UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Rafael Paulino Silva

Dinâmicas caótica e não-caótica de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$ com superfícies algébricas invariantes

Relatório Final de Pós-Doutorado

Rafael Paulino Silva

Dinâmicas caótica e não-caótica de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$ com superfícies algébricas invariantes

Relatório Final de Pós-Doutorado apresentado junto ao Departamento de Matemática e Compuatação da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Presidente Prudente.

Supervisor: Prof. Dr. Marcelo Messias.
Cossupervisor: Prof. Dr. Murilo Rodolfo Candido.

Presidente Prudente

2026

Sumário

1 Introdução **4**

2 Fundamentação Teórica **6**

3 Objetivos e Proposta Inicial do Projeto **10**

3.1 Tema 1: Estudo de novos sistemas diferenciais e teoria qualitativa 10

3.2 Tema 2:Generalização de resultados sobre não caoticidade de sistemas dinâmicos e obtenção de classes gerais de sistemas não caóticos 11

3.3 Tema 3: Integrabilidade de sistemas diferenciais polinomiais e superfícies algébricas invariantes 12

4 Resultados Obtidos **16**

4.1 Resultados referentes ao Tema 1 16

4.2 Resultados referentes ao Tema 2 17

4.3 Resultados referentes ao Tema 3 17

5 Formação de Recursos Humanos **19**

5.1 Coorientação de Iniciação Científica/PIBIC 19

5.2 Coorientação de Mestrado 20

5.3 Atuação em Banca Examinadora e Avaliação Científica 20

6 Divulgação Científica e Apresentação de Trabalhos **21**

7 Perspectivas Futuras **22**

8 Conclusões Finais **23**

Capítulo 1

Introdução

O presente projeto de pesquisa fundamentou-se em dois temas principais da teoria qualitativa dos sistemas diferenciais, os quais são apresentados de forma resumida nesta introdução. O primeiro tema aborda o comportamento não caótico de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$. Embora esse tópico tenha recebido pouca atenção ao longo do século passado, ele passou a despertar crescente interesse na comunidade científica. O trabalho de Lorenz, em 1963 (vide [14]), que introduziu o atrator de Lorenz, marcou o início do estudo sistemático do comportamento caótico em sistemas diferenciais. Apesar dos avanços obtidos desde então, ainda não existe uma definição precisa e universalmente aceita que caracterize quando um sistema diferencial pode ser considerado caótico (vide [19]).

Diante desse cenário, torna-se natural investigar o problema dual, isto é, *sob quais condições um sistema diferencial não apresenta comportamento caótico?* Nesse contexto, a Teoria de Darboux foi adotada como principal ferramenta para o desenvolvimento desta pesquisa, por estabelecer uma forte relação entre a existência de superfícies algébricas invariantes e a integrabilidade de sistemas diferenciais. A investigação desse problema é de grande relevância, tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado, uma vez que contribui para a compreensão da dinâmica desses sistemas e de suas implicações na modelagem de fenômenos naturais.

Antes do início deste projeto, o candidato, em colaboração com o Professor Doutor Marcelo Messias, já havia obtido um resultado que estabelece condições suficientes para a não ocorrência de comportamento caótico em sistemas diferenciais (Teorema 2.2, vide [16]). Esse resultado motivou a continuidade das pesquisas desenvolvidas durante o

período de pós-doutorado, cujo objetivo principal consistiu em ampliar esse estudo, estabelecer generalizações e obter novos resultados. Embora o comportamento caótico tenha sido amplamente investigado nas últimas décadas, a busca por critérios que garantam a não ocorrência de caos permanece como uma linha de pesquisa ainda pouco explorada.

O segundo tema deste projeto concentrou-se na aplicação do conceito de *polinômios com peso* ao estudo de superfícies algébricas invariantes em sistemas diferenciais em $\mathbb{R}^3$, visando caracterizar sua dinâmica. Em conjunto com o método das curvas características para equações diferenciais parciais, essa abordagem foi empregada para investigar, de forma abrangente, a existência de superfícies algébricas invariantes e integrais primeiras em sistemas diferenciais. A relevância desse tema decorre do fato de que tais objetos desempenham um papel fundamental na análise qualitativa desses sistemas, fornecendo informações importantes sobre a estrutura e o comportamento de suas soluções.

Os estudos desenvolvidos ao longo deste projeto tiveram como base resultados recentes obtidos pelo candidato e por pesquisadores colaboradores. Os principais resultados alcançados, bem como as atividades científicas realizadas e a produção decorrente da pesquisa, são apresentados nas seções subsequentes deste relatório.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Seja $\mathbb{R}[x, y, z]$ o anel dos polinômios nas variáveis x, y, z, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (ou sistema diferencial) polinomial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $P, Q, R \in \mathbb{R}[x, y, z]$ e o ponto denota a derivada das variáveis x, y e z em relação a variável independente t, geralmente chamada de *tempo*. Podemos associar naturalmente ao sistema diferencial (2.1) o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$X(x, y, z) = P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2}$$

Definimos $m = max\{grau(P), grau(Q), grau(R)\}$ como sendo o grau do sistema (2.1) (ou do campo vetorial (2.2)).

