rangle = 0 \quad ; \quad (2.23)$$

serão considerados **estados físicos**. Por consistência de (2.23), é necessário que

$$[\hat{\Gamma}^m, \hat{\Gamma}^n] |\psi\rangle = 0 \quad , \quad (2.24)$$

uma condição que de fato será satisfeita se o análogo quântico da álgebra de 1a. classe

$$\{\Gamma^m, \Gamma^n\}_{PB} = \mathcal{P}_l^{mn} \Gamma^l \quad (2.25)$$

assumir a forma canônica,

$$[\hat{\Gamma}^m, \hat{\Gamma}^n] = \hat{\mathcal{P}}_l^{mn} \hat{\Gamma}^l \quad , \quad (2.26)$$

isto é, se a álgebra de comutação for também de 1a. classe e se os coeficientes de estrutura, $\hat{\mathcal{P}}_l^{mn}$, comparecerem à esquerda dos vínculos, como em (2.26). Ocorre que os típicos problemas de ordenamento de operadores podem impedir que esses requisitos sejam preenchidos,

¹⁾ Pode-se também trabalhar com a hamiltoniana estendida, baseando-se na equivalência discutida no capítulo anterior.

caso em que dizemos que a álgebra de vínculos é anômala. Se nos lembrarmos que os vínculos de 1a. classe são os geradores das transformações de gauge, então uma anomalia na álgebra (2.26) será sinal de que a simetria de gauge é anômala¹⁾.

Numa teoria de 2a. classe (seja porque os vínculos internos já eram de 2a. classe ou porque foram adicionados fixadores de gauge que tornaram de 2a. classe o conjunto total dos vínculos), as condições $\{\hat{\chi}^m \approx 0, m = 1, \dots, S\}$ não podem ser consistentemente impostas sobre os estados como $\hat{\chi}_m |\psi\rangle = 0$, pois certamente surgiriam incompatibilidades do tipo $[\hat{\chi}^m, \hat{\chi}^n] |\psi\rangle \neq 0$ (já que, desde o nível clássico, tínhamos $\det\{\{\chi^m, \chi^n\}_{PB}\} \neq 0$). É necessário providenciar que os vínculos se transformem em identidades operatoriais, $\hat{\chi}^m \equiv 0$. Já sabemos como consegui-lo para a teoria clássica: basta usarmos os parênteses de Dirac no lugar dos de Poisson, o que sugere que a prescrição (2.7) seja substituída, para sistemas de 2a. classe, por

$$\{F, G\}_{DB} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}] \quad . \quad (2.27)$$

De fato, essa foi a motivação principal para que Dirac^[13] introduzisse seus parênteses modificados. Entretanto, como no caso regular, o procedimento (2.27) nem sempre é acertado devido aos inevitáveis problemas de ordenamento. De qualquer modo, a técnica de Dirac tem sido bem sucedida na quantização canônica de teorias quirais, dentre as quais os modelos do capítulo 3 serão um exemplo.

Finalizamos esta breve discussão da técnicas operatoriais de quantização com mais alguns comentários:

(i) A existência de uma simetria contínua na teoria quântica foi aqui caracterizada pela existência de um operador-corrente $\hat{J}^\mu$ que satisfaz a equação (2.15), e cuja carga $\hat{Q} = \int dx \hat{J}^0$ obedece às restrições algébricas de integrabilidade. Como esse conjunto de condições só envolve os operadores $\hat{J}^\mu$ e a hamiltoniana $\hat{H}$, dizemos que a simetria se manifesta a *nível dinâmico*.

Mas, como vimos em (2.9.a) e (2.14.a), as transformações de simetria agem também sobre o espectro dos estados quânticos, $\{|\psi\rangle\}$. Se considerarmos então o estado fundamental ou *vácuo* do sistema, denotado $|0\rangle$, poderão surgir dois casos:

(a) a transformação pode deixar o vácuo invariante,

$$\hat{Q}|0\rangle = 0 \implies U|0\rangle = e^{(-\frac{i}{\hbar}\hat{Q})}|0\rangle = I|0\rangle \quad . \quad (2.28)$$

¹⁾ No caso específico de teorias de gauge, que são essencialmente geométricas, já existe um grande progresso na compreensão das anomalias (tanto no divergente de correntes quanto em álgebra de vínculos) em termos das propriedades topológicas desses modelos, baseando-se na teoria das representações (cociclos). Sugerimos as referências [24], [25], [26], [27] e [28].

Significa que o vácuo corresponde à representação identidade do conjunto de representações unitárias do grupo de simetria, e os demais estados são então classificados em multipletos correspondentes às demais representações. Dizemos neste caso que a simetria admite uma implementação unitária.

(b) o vácuo pode não ser invariante.

$$\hat{Q}|0\rangle \neq 0 \quad (2.29)$$

de modo que não haverá um operador unitário que satisfaça $U|0\rangle = I|0\rangle$. Portanto a dinâmica exibe uma simetria que o vácuo não possui, o que caracteriza uma **quebra espontânea de simetria**.

Um teorema devido a Coleman^[29] mostra que se o vácuo for aniquilado por uma carga $\hat{Q}$, então a invariância de Lorentz garantirá que a corrente $\hat{J}^\mu$ correspondente seja conservada ($\partial_\mu \hat{J}^\mu = 0$). Este conjunto de resultados mostra em que nível o comportamento do estado fundamental serve para caracterizar as propriedades de simetria do sistema.

(ii) Uma das prescrições mais bem sucedidas para o cálculo de comutadores entre operadores é o chamado *limite de Bjorken-Johnson-Low* (BJL)^{[6],[29]}, que se utiliza das técnicas da teoria de perturbações renormalizada. Dados dois operadores $\hat{A}(x)$ e $\hat{B}(x)$, os elementos de matriz de seu comutador satisfazem a igualdade

$$i \int dx \langle \alpha | [\hat{A}(0, x), \hat{B}(0)] | \beta \rangle = \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(q) \quad (2.30)$$

onde

$$T(q) \equiv \int d^{D+1}x e^{iq \cdot x} \langle \alpha | T(x, 0) | \beta \rangle \quad (2.31.a)$$

$$T(x, y) = \theta(x^0 - y^0) A(x) B(y) + \theta(y^0 - x^0) B(y) A(x) \quad (2.31.b)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (2.31.c)$$

Depois de escolhidos convenientemente os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, calcula-se o propagador (2.31.a) via teoria de perturbações. O comutador procurado é então determinado pelo limite (2.30)¹⁾.

(iii) Devido à arbitrariedade na escolha da forma do conjunto de vínculos para uma teoria singular, pelos problemas citados na procura dos operadores quânticos corretos e na construção e realização de sua álgebra de comutação, percebe-se que não há de fato

¹⁾ A ref.[6] contém algumas deduções didáticas do limite BJL, e uma aplicação para o modelo sigma.

uma 'regra de ouro' para a quantização operatorial de sistemas vinculados. Na prática, os métodos disponíveis são misturados e modificados, dependendo do modelo sob estudo.

No caso das teorias de gauge, pode-se dispôr também das técnicas **BRST** (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) de quantização. Elas consistem, basicamente, em se adicionarem novos campos (chamados *fantasmas*) ao espaço de configurações da teoria, e descrever a dinâmica do espaço estendido por meio de uma lagrangeana (ou hamiltoniana) que não é mais invariante de gauge, mas sim invariante por certas transformações globais, chamadas de transformações BRST. Esta nova simetria, na verdade, contém e estende o conceito de invariância de gauge; por isso ela passa a ser tratada como a simetria básica do sistema quantizado. Na sua formulação hamiltoniana, por exemplo, partindo-se da hamiltoniana canônica, H_c , e dos P vínculos de 1a. classe, $\{\Gamma^m \approx 0, m = 1, \dots, P\}$, que satisfazem uma álgebra fechada,

$$\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = U_l^{mn} \Gamma^l, \quad (2.32.a)$$

$$\{H_c, \Gamma^m\} = V_n^m \Gamma^n, \quad (2.32.b)$$

introduzimos P pares de fantasmas, $\{\eta_m, \mathcal{P}^m; m = 1, \dots, P\}$, de estatística oposta à das funções Γ^m (se Γ for bosônico, o respectivo par de fantasmas será fermiônico; e *vice-versa*), e, por definição, canonicamente conjugados,

$$\{\eta_m(t, \mathbf{x}), \mathcal{P}^n(t, \mathbf{y})\}_+ = -\delta_m^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.33)$$

mais as propriedades $(\eta_m)^* = \eta_m, (\mathcal{P}^m)^* = -\mathcal{P}^m$. Escolhe-se então uma função fermiônica arbitrária $\Psi(\varphi, \Pi, \eta, \mathcal{P})$, definida no espaço estendido, e se constrói a nova hamiltoniana,

$$H_\Psi = H_c + \int d\mathbf{x} (\eta_m V_n^m \mathcal{P}^n - \{\Psi, \Omega\}_+) , \quad (2.34.a)$$

onde

$$\Omega = \int d\mathbf{x} \left(\eta_m \Gamma^m + \frac{1}{2} \eta_m \eta_n U_l^{mn} \mathcal{P}^l \right) \quad (2.34.b)$$

é a chamada **carga BRST**: uma quantidade anti-comutante (grassmaniana), real ($\Omega^* = \Omega$), e nilpotente no seguinte sentido

$$\{\Omega, \Omega\}_+ = 0. \quad (2.35)$$

Esta propriedade especial implica que

$$\{\Omega, H_\Psi\} = 0, \quad \forall \Psi, \quad (2.36)$$

o que mostra que Ω é uma carga conservada, candidata a gerador de transformações globais de simetria, através de

$$\delta F = \epsilon \{\Omega, F\} \quad (2.37)$$

onde ϵ é um parâmetro grassmanniano infinitesimal. A nilpotência (2.35) garante a integrabilidade da transformação (2.37), que é a simetria BRST procurada.

Note que a carga (2.34.b) depende das funções Γ^m , que definiam os vínculos, e dos coeficientes de estrutura U_l^{mn} da teoria de gauge original, e que a nilpotência (2.35) depende diretamente das propriedades algébricas de 1a. classe (2.32). É neste sentido que a carga BRST captura dentro de si toda a estrutura de gauge da teoria. Por outro lado, o fato de que a propriedade (2.36) seja satisfeita para qualquer Ψ escolhido é a memória da liberdade de gauge do modelo: diferentes escolhas para Ψ representam a teoria em diferentes gauges.

Mas é a nível quântico que a técnica BRST se torna ainda mais poderosa. A carga BRST passa a ser um operador linear hermitiano ($\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$), e o espaço de Hilbert físico fica restrito por

$$\hat{\Omega}|\text{fis}\rangle = 0 \quad , \quad (2.38)$$

restrição que se mostra^[30] equivalente às condições antigas. $\hat{\Gamma}^m|\text{fis}\rangle = 0$, $m = 1, \dots, P$, como era desejado para que enfim as duas técnicas de quantização definissem o mesmo espectro. A consistência de (2.38) exige que

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}]_+ |\text{fis}\rangle = 0 \quad , \quad (2.39)$$

onde $[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}]_+ = 2\hat{\Omega}^2$, de modo que a propriedade $\hat{\Omega}^2 = 0$ é a tradução quântica da nilpotência (2.35). Mas não há nenhuma garantia, a priori, de que a nilpotência se mantenha no nível quântico, por causa dos usuais problemas de definição de operadores compostos. Se ocorrer

$$\hat{\Omega}^2 = \mathcal{A} \neq 0 \quad . \quad (2.40)$$

então a simetria BRST (e, por extensão, a de gauge) será anômala, constituindo assim um critério alternativo para a detecção de anomalias em teorias de gauge.

Para uma introdução didática à teoria BRST, sugerimos as referências [9] e [20.b]; e para uma definição completa da carga BRST, a referência [20.a].

(II) Técnicas Funcionais

Trata-se de uma apresentação alternativa para as amplitudes de transição, $\langle \psi' | \psi \rangle$, em termos de integrais funcionais¹⁾, que confere à ação $S[\varphi]$ do sistema um *status* diferente do que ela tinha a nível clássico. As amplitudes, ou funções de Green, são calculadas a partir da amplitude vácuo-vácuo, chamada de **funcional gerador**,

$$W[j] \equiv \langle 0|0 \rangle_j = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi; j]} \quad , \quad (2.41)$$

¹⁾ Também chamadas de integrais de trajetória ou de Feynman.

$$\mathcal{D}\varphi \equiv \prod_{a=1}^N \mathcal{D}\varphi_a \quad ; \quad \mathcal{N} = \text{fator de normalização} \quad , \quad (2.42)$$

$$S[\varphi; j] = \int dV (\mathcal{L}(\varphi) + j^a \varphi_a) \quad , \quad (2.43)$$

onde $\{j^a\}$ são correntes (fontes) externas; $S[\varphi, 0]$ é a ação clássica do modelo. As funções de Green de n pontos serão dadas por

$$\begin{aligned} G_{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \langle 0 | T \hat{\varphi}_{a_1}(x_1) \dots \hat{\varphi}_{a_n}(x_n) | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \varphi_{a_1}(x_1) \dots \varphi_{a_n}(x_n) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = (-i\hbar)^n \frac{\delta}{\delta j^{a_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j^{a_n}(x_n)} W[j] \Big|_{j=0} \quad . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dentre estas, as chamadas funções de Green conexas são as geradas por outro funcional, $Z[j]$, definido por

$$W[j] = e^{iZ[j]} \quad . \quad (2.45)$$

segundo

$$\begin{aligned} G_{a_1 \dots a_n}^c(x_1, \dots, x_n) &\equiv \langle 0 | T \hat{\varphi}_{a_1}(x_1) \dots \hat{\varphi}_{a_n}(x_n) | 0 \rangle^c = \\ &= (-i\hbar)^n \frac{\delta}{\delta j^{a_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j^{a_n}(x_n)} iZ[j] \Big|_{j=0} \quad , \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como mostra (2.44), as funções de Green são exemplos de médias funcionais do tipo

$$\langle \mathcal{O}(\varphi) \rangle \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{O}(\varphi) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} \quad , \quad (2.47)$$

que corresponde ao valor esperado no vácuo do respectivo operador temporalmente ordenado

$$\langle \mathcal{O}(\varphi) \rangle = \langle 0 | T \hat{\mathcal{O}}(\hat{\varphi}) | 0 \rangle \quad . \quad (2.48)$$

Este conjunto de definições e suas propriedades, que constituem a instrumentação básica da quantização funcional, oferece uma alternativa para definirmos as simetrias da teoria quântica. Consideremos, por exemplo, a função de partição do sistema, definida por

$$Z \equiv \langle I \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} \quad . \quad (2.49)$$

Como toda integral funcional é invariante pela troca de variáveis, quer dizer, $\int \mathcal{D}\varphi F(\varphi) \equiv \int \mathcal{D}\varphi' F(\varphi')$, podemos tomar uma mudança de forma infinitesimal nas variáveis de campo,

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi_a'(x) = \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \quad , \quad (2.50)$$

e estudar esta invariância para Z :

$$\begin{aligned}
\delta Z = 0 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(\varphi + \bar{\delta}\varphi) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi + \bar{\delta}\varphi]} - \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \left\{ 1 + \int d^{D+1}y \frac{\delta}{\delta\varphi_a}(\bar{\delta}\varphi_a) \right\} \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} \int d^{D+1}y L^a \bar{\delta}\varphi_a \right\} e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} + \\
&\quad - \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = \\
&= \int d^{D+1}y \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \left(\frac{i}{\hbar} L^a \bar{\delta}\varphi_a + \frac{\delta}{\delta\varphi_a}(\bar{\delta}\varphi_a) \right) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = \\
&= \int d^{D+1}y \left\langle \frac{i}{\hbar} L^a \bar{\delta}\varphi_a + \frac{\delta}{\delta\varphi_a}(\bar{\delta}\varphi_a) \right\rangle , \tag{2.51}
\end{aligned}$$

onde L^a são as derivadas lagrangeanas para a ação clássica ($L^a = 0$ são as equações clássicas de movimento). A menos de condições de contorno e hipóteses de regularidade, as funções $\bar{\delta}\varphi_a(x)$ são arbitrárias, e portanto (2.51) implica que

$$\langle L^a \bar{\delta}\varphi_a \rangle = \left\langle i\hbar \frac{\delta}{\delta\varphi_a}(\bar{\delta}\varphi_a) \right\rangle . \tag{2.52}$$

Embora o lado direito da equação acima contenha, em geral, divergências mal definidas (do tipo $\delta(0)$) — o que indica que as manipulações usadas até aqui são formais — este termo representa uma quantidade que geralmente **não** se anula. Isto parece incompatível com as equações clássicas de movimento, $L^a = 0$. Para compreendermos o que está se passando, tomemos a seguinte propriedade fundamental das integrais funcionais

$$\int \mathcal{D}\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi_a} F[\varphi] \equiv 0 , \tag{2.53}$$

isto é, que a integral funcional de uma derivada funcional se anula identicamente; para o caso em que $F[\varphi] = f[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]}$, temos

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\varphi \left\{ \frac{\delta f}{\delta\varphi_a} + \frac{i}{\hbar} f \frac{\delta S}{\delta\varphi_a} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} &= \left\langle \frac{\delta f}{\delta\varphi_a} + \frac{i}{\hbar} f L^a \right\rangle = 0 \implies \\
\implies \langle f L^a \rangle &= i\hbar \left\langle \frac{\delta f}{\delta\varphi_a} \right\rangle , \tag{2.54}
\end{aligned}$$

de modo que $\langle L^a \rangle = 0$ (basta tomarmos $f = 1$), mas que em geral $\langle f[\varphi] L^a \rangle \neq 0$! Previnidos dessa possibilidade, suponhamos que a transformação de forma (2.50) seja uma simetria da ação clássica, e que portanto haja uma corrente J^μ que satisfaça, para todas as configurações ,

$$L^a \bar{\delta}\varphi_a = \partial_\mu J^\mu \implies \langle L^a \bar{\delta}\varphi_a \rangle = \langle \partial_\mu J^\mu \rangle , \tag{2.55}$$

o que, quando comparado com (2.55), indica que não há garantia de que a corrente de Noether será também conservada na teoria quântica,

$$\langle \partial_\mu J^\mu \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle \quad , \quad (2.56.a)$$

$$\mathcal{A} \equiv i\hbar \frac{\delta}{\delta \varphi_a} (\bar{\delta} \varphi_a) \quad . \quad (2.56.b)$$

Se $\langle \mathcal{A} \rangle \neq 0$, teremos uma anomalia. Esta caracterização é interessante porque permite classificar *todas* as transformações infinitesimais; de acordo com (2.52), dada uma transformação $\varphi_a \rightarrow \varphi + \bar{\delta} \varphi_a$, vale

$$\langle L^a \bar{\delta} \varphi_a \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle \quad . \quad (2.56.c)$$

e se $\langle \mathcal{A} \rangle \neq 0$, haverá um desvio do resultado clássico ($L^a = 0$); e então diremos que a transformação $\varphi_a \rightarrow \varphi_a + \bar{\delta} \varphi_a$ é anômala (independente de ser uma simetria clássica ou não).

A quantidade $\mathcal{A}$, definida formalmente por (2.56.b), representará a anomalia no formalismo funcional. Sua natureza quântica se revela pela presença (multiplicativa) da constante de Planck, $\hbar$. E se retornarmos ao cálculo (2.51), veremos que ela surge como o fator jacobiano na transformação da medida de integração funcional,

$$\mathcal{D}\varphi \longrightarrow \mathcal{D}\varphi \left\{ 1 + \frac{1}{i\hbar} \int d^{D+1}y \mathcal{A} \right\} \quad , \quad (2.57)$$

precisamente a interpretação de K.Fujikawa^{[31],[32]}, cuja técnica de cálculo dos jacobianos anômalos se tornou um método padrão, válido para todas as anomalias conhecidas.

