IFT, TM-02/88

L U I S   D I A S   A L M E I D A

# QUEBRA DA SIMETRIA QUIRAL
# NA $QED_3$

Dissertação de Mestrado
apresentada no
Instituto de Física Teórica



Orientador: Adriano A. Natale



São Paulo
Abril de 1988

## RESUMO

Fazemos um estudo da quebra da simetria quiral na eletrodinâmica quântica em 2+1 dimensões ($QED_3$) com N fermions. Obtemos soluções aproximadas para a equação de Schwinger-Dyson do propagador fermiônico desta teoria. Substituindo estas soluções aproximadas na equação de Schwinger-Dyson completa, verificamos que algumas destas são não triviais apenas até um dado valor crítico de N. Também calculamos o potencial efetivo para determinar qual destas soluções leva a um mínimo absoluto de energia. Verificamos que, assumindo a validade da expansão 1/N, a solução $\Sigma_I \approx p^{-8/\pi^2 N}$ é a única que causa uma quebra de simetria quiral para grandes valores de N.

## ABSTRACT

We study chiral symmetry breaking in 2+1 dimensional quantum electrodynamics ($QED_3$) with N fermions. We obtain approximate solutions to the Schwinger-Dyson gap equation ($\Sigma(p)$) and when we introduce these into the full gap equation, we find that some of the solutions are non-trivial only up to a certain critical value of N. We calculate an effective potential to verify which expression for $\Sigma(p)$ leads to the absolute minimum of energy. If the 1/N expansion is a good approximation, we conclude that only the solution $\Sigma_I \approx p^{-8/\pi^2 N}$ exists for large N.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de aproveitar esta oportunidade para manifestar o meu reconhecimento aquelas pessoas que, de alguma maneira, contribuiram na realização deste trabalho. Infelizmente receio que o espaço de uma página seja pequeno demais para as inúmeras recordações de companheiros cujos destinos se separaram ao longo do meu caminho. Ainda assim, assumindo a culpa pela omissão de alguns nomes, não posso deixar de lembrar a presença dos meus pais Alceu Moraes Almeida e Carmen Dias Almeida, de quatro colegas em especial (Marina da Silveira Figueiró Sobrinha, Sérgio Garcia Magalhães, George Emanuel Avraam Matsas e Maurício Salveti de Oliveira) e do Professor Adriano Antônio Natale.

P.S. Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e à Rosane pela datilografia.

## DEL RIGOR EN LA CIENCIA

...En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal Perfección que el mapa de una sola Provincia ocupaba toda una Ciudad, y el mapa del imperio, toda una Provincia. Con el tiempo, esos Mapas Desmesurados no satisfacieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos adictas al Estudio de la Cartografía, las Generaciones Siguientes entendieron que ese dilatado Mapa era Inútil y no sin Impiedad lo entregaron a las Inclemencias del Sol y de los Inviernos. En los desiertos del Oeste perduran despedazadas Ruinas del Mapa, habitadas por Animales y por Mendigos; en todo el País no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas.

J.L. Borges, "El Hacedor",(1960)

# ÍNDICE

# I. INTRODUÇÃO

Há quinze anos atrás foi formulada uma teoria que "descreve" a interação forte entre as partículas, que denominamos de Cromodinâmica Quântica (QCD)[1]. A QCD é uma teoria que possui propriedades cruciais que a tornam uma candidata importante como teoria realística: é renormalizável, apresenta liberdade assintótica e espera-se também que seja confinante.Entretanto, a maior dificuldade no estudo desta teoria está no fato da constante de acoplamento ser grande (ou forte, como indica a própria interação) além do que a sua não-Abelianidade só faz introduzir mais não linearidades na mesma, tornando-a uma teoria muito mais complexa que a QED. Assim, tem-se recorrido a esquemas de simplificações que facilitem seu estudo tais como expansões no número de cores[2], etc... .

Ao lado da simetria de cor, tem-se estudado uma simetria adicional onde a Lagrangeana da teoria não possua um termo de massa para os férmions. A esta simetria damos o nome Quiral. O fato de tal simetria não ser observada na natureza (isto é, mesmo quando é desligada a interação eletrofraca) poderia ser explicado pelo fato de que o vácuo não é invariante qùiral. A consequência desta quebra de simetria, segundo o teorema de Goldstone (assumindo-se a simetria como sendo contínua), é o surgimento de bosons sem massa.

Muitos modelos tem sido propostos para entender a Quebra da Simetria Quiral (QSQ). Um destes,particularmente atraente porque não introduz partículas ainda não observadas, propõe que o vácuo cause uma QSQ devido as correções radiativas originadas pela auto interação do campo[3].Este efeito, que chamamos de Quebra Dinâmica da Simetria Quiral (QDS), poderia explicar a existência de estados ligados sem massa formados por férmions e antiférmions massivos, os quais seriam os esperados bosons de Goldstone. Por exemplo, uma teoria para férmions de dois sabores sem massa e em quatro dimensões possui uma Simetria Quiral $SU(2) \times SU(2)$. Uma QSQ pelo vácuo iria possibilitar o surgimento de estados ligados (bosons de Goldstone) que, dentro de uma aproximação razoável, poderíamos associar aos mesons $\pi^+$, $\pi^0$ e $\pi^-$.

Neste trabalho vamos estudar a QDS Quiral na Eletrodinâmica Quântica em 2+1 dimensões ($QED_3$). Este modelo, apesar de não realístico, tem sido objeto de estudo em numerosos trabalhos(4-8) nos últimos anos porque, além de ser uma teoria mais simples que a QCD, apresenta liberdade assintótica e outras características próprias da QCD.

No capítulo II faremos uma breve revisão de alguns modelos mais antigos apresentando Quebra de Simetria Quiral. Além disso explicamos como o Potencial Efetivo torna-se uma ferramenta poderosa quando investigamos a existência ou não da QSQ. No capítulo III utilizaremos a técnica de expansão $1/N$ no estudo da $QED_3$ onde $N$ é o número de sabores da teoria. A Equação de Schwinger-Dyson (ESD) para grandes valores de $N$ é obtida. No capítulo IV resolveremos a ESD dentro do melhor esquema de aproximações possível e obtemos a suas soluções assintóticas. Também investigamos a existência ou não de alguma condição em $N$ para a ESD possuir soluções não triviais. No capítulo V calcularemos o Potencial Efetivo e verificamos se existem soluções da ESD que quebram a Simetria Quiral. Quando isto acontece obtemos, para um dado valor de $N$, a razão entre a massa gerada dinamicamente e a constante de acoplamento da teoria. Final mente, no capítulo VI fazemos uma análise geral e detalhada dos resultados obtidos.

## II. ALGUNS ASPECTOS DA QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA

Neste capítulo vamos fazer uma breve revisão de alguns modelos onde ocorre o fenômeno de Quebra Dinâmica de Simetria (QDS) e introduzir o conceito de Potencial Efetivo e o papel que este desempenha no seu estudo.

Em primeiro lugar vamos procurar esclarecer o significado da QDS através de um modelo simples, a Eletrodinâmica Quântica em duas dimensões ($QED_2$). Este modelo, estudado por Schwinger[9], presta-se bem como um exemplo inicial. Se a Lagrangeana da $QED_2$ não contiver o termo de massa $\frac{1}{2} m^2 A^2$ então o propagador livre do campo $A_\mu(x)$ no gauge de Landau será

$$D_0^{\mu\nu}(k) = -i\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{2.1}$$

No caso da Lagrangeana conter termo de massa então seu propagador será

$$D_0^{\mu\nu}(k) = -i\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}\right)\frac{1}{k^2-m^2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{i}{m^2}\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \tag{2.2}$$

Sabemos que o estudo perturbativo deste campo vetorial só é possível no primeiro caso, onde o propagador (1.1) se anula para altas energias (justamente quando os termos de ordem mais elevada na expansão perturbativa são importantes). Ademais, isto é consistente com o fato de estarmos diante de um campo de gauge onde, pode-se demonstrar, as divergências são renormalizáveis. No caso com massa isto não é geralmente verdadeiro. Por outro lado é um fato experimental que muitas partículas vetoriais que transportam a interação são massivas (veja o caso da interação fraca). Estamos diante, então, da séria dificuldade de como obter um modelo perturbativo para um campo vetorial massivo. Os modelos que propõem a QDS procuram resolver esta dificuldade sem a introdução de novas partículas. Diferente, portanto, do mecanismo de Higgs onde bosons escalares fundamentais, ainda não observados, são colocados à mão na teoria.

Em linhas gerais a QDS pode ser entendida da seguinte maneira. O fato de uma Lagrangeana e o seu propagador não conterem um termo de massa não significa que o campo não seja massivo. O propagador "verdadeiro" do campo precisa levar em conta as correções radiativas pela sua auto-interação.

Esta correção aparece sob a forma de um termo $\Pi(k^2)$ e o propagador completo fica

$$D^{\mu\nu}(k) = -i\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2 - k^2\Pi(k^2)} \tag{2.3}$$

Vamos ver o que acontece quando $\Pi(k^2)$ possui um polo no infravermelho. Se $\Pi(k^2)$ for, por exemplo, do tipo

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{\pi k^2} \tag{2.4}$$

como no caso do Modelo de Schwinger ($QED_2$) então, substituindo (2.4) em (2.3), podemos observar a presença de um polo em $k^2 = e^2/\pi$. Ou seja, a auto-interação do campo gera um efeito dinâmico que equivale a presença de um campo de massa $m^2 = e^2/\pi$, e neste caso nem a renormalizabilidade e nem a unitariedade foram violadas. Quando a interação é desligada então $e^2 = \Pi(k^2) = 0$ e (2.3) reduz-se a (2.1).

Nas secções seguintes vamos apresentar dois modelos mais elaborados e que exploram em maior profundidade a idéia da QDS.

## II.1. O MODELO DE NAMBU E JONA-LASINIO

Vamos apresentar o primeiro modelo no qual a massa fermiônica é gerada dinamicamente. É o modelo de Nambu e Jona-Lasinio[3] (por falta de espaço vamos nos restringir apenas as idéias principais).

O Modelo é representado pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g_0\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right] \tag{2.5}$$

onde $\psi$ é um campo fermiônico e $g_0$ a constante de acoplamento entre os férmions. Esta Lagrangeana, que não é renormalizável, exibe uma invariância por transformações quirais

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta\gamma_5}\psi \qquad \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

onde $\theta$ é uma constante de fase real e arbitrária. A seguir fazemos a demonstração desta invariância

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = -\bar{\psi}'\not{\partial}\psi' + g_0\left[(\bar{\psi}'\psi')^2 - (\bar{\psi}'\gamma_5\psi')^2\right] =$$

$$= -\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g_0\Big[\Big\{(\bar{\psi}\psi)^2\cos^2 2\theta + 2i\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\gamma_5\psi\cos 2\theta\,\mathrm{sen}\,2\theta -$$

$$- (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\,\mathrm{sen}^2\,2\theta\Big\} - \Big\{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\cos^2 2\theta + 2i\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\gamma_5\psi\cos 2\theta\,\mathrm{sen}\,2\theta -$$

$$- (\bar{\psi}\psi)^2\,\mathrm{sen}^2\,2\theta\Big\} =$$

$$= -\bar{\psi}\not{\partial}\psi + g_0\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right] = \mathcal{L}$$

onde usamos

$$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$$

$$\bar{\psi}\psi \longrightarrow \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\psi\cos 2\theta + i\bar{\psi}\gamma_5\psi\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

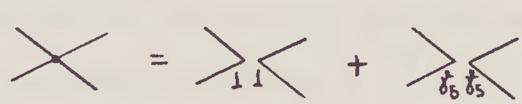
$$i\bar{\psi}\gamma_5\psi \longrightarrow i\bar{\psi}'\gamma_5\psi' = i\bar{\psi}\gamma_5\psi\cos 2\theta - \bar{\psi}\psi\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Entretanto, devemos lembrar que esta Lagrangeana é, clássica e, em princípio, se levarmos em conta as correções radiativas, a invariância quiral pode ser violada. O artifício utilizado por Nambu e Jona-Lasinio para descobrir se a simetria é ou não violada consiste em reescrever (2.5) como

$$\begin{aligned} L &= \left\{-\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi\right\} + \left\{g_0\left[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2\right] + M\bar{\psi}\psi\right\} \\ &= \qquad L_0 \qquad + \qquad L_i \end{aligned} \tag{2.7}$$

A justificativa para este procedimento pode ser feita dentro do seguinte raciocínio. O fato de a Lagrangeana ser invariante quiral não significa que o vácuo possua esta simetria. Se isto for verdade quando usamos o método perturbativo a expansão deve ser feita no espaço de Fock de um férmion massivo e a teoria deve nos dar uma condição de consistência (quando $m = M$) se este for o verdadeiro vácuo da teoria (lembramos que o termo $\bar{\psi}\psi$ não é invariante quiral).

Vamos então calcular a autoenergia fermiônica . Levando-se em conta as contribuições de ordem mais baixa




e fazendo-se $m = M$ chegaremos a expressão (propositamente estamos omitindo as passagens intermediárias)[3]

$$1 = -\frac{8 g_0 i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4 p}{p^2 + m^2} \tag{2.8}$$

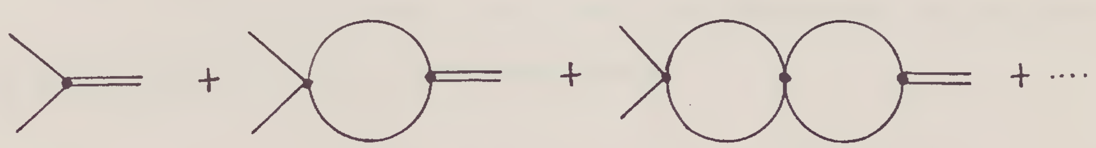
Esta integral é quadraticamente divergente e por isso vamos colocar um cutoff $\Lambda$ . Resolvendo a integral chegamos a equação

$$\frac{2\pi^2}{g_0 \Lambda^2} = 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln\left[\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right] \tag{2.9}$$

Como o lado direito da equação é positivo e $\leq 1$ para $\Lambda/m$ real concluímos que a condição de existência de uma solução não trivial para (2.9) será

$$0 < \frac{2\pi^2}{g_0 \Lambda^2} < 1 \tag{2.10}$$

Nambu e Jona-Lasinio demonstraram a existência de estados coletivos que se manifestam como uma partícula estável. Para averiguar a existência de um estado ligado férmion-antifermion precisamos recorrer a equação de Bethe-Salpeter. A análise desta equação é uma tarefa um tanto complicada e, ademais, extensa para os nossos interesses. Vamos apenas afirmar que na aproximação de escada (ordem mais baixa) esta equação pode ser representada como uma soma de diagramas

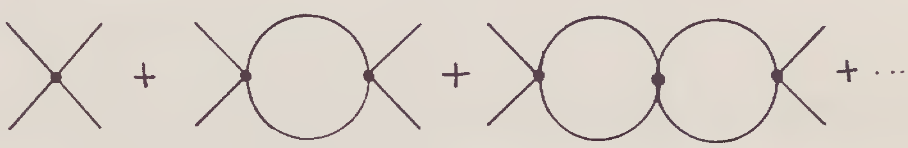


onde a linha dupla representa um estado ligado pseudo-escalar. Nesta aproximação, esta equação se reduz a [3]

$$1 = -\frac{8 g_0 i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 + m^2} \tag{2.11}$$

que é justamente a equação (2.8). Assim, podemos associar a geração dinâmica de massa para os férmions (soluções não-triviais de 2.8 ) com a existência de estados ligados($\bar{\Psi}\Psi$) (soluções de 2.11 ). Ou seja, o vácuo, que é o estado de mais baixa energia da teoria, quebra a simetria quiral mesmo que a Lagrangeana seja invariante quiral.

No estado fundamental, férmion e anti-férmion podem ser "visualizados" como formando um estado ligado $\bar{\Psi}\Psi$ com spins antiparalelos, o que equivale, fenomenologicamente, a existência de um meson (composto) de spin zero. Nós podemos obter mais algumas informações sobre este meson pseudoescalar usando o seguinte raciocínio. Vamos assumir que a soma de diagramas



represente a contribuição quântica predominante entre a interação de um par férmion-antiférmion. Vamos chamar de $J_\rho(q)$ a cada diagrama

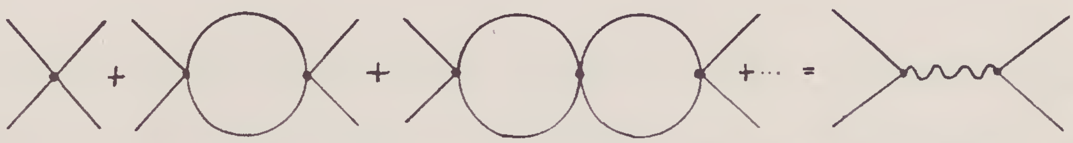
Se encararmos o conjunto de diagramas acima como uma série geométrica a sua soma será

$$2 g_0 i \gamma_5 \frac{1}{1 - J_\rho(q)} \gamma_5 \tag{2.12}$$

Usando as regras usuais para cálculo de diagramas chegamos a

$$J_\rho(q) = \frac{-2 g_0 i}{(2\pi)^4} \int \frac{4(m^2+p^2) - q^2}{\left[(p+\frac{1}{2}q)^2 + m^2\right]\left[(p-\frac{1}{2}q)^2 + m^2\right]} \, d^4p \tag{2.13}$$

Comparando (2.8) e (2.13) temos $J_\rho(0)=1$. Assim, podemos encarar (2.12) como um propagador do meson e como esta expressão possui um polo em $q=0$ podemos concluir que a soma dos diagramas acima equivale, fenomenologicamente, a troca de uma partícula sem massa (no caso um boson pseudo-escalar).



Resumindo, podemos afirmar que o Modelo de Nambu e Jona-Lasinio possui duas características importantes:

1) O estado de energia mais baixa da teoria (vácuo) admite soluções onde a simetria é quebrada desde que a condição (2.9) seja obedecida.

2) A mesma condição que implica na quebra da simetria quiral implica na existência de um estado ligado de massa nula. No caso de Nambu e Jona-Lasinio esperava-se que este estado ligado descrevesse o píon.

## II.2. O MODELO DE GROSS E NEVEU

O Modelo de Gross-Neveu[10] trabalha com campos fermiônicos num espaço de duas dimensões e utiliza a técnica de expansão $1/N$ no cálculo das séries perturbativas, onde $N$ é o número de componentes deste campo. O que torna atraente o seu estudo é que este modelo apresenta certas similaridades com as Teorias de Gauge não-Abelianas isto é, o modelo é renormalizável e apresenta liberdade assintótica, com a vantagem de ser mais simples.

A Lagrangeana deste Modelo é

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \not\partial \Psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\Psi}\Psi)^2 \qquad (2.14)$$

onde $\psi$ é o campo fermiônico e $g$ a constante de acoplamento. Pode-se mostrar que esta Lagrangeana é equivalente (ao nível de diagramas de árvore)(10) a

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not\partial \psi - \frac{1}{2}\sigma^2 - g\bar{\psi}\psi\sigma \tag{2.15}$$

onde $\sigma$ representa um campo composto $\bar{\psi}\psi$. Podemos observar que esta Lagrangeana é invariante pela transformação quiral discreta

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \gamma_5 \psi \\ \sigma &\longrightarrow -\sigma \end{aligned} \tag{2.16}$$

Esta simetria proíbe que o campo $\psi$ possua massa porque o termo $\bar{\psi}\psi$ não é invariante quiral. Entretanto, podemos nos perguntar se, a exemplo do Modelo de Nambu e Jona-Lasinio, o efeito das correções radiativas na teoria admite estados ligados onde a massa fermiônica é gerada dinamicamente, e mais importante, se algum destes estados é energeticamente preferível (aspecto não discutido em Nambu Jona-Lasinio) aos demais.

Para investigar esta questão precisamos recorrer a um Potencial Efetivo $V(\sigma)$ do Campo Composto(10), ou seja, um potencial que

1) leve em conta as correções radiativas da teoria, ou seja, inclua todas as contribuições ao nível de diagramas de loops.

2) no limite $\hbar \to 0$ reduz-se ao potencial clássico (nível de arvore) que aparece em (2.15)

$$U(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{2.17}$$

3) possa ser interpretado como densidade de energia do campo e que o seu mínimo absoluto seja o verdadeiro vácuo da teoria.

Podemos chegar a uma expressão para o Potencial Efetivo através do seguinte procedimento[11]. Vamos definir o campo clássico $\sigma_c$ (que é o campo da Lagrangeana) como

$$\sigma_c = \frac{\delta W[J]}{\delta J} = \frac{\langle 0^+ | \sigma_{op} | 0^- \rangle}{\langle 0^+ | 0^- \rangle} \tag{2.18}$$

onde W(J) é o funcional gerador das funções de Green conexas

$$e^{iW[J]} = \int d\Psi \, d\bar{\Psi} \, d\sigma_c \, e^{i S[\sigma_c, J]} \tag{2.19}$$

$S[\sigma_c, J]$ é a Ação Clássica

$$S[\sigma_c, J] = \int d^2x \left\{ L(\sigma_c) + \sigma_c(x) J(x) \right\} \tag{2.20}$$

e J(x) é uma corrente acoplada a $\sigma_c(x)$ que desempenha o papel de uma fonte externa. Aqui o nosso elemento de volume é $d^2x$ porque estamos numa teoria bidimensional. Vamos utilizar a transformada de Legendre Funcional

$$\Gamma[\sigma_c] = W[J] - \int d^2x \, \sigma_c(x) J(x) \tag{2.21}$$

onde

$$\frac{\delta \Gamma[\sigma_c]}{\delta \sigma_c} = - J(x) \tag{2.22}$$

$\Gamma[\sigma_c]$ é o funcional gerador das funções de Green 1PI. Por 1PI queremos dizer irredutíveis por 1 partícula, ou seja, aqueles diagramas que não podem ser separados "cortando-se" uma linha interna. $\Gamma[\sigma_c]$ é uma Ação Efetiva porque, incluindo diagramas com loops, possui as correções radiativas da Ação Clássica (2.20). Quando $J(x) \longrightarrow 0$ o campo assume um valor esperado $\langle\sigma\rangle$ e, de (2.22) temos

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\sigma_c]}{\delta\sigma_c}\right|_{\langle\sigma\rangle} = 0 \tag{2.23}$$

Esta equação pode ser encarada como uma equação variacional cuja solução será o verdadeiro vácuo da teoria. Podemos expandir $\Gamma[\sigma_c]$ em termos de $\sigma_c(x)$ e suas derivadas

$$\Gamma[\sigma_c] = \int d^2x \left\{ -V(\sigma_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma_c)^2 Z(\sigma_c) + \cdots \right\} \tag{2.24}$$

Se $\langle\sigma\rangle$ é o valor esperado do vácuo então a sua invariância translacional implica que seja uma constante $\langle\sigma\rangle = a$. Assim, (2.24) se transforma em

$$\Gamma[a] = -\int d^2x \; V(a) \tag{2.25}$$

ou seja, as soluções da equação (2.23) correspondem aos pontos de mínimo de $V(a)$. Por isso chamamos $V(a)$ de Potencial Efetivo da teoria. Para calcular $V(a)$ vamos expandir $\Gamma[\sigma_c]$ em série de Taylor Funcional

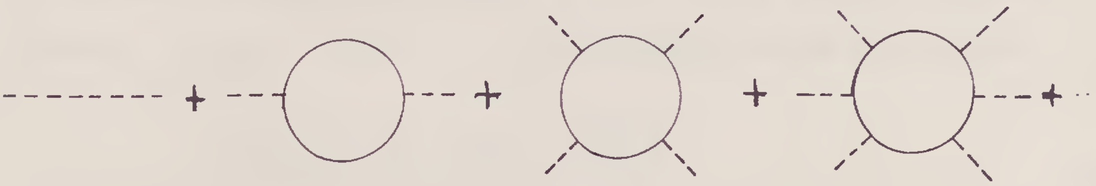
$$\Gamma[\sigma_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^2x_1 \ldots d^2x_n \, \Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\, \sigma_c(x_1) \ldots \sigma(x_n) \tag{2.26}$$

Comparando (2.24) e (2.26) pode-se mostrar que[11]

$$V(a) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \, \Gamma^{(n)}(p_1 = 0, \ldots, p_n = 0) \tag{2.27}$$

onde $\Gamma^{(n)}(0,\ldots,0)$ é a soma de todas as funções de Green 1PI com n linhas externas do campo $\sigma$ com momento zero.