Sistemas diferenciais do tipo (2.1) são frequentemente objeto de estudo. Além de sua relevância matemática, esses sistemas apresentam aplicações em diversas áreas do conhecimento, uma vez que muitos fenômenos físicos, biológicos, químicos e provenientes das engenharias, entre outros, podem ser modelados matematicamente por meio de sistemas de equações diferenciais polinomiais. Determinar soluções para tais sistemas é uma tarefa consideravelmente complexa. No entanto, a análise qualitativa dos sistemas diferenciais pode nos auxiliar na compreensão de suas soluções. De fato, as soluções dos sistemas diferenciais de grau $m = 1$, ou seja, sistemas diferenciais lineares, são bem compreendidas, pois podem ser totalmente determinadas utilizando-se ferramentas da Álgebra

Linear. Contudo, para $m \geq 2$, ainda existem inúmeros problemas em aberto, em virtude do comportamento complexo das soluções. Com efeito, ao estudarmos o espaço de fase de sistemas diferenciais em $\mathbb{R}^3$, é comum observar o surgimento de pontos singulares, órbitas periódicas, órbitas homoclínicas e heteroclínicas. Essas características, por sua vez, podem gerar o que denominamos de *comportamento caótico* das soluções, com a ocorrência de órbitas quasiperiódicas, atratores estranhos, atratores caóticos, entre outros fenômenos.

Uma teoria que contribui para a compreensão do comportamento dinâmico das soluções de sistemas diferenciais polinomiais da forma (2.1) é a Teoria de Darboux. Esta teoria estabelece uma conexão fundamental entre a integrabilidade de sistemas diferenciais polinomiais e a existência de superfícies algébricas invariantes, onde alguns elementos serão definidos a seguir. Para mais informações, indicamos as referências [4], [11], [12].

Definição 2.1 (Integral Primeira)**.** *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. Se existe uma função análitica não localmente constante $H : U \to \mathbb{R}$, que é constante sobre as curvas soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema diferencial* (2.1) *contidas em U, então H é chamada uma Integral Primeira de X em U. Claramente H é uma integral primeira do sistema diferencial* (2.1) *se, e somente se, $X(H) \equiv 0$ em U, isto é,*

$$X(H) = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q + \frac{\partial H}{\partial z}R = 0$$

sobre as órbitas de X contidas em U, onde $X = (P, Q, R)$ é o campo vetorial associado ao sistema (2.1)*.*

Definição 2.2 (Superfície Algébrica Invariante)**.** *Seja $f \in \mathbb{K}[x, y, z]$ um polinômio não localmente constante, onde $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A superfície $f(x, y, z) = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema* (2.1) *se existir um polinômio $K \in \mathbb{K}[x, y, z]$ tal que*

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q + \frac{\partial f}{\partial z}R = Kf.$$

O polinômio K é chamado de cofator da superfície algébrica invariante $f = 0$.

Note que se o sistema diferencial (2.1) tem grau n então o cofator da superfície algébrica invariante terá grau $n - 1$. E, ainda, que uma superfície algébrica invariante é uma integral primeira polinomial do sistema diferencial (2.1) se o cofator dessa superfície é $K \equiv 0$.

Definição 2.3 (Invariante)**.** *Um Invariante do sistema diferencial* (2.1) *em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$ é uma função análitica não localmente constante I nas variáveis x, y, z e t tal que I é constante sobre as curvas soluções $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema diferencial* (2.1) *contidas em U, isto é*

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x}P + \frac{\partial I}{\partial y}Q + \frac{\partial I}{\partial z}R + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

sobre as órbitas de X contidas em U.

Um invariante I pode ser visto como uma integral primeira do sistema (2.1) que depende do tempo t.

Definição 2.4 (Fator Exponencial)**.** *Sejam $g, h \in \mathbb{K}[x, y, z] \setminus \{0\}$ e assuma que g e h sejam polinômios relativamente primos no anel $\mathbb{K}[x, y, z]$, ou que $h = 1$, onde $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Então a função $F = exp(g/h)$ é chamada de Fator Exponencial do sistema diferencial* (2.1) *se para algum polinômio $L \in \mathbb{K}[x, y, z]$ temos*

$$X(F) = \frac{\partial F}{\partial x}P + \frac{\partial F}{\partial y}Q + \frac{\partial F}{\partial z}R = LF.$$

Analogamente à superfície algébrica invariante, se o sistema (2.1) tem grau n, então o grau do cofator L do fator exponencial é no máximo $n - 1$. Ainda, se $L = 0$ então, F é uma integral primeira exponencial do sistema diferencial (2.1).