Assim como fizemos para a função de partição (2.49), podemos explorar a invariância por mudanças das variáveis nas integrais funcionais que definem as funções de Green:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(\varphi + \bar{\delta} \varphi) \prod_{j=1}^n (\varphi_{a_j}(x_j) + \bar{\delta} \varphi_{a_j}(x_j)) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi + \bar{\delta} \varphi]} + -\mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \left\{ 1 + \int d^{D+1}y \frac{\delta}{\delta \varphi_a} (\bar{\delta} \varphi_a) \right\} \cdot \\ &\cdot \left\{ \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) + \sum_{j=1}^n [\varphi_{a_1}(x_1) \dots \bar{\delta} \varphi_{a_j}(x_j) \dots \varphi_{a_n}(x_n)] \right\} \cdot \left\{ 1 + \int d^{D+1}y \frac{i}{\hbar} L^a \bar{\delta} \varphi_a \right\} e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} + \\ &- \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \left\{ \int d^{D+1}y \frac{i}{\hbar} (L^a \bar{\delta}\varphi_a - \mathcal{A}) \right\} \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} + \\
&\quad + \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \sum_{j=1}^n [\varphi_{a_1}(x_1) \dots \bar{\delta}\varphi_{a_j}(x_j) \dots \varphi_{a_n}(x_n)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} = \\
&= \left\langle \left\{ \int d^{D+1}y \frac{i}{\hbar} (L^a \bar{\delta}\varphi_a - \mathcal{A}) \right\} \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \langle \varphi_{a_1}(x_1) \dots \bar{\delta}\varphi_{a_j}(x_j) \dots \varphi_{a_n}(x_n) \rangle, \quad (2.56) \\
&\Rightarrow \left\langle \int d^{D+1}y L^a \bar{\delta}\varphi_a \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle - i\hbar \sum_{j=1}^n \langle \varphi_{a_1}(x_1) \dots \bar{\delta}\varphi_{a_j}(x_j) \dots \varphi_{a_n}(x_n) \rangle = \\
&= \left\langle \int d^{D+1}y \mathcal{A} \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Esta identidade pode servir-nos para vários fins. No capítulo 4, por exemplo, ela será utilizada para calcularmos as funções de correlação do campo gravitacional quantizado. Mas a aplicação mais conhecida é o estudo das identidades de Ward em teorias de gauge: supondo que os campos de matéria se transformem com

$$\varphi_a \longrightarrow \varphi_a - i\varepsilon(x)q_a\varphi_a, \quad (2.58.a)$$

(onde $\varepsilon(x)$ é um parâmetro local infinitesimal e $\{q_a\}$ são constantes), que corresponde à forma infinitesimal de uma transformação de gauge local, $\varphi_a \rightarrow \exp(-i\varepsilon(x)q_a)\varphi_a$, e supondo que

$$L^a \bar{\delta}\varphi_a = -i\varepsilon(x)q_a\varphi_a L^a = \varepsilon(x)\partial_\mu j^\mu, \quad (2.58.b)$$

(o que indica que a corrente j^μ é uma corrente classicamente conservada, ligada à simetria global para $\varepsilon(x) = \varepsilon$ constante), a identidade (2.57) implicará neste caso,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \int d^{D+1}y \varepsilon(y)\partial_\mu j^\mu(y) \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle - \hbar \sum_{i=1}^n q_{a_i} \varepsilon(x_i) \left\langle \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle = \\
&= \left\langle \int d^{D+1}y \mathcal{A} \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle. \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Para a escolha particular $\varepsilon(y) = \alpha\delta(x-y)$, isto é, uma transformação localizada no ponto x , a última igualdade implicará em

$$\left\langle \partial_\mu j^\mu(x) \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle - \hbar \sum_{i=1}^n q_{a_i} \delta(x-x_i) \left\langle \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathcal{A} \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right\rangle . \quad (2.60.a)$$

ou seja, de acordo com (2.48).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} < 0 | T \left(j^\mu(x) \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right) | 0 > - \hbar \sum_{i=1}^n q_{a_i} \delta(x - x_i) < 0 | T \left(\prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right) | 0 > = \\ = < 0 | T \left(\mathcal{A}(x) \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right) | 0 > . \end{aligned} \quad (2.60.b)$$

Se a simetria de gauge não for anômala, $\mathcal{A}(x) = 0$, e as funções de Green satisfarão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} < 0 | T \left(j^\mu(x) \prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right) | 0 > + \\ - \hbar \sum_{i=1}^n q_{a_i} \delta(x - x_i) < 0 | T \left(\prod_{j=1}^n \varphi_{a_j}(x_j) \right) | 0 > = 0 , \end{aligned} \quad (2.60.c)$$

chamadas de identidades de Ward. O primeiro termo dessa identidade é uma função de Green de n pontos com a inserção da corrente j^μ , classicamente conservada, o que é representado graficamente por

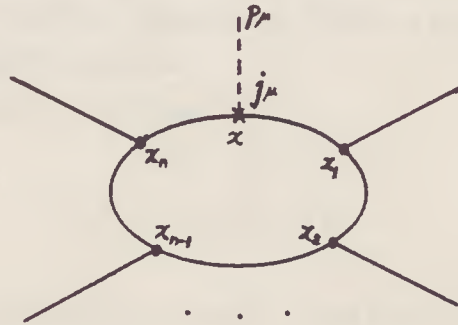


fig. 2.1

O cálculo é feito perturbativamente (há ótimos exemplos nas referências [6] e [29]); fazendo-se uma transformada de Fourier, o divergente $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ é substituído pela contração com o momentum p_μ da corrente j^μ . Se o resultado assim obtido cancelar (ordem a ordem de perturbação) o segundo termo de (2.60.c), diremos que a identidade de Ward é satisfeita e, por conseguinte, $\mathcal{A} = 0$. Trata-se de uma técnica alternativa para detecção de anomalias:

verificar as identidades de Ward via diagramas de Feynman do tipo indicado pela figura 2.1 . Um dos aspectos mais relevantes deste procedimento é que ele revela que as ‘fontes’ de anomalias são os diagramas de “loop”. Por exemplo, as anomalias na corrente axial em teorias de gauge vetoriais^{[29],[33]} em 4 dimensões vêm de gráficos do tipo triângulo,

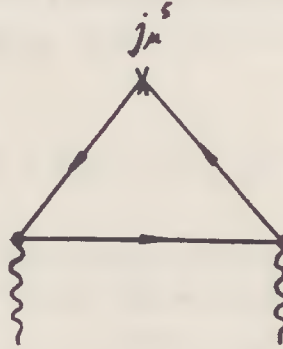


fig 2.2

Na referência [37] é mostrado o cálculo da anomalia gravitacional para férmions em duas dimensões (que dá origem à gravitação quântica induzida bidimensional, que será analisada no capítulo 4) a partir das correções de 1 “loop” (gráficos do tipo bolha) de férmions. São também correções de “loop” que, por meio do limite B JL (2.30), introduzem as extensões anômalas na álgebra dos comutadores de correntes (vide ref.[6]).

Esta relação entre anomalias e correções de “loop” também pode ser estabelecida através da chamada ação efetiva do sistema. Para tanto, tomemos o funcional $Z[j]$, gerador de funções de Green conexas, definido em (2.45), e façamos sobre ele uma transformada de Legendre da seguinte maneira:

Definimos os funcionais $\varphi_a^{(c)}(x, j)$ como

$$\varphi_a^{(c)}(x, j) = \frac{\delta}{\delta j^a(x)} Z[j] \quad . \quad (2.61)$$

Suponhamos então que as N equações funcionais acima possam ser invertidas para

$$j^a(x) = j_{(c)}^a(x, \varphi^{(c)}) \quad . \quad (2.62)$$

O índice (c) serve para lembrarmos que $\varphi_a^{(c)}$ é uma função (um c -número) que não deve ser confundido com o campo quântico φ_a . Definimos então um novo funcional

$$\Gamma[\varphi^{(c)}] = \left(\hbar Z[j] - \int d^{D+1}x \, j^a(x) \varphi_a^{(c)}(x) \right) \Big|_{j(x)=j_{(c)}(x, \varphi^{(c)})} \quad , \quad (2.63)$$

que gera as funções de Green próprias¹⁾

$$\Gamma_{a_1 \dots a_n}^{(n)} = \frac{\delta}{\delta \varphi_{a_1}^{(c)}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \varphi_{a_n}^{(c)}(x_n)} \frac{1}{\hbar} \Gamma[\varphi^{(c)}] \quad . \quad (2.64)$$

O funcional (2.63) pode ser calculado perturbativamente, e o que se mostra^[29] é que em ordem mais baixa em $\hbar$ (diagramas de ‘árvore’) ele coincide com a ação clássica $S[\varphi^{(c)}]$, de modo que podemos escrever

$$\Gamma[\varphi^{(c)}] = S[\varphi^{(c)}] + \Gamma_{loop}[\varphi^{(c)}] \quad . \quad (2.65)$$

Neste sentido, $\Gamma[\varphi^{(c)}]$ generaliza a ação clássica para ordens superiores em $\hbar$. Ela carrega consigo as correções quânticas dos “loops” que, como já vimos, são a fonte das anomalias. Assim, podemos dizer que uma simetria clássica é anômala se a ação efetiva não exibir essa simetria, e que a responsável por uma possível anomalia é a parcela Γ_{loop} .

Mas para se fazer um julgamento correto, é importante saber que Γ_{loop} — e portanto Γ — é definida a menos de funcionais locais nos campos; usando essa liberdade de regularização de Γ , pode-se eventualmente recuperar uma simetria (é o que é feito na referência [37] para garantir a invariância sob transformações de coordenadas na gravitação efetiva). No modelo de férmions de Dirac (não massivos) acoplados a campos de gauge, essa liberdade é usada para se escolher qual das duas simetrias (a de gauge ou a axial) será preservada — uma questão de hierarquia ...

Uma vez feita essa escolha, temos à disposição uma ‘ação quântica’ para o sistema, $\Gamma(\varphi)$, à qual se podem associar equações (quânticas) de movimento que, segundo (2.65), se relacionam com as equações clássicas ($L_{(c)}^a = 0$) por

$$L_{(q)}^a = L_{(c)}^a + \frac{\delta \Gamma_{loop}}{\delta \varphi_a} = 0 \quad . \quad (2.66)$$

quer dizer, as ‘trajetórias quânticas’ satisfazem

$$L_{(c)}^a = - \frac{\delta \Gamma_{loop}}{\delta \varphi_a} \quad . \quad (2.67)$$

Isto nos faz lembrar do resultado (2.56.c), que foi interpretado por I. Tsutsui^[34] como as equações quânticas de campo. Por isso Γ_{loop} pode ser compreendido como a forma integral da anomalia.

¹⁾ Também chamadas de funções de Green 1-PI (“one particle irreducible”).

Encerraremos este capítulo com algumas observações adicionais:

(i) É possível realizar a quantização funcional de uma sistema a partir de sua formulação hamiltoniana: basta recorrermos à ação definida no espaço de fase. Para sistemas regulares, por exemplo, o funcional gerador será dado por

$$W[j] = \int \mathcal{D}\mu e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi, \Pi, j]} \quad (2.68.a)$$

$$\mathcal{D}\mu \equiv \prod_{a=1}^N \mathcal{D}\varphi_a \mathcal{D}\Pi^a, \quad (2.68.b)$$

$$S[\varphi, \Pi, j] = \int d^{D+1}x \{ \Pi^a \dot{\varphi}_a - \mathcal{H}(\varphi_b, \Pi^b; x) + j^a \varphi_a \}. \quad (2.68.c)$$

Se o sistema for vinculado, algumas modificações serão necessárias^[9]: sendo $\{\Omega^m \approx 0, m = 1, \dots, 2(P+S)\}$ o conjunto de 2a. classe de todos os vínculos (os $2S$ vínculos internos de 2a. classe, os P vínculos internos de 1a. classe e os P vínculos fixadores de gauge), calculamos a matriz

$$\Delta^{mn} = \{\Omega^m, \Omega^n\}_{PB}. \quad (2.69)$$

O funcional gerador será dado então por (2.68.a), mas a medida de integração se generalizará para

$$\mathcal{D}\mu = (\det \Delta)^{1/2} \prod_{m=1}^{2(P+S)} \delta(\Omega^m) \prod_{a=1}^N \mathcal{D}\varphi_a \mathcal{D}\Pi^a, \quad (2.70)$$

e (2.68.c) será construída com a hamiltoniana canônica, $\mathcal{H}_c(\varphi_b, \Pi^b; x)$.

Numa teoria de gauge, a medida (2.70) envolve uma fixação de gauge; isto é necessário porque a enorme degenerescência dos graus de liberdade, que caracteriza esse tipo de teoria, levaria a um funcional gerador mal definido, caso usássemos a medida simples (2.68.b). Também na formulação lagrangeana a fixação de gauge e correção da medida são necessárias (vide item 12-2-2 *Integração sobre o Grupo de Gauge*, ref.[29]). Mas se a simetria de gauge for anômala, não há permissão a priori para escolhermos o gauge na teoria quântica — o que inviabilizará, na prática, os cálculos com propagadores e regras de Feynman, e exigirá formulações alternativas (vide ref.[35]). No capítulo 3, a possibilidade de bosonizarmos a teoria fermiônica em duas dimensões servirá para encontrarmos uma alternativa para a anomalia de gauge do modelo. Pode-se tentar também encontrar termos de Wess-Zumino (WZ), indicados por $\Gamma_{WZ}[\varphi_a, g]$, que em geral envolvem novos campos g (chamados campos de WZ), de tal modo que para o gerador

$$W[j] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}g e^{\frac{i}{\hbar} (S[\varphi, j] + \Gamma_{WZ})} \quad (2.71)$$

não haja mais anomalias (a variação $\delta\Gamma_W Z$ cancela a anomalia vinda do jacobiano), mas de modo que a teoria quântica assim construída tenha os mesmos observáveis (funções de Green) que a formulação anômala. O cancelamento da anomalia em (2.71) permitirá que enfim se façam as escolhas de gauge convenientes. No capítulo 3 usaremos esse recurso para cancelar a anomalia de Siegel^[23] do modelo bosônico quiral.

(ii) Como dissemos, a relação (2.56.b) define as anomalias de maneira apenas formal, embora esclareça a sua ligação com fatores jacobianos na medida de integração funcional. Num trabalho recente^[34], contudo, I. Tsutsui utilizou diretamente a igualdade (2.56.c) para *calcular* as anomalias quirais das teorias de gauge fermiônicas (nos casos abeliano e não-abeliano), encontrando os mesmos resultados conhecidos de Fujikawa. A idéia básica é encontrar uma regularização adequada para a quantidade $\langle L^a \bar{\delta}\varphi_a \rangle$, que na concepção do autor significa encontrar as equações quânticas de movimento e, através delas, a anomalia.

(iii) Examinemos com um pouco mais de detalhe o uso da ação efetiva no estudo das anomalias em teorias de gauge. Dividimos o conjunto de campos em duas partes: os campos de gauge, que denotaremos por $\{A_\mu(x)\}$, e os chamados campos de matéria, $\{\Phi_a(x)\}$. A lagrangeana clássica desse sistema de campos se divide em duas parcelas do tipo

$$\mathcal{L}_{(c)}(\Phi, A) = \mathcal{L}_1(A) + \mathcal{L}_2(\Phi, A) \quad , \quad (2.72)$$

sendo cada uma invariante de gauge independentemente (para a eletrodinâmica, por exemplo, $\mathcal{L}_1(A) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$; para a gravitação, $\mathcal{L}_1(g) = \sqrt{-g}R$). A transformação de gauge infinitesimal tem, em geral, a forma

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - D_\mu \varepsilon \quad , \quad (2.73.a)$$

onde D_μ é a chamada *derivada covariante*, e

$$\Phi_a \longrightarrow \Phi_a + \delta_\varepsilon \Phi_a \quad , \quad (2.73.b)$$

para algum $\delta_\varepsilon \Phi_a$ conveniente. Dado um funcional $F[A]$, temos

$$\begin{aligned} F[A_\mu - D_\mu \varepsilon] &= F[A_\mu] - \int d^{D+1}x \, D_\mu \varepsilon \cdot \frac{\delta F}{\delta A_\mu} = \\ &= F[A_\mu] + \int d^{D+1}x \, \varepsilon D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} F \quad , \end{aligned} \quad (2.74)$$

isto é, o gerador das transformações de gauge é $D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu}$, e um funcional F será invariante de gauge se

$$D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} F = 0 \quad . \quad (2.75)$$

Consideremos então a função de partição da teoria quântica obtida de (2.72),

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_1(A)} \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_2(\Phi, A)} , \quad (2.76)$$

o que sugere examinarmos a quantização em duas etapas: primeiro, tratemos os campos de gauge como campos externos (não quânticos), e examinemos o funcional

$$e^{\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_2(\Phi, A)} . \quad (2.77)$$

Suponhamos que a medida $\mathcal{D}\Phi$ dos campos de matéria não seja invariante de gauge, gerando uma anomalia; isto significa que embora $\mathcal{L}_2(\Phi, A)$ fosse invariante de gauge, a ação efetiva $\Gamma[A]$, obtida nesta primeira etapa da quantização, não o será

$$D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma[A] = \mathcal{A} \neq 0 . \quad (2.78)$$

Esta é a técnica usada na ref.[37], por exemplo, para caracterizar anomalias gravitacionais e de gauge.

Vamos prosseguir com a quantização, integrando sobre os campos de gauge,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A e^{\frac{i}{\hbar} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_1(A) + \Gamma[A]} . \quad (2.79)$$

Supondo que a medida $\mathcal{D}A$ seja invariante de gauge (isto é, que a anomalia venha exclusivamente da medida da matéria), a ação efetiva completa

$$S_{ef}[A] = \int d^{D+1}x \mathcal{L}_1(A) - i\hbar \Gamma[A] \quad (2.80)$$

já conterá todas as correções de “loops”. Suas equações de movimento,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta A_\mu} S_{ef} = 0 &= \frac{\delta}{\delta A_\mu} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_1(A) - i\hbar \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma[A] \implies \\ \implies D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_1(A) &= i\hbar D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma[A] \end{aligned} \quad (2.90)$$

continuarão valendo a nível quântico como valores esperados,

$$\left\langle D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \int d^{D+1}x \mathcal{L}_1(A) \right\rangle = i\hbar \left\langle D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \Gamma[A] \right\rangle . \quad (2.91)$$

Mas a invariância de gauge da parcela $\mathcal{L}_1(A)$ nos diz que o lado esquerdo de (2.91) é nulo; e o lado direito é nada menos que o valor esperado da anomalia, de modo que

$$\langle \mathcal{A} \rangle = 0 . \quad (2.92)$$

Portanto, a anomalia é verificada na primeira etapa da quantização, quer dizer, (2.78) deve ser entendido como

$$\langle \mathcal{A} \rangle_A \neq 0, \quad (2.93)$$

onde o sub-índice A significa 'no campo externo A_μ '; mas no nível quântico 'completo' valerá (2.92).

Isto não significa que não exista anomalia: a ação efetiva (2.80) de fato **não** é invariante de gauge, o que, em última análise, é o que caracteriza corretamente a anomalia. O que ocorre é que, segundo as equações de movimento clássicas, $\mathcal{A} \neq 0$, enquanto as equações quânticas implicam que $\mathcal{A} = 0$.

Este comportamento é verificado, por exemplo, em teorias de gauge quirais^[35] como a que examinaremos no capítulo 3; também a anomalia conforme da gravitação induzida (capítulo 4) se cancela pelas equações quânticas do campo do gráviton. Espera-se que isso ocorra em geral, nas teorias de gauge consistentes, para as correntes que constituam a 'fonte' dos campos de gauge.

Capítulo 3

ELETRODINÂMICA QUÂNTICA ESCALAR QUIRAL EM DUAS DIMENSÕES

O notável desenvolvimento das teorias de campos bidimensionais, especialmente estimulado pelas promissoras teorias de cordas, resultou num poderoso conjunto de técnicas que, mesmo enquanto usadas para estudar a física em duas dimensões, podem servir de guia — ou inspiração — para aqueles que pretendem compreender fenômenos físicos em dimensões superiores.

As técnicas de bosonização, por exemplo, oferecem uma alternativa para a descrição de teorias fermiônicas em duas dimensões: uma possibilidade especialmente útil se a teoria fermiônica em questão tiver uma simetria de gauge anômala. De fato, tais modelos se revelaram um importante laboratório teórico para o estudo das anomalias em teorias de campo.

Isto será ilustrado neste capítulo, onde realizaremos a quantização canônica da versão escalar do modelo de Schwinger quiral, uma típica teoria de gauge anômala.

(I) Modelo de Schwinger Quiral

Nas unidades em que $\hbar = c = 1$ e segundo as convenções reunidas no Apêndice A, o modelo de Schwinger quiral, que descreve a dinâmica de um campo ψ de férmions de Dirac sem massa em duas dimensões, que interage, através de uma de suas componentes quirais, com um campo de gauge A_μ abeliano, é dado pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} \gamma^\mu \left[i \partial_\mu + 2\sqrt{\pi} A_\mu \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \right] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad (3.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad . \quad (3.2)$$

Em termos das componentes quirais de ψ e $\bar{\psi}$,

$$\psi_\pm = \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \psi \quad , \quad (3.3.a)$$

$$\bar{\psi}_\pm = \bar{\psi} \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \quad , \quad (3.3.b)$$

podemos reescrever

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu \left[i\partial_\mu + 2\sqrt{\pi}A_\mu \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \right] \psi = \\ = i\bar{\psi}_-\gamma^\mu\partial_\mu\psi_- + i\bar{\psi}_+\gamma^\mu\partial_\mu\psi_+ + 2\sqrt{\pi}A_\mu\bar{\psi}_+\gamma^\mu\psi_+ \quad , \end{aligned}$$

o que mostra que ψ_- é um campo quiral livre, enquanto ψ_+ se acopla com o campo A_μ através da corrente

$$J_+^\mu \equiv 2\sqrt{\pi}\bar{\psi}_+\gamma^\mu\psi_+ \quad . \quad (3.4)$$

As equações de Euler-Lagrange deduzidas de (3.1) são

$$L_{\bar{\psi}_-} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_- = 0 \quad (L_{\psi_-} = -i\partial_\mu\bar{\psi}_-\gamma^\mu = 0) \quad (3.5.a)$$

$$L_{\bar{\psi}_+} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_+ + 2\sqrt{\pi}A_\mu\gamma^\mu\psi_+ = 0 \quad (L_{\psi_+} = -i\partial_\mu\bar{\psi}_+\gamma^\mu + 2\sqrt{\pi}A_\mu\bar{\psi}_+\gamma^\mu = 0) \quad (3.5.b)$$

$$L_{A_\mu} = \partial_\nu F^{\nu\mu} + 2\sqrt{\pi}\bar{\psi}_+\gamma^\mu\psi_+ = \partial_\nu F^{\nu\mu} + J_+^\mu = 0 \quad . \quad (3.5.c)$$

Esta última equação mostra que a corrente J_+^μ serve de fonte para o campo eletromagnético representado por $F^{\mu\nu}$, quer dizer, as 'equações de Maxwell' de nosso modelo são

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J_+^\mu \quad , \quad \mu = 0, 1 \quad , \quad (3.6)$$

e a anti-simetria do tensor $F^{\mu\nu}$ assegura que essa corrente seja classicamente conservada

$$\partial_\mu J_+^\mu = 0 \quad . \quad (3.7)$$

Isto está ligado à simetria de gauge que o modelo possui: se considerarmos a seguinte transformação infinitesimal local,

$$\delta\psi_- = 0 \quad (\delta\bar{\psi}_- = 0) \quad , \quad (3.8.a)$$

$$\delta\psi_+ = i2\sqrt{\pi}\epsilon(x)\psi_+ \quad (\delta\bar{\psi}_+ = -i2\sqrt{\pi}\epsilon(x)\bar{\psi}_+) \quad , \quad (3.8.b)$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\epsilon(x) \quad , \quad (3.8.c)$$

onde $\epsilon(x)$ é uma parâmetro (comutante) infinitesimal, então, usando (3.5), encontraremos

$$\begin{aligned} \delta\bar{\psi}_+L_{\bar{\psi}_+} + L_{\psi_+}\delta\psi_+ + \delta\bar{\psi}_-L_{\bar{\psi}_-} + L_{\psi_-}\delta\psi_- + L_{A_\mu}\delta A_\mu = \\ = \partial_\mu [\epsilon(x) (\partial_\nu F^{\nu\mu} + J_+^\mu)] \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

o que, segundo o critério (1.16), significa que a corrente de Noether

$$j_\epsilon^\mu = \epsilon(x) (\partial_\nu F^{\nu\mu} + J_+^\mu) \quad (3.10)$$

é conservada para as trajetórias clássicas, e que a transformação (3.8) — cuja integrabilidade é facilmente verificada — é uma simetria local do modelo. Mas note que a corrente j_ϵ^μ satisfaz $\partial_\mu j_\epsilon^\mu = 0$ para qualquer $\epsilon(x)$; em particular para $\epsilon(x) = \alpha = \text{constante}$, o que implica que

$$\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0 = \alpha(\partial_\mu \cancel{\partial_\nu} F^{\nu\mu} + \partial_\mu J_+^\mu) \quad . \quad (3.11)$$

Logo, a conservação (3.7) é uma consequência da simetria de gauge global, um caso particular de (3.8).