No Modelo de Gross-Neveu, os diagramas que contribuem no cálculo do Potencial Efetivo em ordem mais baixa serão os de árvore e 1 loop



Os diagramas de árvore dão uma contribuição puramente clássica e, neste nível, o potencial é o termo que envolve $\sigma^2$ em (2.15)

$$V_{clássico}(\sigma_c) = \frac{1}{2}\sigma_c^2 \tag{2.28}$$

Para este termo o vácuo está em $\sigma_c = 0$ e a simetria fica preservada. Incluindo todos os termos com 1 loop o potencial fica

$$V(\sigma_c) = \frac{1}{2}\sigma_c^2 - N i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \, \frac{1}{2n} \, \frac{(g^2\sigma_c^2)}{k^2} \tag{2.29}$$

Introduzindo um cutoff $\Lambda$ e integrando obtemos

$$V(\sigma_c) = \frac{1}{2}\sigma_c^2 - \frac{\lambda}{4\pi}\sigma_c^2 \left\{ Ln\,\Lambda^2 + 1 - Ln(g^2\sigma_c^2) \right\} \tag{2.30}$$

onde $\lambda = g^2 N$. Este potencial requer uma renormalização. Isto pode ser feito impondo-se a condição[11]

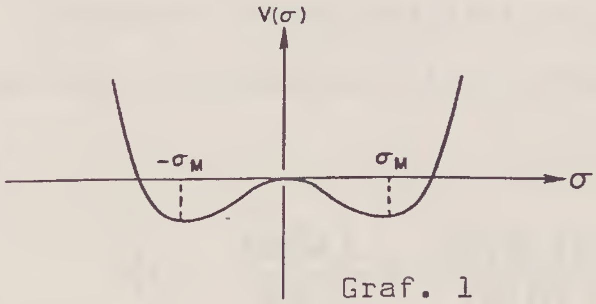
$$\left. \frac{\partial^2 V(\sigma_c)}{\partial \sigma_c^2} \right|_{\sigma_0} = 1 \tag{2.31}$$

Substituindo (2.31) em (2.30) teremos

$$V(\sigma_c,\sigma_0,g)=\frac{1}{2}\sigma_c^2+\frac{\lambda}{4\pi}\sigma_c^2\left\{\ln\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0}\right)^2-3\right\} \qquad (2.32)$$

O parâmetro $\sigma_0$ é completamente arbitrário já que uma mudança em $\sigma_0$ é equivalente a uma mudança em g e na escala do campo de tal forma que $V(\sigma_c,\sigma_0,g)$ satisfaz a equação do grupo de renormalização. O potencial (2.32) possui um mínimo $\sigma_M \neq 0$ que é o verdadeiro vácuo da teoria

$$|\sigma_M| = \sigma_0 \exp\left(1-\frac{\pi}{\lambda}\right) \qquad (2.33)$$




Graf. 1

Podemos então reescrever a Lagrangeana (2.15) em termos de um novo campo

$$\sigma \longrightarrow \sigma' = \sigma - \sigma_M \qquad (2.34)$$

onde escolhemos $\sigma_M = \sigma_0 \exp(1-\pi/\lambda)$. Se fizermos isto vamos observar o surgimento de um termo de massa $\frac{1}{2}M_F\bar{\Psi}\Psi$ que quebra a simetria quiral (2.16), onde

$$M_F = g\,\sigma_0 \exp\left[1-\frac{\pi}{\lambda}\right] \qquad M_\sigma = \frac{\lambda}{\pi} \qquad (2.35)$$

Neste caso, o estado ligado ganhou massa porque a simetria quebrada é discreta. Entretanto se refizermos o cálculo para uma simetria contínua podemos observar[10] o aparecimento de um novo campo $\pi(x)$ sem massa.

## II.3. POTENCIAL EFETIVO PARA OPERADORES COMPOSTOS

No Modelo de Gross e Neveu utilizamos uma expressão para o Potencial Efetivo cuja dedução foi feita através de uma fonte externa J(x) acoplada a um campo $\sigma$. Ao contrário daquele caso, onde assumiu-se uma similaridade entre o campo $\sigma$ e o campo composto $\bar{\Psi}\Psi$, vamos utilizar neste trabalho uma expressão generalizada por Cornwall, Jackiw e Tomboulis[12] do Potencial Efetivo para Operadores Compostos. Neste trabalho é utilizada uma fonte externa K(x,y) acoplada ao campo composto $\phi(x,y)=\bar{\Psi}(x)\,\Psi(y)$. Afora isto, a dedução do Potencial Efetivo segue a mesma linha de raciocínio da secção anterior. Definimos um Campo Clássico $\phi_c$

$$\phi_c = \frac{\delta W[K]}{\delta K} = \frac{\langle 0^+|\phi_{op}|0^-\rangle_K}{\langle 0^+|0^-\rangle} \tag{2.36}$$

onde $W(\phi_c)$ é o funcional gerador das funções de Green conexas para o campo composto

$$e^{iW[K]} = \int dA\, d\bar{\Psi}\, d\Psi\; e^{iS[\phi_c,K]} \tag{2.37}$$

e $S[\phi_c,K]$ é a Ação Clássica

$$S[\phi_c,K] = \int d^4x \left\{ \bar{\Psi}\, i\not{D}\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} + \int d^4x\, d^4y\, \bar{\Psi} K \Psi \tag{2.38}$$

de um campo fermiônico acoplado a um campo de gauge. Vamos usar a transformada de Legendre

$$\Gamma[\phi_c] = W[K] - \int d^4x\, d^4y\, \phi_c(x,y)\, K(x,y) \tag{2.39}$$

e

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c} = -K \tag{2.40}$$

onde $\Gamma[\phi_c]$ é o funcional gerador para as funções de Green 2PI. Por 2PI queremos dizer irredutíveis por duas partículas, ou seja, aqueles diagramas que não podem ser separados em dois "cortando-se" duas linhas internas de férmions. $\Gamma[\phi_c]$ é uma ação efetiva porque inclui as correções radiativas da ação clássica (2.38) na forma de diagramas com loops.

Quando fazemos $K(x,y) \longrightarrow 0$ estamos desligando a fonte externa e assumimos que o campo toma o valor esperado $\langle | T\bar{\Psi}(x+\frac{1}{2}y)\Psi(x-\frac{1}{2}y)|\rangle \underset{y\sim 0}{\simeq} C(y)\phi_c(x)$ (onde $C$ é uma função de y). Por outro lado, sabemos que $\langle 0|T\bar{\Psi}\Psi|0\rangle$ é o propagador fermiônico completo $S^{-1} = -\not{p} + \Sigma(p)$ (euclidianizado). Portanto, fazendo $K(x,y) \longrightarrow 0$ em (2.40) chegamos a condição

$$\frac{\delta\Gamma[S]}{\delta S} = 0 \tag{2.41}$$

que deve ser satisfeita pelo vácuo. A dedução de $\Gamma[\phi_c]$ a partir de $S[\phi_c, K]$ é uma tarefa trabalhosa[12]. Aqui, vamos apenas enunciar o resultado

$$\Gamma[S] = \mathrm{Tr}\left\{ \mathrm{Ln}\, S_0^{-1}S - S_0^{-1}S + 1 \right\} - \Gamma_2[S] \tag{2.42}$$

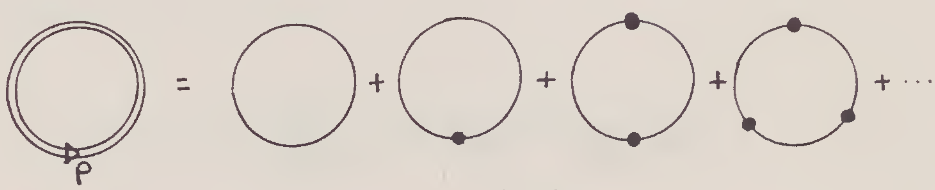
onde $\Gamma_2[S]$ representa a soma de todos os gráficos 2PI, $S_0$ é o propagador livre e $S$ propagador completo. Ao invés de trabalhar com $\Gamma$, o vácuo pode ser determinado através de configuração de Campo Constante, ou seja, trabalhamos com a ação invariante por translações, que não é mais do que o Potencial Efetivo da teoria

$$\Gamma[S]\Big|_{\text{inv. transl.}} = -\int d^4x\, V(S) \tag{2.43}$$

de forma que a solução de (2.41) será o ponto de mínimo do Potencial Efetivo V(S)

$$V(S) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, Tr\left\{ Ln\, S_0^{-1} S - S_0^{-1} S + 1 \right\} + V_2(S,D) \qquad (2.44)$$

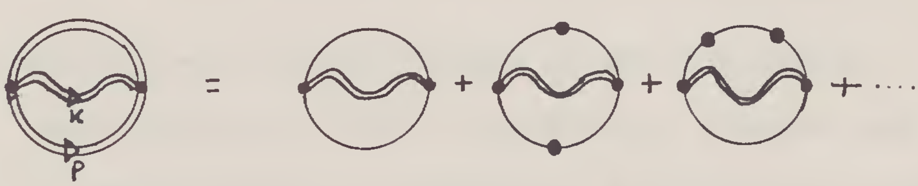
O primeiro termo de (2.44) representa a soma de todos os diagramas de 1 loop (a série de diagramas abaixo é em potências de $\Sigma/\not{p}$ e a linha dupla representa um propagador completo)




o termo $V_2(S,D)$ é dado por[12]

$$V_2(S,D) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p\, d^4k}{(2\pi)^8}\, Tr\left\{ \Gamma^\mu S(p) \Gamma^\nu S(p+k) D_{\mu\nu}(k) \right\} \qquad (2.45)$$

onde $\Gamma^\mu$ e $\Gamma^\nu$ representam a correção do vértice e $D_{\mu\nu}(k)$ o propagador completo de um boson de gauge. Ou seja, $V_2$ representa a soma de todos os gráficos de 2 loops




A equação

$$\frac{\delta V(S)}{\delta S} = 0 \qquad (2.46)$$

pode ser encarada como uma equação variacional cuja solução $S(p)$ é a Equação de Schwinger-Dyson (ESD). Isto pode ser demonstrado se calcularmos (2.46) de (2.44) e (2.45)

$$\frac{\delta}{\delta S(q)}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,Tr\left\{Ln\,S_0^{-1}(p)S(p)-S_0^{-1}(p)\,S(p)+1\right\}=$$

$$=Tr\left\{\frac{1}{S(q)}-S_0^{-1}(q)\right\}=4\Sigma(q)$$

$$\frac{\delta}{\delta S(q)}\,\frac{1}{2}\int\frac{d^4p\,d^4k}{(2\pi)^8}\,Tr\left\{\Gamma^\mu S(p)\Gamma^\nu S(p+k)\,D_{\mu\nu}(k)\right\}=$$

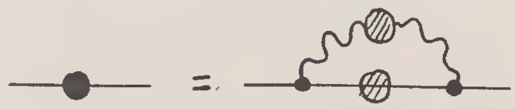
$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,Tr\left\{\Gamma^\mu S(q)\,\Gamma^\nu D_{\mu\nu}(k)\right\}=$$

$$=4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Gamma^\mu S(q)\Gamma^\nu D_{\mu\nu}(k)$$

Portanto (2.46) fica

$$\Sigma(p)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\Gamma^\mu S(p)\Gamma^\nu D_{\mu\nu}(k) \tag{2.47}$$

que é a ESD e pode ser representada pelo diagrama



Ou seja, toda solução da ESD (2.47) é uma solução estacionária do Potencial Efetivo (2.44).

Para finalizar mais três observações:

1) Todas as possíveis soluções da ESD representam, soluções estacionárias de (2.44). Entretanto, somente uma delas será energeticamente preferível as demais (se encararmos o potencial como a densidade de energia do campo). Conclusão: os parâmetros livres da auto energia $\Sigma(p)$ ( que podem ser a massa do férmion e a constante de acoplamento da teoria) escolhida pela natureza vão estabelecer um vínculo entre si de tal forma que o potencial tenha o menor mínimo absoluto possível, que será o verdadeiro vácuo da teoria.

2) Se este vácuo quebra alguma simetria contínua da Lagrangeana (por exemplo, a Simetria Quiral) então, pelo Teorema de Goldstone, deve aparecer um boson sem massa que,no caso, não será um campo fundamental mas um estado ligado férmion-antiférmion.

3) Pode-se mostrar que a soma de todos os diagramas com n loops dá uma contribuição para a série perturbativa com uma ordem $\hbar^n$ . Além disso, se retivermos todos os diagramas de 1 loop na expansão do Potencial ainda assim temos uma soma infinita de diagramas, já que este depende do propagador fermiônico completo, e esta expansão poderá revelar algumas propriedades não-perturbativas(ou não-lineares) da teoria.

# III. A $QED_3$ COM GRANDE NÚMERO DE FÉRMIONS

Neste capítulo vamos apresentar o modelo que será estudado na Tese(4-8). Na secção 1 estudaremos a simetria Quiral da Lagrangeana de 1 férmion e depois generelizamos para N férmions e na secção 2 mostraremos como a técnica de expansão 1/N torna-se uma ferramenta poderosa para o estudo da QDS.

## III.1. A LAGRANGEANA E SUA SIMETRIA QUIRAL

Vamos partir da Lagrangeana da Eletrodinâmica Quântica

$$L = L_0 + L_i \tag{3.1a}$$

$$L_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \not{D} \psi \tag{3.1b}$$

$$\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$L_1 = m \bar{\psi} \psi \tag{3.1c}$$

Adotamos uma métrica do tipo (+--) num espaço-tempo de 2+1 dimensões. Para decidirmos qual a representação spinorial do grupo de Lorentz SO(2,1) é mais conveniente precisamos averiguar sob quais condições (3.1b) é invariante frente a uma transformação contínua do tipo

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta G} \psi \tag{3.2}$$

onde $\theta$ é uma constante de fase real e arbitrária e G é o gerador desta transformação. Basicamente, $L_o$ será invariante se $\bar{\Psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\Psi}\gamma^\mu\psi$. A transformação em $\bar{\Psi}(=\psi^+\gamma^o)$ será

$$\bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}' = \psi^+ e^{-i\theta G^+}\gamma^o \tag{3.3}$$

Logo,

$$\bar{\Psi}'\gamma^\mu\psi' = \psi^+ e^{-i\theta G^+}\gamma^o\gamma^\mu e^{i\theta G}\psi \tag{3.4}$$

ou seja, (3.1b) será invariante por (3.2) se G for hermitiano e anticomute com $\gamma^\mu$ ($\mu$ = 0, 1, 2)

$$G = G^+ \qquad\qquad G\gamma^\mu + \gamma^\mu G = 0 \tag{3.5}$$

Supondo que tal matriz G exista então esta mesma transformação em (3.1c) resulta

$$m\bar{\Psi}'\psi' = m\,\bar{\Psi}\,e^{i\theta G}\,e^{i\theta G} \neq m\,\bar{\Psi}\psi \tag{3.6}$$

Portanto $L_1$ será invariante por (3.2) apenas se $m=0$. Assim a mesma condição que implica a invariância de $L_o$ é responsável pela quebra da simetria quando introduzimos um termo de massa $L_1$ na Lagrangeana. Chamamos esta simetria de Quiral[13]. A representação spinorial conveniente para o estudo da Quebra de Simetria Quiral (QSQ) é aquela na qual exista pelo menos uma matriz do tipo (3.5).

Para começar, vamos escolher $\psi$ como um spinor de duas componentes. As matrizes de Dirac serão 2x2 e podem ser escritas como as próprias matrizes de Pauli.

$$\gamma^0 = \sigma_2 \qquad \gamma^1 = i\sigma_3 \qquad \gamma^2 = i\sigma_1 \tag{3.7}$$

onde

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Pode-se mostrar que as matrizes $\gamma^\mu$ satisfazem a relação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu} \tag{3.9}$$

Entretanto, podemos mostrar que não existe matriz hermitiana 2x2 que anticomute com $\gamma^\mu$ ($\mu$ = 0, 1, 2) (esta demonstração pode ser feita por construção). Assim, como não existe uma matriz que satisfaça (3.5), esta representação é indesejável para o estudo da QSQ.

Depois de termos escolhido $\psi$ como um bi-espinor a outra opção mais natural seria escolher $\psi$ como um spinor de quatro componentes. As matrizes $\gamma^\mu$ 4x4 podem ser escolhidas como

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{bmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{bmatrix} \qquad \gamma^2 = \begin{bmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

que satisfazem também a álgebra (3.9). Neste caso, pode-se mostrar (por construção) que existem duas matrizes 4x4 hermitianas tais que

$$A\gamma^\mu + \gamma^\mu A = 0 \qquad \mu = 0, 1, 2 \tag{3.11}$$

Estas matrizes podem ser escritas como

$$\gamma^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma^5 = i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Portanto, escolhemos esta representação e podemos afirmar que (3.1b) exibe uma invariância frente a um grupo de transformação do tipo

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi\, e^{i\theta_j G} \qquad j=1,2 \tag{3.13}$$

onde os possíveis geradores G podem ser 1, $\gamma^4$, $\gamma^5$ e $[\gamma^4,\gamma^5]$. Estes quatros geradores formam um grupo U(2) (matrizes unitárias: $G^+G=1$). Em particular, quando $G=\gamma^4$ ou $G=\gamma^5$ a relação (3.5) é satisfeita e temos uma transformação Quiral. Pelo teorema de Noether podemos calcular a corrente conservada associada a cada gerador invariante

$$G=1 \longrightarrow \qquad J_\mu \sim \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \tag{3.14a}$$

$$G=\gamma^4 \longrightarrow \qquad J_\mu^A \sim \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_4\Psi \tag{3.14b}$$

$$G=\gamma^5 \longrightarrow \qquad J_\mu^B \sim \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi \tag{3.14c}$$

$$G=[\gamma^4,\gamma^5] \longrightarrow \qquad J_\mu^c \sim \bar{\Psi}\gamma_\mu[\gamma^4,\gamma^5]\Psi \tag{3.14d}$$

Quando introduzimos um termo de massa $L_1$ na Lagrangena, este se transforma da seguinte maneira

$$G=1 \longrightarrow \qquad m\bar{\Psi}'\Psi' = m\bar{\Psi}e^{-i\theta}e^{i\theta}\Psi = m\bar{\Psi}\Psi \tag{3.15a}$$

$$G=\gamma^4 \longrightarrow \qquad m\bar{\Psi}'\Psi' = m\bar{\Psi}e^{i\theta\gamma_4}e^{i\theta\gamma_4} \neq m\bar{\Psi}\Psi \tag{3.15b}$$

$$G=\gamma^5 \longrightarrow \qquad m\bar{\Psi}'\Psi' = m\bar{\Psi}e^{i\theta\gamma_5}e^{i\theta\gamma_5}\Psi \neq m\bar{\Psi}\Psi \tag{3.15c}$$

$$G=[\gamma^4,\gamma^5] \longrightarrow \quad m\bar{\Psi}'\Psi' = m\bar{\Psi}e^{-i\theta[\gamma^4,\gamma^5]}e^{i\theta[\gamma_4,\gamma_5]}\Psi = m\bar{\Psi}\Psi \tag{3.15d}$$

Portanto, a introdução de um termo de massa na Lagrangeana causa uma QSQ e apenas as correntes (3.14a) e (3.14d) permanecem conservadas.

Retornando a Lagrangeana (3.1) a equação de movimento para $\psi$ será

$$(i\not{D}-m)\psi = i(D_0\gamma^0 - D_1\gamma^1 - D_2\gamma^2) \tag{3.16}$$

Este espinor de 4 componentes pode ser decomposto em 2 bi-espinores $\psi_1$ e $\psi_2$. Então,(3.16) fica reescrito como

$$i(D_0\sigma_3 - D_1 i\sigma_1 - D_2 i\sigma_2)\psi_1 - m\psi_1 = 0 \tag{3.17a}$$

$$i(-D_0\sigma_3 + D_1 i\sigma_1 + D_2 i\sigma_2)\psi_2 - m\psi_2 = 0 \tag{3.17b}$$

Podemos observar que nesta representação o termo de massa não "mistura" os bi-espinores $\psi_1$ e $\psi_2$ porque as matrizes $\gamma^\mu$ são diagonais em $\sigma_j$ . Em particular, se $m=0$ as equações são idênticas. Em um espaço-tempo de 2+1 dimensões a transformação de paridade corresponde a inversão de apenas um eixo: $(x,y,t) \longrightarrow (-x,y,t)$. Utilizando as propriedades de invariância das equações (3.17) sobre paridade e a relação $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ pode-se mostrar que a transformação de paridade nos bi-espinores $\psi_1$ e $\psi_2$ é dada por

$$\psi_1 \longrightarrow \sigma_1\psi_2 \qquad\qquad \psi_2 \longrightarrow \sigma_1\psi_1 \tag{3.18}$$

Assim, se o termo de massa na Lagrangeana causa uma QSQ, o mesmo não quebra a paridade porque o termo

$$m\bar{\psi}\psi = m\,\psi_1^{+}\sigma_3\psi_1 - m\,\psi_2^{+}\sigma_3\psi_2 \tag{3.19}$$

é invariante por (3.18).

Até agora restringimos nosso modelo a uma Lagrangeana de um férmion. Vamos generalizar (3.1) para dois férmions que sejam autoestados de "Sabor"

$$L = L_0 + L_i \tag{3.20a}$$

$$L_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_1 i \not{D} \Psi_1 + \bar{\Psi}_2 i \not{D} \Psi_2 \tag{3.20b}$$

$$L_1 = m \bar{\Psi}_1 \Psi_1 + m \bar{\Psi}_2 \Psi_2 \tag{3.20c}$$

A finalidade deste modelo, naturalmente não-realístico porque estamos em 2+1 dimensões, é produzir algum "insight" na dinâmica de mesons. Sabe-se que a $QED_3$ é confinante[14] da mesma forma que $QCD_4$ e portanto deve apresentar um espectro de mesons próprio. Se a $QED_3$ fosse um modelo realístico poderíamos associar $\Psi_1$ com o quark up e $\Psi_2$ com o quark down e os estados ligados da teoria formariam um espectro de mesons $\pi^+$, $\pi^0$ e $\pi^-$

$$\pi^+ \sim u\bar{d} \qquad \pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \qquad \pi^- \sim \bar{u}d \tag{3.21}$$

Outra simetria que merece menção é a do Sabor(em QCD esta simetria é do tipo SU(2) para dois sabores). Esta simetria pode ser entendida como uma invariância pela troca $u \leftrightarrow d$ em (3.21) e é exata quando $m_u = m_d$. Na verdade ela é apenas aproximada porque observamos $m_u \neq m_d$(embora a diferença seja pequena).

Utilizando os resultados já conhecidos para a Lagrangeana (3.1) vamos afirmar que (3.20b) é invariante frente ao grupo de transformações (3.13). Este grupo agora tem estrutura U(4) porque existem 16 geradores invariantes (ou 16 correntes conservadas). Cada um dos quatro geradores 1, $\gamma^4$, $\gamma^5$ e $[\gamma^4, \gamma^5]$ atuará em 4 diferentes combinações de $\psi_1$ e $\psi_2$. Portanto temos 4x4=16 possíveis transformações independentes em $\psi$. Se introduzirmos o termo de massa (3.20c) vai ocorrer uma QSQ e apenas os geradores 1 e $[\gamma^4, \gamma^5]$ ficam invariantes. Assim, o termo de massa $L_1$ quebra esta simetria para o subgrupo SU(2)xSU(2)xU(1)xU(1) de U(4)[15]. Seria interessante fazermos uma comparação deste resultado com o que acontece na $QCD_4$. Nesta teoria a transformação quiral é feita apenas pela matriz $\gamma^5$. Pode-se mostrar[4] que a Lagrangeana (3.20b) exibe uma simetria SU(2)xSU(2)xU(1)xU(1) e a introdução de um termo de massa (3.20c) quebra esta simetria para o subgrupo SU(2)xU(1). Neste subgrupo invariante, SU(2) é a simetria de sabor a qual nos referimos anteriormente.