Dizemos que um invariante I de X é um *Invariante de Darboux* se ele pode ser escrito da forma

$$I(x, y, z, t) = {f_1}^{\lambda_1} \dots {f_p}^{\lambda_p} {F_1}^{\mu_1} \dots {F_q}^{\mu_q} e^{st}, \tag{2.3}$$

onde $f_i = 0$ são superfícies algébricas invariantes de X para $i = 1, \dots, p$ e os F_j são fatores exponenciais de X para $j = 1, \dots, q$, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mais precisamente, vale o seguinte resultado que pode ser encontrado em [11].

Teorema 2.1. *Suponha que o sistema diferencial polinomial* (2.1) *de grau m admita p superfícies algébricas invariantes irredutíveis $f_i = 0$ com cofatores K_i, para $i = 1, ..., p$ e q fatores exponenciais F_j com cofatores L_j para $j = 1, ..., q$. Então, existem α_i, $\beta_j \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j L_j = -s,$$

para algum $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se, e somente se, a função real $I = f_1^{\alpha_1} ... f_p^{\alpha_p} F_1^{\beta_1} ... F_q^{\beta_q} e^{st}$ é um invariante de Darboux do sistema diferencial (2.1).

Podemos construir invariantes de Darboux apenas utilizando superfícies algébricas invariantes, como é enunciado na proposição a seguir, cuja uma versão da demonstração pode ser vista em [16].

Proposição 2.1. *Se* $f(x,y,z) = 0$ *é uma superfície algébrica invariante de* (2.1) *com cofator constante* $K = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, então* $I = f(x,y,z)\, e^{-kt}$ *é um invariante de Darboux do sistema diferencial* (2.1)*.*

Apesar de nem todos os sistemas diferenciais apresentarem superfícies algébricas invariantes, os que possuem tais superfícies gozam de duas propriedades interessantes. A primeira é a decomposição do espaço de fase em regiões invariantes, e a segunda é a possível redução da dimensão do espaço de fase do sistema diferencial. Essas duas propriedades ajudam na análise da dinâmica do sistema, uma vez que, a partir delas, é mais fácil determinar o comportamento do fluxo do sistema diferencial (2.1). Um sistema diferencial pode ainda ter mais de uma superfície algébrica invariante. Neste caso, podemos formar uma nova superfície usando as superfícies já conhecidas. Nessas condições, a Teoria de Darboux já se mostrou eficiente no estudo do comportamento não caótico de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$.

Já é conhecido na literatura que sistemas diferenciais planares contínuos não apresentam comportamento caótico, devido ao Teorema de Poincaré-Bendixson. Desse modo, o interesse em se determinar condições para que um sistema diferencial contínuo seja caótico (ou não caótico) se torna relevante em espaços de fase de dimensão maior ou igual a três. Com base nas afirmações e resultados anteriores, enunciamos o resultado que estabelece uma condição suficiente para um sistema diferencial polinomial em $\mathbb{R}^3$ não ter comportamento caótico, onde a demonstração e mais exemplos sobre tais conceitos podem ser encontrados em [16], [17] e [18].

Teorema 2.2 (Condição suficiente para não caoticidade)**.** *Seja* X *o campo de vetores associado ao sistema diferencial* (2.1) *com um número finito de pontos singulares. Se* X *tem uma superfície algébrica invariante* $f = 0$ *com cofator constante* $K = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, então os conjuntos* α *e* ω*-limite da órbita* $\phi_p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *com* $\phi_p(0) = p \in \mathbb{R}^3$*, estão contidos em* $\{f = 0\} \cup \mathbb{S}^2$*, onde* $\mathbb{S}^2$ *representa os pontos no infinito de* $\mathbb{R}^3$*. Em particular,* X *não apresenta comportamento caótico.*

Capítulo 3

Objetivos e Proposta Inicial do Projeto

3.1 Tema 1: Estudo de novos sistemas diferenciais e teoria qualitativa

Como observado no Capítulo 2, o Teorema 2.2 revelou-se eficaz na determinação do comportamento não caótico de sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$. Assim, esperava-se que esse resultado pudesse ser aplicado a uma gama mais ampla de sistemas diferenciais, abrangendo tanto os sistemas clássicos da literatura quanto aqueles inovadores que frequentemente emergem nas áreas de Matemática, Física, Química, Biologia, entre outras. Dessa forma, pretendia-se obter novas classes de sistemas diferenciais que não apresentassem comportamento caótico, permitindo uma compreensão mais clara da dinâmica desses sistemas por meio da análise das condições de não caoticidade.