Para termos uma visão completa da dinâmica do modelo, vamos examiná-lo também sob a ótica hamiltoniana: definimos os momentos

$$\mathcal{P}_\pm^\dagger = \frac{\overleftarrow{\partial} \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_o \psi_\pm)} = i\bar{\psi}_\pm \gamma^o = i\psi_\pm^\dagger \quad , \quad (3.12.a)$$

$$\mathcal{P}_\pm = \frac{\overrightarrow{\partial} \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_o \psi_\pm^\dagger)} = 0 \quad , \quad (3.12.b)$$

$$\Pi_o = \eta_{o\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_o A_\mu)} = 0 \quad (3.12.c)$$

$$\Pi_1 = \eta_{1\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial_o A_\mu)} = F_{10} = \partial_1 A_o - \partial_o A_1 \quad , \quad (3.12.d)$$

que satisfazem os parênteses de Poisson canônicos

$$\{\mathcal{P}_\pm^\dagger(t, x), \psi_\pm(t, y)\}_+ = \delta(x - y) \quad , \quad (3.13.a)$$

$$\{\psi_\pm^\dagger(t, x), \mathcal{P}_\pm(t, y)\}_+ = \delta(x - y) \quad , \quad (3.13.b)$$

$$\{A_\mu(t, x), \Pi_\nu(t, y)\} = \eta_{\mu\nu} \delta(x - y) \quad . \quad (3.13.c)$$

Podemos resolver (3.12.d) para a velocidade $\partial_o A_1 = \partial_1 A_o - \Pi_1$, mas as demais equações implicam em vínculos sobre o espaço de fase,

$$\bar{\Omega}_\pm = \mathcal{P}_\pm^\dagger - i\psi_\pm^\dagger \approx 0 \quad , \quad (3.14.a)$$

$$\Omega_\pm = \mathcal{P}_\pm \approx 0 \quad , \quad (3.14.b)$$

$$\Phi_o = \Pi_o \approx 0 \quad . \quad (3.14.c)$$

Construimos a hamiltoniana (total) do sistema vinculado,

$$H_t = \int dx (\mathcal{H}_c + \bar{u}_+ \Omega_+ + \bar{u}_- \Omega_- + \bar{\Omega}_+ v_+ + \bar{\Omega}_- v_- + w \Phi_o) \quad , \quad (3.14.d)$$

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}(\Pi_1)^2 + i\psi_+^\dagger(\psi_+)' - i\psi_-^\dagger(\psi_-)' - 2\sqrt{\pi}A_\mu\bar{\psi}_+\gamma^\mu\psi_+ + A_0(\Pi_1)' \quad (3.14.e)$$

(Adotaremos a notação usual, $\dot{B} \equiv \partial_0 B$ e $B' \equiv \partial_1 B$). Temos então que garantir a consistência dos vínculos, impondo sua invariância temporal, $\dot{\Omega} \approx \{\Omega, H_t\}_{PB} \approx 0$. Quando isto é feito para $\Omega_\pm$ e $\bar{\Omega}_\pm$, as equações de consistência implicam em condições sobre os multiplicadores $\bar{u}_\pm$ e $v_\pm$, por causa da álgebra de 2a. classe que estes vínculos realizam entre si.

$$\{\bar{\Omega}_\pm(x), \Omega_\pm(y)\}_+ = -i\delta(x-y) \quad (3.15)$$

Já a consistência de $\Phi_0 \approx 0$ gera um vínculo secundário.

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0 \approx \{\Phi_0, H_t\}_{PB} &\approx 2\sqrt{\pi}\bar{\psi}_+\gamma^0\psi_+ - \Pi_1' \approx 0 \implies \\ \implies \Phi_1 &= -\Pi_1' + 2\sqrt{\pi}\psi_+^\dagger\psi_+ \approx 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

o qual representa a 'lei de Gauss' de nosso modelo. Pode-se então verificar que este vínculo secundário é consistente, encerrando a cadeia de vínculos do sistema. Como $\bar{\Omega}_\pm$ e $\Omega_\pm$ são de 2a. classe, é conveniente eliminá-los (quer dizer, transformá-los em 'igualdades fortes') por meio dos parênteses de Dirac. Graças à simplicidade da álgebra (3.15) isto pode ser feito sem maiores dificuldades, resultando então a hamiltoniana total

$$H_t = \int dx (\mathcal{H}_c + w\Phi_0) \quad (3.17.a)$$

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}(\Pi_1)^2 + i(\psi_+^\dagger\psi_+' - \psi_-^\dagger\psi_-') + 2\sqrt{\pi}A_1\psi_+^\dagger\psi_+ - A_0\Phi_1 \quad (3.17.a)$$

com os parênteses de Dirac relevantes

$$\{\psi_\pm^\dagger(x), \psi_\pm(y)\}_{DB} = -i\delta(x-y) \quad (3.18.a)$$

$$\{A_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_{DB} = \eta_{\mu\nu}\delta(x-y) \quad (3.18.b)$$

e os dois vínculos restantes

$$\Phi_0 = \Pi_0 \approx 0 \quad (3.19.a)$$

$$\Phi_1 = -\Pi_1' + 2\sqrt{\pi}\psi_+^\dagger\psi_+ \approx 0 \quad (3.19.b)$$

Em termos dos parênteses (3.18), estes vínculos formam uma álgebra de 1a. classe abeliana.

$$\{\Phi_0, \Phi_0\}_{DB} = \{\Phi_0, \Phi_1\}_{DB} = \{\Phi_1, \Phi_1\}_{DB} = 0 \quad (3.20)$$

o que era esperado, já que o sistema exibe uma invariância de gauge. De fato, o vínculo primário de 1a. classe (3.19.a) compõe, junto com seu secundário (3.19.b), o gerador da

transformação de simetria (3.8), construído através do algoritmo de Anderson-Bergmann (veja capítulo 1),

$$G = - \int dx (\epsilon \Phi_0 - \epsilon \Phi_1) \quad . \quad (3.21)$$

A transformação infinitesimal de gauge de um funcional B será dada por $\delta B = \{G, B\}_{DB}$, e a integrabilidade dessa transformação será garantida pela álgebra abeliana (3.20).

A análise feita até aqui oferece material suficiente para tentarmos quantizar o modelo, seguindo alguma das técnicas discutidas no capítulo 2. Poderíamos, por exemplo, realizar sua quantização canônica, tomando como operador hamiltoniano

$$\hat{H} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\hat{\Pi}_1)^2 + i(\hat{\psi}_+^\dagger \hat{\psi}'_+ - \hat{\psi}_-^\dagger \hat{\psi}'_-) + 2\sqrt{\pi} A_1 \hat{\psi}_+^\dagger \hat{\psi}_+ \right\} \quad , \quad (3.22)$$

expresso em termos dos operadores $\hat{A}_\mu$, $\hat{\Pi}_\nu$, $\hat{\psi}_\pm^\dagger$ e $\hat{\psi}_\pm$, que satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\psi}_\pm^\dagger(x), \hat{\psi}_\pm(y)] = \delta(x-y) \quad . \quad (3.23.a)$$

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{\Pi}_\nu(y)] = i\eta_{\mu\nu} \delta(x-y) \quad . \quad (3.23.a)$$

e impondo os vínculos (3.19) como condições sobre os estados físicos,

$$\hat{\Pi}_0 |fis\rangle = 0 \quad . \quad (3.24.a)$$

$$(-\hat{\Pi}'_1 + 2\sqrt{\pi} \hat{\psi}_+^\dagger \hat{\psi}_+) |fis\rangle = 0 \quad . \quad (3.24.b)$$

Tais condições só seriam consistentes se os vínculos continuassem a satisfazer uma álgebra de comutação de 1a. classe, como em (3.20). Ocorre entretanto que o produto local de operadores $\hat{\psi}_+^\dagger \hat{\psi}_+$, que comparece no vínculo (3.19.b) — nossa lei de Gauss —, compromete o fechamento da álgebra: cálculos explícitos, via limite B JL^[35] ou pela técnica de “point-splitting”^[6], levam a

$$[\hat{\Phi}_1(x), \hat{\Phi}_1(y)] = \beta \delta'(x-y) \quad . \quad \beta \text{ constante} \quad (3.25)$$

O vínculo $\hat{\Phi}_1 \approx 0$ passa a ser de 2a. classe, indicando uma quebra da simetria de gauge. Interpretamos o lado direito de (3.25) como uma anomalia na álgebra dos geradores da transformação de gauge, de modo que a condição (3.24.b) não poderá ser implementada.

Também teríamos nos deparado com uma anomalia se tivéssemos escolhido os métodos funcionais: ao quantizarmos inicialmente os férmions, encontraríamos uma ação efetiva anômala para os campos de gauge

$$S_{ef}[A] = \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) - i\Gamma[A] \quad , \quad (3.26.a)$$

$$\epsilon^{\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \epsilon^i \int d^2x \, \bar{\psi}\gamma^{\mu} \left[i\partial_{\mu} + 2\sqrt{\pi}A_{\mu} \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \right] \psi \quad (3.26.b)$$

$$\partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta A_{\mu}} \Gamma[A] = \partial_{\mu} J_{+}^{\mu} = [(a-1)\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}] \partial_{\mu} A_{\nu} \neq 0 \quad (3.26.c)$$

onde a , chamado de parâmetro de massa de Jackiw-Rajaraman (JR)^[38], é uma constante indeterminada que surge na regularização da integral (3.26.b). A anomalia é originada pela não-invariância da medida fermiônica $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$, e para nos lembrarmos de que (3.26.c) é resultado dessa primeira fase da quantização, escrevemos a quebra na conservação da corrente como

$$\langle \partial_{\mu} J_{+}^{\mu} \rangle_A = [(a-1)\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}] \partial_{\mu} A_{\nu} \quad (3.27)$$

É um privilégio (típico de teorias em duas dimensões) que a ação efetiva $\Gamma[A]$ possa ser calculada exatamente^[24],

$$\Gamma[A] = \int d^2x \left\{ -F \frac{1}{2} F + F \frac{1}{2} \partial_{\mu} A^{\mu} + \frac{(1-a)}{2} A_{\mu} A^{\mu} \right\} \quad (3.28)$$

e, melhor ainda, que este funcional admita uma representação local, com o auxílio de um campo escalar real $\varphi(x)$,

$$\epsilon^{\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}\varphi \, \epsilon^i \int d^2x \left[\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi + (\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}) A_{\mu} \partial_{\nu} \varphi + \frac{a}{2} A_{\mu} A^{\mu} \right] \quad (3.29)$$

de modo que a função de partição $\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \epsilon^i \int d^2x \, \mathcal{L}_F$ possa ser substituída por

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\varphi \, \epsilon^i \int d^2x \, \mathcal{L}_B$$

$$\mathcal{L}_B = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}) A_{\mu} \partial_{\nu} \varphi + \frac{a}{2} A_{\mu} A^{\mu} \quad (3.30)$$

com a vantagem de que a medida $\mathcal{D}\varphi$ não sofre dos problemas anômalos que $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ apresentava; contudo, a lagrangeana bosônica $\mathcal{L}_B$ não é invariante de gauge: ela incorpora as correções de “loop” e, por isso, já carrega consigo as informações sobre a anomalia.

Como é possível estabelecer, quando desejado, uma relação entre os campos fermiônicos e o campo escalar (através das fórmulas de bosonização de Maldelstam^[39]), a proposta é trabalharmos diretamente com a lagrangeana (3.3).

(II) Eletrodinâmica Escalar com Acoplamento Quiral

Este é o nome que usaremos para o modelo descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_B = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}) A_{\mu} \partial_{\nu} \varphi + \frac{a}{2} A_{\mu} A^{\mu} \quad (3.30)$$

Respeitando a fórmula de bosonização ¹⁾, é conveniente definir como transformação de gauge,

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \Lambda(x) \quad , \quad (3.31.a)$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x) \quad , \quad (3.31.b)$$

e assim, a derivada covariante do campo escalar,

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + A_\mu \quad . \quad (3.32)$$

embora saibamos que a lagrangeana (3.30) não possua invariância de gauge. Isto fica mais claro quando reescrevemos (3.30) em termos das novas derivadas.

$$\mathcal{L}_B = \eta^{\mu\nu} D_\mu \varphi D_\nu \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu} A_\mu D_\nu \varphi + \frac{(a-1)}{2} A_\mu A^\mu \quad , \quad (3.33)$$

que, para $\Lambda(x) = \epsilon(x)$ infinitesimal, se transforma como

$$\mathcal{L}_B \longrightarrow \mathcal{L}_B - J_+^\mu \partial_\mu \epsilon + \partial_\mu (\epsilon (\varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad , \quad (3.34)$$

$$J_+^\mu = [(a-1)\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}] A_\nu \quad . \quad (3.35)$$

É interessante chamar (3.35) de J_+^μ porque tal definição implica em

$$\partial_\mu J_+^\mu = [(a-1)\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}] \partial_\mu A_\nu \quad , \quad (3.36)$$

reproduzindo corretamente a equação (3.27) da anomalia de gauge. Note que a relação (3.36) é aqui uma identidade, e que na sua 'versão bosônica', (3.35), a corrente J_+^μ não é a fonte do campo eletromagnético. Para esclarecer este ponto, vamos examinar as equações de movimento do modelo (3.30):

Introduzindo a notação

$$\tilde{F} = -\varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad ; \quad F^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu\nu} \tilde{F} \quad (3.37)$$

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad . \quad (3.38)$$

encontramos

$$L_\varphi = -\square \varphi - \partial_\mu A^\mu + \tilde{F} = 0 \quad . \quad (3.39.a)$$

¹⁾ Grosseiramente, os campos fermiônico e bosônico se relacionam através de uma exponencial,

$$\psi \sim: e^{i\alpha \varphi} :$$

$$L_{A_\mu} = \partial_\nu F^{\nu\mu} + \mathcal{J}^\mu = 0 \quad , \quad (3.39.b)$$

onde

$$\mathcal{J}^\mu = (\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu})\partial_\nu \varphi + aA^\mu \quad (3.40)$$

é, portanto, a corrente/fonte do campo eletromagnético neste modelo. A equação de movimento (3.39.b) garante que esta corrente seja conservada "on-shell" ,

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = \square \varphi + a\partial_\mu A^\mu = 0 \quad . \quad (3.41)$$

Reunindo este resultado à equação (3.39.a), encontramos

$$(a-1)\partial_\mu A^\mu + \tilde{F} = [(a-1)\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}]\partial_\mu A_\nu = 0 \quad , \quad (3.42)$$

o que significa que, de acordo com as equações de movimento da teoria escalar, a anomalia (3.27)/(3.36) se cancela: voltamos a ter $\partial_\mu J_+^\mu = 0$! Como discutimos no capítulo anterior, isto não quer dizer que a lagrangeana (3.30) seja invariante de gauge — e o que está explicitado em (3.34).

Mais algumas manipulações algébricas simples a partir de (3.39), e chegamos aos seguintes resultados:

(i) quando $a \neq 1$, valem

$$\square \varphi = \frac{a}{a-1} \tilde{F} \quad , \quad (3.43.a)$$

$$aA^\mu = (\varepsilon^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu})\partial_\nu \varphi - \varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu \tilde{F} \quad , \quad (3.43.b)$$

$$\left(\square + \frac{a^2}{a-1} \right) \tilde{F} = 0 \quad . \quad (3.34.c)$$

Esta última equação mostra que o campo eletromagnético, representado por sua única componente não nula em duas dimensões, $\tilde{F}$, tem uma massa gerada dinamicamente.

$$m^2 = \frac{a^2}{a-1} \quad . \quad (3.44)$$

e portanto, para evitarmos a presença de táquions, é preciso impôr $a = 0$ ou $a > 1$.

(ii) mas se $a = 1$, teremos

$$\square \varphi = 0 \quad . \quad (3.45.a)$$

$$A^\mu = (\varepsilon^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu})\partial_\nu \varphi \quad , \quad (3.45.b)$$

$$\tilde{F} = 0 \quad , \quad (3.45.c)$$

ou seja, um campo escalar livre e um campo de gauge puro. É interessante notar também que, para esta escolha particular do parâmetro a , a anomalia (3.27)/(3.36) se torna covariante.

$$\partial_\mu J_+^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = 2\tilde{F} \quad . \quad (3.46)$$

Passemos agora à formulação hamiltoniana do sistema (3.30), com vistas à sua quantização canônica. Começamos definindo os momentos

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial_o \varphi)} = \partial_o \varphi + A_o - A_1 \implies \dot{\varphi} = \Pi - A_o + A_1 \quad . \quad (3.47.a)$$

$$\Pi_o = \eta_{o\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial_o A_\mu)} = 0 \quad , \quad (3.47.b)$$

$$\Pi_1 = \eta_{1\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial(\partial_o A_\mu)} = \partial_1 A_o - \partial_o A_1 \implies \dot{A}_1 = A'_o - \Pi_1 \quad . \quad (3.47.c)$$

e os parênteses de Poisson canônicos

$$\{\varphi(x), \Pi(y)\}_{PB} = \delta(x-y) \quad , \quad (3.48.a)$$

$$\{A_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_{PB} = \eta_{\mu\nu} \delta(x-y) \quad . \quad (3.48.b)$$

demais nulos. Identificamos em (3.47.b) um vínculo primário.

$$\Omega_o = \Pi_o \approx 0 \quad , \quad (3.49)$$

e construímos a hamiltoniana total do sistema vinculado,

$$H_t = \int dx (\mathcal{H}_c + u \Omega_o) \quad . \quad (3.50.a)$$

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}(\Pi + \varphi' - A_o + A_1)^2 + \frac{1}{2}(\Pi_1)^2 - \Pi \varphi' + A_o \Pi_1 - \frac{a}{2}(A_o^2 - A_1^2) \quad . \quad (3.50.b)$$

A condição de consistência $\dot{\Omega}_o \approx \{\Omega_o, H_t\}_{PB} \approx 0$ gera um vínculo secundário — a lei de Gauss do modelo escalar :

$$\Omega_1 = -\Pi'_1 + \Pi + \varphi' + A_1 - (1-a)A_o \approx 0 \quad . \quad (3.51)$$

cuja consistência, por sua vez, implica em

$$\dot{\Omega}_1 \approx \{\Omega_1, H_t\}_{PB} \approx (1-a)A'_1 - \Pi_1 - (1-a)u \approx 0 \quad , \quad (3.52)$$

o que exige um exame separado dos casos $a \neq 1$ e $a = 1$.

(i) $a \neq 1$:

Neste caso, a equação (3.52) constitui uma condição sobre o multiplicador u ,

$$u \approx A_1' + \frac{1}{(a-1)} \Pi_1 \quad , \quad (3.53)$$

e não há mais vínculos secundários. Como Ω_o e Ω_1 formam uma álgebra de 2a. classe,

$$\{\Omega_o(x), \Omega_o(y)\}_{PB} = 0 \quad \quad \quad \{\Omega_1(x), \Omega_1(y)\}_{PB} = 0 \quad (3.54.a)$$

$$\{\Omega_o(x), \Omega_1(y)\}_{PB} = (1-a)\delta(x-y) \quad . \quad (3.54.b)$$

os vínculos podem ser então eliminados (transformados em identidades) se construirmos os parênteses de Dirac. Ocorre que, dentre os parênteses de Dirac assim construídos, somente aqueles que envolvem as variáveis A_o e Π_o diferem dos valores canônicos, e como podemos eliminar estas mesmas variáveis usando os vínculos (3.49) e (3.51), restarão, enfim, a hamiltoniana reduzida

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad , \quad (3.55.a)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\varphi')^2 + \frac{1}{2} \Pi_1^2 + \frac{(a+1)}{2} A_1^2 + \frac{1}{2(a-1)} (\Pi + \varphi' + A_1 - \Pi_1')^2 + A_1 (\Pi + \varphi') \quad , \quad (3.55.b)$$

os parênteses canônicos relevantes

$$\{\varphi(x), \Pi(y)\}_{PB} = \delta(x-y) \quad , \quad (3.56.a)$$

$$\{A_1(x), \Pi_1(y)\}_{PB} = -\delta(x-y) \quad , \quad (3.56.b)$$

e as identidades

$$A_o = \frac{1}{(1-a)} (\Pi + \varphi' + A_1 - \Pi_1') \quad , \quad (3.57.a)$$

$$\Pi_o = 0 \quad . \quad (3.57.b)$$

(ii) $a = 1$:

Para este valor do parâmetro a , a condição (3.52) se traduz em mais um vínculo,

$$\Omega_2 = \Pi_1 \approx 0 \quad . \quad (3.58)$$

cujas consistência ($\dot{\Omega}_2 \approx 0$) gera ainda outro vínculo,

$$\Omega_3 = A_o - A_1 \approx 0 \quad , \quad (3.59)$$

que, por fim, fixa o multiplicador u ,

$$\dot{\Omega}_3 \approx u - A'_0 \approx 0 \quad . \quad (3.60)$$

interrompendo a geração de vínculos secundários. Como era de se esperar da análise lagrangeana (3.45), o sistema é sensivelmente mais vinculado no caso $a = 1$. De qualquer modo, o conjunto de vínculos $\{\Omega_i \approx 0, i = 1, \dots, 4\}$ é também de 2a. classe; é conveniente, para a construção dos parênteses de Dirac, substituí-lo pelo seguinte conjunto equivalente

$$\tilde{\Omega}_1 = \Pi_0 - \Pi_1 \approx 0 \quad . \quad (3.61.a)$$

$$\tilde{\Omega}_2 = \Pi + \varphi' + \frac{1}{2}(A_0 + A_1) + (\Pi_0 - \Pi_1)' \approx 0 \quad , \quad (3.61.b)$$

$$\tilde{\Omega}_3 = \Pi_0 + \Pi_1 \approx 0 \quad . \quad (3.61.c)$$

$$\tilde{\Omega}_4 = \frac{1}{2}(A_0 - A_1) \approx 0 \quad . \quad (3.61.d)$$

construído a partir de combinações lineares dos vínculos originais, pois sua álgebra de 2a. classe é visivelmente mais simples.

$$\{\tilde{\Omega}_1(x), \tilde{\Omega}_2(y)\}_{PB} = -\delta(x-y) \quad . \quad (3.62.a)$$

$$\{\tilde{\Omega}_3(x), \tilde{\Omega}_4(y)\}_{PB} = -\delta(x-y) \quad . \quad (3.62.b)$$

demais nulos. Transformando enfim os vínculos em identidades, podemos expressar as variáveis A_μ e Π_μ em termos de φ e Π ; e sabendo que os parêntese de Dirac entre φ e Π acabam permanecendo iguais aos de Poisson, chegamos afinal à hamiltoniana reduzida

$$H = \int dx \mathcal{H} \quad , \quad (3.63.a)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\Pi^2 + (\varphi')^2) \quad . \quad (3.63.b)$$

com os parênteses canônicos

$$\{\varphi(x), \Pi(y)\}_{PB} = \delta(x-y) \quad . \quad (3.64)$$

e as identidades

$$A_0 = A_1 = -(\Pi + \varphi') \quad . \quad (3.65.a)$$

$$\Pi_0 = \Pi_1 = 0 \quad . \quad (3.65.b)$$

Independente do valor do parâmetro regulador a , concluimos que o sistema é de 2a. classe, comprovando o fato de que a quebra da simetria de gauge está incorporada na

lagrangeana bosônica. Enquanto no modelo fermiônico os geradores da transformação de gauge eram os vínculos

$$\Phi_o = \Pi_o \approx 0 \quad . \quad (3.66.a)$$

$$\Phi_1 = -\Pi'_1 + 2\sqrt{\pi}\psi_+^\dagger\psi_+ = -\Pi'_1 + J_+^o \approx 0 \quad , \quad (3.66.b)$$

temos, na versão bosônica (usando a definição (3.35) para J_+^μ) as quantidades correspondentes

$$\Phi_o = \Pi_o = \Omega_o \approx 0 \quad . \quad (3.67.a)$$

$$\Phi_1 = -\Pi'_1 + (a-1)\hat{A}_o + \hat{A}_1 = \Omega_1 - (\Pi + \varphi') \not\approx 0 \quad . \quad (3.67.b)$$

O funcional Φ_1 não só deixa de ser um vínculo como, o que é ainda mais importante, a álgebra de Φ_o e Φ_1 deixa de ser de 1a. classe.

$$\{\Phi_o(x), \Phi_1(y)\}_{PB} = (1-a)\delta(x-y) \quad , \quad (3.68.a)$$

$$\{\Phi_1(x), \Phi_1(y)\}_{PB} = -2\delta'(x-y) \quad . \quad (3.68.b)$$

A escolha $a = 1$ poderia resolver (3.68.a), mas a anomalia em (3.68.b) é independente de a . Como havíamos antecipado, a versão escalar do modelo de Schwinger oferece uma realização 'clássica' da anomalia (3.25) na álgebra da lei de Gauss fermiônica.