Fisicamente, a QSQ poderia ser entendida da seguinte maneira: se o vácuo quebrar alguma simetria da Lagrangeana então a Lagrangeana Efetiva (que inclui as correções radiativas) vai apresentar um termo de massa $m_j\bar{\psi}_j\psi_j$ para algum $j$. Segundo o Teorema de Goldstone, se o vácuo quebrar alguma simetria contínua da Lagrangeana (no caso a simetria Quiral é uma possibilidade) então bosons sem massa estarão presentes na teoria. Estes bosons de Goldstone serão numa quantidade igual a diferença do número de geradores invariantes antes e depois da simetria ser quebrada. No nosso caso, introduzimos um termo $m\bar{\psi}_1\psi_1 + m\bar{\psi}_2\psi_2$ e vão aparecer $4^2-(2^2+2^2)=8$ Bosons de Goldstone. Destes oito bosons, quatro estão acoplados a corrente $\bar{\psi}_j\gamma_\mu\gamma_4\psi_j$ e os outros quatro a corrente $\bar{\psi}_j\gamma_4\gamma_5\psi_j$ [5]. Aqui percebe-se que este modelo é claramente não-realístico porque na natureza, considerando-se apenas dois "sabores", são observados apenas 3 bosons (os píons $\pi^+$, $\pi^0$ e $\pi^-$) com uma simetria de sabor SU(2) aproximada.

As Lagrangeanas (3.1b) e (3.20b) exibem simetrias U(2) e U(4) respectivamente. Podemos ainda generalizar nossa Lagrangeana para um modelo de N férmions

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{N} \bar{\Psi}_j i \not{\partial} \Psi_j \tag{3.22}$$

cada férmion carregando um "sabor" específico. O grupo de simetria (3.22) passa a ser então U(2N). A introdução de um termo de massa $L_1 = m\bar{\Psi}_1\Psi_1 + m\bar{\Psi}_2\Psi_2 + \cdots + m\bar{\Psi}_N\Psi_N$ acarreta uma QSQ para o subgrupo SU(N)xSU(N)xU(1)xU(1). Segundo o Teorema de Goldstone o efeito da QSQ em (3.22) será o aparecimento de $(2N)^2 - (N^2+N^2) = 2N^2$ bosons sem massa na teoria.

## III.2. A $QED_3$ E A EXPANSÃO 1/N

A principal motivação para o estudo da $QED_3$ é que é uma teoria de gauge Abeliana que apresenta confinamento[14]. Este tipo de teoria possui aquilo que nós chamamos de Liberdade Assintótica[16], ou seja, a constante de acoplamento g tem uma dependência com o momento do tipo $g \longrightarrow 0$ quando $p \longrightarrow \infty$. Ademais, quando $p \longrightarrow 0$ a constante de acoplamento cresce. Além disso, encontramos divergências infravermelhas na expansão perturbativa o que torna impraticável o seu emprego (pelo menos segundo as técnicas usuais). Para resolver este problema vamos utilizar uma técnica chamada de expansão 1/N[2]. Esta técnica baseia-se no fato surpreendente de que, muitas vezes, aumentando-se o número de graus de liberdade do sistema podemos simplificar a teoria. Especificamente, podemos escolher a Lagrangeana (3.22) com sua simetria U(2N) e calcular a teoria no limite $N \longrightarrow \infty$ . Naturalmente que este valor de N não é realístico mas existem indícios de que tal aproximação pode ser considerada boa, ao menos para resultados qualitativos.

Assim, vamos usar a Lagrangeana

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{N} \bar{\psi}_j \, i \left( \not{\partial} - \sqrt{\frac{\alpha}{N}} \not{A} \right) \psi_j \qquad (3.23)$$

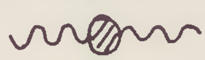
onde $\alpha \equiv e^2 N$ é um parâmetro fixo. A ESD para a autoenergia fermiônica $\Sigma(p)$ pode ser representada como[17]

O diagrama

representa a soma $\Gamma^\mu$ de todas as contribuições para o vértice. O primeiro diagrama da série é de ordem $e = \sqrt{\alpha/N}$ e o segundo de ordem $e^3 = (\alpha/N)^{3/2}$ . Para valores suficientemente grandes de N apenas o primeiro termo será significativo. Portanto,

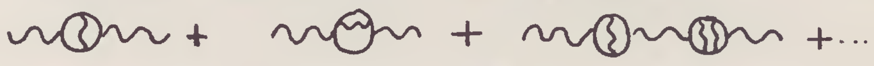
 $\longrightarrow \quad \Gamma^\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{N}} \, \gamma^\mu \qquad (3.24)$

O diagrama

 $= \quad C_1 + C_2$

onde

$C_1 =$ 

$C_2 =$ 

representa a soma de todas as correções radiativas no propagador livre do boson de gauge (no gauge de Landau)

$$D^{0}_{\mu\nu} = \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \frac{1}{k^2} \qquad \text{(euclidiano)} \qquad (3.25)$$

A série $C_1$ é a soma de todas as combinações possíveis de diagramas de 1 loop e o conjunto $C_2$ é a soma de todas as combinações restantes (2, 3,..., n loops). $C_1$ e $C_2$ são de ordem

$$C_1 \sim N e^2 + N^2 e^4 + N^3 e^6 + \cdots = (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots)$$

$$C_2 \sim N e^4 + N^2 e^{4} + N^2 e^8 + \cdots = \frac{1}{N}\left(2\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{N} + \cdots\right)$$

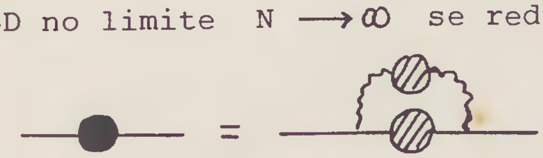
Assim, no limite $N \longrightarrow \infty$ apenas os diagramas da série $C_1$ contribuem. Cada diagrama da série dá uma contribuição[18]

 $\longrightarrow \quad \Pi(k) = \dfrac{\alpha}{8k}$ (3.26)

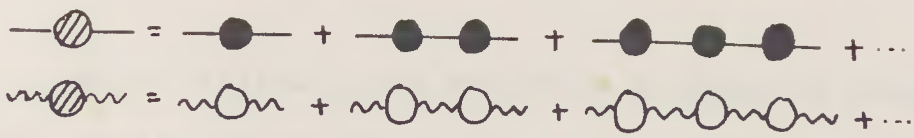
Somando a série $C_1$ o propagador completo euclidiano fica (no gauge de Landau)

 $\longrightarrow \quad D_{\mu\nu}(k) = \left\{ \delta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \dfrac{1}{k^2[1+\Pi(k)]}$ (3.27)

Portanto, a ESD no limite $N \longrightarrow \infty$ se reduz a



onde[10]



A ESD pode ser escrita analiticamente (no limite $N \rightarrow \infty$ ) como

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{N}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, D_{\mu\nu}(p-k)\,\gamma^{\mu} S(k)\,\gamma^{\nu} \quad \text{(euclidiano)} \qquad (3.28)$$

onde

$$S(p) = \frac{1}{-\not{p} + \Sigma_1(p)} \qquad (3.29)$$

é o propagador completo do férmion e $\Sigma_1(p)$ (representado como —●— ) sua auto-energia. No capítulo IV vamos resolver esta equação. Antes de finalizar, vamos observar que o mérito fundamental da técnica de expansão 1/N é que, além de obtermos um parâmetro adimensional 1/N em torno do qual fazemos a expansão perturbativa, o próprio limite $N \rightarrow \infty$ seleciona os diagramas mais importantes num conjunto característico $C_1$ que pode ser somado. Como $C_1$ possui infinitos diagramas podemos esperar que a solução $\Sigma_1(p)$ da ESD (3.28) carregue alguma informação de natureza não-perturbativa do modelo. Esta solução $\Sigma_1(p)$ é a ideal para ser utilizada no cálculo do Potencial Efetivo.

# IV. AS SOLUÇÕES DA ESD PARA O PROPAGADOR FERMIÔNICO

Neste capítulo será resolvida a Equação de Schwinger-Dyson (ESD) dentro de um esquema de aproximações que retrate a solução verdadeira da melhor maneira possível. Na secção 1 reduziremos a equação integral a uma diferencial e obtemos suas soluções; na secção 2 investigaremos se toda solução da equação diferencial será também da equação integral e na secção 3 faremos uma análise geral das aproximações utilizadas em função dos resultados obtidos.

## IV.1. AS SOLUÇÕES APROXIMADAS DA ESD

Na secção III.2 apresentamos os propagadores do férmion (3.29), do boson de gauge (3.27), o vértice(3.24) e a ESD (3.28) todos no espaço euclidiano e no limite para grandes valores de N. Fazendo as substituições necessárias a ESD fica.

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{N}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2}\right\}\frac{1}{(p-k)^2+\frac{\alpha}{8}(p-k)}\,\gamma^\mu \frac{1}{-\not{k}+\Sigma(k)}\,\gamma^\nu \tag{4.1}$$

Resolvendo toda a álgebra das matrizes de Dirac a eq. (4.1) se reduz a

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{N}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{2\,\Sigma(k)}{(p-k)^2+\frac{\alpha}{8}(p-k)} \qquad \frac{1}{k^2+\Sigma^2} \tag{4.2}$$

Fazemos uma mudança para coordenadas esféricas com as substituições

$$d^3k = k^2\,dk\,d\phi\,d(\cos\theta) \tag{4.3a}$$

$$(p-k)^2 = p^2 + k^2 - 2pk\cos\theta \tag{4.3b}$$

Assim,

$$\sum(p)=\frac{2\alpha}{N}\int_0^{\infty}\frac{\kappa^2 d\kappa \sum(\kappa)}{(2\pi)^3}\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{(p^2+\kappa^2-2p\kappa\cos\theta)^2+\frac{\alpha}{8}(p^2+\kappa^2-2p\kappa\cos\theta)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\phi \tag{4.4}$$

A primeira integral é imediata e a segunda pode ser feita mediante uma mudança de variáveis $\theta \to Z$ onde

$$Z^2 = p^2+\kappa^2-2p\kappa\cos\theta \tag{4.5a}$$

$$2Z\,dZ = -2p\kappa\, d(\cos\theta) \tag{4.5b}$$

Logo, a integração na variável $\theta$ resulta

$$\int_{-1}^{1}\frac{d(\cos\theta)}{(p^2+\kappa^2-2p\kappa\cos\theta)^2+\frac{\alpha}{8}(p^2+\kappa^2-2p\kappa\cos\theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{p\kappa}\int_{|p-\kappa|}^{p+\kappa}\frac{Z\,dZ}{Z^2+\frac{\alpha}{8}Z} = \frac{1}{p\kappa}\,\mathrm{Ln}\left[\frac{p+\kappa+\alpha/8}{|p-\kappa|+\alpha/8}\right] \tag{4.6}$$

Podemos observar que o termo logaritmo desta integral surgiu devido a correção $\Pi(p-\kappa)$ que aparece em (4.1). Substituindo (4.6) em (4.2) obtemos

$$\sum(p)=\frac{\alpha}{2\pi^2 N p}\int_0^{\infty}d\kappa\,\frac{\kappa\sum(\kappa)}{\kappa^2+\sum^2(\kappa)}\,\mathrm{Ln}\left[\frac{p+\kappa+\alpha/8}{|p-\kappa|+\alpha/8}\right] \tag{4.7}$$

Os termos $\kappa+p$ e $|\kappa-p|$ que aparecem no logaritmo dificultam qualquer tentativa de resolver analiticamente esta equação integral. O melhor que podemos fazer é expandir este logaritmo utilizando a expansão

$$\mathrm{Ln}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]= 2\left\{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right\} \qquad x<1 \tag{4.8}$$

Portanto,

$$\sum(p) = \frac{\alpha}{2\pi^2 N p}\left\{ \int_0^p dk \frac{k\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)} \ln\left[\frac{p+k+\alpha/8}{p-k+\alpha/8}\right] + \int_p^\infty dk \frac{k\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)} \ln\left[\frac{k+p+\alpha/8}{k-p+\alpha/8}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi^2 N p}\left\{ \int_0^p dk \frac{k\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)}\, 2\left\{\frac{k}{p+\alpha/8} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{p+\alpha/8}\right)^3 + \cdots\right\} + \right.$$

$$\left. + \int_p^\infty dk \frac{k\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)}\, 2\left\{\frac{p}{k+\alpha/8} + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{k+\alpha/8}\right)^3 + \cdots\right\} \right\} \tag{4.9}$$

Para momentos $p \ll \alpha/8$ ou $p \gg \alpha/8$ podemos ter uma aproximação razoável se retivermos apenas a primeiro membro nas duas expansões. Assim,

$$\sum(p) = \frac{\alpha}{\pi^2 N p}\left\{ \int_0^p dk \frac{k\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)} \frac{k}{p+\alpha/8} + \int_p^\infty dk \frac{k\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)} \frac{p}{k+\alpha/8}\right\} \tag{4.10}$$

As duas integrais em (4.10) não podem ser reunidas numa só. Se isto fosse possível, talvez pudéssemos resolver esta equação através de algum método clássico para equações integrais. Entretanto, podemos obter uma equação diferencial de (4.10). Derivando (4.10) obtemos

$$\frac{d\sum(p)}{dp} = \frac{\alpha}{\pi^2 N}\left\{\left[\frac{-1}{p^2(p+\alpha/8)} + \frac{-1}{p(p+\alpha/8)^2}\right] \int_0^p dk \frac{k^2\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{p(p+\alpha/8)} \frac{p^2\sum(p)}{p^2+\sum^2(p)} - \frac{p\sum(p)}{p^2+\sum^2(p)} \frac{1}{p+\alpha/8}\right\} =$$

$$= \frac{-\alpha}{\pi^2 N} \frac{2p+\alpha/8}{p^2(p+\alpha/8)^2} \int_0^p dk \frac{k^2\sum(k)}{k^2+\sum^2(k)} \tag{4.11}$$

Derivando (4.11) novamente

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{d\sum(p)}{dp}\left(\frac{2p+\alpha/8}{p^2(p+\alpha/8)^2}\right)^{-1}\right] = \frac{-\alpha}{\pi^2 N} \frac{p^2\sum(p)}{p^2+\sum^2(p)} \tag{4.12}$$

A solução desta equação é a solução de (4.11) ou de (4.7) desde que $\Sigma$ obedeça as condições de contorno $\Sigma(\rho\to\infty)\to 0$ e $\Sigma(\rho\to 0)\to C^{te}$, desejadas para o caso de uma massa gerada dinamicamente. Podemos reescrever (4.12) na forma

$$\frac{d^2\Sigma(\rho)}{d\rho^2} + 2\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho+\alpha/8} - \frac{1}{2\rho+\alpha/8}\right\}\frac{d\Sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{\alpha}{\pi^2 N}\frac{(2\rho+\alpha/8)\Sigma(\rho)}{(\rho+\alpha/8)^2(\rho^2+\Sigma^2)} = 0 \qquad (4.13)$$

Repare que esta equação é não-linear e soluções analíticas neste caso dificilmente podem ser obtidas. Entretanto, podemos recorrer a um artifício utilizado por Maris, Herscowitz e Jacob na $QED_4$[19] e Mandelstam na $QCD_4$[20] que chamaremos de aproximação MHJ. Esta aproximação consiste em linearizarmos a equação (4.13) fazendo a substituição $\Sigma^2=\mu^2$ no seu denominador. $\mu$ é um parâmetro da teoria, com dimensão de massa, e que pode ser definido como

$$\Sigma^2(-\rho^2=\mu^2) = \mu^2 \qquad (4.14)$$

Esta definição implica que o propagador fermiônico (3.29) vai ter um polo exatamente em $\mu$ e isto significa que o seu valor pode ser interpretado como a massa física do férmion. Na secção 3 vamos mostrar que esta aproximação é bastante razoável para grandes e pequenos momentos. Assim, a equação (4.13) linearizada fica

$$\frac{d^2\Sigma(\rho)}{d\rho^2} + 2\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho+\alpha/8} - \frac{1}{2\rho+\alpha/8}\right\}\frac{d\Sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{\alpha}{\pi^2 N}\frac{(2\rho+\alpha/8)\Sigma(\rho)}{(\rho+\alpha/8)^2(\rho^2+\mu^2)} = 0 \qquad (4.15)$$

Esta equação não se reduz a nenhumas das equações usuais da Física-Matemática. O único jeito, portanto, seria calcularmos sua solução em série de potências utilizando algum método iterativo como, por exemplo, o de Froebenius. Se fizermos isto vamos obter uma relação de recorrência entre os termos da série de tal complexidade (não vamos mostrar isto porque demandaria demasiado espaço para os nossos interesses) que fica impraticável deduzirmos o termo geral $A_k$ da série em função do primeiro $A_0$ . Como queremos obter uma expressão "fechada", isto é, mais apta a nossos cálculos posteriores, não vamos utilizar Froebenius. Ao invés disso, vamos recorrer novamente a seguinte aproximação: para momentos $\rho \ll \alpha/\gamma$ a equação (4.15) se transforma em

$$\frac{d^2\Sigma}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\Sigma}{d\rho} + \frac{8}{\pi^2 N}\frac{\Sigma}{\rho^2+\mu^2} = 0 \tag{4.16}$$

e para momentos $\rho \gg \alpha/\gamma$ a equação (4.15) fica

$$\frac{d^2\Sigma}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\Sigma}{d\rho} + \frac{2\alpha}{\pi^2 N}\frac{\Sigma}{\rho(\rho^2+\mu^2)} = 0 \tag{4.17}$$

Vamos resolver primeiro a equação (4.16). Se fizermos uma mudança de variável $\rho \to Z = -\frac{\rho^2}{\mu^2}$ obtemos

$$Z(1-Z)\frac{d^2\Sigma(z)}{dZ^2} + \frac{3}{2}(1-Z)\frac{d\Sigma(z)}{dZ} - \frac{2}{\pi^2 N}\Sigma(z) = 0 \tag{4.18}$$

Naturalmente que estamos assumindo $\mu \neq 0$ porque procuramos soluções nas quais a massa $\mu$ é gerada dinamicamente. Esta equação se reduz a equação hipergeométrica (A.1) se fizermos

$$\alpha\beta = \frac{2}{\pi^2 N} \qquad \gamma = \alpha+\beta-1 = \frac{3}{2} \tag{4.19}$$

onde,

$$\alpha = \frac{1}{4}\left\{1+\sqrt{1-\frac{32}{\pi^2 N}}\right\} \tag{4.20a}$$

$$\beta = \frac{1}{4}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{32}{\pi^2 N}}\right\} \tag{4.20b}$$

$$\gamma = \frac{3}{2} \tag{4.20c}$$

Para o caso de $\gamma$ não inteiro, as duas soluções linearmente independentes de (4.18) são

$$\sum\nolimits_{I}(z) = A\,{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma\,; z) \tag{4.21a}$$

$$\sum\nolimits_{II}(z) = B\, z^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z) \tag{4.21b}$$

As constantes multiplicativas A e B são obtidas pela condição (4.14). Calculando A e B e substituindo (4.20) em (4.21) obtemos

$$\sum\nolimits_{I}(\rho) = \mu \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5-\gamma}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5+\gamma}{4}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{3}{2}; -\frac{\rho^2}{\mu^2}\right) \tag{4.22a}$$

$$\sum\nolimits_{II}(\rho) = \mu \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3-\gamma}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+\gamma}{4}\right)\left(-\frac{\mu^2}{\rho^2}\right)^{1/2}{}_2F_1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{1}{2}; -\frac{\rho^2}{\mu^2}\right) \tag{4.22b}$$

Nesta última passagem usamos a fórmula

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \tag{4.23}$$

e os parâmetros $\gamma$ e $\varepsilon$ são dados por

$$\gamma = \sqrt{1 - 8\varepsilon} \tag{4.24a}$$

$$\varepsilon = \frac{4}{\pi^2 N} \tag{4.24b}$$

Podemos observar que em (4.22) os coeficientes de hipergeométrica terão parte imaginária para $N < \frac{32}{\pi^2}$. Entretanto, como estamos interessados em soluções para grandes valores de N não precisamos nos preocupar com este detalhe.

Para simplificar as soluções (4.22) vamos utilizar suas formas assintóticas. Para baixos momentos $\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\to 0\right)$ a expansão das hipergeométricas (4.22a) e (4.22b) em série de potências (A.2) é imediata porque as condições de convergência (A.3) e (A.4) são satisfeitas. Assim, retendo os dois primeiros termos da série obtemos

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{3}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) \cong 1-\frac{1}{24}\left(1-\gamma^2\right)\frac{p^2}{\mu^2} \tag{4.25a} $$

$$ {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{1}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) \cong 1+\frac{1}{8}\left(1-\gamma^2\right)\frac{p^2}{\mu^2} \tag{4.25b} $$

Substituimos (4.25) em (4.22) e obtemos no limite $N\to\infty\,(\gamma\to 1)$

$$ \Sigma_{I}(p) = \mu \tag{4.26a} $$

$$ \Sigma_{II}(p) = \mu\left(-\frac{\mu^2}{p^2}\right)^{1/2} \tag{4.26b} $$

Podemos observar que $\Sigma_{II}(p)$ não é finita na origem o que a torna uma solução não física em qualquer aproximação. O comportamento assintótico de (4.22) para altos momentos $\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\to\infty\right)$ pode ser obtido se utilizarmos a fórmula de transformação (A.6). Assim, em (4.22a) fazemos

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{3}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) = $$

$$ = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma)\Gamma(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\gamma)}\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma; 1\ \frac{1}{2}\gamma; -\frac{\mu^2}{p^2}\right) + $$

$$ + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma)\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\gamma)}\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; 1-\frac{1}{2}\gamma; -\frac{\mu^2}{p^2}\right) \tag{4.27} $$

Expandindo (4.27) em série de potências obtemos, para grandes momentos

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{3}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) \sim \left(\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma} \tag{4.28} $$

Para grandes valores de N teremos $\gamma = \sqrt{1-\frac{32}{\pi^2 N}} \cong 1-\frac{16}{\pi^2 N}$ . Logo,

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{3}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) \sim p^{-2\varepsilon} \tag{4.29} $$

onde $\varepsilon$ é dado por (4.23b). Para a hipergeométrica em(4.22b) repetimos o mesmo procedimento

$$ {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{1}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) = $$

$$ = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}\gamma)}{\Gamma(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma)\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\gamma)}\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma} {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma; 1+\frac{1}{2}\gamma; -\frac{\mu^2}{p^2}\right) + $$

$$ + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\gamma)}{\Gamma(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma)\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\gamma)}\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; 1-\frac{1}{2}\gamma; -\frac{\mu^2}{p^2}\right) \tag{4.30} $$

Expandindo (4.30) em série de potências obtemos

$$ {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{1}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) \sim \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma} \tag{4.31} $$

Para grandes valores de N teremos $\gamma = 1-\frac{16}{\pi^2 N}$ . Logo,

$$ {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\gamma, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\gamma; \frac{1}{2}; -\frac{p^2}{\mu^2}\right) \sim p^{-1+2\varepsilon} \tag{4.32} $$

Estas soluções ( (4.29) e (4.32) ) que foram calculadas a partir de soluções mais gerais, concordam com Appelquist et al[4].