Entre os diversos sistemas que poderiam ser examinados sob a ótica do comportamento não caótico, um dos mais estudados na literatura, e que desperta considerável interesse no contexto da teoria do caos, é o sistema de Nosé-Hoover. Esse sistema tem sido amplamente investigado ao longo dos anos devido ao seu comportamento frequentemente irregular e imprevisível, resultando na emergência de atratores estranhos e, consequentemente, no que se denomina comportamento caótico. O sistema diferencial foi inicialmente concebido por Nosé, que buscou modelar a interação de uma partícula com um banho térmico. Posteriormente, entre 1984 e 1986, Hoover [7] também analisou o problema,

culminando na construção do oscilador Nosé-Hoover, descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - yz, \\ \dot{z} &= \alpha\left(y^2 - 1\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que as variáveis (x, y, z) representam, respectivamente, a coordenada do oscilador, o momento do oscilador e um coeficiente de atrito que controla a temperatura termodinâmica. O parâmetro α é o único presente nas equações de (3.2) e, portanto, a dinâmica do oscilador Nosé-Hoover depende diretamente desse parâmetro. Assim, o estudo de condições que assegurassem que tal sistema não exibisse comportamento caótico constituiu um dos objetivos desta proposta. Esperava-se que a compreensão do comportamento não caótico de sistemas dessa natureza proporcionasse uma visão mais aprofundada de sua dinâmica.

Ademais, cabe ressaltar que os resultados conhecidos não excluíam a possibilidade de ocorrência de bifurcações em sistemas diferenciais. Assim, durante o desenvolvimento do projeto, esperava-se investigar sistemas que, embora não apresentassem comportamento caótico, pudessem exibir bifurcações, tornando a dinâmica desses modelos ainda mais rica e interessante.

Os estudos sobre a transição de um sistema não caótico para um sistema caótico também integraram a proposta inicial deste projeto. Conforme visto em [18], a perturbação de uma superfície algébrica invariante e, consequentemente, sua destruição, podem gerar comportamento irregular e imprevisível, conduzindo ao aparecimento do comportamento caótico. Nesse contexto, pretendia-se compreender em que medida um sistema inicialmente não caótico poderia ser perturbado até apresentar comportamento caótico.

3.2 Tema 2:Generalização de resultados sobre não caoticidade de sistemas dinâmicos e obtenção de classes gerais de sistemas não caóticos

Para que o Teorema 2.2 seja aplicável, é imprescindível que o cofator da superfície algébrica invariante seja constante, ou seja, o resultado está intimamente ligado à condição

imposta sobre esse cofator. Uma das abordagens propostas neste projeto consistiu em estabelecer condições para que o cofator pudesse ser um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$. Em particular, para alcançar esse objetivo, previa-se a utilização da Teoria de Darboux, que fornece diversas condições para que um sistema diferencial possua superfícies algébricas invariantes e fatores exponenciais com cofatores não constantes.

Esperava-se que a generalização do Teorema 2.2 permitisse obter classes mais abrangentes de sistemas diferenciais que não exibissem comportamento caótico. Com essa generalização, pretendia-se estudar, sob a perspectiva da não caoticidade, sistemas que não poderiam ser abordados pela versão original do Teorema 2.2. Um exemplo é o sistema conservativo proposto por [5], dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^2 - z^2, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= y, \end{aligned} \tag{3.2}$$

que ainda não possui uma resposta conclusiva quanto à sua possível natureza caótica.

Por fim, o resultado apresentado como uma resposta parcial para a conjectura de Sproot e Zeraoulia [21] mostrou-se eficaz e aplicável. Nesse contexto, pretendia-se aprimorar esse resultado por meio da generalização do Teorema 2.2, buscando, eventualmente, contribuir para uma resposta mais abrangente acerca dessa conjectura.

3.3 Tema 3: Integrabilidade de sistemas diferenciais polinomiais e superfícies algébricas invariantes

Outro tema previsto para desenvolvimento durante o período de pós-doutorado consistiu no estudo da Teoria de Integrabilidade de Darboux. Conforme mencionado no Cappítulo 2, essa teoria estabelece uma conexão fundamental entre a integrabilidade de sistemas diferenciais polinomiais e a existência de superfícies algébricas invariantes. Nesse contexto, pretendia-se desenvolver resultados no âmbito da Teoria de Integrabilidade de Darboux. A classificação dessas superfícies, dos invariantes, das integrais primeiras racionais e da integrabilidade de um sistema diferencial específico constitui um problema algébrico que envolve a resolução de equações diferenciais parciais decorrentes da definição das superfícies algébricas invariantes.

Considere o seguinte sistema diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y,z), \\ \dot{y} &= Q(x,y,z), \\ \dot{z} &= R(x,y,z), \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $P, Q, R \in \mathbb{K}[x,y,z]$ onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e o ponto denota a derivada das variáveis x, y e z em relação a variável independente t, geralmente chamada de *tempo*.

Relembramos que, conforme observado na Definição 2.3, um *invariante* do sistema diferencial (3.3) em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$ é uma função analítica não localmente constante H nas variáveis x, y, z e t, tal que H permanece constante ao longo das curvas solução $(x(t), y(t), z(t))$ do sistema diferencial (2.1) contidas em U. Isto é, temos que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q + \frac{\partial H}{\partial z}R + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

sobre as órbitas de X que estão contidas em U.

Definição 3.1. *A função $H(x,y,z)$ é chamada de função algébrica, se ela satisfaz a seguinte equação algébrica*

$$f_0 + f_1 H + f_2 H^2 + \ldots + f_{n-1} H^{n-1} + H^n = 0 \tag{3.4}$$

onde $f_i(x,y,z), i = 0, 1, \ldots, n-1$ são funções racionais, e n é o menor inteiro possível para o qual vale esta relação.