Enfim, a versão final do modelo escalar canonicamente quantizado é:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2}(\hat{\varphi}')^2 + \frac{1}{2}\hat{\Pi}_1^2 + \frac{(a+1)}{2}\hat{A}_1^2 + \frac{1}{2(a-1)}(\hat{\Pi} + \hat{\varphi}' + \hat{A}_1 - \hat{\Pi}_1)^2 + \right. \\ \left. + \hat{A}_1(\hat{\Pi} + \hat{\varphi}') \right\} \end{aligned} \quad (3.69.a)$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\Pi}(y)] = i\delta(x-y) \quad (3.69.b)$$

$$[\hat{A}_1(x), \hat{\Pi}_1(y)] = -i\delta(x-y) \quad (3.69.c)$$

$$\hat{A}_o = \frac{1}{(1-a)}(\hat{\Pi} + \hat{\varphi}' + \hat{A}_1 - \hat{\Pi}_1) \quad ; \quad \hat{\Pi}_o = 0 \quad , \quad (3.69.d)$$

para $a \neq 1$, e

$$\hat{H} = \int dx \frac{1}{2} \left(\hat{\Pi}^2 + (\hat{\varphi}')^2 \right) \quad (3.70.a)$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\Pi}(y)] = i\delta(x-y) \quad (3.70.b)$$

$$\hat{A}_o = \hat{A}_1 = -(\hat{\Pi} + \hat{\varphi}') \quad (3.70.c)$$

$$\hat{\Pi}_o = \hat{\Pi}_1 = 0 \quad . \quad (3.70.d)$$

para $a = 1$.

(III) Eletrodinâmica Escala Quiral

Já que no modelo de Schwinger quiral (3.1) somente uma das componentes, ψ_+ , se acoplava aos campos de gauge, enquanto a componente ψ_- se propagava livremente — como um mero espectador —, é natural pensarmos em excluir esta última, e considerar a lagrangeana

$$\mathcal{L}_{FQ} = \bar{\psi}_+ \gamma^\mu (i\partial_\mu + 2\sqrt{\pi}A_\mu)\psi_+ - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad . \quad (3.71)$$

Também na sua versão bosonizada, (3.30), os campos de gauge se acoplama somente com uma das componentes da corrente $\partial_\mu\varphi$: se definirmos suas componentes quirais como

$$j_\pm^\mu = (\eta^{\mu\nu} \mp \varepsilon^{\mu\nu})\partial_\nu\varphi \quad . \quad (3.72)$$

então o acoplamento em (3.30) será precisamente $A_\mu j_+^\mu$. Por isso, como na versão fermiônica somos levados a pensar em fixar a componente livre de j^μ , vinculando-a:

$$j_-^\mu = f_-^\mu(\varphi, A; x) \quad . \quad (3.73)$$

Embora a escolha mais natural pareça ser $f_-^\mu = 0$ (vide ref.[40]), se tomarmos $f_-^\mu = -(\eta^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu})A_\nu$ acabaremos com um vínculo covariante, $j_-^\mu - f_-^\mu = (\eta^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu})(\partial_\nu\varphi + A_\nu) = 0$.

A idéia é então quantizar o modelo (3.30) com o seguinte vínculo externo covariante

$$\Omega^\mu = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu})D_\nu\varphi \approx 0 \quad . \quad (3.74)$$

sistema este que chamaremos de QED escalar quiral. Note que a condição (3.34) constitui uma versão covariante da condição usual dos bosons quirais, $(\eta^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu})\partial_\nu\phi = 0$. Portanto podemos pensar no novo modelo como uma descrição de bosons quirais acoplados a campos de gauge, um tema que tem recebido grande atenção [40],[41],[42],[43],[44],[45],[46] no contexto das teorias de cordas.

(III.A) Vínculo Quiral via Multiplicador de Lagrange

Em termos das coordenadas do cone-de-luz (veja Apêndice A), o vínculo quiral (3.74) se escreve como

$$\Omega = D_-\varphi = \partial_-\varphi + A_- \approx 0 \quad . \quad (3.75)$$

e a intenção é tentar introduzi-lo no modelo (3.30) por meio de uma multiplicador de Lagrange. Como primeira proposta, poderíamos tomar a lagrangeana

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_B + \lambda_+ D_-\varphi \quad , \quad (3.67)$$

onde $\lambda_+(x)$ é o campo multiplicador, o que originaria o seguinte conjunto de equações de movimento,

$$\tilde{L}_\varphi = -\square\varphi - \partial_\mu A^\mu + \hat{F} - \partial_- \lambda_+ = 0 \quad , \quad (3.77.a)$$

$$\tilde{L}_{A_\mu} = \partial_\nu F^{\nu\mu} + \mathcal{J}^\mu + \lambda_+ \delta_-^\mu = 0 \quad , \quad (3.77.b)$$

$$\tilde{L}_{\lambda_+} = D_- \varphi = 0 \quad . \quad (3.77.c)$$

Embora a condição $D_- \varphi = 0$ esteja garantida como equação de movimento de λ_+ , as equações dos campos φ e A_- ficaram bem diferentes das equações antigas, (3.39.a) e (3.39.b), pois o campo λ_+ passou a atuar como uma nova fonte para os campos escalar e eletromagnético. De fato, ao introduzirmos a interação $\lambda_+ D_- \varphi$, estamos alterando a dinâmica do modelo original, através de forças de vínculo representadas pelo multiplicador; podemos inclusive resolver a equação (3.77.b) para λ_+ ,

$$\lambda_+ = -\partial_+ \hat{F} + \mathcal{J}_+ \quad . \quad (3.78)$$

explicitando o fato de que nesta formulação o multiplicador é determinado pela dinâmica do sistema.

Isto parece contrariar nosso objetivo inicial, que era apenas fixar o valor da corrente $\partial_- \varphi$ sobre a dinâmica original do modelo (3.30), uma vez que ela não se acoplava com os campos de gauge; quer dizer, gostaríamos de simplesmente *adicionar* a condição $\partial_- \varphi = -A_-$ às equações (3.39), sem alterá-las. Como foi discutido na seção (III.A) do capítulo 1, isto pode ser realizado se introduzirmos o vínculo num forma quadrática, ou seja, no lugar de (3.76), propomos o modelo

$$\mathcal{L}_{BQ} = \mathcal{L}_B + \lambda_{++} (D_- \varphi)^2 \quad . \quad (3.79)$$

A equações de movimento para este modelo são

$$L_\varphi = -\square\varphi - \partial_\mu A^\mu + \hat{F} - \partial_- (\lambda_{++} D_- \varphi) = 0 \quad , \quad (3.80.a)$$

$$L_{A_\mu} = \partial_\nu F^{\nu\mu} + \mathcal{J}^\mu + 2\delta_-^\mu (\lambda_{++} D_- \varphi) = 0 \quad . \quad (3.80.b)$$

$$L_{\lambda_{++}} = (D_- \varphi)^2 = 0 \quad . \quad (3.80.c)$$

que claramente implicam em (3.39) e (3.75), como queríamos. Resulta que este conjunto final de equações não envolve mais o campos λ_{++} (note que ele sempre comparece multiplicando o vínculo, em (3.80)). Assim, ao contrário do que ocorria na versão linear (3.76), aqui o multiplicador é completamente indeterminado: é um grau de liberdade de gauge das equações de movimento, já que a transformação $\lambda_{++} \rightarrow \lambda_{++} + \epsilon_{++}(x)$ é uma simetria evidente para as trajetórias (uma simetria "on-shell").

Na verdade, esta simetria “on-shell” acaba sendo um caso particular de uma simetria de gauge da própria lagrangeana $\mathcal{L}_{BQ}$: pode-se verificar que ela é quase-invariante pela seguinte transformação infinitesimal

$$\delta A_\mu = 0 \quad , \quad (3.81.a)$$

$$\delta \varphi = \epsilon_+ D_- \varphi \quad . \quad (3.81.b)$$

$$\delta \lambda_{++} = -\partial_+ \epsilon_+ + \epsilon_+ \partial_- \lambda_{++} - \lambda_{++} \partial_- \epsilon_+ \quad . \quad (3.81.c)$$

caracterizando λ_{++} como um autêntico campo de gauge. Chamaremos (3.81) de simetria de Siegel, já que ela nada mais é do que a generalização, para o caso em que os campos A_μ estão presentes, da simetria local que Siegel^[23] apontou em seu modelo de bosons quirais: de fato nosso modelo (3.79) coincide com o de Siegel quando $A_\mu = 0$. Todas estas características apontam para a conclusão de que (3.79) é uma boa teoria para bosons quirais acoplados a campos de gauge vetoriais A_μ (vide também ref.[45]).

Para a posterior quantização canônica, devemos fazer sua análise hamiltoniana. Os momentos são dados por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{BQ}}{\partial(\partial_o \varphi)} = \dot{\varphi} + A_o - A_1 + \lambda_{++}(\dot{\varphi} - \varphi' + A_o - A_1) \quad , \quad (3.82.a)$$

$$\Pi_o = \eta_{o\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{BQ}}{\partial(\partial_o A_\mu)} = 0 \quad . \quad (3.82.b)$$

$$\Pi_1 = \eta_{1\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{BQ}}{\partial(\partial_o A_\mu)} = A'_o - \dot{A}_1 \quad . \quad (3.82.c)$$

$$\Pi_{\lambda_{++}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{BQ}}{\partial(\partial_o \lambda_{++})} = 0 \quad . \quad (3.82.d)$$

a partir do que se definem dois vínculos primários,

$$\Omega_o = \Pi_o \approx 0 \quad . \quad (3.83.a)$$

$$\phi_o = \Pi_{\lambda_{++}} \approx 0 \quad . \quad (3.83.b)$$

com os quais contruímos a hamiltoniana total

$$H_c^{(q)} = \int dx \{ \mathcal{H}_c + u \Omega_o + v \phi_o \} \quad . \quad (3.84.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{(q)} = & \frac{1}{2}(\Pi + \varphi' - A_o + A_1)^2 + \frac{1}{2}\Pi_1^2 - \Pi\varphi' - A'_o\Pi_1 - \frac{a}{2}(A_o^2 - A_1^2) + \\ & - \frac{\lambda_{++}}{2(1 + \lambda_{++})}(\Pi - \varphi')^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.84.b)$$

A partir de (3.82.a) calcula-se a expressão da condição quirál no espaço de fase,

$$D_-\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \lambda_{++})}(\Pi - \varphi') = 0 \quad . \quad (3.85)$$

e comparando as hamiltonianas canônicas (3.50.b) e (3.84.b), vemos que

$$\mathcal{H}_c^{(q)} = \mathcal{H}_c - \lambda_{++}(D_-\varphi)^2 \quad . \quad (3.86)$$

Quando então exigimos a consistência dos vínculos primários (3.83), o primeiro gera o mesmo vínculo secundário que no modelo escalar — a lei de Gauss,

$$\Omega_1 = -\Pi'_1 + \Pi + \varphi' + A_1 - (1 - a)A_0 \approx 0 \quad , \quad (3.87)$$

ao passo que $\Pi_{\lambda_{++}} \approx 0$ gera, como secundário, o desejado vínculo quirál.

$$\phi_1 = \frac{1}{2(1 + \lambda_{++})}(\Pi - \varphi')^2 = (D_-\varphi)^2 \approx 0 \quad . \quad (3.88)$$

A consistência da lei da Gauss levará à mesma estrutura de vínculos do modelo escalar: teremos um sistema de 2a. classe, tal que a quantidade de vínculos depende do valor do parâmetro a ; de qualquer modo, eles serão exatamente os mesmos que na seção (II). Já o vínculo (3.88), devido à sua forma quadrática, não gera nenhum secundário. Entre todos os vínculos, somente $\phi_0 \approx 0$ e $\phi_1 \approx 0$ são de 1a. classe: de fato, eles são os geradores da simetria de gauge (3.81)¹⁾. Mas podemos torná-los de 2a. classe fazendo uma escolha de gauge,

$$\phi_2 = \lambda_{++} - f_{++}(x) \approx 0 \quad . \quad (3.89)$$

e linearizando (3.88),

$$\phi_3 = \Pi - \varphi' \approx 0 \quad . \quad (3.90)$$

Assim, o conjunto completo de vínculos será

$$\Omega_0 = \Pi_0 \approx 0 \quad . \quad (3.91.a)$$

$$\Omega_1 = -\Pi'_1 + \Pi + \varphi' + A_1 - (1 - a)A_0 \approx 0 \quad . \quad (3.91.b)$$

$$\phi_0 = \Pi_{\lambda_{++}} \approx 0 \quad . \quad (3.91.c)$$

$$\phi_2 = \lambda_{++} - f_{++} \approx 0 \quad , \quad (3.91.d)$$

$$\phi_3 = \Pi - \varphi' \approx 0 \quad . \quad (3.91.e)$$

¹⁾ O cálculo de um gerador muito semelhante, para o modelo de Siegel de bosons quirais, através do algoritmo de Anderson-Bergmann, se encontra na ref.[12].

acrescidos de

$$\Omega_3 = \Pi_1 \approx 0 \quad . \quad (3.91.f)$$

$$\Omega_4 = A_0 - A_1 \approx 0 \quad , \quad (3.91.g)$$

quando $a = 1$. Em qualquer caso, o conjunto (3.91) é de 2a. classe, e portanto podemos construir os parênteses de Dirac correspondentes, e transformar os vínculos em identidades, completando os passos para a quantização canônica. O resultado final^[47] é

(a) para $a \neq 1$:

$$\hat{H} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \hat{\Pi}_1^2 + \frac{(a-1)}{2} \hat{A}_1^2 + \frac{1}{2(a-1)} (2\hat{\varphi}' + \hat{A}_1 - \hat{\Pi}_1')^2 + (\hat{\varphi}' + A_1)^2 \right\} \quad , \quad (3.92)$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = -\frac{i}{4} \varepsilon(x-y) \quad . \quad (3.93.a)$$

$$[\hat{A}_1(x), \hat{\Pi}_1(y)] = -i \delta(x-y) \quad . \quad (3.93.b)$$

$$\hat{\Pi}_0 = 0 \quad \hat{A}_0 = \frac{1}{(1-a)} (2\hat{\varphi}' + \hat{A}_1 - \hat{\Pi}_1') \quad (3.94.a)$$

$$\hat{\Pi}_{\lambda_{++}} = 0 \quad \hat{\lambda}_{++} = f_{++} \quad \hat{\Pi} = \hat{\varphi}' \quad , \quad (3.94.b)$$

onde

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & . & x > 0 \\ -1 & . & x < 0 \end{cases}$$

é a função sinal.

(b) para $a = 1$:

$$\hat{H} = \int dx (\hat{\varphi}')^2 \quad , \quad (3.95)$$

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)] = -\frac{i}{4} \varepsilon(x-y) \quad . \quad (3.96)$$

$$\hat{\Pi}_0 = \hat{\Pi}_1 = 0 \quad . \quad (3.97.a)$$

$$\hat{A}_0 = \hat{A}_1 = -2\hat{\varphi}' \quad . \quad (3.97.b)$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\varphi}' \quad . \quad (3.97.c)$$

$$\hat{\Pi}_{\lambda_{++}} = 0 \quad \hat{\lambda}_{++} = f_{++} \quad . \quad (3.97.d)$$

Comparando estes resultados com (3.69) e (3.70), reconhecemos que a única mudança real foi gerada pelo vínculo quiral, $\Pi - \varphi' \approx 0$, que permitiu eliminar a variável Π em favor de φ e originou os comutadores não -canônicos (3.93.a)/(3.96), chamados de **comutadores**

quirais¹⁾. Isto nos faz pensar que a maneira mais direta de introduzir o vínculo quiral talvez fosse simplesmente adicioná-lo ao sistema dado por (3.69) ou (3.70); mas, apesar disso funcionar para este modelo em particular, num caso geral a simples adição de vínculos externos ao conjunto de vínculos internos de uma teoria pode gerar contradições (como, por exemplo, transformar um sistema de 2a. classe em um de 1a. classe). Acreditamos que a técnica dos multiplicadores evita esses problemas, na medida em que os vínculos externos são convertidos em vínculos internos secundários, como em (3.88).

Alguns comentários adicionais:

(i) Como no modelo original de Siegel para bosons quirais, a simetria de gauge (3.81) é anômala. Para que possamos eliminar o multiplicador λ_{++} , devemos adicionar à lagrangeana (3.79) um termo de Wess-Zumino: generalizando a proposta da ref.[43], tomamos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{BQ} + \mathcal{L}_{WZ} \quad . \quad (3.98.a)$$

$$\mathcal{L}_{WZ} = \alpha \lambda_{++} \partial_- D_- \varphi \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \quad , \quad (3.98.b)$$

e o sistema adquire uma simetria quântica no lugar de (3.81),

$$\delta A_\mu = 0 \quad , \quad (3.99.a)$$

$$\delta \varphi = \epsilon_+ D_- \varphi - \frac{\alpha}{2} \partial_- \epsilon_+ \quad , \quad (3.99.b)$$

$$\delta \lambda_{++} = -\partial_+ \epsilon_+ + \epsilon_+ \partial_- \lambda_{++} - \lambda_{++} \partial_- \epsilon_+ \quad . \quad (3.99.c)$$

A quantização canônica do modelo pode então ser feita como descrito nas refs. [44] e [47]. Na ref. [45], o sistema (3.98) é quantizado via BRST, e sua equivalência ao modelo de Schwinger quiral é verificada por meio da contagem dos graus de liberdade das duas teorias.

(ii) Podemos escrever a solução geral das equações de movimento (3.39) do modelo escalar da seguinte maneira

• $a \neq 1$:

$$\varphi = \sigma + h \quad . \quad (3.100.a)$$

¹⁾ De fato, estes comutadores são típicos em teorias de bosons quirais — vide ref.[40],[42],[44] — bem como os que seguem dele,

$$[\dot{\varphi}(x), \dot{\Pi}(y)] = \frac{i}{2} \delta(x-y) \quad [\dot{\Pi}(x), \dot{\Pi}(y)] = \frac{i}{2} \delta'(x-y) \quad .$$

$$A_- = \partial_- \sigma - \partial_- h \quad . \quad (3.110.b)$$

$$A_+ = -\frac{(2-a)}{a} \partial_+ \sigma - \frac{1}{a} \partial_+ h \quad . \quad (3.110.c)$$

onde σ e h são campos escalares que satisfazem as equações

$$\left(\square + \frac{a^2}{a-1} \right) \sigma = 0 \quad , \quad \square h = 0 \quad . \quad (3.101)$$

• $a = 1$:

$$\varphi = \phi \quad . \quad (3.102.a)$$

$$A_- = 0 \quad . \quad (3.102.b)$$

$$A_+ = -2\partial_+ \phi \quad . \quad (3.102.c)$$

onde ϕ é um campo escalar sem massa.

$$\square \phi = 0 \quad . \quad (3.103)$$

Em termos desses campos auxiliares, a condição de quiralidade, $D_- \varphi = 0$, significa impômos

$$\partial_- h = \partial_- \phi = 0 \quad . \quad (3.104)$$

Isto leva a relações de comutação quirais para h e ϕ , explicando assim a origem dos comutadores (3.93.a) e (3.96) da teoria escalar quiral. Pode-se também expressar os campos fermiônicos do modelo de Schwinger em termos destes campos auxiliares (vide ref. [39]), reestabelecendo o contato entre as duas teorias.

(iii) A hamiltoniana (3.84.b) e o vínculo (3.88) apontam para o fato de que a escolha $\lambda_{++} = -1$ é singular: neste caso, de acordo com (3.82.a), teremos para o momento do campo φ ,

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_{BQ}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \varphi' \quad . \quad (3.105)$$

que constitui um vínculo primário, $\Omega = \Pi - \varphi' \approx 0$, que a teoria não tinha. Isto representa uma grande mudança estrutural que, ao contrário do que parece, tem suas vantagens: a (desejada) condição de quiralidade surge como um vínculo primário, e já na forma linearizada ! Vamos explorar essa peculiaridade na seção seguinte.

(III.B) Versão não-anômala

A proposta é tomar o modelo (3.79) com $\lambda_{++} = -1$, ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}) A_\mu \partial_\nu \varphi + \frac{a}{2} A_\mu A^\mu - (D_- \varphi)^2 \quad . \quad (3.106)$$

Não há mais o campo λ_{++} , apenas os campos originais φ e A_μ . O termo $(D_-\varphi)^2$ quebra a invariância de Lorentz manifesta da teoria, o que não é um problema se as equações de movimento exibirem esta invariância. Em termos das coordenadas cartesianas x^0 e x^1 , a lagrangeana (3.106) se reescreve como

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}\varphi' - (\varphi')^2 + 2\varphi'(A_0 - A_1) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(A_0 - A_1)^2 + \frac{a}{2}(A_0^2 - A_1^2) \quad (3.107)$$

As equações de movimento serão

$$L_\varphi = -2(\dot{\varphi} - \varphi' + A_0 - A_1)' = -2\sqrt{2}(D_-\varphi)' = 0 \quad (3.108.a)$$

$$L_{A_\mu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + \mathcal{J}^\mu - 2\delta_-^\mu(D_-\varphi) = 0 \quad (3.108.b)$$

Com a condição de contorno $D_-\varphi \xrightarrow{|x^1| \rightarrow \infty} 0$, a equação de movimento (3.108.a) implicará na quiralidade

$$D_-\varphi = 0 \quad (3.109)$$

o que, quando substituído em (3.108.b), levará às antigas equações (3.39.b) para os campos de gauge A_μ . Como a equação (3.109) é invariante de Lorentz, concluímos que esta simetria é recuperada “on-shell”.