Até aqui resolvemos a equação (4.16). Para resolver a equação (4.17) precisamos assumir que $\rho^2 \gg \mu^2$. Assim, (4.17) fica

$$\frac{d^2\Sigma(\rho)}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\Sigma(\rho)}{d\rho} + \eta\frac{1}{\rho^3}\Sigma(\rho) = 0 \tag{4.33}$$

onde $\eta = \frac{2\alpha}{\pi^2 N}$. Vamos fazer uma mudança de variável $\rho \to z = 2\sqrt{\frac{\eta}{\rho}}$ e a equação (4.33) se transforma em

$$\frac{d^2\Sigma(z)}{dz^2} - \frac{3}{z}\frac{d\Sigma(z)}{dz} + \Sigma(z) = 0 \tag{4.34}$$

Agora fazemos $\Sigma(z) = z^2 G(z)$ e (4.34) fica

$$z^2\frac{d^2G(z)}{dz^2} + z\frac{dG(z)}{dz} + (z^2-4)G(z) = 0 \tag{4.35}$$

que é a equação de Bessel com soluções $J_2(z)$ e $N_2(z)$. Portanto, em termos da variável $\rho$ a solução será

$$\Sigma_I(\rho) = 4\frac{\eta}{\rho} J_2\left(2\sqrt{\frac{\eta}{\rho}}\right) \tag{4.36a}$$

$$\Sigma_{II}(\rho) = 4\frac{\eta}{\rho} N_2\left(2\sqrt{\frac{\eta}{\rho}}\right) \tag{4.36b}$$

a menos de uma constante multiplicativa. O comportamento assintótico destas soluções para grandes momentos $(\rho\to\infty)$ é dado por

$$\Sigma_I(\rho) \sim \frac{2\eta}{\rho^2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho} + \dots\right) \tag{4.37a}$$

$$\Sigma_{II}(\rho) \sim -\frac{4}{\pi} \tag{4.37b}$$

A solução $\Sigma_{II}(\rho)$ não vai a zero quando $\rho\to\infty$, como se ria esperado para uma massa gerada dinamicamente. Por isso, (4.37b) não pode ser considerada uma solução física.

Vamos terminar esta secção enunciando as soluções que serão utilizadas neste trabalho. Para $p \ll \alpha/8$ temos seguintes soluções:

no infravermelho $\quad \Sigma(p) \cong \mu$ $\qquad$ (4.38)

no ultravioleta $\quad \Sigma_I(p) \cong \mu\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-2\varepsilon}$ $\qquad$ (4.39a)

$$\Sigma_{II}(p) \cong \mu\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-1+2\varepsilon} \qquad (4.39b)$$

onde $\varepsilon$ é dado por (4.24b). Para $p \gg \alpha/8$ temos como solução no ultravioleta

$$\Sigma_U(p) \cong \mu\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-2} \qquad (4.40)$$

## IV.2. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UMA SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL DA ESD

A forma das equações (4.16) e (4.17) não impõem nenhuma condição sobre o valor de N para que exista uma solução não-trivial. Entretanto, podemos colocar a seguinte questão: será isto verdade para a equação integral (4.7)? Esta não é uma questão fácil de ser respondida porque quando fazemos a aproximação da equação integral para a diferencial podemos estar desprezando, além dos termos de ordem mais elevada na expansão logaritmica, também alguma condição em N para a existência de soluções não triviais. Assim, pode acontecer que nem toda solução da equação diferencial seja também da equação integral.

Vamos encarar a equação (4.7) como uma equação de autovalores. A solução numérica desta equação foi feita por diferentes grupos de pesquisa e levou a resultados contraditórios. Appelquist et al[4] afirmam não existir um limite N para que exista uma solução não trivial. Por outro lado, Matsuki et al[7] afirmam que existe um valor crítico para N, que é $N_c = 1,7$, acima do qual a solução nula é a única possível. Aparentemente, esta discordância de resultados pode ser atribuída a dificuldades nos cálculos numéricos envolvidos.

Vamos agora investigar esta questão utilizando um artifício cujo maior mérito, nos parece, é o de simplificar as dificuldades numéricas do problema. Fazendo o limite $p \to 0$ na equação (4.9) podemos observar que apenas o primeiro termo da série não será nulo

$$\Sigma(0) = \frac{\alpha}{\pi^2 N} \int_0^\infty dk \, \frac{k\,\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2} \, \frac{1}{k + \alpha/8} \tag{4.41}$$

Para simplificar vamos dividir $\Sigma$ e $k$ por $\mu$ tornando todas as grandezas envolvidas adimensionais. Logo,

$$\Sigma(0) = \frac{8}{\pi^2 N} \int_0^\infty dx \, \frac{x\,\Sigma(x)}{x^2 + \Sigma^2(x)} \, \frac{1}{ax + 1} \tag{4.42}$$

onde $\Sigma(x)$ e $x$ são adimensionais e

$$a = \frac{\mu}{\alpha/8} \tag{4.43}$$

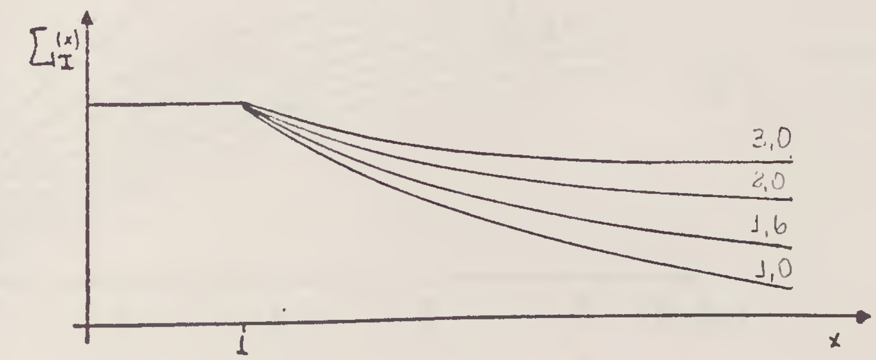
Vamos utilizar as soluções assintóticas (4.38) e (4.39) ($\Sigma$ e $x$ são adimensionais) e assumir que

$$\Sigma_I(x) = \theta(1-x) + x^{-2\varepsilon}\,\theta(x-1) \tag{4.44a}$$

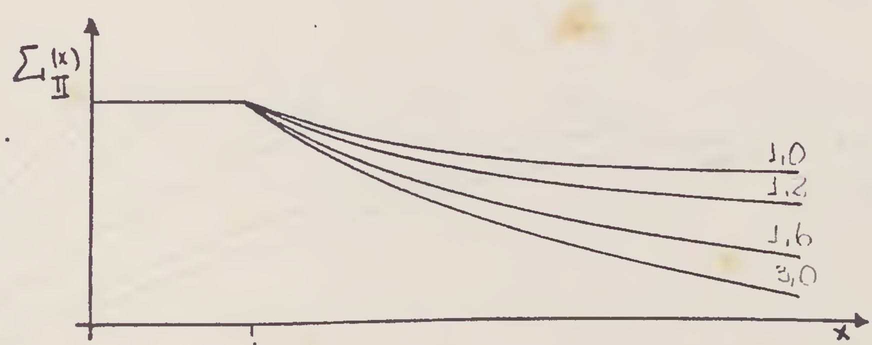
e

$$\Sigma_{II}(x) = \theta(1-x) + x^{-1+2\varepsilon}\,\theta(x-1) \qquad (4.44b)$$

são soluções de (4.42) válidas na região de momento $p \ll \alpha/8$ (ou se $x \ll 1/a$ ) (ver gráficos 2 e 3).




Graf. 2




Graf. 3

**Soluções assintóticas da ESD para diferentes valores de N**

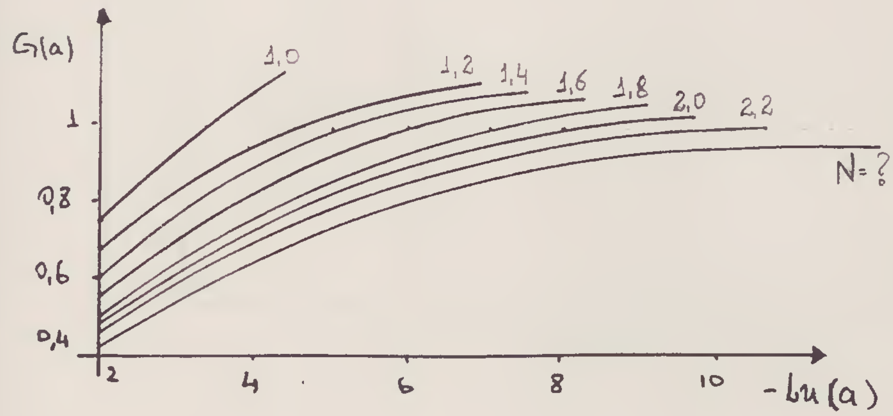
Assim, podemos substituir (4.44) em (4.42) levando em conta a existência de um cutoff $1/a$ .

$$1 = \frac{8}{\pi^2 N}\left\{ \int_0^1 dx\, \frac{x}{x^2+1}\,\frac{1}{ax+1} + \int_1^{1/a} dx\, \frac{x^{1-\delta}}{x^2+x^{-2\delta}}\,\frac{1}{ax+1} \right\} \qquad (4.45)$$

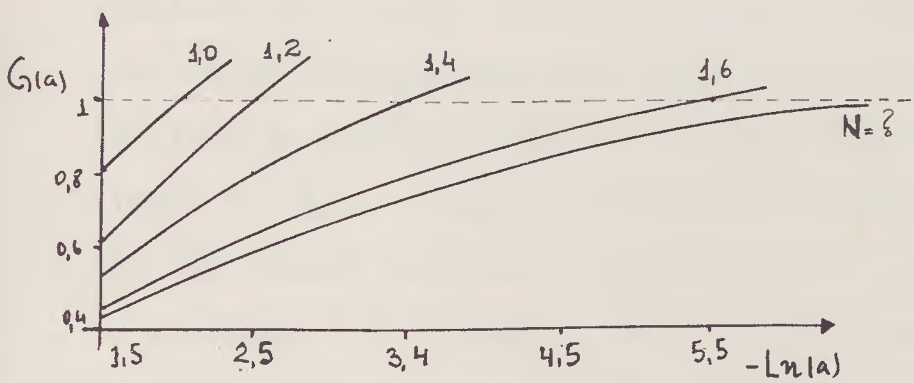
onde $\delta = 2\varepsilon$ ou $\delta = 1-2\varepsilon$ conforme a solução escolhida .Para simplificar, fazemos uma mudança $x \to \frac{1}{x}$ na segunda integral de (4.45) e obtemos

$$1 = \frac{8}{\pi^2 N}\left\{ \int_0^1 dx\, \frac{x}{x^2+1}\,\frac{1}{ax+1} + \int_a^1 dx\, \frac{x^{\delta}}{x^{2+2\delta}+1}\,\frac{1}{a+x} \right\} \qquad (4.46)$$

Nesta equação temos dois parâmetros livres, N e a, o que nos permite determinar um em função do outro. Vamos chamar de G o lado direito da eq. (4.46). Os gráficos 4 e 5 mostram o comportamento da função




Graf. 4 - G(a) para solução $\Sigma_I$




Graf. 5 - G(a) para solução $\Sigma_{II}$

G(a) para as soluções $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$ dado um N fixo. A solução da equação (4.46) para cada valor de N será o valor de "a" quando G(a)=1. Na tabela abaixo fornecemos alguns valores de "a" calculados numericamente. A margem de erro é em torno de 1% mas tende a aumentar para grandes valores de N porque o valor de "a" diminui drasticamente.

Os resultados indicam que para $N \lesssim 1,4$ o valor calculado por Appelquist et al[4] está entre os valores calculados para as soluções $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$, o que pode ser consi derado como um indício de que estas soluções são aproximações

| N | $\Sigma_I$: -Ln(a) | $\Sigma_{II}$: -Ln(a) | Appelquist et al[4]: -Ln(a) |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 3,5 | 1,9 | 2,3 |
| 1,2 | 4,3 | 2,5 | 2,9 |
| 1,4 | 5,2 | 3,5 | 3,6 |
| 1,6 | 6,1 | 5,7 | 4,3 |
| 1,8 | 7,1 | - | 5,1 |
| 2,0 | 8,2 | | 6,1 |
| 2,2 | 9,2 | | 7,2 |
| 2,4 | 10,3 | | 8,6 |
| 2,6 | . | | 10,7 |
| 2,8 | . | | 13,8 |
| 3,0 | . | | 19,5 |

TABELA 1

razoáveis da solução verdadeira. Quando aumentamos N a incerteza no cálculo numérico torna-se significativa e não fica claro se existe ou não N crítico ($N_c$) que limita a validade de $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$ como solução da ESD. Para determinar $N_c$ vamos utilizar o seguinte artifício: de acordo com os gráficos 4 e 5 podemos supor que para um N=Nc a função G(a) vai exibir um comportamento assintótico do tipo $G(a) \to 1$ quando $-Ln(a) \to \infty$ (ou $a \to 0$) (ver gráficos 4 e 5). Portanto se fizermos a=0 em (4.46) obtemos

$$1 = \frac{8}{\pi^2 N}\left\{ \int_0^1 dx \frac{x}{x^2+1} \quad \int_0^1 dx \frac{x^{\delta-1}}{x^{2+2\delta}+1} \right\} \qquad (4.47)$$

que é uma equação de solução N=Nc. Ao contrário de (4.46) as integrais em (4.47) podem ser resolvidas numa forma exata. Na segunda integral fazemos uma mudança $x \to z = x^{1+\delta}$ e (4.47) se transforma em

$$1 = \frac{8}{\pi^2 N}\left\{ \int_0^1 dx \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{1+\delta}\int_0^1 dz \frac{z^{\frac{-1}{1+\delta}}}{z^2+1} \right\} \qquad (4.48)$$

As duas integrais acima são do tipo (C.1). Logo,

$$1 = \frac{8}{\pi^2 N}\left\{ \frac{1}{2}\beta(1) + \frac{1}{2(1+\delta)}\beta\left[\frac{\delta}{2(1+\delta)}\right]\right\} \tag{4.49}$$

Podemos utilizar a representação em série da função $\beta(x)$ para reescrever a eq. (4.49) na forma

$$1 = \frac{8}{\pi^2 N}\left\{ \frac{1}{2}\beta(1) + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2+3\delta} + \frac{1}{4+5\delta} - \frac{1}{6+7\delta} + \cdots \right\} \tag{4.50}$$

Resolvendo numericamente esta equação obtemos $N_c$. Assim, para solução $\Sigma_I$ temos $\delta = 2\varepsilon = \frac{8}{\pi^2 N}$ e (4.49) fica

$$0 = \delta\left\{ \frac{1}{2}\beta(1) - \frac{1}{2+3\delta} + \frac{1}{4+5\delta} - \frac{1}{6+7\delta} + \cdots \right\} \tag{4.51}$$

cuja solução é $\delta = 0$ ou $N = \infty$. Isto indica que para a solução $\Sigma_I$ não existe um limite superior para o valor de N que condicione a sua validade como solução da ESD. Quanto a solução $\Sigma_{II}$ temos $\delta = 1 - 2\varepsilon = 1 - \frac{8}{\pi^2 N}$ e a eq. (4.49) fica

$$1 = (1-\delta)\left\{ \frac{1}{2}\beta(1) + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2+3\delta} + \frac{1}{4+5\delta} - \frac{1}{6+7\delta} + \cdots \right\} \tag{4.52}$$

Esta equação tem como solução $\delta = 0{,}52$ ou $N_c = 1{,}689$. Isto significa que $\Sigma_{II}$ só pode ser considerada como solução da ESD quando $N < 1{,}689$.

Estes resultados podem ser comparados com os obtidos em outros trabalhos. Appelquist et al[4] afirmam não existir um limite superior para os valores de N, isto é, para qualquer N a ESD tem solução não trivial. Este resultado parece ser consistente com a solução $\Sigma_I$. Por outro lado, Matsuki et al[7] afirmam existir um N crítico de valor

Nc=1,7 tal que para $N > 1,7$ a solução nula é a única possível e este resultado parece ser consistente com a solução $\Sigma_{II}$. Conclusão: para $N > 1,689$ a solução da ESD será nula ou terá o comportamento assintótico de $\Sigma_I$. Esta última hipótese, em particular, é interessante porque $\Sigma_I$ tem um comportamento irregular, isto é, no limite $N \to \infty$ se reduz a uma constante $\mu$ ( $\Sigma_I(p) = \mu\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-2\varepsilon} = \mu^{1+2\varepsilon} p^{-2\varepsilon} \xrightarrow{N\to\infty} \mu$ ). Entretanto, ainda assim $\Sigma_I$ pode ser considerada como uma solução física porque neste limite sabemos que $\mu \to 0$ ($a \to 0$, $\alpha$ é fixo, ver tabela 1). Se refizéssemos o cálculo para a solução $\Sigma_U$ (4.40) chegaríamos a $N_c = 0,62$, o que nos leva a pensar que quanto mais rápido a solução vai a zero no limite $p \longrightarrow \infty$, menor será seu $N_c$.

Antes de finalizarmos esta secção vamos lembrar que o fato de existir uma solução não trivial da ESD não implica necessariamente uma QSQ. Precisamos, antes de mais nada, verificar qual o verdadeito vácuo da teoria através do Potencial Efetivo.

## IV.3. SOBRE AS APROXIMAÇÕES UTILIZADAS NO CÁLCULO DAS SOLUÇÕES

A aproximação mais importante que realizamos é a denominada MHJ, quando fazemos $\Sigma^2 = \mu^2$ em (4.13). Na região do ultravioleta sua justificativa é óbvia porque $p \gg \mu$. Na região do infravermelho mostraremos esta aproximação também é razoável. Vamos reescrever a equação (4.16), que é válida na região $p \ll \alpha/8$, com uma mudança de variável $p \to x = p^2$ e sem a aproximação MHJ

$$4x\frac{d^2\Sigma}{dx^2} + 6\frac{d\Sigma}{dx} + \frac{8}{\pi^2 N}\frac{\Sigma}{x+\Sigma^2} = 0 \qquad (4.53)$$

Se $\Sigma(x)$ é analítica na origem então $\Sigma''$ é limitado na origem e $x\Sigma''(x) \to 0$ neste limite. Portanto, a solução da equação

$$2\,\frac{d\Sigma(x)}{dx} + \delta\,\frac{\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2} = 0 \qquad (4.53)$$

onde

$$\delta = \frac{8}{3\pi^2 N}$$

é uma boa aproximação para $\Sigma(\rho^2 \to 0)$. Esta equação já foi resolvida por Bose e Biswas(22) cuja análise reproduziremos a seguir. Fazemos uma mudança de variável $x \to z$ dada por $e^z = \frac{x}{\mu^2}$ onde $\mu$ é um parâmetro de massa. Assim, (4.53) se transforma em

$$\frac{2e^{-z}}{\mu^2}\,\frac{d\Sigma(z)}{dz} + \delta\,\frac{\Sigma(z)}{\mu^2 e^{z}+\Sigma^2} = 0 \qquad (4.54)$$

Com uma segunda transformação

$$\Sigma(z) = f(z)\,e^{z/2} \qquad (4.55)$$

obtemos

$$-\frac{z}{2} = \int df\,\frac{\mu^2+f^2}{f\left[\mu^2(1+\delta)+f^2\right]} \qquad (4.56)$$

A variável $f$ pode ser redefinida como $f \to y = \frac{f}{\mu}$ e a integração resulta

$$-\frac{z}{2} = \frac{1}{2}\,\ln\,(y^2)^{\frac{1}{1+\delta}}\left[(1+\delta)+y^2\right]^{\frac{\delta}{1+\delta}} \qquad (4.57)$$

Retornando as variáveis anteriores, $\rho$ e $\Sigma(\rho)$, teremos a solução de (4.53) em termos da equação

$$\Sigma^{2/\delta}\left\{\Sigma^2 + p^2(1+\delta)\right\} = \mu^{\frac{2(1+\delta)}{\delta}} \tag{4.58}$$

No limite $p \to 0$ esta solução fica $\Sigma(p \to 0) = \mu$. Vamos agora retornar a solução $\Sigma_I(p)$ obtida via aproximação MHJ. Se fizermos $p^2 = 0$ em (4.22a) teremos

$$\Sigma_I(p^2 = 0) = \mu \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5-\gamma}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5+\gamma}{4}\right) \tag{4.59}$$

onde $\gamma$ é dado por (4.24). No limite $N \to \infty$ (4.59) reduz-se a $\Sigma_I(p^2 = 0) = \mu$ o que significa que a aproximação MHJ é consistente com a solução da equação diferencial não-linear na região do infravermelho, ao menos para valores grandes de N.

Outras aproximações também foram feitas neste capítulo. No cálculo da solução da equação (4.17) supomos que, além de $p \gg \alpha/8$, também $p^2 \gg \mu^2$. Em termos da variável $x = -\frac{p^2}{\mu^2}$ estas aproximações são $x \gg \frac{1}{a}$ e $x \gg 1$. Pelos valores de "a" obtidos na secção anterior verificamos que $a \ll 1$. Portanto, as aproximações são consistentes entre si e as soluções (4.36) são compatíveis com as obtidas por Appelquist et al[4].

Outra aproximação que fizemos foi na integral (4.45) quando introduzimos um cutoff 1/a. Entretanto, como $a \ll 1$ (principalmente no limite $N \to \infty$) podemos considerar este cutoff irrelevante porque para momentos maiores que 1/a as soluções (4.44) vão rapidamente a zero e não contribuem significativamente na integral da equação(4.45). Também testamos o cálculo de (4.45) com diferentes valores para o cutoff como $10.\frac{1}{a}$ e $100.\frac{1}{a}$ e a diferença nos resultados não foi significativa.

## V. O POTENCIAL EFETIVO

Neste capítulo vamos fazer o cálculo do Potencial Efetivo da $QED_3$. A distribuição dos tópicos será a seguinte: na secção 1 apresentaremos a expressão do potencial que vamos utilizar; na secção 2 calcularemos o valor extremo deste potencial e na secção 3 faremos o cálculo explícito do Potencial Efetivo em série de potências de $a = \frac{\mu}{\alpha/8}$ (4.43) (os resultados obtidos no capítulo anterior e também em Appelquist et al[4] indicam que $a \ll 1$).

As soluções $\Sigma$ que serão utilizadas já foram deduzidas no capítulo anterior

$$\Sigma_I(x) = \theta(1-x) + x^{-2\varepsilon}\,\theta(x-1) \tag{5.1a}$$

$$\Sigma_{II}(x) = \theta(1-x) + x^{-1+2\varepsilon}\,\theta(x-1) \tag{5.1b}$$

para $x < 1/a$, onde $\varepsilon$ é dado por (4.25), e

$$\Sigma_U(x) = \theta(1-x) + x^{-2}\,\theta(x-1) \tag{5.1c}$$

onde $\Sigma$ e $x$ são adimensionais.

### V.1. A EXPRESSÃO DO POTENCIAL EFETIVO

Seguindo o resultado de Cornwall, Jackiw e Tomboulis[12], vamos desenvolver a fórmula do Potencial. Substituindo $S_0(p)$ e $S(p)$ (3.29) em (2.44) obtemos (já euclidianizados)

$$V_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \mathrm{Tr}\left\{ \mathrm{Ln}\left(\frac{-\not{p}}{-\not{p}+\Sigma}\right) + \frac{\not{p}}{-\not{p}+\Sigma} + 1 \right\} \tag{5.2}$$

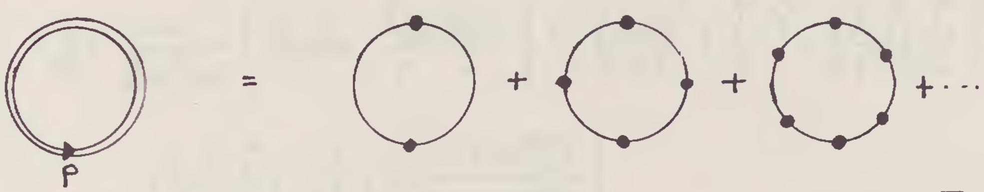
Trabalhando com as matrizes de Dirac e, posteriormente, mudando para coordenadas esféricas obtemos, depois de fazer a integração angular

$$V_0 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty p^2 dp \left\{ \frac{2\Sigma}{p^2+\Sigma^2} - \ln\left(1+\frac{\Sigma^2}{p^2}\right) \right\} \tag{5.3}$$

Expandindo (5.3) em série de potências de $\left(\frac{\Sigma}{p}\right)^2$ obtemos

$$V_0 = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty p^2 dp \left\{ \left(\frac{\Sigma}{p}\right)^2 - \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Sigma}{p}\right)^4 + \left(2-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\Sigma}{p}\right)^6 - \cdots \right\} \tag{5.4}$$

o que equivale a seguinte soma de diagramas de 1 loop




onde —•— representa a autoenergia fermiônica $\Sigma$. Como estamos numa teoria com N férmions, vão existir N contribuições do mesmo diagrama. Além disso, como vamos utilizar as soluções (5.1) precisamos reescrever (5.4) como

$$\frac{V_0}{\mu^3} = \frac{N}{\pi^2}\int_0^\infty x^2 dx \left\{ \frac{2\Sigma^2}{x^2+\Sigma^2} - \ln\left(1+\frac{\Sigma^2}{x^2}\right) \right\} \tag{5.5}$$

onde $\Sigma$ é dado por (5.1) e $V_0$ tem dimensão $[M]^3$.