Definição 3.2. *Se a integral primeira H é polinomial (resp. uma função racional ou uma função algébrica), então dizemos que H é uma integral primeira polinomial (resp. uma integral primeira racional ou uma integral primeira algébrica).*

Definição 3.3. *Sejam $H_1(x,y,z)$ e $H_2(x,y,z)$ duas integrais primeiras do sistema* (3.3)*. Dizemos que H_1 e H_2 são independentes se seus gradientes são vetores linearmente independentes para todos os pontos de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ exceto um conjunto de medida nula.*

Definição 3.4. *Quando o sistema diferencial* (3.3) *possui duas integrais primeiras H_1 e H_2 independentes, dizemos que ele é integrável.*

Ressaltamos que a integrabilidade de um sistema diferencial implica que seu espaço de fase pode ser completamente descrito.

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os polinômios de Darboux para o sistema* (3.3)*. Dizemos que $\mathcal{T}$ é um subconjunto minimal de $\mathcal{S}$, se todo elemento de $\mathcal{S}$ é escrito como um produto finito de elementos de $\mathcal{T}$, e uma soma finita de elementos de $\mathcal{T}$ com o mesmo cofator. Além disso, chamamos cada elemento de $\mathcal{T}$ um gerador de $\mathcal{S}$.*

Conforme a Definição 3.5, os geradores de um conjunto de polinômios de Darboux de um sistema são polinômios de Darboux irredutíveis. Ademais, o método das curvas características para a solução de equações diferenciais será aplicado neste projeto. A seguir, apresentamos alguns resultados essenciais da teoria, para mais informações, ver [2] e [10].

Considere a seguinte equação diferencial parcial de primeira ordem

$$a_1(x,y,z)A_x + a_2(x,y,z)A_y + a_3(x,y,z)A_z + a_0(x,y,z)A = f(x,y,z), \tag{3.5}$$

onde $A = A(x,y,z), a_i, i = 0,1,2,3$ e f são aplicações $\mathcal{C}^1$.

Definição 3.6. *A curva $\Gamma : (x(t), y(t), z(t))$ no espaço xyz é chamada curva característica da equação* (3.5)*, se o vetor $(a_1(x_0,y_0,z_0), a_2(x_0,y_0,z_0), a_3(x_0,y_0,z_0))^T$ é tangente a Γ para todo ponto $(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma$.*

De acordo com a Definição 3.6, a curva característica é uma solução do sistema:

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x_0,y_0,z_0), \quad \frac{dy}{dt} = a_2(x_0,y_0,z_0), \quad \frac{dz}{dt} = a_3(x_0,y_0,z_0).$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir localmente que $a_1(x,y,z) \neq 0$. Assim, o sistema diferencial acima pode ser reduzido ao sistema característico:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a_2(x_0,y_0,z_0)}{a_1(x_0,y_0,z_0)}, \frac{dz}{dt} = \frac{a_3(x_0,y_0,z_0)}{a_1(x_0,y_0,z_0)}. \tag{3.6}$$

Suponha que $g(x,y,z) = c_1$ e $h(x,y,z) = c_2$ constituam uma solução da equação (3.6) na forma implícita, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Ao realizar a mudança de coordenadas dada por

$$u = x, \quad v = g(x,y,z), \quad w = h(x,u,z),$$

obtemos

$$x = u, \quad y = p(u,v,w), \quad z = q(u,v,w).$$

Dessa forma, ao fixar v e w, a equação diferencial parcial (3.5) se transforma na seguinte equação diferencial ordinária em relação à variável u:

$$\overline{a_1}(u,v,w)\overline{A_u} + \overline{a_0}(u,v,w)\overline{A} = \overline{f}(u,v,w) \tag{3.7}$$

onde $\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{A}$ e $\overline{f}$ correspondem a a_0, a_1, A e f, expressas em termos de u, v e w. Se $\overline{A} = \overline{A}(u,v,w)$ é uma solução da equação (3.7), então, por meio da mudança de variável, temos que

$$A(x,y,z) = \overline{A}(x, g(x,y,z), h(x,y,z)),$$

que, por sua vez, constitui uma solução da equação diferencial parcial (3.5). Além disso, podemos derivar a solução geral de (3.5) a partir da solução geral de (3.7). Por fim, apresentamos o conceito de *polinômio com peso*, veja [20].

Definição 3.7. *Definimos o peso de um monômio $Cx^\lambda y^\mu z^\nu$ como sendo $\lambda+2\mu+2\nu$. Além disso, o peso de um polinômio não nulo é o maior dos pesos de seus monômios.*

Dado um polinômio f e um inteiro $n \leq 0$ denotamos como $W_n f$ a soma dos monômios de f tendo peso igual a n.