Prosseguimos fazendo a análise hamiltoniana: definidos os momentos e parênteses de Poisson,

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \varphi' \quad \{\varphi(x)\Pi(y)\}_{PB} = \delta(x-y) \quad (3.110.a)$$

$$\Pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad \{A_0(x), \Pi_0(y)\}_{PB} = \delta(x-y) \quad (3.110.b)$$

$$\Pi_1 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_1} = A'_0 - \dot{A}_1 \quad \{A_1(x), \Pi_1(y)\}_{PB} = -\delta(x-y) \quad (3.110.c)$$

revelam-se dois vínculos primários.

$$\Omega_0 = \Pi_0 \approx 0 \quad (3.111.a)$$

$$\Omega = \Pi - \varphi' \approx 0 \quad (3.111.b)$$

A hamiltoniana total do sistema é dada por

$$H_t = \int dx (\mathcal{H}_c + u_0 \Omega_0 + v \Omega) \quad (3.112.a)$$

$$\mathcal{H}_c = (\varphi')^2 + \frac{1}{2}\Pi_1^2 - 2\varphi'(A_0 - A_1) + \frac{1}{2}(A_0 - A_1)^2 - \frac{a}{2}(A_0^2 - A_1^2) \quad (3.112.b)$$

A consistência do vínculo (3.111.b) determina o multiplicador r

$$\dot{\Omega} = 2(\varphi' - A_o + A_1 - r)' \approx 0 \quad , \quad (3.113)$$

enquanto a consistência de (3.111.a) gera um vínculo secundário,

$$\Omega_1 \approx -\Pi_1 - (a-1)A_1' + (a-1)u_o \approx 0 \quad , \quad (3.115)$$

indicando que, mais uma vez, os casos $a \neq 1$ e $a = 1$ devem ser analisados em separado.

Quando $a \neq 1$, (3.115) é simplesmente uma condição sobre u_o . Assim, o conjunto completo de vínculos é

$$\Omega_o = \Pi_o \approx 0 \quad , \quad (3.116.a)$$

$$\Omega_1 = -\Pi_1' + \Pi + \varphi' + A_1 - (1-a)A_o \approx 0 \quad (3.116.b)$$

$$\Omega = \Pi - \varphi' \approx 0 \quad , \quad (3.116.c)$$

mas, se $a = 1$, surgem dois vínculos secundários adicionais,

$$\Omega_3 = \Pi_1 \approx 0 \quad (3.116.d)$$

$$\Omega_4 = A_o - A_1 \approx 0 \quad , \quad (3.116.e)$$

Note que a estrutura de vínculos é essencialmente reproduzida, mas agora sem a necessidade de multiplicadores de Lagrange. Como naquele caso, o conjunto (3.116) é de 2a. classe: podemos calcular os parênteses de Dirac (que serão os mesmos do modelo anterior), transformar os vínculos em identidades, e, como resultado final, encontraremos exatamente o mesmo sistema hamiltoniano descrito em (3.92) e (3.97) ! A diferença é que, naquele caso, o sistema foi obtido após uma escolha de gauge para a simetria (anômala) (3.81), enquanto que aqui ele se revelou direta e univocamente.

É interessante notar que (3.107) representa o acoplamento com campos de gauge do modelo de bósons quirais de Floreannini-Jackiw^[42]; de fato, tal modelo se reproduz no limite $A_\mu \rightarrow 0$. Em seu trabalho original, eles propõem também uma versão não local da teoria, que consiste basicamente na substituição do campo φ por um outro campo escalar χ , relacionados por

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \int dy \varepsilon(x-y) \chi(y) \implies \chi = \sqrt{2} \varphi' \quad , \quad (3.117)$$

Esta transformação de variáveis já inclui uma condição de contorno para φ ($\varphi(-\infty) = -\varphi(+\infty)$). Embora a lagrangeana (3.107) se torne não-local com a substituição (3.117), os comutadores quirais (3.93.a)/(3.96) passarão a ser locais,

$$[\hat{\chi}(x), \hat{\chi}(y)] = i\delta'(x-y) \quad , \quad (3.118)$$

Concluimos esta seção observando que o modelo (3.107) foi recentemente reproduzido, analisado e estendido para o caso não-abeliano, num trabalho de K.Harada^[46].

Capítulo 4

GRAVITAÇÃO QUÂNTICA INDUZIDA EM DUAS DIMENSÕES

Este modelo de gravitação em duas dimensões corresponde à teoria efetiva que surge a partir de qualquer teoria de campos conforme acoplada ao campo gravitacional bidimensional quando integramos sobre as flutuações no vácuo dos campos de matéria. Por exemplo, se tomarmos o modelo de corda bosônica de Polyakov^[48],

$$S_P = \int d^2x \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^i \partial_\nu X_i \quad . \quad (4.1)$$

onde $\{X^i(x) , i = 1, \dots, d\}$ representam d 'campos de matéria' (são as coordenadas da corda no espaço-tempo de imersão), e $g^{\mu\nu}$ é a métrica da folha-mundo bidimensional descrita pela corda, obtemos^{[49],[50]}

$$e^{i\Gamma[g]} = \int \mathcal{D}X e^{iS_P[X,g]} \quad . \quad (4.2.a)$$

$$\Gamma[g] = \frac{c_o}{96\pi} \int d^2x \sqrt{-g} R \frac{1}{\square} R \quad . \quad (4.2.b)$$

onde $c_o = d$ é a *carga central* para os d campos bosônicos X^i . Outro modelo conforme no lugar de (4.1) levaria à mesma ação efetiva (4.2.b), apenas com um c_o diferente (a carga central dos seus campos de matéria). Note porém que, enquanto (4.1) exibe a chamada simetria de Weyl ($g_{\alpha\beta} \rightarrow e^{-\rho(x)} g_{\alpha\beta}$), a ação efetiva (4.2.b) não possui tal invariância: trata-se da **anomalia conforme** ou de Weyl.

O grande desenvolvimento matemático das teorias de campos — neste caso, das teorias conformes — em duas dimensões vai mais uma vez fornecer os subsídios necessários para quantizarmos esta teoria anômala.

(I) Análise Clássica da Ação Efetiva

(I.A) Equações de Movimento e Simetrias

Após a integração sobre os campos de matéria conformemente acoplados ao campo métrico $g^{\mu\nu}$, resta, para este, a seguinte ação efetiva

$$S_{ef}[g] = \int d^2x \mathcal{L}_{ef}(g^{\mu\nu}) \quad . \quad (4.3.a)$$

$$\mathcal{L}_{ef}(g^{\mu\nu}) = \kappa \sqrt{-g} \left(R \frac{1}{\square} R + \mu \right) \quad . \quad (4.3.b)$$

onde: $g = \det(g_{\mu\nu})$; R é a curvatura escalar; μ é uma constante cosmológica; $\square$ é o d'Alembertiano escalar construído com a métrica $g^{\mu\nu}$; κ , que é proporcional à carga central da matéria (veja (4.2.b)), desempenha em (4.3.b) o papel de uma constante de acoplamento. Estamos desprezando o termo clássico de Einstein, $\sqrt{-g}R$, porque em duas dimensões tal termo é puramente topológico e não contribui para a dinâmica (vide Apêndice A).

As equações de movimento que seguem de (4.3.b) são ^[51]

$$L_{g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (4.4.a)$$

$$T_{\mu\nu} \equiv \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} [\theta + \kappa(\mu - 2R)] \quad , \quad (4.4.b)$$

$$\theta_{\mu\nu} = \kappa \left[\nabla_\mu \left(\frac{1}{\square} R \right) \nabla_\nu \left(\frac{1}{\square} R \right) - 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \left(\frac{1}{\square} R \right) \right] \quad , \quad (4.4.c)$$

$$\theta \equiv \text{tr}(\theta_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = \kappa \left[\nabla_\mu \left(\frac{1}{\square} R \right) \nabla^\mu \left(\frac{1}{\square} R \right) - 2R \right] \quad . \quad (4.4.d)$$

A ação (4.3) é manifestamente invariante por transformações gerais de coordenadas. Examinemos então seu comportamento sob transformações de Weyl,

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} + \Lambda(x) g^{\mu\nu} \quad . \quad (4.5)$$

onde $\Lambda(x)$ é um parâmetro infinitesimal local. Segundo o critério (1.16), se (4.5) fôsse uma simetria, então existiria uma corrente j^μ que satisfaria a identidade

$$L_{g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = \Lambda(x) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \partial_\mu (\sqrt{-g} j^\mu) \quad ,$$

ou seja,

$$\Lambda T_\mu^\mu = \nabla_\mu j^\mu \quad . \quad (4.6)$$

Obtendo-se o traço de $T_{\mu\nu}$ a partir de (4.4.b),

$$T_{\mu}^{\mu} = \kappa(2R - \mu) \quad . \quad (4.7)$$

fica claro que (4.6) não poderá ser satisfeita para qualquer $\Lambda(x)$. Isto implica que não há invariância de Weyl local, como havíamos antecipado. A equação (4.7) é a realização da famosa ‘anomalia do traço’ das teorias conformes. Entretanto, é importante perceber que, por causa da forma peculiar da curvatura R em duas dimensões (reproduzida no Apêndice A), *existem* funções $\lambda(g; x)$ que de fato satisfazem

$$\int d^2x (2R - \mu)\lambda = \int d^2x \nabla_{\mu} \xi^{\mu} \quad , \quad (4.8)$$

para certos $\xi^{\mu}(g; x)$; por exemplo, $\lambda = \text{constante}$. Tratam-se de simetrias residuais rígidas que, como veremos, desempenham um papel crucial na compreensão das propriedades da teoria.

A presença do operador não-local $\square^{-1}$ em (4.3) parece impedir que façamos a análise hamiltoniana do sistema e de suas simetrias. Para contornar este obstáculo, é possível usar a técnica dos campos auxiliares vinculados, introduzida na seção (III.B) do capítulo 1. Primeiro, reconhecemos a seguinte identidade,

$$\left(-\frac{1}{2}\varphi\square\varphi - \frac{\alpha}{2}R\varphi \right) \Big|_{\varphi=-\frac{\alpha}{2}\square^{-1}R} = \frac{\alpha^2}{8}R\frac{1}{\square}R \quad . \quad (4.9)$$

Logo, nossa proposta é trabalhar com o sistema composto pela ação

$$\tilde{S} = \int d^2x \tilde{\mathcal{L}}(\varphi, g^{\mu\nu}) \quad . \quad (4.10.a)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}\varphi\square\varphi - \frac{\alpha}{2}R\varphi + \frac{\alpha^2}{8}\mu \right) \quad . \quad (4.10.b)$$

$$\alpha^2 \equiv 8\kappa \quad . \quad (4.10.c)$$

e pelo vínculo externo

$$\Omega = \varphi + \frac{\alpha}{2}\square^{-1}R \approx 0 \quad . \quad (4.10.d)$$

Este último define o campo auxiliar φ em termos dos campos originais $\{g^{\mu\nu}\}$. O fato de (4.10.d) ser não-local não interfere na análise de simetrias, pois como vínculo, ele poderia ser substituído por algum outro equivalente, como

$$\bar{\Omega} = \square\varphi + \frac{\alpha}{2}R \approx 0 \quad , \quad (4.10.e)$$

já que o operador $\square$ é inversível. O importante é que a nova lagrangeana. (4.10.b), é local, bem como suas equações de movimento, dadas por

$$\tilde{L}_\varphi = -\sqrt{-g} \left(\square \varphi + \frac{\alpha}{2} R \right) = -\sqrt{-g} \square \Omega = 0 \quad , \quad (4.11.a)$$

$$\tilde{L}_{g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \tilde{T}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (4.11.b)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{\theta}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[\tilde{\theta} + \frac{\alpha^2}{8} \left(\mu + \frac{4}{\alpha} \square \varphi \right) \right] \quad . \quad (4.12.a)$$

$$\tilde{\theta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \frac{\alpha}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi \quad . \quad (4.12.b)$$

$$\tilde{\theta} = tr(\tilde{\theta}_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + \frac{\alpha}{2} \square \varphi \quad . \quad (4.12.c)$$

Note que a equação do campos φ corresponde ao próprio vínculo, e que as equações para a métrica, (4.11.b), coincidem com as equações originais (4.4.a), sobre a superfície vincular,

$$(\tilde{L}_\varphi)|_{\Omega=0} = 0 \iff \dot{L}_\varphi \approx 0 \quad . \quad (4.13.a)$$

$$(\tilde{T}_{\mu\nu})|_{\Omega=0} = T_{\mu\nu} \iff \tilde{T}_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu} \quad . \quad (4.13.b)$$

Portanto as lagrangeanas (4.3) e (4.10) são classicamente equivalentes.

Seguindo a técnica dos campos auxiliares, para o estudo de simetrias só nos interessarão as transformações que preservarem o vínculo (4.10.d). Isto significa que a transformação no campo φ deve ser deduzida a partir da transformação da métrica $g^{\mu\nu}$, através da relação (4.10.d). Destacam-se as

(a) *Transformação Geral de Coordenadas:*

Uma vez que $\square$ e R são escalares por transformações gerais de coordenadas, concluímos que $\varphi = -\frac{\alpha}{2} \square^{-1} R$ também é um escalar. E como a lagrangeana (4.10.b) e o vínculo (4.10.d) são manifestamente covariantes, podemos nos assegurar de que o sistema é invariante por transformações gerais de coordenadas, que, na sua forma infinitesimal, são dadas pelas seguintes variações de forma

$$\delta \varphi = \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi \quad . \quad (4.14.a)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \epsilon^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \epsilon^\nu - g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \epsilon^\mu \quad . \quad (4.14.b)$$

onde $\epsilon(x)$ é um infinitésimo qualquer.

(b) *Transformação de Weyl*

Considerando uma transformação infinitesimal na métrica do tipo $\delta g^{\mu\nu} = \Lambda(x)g^{\mu\nu}$, obtemos¹⁾

$$\delta\varphi = -\frac{\alpha}{2}\delta(\square^{-1}R) = \frac{\alpha}{2}\Lambda \quad , \quad (4.15)$$

o que implica

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varphi \delta\varphi + \tilde{L}_{g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} &= -\frac{\alpha}{2}\sqrt{-g}\Lambda\square\Omega - \frac{\alpha^2}{8}\sqrt{-g}\left(\mu + \frac{4}{\alpha}\square\varphi\right)\Lambda \approx \\ &\approx \kappa\sqrt{-g}(2R - \mu)\Lambda \quad , \end{aligned} \quad (4.16)$$

reproduzindo assim a condição restritiva (4.8) sobre o parâmetro $\Lambda(x)$, quer dizer, a transformação

$$\delta\varphi = \frac{\alpha}{2}\Lambda \quad , \quad (4.17.a)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} \quad . \quad (4.17.b)$$

só será uma simetria se o parâmetro Λ satisfizer a equação

$$(2R - \mu)\Lambda = \nabla_\nu \xi^\nu \quad (4.17.c)$$

para algum vetor ξ^ν .

(c) *Transformação Harmônica*

Já que a relação $\varphi = -\frac{\alpha}{2}\square^{-1}R$ define o campos φ a menos de funções harmônicas, isto é, podemos fazer a mudança

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \phi \quad , \quad \square\phi = 0 \quad , \quad (4.18)$$

podemos dizer então que a transformação infinitesimal

$$\delta\varphi = \varepsilon \quad , \quad (4.19.a)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (4.19.b)$$

$$\text{com } \square\varepsilon = 0 \quad , \quad (4.19.c)$$

é também uma simetria. Certamente esta invariância nada significa para os campos relevantes, $g^{\mu\nu}$, ela apenas indica que o 'modo zero' do campo auxiliar φ é arbitrário.

¹⁾ Numa dimensão D qualquer, encontramos

$$\delta\varphi = -\frac{\alpha}{2}\delta(\square^{-1}R) = \frac{\alpha}{2}(D-1)\Lambda - \frac{(D-2)}{2}\square^{-1}(\partial_\mu\Lambda\partial^\mu\varphi) \quad .$$

Colecionamos enfim o conjunto de transformações ,

$$\delta\varphi = \varepsilon + \epsilon^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{\alpha}{2} \Lambda \quad , \quad (4.20.a)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \epsilon^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \epsilon^\nu - g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \epsilon^\mu + \Lambda g^{\mu\nu} \quad , \quad (4.20.b)$$

que, com as restrições

$$\square \varepsilon = 0 \quad , \quad (4.21.a)$$

$$(2R - \mu)\Lambda = \nabla_\mu \xi^\mu \quad , \quad (4.21.b)$$

constituem simetrias do sistema *lagrangeana + vínculo*

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \varphi \square \varphi - \frac{\alpha}{2} R \varphi + \frac{\alpha^2}{8} \mu \right) \quad , \quad (4.22.a)$$

$$\Omega = \varphi + \frac{\alpha}{2} \square^{-1} R \approx 0 \quad . \quad (4.22.b)$$

(I.B) No Gauge do Cone-de-Luz

Os parâmetros $\epsilon^\mu(x)$, $\mu = 0, 1$, das transformações gerais de coordenadas não sofreram restrição alguma. Temos portanto simetrias locais (de gauge) suficientes para eliminarmos dois graus de liberdade de gauge, isto é, fixar duas das três componentes independentes da métrica $g^{\mu\nu}$. Uma escolha interessante é o chamado gauge do cone-de-luz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_{++} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.23)$$

para o qual valem

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 2dx^+ dx^- - 2h_{++}(dx^+)^2 \quad , \quad (4.24.a)$$

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -1 \implies \sqrt{-g} = 1 \quad , \quad (4.24.b)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{++} & g^{+-} \\ g^{-+} & g^{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2h_{++} \end{pmatrix} \quad , \quad (4.24.c)$$

$$\Gamma_{++}^+ = \partial_- h_{++} \quad ; \quad \Gamma_{+-}^- = -\partial_- h_{++} \quad ;$$

$$\Gamma_{++}^- = -\partial_+ h_{++} - 2h_{++} \partial_- h_{++} \quad ;$$

$$\Gamma_{-+}^+ = \Gamma_{--}^+ = \Gamma_{--}^- = 0 \quad , \quad (4.24.d)$$

$$R = -2\partial_-^2 h_{++} \quad , \quad (4.24.e)$$

$$\square\varphi = 2\partial_-(\partial_+ + h_{++}\partial_-)\varphi \quad . \quad (4.24.f)$$

Em especial, o sistema lagrangeana + vínculo se reduz a

$$S = \int dx^+ dx^- \mathcal{L}(\varphi, h_{++}) \quad , \quad (4.25.a)$$

$$\mathcal{L} = \partial_+\varphi\partial_-\varphi + h_{++}(\partial_-\varphi)^2 - \alpha\partial_-h_{++}\partial_-\varphi \quad , \quad (4.25.b)$$

$$\bar{\Omega} = 2\partial_-(\partial_+\varphi + h_{++}\partial_-\varphi - \frac{\alpha}{2}\partial_-h_{++}) \approx 0 \quad , \quad (4.25.c)$$

após algumas integrações por partes. Examinemos a dinâmica e as simetrias deste sistema. Como os campos g_{--} e g_{+-} foram fixados, suas equações de movimento (dadas em (4.11)) têm que ser examinadas em separado, como ‘vínculos’ adicionais, o que faremos no final desta análise. Além disso, a constante κ (e, conseqüentemente, α) sofre uma correção ^[50] ,

$$\kappa = \frac{c_0}{96\pi} \longrightarrow \kappa = -\frac{c}{96\pi} \quad , \quad c = 26 - d \quad . \quad (4.26)$$

devido à contribuição dos fantasmas que acompanham a fixação de gauge.

Extraímos as equações de movimento de (4.25),

$$L_\varphi = -2\partial_-(\partial_+\varphi + h_{++}\partial_-\varphi - \frac{\alpha}{2}\partial_-h_{++}) = -\bar{\Omega} = 0 \quad , \quad (4.27.a)$$

$$L_{h_{++}} = 2\tilde{T}_{--} = (\partial_-\varphi)^2 + \alpha\partial_-^2\varphi = 0 \quad . \quad (4.27.b)$$

Através da identidade

$$(\partial_+ + h_{++}\partial_- + 2\partial_-h_{++})L_{h_{++}} - (\frac{\alpha}{2}\partial_- + \partial_-\varphi)\bar{\Omega} = \frac{\alpha^2}{2}\partial_-^3h_{++} \quad , \quad (4.28)$$

por um lado reproduzimos a importante relação

$$\nabla_+\tilde{T}_{--} \equiv (\partial_+ + h_{++}\partial_- + 2\partial_-h_{++})\tilde{T}_{--} = \frac{\alpha^2}{4}\partial_-^3h_{++} = -\kappa\partial_-R \quad , \quad (4.29)$$

que, segundo a interpretação da ref. [50], é a manifestação da anomalia do traço no gauge do cone-de-luz: e por outro lado, usando as equações de movimento, (4.28) implica em

$$\partial_-^3h_{++} = 0 \quad . \quad (4.30)$$

ou seja, as equações (quânticas) do campo gravitacional h_{++} recuperam a lei de conservação $\nabla_+T_{--} = 0$. Este resultado é análogo ao cancelamento da anomalia (3.36) do capítulo anterior, onde também fazíamos uso de equações de movimento da ação efetiva.

As simetrias do sistema (4.25) podem ser obtidas como simetrias residuais do conjunto (4.20): temos que garantir primeiro que as componentes g^{++} e g^{+-} , fixadas neste gauge, fiquem invariantes,

$$\bullet \delta g^{++} = -\partial_- \epsilon^+ = 0 \quad , \quad (4.31.a)$$

$$\bullet \delta g^{+-} = -(\partial_- \epsilon^- + \partial_+ \epsilon^+ + \Lambda) = 0 \quad . \quad (4.31.b)$$

A primeira destas equações constitui uma restrição sobre o parâmetro ϵ^+ (que representava uma transformação de coordenadas $x^+ \rightarrow x^+ - \epsilon^+$). A segunda, vincula o parâmetro da transformação de Weyl aos outros parâmetros ϵ^+ e ϵ^- ,

$$\Lambda = -(\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-) = -\partial_\mu \epsilon^\mu \quad . \quad (4.32)$$

Já tínhamos as restrições (4.21), que agora implicam em

$$\bullet \square \varepsilon = 2\partial_- (\partial_+ + h_{++}\partial_-)\varepsilon = 0 \quad , \quad (4.33.a)$$

$$\begin{aligned} \bullet (2R - \mu)\Lambda &= (4\partial_-^2 h_{++} + \mu)(\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-) = \partial_\nu \xi^\nu \implies \\ \implies \partial_+ (\mu \epsilon^+) + \partial_- (\mu \epsilon^- + 4\partial_- h_{++}(\partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^-) - 4h_{++}\partial_-^2 \epsilon^-) + \\ &\quad + 4h_{++}\partial_-^3 \epsilon^- = \partial_\nu \xi^\nu \quad , \end{aligned}$$

que é satisfeita se

$$\partial_-^3 \epsilon^- = 0 \quad . \quad (4.33.b)$$

Restam assim dois parâmetros independentes, ϵ^+ e ϵ^- , sujeitos às condições (4.31.a) e (4.33.b), respectivamente. Tratam-se portanto de duas simetrias rígidas: as simetrias locais foram usadas para fixar o gauge no cone-de-luz. Após algumas manipulações — que incluem uma escolha conveniente do parâmetro ε — chegamos às duas simetrias residuais relevantes,

$$\delta \varphi = \epsilon^- \partial_- \varphi - \frac{\alpha}{2} \partial_- \epsilon^- \quad , \quad (4.34.a)$$

$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \epsilon^- \quad , \quad (4.34.b)$$

$$\text{com } \partial_-^3 \epsilon^- = 0 \quad , \quad (4.34.c)$$

e

$$\delta \varphi = -\epsilon^+ h_{++} \partial_- \varphi + \frac{\alpha}{2} \epsilon^+ \partial_- h_{++} \quad , \quad (4.35.a)$$

$$\delta h_{++} = \epsilon^+ \partial_+ h_{++} + h_{++} \partial_+ \epsilon^+ \quad , \quad (4.35.b)$$

$$\text{com } \partial_- \epsilon^+ = 0 \quad . \quad (4.35.c)$$

É interessante notar que estas transformações foram obtidas também em teorias de bósons quirais. Isto ocorre porque a lagrangeana (4.25.b) tem a mesma forma que o modelo de Imbimbo-Schwimmer^[43] para bosons quirais, apenas com outro valor para α .