O potencial $V_0$ representa a soma de todas as contribuições de diagramas de 1 loop. Para as contribuições dos diagramas de 2 loops precisamos calcular $V_1$ (2.45). Substituindo $D_{\mu\nu}(k-p)$ (3.27), $S(p)$ (3.29) e $\Gamma^\mu$ (3.24) em (2.45) teremos

$$V_1 = \frac{-\alpha}{2N}\int \frac{d^3p\, d^3k}{(2\pi)^6}\, Tr\left\{\gamma^\mu \frac{1}{-\not p+\Sigma}\gamma^\nu \frac{1}{-\not k+\Sigma}\right\}\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{(p-k)_\mu (p-k)_\nu}{(p-k)^2}\right\}\frac{1}{(p-k)^2+\frac{\alpha}{8}(p-k)} \tag{5.6}$$

Trabalhando com as matrizes de Dirac chegaremos a

$$V_1 = \frac{-2\alpha}{N}\int \frac{d^3p\, d^3k}{(2\pi)^6}\, \frac{\Sigma(p)}{p^2+\Sigma^2}\, \frac{\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2}\, \frac{1}{(p-k)^2+\frac{\alpha}{8}(p-k)} \tag{5.7}$$

Agora passamos para coordenadas esféricas e fazemos a integração angular (o procedimento é o mesmo que foi realizado em (4.7))

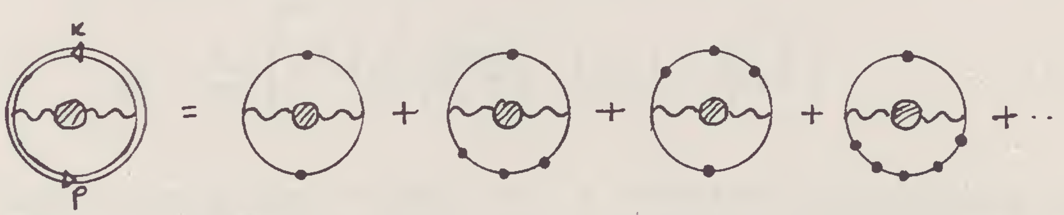
$$V_1 = \frac{-\alpha}{2\pi^4 N}\int_0^\infty dp\, dk\, \frac{p\Sigma(p)}{p^2+\Sigma^2}\, \frac{k\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2}\, \ln\left[\frac{p+k+\alpha/8}{|p-k|+\alpha/8}\right] \tag{5.8}$$

Da mesma forma que em (5.4) podemos expandir $V_1$ em potências de $\frac{\Sigma}{p}$ e $\frac{\Sigma}{k}$

$$V_1 = \frac{-\alpha}{2\pi^4 N}\int_0^\infty dp\, dk\, \frac{\Sigma(p)}{p}\frac{\Sigma(k)}{k}\left\{1-\left(\frac{\Sigma}{p}\right)^2-\left(\frac{\Sigma}{k}\right)^2+\left(\frac{\Sigma}{p}\right)^2\left(\frac{\Sigma}{k}\right)^2+\left(\frac{\Sigma}{p}\right)^4+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\Sigma}{k}\right)^4+\cdots\right\} \ln\left[\frac{p+k+\alpha/8}{|p-k|+\alpha/8}\right] \tag{5.9}$$

o que equivale a seguinte soma de diagramas de 2 loops




onde 

Como estamos numa teoria com N férmions cada diagrama contribui N vezes. Além disso, como vamos utilizar as soluções (5.1) precisamos reescrever (5.9) como

$$\frac{V_1}{\mu^3} = \frac{-4}{a\pi^4}\int_0^\infty dx\, dy\, \frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2}\, \frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2}\, \ln\left[\frac{x+y+1/a}{|x-y|+1/a}\right] \tag{5.10}$$

onde $\Sigma$ é dado por (5.1) e $V_1$ tem dimensão $[M]^3$.

Já vimos na secção II.3 que se resolvermos a equação $\delta V[\Sigma]/\delta\Sigma = 0$ chegaremos a ESD (2.47). Para o nosso modelo isto significa que as soluções (5.1) serão soluções estacionárias do potencial porque satisfazem a equação

$$\frac{\delta}{\delta\Sigma}\left\{ V_0[\Sigma] + V_1[\Sigma] \right\} = 0 \qquad (5.11)$$

Naturalmente que ainda não sabemos se as nossas soluções $\Sigma(p)$ levarão a um potencial com um mínimo igual ou diferente de zero. Assim se substituimos a ESD (4.10) em $V = V_0 + V_1$ vamos obter o valor do potencial no seu ponto de mínimo que chamaremos de $V$extremo (ou $V_e$ simplesmente). Portanto, reunindo (5.3) e (5.7) vamos obter

$$V = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty p^2 dp \left\{ \frac{2\Sigma^2}{p^2+\Sigma^2} - \ln\left(1+\frac{\Sigma^2}{p^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{2\pi^2 N p}\, \frac{\Sigma(p)}{p^2+\Sigma^2} \int_0^\infty k\, dk\, \frac{\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2} \ln\left[\frac{p+k+\alpha/8}{|p-k|+\alpha/8}\right] \right. \qquad (5.12)$$

Substituindo (4.10) em (5.12) vamos obter

$$V_e = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty p^2 dp \left\{ \frac{\Sigma^2(p)}{p^2+\Sigma^2} - \ln\left(1+\frac{\Sigma^2}{p^2}\right) \right\} \qquad (5.13)$$

Como estamos numa teoria com N férmions multiplicamos (5.13) por N. Além disso, como vamos utilizar as soluções (5.1) precisamos reescrever (5.13) como

$$\frac{V_e}{\mu^3} = \frac{N}{\pi^2}\int_0^\infty x^2 dx \left\{ \frac{\Sigma^2}{x^2+\Sigma^2} - \ln\left(1+\frac{\Sigma^2}{x^2}\right) \right\} \qquad (5.14)$$

Quando $\Sigma = 0$ temos $V_e = 0$ o que é um resultado esperado pelos motivos já citados. Além disso, $V_e$ depende de $\Sigma$, ou seja, cada solução possui um mínimo específico e uma delas será energeticamente preferível as demais.

**V.2. O CÁLCULO DE Ve $[\Sigma]$**

Vamos agora calcular o valor extremo do potencial efetivo $V_e$ (5.14) usando uma solução padrão do tipo

$$\Sigma(x) = \theta(1-x) + x^{-\delta}\,\theta(x-1) \tag{5.15}$$

Se fixarmos $\delta = 2\varepsilon$ então $\Sigma = \Sigma_I$ (5.1a), se $\delta = 1-2\varepsilon$ então $\Sigma = \Sigma_{II}$ (5.1b) e se $\delta = 2$ então $\Sigma = \Sigma_U$ (5.1c). Nos dois primeiros casos sabemos que $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$ são soluções válidas para uma região de momento $p \ll \alpha/8$ (ou $x \ll 1/a$ ). Por isso, vamos colocar um cutoff $\Lambda = 1/a$ no ultravioleta (veremos adiante que a presença do cutoff não altera significativamente os resultados). Para a solução $\Sigma_U$ isto não será necessário.

Substituindo (5.15) em (5.14) podemos separar $V_e$ em dois termos

$$V_e = \frac{N}{\pi^2}\left(V_{e_0} + V_{e_1}\right) \tag{5.16a}$$

onde

$$V_{e_0} = \int_0^1 x^2 dx \left\{ \frac{1}{x^2+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \right\} \tag{5.17a}$$

$$V_{e_1} = \int_1^\infty x^2 dx \left\{ \frac{x^{-2\delta}}{x^2 + x^{-2\delta}} - \ln\left(1+\frac{x^{-2\delta}}{x^2}\right) \right\} \tag{5.17b}$$

No cálculo de $V_{e_0}$ temos duas integrais. A primeira é do tipo (C.1) e a segunda do tipo (C.2). Logo,

$$V_{e_0} = \frac{1}{6}\,\beta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln(2) \tag{5.18}$$

O cálculo de $V_{e_1}$ é em pouco mais complicado porque precisamos expandir os argumentos em séries de potências. Usamos

$$\frac{x^{2-2\delta}}{x^2+x^{-2\delta}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^{-2\delta} \, x^{-2(1+\delta)k} \tag{5.19a}$$

$$x^2 \ln\left(1+\frac{x^{-2\delta}}{x^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \, x^2 \, x^{-2(1+\delta)k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \, x^{-2\delta} \, x^{-2(1+\delta)k} \tag{5.19b}$$

Ambas as séries convergem no intervalo de integração de (5.17b). Substituimos (5.19) em (5.17b) e obtemos

$$V_{e_1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{1 - \frac{1}{k+1}\right\} \int_1^{1/a} dx \, x^{-2\delta-2(1+\delta)k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{1 - \frac{1}{k+1}\right\} \frac{-1}{-1+2\delta+2(1+\delta)k} \left\{ a^{-1+2\delta+2(1+\delta)k} - 1\right\} =$$

$$= I_1 + I_2 \tag{5.20}$$

onde $I_1$ é a série de potências de "a" (o termo $k=0$ não contribui) (lembramos que $a \ll 1$)

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{a^{1+4\delta}}{1+4\delta} - \frac{2}{3} \frac{a^{3+6\delta}}{3+6\delta} + \cdots \tag{5.21a}$$

e $I_2$ é a série

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{1 - \frac{1}{k+1}\right\} \frac{1}{-1+2\delta+2(1+\delta)k} \tag{5.21b}$$

A série $I_2$ pode ser reescrita na forma

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{1 - \frac{2+2\delta}{3}\right\} \frac{1}{-1+2\delta+2(1+\delta)k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1/3}{1+k} \tag{5.22}$$

ou seja,

$$I_2 = \frac{1}{3}\left\{ \frac{1-2\delta}{2+2\delta} \, \beta\left[\frac{2\delta-1}{2+2\delta}\right] + \beta(1) \right\} \tag{5.23}$$

onde usamos a definição da função $\beta(x)$ (B-1). Reunindo $I_1$

e $I_2$ obtemos

$$V_{e_1} = \frac{1}{3}\left\{ \frac{1-2\delta}{2+2\delta}\,\beta\left[\frac{2\delta-1}{2+2\delta}\right] + \beta(1) \right\} + \frac{1}{2}\,\frac{a^{1+4\delta}}{1+4\delta} - \frac{2}{3}\,\frac{a^{3+6\delta}}{3+6\delta} + \cdots \qquad (5.24)$$

Reunindo (5.18) e (5.24) e utilizando os valores conhecidos da função $\beta(x)$ (B-3) obtemos

$$\frac{V_e}{\mu^3} = A_0 + A_1\, a^{1+4\delta} + A_2\, a^{3+6\delta} + \cdots \qquad (5.25)$$

onde

$$A_0 = \frac{N}{3\pi^2}\left\{ 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2\delta-1}{2+2\delta}\,\beta\left[\frac{2\delta-1}{2+2\delta}\right] \right\} \qquad (5.26a)$$

$$A_1 = \frac{N}{\pi^2}\,\frac{1/2}{1+4\delta} \qquad (5.26b)$$

$$A_2 = \frac{N}{\pi^2}\,\frac{-2/3}{3+6\delta} \qquad (5.26c)$$

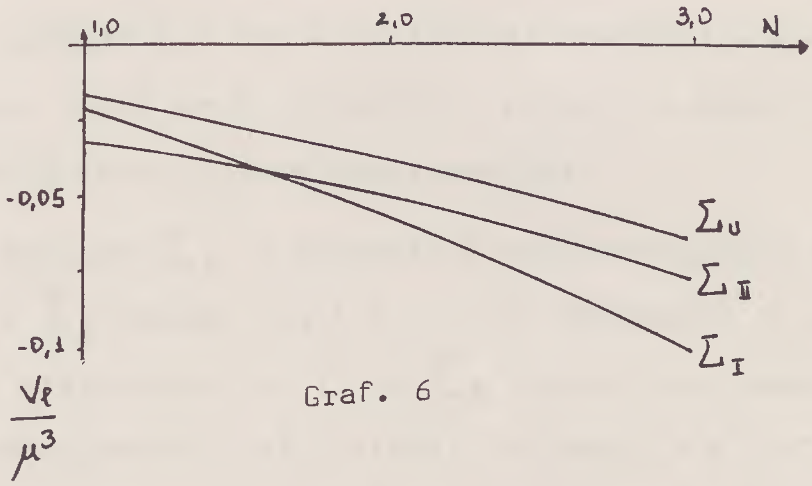
Na tabela abaixo fornecemos os valores de $A_0$ para as três soluções (5.1)

| N | $\Sigma_I : A_0$ | $\Sigma_{II} : A_0$ | $\Sigma_U : A_0$ |
|---|---|---|---|
| 1,0 | -0,023 | -0,035 | -0,019 |
| 1,2 | -0,029 | -0,036 | -0,023 |
| 1,4 | -0,036 | -0,039 | -0,027 |
| 1,6 | -0,042 | -0,043 | -0,031 |
| 1,8 | -0,049 | -0,046 | -0,035 |

| N | $\Sigma_I : A_0$ | $\Sigma_{II} : A_0$ | $\Sigma_U : A_0$ |
|---|---|---|---|
| 2,0 | -0,056 | -0,050 | -0,039 |
| 2,2 | -0,064 | -0,055 | -0,042 |
| 2,4 | -0,072 | -0,059 | -0,046 |
| 2,6 | -0,079 | -0,063 | -0,050 |
| 2,8 | -0,087 | -0,067 | -0,054 |
| 3,0 | -0,096 | -0,072 | -0,058 |

TABELA 2

Se refizéssemos todo o cálculo sem cutoff chegaríamos ao resultado $\frac{V_e}{\mu^3} = A_0$ . Para a solução $\Sigma_U$ o potencial é dado unicamente por $A_0$. Para as soluções $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$ precisaríamos levar em conta os termos $A_1$ e $A_2$. Entretanto, foi visto na secção IV.2 que os valores caracterís ticos de "a" são tais que $-\ln(a) > 1{,}5$. Para estes valores a contribuição da série (5.21a) é suficientemente pequena ser desprezada com relação a $A_0$ (por exemplo, para N=1,0 e $\Sigma = \Sigma_{II}$ temos a=0,030191 e $I_1 = 4{,}17 \times 10^{-8}$. Isto significa que mesmo para as soluções $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$ podemos fazer a aproximação $\frac{V_\ell}{\mu^3} = A_0$. Assim, o potencial efetivo apresenta uma dependência significativa apenas em N. Este resultado é ilustrado no gráfico abaixo




Graf. 6

Analisando os resultados podemos fazer algumas observações.

1) Para qualquer valor de N teremos $V_\ell < 0$. Ou seja, não existe qualquer limite superior para N que condicione a existência de um mínimo não trivial em $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ para a solução (5.15). Em particular, para a solução $\Sigma_I$, $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ no limite $N \to \infty$ ($\delta \to 0$) se reduz a

$$\frac{V_\ell}{\mu^3} \to \frac{N}{3\pi^2}\left\{1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\beta\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{N}{3\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \qquad (5.27a)$$

Para a solução $\Sigma_{II}$, $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ no limite $N \to \infty$ ($\delta \to 1$) se reduz a

$$\frac{V_\ell}{\mu^3} \to \frac{N}{3\pi^2}\left\{1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{4}\right)\right\} =$$

$$= \frac{N}{3\pi^2}(-1{,}52) < 0 \qquad (5.27b)$$

O resultado (5.27a) é compatível com os obtidos no capítulo IV para a solução $\Sigma_{I}$ . Por outro lado, também constatamos naquele capítulo a existência de um N crítico ($N_c$ = 1,689) tal que, para $N > N_c$, a solução $\Sigma_{II}$ não pode ser considerada solução assintótica da ESD. Ainda assim, observamos em (5.27b) que o potencial vai ter um mínimo não trivial para qualquer N, o que é imcompatível como resultdo do capítulo IV . No capítulo VI voltaremos a discutir este assunto.

2) A solução $\Sigma_0$ não é preferível energeticamente para qualquer valor de N. Portanto,a partir de agora vamos descartá-la de nossas considerações.

3) A solução $\Sigma_{I}$ é preferível energeticamente quando $N \geq 1,8$ e a $\Sigma_{II}$ quando $N \leq 1,6$. Se nós observarmos o comportamento assintótico de $\Sigma_{I}$ e $\Sigma_{II}$ veremos que ambos são idênticos quando $-2\varepsilon = -1+2\varepsilon$ , ou seja, $N \cong 1,62$. Este resultado é consistente com o da tabela 2. Além disso, o gráfico 6 para as três soluções parece mostrar que o estado de menor energia está relacionado com a solução da ESD que vai mais "lentamente" a zero no limite ultravioleta.

## V.3. O CÁLCULO DE $V[\Sigma]$

Vamos fazer o cálculo da integral do Potencial Efetivo $V = V_0 + V_1$ onde $V_0$ é dado por (5.5), $V_1$ por (5.10) e utilizando a solução (5.15). Podemos observar que, fazendo a integração nas variáveis x e y, o potencial fica função de "a", onde $a \ll 1$. Assim, vamos obter o resultado em série de potências de "a" retendo os termos até ordem $a^2$, e escolhendo valores de N até 3,0.

### V.3.1. O CÁLCULO DE $V_0$

O procedimento é o mesmo do cálculo de $V_e$, dada a semelhança entre (5.5) e (5.14). Assim, vamos separar (5.4) em dois termos

$$\frac{V_0}{\mu^3} = \left( V_{01} + V_{02} \right) \tag{5.28a}$$

$$V_{01} = \int_0^1 x^2 dx \left\{ \frac{2}{x^2+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right\} \tag{5.28b}$$

$$V_{02} = \int_1^{1/a} x^2 dx \left\{ \frac{2x^{-2\delta}}{x^2 + x^{-2\delta}} - \ln\left(1 + \frac{x^{-2\delta}}{x^2}\right) \right\} \tag{5.28c}$$

A integral $V_{01}$ é resolvida da mesma forma que (5.16b). Logo,

$$V_{01} = \beta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left\{ -\beta\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(2) \right\} = \frac{2}{3}\beta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln(2) \tag{5.29}$$

Na integral $V_{02}$ fazemos a expansão do argumento usando (5.19) e obtemos

$$V_{02} = \sum_{k=0} (-1)^k \left\{ 2 - \frac{1}{1+k} \right\} \int_1^{1/a} dx\, x^{-2\delta}\, x^{-2(1+\delta)k} \tag{5.30}$$

Fazendo a integração em $x$, $V_{02}$ resulta em

$$V_{02} = \sum_{k=0} (-1)^k \left\{ 2 - \frac{1}{1+k} \right\} \frac{1}{-1+2\delta+2(1+\delta)k} \left\{ 1 - a^{-1+2\delta+2(1+\delta)k} \right\} = \tag{5.31}$$

$$= \sum_{k=0} (-1)^k \left\{ 2 - \frac{2+2\delta}{3} \right\} \frac{1}{-1+2\delta+2(1+\delta)k} + \sum_{k=0} (-1)^k \frac{1/3}{1+k} -$$

$$- \frac{1}{-1+2\delta} a^{2\delta-1} + \frac{3/2}{1+4\delta} a^{1+4\delta} - \dots =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \frac{4-2\delta}{2+2\delta} \beta\left[\frac{2\delta-1}{2+2\delta}\right] + \beta(1) \right\} - \frac{1}{-1+2\delta} a^{2\delta-1} +$$

$$+ \frac{3/2}{1+4\delta} a^{1+4\delta} - \dots \tag{5.32}$$

Portanto, reunindo $V_{01}$ e $V_{02}$, $V_0$ pode ser escrito como

$$\frac{V_0}{\mu^3} = A_0 + A_4 a^{1+4\delta} + A_5 a^{2\delta-1} \tag{5.33}$$

onde

$$A_0 = \frac{N}{3\pi^2}\left\{4-\pi+\frac{4-2\delta}{2+2\delta}\,\beta\left[\frac{2\delta-1}{2+2\delta}\right]\right\} \tag{5.34a}$$

$$A_4 = \frac{N}{\pi^2}\;\frac{3/2}{1+4\delta} \tag{5.34b}$$

$$A_5 = \frac{N}{\pi^2}\;\frac{-1}{-1+2\delta} \tag{5.34c}$$

Na expressão de $A_0$ usamos os valores conhecidos da $\beta(x)$. Na tabela abaixo fornecemos os valores calculados de $A_0$, $A_4$ e $A_5$. O termo $A_4$ é de ordem $a^{1+4\delta}$ e só contribui até ordem $a^2$ para o caso da solução ser $\Sigma_{II}$ e N= 1,0.

| | sol. $\Sigma_I$ | | sol. $\Sigma_{II}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| N | $A_0$ | $A_5$ | $A_0$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1,0 | 0,146 | -0,163 | -0,219 | 0,086 | 0,163 |
| 1,2 | 0,321 | -0,346 | -0,394 | - | 0,346 |
| 1,4 | 0,863 | -0,898 | -0,944 | - | 0,898 |
| 1,6 | 12,226 | -12,270 | -12,316 | - | 12,271 |
| 1,8 | -1,891 | 1,835 | 1,789 | - | -1,835 |
| 2,0 | -1,137 | 1,069 | 1,022 | - | -1,070 |
| 2,2 | -0,927 | 0,847 | 0,797 | - | -0,847 |
| 2,4 | -0,842 | 0,749 | 0,697 | - | -0,749 |
| 2,6 | -0,806 | 0,699 | 0,645 | - | -0,700 |
| 2,8 | -0,795 | 0,674 | 0,617 | - | -0,674 |
| 3,0 | -0,797 | 0,661 | 0,602 | - | -0,661 |

TABELA 3

### V.3.2. O CÁLCULO DE $V_1$

Como a integral (5.10) possui um módulo no seu argumento, precisamos separá-la em dois termos

$$\frac{V_1}{\mu^3} = \frac{-4}{a\pi^4}\left\{ \int_0^\infty dx \int_0^x dy \frac{x\Sigma(x) \quad y\Sigma(y)}{(x^2+\Sigma^2)(y^2+\Sigma^2)} \, Ln\left[\frac{x+y+1/a}{x-y+1/a}\right] + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty dx \int_x^\infty dy \frac{x\Sigma(x) \quad y\Sigma(y)}{(x^2+\Sigma^2)(y^2+\Sigma^2)} \, Ln\left[\frac{y+x+1/a}{y-x+1/a}\right] \right\} \qquad (5.35)$$

Observando os intervalos de integração podemos expandir o l<u>o</u>garitmo usando (4.8)

$$\frac{V_1}{\mu^3} = \frac{-4}{a\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\left\{ \int_0^\infty dx \int_0^x dy \frac{x\Sigma(x) \; y\Sigma(y)}{(x^2+\Sigma^2)(y^2+\Sigma^2)} \left(\frac{ay}{ax+1}\right)^{2n+1} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty dx \int_x^\infty dy \frac{x\Sigma(x) \; y\Sigma(y)}{(x^2+\Sigma^2)(y^2+\Sigma^2)} \left(\frac{ax}{ay+1}\right)^{2n+1} \right\} \qquad (5.36)$$

Vamos chamar de $G_1(x,y)$ e $G_2(x,y)$ os argumentos das duas integrais acima. Podemos separar (5.36) em seis regiões de integração

$$\frac{V_1}{\mu^3} = \frac{-8}{\pi^4}\left\{ V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14} + V_{15} + V_{16} \right\} \qquad (5.37)$$

onde

$$V_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_0^1 dx \int_0^x dy \; G_1(x,y) \qquad (5.38a)$$

$$V_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_1^\infty dx \int_0^1 dy \; G_1(x,y) \qquad (5.38b)$$

$$V_{13} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_1^\infty dx \int_1^x dy \; G_1(x,y) \qquad (5.38c)$$

$$V_{14} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_0^1 dx \int_x^1 dy \; G_2(x,y) \qquad (5.38d)$$

$$V_{15} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_0^1 dx \int_1^{\infty} dy \; G_2(x,y) \qquad (5.38e)$$

$$V_{16} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_1^{\infty} dx \int_x^{\infty} dy \; G_2(x,y) \qquad (5.38f)$$

A finalidade desta separação é que quando substituimos a solução (5.15) em (5.38) podemos expandir o argumento da integral em série de potências, observados os intervalos de integração. Nos apêndices D, E, F e G fazemos o cálculo das integrais (5.38). Abaixo reproduzimos os resultados obtidos.