Definição 3.8. *Dizemos que um polinômio é homogêneo de peso n se $W_n f = f$.*

Capítulo 4

Resultados Obtidos

Os resultados alcançados durante o período de pós-doutorado são apresentados de acordo com cada uma das linhas de pesquisa propostas no projeto inicial. Conforme descrito no Capítulo 3, o projeto foi estruturado em três temas principais, cada um abordando diferentes aspectos da teoria qualitativa de sistemas diferenciais polinomiais. Os Temas 1 e 2 resultaram na obtenção de novos resultados científicos, enquanto o Tema 3 concentrou-se no aprofundamento teórico e na consolidação de uma nova linha de investigação, cujos desdobramentos permanecem em desenvolvimento.

4.1 Resultados referentes ao Tema 1

O primeiro tema teve como objetivo investigar novas classes de sistemas diferenciais polinomiais que não apresentam comportamento caótico, ampliando a aplicabilidade dos resultados obtidos anteriormente para sistemas mais gerais.

Durante o desenvolvimento desta linha de pesquisa foram investigadas novas famílias de sistemas diferenciais tridimensionais sob a perspectiva da teoria qualitativa, buscando estabelecer condições suficientes para a inexistência de comportamento caótico. A pesquisa envolveu a análise de singularidades, superfícies algébricas invariantes, cofatores associados e propriedades globais das órbitas, permitindo a obtenção de novos resultados matemáticos.

Os resultados obtidos encontram-se atualmente organizados em um manuscrito científico em fase final de redação, no qual são apresentados os principais resultados desta pesquisa, incluindo uma generalização do sistema de Nosé?Hoover. A submissão do

manuscrito a um periódico científico internacional será realizada em breve.

4.2 Resultados referentes ao Tema 2

O segundo tema concentrou-se na generalização dos resultados de não caoticidade por meio da Teoria de Integrabilidade de Darboux, buscando ampliar as hipóteses do Teorema 2.2 para sistemas diferenciais com superfícies algébricas invariantes associadas a cofatores não constantes.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa foram obtidos novos resultados teóricos envolvendo critérios de não caoticidade para sistemas diferenciais polinomiais mais gerais, permitindo estender significativamente o alcance dos resultados anteriormente conhecidos.

As técnicas desenvolvidas basearam-se na Teoria de Integrabilidade de Darboux, na caracterização de superfícies algébricas invariantes e na análise das propriedades dos cofatores associados a essas superfícies.

Os resultados obtidos nesta etapa deram origem a um artigo científico intitulado: *"Algebraic criterion to determine nonchaotic behavior in 3D polynomial differential systems"* (ver Anexo), publicado em um periódico internacional de reconhecida relevância na área de Sistemas Dinâmicos, *Qualitative Theory of Dynamical Systems.* Essa publicação consolida as principais contribuições desenvolvidas ao longo desta etapa do projeto e representa um dos principais produtos científicos decorrentes do pós-doutorado.

4.3 Resultados referentes ao Tema 3

O terceiro tema foi dedicado ao aprofundamento da Teoria de Integrabilidade de Darboux, com ênfase no estudo de superfícies algébricas invariantes, polinômios de Darboux, integrais primeiras e métodos associados à resolução de equações diferenciais parciais por meio das curvas características.

Durante o período de pós-doutorado foi realizado um estudo sistemático da literatura especializada, permitindo consolidar a fundamentação teórica necessária para o prosseguimento dessa linha de pesquisa. Em particular, foram analisados resultados clássicos relacionados à existência de integrais primeiras, critérios de integrabilidade e métodos para determinação de superfícies algébricas invariantes em sistemas diferenciais polinomiais.

Embora esta linha de investigação ainda não tenha resultado, durante o período abrangido por este relatório, em publicações científicas decorrentes de resultados originais, o estudo desenvolvido permitiu identificar novos problemas de pesquisa e consolidar as bases matemáticas necessárias para investigações futuras. Os conhecimentos adquiridos nessa etapa já vêm sendo empregados no desenvolvimento de novas pesquisas e deverão resultar, futuramente, em trabalhos científicos.

Capítulo 5

Formação de Recursos Humanos

Durante o período de pós-doutorado também foram desenvolvidas atividades voltadas à formação de recursos humanos, por meio da coorientação de trabalhos acadêmicos e da participação em banca examinadora de pós-graduação.

5.1 Coorientação de Iniciação Científica/PIBIC

Durante o período de pós-doutorado foi realizada a coorientação da aluna Marina Cardoso dos Santos Martins, discente do curso de graduação em Matemática da FCT/UNESP de Presidente Prudente, onde a mesma se encontra sob orientação do professor Doutor Marcelo Messias. A coorientação envolveu o acompanhamento das atividades de pesquisa, discussões científicas e a elaboração do relatório final de Iniciação Científica/PIBIC, intitulado: *" Modelagem Matemática e Análise de Fenômenos Físicos e Biológicos com Equações Diferenciais Ordinárias".*

A colaboração também resultou na elaboração e aprovação de um trabalho, em coautoria, para apresentação no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), intitulado: *"Dinâmica de Competição entre Espécies: Uma Análise Qualitativa via Equações Diferenciais"*, cuja apresentação está prevista para setembro deste ano.