Os geradores destas transformações de simetria são obtidos segundo a técnica descrita no capítulo 1:

(a) Para a transformação (4.34), temos

$$L_\varphi \delta\varphi + L_{h_{++}} \delta h_{++} \approx \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \quad , \quad (4.36.a)$$

$$\mathcal{J}^+ = -2\epsilon^- \tilde{T}_{--} \quad , \quad (4.36.b)$$

$$\mathcal{J}^- = -\epsilon^- \left[2h_{++} \tilde{T}_{--} - \frac{\alpha^2}{2} \partial_-^2 h_{++} \right] - \partial_- \epsilon^- \left[\frac{\alpha^2}{2} \partial_- h_{++} \right] - \partial_-^2 \epsilon^- \left[-\frac{\alpha^2}{2} h_{++} \right] \quad (4.36.c)$$

de modo que o gerador será $G_{\epsilon^-} = \int dx \mathcal{J}^0$. $\mathcal{J}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{J}^+ + \mathcal{J}^-)$. É conveniente agora usarmos o fato de que $\partial_-^3 \epsilon^- = 0$ para expandirmos o parâmetro ϵ^- da seguinte maneira

$$\epsilon^- = -\frac{1}{2} [\zeta_+(x^+) + x^- \zeta_o(x^+) + (x^-)^2 \zeta_-(x^+)] \quad , \quad (4.37)$$

pois neste caso o gerador poderá ser escrito como

$$\mathcal{J}^0 = \zeta_+(x^+) J^+ + \zeta_o(x^+) J^o + \zeta_-(x^+) J^- = \zeta_a J^a \quad , \quad (4.38)$$

onde

$$J^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(1 + h_{++}) \tilde{T}_{--} - \frac{\alpha^2}{4} \partial_-^2 h_{++} \right] \quad , \quad (4.39.a)$$

$$J^o = \frac{\alpha^2}{4\sqrt{2}} \partial_- h_{++} + x^- J^+ \quad , \quad (4.39.b)$$

$$J^- = -\frac{\alpha^2}{2\sqrt{2}} h_{++} + 2x^- J^o - (x^-)^2 J^+ \quad , \quad (4.39.c)$$

Como os parâmetros $\zeta_a(x^+)$ são independentes, concluímos que cada uma das 'correntes' acima é, individualmente, um gerador de simetria.

(b) Quanto à transformação (4.35.a), encontramos

$$L_\varphi \delta\varphi + L_{h_{++}} \delta h_{++} \approx \partial_\mu j^\mu \quad , \quad (4.40.a)$$

$$j^+ = 2\epsilon^+ h_{++} \tilde{T}_{--} \quad , \quad (4.40.b)$$

$$j^- = \epsilon^+ \left[2(h_{++})^2 \tilde{T}_{--} - \frac{\alpha^2}{2} h_{++} \partial_-^2 h_{++} + \frac{\alpha^2}{4} (\partial_- h_{++})^2 + c_{++}(x^+) \right] \quad (4.40.c)$$

O funcional $c_{++}(x^+)$ fica indeterminado: sua única restrição é $\partial_- c_{++} = 0$. O gerador da transformação é dado por $G_{\epsilon,+} = \int dx j^0$, com $j^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(j^+ + j^-)$, que pode ser escrito em termos das correntes (4.39) como

$$j^0 = \epsilon(x^+) \left(-\sqrt{2} T_s + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{++}(x^+) \right) \quad , \quad (4.41.a)$$

$$T_s = \frac{1}{2\kappa} [J^+ J^- - (J^0)^2] \quad , \quad \kappa = \frac{\alpha^2}{8} \quad . \quad (4.41.b)$$

De posse dos geradores, é interessante calcularmos a sua álgebra, o que exige a formulação hamiltoniana da teoria. A partir de (4.25.b), calculamos os momentos

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (1 + h_{++})(\dot{\varphi} - \varphi') - \varphi' - \frac{\alpha}{2}(\dot{h}_{++} - h'_{++}) \quad , \quad (4.42.a)$$

$$\Pi_{h_{++}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{++}} = -\frac{\alpha}{2}(\dot{\varphi} - \varphi') \quad . \quad (4.42.b)$$

que satisfazem

$$\{\varphi(x), \Pi(y)\}_{PB} = \delta(x - y) \quad , \quad (4.43.a)$$

$$\{h_{++}(x), \Pi_{h_{++}}(y)\}_{PB} = \delta(x - y) \quad . \quad (4.43.b)$$

Não há vínculos — não há mais simetrias de gauge — e a hamiltoniana é dada por

$$H = \int dx \left\{ \Pi \varphi' + \Pi_{h_{++}} h'_{++} - \frac{2}{\alpha} \left[(\Pi - \varphi') + \frac{1}{\alpha} (1 + h_{++}) \Pi_{h_{++}} \right] \Pi_{h_{++}} \right\} \quad . \quad (4.44)$$

O vínculo externo (4.25.c) se expressa, no espaço de fase, como

$$\bar{\Omega} = \sqrt{2} \partial_- (\Pi + \varphi') \approx 0 \quad . \quad (4.45)$$

e, o que nos interessa especialmente, os geradores (4.39) são dados por

$$h_{++} \equiv g^{--}$$

$$J^+ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\Pi'_{h_{++}} - \frac{1}{\alpha^2} (1 + h_{++}) \Pi_{h_{++}}^2 - \frac{1}{\alpha} (\Pi - \varphi') \Pi_{h_{++}} \right] \quad , \quad (4.46.a)$$

$$J^0 = -\frac{1}{2} \left[(1 + h_{++}) \Pi_{h_{++}} + \frac{\alpha}{2} (\Pi - \varphi') \right] + x^- J^+ \quad , \quad (4.46.b)$$

$$J^- = -\frac{\alpha^2}{2\sqrt{2}} h_{++} + 2x^- J^0 - (x^-)^2 J^+ \quad . \quad (4.46.c)$$

Podemos agora calcular sua álgebra de Poisson, usando os parênteses fundamentais (4.43). Depois de algumas páginas de esforço, encontramos

$$\{J^a(x), J^b(y)\}_{PB} = \kappa \eta^{ab} \delta'(x - y) + \varepsilon^{abc} \eta_{cd} J^d(x) \delta(x - y) \quad , \quad (4.47)$$

onde

$$\eta^{ab} = \begin{pmatrix} \eta^{--} & \eta^{-o} & \eta^{-+} \\ \eta^{o-} & \eta^{oo} & \eta^{o+} \\ \eta^{+-} & \eta^{+o} & \eta^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.48.a)$$

$$\eta_{ab} = (\eta^{-1})_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (4.48.b)$$

é o chamado *tensor métrico de Killing*: ε^{abc} é o tensor completamente anti-simétrico, com a convenção

$$\varepsilon^{-o+} = 1 , \quad (4.49)$$

e $\kappa = \alpha^2/8$, como sempre. Reconhecemos então η^{ab} e ε^{abc} como a métrica de Killing e os coeficientes de estrutura do grupo $SL(2, \mathbf{R})$. Temos portanto, em (4.47), uma realização via parênteses de Poisson da álgebra de Kac-Moody $SL(2, \mathbf{R})$ de nível κ . O interessante é que enquanto no trabalho original de Polyakov^[50] esta álgebra foi encontrada a nível quântico e fazendo-se uso das equações de movimento de h_{++} , aqui ela foi obtida como a álgebra dos geradores de uma simetria residual clássica "off-shell" !

Quanto ao gerador (4.41), o resultado (4.48.b) nos permite escrever

$$T_s = \frac{1}{2\kappa} \eta_{ab} J^a J^b , \quad (4.50)$$

que reconhecemos como o tensor de Sugawara relativo às correntes J^a da álgebra $SL(2, \mathbf{R})$. Usando (4.47), calculamos facilmente o restante da álgebra de Virasoro-Kac-Moody,

$$\{T_s(x), J^a(y)\}_{PB} = J^a(x) \delta'(x-y) , \quad (4.51)$$

$$\{T_s(x), T_s(y)\}_{PB} = 2T_s(x) \delta'(x-y) - T'_s(x) \delta(x-y) . \quad (4.52)$$

Completamos esta seção com as seguintes observações :

(i) Podemos nos questionar a respeito das transformações de coordenadas residuais, $x^\mu \rightarrow x^\mu - \epsilon^\mu(x)$, que mantenham o gauge do cone-de-luz e ainda sejam simetrias de (4.25). Isto implica em ignorar as transformações de Weyl (fazendo $\Lambda(x) = 0$) e considerar somente as transformações parametrizadas por ϵ^+ e ϵ^- . Se retornarmos às expressões (4.31), estes parâmetros terão que satisfazer

$$\partial_- \epsilon^+ = 0 \implies \epsilon^+ = \frac{1}{2} v(x^+) , \quad (4.53.a)$$

$$\partial_- \epsilon^- = -\partial_+ \epsilon^+ \implies \epsilon^- = -\frac{1}{2} [w(x^+) + x^- \partial_+ v(x^+)] . \quad (4.53.b)$$

Note que ϵ^- satisfaz $\partial_-^3 \epsilon^- = 0$. Assim, as transformações parametrizadas segundo (4.53) são combinações particulares das simetrias (4.34) e (4.35), e podemos usar os resultados (4.38) e (4.41) para construir seus geradores imediatamente:

$$j_w^o = w(x^+) J^+ \quad . \quad (4.54)$$

e

$$j_v^o = v(x^+) \left(\tau_{++} - \frac{\sqrt{2}}{4} c_{++}(x^+) \right) \quad . \quad (4.55.a)$$

$$\tau_{++} = -\frac{\sqrt{2}}{2} [T_s + (J^o)'] \quad . \quad (4.55)$$

O resultado (4.54) não constitui nenhuma novidade, apenas fornece a interpretação de J^+ como o gerador das transformações de coordenadas $x^- \rightarrow x^- + \frac{1}{2}w(x^+)$. Já o gerador τ_{++} tem uma relação importante com a componente $\tilde{T}_{++}$ do tensor $\tilde{T}_{\mu\nu}$, (4.12.a). Para entendê-la, é preciso recuperar as equações de movimento das componentes g^{++} e g^{+-} , o que faremos a seguir.

(ii) Se usarmos a equação de movimento (4.30) de h_{++} sobre as correntes J^a definidas em (4.39), concluiremos que estas últimas são os coeficientes da expansão do campo h_{++} na coordenada x^- ,

$$h_{++} = -\frac{2\sqrt{2}}{\alpha^2} [J^-(x^+) - 2x^- J^o(x^+) + (x^-)^2 J^+(x^+)] \quad . \quad (4.56)$$

Ressaltamos o fato de que esta dependência $J^a = J^a(x^+)$ é obtida “on-shell”.

Se tomarmos a equação de movimento da componente g^{+-} — dada por (4.12.a) — no gauge do cone-de-luz, teremos

$$\tilde{T}_{+-} = -h_{++}\tilde{T}_{--} - \frac{\alpha}{4}\bar{\Omega} - \frac{\kappa}{2}(\mu + 4\partial_-^2 h_{++}) = 0 \quad (4.57)$$

$$\implies \partial_-^2 h_{++} = -\frac{4\sqrt{2}}{\alpha^2} J^+ = -\frac{\mu}{4} \quad . \quad (4.58)$$

A equação acima é obviamente compatível com (4.30), mas ela dá a informação adicional de que a corrente J^+ (que é proporcional à curvatura escalar R) é uma constante “on-shell”^[52].

Já a equação de movimento de g_{++} é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{++} = & (h_{++})^2 \tilde{T}_{--} + 2\kappa h_{++}(\mu + 4\partial_-^2 h_{++}) + \frac{1}{2}(g_+^2 + \alpha\partial_+ g_+) + \\ & -\kappa [(\partial_- h_{++})^2 - 2h_{++}\partial_-^2 h_{++} - 2\partial_+ \partial_- h_{++}] \quad , \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde

$$g_+(x^+) = \partial_+ \varphi + h_{++} \partial_- \varphi - \frac{\alpha}{2} \partial_- h_{++} \quad . \quad (4.60)$$

Usando (4.56) e (4.58), podemos escrever

$$\begin{aligned} -\kappa \left[(\partial_- h_{++})^2 - 2h_{++} \partial_-^2 h_{++} - 2\partial_+ \partial_- h_{++} \right] = \\ = [J^+ J^- - (J^0)^2 + \sqrt{2} \partial_+ J^0] = -\sqrt{2} \tau_{++} \quad . \end{aligned} \quad (4.61)$$

relacionando assim o gerador τ_{++} de (4.55) com a componente $\tilde{T}_{++}$. Como foi demonstrado na ref. [52], reconhecemos também que τ_{++} corresponde à parcela de traço nulo (obtida quando $\mu = -4\partial_-^2 h_{++} = 2R$) da componente $\tilde{T}_{++}$, se escolhermos g_+ de forma tal que

$$g_+^2 + \alpha \partial_+ g_+ = 0 \quad . \quad (4.62)$$

(iii) Os resultados (4.59) e (4.61) sugerem que tomemos

$$c_{++} = g_+^2 + \alpha \partial_+ g_+ \quad (4.63)$$

para o gerador (4.55.a). Como no espaço de fase estas quantidades se escrevem como

$$g_+ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Pi + \varphi') \quad . \quad (4.64.a)$$

$$c_{++} = \frac{1}{2} (\Pi + \varphi')^2 + \frac{\alpha}{2} (\Pi + \varphi')' \quad . \quad (4.64.b)$$

resultam as expressivas relações algébricas seguintes

$$\{c_{++}(x), J^a(y)\}_{PB} = 0 \quad . \quad (4.65.a)$$

$$\{c_{++}(x), c_{++}(y)\}_{PB} = 4c_{++}(x) \delta'(x-y) + 2c'_{++}(x) \delta(x-y) - \frac{\alpha^2}{2} \delta'''(x-y) \quad (4.65.b)$$

O termo de Schwinger em (4.65.b) implicará numa extensão central na álgebra do gerador (4.55.a). Há uma esclarecedora discussão e interpretação desse termo central na ref. [52].

(iv) Se no modelo conforme do qual partimos a simetria conforme se baseava na álgebra de Virasoro, esta acabou sendo substituída, a nível quântico (isto é, a nível da ação efetiva gravitacional) por uma álgebra bem maior, a álgebra de Kac-Moody-Virasoro $SL(2, \mathbf{R})$. Este fato peculiar, em especial seu significado geométrico, tem merecido intensa investigação : nas refs. [53] e [54], por exemplo, a invariância $SL(2, \mathbf{R})$ é interpretada em termos de órbitas co-adjuntas do grupo de Virasoro.

(II) Quantização da Ação Gravitacional Induzida

Como vimos, a anomalia de Weyl verificada através da ação efetiva (4.3.b) implicou numa diminuição do número de simetrias locais, de modo que uma das componentes do campo gravitacional — h_{++} , no gauge do cone-de-luz — deixou de representar um simples grau de liberdade de gauge para assumir um papel dinâmico não trivial. Podemos então prosseguir em direção à quantização completa do sistema, quer dizer, quantizar o campo h_{++} , que chamaremos de gráviton.

(II.A) Funções de Correlação

Consideremos a seguinte transformação local de forma do campo h_{++}

$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \epsilon^- \equiv \nabla_+ \epsilon^- \quad , \quad (4.66)$$

onde $\epsilon^-(x)$ é um infinitésimo qualquer. Não se trata necessariamente de uma simetria como em (4.34), pois não estamos impondo a restrição $\partial_-^3 \epsilon^- = 0$. De fato, quando calculamos a variação da ação (4.25) induzida pela transformação (4.46), encontramos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^2x \, L_{h_{++}} \delta h_{++} + (\text{termos de superfície}) = \\ &= \int d^2x \, 2\tilde{T}_{--} \nabla_+ \epsilon^- + (\text{termos de superfície}) = \\ &= \int d^2x \, 2\epsilon^- \nabla_+ \tilde{T}_{--} + (\text{termos de superfície}) \quad . \end{aligned}$$

o que, de acordo com (4.29) e desprezando os termos de superfície, implica em

$$\delta S = \int d^2x \, \frac{\alpha^2}{2} \epsilon^- \partial_-^3 h_{++} \quad . \quad (4.67)$$

Podemos então tomar as identidades de Ward (2.57) para esta transformação : neste caso, o termo que continha $\mathcal{A}$ é nulo (pois a anomalia já está incluída na ação efetiva), e com a escolha $\epsilon^-(x) = \epsilon \delta(z - x)$, ϵ constante, resultam as relações

$$\begin{aligned} -\frac{i\alpha^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial z^{-3}} \langle h_{++}(z) \overline{\underline{X}} \rangle &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z^+} \delta(z - x_i) \langle \overline{\underline{X}}_{x_i} \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z^-} \delta(z - x_i) + \delta(z - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^-} \right) \langle \overline{\underline{X}} \rangle \quad , \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde

$$\overline{\underline{X}} = h_{++}(x_1) h_{++}(x_2) \cdots h_{++}(x_n) \quad , \quad (4.69.a)$$

$$\overline{\Delta}_{x_1} = h_{++}(x_1)h_{++}(x_2) \cdots h_{++}(x_i) \cdots (h_{++}(x_n)) \quad , \quad (4.69.b)$$

Usando então a seguinte representação da função delta de Dirac bidimensional^[50]

$$\delta^{(2)}(z) = -\frac{i}{4\pi} \frac{\partial^3}{\partial z^{-3}} \left(\frac{(z^-)^2}{z^+} \right) \quad , \quad (4.70)$$

as relações (4.68) poderão ser integradas; usando $\alpha^2 = 8\kappa$, resulta

$$\begin{aligned} & -16\pi\kappa \langle h_{++}(z)h_{++}(x_1) \cdots h_{++}(x_n) \rangle = \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{(z^- - x_i^-)^2}{(z^+ - x_i^+)^2} \langle h_{++}(x_1) \cdots h_{++}(x_i) \cdots h_{++}(x_n) \rangle + \\ & - \sum_{i=1}^n \left(2 \frac{(z^- - x_i^-)}{(z^+ - x_i^+)} + \frac{(z^- - x_i^-)^2}{(z^+ - x_i^+)} \frac{\partial}{\partial x_i^-} \right) \langle h_{++}(x_1) \cdots h_{++}(x_n) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Esta fórmula define recursivamente todas as funções de correlação de qualquer número de h_{++} 's. Em particular, a função de dois pontos, obtida fazendo-se $n = 1$, fornece a fórmula de expansão a curtas distâncias do produto de operadores^[55] $\hat{h}_{++}$.

$$-16\pi\kappa \hat{h}_{++}(x)\hat{h}_{++}(y) = \left(\frac{x^- - y^-}{x^+ - y^+} \right)^2 - \left\{ 2 \left(\frac{x^- - y^-}{x^+ - y^+} \right) + \frac{(x^- - y^-)^2}{(x^+ - y^+)} \frac{\partial}{\partial y^-} \right\} \hat{h}_{++}(y) \quad . \quad (4.72)$$

Se decompuermos h_{++} da maneira sugerida por (4.39.c),

$$\hat{h}_{++}(x) = \hat{j}^-(x) - 2x^- \hat{j}^o(x) + (x^-)^2 \hat{j}^+(x) \quad , \quad (4.73)$$

a expansão (4.72) implicará na seguinte fórmula de expansão para os operadores j

$$\hat{j}^a(x)\hat{j}^b(y) = -8\pi\kappa \frac{\eta^{ab}}{(x^+ - y^+)^2} - \frac{\varepsilon^{abc}\eta_{cd}}{(x^+ - y^+)} \hat{j}^d(y) \quad , \quad (4.74)$$

onde η^{ab} e ε^{abc} estão definidos em (4.48) e (4.49). Trata-se da manifestação quântica da álgebra de correntes $SL(2, \mathbf{R})$ que havíamos encontrado em (4.47). Na verdade, foi neste nível quântico, de funções de correlação, que a álgebra foi originalmente detectada^[50]. Entretanto, se na álgebra clássica (4.47) a constante κ era dada por (4.26), os efeitos de renormalização que acompanham a quantização de h_{++} podem alterar seu valor; isto será verificado na próxima seção.