Para $V_{11}$ obtemos (D.7)

$$V_{11} = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \left\{ \frac{1}{(2\ell+3)(2k+2\ell+5)} - \frac{1}{(2\ell+3)(2k+2\ell+6)}\, a + \frac{1}{(2\ell+3)(2k+2\ell+7)}\, a^2 + \frac{1}{3(2\ell+5)(2k+2\ell+7)}\, a^2 + \cdots \right\} \qquad (5.39)$$

Para $V_{12}$ obtemos (E.9) e (E.12)

$$V_{12} = V_{12}' - R_1 = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \left\{ \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-1]} - \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-2]}\, a + \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-3]}\, a^2 + \frac{1}{3(2\ell+5)[(1+\delta)(2k+1)-1]}\, a^2 + \cdots \right\} + \left\{ \Gamma(1+\delta)\Gamma(-\delta) + \frac{1}{1+\delta}\, {}_2F_1(1,1+\delta;2+\delta;-1) \right\} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+3}\, a^{\delta} \qquad (5.40)$$

Para $V_{13}$ obtemos (F.9) e (F.12)

$$V_{13} = V_{13}' - R_2 = \sum_{k,\ell=0} (-1)^{k+\ell} \left\{ \frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)} \left[ \frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-3} - \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1} \right] - \right.$$

$$- \frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-4} - \frac{1}{(1+\delta)(2\ell+1)-2}\right] a +$$

$$+ \frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-5} - \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-3}\right] a^2 +$$

$$+ \frac{1}{3[4-(1+\delta)(2k+1)]}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-5} - \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1}\right] a^2 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+1-\delta}\left[\frac{\Gamma(2\delta)\Gamma(2n+1-\delta)}{\Gamma(2n+1)} - \frac{1}{2\delta}\, {}_2F_1(2n+1,\delta;1+\delta;-1)\right] a^{2\delta-1} -\right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{2n+1-\delta} + \frac{1}{2n+1-3\delta}\right]\left[\frac{\Gamma(2+4\delta)\Gamma(2n-1-4\delta)}{\Gamma(2n+1)} - \frac{1}{2+4\delta}\, {}_2F_1(2n+1,2+4\delta;3+4\delta;-1) a^{1+4\delta}\right\} +$$

$$+ \left[\Gamma(1+\delta)\Gamma(-\delta) - \frac{1}{1+\delta}\, {}_2F_1(1,1+\delta;2+\delta;-1)\right] \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2-(1+\delta)(2\ell+1)} \qquad (5.41)$$

Para $V_{14}$ , $V_{15}$ e $V_{16}$ obtemos, respectivamente, (Apêndice G)

$$V_{14} = V_{11} \qquad V_{15} = V_{12} \qquad V_{16} = V_{13} \qquad (5.42)$$

Na sua forma completa, $\frac{V_1}{\mu^3}$ (5.37) pode ser expresso como

$$\frac{V_1}{\mu^3} = \frac{-16}{\pi^4}\left\{ V_{11} + V_{12} + V_{13} \right\} =$$

$$= B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + B_3 a^{\delta} + B_4 a^{1+4\delta} + B_5 a^{2\delta-1} \qquad (5.43)$$

onde

$$B_0 = \frac{-16}{\pi^4} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \left\{ \frac{1}{(2\ell+3)(2k+2\ell+5)} + \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-1]} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-3} + \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1}\right] \right\} \qquad (5.44a)$$

$$B_1 = \frac{-16}{\pi^4} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} -(-1)^{k+\ell} \left\{ \frac{1}{(2\ell+3)(2k+2\ell+6)} + \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-2]} + \right.$$

$$+\frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-4}-\frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-2}\right] \tag{5.44b}$$

$$B_2=\frac{-16}{\pi^4}\sum_{k,\ell=0}^{\infty}(-1)^{k+\ell}\left\{\frac{1}{(2\ell+3)(2k+2\ell+5)}+\frac{1}{3(2\ell+5)(2k+2\ell+7)}+\right.$$

$$+\frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-3]}+\frac{1}{3(2\ell+5)[(1+\delta)(2k+1)-1]}+$$

$$+\frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-5}-\frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-3}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{3[4-(1+\delta)(2\ell+1)]}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-5}-\frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1}\right]\right\} \tag{5.44c}$$

$$B_3=\frac{-16}{\pi^4}\left\{\Gamma(1+\delta)\Gamma(-\delta)-\frac{1}{1+\delta}\,{}_2F_1(1,1+\delta;2+\delta;-1)\right\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell}\left\{\frac{1}{2\ell+3}-\frac{1}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\right\} \tag{5.44d}$$

$$B_4=\frac{-16}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+1-\delta}-\frac{1}{2n-1-3\delta}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\Gamma(2+4\delta)\Gamma(2n-1-4\delta)}{\Gamma(2n+1)}-\frac{1}{2+4\delta}\,{}_2F_1(2n+1,2+4\delta;3+4\delta;-1)\right\} \tag{5.44e}$$

$$B_5=-\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1-\delta)}\cdot\left\{\frac{\Gamma(2\delta)\Gamma(2n+1-2\delta)}{\Gamma(2n+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\delta}\,{}_2F_1(2n+1,2\delta;2\delta+1;-1)\right\} \tag{5.44f}$$

Nas tabelas abaixo fornecemos os valores calculados das séries (5.44) para as soluções $\Sigma_{I}$ e $\Sigma_{I}$. A série $B_4$ é de ordem $a^{1+4\delta}$ e só contribui como um termo até ordem $a^2$ no caso da solução ser $\Sigma_{II}$ e N= 1,0.

Sol. $\sum_{I}$

| N | $B_0$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | -0,333 | 2,279 | -0,021 | -5,146 | 3,242 |
| 1,2 | -0,693 | 0,789 | 0,022 | -2,069 | 2,023 |
| 1,4 | -1,789 | 0,481 | 0,065 | -1,449 | 2,798 |
| 1,6 | -24,526 | 0,360 | 0,119 | -1,228 | 25,429 |
| 1,8 | 3,695 | 0,299 | 0,191 | -1,138 | -2,825 |
| 2,0 | 2,175 | 0,264 | 0,294 | -1,104 | -1,304 |
| 2,2 | 1,741 | 0,241 | 0,447 | -1,100 | -0,854 |
| 2,4 | 1,557 | 0,224 | 0,685 | -1,113 | -0,643 |
| 2,6 | 1,471 | 0,214 | 1,090 | -1,138 | -0,522 |
| 2,8 | 1,433 | 0,206 | 1,888 | -1,170 | -0,444 |
| 3,0 | 1,422 | 0,200 | 4,058 | -1,208 | -0,391 |

Sol. $\sum_{II}$

| N | $B_0$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,598 | 0,183 | -2,173 | -1,515 | 0,858 | -0,246 |
| 1,2 | 1,507 | 0,220 | 0,853 | -1,125 | - | -0,577 |
| 1,4 | 2,501 | 0,275 | 0,252 | -1,112 | - | -1,633 |
| 1,6 | 25,215 | 0,344 | 0,132 | -1,202 | - | -24,322 |
| 1,8 | -2,998 | 0,425 | 0,083 | -1,335 | - | 3,954 |
| 2,0 | -1,453 | 0,516 | 0,056 | -1,512 | - | 2,496 |
| 2,2 | -0,986 | 0,618 | 0,039 | -1,721 | - | 2,134 |
| 2,4 | -0,764 | 0,731 | 0,026 | -1,946 | - | 2,031 |
| 2,6 | -0,635 | 0,853 | 0,417 | -2,201 | - | 2,033 |
| 2,8 | -0,551 | 0,985 | 0,010 | -2,474 | - | 2,093 |
| 3,0 | -0,493 | 1,128 | 0,003 | -2,769 | | 2,188 |

TABELA 4

### V.3.3. O GRÁFICO DE V(a)

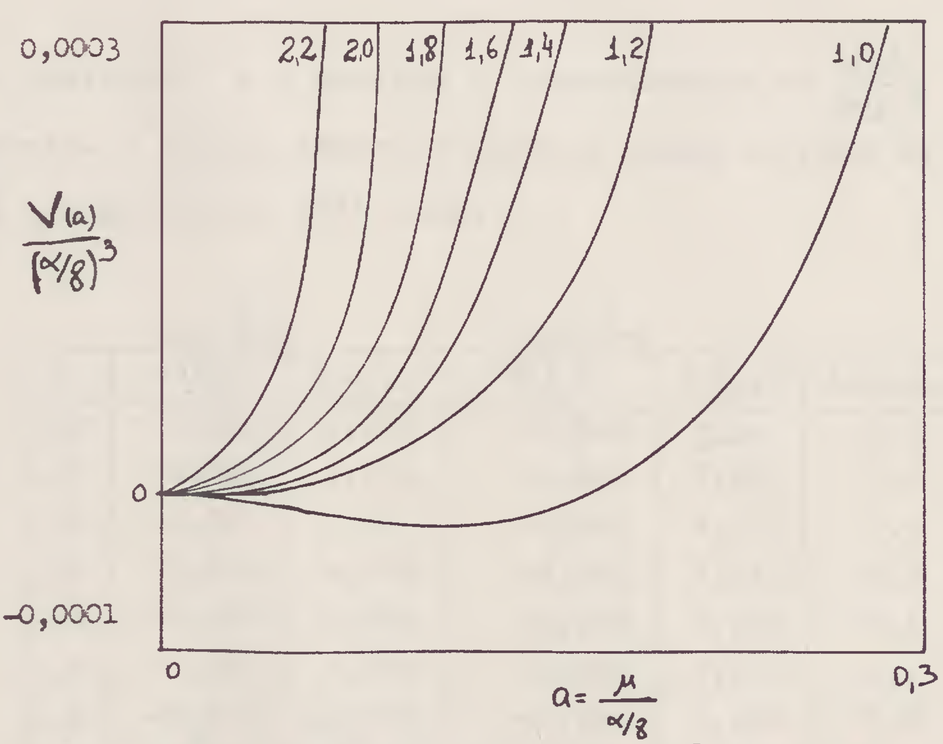
Reunindo as expressões de $V_0$ (5.34) e $V_1$ (5.44) vamos obter a expressão do Potencial Efetivo $V(a)$ em série de potências de "a" até os termos de ordem $a^2$

$$\frac{V(a)}{\mu^3} = (A_0+B_0) + B_1 a + B_2 a^2 + B_3 a^{\delta} + (A_4+B_4)\, a^{1+4\delta} + (A_5+B_5)\, a^{2\delta-1} \quad (5.45)$$

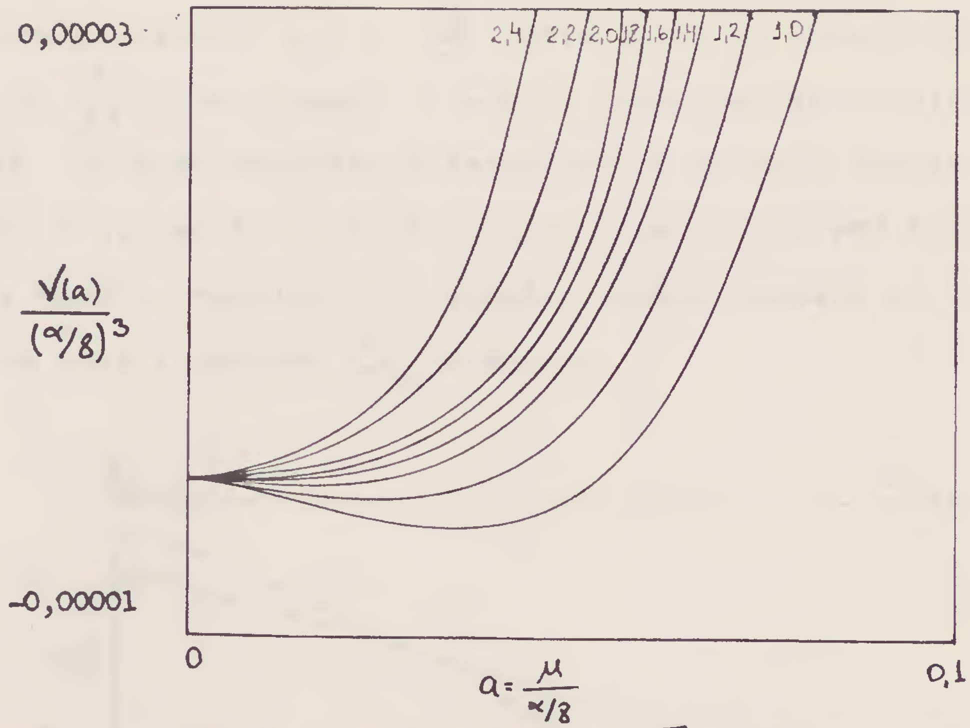
A expressão (5.45) para $V(a)$ ainda não está na sua forma ideal. A divergência no último termo de (5.45) quando $a \to 0$ é aparente já que, neste limite, $\mu \to 0$ ($\alpha$ é fixo). Portanto, vamos reescrever (5.45) como

$$\frac{V}{(\alpha/8)^3} = (A_0+B_0)a^3 + B_1 a^4 + B_2 a^5 + B_3 a^{3+\delta} + (A_4+B_4)a^{4+\delta} + (A_5+B_5)a^{2\delta+2} \quad (5.46)$$

Os gráficos 7 e 8 abaixo ilustram o comportamento de $\frac{V(a)}{(\alpha/8)^3}$ (5.46) para alguns valores de N.




Graf. 7. Potencial Efetivo para soluçao $\sum_I$ com diferentes valores de N (ver Tabela 5 ).




**Graf. 8. Potencial Efetivo para solução $\sum_{II}$ com diferentes valores de N (ver Tabela 5 ).**

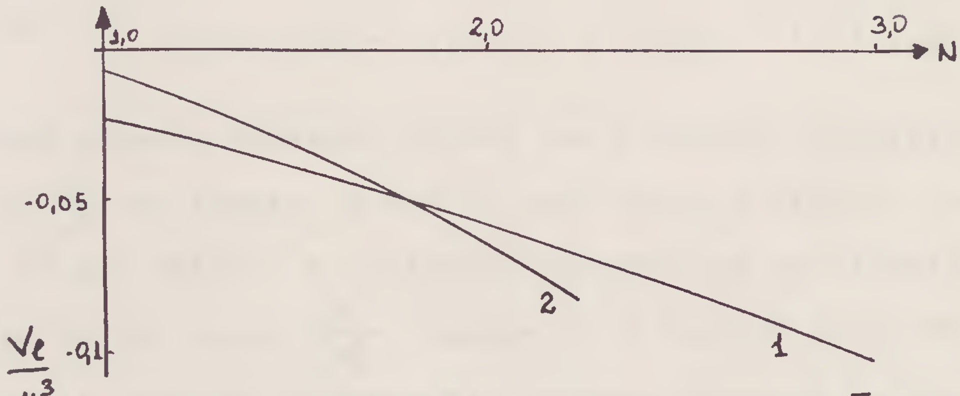
Os gráficos 7 e 8 mostram o comportamento de $\frac{V(a)}{(\alpha/8)^3}$ em larga escala. A tabela abaixo fornece o valor extremo do potencial $\frac{V_e}{\mu^3}$ a partir do $V(a)$ total.

| | Sol. $\sum_I$ | | Sol. $\sum_{II}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| N | $V_e/\mu^3$ | -Ln(a) | $V_e/\mu^3$ | -Ln(a) | Appelq.(4) |
| 1,0 | -0,013 | 2,137 | -0,040 | 3,14 | 2,3 |
| 1,2 | -0,021 | 2,996 | -0,061 | 3,69 | 2,9 |
| 1,4 | -0,027 | 3,73 | -0,046 | 4,135 | 3,6 |
| 1,6 | -0,034 | 4,605 | -0,041 | 4,711 | 4,3 |
| 1,8 | -0,039 | 5,809 | -0,028 | 5,298 | 5,1 |
| 2,0 | -0,061 | 7,928 | -0,026 | 6,215 | 6,1 |
| 2,2 | -0,078 | 18,592 | -0,013 | 7,204 | 7,2 |
| 2,4 | ? | ? | -0,006 | 9,189 | 8,6 |
| 2,6 | . | . | - | - | 10,7 |
| 2,8 | . | . | - | - | 13,8 |
| 3,0 | . | . | - | - | 19,5 |

TABELA 5

Com os resultados nesta secção podemos fazer algumas observações.

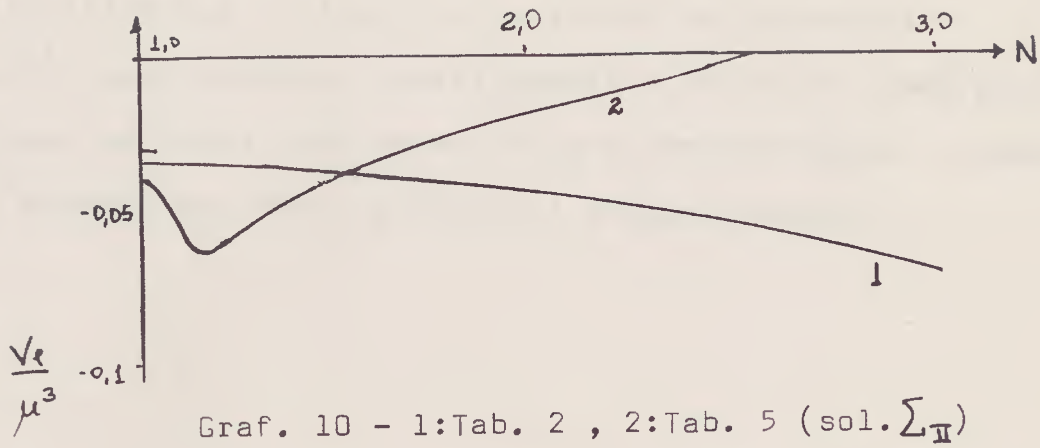
1) Para a solução $\Sigma_I$ , $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ parece ter um comportamento do tipo $\frac{V_\ell}{\mu^3} \longrightarrow -\infty$ quando $N \to \infty$ . Neste capítulo calculamos $V_\ell$ de duas maneiras diferentes: um cálculo direto (secção V.2, tabela 2) e um cálculo a partir do $V(a)$ total (esta secção, tabela 5). O gráfico abaixo compara os resultados para a solução $\Sigma_I$ e mostra




Graf. 9 - 1:Tab. 2 , 2:Tab. 5 (sol. $\Sigma_I$)

uma razoável concordância. Além disso, não há indícios da existência de um $N_c$ e este resultado é compatível com o obtido na secção IV.2. Também fizemos o cálculo de $-\ln(a)$ de duas maneiras diferentes: um cálculo direto a partir da ESD(secção IV.2, tabela 1) e um cálculo a partir do $V(a)$ total (esta secção, tabela 5). Se compararmos estes resultados para a solução $\Sigma_I$, veremos que até N=2,0 a concordância é razoável. Para valores maiores de N a diferença nos resultados pode ser atribuída a incerteza no cálculo numérico já que o valor "a" torna-se muito pequeno.

2) Quanto a solução $\Sigma_{II}$ surgem algumas discordâncias. O gráfico abaixo compara o valor de $V_\ell$ obtido no cálculo direto (secção V.2, tabela 2) e no cálculo do $V(a)$ total (esta secção, tabela 5)




Graf. 10 - 1:Tab. 2 , 2:Tab. 5 (sol.$\sum_{II}$)

Como podemos observar existe uma diferença significativa em $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ no limite $N \to \infty$ . Pelo cálculo direto (secção V.2) não existe N crítico enquanto que no cálculo a partir do $V(a)$ total $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ parece ir a zero em torno de $N \sim 2,4$ (neste caso não podemos ter certeza absoluta do resultado porque o cálculo é estritamente numérico). O fato de existir um $N_c \cong 2,4$ é compatível com o resultado da secção IV.2 quando fizemos o limite $a \to 0$ em (4.4) e obtivemos $N \to N_c \cong 1,7$. A discordância no comportamento $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ de $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ para a solução $\sum_{II}$ (gráfico 10) precisa ser explicada. Todavia, vamos transferir esta discussão para o capítulo VI.

3) A solução $\sum_{I}$ é preferível energeticamente quando $N \gtrsim 1,8$ (tabela 5) onde os valores de $-\ln(a)$ são maiores (ou seja, o valor de "a" é menor) se comparados com os da solução $\sum_{II}$ . Quando $N \lesssim 1,6$ a situação se inverte: a solução $\sum_{II}$ passa a ser preferível energeticamente e conta com os maiores valores de $-\ln(a)$ . Ou seja, a solução energeticamente preferível parece contar sempre com o menor valor de "a".

4) Os valores obtidos por Appelquist et al[4] parecem acompanhar sempre o menor valor de $-\ln(a)$ (ou maior valor de

"a") entre os das soluções $\Sigma_{I}$ e $\Sigma_{II}$ (na tabela 5). Isto significa que o algoritmo utilizado por Appelquist et al[4] para calcular numericamente o valor de $-Lu(a)$ parece levar em conta, por um motivo que desconhecemos, sempre a solução que não é preferível energeticamente.

# VI. CONCLUSÕES

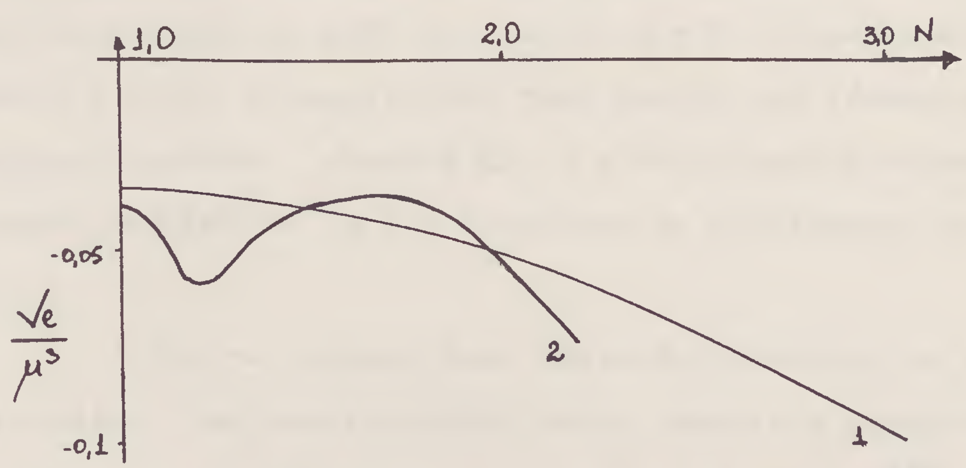
Neste capítulo faremos nossas conclusões quanto ao estudo da QSQ na $QED_3$. No capítulo 2 fizemos uma recapitulação de alguns modelos que propõem a QSQ e verificamos que o Potencial Efetivo para Operadores Compostos mostra qual é o verdadeiro vácuo da teoria. Um mínimo não trivial implica numa QSQ e uma massa $\mu$ é gerada dinamicamente. No capítulo 3 fizemos uma exposição sucinta do nosso modelo. Empregamos a técnica de expansão 1/N e a ESD foi obtida no limite para grandes valores de N(3.28 e 4.7). No capítulo IV resolvemos a ESD dentro de uma série de aproximações convenientes e obtivemos suas soluções assintóticas (4.38-40). O cálculo que fizemos seguiu dois caminhos diferentes. Na secção IV.2 fizemos um estudo direto da ESD e no capítulo V calculamos o Potencial Efetivo (secção V.3) e o seu valor extremo $V_e$(o cálculo de $V_e$ pode ser feito diretamente (secção V.2) ou através do $V(a)$ total (secção V.3)). Nosso interesse se restringiu basicamente as soluções $\Sigma_I$ (5.1a) e $\Sigma_{II}$(5.1b) já que a solução $\Sigma_U$ não fornece um potencial com um mínimo energeticamente preferível. A seguir exporemos nossas conclusões sobre as soluções $\Sigma_I$ e $\Sigma_{II}$ e a física que está por trás de cada uma delas.