5.2 Coorientação de Mestrado

Durante o período de pós-doutorado também foi realizada a coorientação da aluna Elva Karina Mayhua Quispe, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (FCT/UNESP), Campus de Presidente Prudente, onde a mesma se encontra sob orientação do professor Doutor Murilo Rodolfo Candido. As atividades de coorientação compreenderam o acompanhamento do desenvolvimento de seu projeto de pesquisa, a realização de discussões científicas e a orientação na elaboração do Estudo Dirigido, etapa fundamental para a consolidação da fundamentação teórica e para o desenvolvimento da dissertação de mestrado intitulada: *"Detecção de Múltiplos Conjuntos Invariantes Compactos no Sistema Jerk Cúbico",* cuja defesa está prevista para o ano de 2027.

5.3 Atuação em Banca Examinadora e Avaliação Científica

Durante o período de vigência do pós-doutorado, atuou-se como membro da banca de qualificação de mestrado do discente Joel Alejandro Chavez Albuquerque, vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (FCT/UNESP), Campus de Presidente Prudente, sob orientação do professor Doutor Murilo Rodolfo Candido.

A atuação compreendeu a avaliação e a discussão científica da dissertação intitulada Métodos Topológicos Aplicados à Análise: Uma Abordagem para a Existência de Soluções Periódicas em Equações Diferenciais Não Suaves, cuja defesa de mestrado foi realizada no primeiro semestre de 2026.

Além dessa atividade, também foi realizada a avaliação de trabalhos científicos apresentados no XXXVII Congresso de Iniciação Científica da UNESP - CIC, contribuindo para o processo de avaliação da produção científica de estudantes de graduação da Universidade Estadual Paulista.

Capítulo 6

Divulgação Científica e Apresentação de Trabalhos

A divulgação dos resultados científicos obtidos durante o período de pós-doutorado constituiu parte integrante das atividades desenvolvidas ao longo do projeto, por meio da apresentação de trabalhos em eventos científicos da área de Sistemas Dinâmicos. Essas participações possibilitaram a disseminação dos resultados alcançados, bem como o intercâmbio científico com pesquisadores e estudantes de diferentes instituições.

Nesse período foi realizada a apresentação do trabalho:

- **Dynamics and bifurcations of a generalized Nosé-Hoover oscillator with invariant algebraic surfaces,** apresentado na modalidade pôster durante o **XIV Workshop on Dynamical Systems,** realizado em Presidente Prudente/SP, no ano de 2025.

Além disso, foi aprovado para apresentação o trabalho:

- **Hopf Bifurcation on an Invariant Algebraic Surface of a Generalized Nosé-Hoover Oscillator,** na modalidade pôster, durante o **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC),** a ser realizado na Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP, Campus de Presidente Prudente/SP, com apresentação prevista para setembro de 2026.

Capítulo 7

Perspectivas Futuras

As atividades desenvolvidas durante o período de pós-doutorado permitiram consolidar e ampliar as investigações relacionadas ao estudo de sistemas diferenciais não caóticos, principal linha de pesquisa abordada neste projeto. Os resultados obtidos, bem como as questões que permaneceram em aberto, evidenciam a existência de diversas possibilidades de continuidade das pesquisas desenvolvidas.

Entre as perspectivas futuras destacam-se o aprofundamento do estudo de sistemas diferenciais polinomiais admitindo superfícies algébricas invariantes, a obtenção de novas condições suficientes para a caracterização da não caoticidade em sistemas dinâmicos e a investigação de fenômenos de bifurcação em modelos que preservem estruturas invariantes. Pretende-se, ainda, ampliar os estudos relacionados à Teoria de Integrabilidade de Darboux, buscando estabelecer novas conexões entre integrabilidade, superfícies algébricas invariantes e a dinâmica global de sistemas diferenciais.

As pesquisas desenvolvidas ao longo deste projeto também constituem uma base para o estabelecimento de novas colaborações científicas e para o desenvolvimento de projetos futuros, contribuindo para a continuidade das investigações na área de Sistemas Dinâmicos. Além disso, pretende-se dar prosseguimento à divulgação dos resultados obtidos por meio da publicação de artigos científicos em periódicos especializados e da apresentação de trabalhos em eventos científicos nacionais e internacionais.

Capítulo 8

Conclusões Finais

O desenvolvimento deste projeto de pós-doutorado possibilitou a realização de investigações voltadas ao estudo de sistemas diferenciais não caóticos, com ênfase na análise qualitativa de sistemas dinâmicos, na utilização de superfícies algébricas invariantes e na investigação de fenômenos de bifurcação. As atividades desenvolvidas contribuíram para o aprofundamento do conhecimento teórico na área e para a obtenção de resultados científicos relevantes, em consonância com os objetivos propostos no projeto de pesquisa.