(II.B) Acoplamento com Campos de Matéria

Tomemos como exemplo o modelo da corda bosônica (4.1): a lagrangeana clássica é dada por

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^i \partial_\nu X_i \quad , \quad i = 1, \dots, d \quad , \quad (4.75)$$

que origina as equações de movimento

$$L_{X_i} = -\partial_\mu(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^i) = 0 \quad . \quad (4.75.a)$$

$$L_{g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (4.75.b)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu X^i \partial_\nu X_i - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X_i \right) \quad . \quad (4.76)$$

O modelo é classicamente invariante por difeomorfismos e transformações de Weyl. Mas, como sabemos, uma dessas simetrias é anômala, de modo que vamos fixar apenas duas das componentes de $g^{\mu\nu}$; escolhemos

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{++} & g^{+-} \\ g^{-+} & g^{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{--}(x) & f_{+-}(x) \\ f_{+-}(x) & 2h_{++} \end{pmatrix} \quad . \quad (4.77)$$

onde somente h_{++} é um campo: f_{--} e f_{+-} são funções fixas. A fixação destas duas componentes requer a introdução de dois pares de campos fantasmas, $(\eta_{++}, \varepsilon_-)$ e (ζ, ε_+) , de modo que à lagrangeana deve ser adicionado o termo

$$\mathcal{L}_f = \eta_{++} \nabla_- \varepsilon_- + \zeta (\nabla_+ \varepsilon_- + \nabla_- \varepsilon_+) \quad , \quad (4.78)$$

e o tensor $T_{\mu\nu}$ ganha novas parcelas. No caso que nos interessa, isto é, $f_{--} = 0$ e $f_{+-} = 1$, encontramos

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X^i \partial_+ X_i + h_{++} [\partial_+ X^i \partial_- X_i + h_{++} (\partial_- X^i)^2] + \eta_{++} \partial_+ \varepsilon_- + \zeta \partial_+ \varepsilon_+ \quad (4.79)$$

$$T_{+-} = -\frac{1}{2} h_{++} (\partial_- X^i)^2 = -h_{++} T_{--} \quad . \quad (4.80)$$

Como as componentes g^{++} e g^{+-} foram fixadas, as equações $T_{++} = 0$ e $T_{+-} = 0$ devem ser impostas como condições adicionais. Entretanto, como vimos na seção (I.B), a dinâmica efetiva do campo do gráviton h_{++} gera contribuições não triviais às componentes T_{++} e T_{+-} (veja (4.57) e (4.59)). Por isso, as condições que realmente devem ser impostas para a teoria completamente quantizada são

$$T_{+\pm}^{(total)} \equiv T_{+\pm}^{(matéria)} + T_{+\pm}^{(fantasmas)} + T_{+\pm}^{(gráviton)} = 0 \quad . \quad (4.81)$$

Lembrando que $T_{--} = 0$ corresponde à equação de movimento de h_{++} , a condição $T_{+-}^{(total)} = 0$ implicará em

$$\partial_-^2 h_{++} = -\frac{\mu}{4} = -\frac{1}{\kappa\sqrt{2}} J^+ \quad , \quad (4.82)$$

como havíamos antecipado em (4.58). Já a condição $T_{++}^{(total)} = 0$ fornecerá o valor renormalizado da constante κ : para que tal condição seja quanticamente consistente, é necessário que a carga central associada seja nula, quer dizer,

$$c^{(total)} \equiv c^{(matéria)} + c^{(fantasmas)} + c^{(gráviton)} = 0 \quad . \quad (4.83)$$

Os dois primeiros termos são conhecidos da literatura,

$$c(X') = c_0 = d \quad . \quad (4.84)$$

$$c(\eta_{++}, \varepsilon_-) = -26 \quad , \quad (4.84.b)$$

$$c(\zeta, \varepsilon_+) = -2 \quad . \quad (4.84.c)$$

Temos então que calcular a carga central da parcela gravitacional: para isso, retornamos a (4.59) e percebemos que a contribuição relevante vem do termo $-\sqrt{2}\tau_{++}$, onde τ_{++} está definido por (4.55.b). Tomamos, por isso,

$$T_{++}^{(gráviton)} = \frac{1}{2\kappa} \eta_{ab} J^a J^b + (J^0)' \quad . \quad (4.85)$$

Esta é sua forma clássica: quando o quantizamos, introduzindo o ordenamento normal de operadores, encontramos^[56]

$$\hat{T}_{++}^{(gráviton)} = \frac{1}{2(\kappa + 2)} \eta_{ab} : J^a J^b : + (J^0)' \quad , \quad (4.86)$$

cuja carga central (calculada, por exemplo, através da expansão a curtas distâncias do produto $\hat{T}_{++}^{(graviton)}(x)\hat{T}_{++}^{(graviton)}(y)$) é dada por^[56]

$$c(h_{++}) = \frac{3k}{k+2} - 6k \quad . \quad k = 16\pi\kappa \quad . \quad (4.87)$$

Na fórmula acima, κ já é a constante renormalizada, de valor, até este ponto, desconhecido. Mas impondo-se justamente (4.83),

$$\begin{aligned} d - 28 + \frac{3k}{k+2} - 6k &= 0 \implies \\ \implies k+2 &= \frac{d-13 + \sqrt{(d-1)(d-25)}}{12} \quad , \quad \kappa = \frac{k}{16\pi} \quad . \end{aligned} \quad (4.88)$$

encontraremos o seu valor corrigido: como se vê, κ sofre uma renormalização finita, definida para $d \leq 1$ ou $d \geq 25$. O sinal positivo para a raiz em (4.88) foi escolhido para que recuperemos o valor semi-clássico de κ (dado em (4.26)) no limite $d \rightarrow \infty$.

Esta renormalização se reflete sobre os parâmetros característicos dos campos conformes que interagem com a gravitação : enquanto o campo h_{++} se transforma como (4.66), um campo primário ϕ se transformará tipicamente como

$$\delta\phi = \epsilon^- \partial_- \phi - j\phi \partial_- \epsilon^- \quad . \quad (4.89)$$

onde j é o *peso*¹⁾ do campo ϕ . Podemos então calcular mais identidades de Ward envolvendo os campos h_{++} e ϕ ^[50]; em particular, a função de dois pontos,

$$-16\pi\kappa h_{++}(x)\phi(y) = \left\{ 2j \left(\frac{x^- - y^-}{x^+ - y^+} \right) + \frac{(x^- - y^-)^2}{(x^+ - y^+)} \frac{\partial}{\partial y^-} \right\} \phi(y) \quad , \quad (4.90)$$

que, em termos a expansão (4.73), implica em

$$j^a(x)\phi(y) = \frac{l^a}{(x^+ - y^+)} \phi(y) \quad . \quad (4.91)$$

onde os operadores

$$\begin{aligned} l^+ &= \frac{\partial}{\partial y^-} \quad ; \quad l^0 = y^- \frac{\partial}{\partial y^-} - j \\ l^- &= (y^-)^2 \frac{\partial}{\partial y^-} - 2jy^- \end{aligned} \quad (4.92)$$

constituem uma realização da álgebra $SL(2, \mathbf{R})$ finita,

$$[l^a, l^b] = \varepsilon^{abc} l_{cd} l^d \quad . \quad (4.93)$$

Como demonstrado nas refs. [50] e [56], a dimensão de escala²⁾ $\Delta = -j$ do campo ϕ é renormalizada pela interação gravitacional, de tal modo que sua relação com a dimensão $\Delta^{(o)}$ da teoria livre é dada por

$$\Delta - \Delta^{(o)} = \frac{\Delta(1 - \Delta)}{k + 2} \quad , \quad (4.94)$$

onde k é calculado através de (4.88.a). Perceba que $\Delta = 1$ é um ponto fixo da teoria.

Concluimos esta seção com um comentário sobre a escolha do gauge do cone-de-luz. Este gauge foi originalmente proposto por Polyakov^[50] porque não sofria dos problemas de regularização que o gauge conforme — que se supunha o mais simples — na realidade apresenta. Entretanto, os parâmetros renormalizados da teoria, como κ e Δ , devem ser independentes da escolha de gauge. De fato, trabalhos posteriores^{[57],[58]} ao de Polyakov

¹⁾ É um parâmetro que caracteriza o comportamento do campo conforme sob difeomorfismos.

²⁾ É um parâmetro relacionado ao comportamento de ϕ sob transformações de escala.

reproduziram os resultados para os expoentes críticos (4.88) e (4.94) no gauge conforme. Mais recentemente ainda, todos estes valores foram obtidos fazendo-se a quantização BRST do modelo^{[59],[60]}; a relação (4.88), por exemplo, é resultado da nilpotência da carga BRST.

(III) Extensão Supersimétrica: Supergravidade Quântica Induzida

Vamos agora generalizar a construção anterior para a supergravidade, com um par graviton/gravitino dado no gauge do cone-de-luz por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2h_{++} \end{pmatrix}$$

$$\Psi_- = 0 \quad \Psi_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad , \quad (4.95)$$

Novamente nos basearemos no estudo da anomalia conforme e no cancelamento da anomalia de difeomorfismos (que deve se anular por consistência), o que ficará claro na derivação das identidades de Ward.

Supomos que a teoria contém duas simetrias principais. A primeira é uma simetria de gauge, remanescente das transformações de coordenadas, que sobrevive à fixação do gauge (4.95), dada por

$$\delta\Psi_+ = \epsilon^- \partial_- \Psi_+ - \frac{1}{2} \partial_- \epsilon^- \Psi_+ \quad (4.96.a)$$

$$\delta h_{++} = -\partial_+ \epsilon^- + \epsilon^- \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \epsilon^- \quad , \quad (4.96.b)$$

onde ϵ^- é o parâmetro de transformação (difeomorfismo). A segunda é uma supersimetria local, que depois da fixação do gauge (4.86) se escreve como

$$\delta\Psi_+ = -\partial_+ \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon \partial_- h_{++} - h_{++} \partial_- \varepsilon \quad (4.97.a)$$

$$\delta h_{++} = 2i \bar{\Psi}_+ \gamma_+ \varepsilon \quad , \quad (4.97.b)$$

com $\gamma_- \varepsilon = 0 \quad \left(\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right).$

Tomamos como ação para os campos de matéria o seguinte funcional

$$S = \int d^2x \left\{ \partial_+ X \partial_- X + \frac{i}{2} \bar{\chi} \gamma_- \partial_+ \chi + 2 \bar{\chi} \Psi_+ \partial_- X + h_{++} ((\partial_- X)^2 + \frac{i}{2} \bar{\chi} \gamma_- \partial_- \chi) \right\} \quad , \quad (4.98)$$

com as transformações (4.96) e (4.97) sendo suplementadas por

$$\delta X = \epsilon^- \partial_- X \quad (4.96.c)$$

$$\delta \chi = \epsilon^- \partial_- \chi + \frac{1}{2} \partial_- \epsilon^- \chi \quad (4.96.d)$$

$$\delta X = \bar{\epsilon} \chi \quad (4.97.c)$$

$$\delta \chi = -i \partial_- \phi \gamma_+ \epsilon \quad (4.97.d)$$

$$\text{e } \chi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A ação (4.98) pode ser obtida truncando-se a supergravidade com um multiplete de matéria^[62].

Há uma anomalia bem conhecida na teoria quântica de supergravidade em duas dimensões, que generaliza a anomalia conforme, que é dada pela expressão^[63]:

$$\delta S = -\frac{c}{24\pi} \int d^2x \epsilon^- \partial_-^3 h_{++} + \frac{ic}{6\pi} \int d^2x \bar{\epsilon} \gamma_+ \partial_-^2 \Psi_+ \quad (4.98)$$

Note que a condição para eliminar a anomalia tem uma solução

$$h_{++} = \mathcal{J}^{(+)}(x^+) - 2\mathcal{J}^{(0)}(x^+)x^- + \mathcal{J}(x^+)(x^-)^2 \quad (4.99)$$

$$\psi_+ = \psi^{-1/2}(x^+) + \psi^{1/2}(x^+)x^- \quad (4.100)$$

que são precisamente as soluções das equações quânticas de movimento para o par gráviton/gravitino. Voltaremos a este ponto em breve.

A anomalia pode ser usada para se deduzir a expansão a curtas distâncias dos campos. Começando pela função de correlação

$$\begin{aligned} & \langle h_{++}(x_1) h_{++}(x_2) \cdots h_{++}(x_n) \psi_+(y_1) \cdots \psi_+(y_m) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}h_{++} \int \mathcal{D}\psi_+ h_{++}(x_1) h_{++}(x_2) \cdots h_{++}(x_n) \psi_+(y_1) \cdots \psi_+(y_m) e^{-\kappa W(h, \psi)} \end{aligned} \quad (4.101)$$

fazemos variações do campo h_{++} e ψ_+ segundo (4.96) e (4.97): como consequência, temos a variação da ação dada pela equação (4.98). Resultam então as seguintes identidades

$$\begin{aligned} & \frac{ic}{24\pi} \frac{\partial^3}{\partial z^{-3}} \langle h_{++}(z) \bar{X} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z^+} \delta(z - x_i) \langle \bar{X}_{x_i} \rangle \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z^-} \delta(z - x_i) + \delta(z - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^-} \right) \langle \bar{X} \rangle + \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z^-} \delta(z - y_j) + \delta(z - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j^-} \right) \langle \bar{X} \rangle \end{aligned} \quad (4.102)$$

onde $\bar{X} = h_{++}(x_1)h_{++}(x_2)\cdots h_{++}(x_n)\psi_+(y_1)\cdots\psi_+(y_m)$, $\bar{X}_{x_i}$, é $\bar{X}$ com o campo correspondente a x_i , sendo excluído, e

$$\begin{aligned} \frac{c}{6\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^{-2}} \langle \gamma_+ \psi_+(z) \bar{X} \rangle &= -2i \sum_{i=1}^n \delta(z - x_i) \langle \gamma_+ \psi_+(x_i) \bar{X}_{x_i} \rangle + i \sum_{j=1}^m (-1)^j \partial_+ \delta(z - y_j) \bar{X}_{y_j} \rangle \\ &- i \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \left\{ \frac{1}{2} \delta(z - y_j) \frac{\partial}{\partial y_j^-} + \frac{\partial}{\partial z^-} \delta(z - y_j) \right\} \langle \bar{X}_{y_j} h_{++}(y_j) \rangle \quad (4.103) \end{aligned}$$

Usando as mesmas manipulações da seção anterior, obtemos as expansões a curtas distâncias

$$\frac{c}{6} h_{++}(z) h_{++}(x) = \left(\frac{z^- - x^-}{z^+ - x^+} \right)^2 - \left\{ 2 \left(\frac{z^- - x^-}{z^+ - x^+} \right) + \frac{(z^- - x^-)^2}{z^+ - x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} \right\} h_{++} \quad (4.104)$$

$$\frac{c}{6} h_{++}(z) \psi_+(y) = - \left\{ \frac{z^- - y^-}{z^+ - y^+} + \frac{(z^- - y^-)^2}{z^+ - y^+} \frac{\partial}{\partial y^-} \right\} \psi_+(y) \quad (4.105)$$

$$\frac{c}{6} \psi_+(z) \gamma_+ \psi_+(y) = \frac{1}{2} \frac{z^- - y^-}{(z^+ - y^+)^2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z^+ - y^+} + \frac{1}{2} \frac{z^- - y^-}{z^+ - y^+} \frac{\partial}{\partial y^-} \right\} h_{++}(y) \quad (4.106)$$

A expressão acima implica numa super-álgebra de Kac-Moody, generalizando a álgebra de Neveu-Schwarz para a teoria de supercordas^[64]; se definirmos as expansões

$$\mathcal{J}^a(x^+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n^a (x^+)^n \quad (4.107)$$

$$\psi_+^r(x^+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n^r (x^+)^n \quad (4.108)$$

em termos das componentes dadas em (4.107) e (4.108), as expansões a curtas distâncias anteriores, depois de uma renormalização adequada, serão expressas por

$$[\mathcal{J}_n^a, \mathcal{J}_m^b] = f^{abc} \mathcal{J}_{n+m}^c + kn\eta^{ab} \delta_{n,-m} \quad (4.109)$$

$$[\mathcal{J}_n^a, \psi_m^r] = h^{ars} \psi_{n+m}^s \quad (4.110)$$

$$\{\psi_n^r, \psi_m^s\} = h^{rsc} \mathcal{J}_{n+m}^c + kn\eta^{rs} \delta_{n,-m} \quad (4.111)$$

onde $f^{+-0} = 2$, e f é antisimétrica; $\eta^{00} = \frac{1}{2}$, $\eta^{(1/2)(-1/2)} = 1$, $\eta^{+-} = 1$, $h^{+, -1/2, 1/2} = 1$, $h^{-, 1/2, 1/2} = -1$, $h^{0, \pm 1/2, 1/2} = \pm 1$.

A álgebra finita é realizada pelo seguinte conjunto de operadores

$$\mathcal{J}^+ = \partial_- \quad (4.112.a)$$

$$\mathcal{J}^0 = y^- \partial_- + \frac{1}{2} \theta \partial_\theta - j \quad (4.112.b)$$

$$\mathcal{J}^- = (y^-)^2 \partial_- + y^- \theta \partial_\theta - 2j y^- \quad (4.112.c)$$

$$\mathcal{P}^{1/2} = i \sqrt{\frac{1}{2}} (\partial_\theta + \theta \partial_-) \quad (4.112.d)$$

$$\mathcal{P}^{-1/2} = i \sqrt{\frac{1}{2}} (y^- \partial_\theta + y^- \theta \partial_- - 2j \theta) \quad (4.112.e)$$

com o Casimir c_g dado por

$$c_g = \eta_{ab} \mathcal{J}^a \mathcal{J}^b + \eta_{rs} \mathcal{P}^r \mathcal{P}^s = j(j + \frac{1}{2}) \quad (4.113)$$

O tensor de energia momento, que gera as transformações gerais de coordenadas, pode ser imediatamente obtido, e tem a forma de Sugawara mais um termo linear em $\mathcal{J}^0$, como no modelo gravitacional anterior.

$$\mathcal{T}(x) = \frac{1}{k + \frac{3}{2}} \{ : \mathcal{J}^a(x^+) \mathcal{J}^b(x^+) : \eta_{ab} + : \psi^r(x^+) \psi^s(x^+) : \eta_{rs} \} + \mathcal{J}^{0'}(x^+) \quad (4.114)$$

O coeficiente $\frac{1}{k + \frac{3}{2}}$ é obtido impondo-se que a superálgebra de Kac-Moody-Virasoro tenha o coeficiente usual para a relação

$$[L_n, \mathcal{J}_m^a] = m \mathcal{J}_{n+m}^a \quad (4.115)$$

onde, para a parte de Sugawara do tensor $\mathcal{T}$, temos

$$\mathcal{T}_{Sug}(x^+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{-n}(x^+)^n \quad (4.116)$$

A álgebra completa de Virasoro pode então ser reproduzida. A carga central, depois de um cálculo longo, mas direto, do valor esperado do produto do tensor de energia momento em pontos próximos, resulta

$$c_{Sug} = \frac{k}{k + \frac{3}{2}} \quad (4.117)$$

Para balancear as cargas centrais, temos que considerar as seguintes contribuições

- i) campos de matéria, com carga central c_0 ;
- ii) fantasmas de difeomorfismo, com carga central -15;
- iii) fantasmas superconformes, com carga central $-\frac{5}{2}$;
- iv) contribuição tipo Sugawara para o multiplete de supergravidade, igual a $\frac{k}{k + \frac{3}{2}}$;
- v) termo linear contribuindo com $-6k$.

Somando tudo temos (onde $c_0 = \frac{3}{2}d$ para o modelo (4.98)):

$$k + \frac{3}{2} = \frac{d - 5 + \sqrt{(d-1)(d-9)}}{8} . \quad (4.118)$$

(lembre-se do resultado bosônico $k + 2 = \frac{d-13+\sqrt{(d-1)(d-25)}}{12}$). Com a realização (4.112), o Casimir c_g dado em (4.113), e $j = -\Delta$, a dimensão anômala Δ_o da teoria livre tem uma relação com a dimensão anômala da teoria interagente dada por

$$\Delta_o = \frac{\Delta(\frac{1}{2} - \Delta)}{k + \frac{3}{2}} + \Delta . \quad (4.119)$$

Note que $\Delta = \frac{1}{2}$ é um ponto fixo (do mesmo modo que $\Delta = 1$ era um ponto fixo na teoria bosônica). Conclusões similares podem ser tiradas então . Uma nova série de índices críticos emerge, e podem ser comparados com os resultados usuais. É interessante saber que toda esta análise pode ser realizada usando o formalismo de supercampos (como na ref. [65]).

(IV) Sobre o Interesse da Gravitação Induzida para Outras Teorias

Como vimos, a teoria de (super)gravitação emerge explicitamente como teoria efetiva nos modelos de (super)cordas. Na formulação tradicional, exige-se que estas teorias de cordas não possuam a anomalia conforme, o que, de acordo com (4.3.b), significa impormos que a constante κ seja nula. No caso bosônico, para o qual $\kappa = (d-26)/96\pi$, isto implica que $d = 26$, ou seja, uma restrição sobre a dimensão do espaço-tempo físico no qual a corda está imersa; para supercordas, a dimensão crítica é $d = 10$. Mas se ao invés de cancelarmos a ação efetiva anômala, prosseguirmos com sua quantização da maneira exposta neste capítulo, essas restrições sobre a dimensão d serão substituídas por (4.88) (ou (4.118)): isto significa que o acoplamento consistente dos campos de matéria da corda com a gravitação quântica (de nível κ) altera a dimensão crítica do sistema, e constitui assim uma interessante perspectiva para a construção de teorias de cordas em outras dimensões (a caminho de $d = 4$).

A gravitação quântica induzida tem outra aplicação interessante em mecânica estatística. Assim como as teorias de campo conformes foram extremamente úteis na compreensão de fenômenos críticos de uma variedade de sistemas estatísticos em redes regulares bidimensionais, a gravitação induzida sugere uma receita para a introdução de um campo gravitacional nestes modelos: as redes regulares são substituídas por redes planas

dinâmicas, e a integral funcional sobre o campo gravitacional corresponde a fazermos a soma sobre todas estas redes — é a chamada teoria das *superfícies aleatórias*^{[66],..., [69]}. De fato, todos os expoentes críticos destes modelos estatísticos (resolvidos) coincidem com as previsões da gravitação quântica de Polyakov.

Se tomarmos como modelo conforme de partida uma teoria de férmions de Majorana acoplados ao campo gravitacional, sua lagrangeana no gauge do cone-de-luz será dada por^[56]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_-(\partial_+ + h_{++}\partial_-)\psi_- + \bar{\psi}_+\partial_-\psi_+ \quad , \quad (4.120)$$

mostrando que o gráviton h_{++} se acopla somente com uma das componentes quirais de ψ . Isto nos faz lembrar do modelo de Schwinger quiral (3.4) — por isso o gauge do cone-de-luz é chamado também de gauge quiral — e sugere o estudo de férmions quirais ($\psi_+ = 0$) acoplados à gravitação quântica[70]. Recentemente, G.M.Semenoff[71] utilizou técnicas de bosonização para o estudo da ação efetiva de bósons e férmions quirais acoplados a campos de gauge e gravitacionais simultaneamente, revelando esta estrutura quiral da gravitação quântica.

Por fim, o modelo de gravitação quântica induzida bidimensional se apresenta também como um laboratório teórico para a cosmologia e gravitação realistas: como é discutido na ref. [72], por exemplo, o modelo (4.3) exibe um ‘ponto de sela’ cuja ação tende a $-\infty$ quando a constante cosmológica μ tende a 0^+ . Ocorre que este fenômeno foi justamente proposto por E.Baum, S.W.Hawking e S.Coleman para resolver o problema da constante cosmológica na teoria gravitacional em quatro dimensões.

Todas estas perspectivas de aplicação exemplificam a riqueza estrutural deste modelo de gravitação efetiva, super-recompensando nosso interesse (e esforço) originais em estudá-lo como um exemplo de teoria de gauge anômala quantizável.

Conclusão

As técnicas de bosonização e o conhecimento de resultados gerais em teorias de campos conformes permitiram que realizássemos a quantização de dois modelos bidimensionais que exibiam simetrias de gauge anômalas. Se por um lado isto nos serviu como um proveitoso laboratório para a compreensão e desenvolvimento de métodos de quantização, o fato de agora termos em mãos uma teoria anômala ‘resolvida’ constitui um bom princípio para o passo seguinte: tentar ‘rastrear’ a anomalia para enfim entender sua origem física.

Note que os modelos anômalos que expusemos nos capítulos 3 e 4 resultaram em teorias quânticas consistentes. Isto é importante ressaltar porque é um tanto comum fazermos a associação precipitada entre teorias anômalas e teorias inconsistentes, originada, provavelmente, pela incompatibilidade entre as equações de movimento clássicas e termos anômalos quânticos.

Vale dizer também que, como seqüência dos estudos da origem das anomalias em teorias de gauge, nos parece interessante e promissor o emprego das modernas (e em desenvolvimento) técnicas de quantização BRST e BFV.

Apêndice A

CONVENÇÕES

- Coordenadas do espaço-tempo $(D + 1)$ -dimensional

$$\{x^\mu, \mu = 0, \dots, D\}$$

$$\text{tempo} : t = x^0 \quad (A.1)$$

$$\text{espaço} : \{x^i, i = 1, \dots, D\} \quad (A.2)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (A.3)$$

- Derivada lagrangeana: dada $\mathcal{L}(\varphi_a)$,

$$L^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_a)} \right) - \dots \quad (A.4)$$

- Em duas dimensões $\{x^0, x^1\}$:

Matrizes gama :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \gamma^5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 \quad (A.5)$$

Cone-de-luz :

$$x^\pm = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}} \quad \partial_\pm = \frac{\partial_0 \pm \partial_1}{\sqrt{2}} \quad (A.6)$$

$$\gamma_\pm = \frac{\gamma^0 \pm \gamma^1}{\sqrt{2}} \quad (A.7)$$

Métrica de Minkowski: $\text{diag}(1, -1)$.