Para a solução $\Sigma_I$ não existe N crítico a partir do qual a solução é trivial, isto é, para cada valor de N a solução da ESD pode ter o comportamento assintótico de $\Sigma_I$. Atestam a inexistência de N os seguintes fatos: 1º) fizemos o limite $a \to 0$ na ESD e verificamos que a solução de (4.47) é $N \to \infty$ ; 2º) numericamente, o limite superior em N que obtivemos (veja tabelas 1 e 5) tem a sua origem na própria limitação da máquina em somar uma série de convergência lenta e obter um resultado dentro de uma margem de erro determinada (lembramos que para grandes valores de N, o valor de "a" diminui drasticamente); 3) o valor extremo do potencial tem um comportamento do tipo $\frac{V_e}{\mu^3} \to -\infty$ no limite $N \to \infty$ (5.27a)(ver tabela 2 e 5 e os gráficos 6 e 9). O fato de $\Sigma_I$ ser uma solução irregular (é constante no limite $N \to \infty$) não significa que não seja uma solução física. Isto porque no limite $N \to \infty$ temos $a \to 0$ ($\mu \to 0$, $\alpha$ é fixo, ver tabelas 1 e 5)e $\Sigma_I$ terá um comportamento do tipo

$$\Sigma_I(p) = \mu\left(\frac{p}{\mu}\right)^{-2\varepsilon} = \mu^{1+2\varepsilon}\, p^{-2\varepsilon} \xrightarrow{N\to\infty} \mu \xrightarrow{a\to 0} 0 \qquad (6.1)$$

como seria de se esperar de uma massa gerada dinamicamente. Antes de continuar nossa discussão sobre a solução $\Sigma_I$ vamos ver o que acontece com a solução $\Sigma_{II}$.

Para a solução $\Sigma_{II}$ existe um N crítico que é $N_c \cong 1,7$. Ou seja, para $N > 1,7$ a solução da ESD é nula ou terá o comportamento assintótico de $\Sigma_I$. Os indícios da existência de $N_c$ são os seguintes: 1º) fizemos o limite $a \to 0$ na ESD e verificamos que a solução de (4.47) é $N \to N_c \cong 1,7$; 2º) a convergência no cálculo numérico com a solução $\Sigma_{II}$ é mais rápida e verificamos a existência de um limite superior em N(na secção IV.2 (tabela 1) chegamos até N= 1,6 e na secção V.3, por um método diferente,(tabela 5) chegamos até N= 2,4); 3º) o comportamento do valor extremo do potencial não é muito claro porque existem dois cálculos diferentes com resultados discordantes (ver gráfico 10). No limite $N \to \infty$ o cálculo direto (secção V.2) indica que $\frac{V_e}{\mu^3} \to -\infty$ (5.27b) enquanto que no cálculo através do $V(a)$ total obtivemos $\frac{V_e}{\mu^3} = 0$ a partir de um valor de N próximo a 2,4(na verdade este valor é difícil de ser determinado numericamente e isto pode explicar a diferença do resultado da secção IV.2 ($N_c \cong 1,7$)). A maior dificuldade, entretanto, é explicar a diferença qualitativa no comportmento de $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ que existe entre estes dois cálculos. Ao nosso ver, a explicação poderia ser a seguinte: quando calculamos $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ na secção IV.2 a expressão utilizada (5.13) foi deduzida quando substituimos a ESD no Potencial Efetivo (passagem de (5.12) para (5.13)). isto significa que na expressão (5.13) não podemos introduzir qualquer solução mas sim a solução física $\Sigma(p)$ da ESD, ou seja, a solução "realizada" pela natureza. Ora, para $N \geq 1,8$ $\Sigma_{II}$ não é uma solução "realizável" porque não produz um vácuo com mínimo energeticamente preferível (para $N \geq 1,8$ o vácuo de $\Sigma_I$ é que tem o mínimo de mais baixa energia). Isto significa que a comparação que fizemos nos gráficos 9(para a solução $\Sigma_I$ ) e 10 (para a solução $\Sigma_{II}$), estritamente falando, só está correta quando a respectiva solução for a energeticamente preferível. A comparação correta seria escolher os valores de $\Sigma_I$ para $N \geq 1,8$ e os valores de $\Sigma_{II}$ para $N \leq 1,6$, como mostra o gráfico abaixo




**Graf. 11. Valor extremo do potencial para a solução energeticamente preferível num dado valor de N. 1: Tabela 2; 2: Tabela 5.**

que, qualitativamente, tem uma concordância razoável. Admitindo-se esta explicação, podemos afirmar que a solução $\Sigma_{II}$ tem um Potencial Efetivo cujo valor extremo $\frac{V_\ell}{\mu^3}$ vai a zero para N próximo a 2,4, conforme o resultado da secção V.3

(ver tabela 5).

Com relação a outros trabalhos já publicados sobre este assunto, podemos afirmar que os resultados da solução $\Sigma_I$ guardam uma certa semelhança com Appelquist et al[4], que afirmam não existir um N crítico. Por outro lado, encontramos um N crítico para a solução $\Sigma_{II}$ ($N_c = 1{,}689$) bastante próximo ao valor que Matsuki et al[7] afirmam existir.

Quanto a existência ou não de uma QSQ na $QED_3$ podemos afirmar o seguinte: se a técnica de expansão 1/N for uma aproximação válida então, para grandes valores de N existe uma sol. assintótica da ESD (quanto maior o valor de N melhor será a aproximação entre $\Sigma_I$ e a solução $\Sigma(p)$) que causa uma QSQ na teoria. Isto acontece porque para qualquer valor de N esta solução produz um Potencial Efetivo com um mínimo não trivial (energeticamente preferível para $N > N_c = 1{,}7$) que representa o verdadeiro vácuo da teoria, que não é invariante quiral e garante a existência desta solução como uma solução da ESD. No limite $N \to \infty$ temos $\mu \to 0$ (ver tabelas 1 e 5). Em particular numa teoria com férmions de 2 "sabores" teríamos $-\ln(a) \cong 8{,}0$ e a massa gerada dinamicamente será $\mu = 4{,}2 \times 10^{-5} \cdot \alpha$ ($\alpha$ é a constante de acoplamento da teoria).

Pode-se pensar numa série de extensões do presente trabalho. Uma possibilidade seria repetir a presente análise para um termo de massa que quebre a paridade[8]. Outra seria a introdução de correção na ordem seguinte de 1/N. Também podemos estudar o conjunto acoplado das equações de Schwinger-Dyson (que ocorre na ordem seguinte de 1/N), a invariança de gauge do resultado, etc..., assuntos para os quais esperamos apresentar novos resultados em breve.

## APÊNDICE A - A FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

A função hipergeométrica ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ é solução da equação diferencial

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0 \tag{A.1}$$

A representação em série desta função é dada por

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \tag{A.2}$$

As condições de convergência desta série são

(a) $$|x| \leq 1 \tag{A.3}$$

(b) $$\begin{array}{ll} \gamma-(\alpha+\beta) > -1 & x \neq 1 \\ \gamma-(\alpha+\beta) > 0 & x = 1 \end{array} \tag{A.4}$$

Quando alguma destas condições não for satisfeita podemos utilizar as fórmulas de transformação desta função. Por exemplo, se a condição (b) não for satisfeita podemos utilizar a fórmula

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x) \tag{A.5}$$

Se a condição (a) não for satisfeita podemos utilizar a fórmula

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\left(\frac{-1}{x}\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta;\frac{1}{x}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\left(\frac{-1}{x}\right)^{\beta}{}_2F_1\left(\beta,\beta+1+\gamma;\beta+1-\alpha;\frac{1}{x}\right)\end{aligned} \tag{A.6}$$

Naturalmente que estas fórmulas são aplicáveis quando não há presenças de polos. Para o caso em que as duas condições (a) e (b) não forem simultaneamente satisfeitas usamos as duas fórmulas. Em particular vamos trabalhar com uma hipergeométrica do tipo ${}_2F_1(2n+1, \nu ; \nu+1 ; -\frac{1}{a})$ onde n é um inteiro $\geq 0$ , $\nu$ é não-inteiro e $|a| < 1$. Aplicando as fórmulas (A.5) e (A.6). Temos

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1(2n+1, \nu ; \nu+1 ; -\tfrac{1}{a}) = \\
&\qquad = \frac{a^{2n}}{(1+a)^{2n}} {}_2F_1(1, \nu-2n ; \nu+1 ; -\tfrac{1}{a}) = \\
&= \frac{a^{2n}}{(1+a)^{2n}} \left\{ \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu-2n-1)}{\Gamma(\nu-2n)\Gamma(\nu)} \, a \; {}_2F_1(1, 1-\nu ; 2+2n-\nu ; -a) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2n+1-\nu)}{\Gamma(1)\,\Gamma(2n+1)} \, a^{\nu-2n} \; {}_2F_1(\nu-2n, -2n ; \nu-2n ; -a) \right\}
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

Como

$$
{}_2F_1(c, -2n ; c ; -a) = (1+a)^{2n}
$$

(A.7) fica

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1(2n+1, \nu ; \nu+1 ; -\tfrac{1}{a}) = \\
&= \frac{a^{2n+1}}{(1+a)^{2n}} \, \frac{\nu}{\nu-2n-1} \, {}_2F_1(1, 1-\nu ; 2+2n-\nu ; -a) + \\
&\quad + \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2n+1-\nu)}{\Gamma(2n+1)} \, a^{\nu}
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

A hipergeométrica no lado direito da fórmula (A.8) satisfaz as condições (a) e (b).

A derivada da hipergeométrica é dada por

$$
\frac{d}{dx} \, {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \, {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1 ; \gamma+1 ; x)
\tag{A.9}
$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n(\gamma)_n}\,{}_2F_1(\alpha+n,\beta+n;\gamma+n;x) \qquad \text{(A.10)}$$

onde

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

Também vamos utilizar a hipergeométrica

$${}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\gamma,\varepsilon;x)=1+\frac{\alpha\beta\delta}{1!\,\gamma\,\varepsilon}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\delta(\delta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2+\cdots$$

Para o caso particular de uma hipergeométrica do tipo ${}_2F_1(\alpha,\beta;\beta+1;x)$ vale a seguinte relação

$$\frac{1}{\beta}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\beta+1;x)-\frac{1}{\gamma}\,{}_2F_1(\alpha,\gamma;\gamma+1;x)=$$

$$=\frac{\gamma-\beta}{\gamma\beta}\,{}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma;\beta+1,\gamma+1;x) \qquad \text{(A.11)}$$

# APÊNDICE B - FÓRMULAS DIVERSAS

A função $\beta(x)$ tem uma representação em série dada por

$$\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \tag{B.1}$$

A fórmula

$$\beta\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}\pi\right)} - \sum_{k=0}^{E\left(\frac{q-1}{2}\right)} \cos\frac{p(2k+1)\pi}{q} \ln\left[2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{q}\right] \tag{B.2}$$

com $q = 2,3,\ldots$ e $P = 1,2,3,\ldots,q-1$ é particularmente útil. Abaixo damos alguns valores de $\beta(x)$

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \beta\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \qquad \beta\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$$

$$\beta(1) = \ln(2) \qquad \beta(2) = 1 - \ln(2) \qquad \beta\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{2 + \ln\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]\right\} \tag{B.3}$$

A função gama é largamente conhecida e dispensa explicações. Vamos apenas lembrar a relação

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x} \tag{B.4}$$

que será bastante utilizada.

## APÊNDICE C - ALGUMAS INTEGRAIS

Para facilitar a leitura da tese, listamos abaixo as integrais mais utilizadas. As referências são:

I.S. Gradshteyn et al "Table of Integrals"

A. Erdelyi et al "Tables of Integral Transforms" Vol. I

GRAD(3.222.1)
$$\int_0^1 dx \frac{x^{\mu}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\mu+1}{2}\right) \qquad \mu>-1 \tag{C.1}$$

ERD(I, 315, 17)
$$\int_1^{\infty} dx\, x^{\mu-1} \ln(1+x) = \frac{1}{\mu}\left\{-\beta(-\mu) - \ln(2)\right\} \qquad \mu<0 \tag{C.2}$$

GRAD(3.197.2)
$$\int_b^{\infty} dx \frac{x^{-\lambda}}{(ax+1)^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1}\varepsilon b^{\varepsilon}}\, {}_2F_1\left(2n+1, \varepsilon; 1+\varepsilon; -\frac{1}{ab}\right) \tag{C.3}$$
onde $\varepsilon = 2n+\lambda > 0$

GRAD(3.197.8)
$$\int_0^b dx \frac{x^{\nu-1}}{(ax+1)^{2n+1}} = \frac{b^{\nu}}{\nu}\, {}_2F_1(2n+1, \nu; 1+\nu; -ab) \qquad \nu>0 \tag{C.4}$$

GRAD(7.512.12)
$$\int_0^1 dx\, x^{\nu-1}\, {}_2F_1(\alpha, \varepsilon; 1+\varepsilon; -ax) =$$
$$= \frac{1}{\nu}\, {}_3F_2(\alpha, \varepsilon, \nu; \varepsilon+1, \nu+1; a) \qquad \nu>0 \tag{C.5}$$

## APÊNDICE D - O CÁLCULO DE $V_{11}$

A integral (5.38a) é

$$V_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_0^1 dx \frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2} \int_0^x dy \frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2} \left(\frac{ay}{ax+1}\right)^{2n+1} \tag{D.1}$$

Substituindo a solução (5.15) em (D.1) podemos expandir os argumentos em série de potências (compare com (5.9))

$$V_{11} = \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_0^1 dx \frac{x}{x^2+1} \int_0^x dy \frac{y}{y^2+1} \left(\frac{ay}{ax+1}\right)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n,k,\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\ell} a^{2n}}{2n+1} \int_0^1 dx \frac{x^{2k+1}}{(ax+1)^{2n+1}} \int_0^x dy\, y^{2n+2\ell+2} \tag{D.2}$$

Fazendo a integração em $y$ obtemos

$$V_{11} = \sum_{n,k,\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\ell} a^{2n}}{(2n+1)(2n+2\ell+3)} \int_0^1 dx \frac{x^{2n+2k+2\ell+4}}{(ax+1)} \tag{D.3}$$

Esta integral é do tipo (C.4). Logo,

$$V_{11} = \sum_{n,k,\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\ell} a^{2n}}{(2n+1)(2n+2\ell+3)(2n+2k+2\ell+5)}$$

$$\cdot {}_2F_1\left(2n+1, 2n+2k+2\ell+5; 2n+2k+2\ell+6; -a\right) \tag{D.4}$$

Precisamos agora expandir a hipergeométrica em série de potências. Entretanto, devemos observar que a condição de convergência (A.4) não é satisfeita. Assim, usamos a fórmula de transformação (A.5)

$$ {}_2F_1(2n+1, 2n+2k+2l+5; 2n+2k+2l+6; -a) = $$

$$ = (1+a)^{-2n} \; {}_2F_1(1, 2k+2l+5; 2n+2k+2l+6; -a) = $$

$$ = (1+a)^{-2n} \left\{ 1 - \frac{2k+2l+5}{2n+2k+2l+6} a + \frac{(2k+2l+5)(2k+2l+6)}{(2n+2k+2l+6)(2n+2k+2l+7)} a^2 + \cdots \right\} \qquad \text{(D.5)} $$

Substituindo (D.5) em (D.4) obtemos

$$ V_{11} = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)(2n+2l+3)} \left(\frac{a}{1+a}\right)^{2n} \left\{ \frac{1}{2n+2k+2l+5} - \right. $$

$$ \left. - \frac{2k+2l+5}{(2n+2k+2l+5)(2n+2k+2l+6)} a + \frac{(2k+2l+5)(2k+2l+6)}{(2n+2k+2l+5)(2n+2k+2l+6)(2n+2k+2l+7)} a^2 + \cdots \right\} \qquad \text{(D.6)} $$

Retendo os termos da série até potências de ordem $a^2$ obtemos

$$ V_{11} = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \left\{ \frac{1}{(2l+3)(2k+2l+5)} - \frac{1}{(2l+3)(2k+2l+6)} a + \right. $$

$$ \left. + \frac{1}{(2l+3)(2k+2l+7)} a^2 + \frac{1}{3(2l+5)(2k+2l+7)} a^2 \right\} \qquad \text{(D.7)} $$

## APÊNDICE E - O CÁLCULO DE $V_{12}$

A integral (5.38b) é

$$V_{12}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1/a}{2n+1}\int_1^{\infty}dx\,\frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2}\int_0^1 dy\,\frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2}\left(\frac{ay}{ax+1}\right)^{2n+1} \tag{E.1}$$

O procedimento de cálculo é similar ao caso de $V_{11}$ . Substituindo a solução (5.15) em (E.1) podemos expandir os argumentos em séries de potências. Assim obtemos,

$$V_{12}=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{2n+1}\int_1^{1/a}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\int_0^1 dy\;y^{2n+2l+2} \tag{E.2}$$

Podemos reescrever $V_{12}$ na forma

$$V_{12}=V_{12}'-R_1 \tag{E.3}$$

onde

$$V_{12}'=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{2n+1}\int_1^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\int_0^1 dy\;y^{2n+2l+2} \tag{E.4a}$$

$$R_1=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{2n+1}\int_{1/a}^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\int_0^1 dy\;y^{2n+2l+2} \tag{E.4b}$$

Inicialmente vamos calcular $V_{12}'$ . Fazendo a integração em $y$ obtemos

$$V_{12}'=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{(2n+1)(2n+2l+3)}\int_1^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}} \tag{E.5}$$

Esta integral é do tipo (C.3). Logo,

$$V_{12}'=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)(2n+2l+3)[2n+(1+\delta)(2k+1)]}\,\frac{1}{a}\,\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left(2n+1,2n+(1+\delta)(2k+1);2n+1+(1+\delta)(2k+1);-\frac{1}{a}\right) \tag{E.6}$$

Esta hipergeométrica não pode ser expandida em série de potências porque não satisfaz as condições de convergência (A.3) e (A.4). Assim, usamos a fórmula de transformação(A.8) com

$$\nu = 2n + (1+\delta)(2k+1) \tag{E.7a}$$

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2k+1); 2n+1+(1+\delta)(2k+1); -\frac{1}{a}\right) = \\
&= \frac{a^{2n+1}}{(1+a)^{2n}} \frac{2n+(1+\delta)(2k+1)}{(1+\delta)(2k+1)-1}\, {}_2F_1\left(1, 1-2n-(1+\delta)(2k+1); 2-(1+\delta)(2k+1); -a\right) + \\
&+ \frac{\Gamma[1+2n+(1+\delta)(2k+1)]\,\Gamma[1-(1+\delta)(2k+1)]}{\Gamma(2n+1)}\, a^{2n+(1+\delta)(2k+1)} = \\
&\frac{a^{2n+1}}{(1+a)^{2n}}\left[2n+(1+\delta)(2k+1)\right]\left\{\frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1} - \frac{2n+(1+\delta)(2k+1)-1}{[(1+\delta)(2k+1)-1][(1+\delta)(2k+1)-2]}\, a + \right. \\
&\left. + \frac{[2n+(1+\delta)(2k+1)-1][2n+(1+\delta)(2k+1)-2]}{[(1+\delta)(2k+1)-1][(1+\delta)(2k+1)-2][(1+\delta)(2k+1)-3]}\, a^2 + \cdots \right\} + \\
&+ \frac{\Gamma[1+2n+(1+\delta)(2k+1)]\,\Gamma[1-(1+\delta)(2k+1)]}{\Gamma(2n+1)}\, a^{2n+(1+\delta)(2k+1)}
\end{aligned} \tag{E.7b}
$$

A expressão (E.7b) vai apresentar polos no limite $N \to \infty$ ($\delta$ reduz-se a um número inteiro). Entretanto, este polo não tem significado físico porque a fórmula de transformação (A.8) não é aplicável neste caso. A consequência disto é que o cálculo do potencial $V[\Sigma]$ fica mais impreciso para grandes valores de N. Substituindo (E.7b) em (E.6) obtemos

$$
\begin{aligned}
V'_{12} = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)(2n+2l+3)} &\left\{ \frac{a^{2n}}{(1+a)^{2n}} \left\{ \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1} - \right.\right. \\
&- \frac{2n+(1+\delta)(2k+1)-1}{[(1+\delta)(2k+1)-1][(1+\delta)(2k+1)-2]}\, a + \frac{[2n+(1+\delta)(2k+1)-1][2n+(1+\delta)(2k+1)-2]}{[(1+\delta)(2k+1)-1][(1+\delta)(2k+1)-2][(1+\delta)(2k+1)-3]}\, a^2 + \cdots \bigg\} + \\
&\left. + \frac{\Gamma[2n+(1+\delta)(2k+1)]\,\Gamma[1-(1+\delta)(2k+1)]}{\Gamma(2n+1)}\, a^{2n+(1+\delta)(2k+1)-1} \right\}
\end{aligned} \tag{E.8}
$$

Retendo os termos até ordem $a^2$ obtemos

$$V'_{12} = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \left\{ \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-1]} - \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-2]} a + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2\ell+3)[(1+\delta)(2k+1)-3]} a^2 + \frac{1}{3(2\ell+5)[(1+\delta)(2k+1)-1]} a^2 \right\} +$$
$$+ \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{\Gamma(1+\delta)\Gamma(-\delta)}{2\ell+3} a^{\delta} \tag{E.9}$$

Agora vamos fazer o cálculo de $R_1$ (E.4b). Fazendo a integração em y obtemos

$$R_1 = \sum_{n,k,\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\ell} a^{2n}}{(2n+1)(2n+2\ell+3)} \int_{1/a}^{\infty} dx \frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}} \tag{E.10}$$

Esta integral é do tipo (C.3). Logo,

$$R_1 = \sum_{n,k,\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\ell}}{(2n+1)(2n+2\ell+3)[2n+(1+\delta)(2k+1)]} a^{2n+(1+\delta)(2k+1)-1} \cdot$$
$$\cdot {}_2F_1(2n+1, 2n+(1+\delta)(2k+1); 2n+1+(1+\delta)(2k+1); -1) \tag{E.11}$$

Retendo os termos até ordem $a^2$, $R_1$ será dado por

$$R_1 = \frac{1}{1+\delta} {}_2F_1(1, 1+\delta; 2+\delta; -1) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+3} a^{\delta} \tag{E.12}$$

## APÊNDICE F - O CÁLCULO DE $V_{13}$

A integral (5.38c) é

$$V_{13}=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{1/a}{2n+1}\int_1^{\infty}dx\,\frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2}\int_1^{x}dy\,\frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2}\left(\frac{ay}{ax+1}\right)^{2n+1} \tag{F.1}$$