Os resultados alcançados contemplaram a obtenção de novas contribuições científicas, materializadas em publicações, manuscritos científicos e apresentações de trabalhos em eventos especializados, além da consolidação de novas linhas de investigação relacionadas à caracterização de sistemas diferenciais não caóticos. Paralelamente, o aprofundamento dos estudos sobre a Teoria de Integrabilidade de Darboux proporcionou uma base teórica consistente para o desenvolvimento de pesquisas futuras, ampliando as possibilidades de investigação nessa linha de pesquisa.

O período de pós-doutorado também possibilitou a participação em atividades de formação de recursos humanos e de avaliação científica, por meio da coorientação de estudantes de graduação e pós-graduação, da participação em banca examinadora, da avaliação de trabalhos científicos e da divulgação dos resultados obtidos em eventos acadêmicos. Essas atividades contribuíram para o fortalecimento das ações de ensino, pesquisa e formação científica vinculadas ao grupo de pesquisa de Sistemas Dinâmicos FCT/UNESP.

Em síntese, considera-se que o projeto alcançou de forma satisfatória os objetivos estabelecidos, produzindo resultados científicos relevantes e consolidando bases teóricas

para a continuidade das investigações relacionadas aos sistemas diferenciais não caóticos e à teoria qualitativa das equações diferenciais.

Referências Bibliográficas

[1] Arecchi, F. **Chaos and generalized multistability in quantum optics.** *Physica Scripta*, 1985(T9):85, 1985.

[2] Bleecker, D. and Csordas, G. **Basic partial differential equations.** *CRC Press*, 1992.

[3] Chen, G. and Ueta, T. **Yet another chaotic attractor.** *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **9**:1465–1466, 1999.

[4] Dumortier, F., Llibre, J., and Artés, J.C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems.** *Springer-Verlag*, New York.

[5] Heidel, J. and Zhang, F. **Nonchaotic behavior in three-dimensional quadratic systems II: The conservative case.** *Nonlinearity* **12**:617–633.

[6] Heidel, J. and Zhang, F. **Nonchaotic and chaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems: Five–one conservative cases.** *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **17**:2049–2072.

[7] Hoover, W. G. **Canonical dynamics: Equilibrium phase-space distributions.** *Phys. Rev. A*, **31**.

[8] Liu, L., et al. **Identifying weak foci and centers in the Maxwell-Bloch system.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **430**(1):549–571, 2015.

[9] Llibre, J., Messias, M., and da Silva, P.R. **On the global dynamics of the Rabinovich system.** *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 275210, 21p.

[10] Llibre, J. and Zhang, X. **Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system.** *Journal of Mathematical Physics* **43**(3):1622?1645, 2002.

[11] Llibre, J. and Zhang, X. **Darboux theory of integrability in $\mathbb{C}^n$ taking into account the multiplicity.** *J. Diff. Eqn.* **246**, 541–551.

[12] Llibre, J. and Zhang, X. **On the Darboux integrability of polynomial differential systems.** *Qualit. Th. Dyn. Sys.* **11**, 129–144.

[13] Llibre, J. and Zhang, X. **Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system.** *Journal of Mathematical Physics* **43**(3):1622?1645, 2002.

[14] Lorenz, E.N. **Deterministic nonperiodic flow.** *J. Atmos. Sci.* **20**:130–141.

[15] Malasoma, J.-M. **Non-chaotic behavior for a class of quadratic jerk equations.** *Chaos, Solitons Fractals* **39**:533–539.

[16] Messias, M. and Silva, R. P. **Nonchaotic Behavior in Quadratic Three-Dimensional Differential Systems with a Symmetric Jacobian Matrix.** *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **28**, 1830006.

[17] Messias, M. and Silva, R. P. **Determination of nonchaotic behavior for some classes of polynomial jerk equations.** *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **30**, 2050117, 12p.

[18] Messias, M. and Silva, R. P. **Nonchaotic Behavior and Transition to Chaos in Lorenz-like Systems Having Invariant Algebraic Surfaces.** *Chaos Theory and Applications*, **4**(1), 26-36.

[19] Sander, E. and Yorke, J. A. **The Many Facets of Chaos.** *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **25**, 1530011.

[20] Swinnerton-Dyer, S. P. **The invariant algebraic surfaces of the Lorenz system.** In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 132, pages 385-393. Cambridge University Press, 2002.

[21] Zeraoulia, E. and Sprott, J. C. **A conjecture that three-dimensional quadratic continuous-time systems with a symmetric Jacobian matrix are not chaotic.** *Preprint.*

[22] Zhang, F. and Heidel, J. **Nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems.** *Nonlinearity* **10**:1289–1303.

[23] Zhang, F. and Heidel, J. **Chaotic and nonchaotic behaviour in three-dimensional quadratic systems: 5-1 dissipative cases.** *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **22**, 1250010.

[24] Yang, X. S. **On non-chaotic behavior of a class of jerk systems.** *Far East J. Dyn. Syst.* **4**:27–38.

[25] Yang, X. S. and Chen, G. **Non-chaotic behavior in a class of continuous dynamical systems.** *Far East J. Dyn. Syst.* **4**:87–95.