• Gravitação : $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

Conexões e curvatura:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (A.8)$$

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \quad (A.9)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (A.10)$$

$$g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (A.11)$$

$\nabla_\mu \rightarrow$ derivada covariante

Em duas dimensões :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}g\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma}R \quad (A.12)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (A.13)$$

$$\sqrt{-g}R = \partial_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (g g^{\mu\nu}) \right) + A \quad (A.14)$$

$$A = \frac{1}{4\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}\partial_\mu(\varepsilon_{\gamma\rho}g g^{\rho\sigma})\partial_\nu(\varepsilon_{\sigma\delta}g g^{\delta\alpha}) \quad (A.15)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} \rightarrow \text{tensor anti-simétrico} \quad ; \quad \varepsilon^{01} = 1 \quad (A.16)$$

Apêndice B

VARIAÇÕES DE FORMA NO TEOREMA DE NOETHER

Examinaremos aqui com mais detalhe o papel da variação de **forma** dos campos na formulação do teorema de Noether. Para isso, consideremos um funcional ação com a forma geral

$$S[\varphi(x)] = \int_V d^n x \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x); x^\mu) \quad (B.1)$$

e uma transformação infinitesimal de coordenadas e campos dada por

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + f^\mu(x) \quad (B.2.a)$$

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi'_a(x') = \varphi_a(x) + \chi_a(x) \quad (B.2.b)$$

$$\partial_\mu \varphi_a(x) \longrightarrow \partial'_\mu \varphi'_a(x') = \partial_\mu \varphi_a(x) + \partial_\mu \chi_a(x) - \partial_\mu f^\nu(x) \partial_\nu \varphi_a(x) \quad (B.2.c)$$

Note que as transformações (B.2.b) e (B.2.c) são as transformações **totais** nos campos; as transformações de forma são:

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + \chi_a(x) - f^\nu(x) \partial_\nu \varphi_a(x) \quad (B.3.a)$$

$$\partial_\mu \varphi_a(x) \longrightarrow (\partial_\mu \varphi_a)'(x) = \partial_\mu \varphi_a(x) + \partial_\mu (\chi_a(x) - f^\nu(x) \partial_\nu \varphi_a(x)) \quad (B.3.b)$$

Não imporemos, por enquanto, nenhuma condição de contorno sobre as quantidades infinitesimais $f^\mu(x)$ e $\chi_a(x)$.

Calculemos então o valor da ação para as quantidades transformadas segundo (B.2):

$$\begin{aligned} S[\varphi'(x')] &= \int_{V'} d^n x' \mathcal{L}(\varphi'_a(x'), \partial'_\mu \varphi'_a(x'); x'^\mu) = \\ &= \int_V d^n x \left\| \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} \right\| \mathcal{L}(\varphi_a(x) + \chi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x) + \partial_\mu \chi_a(x) - \partial_\mu f^\nu(x) \partial_\nu \varphi_a(x); x^\mu + f^\mu(x)) = \\ &= \int_V d^n x (1 + \partial_\nu f^\nu(x)) \left\{ \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x); x^\mu) + \chi_a(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}(x) + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\mu \chi_a - \partial_\mu f^\nu \partial_\nu \varphi_a)(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)}(x) + f^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathcal{L}(x) \Big|_{\varphi \text{ fixo}} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V d^n x \mathcal{L}(\varphi_a(x), \partial_\mu \varphi_a(x); x^\mu) + \int_V d^n x \left\{ \partial_\nu f^\nu(x) \mathcal{L}(x) + \right. \\
&\quad \left. + f^\nu \partial_\nu \varphi_a(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}(x) + f^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi_a(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)}(x) + f^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathcal{L}(x) \right|_{\varphi \text{ fixado}} \Bigg\} + \\
&+ \int_V d^n x \left\{ [\lambda_a - f^\nu \partial_\nu \varphi_a](x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}(x) + \partial_\mu [\lambda_a - f^\nu \partial_\nu \varphi_a](x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)}(x) \right\} = \\
&= S[\varphi(x)] + \int_V d^n x \left\{ \partial_\mu \left[f^\mu \mathcal{L} + (\lambda_a - f^\nu \partial_\nu \varphi_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right] \right\} + \\
&\quad + \int_V d^n x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) \right\} (\lambda_a - f^\nu \partial_\nu \varphi_a)
\end{aligned}$$

Chamando então:

$$\bullet \delta x^\mu = f^\mu \quad , \quad (B.4)$$

$$\bullet \delta \varphi_a = \lambda_a - f^\nu \partial_\nu \varphi_a = \text{variação de forma de } \varphi_a \quad , \quad (B.5)$$

$$\bullet L^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \text{derivada lagrangeana} \quad , \quad (B.6)$$

teremos

$$S[\varphi'(x')] = S[\varphi(x)] + \int_V d^n x \left\{ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) + L^a \delta \varphi_a \right\} \quad (B.7)$$

ou ,resumidamente,

$$S[\varphi'(x')] = S[\varphi(x)] + \int_V d^n x (\delta \mathcal{L} + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu)) \quad (B.8)$$

onde

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L} &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a \right) + L^a \delta \varphi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \delta \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\mu \delta \varphi_a = \\
&= (\text{variação de forma de } \mathcal{L} \text{ induzida pela variação de forma dos campos})
\end{aligned}$$

De acordo com (B.7), para que a ação se transforme por um termo de superfície, basta que

$$L^a \delta \varphi_a = \partial_\mu J^\mu \quad (B.9)$$

para algum funcional (corrente) J^μ . De modo equivalente, a equação (B.8) mostra que esta condição é satisfeita se

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \Omega^\mu \quad (B.10)$$

com

$$\Omega^\mu = J^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a \quad . \quad (B.11)$$

Vemos que qualquer uma dessas condições de quase-invariância envolve somente variações de forma ($\delta \varphi_a$ ou $\delta \mathcal{L}$), mostrando enfim que, para o estudo de simetrias contínuas, podemos nos limitar à análise das transformações de forma sobre os campos.

Apêndice C

SIMETRIAS DE NOETHER DA EQUAÇÃO KdV

Entre as equações de onda dispersivas não-lineares^[73], a equação de Korteweg-de Vries (KdV),

$$l(u) \equiv \dot{u} + uu' + u''' = 0 \quad , \quad (C.1)$$

(onde $u = u(t, x)$, e o 'ponto' e a 'linha' representam derivadas em relação a t e x respectivamente) é uma das mais simples e ao mesmo tempo mais interessantes: para as soluções desta equação, pode-se achar um número infinito de leis de conservação independentes e não-triviais^[74], o que se caracteriza pela existência de um número infinito de funções polinomiais

$$P_n = P_n(u, u', u'', \dots) \quad , \quad n = 0, \dots, \infty \quad , \quad (C.2)$$

tais que

$$P_n \cdot l(u) = \partial_\alpha J_n^\alpha(u) \quad , \quad (C.3)$$

$$\partial_\alpha J^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial t} J^0 + \frac{\partial}{\partial x} J^1 \quad . \quad (C.4)$$

Eis aqui as quatro primeiras leis de conservação :

(i)

$$P_0 = 1$$

$$J_0^0 = u$$

$$J_0^1 = \frac{1}{2}u^2 + u'' \quad ; \quad (C.5)$$

(ii)

$$P_1 = u$$

$$J_1^0 = \frac{1}{2}u^2$$

$$J_1^1 = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}(u')^2 + uu'' \quad ; \quad (C.6)$$

(iii)

$$\begin{aligned}
P_2 &= u^2 + 2u'' \\
J_2^o &= \frac{1}{3}u^3 - (u')^2 \\
J_2^1 &= \frac{1}{4}u^4 + u^2u'' + 2\dot{u}u' + (u'')^2 \quad ;
\end{aligned} \tag{C.7}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
P_3 &= u^3 - 3(u')^2 + 6(uu')' + \frac{18}{5}u'''' \\
J_3^o &= \frac{1}{4}u^4 - 3u(u')^2 + \frac{9}{5}(u'')^2 \\
J_3^1 &= \frac{1}{5}u^5 + u^3u'' + \frac{3}{2}u^2(u')^2 + 6\dot{u}uu' + \frac{18}{5}\dot{u}u''' - \frac{18}{5}\dot{u}'u'' + \frac{18}{5}uu'u'' + \\
&\quad - \frac{3}{5}(u')^2u'' + \frac{6}{5}u(u'')^2 + \frac{9}{5}(u''')^2 \quad .
\end{aligned} \tag{C.8}$$

A forma da equação (C.3) sugere que tais leis de conservação se originem das transformações de simetria infinitesimais ($\delta_n u = \varepsilon P_n$) de uma teoria cujas equações de Euler-Lagrange sejam $l(u) = 0$. O problema é que **não existe**^[1] uma densidade $\mathcal{L}(u)$ cuja derivada lagrangeana seja $l(u)$, e por isso se acreditava que as correntes conservadas (C.3) não eram correntes de Noether. Vamos mostrar que isto não é verdade.

Para tanto, tomemos a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4} \int dy \, u(x) \epsilon(x-y) \dot{u}(y) + \frac{1}{6} u^3(x) - \frac{1}{2} (u')^2(x) \quad , \tag{C.9}$$

onde $\epsilon(x)$ é a função sinal. A equação de Euler-Lagrange para este modelo será então

$$L(u) = \frac{1}{2} \int dy \, \epsilon(x-y) \dot{u}(y) + \frac{1}{2} u^2(x) + u''(x) = 0 \quad , \tag{C.10}$$

o que, derivando-se em relação a x , implica em

$$\dot{u} + uu' + u''' = 0$$

quer dizer, $l(u) = (L(u))'$, e portanto as soluções do modelo (C.9) são soluções da equação KdV. Vista de outro ângulo, (C.10) é uma primeira integral da equação KdV (com a condição de contorno $u \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, como é usual tomar para as soluções da KdV).

Consideremos então a seguinte transformação infinitesimal do campo u ,

$$\delta_n u = -\varepsilon (P_n(u))' \quad , \tag{C.11}$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal constante. Obtemos assim

$$\begin{aligned}
L(u)\delta_n u &= -\varepsilon (P_n(u))' L(u) = \\
&= (-\varepsilon P_n(u)L(u))' + \varepsilon P_n(u)l(u) = \\
&= (-\varepsilon P_n(u)L(u))' + \partial_\alpha (\varepsilon J_n^\alpha(u))
\end{aligned} \tag{C.12}$$

o que, segundo nosso critério (1.16) significa que (C.11) é uma simetria do modelo (C.9), e que J_n^α é a respectiva corrente de Noether, conservada para as soluções de (C.10) (note que a parcela $P_n(u)L(u)$ não contribui “on-shell”).

Como sempre, é preciso verificar a integrabilidade das transformações (C.11). Isto é mais fácil e esclarecedor no formalismo hamiltoniano, através da álgebra de geradores. Calculamos o momento conjugado a u ,

$$p(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}(x)} = \frac{1}{4} \int dy \, u(y) \epsilon(y-x) \quad , \tag{C.13}$$

$$\{u(t,x), p(t,y)\}_{PB} = \delta(x-y) \quad . \tag{C.14}$$

Temos um vínculo primário de 2a. classe,

$$\begin{aligned}
\Omega(x) &= p(x) - \frac{1}{4} \int dy \, u(y) \epsilon(y-x) \approx 0 \quad , \\
\{\Omega(x), \Omega(y)\}_{PB} &= \frac{1}{2} \epsilon(x-y) \quad ,
\end{aligned} \tag{C.15}$$

que não gera, por isso, vínculos secundários. Como um típico sistema de 2a. classe, podemos ‘eliminar’ o vínculo construindo os parênteses de Dirac, que neste caso são os famosos parênteses quirais

$$\begin{aligned}
\{p(x), p(y)\}_{DB} &= -\frac{1}{8} \epsilon(x-y) \quad , \\
\{u(x), p(y)\}_{DB} &= \frac{1}{2} \delta(x-y) \quad , \\
\{u(x), u(y)\}_{DB} &= \delta'(x-y) \quad .
\end{aligned} \tag{C.16}$$

A hamiltoniana do modelo é dada por

$$H = \int dx \left(-\frac{1}{6} u^3 + \frac{1}{2} (u')^2 \right) \quad , \tag{C.17}$$

que gera precisamente a equação KdV,

$$\dot{u} = \{u, H\}_{DB} = -uu' - u''' \quad . \tag{C.18}$$

Os geradores das transformações (C.11) são as densidades de carga J_n^o , através de

$$\delta_n u = \{Q_n, u\}_{DB} \quad , \quad (C.19)$$

$$Q_n = \varepsilon \int dx J_n^o(u) \quad , \quad (C.20)$$

e a integrabilidade das transformações (C.19) depende da álgebra das cargas Q_n . Embora a álgebra das densidades seja não-linear, pode-se mostrar que

$$\{J_m^o(x), J_n^o(y)\}_{DB} = \frac{\partial}{\partial x} K_{mn}(x, y) \quad . \quad (C.21)$$

Por exemplo,

$$\{J_0^o(x), J_3^o(y)\}_{DB} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} u^2(x) + 2u''(x) \right) \delta(x-y) + 2u'(x) \delta'(x-y) \right] \quad (C.22)$$

Para as cargas obtidas integrando-se J^o , o resultado (C.21) implica que

$$\{Q_m, Q_n\}_{DB} = 0 \quad , \quad (C.23)$$

um fato conhecido^[75] como *álgebra de convolução de cargas* da KdV, o que garante a integrabilidade de (C.19).

Concluimos assim que existe um modelo — dado pela lagrangeana (C.9), ou pela hamiltoniana (C.17) e parênteses (C.18) — que gera a KdV como equação de movimento e que exhibe um número infinito de simetrias de Noether — dadas por (C.11) ou (C.19) — que o tornam um sistema integrável.

É interessante notar que o modelo (C.9) se assemelha ao de bósons quirais de Floreannini-Jackiw^[42]; a álgebra quiral (C.16) é precisamente a mesma nas duas teorias. Podemos tratar (C.9) como uma primeira generalização não-linear e dispersiva de bósons quirais. A generalização seguinte seria

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4} \int dy u(x) \epsilon(x-y) \dot{u}(y) + \frac{1}{12} u^4(x) - \frac{1}{2} (u')^2(x) \quad , \quad (C.24)$$

que levaria à chamada equação KdV modificada^[73]

$$\dot{u} + u^2 u' + u''' = 0 \quad . \quad (C.25)$$

Esta também exhibe um número infinito de leis de conservação^[74], que podem ser obtidas como simetrias de Noether de modo análogo ao exposto neste Apêndice.

Referências

- [1] M.M.Vainberg - "*Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*", Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [2] H.Fleming - Rev.Bras.Fis. **17** (1987) 236.
- [3] R.P.Feynman, A.R.Hibbs - "*Quantum Mechanics and Path Integrals*", McGraw-Hill, N.Y., 1965.
- [4] H.Goldstein - "*Classical Mechanics*", Addison-Wesley Publishing, Cambridge, 1950. Para a introdução das derivadas lagrangeanas nas equações de movimento da mecânica.
- [5] N.N.Bogoliubov, D.V.Shirkov - "*Introduction to the Theory of Quantized Fields*", Interscience Publishers, London, 1959.
- [6] R.Jackiw - "Field Theoretic Investigations in Current Algebra", em "*Current Algebra and Anomalies*", World Scientific Publishing, Singapore, 1985.
- [7] N.P.Konopleva, V.N.Popov - "*Gauge Fields*", O.P.A., N.Y., 1981.
- [8] E.C.G.Sudarshan, N.Mukunda - "*Classical Dynamics: A Modern Perspective*", John Wiley & Sons, N.Y., 1974.
- [9] K.Sundermeyer - "*Constrained Dynamics*", Springer-Verlag, N.Y., 1982.
- [10] A.Hanson, T.Regge, C.Teitelboin - "*Constrained Hamiltonian Systems*", Accademia Nazionale Dei Lincei, Roma, 1976.
- [11] M.E.V.Costa - tese de doutorado, UFRGS, 1988.
- [12] F.P.Devecchi - tese de mestrado, IFT-UNESP, 1989.
- [13] P.A.M.Dirac - "*Lectures in Quantum Mechanics*" e "*Lectures in Quantum Field Theory*", Yeshiva University, N.Y., 1964.
- [14] J.A.Anderson, P.G.Bergmann - Phys.Rev. **83** (1951) 1018.
- [15] L.Castellani - Ann.Phys. **143** (1982) 357.
- [16] X.Gràcia, J.M.Pons - Ann.Phys. **187** (1988) 355.
C.Batlle, J.Gomis, X.Gràcia, J.M.Pons - J.Math.Phys. **30** (1989) 1345.
- [17] J.Gomis, M.Henneaux, J.M.Pons - UB-ECM-PF 09/89, Barcelona preprint.
- [18] L.Fadeev, R.Jackiw - Phys.Rev.Lett. **60** (1988) 1692.
- [19] M.E.V.Costa, H.O.Girotti - IFUFRGS 1988 preprint.
- [20] M.Henneaux - Phys.Rep. **126** (1985) 1.
- [21] J.-L.Lagrange - "*Mécanique Analytique*", Albert Blanchard, Paris, 1965.
- [22] H.Rund - "*The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*", van Nostrand, London, 1966.

- [23] W.Siegel - Nucl.Phys. **B238** (1984) 307.
- [24] R.Jackiw - "Topological Investigations of Quantized Gauge Theories", em "*Current Algebra and Anomalies*", World Scientific Publishing, Singapore, 1985.
- [25] A.Zadra - monografia de qualificação para doutoramento, IFT-UNESP, 1989.
- [26] L.D.Fadeev, S.L.Shatashvili - Teor.Mat.Fiz. **60** (1984) 206.
- [27] A.A.Vladimorov - E2-89-39 preprint.
- [28] H.J.Roethe, K.D.Roethe - HD-THEP-89-5 Heidelberg preprint.
- [29] C.Itzykson, J.-B.Zuber - "*Quantum Field Theory*", McGraw-Hill, Singapore, 1985.
- [30] C.Teitelboin - ELAF'87 Proceedings, World Scientific, 1988.
- [31] K.Fujikawa - review em "*Quantum Gravity and Cosmology*", World Scientific, Singapore, 1986.
- [32] D.Dalmazi - tese de mestrado, IFT-UNESP, 1988.
- [33] A.W.Smith, J.A.Helayël-Neto - "*Anomalies in Quantum Field Theories: an Introductory Presentation*", Univ.Catol.Petrópolis, 1989, preprint.
- [34] I.Tsutsui - Phys.Rev. **D40** (1989) 3543.
- [35] F.S.Otto, H.J.Roethe, K.D.Roethe - Phys.Lett. **B231** (1989) 299.
- [36] J.Wess, B.Zumino - Phys.Lett. **B37** (1971) 95.
- [37] L.Alvarez-Gaumé, E.Witten - Nucl.Phys. **B234** (1983) 269.
- [38] R.Jackiw, R.Rajaraman - Phys.Rev.Lett. **54** (1985) 1219.
- [39] H.O.Girotti, H.J.Roethe, K.D.Roethe - Phys.Rev. **D34** (1986) 592.
- [40] E.Abdalla, M.C.B.Abdalla, F.P.Davecchi, A.Zadra - Phys.Rev. **D39** (1989) 1784.
- [41] J.M.F.Labastida, M.Pernici - Nucl.Phys. **B297** (1988) 557; Phys.Rev.Lett. **59** (1987) 2511.
- [42] R.Floresanini, R.Jackiw - Phys.Rev.Lett. **59** (1987) 1873.
- [43] C.Imbimbo, A Schwimmer - Phys.Lett. **B193** (1987) 455.
- [44] E.Abdalla, M.C.B.Abdalla, F.P.Davecchi, A.Zadra - Phys.Lett. **B215** (1988) 564.
- [45] J.M.F.Labastida, A.V.Ramallo - Phys.Lett. **B222** (1989) 231.
- [46] K.Harada - HD-THEP-89-18 e 22, Heidelberg preprint.
- [47] E.Abdalla, M.C.B.Abdalla, A.Zadra - IFUSP/P-805, 1989 preprint.
- [48] A.M.Polyakov - Phys.Lett. **B101** (1981) 207.
- [49] L.Alvarez-Gaumé, E.Witten - Nucl.Phys. **B234** (1983) 269.
- [50] A.M.Polyakov - Mod.Phys.Lett. **A2** (1987) 893.

- [51] A.H.Chamseddine, M.Reuter - Nucl.Phys. **B317** (1989) 757.
- [52] J.A.Helayël-Neto, S.Mokhtari, A.W.Smith - Phys.Lett. **B236** (1990) 12.
- [53] A.Alekseev, S.Shatashvili - Nucl.Phys. **B323** (1989) 719.
- [54] M.Bershadsky, H.Ooguri - IASSNS-HEP-89/09 Princeton preprint.
- [55] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.B.Zamolodchikov - Nucl.Phys. **B241** (1984) 383.
- [56] V.G.Knizhnik, A.M.Polyakov, A.B.Zamolodchikov - Mod.Phys.Lett. **A3** (1988) 819.
- [57] F.David - Mod.Phys.Lett. **A3** (1988) 1651.
- [58] J.Distler, H.Kawai - Nucl.Phys. **B321** (1989) 509.
- [59] T.Kuramoto - Phys.Lett. **B233** (1989) 363.
- [60] K.Itoh - DAMTP/R-89/12 Cambridge preprint.
- [61] E.Abdalla, M.C.B.Abdalla, A.Zadra - Mod.Phys.Lett. **A4** (1989) 849.
- [62] S.Deser, B.Zumino - Phys.Lett. **B65** (1976) 369.
- [63] T.Fukai - Nucl.Phys. **B299** (1988) 346.
- [64] A.Neveu, J.H.Schwarz - Nucl.Phys. **B31** (1971) 529.
- [65] A.M.Polyakov, A.B.Zamolodchikov - Mod.Phys.Lett. **A3** (1988) 1213.
- [66] A.B.Zamolodchikov - Phys.Lett. **B117** (1982) 87.
- [67] V.A.Kazakov - Les Houches, Session XLIX. 1988.
- [68] I.K.Kostov - SPhT/88/196 Saclay preprint.
- [69] J.Ambjorn - NB1-HE-89-56 Niels Bohr preprint.
- [70] T.Berger, I.Tsutsui - DESY-89-109 e 131 preprint.
- [71] G.W.Semenoff - Quarks-88, Tbilisi, USSR, 1988.
- [72] J.Polchinski - Nucl.Phys. **B324** (1989) 123.
- [73] A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin - Proceedings of the IEE, vol.61, no.10, 1973.
- [74] R.M.Miura, C.S.Gardner, M.D.Kruskal - J.Math.Phys. **9** (1968) 1204.
- [75] J.L.Gervais - Phys.Lett. **B160** (1985) 277.