Substituindo a solução (5.15) em (F.1) podemos expandir os argumentos em séries de potências. Assim, obtemos

$$V_{13}=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{2n+1}\int_1^{1/a}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\int_1^{x}dy\,y^{2n+1-(1+\delta)(2l+1)} \tag{F.2}$$

Podemos reescrever $V_{13}$ na forma

$$V_{13}=V_{13}'-R_3 \tag{F.3}$$

onde

$$V_{13}'=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{2n+1}\int_1^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\int_1^{x}dy\,y^{2n+1-(1+\delta)(2l+1)} \tag{F.4a}$$

$$R_2=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{2n+1}\int_{1/a}^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\int_1^{x}dy\,y^{2n+1-(1+\delta)(2l+1)} \tag{F.4b}$$

Inicialmente vamos calcular $V_{13}'$. Fazendo a integração em $y$ obtemos

$$V_{13}'=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2n}}{(2n+1)[2n+2-(1+\delta)(2l+1)]}\left\{\int_1^{\infty}dx\,\frac{x^{2n+2-(1+\delta)(2k+2l+2)}}{(ax+1)^{2n+1}}-\right.$$
$$\left.-\int_1^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\right\} \tag{F.5}$$

As duas integrais em (F.5) são do tipo (C.3). Logo,

$$V'_{13} = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)[2n+2-(1+\delta)(2l+1)]} \frac{1}{a} \Bigg\{$$

$$\frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-2}\, {}_2F_1\left(2n+1, (1+\delta)(2k+2l+2)-2; (1+\delta)(2k+2l+2)-1; -\frac{1}{a}\right) -$$

$$- \frac{1}{2n+(1+\delta)(2k+1)}\, {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2k+1); 2n+1+(1+\delta)(2k+1); -\frac{1}{a}\right) \Bigg\} \tag{F.6}$$

Em (F.6) as duas hipergeométricas não satisfazem as condições de convergência (A.3) e (A.4). Assim, precisamos aplicar a fórmula de transformação (A.8). Para a primeira hipergeométrica fazemos

$$\nu = (1+\delta)(2k+2l+2) - 2 \tag{F.7a}$$

e obtemos

$${}_2F_1\left(2n+1, (1+\delta)(2k+2l+2)-2; (1+\delta)(2k+2l+2)-1; -\frac{1}{a}\right) =$$

$$= \frac{a^{2n}}{(1+a)^{2n}} \frac{(1+\delta)(2k+2l+2)-2}{(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-3}\, {}_2F_1\left(1, 3-(1+\delta)(2k+2l+2); 4+2n-(1+\delta)(2k+2l+2); -a\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma[(1+\delta)(2k+2l+2)-1]\,\Gamma[2n+3-(1+\delta)(2k+2l+2)]}{\Gamma(2n+1)}\, a^{(1+\delta)(2k+2l+2)} =$$

$$= \frac{a^{2n}}{(1+a)^{2n}} \left[(1+\delta)(2k+2l+2)-2\right] \Bigg\{ \frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-3} -$$

$$- \frac{(1+\delta)(2k+2l+2)-3}{[(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-3][(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-4]}\, a +$$

$$+ \frac{[(1+\delta)(2k+2l+2)-3][(1+\delta)(2k+2l+2)-4]}{[(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-3][(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-4][(1+\delta)(2k+2l+2)-2n-5]}\, a^2 + \cdots \Bigg\} +$$

$$+ \frac{\Gamma[(1+\delta)(2k+2l+2)-1]\,\Gamma[2n+3-(1+\delta)(2k+2l+2)]}{\Gamma(2n+1)}\, a^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} \tag{F.7b}$$

A segunda hipergeométrica de (F.6) é a mesma de (E.6). Portanto, substituindo (E.7) e (F.7) em (F.6) vamos obter

$$V_{13}' = \sum_{u,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2u+1)[2u+2-(1+\delta)(2l+1)]} \left\{ \frac{a^{2u}}{(1+a)^{2u}} \cdot \left\{ \right.\right.$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{[(1+\delta)(2k+2l+2)-2u-3]} - \frac{1}{[(1+\delta)(2k+1)-1]} \right] -$$

$$- \left[ \frac{(1+\delta)(2k+2l+2)-3}{[(1+\delta)(2k+2l+2)-2u-3][(1+\delta)(2k+2l+2)-2u-4]} - \frac{2u+(1+\delta)(2k+1)-1}{[(1+\delta)(2k+1)-1][(1+\delta)(2k+1)-2]} \right] a +$$

$$+ \left[ \frac{[(1+\delta)(2k+2l+2)-3][(1+\delta)(2k+2l+2)-4]}{[(1+\delta)(2k+2l+2)-2u-3][(1+\delta)(2k+2l+2)-2u-4][(1+\delta)(2k+2l+2)-2u-5]} - \right.$$

$$\left. - \frac{[2u+(1+\delta)(2k+1)-1][2u+(1+\delta)(2k+1)-2]}{[(1+\delta)(2k+1)-1][(1+\delta)(2k+1)-2][(1+\delta)(2k+1)-3]} \right] a^2 + \cdots \Big\} +$$

$$+ \frac{\Gamma[(1+\delta)(2k+2l+2)-2]\,\Gamma[2u+3-(1+\delta)(2k+2l+2)]}{\Gamma(2u+1)} a^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} -$$

$$- \frac{\Gamma[2u+(1+\delta)(2k+1)]\,\Gamma[1-(1+\delta)(2k+1)]}{\Gamma(2u+1)} a^{2u+(1+\delta)(2k+1)-1} \Bigg\} \qquad \text{(F.8)}$$

Retendo os termos até ordem $a^2$ $V_{13}'$ fica

$$V_{13}' = \sum_{k,l=0} (-1)^{k+l} \left\{ \frac{1}{2-(1+\delta)(2l+1)} \left[ \frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} - \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1} \right] + \right.$$

$$- \frac{1}{2-(1+\delta)(2l+1)} \left[ \frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-4} - \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-2} \right] a +$$

$$+ \frac{1}{2-(1+\delta)(2l+1)} \left[ \frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-5} - \frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-3} \right] a^2 +$$

$$+\frac{1}{3[4-(1+\delta)(2\ell+1)]}\left[\frac{1}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-5}-\frac{1}{(1+\delta)(2k+1)-1}\right]a^{2}\Bigg\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+1-\delta}\,\frac{\Gamma(2\delta)\Gamma(2n+1-2\delta)}{\Gamma(2n+1)}\,a^{2\delta-1}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2n+1-\delta}+\frac{1}{2n-1-3\delta}\right]\frac{\Gamma(2+4\delta)\Gamma(2n-1-4\delta)}{\Gamma(2n+1)}\,a^{1+4\delta}\right\}-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{2-(1+\delta)(2\ell+1)}\,\Gamma(1+\delta)\Gamma(-\delta)\,a^{\delta} \qquad \text{(F.9)}$$

Agora vamos fazer o cálculo de $R_2$ (F.4b). Fazendo a integração em $y$ obtemos

$$R_2=\sum_{n,k,\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+\ell}\,a^{2n}}{(2n+1)[2n+2-(1+\delta)(2\ell+1)]}\left\{\int_{1/a}^{\infty}dx\,\frac{x^{2n+2-(1+\delta)(2k+2\ell+2)}}{(ax+1)^{2n+1}}-\right.$$

$$\left.-\int_{1/a}^{\infty}dx\,\frac{x^{-(1+\delta)(2k+1)}}{(ax+1)^{2n+1}}\right\} \qquad \text{(F.10)}$$

As duas integrais são do tipo (C.3). Logo,

$$R_2=\sum_{n,k,\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+\ell}}{(2n+1)[2n+2-(1+\delta)(2\ell+1)]}\left\{\right.$$

$$\frac{a^{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-4}}{(1+\delta)(2k+2\ell+2)-2}\;{}_2F_1\big(2n+1,(1+\delta)(2k+2\ell+2)-2;(1+\delta)(2k+2\ell+2)-1;-1\big)-$$

$$\left.-\frac{a^{2n+(1+\delta)(2k+1)-1}}{2n+(1+\delta)(2k+1)}\;{}_2F_1\big(2n+1,2n+(1+\delta)(2k+1);2n+(1+\delta)(2k+1);-1\big)\right\} \qquad \text{(F.11)}$$

Retendo os termos até ordem $a^2$ $R_2$ fica

$$R_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{(2n+1-\delta)2\delta}\,a^{2\delta-1}\;{}_2F_1(2n+1,\delta;1+\delta;-1)-\right.$$

$$- \frac{1}{2+4\delta} \left\{ \frac{1}{2n+1-\delta} + \frac{1}{2n-1-3\delta} \right\} a^{1+4\delta} {}_2F_1(2n+1, 2+4\delta; 3+4\delta; -1) \Big\}$$

$$- \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{2-(1+\delta)(2\ell+1)} \frac{a^\delta}{1+\delta} {}_2F_1(1, 1+\delta; 2+\delta; -1) \qquad \text{(F.12)}$$

## APÊNDICE G - O CÁLCULO DE $V_{14}$, $V_{15}$ e $V_{16}$

Vamos agora mostrar que $V_{14}$ , $V_{15}$ e $V_{16}$ são respectivamente iguais a $V_{11}$ , $V_{12}$ e $V_{13}$ .

A integral $V_{14}$ é a (5.38d)

$$V_{14} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/a}{2n+1} \int_0^1 dx \, \frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2} \int_x^1 dy \, \frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2} \left(\frac{ax}{ay+1}\right)^{2n+1} \qquad (G.1)$$

Substituindo a solução (5.15) em (G.1) podemos expandir os argumentos em série de potências. Logo,

$$V_{14} = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l} a^{2n}}{2n+1} \int_0^1 dx \, x^{2n+2k+2} \int_x^1 dy \, \frac{y^{2l+1}}{(ay+1)^{2n+1}} \qquad (G.2)$$

A integral em $y$ pode ser reescrita numa forma que a torne do tipo (C.4)

$$\int_x^1 dy \, \frac{y^{2l+1}}{(ay+1)^{2n+1}} = \int_0^1 dy \, \frac{y^{2l+1}}{(ay+1)^{2n+1}} - \int_0^x dy \, \frac{y^{2l+1}}{(ay+1)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2l+2} \Big\{ {}_2F_1(2n+1, 2l+2; 2l+3; -a) -$$

$$- x^{2l+2} \, {}_2F_1(2n+1, 2l+2; 2l+3; -ax) \Big\} \qquad (G.3)$$

Substituindo (G.3) em (G.2) obtemos

$$V_{14} = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l} a^{2n}}{(2n+1)(2l+2)} \Big\{ {}_2F_1(2n+1, 2l+2; 2l+3; -a) \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 dx \, x^{2n+2k+2} - \int_0^1 dx \, x^{2n+2k+2l+4} \, {}_2F_1(2n+1, 2l+2; 2l+3; -ax) \Big\} \qquad (G.4)$$

A primeira integral é trivial e a segunda é do tipo (C.5). Logo,

$$V_{14}=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}\,a^{2n}}{(2n+1)(2l+2)}\left\{\frac{1}{2n+2k+3}\,{}_2F_1(2n+1,\,2l+2\,;\,2l+3\,;-a)\,-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2n+2k+2l+5}\,{}_3F_2\left(2n+1,2l+2,2n+2k+2l+5\,;2l+3,2n+2k+2l+6\,;-a\right)\right\} \qquad \text{(G.5)}$$

Esta expressão pode ser simplificada se utilizarmos a fórmula (A.11) fazendo

$$\begin{aligned}\beta&=2n+2k+3\\ \gamma&=2n+2k+2l+5\end{aligned} \qquad \text{(G.6)}$$

Assim, obtemos

$$V_{14}=\sum_{n,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}\,a^{2n}}{(2n+1)(2n+2k+3)(2n+2k+2l+5)}\,\cdot$$

$$\cdot\;{}_2F_1(2n+1,2n+2k+2l+5\,;2n+2k+2l+6\,;-a) \qquad \text{(G.7)}$$

Se fizermos uma teoria $k\leftrightarrow l$ vamos observar que (G.7) é idêntico a (D.4). Logo, $V_{14}=V_{11}$ .

A integral $V_{15}$ é a (5.38e)

$$V_{15}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1/a}{2n+1}\int_0^1 dx\,\frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2}\int_1^{\infty}dy\,\frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2}\left(\frac{ay}{ax+1}\right)^{2n+1} \qquad \text{(G.8)}$$

Se fizermos uma troca $x\leftrightarrow y$ e $k\leftrightarrow l$ vamos observar que (G.8) é idêntico a (E.1). Portanto, $V_{15}=V_{12}$ .

A integral $V_{16}$ é a (5.38f)

$$V_{16}=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{1/a}{2u+1}\int_1^{\infty}dx\,\frac{x\Sigma(x)}{x^2+\Sigma^2}\int_x^{\infty}dy\,\frac{y\Sigma(y)}{y^2+\Sigma^2}\left(\frac{ax}{ay+1}\right)^{2u+1} \tag{G.9}$$

Substituindo a solução (5.15) em (G.9) podemos expandir os argumentos em série de potências. Logo,

$$V_{16}=\sum_{u,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2u}}{2u+1}\int_1^{1/a}dx\,x^{2u+1-(1+\delta)(2k+1)}\int_x^{1/a}dy\,\frac{y^{-(1+\delta)(2l+1)}}{(ay+1)^{2u+1}} \tag{G.10}$$

pode ser reescrita na forma

$$V_{16}=V_{16}'-R_3 \tag{G.11}$$

onde

$$V_{16}'=\sum_{u,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2u}}{2u+1}\int_1^{\infty}dx\,x^{2u+1-(1+\delta)(2k+1)}\int_x^{\infty}dy\,\frac{y^{-(1+\delta)(2l+1)}}{(ay+1)^{2u+1}} \tag{G.12a}$$

$$R_3=\sum_{u,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}a^{2u}}{2u+1}\left\{\int_1^{1/a}dx\,x^{2u+1-(1+\delta)(2k+1)}\int_{1/a}^{\infty}dy\,\frac{y^{-(1+\delta)(2l+1)}}{(ay+1)^{2u+1}}+\right.$$

$$\left.+\int_{1/a}^{\infty}dx\,x^{2u+1-(1+\delta)(2k+1)}\int_x^{\infty}dy\,\frac{y^{-(1+\delta)(2l+1)}}{(ay+1)^{2u+1}}\right\} \tag{G.12b}$$

Vamos calcular $V_{16}'$ e $R_3$ e mostrar que são iguais a $V_{13}'$ e $R_2$ (F.4) respectivamente. Começando com $V_{16}'$, a integral em $y$ em (G.12a) é do tipo (C.3). Logo,

$$V_{16}'=\sum_{u,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l}}{(2u+1)[2u+(1+\delta)(2k+1)]}\,\frac{1}{a}\int_1^{\infty}dx\,x^{-(1+\delta)(2k+2l+2)}\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left(2u+1,2u+(1+\delta)(2l+1);2u+1+(1+\delta)(2l+1);-\frac{1}{ax}\right) \tag{G.13}$$

Se fizermos uma mudança $x \to z = \frac{1}{x}$ então (G.13) fica como

$$V_{16}' = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)[2n+(1+\delta)(2l+1)]} \frac{1}{a} \int_0^1 dz\, z^{-3+(1+\delta)(2k+2l+2)}$$

$$\cdot {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -\frac{z}{a}\right) \qquad \text{(G.14)}$$

Esta integral é do tipo (C.5). Logo,

$$V_{16}' = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)[2n+(1+\delta)(2l+1)][-2+(1+\delta)(2k+2l+2)]} \frac{1}{a} \cdot$$

$$\cdot {}_3F_2\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1), -2+(1+\delta)(2k+2l+2); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -1+(1+\delta)(2k+2l+2); -1/a\right) \qquad \text{(G.15)}$$

Aplicamos a fórmula (A.11) fazendo

$$\begin{aligned} \beta &= 2n+(1+\delta)(2l+1) \\ \gamma &= -2+(1+\delta)(2k+2l+2) \end{aligned} \qquad \text{(G.16)}$$

e $V_{16}'$ fica

$$V_{16}' = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)[2n+2+(1+\delta)(2l+1)]} \frac{1}{a} \Bigg\{$$

$$\frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-2} \, {}_2F_1\left(2n+1, (1+\delta)(2k+2l+2)-2; (1+\delta)(2k+2l+2)-1; -\frac{1}{a}\right) -$$

$$- \frac{1}{2n+(1+\delta)(2l+1)} \, {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -\frac{1}{a}\right) \Bigg\} \qquad \text{(G.17)}$$

Se fizermos uma troca $k \longleftrightarrow l$ vamos observar que (G.17) é idêntico a (F.6). Portanto, $V_{16}' = V_{13}'$ . Vamos agora calcular $R_3$ . As duas integrais em $y$ (G.12b) são do tipo (C.3). Logo,

$$R_3 = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)\left[2n+(1+\delta)(2l+1)\right]} \left\{ a^{2n+(1+\delta)(2l+1)-1} \cdot \right.$$

$$\cdot {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -1\right) \int_1^{1/a} dx\, x^{2n+1-(1+\delta)(2k+1)} -$$

$$\left. + \frac{1}{a} \int_{1/a}^{\infty} dx\, x^{1-(1+\delta)(2k+2l+2)} {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -\frac{1}{ax}\right) \right\} \quad \text{(G.18)}$$

A primeira integral em (G.18) é trivial. Na segunda faze-mos uma mudança $x \to z = \frac{1}{ax}$. Assim,

$$R_3 = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)\left[2n+(1+\delta)(2l+1)\right]} \left\{ \left[ a^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} - a^{2n+(1+\delta)(2l+1)-1} \right] \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{1}{2n+2-(1+\delta)(2k+1)} {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -1\right) +$$

$$\left. + a^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} \int_0^1 dz\, z^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -z\right) \right\} \quad \text{(G.19)}$$

Esta integral é do tipo (C.5). Logo,

$$R_3 = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{2n+1} \left\{ \frac{-1}{\left[2n+(1+\delta)(2l+1)\right]\left[2n+2-(1+\delta)(2k+1)\right]} \cdot \right.$$

$$a^{2n+(1+\delta)(2l+1)-1} {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -1\right) +$$

$$+ \left[ \frac{1}{\left[2n+(1+\delta)(2l+1)\right]\left[2n+2-(1-\delta)(2k+1)\right]} {}_2F_1\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1); 2n+1+(1+\delta)(2l+1); -1\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\left[2n+(1+\delta)(2l+1)\right]\left[(1+\delta)(2k+2l+2)-2\right]} \cdot$$

$$\left. \cdot {}_3F_2\left(2n+1, 2n+(1+\delta)(2l+1), (1+\delta)(2k+2l+2)-2; 2n+1+(1+\delta)(2l+1), (1+\delta)(2k+2l+2)-1; -1\right) \right] \cdot$$

$$\left. \cdot a^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} \right\} \quad \text{(G.20)}$$

As duas últimas hipergeométricas em (G.20) podem ser simplificadas se utilizarmos a fórmula (A.11) com

$$\begin{aligned} \beta &= (1+\delta)(2k+2l+2)-2 \\ \gamma &= 2n+(1+\delta)(2l+1) \end{aligned} \tag{G.21}$$

Assim, $R_3$ fica como

$$R_3 = \sum_{n,k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{(2n+1)\left[2n+2-(1+\delta)(2k+1)\right]} \left\{ \frac{1}{(1+\delta)(2k+2l+2)-2} \cdot \right.$$

$$\cdot\, a^{(1+\delta)(2k+2l+2)-3} \; {}_2F_1\big(2n+1,(1+\delta)(2k+2l+2)-2;(1+\delta)(2k+2l+2)-1;-1\big) -$$

$$\left. - \frac{1}{2n+(1+\delta)(2l+1)}\, a^{2n+(1+\delta)(2l+1)-1} \; {}_2F_1\big(2n+1,2n+(1+\delta)(2l+1);2n+1+(1+\delta)(2l+1);-1\big) \right\} \tag{G.22}$$

Se fizermos uma troca $k \leftrightarrow l$ vamos observar que (G.22) é idêntico a (F.11). Portanto, $R_3 = R_2$. Concluindo, como $V_{16}' = V_{13}'$ e $R_3 = R_2$, temos que $V_{16} = V_{13}$.

REFERÊNCIAS

(1) H. Fritzch e M. Gell-Mann, 16$^{\underline{th}}$ Intern. Conf. on High Energy Physics Chicago-Batavia (1972) Vol. 2 p. 135
H. Fritzch, M. Gell-Mann e M. Leutwyler Phys. Lett. 47 B (1973) p. 365 S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31(1973) p. 494 Phys. Rev. D 8 (1973) p. 4482 D. J. Gross e F. Wilczeck Phys. Rev. D 8 (1973) p. 3633

(2) Uma exposição didática sobre expansão 1/N pode ser encontrada em E. Witten, Physics Today Jul. (1980) p. 38
S. Coleman, Proceedings of 17$^{\underline{th}}$ Int. School of Subnuclear Physics A. Zichichi (1982)

(3) Y. Nambu e G. Jona-Lasinio Phys. Rev. 122 (1961),p.345
Outra exposição mais didática em D. Lurié, "Particles and Fields", Interscience Pub. (1968) p. 447

(4) T. Appelquist e R. Pisarski Phys. Rev. D23 (1981)p.2305

(5) R. Pisarski Phys. Rev. D 29 (1984) p. 2423

(6) T. Appelquist, Bowick, Cohler e Wijewardhana Phys. Rev. Lett. 55 (1985) p. 1715 T. Appelquist, Bowick,Karabali, Wijewardhana Phys. Rev. D 33 (1986) p. 3704

(7) T. Matsuki, L. Miao, K. S. Viswanathan, preprint Simon Fraser Univ., June 1987

(8) T. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali e L. Wijewardhana Phys. Rev. D 33 (1986) p. 3774

(9) J. Schwinger Phys. Rev. 125, (1962) p. 397

(10) D. Gross e A. Neveu, Phys. Rev. D 10 (1974) p. 3235

(11) S. Coleman e E. Weinberg, Phys. Rev. D 7 (1973) p. 1888
Outra exposição mais didática em L. Ryder "Quantum Field Theory" Cambridge Univ. Press (1985) p. 387

(12) Cornwall, Jackiw e Tomboulis Phys. Rev. D 10 (1974) p. 2428
Outras exposições podem ser encontradas em M. Peskin, "Recents Advances in Field Theory and Statistical Mechanics" Les Houches Lectures (1982) p. 217 T. Banks e S. Raby Phys. Rev. D 14 (1976) p. 2182

(13) Para uma exposição didática da QSQ ver A. Aitchison "An Informal Introduction in Gauge Field Theories" Cambridge Press (1982) p. 91 Ta-Pei Cheng e Ling-Fong Li "Gauge Theory of Elementary Particle Physics" Clarendon Press-Oxford (1984) p. 125

(14) A existência de confinamento em $QED_3$ é mostrada em J. Cornwall Phys. Rev. D 22 (1980) p. 1452
Um estudo sobre a divergência no infravermelho da $QED_3$ pode ser encontrado em R. Jackiw Phys. Rev. D 23 (1981) p. 2291

(15) Um estudo detalhado sobre os grupos de simetria quando ocorre uma quebra de simetria está em S. Weinberg, Phys. Rev. D 13 (1976) p. 974

(16) Uma exposição didática sobre Liberdade Assintótica pode ser encontrada em D. Gross Physics Today, Jan. 1987, p. 39

(17) J. Bjorken e S. Drell "Relativistic Quantum Fields" Mac. Graw Hill (1965) p. 290

(18) A expressão de $\Pi(x)$ para uma teoria em d dimensões pode ser encontrada em L. Ryder "Quantum Field Theory" Camb. Univ. Press (1985) p. 345

(19) Th. Maris, V. Herscowitz e G. Jacob Phys. Rev. Letters 12, (1964) p. 313

(20) S. Mandelstam Phys. Rev. D 20, (1979) p. 3223

(21) S. K. Bose, S. N. Biswas J. Math. Phys. 6 (1964) p.1227